UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

FES UNAM ACATLÁN

UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE PARA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL NIVEL BACHILLERATO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

P R E S E N T A

DANIEL CRUZ VÁZQUEZ

ASESOR: DR. ENRIQUE RUIZ-VELAZCO SÁNCHEZ

NAUCALPAN, EDO. DE MÉXICO   OCTUBRE DE 2007

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

FES UNAM ACATLÁN

UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE PARA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL NIVEL BACHILLERATO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

P R E S E N T A :

DANIEL CRUZ VÁZQUEZ

ASESOR: DR. ENRIQUE RUIZ-VELAZCO SÁNCHEZ

NAUCALPAN, EDO. DE MÉXICO OCTUBRE DE 2007

Este trabajo comenzó a escribirse cerca de febrero de 2006. Año y medio después, luego de todas las dificultades, contratiempos y trabas imaginables (bueno, tal vez no todas las imaginables, pero sí muchas de ellas) quedó por fin terminado en la forma que tiene aquí.

El proceso fue largo y sinuoso, y hay que decir que por momentos no se le veían posibilidades de llegar a concluir alguna vez. Escribir, atorarse, volver a escribir, borrarlo todo, empezar otra vez, pasar días enteros frente al teclado de la computadora sin que saliera una sola página –vaya, a veces ni una frase coherente– fue sólo una parte de aquello contra lo que hubo que empujar.

Pero ya ha pasado todo. El trabajo está hecho y aunque no es perfecto (no lo será nunca), tiene ya cierto nivel de decencia que le permitió salir airoso del análisis al que lo sometieron los sinodales designados para tal fin. Hay que agradecérselo a mucha gente, pero principalmente a la Dra. Asela Carlón Monroy, una de las personas que más contribuyeron a la forma que tomaría la tesis; al Dr. Sergio Cruz Contreras, siempre ofreciendo consejos y haciendo observaciones agudas y útiles. Ambos representaron un apoyo sin el cual el trabajo no hubiera pasado del estado embrionario; al Dr. Enrique Ruiz-Velasco Sánchez, que de manera casi heroica aceptó dirigirlo y con ello lo salvó de terminar en el limbo de las tesis; por supuesto, se agradecen también las atinadas observaciones de los sinodales, los Mtros. Juan Bautista Recio Zubieta, Porfirio Morán Oviedo, Francisco de Jesús Struck Chávez y la Dra. Leticia Barba Martín.

Los auspicios de la Dirección General del Personal Académico de la UNAM, a través de una beca del Programa de Formación de Profesores para el Bachillerato Universitario, fueron también fundamentales para la realización del trabajo.

Se aprende mucho haciendo una tesis de éstas, lo que después de todo parece ser lo más importante. Principalmente, se abren los ojos ante el hecho de la propia ignorancia, lo que posibilita comenzar a moverse para hacer algo al respecto.

A mis dos Jaimes y mis dos Beatrices, queridos todos.

Con amor para mi esposa, Sugeidi, que aguantó ausencias y estrés durante el año y medio que estuve sentado escribiendo.

Daniel Cruz Vázquez.
México, D.F., octubre de 2007.

UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE PARA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL NIVEL BACHILLERATO

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Docencia para la Educación Media Superior
presenta el Fís. Daniel Cruz Vázquez

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

En el presente documento se expone el trabajo de tesis que para obtener el grado de Maestro en Docencia para la Educación Media Superior (matemáticas) presenta el autor. El trabajo está centrado en el diseño de un ambiente de aprendizaje –en el sentido de Bransford, Brown y Cocking (1999)– orientado a la comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992) de ciertos aspectos fundamentales de la noción de función, en el primer semestre del bachillerato. Dicho ambiente fue llevado a la práctica frente a grupo con estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades, buscando evaluar hasta qué punto se consiguen comprensiones de tales conceptos matemáticos.

El trabajo se ha organizado en los apartados siguientes:

- En primer lugar, una *Introducción* en la que se habla sucintamente de la temática en torno a la cual se desarrolla la tesis.
- En segundo término se presenta el Capítulo 1, *Antecedentes y planteamiento del problema*, en donde se exponen los antecedentes que llevan al planteamiento del problema sobre el cual se trabaja, así como su importancia.
- El Capítulo 2 viene en tercer lugar. El título de este capítulo es *Revisión de literatura y supuestos aceptados*, y contiene una revisión de la literatura consultada respecto al tema de tesis, especificándose los supuestos teóricos que se han considerado adecuados para ser aceptados en el trabajo.
- Posteriormente se incluye el Capítulo 3, *Propuesta de diseño del ambiente de aprendizaje*. En él se explica la metodología seguida en la realización del estudio, junto con información concerniente a la concepción, diseño y puesta en práctica del ambiente de aprendizaje. También se hace una descripción sucinta de las sesiones de trabajo en las cuales el ambiente fue implementado, para pasar posteriormente al análisis de los resultados encontrados.
- En el Capítulo 4, *Conclusiones y vías de desarrollo*, se discuten algunas conclusiones derivadas de la investigación y con relación al problema planteado en el Capítulo 1 y se proponen algunas posibles maneras de continuar desarrollando el trabajo expuesto.
- Dos anexos aparecen enseguida. El primero de ellos contiene los *Instrumentos de Instrucción* empleados durante la implementación del ambiente de aprendizaje. El segundo está constituido por el *Instrumento de evaluación de la comprensión* aplicado, en forma de *pre-test*, antes de poner en práctica el ambiente, y como *post-test*, al finalizar éste.
- Finalmente, se incluye la *Bibliografía* consultada para la realización de la tesis.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo resultó de interés el aprendizaje con comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992) de funciones lineales, como casos particulares del concepto más amplio de *función*, por parte de estudiantes de primer semestre de bachillerato. El tema parece pertinente dentro del panorama de la educación media superior, sobre todo en una época en la que el aprendizaje con comprensión en matemáticas (Hiebert y Carpenter, 1992; NCTM, 2000) ha cobrado gran importancia.

