



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“Aspectos cuánticos de la radiación
de cargas aceleradas”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

IGOR PEÑA IBARRA

DIRECTOR DE TESIS : DR. DANIEL SUDARSKY SAIONZ

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. ALEJANDRO CORICHI RODRÍGUEZ-GIL



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Prefacio	I
Introducción	v
1. Principio de Equivalencia y radiación de cargas aceleradas	1
1.1. Radiación de cargas aceleradas	5
1.1.1. La ecuación de Lorentz-Dirac	10
1.2. Cargas aceleradas y el Principio de Equivalencia	12
1.2.1. El espacio-tiempo de Rindler	12
1.2.2. Campo asociado a una carga uniformemente acelerada	15
2. El campo cuántico para observadores acelerados	21
2.1. <i>QFT</i> en espacios curvos	22
2.1.1. Teoría cuántica de campos en espacio-tiempos estacionarios	27
2.2. Cuantización con respecto a observadores acelerados	29
2.2.1. Modos de “boost” y de Unruh	32
2.2.2. Relación entre operadores de Unruh y de Minkowski .	37
2.2.3. Comentarios sobre la cuantización de Unruh	39
2.3. El Efecto Unruh	41
2.4. Detectores acelerados	43
2.4.1. Interacción con un detector de dos niveles	44
2.4.2. Cambios en el valor de expectación de la energía . . .	47

3. Aspectos globales del estado de radiación	50
3.1. Radiación en la cuña R	51
3.1.1. ¿Una nueva paradoja?	56
3.2. Información en el enredamiento del estado	58
3.2.1. Operador de densidad	58
3.2.2. Enredamiento y caracterización de estados puros no separables	60
3.2.3. Enredamiento en la descripción cuántica de Unruh: El operador de enredamiento y el estado de vacío	63
3.3. Cambios en la matriz de densidad	66
3.3.1. Interacción con una fuente escalar acelerada y el tensor de energía-momento	66
3.3.2. Cambios en el valor de la función de dos puntos cuando la fuente tiene soporte totalmente contenido en R	70
3.3.3. Cambios en la función de dos puntos en las cuñas R y F por una carga uniformemente acelerada	73
3.3.4. Cálculo de la contribución al cambio de la función de dos puntos	77
3.3.5. Cambios en la función de dos puntos en términos de un observador inercial	82
3.4. Interferencia entre cuñas	84
3.5. Discusión	87
4. Conclusiones	91
A. Representaciones de los modos de Unruh	93
A.1. Representaciones sobre las diferentes cuñas de Rindler	93
A.2. Modos de Unruh en los horizontes	95
B. Cambios en términos de valores de expectación	99

Prefacio

Durante el largo tiempo que duró la elaboración de este trabajo ocurrieron tantas cosas en mi vida que ahora que quiero escribir de ellas me cuesta trabajo ordenarlas. Realizar una tesis implica experiencias académicas, por supuesto, pero también muchas otras que tienen que ver con la interacción humana y que, al menos en mi caso, siempre estuvieron entrelazadas entre sí de alguna u otra forma. Mi trabajo académico modulaba mis relaciones personales y viceversa.

Todo comenzó, después de un fallido intento de empezar un doctorado en ondas gravitacionales, en el cubículo de mi asesor y él hablándome de campos cuánticos, el Efecto Unruh y cargas aceleradas. Toda la física que yo había hecho hasta ese momento era gravitación clásica y después de escuchar todo eso caí fácilmente en la tentación de estudiar aspectos cuánticos de la gravedad. En ese momento el tema me pareció muy interesante pero no tenía idea de cuán profundo podía llegar a ser. Había muchas sutilezas, y al poco tiempo de haber empezado, decidí salirme del camino trazado para intentar resolver una de las más complicadas, el asunto de la extensión formal de la cuantización de Unruh a la cuantización con respecto a observadores inerciales. No obtuve ningún resultado significativo en ese sentido y sólo se tensaron las relaciones entre el posgrado, mi asesor y yo. Finalmente regresé al camino propuesto y descubrí que era suficientemente interesante y con mucho más contenido físico; corresponde a los métodos y resultados que presento en el último capítulo de esta tesis. Esta experiencia es la lección que más aprecio de mi trabajo en el doctorado, eventualmente entendí que para atacar un problema grande hay que dar pasos pequeños pero firmes, cada uno con su propio sustento físico.

Son muchas las personas que me apoyaron directa o indirectamente para

la realización de esta tesis, a todas ellas les agradezco profundamente. Especialmente a mi familia, padre, madre, hermana y sobrina, quienes siempre estuvieron ahí incondicionalmente. Quiero hacer una mención especial a mi asesor, el Dr. Daniel Sudarsky, por la enorme paciencia que me tuvo durante todo este tiempo y por impulsarme, después de que la investigación estuvo acabada, a terminar de escribir esta tesis.

También le agradezco a mis amigos y compañeros entrañables Pilar y Luis, a ella por haber leído y corregido el estilo a la introducción, y a él, por la serie de geniales dibujos que hizo para un póster que presenté sobre este tema. Siempre que tengo que presentar algo sobre mi trabajo intento usarlos y la tesis no podía ser la excepción.

Igor Peña Ibarra

Ciudad de México, 7 de noviembre de 2007.

Introducción

El Principio de Equivalencia postula, en pocas palabras, que todos los objetos caerán con la misma aceleración cuando están bajo la influencia de un campo gravitacional. Suponer la validez de este principio permite identificar a los sistemas de referencia en caída libre como sistemas inerciales, lo que hace del Principio de Equivalencia (PE) una pieza fundamental de las teorías actuales sobre la gravitación. En particular, de la Teoría de la Relatividad General, cuyas implicaciones teóricas como la existencia de agujeros negros, las ondas gravitacionales o el origen del universo como una ‘gran explosión’ han podido ser, de una u otra otra manera, verificadas observacionalmente, lo que le hace gozar de una gran aceptación. Inclusive, esta teoría ya ha tenido aplicaciones directas a la tecnología mediante la aportación de correcciones de tiempo por efectos gravitacionales a los sistemas de posicionamiento global (GPS).

Los límites de aplicabilidad de la Relatividad General están relacionados con los del PE, por lo que resulta relevante el análisis cuidadoso de cómo se aplica este principio en diferentes situaciones físicas. Por un lado, se ha verificado experimentalmente su validez hasta una precisión de 10^{-13} usando para esto objetos masivos sin carga [45], pero además de someterse a pruebas experimentales cada vez más precisas, este principio ha estado bajo un continuo escrutinio teórico. En efecto, desde antes de que el PE fuera postulado como tal por Einstein, surgieron objeciones acerca de su compatibilidad con el hecho de que partículas con carga que se aceleran emiten radiación. Una partícula cargada en caída libre emite radiación con respecto a un observador estático en la superficie de la Tierra, pues se acelera con respecto a éste. Por la misma razón, un observador que cae libremente junto con la carga no vería radiación, pues para él la carga está estática, aunque ¡la

carga se está acelerando y emitiendo radiación para el observador estático! ¿Pueden ser compatibles estas dos situaciones? De aquí se puede ver que la radiación de cargas aceleradas acarrea, al menos, problemas potenciales de interpretación.

Consideremos ahora la situación en que se tiene a la partícula cargada en reposo y un observador estático, ambos en la superficie de la Tierra. Por el PE, esta situación sería equivalente a que ambos, carga y observador se estén acelerando uniformemente en ausencia de gravedad. En este caso, la carga emitiría radiación por estarse acelerando y por lo tanto, asumiendo como válido el PE, ¿una carga en reposo sobre la superficie de la Tierra emitiría radiación! Esta ‘paradoja’ ha sido estudiada con profundidad y se ha visto que no existe contradicción entre la electrodinámica clásica y el PE; la radiación es un fenómeno dependiente del observador y si se analiza con cuidado, la radiación sí está presente en la descripción que hace el sistema de referencia que cae con la carga, aunque se manifiesta en una región del espacio-tiempo que *no le es accesible*.

Esta explicación es el punto de partida de este trabajo. La comprensión del fenómeno de radiación de una partícula cargada acelerándose uniformemente y su descripción por parte de observadores que se aceleran junto con ella, están basadas en la estructura que esta familia de observadores le asocia al espacio-tiempo. Las líneas de mundo de estos observadores son una familia de hipérbolas que comparten como asíntotas a las hipersuperficies $t = \pm z$. Estas hipersuperficies dividen al espacio-tiempo en cuatro regiones llamadas *cuñas de Rindler* y el comportamiento del campo generado por la carga acelerada es muy diferente en cada una de estas cuñas. A la familia de observadores que se coaceleran con la carga, y que sólo tienen acceso a la cuña donde la carga se acelera, se le conoce como ‘observadores de Rindler’. En este trabajo explicamos detalladamente las aparentes paradojas que han surgido entre el Principio de Equivalencia y la radiación de cargas aceleradas desde el punto de vista clásico. También desarrollamos los cálculos clásicos que aclaran cómo no existe ninguna contradicción, en particular, cómo es que la radiación se va a una cuña de Rindler a la cual los observadores acelerados no tienen acceso.

Como sucede en este tipo de situaciones, una explicación razonable a un fenómeno trae consigo nuevas interrogantes, especialmente, si se le conside-

ra desde otro punto de vista. La descripción cuántica del mismo fenómeno se da en términos de la emisión de fotones más que en el comportamiento de los campos de radiación. En esta descripción aparece un fenómeno adicional al que no se le puede asociar un análogo clásico: si el estado del campo cuántico con respecto a observadores inerciales es el vacío entonces, los observadores acelerados lo describirán como el estado asociado a un baño térmico de partículas con una temperatura proporcional a la aceleración que define a esta familia de observadores. Este es el llamado *efecto Unruh* y es una consecuencia de que el contenido de partículas del campo depende de los vectores de traslación temporal asociados a cada observador. Éstos son diferentes para observadores inerciales y acelerados.

Aunque el contenido de partículas en el estado del campo depende de la familia de observadores que lo describe, las descripciones de procesos físicos de ambos conjuntos de observadores deben admitir interpretaciones equivalentes. Un trabajo previo que aporta una referencia acerca de esta equivalencia, analiza el comportamiento de un detector cuántico en aceleración uniforme cuando el campo está en su estado de vacío [39]. El proceso mediante el cual el detector absorbe una partícula del baño, descrito por un observador (acelerado) comóvil, es equivalente a la emisión de una partícula inercial por parte del detector hacia el estado de vacío en la descripción que haría un observador inercial [39]. Volviendo al caso de la partícula cargada en aceleración uniforme, desde el punto de vista de un observador inercial, ésta emite partículas mientras que, desde el punto de vista de observadores acelerados, la carga va a emitir y absorber partículas hacia y desde el baño térmico. De hecho, se ha probado que en el análisis estándar del Bremsstrahlung hay una coincidencia entre las tasas de emisión de fotones que predicen las descripciones inercial y acelerada [20]. La restricción de este efecto a la cuña accesible a los observadores acelerados, que llamaremos R , ha sido analizada en la referencia [20], donde se muestra que la tasa de emisión de fotones con momento transversal fijo en el marco inercial coincide con la tasa combinada de emisión y absorción de fotones de Rindler de energía cero y mismo momento transversal en el marco acelerado.

Este resultado, que por un lado aporta una idea clara acerca de la equivalencia física entre ambas descripciones, es también una fuente potencial de confusión con respecto al estado cuántico asociado a la radiación en la descripción acelerada. El cálculo mencionado anteriormente hace un impor-

tante uso de los llamados modos de Rindler de energía cero, pues, para los observadores acelerados, la carga es estática y, por lo tanto, sólo se puede acoplar a los modos de frecuencia cero con respecto al tiempo de Rindler. Debido a ésto en los cálculos que involucran partículas con energía cero aparecen expresiones de la forma $0 \times \infty$ que deben de ser regularizadas. Para lo cual es necesario introducir una frecuencia de oscilación pequeña ϑ en la fuente que permite trabajar con modos de energía diferente de cero y al final del cálculo se toma el límite cuando esta frecuencia ϑ va a cero. En el trabajo al que nos referimos, los autores consideran también la pregunta de si un observador acelerado vería alguna diferencia en el baño térmico por la emisión y absorción de fotones de Rindler. En particular, los autores de este trabajo se percatan de que en el límite de energía cero las tasas de transición de un estado de n fotones al estado de $n + 1$ fotones y la tasa del proceso inverso se hacen iguales, por lo que el efecto de la carga acelerada sobre el baño térmico es nulo. Aunque la partícula cargada se describe clásicamente y por tanto no tiene grados de libertad internos, este hecho se puede interpretar como que la carga y el campo están en *equilibrio térmico*, en el sentido de que todo lo que uno emite es absorbido por el otro. Entonces, desde el punto de vista de un observador acelerado, en la cuña R no hay diferencia entre el estado inicial del campo –el estado térmico inicial– y el estado generado por la interacción con la carga acelerada (nótese que este comportamiento es análogo al del caso clásico descrito arriba).

Similarmente, en la cuña de Rindler L (la opuesta a R) el estado del campo permanecerá en el estado térmico inicial puesto que esta región no tiene manera alguna de ser influenciada por lo que ocurre en otra región causalmente desconectada de ella. Sin embargo, en la cuña F (ver la figura 1.1) debe haber un cambio detectable en el estado del campo y, en particular, el valor de expectación del tensor de energía-momento en esta región debe ser diferente al valor que tendría si no hubiera habido ninguna interacción con el campo. En efecto, este cambio en el valor de expectación se puede calcular directamente en la cuantización estándar del campo –en ondas planas– y correspondería al del estado final que contiene a los fotones de Minkowski emitidos por la carga acelerada.

A la descripción cuántica del campo que hacen los observadores acelerados se le conoce como ‘cuantización de Unruh’. En este esquema se cuantiza al campo de tal manera que cuando se le restringe a la cuña accesible a los

observadores acelerados, la cuña R , y a la cuña opuesta, L , las partículas del campo corresponden a superposiciones de modos con energía de Rindler definida. Los estados del campo fuera de la región $L \cup R$ se describen como estados compuestos de las restricciones a las cuñas L y R . Así, por lo que hemos visto, la restricción a las cuñas L y R del estado de vacío de Minkowski y del estado resultante de la interacción con la carga son, en ambos casos, el mismo baño térmico, por lo que parece que ninguna de estas restricciones podría contener la información acerca del cambio en la cuña F , que es en donde se deben poder observar los efectos de la radiación. El punto es, entonces, si esta situación puede ser analizada en el lenguaje de los observadores acelerados y cómo, si éste es el caso, la información acerca del cambio físico en la cuña F se codifica en el estado del campo.

Para este análisis, resulta conveniente expresar a los estados en términos de sus operadores de densidad, $\hat{\rho}$. En la cuantización de Unruh los estados se describen como estados compuestos de estados del campo restringido a las cuñas L y R , y la física en cada subsistema se describe en términos de los operadores de densidad restringidos, $\hat{\rho}_L$, $\hat{\rho}_R$. Como explicaremos en el capítulo 3, si un observable \hat{A} del campo está localizado en L o en R , entonces su valor de expectación está determinado completamente por $\hat{\rho}_L$ o $\hat{\rho}_R$ respectivamente. En cambio, si \hat{A} está localizado fuera de la doble cuña entonces su valor de expectación no estaría, en general, determinado nada más por información codificada en $\hat{\rho}_L$ o $\hat{\rho}_R$. En este caso, debería existir algún objeto que contenga esta información extra en el estado y que controle cómo es que las partes izquierda y derechas del estado se combinan. Este elemento extra es el necesario para describir por completo los estados en todo el espacio-tiempo de Minkowski.

Llamamos a tal objeto la *matriz de enredamiento*. Para el caso del cambio del estado en la cuña F debido a la interacción con la carga uniformemente acelerada, parece natural esperar que la información de este cambio esté codificada en la matriz de enredamiento del estado. En la parte final de esta tesis, investigamos cómo aparece la información contenida en la ‘matriz de enredamiento’ en el valor de expectación del tensor de energía-momento en la cuña F para el caso de interés.

Con respecto a la base teórica en la que se fundamenta este trabajo, debemos mencionar que la *extensión* de la cuantización de Unruh fuera de

doble cuña es un asunto con “bastantes sutilezas”. Lo que está bien establecido hasta ahora en la literatura es la restricción de estados globales a la doble cuña. Por ejemplo, la restricción de los estados a la cuña R se interpreta como el estado que verían observadores acelerados pero, hasta donde sabemos, la extensión de un estado en la cuantización de Unruh a todo el espacio-tiempo de Minkowski no ha sido estudiada por completo. Una observación importante a este respecto es que los modos de Unruh son altamente singulares en las asíntotas que se hacen coincidir con el horizonte en la construcción particular de las coordenadas de Rindler. De aquí que los datos iniciales con los que se construye el espacio de Hilbert de una partícula en la cuantización de Unruh tienen restricciones en estas asíntotas que pueden influir en las soluciones de la ecuación del campo en las cuñas F y P [15], [28] (ver la figura 1.1) Como hemos explicado, en este trabajo extendemos la descripción cuántica de Unruh para analizar cuestiones acerca de la física en la cuña F . Hacemos esto de la manera que consideramos más natural y encontramos resultados físicamente consistentes y que coinciden con lo que se obtendría de hacer el análisis en la cuantización estándar de ondas planas en el espacio-tiempo de Minkowski, como se muestra explícitamente en la sección 3.3.5.

Esta tesis está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 explicamos las aparentes contradicciones entre el Principio de Equivalencia y la radiación de cargas aceleradas y presentamos algunos resultados de utilidad, como la fórmula de Larmor, la Ecuación de Lorentz Dirac y el tensor $F_{\alpha\beta}$ asociado al campo clásico generado por una carga uniformemente acelerada desde el punto de vista de observadores acelerados. Esto con la finalidad de argumentar la inexistencia de las contradicciones que describíamos al inicio. Se introducen también las coordenadas asociadas a la familia de observadores de Rindler, mismas que se usarán en el resto del trabajo. A partir del capítulo 2 el análisis es cuántico. Empezamos por presentar el formalismo de la teoría de campos en espacios curvos, necesario para estudiar el campo cuántico desde el punto de vista de observadores acelerados. Se aplica este formalismo a la cuantización de Unruh, lo que nos permite especificar la notación y explicar el efecto Unruh. Como parte de este proceso, se analizan los modos de ‘boost’ y a partir de ellos se construyen los modos de Unruh. En el apéndice A se bosqueja la construcción de las representaciones de los modos de Unruh en las diferentes cuñas de Rindler. Para terminar el capítulo

presentamos un resumen de algunos análisis referentes a la interpretación de procesos físicos en detectores desde los puntos de vista inercial y acelerado.

El capítulo 3 comienza con los aspectos más relevantes del análisis que se hace en [20] sobre la coincidencia entre la tasa de emisión de una carga acelerada respecto a observadores inerciales y la tasa combinada de emisión/absorción que vería un observador acelerado. Además de presentar este resultado, este análisis sirve para introducir el procedimiento de regularización que usaremos posteriormente cuando estudiemos el cambio en el valor de expectación del tensor de energía-momento en la cuña F . Entre otros factores, esta coincidencia es la que nos lleva a concluir que no hay ningún cambio físico en el estado que ven los observadores acelerados. En la sección 3.1.1 describimos cuidadosamente las implicaciones, aparentemente contradictorias, de este hecho con respecto a la codificación de la información del estado que hace que en la cuña F se pueda observar radiación. La estrategia para resolver esta cuestión está basada en el concepto de los operadores de densidad, y en la manera de caracterizar estados puros no separables. En la sección siguiente desarrollamos estas ideas e introducimos la ‘matriz de enredamiento’. Como un primer ejemplo, describiremos en estos términos el enredamiento que se presenta en el estado de vacío de Minkowski desde el punto de vista de la cuantización de Unruh.

Para poder obtener una expresión explícita del estado final del campo y su operador de densidad asociado, se necesita la forma particular de la fuente que representa a una partícula acelerándose. Expondremos este proceso en la sección 3.3.1 e introduciremos una fuente escalar puntual acelerada con un regulador particular para construir la matriz \hat{S} asociada a esta interacción. En la sección 3.3.3 se hacen los cálculos para obtener el cambio en $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ y lo evaluamos en las cuñas L y R . De estos resultados se puede ver cómo se codifica en el estado la información del cambio físico en la cuña F . Con el fin de poder identificar las contribuciones de las diferentes partes del operador de densidad, este cálculo se hace en el lenguaje de operadores de densidad y en la descripción cuántica de los observadores acelerados. Los detalles están en la sección 3.3.4 (en el apéndice B presentamos, para completar, este mismo cálculo hecho en términos de valores de expectación).

En la sección 3.3.5 verificamos que un observador inercial obtendría los mismos resultados haciendo el análisis en términos de la cuantización

estándar del campo en ondas planas. En la sección 3.4 analizamos el caso de dos fuentes diferentes acelerándose una en la cuña L y la otra en la cuña R , lo que resulta interesante pues en principio pareciera que tener perturbaciones en ambas cuñas podría generar contribuciones a la ‘matriz de enredamiento’. Finalmente terminamos con una discusión general de los resultados obtenidos y discutimos algunas líneas a seguir derivadas de este trabajo.

Capítulo 1

Principio de Equivalencia y radiación de cargas aceleradas

Los orígenes del Principio de Equivalencia se remontan a Galileo, que en el siglo XVI probó, hasta donde la precisión de sus métodos se lo permitía, que diferentes cuerpos rodando en planos inclinados se aceleraban de la misma manera. Poco después, tal vez basado en los resultados de Galileo, Newton lo introduce en su teoría de la gravedad, en términos de que la masas inercial y gravitacional de un cuerpo son una misma cosa. En 1907 Einstein lo postula formalmente y luego lo extiende y usa para desarrollar su teoría de la Relatividad General, que es la teoría de la gravitación más aceptada hasta ahora. La idea de que el espacio-tiempo es curvo, introducida por la teoría de Einstein, está cimentada en el Principio de Equivalencia.

En su versión más débil¹, este principio postula que la trayectoria de un cuerpo en caída libre (sobre el que no actúan fuerzas no gravitacionales y suficientemente pequeño como para que no le afecten fuerzas de marea) es independiente de su estructura y composición internas, esto es, que todos los cuerpos “caen de la misma manera”. Esta afirmación ha sido verificada experimentalmente hasta una precisión de 10^{-13} [45] y aún se siguen diseñando

¹Llamado el Principio de Equivalencia Débil (PED), o también el principio de la Universalidad de la Caída Libre.

experimentos para mejorarla. Una de las implicaciones más directas de este principio es que no hay manera de distinguir si la descripción acerca de un sistema físico está hecha cuando éste se encuentra bajo un campo gravitacional (localmente uniforme) o si se encuentra en aceleración uniforme en ausencia de gravedad. En efecto, supongamos que tenemos un sistema de referencia G estático en un campo gravitacional uniforme y otro sistema de referencia A en ausencia de gravedad pero con aceleración uniforme. También supongamos que tenemos un conjunto de partículas moviéndose inercialmente (y que, por lo tanto, definen un sistema de referencia inercial²). Para el sistema A todas éstas partículas tienen la misma aceleración. Ahora, si el Principio de Equivalencia es válido, entonces, la descripción que haría el sistema G (con $g = -a$) de ese mismo conjunto de partículas bajo la influencia del campo gravitacional es la misma que la que hace el sistema A .

Notemos que el Principio de Equivalencia implica que en sistemas de referencia en caída libre, las fuerzas inerciales se cancelan con las gravitacionales. Tomando en cuenta esto, Einstein fue más allá del ámbito mecánico y extendió el concepto de marco de referencia *inercial* a cualquier marco de referencia en caída libre. Esto está codificado en el *Principio de Equivalencia de Einstein*, que postula que el resultado de cualquier experimento local, no gravitacional, en un marco de referencia inercial es independiente de la velocidad del marco de referencia y de dónde y cuándo en el universo se haya efectuado. El Principio de Equivalencia es estrictamente local, por lo que el marco inercial asociado a observadores en caída libre no puede más que describir un vecindad del observador. Según la teoría de la Relatividad General, el campo gravitacional es quien determina el encaje de todos estos marcos inerciales para poder hacer una descripción global del espacio-tiempo. De aquí se puede ver la importancia del Principio de Equivalencia en la teoría de la gravedad. Sin embargo, a pesar de lo lejos que le permitió llegar a Einstein en su descripción de la gravedad, aún en su versión más débil, el Principio de Equivalencia presenta ciertas sutilezas conceptuales, algunas de las cuales son la motivación de este trabajo.

De ahora en adelante, por Principio de Equivalencia (PE) nos referire-

²Un sistema de referencia inercial se define como el sistema de referencia en el que las trayectorias de tres partículas *aisladas* con velocidades no colineales son líneas rectas. En general, estos sistemas sólo se pueden definir localmente.

mos al Principio de Equivalencia Débil. Como hemos visto, por el PE, la descripción de un sistema físico hecha por un observador estático bajo un campo gravitacional uniforme de intensidad g no se puede distinguir de la descripción del mismo sistema hecha por un observador en ausencia de gravedad y cuando ambos, éste y el sistema se mueven con aceleración uniforme $a = -g$. Si aplicamos este razonamiento a una partícula cargada, sabemos por un lado, que las ecuaciones de Maxwell predicen que la partícula cargada con aceleración uniforme va a emitir radiación. Como este sistema sería equivalente a que la misma partícula esté estática bajo un campo gravitacional uniforme ($g = -a$), deberíamos concluir que esta última *también* emitiría radiación. Sin embargo, esta conclusión está en franca contradicción con nuestra experiencia terrestre, pues una partícula cargada, por ejemplo, sobre una mesa en la superficie de la Tierra, no radía. Entonces, ¿no se aplica el Principio de Equivalencia o una partícula acelerada no radía?

Esta aparente paradoja ha causado cierta controversia desde hace muchos años. La historia del estudio teórico del fenómeno de radiación empieza con Max Born, quien fue el primero en calcular, en 1909, los potenciales electromagnéticos de una carga con aceleración uniforme [3]. En su libro de Relatividad Especial (1919) [40], von Laue afirma que esta carga no va a emitir radiación. Asimismo, poco tiempo después, en 1921 W. Pauli afirma que una partícula cargada en un estado de permanente aceleración uniforme no emite radiación (según Pauli, sólo habría radiación si la partícula se acelera por un intervalo finito de tiempo [13]). Sin embargo, conclusiones opuestas fueron alcanzadas por Schott (1915), Milner (1921) y Drukey (1949). Tiempo después, Bondi y Gold (1955), Fulton y Rohrlich (1960) y D.G Boulware (1980) [5] discutieron si el Principio de Equivalencia era válido en esta situación y concluyeron que si la radiación se interpreta correctamente entonces no hay ninguna contradicción.

Para describir el fenómeno de una partícula cargada en las dos situaciones aparentemente no equivalentes mencionadas anteriormente, se debe de fijar un observador desde el cual hacer la descripción. En este caso, la paradoja se transfiere a la existencia o no, de un observador que pueda hacer compatibles el hecho de que para una carga uniformemente acelerada haya radiación con el hecho de que en su sistema equivalente (en el que la carga está estática bajo un campo gravitacional) no la haya. Por experiencia, sabemos que un observador estático en la superficie de la Tierra no detecta

radiación de cargas estáticas, por lo que este observador es el más natural para hacer la descripción. Según el PE, este observador y la carga estática es equivalente a uno que se acelera con la carga (la ve estática), de tal manera que el sistema que tenemos que analizar es el de la carga acelerándose, pero *visto por* un observador que se acelera con ella.

Desde este punto de vista, la pregunta ¿una carga uniformemente acelerada radía? debe responderse tomando en cuenta con respecto a qué observador se quiere describir la radiación. Los casos de un observador inercial y de uno acelerado comóvil con la carga han sido investigadas dentro del marco de la teoría de la Relatividad Especial y en general, como veremos en secciones posteriores de este capítulo, la respuesta es afirmativa para ambas clases de observadores. La condición de aceleración uniforme del observador genera la aparición de *horizontes*, los cuales delimitan la región del espacio-tiempo a la cual tienen acceso los observadores comóviles con la partícula. Dentro de esta región éstos observadores no pueden detectar radiación, sin embargo, fuera de esta región, la radiación es detectable. Tomando en cuenta la existencia de esta región de no radiación para un observador comóvil con la carga, la aparente paradoja se diluye y la radiación de una carga uniformemente acelerada no representa ninguna violación del Principio de Equivalencia.

Otro factor que ha causado mucha confusión en este tema es que, erróneamente, se pensaba que la energía de la radiación emitida por una carga acelerada debe ser compensada necesariamente por un cambio extra en la energía cinética de la carga (además del ocasionado por el hecho de que hay un factor externo al sistema que acelera la carga). La partícula cargada siente una fuerza debida a su interacción con el campo de la radiación que emite —llamada *auto-fuerza*— que modificaría su trayectoria. Sin embargo, resulta que para una partícula cargada con aceleración uniforme la auto-fuerza (determinada por la ecuación de Lorentz-Dirac, que desarrollamos en la sección 1.1.1) se anula, por lo que, de aceptar dicha premisa, esto implicaría que no emite radiación (inclusive para un observador inercial). Como veremos más adelante, el hecho de que la auto-fuerza se anule no es impedimento de que exista energía radiada fuera de la línea de mundo de la carga, de hecho, la conservación de la energía está garantizada, como se puede ver de aplicar

cuidadosamente las leyes de Maxwell a este sistema.³

En el resto de este capítulo hacemos una revisión de los análisis del campo electromagnético clásico más relevantes del problema de radiación de una carga uniformemente acelerada. En la sección 1.1 se revisarán las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica clásica y hacemos un bosquejo de la derivación de la fórmula de Lorentz-Dirac para la auto-fuerza sentida por una carga uniformemente acelerada. En la sección 1.2 definimos las coordenadas de Rindler asociadas a un observador comóvil con la carga y analizamos la radiación emitida desde el punto de vista de observadores inerciales y coacelerados.

1.1. Radiación de cargas aceleradas

Consideremos el campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$ producido por una carga puntual moviéndose en un espacio-tiempo plano con una línea de mundo $z^\alpha(\tau)$, donde τ es su tiempo propio. La densidad de corriente j^α correspondiente a esta carga está dada por

$$j^\alpha(x) = q \int_\gamma d\tau u^\alpha \delta^4(x - z), \quad (1.1)$$

³Hay otra justificación teórica de por qué se podría presentar esa probable paradoja que, aunque está fuera del alcance de este trabajo, ponemos aquí para completar la exposición de la ‘tensión’ que se ha dado entre del PE y las cargas aceleradas. Ésta tiene que ver con una aparente *equivalencia* entre las fluctuaciones de vacío del campo electromagnético y la auto-fuerza de reacción a la radiación [7]. El hecho de que la auto-fuerza se anule se podría entender en términos de dichas fluctuaciones. Se ha probado [27], [35] que el decaimiento de un átomo excitado se puede interpretar equivalentemente como generado por las perturbaciones debidas a las fluctuaciones del vacío electromagnético o por la reacción a la radiación debida al campo de los electrones o, sorprendentemente, por cualquier combinación lineal de estos procesos. Para Candelas y Sciama [7] esta dualidad se debe a que tanto las fluctuaciones de vacío como la auto-fuerza son “. . . una sobresimplificación motivada por el deseo de asignar un sentido físico a las ecuaciones que aparecen en los pasos intermedios del cálculo”. De acuerdo al efecto Unruh, que explicaremos en el siguiente capítulo, un observador con aceleración uniforme a percibe el vacío (inercial) del campo (cuántico) como un baño térmico con temperatura $a/2\pi$. Interpretado de otra manera [7], “la carga percibe a las fluctuaciones del vacío como comóviles y constituyendo un baño térmico”. De aquí que el efecto de las fluctuaciones sobre la carga sea el mismo que si está en reposo y por lo tanto no puede haber una transferencia de energía y momento entre la carga y el vacío desde el marco de referencia acelerado.

donde $u^\alpha(\tau) = dz^\alpha/d\tau$ es la cuatro velocidad de la partícula y γ su trayectoria. Las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético son

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\alpha. \quad (1.2)$$

Expresando el campo electromagnético en términos del potencial vectorial,

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad (1.3)$$

y adoptando la norma de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, las ecuaciones del campo toman la forma

$$\square A^\alpha = -4\pi j^\alpha, \quad (1.4)$$

donde $\square = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ es el operador Dalambertiano, $\eta_{\alpha\beta}$ representa la métrica del espacio-tiempo de Minkowski.

Esta ecuación se puede resolver con la ayuda de una función de Green $G(x, x')$ definida por

$$\square G(x, x') = -4\pi\delta^4(x - x'). \quad (1.5)$$

En este caso, la solución de la ec. (1.4) es

$$A^\alpha(x) = \int G(x, x') j^\alpha(x') d^4x' + A_{\text{hom}}^\alpha(x), \quad (1.6)$$

donde el segundo término representa una solución de la ecuación de campo homogénea. La función de Green *retardada*, que tiene soporte sólo en el pasado del cono de luz del punto de evaluación del campo x , está definida por

$$\begin{aligned} G_{\text{ret}}(x, x') &= \theta(t - t')\delta(\sigma) \\ &= \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde

$$\sigma = \sigma(x, x') = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(x - x')^\alpha(x - x')^\beta \quad (1.8)$$

es la mitad de la distancia geodésica entre los puntos x y x' ; \mathbf{x} es la proyección espacial de x y $|\mathbf{x}|$ su magnitud. La función de Green *adelantada* está definida por

$$\begin{aligned} G_{\text{ade}}(x, x') &= \theta(t' - t)\delta(\sigma) \\ &= \frac{\delta(t - t' + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Esta función tiene soporte sólo en el cono de luz futuro de x .

