



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET EN LA GÉNESIS Y
EL DESARROLLO DE LA CURVATURA ABSOLUTA TOTAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

FRANCISCO MANUEL BARRIOS PANIAGUA.

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS.

MÉXICO, D.F.

NOVIEMBRE 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Vaya en primer lugar mi más profundo agradecimiento y el reconocimiento más irrestricto para el Dr. Federico Sánchez Bringas quien desplegó un cuerpo de conocimientos cuya *belleza* no era para mí siquiera imaginable y que siempre los ha compartido sin reticencias.

A los Dres. Francisco Marmolejo Rivas y León Kushner Schnur, quienes siempre seguirán siendo mis maestros y amigos.

A la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) y en especial al Dr. Matías Navarro Sosa, por haberme invitado a divulgar los resultados de este trabajo en el Coloquio de Geometría que se celebró del 24 al 26 de enero de 2007 en Mérida. Su hospitalidad y el interés de su comunidad excedieron por mucho mi capacidad efectiva de agradecimiento.

A Pedro Francisco Valencia, *mi amigo*, en cuyas búsquedas reconozco haber transitado alguna vez por los mismos caminos.

A Juan Manuel Gómez y Mariano Zerón, cuya presencia en el Departamento de Matemáticas atestigua una época única e irrepetible de la Facultad de Ciencias y de la cual fuimos parte entre 2001 y 2004.

A mis alumnos del curso de geometría diferencial del semestre 2007-1 en la Facultad de Ciencias: Víctor Bravo, Andrés Briseño, Mario Miki, Iñaki Sánchez y Ramiro Vázquez, cuyo entusiasmo nunca me permitió dejar lugar para la indiferencia, dándome la oportunidad de ser su guía por incontables excursiones geométricas.

* * *

A mi esposa Indra, la mujer que más amaré en la vida, por haberme ayudado —como pensé que nadie podría hacerlo—, a darle su justo lugar a las Matemáticas entre tantos otros placeres de la vida y sin cuya presencia, definitivamente, este trabajo hubiera podido completarse *antes* de tiempo.

Notación. Todos los resultados (*i.e.* lemas, teoremas, corolarios, etc.) están enumerados por capítulo, a diferencia de las ecuaciones, las cuales se registran consecutiva e independientemente del mismo. Cada vez que se hace referencia a algún resultado seguimos la convención de listar el capítulo y la sección a la que pertenece, seguido del número asignado por L^AT_EX y separando cada valor por un punto (*e.g.* el **Teorema 2.3.1** se refiere al **Teorema 1** de la sección **3** del capítulo **2**). La excepción a la regla se da cuando la referencia y el resultado pertenecen al mismo capítulo, en cuyo caso simplemente omitimos el número de éste.

Contenido.

Agradecimientos p. I

Introducción general p. III

Capítulo 1. La solución de Werner Fenchel.

1. Introducción p. 1
2. La curvatura de Killing-Lipschitz p. 2
3. El teorema de Fenchel p. 6

Capítulo 2. Una nueva dirección: El trabajo de 1957 de Shiing-shen Chern y Richard K. Lashof.

1. Introducción p. 13
2. El marco móvil y las ecuaciones estructurales de \mathbb{R}^{n+N} p. 14
3. La curvatura total p. 23
4. Tres teoremas sobre la curvatura total p. 29

Capítulo 3. Un teorema más general.

1. Introducción p. 37
2. La curvatura total y la suma de los números de Betti p. 37

Bibliografía p. 43

Introducción general.

La influencia de Heinz Hopf en las matemáticas es vasta y debe reconocérsela más allá de las aportaciones formales que éste hizo a la teoría: Hopf también se distinguió por formular preguntas que marcarían derroteros para algunas de las mentes más originales del s. XX. Por los alcances y el impacto de las ideas a que dieron lugar, basta con citar aquí sólo dos:

- (i) ¿Existe un campo vectorial en la esfera unitaria \mathbb{S}^3 que sea completamente integrable, *i.e.*, un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ tal que $\langle X, \text{rot } X \rangle \equiv 0$? El **teorema de Frobenius** nos permite reformular esta pregunta como: ¿admite \mathbb{S}^3 una *foliación* de dimensión dos?¹
- (ii) ¿Es posible asignar en cada punto de una variedad diferenciable de dimensión arbitraria M^n un tipo de curvatura que ayude a generalizar el **teorema de Gauss-Bonnet** para superficies? Éste nos dice que la integral de la curvatura gaussiana de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ conexa, compacta, orientable y sin frontera es igual a $2\pi\chi(S)$, donde $\chi(S)$ es la característica de Euler-Poincaré de S .

La respuesta (afirmativa) a (i) fue dada por G. Reeb en su tesis doctoral, la cual fue dirigida por C. Ehresmann y publicada por ediciones Hermann de París en 1952. Dicho trabajo originó el desarrollo de la *teoría geométrica de las foliaciones*, en la que nombres como: A. Denjoy, C. Godbillon, X. Gómez-Mont, A. Haefliger, H. B. Lawson, P. Molino, S.P. Novikov, W. Thurston y J. Wood han descollado tanto por la *profundidad* como por la *audacia* de sus resultados.

Un poco más intrincada que la anterior, la respuesta (también afirmativa) a (ii) constituye esencialmente la materia del presente trabajo y la presentación que hacemos de ésta *sobresale* por los motivos que a continuación se detallan:

- A lo largo de tres capítulos mostramos *la evolución de una idea* contenida en tres artículos ([WF], [TCI], [TCII]) y desarrollada bajo lo que sería el principio rector de la Geometría Diferencial durante la segunda mitad del s. XX: el establecimiento de relaciones entre los invariantes extrínsecos e intrínsecos de una variedad diferenciable. Tal y como cabía esperar a partir de (ii), en nuestro caso el arquetipo resultó ser el **teorema de Gauss-Bonnet**.
- Creemos que nuestra exposición es lo más autocontenida posible ya que incorpora prácticamente todos los conceptos y resultados necesarios para la misma con demostración o bien con su respectiva referencia.

¹En la p. 1 de: Camacho, C. y Lins Neto, A; *Geometric Theory of Foliations*; Birkhäuser Boston Inc., Boston 1985.

- Hemos recuperado la exposición del trabajo de W. Fenchel [WF] como nuestro punto de partida, por juzgarla de un mayor contenido *geométrico* en comparación, digamos, a aquélla de C.B. Allendoerfer y A. Weil [A43].
- Establecemos y aclaramos la relación entre [WF] y el artículo de S.-s. Chern y R. K. Lashof [TCI] sobre todo en lo concerniente a las definiciones de *curvatura total* utilizadas por ambos (cf. la extensa **Nota** que sigue a la **Definición 2.3.2**).
- Si bien la **Proposición 2.3.3** corresponde esencialmente a una reformulación de lo descubierto por Fenchel en términos del lenguaje utilizado por Chern y Lashof, dicho resultado es, hasta donde sabemos, algo que nunca se había mostrado antes.
- Detallamos *toda* la argumentación de [TCI] —lo cual tampoco se había hecho hasta ahora— poniendo especial énfasis en el método del marco móvil de Élie Cartan, lo cual permite una mejor comprensión de las *ideas* de dicho artículo.
- Exponemos el resultado principal de [TCII] y a partir de un análisis detallado de la demostración del mismo, proponemos una posible explicación que justifique, metamatemáticamente, porqué no es posible aspirar a un mejor resultado *de tipo* Gauss-Bonnet para la curvatura total.

A pesar de ser un concepto poco manejable en la práctica, la *curvatura total* de una variedad diferenciable M^n cerrada, orientada e inmersa en \mathbb{R}^{n+N} , puede describirse en pocas palabras como *la medida en S^{n+N-1} de la imagen de M^n bajo una generalización del mapeo de Gauss* (otras descripciones posibles pueden encontrarse en [K70], lo que revela inmediatamente su profundo sabor geométrico y trasluce la necesidad de obtener formulaciones equivalentes que lo vuelvan más dócil. A este respecto una de nuestras aportaciones más importantes se encuentra en el análisis a que hace referencia el último de los puntos anteriores.

Cada uno de los aspectos hasta aquí tratados y algunos otros se profundizan en la **Introducción** que antecede a cada capítulo en particular.

Francisco Manuel Barrios Panigua.²
Viaducto Piedad, D.F., a 6 de mayo de 2007.

²Una parte del presente trabajo fue posible gracias a una beca otorgada por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la DGAPA, UNAM.

La solución de Werner Fenchel.

1. Introducción.

Sin lugar a dudas uno de los resultados más profundos en la geometría diferencial está expresado por el siguiente

Teorema (Gauss-Bonnet). *Sea S una superficie compacta, conexa, orientable y sin frontera. Si denotamos por K a su curvatura gaussiana entonces*

$$\int \int_S K \, d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

donde $\chi(S)$ es la característica de Euler-Poincaré de S .

La forma tan notable en que se relacionan la *ductilidad* de un invariante topológico y la *rigidez* de la geometría intrínseca a la superficie S vuelve natural el preguntarse si es posible generalizar esta relación para variedades riemannianas de dimensión n y en qué sentido podría esto llevarse a cabo. Uno de los primeros en obtener resultados exitosos en esta dirección es Heinz Hopf, quien en la serie de artículos [H25], [H25a] y [H26] obtiene las siguientes generalizaciones:

- (i) Sea n un entero positivo y par. Si $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie compacta entonces la integral de la curvatura de Gauss-Kronecker es igual al producto de la mitad del volumen de la n -esfera unitaria \mathbb{S}^n por la característica de Euler-Poincaré de M^n .
- (ii) Sea M^n una variedad compacta y sin frontera (*i.e.* una variedad *cerrada*). Si M^n posee curvatura seccional constante k y dimensión par n entonces al integrar $k^{\frac{n}{2}}$ se obtiene el mismo resultado del inciso anterior.

En el caso de una inmersión $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donde M^n es una variedad riemanniana, orientada y cuya orientación es compatible con aquella de \mathbb{R}^{n+1} , la *curvatura de Gauss-Kronecker* a la que hacemos mención en (i) se define como el determinante de la matriz asociada a la diferencial de la transformación esférica $\nu : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ que traslada al origen $O \in \mathbb{R}^{n+1}$ el origen del vector normal y unitario $\xi \in (T_p M)^\perp$. Puede probarse que $(d\nu)_p : T_p M \rightarrow T_{\nu(\xi)}\mathbb{S}^n \cong T_p M$ es un operador *diagonalizable* con valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, de manera que $\det((d\nu)_p) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

A este respecto nótese que si n es impar entonces la correspondiente curvatura total *no* es un invariante topológico y la característica de M siempre es cero. En consecuencia no es posible aspirar a obtener una fórmula similar a la del teorema de Gauss-Bonnet.

Fue a la luz de estos resultados que Hopf planteó el siguiente:

Problema. *Asignar a una variedad riemanniana M de dimensión par, un real K que represente cierta curvatura de M y que satisfaga las dos propiedades siguientes:*

1. En el caso en que M sea una hipersuperficie, dicha curvatura debe coincidir con la curvatura de Gauss-Kronecker.
2. K debe cumplir (localmente) una fórmula de tipo Gauss-Bonnet, es decir, su integral sobre cierta región $\mathcal{D} \subseteq M$ debe poder expresarse por una integral de curvatura sobre la frontera $\partial\mathcal{D}$.

El porqué de la primera de estas propiedades es obvio, si aspiramos a poseer una buena generalización de la curvatura de Gauss-Kronecker; sin embargo el *quid* reside en que al satisfacer K la segunda propiedad, sería posible probar la invariancia topológica de la curvatura total correspondiente mediante una triangulación de M de la misma manera en que se demuestra el teorema de Gauss-Bonnet.

Nota histórica. En su artículo de 1940 [WF], el matemático danés Werner Fenchel resolvió positivamente el problema de Hopf para *subvariedades riemannianas del espacio euclidiano*. En ese mismo año y de manera independiente, el estadounidense Carl Barnett Allendoerfer obtuvo los mismos resultados en [A40] utilizando una técnica desarrollada un año antes por el alemán Hermann Weyl y comúnmente conocida como *tubos*. Posteriormente en 1943 el dúo formado por Allendoerfer y el francés refugiado en E.E.U.U. André Weil, probó en [A43] la validez de la fórmula de Fenchel para variedades riemannianas *en general*; sin embargo dado que su argumentación hacía uso de encajes locales no podía ser considerada como una demostración *intrínseca*. La relevancia de toda esta cuestión reside en que el teorema del encaje isométrico de Nash [N] no vería la luz sino hasta 1956.

El teorema de Nash nos permite realizar cualquier variedad riemanniana como subvariedad de algún \mathbb{R}^N para un valor explícito de N lo suficientemente grande, que sólo depende de la dimensión de la variedad inmersa. Este resultado no sólo vuelve superflua la distinción entre variedades de la que hablábamos en el párrafo anterior, sino que justifica el que optemos por seguir la demostración original de Fenchel — mucho más geométrica y clara — en vez de desarrollar todo el instrumental necesario para seguir aquella más analítica de Allendoerfer.

* * *

A guisa de epílogo para esta historia, en 1944 —y después de una conversación sostenida con Weil a propósito de los *defectos* de [A43]— Shiing-shen Chern puso el punto final a estas consideraciones con su artículo [SsC] cuyo título refleja muy acertadamente los alcances de su aportación: “A simple *intrinsic* proof of the generalized Gauss-Bonnet theorem” en el cual, naturalmente, no figura en parte alguna el teorema del encaje de Nash.

2. La curvatura de Killing-Lipschitz.

Intuitivamente la idea de Fenchel no podía ser más bella ni más simple: si M^n es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^{n+N} , $N \geq 1$, entonces para cualquier $p \in M$ el espacio tangente $T_p M$ junto con ξ , cualquier vector normal a M en p , *generan* un espacio euclidiano de dimensión $n+1$: $\mathcal{L}(\xi) \cong \mathbb{R}^{n+1}$.

Al proyectar M ortogonalmente sobre $\mathcal{L}(\xi)$ obtenemos una *hipersuperficie* $M' \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la cual posee una curvatura de Gauss-Kronecker bien definida y a la que denotaremos por $\kappa(\xi)$. Finalmente el escalar K que estamos buscando no es más que el *promedio* de $\kappa(\xi)$ sobre todas las direcciones normales a M^n en p , *i.e.*

$\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, multiplicado por el factor de proporcionalidad siguiente:

$$\alpha_{n,N} := \frac{c_n c_{N-1}}{2 c_{n+N-1}},$$

donde c_n es el volumen de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, o bien, en términos de la función *gamma*:

$$c_n = \frac{2 \pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))},$$

donde ésta se define como la integral impropia:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

la cual es convergente para $x > 0$ (cf. [RA], pp. 295 y 296).

Definición 2.1 ([WF], p. 17) Con la notación y las hipótesis anteriores, definimos la *curvatura de Killing-Lipschitz* de M en p como el número real $K(p)$ dado por:

$$\begin{aligned} K(p) &:= \frac{c_n c_{N-1}}{2 c_{n+N-1}} \left(\frac{1}{c_{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \kappa(\xi) d\sigma_{N-1} \right) \\ &= \frac{c_n}{2 c_{n+N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \kappa(\xi) d\sigma_{N-1}, \end{aligned}$$

donde $d\sigma_{N-1}$ es el elemento de volumen de $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

En el caso de una variedad de dimensión *par*, M^{2n} , veremos en el **Teorema 4.1** del capítulo 2 que la integral sobre M^{2n} de la curvatura de Killing-Lipschitz $K(p)$ está acotada inferiormente por c_{2n} .

De acuerdo con [WF], p. 17, Wilhelm Killing y Rudolph Lipschitz fueron los primeros en probar que el escalar K no depende del espacio ambiente donde M^n pudiera estar inmersa, siendo así un elemento *intrínseco* a la variedad M^n .

Nota. Obsérvese que cuando $\dim M = n$ es *impar* se tiene lo siguiente (hemos escrito $A : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ para la transformación antípoda dada por $x \mapsto -x$):

$$K = \frac{\alpha_{n,N}}{c_{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \kappa(\xi) d\sigma_{N-1}.$$

Aplicando la fórmula de cambio de variables:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\alpha_{n,N}}{c_{N-1}} \int_{A^{-1}(\mathbb{S}^{N-1})} \kappa(-\xi) |(-1)^{N-1}| d\sigma_{N-1} \\ &= (-1)^n \frac{\alpha_{n,N}}{c_{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \kappa(\xi) d\sigma_{N-1} \\ &= -K, \end{aligned}$$

y en consecuencia $K \equiv 0$. Esta observación será vital más adelante en la argumentación del **Teorema 3.1**. Por otro lado, el que $\kappa(-\xi) = (-1)^n \kappa(\xi)$ se sigue fácilmente a partir de cómo se definió la curvatura de Gauss-Kronecker en §1; sin embargo esto será igualmente claro una vez que demos la definición explícita de la curvatura de Gauss-Kronecker *con signo*, como planeamos hacer a continuación.

De acuerdo con el primer inciso del **Problema** en §1, debemos probar que la curvatura de Gauss-Kronecker y la de Killing-Lipschitz *coinciden* en el caso de una *hipersuperficie* de dimensión *par*.

Para esto comenzaremos por darle un signo a la curvatura de Gauss-Kronecker asociada a una hipersuperficie M' como sigue: sean (z^1, \dots, z^{n+1}) coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^{n+1} y en este contexto denótese por:

$$z := (z^1(x^1, \dots, x^n), \dots, z^{n+1}(x^1, \dots, x^n)),$$

a una representación paramétrica alrededor de un punto $p \in M'$.