Como se examinará en el capítulo 1, hay un consenso generalizado en la literatura (Arteaga y Santos, 1999; Bransford, Brown y Cocking, 1999; Brown, Collins y Duguid, 1989; Fernandez, 2005; Kalchman y Fuson 2001; Mason y Spence, 1999; NCTM, 2000; O'Callaghan, 1998) respecto al hecho de que la enseñanza que proporciona el sistema educativo no está logrando que los alumnos obtengan aprendizajes con comprensión de matemáticas (Arteaga y Santos, 1999; Bransford *et al*., 1999; Fernandez, 2005; Kalchman y Fuson 2001; NCTM, 2000) o bien, aprendizajes que resulten duraderos, organizados y coherentes (Brown *et al*., 1989; Mason y Spence, 1999; O'Callaghan, 1998). El concepto de función no queda fuera de esta apreciación ni, más específicamente, el de función lineal (Moschkovich, 1999; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993). Dado que el concepto de función es considerado fundamental para la enseñanza de las matemáticas (Billings y McClure, 2005; Davidenko, 1997; Hines, 2002; Hollar y Norwood, 1999; Kalchman y Fuson, 2001; NCTM, 2000; O'Callaghan, 1998; Schwartz y Yerushalmy, 1992; Tall, McGowen y DeMarois, 2000), resulta deseable la elaboración de propuestas que aborden esta problemática y exploren posibilidades que tiendan al mejoramiento de la situación.

Bajo esta óptica, en este trabajo se diseñó un ambiente de aprendizaje (Bransford et al., 1999) el cual fue puesto en práctica ante un grupo de estudiantes de primer ingreso al Colegio de Ciencias y Humanidades, buscándose averiguar en qué grado el desarrollo de la comprensión mencionada se vio favorecida.

Capítulo 1. Antecedentes y planteamiento del problema.

Una revisión de la literatura especializada en lo concerniente al tema de educación y de educación matemática, muestra no pocos reportes (Arteaga y Santos, 1999; Bransford *et al.*, 1999; Brown *et al.*, 1989; Davis, 2005; Goldenberg 1988; Kline, 1976; Mason y Spence, 1999; Ornelas, 1995) que expresan afirmaciones en el sentido de que la enseñanza de las matemáticas está fracasando en la tarea de lograr aprendizajes con comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992). En cambio, en los estudiantes se observan aprendizajes memorísticos, mecanizados, aislados y carentes de significado, que además se olvidan rápidamente (Arteaga y Santos, 1999; Bransford *et al*, 1999; Kalkman y Fuson, 2001; Kline, 1974; Kline, 1976; Mason y Spence, 1999). Con base en ello, es posible apoyar la percepción predominante en varios sectores de la sociedad (profesores, alumnos, padres de familia): la situación de la educación matemática en el mundo, y nuestro país no es la excepción (Ornelas, 1995), atraviesa una etapa difícil. En un mundo en el que la necesidad de entender y la capacidad de usar herramientas matemáticas son fundamentales (NCTM, 2000; Ornelas, 1995), este escenario llama la atención.

El aprendizaje del concepto de función no queda excluido de las apreciaciones anteriores: varias investigaciones han mostrado que dicho concepto resulta difícil de comprender para los estudiantes de varios niveles, incluido el medio superior (Arteaga y Santos, 1999; Davidenko, 1997; Goldenberg, 1988; Hollar y Norwood, 1999; Kalchman y Fuson, 2001; O'Callaghan, 1998; Tall, 1992; Tall *et al.*, 2000). Siendo que la noción de función se considera central, tanto para el conocimiento matemático como para la educación matemática (Billings y McClure, 2005; Davidenko, 1997; Hines, 2002; Kalchman y Fuson, 2001; NCTM, 1989; NCTM, 2000; O'Callaghan, 1998; Schwartz y Yerushalmy, 1992; Tall *et al.*, 2000), el hecho de que los estudiantes logren sólo comprensiones pobres del concepto revela la necesidad de buscar maneras de contribuir al alivio de este problema.