Las ecuaciones del campo implican la conservación de la carga, dada por la ecuación $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, misma que es satisfecha por la expresión (1.1). Asimismo, la conservación de energía y momento en el sistema está dada por la ecuación

$$\partial_\beta \left(T_{\text{em}}^{\alpha\beta} + T_{\text{part}}^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (1.10)$$

donde

$$T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\mu} F_\mu^\beta - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (1.11)$$

es el tensor de energía-momento del campo electromagnético y

$$T_{\text{part}}^{\alpha\beta} = m \int d\tau u^\alpha u^\beta \delta^4(x - z) \quad (1.12)$$

corresponde al tensor de energía-momento de una partícula de masa m . Se puede probar que la ec. (1.10) implica la ecuación de la fuerza de Lorentz para la partícula cargada [33],

$$ma^\alpha = q F_\beta^\alpha u^\beta. \quad (1.13)$$

En esta ecuación $F_{\alpha\beta}$ está evaluado en el punto $x = z(\tau)$ y $a^\alpha = du^\alpha/d\tau$ es la aceleración de la partícula. Nótese que el campo es singular sobre la trayectoria de la carga por lo que las ecuaciones (1.10)–(1.13) no se pueden aplicar directamente sobre el punto en el espacio-tiempo donde está la partícula que está generando al campo.

El campo producido por la carga en cierto punto del espacio-tiempo no puede depender del estado de la partícula en un tiempo posterior por lo que la solución física corresponde a la generada por la función de Green $G_{\text{ret}}(x, x')$. Esta solución se obtiene de introducir las Ecs. (1.1) y (1.7) en la ec. (1.6),

$$A^\alpha(x) = q \int d\tau u^\alpha \theta(t - z^0) \delta(\sigma), \quad (1.14)$$

donde σ está definida por la ec. (1.8). Dado un punto $z(\tau)$ en la línea de mundo de la partícula, la función δ escoge dos puntos, aquéllos que satisfacen la relación $\sigma(x, z(\tau)) = 0$. De una solución a ésta ecuación se obtiene el *tiempo retardado* u , definido por la condición de que $z(u)$ precede causalmente a x , y de la otra se obtiene el *tiempo adelantado* v definido por la condición de que $z(v)$ se encuentra en el futuro de x . Notemos que $u = u(x)$

y $v = v(x)$. Para llevar acabo la integración se hace el cambio de variable $\tau \rightarrow \sigma$. La función θ en el integrando de la ec. (1.14) garantiza que, como función de σ , el intervalo de integración va de $\sigma_0 < 0$ a $\sigma_1 > 0$. Se tiene entonces que

$$A^\alpha(x) = q \frac{u^\alpha(u)}{r(x)}, \quad (1.15)$$

donde

$$r(x) = -\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - z^\alpha(u))u^\beta(u). \quad (1.16)$$

A la expresión (1.15) se le conoce como el potencial de Liénard-Wichert. En un marco de referencia en el que la partícula está en reposo en el tiempo u ($u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$) se tiene que $r = t - z^0(u)$, que es el tiempo necesario para que la luz se propague de $z(u)$ a x que a su vez, como $c = 1$, corresponde a la distancia espacial entre estos dos puntos.

El campo electromagnético generado por la carga en movimiento se obtiene a partir de la ec. (1.3). Es conveniente expresarlo en términos del vector

$$k^\alpha(x) = \frac{1}{r}(x^\alpha - z^\alpha(u)), \quad (1.17)$$

que es un vector nulo apuntando de $z(u)$ a x . Se obtiene

$$F_{\alpha\beta} = \frac{2q}{r}(a_{[\alpha}k_{\beta]} + a_k u_{[\alpha}k_{\beta]}) + \frac{2q}{r^2}u_{[\alpha}k_{\beta]}, \quad (1.18)$$

donde $a^\alpha = du^\alpha/d\tau$ es la aceleración propia de la partícula, $a_k = a^\alpha k_\alpha$ y los corchetes cuadrados significan la antisimetrización de los índices. Notése que la parte del campo electromagnético que se escala como r^{-1} es proporcional a la aceleración de la partícula, a esta se le conoce como la parte de *radiación* del campo. Por otro lado, a la parte que escala como r^{-2} , que no involucra la aceleración de la partícula, se le conoce como la parte de *Coulomb* del campo⁴.

Sustituyendo la ec. (1.18) en la ec. (1.11) se obtiene directamente el tensor de energía-momento del campo producido por la partícula, de donde se puede identificar una componente de *radiación* y otra asociada a la parte de *Coulomb* del campo:

$$T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = T_{\text{rad}}^{\alpha\beta} + T_{\text{bnd}}^{\alpha\beta}, \quad (1.19)$$

⁴También se le llama *bound field* en inglés.

donde

$$T_{\text{rad}}^{\alpha\beta} = \frac{q^2}{4\pi r^2} (a^2 - a_k^2) k^\alpha k^\beta \quad (1.20)$$

es la componente de radiación y

$$T_{\text{bnd}}^{\alpha\beta} = \frac{q^2}{2\pi r^3} \left[k^{(\alpha} a^{\beta)} + a_k (k^{(\alpha} u^{\beta)} - k^\alpha k^\beta) \right] + \frac{q^2}{4\pi r^4} \left[2k^{(\alpha} u^{\beta)} - k^\alpha k^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \right] \quad (1.21)$$

es la componente de Coulomb. Esta separación se da naturalmente pues $T_{\text{rad}}^{\alpha\beta}$ escala como r^{-2} y es proporcional a $k^\alpha k^\beta$. Sin embargo, nótese que el primer término entre corchetes del lado derecho de la ecuación para $T_{\text{bnd}}^{\alpha\beta}$, ec. (1.21), no proviene de aplicar la ec. (1.11) a la parte de Coulomb de $F_{\alpha\beta}$, sino que contiene la contribución al tensor de energía-momento de la interferencia entre los campos de Coulomb y de radiación. Por otro lado, fuera de la línea de mundo de la partícula, cada componente se conserva independientemente, esto es,

$$\partial_\beta T_{\text{rad}}^{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_\alpha T_{\text{bnd}}^{\alpha\beta} = 0, \quad r \neq 0. \quad (1.22)$$

Encerremos a la línea de mundo de la partícula en un tubo de mundo Σ arbitrario y calculemos el flujo de energía-momento a través de esta superficie por unidad de tiempo propio. Éste está determinado por el flujo de $T_{\text{rad}}^{\alpha\beta}$ a través de Σ :

$$\Delta P_{\text{rad}}^\alpha = \int_\Sigma T_{\text{rad}}^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta, \quad (1.23)$$

donde $d\Sigma_\alpha$ es el elemento de superficie de Σ con vector normal dirigido hacia afuera. Usando el teorema de Gauss se puede probar que el flujo ΔP^α dada por la ec. (1.23) es el mismo que para cualquier tubo Σ' siempre y cuando tenga las mismas “tapas” que Σ . Entonces, dado que la forma del tubo es irrelevante, vamos a considerar el cilindro más sencillo, uno de $r = \text{cte}$. Además, vamos a suponer que r es pequeño, por lo que el cilindro se encuentra en la vecindad inmediata de la línea de mundo de la partícula. El elemento de superficie está dado por

$$d\Sigma_\alpha = r_\alpha r^2 du d\Omega, \quad (1.24)$$

donde

$$r_\alpha \equiv \partial_\alpha r = -u_\alpha + (1 + r a_k) k_\alpha \quad (1.25)$$

y $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ [33]. De la ec. (1.20) tenemos

$$\Delta P_{\text{rad}}^\alpha = \frac{q^2}{4\pi} \int (a^2 - a_k^2) k^\alpha du d\Omega \quad (1.26)$$

y de aquí que

$$\frac{dP_{\text{rad}}^\alpha}{du} = \frac{q^2}{4\pi} \int (a^2 - a_k^2) k^\alpha d\Omega. \quad (1.27)$$

De esta ecuación se puede probar que [33]

$$\frac{dP_{\text{rad}}^\alpha}{du} = \frac{2}{3} q^2 a^2 u^\alpha, \quad (1.28)$$

que corresponde al flujo de energía-momento de radiación por el tubo Σ por unidad de tiempo propio. En el marco de Lorentz donde la partícula está en reposo instantáneamente la ec. (1.28) se reduce a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} q^2 \mathbf{a}^2, \quad (1.29)$$

que es la famosa *fórmula de Larmor*. Nótese que si la aceleración es uniforme la razón de energía radiada es constante y proporcional al cuadrado de la tres-aceleración.

1.1.1. La ecuación de Lorentz-Dirac

Análogamente, usando la ec. (1.21) se puede ver que la razón de cambio del momento del campo ligado a la carga es [33]

$$\frac{dP_{\text{bnd}}^\alpha}{du} = \frac{q^2}{2r} a^\alpha, \quad (1.30)$$

entonces, el flujo de energía-momento electromagnético total $P_{\text{em}}^\alpha = P_{\text{rad}}^\alpha + P_{\text{bnd}}^\alpha$, por unidad de tiempo propio resulta ser

$$\frac{dP_{\text{em}}^\alpha}{du} = \frac{q^2}{2r} a^\alpha + \frac{2}{3} q^2 a^2 u^\alpha. \quad (1.31)$$

Ahora vamos a presentar un esbozo de la derivación de la fórmula de Dirac [10] para la fuerza de reacción del campo producido por la partícula sobre ella misma. Vamos a seguir a [33] en esta derivación. La idea fundamental de Dirac se basa en dos postulados, el primero de ellos es que el momento total, electromagnético y mecánico, se conserva:

$$\frac{dP_{\text{em}}^\alpha}{du} + \frac{dP_{\text{mec}}^\alpha}{du} = 0. \quad (1.32)$$

Sin embargo, esta ecuación de conservación requiere que se haga una correcta identificación del término P_{mec}^α . En efecto, si se escoge la posibilidad más patente, $P_{\text{mec}}^\alpha = m_0 u^\alpha$, al introducirse en la ec. (1.32) se obtiene que la ecuación de movimiento de la partícula es $ma^\alpha = -\frac{2}{3}q^2 a^2 u^\alpha$ (donde $m = m_{\text{em}} + m_0$ y $m_{\text{em}} = q^2/(2r)$), lo cual es imposible pues a^α debe ser ortogonal a u^α (notemos que, de acuerdo a esta última ecuación, ambos vectores serían paralelos). El cambio de momento mecánico de la partícula está influenciado por el flujo del campo electromagnético a través de las tapas de Σ .

Para arreglar esta situación se propone que el momento mecánico dependa de otras variables de la línea de mundo de la partícula. En particular, Poisson propone el siguiente ansatz [33]: $P_{\text{mech}}^\alpha = m_0 u^\alpha + cq^2 a^\alpha$, donde c es una constante por determinar. Introduciéndolo en la ec. (1.32) y pidiendo que a^α se ortogonal a u^α se encuentra que $c = -2/3$, esto es, que el momento mecánico según Dirac debe ser

$$P_{\text{mec}}^\alpha = m_0 u^\alpha - \frac{2}{3}q^2 a^\alpha, \quad (1.33)$$

donde m_0 representa la *contribución mecánica* a la masa de la partícula. Se puede ver que esta expresión para P_{mec}^α es la que resulta de hacer un tratamiento cuidadoso del flujo del campo a través de las tapas de Σ [36]. Esta contribución a la masa se combina con la contribución electromagnética $m_{\text{em}} = q^2/(2r)$ para dar la *masa física* de la partícula

$$m = m_0 + m_{\text{em}} = m_0 + \frac{q^2}{2r}. \quad (1.34)$$

Usando las Ecs. (1.31), (1.33) y (1.34) en la ec. (1.32) obtenemos la ecuación de Lorentz-Dirac en la forma

$$\begin{aligned} ma^\alpha &= \frac{2}{3}q^2 (\dot{a}^\alpha - a^2 u^\alpha) \\ &= \frac{2}{3}q^2 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \dot{a}^\beta, \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde para obtener la segunda igualdad hemos usado que $a^2 = -\dot{a}_\alpha u^\alpha$. Conviene escribirla en términos de una fuerza externa

$$ma^\alpha = F_{\text{ext}}^\alpha + \frac{2}{3}q^2 (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) \dot{a}^\beta. \quad (1.36)$$

En el marco de Lorentz en el que la carga está momentáneamente en reposo se tiene que

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{2}{3}q^2 \dot{\mathbf{a}}. \quad (1.37)$$

Nótese que la ecuación de Lorentz-Dirac involucra a la derivada temporal de la aceleración por lo que, en términos de la posición $z^\alpha(\tau)$ representa una ecuación diferencial de tercer orden. Esto provoca que presente soluciones físicamente anómalas como de pre-aceleración (en las que la partícula siente una aceleración *antes* de que la fuerza externa actúe) y soluciones “desbo-cadas” (en las que la aceleración crece exponencialmente con el tiempo).

De acuerdo a Poisson [33], la raíz del problema reside en el hecho de que estamos describiendo el movimiento de una partícula puntual con un tratamiento puramente clásico del electromagnetismo. Una partícula puntual se debe de considerar como una aproximación a una distribución de carga extendida. Una distribución de este tipo está descrita por su carga total q , un cierto tamaño promedio ℓ y momentos multipolares de orden mayor que uno. Para distancias r grandes comparadas con el tamaño promedio ℓ el campo electromagnético está bien aproximado por el momento monopolar q/r^2 y es cuando la aproximación de partícula puntual es válida pues la estructura interna de la partícula es irrelevante en esta descripción. Sin embargo, la parte del campo que contribuye a la fuerza de reacción del campo (que actúa sobre la misma partícula) es la que se encuentra en la vecindad inmediata de la fuente, por lo que la aproximación de partícula puntual (Eq. (1.1)) no es del todo válida para calcular los efectos de la reacción a la radiación y de aquí que la ecuación de Lorentz-Dirac presente esas soluciones patológicas. Por otro lado, como mencionamos en la introducción de este capítulo, se pensaba que el hecho de que la auto-fuerza se anulara sobre una partícula con aceleración uniforme se contraponía al hecho de que hubiera energía radiada. En los cálculos que presentamos se puede ver que no existe tal contradicción.

1.2. Cargas aceleradas y el Principio de Equivalencia

1.2.1. El espacio-tiempo de Rindler

Tomemos un marco de referencia S y una partícula moviéndose en él en la dirección z con velocidad u . Sea S' el marco de referencia momentáneamente

en reposo con la partícula, se tiene entonces que⁵

$$u = \frac{u' + v}{1 - u'v}. \quad (1.38)$$

Donde u' es la velocidad de la partícula con respecto a S' y v la velocidad de S' con respecto a S . Diferenciando esta ecuación y tomando en cuenta que $u' = 0$ y $u = v$ se puede ver que

$$du = (1 - u^2)du' = a(1 - u^2)dt' \quad (1.39)$$

donde a es la aceleración propia (respecto al sistema en el que está momentáneamente en reposo) de la partícula. Expresando dt' en términos de dt obtenemos

$$a = (1 - u^2)^{-3/2} \frac{du}{dt} \quad (1.40)$$

Si a es constante, integrando dos veces la ec. (1.40) y usando que $u = 0$ cuando $t = 0$ obtenemos

$$z - z_0 = \frac{1}{a} (\sqrt{1 + a^2 t^2} - 1) \quad (1.41)$$

Escogiendo (o trasladando el eje z a) $z_0 = 1/a$ llegamos finalmente a la ecuación

$$z^2 - t^2 = \frac{1}{a^2} \quad (1.42)$$

Esto es, el movimiento uniformemente acelerado corresponde a una hipérbola con asíntotas $z \pm t = 0$. La ecuación

$$z^2 - t^2 = \zeta^2 \quad (1.43)$$

representa, para cada valor del parámetro ζ , un punto de una varilla en la dirección z acelerándose *rígidamente*. Esto es, de tal manera que la longitud propia de cada uno de sus elementos infinitesimales se preserve. Se puede ver que para dos puntos de la varilla separados por $d\zeta$ se tiene que cuando $dt = 0$ entonces

$$dz = \frac{\zeta}{z} d\zeta = \frac{d\zeta}{\gamma}, \quad (1.44)$$

donde γ corresponde al factor de Lorentz asociado a la velocidad del marco en el que la partícula está momentáneamente en reposo con respecto al sistema $\{t, z\}$.

⁵Recuérdese que estamos usando unidades en las que $c = 1$.

Para fijar a ζ como una coordenada espacial, podemos pensar que la barra se ha estado acelerando desde $t = -\infty$. Observadores en cada punto ζ de la barra pueden sincronizar sus relojes de tal manera que no se atrasan ni se adelantan ente sí; si todos acuerdan que su coordenada temporal tenga el valor $\tau = 0$ cuando la barra pasa por $t = 0$ podemos dar coordenadas “aceleradas” a la región $z > |t|$ por

$$t = \zeta \sinh \tau \quad z = \zeta \cosh \tau, \quad 0 < \zeta < \infty \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (1.45)$$

donde $\zeta = \text{const.}$ representa un observador uniformemente acelerado. Al considerar la familia de observadores acelerados definida por la ec. (1.43), el espacio-tiempo de Minkowski queda separado en cuatro distintas regiones $|t| < z$, $|z| < t$, $|t| < -z$, $|z| < -t$. Llamamos a cada una de estas cuñas R , F , L , P respectivamente. A la cuña R se le conoce como el *espacio-tiempo de Rindler* que, visto como un espacio-tiempo en sí mismo, es estático y globalmente hiperbólico. En efecto, de la ec. (1.45) se puede ver que

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 = -\zeta^2 d\tau^2 + d\zeta^2. \quad (1.46)$$

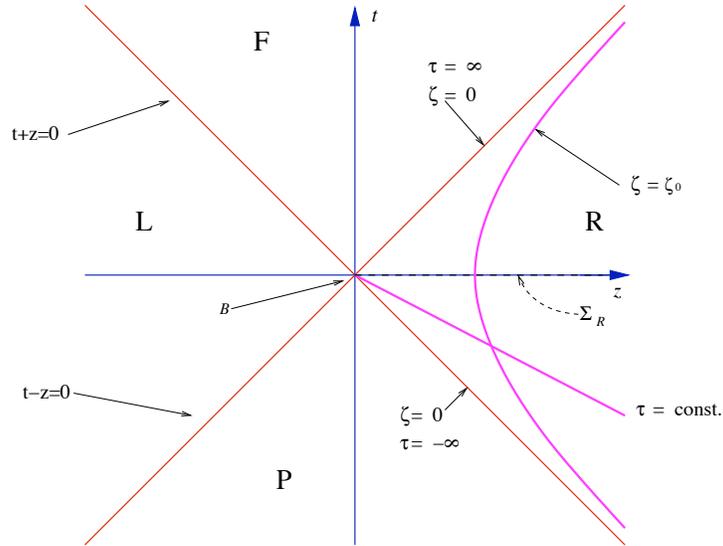


Figura 1.1: El espacio tiempo de Rindler y la trayectoria de una partícula con aceleración propia constante $a^\mu a_\mu = 1/\zeta_0^2$.

Nótese que el campo de Killing temporal $\tau^a = zt^a + tz^a$ corresponde al campo de Killing que genera *boosts* en la dirección z . Las superficies $\zeta = 0$ ($z \pm t = 0$) son horizontes de Killing de τ^a . Podemos definir coordenadas de Rindler en cada una de la cuñas usando la propiedad de que la coordenada τ esté siempre asociada al parámetro de las órbitas del generador de boosts $b^a = zt^a + tz^a$, con excepción de L , donde τ^a corresponde a $-b^a$ para asegurar que la dirección futura coincida con la del tiempo inercial. En las cuñas F y P la coordenada τ es espacial. Tenemos entonces [4]

$$z = \zeta \cosh \tau \quad t = \zeta \sinh \tau \quad (t, z) \in R \quad (1.47)$$

$$z = -\zeta \cosh \tau \quad t = \zeta \sinh \tau \quad (t, z) \in L \quad (1.48)$$

$$z = \zeta \sinh \tau \quad t = \zeta \cosh \tau \quad (t, z) \in F \quad (1.49)$$

$$z = -\zeta \sinh \tau \quad t = -\zeta \cosh \tau \quad (t, z) \in P \quad (1.50)$$

donde $\zeta > 0$ en cada región. En estas coordenadas la métrica de Minkowski es de la forma

$$ds^2 = \pm(-\zeta^2 d\tau^2 + d\zeta^2) \quad (1.51)$$

donde el signo $+$ ($-$) corresponde a las cuñas R y L (F y P).

1.2.2. Campo asociado a una carga uniformemente acelerada

Tomemos una partícula con carga q y aceleración uniforme a en la dirección z y que pasa por $z = 1/a$ cuando $t = 0$. En las coordenadas inerciales $\{t, x, y, z\}$, esta trayectoria se puede parametrizar por

$$z^\alpha = (\sinh(a\eta)/a, 0, 0, \cosh(a\eta)/a), \quad u^\alpha = (\cosh(a\eta), 0, 0, \sinh(a\eta)) \quad (1.52)$$

donde $\eta = \tau/a$ es el tiempo propio de la partícula. El tiempo retardado u está determinado por $\sigma(x^\alpha, z^\alpha) = 0$ (ver la ec. (1.8)), esto es,

$$(t - \sinh(au)/a)^2 = (z - \cosh(au)/a)^2 + \rho^2, \quad (1.53)$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$ y la condición $t - z^0(u) > 0$. El tiempo retardado u está dado implícitamente por la ecuación

$$z \cosh(au) - t \sinh(au) = \frac{a}{2} \left(\rho^2 + z^2 - t^2 + \frac{1}{a^2} \right). \quad (1.54)$$

Usando las ecs. (1.15) y (1.3) se pueden obtener expresiones para el campo generado por la carga uniformemente acelerada [5, 9]

$$\check{F}^{tz} = \frac{q}{4R^3} a \left(z^2 - t^2 - \rho^2 - \frac{1}{a^2} \right) \theta(t+z) \quad (1.55a)$$

$$\check{F}^{t\hat{\rho}} = \frac{q}{2R^3} \hat{\rho} a z \theta(t+z) \quad (1.55b)$$

$$\check{F}^{z\hat{\rho}} = \frac{q}{2R^3} \hat{\rho} a t \theta(t+z) \quad (1.55c)$$

donde

$$R = \frac{a}{2} \left(\left(z^2 - t^2 + \rho^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2 - 4 \frac{z^2 - t^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad (1.56)$$

y $\hat{\rho}$ representa el vector unitario de coordenadas cilíndricas $\{z, \rho, \theta\}$. Como es de esperarse, el campo dado por las ec. (1.55) presenta una singularidad en la trayectoria de la partícula, $\rho = 0$ y $z^2 - t^2 = 1/a^2$. El campo en la ec. (1.55) satisface las ecuaciones de Maxwell en la región $z+t > 0$ y, trivialmente, en la región $z+t < 0$; sin embargo, no las satisface en la hipersuperficie nula $t+z=0$ como se puede ver en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \check{F}^{t\nu} &= -\partial_\nu \check{F}^{z\nu} = -\frac{4qa^2}{2(1+a^2\rho^2)^2} \delta(t+z), \\ \partial_\nu \check{F}^{\hat{\rho}\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Por lo tanto, no se puede considerar a la ec. (1.55) como el campo *global* generado por la carga. Dado que la trayectoria de la carga es invariante bajo *boosts* en la dirección z , el campo que genera debe ser, también, invariante ante estas transformaciones. Para encontrar el campo *global* de la carga, Boulware propone agregar un campo $\Delta F^{\mu\nu}$, definido sobre $t+z=0$ e invariante bajo *boosts* en la dirección z . El único campo que satisface estos requerimientos es de la forma [5]

$$\Delta F^{tz} = 0, \quad \Delta F^{t\hat{\rho}} = \rho A(\rho) \delta(t+z), \quad (1.58)$$

donde la componente

$$A(\rho) = \frac{2qa^2}{1+a^2\rho^2} \quad (1.59)$$

se escogió de tal manera que $F^{\mu\nu} = \check{F}^{\mu\nu} + \Delta F^{\mu\nu}$ satisfaga las ecuaciones de Maxwell en todo el espacio-tiempo. De esta manera, el campo generado por

la carga uniformemente acelerada y definido (distribucionalmente) en todo el espacio-tiempo es

$$F^{tz} = \frac{qa}{4R^3} \left(z^2 - t^2 - \rho^2 - \frac{1}{a^2} \right) \theta(t+z), \quad (1.60a)$$

$$F^{t\hat{\rho}} = \frac{q}{2} \hat{\rho} \left[\frac{az}{R^3} \theta(t+z) + \frac{2a^2}{1+a^2\rho^2} \delta(t+z) \right], \quad (1.60b)$$

$$F^{z\hat{\rho}} = \frac{q}{2} \hat{\rho} \left[\frac{at}{R^3} \theta(t+z) - \frac{2a^2}{1+a^2\rho^2} \delta(t+z) \right]. \quad (1.60c)$$

Claramente, este campo satisface las ecuaciones de Maxwell en todo el espacio-tiempo pues así fue construido. Aunque el campo $\Delta F^{\mu\nu}$ fue agregado “a mano”, se puede obtener directamente de las Ecs. (1.6) y (1.3) haciendo un tratamiento cuidadoso del campo como distribución [5].

Se puede interpretar al campo $\Delta F^{\mu\nu}$ como la transformación de Lorentz del campo de Coulomb de la carga “antes” de que empezara a acelerarse, vía un proceso límite. En efecto, consideremos el campo generado por una carga que es inercial desde $t = -\infty$ hasta $t = t_\alpha$, y que se acelera uniformemente a partir de este momento. El campo de una carga acelerándose uniformemente desde $t = -\infty$ se puede obtener como la transformación de Lorentz de este campo al sistema en el que $t_\alpha \rightarrow -\infty$.

Consideremos un marco de referencia en el que la carga esté en reposo instantáneamente y transformemos el campo dado por la ec. (1.55) a este sistema. La restricción del campo a lo largo del cono de luz futuro del punto donde la carga está en reposo a la cuña R está dado por

$$F^{tz} = \frac{q}{2} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{a}{r} \sin^2 \theta \right], \quad (1.61a)$$

$$F^{t\hat{\rho}} = \frac{q}{2} \hat{\rho} \left[\frac{\sin \theta}{r^2} + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \theta \right], \quad (1.61b)$$

$$F^{z\hat{\rho}} = \frac{q}{2} \hat{\rho} \frac{a \sin \theta}{r}, \quad (1.61c)$$

donde $t = r$ (pues estamos en el cono de luz), θ es el ángulo (*espacial*) entre la (tres-) aceleración de la carga \mathbf{a} y el punto $\rho = (z, \vec{\rho})$ donde se evalúa el campo en el marco de referencia instantáneo de la carga. Los términos proporcionales a $1/r^2$ corresponden al campo de Coulomb de la carga y los términos proporcionales a $a \sin \theta / r$ al campo de radiación de una carga

con aceleración a . Notemos que $\theta = 0$ corresponde a medir el campo en la dirección de la aceleración de la carga.

Se puede ver que en la cuña R el campo de radiación o es comparable o decae con la distancia como un campo de Coulomb, lo que hace experimentalmente complicado distinguir estos campos en esta región. Al hacer una medición dentro de la cuña R la distancia relevante será la del punto a la trayectoria de la partícula. En este caso, se escoge la *máxima distancia invariante*⁶, l , que es la distancia entre el punto y la trayectoria en el marco en el que la carga está instantáneamente en reposo, en coordenadas de Rindler es simplemente

$$l^2 = \rho^2 + \left(\zeta - \frac{1}{a^2}\right)^2. \quad (1.62)$$

Se puede ver que en la cuña R se tiene que para ar grandes, $ar \sim (al)^2/2$ para cualquier valor de θ y, por lo tanto, si se quiere medir la radiación *lejos* de la carga este campo decaerá con la distancia a la carga como $1/l^2$, tal y como un campo de Coulomb.

Por otro lado, tomando $\mathbf{E} = -F^{ti}$ en las Ecs.(1.61), se puede ver que

$$\frac{|\mathbf{E}_{\text{rad}}|}{|\mathbf{E}_{\text{coulomb}}|} = ra \sin \theta \quad (1.63)$$

donde $\mathbf{E}_{\text{coulomb}}$ es la parte proporcional a $1/r^2$ y \mathbf{E}_{rad} es la parte proporcional a $a \sin \theta/r$. En la región R , definida por $z - t > 0$, se tiene que

$$ar < \frac{1}{1 - \cos \theta} \quad (1.64)$$

y finalmente que,

$$\frac{|\mathbf{E}_{\text{rad}}|}{|\mathbf{E}_{\text{Coulomb}}|} < \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (1.65)$$

Nótese que este cociente es de orden 1 excepto para θ cercanas a cero. Esto es, excepto en direcciones muy cercanas a la de la aceleración de la carga, el campo de radiación es menor que el de Coulomb.

En cambio, en la cuña F el campo de radiación se puede hacer arbitrariamente grande para cualquier θ distinto de cero. Además, no existe ningún marco de coordenadas que sea estático, en el que la carga esté en reposo y

⁶Hemos usado el nombre que usa Boulware. Nótese que *no* es un invariante de Lorentz.

que cubra la cuña F por lo que no se puede asociar ninguna distancia invariante a la carga. De ninguna manera se podrían confundir los campos de radiación con campos que van como $1/l^2$ como ocurre en la cuña R . En F no se puede usar ningún argumento (como el Principio de Equivalencia) en contra de la radiación de la carga uniformemente acelerada, esta radiación está ahí y puede ser detectada sin ningún problema.

Todo este análisis se hizo en coordenadas inerciales y, por lo tanto, se aplica directamente a cualquier observador inercial. En este caso, el campo de radiación existe pero, sin embargo, no se puede distinguir del de Coulomb. En cambio, para un observador que se acelera con la carga —y la ve estática—, el campo es estático y el campo de radiación es nulo. Para ver ésto, se calcula el tensor de energía-momento del campo asociado a la carga en coordenadas de Rindler [5]:

$$T^{\tau\tau} = q^2 \frac{1}{8\zeta^2 R^4} \quad (1.66a)$$

$$T^{\tau\zeta} = T^{\tau\rho} = 0 \quad (1.66b)$$

$$T^{\zeta\zeta} = -\frac{q^2}{8R^4} \quad (1.66c)$$

$$T^{\zeta\hat{\rho}} = \frac{q^2}{4} \boldsymbol{\rho} \frac{a^2 \zeta^2 (\rho^2 + a^{-2} - \zeta^2)}{R^6} \quad (1.66d)$$

$$T^{\hat{\rho}\hat{\rho}} = \frac{q^2}{4} \left[\frac{\hat{I}}{2R^4} - \frac{a^2 \zeta^2 \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}{R^6} \right] \quad (1.66e)$$

donde $\boldsymbol{\rho} = \hat{\rho} r \sin \theta$ y \hat{I} es la diádica unitaria en el plano xy . De la ec. (1.66b) se puede ver que no hay ningún flujo de energía y por lo tanto no hay radiación en el sistema de referencia que se coacelera con la carga. Sin embargo, como vimos más arriba, el campo de radiación de la carga es detectable en la cuña F , aunque no les es accesible a los observadores de Rindler.

Como veremos más adelante, cuando analicemos la radiación cuánticamente, también hay una diferencia fundamental entre el comportamiento del campo en la cuña R y la cuña F . En este caso, se ha concluido que el número de clicks que hace un detector uniformemente acelerado con respecto a observadores inerciales coincide con el número de clicks (de emisión y absorción) que hace el detector con respecto a observadores coacelerados. Es interesante contrastar este resultado con los resultados clásicos obtenidos en este capítulo, pues aunque la radiación es dependiente del observador y

de la región del espacio-tiempo en la que se encuentre, el hecho de que los clicks de un detector coincidan para observadores inerciales y de Rindler, es indicativo de algún aspecto *invariante* del fenómeno de radiación.



Capítulo 2

El campo cuántico para observadores acelerados

En este capítulo presentamos un esbozo del análisis de la correspondencia entre las descripciones cuánticas de los campos sin interacción cuando son realizadas desde un marco de referencia inercial y uno acelerado. Como veremos, para ésto es necesario determinar con respecto a qué campos de Killing estacionarios se va cuantizar al campo. En la métrica de Minkowski, además de los campos de Killing de traslación temporal usuales (correspondientes a todas las posibles elecciones de la dirección temporal que puedan hacer observadores inerciales), los generadores de *boosts* también son campos de Killing de este espacio-tiempo. Estos campos son tipo tiempo en algunas regiones del espacio-tiempo. En términos de un sistema de coordenadas global inercial $\{t, x, y, z\}$, el campo de Killing que genera boosts a lo largo del eje z está dado por

$$b^a = a(zt^a + tz^a), \quad (2.1)$$

donde a es una constante que corresponde a la la aceleración propia de la órbita de b^a cuando se parametriza con respecto al tiempo propio [39].

El campo b^a también corresponde a un campo de Killing de la cuña de Rindler R , donde es estático y tipo tiempo. Entonces, dado que R es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, se puede aplicar en esta región el formalismo de cuantización sobre espacio-tiempos estáticos y globalmente hiperbólicos al campo de Klein-Gordon. Análogamente, la cuña L también

es estática y globalmente hiperbólica y en esta región se puede llevar a cabo la cuantización del campo con el campo de Killing adecuado (ver más adelante).