Si $\xi := (\xi^1, \dots, \xi^{n+1})$ es *uno* de los dos vectores unitarios y normales a M' en p , recuérdese que de acuerdo con la definición de diferencial (cf. [dC], pp. 127-129) la composición:

$$d\xi \circ dz : T_0\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\xi \circ z(0)}\mathbb{S}^n,$$

lleva la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ de $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ a la base de $T_{\xi \circ z(0)}\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \frac{\partial(\xi \circ z)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial(\xi \circ z)}{\partial x^n} \right\},$$

conforme al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_0\mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_0 z} & T_{z(0)}M' \\ & \searrow d_0(\xi \circ z) & \downarrow d_{z(0)}\xi \\ & & T_{\xi \circ z(0)}\mathbb{S}^n \end{array}$$

siempre y cuando el cero *no* sea un punto crítico de la composición $\xi \circ z$. A este respecto y abusando de la notación identificaremos a *esta* última función diferenciable con ξ . Por lo tanto para pasar de la base $\{\frac{\partial z}{\partial x^p}\}$ a $\{\frac{\partial \xi}{\partial x^p}\}$ basta con multiplicar por el jacobiano de $d_{z(0)}\xi$, es decir, $\kappa(\xi)$.

A partir de las propiedades elementales del producto cuña obtenemos la relación siguiente, en donde los paréntesis triangulares denotan al producto interior:

$$\left\langle \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi}{\partial x^n} \right\rangle = \left\langle \xi, \kappa(\xi) \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle.$$

De esta manera obtenemos la

Definición 2.2. Sea M' una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} . Con la notación y las convenciones anteriores, definimos la *curvatura de Gauss-Kronecker con signo* como:

$$(1) \quad \kappa(\xi) := \frac{\left\langle \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi}{\partial x^n} \right\rangle}{\left\langle \xi, \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle}.$$

Obsérvese que el denominador de la expresión anterior nunca es cero ya que los vectores involucrados siempre son paralelos.

Nota. De ahora en adelante, *cualquier mención que se haga de la curvatura de Gauss-Kronecker en el presente capítulo se entenderá en el sentido de la definición 2.2.*

Podemos obtener una expresión más compacta para $\kappa(\xi)$ recurriendo a lo siguiente: si tenemos la expresión de la métrica g en las coordenadas locales asociadas a la parametrización z (también conocida como *primera forma fundamental*),

$$(2) \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial z^k}{\partial x^j}; \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

y escribimos la *segunda forma fundamental* asociada a la dirección normal ξ :

$$(3) \quad h_{ij}(\xi) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} = - \sum_{k=1}^{n+1} \xi^k \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j}; \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

entonces (cf. [Sp] pp. 83 y 84):

$$\begin{aligned} \left\langle \xi, \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle^2 &= \det \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x^n} \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \|\xi\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \det (g_{ij}); \quad 1 \leq i, j \leq n, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que $\|\xi\|^2 = 1$ y abreviado como vector *renglón*:

$$\frac{\partial z}{\partial x^k} := \left(\frac{\partial z^1}{\partial x^k}, \dots, \frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^k} \right); \quad 1 \leq k \leq n.$$

De manera completamente análoga tenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi}{\partial x^n} \right\rangle \cdot \left\langle \xi, \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle &= \det \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial x^n} \end{pmatrix} \cdot \left(\xi \quad \frac{\partial z}{\partial x^1} \quad \dots \quad \frac{\partial z}{\partial x^n} \right) \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \|\xi\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ * & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \det (h_{ij}(\xi)); \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Así llegamos a la siguiente

Proposición 2.3. *La curvatura de Gauss-Kronecker asociada al vector ξ , el cual es normal en p a la hipersuperficie $M' \subset \mathbb{R}^{n+1}$, satisface la igualdad:*

$$\kappa(\xi) = \frac{\det(h_{ij}(\xi))}{\det(g_{ij})},$$

donde las entradas de las matrices (g_{ij}) y $(h_{ij}(\xi))$ están dadas por las expresiones (2) y (3), respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la definición 2.2 y de los comentarios previos al enunciado de la proposición se tiene:

$$\begin{aligned} \kappa(\xi) &:= \frac{\left\langle \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi}{\partial x^n} \right\rangle}{\left\langle \xi, \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle} \\ &= \frac{\left\langle \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi}{\partial x^n} \right\rangle \cdot \left\langle \xi, \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle}{\left\langle \xi, \frac{\partial z}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial z}{\partial x^n} \right\rangle^2} \\ &= \frac{\det(h_{ij}(\xi))}{\det(g_{ij})}. \end{aligned}$$

□

A partir de la expresión (1) es inmediata la siguiente

Proposición 2.4. *La curvatura de Gauss-Kronecker de M' es invariante ante cambios de orientación si $\dim M'$ es par. Si la dimensión de M' es impar entonces $\kappa(-\xi) = -\kappa(\xi)$.*

□

Como el factor de proporcionalidad que aparece en la definición de curvatura de Killing-Lipschitz $\alpha_{n,N}$ satisface que $\alpha_{n,1} = 1$, al integrar $\kappa(\xi)$ sobre $\mathbb{S}^0 = \{\xi, -\xi\}$, la proposición anterior nos permite afirmar que la curvatura de Killing-Lipschitz resuelve el inciso 1 del **Problema** planteado por Hopf.

3. El teorema de Fenchel.

Sin más preámbulos enunciamos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.1 ([WF]. , p. 18] *Sea M^n una variedad riemanniana, orientada, compacta y sin frontera la cual está inmersa en \mathbb{R}^{n+p} . Si χ es la característica de Euler, K la curvatura de Killing-Lipschitz y dv el elemento de volumen de M^n entonces*

$$(4) \quad \int_{M^n} K dv = \frac{1}{2} c_n \chi.$$

Nota. Antes de pasar a la prueba de 3.1 conviene mencionar lo siguiente:

1. Los elementos involucrados en (4) son *intrínsecos* a M^n , i.e. son independientes de la inmersión.

2. En el caso $\dim M = n$ *impar*, la validez de (4) es inmediata pues por la **Nota** que sigue a la **Definición 2.1** tenemos $K = 0$ y por otro lado $\chi = 0$. En consecuencia únicamente consideraremos el caso en el que n es *par*.
3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p es *impar*. En caso contrario podemos reemplazarlo por $p + 1$.
4. La prueba original de W. Fenchel suponía que M^n era de clase \mathcal{C}^4 y nosotros al seguir esta prueba, mantendremos dicha suposición; sin embargo Alfred Gray ([G] pp. 71-83) ofrece prácticamente la misma demostración, sólo que en el lenguaje de los *tubos* desarrollados por H. Weyl y en la que, como se ha vuelto costumbre en geometría diferencial, todas las variedades involucradas se suponen de clase \mathcal{C}^∞ .

Tal vez convenga ahondar un poco más a propósito de este último punto: el porqué de la suposición original de Fenchel a propósito de la diferenciabilidad de M^n , reside en que deseamos que la *hipersuperficie paralela* de M^n a distancia r (véase la definición más abajo) posea segunda forma fundamental al menos de clase \mathcal{C}^1 . Esto obliga a que dicha hipersuperficie sea a su vez *al menos* \mathcal{C}^3 ; sin embargo como los cambios de coordenadas de ésta van a estar dados en términos de las primeras derivadas parciales de las parametrizaciones locales de M^n esto conlleva a que nuestra variedad original sea *precisamente* de clase \mathcal{C}^4 .

DEMOSTRACIÓN. El punto principal del argumento de Fenchel es reducir el **Teorema 3.1** al caso especial en el que M^n es una *hipersuperficie*. Para esto en cada punto $x \in M^n$ denótese por $(T_x M)^\perp \cong \mathbb{R}^p$ al espacio *normal* y en éste por $\mathbb{S}_r^{p-1}(x)$ a la esfera con centro en x y radio $r > 0$.

Es un hecho conocido (cf. el **lema 2.3** y la § **3.1** de [G]) que para valores lo suficientemente pequeños de r las esferas $\mathbb{S}_r^{p-1}(x)$ generan, al variar x , una hipersuperficie M^* la cual es de clase \mathcal{C}^3 , compacta, sin frontera, orientable y de dimensión *par* $n + p - 1$. A la variedad M^* suele llamársele la *hipersuperficie paralela* de M^n a distancia r .

Aplicando el teorema de H. Hopf mencionado como la generalización (i) al inicio de § 1 se obtiene:

$$(5) \quad \int_{M^*} K^* dv^* = \frac{1}{2} c_{n+p-1} \chi(M^*),$$

donde K^* es la curvatura de Gauss-Kronecker de M^* .

Nuestro siguiente objetivo es probar que el lado izquierdo de (5) es exactamente $c_{n+p-1} \chi(M^n)$. Expresando la característica de Euler en términos de la suma alternada:

$$\chi(M^*) = \sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^i \beta^i,$$

donde $\beta^i := \beta^i(M^*)$ es el i -ésimo número de Betti, *i.e.* el *rango* del i -ésimo grupo de homología $H_i(M^*)$ el cual es abeliano y finitamente generable. En particular si la homología se toma con coeficientes en un campo K entonces $H_i(M^*, K)$ es un espacio vectorial y β^i no es sino su dimensión sobre K .

* * *

El siguiente resultado que necesitamos invocar en la prueba es el llamado **teorema de dualidad de Alexander**. De acuerdo con el legendario [AH] (cf. la §4 del capítulo XI, pp. 440-442) éste puede formularse como sigue:

Teorema (Dualidad de Alexander). *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable. Si β^i representa el i -ésimo número de Betti con respecto a algún campo de coeficientes entonces se verifican las igualdades siguientes:*

$$\begin{aligned}\beta^i(M) &= \beta^{n-i-1}(\mathbb{R}^n \setminus M), \quad \forall i \neq n-1 \\ \beta^{n-1}(M) &= \beta^0(\mathbb{R}^n \setminus M) - 1.\end{aligned}$$

* * *

De esta manera y siguiendo con la prueba, el teorema citado en el párrafo anterior arroja:

$$\begin{aligned}(6) \quad \chi(M^*) &= \sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^i \dim H_i(M^*) \\ &= \beta^0(M^*) - \beta^1(M^*) + \dots + \beta^{n+p-1}(M^*) \\ &= \beta^{n+p-1}(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*) + \dots + \beta^0(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*) - 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^i \dim H_i(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*) - 1 \\ &= \chi(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*) - 1.\end{aligned}$$

Por otra parte, si consideramos en $(T_x M)^\perp$ al *interior* de $\mathbb{S}_r^{p-1}(x)$:

$$\overset{\circ}{B}_r^p(x) := \{y \in (T_x M)^\perp : \|y\| < r\},$$

entonces es claro que la *unión* de tales conjuntos

$$U_0 := \bigcup_{x \in M^n} \overset{\circ}{B}_r^p(x),$$

no sólo resulta una vecindad abierta alrededor de M^n , sino que es una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*$ la cual tiene por frontera topológica a M^* . En este mismo orden de ideas, no es difícil verificar que el resto de las componentes y $\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^n$ son homeomorfos. (Para ver esto escríbase $\mathbb{R}^{n+p} \setminus \bar{U}_0 = \cup_{i \in I} U_i$ donde U_i es una componente de $\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*$ y $U_i \neq U_0$ para toda $i \in I$. Posteriormente hágase $r \rightarrow 0$). De esta construcción se sigue que M^n es un *retracto por deformación* de U_0 (cf. [V], pp. 16 y 17) y en consecuencia ambos espacios topológicos tienen los mismos números de Betti. Todo esto aunado a que la característica de Euler es aditiva sobre uniones ajenas:

$$\begin{aligned}(7) \quad \chi(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^*) &= \chi(U_0) + \chi(\cup_{i \in I} U_i) \\ &= \chi(M^n) + \chi(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^n).\end{aligned}$$

Una segunda aplicación de la dualidad de Alexander devuelve:

$$(8) \quad \chi(\mathbb{R}^{n+p} \setminus M^n) = \chi(M^n) + 1.$$

Combinando (6), (7) y (8) obtenemos:

$$\chi(M^*) = 2\chi(M^n) = 2\chi,$$

lo que al combinarse con (5) nos permite escribir:

$$(9) \quad \int_{M^*} K^* dv^* = c_{n+p-1} \chi.$$

Únicamente nos falta probar la igualdad:

$$(10) \quad \int_{M^*} K^* dv^* = \frac{2 c_{n+p-1}}{c_n} \int_{M^n} K dv,$$

para lo cual trabajaremos *localmente* como sigue: sean (y^1, \dots, y^{n+p}) coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^{n+p} . En virtud de que M^n es cerrada y de clase \mathcal{C}^4 podemos dividirla en un número *finito* de regiones que se representan paramétricamente como:

$$\mathbf{y}_i(x^1, \dots, x^n) := (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^{n+p}(x^1, \dots, x^n)); \quad i = 1, \dots, k;$$

donde $(x^1, \dots, x^n) \in U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{y}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ es una función de clase \mathcal{C}^4 con matriz de Jacobi de rango máximo, para todo i tal que $1 \leq i \leq k$. Consideremos ahora las direcciones ortogonales: dado que en un punto *fijo* $q \in M^n$ los vectores normales y unitarios $\xi_i(q)$ se encuentran en una esfera $(p-1)$ -dimensional, estos sólo dependen de $p-1$ parámetros t^1, \dots, t^{p-1} y en consecuencia:

$$\xi_i = (\xi^1(t^1, \dots, t^{p-1}, x^1, \dots, x^n), \dots, \xi^{n+p}(t^1, \dots, t^{p-1}, x^1, \dots, x^n)); \quad i = 1, \dots, k;$$

puede pensarse como una función $\xi_i : V_i \subseteq \mathbb{R}^{n+p-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ de clase \mathcal{C}^3 en todas sus variables.

Como los $n+p-1$ vectores *evaluados en* q :

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t^1}(q), \dots, \frac{\partial \xi_i}{\partial t^{p-1}}(q), \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^1}(q), \dots, \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^n}(q),$$

resultan ser linealmente independientes, el producto cuña de todos ellos es, por definición, ortogonal a todos y cada uno de los factores y por lo tanto *paralelo* a $\xi_i(q)$. En este sentido y dado que M^n es orientable, podemos suponer que renumerando, quizás, las variables $\{t^j\}_{j=1}^{p-1}$ tenemos:

$$(11) \quad \left\langle \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^n} \right\rangle > 0,$$

en toda una vecindad abierta alrededor de q : $W_i := \mathbf{y}_i(U_i)$.

A su vez la hipersuperficie paralela a distancia r , M^* , también puede dividirse en un número finito de regiones, las cuales se representan localmente como:

$$\mathbf{z}_i(t^1, \dots, t^{p-1}, x^1, \dots, x^n) := \mathbf{y}_i(x^1, \dots, x^n) + r\xi_i(t^1, \dots, t^{p-1}, x^1, \dots, x^n).$$

Si escogemos r lo suficientemente pequeño, la expresión (11) nos permite garantizar que:

$$(12) \quad \left\langle \xi, \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial x^n} \right\rangle \\ = \left\langle \xi_i, r \frac{\partial \xi_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge r \frac{\partial \xi_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial (\mathbf{y}_i + r\xi_i)}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial (\mathbf{y}_i + r\xi_i)}{\partial x^n} \right\rangle > 0,$$

se satisface en *todo* M^* .

Es claro que el vector normal a M^* en el punto $\mathbf{z}_i(t^\alpha, x^\mu)$ es precisamente $\xi_i(t^\alpha, x^\mu)$. De este modo, por (1) escribimos:

$$K^* = \frac{\left\langle \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial x^n} \right\rangle}{\left\langle \xi_i, \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial x^n} \right\rangle},$$

y en virtud de la expresión (12) el *elemento de volumen* dv^* de la hipersuperficie M^* (cf. [Sp], pp. 126-130) está dado por:

$$dv^* = \left\langle \xi_i, \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial x^n} \right\rangle dt^1 \dots dt^{p-1} dx^1 \dots dx^n,$$

de modo que a partir de las dos igualdades anteriores:

$$\int_{M^*} K^* dv^* = \sum_{i=1}^k \int \left\langle \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial t^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial t^{p-1}} \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \xi_i}{\partial x^n} \right\rangle dt^1 \dots dt^{p-1} dx^1 \dots dx^n,$$

donde el subíndice en el símbolo de suma indica la descomposición de M^* en regiones parametrizadas en la forma $\mathbf{z}_i(t^\alpha, x^\mu)$ indicada arriba.

* * *

Si denotamos por g^{ij} al *cofactor* de g_{ji} en la matriz (g_{ij}) dividido por $\det(g_{ij})$ —las entradas de dicha matriz están definidas por (2)— entonces obtendremos la consabida fórmula:

$$(g^{ij})^T (g_{ij}) = (g_{ij})(g^{ij})^T = (\delta_i^j) = \mathbf{1},$$

donde $(a_{ij})^T := (a_{ji})$ denota la transposición de matrices, δ_i^j es la delta de Kronecker y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de $n \times n$.

* * *

En función de lo anterior tendremos la expresión siguiente para la derivada de la función ξ_i en la dirección *tangente* x^j :

$$\begin{aligned} (13) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} &= \sum_l \left\langle \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}, \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^l} \right\rangle \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^l} + *; \quad 1 \leq j, l \leq n. \\ &= \sum_{k,l} \left\langle \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}, \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^k} \right\rangle g^{kl} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^l} + *; \quad 1 \leq j, k, l \leq n. \\ &= \sum_{k,l} h_{jk}(\xi_i) g^{kl} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^s} + *; \end{aligned}$$

donde $*$ representa un vector normal a M^n cuya expresión precisa es irrelevante.

El valor de la igualdad (13) reside en que expresa la derivada direccional de ξ_i en términos de las componentes tangenciales multiplicadas por un factor que incorpora la *segunda forma fundamental* asociada a la dirección ξ_i .

Debido a que los p vectores $\xi_i(q)$, $\partial \xi_i / \partial t^j(q)$, $1 \leq j \leq p-1$; son linealmente independientes y normales a M^n , generan el espacio normal $(T_q M)^\perp$ y en esta manera, la *alternancia* del producto cuña nos permite ignorar las componentes normales representadas por $*$ en (13) para efectos de la fórmula integral que aparece más abajo.