El concepto de función en matemáticas

De acuerdo a lo afirmado por varios autores (Davidenko, 1997; Hines, 2002; Hollar y Norwood, 1999; Kalkman y Fuson, 2001; O'Callaghan, 1998; Shaaf, 1930; Tall, 1992; Tall *et al.*, 2000), es generalmente aceptado que el concepto de función es uno de los más importantes dentro del conocimiento matemático, al grado de que ha llegado a considerársele la piedra angular de las matemáticas: se trata, en efecto, de una importante idea unificadora en esta disciplina (NCTM, 1989). Las funciones aparecen desde la aritmética, como las operaciones usuales sobre números, en donde una pareja de números corresponde a otro número (como la suma de la pareja); en álgebra, son relaciones entre variables que representan números; en geometría, las funciones relacionan conjuntos de puntos con sus imágenes bajo transformaciones tales como rotaciones y traslaciones; en probabilidad, relacionan eventos con la probabilidad de que ocurran; el cálculo diferencial e integral es el estudio de la variación, y como tal se basa en la noción de función; otro tanto sucede con ramas más avanzadas, que van desde el análisis matemático hasta la teoría de conjuntos, pasando por estudios tan aparentemente disímiles como la variable compleja, la criptografía, entre muchos otros. Para Castelnuovo (1970), este concepto es hilo conductor de las más diversas teorías, después de haber constituido por siglos un poderoso instrumento de análisis y de síntesis. En la apreciación de Castelnuovo, la noción de función es "fundamental porque señala el inicio de la matemática moderna 'clásica', que en él ha encontrado las raíces y la linfa para desarrollarse" (Castelnuovo, 1970, p. 165).

Históricamente, la idea de función se ha desarrollado lentamente a lo largo de un prolongado periodo de tiempo. De hecho, Kleiner (1989) hace retroceder sus orígenes hasta hace 4000 años, de los cuales "3700 consistieron de anticipaciones" (p. 282). De acuerdo con Atkinson (2002), el concepto comenzó a emerger del estudio del movimiento, que no es sino un ejemplo particular de cambio. Los antiguos griegos estuvieron muy interesados en la idea de cambio, pero curiosamente el movimiento no les pareció un ejemplo interesante. Posiblemente por ello nunca llegaron a desarrollar la idea de función.

Siglos más tarde, el estudio del movimiento de los cuerpos celestes llevó a la publicación del Almagesto de Ptolomeo (alrededor del año 150 de nuestra era), el cual contiene "muchos ejemplos de tablas en las que se muestran relaciones funcionales entre conjuntos de cantidades" (Katz, citado en Atkinson, 2002). Sin embargo, Ptolomeo estaba interesado sólo en la aplicación de sus observaciones, por lo que tampoco llegó a abstraer de sus tablas la propiedad que tenían en común: representar funciones.

Fue hasta la edad media, coincidiendo con la proliferación de los primeros relojes mecánicos y por consiguiente la capacidad de medir el tiempo con cierta precisión (Atkinson, 2002), que los estudiosos comenzaron a obtener resultados de más trascendencia respecto al estudio del movimiento. Oresme (1323-1382) representó el movimiento geométricamente, obteniendo una representación de la relación funcional del tiempo con la velocidad. Por desgracia, los pensadores medievales se encontraban en el extremo opuesto a Ptolomeo: al no preocuparles nada más que la especulación abstracta, nunca vieron que en sus estudios había más que pura filosofía escolástica.

Las funciones ya se encontraban implícitas en el trabajo de Galileo (1564-1642) sobre el movimiento, así como en la geometría analítica de Descartes (1596-1650). Sin embargo, la posibilidad de operar con ellas se relacionaba inevitablemente con sus expresiones concretas: con los medios de la geometría o con expresiones analíticas simbólicas. Por su parte Newton (1642-1727) concibió sus *fluyentes* como cantidades dependientes del tiempo (o de alguna otra cantidad que se relacionara directamente con el tiempo, o bien, que "fluyera" uniformemente); además, sus *fluxiones* pueden interpretarse hoy como las derivadas de los fluyentes con respecto al tiempo. Newton incluso introdujo la notación $\dot{y}$, donde y es el fluente y $\dot{y}$ es la fluxión (Newton, 2005, p. 82).

Fue Leibniz (1646-1716) quien primero usó la palabra función (de acuerdo con Ocáriz, 1997, el término era *functio-onis*, voz latina que se traduce por *función*) usando también la simbología correspondiente a todos los segmentos relacionados con una curva y tales que su longitud depende de la posición de un punto sobre la curva (ordenadas, segmentos de tangentes, subtangentes, normales, subnormales).