Como resultado de este proceso en la cuña R , se obtiene un estado de vacío conocido como el *vacío de Rindler*, $|0_R\rangle$. Para la cuña L se obtiene un estado de vacío análogo, $|0_L\rangle$. Los estados en el espacio de Fock asociado a esta cuantización son interpretados como *estados de partículas* por observadores de Rindler, esto es, observadores que siguen las órbitas de b^a . Como estos observadores son estáticos con respecto al tiempo de Rindler, esta cuantización del campo es la *más natural para ellos*.

2.1. Teoría cuántica de campos en espacios curvos

En la mayoría de las presentaciones de la teoría cuántica de campos, ésta se motiva a partir de la construcción de una versión relativista de la teoría cuántica de una partícula. Sin embargo, por este camino aparecen varios problemas matemáticos y de interpretación, por lo que al final se opta por construir una teoría cuántica del campo en cuestión [32]. Notemos por ejemplo, que el espacio de Fock que corresponde al espacio de estados se introduce para poder representar estados de muchas partículas. Sin embargo, la teoría del campo cuántico no es, *per se*, una teoría de partículas y en general, en cada situación en la que se cuantice el campo se deberá justificar una interpretación en términos de partículas (por ejemplo, mediante el uso de detectores [42]). Esta característica de la teoría cuántica de campos es muy evidente cuando el espacio-tiempo no es plano. Resulta que en el espacio-tiempo de Minkowski, el estado de vacío (usual) es invariante de Lorentz, esto es, si se realizan los mismos procedimientos de cuantización en cualesquiera sistemas inerciales, se obtendrían estados de vacío unitariamente equivalentes. Sin embargo, cuando el espacio-tiempo no posee esta simetría, no se puede garantizar que los mismos métodos de cuantización sobre diferentes conjuntos de observadores generen estados de vacío equivalentes, aunque cada estado de éstos sigue siendo un estado *de vacío* de la teoría — cada uno representa un estado sin partículas para cada marco de referencia donde se efectuó la cuantización. Lo mismo ocurre si cuantizamos el campo en el espacio-tiempo de Minkowski con respecto a marcos de referencia no inerciales. Por ejemplo, si se cuantiza con respecto a observadores de Rind-

ler se puede mostrar que la restricción de $|0_M\rangle$ a la cuña R corresponde a un estado térmico con un número indefinido de partículas. En esta sección vamos a revisar las ideas fundamentales de la teoría cuántica del campo de Klein Gordon tanto en un espacio-tiempo plano como en uno curvo, haciendo énfasis en el caso particular de espacio-tiempos estacionarios.

La teoría del campo clásico se puede reformular directamente sobre cualquier espacio-tiempo globalmente hiperbólico¹. La ecuación diferencial sobre la variedad que define a un espacio-tiempo globalmente hiperbólico debe tener datos iniciales definidos sobre alguna hipersuperficie de Cauchy, Σ . Cuando los datos iniciales tienen asociada una única solución decimos que la formulación de datos iniciales de la ecuación está bien definida [43]; este es el caso de la ecuación del campo de Klein-Gordon,

$$\square\phi - m^2\phi = 0. \quad (2.2)$$

El siguiente teorema sirve para relacionar las soluciones de una ecuación diferencial con datos iniciales de soporte compacto sobre una hipersuperficie de Cauchy en cualquier espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Siguiendo a Kay [23], definimos

$$\mathcal{D}(\Sigma) \equiv C_0^\infty(\Sigma) \oplus C_0^\infty(\Sigma) \quad (2.3)$$

como el espacio de datos iniciales² (funciones) reales, suaves y de soporte compacto sobre la hipersuperficie Σ .

Teorema 1 (Leray) *Sea (M, g) un espacio-tiempo orientable y globalmente hiperbólico, Σ alguna hipersuperficie de Cauchy con vector normal unitario dirigido a futuro n^a . Entonces, los datos de Cauchy $\Phi \in \mathcal{D}(\Sigma)$ dados por*

$$\Phi = \begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} \quad f = \phi|_\Sigma \quad p = n^a \nabla_a \phi|_\Sigma \quad (2.4)$$

definen una única solución $\phi \in C^\infty(M)$, teniendo soporte compacto en cualquier otra hipersuperficie de Cauchy.

¹Este tipo de espacios son aquéllos donde se puede encontrar una hipersuperficie espacial tal que toda curva causal (que tiene vector tangente temporal o nulo) que pase por cualquier evento siempre intersekte a la hipersuperficie; en este caso decimos que la hipersuperficie es de Cauchy [42].

²No confundir el espacio de datos iniciales en Σ , $\mathcal{D}(\Sigma)$, con el *dominio de dependencia* de Σ , $D(\Sigma)$.

Un punto en el espacio fase clásico Γ corresponde a la especificación de un par de funciones, el campo φ y la densidad de momento conjugado π , sobre una hipersuperficie de Cauchy Σ (por ejemplo, una hipersuperficie de t constante en el espacio de Minkowski en coordenadas inerciales).

La teoría de campo escalar real tiene asociada una forma simpléctica $\Omega : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Omega([\varphi_1, \pi_1], [\varphi_2, \pi_2]) = \int_{\Sigma} (\pi_1 \varphi_2 - \pi_2 \varphi_1) d\Sigma. \quad (2.5)$$

Para poder garantizar que Ω está bien definida, vamos a restringir el espacio fase a soluciones que tengan soporte compacto sobre superficies de Cauchy. Entonces, en este caso, el teorema 1 permite identificar el espacio de datos iniciales $\mathcal{D}(\Sigma)$ con el espacio-fase clásico del campo Γ . Nos referiremos indistintamente a una solución ψ como un punto de Γ o de $\mathcal{D}(\Sigma)$.

En una teoría cuántica del campo se requiere que las funciones

$$\Omega([\varphi_1, \pi_1], \cdot) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

asociadas a la solución real ψ con datos iniciales φ_1, π_1 , estén representadas irreduciblemente por *operadores* $\hat{\Omega}([\varphi_1, \pi_1], \cdot)$ sobre algún espacio de Hilbert complejo y que satisfagan ciertas condiciones de conmutación :

$$[\hat{\Omega}([\varphi_1, \pi_1], \cdot), \hat{\Omega}([\varphi_2, \pi_2], \cdot)] = -i\Omega([\varphi_1, \pi_1], [\varphi_2, \pi_2]) \hat{\mathbf{I}} \quad (2.7)$$

Tomemos una solución $\psi \in D(\Sigma)$ (real y con datos iniciales de soporte compacto), y descompongámosla en sus partes que oscilan con frecuencia positiva y negativa con respecto al tiempo inercial t :

$$\psi = \psi^+ + \psi^-, \quad (2.8)$$

por ejemplo, mediante su expansión de Fourier. Sea $D^+(\Sigma)$ el espacio generado por las partes de frecuencia positiva de las soluciones en $D(\Sigma)$, nótese que es necesariamente complejo. Sobre este espacio se define el producto de Klein Gordon por

$$\langle \psi^+ | \phi^+ \rangle_{KG} = -i\Omega(\overline{\psi^+}, \phi^+). \quad (2.9)$$

La función Ω se puede extender de $D(\Sigma)$ a $D^+(\Sigma)$ por continuidad usando la ec. (2.5). Se puede mostrar que el producto interno dado por la ec. (2.9) en efecto es positivo definido. Luego, se completa $D^+(\Sigma)$ con este producto

interno con lo que se obtiene un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} , al que llamaremos *espacio de Hilbert de una partícula* (que no es el espacio de estados de la teoría cuántica, ver más adelante). Asimismo, la asociación $\psi \mapsto \psi^\dagger$ define un mapeo lineal $K : D(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}$ de rango denso [42].

La teoría cuántica se implementa tomando como espacio de Hilbert de estados al espacio de Fock asociado a \mathcal{H} , $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})^3$. Finalmente, para cada $\psi \in D(\Sigma)$ se define el operador de campo $\hat{\Omega}(\psi, \cdot)$ sobre $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ como:

$$\hat{\Omega}(\psi, \cdot) = i\hat{a}(\overline{K\psi}) - i\hat{a}^\dagger(K\psi), \quad (2.11)$$

donde \hat{a} y \hat{a}^\dagger , los operadores de aniquilación y creación en \mathcal{F} , están definidos de la siguiente manera: Dado $\varphi \in \mathcal{H}$ y $|\psi\rangle = (\psi, \psi^a, \psi^{a_1 a_2}, \dots) \in \mathcal{F}$ tenemos

$$\hat{a}(\varphi) |\psi\rangle = (\overline{\varphi}_a \psi^a, \overline{\varphi}_a \psi^{a a_1}, \dots), \quad (2.12)$$

$$\hat{a}^\dagger(\varphi) |\psi\rangle = (0, \psi \varphi^a, \sqrt{2} \varphi^{(a} \psi^{b)}, \dots), \quad (2.13)$$

donde $\overline{\varphi}_a \psi^a = \langle \varphi | \psi \rangle_{\mathcal{H}}$ es el producto interno de \mathcal{H} . Nótese que en la notación que adoptamos, el operador $\hat{a}(\varphi)$ es antilineal en φ .⁴

En resumen, la idea central del procedimiento de cuantización para cualquier *sistema lineal* $(D, \Omega, \mathcal{T}(t))$, donde D es un espacio vectorial, $\Omega : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una forma simpléctica y $\mathcal{T}(t)$ un operador de evolución temporal, es construir una *estructura de una partícula* $(K, \mathcal{H}, U(t))$, donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert separable, $U(t)$ un grupo unitario con ‘energía’ estrictamente positiva⁵ y $K : D \rightarrow \mathcal{H}$ es un mapeo real, lineal de rango denso compatible con la forma simpléctica, $2\text{Im} \langle K\psi | K\psi \rangle = \Omega(\phi, \psi)$, y que satisface $K(\mathcal{T}(t)\phi) = U(t)(K(\phi))$ [23]. Teniendo la estructura de una partícula, la teoría cuántica se realiza construyendo el espacio de Fock de \mathcal{H} y definiendo los operadores dados por la ec. (2.11).

Antes de pasar a la construcción de la estructura de una partícula para el campo de Klein Gordon en espacio-tiempos estacionarios, vamos a discutir

³Definido por

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus_s \mathcal{H} \oplus_s (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus_s \dots \quad (2.10)$$

La suma directa se toma simetrizada para campos bosónicos. Si no hay ambigüedad, lo llamaremos solo \mathcal{F} .

⁴Para remediar esto y hacerse lineal en φ se puede definir como $\hat{a}(\overline{\varphi})$ [42]. Sin embargo, optamos por la convención de Wald [42] dada por la ec. (2.12).

⁵Esto es, que tiene un generador h autoadjunto, positivo y de rango denso.

la relación de la ec. (2.11) con la expresión más “común” del campo cuántico:

$$\hat{\phi}(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[\hat{a}_p e^{-i\omega_p t + ipz} + \hat{a}_p^\dagger e^{i\omega_p t - ipz} \right]. \quad (2.14)$$

Esta expresión no está bien definida matemáticamente pues la integral no converge [42], en este sentido, no se le puede considerar como un operador sobre el espacio de estados. Lo que sí representa la ec. (2.14) es una distribución que arroja operadores cuando se evalúa en funciones de prueba. Para darle sentido a ésto, consideremos las funciones de prueba $f \in C_0^\infty(M)$. Dada f de este tipo, construimos las soluciones *avanzada* Af y *retardada* Rf de la ecuación de KG con fuente f como

$$(\square - m^2)Af = f \quad (\square - m^2)Rf = f \quad (2.15)$$

donde $Af = 0$ fuera del pasado causal del soporte de f y $Rf = 0$ fuera del futuro causal del soporte de f . En términos de éstas funciones se puede construir una solución a la ecuación homogénea de KG dada por

$$Ef \equiv Af - Rf. \quad (2.16)$$

Con ésta ecuación se está definiendo un mapeo suprayectivo $E : C_0^\infty(M) \rightarrow D(\Sigma)$. Se puede ver [42] que para toda solución $\psi \in D(\Sigma)$ y para toda función de prueba f se tiene que

$$\int_M \psi f d^4x = \Omega(Ef, \psi). \quad (2.17)$$

Ésto se puede interpretar como que la función $\Omega(Ef, \cdot)$ actúa ‘integrando’ la solución ψ sobre todo M ‘pesada’ con f . Esto sugiere que el operador $\hat{\Omega}(Ef, \cdot)$ está relacionado con $\hat{\phi}(x, t)$. En efecto, si multiplicamos $\hat{\phi}(x, t)$ por f e integramos sobre todo el espacio de Minkowski obtenemos

$$\hat{\phi}(f) \equiv \hat{\Omega}(Ef, \cdot) = ia(\overline{K(Ef)}) - ia^\dagger(K(Ef)), \quad (2.18)$$

donde hemos usado la ec. (2.11). De aquí la interpretación de $\hat{\phi}(x, t)$ como una distribución y que, para obtener el operador de campo, haya que evaluarla en alguna función de prueba. Es por ésto que el operador de campo no tiene sentido si se le evalúa en un punto del espacio-tiempo.

2.1.1. Teoría cuántica de campos en espacio-tiempos estacionarios

En un espacio-tiempo estacionario (M, g_{ab}) se cuenta con un grupo uniparamétrico de isometrías $\alpha_t : M \rightarrow M$ con órbitas tipo tiempo. Sea ξ^a el vector de Killing que las genera. Haciendo uso del teorema 1 se define el espacio de soluciones con datos iniciales de soporte compacto, $D(\Sigma)$; sobre este espacio está definida la forma simpléctica Ω dada por la ec. (2.5).

La idea básica de la construcción de la teoría de campo cuántico en espacio-tiempos estacionarios es escoger el espacio de Hilbert de una partícula \mathcal{H} como el subespacio de soluciones (complejas) que tienen frecuencia puramente positiva con respecto al tiempo de Killing t . Ésto se podría lograr mediante un análisis de Fourier a lo largo de las órbitas de ξ^a aunque, sin embargo, no se puede garantizar de antemano que a lo largo de éstas curvas las soluciones tengan el comportamiento asintótico adecuado para que exista su descomposición de Fourier. Una construcción detallada de esta teoría cuántica del campo de Klein Gordon resulta demasiado técnica y va más allá de los propósitos de esta tesis, por lo que a continuación presentamos sólo un esbozo de la construcción que hace Wald [42] del espacio de Hilbert de una partícula de la teoría cuántica del campo en espacio-tiempos estacionarios que se basa en una descomposición en frecuencias positivas y negativas sin utilizar el análisis de Fourier (Ashtekar [1] también la desarrolla y se puede ver una versión matemáticamente rigurosa en Kay [23]). Sin embargo, esta construcción no es tan general, pues está limitada por el requerimiento de que exista una superficie de Cauchy Σ donde, para alguna $\epsilon > 0$, se cumpla que

$$-\xi^a \xi_a \geq -\epsilon \xi^a n_a > \epsilon^2, \quad (2.19)$$

donde n^a corresponde al vector de shift. Notemos que esta condición no se cumple en el espacio-tiempo de Rindler, más adelante trataremos éste caso.

Se complexifica el espacio de soluciones, esto es, se toma $D_{\mathbb{C}} = D(\Sigma) + iD(\Sigma)$ y se define la norma de *energía*:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_{\text{en}} = \int_{\Sigma} T_{ab}(\psi_1, \psi_2) \xi^a d\Sigma^b, \quad (2.20)$$

donde T_{ab} representa el tensor clásico de energía-momento dado por

$$T_{ab}(\psi_1, \psi_2) = \nabla_{(a} \bar{\psi}_1 \nabla_{b)} \psi_2 - \frac{1}{2} g_{ab} [\nabla^c \bar{\psi}_1 \nabla_c \psi_2 + m^2 \bar{\psi}_1 \psi_2]. \quad (2.21)$$

La norma $\langle | \rangle_{\text{en}}$ es independiente de la elección de Σ e invariante bajo la traslación temporal $\tau_t \equiv \psi \circ \alpha_{-t}$. Se completa $D_{\mathbb{C}}$ en la norma $\langle | \rangle_{\text{en}}$, con lo que se obtiene un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H}' que nos servirá para construir el espacio de Hilbert de una partícula. La acción de τ_t , cuando se extiende a \mathcal{H}' , corresponde a la de un grupo uniparamétrico fuertemente continuo de la forma $U(t) = \exp(-i\tilde{h}t)$ donde $\tilde{h} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ es un operador autoadjunto. De la definición de τ_t se tiene que para toda $\psi \in D_{\mathbb{C}}$

$$\tilde{h}\psi = i\mathcal{L}_{\xi}\psi, \quad (2.22)$$

donde \mathcal{L}_{ξ} denota la derivada de Lie. Usando que $m > 0$ y la condición (2.19) se puede probar [42] que el espectro de \tilde{h} está acotado por arriba de cero y por lo tanto \tilde{h}^{-1} es un operador acotado en \mathcal{H}' . Esta condición es necesaria para poder definir al operador K y que sea compatible con la forma simpléctica [23] (ver las ecs. (2.23) y (2.24)).

De la ec. (2.22) se puede ver que las “soluciones de frecuencia positiva” corresponden al subespacio espectral de \tilde{h} con valores propios positivos, que llamaremos \mathcal{H}'_+ . Se define el operador $K : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'_+$ como la proyección sobre \mathcal{H}'_+ . Con ésto, podemos definir un producto interno $\mu : D(\Sigma) \times D(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mu(\psi_1, \psi_2) = 2\text{Re}\langle K\psi_1 | \tilde{h}^{-1}K\psi_2 \rangle_{\text{en}} \quad (2.23)$$

El espacio de Hilbert \mathcal{H} , de la estructura de una partícula se define como el espacio que resulta de completar \mathcal{H}'_+ en el producto de Klein Gordon

$$\langle K\psi_1 | K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = -i\Omega(\overline{K\psi_1}, K\psi_2) = \mu(\psi_1, \psi_2) - \frac{i}{2}\Omega(\psi_1, \psi_2). \quad (2.24)$$

Esta es la construcción de la estructura de una partícula para el campo de Klein Gordon que surge de la simetría estacionaria del espacio-tiempo. En efecto, las isometrías α_t del espacio-tiempo juegan un papel fundamental en la construcción del operador autoadjunto \tilde{h} que define el espacio de ‘soluciones con energía positiva’.

Como ya mencionamos, se basa en que se satisfaga la condición (2.19), que permite garantizar que \tilde{h}^{-1} es acotado. Geométricamente, la ec. (2.19) nos dice que el vector de Killing temporal ξ^a no puede hacerse tipo luz o cero en el espacio-tiempo. Estas condiciones no las satisface el vector de Killing

temporal τ^a (que es el generador de *boosts* b^a) del espacio-tiempo de Rindler. La construcción de la estructura de una partícula para el campo cuántico en este espacio-tiempo, realizada por Kay en [24], sigue los lineamientos generales que hemos expuesto aquí, salvo que la prueba de que el correspondiente operador \tilde{h}^{-1} es acotado ahora se basa en que en el espacio-tiempo de Rindler se satisface la siguiente desigualdad

$$\int_{\Sigma_R} f A f dx d^2\xi \geq \int_{\Sigma_R} \alpha |f|^2 dx d^2\xi \tag{2.25}$$

para toda $f \in C_0^\infty(\Sigma_R)$, donde $\alpha = \zeta^2 m^2$ y A es el operador

$$A = -\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \zeta^2 (m^2 - \Delta), \tag{2.26}$$

donde Δ es el laplaciano en coordenadas cartesianas x, y . Esta demostración, que garantiza la existencia de una teoría del campo cuántico de Klein Gordon en las cuñas de Rindler, es bastante técnica y se puede consultar en [24]. Nosotros procederemos construyendo una expresión análoga a la de la ec. (2.14) en términos de *modos de Unruh* y sus respectivos operadores de creación y aniquilación.

2.2. Cuantización con respecto a observadores acelerados

Sea Σ una hipersuperficie de Cauchy del espacio-tiempo de Minkowski que pasa por la intersección de los horizontes de Rindler. Sean Σ_L y Σ_R las intersecciones de Σ con las cuñas L y R , éstas van a ser hipersuperficies de Cauchy para estas regiones. Si se realiza el procedimiento de cuantización del campo de Klein Gordon sobre la cuña R descrito en la sección anterior, usando como generador de traslaciones temporales al vector de Killing temporal τ^a de la métrica de Rindler (que en R corresponde al generador de *boosts*), ec. (1.51), se obtiene un espacio de Hilbert de una partícula que denotaremos \mathcal{H}_R . Al cuantizar el campo de la misma manera sobre la cuña L , ahora con respecto al generador de traslaciones temporales del tiempo de Rindler en esa cuña (que corresponde a $-b^a$, pues se ha cambiado la dirección de este campo de Killing para que la dirección temporal futura asociada a los observadores en esta cuña coincida con la dirección futura asociada a observadores inerciales) se obtiene un espacio de Hilbert de una partícula \mathcal{H}_L .

Para describir al campo en todo el espacio-tiempo de Minkowski en términos de las cuantizaciones respecto a observadores acelerados consideramos el espacio de Hilbert de una partícula definido por

$$\mathcal{H}_U = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R. \quad (2.27)$$

A la cuantización del campo usando este espacio de Hilbert de una partícula la llamaremos *cuantización de Unruh*. El espacio de estados de esta cuantización es el espacio

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_U) \simeq \mathcal{F}_s(\mathcal{H}_L) \otimes \mathcal{F}_s(\mathcal{H}_R) \quad (2.28)$$

donde $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ representa el espacio de Fock simétrico asociado a espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Las soluciones de la ec. (2.2) con frecuencia positiva respecto al tiempo de Rindler en la cuña R que se anulan asintóticamente son de la forma

$$\psi_\omega(\xi) = \frac{\sqrt{\sinh \pi\omega}}{\pi} e^{-i\omega\tau} K_{i\omega}(m\zeta) \quad \omega > 0 \quad (2.29)$$

donde $\xi = (\tau, \zeta)$ y $K_{i\omega}(x)$ es la función de Bessel modificada del tercer tipo o función de Macdonald [44]. El factor de normalización se escoge de tal manera que estas funciones sean ortonormales en el producto de Klein-Gordon, ec. (2.9), que en la cuña R toma la forma

$$\langle \psi_\omega | \psi_{\omega'} \rangle_{KG} = \frac{i}{2} \int_{\Sigma_R} (\psi_\omega^* \nabla_\mu \psi_{\omega'} - \psi_{\omega'} \nabla_\mu \psi_\omega^*) d\Sigma^\mu, \quad (2.30)$$

donde Σ_R es una hipersuperficie de Cauchy del espacio-tiempo de Rindler.

Las funciones $K_{i\omega}(m\zeta)$ tienen una singularidad esencial (oscilan “infinitamente”) en el límite $\zeta \rightarrow 0$ [44], por lo que $\psi_\omega(\xi)$ no están definidos en el horizonte ($\tau \rightarrow \pm\infty$ y $\zeta \rightarrow 0$) cuando $\omega \neq 0$. Los modos definidos por la ec. (2.29), llamados modos de Fulling [14], y sus conjugados $\psi_\omega^*(\xi)$ forman un conjunto completo del espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Rindler. El espacio de Hilbert de una partícula para la cuantización del campo en la cuña R , \mathcal{H}_R , se construye completando en el sentido de Cauchy el espacio generado por las $\psi_\omega(\xi)$ en el producto interno dado por la ec. (2.30) (una construcción formal de este

espacio se hace en [24]). El operador del campo asociado a esta cuantización, $\hat{\phi}_R$ se puede expresar como

$$\hat{\phi}_R(\xi) = \int_0^\infty [\psi_\omega(\xi)\hat{r}_\omega + \psi_\omega^*(\xi)\hat{r}_\omega^\dagger] d\omega \quad \xi \in R \quad (2.31)$$

donde los operadores \hat{r}_ω , \hat{r}_ω^\dagger representan, respectivamente, operadores de aniquilación y creación de partículas de Rindler en la cuña R , estos operadores satisfacen relaciones de conmutación canónicas. Hay que enfatizar que el campo dado por la ec. (2.31) está definido sólo sobre la cuña R , que es donde están definidos los modos de Fulling.

Para construir el espacio de Hilbert \mathcal{H}_L y el operador de campo $\hat{\phi}_L$ de la cuantización en L se procede análogamente usando como generador de traslación temporal al campo $-b^a$ (ver el comentario previo a la ec. (1.47)) y se define el producto de Klein-Gordon sobre una hipersuperficie Σ_L de L .

El operador de campo en la cuantización de Unruh, definida por la ec. (2.27), toma la forma

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_L(x) \otimes \hat{1}_R + \hat{1}_L \otimes \hat{\phi}_R(x) \quad (2.32)$$

Claramente los operadores $\hat{\phi}_L(x)$ y $\hat{\phi}_R(x)$ conmutan,

$$[\hat{\phi}_L(x), \hat{\phi}_R(x')] = 0 \quad (2.33)$$

reflejando el hecho de que las regiones L y R están causalmente desconectadas.

Construida de esta manera, en términos de soluciones con soporte sobre la doble cuña $L \cup R$, pareciera que la descripción cuántica de Unruh no puede describir la física fuera de las cuñas L y R . Recuérdese que los espacios de Hilbert de una partícula \mathcal{H}_L y \mathcal{H}_R fueron generados a partir de modos de frecuencia positiva con datos iniciales en Σ_L y Σ_R respectivamente. Como ya mencionamos, éstas hipersuperficies de Cauchy se pueden ver como la restricción de un hipersuperficie de Cauchy Σ de todo el espacio-tiempo de Minkowski a las regiones L y R respectivamente, por lo que los datos iniciales de los modos en las cuantizaciones en las cuñas L y R definen soluciones únicas de la ecuación de Klein-Gordon en todo el espacio-tiempo de Minkowski, llamados *modos de Unruh*. En la siguiente sección vamos a definir estos modos globales. Como veremos, los modos de Unruh, al restringirse a la cuña R toman la forma de los modos de Fulling (comparar ec. (2.43) con la ec. (2.29)).

2.2.1. Modos de “boost” y de Unruh

La mayoría de las derivaciones de la cuantización de Unruh [37] que se encuentran en la literatura no desarrollan explícitamente la forma funcional de los modos del campo que son de frecuencia positiva con respecto al tiempo de Rindler en cada cuña, que llamamos *modos de Unruh*. En efecto, se puede cuantizar al campo trabajando únicamente con las restricciones de estos modos a los horizontes [37], [42]. Sin embargo, en el análisis que desarrollaremos en el capítulo 3 necesitaremos la forma funcional de estos modos para poder calcular explícitamente valores de expectación del tensor de energía-momento del campo. Para ésto, en esta sección introducimos los modos de “boost” y de Unruh siguiendo la referencia [28]. En el apéndice A analizamos el comportamiento de estos modos cerca de los horizontes de Rindler.

Consideremos el espacio de soluciones clásicas globales a la ec. (2.2). Dentro de este espacio se pueden caracterizar las soluciones que sean de frecuencia positiva respecto al parámetro de boosts (o tiempo de Rindler) τ dentro de las cuñas L y R . Esta clase de soluciones, llamadas ‘Modos de Bessel Minkowskianos’ fueron introducidas por Geroch [16]. Narozhny *et.al.* [28] y Fulling y Unruh [15] las llaman *modos de boost*, que es el nombre que nosotros usaremos.

Tomamos una onda plana (no normalizada) solución a la ec. (2.2) de la forma

$$P_p^\pm(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{\mp i(\omega_p t - pz)}, \quad (2.34)$$

donde $x = (t, z)$, $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$ y el signo $-$ ($+$) corresponde a frecuencia positiva (negativa) con respecto al tiempo inercial.

Los modos de boost se pueden definir como la siguiente superposición de ondas planas [28]

$$\begin{aligned} B_\omega^\pm(x) &= \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta^\pm(x) e^{-i\omega\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2^{3/2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp im(t \cosh\theta - z \sinh\theta)} e^{-i\omega\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde $-\infty < \omega < \infty$ y se cambió la variable p por la *rapidez* θ usando

$$m \sinh(\theta) = p, \quad m \cosh(\theta) = \omega_p, \quad -\infty < \theta < \infty. \quad (2.36)$$

El objeto descrito por (2.35) no está bien definido como “función” de t, z , nótese que el integrando tiene una contribución que *oscila infinitamente* cuando $\theta \rightarrow \pm\infty$.

En general, la ec. (2.35) no se puede interpretar como la definición de una función. En particular, es divergente en el origen ($t = 0, z = 0$) y entonces, no puede ser una solución (global) a la ecuación de Klein-Gordon en todo el espacio-tiempo si se insiste en considerarla como función. Sin embargo, estos problemas se pueden evitar si uno considera estas cantidades como *distribuciones*, requiriendo entonces que evaluarlas sea necesario integrarlas con una función de prueba adecuada. En este trabajo estos objetos (así como los modos de Unruh que definiremos más adelante ec. (2.41)) siempre serán considerados como entes distribucionales, lo cual es consistente con la naturaleza distribucional del campo cuántico (ver la ecuación (2.18)). Para los propósitos de este trabajo vamos a considerar solamente funciones de prueba de soporte compacto en el espacio-tiempo de Minkowski M ($C_0^\infty(M)$).

Formalmente, los modos de boost son ortogonales en el producto de Klein-Gordon ec. (2.30) (definido sobre una hipersuperficie de Cauchy de M Σ):

$$\langle B_\omega^\pm | B_\mu^\pm \rangle_{KG} = \pm \delta(\omega - \mu) \quad (2.37)$$

y son *funciones* propias del generador de boosts [16] *dentro* de las cuatro cuñas de Rindler

$$\mathbf{B} B_\omega^\pm = -i\omega B_\omega^\pm \quad \text{donde} \quad \mathbf{B} = t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.38)$$

Nótese que los modos B_ω^\pm son soluciones de la ecuación de KG de frecuencia positiva (negativa) con respecto al parámetro de boost τ en las cuñas L y R siempre y cuando $\omega > 0$ ($\omega < 0$). Al dividir el conjunto de los modos en partes de frecuencia positiva y negativa se está dejando a un lado el conjunto de modos de frecuencia $\omega = 0$, lo que podría ser una fuente de problemas [28] (ver más adelante).

De ahora en adelante vamos a usar solamente modos de boost con $\omega > 0$, B_ω^+ , y ya no usaremos el superíndice: $B_\omega \equiv B_\omega^+$. Este conjunto de modos se puede usar como una base del espacio de soluciones de frecuencia positiva

respecto al tiempo inercial.⁶

La idea de Unruh [37] para dar una cuantización del campo asociada a observadores acelerados consiste en la construcción de dos conjuntos de modos L_ω y R_ω a partir de combinaciones de modos de boost y sus conjugados de tal manera que sean de frecuencia positiva con respecto al parámetro de boost (el tiempo de Rindler) en las cuñas L y R respectivamente y nulos en la cuña opuesta (R y L respectivamente). En las cuñas F y P serán solución de la ecuación de Klein-Gordon. Estos modos, llamados modos de Unruh, están definidos por

$$R_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \left[e^{\pi\omega/2} B_\omega(x) - e^{-\pi\omega/2} B_{-\omega}^*(x) \right] \quad (2.41a)$$

$$L_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \left[e^{\pi\omega/2} B_{-\omega}(x) - e^{-\pi\omega/2} B_\omega^*(x) \right] \quad (2.41b)$$

donde $\omega > 0$. Sólo porque las vamos a usar posteriormente, invertimos estas ecuaciones:

$$B_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \left[e^{\pi\omega/2} R_\omega(x) + e^{-\pi\omega/2} L_\omega^*(x) \right] \quad (2.42a)$$

$$B_{-\omega}(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \left[e^{\pi\omega/2} L_\omega(x) + e^{-\pi\omega/2} R_\omega^*(x) \right] \quad (2.42b)$$

Se puede mostrar que cuando se restringen los modos R_ω a R , éstos coinciden con los modos de Fulling, ec. (2.29) y también ocurre lo análogo para los modos L_ω cuando se restringen a L [16]. Esto es, los datos iniciales de los modos de Unruh coinciden con los de los modos de Fulling. Hemos visto que las soluciones de la ecuación del campo pueden ser representadas por sus datos iniciales [23] (ver el teorema 1 de la sección 2.1) y por lo tanto, completando en el sentido de Cauchy el espacio generado por las L_ω y R_ω obtendríamos, respectivamente, \mathcal{H}_L y \mathcal{H}_R .