De esta manera tenemos:

$$\int_{M^*} K^* dv^* = \sum_{i,k,s} \int \left\langle \xi_i, \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial t^j} \wedge \prod_{m=1}^n h_{mk}(\xi_i) g^{ks} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^s} \right\rangle dt^1 \dots dt^{p-1} dx^1 \dots dx^n,$$

donde no debe olvidarse que la suma también está indicada por una descomposición de M^* en regiones de cierto tipo.

Deseamos ahora dilucidar la dependencia del integrando con respecto a las variables $\{t^j\}_{j=1}^{p-1}$ para algún $\bar{x}_0 \in M^n$ fijo. Para esto supóngase que los primeros p ejes coordenados en \mathbb{R}^{n+p} son *paralelos* a $(T_{\bar{x}_0} M^n)^\perp$. De este modo las funciones coordenadas $y^i(x^1, \dots, x^n)$ y $\xi^i(t^1, \dots, t^{p-1}, x^1, \dots, x^n)$ satisfacen en \bar{x}_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^i}{\partial x^s} &= 0, \quad 1 \leq i \leq p; \\ \xi^i &= \frac{\partial \xi^i}{\partial t^j} = 0, \quad p+1 \leq i \leq p+n. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi_i, \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial t^j} \wedge \sum_{k,s} \prod_{m=1}^n h_{mk}(\xi_i) g^{ks} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^s} \right\rangle &= \frac{\det(h_{mk}(\xi_i))}{\det(g_{ks})} \left\langle \xi_i, \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial t^j} \wedge \prod_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^s} \right\rangle \\ &= \frac{\det(h_{mk}(\xi))}{\det(g_{ks})} \cdot \det \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial t^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial \xi^p}{\partial t^1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial t^{p-1}} & \frac{\partial \xi^2}{\partial t^{p-1}} & \dots & \frac{\partial \xi^p}{\partial t^{p-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial y^{p+1}}{\partial x^1} & \frac{\partial y^{p+2}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^{p+n}}{\partial x^1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial y^{p+1}}{\partial x^n} & \frac{\partial y^{p+2}}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial y^{p+n}}{\partial x^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo que abreviamos como:

$$(14) \quad \left\langle \xi_i, \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial t^j} \wedge \sum_{k,s} \prod_{m=1}^n h_{mk}(\xi_i) g^{ks} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x^s} \right\rangle = \frac{\det(h_{mk}(\xi_i))}{\det(g_{ks})} \left[\xi^l, \frac{\partial \xi^l}{\partial t^j} \right] \left[\frac{\partial y^{p+k}}{\partial x^s} \right],$$

donde los índices corren como sigue: $1 \leq l \leq p$, $1 \leq j \leq p-1$, $1 \leq k, s \leq n$ y los corchetes representan el *determinante* de la matriz cuyos renglones son las entradas correspondientes de las funciones vectoriales ξ_i y \mathbf{y}_i .

Por (11) vemos que el producto de los dos últimos determinantes es positivo, de modo que podemos sustituirlos por sus valores absolutos y en este caso tenemos que:

$$d\omega := \left| \left[\xi^i, \frac{\partial \xi^i}{\partial t^j} \right] \right| dt^1 \dots dt^{p-1},$$

es el elemento de volumen de la esfera unitaria \mathbb{S}^{p-1} y análogamente:

$$dv := \left| \left[\frac{\partial y^{p+k}}{\partial x^s} \right] \right| dx^1 \dots dx^n,$$

representa el elemento de volumen de M^n . Al combinar ambas expresiones con la ecuación (14) obtenemos la expresión para el integrando:

$$\frac{\det(h_{mk}(\xi_i))}{\det(g_{ks})} d\omega dv,$$

la cual resulta *invariante* ante cambios de coordenadas en \mathbb{R}^{n+p} y cambios de los parámetros t^j y x^s . De esta manera hemos llegado a la fórmula:

$$\int_{M^*} K^* dv^* = \int_{M^n} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \frac{\det(h_{mk}(\xi_i))}{\det(g_{ks})} d\omega dv.$$

A partir de (1) se sigue inmediatamente que:

$$\frac{\det(h_{mk}(\xi_i))}{\det(g_{ks})},$$

es la curvatura de Gauss-Kronecker de M' en el punto \bar{x}_0 , donde M' se define como la proyección ortogonal de M^n sobre el espacio afín de dimensión $n+1$ generado por el espacio tangente $T_{\bar{x}_0}M$ y el vector normal $\xi_i(\bar{x}_0)$. Para comprobar nuestra última afirmación nótese que la segunda igualdad en (3) indica que $h_{mk}(\xi_i)$ también es la segunda forma fundamental de M' considerada ésta como hipersuperficie en el espacio afín mencionado y que en el punto \bar{x}_0 tanto M^n como M' tienen la misma primera forma fundamental. Por lo tanto, la curvatura de Killing-Lipschitz de M^n en el punto en cuestión está dada por:

$$K = \frac{c_n}{2 c_{n+p-1}} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \frac{\det(h_{mk}(\xi_i))}{\det(g_{ks})} d\omega,$$

lo que devuelve:

$$\int_{M^*} K^* dv^* = \frac{2 c_{n+p-1}}{c_n} \int_{M^n} K dv,$$

pero ésta es precisamente la igualdad (10). \square

Nota. La hipótesis sobre la orientabilidad de M^n puede suprimirse fácilmente si se aplica el resultado al llamado *cupriente doble de M^n* , el cual siempre es orientable (cf. [dC] p. 34, ejer. 12).

CAPÍTULO 2

Una nueva dirección: El trabajo de 1957 de Shiing-shen Chern y Richard K. Lashof.

1. Introducción.

El capítulo anterior puso de manifiesto que la motivación original para el trabajo de W. Fenchel provino del **Problema**, planteado por H. Hopf, concerniente a cómo cierta noción de curvatura en una variedad riemanniana M podía relacionarse con la topología de la misma. Este planteamiento descansaba sobre dos pilares: por una parte estaba el propósito de *generalizar* el concepto de curvatura de Gauss-Kronecker —definida únicamente en el caso de hipersuperficies— y por otra se encontraba el *establecer la validez* de una fórmula integral en el mismo espíritu que la de Gauss-Bonnet. El **Teorema 1.3.1** fue la culminación de ambos propósitos.

El trabajo de los matemáticos al que hace alusión el título de este apartado estuvo motivado por principios similares: estos fueron la voluntad de *generalizar* un elemento tan importante en la geometría de superficies en \mathbb{R}^3 como lo es la transformación normal de Gauss y a partir de dicha generalización, el definir un *invariante* que relacionara aspectos intrínsecos y extrínsecos de la variedad en cuestión. El resultado final fue un nuevo tipo de curvatura —la llamada *curvatura total*—, la cual no obstante que partía de la definición de curvatura de Killing-Lipschitz (cf. **1.2.1**), inauguró una nueva dirección que muy probablemente no vislumbró W. Fenchel y que será la que guíe nuestra exposición en el resto del presente trabajo.

Salvo explícita mención en contrario, todas las definiciones y resultados de este capítulo provienen de [TCI].

* * *

Sean M^n una variedad diferenciable de clase \mathcal{C}^∞ y $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ ($N \geq 1$) una inmersión de clase \mathcal{C}^∞ . Si $U \subset M$ es un abierto tal que $x|_U$ es un encaje, denotaremos por B_ν al fibrado de vectores unitarios y normales a $x(U)$, es decir:

$$B_\nu := \{ (p, \nu(p)) : p \in M^n \text{ y } \nu(p) \in (T_{x(p)}(x|_U))^\perp \text{ tal que } \|\nu(p)\| = 1 \}.$$

De manera equivalente podemos describir a B_ν como un fibrado de esferas de dimensión $(N - 1)$ con espacio base M^n . Debido a que *localmente* B_ν se ve como el producto cartesiano $U \times \mathbb{S}^{N-1}$, dicho fibrado posee una estructura diferenciable de clase \mathcal{C}^∞ y su dimensión, al igual que en el caso de una variedad producto, es $n + N - 1$.

Definición 1.1 (cf. [TCI], p. 306) Conservando las hipótesis y la notación de arriba, definimos la *transformación esférica*:

$$\tilde{\nu} : B_\nu \longrightarrow \mathbb{S}^{n+N-1},$$

de B_ν a la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+N} de dimensión $(n+N-1)$ como la traslación al origen $O \in \mathbb{R}^{n+N}$ del vector $\nu(p) \in (T_{x(p)}x|_U)^\perp$. Abreviaremos este hecho escribiendo simplemente $\tilde{\nu}(p, \nu(p)) = \nu(p)$.

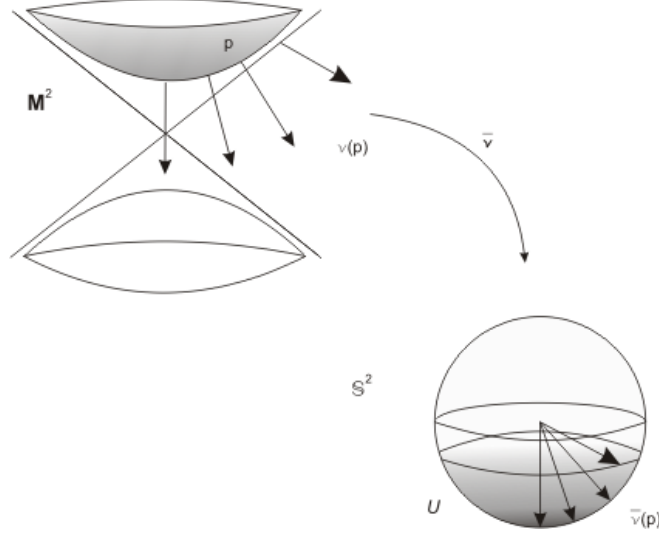


FIGURA 1. La transformación de Gauss. La imagen esférica de la hoja $x_3 \geq 0$ del hiperboloide M^2 es un abierto $U \subset \mathbb{S}^2$ cuya frontera, en la topología relativa, es la imagen del correspondiente cono asintótico.

Nota. En el caso de codimensión $N = 1$, la variedad B_ν tiene fibra $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ que corresponde a la existencia de una *única* dirección ν , normal a la hipersuperficie M^n . De este modo, el hiperplano tangente queda determinado como el complemento ortogonal de ν en \mathbb{R}^{n+1} y podemos llevar a cabo la identificación $T_{\tilde{\nu}(p, \nu)}\mathbb{S}^n \cong T_p M^n$, ya que ambos hiperplanos son *paralelos*. Esta identificación nos permite ver a la diferencial del mapeo esférico $d\tilde{\nu}$ como un operador, el cual resulta ser diagonalizable y cuyo determinante es la *curvatura de Gauss-Kronecker* en p .

Obsérvese que cuando estamos tratando con superficies ($n = 2$) inmersas en \mathbb{R}^3 , recuperamos la definición del *mapeo de Gauss* y por ende la *curvatura gaussiana* $K(p)$, conceptos alrededor de los cuales gira buena parte de la geometría diferencial clásica (*vid* FIGURA 1).

2. El marco móvil y las ecuaciones estructurales de \mathbb{R}^{n+N} .

A pesar de que el método del marco móvil fue desarrollado por Élie Cartan para el estudio de las subvariedades de \mathbb{R}^n , recomendamos al lector que desee ahondar en detalles la magnífica exposición de [Fd], que ahora seguimos.

Notación. A todo lo largo de este capítulo, seguiremos la siguiente convención para el recorrido de los índices:

$$1 \leq i, j, k \leq n; \quad n+1 \leq r, s, t \leq n+N; \quad 1 \leq A, B, C \leq n+N.$$

de acuerdo con las hipótesis establecidas en §1.

Definición 2.1. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$ un subconjunto abierto. Un *marco móvil* en U : e_1, \dots, e_{n+N} está dado por un conjunto ordenado de campos vectoriales diferenciables $\{e_1, \dots, e_{n+N}\}$ tal que para todo $x \in U$ la *orientación* de $\{e_1(x), \dots, e_{n+N}(x)\}$ coincide con alguna orientación de \mathbb{R}^{n+N} fijada de antemano y asimismo se satisface:

$$(15) \quad \langle e_A, e_B \rangle_x = \delta_{AB};$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ denota el producto interior usual de \mathbb{R}^{n+N} de los campos vectoriales evaluados en x y δ_{AB} es la delta de Kronecker.

Dado el marco móvil $\{e_A\}$, podemos definir las 1-formas ω_A mediante la condición $\omega_A(e_B) = \delta_{AB}$. En pocas palabras, para cada $x \in U$ la base ordenada $\{(\omega_A)_x\}$ es la base *dual* de $\{e_A\}$. A dicho conjunto de 1-formas se le conoce como *comarco asociado a $\{e_A\}$* .

Cada campo e_A es una función vectorial diferenciable $e_A : U \subseteq \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ y la diferencial $(de_A)_x : \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$, para toda $x \in U$, es una transformación lineal. De este modo podemos escribir:

$$(16) \quad (de_A)_x(v) = \sum_B (\omega_{AB})_x(v) e_B(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+N},$$

donde un sencillo argumento que apela tanto a la linealidad de $(de_A)_x$ y a que cada e_A es de clase $C^\infty(U)$, implica que las expresiones ω_{AB} en (16) son efectivamente *1-formas diferenciales*. Una vez hecha esta aclaración, abreviamos (16) como sigue:

$$de_A = \sum_B \omega_{AB} e_B.$$

Nota. A las $(n+N)^2$ formas ω_{AB} definidas por la ecuación (16) se les conoce comúnmente como *formas de conexión* de \mathbb{R}^{n+N} en el marco móvil $\{e_A\}$.

No todas las formas de conexión de \mathbb{R}^{n+N} son independientes. Si diferenciamos la expresión (15) obtendremos:

$$0 = \langle de_A, e_B \rangle + \langle e_A, de_B \rangle = \omega_{AB} + \omega_{BA};$$

es decir, las formas ω_{AB} son *antisimétricas* para cualesquiera índices A, B .

Sin embargo, el punto crucial en el método del marco móvil reside en que las formas ω_A que integran el comarco asociado a $\{e_A\}$ y las formas de conexión ω_{AB} satisfacen las *ecuaciones estructurales* de Élie Cartan.

Proposición 2.2 (Las ecuaciones estructurales de \mathbb{R}^{n+N}). Sean $\{e_A\}$ un marco móvil definido en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$ y $\{\omega_A\}$ el correspondiente comarco asociado a aquél. Si ω_{AB} son las formas de conexión de U en el marco $\{e_A\}$ entonces:

$$(17) \quad d\omega_A = \sum_C \omega_C \wedge \omega_{CA},$$

$$(18) \quad d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a_1 := (1, \dots, 0), \dots, a_{n+N} := (0, \dots, 1)$ la base canónica de \mathbb{R}^{n+N} y denótese por $x_A : U \rightarrow \mathbb{R}$ a la A -ésima función coordenada. La derivada exterior de ésta, dx_A , es una 1-forma diferencial en U y la relación $dx_A(a_B) = \delta_{AB}$, nos indica que $\{dx_A\}$ es el comarco asociado a la base canónica $\{a_A\}$ vista como marco móvil en \mathbb{R}^{n+N} .

La observación anterior nos permite escribir:

$$(19) \quad e_A = \sum_B \beta_{AB} a_B,$$

donde $\beta_{AB} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y para cada $x \in U$ la matriz $(\beta_{AB}(x))$ representa el *cambio de coordenadas* de la base canónica a aquélla formada por $\{e_A(x)\}$. En consecuencia dicha matriz no sólo resulta ser *invertible*, sino *ortogonal*.

Dado que $\omega_A(e_B) = \delta_{AB}$ y a que la *delta de Kronecker* es simétrica en sus índices, escribimos:

$$dx_B(a_A) = \omega_A(e_B) = \sum_C \beta_{BC} \omega_A(a_C),$$

lo que implica a su vez:

$$\omega_A = \sum_B \beta^{AB} dx_B;$$

donde $(\beta^{AB}(x))$ es la matriz inversa del cambio de coordenadas al que aludíamos en el párrafo anterior.

Sin embargo al utilizar el isomorfismo canónico entre \mathbb{R}^{n+N} y su dual $(\mathbb{R}^{n+N})^*$ que establece el producto interior *usual* en \mathbb{R}^{n+N} , podemos concluir que $\beta^{AB} = \omega_A(a_B) = \langle e_A, a_B \rangle = \beta_{AB}$ y de este modo:

$$(20) \quad \omega_A = \sum_B \beta_{AB} dx_B.$$

Probaremos primero que $d\beta_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \beta_{CB}$. Por (16):

$$de_A = \sum_C \omega_{AC} e_C = \sum_C \omega_{AC} \left(\sum_B \beta_{CB} a_B \right) = \sum_{B,C} \omega_{AC} \beta_{CB} a_B;$$

de modo que si obtenemos la derivada exterior en (19) y comparamos los coeficientes obtenidos, se sigue que:

$$(21) \quad d\beta_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \beta_{CB}.$$

Para obtener la primera ecuación estructural, *i.e.* (17), diferenciamos (20) y utilizamos (21):

$$\begin{aligned} d\omega_A &= \sum_B d\beta_{AB} \wedge dx_B = \sum_{B,C} \omega_{AC} \beta_{CB} \wedge dx_B \\ &= - \sum_{B,C} \beta_{CB} dx_B \wedge \omega_{AC} \\ &= \sum_C \omega_C \wedge \omega_{CA}; \end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades se siguen de la alternancia del producto cuña, así como de la antisimetría en los subíndices de las formas de conexión.