Para esta época, el análisis matemático ya había alcanzado un estado de desarrollo tal que sus éxitos prácticos impulsaron una mayor atención al concepto de función. Hacia 1718 Jo. Bernoulli propuso que una función era una expresión analítica, más o menos en la misma línea que Euler (1707-1783) quien definió "una función de una cantidad variable es una expresión analítica, compuesta de alguna manera por esta cantidad variable y números o cantidades constantes" (Ríbnikov, 1987, p. 220). Buscando mayor generalidad, Euler admitía que el argumento tomara tanto valores reales como imaginarios; sin embargo su definición se veía seriamente limitada por el requerimento de poder expresar analíticamente una función, lo cual además dejaba de lado el concepto general de función como correspondencia.

Para 1755, problemas físico-matemáticos (como el del llamado oscilador armónico simple o cuerda vibratoria, para usar los términos corrientes en esos tiempos) llevaron al mismo Euler a conceder que era posible la existencia de funciones que no pudieran expresarse analíticamente, con lo que llegó a una nueva definición:

> "Si, de algún modo, varias cantidades dependen de otras de tal manera que si éstas últimas se cambian las primeras también sufren cambios, dichas primeras cantidades se llaman funciones de las últimas […] Si, por tanto, *x* denota una cantidad variable, todas las cantidades que dependen de *x* de cualquier maneta o son determinadas por ella, se llaman sus funciones" (Ocáriz, 1997, p. 4)

La discusión sobre la naturaleza de las funciones continuó durante todo el siglo XVIII. Para la primera década del XIX, Lacroix estableció que

> "Cada cantidad, el valor de la cual depende de una o varias cantidades, se denomina función de éstas últimas independientemente de que sepamos o no por qué operaciones es necesario atravesar para pasar de éstas últimas a la primera" (Ríbnikov, 1987, p. 229)

En la primera mitad del siglo XIX Fourier y Lobachevski proporcionaron definiciones de algún modo análogas; Lobachevski, por ejemplo, escribió en 1834:

> "El concepto general exige llamar función de *x* a un número, el cual se da para cada *x* y paulatinamente varía junto con *x*. El valor de la función pede estar dado o por una expresión analítica, o por una condición, la cual ofrece el medio de expresar todos los números y elegir a uno de ellos, o, por último, la dependencia puede existir y quedarse desconocida" (Ríbnikov, 1987, p. 229)

En 1837, Dirichlet identificó la propiedad esencial de unicidad: "*y* es una función de *x* cuando a cada valor de *x* en un intervalo dado corresponde un único valor de *y*" (Kline, 1972, p. 950). Con el tiempo, se hizo evidente que *x* y *y* no tenían que ser números. El paso de los años llevó a la definición de Bourbaki (1939), que concibe a las funciones como subconjuntos del producto cartesiano de dos conjuntos.

Este desarrollo histórico lleva a que, en la actualidad, pueda hablarse de la existencia de dos concepciones de lo que es una función. Por un lado, se tiene la "concepción más fundamental" (Sierpinska, 1988, citada en Tall, 1992, p. 497) de *función como una relación entre dos magnitudes* –por ejemplo, la definición de Granville, Smith y Longley (1991, p. 12): "Cuando dos variables están relacionadas de modo que el valor de la primera queda determinado cuando se da el valor de la segunda, entonces se dice que la primera variable es función de la segunda"–, hasta las definiciones modernas que conciben a las *funciones como subconjuntos del producto* *cartesiano de dos conjuntos* –tal es la incluida en Tall (1992, p. 497): "Sean A y B conjuntos, y sea AxB el producto cartesiano de A y B. Un subconjunto f de AxB es una función si, siempre que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son elementos de f, y $x_1 = x_2$, entonces $y_1 = y_2$".

Esta evolución de la manera de concebir las funciones, y de los aspectos asociados a ellas –entre los que se encuentran *operación*, *correspondencia*, *relación*, *transformación*…– revela circunstancias históricas y campos en los cuales las funciones han aparecido. Entre estos se encuentran las matemáticas, la lógica, la física (Castelnuovo, 1970), lo cual vuelve a hablar de la flexibilidad y poder del concepto: ya de por sí importante en matemáticas, no se circunscribe a ése ámbito, sino que se extiende con facilidad y permea otras disciplinas.

Así pues, son numerosos los campos –física, economía, informática,…– para los cuales la idea de función resulta central: sin ella, la aspiración científica de describir, entender y predecir los fenómenos del mundo que nos rodea resultaría prácticamente imposible de alcanzar. Que las funciones trasciendan los dominios de la matemática no resulta sorprendente, si se considera que prácticamente todos los problemas científicos tratan con ciertas cantidades y que las relaciones entre ellas son de naturaleza funcional (Granville *et al*., 1991, p. 12).

Las funciones en educación matemática.