⁶Otras propiedades directas de los modos de boost es que para $x = (t, z)$,

$$B_\omega(-x)^* = B_{-\omega}(x). \quad (2.39)$$

Para $x = 0$ se tiene que

$$B_\omega(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \delta(\omega) \quad (2.40)$$

En efecto, como se desarrolla en el apéndice A, las representaciones de los modos de Unruh en las diferentes cuñas son las siguientes:

$$R_\omega|_R(\tau, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\sinh \pi\omega} e^{-i\omega\tau} K_{i\omega}(m\zeta) \quad (2.43)$$

$$R_\omega|_F(\tau, \zeta) = -\frac{i}{2^{3/2}} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \left[e^{\omega\pi} H_{i\omega}^{(2)}(m\zeta) + e^{-\omega\pi} H_{i\omega}^{(1)}(m\zeta) \right] \quad (2.44)$$

$$R_\omega|_L(\tau, \zeta) = 0 \quad (2.45)$$

$$R_\omega|_P(\tau, \zeta) = \frac{i}{2^{3/2}} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2 \sinh \pi\omega}} \left[H_{i\omega}^{(1)}(m\zeta) + H_{i\omega}^{(2)}(m\zeta) \right] \quad (2.46)$$

Las partes espaciales de las representaciones de $L_\omega(x)$ son funcionalmente iguales a las de $R_\omega(x)$, en las temporales hay que hacer $\omega \rightarrow -\omega$ en las cuñas f y P :

$$L_\omega|_R(\tau, \zeta) = 0 \quad (2.47)$$

$$L_\omega|_F(\tau, \zeta) = -\frac{i}{2^{3/2}} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \left[e^{\omega\pi} H_{i\omega}^{(2)}(m\zeta) + e^{-\omega\pi} H_{i\omega}^{(1)}(m\zeta) \right] \quad (2.48)$$

$$L_\omega|_L(\tau, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\sinh \pi\omega} e^{-i\omega\tau} K_{i\omega}(m\zeta) \quad (2.49)$$

$$L_\omega|_P(\tau, \zeta) = \frac{i}{2^{3/2}} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2 \sinh \pi\omega}} \left[H_{i\omega}^{(1)}(m\zeta) + H_{i\omega}^{(2)}(m\zeta) \right] \quad (2.50)$$

El operador de campo en la cuantización de Unruh toma la forma de la ec. (2.32) con $\hat{\phi}_L(x)$, $\hat{\phi}_R(x)$ expresados en términos de los modos de Unruh:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_L(x) + \hat{\phi}_R(x) = \int_0^\infty d\omega (R_\omega(x) \hat{1}_L \otimes \hat{r}_\omega + L_\omega(x) \hat{l}_\omega \otimes \hat{1}_R + \text{H.C.}) \quad (2.51)$$

donde \hat{r}_ω y \hat{l}_ω son operadores de aniquilación en $\mathcal{F}(\mathcal{H}_R)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{H}_L)$ respectivamente.

Para encontrar una base de $\mathcal{F}(\mathcal{H}_U)$, ec. (2.28), basta con encontrar las respectivas bases de los espacios $\mathcal{F}(\mathcal{H}_R)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{H}_L)$. Para $\mathcal{F}(\mathcal{H}_R)$ escogemos una base ortonormal cuyos elementos sean estados con un número definido de partículas n_J de Rindler en la cuña R , $|J\rangle_R$.

Sea J_{ω_m} el número de partículas en este estado cuyas frecuencias están centradas en el modo particular ω_m , $m = 0, 1, \dots$. Entonces, el estado $|J\rangle_R$ está definido por el conjunto

$$J = \{J_{\omega_0}, J_{\omega_1}, \dots, J_{\omega_m}, \dots\}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} J_{\omega_m} = n_J. \quad (2.52)$$

Nótese que sólo un número finito de las J_{ω_m} son distintas de cero. El estado $|J\rangle_R$ se puede construir a partir del vacío de Rindler de la siguiente manera

$$|J\rangle_R = |J_{\omega_0} J_{\omega_1} \dots\rangle_R = N_J (\hat{r}_{\omega_0}^\dagger)^{J_{\omega_0}} \dots (\hat{r}_{\omega_m}^\dagger)^{J_{\omega_m}} \dots |0\rangle_R \quad (2.53)$$

donde N_J es un factor de normalización tal que $\langle J|J\rangle = 1$ y el operador $\hat{r}_{\omega_m}^\dagger$ crea una partícula de Rindler con frecuencia centrada en ω_m . Dado un estado $|J\rangle_R$ se define

$$E(J) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m J_{\omega_m}, \quad (2.54)$$

que es proporcional a la energía de Rindler del estado, esto es, a la energía del estado asociada con el campo de Killing que genera los boosts en la dirección z . En efecto, dado que el tiempo propio de un observador de Rindler es $\eta = \tau/a$, la energía de modo con frecuencia centrada en ω_m es $a\omega_m$ y la energía de Rindler del estado $|J\rangle_R$ es $aE(J)$.

Dados dos elementos de esta base, $|J\rangle_R, |K\rangle_R$ se tiene

$${}_R\langle J|K\rangle_R = \delta(J, K) \equiv \delta_{J_{\omega_0}, K_{\omega_0}} \dots \delta_{J_{\omega_m}, K_{\omega_m}} \dots \quad (2.55)$$

donde $\delta_{J_{\omega_m}, K_{\omega_m}}$ son funciones delta de Kronecker. Para el espacio $\mathcal{F}(\mathcal{H}_L)$ se puede construir una base de manera análoga.

El conjunto de todos los estados $|J\rangle_L \otimes |K\rangle_R$ donde J y K son de la forma de la ec. (2.52) es una base de $\mathcal{F}(\mathcal{H}_U)$. Entonces, cualquier estado $|f\rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_U)$ se puede expresar en términos de esta base

$$|f\rangle = \sum_{J, K} F(J, K) |J\rangle_L |K\rangle_R \quad (2.56)$$

Las sumas corren sobre el espacio de todas las posibles *distribuciones* J y K , esto es, son de la forma

$$\sum_J = \prod_{m=0}^{\infty} \sum_{K_{\omega_m}=0}^{\infty} \quad (2.57)$$

Esta es la notación que usaremos durante el resto del trabajo, en particular, será muy útil cuando describamos los estados en términos de matrices de densidad, como se verá en el capítulo siguiente.

2.2.2. Relación entre operadores de Unruh y de Minkowski

Tomemos un estado de una partícula de Minkowski, $F \in \mathcal{H}_M$. Su restricción a la cuña R , que denotaremos por $F_R \equiv F|_R$, se puede descomponer de la siguiente forma:

$$F_R = \Phi_R^+ + \Phi_R^-, \quad (2.58)$$

donde Φ_R^+ y Φ_R^- a R son de frecuencia positiva y negativa, respectivamente, respecto al tiempo de Rindler cuando se evalúan en R . Análogamente, la restricción de F a la cuña L , se puede descomponer como

$$F_L = \Phi_L^+ + \Phi_L^-. \quad (2.59)$$

De esta manera, $F \in \mathcal{H}_M$ se puede escribir como

$$F = \Phi_R^+ + \Phi_R^- + \Phi_L^+ + \Phi_L^- \quad (2.60)$$

donde todas las funciones del lado derecho están definidas en todo el espacio-tiempo de Minkowski.

Consideremos bases discretas de todos los espacios de Hilbert involucrados. Estas se pueden construir a partir de las ondas planas, Ψ_p y de los modos de Unruh R_ω , L_ω como se explica en [18], [41].⁷

Se tiene que $\Phi_R^+ \in \mathcal{H}_R$, esto es

$$\Phi_R^+ = \sum_j \alpha_{Rj} R_j \quad (2.62)$$

Para el caso de $\Phi_R^- \in \overline{\mathcal{H}_R}$, se tiene que

$$\Phi_R^- = \sum_j \beta_{Rj} \overline{\times} R_j^* = \sum_j \beta_{Rj}^* R_j^* \quad (2.63)$$

donde hemos expresado Φ_R^- usando el producto por escalares $\overline{\times}$ definido

⁷Por ejemplo, para \mathcal{H}_R se puede construir una base discreta [18], [41] $\{R_{j,n}^\epsilon\}$ definiendo

$$R_{jn}^\epsilon(\tau, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} d\omega e^{2\pi i \frac{\omega}{\epsilon} \tau} R_\omega(\tau, \zeta) \quad (2.61)$$

donde $\epsilon > 0$ es fijo para toda la base y $n, j \geq 0$ son los índices de la base, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$. Este modo tiene energía del orden $j\epsilon + \epsilon/2$ para ϵ pequeño.

para el espacio de Hilbert conjugado [42].⁸ Los operadores de aniquilación y creación de Minkowski en el estado de una partícula F se pueden expresar en términos del campo $\hat{\phi}$ como

$$\hat{a}(F) = \langle F, \hat{\phi} \rangle, \quad \hat{a}^\dagger(F) = -\langle F^*, \hat{\phi} \rangle. \quad (2.65)$$

Usando las Ecs. (2.60), (2.65) y el hecho de que el producto interno es antilineal en la primera entrada, se puede mostrar que [39]

$$\hat{a}(F) = \hat{r}(\Phi_R^+) - \hat{r}^\dagger(\Phi_R^{-*}) + \hat{l}(\Phi_L^+) - \hat{l}^\dagger(\Phi_L^{-*}). \quad (2.66)$$

Los modos de boost B_ω , $B_{-\omega}$ son estados de una partícula de la cuantización de Minkowski (frecuencia positiva respecto al tiempo inercial) y sus descomposiciones en términos de elementos de $\mathcal{H}_{L,R}$ y $\overline{\mathcal{H}}_{L,R}$ están dadas por las Ecs. (2.42a), (2.42b). Usando la ec. (2.66) se tiene que

$$\hat{a}(B_\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} (e^{\pi\omega/2} \hat{r}(R_\omega) - e^{-\pi\omega/2} \hat{l}^\dagger(L_\omega)), \quad (2.67)$$

$$\hat{a}(B_{-\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} (e^{\pi\omega/2} \hat{l}(L_\omega) - e^{-\pi\omega/2} \hat{r}^\dagger(R_\omega)). \quad (2.68)$$

Finalmente, de estas dos ecuaciones se puede obtener

$$\hat{r}(R_\omega) = \frac{\hat{a}(B_\omega) + e^{-\pi\omega} \hat{a}^\dagger(B_{-\omega})}{(1 - e^{-2\pi\omega})^{1/2}}, \quad (2.69)$$

$$\hat{l}(L_\omega) = \frac{\hat{a}(B_{-\omega}) + e^{-\pi\omega} \hat{a}^\dagger(B_\omega)}{(1 - e^{-2\pi\omega})^{1/2}}. \quad (2.70)$$

Estos operadores definen *formalmente*⁹ los operadores \hat{r}_ω , \hat{l}_ω de la siguiente manera

$$\hat{l}_\omega \equiv \hat{l}(L_\omega), \quad \hat{r}_\omega \equiv \hat{r}(R_\omega). \quad (2.71)$$

⁸Sea $(V, +, \times)$ un espacio vectorial donde $+$ denota la suma de sus elementos y \times la multiplicación por escalares. El espacio *complejo conjugado* de este espacio vectorial es el espacio $(V, +, \overline{\times})$ donde la multiplicación por escalares $\overline{\times} : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ está definida por

$$c \overline{\times} \psi = c^* \times \psi \quad (2.64)$$

El espacio conjugado se denota por \overline{V} .

⁹Los modos R_ω , L_ω no son elementos de \mathcal{H}_R , \mathcal{H}_L respectivamente y por lo tanto $\hat{r}(R_\omega)$, $\hat{l}(L_\omega)$ no están definidos por la ec. (2.12).

De la misma manera, de la ec. (2.67) se define el operador $\hat{b}_\omega \equiv \hat{a}(B_\omega)$, que se puede usar para dar una cuantización unitariamente equivalente a la de ondas planas en el espacio-tiempo de Minkowski, denominada *cuantización en modos de boost* [28]:

$$\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (B_\omega(x)\hat{b}_\omega + B_\omega^*(x)\hat{b}_\omega^\dagger) \quad (2.72)$$

donde $[\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$. Por construcción de \hat{b}_ω se tiene que

$$\hat{b}_\omega |0_M\rangle = \hat{a}_p |0_M\rangle = 0. \quad (2.73)$$

2.2.3. Comentarios sobre la cuantización de Unruh

Recientemente ha habido una controversia acerca de la cuantización de Unruh. Narozhny *et.al.* [28] afirman que la “cuantización de Unruh no es un esquema válido de cuantización para el campo en el espacio tiempo de Minkowski” (a diferencia de la cuantización en modos de boost, que sí lo es, ver la ec. (2.72)). Para argumentar esto afirman, entre otras cosas, que la expansión de $\hat{\phi}$ en modos de Unruh, ec. (2.51), no cubre todos los grados de libertad del campo cuántico en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto ocurre, según estos autores, porque al “evaluar en el origen” los modos de boost tienen una singularidad cuando $\omega = 0$. El comportamiento en $\omega = 0$ es decisivo en nuestro estudio, en particular porque parece ser que sólo estos modos contribuyen a las probabilidades de emisión/absorción de partículas debido a cargas aceleradas [20].

La lógica de los autores de [28] es que, entonces, en la transición de ec. (2.72) a la ec. (2.51) –usando las ec. (2.42)– uno debe de tomar el valor principal de Cauchy de la integral en el origen, lo que excluye el modo $\omega = 0$.¹⁰ Ellos afirman que sin este modo, el conjunto de modos de boost

¹⁰Tomamos (2.72), separamos el intervalo de integración en $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ y en el primer intervalo cambiamos $\omega \rightarrow -\omega$:

$$\phi = \int_0^\infty d\omega [b_\omega B_\omega + b_\omega^\dagger B_\omega^* + b_{-\omega} B_{-\omega} + b_{-\omega}^\dagger B_{-\omega}^*] \quad (2.74)$$

Los modos B_ω son singulares en $\omega = 0$ y $x = 0$, como se puede ver de la ec.(2.40). Esto hace sospechar que esta separación del intervalo de integración en $\omega = 0$ sea no trivial. En caso de que en efecto sean singulares, esta separación implicaría tomar el valor principal

restante pierde la propiedad de ser completo y por lo tanto, la capacidad de generar cualquier estado (de una partícula) del campo (Ref. [28], p. 025004-12).

Por otro lado, Fulling y Unruh [15] han argumentado en contra de estas conclusiones. Como ellos afirman, dado que la expansión en modos es una integral y por lo tanto un modo es de *medida cero* (medida de Lebesgue), la omisión del modo $\omega = 0$ es totalmente inofensiva en la expansión en modos del campo. La cuantización de Unruh es válida para expresar la restricción a $L \cup R$ de estados del campo globales.

En este trabajo compartimos la posición de Fulling y Unruh al respecto de la cuantización de Unruh por las siguientes razones. Como hemos dicho, los modos de boost deben ser considerados como objetos distribucionales y, por lo tanto, no tiene sentido *evaluarlos en un punto*. Pero esto es totalmente consistente con la naturaleza distribucional del campo cuántico, al que tampoco tiene sentido evaluar en un punto; sólo su convolución con una función de prueba está definida.

En su artículo, Fulling y Unruh argumentan firmemente que la cuantización de Unruh es válida en la doble cuña $L \cup R$ pero, sin embargo, mencionan que no están del todo seguros de la posibilidad de *extender* un estado de Unruh a todo el espacio-tiempo de Minkowski ([15] p.048701-2).

Seamos un poco más precisos. Los datos iniciales en la cuantización de Unruh consisten de funciones suaves de soporte compacto en ambas superficies de Cauchy Σ_R y Σ_L . Para concretar, tomemos $\Sigma_R = \{(0, z) | z > 0\}$ y $\Sigma_L = \{(0, z) | z < 0\}$. Para estas hipersuperficies de Cauchy las funciones de soporte compacto son cero en el origen $(0, 0)$. Sin embargo, una cuantización del campo válida en todo el espacio-tiempo debe considerar el conjunto de todas los datos iniciales C_0^∞ sobre la hipersuperficie de Cauchy

$$\Sigma_M = \Sigma_L \cup \Sigma_R \cup \{0\}, \quad (2.75)$$

que incluyen, por supuesto, funciones que no son cero en el origen. Al respecto, Fulling y Unruh notan que “el análisis de los datos iniciales en el origen es bastante sutil matemáticamente y datos iniciales en ese punto pueden influir en la solución a la ecuación de Klein-Gordon en las regiones F y P ”. Este

de Cauchy en la integral, que le “da la vuelta” al polo en $\omega = 0$ por lo que a final de cuentas no se estaría tomando en cuenta la contribución de los modos con $\omega = 0$ [28].

punto es bastante relevante para nuestro trabajo. Aunque no estamos dando ninguna prueba formal del hecho de que la cuantización de Unruh puede ser *extendida* a todo el espacio-tiempo de Minkowski, en el capítulo 3 mostramos que, al menos para el caso particular que estudiamos, la cuantización de Unruh arroja los mismos resultados físicos que la cuantización estándar en ondas planas. Tomamos esto como evidencia de que estas cuantizaciones son equivalentes físicamente.

2.3. El Efecto Unruh

En esta sección se describe la relación entre $|0_M\rangle$ y $|0_U\rangle$, conocida como *el efecto Unruh*. La derivación del efecto Unruh se basa fundamentalmente en la construcción de un mapeo entre el espacio de Hilbert de una partícula de la cuantización inercial, \mathcal{H}_M y el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_U \equiv \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_L$. Notemos que los espacios $\overline{\mathcal{H}}_M, \overline{\mathcal{H}}_{R,L}$ corresponden a los espacios de Hilbert asociados a soluciones de frecuencia negativa. Una solución de frecuencia positiva respecto a t debe ser una superposición de soluciones de frecuencia positiva y negativa respecto a τ . El mapeo entre \mathcal{H}_M y \mathcal{H}_U está dado en términos de las respectivas *proyecciones* de una solución en \mathcal{H}_M sobre $\mathcal{H}_{R,L}$ y sus conjugados; de este mapeo se obtiene la correspondiente transformación entre los espacios de estados $\mathcal{F}(\mathcal{H}_M)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{H}_U)$. En particular estamos interesados en la imagen bajo este mapeo del estado de vacío de la cuantización inercial:

$$|0_M\rangle_M \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_M) \longmapsto |0_M\rangle_U \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_U). \quad (2.76)$$

Aplicando al estado de vacío

$$|0_M\rangle = (\psi, \psi^a, \psi^{ab}, \dots) \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_U), \quad (2.77)$$

los operadores $\hat{a}(B_\omega)$ y $\hat{a}(B_{-\omega})$ expresados en términos de los operadores \hat{r}, \hat{l} (ver las Ecs. (2.67) y (2.68)), se puede obtener por iteración que [42]

$$|0_M\rangle = \exp \left[\sum_k e^{-\pi\omega_k} \hat{r}^\dagger(R_k) \hat{l}^\dagger(L_k) \right] |0_U\rangle, \quad (2.78)$$

donde R_k, L_k son modos de Unruh con frecuencia centrada en ω_k y k corre sobre todos los índices de las bases discretas $\{R_k\}, \{L_k\}$. Expandiendo esta

expresión tenemos

$$|0_M\rangle = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_j=0}^{\infty} \cdots \left[e^{-\pi k_0 \omega_0} e^{-\pi k_1 \omega_1} \cdots e^{-\pi k_j \omega_j} \cdots \times \right. \\ \left. \times |k_0(\omega_0), k_1(\omega_1), \dots\rangle_R \otimes |k_0(\omega_0), k_1(\omega_1), \dots\rangle_L \right] \quad (2.79)$$

donde $k_j(\omega_j)$ representa k_j partículas con frecuencia ω_k . Notemos que este $|0_M\rangle$ tiene k_0 partículas de Rindler en la cuña R y *exactamente* k_0 partículas en el mismo modo en la cuña L , y así para cada j . El término en la suma con todos los $k_j = 0$ corresponde al vacío de Unruh $|0_U\rangle = |0\rangle_R \otimes |0\rangle_L$. La expresión (2.79) se puede expresar de una manera más compacta como

$$|0_M\rangle = \sum_K e^{-\pi E(K)} |K\rangle_L |K\rangle_R = \sum_{J,K} e^{-\pi E(K)} \delta(J, K) |J\rangle_L |K\rangle_R \quad (2.80)$$

donde $E(K)$ está dada por la ec. (2.54) y las sumatorias han sido expresadas en términos de la ec. (2.57). Estados enredados en la cuantización de Unruh (aquéllos que no se pueden expresar de la forma $|g_1\rangle_L \otimes |g_2\rangle_R$) tienen correlaciones no triviales entre estados “izquierdos” L y “derechos” R . El vacío de Minkowski $|0_M\rangle$ es un estado enredado en la cuantización de Unruh. Dado que $|0_M\rangle$ es un estado enredado su restricción a la cuña R no puede ser un estado puro [25], y su descripción se debe hacer en términos de matrices de densidad. La restricción de $|0_M\rangle_U$ a la cuña R , es de la forma de una matriz de densidad térmica con temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (2.81)$$

(tomando $\hbar = c = 1$) donde a es la aceleración que define a la familia de observadores acelerados (i.e. a los espacio-tiempos R y L). Esto es, *la restricción del estado $|0_M\rangle_M$ a la región R es un estado térmico con temperatura dada por la ec. (2.81)*.

La norma del estado de vacío de Minkowski es

$$\langle 0_M | 0_M \rangle = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega_m}} \quad (2.82)$$

El hecho de que este estado normalizable en la cuantización de ondas planas tenga una norma infinita en la cuantización de Unruh es una consecuencia

de que estas cuantizaciones no son unitariamente equivalentes y pareciera que no podrían ser físicamente equivalentes. Sin embargo, diferentes representaciones del álgebra del campo, inclusive no unitariamente equivalentes, son equivalentes “físicamente” en el sentido del Teorema de Fell [42] y por lo tanto uno espera obtener la misma información física como resultado de cálculos de valores de expectación tanto en la cuantización inercial como en la de Unruh (siempre que la cuantización de Unruh sea una representación fiel del álgebra del campo).

2.4. Detectores acelerados

Experimentalmente, para saber el contenido de partículas en un estado del campo, se le hace interactuar con un detector. En general, se espera que las partículas descritas formalmente (como las partículas de Rindler) actúen como las *partículas que excitan al detector*. Esto nos permitiría analizar el estado del vacío de Minkowski con respecto al contenido de partículas de Rindler mediante el uso de detectores con aceleración uniforme. Parece ser que la equivalencia entre las partículas definidas por los modos de frecuencia positiva respecto al parámetro asociado a las órbitas que sigue el detector y las partículas que excitan al detector, se presenta *sólo para el caso de aceleración uniforme*. En efecto, se pueden ver ejemplos de trayectorias del detector en las que esto no sucede [30].

Un detector de partículas acelerado en el vacío de Minkowski se excitará debido al baño de partículas. Dado que el estado del campo, desde el punto de vista inercial, es el vacío, el detector sólo podría, a lo más, emitir partículas de Minkowski hacia el campo. Sin embargo, desde el punto de vista de un observador de Rindler el proceso implica la absorción y emisión de partículas de Rindler desde y hacia el baño. Uno esperaría que ambas descripciones fueran físicamente equivalentes y dado que los procesos asociados al detector afectan el campo cuántico presente, resulta interesante ver de qué manera se da esa equivalencia. Ésta es altamente no trivial. Uno se puede hacer la pregunta opuesta al efecto Unruh: ¿Qué ve un observador inercial en el vacío de Rindler? Aún cuando ambos vacíos no son unitariamente equivalentes —y por lo tanto, hay un contenido de partículas de Minkowski en este estado— se ha probado que el detector es excitado por partículas cuyo espectro es, al menos a primer orden, $P(\omega) = 0$ [30, 7]. Si

el detector que se modela no es excitado por las partículas de Minkowski presentes en ese estado, entonces, ¿qué “tan reales” son estas partículas? Esta pregunta es demasiado ambigua como para dedicar algún esfuerzo en contestarla pero muestra la delicada relación entre los diferentes conceptos de partícula.

En esta sección presentaremos algunos de los resultados en la literatura que apuntan a establecer la equivalencia entre las partículas de Minkowski, las de Unruh y aquéllas que excitan un detector en aceleración uniforme. Habiendo hecho esto, tendremos una base para interpretar los resultados que obtengamos para el caso de una carga acelerada en el capítulo siguiente. El primer resultado que presentaremos se debe a Unruh y Wald [39]: *un observador inercial interpreta la absorción de una partícula de Rindler por un detector como la emisión de una partícula de Minkowski.*

2.4.1. Interacción con un detector de dos niveles

El modelo de detector que usaremos es el de una *partícula en una caja*, que corresponde a un campo cuántico confinado a una cierta vecindad de la trayectoria del detector. Supondremos que el detector sigue las órbitas del campo de Killing τ^a en la cuña R , es decir, es estático respecto a observadores de Rindler. El detector es un sistema cuántico de dos niveles, $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, cuyo Hamiltoniano respecto al campo de Killing τ es

$$\hat{H}_D = \Omega \hat{A}^\dagger \hat{A}, \quad (2.83)$$

donde

$$\hat{A} |\downarrow\rangle = \hat{A}^\dagger |\uparrow\rangle = 0, \quad \hat{A}^\dagger |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad \hat{A} |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle. \quad (2.84)$$

El estado $|\downarrow\rangle$ es el estado base de H_D y $|\uparrow\rangle$ es el estado excitado con energía de Rindler Ω . El acople entre del detector con el campo $\hat{\phi}$ está dado por el Hamiltoniano de interacción

$$\hat{H}_I = \epsilon(t) \int_{\Sigma} \hat{\phi}(x) [\psi(x) \hat{A} + \psi^*(x) \hat{A}^\dagger] \sqrt{-g} d^3x, \quad (2.85)$$

donde ψ es una función suave (sobre una hipersuperficie de Cauchy Σ) que se anula fuera del detector. Vamos a suponer que $\epsilon(t)$ se anula para $|t| > T \gg \Omega^{-1}$ y que es aproximadamente constante para $|t| < T$.

En la imagen de interacción un estado evoluciona del estado inicial $|s, in\rangle$ a un estado final $|s, out\rangle$ vía la aplicación de la matriz S:

$$|s, out\rangle = \hat{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^t \epsilon(t') \int_{\Sigma} \hat{\phi}(x) [\psi(x)\hat{A} + \psi^*(x)\hat{A}^\dagger] \sqrt{-g} d^3x dt' \right] |s, in\rangle, \quad (2.86)$$

donde \hat{T} es el operador de ordenamiento temporal y t es un tiempo posterior al tiempo en el que termina la interacción. Sea el estado inicial del sistema un estado del campo que corresponda a n partículas en el modo χ y el detector en su estado base, $|\downarrow\rangle$. En realidad, nos interesa que el estado inicial del campo sea el baño térmico asociado al vacío de Minkowski, que corresponde a una superposición de estados de n partículas en todos los modos posibles, después regresaremos a este estado.

Podemos escribir $|s, in\rangle = |n\rangle |\downarrow\rangle$. A primer orden en ϵ se tiene que [39]

$$|s, out\rangle = |n; \downarrow\rangle - i \int e^{i\Omega t'} \epsilon(t') \psi^*(x') \hat{\phi}(t', x') dt' d^3x' |n, \uparrow\rangle. \quad (2.87)$$

El factor $e^{i\Omega t'}$ corresponde a la dependencia temporal del operador \hat{A}^\dagger . Ahora, como se vio en la Sección 2.1, se tiene que para cualquier función de prueba f el operador de campo asociado toma la forma

$$\hat{\phi}(f) = \int f \hat{\phi} \sqrt{-g} d^4x = \hat{a}(\Gamma_-^*) - \hat{a}^\dagger(\Gamma_+), \quad (2.88)$$

donde Γ_- y Γ_+ son, respectivamente, las partes de frecuencia negativa y positiva respecto al campo de Killing temporal en cuestión (en este caso τ^a , que corresponde al campo temporal en donde el detector está estático) de la solución retardada menos adelantada Γ con fuente f (ver la ec. (2.18)). Para el caso en el que $f = \epsilon(t) e^{i\Omega t} \psi^*(x)$ se tiene que $\Gamma_+ \sim 0$ pues $\epsilon(t)$ es casi constante [39]. Escribiendo $\gamma \equiv \Gamma_-^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} |s, out\rangle &= |n; \downarrow\rangle - i |\uparrow\rangle \otimes \hat{a}(\gamma) |n\rangle \\ &= |n; \downarrow\rangle - i\sqrt{n} \langle\gamma, \chi\rangle |n-1; \uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Tenemos entonces que, a primer orden en ϵ , el estado del campo se verá *reducido en una partícula* sí y sólo si el detector se excita. Adicionalmente, se puede mostrar que la probabilidad (al orden más bajo) de que el detector se excite es

$$P_\uparrow = n |\langle\gamma, \chi\rangle|^2, \quad (2.90)$$

esto es, es proporcional al número de partículas presentes en el estado y al traslape entre el modo del detector y el modo en el que se encuentran las partículas en cuestión. Esto muestra que el modelo de detector de partículas que hemos usado funciona correctamente. Notemos que para el caso en el que el detector sigue una órbita de τ^a , la partícula absorbida (en la que *disminuyó* el campo) será una de Rindler.

Regresemos al caso específico del baño térmico correspondiente al vacío de Minkowski. Un baño térmico consiste en una superposición incoherente de estados de n partículas en cada uno de los posibles modos con energía E . La probabilidad de que el estado se encuentre en un estado de n partículas con energía ω está dada por el factor de Boltzmann $e^{-n\omega}$. La probabilidad de que el detector se excite en el baño térmico está dada por

$$\begin{aligned} P_{\uparrow} &= \sum_{\chi_{\omega}, n} p(n, \chi_{\omega}) n |\langle \gamma, \chi_{\omega} \rangle|^2 \\ &\approx \frac{e^{-\beta\Omega}}{1 - e^{-\beta\Omega}} \langle \gamma, \gamma \rangle^2 \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde las χ_{ω} son un conjunto completo de estados de una partícula con frecuencia positiva ω y

$$p(n, \chi_{\omega}) = \frac{e^{-\beta n\omega}}{\sum_n e^{-\beta n\omega}} \quad (2.92)$$

es la probabilidad de encontrar n partículas en el modo χ_{ω} . Para obtener la aproximación en el último renglón de la ec. (2.91) usamos el hecho de que γ es un modo de frecuencia positiva centrado en $\omega = \Omega$.

Es interesante ver cuál es la opinión de un observador inercial acerca de la *detección* de una partícula de Rindler. Una construcción análoga a la de la ecuación ec. (2.89) cuando el estado inicial está dado por $|0_M\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ nos lleva a

$$|s, \text{out}\rangle = |0_M\rangle |\downarrow\rangle - i\hat{r}(\gamma) |0_M\rangle |\uparrow\rangle \quad (2.93)$$

donde ahora hemos utilizado directamente el campo de Killing τ^a y hemos puesto el operador de aniquilación \hat{r} . El modo de Rindler γ es el mismo que en la sección anterior, tomando en cuenta que aquí τ representa al tiempo de Rindler. Notemos que γ es superposición de modos R_{ω} , sin embargo, recordemos que como $f = \epsilon(\tau)e^{i\Omega\tau}\psi^*$ el modo de Rindler asociado tiene frecuencia centrada en $\omega = \Omega$ y por lo tanto, podemos considerar que $\gamma =$

R_Ω . Expresándolo en términos de modos de boost (ver la ecuación (2.69)) se tiene que

$$|s, out\rangle = |0_M\rangle |\downarrow\rangle - i \frac{e^{-\pi\Omega/a}}{(1 - e^{-2\pi\Omega/a})^{1/2}} \hat{a}^\dagger(B_{-\Omega}) |0_M\rangle \otimes |\uparrow\rangle. \quad (2.94)$$

Como lo muestra la ec. (2.93), si el detector se excita entonces el estado del campo corresponde a una desexcitación de una partícula de Rindler del estado de vacío inercial original.

Entonces, lo que hemos hecho es que hemos calculado en el esquema de Unruh la evolución del estado $|s, in\rangle$ y en particular la del detector, que fue caracterizado en términos de la descripción acelerada. Al final solamente transcribimos el operador de creación \hat{r} a su expresión en términos de ondas planas (modos de boost) y obtenemos que *el detector se excita (por una partícula de Rindler) si y sólo si se crea una partícula de Minkowski en el modo $B_{-\Omega}$* . Nótese que la partícula emitida por el detector no corresponde a una desexcitación de este; este proceso, a su vez, también emitiría partículas.

2.4.2. Cambios en el valor de expectación de la energía

Ahora queremos analizar el estado del campo *después* de la interacción con el detector, en particular, cuál es éste cuando el detector ha sido excitado. De acuerdo a la ec. (2.89), el estado del sistema campo-detector está en una superposición de estados, donde el detector puede estar o no excitado. Para investigar el comportamiento cuando se ha excitado, debemos reducir el estado. Siguiendo a [39] definimos

$$\hat{C} = [\hat{A}^\dagger, \hat{A}]. \quad (2.95)$$

Entonces $\frac{1}{2}(\hat{1} + \hat{C})$ es la proyección del estado del detector sobre $|\uparrow\rangle$ y $\frac{1}{2}(\hat{1} - \hat{C})$ lo es sobre $|\downarrow\rangle$. En el caso en el que el detector se ha excitado se tiene que

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle_\uparrow = \frac{\sum p(s) \langle s, out | \frac{1}{2}(\hat{1} + \hat{C}) \hat{T}_{\mu\nu} \frac{1}{2}(\hat{1} + \hat{C}) | s, out \rangle}{\sum p(s) P_\uparrow(s)} \quad (2.96)$$

donde $p(s)$ es la probabilidad de que el estado inicial sea $|s\rangle$ y $P_\uparrow(s)$ es la probabilidad de excitación cuando el estado es $|s\rangle$.