Para la segunda ecuación estructural (18), diferenciamos (21) y utilizamos que la derivada exterior es una antiderivación de grado +1 que satisface la igualdad $d^2 = 0$ (cf. [W], pp. 61 y 65):

$$0 = \sum_C d\omega_{AC} \beta_{CB} - \sum_C \omega_{AC} \wedge d\beta_{CB};$$

una nueva aplicación de (21) arroja:

$$\sum_C d\omega_{AC} \beta_{CB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \sum_D \omega_{CD} \beta_{DB}.$$

Multiplicando esta última expresión por la inversa de la matriz (β_{CB}) :

$$\sum_B \left(\sum_C d\omega_{AC} \beta_{CB} \right) \beta^{BE} = \sum_B \left(\sum_C \omega_{AC} \wedge \sum_D \omega_{CD} \beta_{DB} \right) \beta^{BE},$$

obtenemos:

$$\sum_C d\omega_{AC} \delta_{CE} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \sum_D \omega_{CD} \delta_{DE},$$

y finalmente escribimos:

$$d\omega_{AE} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CE},$$

como deséabamos. \square

* * *

La idea principal del método de Cartan para el estudio de la geometría de las subvariedades de \mathbb{R}^{n+N} puede describirse sucintamente como sigue: si $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ es una inmersión entonces, como consecuencia del teorema de la función inversa, para cada $p \in M$ existe a su alrededor una vecindad abierta $U \subset M$ tal que la restricción $x|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ es un *encaje*.

Sea $V \subset \mathbb{R}^{n+N}$ un abierto alrededor de $x(p) \in \mathbb{R}^{n+N}$ tal que $V \cap x(M) = x(U)$ y supóngase que existe en V un marco móvil $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}$ con la propiedad de que restringidos a $x(U)$, los vectores e_1, \dots, e_n son *tangentes* a éste. A un marco que satisface esta condición se le conoce como un *marco adaptado*.

En V tenemos asociado al marco $\{e_A\}$ el comarco $\{\omega_A\}$, así como las formas de conexión ω_{AB} las cuales satisfacen las ecuaciones estructurales (17) y (18). Por otro lado la función $x|_U : U \rightarrow V$ induce, mediante *pullback*, formas $x^*(\omega_A)$, $x^*(\omega_{AB})$ definidas en U que continúan satisfaciendo las ecuaciones estructurales —esto se debe a que x^* conmuta con la derivada y el producto exteriores—, de manera que el análisis de la geometría *métrica y local* de $U \subset M^n$ se desprende del carácter localmente euclidiano de M^n .

* * *

Para utilizar el método del marco móvil con relación al mapeo esférico de la **Definición 1.1** requerimos de dos lemas, los cuales estableceremos a continuación.

Lema 2.3 (Cartan). Sea $V := V^n$ un espacio vectorial real y de dimensión n donde $k \leq n$ formas lineales $\omega_1, \dots, \omega_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ son linealmente independientes. Si existen formas $\theta_1, \dots, \theta_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^k \omega_i \wedge \theta_i = 0$ entonces

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j,$$

con $a_{ij} = a_{ji}$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos completando a una base de V^* al conjunto de las formas $\omega_i : \omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n$ y definiendo $n - k$ formas $\theta_{k+1} = \dots = \theta_n = 0$ de modo que podamos suscribir la hipótesis en el enunciado del lema por $\sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \theta_i = 0$. De esta manera podemos escribir:

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j + \sum_l b_{il} \omega_l, \quad l = k+1, \dots, n.$$

Nótese que automáticamente tenemos $b_{il} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji} = 0$ para toda $i \geq k+1$. Utilizando la hipótesis:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{i,j} a_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_l b_{il} \omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i < l} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Dado que $\omega_g \wedge \omega_h$ con $g < h$ y $g, h = 1, \dots, n$; son *linealmente independientes* (de hecho forman una base de $\Lambda^2(V^*)$), podemos concluir que $b_{il} = 0$ y que $a_{ij} = a_{ji}$. \square

Lema 2.4. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\omega_1, \dots, \omega_n$ 1-formas diferenciales linealmente independientes en U . Si existe un conjunto de 1-formas $\{\omega_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$ que satisfacen las condiciones siguientes:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj},$$

entonces dicho conjunto es *único*.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que existe otro conjunto $\{\bar{\omega}_{ij}\}$ tal que:

$$\bar{\omega}_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj},$$

y en consecuencia:

$$\sum_k \omega_k \wedge (\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = 0.$$

Por el **Lema 2.3**:

$$(22) \quad \bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i A_{ki}^j \omega_i, \quad \text{con } A_{ki}^j = A_{ik}^j.$$

Obsérvese a este respecto que

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i A_{ki}^j \omega_i = -(\bar{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) = -\sum_i A_{ji}^k \omega_i,$$

de modo que la independencia lineal de las ω_i implica la *igualdad* de los coeficientes, *i.e.* $A_{ki}^j = -A_{ji}^k$. Usando las simetrías dadas por (22) y la igualdad mencionada, obtenemos:

$$A_{ji}^k = -A_{ki}^j = -A_{ik}^j = A_{jk}^i = A_{kj}^i = -A_{ij}^k = -A_{ji}^k = 0;$$

es decir, $\bar{\omega}_{kj} = \omega_{kj}$. \square

* * *

Seguimos ahora con la exposición de [TCI]. Sea $\{e_A\}$ un marco móvil en \mathbb{R}^{n+N} en el sentido de la **Definición 2.1** y denótese por $V_{n+N,n+N}$ a la *variedad de Stiefel* de $(n+N)$ -marcos en \mathbb{R}^{n+N} . De todas las descripciones posibles que pueden hacerse de dicha variedad, adoptaremos aquélla que la considera como el *conjunto* de todos los marcos en \mathbb{R}^{n+N} visto en el producto cartesiano de $n+N$ copias de \mathbb{S}^{n+N-1} , de modo que con la topología inducida $V_{n+N,n+N}$ es una variedad de dimensión¹ $(n+N)(n+N-1)/2$.

Definición 2.5. Sea $V_{n+N,n+N}$ la variedad de Stiefel de $(n+N)$ -marcos en \mathbb{R}^{n+N} . Definimos el *espacio de marcos en \mathbb{R}^{n+N}* como la variedad *producto*:

$$F(n, N) := \mathbb{R}^{n+N} \times V_{n+N,n+N}.$$

(Obsérvese que de acuerdo con las consideraciones previas concernientes a la dimensión de $V_{n+N,n+N}$ se tiene $\dim F(n, N) = (n+N)(n+N+1)/2$.)

Nota. Dado un punto $y \in \mathbb{R}^{n+N}$, la variedad $F(n, N)$ precisa *todos* los posibles sistemas de coordenadas cartesianas $Ox_1 \dots x_{n+N}$ que es posible establecer identificando al origen $O \in \mathbb{R}^{n+N}$ con y . Semejante control obedece a que en primer lugar, deseamos hacer el *pullback* de formas definidas en $F(n, N)$ a la variedad $M^n \times F(n, N)$ (recuérdese que M^n es un *conjunto* cuya imagen bajo la inmersión $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ es la que se encuentra contenida en \mathbb{R}^{n+N}), para posteriormente efectuar otro *pullback* de $M^n \times F(n, N)$ a cierto fibrado que definimos a continuación (para los fundamentos acerca de los haces fibrados cf. la parte I de [St]).

Definición 2.6 (cf. [TCI], p. 308] La inmersión diferenciable $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ da lugar a los siguientes haces fibrados sobre M^n :

1. El fibrado *tangente unitario*, B_τ , cuyo espacio total es el subconjunto de $M^n \times \mathbb{R}^{n+N}$ que consiste de todos los puntos (p, v) tales que $p \in M$ y v es un vector unitario y tangente a $x(M)$ en $x(p)$.
2. El fibrado *normal unitario*, B_ν , cuyo espacio total es el subconjunto de $M^n \times \mathbb{R}^{n+N}$ integrado por aquellos puntos (p, v) tales que $p \in M$ y v es un vector unitario y normal a $x(M)$ en $x(p)$.
3. El fibrado B , cuyo espacio total es el subconjunto de $M^n \times F(n, N)$ que está dado por los puntos $(p, x(p), e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}) \in M^n \times F(n, N)$ tales que $\{e_1, \dots, e_n\}$ son vectores *tangentes* y $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+N}\}$ son vectores *normales* a $x(M)$ en $x(p)$. Denotaremos por ψ a la proyección $B \rightarrow M^n$.

El haz B también puede describirse de otra manera, sobre la cual resulta instructivo extenderse un poco aquí: fíjese una orientación de \mathbb{R}^{n+N} . Por sencillez escogeremos aquélla asociada a la base canónica. Si denotamos por $SO(n+N) \times \mathbb{R}^{n+N}$ al grupo de todos los movimientos rígidos en \mathbb{R}^{n+N} que preservan la orientación y

¹El mismo E. Stiefel en *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*; Comm. Math. Helvetici 8 (1936), pp. 3-51; prueba esta afirmación en una manera que no podemos dejar de mencionar aquí: dado un $(n+N)$ -marco en $\mathbb{R}^{n+N} : \{e_A\}$, se tiene $e_1 \in \mathbb{S}^{n+N-1}$. Para que e_2 sea *ortogonal* a e_1 , debemos escogerlo en $\mathbb{S}^{n+N-2} \subset T_{e_1} \mathbb{S}^{n+N-1} \cong \mathbb{R}^{n+N-1}$ y continuar este proceso recursivamente. La dimensión de $V_{n+N,n+N}$ estará dada por $(n+N-1) + (n+N-2) + \dots + 2 + 1 = (n+N)(n+N-1)/2$.

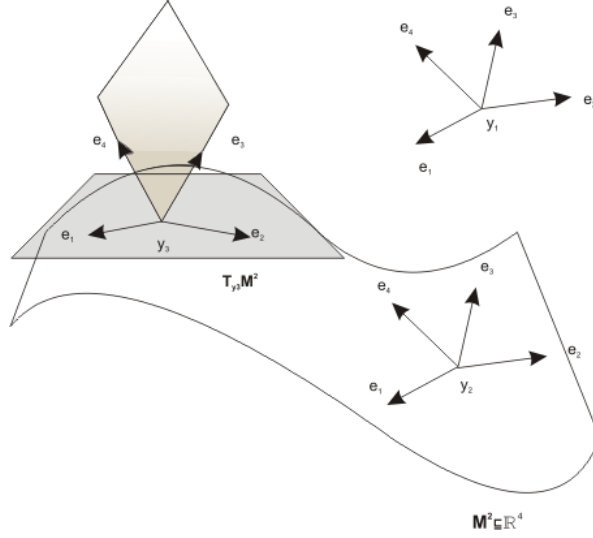


FIGURA 2. Tres puntos distintos de la variedad $F(2, 2)$: $y_1 \notin M^2$ y a pesar de que tanto y_2 como y_3 están en M^2 , únicamente en el último caso $(e_1, \dots, e_4) \in V_{4,4}$ satisface las condiciones $\{e_1, e_2\} \subset T_{y_3}M^2$, $\{e_3, e_4\} \subset (T_{y_3}M^2)^\perp$. Esta condición será la que nos permita extraer información geométrica sobre la inmersión $x : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

por $R_n \times R_N$ al subgrupo de éste que consiste únicamente de aquellos movimientos que fijan simultáneamente al origen $O \in \mathbb{R}^{n+N}$ y a un subespacio vectorial fijo, *orientado* y de dimensión n : $U \subset \mathbb{R}^{n+N}$; entonces el grupo cociente $SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} / R_n \times R_N$ puede verse como las parejas formadas por un punto $x(p) \in \mathbb{R}^{n+N}$ y un subespacio *afín*, orientado y de dimensión n que pasa por éste.

Denotando por π a la proyección canónica:

$$SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} / R_n \times R_N,$$

la terna $(SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N}, \pi, SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} / R_n \times R_N)$ resulta ser un fibrado cuyo *grupo estructural* es $R_n \times R_N$ (cf. [St] §§ 2.2 y 2.3; así como §§ 7.1-7.4 de la parte I).

Si $\varphi : M \rightarrow SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} / R_n \times R_N$ es la función que manda $p \in M$ a $x(p) \in \mathbb{R}^{n+N}$ y T_pM al espacio afín y orientado $T_{x(p)}x(M)$ entonces el haz B es isomorfo al *inducido* por φ de acuerdo con la propiedad universal del producto

fibrado (o *pullback*) representado en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} \\
 \searrow^{\cong} & & \downarrow \pi \\
 \varphi^*(SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N}) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \pi \\
 M^n & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N} / R_n \times R_N
 \end{array}$$

donde $\Phi : B \rightarrow SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N}$ es la función que envía $(p, x(p), e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}) \in B$ al punto $(\mathbb{A}, x(p)) \in SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N}$, en el cual la matriz \mathbb{A} tiene por renglones a los vectores $\{e_1, \dots, e_{n+N}\}$. (Esto explica el porqué del énfasis hecho con respecto a la orientación en la **Definición 2.1**.) Si deseamos recuperar explícitamente el movimiento rígido de \mathbb{R}^{n+N} que corresponde al punto de $SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N}$ en cuestión, basta con definir $g(\mathbf{x}) := \mathbb{A}\mathbf{x} + x(p)$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+N}$.

Recuérdese que $\varphi^*(SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N})$ está definido como *conjunto* (cf. [St]) como sigue:

$$\{(p, \mathbb{A}, x(p)) \in M^n \times (SO(n+N) \rtimes \mathbb{R}^{n+N}) \mid \varphi(p) = \pi(\mathbb{A}, x(p))\},$$

En particular, el grupo estructural de B también está dado por $R_n \times R_N$.

* * *

Es precisamente en el haz B donde la mayoría de nuestros argumentos tendrán lugar y al que hacíamos referencia antes de la **Definición 2.6**. También utilizaremos más adelante las funciones:

$$\psi_\tau : B \rightarrow B_\tau, \quad \psi_\nu : B \rightarrow B_\nu;$$

definidas por:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \psi_\tau(p, x(p), e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}) &= (p, e_n), \\
 \psi_\nu(p, x(p), e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}) &= (p, e_{n+N}).
 \end{aligned}$$

Concluiremos esta sección introduciendo las 1-formas diferenciales que nos permitirán definir la *curvatura total* que mencionábamos en §1. Para este fin llevaremos a cabo el trabajo delineado en la **Nota** que antecede a la **Definición 2.6** y comenzaremos estableciendo la validez de una fórmula análoga a la ecuación (16) para la inmersión $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$. Es claro que la diferencial $dx_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ puede expresarse *puntualmente* como combinación lineal de algún marco $\{e_A\}$ evaluado en $x(p)$ y con coeficientes $(\gamma_A)_{x(p)} \in (T_{x(p)}x(M))^*$:

$$dx_p(v) = \sum_A (\gamma_A)_{x(p)}(v) \cdot e_A(x(p)), \quad \forall v \in T_p M;$$

sin embargo el que las 1-formas ω_A sean *duales* al marco $\{e_A\}$ equivale a la igualdad $(\gamma_A)_{x(p)} = (\omega_A)_{x(p)}$, para toda A (cf. [Fd], pp. 79 y 80) y en consecuencia:

$$(24) \quad dx_p(v) = \sum_A (\omega_A)_{x(p)}(v) \cdot e_A(x(p)), \quad \forall v \in T_p M;$$

de este modo introducimos las formas diferenciales lineales ω'_A, ω'_{AB} en el espacio de marcos $F(n, N)$ mediante las ecuaciones (16) y (24), las cuales en su forma abreviada se leen:

$$(25) \quad de_A = \sum_B \omega'_{AB} e_B, \quad dx = \sum_A \omega'_A e_A;$$

donde

$$(26) \quad \omega'_{AB} + \omega'_{BA} = 0,$$

y las derivadas exteriores de tales 1-formas satisfacen las ecuaciones estructurales de la **Proposición 2.2**:

$$(27) \quad d\omega'_A = \sum_B \omega'_B \wedge \omega'_{BA}, \quad d\omega'_{AB} = \sum_C \omega'_{AC} \wedge \omega'_{CB}.$$

Debemos enfatizar que las formas que aparecen en la expresión (25) toman valores *vectoriales*, mientras que sus componentes —i.e. ω'_{AB}, ω'_A —, lo son a valores *reales*.

Para efectuar el *pullback* de las formas ω'_A, ω'_{AB} al fibrado B debemos considerar la composición

$$B \xrightarrow{i} M^n \times F(n, N) \xrightarrow{\lambda} F(n, N);$$

donde i denota la inclusión y λ es la proyección en el segundo factor. De esta manera habremos obtenido las 1-formas diferenciales en B :

$$(28) \quad \omega_A := (\lambda \circ i)^* \omega'_A, \quad \omega_{AB} := (\lambda \circ i)^* \omega'_{AB};$$

las cuales satisfacen expresiones idénticas a (26) y (27):

$$(29) \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0,$$

$$(30) \quad d\omega_A = \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \quad d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}.$$

En vista de lo establecido en la **Definición 2.6** con respecto a B , únicamente los campos vectoriales e_i son *tangentes* a $x(M^n)$ en $x(p)$ y de esta forma $dx = \sum_i \omega'_i e_i$; lo cual conlleva $\omega_r = 0$ y que las formas ω_i sean linealmente independientes. En consecuencia la primera ecuación en (30) se lee:

$$\sum_i \omega_i \wedge \omega_{ir} = d\omega_r = 0.$$

Por el **Lema 2.3** podemos escribir

$$(31) \quad \omega_{ir} = \sum_j A_{ij}^r \omega_j, \quad A_{ij}^r = A_{ji}^r,$$

donde las funciones A_{ij}^r son los coeficientes que determinan la segunda forma fundamental de la inmersión x en $p : (d^2x)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ descrita en términos del marco móvil $\{e_A\}$ (cf. [GR], pp. 125-128; así como la expresión (40) más adelante). Por otro lado el **Lema 2.4** garantiza que las formas de conexión resultantes son *únicas*.

* * *

Las 1-formas ω'_A junto con sus respectivas formas de conexión ω'_{AB} gobiernan la forma en que varían las transformaciones lineales de_A y dx en términos de algún

marco prefijado $\{e_A\} \in F(n, N)$. La necesidad de *jalar* las 1-formas dichas mediante λ^* obedece a que para poder extraer alguna conclusión geométrica sobre M^n a partir del comportamiento de la *primera aproximación* de la inmersión x , *i.e.* su *diferencial*; debemos *restringir* el marco $\{e_A\}$ al subconjunto $x(M^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$ y más aún, pues el siguiente *pullback* i^* nos limita al caso en que $\{e_i\}$ es un marco adaptado.