El reconocimiento de las funciones como fundamentales dentro de la disciplina matemática se ha visto reflejado en una correspondiente importancia del concepto de función en la educación matemática (Billings y McClure, 2005; Davidenko, 1997; Hines, 2002; Kalchman y Fuson, 2001; NCTM, 1989; NCTM, 2000; O'Callaghan, 1998; Schwartz y Yerushalmy, 1992; Tall *et al*., 2000). Al considerar que las funciones –vistas como relaciones especiales de interdependencia entre dos o más variables– aparecen en numerosos aspectos de la vida cotidiana (pensemos en funciones del tipo cantidad-costo, distancia-tiempo de recorrido, tiempo de calefacción-temperatura del agua, etc.), y en gran cantidad de aplicaciones dentro del quehacer profesional en campos diversos (física, economía, informática, química, medicina, las ingenierías, etc.), la importancia que se les concede en el terreno de la educación matemática se vuelve más clara. El hecho de que, en mayor o menor medida, el concepto de función esté involucrado en varias de las ramas de las matemáticas (lo encontramos en el estudio del cálculo diferencial e integral, la estadística, el álgebra, así como en ramas más avanzadas como el análisis matemático, los estudios sobre variable compleja y la teoría de conjuntos) refuerza estas ideas.

Siendo las funciones, como se comenta líneas arriba, un hilo conductor para las matemáticas y otras disciplinas (Castelnuovo, 1970), resulta de interés buscar estrategias didácticas que ayuden a lograr que los estudiantes *comprendan* qué es una función. Ahora bien, quizá el énfasis no debería colocarse en la concepción moderna, conjuntista de función (Tall, 1992). Aparentemente las definiciones modernas, si bien son poderosas herramientas en el currículum matemático formal, no contribuyen a que los estudiantes de bachillerato desarrollen una comprensión profunda de las funciones como procesos de covariación de variables (Hines, 2002). Para Sierpinska (1988, citada en Tall, 1992, p. 497), si esta concepción no logra desarrollarse adecuadamente, las distintas representaciones de una función pierden significado y se perciben como aisladas unas de otras.

Tomando en cuenta estas consideraciones, en el presente trabajo se ha optado por poner el acento en la concepción de función como interrelación de variables. De este modo, se espera contribuir al desarrollo de una comprensión de lo que, bajo esta perspectiva, es una función. En particular, interesa la comprensión de funciones lineales.

Dificultades con la enseñanza de funciones lineales

Existen muchos tipos de funciones: polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas, elípticas, entre otros. La función gamma de Euler, por ejemplo, se define como la integral $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ y para enteros positivos, puede considerarse una generalización de la función factorial: $\Gamma(n)=(n-1)!,\ \ n\in \mathrm{Z}^+$.

Dentro de todos estos tipos, en este proyecto interesan de modo particular las llamadas funciones lineales. Ellas suelen ser las primeras a las que se enfrentan los estudiantes en nuestro sistema educativo, como puede verificarse en el Plan y Programas de Estudio de la SEP (1993) y en los Programas de Estudios Actualizados del CCH (s/f). Matemáticamente, puede decirse que se trata de una clase 'elemental' de funciones, por lo que se estaría tentado a afirmar que, por ello, su enseñanza no debería ofrecer dificultades mayores.

Sin embargo, es interesante notar que, de acuerdo a la literatura, aspectos que para el experto son triviales resultan ser fuentes importantes de dificultad para el estudiante (Moschkovich *et al.*, 1993). Éste pareciera ser el caso para el concepto de función (Arteaga y Santos, 1999; Davidenko, 1997; Goldenberg, 1988; Hollar y Norwood, 1999; Kalchman y Fuson, 2001;

O'Callaghan, 1998; Tall, 1992; Tall *et al*., 2000), y en particular, para el de función lineal (Moschkovich, 1999; Moschkovich *et al*., 1993). De hecho, ejercicios de evaluación como la *National Assesment of Educational Progress* del año 1990 (referida en Moschkovich *et al*., 1993) así como evaluaciones diagnósticas aplicadas a estudiantes de primer ingreso en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (López, 2006), muestran un desempeño más bien pobre por parte de estudiantes de nivel medio superior, en tareas relacionadas con la comprensión de lo que es una función lineal. En ambos casos, los jóvenes evaluados habían estudiado las funciones lineales en niveles anteriores: la *Nacional Assesment of Educational Progress* se aplica a alumnos del doceavo grado, en un curriculum que introduce estas funciones desde antes del noveno grado; en el caso de los estudiantes de primer ingreso del CCH, el Plan y Programas de Estudio de la SEP (1993), incluye a las funciones lineales desde el tercer grado de secundaria.

Considérese ahora que, en los Programas de Estudios Actualizados del CCH (s/f), el estudio de la función lineal se incluye en el curso de Matemáticas I –en el primer semestre–, presentándose como una base para el estudio de la función cuadrática en el curso de Matemáticas II; para Matemáticas III los estudiantes se encuentran con el estudio de la recta y su ecuación cartesiana, analizando entre otras cosas los conceptos de pendiente y ordenada al origen –los cuales pueden ser más sencillos de comprender si previamente se ha desarrollado una comprensión de las representaciones gráfica y algebraica de una función lineal (NCTM, 2000). En el siguiente curso, Matemáticas IV, los alumnos estudian funciones polinomiales, racionales y con radicales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales; sin bases sólidas que cimenten estos nuevos conocimientos (bases que en el CCH comienzan a desarrollarse desde el curso de Matemáticas I, con el estudio de la función lineal) los estudiantes se encontrarán con serias dificultades al enfrentarse a estas nuevas funciones.