Aplicando la ec. (2.96) al estado ec. (2.89) se tiene que

$$\delta \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle \equiv \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle_\uparrow - \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \frac{e^{-\beta\Omega}}{1 - e^{-\beta\Omega}} \frac{t_{\mu\nu}(\gamma)}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \quad (2.97)$$

Esta ecuación representa el cambio en la expectación de la energía-momento asociada a observadores acelerados, para los cuales el detector está en reposo. Recordemos que γ es de frecuencia positiva respecto al tiempo acelerado y tiene energía positiva, por lo que el cambio en la energía es positivo, esto es, la energía del campo *aumenta* desde el punto de vista de observadores acelerados. Si el estado del baño ha sido reducido en una partícula, ¿cómo puede entonces aumentar la energía del campo en vez de disminuir? La clave está en el factor de n en la ec. (2.90), que indica que la probabilidad de que el detector se excite crece con el número de partículas. Como lo mencionan Wald y Unruh [39], esto quiere decir que el proceso en el que el detector se excita equivale a que el detector haga una medición *parcial* del estado del campo. Asimismo, si el detector no logra excitarse, la energía del campo debe *decrecer*.

Como hemos visto, un observador inercial asocia una partícula de Minkowski en el modo F_Ω al proceso por el cual el detector se excita. El cambio en la expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$ es $t_{\mu\nu}(F_\Omega)/\langle F_\Omega F_\Omega \rangle$, de donde se puede mostrar que la energía del campo aumenta en todo M . Expresando F_Ω en términos de modos de Unruh se obtiene que en la cuña R el cambio en la expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$ es el mismo que el de la ec. (2.97). Esto es, para ambos observadores la energía en la cuña R *aumenta*, sólo que la *razón* es diferente. En un caso aumenta debido a que el detector ha hecho una medición parcial del estado del campo y en la otra debido a la emisión de una partícula por el detector.

Sin embargo, para algunos autores esta interpretación es errónea [17]. Wald y Unruh debieron reducir el estado a uno en el que el detector se encuentra excitado para poder asociar la emisión de una partícula de Minkowski. Que la energía aumentara en R para observadores acelerados también fue un efecto de la reducción del estado. Ahora, se sabe que los efectos de reducción pueden traer problemas de causalidad. Grove calcula $\delta\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle$ en una situación análoga, sin reducir el estado y obtiene que a segundo orden en la cuña R ,

$$\delta\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle = -\frac{\alpha^2}{e^{2\pi\omega} - 1} t_{\mu\nu}(R_\omega). \quad (2.98)$$

Esta ecuación dice que a segundo orden la energía del campo se reduce, lo cual interpreta en términos de que el detector absorbe energía del campo de manera causal. Sin embargo, esto crea una paradoja pues el estado inicial del campo era el vacío, ¡que se encuentra en el mínimo de energía!

Los autores que coinciden con Grove (ver por ejemplo, [6, 26, 34]) afirman que esta energía absorbida del campo eventualmente es emitida por el detector cuando pase de un estado excitado a su estado base. Este proceso se vuelve estacionario y resulta que el valor de expectación final $\delta\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle = 0$. Esto implicaría que el detector acelerado *no radía* (Ver también las referencias [2, 21, 38]).



Capítulo 3

Aspectos globales del estado de radiación descrito por observadores acelerados

*A scientist can soar high like a poet,
but also knows how high he flies...*

R. Eötvös

Como hemos visto en el capítulo 1, cuando se describe clásicamente, la radiación emitida por una carga uniformemente acelerada se va a la cuña F , región que es inaccesible a los observadores coacelerados con ella. El comportamiento del campo clásico es muy diferente en las cuñas F y R . En este capítulo consideramos el estado del campo cuántico resultante de la interacción de la carga uniformemente acelerada con el campo en el estado de vacío de Minkowski. Al igual que en el caso clásico, dicho estado del campo inicialmente tiene comportamientos muy diferentes dependiendo en qué región del espacio-tiempo nos encontremos. El punto principal en nuestro análisis es entender cómo es que estos comportamientos tan dispares se pueden codificar en el mismo estado cuántico. En este capítulo, los estados denotados simplemente por $|\psi\rangle$ corresponden estados en la cuantización de Unruh, $|\psi\rangle \in \mathcal{F}_U$. Estados de la descripción inercial, se denotarán con el subíndice M , $|\phi\rangle_M \in \mathcal{F}_M$.

3.1. Radiación en la cuña R

Supongamos que una partícula cargada se acelera uniformemente inmersa en un campo en el estado de vacío de Minkowski. Desde el punto de vista de un observador inercial la carga va a *emitir (radiar)* partículas de Minkowski. Desde el punto de vista de un observador que se coacelera con la carga, ésta es estática e interactúa con un baño térmico. En este marco de referencia la partícula cargada va a *emitir y absorber* partículas de Rindler hacia y desde el campo. Notemos que esta descripción sólo se puede asociar al estado del campo restringido a la cuña R pues ésta es la región a la que los observadores coacelerados tienen acceso.

Estamos interesados en definir cuál es la diferencia entre el estado inicial del campo (el vacío de Minkowski) y el estado final después de la interacción. Para un observador inercial esta diferencia es, simplemente, que el estado final contiene las partículas radiadas mientras que el vacío no contiene partículas. Sin embargo, el estado que ven los observadores coacelerados cuando el campo está en el estado de vacío de Minkowski, representa una superposición incoherente de estados de partículas con una temperatura asociada. De nuevo, enfatizamos que esta descripción sólo corresponde a la restricción del campo a las cuñas L y R . Como hemos dicho, la interacción genera emisión y absorción de partículas de este baño térmico, ¿qué tan diferente es este estado del estado térmico original?

Una manera de entender mejor el cambio en el estado del campo en la cuña R es comparar las tasas de emisión y absorción de fotones de Rindler (lo que vería un observador acelerado) con la tasa de emisión de fotones de Minkowski (lo que vería un observador inercial) por parte de la carga acelerada. Estos cálculos fueron hechos por Higuchi, Matsas y Sudarsky [20, 19], mismos que a continuación explicamos.

Estos autores trabajan en cuatro dimensiones y con signatura $+- - -$; en este caso, las coordenadas de Rindler de la cuña R toman la forma

$$ds^2 = \zeta^2 d\tau^2 - d\zeta^2 - dx^2 - dy^2, \quad (3.1)$$

donde ζ , τ están definidas por las Ecs. (1.47). Una carga eléctrica q que siga la línea de mundo $\zeta = 1/a$, $x = y = 0$ tiene aceleración propia constante a y τ/a es su tiempo propio. La corriente conservada asociada a esta carga es

entonces

$$j^\tau = aq\delta(\zeta - \frac{1}{a})\delta(x)\delta(y) \quad j^\zeta = j^x = j^y = 0. \quad (3.2)$$

Este cálculo está basado fundamentalmente en el comportamiento de los modos de Rindler de energía cero. La razón de esto es que para los observadores coacelerados la carga es estática, por lo que sólo se podrá acoplar a los modos de frecuencia cero con respecto al tiempo de Rindler. De hecho, debido a las expresiones de la forma $0 \times \infty$ que aparecen en los cálculos que involucran modos de Rindler de energía cero en el análisis de [20], es necesario introducir, a manera de regularizador, una frecuencia de oscilación ϑ en la fuente que permite trabajar con modos de energía finita. Al final del cálculo se toma el límite $\vartheta \rightarrow 0$.

Más adelante vamos a trabajar con un método de regularización parecido para una ‘corriente’ escalar (que no es conservada), por lo que aquí vamos a explicar con cierto detalle el procedimiento usado en [20]. Como primer paso, se introduce un factor oscilante $\cos(\vartheta\tau)$ en la intensidad de la carga. La frecuencia de oscilación ϑ garantiza que la corriente se acople a modos del campo distintos de cero. Las tasas de emisión/absorción a primer orden perturbativo son proporcionales al cuadrado de la carga, por lo que debemos asegurar que cuando sea tomado el límite $\vartheta \rightarrow 0$ obtengamos q^2 . Dado que $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \langle \cos^2(\vartheta\tau) \rangle = 1/2$, el factor oscilante se debe multiplicar por $\sqrt{2}$. De este modo, la corriente quedaría de la forma

$$j^\tau = a\sqrt{2}q \cos(\vartheta\tau)\delta(\zeta - \frac{1}{a})\delta(x)\delta(y) \quad j^\zeta = j^x = j^y = 0. \quad (3.3)$$

Sin embargo, con esta corriente no hay conservación de carga por lo que en [20] se reemplaza por la corriente debida a un dipolo oscilante descrita por

$$j^\tau = a\sqrt{2}q \cos(\vartheta\tau) \left[\delta(\zeta - \frac{1}{a}) - \frac{1}{a^2 L^2} \delta(\zeta - L) \right] \delta(x)\delta(y) \quad (3.4a)$$

$$j^\zeta = \sqrt{2}q\vartheta \sin(\vartheta\tau) \frac{1}{a^2 \zeta^3} \theta(\zeta - \frac{1}{a}) \theta(L - \zeta) \delta(x)\delta(y) \quad (3.4b)$$

$$j^x = j^y = 0 \quad (3.4c)$$

donde L representa la posición de la otra carga. En este caso, al final del cálculo se toma el límite $\vartheta \rightarrow 0$ y $L \rightarrow +\infty$. Ni la carga extra ni el flujo de corriente j^ζ entre ellas contribuyen al resultado final; sólo se añaden para que se satisfaga la condición $\nabla^\mu j_\mu = 0$ y que el cálculo sea independiente de la elección de norma antes de tomar el límite $\vartheta \rightarrow 0$ [20].

En el citado trabajo se analiza la interacción de la corriente descrita por la ec. (3.4) con el campo electromagnético. Para ésto, se cuantiza este campo por separación de frecuencias y tomando los modos de frecuencia positiva con respecto al tiempo de Rindler τ . Este procedimiento es análogo al que llevamos a cabo para cuantizar el campo escalar en la sección 2.2 y no se incluirán aquí los detalles, (se pueden consultar en [20]). La interacción entre el campo cuántico \hat{A}_μ y la corriente clásica (ec. (3.4)) está dada por el lagrangiano de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sqrt{-g} j^\mu \hat{A}_\mu. \quad (3.5)$$

En el trabajo citado se calcula, a nivel de árbol, la amplitud de emisión $\mathcal{A}_{(\omega, k_x, k_y)}^{\text{em}}$ de un fotón en el modo físico relevante (con frecuencia respecto al tiempo de Rindler ω y momentos k_x, k_y en las direcciones x y y respectivamente) hacia el vacío de Rindler $|0\rangle_R$. Este es un paso intermedio pues el objetivo es calcular la amplitud de emisión hacia el vacío de Minkowski en la cuña R .

En esta cuantización el vacío de Rindler está definido por

$$\hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)} |0\rangle_R = 0 \quad (3.6)$$

donde $\hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)}$ es el operador de aniquilación de una partícula con los números cuánticos $\lambda, \omega, k_x, k_y$. Al orden más bajo en la expansión perturbativa la amplitud de emisión está dada por

$$\mathcal{A}_{(\omega, k_x, k_y)}^{\text{em}} = \langle \text{II}, \omega, k_x, k_y |_R i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) |0\rangle_R, \quad (3.7)$$

donde

$$|\text{II}, \omega, k_x, k_y\rangle_R = \hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)}^\dagger |0\rangle_R. \quad (3.8)$$

La probabilidad diferencial de emisión al vacío de Rindler, por unidad de tiempo y por unidad de momento transversal cuadrado, para un momento transversal (k_x, k_y) fijo está dada por [20]

$$dW_0^{\text{em}}(\omega, k_x, k_y) = \left| \mathcal{A}_{(\omega, k_x, k_y)}^{\text{em}} \right|^2 \frac{d\omega}{T}, \quad (3.9)$$

donde T es la longitud del intervalo de tiempo durante el cual la interacción se mantiene fija. La probabilidad de emisión de un fotón extra hacia un

estado de n fotones dW_n^{em} está relacionada con la probabilidad de emisión de un fotón hacia el vacío (de Rindler) por $dW_n^{\text{em}} = (n+1)dW_0^{\text{em}}$. Ahora, la probabilidad de que el baño térmico se encuentre en un estado de n fotones con energía ω está dada por

$$p_n(\omega) = Z^{-1} e^{-\beta n \omega} \quad (3.10)$$

donde $\beta^{-1} = a/2\pi$ es la temperatura del baño y Z es un factor de normalización. Entonces, la tasa diferencial total de emisión de fotones (por unidad de momento transversal al cuadrado), con un momento transversal (k_x, k_y) fijo hacia el baño térmico es

$$P_{(k_x, k_y)}^{\text{em}} = \int_0^{+\infty} \sum_n p_n(\omega) dW_n^{\text{em}}(\omega, k_x, k_y). \quad (3.11)$$

Evaluando esta integral y tomando los respectivos límites $\vartheta \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ se obtiene finalmente que

$$P_{(k_x, k_y)}^{\text{em}} dk_x dk_y = \frac{q^2}{8\pi^3 a} |K_1(k_\perp/a)|^2 dk_x dk_y \quad (3.12)$$

donde K_1 representa la función de Bessel modificada de orden 1 y $k_\perp = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Mediante un procedimiento análogo se calcula la tasa total de *absorción* de fotones con (k_x, k_y) fijo, que resulta ser funcionalmente igual que la ec. (3.12) [20]:

$$P_{(k_x, k_y)}^{\text{abs}} dk_x dk_y = \frac{q^2}{8\pi^3 a} |K_1(k_\perp/a)|^2 dk_x dk_y \quad (3.13)$$

La razón de que se de una igualdad entre $P_{(k_x, k_y)}^{\text{em}}$ y $P_{(k_x, k_y)}^{\text{abs}}$ se debe a que la probabilidad de emisión espontánea se hace muy pequeña en comparación con la emisión inducida cuando la energía de los fotones (proporcional a ϑ) se aproxima a cero [20]. A pesar de que la ec. (3.9) va dividida por un factor T que es infinito (pues corresponde al tiempo en el que está activa la interacción, que en nuestro caso es infinito), los valores de $P_{(k_x, k_y)}^{\text{em}}$, $P_{(k_x, k_y)}^{\text{abs}}$ no se anulan debido a que en el límite en que la energía de los fotones se va a cero, el número de fotones es infinito. En el caso en el que el estado no fuera un baño térmico, las tasas de emisión y absorción se anularían. Finalmente, la tasa *total* de emisión y absorción con respecto a observadores acelerados se obtiene sumando las ecuaciones (3.12) y (3.13):

$${}^{\text{ac}} P_{(k_x, k_y)}^{\text{tot}} dk_x dk_y = \frac{q^2}{4\pi^3 a} |K_1(k_\perp/a)|^2 dk_x dk_y. \quad (3.14)$$

El siguiente paso en [20] consiste en calcular la tasa de emisión de fotones que vería un observador inercial para compararla con la ec. (3.14). Para poder comparar los fotones de Rindler con fotones inerciales, se realiza este cálculo para fotones inerciales con el mismo momento transversal (nótese que es invariante ante *boosts* en la dirección z). La corriente (3.2) toma la siguiente forma en coordenadas inerciales [20]:

$$\begin{aligned} j^t &= qaz\delta(\zeta - \frac{1}{a})\delta(x)\delta(y), \\ j^x &= j^y = 0, \\ j^z &= qat\delta(\zeta - \frac{1}{a})\delta(x)\delta(y), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde

$$\delta(\zeta - \frac{1}{a}) = \frac{\delta(z - \sqrt{t^2 + a^{-2}})}{a\sqrt{t^2 + a^{-2}}}. \quad (3.16)$$

En este caso se usa la cuantización inercial estándar del campo (con los modos de frecuencia positivos con respecto al tiempo inercial t). La amplitud de emisión de un fotón con momento \mathbf{k} y polarización λ por la carga acelerada hacia el vacío de Minkowski está dada por [20]

$$\mathcal{A}^{(\lambda, \mathbf{k})} = \langle \mathbf{k}, \lambda |_M i \int d^4x j^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) |0\rangle_M. \quad (3.17)$$

La tasa total de emisión de fotones con momento transversal (k_x, k_y) fijo, dividida por el tiempo propio total T de la carga acelerada durante el cual actuó la interacción está dada por

$${}^{\text{in}}P_{(k_x, k_y)}^{\text{tot}} = \sum_{\lambda=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{(2\pi)^3 2k_0} |\mathcal{A}^{(\lambda, \mathbf{k})}|^2 / T, \quad (3.18)$$

donde $k_0 = \sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}$, y la suma corre sobre las dos polarizaciones físicas $\lambda = 1, 2$ [20]. Al final del cálculo, los autores de [20] obtienen

$${}^{\text{in}}P_{(k_x, k_y)}^{\text{tot}} = \frac{q^2}{4\pi^3 a} |K_1(k_\perp/a)|^2 dk_x dk_y, \quad (3.19)$$

que coincide *funcionalmente* con la tasa total de emisión y absorción para fotones de Rindler con el mismo momento transversal como la describiría un observador acelerado, ec. (3.14).

3.1.1. ¿Una nueva paradoja?

El resultado explicado en la sección anterior da una clara equivalencia entre las descripciones inercial y acelerada del fenómeno de radiación de una carga acelerada, pues se puede concluir que para ambas clases de observadores la radiación se manifiesta de la misma manera en términos del número de ‘clicks’ de detectores (ver discusión en el capítulo 1). Además, es consistente con los resultados de [39] (la absorción de una partícula de Rindler desde el punto de vista acelerado es equivalente a la emisión de un fotón desde el punto de vista inercial, ver la sección 2.4.1), en el sentido de que la emisión de un fotón desde el punto de vista inercial corresponde a la *emisión* o a la *absorción* de un fotón de Rindler en el marco de referencia acelerado.

Esto es, en la cuña R , ambos observadores, tanto el inercial como el acelerado coinciden en la descripción física del estado final del campo generado por la interacción con la carga uniformemente acelerada. No hay ninguna violación del Principio de Equivalencia pues para ambos observadores hay radiación. Sin embargo, como es común en este tipo de fenómenos la solución a una pregunta trae consigo nuevos interrogantes que deben ser analizados.

En [20], los autores también consideraron la pregunta de que si un observador acelerado podría notar algún cambio en el baño térmico asociado al vacío inercial debido a la emisión y absorción de los fotones de energía cero. Para ver ésto, notan que en el límite de energía cero la razón de transición de un estado de n fotones a un estado de $n + 1$ fotones y la razón del proceso inverso se hacen iguales. Si además consideramos que las tasas de emisión y absorción de fotones de Rindler son iguales, se puede concluir que *la fuente y el baño térmico están en ‘equilibrio térmico’*¹. Entonces, desde el punto de vista de un observador acelerado, en la cuña R , no habrá diferencia entre el estado inicial del campo (el estado térmico inicial) y el estado generado por la interacción con la carga acelerada. Lo mismo ocurrirá en la cuña L , pues esta región no puede ser afectada de ninguna manera por lo que ocurra en

¹El equilibrio térmico entre dos objetos se da cuando los flujos de energía de un objeto a otro son iguales. Aunque aquí se está considerando a la carga como un objeto clásico, sin grados de libertad internos, y que por lo tanto éstos no podrían ser excitados por su interacción con el campo, la igualdad entre las razones de emisión y absorción nos permite concluir que si estos modos se consideraran, en efecto, habría un equilibrio térmico entre la carga y el campo.

otra región causalmente desconectada de ésta, como lo es la cuña R .

Sin embargo, ambos observadores también deben de coincidir en la descripción física del cambio en el estado en la cuña F . Para observadores inerciales el estado final en la región F es diferente al estado de vacío pues, como hemos visto contiene las partículas (de Minkowski) radiadas. Para observadores acelerados la restricción a las cuñas L y R de ambos estados, el vacío de Minkowski y el estado que resulta de la interacción con la carga uniformemente acelerada es, en ambos casos, un baño térmico. Recordemos que en la cuantización de Unruh los estados del campo en todo el espacio-tiempo están descritos como estados de un sistema compuesto por los subsistemas que consisten en las restricciones del campo a las cuñas L y R . En efecto, como vimos en el Capítulo 2, el espacio de estados en la cuantización de Unruh, \mathcal{F}_U , está definido por $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}_L \otimes \mathcal{F}_R$. Los estados en esta cuantización están descritos en términos de las restricciones del campo a ambas cuñas, mismas que parecen no haber cambiado por la interacción con la carga acelerada. Entonces, ¿cómo puede el estado final del sistema compuesto contener la información de que en efecto hubo un cambio físico en la cuña F ?

El análisis que sigue en este capítulo está enfocado a desarrollar los elementos necesarios para responder esta pregunta desde el punto de vista de observadores acelerados y en determinar cómo es que se codifica la información acerca del cambio físico en la cuña F en el estado final del campo. Para poder comparar el cambio en el contenido físico en los estados descritos por ambos tipos de observadores estudiaremos el cambio en el valor de expectativa del tensor de energía momento $\hat{T}_{\mu\nu}$. Notemos que el hecho de que un estado de un sistema compuesto en general no se pueda especificar en términos de sus restricciones a cada subsistema, es una propiedad que presentan los estados *no separables*. Como explicaremos más adelante, el estado de vacío de Minkowski en la descripción de Unruh y el estado generado por la interacción con la carga acelerada son estados no separables. En la siguiente sección vamos a describir estos estados y proponer una descomposición del operador de densidad del estado producido por la interacción entre la carga y el campo, en la que se pueda aislar la información que nos interesa sobre el cambio en el estado con respecto al estado de vacío inercial.

3.2. Información en el enredamiento del estado

3.2.1. Operador de densidad

Como hemos visto en el capítulo 2, la descripción cuántica del campo realizada por observadores acelerados se debe hacer necesariamente en términos de dos subsistemas: los espacios de Hilbert en las cuñas L y R . Estos subsistemas conforman el espacio de Hilbert de la cuantización del campo en todo el espacio-tiempo, $\mathcal{H}_U = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R$. La manera más útil de describir sistemas compuestos es la formulación de los estados en términos del operador de densidad o la matriz de densidad (usaremos ambos términos indistintamente). Esto se debe a que, dado un estado del sistema completo, se pueden describir los estados correspondientes a los subsistemas tomando la traza parcial del operador de densidad, como explicaremos a continuación, pero también el lenguaje del operador de densidad permite describir estados cuánticos en los que el estado no se conoce completamente. Supongamos que un sistema cuántico puede estar en alguno de los diferentes estados $|\psi_i\rangle$ con una probabilidad p_i (al conjunto $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se le llama *ensamble de estados puros*), el operador de densidad del sistema está definido por la ecuación

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (3.20)$$

Si se sabe con exactitud en qué estado cuántico está el sistema, decimos que el sistema se encuentra en un *estado puro*. En este caso, el operador de densidad es simplemente $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$. En el caso en el que el sistema pueda estar en varios de los estados del ensamble, decimos que el sistema se encuentra en un *estado mezcla*. La matriz de densidad de un estado puro satisface $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$, mientras que para un estado mezcla se tiene que $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$.

El operador de densidad se puede definir en términos de características intrínsecas y no necesariamente en términos de ensambles (o en términos de vectores de estado). La clase de operadores que son operadores de densidad está caracterizada por el siguiente teorema (para su demostración se puede ver [29])

Teorema 2 *Un operador $\hat{\rho}$ es un operador de densidad asociado a algún ensamble $\{p_1, |\psi_1\rangle\}$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

1. *La traza de $\hat{\rho}$ es igual a uno.*

2. $\hat{\rho}$ es un operador positivo

Usando este teorema, se puede definir un operador de densidad como un operador $\hat{\rho}$ positivo que tenga traza igual a uno.

Una de las aplicaciones más profundas del operador de densidad es como herramienta descriptiva de subsistemas de un sistema cuántico compuesto. Esta descripción se hace en términos del *operador de densidad reducido*. Supongamos que tenemos dos sistemas físicos A y B , cuyos estados están definidos por una matriz de densidad $\hat{\rho}^{AB}$. El operador de densidad reducido para el sistema A está definido por

$$\hat{\rho}^A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}^{AB}), \quad (3.21)$$

donde Tr_B es un mapeo de operadores llamado la *traza parcial* sobre el sistema B . La traza parcial está definida por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (3.22)$$

donde $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ son dos vectores cualesquiera en el espacio de estados de A y $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ son dos vectores cualesquiera en el espacio de estados de B .

No es obvio que el operador de densidad reducido para el sistema A es, de alguna manera, una descripción del estado del sistema A . Se puede ver que los promedios de mediciones son los mismos si son calculados vía $\hat{\rho}^A$ o $\hat{\rho}^{AB}$. Para ver ésto, determinemos primero la forma de un operador que actúa sólo sobre un subsistema. Supongamos que se pueden hacer mediciones del observable M en el sistema A y sea \tilde{M} el observable correspondiente a la misma medición, pero realizada sobre el sistema compuesto AB . Si el sistema AB está preparado en el estado $|m\rangle|\phi\rangle$, donde $|m\rangle$ es un eigenestado de M y $|\phi\rangle$ es cualquier estado de B , entonces, la medición de M debe resultar en m con probabilidad igual a uno. Si P_m es el operador de proyección sobre el espacio propio del operador M con valor propio m , el correspondiente operador de proyección del operador \tilde{M} es $P_m \otimes I_B$. Se tiene entonces que

$$\tilde{M} = \sum_m m P_m \otimes I_B = M \otimes I_B. \quad (3.23)$$

Ahora, usando la definición del operador de densidad reducido, dada por la ec. (3.21), se tiene que

$$\text{Tr}(M\hat{\rho}^A) = \text{Tr}(M \otimes I_B \hat{\rho}^{AB}) = \text{Tr}(\tilde{M}\hat{\rho}^{AB}), \quad (3.24)$$

de donde se puede ver que los promedios de las mediciones con ambos procedimientos coinciden. Se puede demostrar que el único mapeo de operadores de densidad en AB a operadores de densidad en A que satisface la ec. (3.24) es la traza parcial [29].

3.2.2. Enredamiento y caracterización de estados puros no separables

Uno de los fenómenos más interesantes de la Mecánica Cuántica ocurre cuando se consideran estados de sistemas compuestos. Para cierto tipo de estos estados, las correlaciones entre mediciones independientes sobre dos subsistemas cuánticos presentan propiedades que no se pueden modelar clásicamente, ni siquiera considerando ‘variables ocultas’ locales, como ha sido demostrado experimentalmente en términos de las desigualdades de Bell (ver, por ejemplo, [8]). Para explicar esto de manera más precisa, consideremos dos sistemas A y B de dos niveles (*qubits*) y dos bases ortonormales $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$, $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ de los respectivos espacios de Hilbert. Supongamos, además, que los estados que forman las bases son estado propios de operadores $\hat{\sigma}_A$, $\hat{\sigma}_B$ con valores propios 0 y 1 respectivamente. En un estado del sistema compuesto AB de la forma

$$|s\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B), \quad (3.25)$$

las mediciones de los operadores $\hat{\sigma}_A$ y $\hat{\sigma}_B$ no están correlacionadas pues, por ejemplo, el resultado del observable $\hat{\sigma}_B$ puede ser 0 ó 1 sin importar cuál haya sido el resultado de la medición de $\hat{\sigma}_A$. A estados de la forma de la ec. (3.25) se les llaman *estados separables* (o *estados producto* pues son de la forma $|a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$). Cuando el sistema compuesto se encuentra en un estado separable, se puede saber en qué estado se encuentran cada uno de los subsistemas, es decir, los subsistemas se encuentran en estados puros.

Consideremos ahora el estado

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B). \quad (3.26)$$

Este es un estado altamente correlacionado, para ver esto, supongamos que una medición de $\hat{\sigma}_A$ arroja como resultado 0, entonces, como producto del proceso de medición, el estado del sistema se colapsa al estado $|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$. (Si el resultado es 1 entonces el estado del sistema se colapsa a $|1\rangle_A \otimes$

$|0\rangle_B$.) Si esto ocurre, entonces la medición del operador $\hat{\sigma}_B$ en el sistema B arrojará como resultado 1. Esto podría no ser nada inesperado si no fuera porque los sistemas A y B pueden estar causalmente desconectados cuando se realicen las mediciones; en este caso parecería que la información acerca de la modificación del estado compuesto por la medición en A se *transmitió* no causalmente al sistema B . Este es el fundamento de la “paradoja” EPR [11]. Sin embargo, se puede ver que no es posible enviar información mediante este mecanismo, esencialmente porque el observador que realiza la medición en A no puede escoger el estado al cual se colapsará el sistema (es aleatorio) y por lo tanto no puede enviar información al observador que actúa sobre el sistema B .

Calculemos ahora el operador de densidad del sistema A cuando el sistema AB se encuentra en el estado dado por la ec. (3.26). Usando la ec. (3.21) obtenemos

$$\hat{\rho}^A = \frac{1}{2} (|0\rangle_A \langle 0|_A + |1\rangle_A \langle 1|_A) = \frac{1}{2} \hat{I}_A \quad (3.27)$$

Notemos que $\text{Tr}((\hat{\rho}^A)^2) < 1$ y, por lo tanto, el estado del sistema A es un estado mezcla (está en un estado de un conjunto de posibles estados, cada uno con una probabilidad definida). Para el sistema B también se tiene que $\hat{\rho}^B = \hat{I}_B/2$. Esto es, es imposible asignarles a cada subsistema un estado puro definido; en este sentido es que los sistemas están “enredados”. El enredamiento es un efecto de la estructura de producto tensorial del espacio de estados, $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, y del principio de superposición (en términos de ensambles de estados).

Hemos visto que el operador de densidad de un estado, en general toma la forma de la ec. (3.20) y que el de un estado puro es simplemente $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$. Consideremos ahora un estado puro y separable $|\psi\rangle = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$ del sistema compuesto; su operador de densidad toma la forma:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| = |a\rangle_A \langle a|_A \otimes |b\rangle_B \langle b|_B. \quad (3.28)$$

Los operadores de densidad de los estados de los subsistemas A y B (usando ec. (3.21)) son, respectivamente, $\hat{\rho}^A = |a\rangle_A \langle a|_A$ y $\hat{\rho}^B = |b\rangle_B \langle b|_B$. Se tiene, entonces, que la matriz de densidad de un estado puro separable es de la forma

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B, \quad (3.29)$$

donde $\hat{\rho}^A$ y $\hat{\rho}^B$ son estados puros. Por otro lado, la matriz de densidad de cualquier estado mezclado y separable es la correspondiente a un ensamble de estados puros separables, cada uno con una cierta probabilidad de ocurrir [31], en efecto, existe una base donde se pueden escribir de la forma:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B, \quad (3.30)$$

donde $\hat{\rho}_i^A$ y $\hat{\rho}_i^B$ son estados puros de los sistemas A y B y $\sum_i p_i = 1$. Notemos que, si las matrices de densidad reducidas, $\hat{\rho}^A$, $\hat{\rho}^B$ representan estados mezclados de los subsistemas A y B ($\text{Tr}((\hat{\rho}^{A,B})^2) < 1$) entonces el operador de densidad $\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B$ también representa un estado mezclado separable².

En cambio, los estados no separables (enredados), en general no se pueden caracterizar tan fácilmente [22, 31]. Para efectos de este trabajo estamos interesados en el enredamiento que presentan dos estados particulares del campo cuántico cuando se les describe en términos del sistema compuesto $\mathcal{F}_L \otimes \mathcal{F}_R$: el estado de vacío inercial, $|0_M\rangle$, y el estado que se genera a partir de este debido a la interacción del campo con una carga uniformemente acelerada. Claramente, ambos estados son puros con respecto al espacio de estados del campo en la cuantización de Unruh (y en la cuantización con respecto al tiempo inercial).

Un estado puro no separable no puede escribirse de la forma de la ec. (3.29). Queremos encontrar una manera de expresarlo en la que sean explícitas la parte del estado que es separable y la parte que no lo es (y que “contiene” la información acerca del enredamiento). Como hemos visto más arriba, si el estado $\hat{\rho}$ es puro y no separable, los operadores de densidad reducidos $\hat{\rho}^A$ y $\hat{\rho}^B$ son mezclados y además $\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B$ es separable. En este sentido proponemos la siguiente descomposición para $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B + \hat{\rho}^e, \quad (3.31)$$

donde el operador $\hat{\rho}^e$ es de traza nula. El operador $\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B$ representa la parte separable del estado. El operador $\hat{\rho}^e$ codifica la información de la correlación entre los estados de los subsistemas, $\hat{\rho}^A$ y $\hat{\rho}^B$. Esto es, toda la

²En efecto, se tiene que $\text{Tr}((\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B)^2) < 1$ y además, como $\hat{\rho}^A$, $\hat{\rho}^B$ son estados mezclados, entonces son de la forma $\hat{\rho}^{A,B} = \sum_i p_i^{A,B} \hat{\sigma}^{A,B}$, donde $\hat{\sigma}^{A,B}$ representan estados puros. Usando este hecho, se puede expresar $\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B$ en la forma de la ec. (3.30)

información relativa al enredamiento debe estar codificada en este operador. En mediciones independientes de operadores sobre los subsistemas A y B , el operador $\hat{\rho}^e$ no juega ningún papel. Como se puede ver de la ec. (3.24), los valores de expectación de operadores M_A actuando sobre el subsistema A están determinados por la matriz reducida de ese subsistema $\hat{\rho}^A$, por lo que se tiene que

$$\text{Tr}(\hat{M}_A \otimes \hat{1}_B \hat{\rho}^e) = 0, \quad (3.32)$$

y lo análogo si el operador es de la forma $\hat{1}_A \otimes \hat{M}_B$. La información codificada en $\hat{\rho}^e$ sólo se manifiesta cuando se calculan valores de expectación de operadores con componentes A y B . En particular, esto sucede cuando se calculan probabilidades conjuntas de mediciones en A y B .