3. La curvatura total.

Sea dV el elemento de volumen de M^n . De acuerdo con la descripción hecha del fibrado B_ν en la **Introducción** y en la **Definición 2.6**, es claro que existe una $(N-1)$ -forma diferencial $d\sigma_{N-1}$ definida en B_ν , tal que su restricción a la fibra es el elemento de volumen de la esfera de vectores unitarios y normales a $x(M^n)$ en $x(p)$.

Dado el carácter localmente trivial del haz B_ν , el producto cuña $dV \wedge d\sigma_{N-1}$ devuelve el elemento de volumen del mismo. Por otro lado si denotamos por $d\Sigma_{n+N-1}$ al elemento de volumen de \mathbb{S}^{n+N-1} y $\tilde{\nu}$ es el mapeo esférico de la **Definición 1.1**, entonces el *pullback* $\tilde{\nu}^* d\Sigma_{n+N-1}$ es una $(n+N-1)$ -forma definida en B_ν y como tal, es un múltiplo *funcional* del elemento de volumen de este fibrado:

$$(32) \quad \tilde{\nu}^* d\Sigma_{n+N-1} = G(p, \nu(p)) dV \wedge d\sigma_{N-1}.$$

Definición 3.1 (cf. [TCI], p. 306) Con las hipótesis y notación anteriores, llamaremos *curvatura de Killing-Lipschitz en $\nu(p)$* a la función $G(p, \nu(p)) : B_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ que aparece en la relación (32).

La interpretación geométrica que puede darse a $G(p, \nu(p))$ es el contenido de la **Proposición 3.7** la cual veremos más adelante. Asimismo, resulta imprescindible cotejar la definición de *curvatura de Killing-Lipschitz* utilizada por W. Fenchel (**Definición 1.2.1**) y aquella que acabamos de presentar; sin embargo para llevar a cabo un análisis más completo requerimos todavía de dos definiciones que redondeen nuestra exposición.

Definición 3.2 (cf. [TCI], p. 307) Conservando las hipótesis y notación anteriores, si denotamos por \mathbb{S}_\perp^{N-1} a la esfera de vectores unitarios y normales a $x(M^n)$ en $x(p)$, llamaremos a la integral:

$$(33) \quad K^*(p) := \int_{\mathbb{S}_\perp^{N-1}} |G(p, \nu(p))| d\sigma_{N-1} \geq 0,$$

la *curvatura total de M^n en p* y definiremos en consecuencia la *curvatura total de M^n* como la integral:²

$$(34) \quad T(M^n) := \frac{1}{c_{n+N-1}} \int_{M^n} K^*(p) dV;$$

siempre y cuando $T(M^n) < \infty$.

Nota. Las expresiones siguientes corresponden, respectivamente, a la *curvatura de Killing-Lipschitz* que fue utilizada por W. Fenchel en [WF] (cf. la **Definición 1.2.1**) y a la *curvatura total* que lo fue por S.s. Chern y R. Lashof en [TCI], ambas

²Recuérdese que c_{n+N-1} denota el *volumen* de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+N-1} \subset \mathbb{R}^{n+N}$.

consideradas *puntualmente*:

$$K(p) := \frac{c_n}{2c_{n+N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \kappa(\xi) d\sigma_{N-1},$$

$$K^*(p) := \int_{\mathbb{S}_\perp^{N-1}} |G(p, \nu(p))| d\sigma_{N-1};$$

donde $\kappa(\xi)$ es la *curvatura de Gauss-Kronecker asociada a la dirección normal* ξ (cf. el inicio de § 2 del capítulo anterior, así como la **Definición 1.2.2**) y $G(p, \nu(p))$ es la *curvatura de Killing-Lipschitz en* $\nu(p)$.

Entre ambas fórmulas integrales debemos resaltar dos cosas:

- i) La curvatura de Gauss-Kronecker asociada a una dirección normal, $\kappa(\xi)$, se definió a partir de la curvatura de Gauss-Kronecker de la *hipersuperficie* M' obtenida por la proyección ortogonal de $M^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$ en el espacio generado por $T_p M$ y ξ . En caso que la dimensión de M' sea *impar*, su curvatura de Gauss-Kronecker quedará definida salvo por un signo, debido a que ésta es el *determinante* del mapeo esférico correspondiente. *Aquí reside el porqué de la aparición del valor absoluto en la definición de* $K^*(p)$; pues, como veremos más adelante, $G(p, \nu(p))$ efectivamente coincide con $\kappa(\nu(p))$. (Volveremos más adelante a esta cuestión, al inicio del capítulo 3.)
- ii) Como puede apreciarse en la parte final de la prueba del **Teorema 1.3.1**, el factor de proporcionalidad que aparece en la expresión para $K(p)$ fuerza su introducción para obtener la igualdad (10) del capítulo anterior, la cual se desprende directamente de una aplicación del resultado de H. Hopf mencionado como la generalización (i) al inicio de § 1 (cf. la expresión (5) en § 3 de 1). Por lo tanto, una vez que hayamos probado que $G(p, \nu(p)) = \kappa(\nu(p))$ habremos obtenido la siguiente:

Proposición 3.3. *Sea* M^n *una variedad riemanniana orientada, compacta y sin frontera la cual está inmersa en* \mathbb{R}^{n+N} . *Si la curvatura de Gauss-Kronecker de* M *asociada a cualquier dirección normal* $\xi \in (T_p M)^\perp$ *es no negativa (para toda* $p \in M$) *y la curvatura total en el sentido de Chern y Lashof satisface* $T(M) < \infty$ *entonces se verifica la igualdad:*

$$T(M) = \chi(M);$$

donde χ es la *característica de Euler*.

* * *

Recuérdese que de acuerdo con la expresión (28) y la discusión que la antecede, las formas diferenciales ω_A y las formas de conexión ω_{AB} están definidas en B . Deseamos ahora trasladar a este fibrado tanto el elemento de volumen dV como la forma $d\sigma_{N-1}$, los cuales se encuentran definidos en M^n y en la fibra de B_ν respectivamente, *identificándolos* con su *pullback* bajo las funciones ψ y ψ_ν . En el primer caso, sin importar qué base ortonormal $\{e'_i\}$ elijamos para $T_p M^n$, la forma de volumen de M^n se expresará en términos de la base dual $\{\omega'_i\}$ siempre y cuando nuestra elección caiga dentro de la clase de equivalencia que define la orientación

de M^n . Por otro lado las n -formas diferenciales en B :

$$\begin{aligned} \psi^* \omega'_1 \wedge \dots \wedge \psi^* \omega'_n \\ \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n; \end{aligned}$$

donde ω_i están dadas por la expresión (28), difieren únicamente por el determinante J de la matriz de cambio de base entre $\{e'_i\}$ y $\{e_i\}$; sin embargo, al ser ambas bases ortonormales y positivas, tendremos necesariamente $J = 1$. En consecuencia podemos hablar *del* elemento de volumen de M^n en B y escribirlo como:

$$dV = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Por otro lado, el carácter *localmente trivial* del fibrado B_ν nos permite encontrar $(N-1)$ -formas $d\sigma_\alpha$, $\alpha \in A$, las cuales están definidas en los subconjuntos $U_\alpha \times \mathbb{S}^{N-1} \subseteq B_\nu$ —donde $U_\alpha \subseteq M^n$ es un abierto perteneciente a la *cubierta trivializadora* del fibrado en cuestión— y que en cualquier punto $x \in U_\alpha$ devuelven el elemento de volumen de la fibra, *i.e.* \mathbb{S}^{N-1} .

Dichas formas $d\sigma_\alpha$ suelen considerarse como *secciones* del haz $\Lambda_{N-1}^*(B_\nu)$ de $(N-1)$ -formas diferenciales en B_ν (cf. [W], pp. 62-63). De este modo, utilizando una partición diferenciable de la unidad podremos obtener una sección *global* o bien, de manera equivalente, una $(N-1)$ -forma $d\sigma_{N-1}$ definida en todo B_ν . Esta forma devuelve en cada $x \in M^n$ el elemento de volumen de \mathbb{S}^{N-1} y nos permite expresar al elemento de volumen *de* B_ν como $dV \wedge d\sigma_{N-1}$.

De acuerdo con la definición de ψ_ν hecha en (23) y al hecho elemental de que $\psi_\nu^*(dV \wedge d\sigma_{N-1}) = \psi_\nu^* dV \wedge \psi_\nu^* d\sigma_{N-1}$, se sigue inmediatamente que podemos representar al elemento de volumen de B_ν en B como:

$$dV \wedge d\sigma_{N-1} = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \wedge \omega_{n+N,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n+N,n+N-1};$$

donde la forma $d\sigma_{N-1}$ corresponde al producto exterior de los últimos $N-1$ factores.

Finalmente, la **Definición 1.1** y la expresión (23) nos dicen que el *pullback* de la forma de volumen de $\mathbb{S}^{n+N-1} : \Sigma_{n+N-1}$ a B_ν y posteriormente, para efectos de comparación, a B ; queda determinado por el comportamiento de $(\tilde{\nu} \circ \psi_\nu)^* = \psi_\nu^* \circ \tilde{\nu}^*$ y éste a su vez por las formas de conexión que aparecen en el desarrollo de de_{n+N} . En este orden de ideas podemos escribir:

$$\tilde{\nu}^* d\Sigma_{n+N-1} = \omega_{n+N,1} \wedge \dots \wedge \omega_{n+N,n} \wedge \omega_{n+N,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n+N,n+N-1},$$

de modo que utilizando la ecuación (31) y propiedades básicas del producto exterior (cf. [Sp], p. 82) obtenemos:

$$\begin{aligned} (35) \quad \tilde{\nu}^* d\Sigma_{n+N-1} \\ = (-1)^n \det(A_{ij}^{n+N}) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \wedge \omega_{n+N,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n+N,n+N-1} \\ = (-1)^n \det(A_{ij}^{n+N}) dV \wedge d\sigma_{N-1}. \end{aligned}$$

Si comparamos las expresiones (32) y (35), podemos establecer la siguiente:

Proposición 3.4 (cf. [TCI], p. 310) *Si $G(p, \nu(p))$ es la curvatura de Killing-Lipschitz en el sentido de la Definición 3.1 entonces:*

$$(36) \quad G(p, \nu(p)) = (-1)^n \det(A_{ij}^{n+N});$$

donde las entradas de la matriz (A_{ij}^{n+N}) están dadas por la fórmula (31).

Ni el **Lema 2.3** ni la **Proposición 3.4** aclaran la dependencia funcional de los coeficientes A_{ij}^{n+N} con respecto a $\nu(p)$. Utilizaremos precisamente (36) para elucidar este hecho: Sea $U \subseteq M^n$ una vecindad abierta alrededor de p y denótese por $\tilde{e}_A : U \rightarrow B$ a una sección local del fibrado B ; es decir, una función *diferenciable* que a cada $q \in U$ le asigna un *punto* $(q, x(q), \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, \tilde{e}_{n+1}, \dots, \tilde{e}_{n+N}) \in B$ tal que los vectores $\{\tilde{e}_A\}$ satisfacen las condiciones del inciso (3) de la **Definición 2.6**.

De este modo si $e_A(q) \in B$ es *cualquier* otro marco en $x(q)$ entonces podemos escribir $e_A = \sum \beta_{AB} \tilde{e}_B(q)$ donde la matriz (β_{AB}) es ortogonal y por ende, invertible. Denotamos por $\tilde{\omega}_i$ a la *restricción* del comarco asociado ω_i a la imagen de la sección local y al igual que en la prueba de la **Proposición 2.2**, un sencillo cálculo nos permite establecer las siguientes igualdades entre las correspondientes formas de conexión:

$$\omega_{AC} = \sum_B \beta_{CB} \tilde{\omega}_{AB}.$$

Así escribimos para el *producto simétrico de 1-formas*:

$$\begin{aligned} (37) \quad \omega_i \omega_{is} &:= \frac{1}{2} (\omega_i \otimes \omega_{is} + \omega_{is} \otimes \omega_i) \\ &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\omega}_i \otimes \sum_r \beta_{sr} \tilde{\omega}_{ir} + \sum_r \beta_{sr} \tilde{\omega}_{ir} \otimes \tilde{\omega}_i \right) \\ &= \left(\sum_r \beta_{sr} \right) \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_{ir} \\ &= \sum_r \beta_{sr} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_{ir} \\ &= \sum_{j,r} \beta_{sr} \tilde{A}_{ij}^r \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j ; \end{aligned}$$

donde \tilde{A}_{ij}^r es la función A_{ij}^r restringida a la imagen de la sección local. Sin embargo el lado izquierdo de la primera igualdad en (37) satisface, de acuerdo con (31):

$$\omega_i \omega_{is} = \sum_j A_{ij}^s \omega_i \omega_j .$$

Por lo tanto $A_{ij}^s = \sum_r \beta_{sr} \tilde{A}_{ij}^r$. En particular si para $\nu(p) = e_{n+N}$ escribimos $\nu(p) = \sum_r \nu_r \tilde{e}_r(p)$, *puntualmente* obtenemos:

$$(38) \quad G(p, \nu(p)) = (-1)^n \det \left(\sum_r \nu_r \tilde{A}_{ij}^r(p) \right),$$

lo que aclara la cuestión que sobre la dependencia funcional suscitó la expresión (36). Deseamos ahora justificar el porqué de la introducción de (37).

Definición 3.5. Con las hipótesis y notación anteriores, definimos la *diferencial de segundo orden a valores vectoriales* (también conocida como *segunda forma fundamental de la inmersión x en p*) $d^2x : T_pM \times T_pM \longrightarrow (T_pM)^\perp$ como:

$$(39) \quad d^2x = \sum_r (d^2x \cdot e_r) e_r;$$

donde $d^2x \cdot e_r := d\langle dx, e_r \rangle = \langle dx, de_r \rangle$ y el operador d de la igualdad antecedente es la derivada exterior.

A partir de (39) y (25) obtenemos inmediatamente:

$$d^2x = \sum_{i,r} \omega_{ir} \omega_i e_r = \sum_{i,r} \tilde{\omega}_{ir} \tilde{\omega}_i \tilde{e}_r(q),$$

y para el producto interior de $\nu(p)$ y d^2x en B :

$$(40) \quad \langle \nu(p), d^2x \rangle = \sum_{i,r} \nu_r \tilde{\omega}_{ir} \tilde{\omega}_i = \sum_{i,j,r} \nu_r \tilde{A}_{ij}^r \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j;$$

lo que nos devuelve la siguiente fórmula para el producto interior de las 1-formas $d\nu, dx$ en B_ν :

$$(41) \quad \langle -d\nu, dx \rangle = \sum_{i,j,r} \nu_r \tilde{A}_{ij}^r \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j = \langle \nu(p), d^2x \rangle.$$

Combinando (38) y (41) podemos interpretar a $G(p, \nu(p))$ como una *generalización del determinante de la segunda forma fundamental de una superficie* (cf. [dC], pp. 153-156). De hecho, $G(p, \nu(p))$ es el determinante de la matriz cuyas entradas están dadas por la proyección en la dirección $\nu(p)$, de la segunda forma fundamental restringida a una sección local del fibrado B .

Ejemplo 3.6. En el caso de codimensión $N = 1$, *i.e.* M^n es una hipersuperficie inmersa y orientada en \mathbb{R}^{n+1} ; la orientación de nuestra variedad define un vector unitario y normal a M^n en $p : \nu_0(p)$, de manera que cualquier otro vector que tenga las mismas características en dicho punto es de la forma $\nu(p) = \pm \nu_0(p)$. En esta situación la curvatura de Killing-Lipschitz en $\nu(p)$ satisface $G(p, \nu(p)) = G(p, \pm \nu_0(p)) = (\pm 1)^n G(p, \nu_0(p))$ y por lo tanto, en el caso de dimensión *par*, $G(p, \nu(p))$ resulta *independiente* de la orientación.

Es claro que en el caso de codimensión 1, $G(p, \nu(p))$ no es sino la curvatura de Gauss-Kronecker (cf. la **Nota** al final de § 1).

Proposición 3.7 (cf. [TCI], p. 311] *Si denotamos por $\mathcal{L}(\nu) := \mathcal{L}(\nu(p))$ al subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+N} de dimensión $n+1$ generado por el espacio tangente a $x(M^n)$ en $x(p)$ y el vector normal $\nu(p)$, entonces $G(p, \nu(p))$ es igual a la curvatura de Gauss-Kronecker en p de la hipersuperficie obtenida al proyectar ortogonalmente $x(M^n)$ sobre $\mathcal{L}(\nu)$ o bien, de manera equivalente, a la curvatura de Gauss-Kronecker asociada a la dirección normal $\nu(p)$.*

DEMOSTRACIÓN. En vista de que el resultado es local, considérese una sección del fibrado B definida alrededor de $p \in M^n$, $\tilde{e}_A(q)$, al igual que en la discusión precedente a la **Proposición 3.4** y que *adicionalmente* satisfaga la condición $\tilde{e}_{n+N}(p) = \nu(p)$. Escribiremos:

$$\tilde{e}_A(p) = (\tilde{e}_A)_0, \quad x(p) = x_0.$$

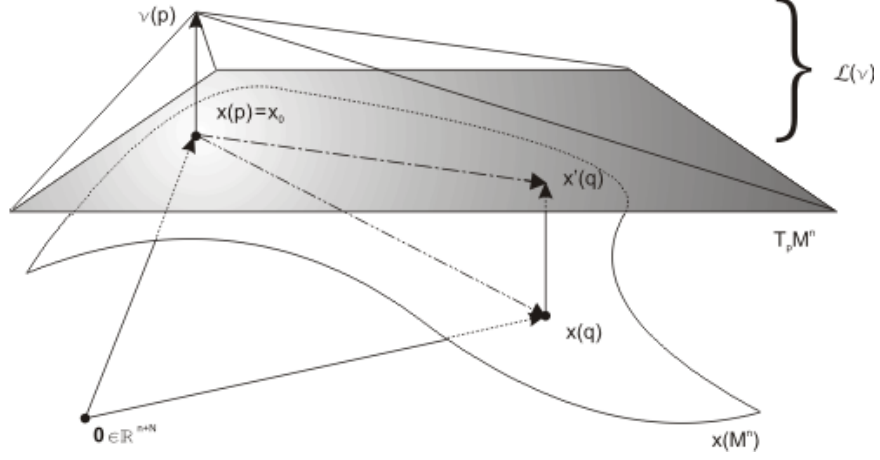


FIGURA 3. La determinación de $x'(q)$ con respecto a los sistemas coordenados de \mathbb{R}^{n+N} y $\mathcal{L}(v)$.