El cálculo diferencial e integral y la estadística son campos que descansan fuertemente en la idea de función, y que se enseñan en los últimos semestres del CCH. A ese nivel, los futuros ingenieros, arquitectos, actuarios, físicos, matemáticos, entre otros, deben contar ya con una comprensión sólida del concepto de función y, por supuesto, del de función lineal. De no ser éste el caso –como parecen mostrarlo la evidencia empírica y las evaluaciones relacionadas con el tema (Moschkovich *et al*., 1993; López, 2006)– resultaría difícil esperar un desempeño aceptable de los estudiantes no sólo en las materias mencionadas, sino también en sus estudios posteriores.

Las funciones lineales no son importantes únicamente dentro de la educación matemática. Juegan también un papel importante en campos como el de la educación en Física: fenómenos como el movimiento de un objeto puntual a velocidad constante, o la fuerza que ejerce un resorte sobre un objeto fijo a uno de sus extremos, pueden describirse utilizando una función lineal; una adecuada interpretación matemática de los parámetros *a* y *b* (en $y = ax + b$) puede ayudar a los estudiantes a comprender tanto el modelo matemático utilizado para la descripción de situaciones de este tipo (contempladas dentro el programa de estudios de física en el CCH), como sus implicaciones físicas.

El problema

La situación es preocupante dados los argumentos vertidos: las funciones en general, y las funciones lineales en particular, parecen resultar complejas y difíciles para los estudiantes, quienes consecuentemente muestran una comprensión limitada sobre ellas (Arteaga y Santos, 1999; Davidenko, 1997; Goldenberg, 1988; Hollar y Norwood, 1999; Kalchman y Fuson, 2001; López, 2006; Moschkovich, 1999; Moshckovich *et al*., 1993; O'Callaghan, 1998; Tall, 1992; Tall *et al*., 2000). La trascendencia del problema queda expuesta con mayor claridad al considerar que se trata de conceptos que permean parte importante del currículum de educación matemática.

Tomando en cuenta dicha situación, puede derivarse una primera cuestión: dado que la literatura parece mostrar que los estudiantes de nivel medio superior cuentan con una comprensión muy limitada respecto a aspectos fundamentales de la noción de función, y particularmente de funciones lineales, ¿cómo diseñar ambientes de aprendizaje que favorezcan en los alumnos el desarrollo de comprensiones más desarrolladas sobre estos conceptos? El conseguir que los alumnos *comprendan* un concepto matemático ha sido el foco de atención de numerosos trabajos: uno de ellos es el relacionado con la enseñanza con significado de Sigurdson y Olson (1992), en donde muestran que dicha enseñanza con significado es de ayuda para conseguir mejores comprensiones de las matemáticas en estudiantes de nivel medio superior, en comparación con las observadas en clases con diseños de instrucción tradicionales; otro trabajo en la misma dirección es el dedicado a la enseñanza para la comprensión de Hiebert y Carpenter (1992), la cual se enfoca a la construcción y consolidación de redes de significados internos por parte de los aprendices.

Considerando la comprensión desde el punto de vista de Hiebert y Carpenter (1992), en este proyecto se plantea el diseño de un ambiente de aprendizaje siguiendo lineamientos establecidos por Bransford *et al*., (1999), enfocado hacia la comprensión sobre ciertos aspectos de la noción de función –con énfasis en funciones lineales– en alumnos del primer semestre de bachillerato, así como su posterior implementación en un grupo de estudiantes de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades. Se desprende entonces, el problema en los términos siguientes:

¿Hasta qué punto la implementación de un ambiente de aprendizaje orientado a la comprensión de aspectos de la noción de función, con particular énfasis en funciones lineales, se ve reflejada en el desarrollo de una comprensión de tales conceptos, en estudiantes de primer semestre de bachillerato?

Capítulo 2. Revisión de la literatura y supuestos aceptados.

Aprendizaje con Comprensión

Hiebert y Carpenter, en su artículo de 1992, *Learning and teaching with understanding*, proponen un modelo de aprendizaje con comprensión, que ha parecido adecuado para este trabajo. De acuerdo al modelo, para tratar con algún conocimiento es necesario representarlo de alguna manera. Las representaciones pueden ser *externas*, para fines de comunicación: lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos, objetos físicos,… Por otro lado, para pensar en determinado conocimiento o idea necesitamos representarlo *internamente*. Estas representaciones internas constituyen entidades mentales desarrolladas por el individuo que permiten a la mente operar sobre ideas y conocimientos.

Hiebert y Carpenter (1992) entienden la comprensión en términos de *conexiones* entre representaciones internas de conocimientos: un nuevo conocimiento adquirido por un individuo será representado internamente por éste; dicha representación puede quedar incluida en una red de representaciones de conocimientos previos, la cual ha ido desarrollándose a lo largo de la vida de la persona. Se dice que hay comprensión cuando el conocimiento nuevo queda efectivamente incluido en una de estas redes, a través de conexiones numerosas y robustas; la comprensión también se desarrolla al generarse nuevas relaciones entre informaciones previamente inconexas. Mientras más extensas sean las redes, más fuertes y numerosas las conexiones, mayor será el grado de comprensión de un concepto dado.