Por ejemplo, consideremos el estado dado por la ec. (3.26), y la probabilidad de que la medición del operador $\hat{\sigma}_A$ de como resultado 1 y que la medición de $\hat{\sigma}_B$ de como resultado 1. Esta probabilidad conjunta esta dada por

$$P(1, 1) = \langle e | \hat{E}_1^A \hat{E}_1^B | e \rangle \quad (3.33)$$

donde $\hat{E}_1^{A,B}$ son los respectivos operadores de proyección en cada subsistema.

Hemos introducido la descomposición del operador de densidad de un estado puro separable, ec. (3.31), en el contexto de sistemas cuánticos con un número finito de grados de libertad. En nuestro estudio trabajamos con campos cuánticos pero sin embargo, las nociones de estados puros, mezclados, separables y no separables se extrapola de manera directa, así como la descomposición del operador de densidad.

3.2.3. *Enredamiento en la descripción cuántica de Unruh: El operador de enredamiento y el estado de vacío*

El enredamiento en el estado $|0_M\rangle$ se puede entender a partir de las correlaciones que el campo presenta entre regiones no causales (se puede ver que en este estado, $\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \rangle \neq 0$ para x, y separados causalmente [32]). A los observadores de Rindler sólo les es accesible la cuña R y por lo tanto, “tienen acceso a sólo una parte del estado de vacío” [25]. Con esto nos referimos a que toda la información del estado está codificada en una hipersuperficie de Cauchy del espacio-tiempo de Minkowski, sin embargo, las superficies de Cauchy de observadores acelerados ($\tau = \text{const.}$) se dividen en

dos en el vértice de las cuñas de Rindler, lo que provoca que no tengan acceso a los grados de libertad del estado en la otra cuña. Como ya dijimos, $|0_M\rangle$ presenta correlaciones entre ambas cuñas, por lo que los grados de libertad en ambas cuñas están correlacionados entre sí. Esto provoca que el estado que describen los observadores acelerados no sea un estado puro.

La descripción del campo cuántico de Unruh está hecha en términos de las cuantizaciones del campo en las cuñas L y R . El espacio de estados es $\mathcal{F}_L \otimes \mathcal{F}_R$. Estados del campo puros y no separables se pueden expresar como en la ec. (3.31):

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}'^L \otimes \hat{\rho}'^R + \hat{\rho}^e, \quad (3.34)$$

donde $\hat{\rho}'^L$ and $\hat{\rho}'^R$ representan, respectivamente, los operadores de densidad restringidas definidos por

$$\hat{\rho}^{L,R} \equiv \text{Tr}_{L,R} \hat{\rho}. \quad (3.35)$$

El operador $\hat{\rho}^e$ codifica la información de la correlación entre las componentes *izquierdas* y *derechas* del estado. Como hemos explicado más arriba, al calcular la expectación de operadores localizados en la cuña L ó R (pero no simultáneamente en ambas) el operador de enredamiento no juega ningún papel (ver la ec. (3.32)). La información codificada en $\hat{\rho}^e$ solo se manifiesta cuando se calculan valores de expectación de operadores con componentes L y R . En el caso de valores de expectación de operadores contruídos a partir del operador de campo $\hat{\phi}(x)$, la información en $\hat{\rho}^e$ sólo se manifiesta cuando $x \in F \cup P$ pues sólo en este caso, los modos L_ω y R_ω son ambos distintos de cero.

Como un ejemplo, podemos escribir el operador de densidad del estado $|0_M\rangle$ en la forma de la ec. (3.34):

$$\hat{\rho}_{\text{vac}} = \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \hat{\rho}_{\text{vac}}^R + \hat{\rho}_{\text{vac}}^e. \quad (3.36)$$

De la ec. (2.80) se sigue que

$$\hat{\rho}_{\text{vac}} = |0_M\rangle \langle 0_M| = Z \sum_{JK} E_J E_K |K\rangle_L \otimes |K\rangle_R \langle J|_L \otimes \langle J|_R, \quad (3.37)$$

donde hemos definido

$$E_J \equiv e^{-\pi E(J)}, \quad (3.38)$$

y hemos introducido el factor de normalización Z dado por

$$Z^{-1} \equiv \sum_J E_J^2 \quad (3.39)$$

de modo que $\text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}) = 1$. Tomando las trazas parciales R y L en la ec. (3.37) obtenemos respectivamente

$$\hat{\rho}_{\text{vac}}^L = Z \sum_J E_J^2 |J\rangle_L \langle J|_L, \quad \hat{\rho}_{\text{vac}}^R = Z \sum_J E_J^2 |J\rangle_R \langle J|_R, \quad (3.40)$$

que corresponden a los estados del campo descritos por observadores de Rindler en las cuñas L y R . Usando las ecuaciones (3.40) y (3.37) podemos escribir el operador de enredamiento para el estado de vacío inercial:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{vac}}^e &= \hat{\rho}_{\text{vac}} - \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \hat{\rho}_{\text{vac}}^R \\ &= Z \sum_{J,K} E_J E_K \left(|J\rangle_L |J\rangle_R \langle K|_L \langle K|_R - Z E_J E_K |J\rangle_L |K\rangle_R \langle J|_L \langle K|_R \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las matrices de densidad dadas por la ec. (3.40) corresponden a las matrices de un ensamble de estados asociado a un baño térmico. Para ver esto, podemos compararlas directamente con la de un sistema que se encuentra en un baño térmico,

$$\hat{\rho}_{\text{term}} = \frac{\exp(-\beta \hat{H})}{\text{Tr}(\exp(-\beta \hat{H}))}, \quad (3.42)$$

donde $\beta = 1/T$, y T es la temperatura del sistema (en nuestro sistema de unidades la constante de Boltzmann toma el valor $k = 1$). Los estados de muchas partículas con energía definida, $|J\rangle$, son estados propios del Hamiltoniano

$$\hat{H} |J\rangle = E(J) |J\rangle \quad (3.43)$$

por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \exp(-\beta \hat{H}) &= \sum_{J,K} |J\rangle \langle J| \exp(-\beta \hat{H}) |K\rangle \langle K| \\ &= \sum_{J,K} e^{-\beta E(J)} \delta(J, K) |J\rangle \langle K| = \sum_J e^{-\beta E(J)} |J\rangle \langle J|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando esta ecuación en la ec. (3.42) y comparando con las ec. (3.40) se puede ver que la temperatura asociada al vacío inercial por un observador de Rindler es $T = a/2\pi$. Hay que notar, como explicamos a continuación de la ec. (2.54), que la energía del estado $|J\rangle_R$ ($|J\rangle_L$) es $aE(J)$.

3.3. Cambios en la matriz de densidad del estado del campo generado por la interacción con una carga acelerada

Hemos conjeturado ya dónde podría estar codificada la información de que, cuando una carga se acelera uniformemente, no hay un cambio físico apreciable en las cuñas L y R en el estado descrito por observadores de Rindler, mientras que en la cuña F este cambio se debe poder distinguir claramente. No resta más que llevar a cabo el cálculo necesario. Para atacar el problema, vamos a considerar la interacción de un campo escalar con una partícula escalar uniformemente acelerada; y el cambio en el valor de expectación del tensor de energía-momento.

3.3.1. Interacción con una fuente escalar acelerada y el tensor de energía-momento

Vamos a usar una fuente escalar $j(x)$ para modelar una partícula escalar clásica y puntual con aceleración uniforme. A diferencia de la Sección 3.1, aquí vamos a trabajar con un campo escalar de Klein-Gordon en 2 dimensiones. Esto nos permitirá reducir la notación y ser más claros en los resultados. De hecho, trabajar en dos dimensiones con un campo escalar con $m \neq 0$ es operacionalmente equivalente a trabajar con el mismo campo en cuatro dimensiones y momento transversal $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ fijo si se hace la identificación $m^2 \rightarrow k_{\perp}^2 + m^2$.

La interacción entre la fuente y el campo es lineal y está descrita por el Hamiltoniano de interacción

$$\hat{H}_I(x) = \sqrt{-g} j(x) \hat{\phi}(x), \quad (3.45)$$

donde g es el determinante de la métrica. El estado final $|f\rangle$ del campo *después* de la interacción está definido perturbativamente por una matriz \hat{S} ,

$$|f\rangle = \hat{S} |0_M\rangle, \quad (3.46)$$

donde

$$\hat{S} = \hat{T} \exp \left[-i \int_{\Sigma_{in}}^{\Sigma_{out}} \hat{H}_I(x) d^2x \right]. \quad (3.47)$$

Σ_{in} , Σ_{out} son las hipersuperficies de Cauchy donde la interacción empieza y termina respectivamente, y \hat{T} es el operador de orden temporal.

La interacción ocurre dentro de la cuña R , por lo que las hipersuperficies de Cauchy Σ_{in} y Σ_{out} deben de acotar esta región y, para que puedan definir estados en la cuantización de Unruh, a su vez deben ser hipersuperficies de Cauchy de la doble cuña $L \cup R$. Definimos Σ_{in} como la superficie construida por la unión de $\{t = 0, z \leq 0\}$ y una superficie espacial dentro de la cuña R que comienza en el punto de bifurcación de los horizontes y se desvía levemente del horizonte $\zeta = 0, \tau = -\infty$.

Σ_{out} se define análogamente pero su restricción a R es una superficie espacial que se desvía levemente del horizonte $\zeta = 0, \tau = \infty$. El estado de vacío $|0_M\rangle$ (el estado inicial) está definido sobre Σ_{in} y el estado final del campo, $|f\rangle$ se define sobre Σ_{out} . Entonces, a pesar de que la interacción está presente dentro de la cuña R , el estado $|f\rangle$ está definido *después* de la interacción y uno puede evaluar valores de expectación en este estado de operadores localizados tanto en R mismo como en F .

Para observadores acelerados, descritos por las coordenadas de Rindler, el orden temporal dado por \hat{T} está definido con respecto a la coordenada temporal τ . Usando la ec. (3.45) se puede poner el estado final de la forma

$$\begin{aligned} |f\rangle = \hat{T} & \left(\hat{1} - i \int d^4x \sqrt{-g} j(x) \hat{\phi}(x) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \iint d^4x d^4x' \sqrt{-g} \sqrt{-g'} j(x') j(x) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \right) |0_M\rangle + \hat{O}(q^3), \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde las integraciones se hacen sobre la misma región que en la ec. (3.47). Por conveniencia, definimos el operador formal

$$\hat{\phi}_I \equiv \int d^2x \sqrt{-g} j(x) \hat{\phi}(x). \quad (3.49)$$

Nótese que $\hat{\phi}_I$ es de orden q . Ahora vamos a aplicar el teorema de Wick al lado derecho de la ec. (3.48):

$$\hat{T}(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x')) = \hat{N}(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x')) + \langle 0 | \hat{T}(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x')) | 0 \rangle, \quad (3.50)$$

donde el ordenamiento normal \hat{N} y el estado de vacío $|0\rangle$, corresponden al esquema de cuantización que se esté utilizando. Usando la ec. (3.50) expandemos la ec. (3.48) para obtener

$$|f\rangle = \hat{S} |0_M\rangle = (1 - \mathcal{G}) |0_M\rangle - i \hat{\phi}_I |0_M\rangle - \frac{1}{2} \hat{N}(\hat{\phi}_I \hat{\phi}_I) |0_M\rangle + \mathcal{O}(q^3), \quad (3.51)$$

donde

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \int_{-\infty}^{\infty} d^2y j(x)j(y) \langle 0_M | \hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)) | 0_M \rangle \quad (3.52)$$

es de segundo orden en q .

Para un observador de Rindler, la fuente escalar corresponde a una *corriente* de la forma (nótese que no es conservada)

$$j'(x) = q\delta(\zeta - \zeta_0), \quad (3.53)$$

donde $\zeta_0 = 1/a$ y a es la aceleración propia de la fuente, que tomaremos como constante. Esta fuente, que se transforma como un escalar, en coordenadas inerciales toma la forma

$$j'(x) = q \frac{\delta(z - \sqrt{t^2 + a^{-2}})}{a\sqrt{t^2 + a^{-2}}}. \quad (3.54)$$

Igual que en el caso electromagnético discutido en la sección 3.1, para observadores acelerados, los modos del campo que son excitados por la corriente (3.53) son los de frecuencia cero. Esto provoca que en el cálculo de valores de expectación aparezcan expresiones de la forma $0 \times \infty$ que deben de ser regularizadas. Vamos a usar como regulador el factor oscilante que utilizan Higuchi *et.al.* en [20] y que discutimos en la sección 3.1 (ver la ec. (3.3)). Como vimos ahí, este regularizador en la corriente genera resultados consistentes cuando se toma el límite en que la frecuencia de oscilación va a cero y se recupera el caso de la carga acelerada. Nótese que para una *partícula escalar* no se requiere que la carga escalar sea conservada, así como tampoco existe ningún requerimiento de conservación para la ‘corriente’ escalar, por lo que en este caso no hay que cambiar la carga por un dipolo oscilante como hacen los autores de [20] para una carga electromagnética uniformemente acelerada. Entonces, la fuente escalar regularizada es

$$j(x) = 2q \cos(\theta\tau)\delta(\zeta - \zeta_0) \quad (3.55)$$

y al final de nuestros cálculos tomaremos el límite $\theta \rightarrow 0$. El factor de 2 se escoge por conveniencia. Nótese que, en principio, nuestros resultados van a diferir en un factor de 2 con respecto a los mismos cálculos realizados en la descripción inercial.

Como la corriente tiene soporte totalmente contenido en R , se puede ver de las ec. (2.51) y ec. (3.49) que sólo los modos R_ω del campo serán excitados por la fuente acelerada. El operador $\hat{\phi}_I$ toma la forma

$$\hat{\phi}_I = \int_R d^2x \sqrt{-g} j(x) \hat{\phi}_R(x) = \int_0^\infty d\omega \left(\Upsilon_\omega \hat{r}_\omega + \Upsilon_\omega^* \hat{r}_\omega^\dagger \right), \quad (3.56)$$

donde

$$\Upsilon_\omega \equiv \int_R d^2x \sqrt{-g} j(x) R_\omega(x) = \Psi_\theta \delta(\omega - \theta), \quad \Psi_\theta = q \sqrt{\sinh(\pi\theta)} \zeta_0 K_{i\theta}(m\zeta_0). \quad (3.57)$$

Para obtener la ec. (3.57) hemos usado la Ec. (2.43), $\omega > 0$, y hemos escogido trabajar con $\theta > 0$ (nótese que el regulador es una función par de θ). La función $K_{i\omega}(z)$ es real para ω y z reales. Finalmente, la ec. (3.56) toma la forma

$$\hat{\phi}_I = q \sqrt{\sinh(\pi\theta)} \zeta_0 K_{i\theta}(m\zeta_0) [\hat{r}_\theta + \hat{r}_\theta^\dagger]. \quad (3.58)$$

El papel que juega el regulador que hemos escogido es acoplar la fuente al modo R_θ en lugar de hacerlo a un modo con frecuencia cero, que resulta de alguna manera patológico.

Para entender el cambio físico en el estado vamos a evaluar el cambio en el valor de expectación del operador de energía-momento $\hat{T}_{\mu\nu}$. Recordemos que en el espacio-tiempo de Minkowski el valor renormalizado de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$ está definido por el límite de coincidencia [42]:

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle_f = \lim_{x' \rightarrow x} t_{\mu\nu'} F(x, x'), \quad (3.59)$$

donde

$$F(x, x') = \langle f | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | f \rangle - \langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle \quad (3.60)$$

y $t_{\mu\nu'}$ es el operador diferencial

$$t_{\mu\nu'} = \nabla_\mu \nabla_{\nu'} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\sigma \nabla^{\sigma'} + m^2). \quad (3.61)$$

Entonces, el cambio en el valor de expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$ depende de que haya un cambio en la función de dos puntos $\langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \rangle$. Este es el cambio que vamos a investigar en este trabajo.

3.3.2. *Cambios en el valor de la función de dos puntos cuando la fuente tiene soporte totalmente contenido en R*

El estado final de la interacción con una fuente uniformemente acelerada, se puede obtener perturbativamente por la acción de una matriz \hat{S} al vacío de Minkowski (más adelante vamos a construir este operador en detalle):

$$|f\rangle = \hat{S} |0_M\rangle. \quad (3.62)$$

Este es un estado puro del campo cuántico en la descripción de Unruh, por lo que su matriz de densidad asociada es simplemente

$$\hat{\rho}_f = |f\rangle \langle f|. \quad (3.63)$$

La información de que no hay un cambio físico en las cuñas R y L , mientras que en la cuña F debe ocurrir un cambio importante debe estar codificada en $\delta\hat{\rho} = \hat{\rho}_f - \hat{\rho}_{\text{vac}}$, donde $\hat{\rho}_{\text{vac}}$ está dada por la ec. (3.36). En particular, queremos investigar si esta información está contenida en el cambio en el enredamiento de los estados, por lo que usaremos las descomposiciones de los operadores de densidad propuestos en la ec. (3.34), con un énfasis especial en los operadores $\hat{\rho}^e$. Notemos que en los resultados descritos en la Sección 3.1 la información codificada en $\hat{\rho}^e$ es irrelevante pues todo ese análisis está restringido a la cuña R (ver la ec. (3.32)).

Antes de definir explícitamente el operador $\hat{\rho}_f$, podemos ver cuál es la forma más general de $\delta\hat{\rho}$ cuando el soporte de la interacción está totalmente contenido en la cuña R (que es el caso de la carga uniformemente acelerada). En la cuña R , los modos L_ω del campo son cero y en el caso en el que el soporte de la fuente está en R , el operador \hat{S} sólo puede excitar los modos R_ω del campo. Entonces, el operador \hat{S} toma la forma

$$\hat{S} = \hat{1}_L \otimes \hat{S}_R. \quad (3.64)$$

La descomposición de $\hat{\rho}_f$ está dada por

$$\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_f^L \otimes \hat{\rho}_f^R + \hat{\rho}_f^e. \quad (3.65)$$

Usando la ec. (3.64) en la ec. (3.62) y calculando $\hat{\rho}_f$ se tiene que

$$\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \hat{S}_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{S}_R^\dagger + \hat{S} \hat{\rho}_{\text{vac}}^e \hat{S}^\dagger. \quad (3.66)$$

Comparando esta ecuación con la ec. (3.65) podemos hacer las siguientes identificaciones

$$\hat{\rho}_f^L = \hat{\rho}_{\text{vac}}^L, \quad \hat{\rho}_f^R = \hat{S}_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{S}_R^\dagger \quad (3.67)$$

y

$$\hat{\rho}_f^e = \hat{S} \hat{\rho}_{\text{vac}}^e \hat{S}^\dagger. \quad (3.68)$$

Se puede ver directamente que el cambio en el estado en la cuña L (tomando la traza parcial sobre estados R en $\delta\hat{\rho}$) es $\delta\hat{\rho}_f^L = \hat{\rho}_f^L - \hat{\rho}_{\text{vac}}^L = 0$. Este es el resultado esperado debido a que la cuña L está causalmente desconectada de la fuente.

El cambio total en la matriz de densidad se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta\hat{\rho} &= \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \delta\hat{\rho}_f^R + \delta\hat{\rho}_f^L \otimes \hat{\rho}_{\text{vac}}^R + \delta\hat{\rho}_f^L \otimes \delta\hat{\rho}_f^R + \delta\hat{\rho}^e \\ &= \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \delta\hat{\rho}_f^R + \delta\hat{\rho}^e, \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde $\delta\hat{\rho}_f^R \equiv \hat{\rho}_f^R - \hat{\rho}_{\text{vac}}^R$, $\delta\hat{\rho}^e \equiv \hat{\rho}_f^e - \hat{\rho}_{\text{vac}}^e$ y hemos usado que $\delta\hat{\rho}_f^L = 0$. Como se puede ver de esta ecuación, el cambio en el estado está codificado en dos partes, el cambio en las restricciones de los estados a la cuña R , $\delta\hat{\rho}_f^R$, y el cambio en los operadores de enredamiento, $\delta\hat{\rho}_f^e$. Ambos dependen del operador \hat{S} .

La información en $\delta\hat{\rho}^e$ sólo está involucrada en el cambio en los valores de expectación de operadores que no tengan componentes L y R triviales. En los cambios de valores de expectación de operadores que sólo actúan en el subsistema \mathcal{F}_R , toda la información del cambio está codificada en $\delta\hat{\rho}^R$ (en el subsistema \mathcal{F}_L el cambio en el valor de expectación de cualquier operador es nulo). Para ser más específicos, consideremos un operador de la forma $\hat{A} = \hat{1}_L \otimes \hat{A}_R$ sobre $\mathcal{F}_L \otimes \mathcal{F}_R$. De la ec. (3.69) se tiene que el cambio en el valor de expectación está dado por

$$\delta\text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) \equiv \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}_f) - \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}_{\text{vac}}) = \text{Tr}(\hat{A}_R \delta\hat{\rho}_f^R). \quad (3.70)$$

Nótese que el operador \hat{A}_R puede estar localizado en *cualquier región* del espacio-tiempo, por ejemplo, como el operador $\hat{1} \otimes \hat{\phi}_R(x)$, que tiene soporte en todo el espacio-tiempo excepto en la cuña L . En cambio, si el operador \hat{A} tiene componentes no triviales L y R el cambio está dado por

$$\delta\text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \delta\hat{\rho}_f^R) + \text{Tr}(\hat{A} \delta\hat{\rho}^e), \quad (3.71)$$

esto es, en este caso el cambio en el valor de expectación puede venir de las contribuciones tanto de $\delta\hat{\rho}_f^R$ como de $\delta\hat{\rho}^e$. Por ejemplo, el operador $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$ tiene componentes L y R cuando $x \in F$. De la ec. (2.51) tenemos que

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') = \hat{\phi}_L(x)\hat{\phi}_L(x') + \hat{\phi}_L(x)\hat{\phi}_R(x') + \hat{\phi}_R(x)\hat{\phi}_L(x') + \hat{\phi}_R(x)\hat{\phi}_R(x'). \quad (3.72)$$

Para simplificar la notación vamos a definir:

$$\hat{\phi} \equiv \hat{\phi}(x), \quad \hat{\phi}' \equiv \hat{\phi}(x'). \quad (3.73)$$

De la ec. (3.72) y ec. (3.69) se tiene que el cambio total en la función de dos puntos está dado por

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho}) &= \text{Tr}(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_L\hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \delta\hat{\rho}^R) + \text{Tr}(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_R\hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \delta\hat{\rho}^R) + \\ &\quad + \text{Tr}(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R\delta\hat{\rho}^e) + \text{Tr}(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L\delta\hat{\rho}^e), \end{aligned} \quad (3.74)$$

que se puede expresar como

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho}) &= \text{Tr}_L(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_L\hat{\rho}_{\text{vac}}^L)\text{Tr}_R(\delta\hat{\rho}^R) + \text{Tr}_R(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_R\delta\hat{\rho}^R) + \\ &\quad + \text{Tr}(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R\delta\hat{\rho}^e) + \text{Tr}(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L\delta\hat{\rho}^e). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Para llegar a esta ecuación hemos usado que $\text{Tr}(\hat{A}_{L,R}\hat{\rho}^e) = 0$ (ver la ec. (3.32)) y que, dado que estados con diferente número de partículas son ortogonales, se tiene que

$$\text{Tr}_L(\hat{\phi}_L\hat{\rho}_{\text{vac}}^L) = \sum_J E_{JL}^2 \langle J | \hat{\phi}_L | J \rangle_L = 0. \quad (3.76)$$

La ec. (3.75) es lo más lejos que podemos llegar para reducir el cambio en la función de dos puntos, $\text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho})$, usando solamente el hecho de que la fuente tiene soporte totalmente contenido en la cuña R y las propiedades de la matriz de enredamiento. Nótese que los dos últimos términos del lado derecho de la ec. (3.75) son cero al evaluarse $x, x' \in L$ ó R ya que en estas cuñas los modos L_ω y R_ω no pueden ser diferentes de cero simultáneamente. Para ir más lejos en nuestro cálculo vamos a introducir la forma explícita del operador \hat{S} , desarrollada en la sección 3.3.1.

3.3.3. *Cambios en la función de dos puntos en las cuñas R y F por una carga uniformemente acelerada*

Vamos a calcular la ec. (3.75), hasta segundo orden en q , que es el primer orden relevante. De la ec. (3.51) se tiene que

$$\hat{S} = (1 - \mathcal{G}) - i\hat{\phi}_I + \frac{1}{2}\hat{N}(\hat{\phi}_I\hat{\phi}_I) + O(q^3), \quad (3.77)$$

y de esta ecuación obtenemos la matriz de densidad del estado final

$$\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_f^{(0)} + \hat{\rho}_f^{(1)} + \hat{\rho}_f^{(2)} + O(q^3), \quad (3.78)$$

donde $\hat{\rho}_f^{(0)}$ corresponde al operador de densidad renormalizado del vacío inercial dado por

$$\hat{\rho}_f^{(0)} = Q\hat{\rho}_{\text{vac}} \quad Q \equiv (1 - 2\text{Re}(\mathcal{G})). \quad (3.79)$$

Vamos a calcular el cambio en la matriz de densidad con respecto a este operador de densidad:

$$\delta\hat{\rho}_{\text{ren}} = \hat{\rho}_f - \hat{\rho}_f^{(0)}. \quad (3.80)$$

Tomando la traza sobre los grados de libertad L en la ec. (3.78) tenemos

$$\hat{\rho}_f^R = \hat{\rho}_f^{R(0)} + \hat{\rho}_f^{R(1)} + \hat{\rho}_f^{R(2)} + O(q^3), \quad (3.81)$$

donde

$$\hat{\rho}_f^{R(1)} = -i[\hat{\phi}_I, \hat{\rho}_{\text{vac}}^R], \quad (3.82)$$

$$\hat{\rho}_f^{R(2)} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^R N(\hat{\phi}_I\hat{\phi}_I)^\dagger + 2\hat{\phi}_I\hat{\rho}_{\text{vac}}^R\hat{\phi}_I + N(\hat{\phi}_I\hat{\phi}_I)\hat{\rho}_{\text{vac}}^R). \quad (3.83)$$

Nótese que $\hat{\rho}_f^{R(1)}$ tiene traza nula. Para la matriz de enredamiento tenemos

$$\delta\hat{\rho}^e = \hat{\rho}_f^{e(1)} + \hat{\rho}_f^{e(2)} + O(q^3), \quad (3.84)$$

donde $\hat{\rho}_f^{e(1)}$ y $\hat{\rho}_f^{e(2)}$ están definidas como las ecs. (3.82) y (3.83) haciendo las sustituciones $R \rightarrow e$.

La contribución a primer orden a la ec. (3.75) es

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho}^{(1)}) &= \text{Tr}_L(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_L\hat{\rho}_{\text{vac}}^L)\text{Tr}(\hat{\rho}_f^{R(1)}) + \text{Tr}(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_R\hat{\rho}_f^{R(1)}) + \\ &\quad + \text{Tr}((\hat{\phi}'_L\hat{\phi}_R + \hat{\phi}'_R\hat{\phi}_L)\hat{\rho}_f^{e(1)}). \end{aligned} \quad (3.85)$$

El primer término en el lado derecho de la ec. (3.85) es cero pues $\hat{\rho}_f^{R(1)}$ tiene traza nula. De las expresiones para $\hat{\rho}_f^{R(1)}$, ec. (3.82), se puede probar que

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{(1)}) = \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_f^{(1)}) = \text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_f^{(1)}) = 0. \quad (3.86)$$

Este resultado se puede probar heurísticamente usando el hecho de que estas trazas representan una suma de valores de expectación de tres operadores de campo en el vacío de Minkowski, que son necesariamente nulos. De la ec. (3.86) y de la definición de $\hat{\rho}_f^e$ se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{e(1)}) &= \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{(1)}) - \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \hat{\rho}_f^{R(1)}) \\ &= \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{(1)}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Para obtener la segunda igualdad en la ec. (3.87) se ha usado la ec. (3.76) para concluir que

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \hat{\rho}_f^{R(1)}) = \text{Tr}_L(\hat{\phi}_L \hat{\rho}_{\text{vac}}^L) \text{Tr}_R(\hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{R(1)}) = 0. \quad (3.88)$$

Nótese que esta última ecuación es válida para cualquier orden. Hemos probado entonces que $\text{Tr}(\hat{\phi} \hat{\phi}' \delta \hat{\rho}^{(1)}) = 0$.

La contribución a segundo orden es

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi} \hat{\phi}' \delta \hat{\rho}^{(2)}) &= \text{Tr}_L(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_{\text{vac}}^L) \text{Tr}(\hat{\rho}_f^{R(2)}) + \\ &\quad + \text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{R(2)}) + \text{Tr}((\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R + \hat{\phi}'_L \hat{\phi}_R) \hat{\rho}_f^{e(2)}). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Para los términos mixtos LR , de manera similar a la ec. (3.87), tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{e(2)}) &= \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{(2)}) - \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \hat{\rho}_f^{R(2)}) \\ &= \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Usando la ec. (3.83) se puede probar directamente que

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{e(2)}) = Z \Psi_\theta^2 \text{Tr}(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^L), \quad (3.91)$$

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_f^{e(2)}) = Z \Psi_\theta^2 \text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_{\text{vac}}^L). \quad (3.92)$$

A su vez, de la ec. (3.83) (véase su expansión en la ec. (3.115)) tenemos que $\text{Tr}(\hat{\rho}_f^{R(2)}) = \Psi_\theta^2$ y entonces

$$\text{Tr}_L(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_{\text{vac}}^L) \text{Tr}(\hat{\rho}_f^{R(2)}) = Z \Psi_\theta^2 \text{Tr}_L(\hat{\phi}_L \hat{\phi}'_L \hat{\rho}_{\text{vac}}^L). \quad (3.93)$$

Estos términos son proporcionales a las parte LR y LL respectivamente de la función de dos puntos en el vacío y por lo tanto serán absorbidos en la renormalización del resultado final. Hemos obtenido entonces el resultado inesperado de que al menos para el cambio en el valor de expectación del operador $\hat{T}_{\mu\nu}$ *no hay ninguna contribución asociada al cambio en la matriz de enredamiento* aunque, como se puede ver de la ec. (3.68), sí hay un cambio en este operador. A segundo orden, toda la contribución al cambio en la función de dos puntos, ec. (3.89), está en el término $\text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{R(2)})$. Los cálculos para obtener explícitamente este término son largos y los vamos a poner en la siguiente sección 3.3.4. El resultado es

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{R(2)}) = 4\Psi_\theta^2 \text{Im}[R_\theta(x)] \text{Im}[R_\theta(x')] + Z\Psi_\theta^2 \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')). \quad (3.94)$$

Finalmente, añadiendo las Ecs. (3.91)-(3.94) se tiene que el cambio en la función de dos puntos entre el vacío inercial y el estado del campo generado por la interacción con la fuente escalar es

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \delta \hat{\rho}_{ren}) &= 4\Psi_\theta^2 \text{Im}[R_\theta(x)] \text{Im}[R_\theta(x')] + \\ &+ \frac{Z\Psi_\theta^2}{Q} \text{Tr}(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \hat{\rho}_f^{(0)}) + O(q^3). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Esta ecuación es válida para todos $x, x' \in M$. Hemos usado la ec. (3.79) para expresar $\hat{\rho}_{\text{vac}}$ en términos del operador de densidad renormalizado del vacío $\hat{\rho}_f^{(0)}$. Nótese que aún queda renormalizar el cambio en el valor de expectación. Para esto, definimos el operador de campo renormalizado por

$$\hat{\phi}_{ren}(x) \equiv \left(1 - \frac{\Psi_\theta^2}{Q}\right)^{1/2} \hat{\phi}(x), \quad (3.96)$$

y de aquí que el cambio renormalizado en la expectación de la función de dos puntos es

$$C_\theta(x, x') \equiv \text{Tr}(\hat{\phi}_{ren}(x) \hat{\phi}_{ren}(x') \delta \hat{\rho}_{ren}) = 4\Psi_\theta^2 \text{Im}[R_\theta(x)] \text{Im}[R_\theta(x')] + O(q^3). \quad (3.97)$$

El término de segundo orden en esta expresión es

$$C_\theta^{(2)}(x, x') = 4\Psi_\theta^2 \text{Im}[R_\theta(x)] \text{Im}[R_\theta(x')]. \quad (3.98)$$

Hemos obtenido finalmente una expresión regularizada para el cambio en el valor de expectación de la función de dos puntos. Ahora podemos reconsiderar a la fuente como estática eliminando la dependencia temporal tomando el límite cuando el regulador $\theta \rightarrow 0$.

A continuación, antes de tomar este límite, vamos a evaluar explícitamente ec. (3.98) en las cuñas R y F . Primero, notamos que, de la ec. (3.57) y del hecho de que las funciones modificadas de Bessel $K_{i\theta}(m\zeta_0)$ son regulares para $\zeta_0 \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Psi_\theta = 0. \quad (3.99)$$

En este caso Ψ_θ^2 es un factor multiplicativo en $C_\theta^{(2)}(x, x')$. Al calcular el valor de expectación de $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$ el procedimiento correcto es tomar el límite $\theta \rightarrow 0$ al final del cálculo pues los operadores de campo se acoplan a la frecuencia θ de las partículas en $|f\rangle$, que corresponden a las partículas emitidas y absorbidas por la fuente.