Si $x'(q)$ es el vector de posición en \mathbb{R}^{n+N} de la proyección ortogonal de $x(q)$ sobre $\mathcal{L}(v)$ entonces $x'(q)$ queda determinado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'(q) - x(q) &= \xi_{n+1}(\tilde{e}_{n+1})_0 + \dots + \xi_{n+N-1}(\tilde{e}_{n+N-1})_0, \\ x'(q) - x_0 &\equiv 0, \quad \text{mod } (\tilde{e}_1)_0, \dots, (\tilde{e}_n)_0, (\tilde{e}_{n+N})_0; \end{aligned}$$

para algunos $\xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+N-1} \in \mathbb{R}$. La primera de estas ecuaciones nos dice cómo acceder hasta $x(q) \in \mathbb{R}^{n+N}$ desde $x'(q) \in \mathcal{L}(v)$ atravesando el *complemento ortogonal* de este último conjunto; la segunda, en cambio, es una expresión que sintetiza la posición de $x'(q)$ en el sistema coordenado intrínseco a $\mathcal{L}(v)$ (*vid* FIGURA 3).

A partir de lo anterior es claro que:

$$(42) \quad \xi_{n+\lambda} = \langle x'(q) - x(q), (\tilde{e}_{n+\lambda})_0 \rangle = \langle x_0 - x(q), (\tilde{e}_{n+\lambda})_0 \rangle; \quad 1 \leq \lambda \leq N-1;$$

donde la segunda igualdad se obtiene considerando que en el triángulo rectángulo $(x(q) x_0 x'(q))$, la hipotenusa $x_0 x(q)$ y el cateto $x'(q) x(q)$ tienen la *misma* componente en la dirección *normal* a $x_0 x'(q)$, $(\tilde{e}_{n+\lambda})_0$ para toda λ . Ahora si p está fijo y q varía en M^n tendremos por (42):

$$\begin{aligned} dx' &= dx + \sum_{\lambda} d\xi_{n+\lambda} (\tilde{e}_{n+\lambda})_0 = dx - \sum_{\lambda} \langle dx, (\tilde{e}_{n+\lambda})_0 \rangle (\tilde{e}_{n+\lambda})_0, \\ d^2 x' &= d^2 x - \sum_{\lambda} \langle d^2 x, (\tilde{e}_{n+\lambda})_0 \rangle (\tilde{e}_{n+\lambda})_0; \end{aligned}$$

en consecuencia $\langle (\tilde{e}_{n+N})_0, d^2 x' \rangle = \langle (\tilde{e}_{n+N})_0, d^2 x \rangle$. Evaluando en parejas de vectores *tangentes* a $x(M^n)$ en $x(p)$, *v.gr.* e_i, e_j :

$$\langle (\tilde{e}_{n+N})_0, d^2 x'(e_i, e_j) \rangle = \langle (\tilde{e}_{n+N})_0, d^2 x(e_i, e_j) \rangle,$$

obtenemos las componentes de $d^2 x'(e_i, e_j)$ y $d^2 x(e_i, e_j)$ en la dirección $(\tilde{e}_{n+N})_0$ (cf. la expresión (39) en la **Definición 3.5**.) El determinante asociado al lado derecho de esta igualdad será, según lo establecido en (38) y (41), la curvatura

de Killing-Lipschitz en $\nu(p)$ multiplicada por $(\pm 1)^n$. Asimismo, del lado contrario, tendremos el determinante de la matriz asociada al *operador de forma* $A_{(\tilde{e}_{n+N})_0}$ de la inmersión x' de la *hipersuperficie* obtenida al proyectar ortogonalmente M^n sobre $\mathcal{L}(v) \cong \mathbb{R}^{n+1}$; *i.e.* la curvatura de Gauss-Kronecker de dicha variedad en $x'(p)$, la cual queda definida salvo por un signo en caso que la dimensión de M^n sea *impar*. Esto concluye la demostración. \square

4. Tres teoremas sobre la curvatura total.

Los resultados principales de [TCI] permiten sacar conclusiones sobre M^n siempre y cuando la curvatura total de ésta sea *pequeña*. Dedicaremos un apartado al enunciado y a la prueba de cada uno de estos resultados.

En lo que resta del presente trabajo haremos uso reiterado de una versión equivalente del siguiente teorema. Registramos aquí ambos sin demostración (una prueba puede consultarse en [GG], pp. 30-36).

Teorema (Sard). *Sean M y N dos variedades de clase \mathcal{C}^1 de la misma dimensión. Si $f : M \rightarrow N$ es una función de clase \mathcal{C}^1 entonces la imagen $f(E)$, donde $E \subseteq M$ es el conjunto de puntos críticos de f , es un conjunto de medida cero en N .*

La equivalencia a la que nos referimos es el siguiente

Corolario (Brown). El conjunto de valores regulares de una función diferenciable de clase \mathcal{C}^1 entre variedades de clase \mathcal{C}^1 de la misma dimensión, $f : M \rightarrow N$, es un conjunto *denso* en N .

* * *

4.1. El primer teorema.

Teorema 4.1 (cf. [TCI], pp. 307, 313 y 314) *Si M^n es una variedad diferenciable de clase \mathcal{C}^∞ , compacta, orientada e inmersa en \mathbb{R}^{n+N} entonces $T(M^n) \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\nu_0 \in \mathbb{S}^{n+N-1}$ fijo. La compacidad de M^n garantiza que la función continua $\langle \nu_0, x(\cdot) \rangle : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, posee al menos un máximo y un mínimo en los cuales $\langle \pm \nu_0, (dx)\cdot \rangle = 0$.

Esto equivale a afirmar que los *puntos críticos* $p \in M^n$ de la función altura $h_{\nu_0} := \langle \nu_0, x(\cdot) \rangle$ son precisamente aquellos donde el espacio tangente $T_p M^n$ es *ortogonal* a ν_0 y como consecuencia de lo anterior, la *preimagen* de cada punto de \mathbb{S}^{n+N-1} bajo el mapeo esférico de la **Definición 1.1**: $\tilde{\nu} : B_\nu \rightarrow \mathbb{S}^{n+N-1}$ tiene cardinalidad mayor o igual que 2. Por otro lado si el máximo y el mínimo coinciden entonces M^n está contenida en un hiperplano perpendicular a ν_0 y cada punto de M^n tiene a ν_0 como vector normal. A partir de la expresión (32) resulta claro que el conjunto de puntos críticos de $\tilde{\nu}$, $E \subseteq B_\nu$, está dado por aquellos puntos donde $G(p, \nu(p)) = 0$. Por el **Teorema de Sard**, la imagen de estos puntos tiene medida cero en \mathbb{S}^{n+N-1} y por lo tanto la integral:

$$(43) \quad \int_{M^n} K^*(p) dV = \int_{B_\nu} |G(p, \nu(p))| dV d\sigma_{N-1},$$

es el volumen de la imagen en \mathbb{S}^{n+N-1} de los puntos regulares en B_ν bajo $\tilde{\nu}$. Por lo señalado anteriormente a propósito de que el mapeo esférico $\tilde{\nu}$ es al menos 2 a 1,

se tiene:

$$\int_{M^n} K^*(p) dV \geq 2c_{n+N-1},$$

y el resultado sigue. \square

El caso donde se presenta la igualdad $T(M^n) = 2$, forma parte del contenido del **Teorema 4.3** que, como veremos, posee implicaciones geométricas profundas.

4.2. El segundo teorema.

Teorema 4.2 (cf. [TCI]. , pp. 307 y 312] *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 4.1, si $T(M^n) < 3$ entonces M^n es homeomorfa a la esfera de dimensión n .*

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis $T(M^n) < 3$ implica la existencia de un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{S}^{n+N-1}$, el cual es de medida positiva y tal que si $\nu_0 \in \Omega$ es un vector unitario entonces la función $\langle \nu_0, x(p) \rangle$ posee *únicamente* dos puntos críticos. De lo contrario, cada punto en \mathbb{S}^{n+N-1} con la sola excepción de un subconjunto de medida cero, tendría preimagen bajo $\tilde{\nu}$ con cardinalidad mayor o igual que tres y siendo $\tilde{\nu}$ al menos 3 a 1 obtendríamos, al igual que en la prueba del **Teorema 4.1**, $T(M^n) \geq 3$.

El **Corolario de Brown** nos dice que los valores regulares de $\tilde{\nu}$ forman un conjunto denso en \mathbb{S}^{n+N-1} . Al combinar este hecho con lo establecido en el párrafo anterior, podemos garantizar la existencia de un vector unitario ν_0 tal que $\langle \nu_0, x(p) \rangle$ tenga sólo dos puntos críticos en M^n , *i.e.* $\nu_0 \in \Omega$, y tal que ν_0 sea un valor regular del mapeo $\tilde{\nu}$. Esto último significa que $G(p, \nu_0) \neq 0$ en cada punto crítico $p \in M^n$ de la función $\langle \nu_0, x(p) \rangle$ y esto a su vez equivale a que $\langle \nu_0, d^2x(p) \rangle$ sea una forma diferencial cuadrática con determinante no nulo (para ver esto último, simplemente obsérvense las expresiones (38) y (40)). En pocas palabras, $\langle \nu_0, x(p) \rangle$ es una función en M^n que tiene *exactamente* dos puntos críticos no degenerados.

El siguiente resultado (cuya prueba puede encontrarse en [TM], p. 25) pone punto final a la demostración.

Teorema (Reeb). *Si M^n es una variedad compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con únicamente dos puntos críticos, ambos de los cuales son no degenerados, entonces M es homeomorfa a la esfera de dimensión n .*

\square

4.3. El tercer teorema. El siguiente resultado puede interpretarse como una caracterización de las hipersuperficies *convexas* entre todas las subvariedades de dimensión fija n , inmersas en un espacio euclidiano de dimensión arbitraria $n+N$.

Teorema 4.3 (cf. [TCI]. , pp. 307, 313-317] *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 4.1, si $T(M^n) = 2$ entonces M^n se encaja como hipersuperficie convexa en un subespacio afín de dimensión $n+1$, $\mathbb{A}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$. Recíprocamente si $x(M^n)$ es una hipersuperficie convexa entonces $T(M^n) = 2$.*

Necesitamos dos lemas:

Lema 4.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.3, M^n está inmersa en un subespacio afín de dimensión $n+1$, $\mathbb{A}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$.*

DEMOSTRACIÓN. En el caso $N = 1$, nada hay que probar. Por consiguiente supondremos que $N \geq 2$ y en primer lugar, mostraremos que M^n está contenido en un hiperplano de \mathbb{R}^{n+N} . Para tal efecto, probaremos que las hipótesis del **Teorema 4.3** y la suposición de que M^n no se encuentra en hiperplano alguno de \mathbb{R}^{n+N} llevan a una contradicción.

Utilizando el **Teorema de Sard** podemos encontrar $(p, \nu_0(p)) \in B_\nu$ tal que $G(p, \nu_0(p)) \neq 0$. Ahora, sea $U \subseteq M^n$ una vecindad abierta alrededor de p y denótese por $\tilde{e}_A : U \rightarrow B$ a una sección local del fibrado B tal que $\tilde{e}_{n+N}(p) = \nu_0$. Cualquier otro vector unitario y normal a M^n en p puede escribirse como $\nu = \sum_r \nu_r \tilde{e}_r(p)$ y por otro lado, (38) nos permite escribir $G(p, \nu) = (-1)^n \det(\sum_r \nu_r \tilde{A}_{ij}^r(p))$.

Fijando p y restringiéndose a vectores normales $\nu(\theta)$ tales que:

$$(44) \quad \nu_{n+N-1} = \sin \theta, \nu_{n+N} = \cos \theta \text{ y } \nu_r = 0, \forall r \neq n+N-1, n+N;$$

tendremos que $G(p, \nu) = f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función polinomial en $\sin \theta$ y $\cos \theta$ y por ende, una función *analítica* de θ . Dada la elección del punto $(p, \nu_0(p)) \in B_\nu$ que se hizo al principio de la argumentación, $f(0) = G(p, \nu_0(p)) \neq 0$; es decir $f(\theta)$ no es idénticamente cero.

A partir de (44) se sigue inmediatamente que $\nu(0) = \nu_0 = \tilde{e}_{n+N}(p)$, $\nu(\pi/2) = \tilde{e}_{n+N-1}(p)$ y que cualquier otro vector $\nu(\theta)$ se encuentra en la copia de $\mathbb{S}^1 \subset \sigma$, donde σ es el plano generado por $\tilde{e}_{n+N}(p)$ y $\tilde{e}_{n+N-1}(p)$. Si H_θ es el hiperplano en \mathbb{R}^{n+N} normal a $\nu = \nu(\theta)$, es igualmente fácil ver que la intersección $H_\theta \cap \sigma$ es un subespacio lineal de dimensión 1; *i.e.* es una recta contenida en σ (*vid* FIGURA 4.a).

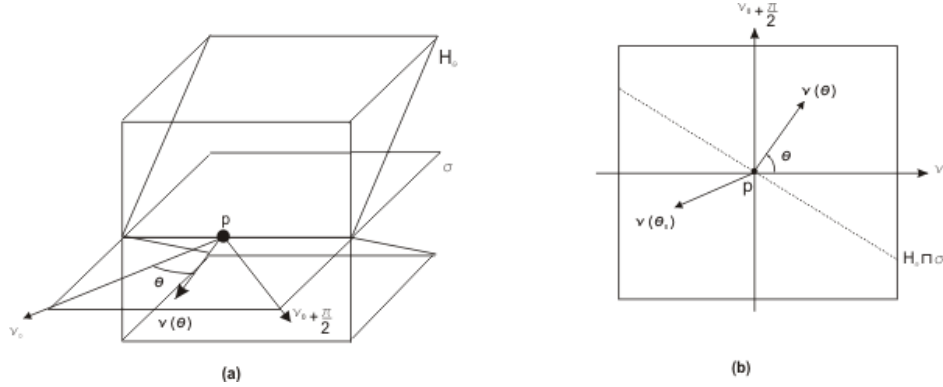


FIGURA 4. El hiperplano H_θ y la intersección $H_\theta \cap \sigma$.

Conforme θ toma valores en \mathbb{R} , el hiperplano H_θ *rota* alrededor del complemento de σ , el cual está generado por $T_p M^n$ y el subespacio $(N-2)$ -dimensional $\text{Span}(\tilde{e}_{n+1}(p), \dots, \tilde{e}_{n+N-2}(p))$. Comencemos con algún valor de θ fijo. Dado que hemos supuesto que $x(M^n)$ *no* está contenido en hiperplano alguno, existe $q_1 \in M^n$ tal que $x(q_1) \notin H_\theta$ y por lo tanto la proyección ortogonal de $x(q_1)$ sobre σ tiene vector de posición —digamos θ_0 —, el cual no se encuentra en la recta $H_\theta \cap \sigma$ (FIGURA 4.b). Sin embargo, cuando $\theta_1 := \theta_0 \pm \pi/2$ entonces $x(q_1) \in H_{\theta_1}$ y de nueva cuenta, por hipótesis, podemos encontrar $q_2 \in M^n$ tal que $x(q_2) \notin H_{\theta_1}$.

Al proyectar $x(q_2)$ sobre σ obtenemos un nuevo vector de posición $\hat{\theta}_0$. Haciendo $\theta_2 := \hat{\theta}_0 \pm \pi/2$ satisfacemos la condición $x(q_2) \in H_{\theta_2}$ y podemos garantizar algo más: $x(q_1) \notin H_{\theta_2}$. Para ver esto, supóngase que $x(q_1) \in H_{\theta_2}$; por lo tanto la expresión del vector obtenido al proyectar ortogonalmente $x(q_1)$ satisface $\theta_0 = \theta_2 \pm \pi/2$ ó, de manera equivalente, $\theta_0 \equiv \hat{\theta}_0 \pmod{\pi}$. Esto equivale a decir que $x(q_2) \in H_{\theta_1}$, lo que es absurdo.

Haciendo una elección adecuada de los signos (\pm) en las expresiones para θ_1 y θ_2 , podemos condensar el contenido de los últimos dos párrafos en la siguiente afirmación (cf. [TCI], p. 313): *Existen hiperplanos $H_{\theta_1}, H_{\theta_2}$ con $\theta_1 < \theta_2$ y puntos $q_1, q_2 \in M^n$ los cuales satisfacen simultáneamente las condiciones: $x(q_1) \in H_{\theta_1}, x(q_2) \in H_{\theta_2}, x(q_1) \notin H_{\theta_2}$ y $x(q_2) \notin H_{\theta_1}$.*

A continuación elíjase $\theta_3 \in \mathbb{R}$ tal que $x(q_1)$ así como $x(q_2)$ se encuentren en lados distintos del hiperplano H_{θ_3} . En vista de que $f(\theta)$ no es idénticamente cero, podemos suponer que $f(\theta_3) \neq 0$ lo cual implica, por la expresión (38), que la restricción $\tilde{\nu}|_W$ es un difeomorfismo *local*, donde $W \subseteq B_\nu$ es un abierto definido alrededor de $(p, \nu(\theta_3))$. Un consabido argumento que apela a la continuidad, nos permite elegir W de modo tal que $\forall (q', \nu') \in W$, $x(q_1)$ y $x(q_2)$ permanezcan en lados distintos del hiperplano ortogonal a ν' en $x(q')$.