Del modelo descrito se desprende que las redes internas se describan mejor "como dinámicas que como estáticas (…) sufren realineaciones y reconfiguraciones constantes al construirse nuevas relaciones" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 70). Así, la comprensión puede entenderse como un proceso dinámico en constante desarrollo. De la misma manera, la consideración cuidadosa de los conocimientos previos de un alumno es fundamental para lograr aprendizajes con comprensión, pues en caso de que las redes previas con las que cuente un individuo no permitan la inclusión de los nuevos conocimientos, se obtendrán comprensiones de bajo nivel; la comprensión será igualmente limitada en el caso de que los nuevos conocimientos sí logren incluirse en una red previa, pero las conexiones sean poco numerosas y débiles. Otra idea que se desprende del modelo es la posibilidad de obtener comprensiones erróneas y sin embargo bien arraigadas en el individuo, cuando las conexiones que éste realiza no son las adecuadas.

Es importante mencionar también que Hiebert y Carpenter (1992) afirman que una de las consecuencias de la comprensión, es una mejora en la habilidad para transferir conocimientos a nuevas áreas.

De acuerdo a Hiebert y Carpenter (1992), lograr aprendizajes con comprensión requiere que el profesor sea capaz de lograr que sus estudiantes hagan conexiones entre conocimientos, para construir redes de representaciones internas tan extensas y robustas como sea posible. Uno de los caminos, manejado por los autores, por el cual se puede tratar de llegar a este objetivo, es un enfoque denominado "*abajo-arriba*", en el cual se busca conectar los nuevos conocimientos con las redes previas que ya poseen los estudiantes. Este enfoque es el que, hasta el momento, se considera más adecuado para servir de guía del presente trabajo. De acuerdo con ello, para que puedan desarrollarse comprensiones profundas es de vital importancia que en el diseño del ambiente se tengan en consideración los conocimientos previos de los estudiantes.

Si la enseñanza para la comprensión trata de fomentar la construcción de conexiones de representaciones internas, una cuestión de importancia es en qué grado la instrucción debería explicitar dichas conexiones. La cuestión se divide en dos partes: ¿sería conveniente que las conexiones se hagan explícitas a los estudiantes? y ¿cuáles son las conexiones específicas que deberían enseñarse? Hiebert y Carpenter (1992) reportan un consenso general respecto a la primera pregunta, en cuanto a la idea de que se debería promover que los alumnos discutan y reflexionen sobre conexiones entre ideas matemáticas. No se quiere decir que el profesor deba tener en mente ciertas conexiones para discutirlas con el grupo: los estudiantes podrían hablar sobre las conexiones que ellos mismos han formado. La segunda pregunta acarrea supuestos como el de que existen conexiones críticas en la obtención de aprendizajes con comprensión. La literatura proporciona ciertos lineamientos (Moschkovich *et al.*, 1993; NCTM, 2000) en el sentido de que sí hay tales conexiones críticas; se sugiere, por ejemplo, buscar que los estudiantes puedan hacer conexiones entre varias representaciones externas de una función (gráfica, algebraica, tabular, verbal), entre diferentes perspectivas del concepto de función, y que sean capaces de distinguir cuáles son más convenientes en una situación dada. Se considera que estos lineamientos serán de utilidad en nuestro trabajo sobre funciones, en particular funciones lineales. Del mismo modo, se considera que los lineamientos señalados también serán de ayuda en la tarea de evaluar el grado de comprensión alcanzado por un individuo en un tópico determinado, como se explicará en el apartado *Diseño de los instrumentos para la evaluación de la comprensión. Condiciones de su aplicación*.

La comprensión se entenderá entonces como la formación de redes extensas de representaciones internas, caracterizadas por conexiones robustas entre conocimientos previos y nuevos en un individuo; esta concepción es válida para el caso particular de la comprensión de ciertos aspectos de la noción de función, y en particular de funciones lineales, la cual se concebirá como la formación de conexiones entre diversas representaciones internas sobre los mencionados conceptos. Una manera de conseguir conexiones de este tipo es el paso entre diferentes representaciones de los mismos (Arteaga y Santos, 1999; Davis, 2005; Hines, 2002; Kalkman y Fuson, 2001; McGowen et al., 2000; Moschkovich, 2004; Moschkovich *et al*., 1993; NCTM, 1989; NCTM, 2000; O'Callaghan, 1998) así como la utilización de modelos extraídos de situaciones prácticas para su introducción al salón de clases (Hines, 2002; Orton, 1990; Sigurdson y Olson, 1992; Simon, 1995) y de representaciones que puedan servir de raíces cognitivas – conceptos de "anclaje" que puedan ser fácilmente comprendidos por el estudiante, y que formen la base sobre la cual sea posible construir una teoría más amplia (Tall, 1992) – adecuadas para que los aprendices construyan una imagen conceptual rica de las nociones de interés (McGowen *et al*., 2000; Tall *et al*., 2000).