Trabajaremos primero el caso $x, x' \in R$, en el que podemos expresar estos puntos en términos de las coordenadas de Rindler $x = (\tau, \zeta)$, $x' = (\tau', \zeta')$. Cuando se restringen a la cuña R , los modos de Unruh R_ω toman la forma de la Ec. (2.43). Usando el hecho de las funciones $K_{i\omega}(z)$ son reales siempre que ω sea real y $z > 0$, se tiene que

$$\text{Im}(R_\theta(x)) = -\frac{\sqrt{\sinh(\pi\theta)}}{\pi} \sin(\theta\tau) K_{i\theta}(m\zeta) \quad x \in R. \quad (3.100)$$

Y entonces, de las Ecs. (3.98) y (3.57) obtenemos

$$C_\theta^{(2)}(x, x') = \frac{1}{\pi^2} q^2 \sinh^2(\pi\theta) \zeta_0^2 K_{i\theta}^2(m\zeta_0) \sin(\theta\tau) \sin(\theta\tau') K_{i\theta}(m\zeta) K_{i\theta}(m\zeta'). \quad (3.101)$$

donde $x, x' \in R$. La cuña R es un conjunto abierto cuya frontera son los horizontes de Rindler, en particular, $\zeta, \zeta' \neq 0$, de tal manera que las funciones de Bessel $K_{i\theta}(m\zeta)$, $K_{i\theta}(m\zeta')$ son regulares en todo R para $\theta > 0$. Tenemos entonces que el cambio a segundo orden en la función de dos puntos entre el vacío inercial y el estado $|f\rangle$ en la cuña R está dado por:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta^{(2)}(x, x') = 0 \quad x, x' \in R. \quad (3.102)$$

Este resultado es consistente con el hecho de que, como discutimos en la sección 3.1.1, la fuente está en equilibrio térmico con el campo dentro de la

cuña R . Cualquier observador dentro de esta cuña no será capaz de notar cualquier cambio en el valor de expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$ debido a la presencia de la fuente acelerada. Es notable que la forma específica del operador de dos puntos ha jugado un papel muy especial para llegar a la ec. (3.98).

Ahora procederemos a evaluar la ec. (3.98) en la cuña F . Recordemos que en F , τ es una coordenada espacial y ζ una temporal (cf. Eq. (1.49)). De la ec. (2.44) se tiene que el modo $R_\theta(x)$ restringido a F toma la forma

$$R_\theta(x) = -\frac{i}{2^{3/2}} \frac{e^{-i\theta\tau}}{\sqrt{2 \sinh(\pi\theta)}} \left[e^{\theta\pi} H_{i\theta}^{(2)}(m\zeta) + e^{-\theta\pi} H_{i\theta}^{(1)}(m\zeta) \right], \quad (3.103)$$

donde $x \in F$ y las coordenadas (τ, ζ) están definidas en la ec. (1.49) y $H_{i\theta}^{(1),(2)}$ son funciones de Hankel. Usando las definiciones de $H_{i\theta}^{(1),(2)}$ en términos de funciones de Bessel, ec. (A.10) y ec. (A.11), se sigue inmediatamente que

$$\text{Im}(R_\theta(x)) = -\frac{1}{4\sqrt{\sinh(\pi\theta)}} (e^{-i\theta\tau} J_{-i\theta}(m\zeta) + e^{i\theta\tau} J_{i\theta}(m\zeta)), \quad (3.104)$$

donde $x \in F$. Ahora, usando las ec. (3.57) y ec. (3.104) se tiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta^{(2)}(x, x') = q^2 \zeta_0^2 K_0^2(m\zeta_0) J_0(m\zeta) J_0(m\zeta') \quad (3.105)$$

para cualesquiera $x, x' \in F$. Compárese esta ecuación con la ec. (3.102). Esta expresión representa el cambio (¡distinto de cero!) en la función de dos puntos dentro de la cuña F debida a la interacción. Contiene la información del campo radiado por la fuente hacia la cuña F . La ec. (3.105) no es válida en los horizontes.

En la sección 3.3.5 hacemos el cálculo del mismo cambio en la función de dos puntos, $\text{Tr}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\delta\hat{\rho})$ con $x, x' \in F$, pero en un marco de referencia inercial y obtenemos exactamente la ec. (3.105). Entonces, al menos para el caso particular que nos concierne ambas descripciones del campo cuántico, la inercial y la de Unruh, producen los mismos resultados físicos.

3.3.4. Cálculo de la contribución al cambio de la función de dos puntos

En la sección 3.3.3 se hacen varios cálculos a segundo orden de valores de expectación de $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$. En esta sección vamos a poner los detalles del

cálculo del término a segundo orden de $\text{Tr}(\hat{\rho}_f^R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x'))$, que corresponde a la ec. (3.94); todos los demás cálculos son análogos a éste.

El estado $|f\rangle$ toma la forma (2.56) en la cuantización de Unruh. De la ec. (3.51) se puede expresar la función de correlación de ese estado, $F(J, K)$ en términos de su expansión perturbativa:

$$F(J, K) = F_0(J, K) + F_1(J, K) + F_2(J, K) + \mathcal{O}(q^3), \quad (3.106)$$

donde el primer término es $F_0(J, K) = \mathcal{Q}F_{\text{vac}}(J, K)$ (\mathcal{Q} se define arriba de la ec. (3.52)), y $F_{\text{vac}}(J, K)$ es la función de correlación del vacío de Minkowski $|0_M\rangle$, definida por la ec. (2.80):

$$F_{\text{vac}}(J, K) = Z^{1/2} e^{-\pi E(K)} \delta(J, K), \quad (3.107)$$

donde Z es el factor de normalización definido en (3.39). Para poder expresar los demás términos en (3.106), resulta útil definir el factor de normalización $N_\theta^\alpha(K)$ por

$$N_\theta^\alpha(K) = \begin{cases} \sqrt{K_\theta + 1} & \alpha = + \\ \sqrt{K_\theta} & \alpha = - \end{cases}, \quad (3.108)$$

donde K_θ es el contenido de partículas con frecuencia centrada $\omega = \theta$ del estado $|K\rangle_{L,R}$. Usando la ec. (3.58) en la ec. (3.51) se tiene que

$$F_0(J, K) = \mathcal{Q}Z^{1/2} e^{-\pi E(K)} \delta(J, K), \quad (3.109)$$

$$F_1(J, K) = -iZ^{1/2} \Psi_\theta e^{-\pi E(J)} \left(N_\theta^+(J) \delta(K, J + 1_\theta) + N_\theta^-(J) \delta(K, J - 1_\theta) \right), \quad (3.110)$$

$$F_2(J, K) = -\frac{1}{2} Z^{1/2} \Psi_\theta^2 e^{-\pi E(J)} \left(N_\theta^-(J) N_\theta^-(J - 1_\theta) \delta(K, J - 2_\theta) + 2N_\theta^-(J) N_\theta^+(J - 1_\theta) \delta(K, J) + N_\theta^+(J) N_\theta^+(J + 1_\theta) \delta(K, J + 2_\theta) \right), \quad (3.111)$$

donde la ecuación (3.109) se obtiene de agregar el factor \mathcal{Q} a la ec. (2.80) y $E(J)$ está definido por la ec. (2.54). Las funciones δ están definidas por la ec. (2.55). La etiqueta $J - 1_\theta$ del estado que aparece en el último término

del lado derecho de la ec. (3.110) corresponde al contenido de partículas de un estado normalizado $|J - 1_\theta\rangle_R$ definido por

$$\hat{r}_\theta |J\rangle_R = N_\theta^-(J) |J - 1_\theta\rangle_R, \quad (3.112)$$

donde $J - 1_\theta = \{J_{\omega_0}, \dots, J_\theta - 1, \dots\}$. Los términos similares en (3.109), (3.110) y (3.111) se definen análogamente.

La matriz de densidad del estado $|f\rangle$ toma la forma

$$\hat{\rho}_f = |f\rangle \langle f| = \sum_{J,K,J',K'} F(J,K)F(J',K')^* |J\rangle_L |K\rangle_R \langle J'|_L \langle K'|_R. \quad (3.113)$$

Vamos a reescribirla en términos de su expansión perturbativa como

$$\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_f^{(0)} + \hat{\rho}_f^{(1)} + \hat{\rho}_f^{(2)} + \mathcal{O}(q^3) \quad (3.114)$$

Usando las ecuaciones (3.109), (3.110) y (3.111) en la ec. (3.113), identificando términos y tomando la traza parcial sobre L obtenemos que

$$\hat{\rho}_f^{R(2)} = Z\Psi_\theta^2 \left[-\frac{1}{2}(e^{-2\pi\theta} - 1)^2 \hat{\rho}_a - \frac{1}{2}(e^{2\pi\theta} - 1)^2 \hat{\rho}_b + \hat{\rho}_c \right], \quad (3.115)$$

donde

$$\hat{\rho}_a = \sum_K e^{-2\pi E(K)} \sqrt{K_\theta + 2} \sqrt{K_\theta + 1} |K\rangle_R \langle K + 2_\theta|_R, \quad (3.116)$$

$$\hat{\rho}_b = \sum_K e^{-2\pi E(K)} \sqrt{K_\theta} \sqrt{K_\theta - 1} |K\rangle_R \langle K - 2_\theta|_R, \quad (3.117)$$

$$\hat{\rho}_c = \sum_K e^{-2\pi E(K)} \left(-2K_\theta + e^{2\pi\theta} K_\theta + e^{-2\pi\theta} (K_\theta + 1) \right) |K\rangle_R \langle K|_R \quad (3.118)$$

Vamos a denotar al operador del campo en la cuña R como

$$\hat{\phi}_R(x) = \sum_{\alpha=+,-} \sum_{m=0}^{\infty} R_{\omega_m}^\alpha(x) \hat{r}_{\omega_m}^\alpha, \quad (3.119)$$

donde

$$R_{\omega_m}^+(x) = R_{\omega_m}^*(x), \quad R_{\omega_m}^-(x) = R_{\omega_m}(x), \quad \hat{r}_{\omega_m}^+ = \hat{r}_{\omega_m}^\dagger, \quad \hat{r}_{\omega_m}^- = \hat{r}_{\omega_m}. \quad (3.120)$$

Usando las ecuaciones (3.119) y (3.116) podemos calcular la siguiente traza

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_a \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) &= \sum_K \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{m, n=0}^{\infty} e^{-2\pi E(K)} \sqrt{K_\theta + 2} \sqrt{K_\theta + 1} \times \\ &\times N_{\omega_n}^{\alpha'}(K) N_{\omega_m}^{\alpha}(K + 1_{\omega_n}^{\alpha'}) \times R_{\omega_m}^{\alpha}(x) R_{\omega_n}^{\alpha'}(x')_R \left\langle K + 2_\theta | K + 1_{\omega_m}^{\alpha} + 1_{\omega_n}^{\alpha'} \right\rangle_R, \end{aligned} \quad (3.121)$$

donde $|K + 1_{\omega_m}^{\pm}\rangle_R \equiv |K \pm 1_{\omega_m}\rangle_R$. El ‘bracket’ que aparece en el lado derecho de la ec. (3.121) es

$${}_R \left\langle K + 2_\theta | K + 1_{\omega_m}^{\alpha} + 1_{\omega_n}^{\alpha'} \right\rangle_R = \delta_{\alpha, +} \delta_{\alpha', +} \delta_{\omega_m, \theta} \delta_{\omega_n, \theta}. \quad (3.122)$$

De aquí se puede ver que sólo hay contribución a la ec. (3.121) cuando el operador $\hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')$ crea dos partículas en el modo $\omega = \theta$ en el ‘estado’ definido por $\hat{\rho}_a$. Usando la ec. (3.122) en la ec. (3.121) se tiene que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_a \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) = R_\theta^*(x) R_\theta^*(x') \sum_K e^{-2\pi E(K)} (K_\theta + 2)(K_\theta + 1). \quad (3.123)$$

Para evaluar la suma en el lado derecho de la ec. (3.123) hay que notar que de la ec. (2.57) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_K e^{-2\pi E(K)} f(K_\theta) &= \sum_{K_\theta=0}^{\infty} e^{-2\pi\theta K_\theta} f(K_\theta) \times \prod_{\substack{m=0 \\ \omega_m \neq \theta}}^{\infty} \sum_{K_{\omega_m}=0}^{\infty} e^{-2\pi\omega_m K_{\omega_m}} \\ &= \langle 0_M | 0_M \rangle (1 - e^{-2\pi\theta}) \sum_{K_\theta=0}^{\infty} e^{-2\pi\theta K_\theta} f(K_\theta), \end{aligned} \quad (3.124)$$

donde $f(K_\theta)$ es cualquier función de K_θ y $\langle 0_M | 0_M \rangle$ está definido por la ec. (2.82).

Para su uso posterior, es conveniente definir aquí la siguiente funcional que nos ayudará a reducir la notación

$$G_\theta[f(K_\theta)] \equiv \sum_{K_\theta=0}^{\infty} e^{-2\pi\theta K_\theta} f(K_\theta). \quad (3.125)$$

Usando la ec. (3.124), la ec. (3.123) toma la forma

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_a \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) = \langle 0_M | 0_M \rangle \frac{2}{(1 - e^{-2\pi\theta})^2} R_\theta^*(x) R_\theta^*(x'), \quad (3.126)$$

donde hemos usado que

$$G_\theta[(K_\theta + 2)(K_\theta + 1)] = \frac{2}{(1 - e^{-2\pi\theta})^3}. \quad (3.127)$$

Análogamente, se tiene que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_b \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) = \langle 0_M | 0_M \rangle \frac{2}{(e^{2\pi\theta} - 1)^2} R_\theta(x) R_\theta(x'). \quad (3.128)$$

Antes de calcular explícitamente $\text{Tr}(\hat{\rho}_c \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x'))$ vamos a definir

$$H_{\omega_m}[K](x, x') \equiv K_{\omega_m} R_{\omega_m}^*(x) R_{\omega_m}(x') + (K_{\omega_m} + 1) R_{\omega_m}(x) R_{\omega_m}^*(x'). \quad (3.129)$$

Se puede ver que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) = \sum_K e^{-2\pi E(K)} \sum_{m=0}^{\infty} H_{\omega_m}[K](x, x'). \quad (3.130)$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(\sum_K e^{-2\pi E(K)} \left[e^{2\pi\theta} K_\theta + e^{-2\pi\theta} (K_\theta + 1) \right] |K\rangle_R \langle K|_R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x') \right) = \\ & = \sum_K e^{-2\pi E(K)} \left[(e^{2\pi\theta} K_\theta^2 + e^{-2\pi\theta} K_\theta (K_\theta + 1)) R_\theta^*(x) R_\theta(x') \right. \\ & \quad \left. + (e^{2\pi\theta} K_\theta (K_\theta + 1) + e^{-2\pi\theta} (K_\theta + 1)^2) R_\theta(x) R_\theta^*(x') \right] \\ & \quad + \sum_K e^{-2\pi E(K)} (e^{2\pi\theta} K_\theta + e^{-2\pi\theta} (K_\theta + 1)) \sum_{\substack{m=0 \\ \omega_m \neq \theta}}^{\infty} H_{\omega_m}[K](x, x'). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Vamos a usar ciertas propiedades de $G_\theta[f(K_\theta)]$; de la ec. (3.125) se pueden probar directamente las siguientes:

$$e^{2\pi\theta} G_\theta[K_\theta^2] + e^{-2\pi\theta} G_\theta[K_\theta(K_\theta + 1)] = G_\theta[K_\theta(2K_\theta + 1)] + G_\theta[1], \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} e^{2\pi\theta} G_\theta[K_\theta(K_\theta + 1)] + e^{-2\pi\theta} G_\theta[(K_\theta + 1)^2] &= \\ &= G_\theta[(2K_\theta + 1)(K_\theta + 1)] + G_\theta[1], \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$e^{2\pi\theta} G_\theta[K_\theta] + e^{-2\pi\theta} G_\theta[(K_\theta + 1)] = G_\theta[(2K_\theta + 1)]. \quad (3.134)$$

Ahora, usamos la ec. (3.124) para simplificar el lado derecho de la ec. (3.131). Usando las ecuaciones (3.132)-(3.134) se tiene que

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(\sum_K e^{-2\pi E(K)} \left[e^{2\pi\theta} K_\theta + e^{-2\pi\theta} (K_\theta + 1) \right] |K\rangle_R \langle K|_R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x') \right) = \\ & = \langle 0_M | 0_M \rangle (R_\theta^*(x) R_\theta(x') + R_\theta(x) R_\theta^*(x')) + \sum_K e^{-2\pi E(K)} (2K_\theta + 1) \sum_{m=0}^{\infty} H_{\omega_m}[K](x, x'). \end{aligned} \quad (3.135)$$

Entonces, de la ec. (3.135) se tiene que (ver la ec. (3.118))

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_c \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) &= \langle 0_M | 0_M \rangle (R_\theta^*(x) R_\theta(x') + R_\theta(x) R_\theta^*(x')) + \\ &+ \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')), \end{aligned} \quad (3.136)$$

donde también hemos usado la ec. (3.130). Finalmente, de la ecuaciones (3.126), (3.128), (3.136) y (3.115) llegamos a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_f^{R(2)} \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')) &= \Psi_\theta^2 (-R_\theta(x) R_\theta(x') - R_\theta^*(x) R_\theta^*(x')) + \\ &+ R_\theta^*(x) R_\theta(x') + R_\theta(x) R_\theta^*(x') + Z \Psi_\theta^2 \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{\phi}_R(x) \hat{\phi}_R(x')), \end{aligned} \quad (3.137)$$

y de aquí la ec. (3.94) se sigue directamente. En el apéndice B obtenemos este mismo resultado sin usar el lenguaje de los operadores de densidad.

3.3.5. Cambios en la función de dos puntos en términos de un observador inercial

En esta sección realizamos el mismo cálculo con el que obtuvimos la ec. (3.105), pero desde el punto de vista de un observador inercial, cuyos modos del campo están definidos con respecto al campo de Killing temporal t^a . En este caso la fuente escalar, ec. (3.54), está dada por

$$j(x) = q\zeta_0 \frac{\delta(z - \sqrt{t^2 + \zeta_0^2})}{\sqrt{t^2 + \zeta_0^2}} \quad (3.138)$$

donde $\zeta_0 = 1/a$ y a es la aceleración de la fuente. Sea $\psi_p(x)$ una onda plana con frecuencia $\omega_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$,

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\omega_p}} e^{-i\omega_p t + ipz}. \quad (3.139)$$

Usando el operador de campo

$$\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp (\psi_p(x)\hat{a}_p + \psi_p^*(x)\hat{a}_p^\dagger) \quad (3.140)$$

en las Ecs. (3.45) y (3.46) se puede ver que el cambio en $\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') \rangle$ entre los estados $|f\rangle$ y $|0_M\rangle$, renormalizado a segundo orden, está dado por

$$C_{\text{in}}^{(2)}(x, x') = 4\text{Im}[Q(x)]\text{Im}[Q(x')] \quad (3.141)$$

donde

$$Q(x) = \int_M d^2x' \int_{-\infty}^{\infty} dp j(x)\psi_p^*(x')\psi_p(x) \quad (3.142)$$

Para el campo escalar la función de dos puntos está dada por

$$i\Delta^{(+)}(x, x') \equiv \langle 0_M | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') | 0_M \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi_p^*(x')\psi_p(x) \quad (3.143)$$

donde [28]

$$\Delta^{(+)}(x, 0) = \frac{1}{4} \times \begin{cases} H_0^{(2)}(m\sqrt{t^2 - z^2}) & t > |z| \\ \frac{2i}{\pi} K_0(m\sqrt{z^2 - t^2}) & |t| < |z| \\ -H_0^{(1)}(m\sqrt{t^2 - z^2}) & t < -|z| \end{cases} . \quad (3.144)$$

Vamos a hacer el cálculo para $x \in F$. Usando el hecho de que $\Delta^{(+)}(x, x') = \Delta^{(+)}(x - x', 0)$ y la ec. (3.144) se puede ver que

$$\text{Im}[Q(x)] = \frac{q\zeta_0}{4} \int_{-\infty}^{t^-} \frac{dt'}{\sqrt{t'^2 + \zeta_0^2}} J_0(m\sqrt{-2\sigma(t')}) \quad (3.145)$$

donde

$$\sigma(t') = \frac{1}{2} \left(-(t - t')^2 + \left(z - \sqrt{t'^2 + \zeta_0^2} \right)^2 \right) \quad (3.146)$$

y $\sigma(t^-) = 0$. Para obtener la ec. (3.145) usamos $H_\nu^{(2)}(y) = J_\nu(y) - iY_\nu(y)$ y el hecho de que $J_0(y)$, $Y_0(y)$ son reales para $y \geq 0$. Haciendo el cambio de variables $t' = \zeta_0 \sinh(\tau/\zeta_0)$ y $u = \sqrt{-2\sigma(\tau)}$ obtenemos

$$\text{Im}[Q(x)] = \frac{q\zeta_0}{2} \int_0^\infty \frac{uJ_0(mu)}{\sqrt{4\zeta_0^2\zeta^2 + (u^2 + \zeta_0^2 - \zeta^2)^2}} du = \frac{q\zeta_0}{2} K_0(m\zeta_0)J_0(m\zeta) \quad (3.147)$$

donde hemos usado que $x = (t, z)$ y $t = \zeta \cosh(\tau_p/\zeta_0)$, $z = \zeta \sinh(\tau_p/\zeta_0)$ (cf. ec. (1.49)). La derivación que lleva a la segunda igualdad en ec. (3.147) es análoga a la que lleva a la ecuación §13.54(1) de Watson [44].

Entonces, hemos probado que

$$C_{in}^{(2)}(x, x') = q^2 \zeta_0^2 K_0(m\zeta_0)^2 J_0(m\zeta) J_0(m\zeta') \quad (3.148)$$

que coincide funcionalmente con la ec. (3.105). En este cálculo uno debe de aplicar el teorema de Wick con las nociones de tiempo y ordenamiento normal asociadas a la coordenada temporal inercial t . Sin embargo, es notable que esta elección de coordenada temporal no aparece en el cambio físico de la función de dos puntos, sino sólo en los términos de renormalización. Nótese que, en contraste con el cálculo en el marco de referencia acelerado, en este caso no fue necesaria la introducción de un regulador en la corriente, ni ningún corte como en el cálculo de [19].

3.4. Ejemplo de interferencia entre las cuñas L y R : dos fuentes con aceleraciones opuestas

Como vimos en la sección 3.3.3, la matriz de enredamiento no juega ningún papel significativo en el cambio del valor de expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$ para la interacción de una fuente acelerada con el vacío inercial. Sin embargo, la presencia de otra fuente acelerada en la cuña L puede afectar al enredamiento del estado final y, en este caso, $\hat{\rho}^e$ podría contribuir al cambio en el valor de expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$. En efecto, las contribuciones al cambio en la función de dos puntos debidas al cambio en el operador de enredamiento se darían sólo cuando se evalúan las partes combinadas LR del producto $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$; esto es, $\hat{\phi}_L(x)\hat{\phi}_R(x') + \hat{\phi}_L(x')\hat{\phi}_R(x)$. En el apéndice B argumentamos que estas contribuciones podrían ocurrir si la fuente que perturba al campo tiene soporte en ambas cuñas.

Supongamos que, adicionalmente a la partícula escalar que hemos considerado en las secciones anteriores, tenemos una partícula escalar extra, que se acelera uniformemente en la cuña L y con carga escalar \tilde{q} . La perturbación producida en el campo por este par de partículas está definida por la corriente

$$j(x) = \begin{cases} j_L(x) & x \in L \\ j_R(x) & x \in R \end{cases}, \quad (3.149)$$

donde

$$j_L(x) = \tilde{q} \cos(\tilde{\theta} \tau_L) \delta(\zeta_L - \tilde{\zeta}_0) \quad j_R(x) = q \cos(\theta \tau_R) \delta(\zeta_R - \zeta_0). \quad (3.150)$$

Las coordenadas de Rindler en la cuña L , (τ_L, ζ_L) están dadas por la ec. (1.48). Para evitar confusiones, en esta sección vamos a denotar a las coordenadas de Rindler en la cuña R por (τ_R, ζ_R) (originalmente habíamos usado (τ, ζ)). Nótese que los factores oscilantes en la corriente tienen diferentes frecuencias para garantizar que las fuentes sean independientes entre sí.

Usando la ec. (3.45) para $j(x)$ dada por la expresión (3.149) se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{S}' &= \hat{T} \exp \left[-i[(\hat{\phi}_I^L \otimes \hat{1}_R) + (\hat{1}_L \otimes \hat{\phi}_I^R)] \right] = \\ &= \hat{T} \exp[-i\hat{\phi}_I^L] \otimes \exp[-i\hat{\phi}_I^R] \equiv \hat{S}_L \otimes \hat{S}_R, \end{aligned} \quad (3.151)$$

donde

$$\hat{\phi}_I^L = \Psi_{\tilde{\theta}}(\hat{l}_{\tilde{\theta}} + \hat{l}_{\tilde{\theta}}^\dagger), \quad \hat{\phi}_I^R = \Psi_{\theta}(\hat{r}_{\theta} + \hat{r}_{\theta}^\dagger), \quad (3.152)$$

y \hat{T} es el operador de ordenamiento temporal. En este caso tenemos dos coordenadas temporales independientes τ_L y τ_R , por lo que \hat{T} va a ordenar temporalmente los operadores L y R independientemente (nótese además que $\hat{\phi}_L$ y $\hat{\phi}_R$ conmutan). El factor Ψ_{θ} para la carga en la cuña R está dado por la ec. (3.57); el factor $\Psi_{\tilde{\theta}}$ para la carga en la cuña izquierda está dado por

$$\Psi_{\tilde{\theta}} = \tilde{q} \sqrt{\sinh(\pi\tilde{\theta})} \tilde{\zeta}_0 K_{i\tilde{\theta}}(m\tilde{\zeta}_0). \quad (3.153)$$

Sea $|g\rangle$ el estado final del campo generado por esta interacción. Análogamente a la ec. (3.66), en este caso, su matriz de densidad toma la forma

$$\hat{\rho}_g = \hat{\rho}_g^L \otimes \hat{\rho}_g^R + \hat{\rho}_g^e, \quad (3.154)$$

donde

$$\hat{\rho}_g^L = \hat{S}_L \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \hat{S}_L^\dagger, \quad \hat{\rho}_g^R = \hat{S}_R \hat{\rho}_{\text{vac}}^R \hat{S}_R^\dagger, \quad \hat{\rho}_g^e = \hat{S}' \hat{\rho}_{\text{vac}}^e \hat{S}'^\dagger. \quad (3.155)$$

Entonces, el cambio en el estado en términos del cambio en los operadores de densidad es

$$\delta \hat{\rho}_g = \hat{\rho}_{\text{vac}}^L \otimes \delta \hat{\rho}_g^R + \delta \hat{\rho}_g^L \otimes \hat{\rho}_{\text{vac}}^R + \delta \hat{\rho}_g^L \otimes \delta \hat{\rho}_g^R + \delta \hat{\rho}_g^e, \quad (3.156)$$

donde $\delta\hat{\rho}_g = \hat{\rho}_g - \hat{\rho}_{\text{vac}}$ y todas las demás diferencias están definidas análogamente.

Vamos a calcular ahora el cambio $\text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho}_g)$. Análogamente al caso de una sola partícula acelerada, el primer término relevante es el de segundo orden en q y \tilde{q} . Usando las ecuaciones (3.72) y (3.156) se puede ver que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho}_g^{(2)}) &= \text{Tr}_L(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_L\delta\hat{\rho}_g^{L(2)}) + \text{Tr}_R(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_R\delta\hat{\rho}_g^{R(2)}) \\ &\quad + Z\Psi_\theta^2\text{Tr}_L(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_L\hat{\rho}_{\text{vac}}^L) + Z\Psi_\theta^2\text{Tr}_R(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_R\hat{\rho}_{\text{vac}}^R) \\ &\quad + \text{Tr}((\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R + \hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L)\delta\hat{\rho}_g^{L(1)} \otimes \delta\hat{\rho}_g^{R(1)}) \\ &\quad + \text{Tr}((\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R + \hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L)\delta\hat{\rho}_g^e). \end{aligned} \quad (3.157)$$

Los primeros cuatro términos en el lado derecho de la ec. (3.157) son análogos a la ec. (3.93) y ec. (3.94) para el caso de un única fuente escalar. De hecho, se tiene que

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_R\hat{\phi}'_R\delta\hat{\rho}_g^{R(2)}) = 4\Psi_\theta^2 \text{Im}[R_\theta(x)] \text{Im}[R_\theta(x')] + Z\Psi_\theta^2 \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^R\hat{\phi}_R(x)\hat{\phi}_R(x')) \quad (3.158)$$

$$\text{Tr}(\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_L\delta\hat{\rho}_g^{L(2)}) = 4\Psi_\theta^2 \text{Im}[L_{\tilde{\theta}}(x)] \text{Im}[L_{\tilde{\theta}}(x')] + Z\Psi_\theta^2 \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{vac}}^L\hat{\phi}_L(x)\hat{\phi}_L(x')). \quad (3.159)$$

Similarmente a la ec. (3.82), se puede ver que

$$\delta\hat{\rho}_g^{L(1)} = -i(\hat{\phi}_I^L\hat{\rho}_{\text{vac}}^L - \hat{\rho}_{\text{vac}}^L\hat{\phi}_I^L) \quad (3.160)$$

$$\delta\hat{\rho}_g^{R(1)} = -i(\hat{\phi}_I^R\hat{\rho}_{\text{vac}}^R - \hat{\rho}_{\text{vac}}^R\hat{\phi}_I^R) \quad (3.161)$$

y de estas ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R + \hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L)\delta\hat{\rho}_g^{L(1)} \otimes \delta\hat{\rho}_g^{R(1)}) &= \\ &= 4\Psi_{\tilde{\theta}}\Psi_\theta(\text{Im}(L_{\tilde{\theta}}(x))\text{Im}(R_\theta(x')) + \text{Im}(R_{\tilde{\theta}}(x))\text{Im}(L_\theta(x'))) \end{aligned} \quad (3.162)$$

Por otro lado, se puede probar que la contribución de segundo orden al cambio en la función de dos puntos relacionada con el operador de enredamiento es

$$\text{Tr}((\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R + \hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L)\delta\hat{\rho}_g^{e(2)}) = Z(\Psi_\theta^2 + \Psi_{\tilde{\theta}}^2) \text{Tr}((\hat{\phi}_L\hat{\phi}'_R + \hat{\phi}_R\hat{\phi}'_L)\hat{\rho}_{\text{vac}}), \quad (3.163)$$

que, como en el caso de una sola fuente, también corresponde a términos que serán absorbidos en el valor final del cambio en el valor de expectación.

Sumando todas las contribuciones, la ec. (3.157) toma la forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}\hat{\phi}'\delta\hat{\rho}_g^{(2)}) = & 4[\Psi_{\tilde{\theta}}\text{Im}(L_{\tilde{\theta}}(x)) + \Psi_{\theta}\text{Im}(R_{\theta}(x))][\Psi_{\tilde{\theta}}\text{Im}(L_{\tilde{\theta}}(x')) + \Psi_{\theta}\text{Im}(R_{\theta}(x'))] \\ & + Z(\Psi_{\tilde{\theta}}^2 + \Psi_{\theta}^2) \text{Tr}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\hat{\rho}_{\text{vac}}) \end{aligned} \quad (3.164)$$

Entonces, el cambio en la función de dos puntos renormalizado y a segundo orden queda

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}_{ren}'\hat{\phi}_{ren}'\delta\hat{\rho}_{gren}) = & 4[\Psi_{\tilde{\theta}}\text{Im}(L_{\tilde{\theta}}(x)) + \Psi_{\theta}\text{Im}(R_{\theta}(x)) \\ &][\Psi_{\tilde{\theta}}\text{Im}(L_{\tilde{\theta}}(x')) + \Psi_{\theta}\text{Im}(R_{\theta}(x'))] + \dots \end{aligned} \quad (3.165)$$

Después de tomar los límites $\tilde{\theta}, \theta \rightarrow 0$ y evaluar en $x = (\tau_F, \zeta_F)$ y $x' = (\tau'_F, \zeta'_F)$ se obtiene

$$\lim_{\tilde{\theta}, \theta \rightarrow 0} \text{Tr}(\hat{\phi}_{ren}(x)\hat{\phi}_{ren}(x')\delta\hat{\rho}_{gren}) = (\tilde{q}\tilde{\zeta}_0 K_0(m\tilde{\zeta}_0) + q\zeta_0 K_0(m\zeta_0))^2 J_0(m\zeta_F) J_0(m\zeta'_F). \quad (3.166)$$

Como se esperaba, si apagamos la carga en la cuña L ($\tilde{q} \rightarrow 0$) recobramos nuestro resultado previo para una sola carga, la ec. (3.105). Para el caso de dos cargas aceleradas resulta que toda la contribución al cambio en la función de dos puntos viene únicamente del cambio en las matrices de densidad reducidas en cada cuña, $\delta\hat{\rho}_g^L, \delta\hat{\rho}_g^R$. En particular, el término de interferencia, ec. (3.162), está determinado por este último par de operadores. Esto es, para el caso que hemos analizado, toda la información en el cambio en el valor de expectación $\hat{T}_{\mu\nu}$ está codificada únicamente en $\delta\hat{\rho}_g^L, \delta\hat{\rho}_g^R$.