La función $\langle \nu', x(\cdot) \rangle : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ posee *al menos* tres puntos en los cuales $\langle \nu', (dx) \cdot \rangle = 0$; a saber: el máximo, el mínimo y q' . Éste es distinto de los otros dos ya que, por construcción, existen puntos de $x(M^n)$ a ambos lados del hiperplano normal a ν' en $x(q')$ y el máximo y el mínimo difieren entre sí, ya que de lo contrario M^n estaría contenida en el hiperplano normal a ν' , situación que habíamos excluido de antemano. Por lo tanto, existe una vecindad, no vacía, $\tilde{\nu}|_W(W) \subseteq \mathbb{S}^{n+N-1}$ cuyos puntos poseen preimagen bajo $\tilde{\nu}$ con cardinalidad mayor o igual que tres. Dado que en cualquier punto de \mathbb{S}^{n+N-1} el mapeo $\tilde{\nu}$ es al menos 2 a 1 (cf. el inicio de la prueba del **Teorema 4.1**) podemos concluir que $T(M^n) > 2$, lo cual resulta una contradicción e implica que $x(M^n)$ está contenida en un hiperplano $\mathbb{A}^{n+N-1} \subset \mathbb{R}^{n+N}$.

* * *

A continuación probaremos que al considerar a $x(M^n)$ como subvariedad inmersa en $\mathbb{A}^{n+N-1} \cong \mathbb{R}^{n+N-1}$ se mantiene la igualdad $T(M^n) = 2$. Para tal efecto consideraremos a M^n como inmersa en \mathbb{A}^{n+N-1} y *utilizaremos la misma letra, x* , para referirnos a esta nueva inmersión. Asimismo, denotaremos por v al vector unitario y normal a \mathbb{A}^{n+N-1} y por \mathbb{S}^{n+N-2} a la correspondiente esfera unitaria: ésta debe pensarse como el *ecuador* de \mathbb{S}^{n+N-1} con v como el *polo norte*.

Si B'_ν es el fibrado de vectores unitarios y normales a $x(M^n)$ en \mathbb{A}^{n+N-1} (cf. la **Definición 2.6**) entonces $B'_\nu \subset B_\nu$ y $\tilde{\nu}(B'_\nu) \subseteq \mathbb{S}^{n+N-2}$. Escribiendo $\tilde{\nu}'$ para la restricción $\tilde{\nu}|_{B'_\nu}$, para probar nuestra afirmación bastará con ver que, salvo un conjunto de medida cero en \mathbb{S}^{n+N-2} , la preimagen bajo $\tilde{\nu}'$ de cualquier punto en dicha esfera posee cardinalidad *exactamente* igual a 2.

De nuevo la prueba es por contradicción: supóngase que existe un subconjunto de medida positiva $A \subseteq \mathbb{S}^{n+N-2}$ cuya preimagen bajo $\tilde{\nu}'$ tiene cardinalidad estrictamente mayor que 2. Así, para cada $\mu \in A$ existen puntos *distintos* $p_1, \dots, p_k \in M^n$, $k \geq 3$, para los cuales $x(p_1), \dots, x(p_k)$ tienen normal *paralelo* a μ , o de manera equivalente:

$$\tilde{\nu}'(p_i, \nu(p_i)) = \lambda_i \mu, \quad \text{para alguna } \lambda_i \neq 0 \text{ y } \forall i = 1, \dots, k;$$

de este modo, todos los puntos en \mathbb{S}^{n+N-1} pertenecientes a circunferencias de radio máximo generadas por ν y los puntos de A tienen preimagen bajo $\tilde{\nu}$ cuya cardinalidad es *mayor* que 2. Obsérvese que al ser A de medida positiva en \mathbb{S}^{n+N-2} , dicho subconjunto de circunferencias resulta a su vez de medida positiva en \mathbb{S}^{n+N-1} ; hemos obtenido nuevamente la contradicción $T(M^n) > 2$.

* * *

Hasta aquí hemos establecido que M^n puede considerarse como subvariedad inmersa de algún hiperplano de dimensión $n + N - 1$ mientras su curvatura total permanece invariante. Haciendo inducción sobre N concluimos que $x(M^n) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, para algún subespacio afín $\mathbb{A}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+N}$, a la vez que $T(M^n) = 2$. \square

Lema 4.5. Sean $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión, de clase \mathcal{C}^2 al menos, de una variedad compacta y orientada y $\nu : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ el mapeo de Gauss. Si $d\nu_p$ es la matriz de Jacobi asociada a la diferencial de ν en p y $U_m := \{p \in M^n \mid \text{rango } d\nu_p = n - m\}$ entonces en caso de que U_m contenga un subconjunto abierto V , la imagen de éste bajo x es *desarrollable* por planos de dimensión m (o m -planos) de manera análoga a una superficie reglada, la cual es desarrollable por “planos” de dimensión 1. Asimismo cualquier punto frontera de U_m cuya imagen bajo x sea simultáneamente un punto límite de un m -plano generador, pertenece a U_m .

Notación. A partir de aquí y durante lo que resta del capítulo, seguiremos la siguiente convención con respecto al recorrido de los índices:

$$1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m; \quad m + 1 \leq a, b, c \leq n; \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in U_m$ un punto interior. La hipótesis sobre el rango de $d\nu_p$ implica que podemos escoger coordenadas locales definidas alrededor de $x(p) \in x(M^n)$, *v.gr.*, t_1, \dots, t_n , tales que si ν es el vector unitario y normal en $x(p)$ entonces $\partial\nu/\partial t_\alpha = 0$ y los vectores $\{\partial\nu/\partial t_\alpha\}$ sean linealmente independientes para todo punto en la vecindad de definición. Por otro lado, al tomar la condición de perpendicularidad asociada naturalmente con ν :

$$(45) \quad \left\langle \nu, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle = 0,$$

y derivarla parcialmente con respecto a t_α obtenemos $\langle \nu, \partial^2 x / \partial t_\alpha \partial t_i \rangle = 0$, relación que es válida *para toda i*.

Restringiendo (45) al subconjunto de índices α y diferenciando ahora con respecto a t_a , la regla del producto interior arroja:

$$\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial t_a}, \frac{\partial x}{\partial t_\alpha} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial^2 x}{\partial t_a \partial t_\alpha} \right\rangle = 0.$$

Dado que el segundo sumando es cero, se sigue que $\langle \partial\nu/\partial t_a, \partial x/\partial t_\alpha \rangle = 0$ y por lo tanto los vectores $\{\partial x/\partial t_\alpha\}$ son ortogonales a los $n - m + 1$ vectores linealmente independientes $\{\nu, \partial\nu/\partial t_a\}$. Las superficies $t_a = t_a^0 = \text{constante}$ son m -planos en \mathbb{R}^{n+1} y la condición $\partial\nu/\partial t_\alpha = 0$ indica que el espacio tangente permanece constante en un m -plano generador. Esto prueba la primera afirmación.

* * *

Para la segunda aseveración del **Lema 4.5** considérese el subfibrado $B' \subset B$ que consiste de todos los marcos e_1, \dots, e_{n+1} tales que los campos e_α permanecen en

los m -planos generadores. De forma análoga al final de § 2, tenemos las ecuaciones estructurales:

$$(46) \quad dx = \sum_i \omega_i e_i, \quad de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j + \omega_{i,n+1} e_{n+1}, \quad de_{n+1} = \sum_j \omega_{n+1,j} e_j;$$

y una nueva aplicación del **Lema 2.3** nos permite escribir:

$$(47) \quad \omega_{i,n+1} = \sum_j A_{ij} \omega_j \text{ con } A_{ij} = A_{ji},$$

(obsérvese que hemos escrito A_{ij} en vez de A_{ij}^{n+1} , para no sobrecargar la notación).

Al igual que observamos en (31) las funciones A_{ij} resultan ser los coeficientes que determinan la segunda forma fundamental de la inmersión x en p , $(d^2x)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$, descrita en términos del marco móvil $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Por otro lado la condición impuesta sobre el fibrado B' equivale a suponer que:

$$(48) \quad \omega_{\alpha,n+1} = -\omega_{n+1,\alpha} = 0;$$

lo cual se desprende directamente de la segunda ecuación en (46) y en consecuencia la matriz (A_{ij}) adquiere la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ab} \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz de $n \times n$ cuyas entradas son cero con excepción, quizá, de aquéllas en un bloque de $(n-m) \times (n-m)$ en la esquina inferior derecha con $D := \det(A_{ab}) \neq 0$. Queremos analizar el comportamiento de D al desplazarnos en uno de los m -planos generadores.

Aplicando la derivada exterior a (48) obtenemos:

$$0 = d\omega_{\alpha,n+1} = \sum_k \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{k,n+1} = \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_{\beta,n+1} + \sum_a \omega_{\alpha a} \wedge \omega_{a,n+1};$$

lo que por (47) y (48) puede abreviarse como $\sum_{a,b} A_{ab} \omega_{\alpha a} \wedge \omega_b = 0$ o bien, aplicando la distributividad de la suma y el producto cuña, $\sum_a A_{ab} \omega_{\alpha a} \wedge \prod_c \omega_c = 0$. En vista de que $\det(A_{ab}) \neq 0$, debe cumplirse $\omega_{\alpha a} \wedge \prod_c \omega_c = 0$ y por consiguiente podemos escribir (cf. el **Lema 2.3**):

$$(49) \quad \omega_{\alpha a} = \sum_b h_{\alpha ab} \omega_b.$$

Por propiedades elementales del producto cuña se sigue que (cf. [Sp], p. 82): $\prod_a \omega_{a,n+1} = \prod_a \sum_c A_{ac} \omega_c = D \prod_c \omega_c$. Aplicando la derivada exterior a esta última expresión conseguimos:

$$(50) \quad \sum_a (-1)^{a-m-1} \omega_{m+1,n+1} \wedge \dots \wedge d\omega_{a,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n,n+1} \\ = dD \wedge \prod_c \omega_c + D \left(\sum_a (-1)^{a-m-1} \omega_{m+1} \wedge \dots \wedge d\omega_a \wedge \dots \wedge \omega_n \right);$$

combinando las ecuaciones estructurales de la **Proposición 2.2** con las expresiones (48) y (49):

$$d\omega_{a,n+1} = \sum_k \omega_{ak} \wedge \omega_{k,n+1} = \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_{b,n+1} \\ d\omega_a = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ka} = \sum_{\alpha,b} h_{\alpha ab} \omega_\alpha \wedge \omega_b + \sum_b \omega_b \wedge \omega_{ba}.$$

Una sustitución directa en (50) devuelve la expresión $0 = dD \wedge \prod_c \omega_c + D(\sum_{\alpha,a} h_{\alpha aa} \omega_\alpha \wedge \prod_c \omega_c)$, la que representamos como:

$$(51) \quad dD + D\left(\sum_{\alpha,a} h_{\alpha aa} \omega_\alpha\right) \equiv 0, \quad \text{mod } \omega_c.$$

Para concluir la prueba sea $p \in M^n$ un punto frontera de U_m tal que $x(p)$ es un punto límite de un m -plano generador L . Dado que cualquier inmersión es localmente un encaje (cf. [GR], p.13), podemos elegir una vecindad W , definida alrededor de p , en la cual $x|_W$ es 1 a 1 y tal que $x^{-1}(L) \subset W$. A continuación elíjase una sección local del fibrado $B, \tilde{e}_1(q), \dots, \tilde{e}_{n+1}(q)$, definida en W y tal que para toda $q \in x^{-1}(L), \tilde{e}_1(q), \dots, \tilde{e}_m(q)$ generen a L . Dado que el espacio tangente no varía en un m -plano generador, dicha sección claramente existe. Por otro lado, si $\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_{ij}$ son las restricciones de ω_i, ω_{ij} , respectivamente, a la imagen de esta sección entonces las 1-formas $\tilde{\omega}_i$ son linealmente independientes e inmediatamente tenemos:

$$\tilde{\omega}_{\alpha a} = \sum_k \tilde{h}_{\alpha ak} \tilde{\omega}_k,$$

con la observación de que los coeficientes $\tilde{h}_{\alpha ab}(q)$ son iguales a los valores de la función $h_{\alpha ab}(q)$, definida en (49), para toda $q \in x^{-1}(L)$. Finalmente sea γ una curva en $x^{-1}(L)$ cuyo punto final es p . A lo largo de γ se satisface la *igualdad*:

$$dD + D\left(\sum_{\alpha,a} h_{\alpha aa} \tilde{\omega}_\alpha\right) = 0.$$

Integrando esta ecuación diferencial se obtiene:

$$D(q) = D_o \exp\left(-\int \sum h_{\alpha aa} \tilde{\omega}_\alpha\right), \quad \forall q \in \gamma \setminus p;$$

donde $D_o \neq 0$ es el valor de D en algún punto fijo de γ . Dado que $D(q)$ es una función continua y $h_{\alpha aa}$ está acotada, concluimos que $D(p) \neq 0$ ó de manera equivalente que $p \in U_m$. Esto concluye la demostración \square

Antes de completar la prueba del **Teorema 4.3** requerimos de una última definición y un lema.

Definición 4.6. Siguiendo las condiciones y notación del **Lema 4.5**, diremos que un hiperplano tangente a $x(M^n), \Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es de *rango* m si Π es tangente en algún punto de $x(U_m)$ y no lo es en punto alguno de $x(U_l), \forall 0 \leq l < m$.

Lema 4.7. El rango de la diferencial de una función diferenciable entre variedades $f : M \rightarrow N$ es una función semicontinua inferiormente; *i.e.* si $\text{rango } df_p = r$ entonces existe un abierto $V \subseteq M$ alrededor de p tal que $\text{rango } df_q \geq r, \forall q \in V$.

La prueba puede encontrarse en [BJ], pp. 44-45. \square

Nota. Obsérvese que un hiperplano tangente de rango 0 *no* separa al conjunto $x(M^n)$ si $T(M^n) = 2$; de lo contrario, un argumento análogo al utilizado en la primera parte de la prueba del **Lema 4.4** nos diría que existe un abierto en \mathbb{S}^n cuyos puntos poseen imagen inversa bajo ν con cardinalidad mayor o igual que tres y así tendríamos $T(M^n) > 2$.

DEMOSTRACIÓN. (**Teorema 4.3**). Sin pérdida de generalidad, identificaremos al subespacio afín $\mathbb{A}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+N}$ con \mathbb{R}^{n+1} y a partir de éste consideraremos al espacio proyectivo real $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ con la topología cociente (cf. [GR], pp. 4 y 5). Demostraremos, en primer lugar, que en cualquier vecindad (en $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$) definida alrededor de un hiperplano tangente a $x(M^n)$, Π , existe un hiperplano tangente de rango *cero*.

Sea $W \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ cualquiera de estas vecindades y supóngase que $x(p)$, $p \in U_m$ es un punto de contacto de Π . Existe una vecindad alrededor de p en M^n , la cual está contenida completamente en U_m o bien existen puntos de U_l , $l < m$, en todo abierto en torno a p (cf. **Lema 4.7**). En ambos casos es posible encontrar un punto $p_1 \in M^n$ tal que el hiperplano tangente a M^n en $x(p_1)$, Π_1 , pertenezca a W y p_1 esté contenido en algún abierto $V \subseteq M^n$, el cual satisface la condición $V \subseteq U_l$, $l \leq m$.

El **Lema 4.5** nos dice que la imagen de V bajo x es desarrollable por l -planos y que el hiperplano tangente a $x(M^n)$ a lo largo de un l -plano generador que pasa por $x(p_1)$ es *precisamente* Π_1 . Si $x(p_2)$, para algún $p_2 \in M^n$, es un punto frontera de dicho l -plano entonces $p_2 \in U_l$ (cf. nuevamente el **Lema 4.5**) y por lo tanto *no* es un punto interior de U_l . En consecuencia, existe en cualquier abierto alrededor de p_2 un subconjunto abierto cuyos puntos se encuentran en U_k , $k < l$, y que contiene a su vez un punto $p_3 \in U_k$ cuyo hiperplano tangente a M^n en $x(p_3)$ está en W . Inductivamente, podemos concluir que W posee un hiperplano tangente de rango cero como se afirmaba.

Esto significa que dada cualquier vecindad de Π en $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, ésta contiene un hiperplano tangente tal que $x(M^n)$ permanece de un *solo lado del mismo* (cf. la **Nota** antecedente) y por continuidad lo mismo debe cumplirse para Π .

Si ν_o es cualquier vector unitario en \mathbb{R}^{n+1} , $\langle \nu_o, x(p) \rangle$ posee un máximo y un mínimo, los cuales deben ser diferentes ya que M^n no está inmersa en m -plano alguno $\forall m \leq n$. Por lo tanto la intersección de todos los semiespacios de \mathbb{R}^{n+1} que contienen puntos de $x(M^n)$ y cuya frontera topológica es un hiperplano tangente a $x(M^n)$ es un conjunto cerrado, convexo, con interior no vacío y $x(M^n)$ en su frontera —a la que denotaremos por ∂X —. Es claro que ∂X es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

Localmente la inmersión $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un encaje, de modo que la topología de M^n y aquella inducida en $x(M^n)$ por \mathbb{R}^{n+1} *coinciden*. En esta situación x resulta ser un homeomorfismo local entre M^n y ∂X y dicha condición implica que $x(M^n)$ es abierto en ∂X . La continuidad de x conlleva a que simultáneamente sea cerrado y que por ende $x : M^n \rightarrow \partial X$ sea además suprayectiva.

La compacidad implica que M^n es un espacio cubriente de \mathbb{S}^n (cf. [dC], p.374) con mapeo cubriente definido por el homeomorfismo local x seguido del homeomorfismo $\partial X \cong \mathbb{S}^n$. Si $n \geq 2$ entonces \mathbb{S}^n es simplemente conexo y por lo tanto x es un homeomorfismo *global* (cf. [dC], p.382). En el caso $n = 1$ la conclusión sigue siendo válida, sólo que la justificación depende del hecho que $T(M^1) = 2$. Hasta aquí únicamente hemos probado la necesidad.

Para demostrar la suficiencia, sea $x(M^n)$ una hipersuperficie convexa. En particular $x(M^n)$ es *localmente* convexa e invirtiendo, quizá, la orientación de M^n podemos suponer que $G(p) \geq 0$. Dado que solamente hay dos vectores unitarios y normales en cada punto tenemos $K^*(p) = 2G(p)$. El grado de la transformación esférica ν está dado por:

$$\deg \nu = \frac{1}{c_n} \int_{M^n} G(p) dV = 1,$$

de modo que $T(M^n) = 2$. □

CAPÍTULO 3

Un teorema más general.