3.5. Discusión

Uno de los principales objetivos del análisis desarrollado en este capítulo fue reconciliar el hecho de que el estado final del campo parece ser el mismo estado térmico que el estado de vacío de Minkowski en ambas cuñas de Rindler, con el hecho de que en la cuña F se espera un cambio en los observables del campo. Este problema se planteó en términos de una descomposición en el operador de densidad del estado del campo que revelara la información pertinente en el cambio en el valor de expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$. En un principio se pensó que, como como no hay un cambio en el valor de expectación de

$\hat{T}_{\mu\nu}$ en las cuñas R y L , el cambio físico en la cuña F *no podría* ser inducido por los comportamientos particulares del estado cuando se le restringe a cada cuña. En este caso, la información acerca de este cambio debería estar codificada en alguna parte del estado que no está representada por alguna de las matrices de densidad restringidas $\hat{\rho}_f^L$ y $\hat{\rho}_f^R$ (o en sus respectivos cambios). En este sentido, propusimos la descomposición de $\hat{\rho}_f$ dada por la ec. (3.34) con la introducción particular del ‘operador de enredamiento’ $\hat{\rho}^e$. Como explicamos en la sección 3.3.2, este operador no juega ningún papel cuando se calculan valores de expectación de observables localizados en las cuñas L y R y, por lo tanto, resultaba un buen candidato para contener la información del cambio de $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ en la cuña F . Sin embargo, calculamos este cambio de manera perturbativa y encontramos que tiene contribuciones sólo del cambio en el operador de densidad que describe al estado en la cuña R , (ver las ecuaciones (3.94) y (3.97)). Esto es, cuando evaluamos $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ en las cuñas L y R , su cambio está determinado únicamente por la caracterización del cambio en el estado en la cuña R . Este resultado contrasta con nuestra expectativa inicial de que la información en el cambio de $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ estaría codificada en el cambio en el operador de enredamiento, $\delta\hat{\rho}^e$.

Para obtener este resultado, se tuvo que introducir *a priori* una función reguladora, $\cos(\theta\tau)$, en la corriente que describe a la carga (escalar) uniformemente acelerada y llevar a cabo un límite $\theta \rightarrow 0$ al final de los cálculos. Como se mencionó arriba, este regulador está inspirado en el análisis sobre un caso parecido al nuestro y que explicamos en la sección 3.1. A pesar de que esta elección de regulador fue motivada heurísticamente, hemos demostrado que cuando el cálculo del mismo cambio de valor de expectación, $\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') \rangle$, se realiza en términos de la cuantización del campo en ondas planas (descripción inercial) se obtienen los mismos resultado que en la cuantización de Unruh usando el regulador (ver la sección 3.3.5).

Se puede dar una explicación de la validez física del regulador que usamos como sigue. En principio, uno quisiera describir la radiación generada por una partícula cargada *real* (y no simplificada), que debe ser descrita como un objeto cuántico. Sin embargo, esta descripción es inconsistente con la descripción de la fuente como una partícula con aceleración uniforme pues una partícula cuántica no se mueve en una trayectoria definida y, por lo tanto, asignarle una aceleración propia constante es imposible. Por otro lado, la naturaleza del campo cuántico es distribucional, por lo que una descripción

correcta de la fuente se debe de hacer en términos de funciones de soporte compacto (nótese que la ec. (3.55) no tiene esta propiedad). Esto es, en términos cuánticos la fuente debe corresponder a un objeto extendido. A uno de estos objetos tampoco se le puede asignar de manera natural una aceleración propia constante: si el objeto debe de mantener su ‘forma’ a lo largo de su trayectoria, entonces ciertas partes de él deben tener, necesariamente, diferentes aceleraciones propias.

Sin embargo, modelar la fuente en términos de una fuente clásica y puntual (con una aceleración propia definida), junto con cierto tipo de regulador, produce resultados físicamente correctos y que son completamente consistentes con el Principio de Equivalencia. El regulador usado en [20] consistió en la introducción de una oscilación artificial, con frecuencia θ , en la magnitud de la carga acelerada para poder controlar las expresiones $0 \times \infty$ mientras se llevaba a cabo el cálculo y al final de este retornar a la fuente original tomando el límite $\theta \rightarrow 0$. Esto es, estamos entonces asumiendo que la introducción de tal regulador, junto con la prescripción de tomar el límite $\theta \rightarrow 0$ en los valores de expectación, sólo hasta el final del cálculo, reflejan de manera efectiva la descripción de una partícula cuántica cargada en interacción con el campo. Sin embargo, para que los resultados que obtuvimos sean más sólidos, se debería confirmar que se obtienen los mismos resultados para una clase más amplia de funciones reguladoras.

De estas consideraciones se sigue que los cálculos que hemos hecho tienen sentido sólo si se toma el límite $\theta \rightarrow 0$ ya que se ha terminado el cálculo de los valores de expectación cuando $\theta \neq 0$. De hecho, uno podría estar tentado a tomar este límite directamente en la matriz de densidad $\hat{\rho}_f$ del estado. Ignorando por el momento detalles acerca de límites de operadores se puede ver que, debido a que el factor Ψ_θ que multiplica todas las expresiones se va a cero cuando $\theta \rightarrow 0$, cada término en la expansión de $\hat{\rho}_f$ se hace cero, exceptuando aquéllos términos proporcionales a $\hat{\rho}_{vac}$. Entonces, uno concluiría que no ha habido ningún cambio en el estado del campo en la cuña R debido a la presencia de la carga acelerada. Como hemos visto, éste cambio del estado, es el único factor que contribuye al cambio en el valor de expectación de $\hat{T}_{\mu\nu}$, por lo que llegaríamos a la conclusión errónea de que no hay un cambio en esta cantidad.

De los cálculos en la sección 3.3.3 concluimos que el cambio en $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$

está codificado en $\delta\hat{\rho}_f^R$. Ahora queremos discutir cómo es que se codifica esta información. La respuesta a esta pregunta recae en un sutil juego entre el operador de campo $\hat{\phi}(x)$ y la estructura de la matriz de densidad en el formalismo de observadores acelerados. Veamos algunos detalles específicos de nuestro cálculo: El factor Ψ_θ en el término de segundo orden en $\hat{\rho}_f^R$ viene del hecho de que la fuente está localizada en la cuña R . En esta región los modos de Unruh $R_\theta(x) \rightarrow 0$ cuando $\theta \rightarrow 0$ (siempre que x no esté en el horizonte, ver el apéndice A). Al calcular $\text{Tr}(\hat{\phi}_R \hat{\phi}'_R \hat{\rho}_f^{R(2)})$, los operadores de campo son sensibles a la frecuencia θ . De hecho, estos operadores sólo excitan modos con ω_θ como se puede esperar por consideraciones de conservación de energía de Rindler. La forma particular de $\hat{\rho}_f^R$ determina la estructura de las contribuciones dada por la ec. (3.98), que a su vez, debido a los diferentes comportamientos de los modos de Unruh en las diferentes cuñas, se anula en R mientras que en F , no es idénticamente cero.

Nuestra interpretación de estos resultados es la siguiente. Los modos con energía de Rindler cero (que, de hecho, son de gran interés en la definición formal de la cuantización de Unruh como explicamos en la sección 2.2.3), son, en efecto, esenciales para obtener una descripción idéntica tanto en el marco acelerado como en el marco inercial. Físicamente, se puede pensar que estos modos son excitados por las fluctuaciones cuánticas más débiles de una partícula cuántica realista, y esta excitación se manifiesta determinantemente en la cuña F . Estos resultados parecen estar en concordancia con los obtenidos en [20], donde se argumenta que los modos de energía cero son indetectables (usando una definición apropiada de detectabilidad) cuando se confinan a la cuña R . Finalmente, creemos que el análisis desarrollado en este capítulo ha ayudado a clarificar los cuestionamientos generados en la sección 3.1.1.



Capítulo 4

Conclusiones

Hemos presentado varias situaciones en las que ‘se pone a prueba’ el Principio de Equivalencia. Desde las posibles objeciones entre este principio y el análisis clásico de la radiación de cargas aceleradas, hasta las aparentes contradicciones entre el hecho de que un observador acelerado no ve ningún cambio en el estado del campo cuántico con la presencia de la radiación en otra región del espacio-tiempo. Como se ha visto de estos análisis, la radiación es un fenómeno dependiente del observador y tomando esto en cuenta desaparecen las contradicciones. En todo el trabajo hemos hecho énfasis en la manera en que se describe la radiación para cada caso y para cada observador.

Para analizar el caso cuántico, en el capítulo 3 introducimos un elemento nuevo que no se había tratado en la literatura al respecto. Dado que desde el punto de vista de observadores acelerados el campo cuántico se describe en términos de un sistema compuesto, ciertos estados, como el estado de vacío de Minkowski y el estado que resulta de la interacción de la fuente acelerada con el campo son estados enredados. A diferencia del caso mecánico-cuántico en el que los estados compuestos se refieren a estados de dos partículas, por ejemplo; en el caso de la cuantización de Unruh del campo los subsistemas involucrados son las restricciones del mismo campo a las cuñas L y R . Fuera de estas regiones, el estado del campo se debe describir usando el estado compuesto. Como el ‘enredamiento’ no se manifiesta en mediciones sobre los subsistemas, en un principio pensamos que el enredamiento jugaría un rol importante en la información física del estado cuántico fuera de la doble

cuña $L \cup R$. Sin embargo, después de un cálculo cuidadoso concluimos que este no fue el caso, sino que esta información, para la situación particular que analizamos (el estado final debido a la interacción de una carga acelerada y el valor de expectación del tensor de energía-momento en este estado) se encontraba en la restricción del estado a la cuña R . Este análisis nos permitió responder claramente a la pregunta que motivó el trabajo. Sin embargo, puede ser el caso que en otras situaciones, como por ejemplo, usando la misma interacción pero estudiando el valor de expectación de otro tipo de operadores, en efecto, el enredamiento aparezca en la información del estado fuera de la doble cuña. Nuestro trabajo da pie a continuar con este tipo de análisis.

Adicionalmente, hay una situación técnicamente análoga a la que hemos estudiado, que indica que una partícula estacionaria fuera del horizonte de un agujero negro estacionario podría estar ‘emitiendo’ hacia su interior. Este trabajo muestra un camino claro para estudiar los cambios en el tensor de energía momento en esa situación.



Apéndice A

Representaciones y comportamiento en los horizontes de los modos de Unruh

A.1. Representaciones sobre las diferentes cuñas de Rindler

Dado que hemos introducido los modos de Unruh en términos de los modos de *boost*, ec. (2.41), podemos obtener la expresión funcional de los modos de Unruh en las diferentes cuñas de Rindler mediante las representaciones (distribucionales) de los modos de *boost*, ec. (2.35), en estas regiones. Como mencionamos en el capítulo 2, los modos de *boost* tienen sentido como distribuciones sobre el espacio-tiempo de Minkowski, (M) . Las funciones de prueba que consideramos son las funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto en M , $C_0^\infty(M)$. Con este sentido, la acción de un modo de *boost* sobre la función f está dada por

$$B_\omega[f] = \int_R B_\omega(x) f(x) d^2x. \quad (\text{A.1})$$

Notemos que, para encontrar la expresión de los modos de *boost* en (el interior) de las diferentes cuñas de Rindler, se deben considerar funciones de prueba con soporte en el interior de la cuña respectiva. Sea $f \in C_0^\infty(R)$.

La acción de B_ω sobre f , $B_\omega[f]$, está dada por

$$B_\omega[f] = \int_R d^2x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-i\omega\theta} e^{im(z \sinh(\theta) - t \cosh(\theta))} f(t, z), \quad (\text{A.2})$$

donde $x = (t, z)$ y hemos usado la expresión funcional de los modos de *boost*, ec. (2.35). Expresando la ec. (A.2) en términos de las coordenadas de Rindler (τ, ζ) en la cuña R , ec. (1.47), se tiene que

$$B_\omega[f] = \frac{1}{2^{3/2}\pi} \int_R d^2x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-i\omega\theta} e^{im\zeta \sinh(\theta - \tau)} f(\tau, \zeta). \quad (\text{A.3})$$

Usando la siguiente propiedad de las funciones de Bessel modificadas (o de Macdonald) [12]:

$$K_\nu(u) = \frac{1}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu\alpha} e^{-iu \sinh(\alpha)} d\alpha, \quad (\text{A.4})$$

se puede ver que

$$B_\omega[f] = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{\frac{\omega\pi}{2}} \int_R d^2x e^{-i\omega\tau} K_{i\omega}(m\zeta) f(\tau, \zeta). \quad (\text{A.5})$$

De esta ecuación se puede ver que la restricción a la cuña R de la distribución B_ω está dada por [28]

$$B_\omega|_R(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{\frac{\omega\pi}{2}} e^{-i\omega\tau} K_{i\omega}(m\zeta). \quad (\text{A.6})$$

Con un procedimiento análogo, se puede ver que las restricciones de los modos de *boost* a las demás cuñas son [28] (las coordenadas que ponemos en estas expresiones son las respectivas a la cuña en cuestión, definidas por las ecs. (1.48), (1.49), (1.50)):

$$B_\omega|_L(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{\frac{-\omega\pi}{2}} e^{i\omega\tau} K_{i\omega}(m\zeta), \quad (\text{A.7})$$

$$B_\omega|_F(x) = -\frac{i}{2^{3/2}} e^{\frac{\omega\pi}{2}} e^{-i\omega\tau} H_{i\omega}^{(2)}(m\zeta), \quad (\text{A.8})$$

$$B_\omega|_P(x) = \frac{i}{2^{3/2}} e^{\frac{-\omega\pi}{2}} e^{-i\omega\tau} H_{i\omega}^{(1)}(m\zeta), \quad (\text{A.9})$$

donde $H_\nu^{(1),(2)}$ son funciones de Hankel definidas por [12]

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{i \sin(\nu\pi)} [J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(z)], \quad (\text{A.10})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{i \sin(\nu\pi)} [e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)]. \quad (\text{A.11})$$

Las restricciones de los modos de Unruh en cada cuña, (2.43)-(2.46), (2.47)-(2.50), se obtienen, finalmente, de sustituir las expresiones que hemos presentado para los modos de *boost* en la definición de los modos de Unruh, ec. (2.41).

A.2. Modos de Unruh en los horizontes

El comportamiento de los modos de Unruh en los horizontes de Rindler resulta importante si se quieren analizar propiedades asintóticas de los estados de una partícula desde el punto de vista de observadores acelerados. En esta sección hacemos un análisis de estos comportamientos, cuyos detalles no se encuentran en la literatura. Como vimos en la sección anterior, las representaciones de los modos de *boost* y de Unruh están dadas en términos de varios tipos de funciones de Bessel. Recordemos de la sección 1.2.1 que en todos los sistemas de coordenadas que representan las distintas cuñas de Rindler, los horizontes están descritos por las superficies $\zeta = 0$. Por otro lado, los argumentos de las funciones de Bessel que aparecen en las expresiones de los modos son, en todos los casos, $m\zeta$ donde m es la masa del campo escalar y ζ es la coordenada de Rindler de la cuña en cuestión. Primero vamos a estudiar los comportamientos de las funciones K_ν y $H_\nu^{(1),(2)}$ cuando sus argumentos tienden a cero.

En general, todas las funciones de Bessel de argumento complejo z son de la forma $z^\nu g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica [12, 44], por lo que el comportamiento singular de la función alrededor de $z = 0$ está gobernado por el factor z^ν . Consideremos $f(z) = z^{i\omega}$, su expansión en series de Laurent alrededor de $z = 0$ está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{\sinh(\pi\omega)}{\pi} \frac{n+1-i\omega}{(n+1)^2 + \omega^2}, \\ b_n &= (-1)^{n-1} \frac{\sinh(\pi\omega)}{\pi} \frac{n-1-i\omega}{(n-1)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Dado que para $\omega \neq 0$ todas las b_n son distintas de cero, se sigue que $z^{i\omega}$ tiene una singularidad *esencial* en $z = 0$. Notemos que, sin embargo, el módulo de la función no diverge. Apliquemos este resultado a las funciones K_ν y $H_\nu^{(1),(2)}$. Usando la expansión en serie de la función de Bessel $J_\nu(z)$ (estamos tomando la convención de [12], pág. 4),

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad |arg(z)| < \pi, \quad (\text{A.13})$$

la función de Bessel $I_\nu(z)$ se puede expandir como

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}}) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}. \quad (\text{A.14})$$

De aquí podemos obtener una ecuación para K_ν . Expresando esta función en términos de las funciones $I_\nu(z)$ [12] y usando la ec. (A.14), se tiene

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] \\ &= \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \left(\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(k+1-\nu)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(k+1+\nu)} \right). \end{aligned}$$

Para $\nu = i\omega$ la contribución cuando $z \rightarrow 0$ ($k = 0$) es:

$$K_{i\omega}(z) \approx \frac{\pi}{2i \sinh(\pi\omega)} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)} \right]. \quad (\text{A.15})$$

Cuando $z = y > 0$, esta ecuación toma la forma

$$K_{i\omega}(x') \approx - \left(\frac{\pi}{\omega \sinh(\pi\omega)} \right)^{1/2} \sin(\omega \ln(y/2)), \quad (\text{A.16})$$

donde hemos usado que $\Gamma(1+i\omega)\Gamma(1-i\omega) = \frac{\pi\omega}{\sinh(\pi\omega)}$ y que la fase de $\Gamma(1+i\omega)$ es despreciable en comparación con $\omega \ln(y/2)$, $y \ll 1$.

Usando (A.12) se puede ver que cuando $z \rightarrow 0$ (hemos eliminado los términos z^k , $k \neq 0$)

$$K_{i\omega}(z) \approx -\text{Re} \left(\frac{2^{i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)(1-i\omega)} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z} \right)^{k+1} \text{Re} \left(\frac{2^{i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)(k-i\omega)} \right) \quad (\text{A.17})$$

De esta ecuación no se puede apreciar claramente el comportamiento singular de $K_{i\omega}$. Para esto, pensemos a la función en alguna vecindad de $z = 0$ como combinación lineal de $z^{i\omega}$ y $z^{-i\omega}$, ec.(A.15). Estas últimas tienen contribuciones $e^{i\omega \ln |z|}$ y $e^{-i\omega \ln |z|}$ respectivamente, de donde se ve que cuando $z \rightarrow 0$ la frecuencia de oscilación se vuelve infinita.

Por otro lado, usando (A.13) y la definición de $H_\nu^{(1)}(z)$:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{i \sin(\nu\pi)} [J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(z)] \quad (\text{A.18})$$

tenemos que cuando $z \rightarrow 0$

$$H_{i\omega}^{(1)}(z) \approx \frac{-1}{\sinh(\pi\omega)} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)} - e^{\omega\pi} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)} \right] \quad (\text{A.19})$$

Análogamente a (A.17) tenemos

$$\begin{aligned} H_{i\omega}^{(1)}(z) &\approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2^{i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)(1-i\omega)} + e^{\omega\pi} \frac{2^{-i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)(1+i\omega)} \right) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \left(\frac{2^{i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)(k-i\omega)} + e^{\omega\pi} \frac{2^{-i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)(k+i\omega)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

y para

$$\begin{aligned} H_{i\omega}^{(2)}(z) &= \frac{1}{i \sin(\nu\pi)} [e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)] \\ &\approx -\frac{1}{\sinh \pi\omega} \left[e^{-\omega\pi} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

se tiene

$$\begin{aligned} H_{i\omega}^{(2)}(z) &\approx \frac{-1}{\pi} \left(\frac{2^{i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)(1-i\omega)} + e^{-\omega\pi} \frac{2^{-i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)(1+i\omega)} \right) \\ &+ \frac{-1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \left(\frac{2^{i\omega}}{\Gamma(1-i\omega)(k-i\omega)} + e^{-\omega\pi} \frac{2^{-i\omega}}{\Gamma(1+i\omega)(k+i\omega)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Como se puede ver, todas estas funciones tienen un comportamiento ‘infinitamente oscilante’ cerca de los horizontes.

Finalmente, usando las ecs. (A.15), (A.19) y (A.21) se tiene que, cuando $\zeta \rightarrow 0$ (considerando τ fijo) los modos de Unruh se comportan de la siguiente manera:

$$R_\omega|_R \approx \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\sqrt{\sinh(\pi\omega)}} \left[\left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{-i\omega} - \left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{i\omega} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$R_\omega|_F \approx -\frac{i}{2} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{\sinh(\pi\omega)}} \frac{1}{\Gamma(1-i\omega)} \left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{-i\omega}, \quad (\text{A.24})$$

$$R_\omega|_L \approx 0, \quad (\text{A.25})$$

$$R_\omega|_P \approx \frac{i}{2} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{\sinh(\pi\omega)}} \frac{1}{\Gamma(1+i\omega)} \left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{i\omega}. \quad (\text{A.26})$$

$$L_\omega|_R \approx 0, \quad (\text{A.27})$$

$$L_\omega|_F \approx -\frac{i}{2} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{\sinh(\pi\omega)}} \frac{1}{\Gamma(1-i\omega)} \left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{-i\omega}, \quad (\text{A.28})$$

$$L_\omega|_L \approx \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\sqrt{\sinh(\pi\omega)}} \left[\left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{-i\omega} - \left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{i\omega} \right], \quad (\text{A.29})$$

$$L_\omega|_P \approx \frac{i}{2} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{\sinh(\pi\omega)}} \frac{1}{\Gamma(1+i\omega)} \left(\frac{m\zeta}{2}\right)^{i\omega}. \quad (\text{A.30})$$

Estos límites podrían ser útiles cuando se calcula la acción distribucional de los modos de Unruh sobre funciones de prueba cuyo soporte intersecta los horizontes.

Apéndice B

Cambios en la función de dos puntos en términos de valores de expectación

En el capítulo 3 analizamos el cambio en el estado del campo debido a la interacción con una carga (escalar) uniformemente acelerada en el vacío. En particular, obtuvimos la ecuación (3.95) para el cambio a segundo orden del valor de la función de dos puntos $\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') \rangle$. Para ésto, se utilizó el lenguaje de los operadores de densidad pues nos permitió analizar por separado las contribuciones debidas a las partes separables y no separables de los estados inicial $|0_M\rangle$ y final $|f\rangle$. En este apéndice vamos a obtener la ec. (3.95) mediante el cálculo directo a segundo orden del valor de expectación $\langle f | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') | f \rangle$ y poder ver, desde otra perspectiva, cómo es que sólo actúan los operadores R del campo en el cambio en este valor de expectación.

Usando la ec. (3.51) se puede ver que el término a segundo orden de

$$\Delta \langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') \rangle \equiv \langle f | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') | f \rangle - \langle 0_M | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') | 0_M \rangle \quad (\text{B.1})$$

está dado por

$$\begin{aligned} \Delta \langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') \rangle^{(2)} = & \langle 0_M | \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\hat{\phi}_I | 0_M \rangle - \frac{1}{2} \langle 0_M | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') N(\hat{\phi}_I \hat{\phi}_I) | 0_M \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \langle 0_M | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') N(\hat{\phi}_I \hat{\phi}_I)^\dagger | 0_M \rangle, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

donde N denota orden normal (con respecto a la coordenada temporal que se esté utilizando) y $\hat{\phi}_I$ está definido por la ec. (3.49). Vamos a usar las siguientes propiedades del ordenamiento normal, que son válidas para operadores lineales con respecto a operadores de creación y aniquilación,

$$N[\hat{\phi}_I \hat{\phi}_I] = \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I + [\hat{\phi}_I^+, \hat{\phi}_I^-] \quad (\text{B.3})$$

y

$$N[\hat{\phi}_I \hat{\phi}_I]^\dagger = \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I + [\hat{\phi}_I^+, \hat{\phi}_I^-]^\dagger = \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I + [\hat{\phi}_I^+, \hat{\phi}_I^-], \quad (\text{B.4})$$

donde $\hat{\phi}^\pm$ representa la parte de creación (+) o aniquilación (-) del operador. Por otro lado, se puede ver que en general se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \hat{\phi}_I &= \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I + [\hat{\phi}_I, \hat{\phi}(x')] \hat{\phi}(x) \hat{\phi}_I + [\hat{\phi}_I, \hat{\phi}(x)] \hat{\phi}(x') \hat{\phi}_I \\ &= \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') + [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}_I] \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x') + [\hat{\phi}(x'), \hat{\phi}_I] \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Usando estas dos últimas ecuaciones en el primer término de la ec. (B.2), éste se reduce a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\langle 0_M | \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle + \langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I | 0_M \rangle \right. \\ \left. - 2[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}_I] [\hat{\phi}(x'), \hat{\phi}_I] \langle 0_M | 0_M \rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Y usando las ecuaciones (B.3) y (B.4), los dos últimos términos de la ec. (B.2) se pueden expresar, respectivamente, como

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I | 0_M \rangle + [\hat{\phi}_I^+, \hat{\phi}_I^-] \langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\langle 0_M | \hat{\phi}_I \hat{\phi}_I \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle + [\hat{\phi}_I^+, \hat{\phi}_I^-] \langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle \right). \quad (\text{B.8})$$

Finalmente, sumando estas tres últimas ecuaciones se tiene que la contribución a segundo orden a $\Delta \langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \rangle$, ec. (B.2), toma la forma

$$\Delta \langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \rangle^{(2)} = -[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}_I] [\hat{\phi}(x'), \hat{\phi}_I] - [\hat{\phi}_I^+, \hat{\phi}_I^-] \langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle, \quad (\text{B.9})$$

donde hemos usado que $\langle 0_M | 0_M \rangle = 1$. El segundo término en esta ecuación es proporcional a la función de dos puntos en el vacío por lo que es absorbido en la renormalización del campo, ver la ec. (3.96).

Recordemos que el operador de campo en la cuantización de Unruh actúa sobre los dos subsistemas \mathcal{F}_L y \mathcal{F}_R : $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_L(x) + \hat{\phi}_R(x)$. Como explicamos en la sección 3.3.1, dado que el soporte de la corriente escalar está contenido en la cuña R , el operador $\hat{\phi}_I$ es un operador R , esto es, es de la forma $\hat{1}_L \otimes \hat{\phi}_I^R$. Entonces, las componentes L de $\hat{\phi}(x)$ son eliminadas en la contribución a $\Delta\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\rangle$ (a segundo orden) por los conmutadores que aparecen en el primer término de la ec. (B.9). Esto es,

$$-[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}_I] [\hat{\phi}(x'), \hat{\phi}_I] = -[\hat{\phi}_R(x), \hat{\phi}_I] [\hat{\phi}_R(x'), \hat{\phi}_I]. \quad (\text{B.10})$$

Usando las definiciones de $\hat{\phi}_R(x)$ y $\hat{\phi}_I$, ecs. (3.56)-(3.57), se puede probar que

$$[\hat{\phi}_R(x), \hat{\phi}_I] = 2i\text{Im} \left[\int_0^\infty d\omega R_\omega(x) \Upsilon_\omega^* \right] = 2i\Psi_\theta \text{Im} [R_\theta(x)], \quad (\text{B.11})$$

donde, en la última igualdad hemos usado que Ψ_θ es real. De aquí se sigue inmediatamente que el valor renormalizado de $\Delta\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\rangle^{(2)}$ está dado por la ec. (3.98), que habíamos obtenido previamente usando el lenguaje de operadores de densidad.

En el capítulo 3 argumentamos que la información de que el mismo estado haya cambiado en la cuña F mientras que en la cuña R parezca no haber cambiado podría estar contenida en el operador de enredamiento $\hat{\rho}^e$ introducido en la ec. (3.34). Este operador sólo contribuiría al cambio en la función de dos puntos con componentes combinadas LR , que arrojan términos con el producto $L_\theta(x)R_\theta(x)$. De la ec. (B.10) se puede ver que a segundo orden, si la fuente sólo tiene soporte en R entonces, necesariamente, la contribución a $\Delta\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\rangle$ sólo puede tener componentes RR y por lo tanto, en este caso, como concluimos en la sección 3.3.3 usando únicamente el lenguaje de operadores de densidad, el operador de enredamiento no juega ningún papel.



Bibliografía

- [1] A. Ashtekar and A. Magnon. Quantum fields in curved space-times. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A346:375–394, 1975.
- [2] J. Audretsch and R. Müller. Radiation from a uniformly accelerated particle detector: Energy, particles and the quantum measurement process. *Phys. Rev.*, D49:6566–6575, 1994.
- [3] M. Born. *Ann. Physik*, 30:1, 1909.
- [4] D. G. Boulware. Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces. *Phys. Rev.*, D11:1404, 1975.
- [5] D. G. Boulware. Radiation From a Uniformly Accelerated Charge. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 124:169, 1980.
- [6] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and Ph. Spindel. A primer for black hole quantum physics. *Phys. Rep.*, 260:329–446, 1995.
- [7] P. Candelas and D. W. Sciama. Is there a quantum equivalence principle? *Phys. Rev.*, D27:1715–1721, 1983.
- [8] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variables theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, 1969.
- [9] C de Almeida and A. Saa. The radiation of a uniformly accelerated charge is beyond the horizon: a simple derivation. *Am. J. Phys.*, 74:154–158, 2006. physics/0506049.
- [10] P. A. M. Dirac. *Proc. Roy. Soc. London*, A167:148, 1938.
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and R. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [12] A. Erdélyi. *Higher transcendental functions*, volume II. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Fl., 1953.

-
- [13] E. Eriksen and Ø. Grøn. Electrodynamics and hyperbolically accelerated charges. II. Does a charged particle with hyperbolic motion radiate? *Ann. Phys.*, 286:343–372, 2000.
- [14] S. A. Fulling. Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time. *Phys. Rev.*, D7:2850–2862, 1973.
- [15] S. A. Fulling and W. G. Unruh. Comment on 'Boundary conditions in the Unruh problem'. *Phys. Rev.*, D70:048701, 2004.
- [16] U. H. Gerlach. Minkowski Bessel modes. *Phys. Rev.*, D38:514–521, 1988.
- [17] P. G. Grove. On an inertial observer's interpretation of the detection of radiation by linearly accelerated particle detectors. *Class. Quant. Grav.*, 3:801–809, 1986.
- [18] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199, 1975.
- [19] A. Higuchi, G. E. A. Matsas, and D. Sudarsky. Bremsstrahlung and Fulling-Davies-Unruh thermal bath. *Phys. Rev.*, D46:3450–3457, 1992.
- [20] A. Higuchi, G. E. A. Matsas, and D. Sudarsky. Bremsstrahlung and zero energy Rindler photons. *Phys. Rev.*, D45:R3308–R3311, 1992.
- [21] F. Hinterleitner. Inertial and accelerated particle detectors with back-reaction in flat space-time. *Ann. Phys. (NY)*, 226:165, 1993.
- [22] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. *in: Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*. Springer Tracts in Modern Physics, 173. Springer-Verlag, 2001.
- [23] B. S. Kay. Linear spin 0 quantum fields in external gravitational and scalar fields. I. A one particle structure for the stationary case. *Commun. Math. Phys.*, 62:55–70, 1978.
- [24] B. S. Kay. The double wedge algebra for quantum fields on Schwarzschild and Minkowski space-times. *Commun. Math. Phys.*, 100:57, 1985.
- [25] P. Martinetti and C. Rovelli. Diamonds's temperature: Unruh effect for bounded trajectories and thermal time hypothesis. *Class. Quant. Grav.*, 20:4919, 2003.
- [26] S. Massar, R. Parentani, and R. Brout. On the problem of the uniformly accelerated oscillator. *Class. Quant. Grav.*, 10:385–395, 1993.
- [27] P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt, and W. A. Smith. Interpretation of radiative corrections in spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 31:958–960, 1973.

- [28] N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, B. M. Karnakov, V. D. Mur, and V. A. Belinskii. Boundary conditions in the Unruh problem. *Phys. Rev.*, D65:025004, 2002.
- [29] Michael A. Nielsen and Isaac Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University, Cambridge, 2000.
- [30] T. Padmanabhan. Why does an accelerated detector click? *Class. Quant. Grav.*, 2:117–126, 1985.
- [31] A. Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413, 1996.
- [32] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.
- [33] E. Poisson. An introduction to the Lorentz-Dirac equation. 1999. gr-qc/9912045.
- [34] D. J. Raine, D. W. Sciama, and P. G. Grove. Does a uniformly accelerated quantum oscillator radiate? *Proc. R. Soc. Lond. A*, 435:205–215, 1991.
- [35] I. R. Senitzky. Radiation-reaction and vacuum-field effects in Heisenberg-picture quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett*, 31:955–958, 1973.
- [36] C. Teitelboim, D. Villarroel, and C. G. van Weert. Classical electrodynamics of retarded fields and point particles. *Riv. Nuovo Cimento*, 3:9, 1980.
- [37] W. G. Unruh. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev.*, D14:870, 1976.
- [38] W. G. Unruh. Thermal bath and decoherence in Rindler spacetimes. *Phys. Rev.*, D46:3271–3277, 1992.
- [39] W. G. Unruh and R. M. Wald. What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle? *Phys. Rev.*, D29:1047–1056, 1984.
- [40] M. v. Laue. *Relativitätstheorie*, volume 1. Vieweg, Braunschweig, 3ed edition, 1919.
- [41] R. M. Wald. On particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 45:9, 1975.
- [42] R. M. Wald. *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics*. University Press, Chicago, 1992.
- [43] R. M. Wald. *General Relativity*. University Press, Chicago, 1994.
- [44] G. N. A. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. The University Press, Cambridge, UK, 1922.

- [45] C. M. Will. The confrontation between General Relativity and experiment. *Living Rev. Relativity*, 4, 2001. [Artículo en Línea]: citado en sept. 2005, <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-4will>.