1. Introducción.

El capítulo 1 expuso, detalladamente, la forma en que W. Fenchel resolvió el **Problema** de H. Hopf y culminó en el **Teorema 1.3.1** con la fórmula de Gauss-Bonnet para la curvatura de Killing-Lipschitz; mientras que el capítulo 2 nos permitió asistir a las primeras conclusiones geométricas que se derivaron de la introducción del concepto de *curvatura total* (cf. la **Definición 2.3.2**) y cuyo contenido se encuentra en los **Teoremas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3**. Lo expuesto en la § 2.1 establece lo que a nuestro parecer es un vínculo *metamatemático* entre ambos trabajos: por un lado, estaba el *generalizar* una noción propia de la geometría diferencial de superficies y por otro, *relacionar* los aspectos intrínsecos y extrínsecos del objeto en cuestión.

En todo caso, resultaba natural preguntarse si sería posible establecer una fórmula de tipo Gauss-Bonnet para la curvatura total. Suponiendo que tal fuese el caso ¿qué tipo de información topológica sobre la variedad arrojaría dicha relación? Al parecer la simple introducción del valor absoluto de la curvatura de Killing-Lipschitz en $\nu(p)$ en la **Definición 2.3.1**, si bien salvaba algunas dificultades, estrechaba considerablemente el sendero que debía transitarse en busca de las respuestas a esta última interrogante.

Cerraremos el círculo de nuestro trabajo con algunos de los resultados de [TCII]. En este artículo, S.-s. Chern y R.K. Lashof resolvieron la pregunta anterior y establecieron lo que es a nuestro juicio, la *mejor* de las posibles fórmulas de tipo Gauss-Bonnet para la curvatura total.

2. La curvatura total y la suma de los números de Betti.

Mantenemos la notación del capítulo 2. Comenzaremos con un:

Lema 2.1. Sea $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ una inmersión de una variedad diferenciable, compacta y de dimensión n en el espacio euclidiano de dimensión $n + N$, dada por:

$$p \xrightarrow{x} x(p) := (x_1(p), \dots, x_{n+N}(p)) \quad \forall p \in M^n;$$

si $x' : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N'}$, ($N < N'$), es la inmersión definida por:

$$x'(p) := (x_1(p), \dots, x_{n+N}(p), \overbrace{0, \dots, 0}^{(N'-N) \text{ veces}}),$$

entonces las variedades inmersas $x(M^n)$ y $x'(M^n)$ tienen la misma curvatura total.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar el caso $N' - N = 1$, toda vez que el resultado general sigue por inducción sobre la diferencia $N' - N$.

Si B es el fibrado de marcos $\{e_A\}$ de la **Definición 2.2.6** y escribimos de acuerdo con la expresión (16):

$$\omega_{n+N,A} = \langle de_{n+N}, e_A \rangle, \quad 1 \leq A \leq n+N;$$

entonces la curvatura total puede expresarse como:

$$(52) \quad T_x(M^n) = \frac{1}{c_{n+N-1}} \int_{B_\nu} \omega_{n+N,1} \wedge \dots \wedge \omega_{n+N,n+N-1}.$$

Para ver esto simplemente pártase de la expresión (43) y utilícese la ecuación (35). Recuérdese que de acuerdo con el **Teorema 2.4.1**, la expresión (52) es el volumen normalizado de la imagen en \mathbb{S}^{n+N-1} de los puntos regulares en B_ν bajo $\tilde{\nu}$.

Sea $a \in \mathbb{R}^{n+N+1}$ cualquiera de los dos vectores unitarios y normales a \mathbb{R}^{n+N} . Cualquier vector unitario y perpendicular en $x'(p)$ puede escribirse de manera única como:

$$e'_{n+N+1} = (\cos \theta)e_{n+N} + (\sin \theta)a \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

donde e_{n+N} es el vector unitario en la dirección de la proyección ortogonal de e'_{n+N+1} sobre \mathbb{R}^{n+N} . Si hacemos:

$$(53) \quad \begin{cases} e'_{n+N} & := (\sin \theta)e_{n+N} - (\cos \theta)a \\ e'_s & := e_s, \quad 1 \leq s \leq n+N-1; \end{cases}$$

así como $\phi_{n+N+1,A} := \langle de'_{n+N+1}, e'_A \rangle$ entonces la curvatura total de la variedad inmersa $x'(M^n)$ está dada por:

$$(54) \quad T_{x'}(M^n) = \frac{1}{c_{n+N}} \int_{B'_\nu} \phi_{n+N+1,1} \wedge \dots \wedge \phi_{n+N+1,n+N}.$$

Por otro lado, una aplicación de la *regla de Leibniz*, la primera ecuación de (53) y el que $da \equiv 0$ devuelven:

$$(55) \quad \begin{aligned} de'_{n+N+1} &= (\cos \theta)de_{n+N} + (-\sin \theta)e_{n+N} + (\cos \theta)a d\theta \\ &= (\cos \theta)de_{n+N} - e'_{n+N} d\theta; \end{aligned}$$

de modo que:

$$(56) \quad \begin{aligned} \langle de_{n+N}, e'_{n+N} \rangle &= \langle de_{n+N}, (\sin \theta)e_{n+N} - (\cos \theta)a \rangle \\ &= (\sin \theta)\omega_{n+N,n+N} - (\cos \theta)\langle de_{n+N}, a \rangle \\ &= (\cos \theta)\langle e_{n+N}, da \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

junto con (55) nos permiten escribir:

$$\begin{aligned} \phi_{n+N+1,n+N} &:= \langle de'_{n+N+1}, e'_{n+N} \rangle \\ &= \langle (\cos \theta)de_{n+N} - e'_{n+N} d\theta, e'_{n+N} \rangle \\ &= -d\theta. \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos:

$$\phi_{n+N+1,s} = (\cos \theta)\langle de_{n+N}, e_s \rangle = (\cos \theta)\omega_{n+N,s}, \quad 1 \leq s \leq n+N-1.$$

Sustituyendo lo anterior en (54) y tomando (52) en consideración, tenemos:

$$\begin{aligned} T_{x'}(M^n) &= \frac{c_{n+N-1}}{c_{n+N}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos^{n+N-1} \theta| d\theta \cdot T_x(M^n) \\ &= \frac{2 c_{n+N-1}}{c_{n+N}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+N-1} \theta d\theta \cdot T_x(M^n). \end{aligned}$$

La igualdad $T_{x'}(M^n) = T_x(M^n)$ es una consecuencia inmediata de las siguientes fórmulas:

$$c_k = \frac{2 \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)};$$

lo cual concluye la demostración. \square

Dado que la curvatura total es a todas luces invariante bajo movimientos rígidos de \mathbb{R}^{n+N} , el **Lema 2.1** implica que la curvatura total de la variedad $x(M^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$ no cambia si consideramos a $x(M^n)$ como subvariedad inmersa en cualquier espacio euclidiano que contenga a \mathbb{R}^{n+N} como subespacio afín.

Antes de seguir adelante, estableceremos los siguientes resultados y definiciones cuyas pruebas y detalles pueden consultarse en [TM], pp. 6-8 y 28-31 (recuérdese que los números de Betti fueron mencionados someramente al principio de la prueba del **Teorema 1.3.1**).

Lema (Morse). Sean M^n una variedad diferenciable y $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty(M^n)$. Si $p \in M$ es un punto crítico, no degenerado de f entonces existen coordenadas locales (y_1, \dots, y_n) en un abierto definido alrededor de p , U tales que $y_i(p) = 0 \forall i$ y la identidad:

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \dots + (y_n)^2,$$

se verifica en todo U .

Definición. Al número $0 \leq \lambda \leq n$ que aparece en el **Lema de Morse** se le conoce como el *índice de f en p* y se le define como la máxima dimensión de un subespacio vectorial $V \subseteq T_p M^n$, tal que la forma bilineal y simétrica representada por la matriz *Hessiana de f en p* :

$$\text{Hess}(f)_p := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right);$$

(para alguna elección de coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) alrededor de p) es *negativa definida*.

Teorema (Desigualdades débiles de Morse). Sea M^n una variedad compacta y $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene únicamente puntos críticos no degenerados. Si denotamos por C_λ al número de puntos críticos de índice λ en M y por $\beta^i(M)$ al i -ésimo número de Betti de M^n con respecto a algún campo de coeficientes, entonces las relaciones:

$$(57) \quad \begin{cases} \beta^\lambda(M) \leq C_\lambda \\ \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \beta^\lambda(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda C_\lambda; \end{cases}$$

son válidas para toda λ .

Tenemos así el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.2 (cf. [TCII], p. 5] *Si M^n es una variedad diferenciable, compacta e inmersa en \mathbb{R}^{n+N} y β^i ($0 \leq i \leq n$) es el i -ésimo número de Betti relativo a algún campo de coeficientes entonces la curvatura total de M^n satisface la desigualdad:*

$$(58) \quad T(M^n) \geq \beta(M^n),$$

donde a $\beta(M^n) := \sum_{i=0}^n \beta^i$ suele designársele como el número de Betti total de M^n .

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos considerando al mapeo esférico de la **Definición 2.1.1**: $\tilde{\nu} : B_\nu \rightarrow \mathbb{S}^{n+N-1}$. Por el mismo argumento utilizado en la prueba del **Teorema 2.4.1** para justificar la expresión (43), tenemos que la curvatura total de M^n es el volumen de B_ν bajo $\tilde{\nu}$ y que para casi todo $\nu_o \in \mathbb{S}^{n+N-1}$, *fijo*, la función diferenciable $\langle \nu_o, x(\cdot) \rangle : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ posee únicamente puntos críticos no degenerados.

La primera expresión en (57) implica que el total de puntos críticos satisface $\sum C_\lambda \geq \sum \beta^\lambda(M^n) = \beta(M^n)$. Finalmente, la imagen de B_ν bajo $\tilde{\nu}$ es lo mismo que el conjunto de puntos $\nu \in \mathbb{S}^{n+N-1}$, cada uno contado el mismo número de veces que aparece como punto crítico de la función $\langle \nu, x(\cdot) \rangle$ en M^n . Por lo tanto, la medida de dicha imagen es mayor o igual que $c_{n+N-1} \beta(M^n)$ y en consecuencia $T(M^n) \geq \beta(M^n)$. \square

Nota. El lector cauteloso ya habrá notado que ésta es esencialmente la *misma* demostración que aquélla del **Teorema 2.4.1** con el único ingrediente adicional de la primera de las desigualdades de Morse.

* * *

¿Por qué hemos dicho en la **Introducción** que (58) era la mejor de las fórmulas posibles de tipo Gauss-Bonnet para la curvatura total? La respuesta parece encontrarse en la demostración misma del **Teorema 2.4.1**, ya que allí hemos establecido que:

$$(59) \quad \begin{aligned} \int_{M^n} K^* dV &= \int_{\mathbb{S}^{n+N-1}} \chi_{\tilde{\nu}(B_\nu)} d\sigma_{n+N-1} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n+N-1}} \sum_{\lambda=0}^n C_\lambda(\nu) \cdot \chi_{\mathbb{S}^{n+N-1}}(\nu) d\sigma_{n+N-1}; \end{aligned}$$

donde $\sum_\lambda C_\lambda(\nu)$ es el total de puntos críticos no degenerados en M^n de la función $\langle \nu, x(\cdot) \rangle$ y χ_A es la *función característica* de $A \subseteq \mathbb{S}^{n+N-1}$, la cual se define por:

$$\chi_A(\nu_o) := \begin{cases} 0 & \text{si } \nu_o \notin A, \\ 1 & \text{si } \nu_o \in A, \end{cases} \quad \forall \nu_o \in \mathbb{S}^{n+N-1}.$$

En particular obsérvese que ninguna de las integrales en (59) sufre cambio alguno, si suponemos que hemos retirado de \mathbb{S}^{n+N-1} a la imagen del conjunto de puntos singulares del mapeo esférico $\tilde{\nu}$.

Por lo tanto cualquier fórmula de tipo Gauss-Bonnet para la curvatura total debe proveer alguna expresión o cota para $\sum_\lambda C_\lambda(\nu)$ que no dependa de $\nu \in$

\mathbb{S}^{n+N-1} y libere por consiguiente una constante absoluta —como lo es c_{n+N-1} —, ya sea apelando a la linealidad de la integral, ya a su monotonía.

Ejemplo 2.3. Sea M^n una variedad diferenciable, compacta, conexa, orientada e inmersa en \mathbb{R}^{n+N} . ¿Qué ocurre si $\forall \nu \in \mathbb{S}^{n+N-1}$, con la consabida excepción de un conjunto de medida cero, se tiene $\sum_{\lambda} C_{\lambda}(\nu) = 2$? Por el **Teorema 2.4.3**, M^n se encaja como hipersuperficie convexa en algún subespacio afín $\mathbb{A}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+N}$ y en particular, por el **Teorema 2.4.2**, M^n es homeomorfa a \mathbb{S}^n .

Ejemplo 2.4. Considerando a la función $\langle \nu, x(\cdot) \rangle$ como una función *altura*, cuando $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie cerrada, orientable y de género $g \geq 0$, es fácil establecer la igualdad $\sum_{\lambda} C_{\lambda}(\nu) = 2 + 2g$.

Por otro lado, la descomposición de M^2 como complejo-CW (cf. [V], pp. 53-54) arroja inmediatamente $\beta^0(M^2) = \beta^2(M^2) = 1$ y $\beta^1(M^2) = 2g$. En consecuencia la expresión (59) devuelve:

$$(60) \quad T(M^2) = \beta(M^2) = 2 + 2g.$$

Esta ecuación nos dice que es posible tener como subvariedad inmersa en \mathbb{R}^3 a cualquier superficie cerrada y orientable con curvatura total *mínima*. Sin entrar en detalles, dicho resultado continúa siendo válido para superficies que no son orientables con únicamente *tres* excepciones: $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, la botella de Klein y la suma conexa $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# T^2$. En los dos primeros casos, la imposibilidad de dicha inmersión fue establecida por N.H. Kuiper en 1961 (cf. [K61]); sin embargo el saber si $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# T^2$ admite una inmersión en \mathbb{R}^3 con curvatura total mínima o no, es aún un problema *abierto*.

* * *

El estudio de las inmersiones con curvatura total mínima da lugar al fructífero campo de trabajo formado por las inmersiones *estrechas* y las inmersiones *tensas*, las cuales generalizan el concepto geométrico de *convexidad*. A pesar de su importancia, la vastedad de dichos temas nos obliga a dejarlos fuera del presente trabajo (las definiciones y más detalles pueden consultarse en [K70]).

Bibliografía

- [AH] Alexandroff, P. y Hopf, H.; *Topologie*; Chelsea Publishing Co.; Bronx, Nueva York 1972.
- [A40] Allendoerfer, C.B.; *The Euler number of a Riemannian manifold*; Amer. J. of Math. vol. 62 (1940), 243-248.
- [A43] Allendoerfer, C.B. y Weil, A.; *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*; Amer. Math. Soc. Trans. vol. 53 (1943), 101-129.
- [BJ] Bröcker, T. y Jänich, K.; *Introduction to differential topology*; Cambridge University Press; Cambridge, 1982.
- [SsC] Chern, S.-s.; *A simple intrinsic proof of the generalized Gauss-Bonnet theorem*; Annals of Math. vol. 45 (1944), 747-752.
- [TCI] ——— y Lashof, Richard K.; *On the total curvature of immersed manifolds*; American J. of Math. 79 (1957), 306-318.
- [TCII] ———; *On the total curvature of immersed manifolds II*; Mich. Math. J. 5 (1958), 5-12.
- [dC] do Carmo, M.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*; Prentice-Hall, Inc.; Englewood Cliffs, Nueva Jersey 1976.
- [GR] ———; *Riemannian Geometry*; Birkhäuser Verlag; Boston 1992.
- [Fd] ———; *Differential Forms and Applications*; (Universitext), Springer-Verlag; Alemania 1994.
- [WF] Fenchel, W.; *On total curvatures of riemannian manifolds: I*; The Journal of London Math. Soc. vol. 15 (1940), 15-22.
- [G] Gray, A.; *Tubes* 2ª edición; Birkhäuser Verlag; Alemania 2004.
- [GG] Golubitsky, M. y Guillemin, V.; *Stable Mappings and Their Singularities*; Springer-Verlag New York Inc.; Nueva York, 1973.
- [H25] Hopf, H.; *Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen*; Math. Annalen 95 (1925), 340-367.
- [H25a] ———; *Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen*; Göttinger Nachrichten. Math. phys. Kl. (1925), 131-141.
- [H26] ———; *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*; Math. Annalen 96 (1926), 225-250.
- [K61] Kuiper, N.; *Convex immersions of closed surfaces in \mathbb{E}^3* ; Comm. Math. Helv. 35 (1961), 85-92.
- [K70] ———; *Minimal Total Absolute Curvature for Immersions*; Inventiones Math. 10 (1970), 209-238.
- [TM] Milnor, J.W.; *Morse Theory*; 5ª edición; Princeton University Press; Princeton, Nueva Jersey 1973.
- [N] Nash, J.; *The imbedding problem for Riemannian manifolds*; The Annals of Math. vol. 63 (1956), 20-63.
- [RA] Protter, M.H. y Morrey Jr., C.B.; *A First Course in Real Analysis*; 5ª edición; Springer-Verlag New York Inc.; Nueva York 1997.
- [Sp] Spivak, M.; *Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*; Perseus Books; Reading, Massachusetts 1965.
- [St] Steenrod, N.; *The Topology of Fiber Bundles*; Princeton University Press; Princeton, Nueva Jersey 1951.
- [V] Vick, J.W.; *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology*; Springer-Verlag New York Inc.; Nueva York 1994.
- [W] Warner, F.; *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*; 2ª edición; Springer-Verlag New York Inc.; Nueva York 1986.