En la literatura (Moschkovich *et al*., 1993) se resaltan, además del paso entre representaciones, las conexiones entre las perspectivas de objeto y de proceso de una función. Se afirma que una función se concibe como *proceso* cuando se piensa en ella en términos de una "receta numérica" (Schwartz y Yerushalmy, 1992), en la cual se toman unos números para producir otros que pueden o no ser diferentes a los de entrada, o cuando se le concibe como una transformación dinámica de ciertas cantidades de acuerdo con algún medio reproducible, que dada la misma cantidad original, siempre producirá la misma cantidad transformada. Por otra parte, se piensa en una función como *objeto* cuando el individuo es capaz de efectuar acciones sobre ella, en general, acciones que la transforman (Breidenbach *et al*., 1992, citados en Moschkovich *et al*., 1993, p. 72).

Diseño de ambientes de aprendizaje

El diseño de ambientes de aprendizaje[1] orientados hacia la comprensión ha sido retomado por varios autores. Por ejemplo, el trabajo de Díaz y Hernández (2002), en donde se aboga por una enseñanza constructivista al afirmar que

> "enseñar no es sólo proporcionar información, sino ayudar a aprender, y para ello el docente debe tener un buen conocimiento de sus alumnos; cuáles son sus ideas previas, qué son capaces de aprender en un momento determinado, su estilo de aprendizaje (…) La clase no puede ser ya (…) unidireccional, sino interactiva, donde el manejo de la relación con el alumno y de los alumnos entre sí forme parte de la calidad de la docencia misma" (Díaz y Hernández, 2002, p. 6)

En la misma tónica que Díaz y Hernández se expresa Carranza (2002), al escribir que la actividad del alumno es condición necesaria para un proceso educativo exitoso.

Las sugerencias de Broekman y Scott (1999) respecto a la necesidad de un equilibrio entre aprendizajes dependiente e independiente del profesor, al tomar en cuenta que los estudiantes necesitan ayuda (aprendizaje dependiente) para construir un sustrato sólido sobre el cual, a su vez, puedan construir (aprendizaje independiente) una relación entre conocimiento y comprensión; así como las aportaciones de Leikin y Zaslavsky (1999) sobre la pertinencia de utilizar diseños de aprendizaje cooperativo en la enseñanza matemática, también son cercanas al diseño de ambientes de aprendizaje orientados a la comprensión

Otro modelo para el diseño de ambientes de aprendizaje orientados a la comprensión es el propuesto por Bransford *et al.* (1999); su modelo es el que se ha considerado más adecuado para diseñar el ambiente de aprendizaje propuesto en este trabajo. Los lineamientos especificados por estos autores se detallan a continuación.

Bransford *et al.* (1999) coinciden con Hiebert y Carpenter (1992) en cuanto a la pertinencia de tomar en consideración los conocimientos previos de los alumnos al diseñar la instrucción sobre un tópico dado. Estos autores consideran que en el diseño de un ambiente de aprendizaje deben contemplarse cuatro perspectivas, que denominan *centradas en el aprendiz*, *en el conocimiento*,

---

[1] En términos generales se considera al *ambiente* como la suma de elementos que se encuentran alrededor de un individuo o de un proceso. En tal sentido, el estudiante, el maestro, el aula de clase, el conocimiento, la metodología y otros factores que toman parte, activa o pasiva, en el desarrollo del acto educativo, constituyen los referentes básicos de un *ambiente de aprendizaje*.
Bransford *et al.* (1999), al hablar del *diseño de ambientes de aprendizaje*, lo harán considerando cuatro perspectivas: centrada en el aprendiz, centrada en el conocimiento, centrada en la evaluación y centrada en la comunidad.

en la evaluación y *en la comunidad*. Estas se desarrollan por separado a continuación; sin embargo, debe tomarse en cuenta que de acuerdo a Bransford *et al*. (1999), las cuatro perspectivas son inseparables y deben apoyarse unas a otras.

Desde la *perspectiva centrada en el aprendiz*, es importante prestar atención a los conocimientos que los aprendices traen al entorno educacional; éstos pueden servir como cimientos sobre los cuales es posible construir "puentes hacia nuevas comprensiones" (Duckworth, 1987, en Bransford *et al*., 1999, p. 124).

Para Bransford *et al.* (1999), limitarse a una perspectiva centrada en el aprendiz no es suficiente si lo que se busca con el diseño del ambiente de aprendizaje es promover la comprensión de conocimientos. Estos autores reconocen la necesidad de que el diseño contemple cuerpos de conocimiento bien estructurados y organizados; esta perspectiva, la *centrada en el conocimiento*, hace énfasis en la conveniencia de dar a los conceptos una estructura coherente y sólida, que favorezca la comprensión y la transferencia de lo que se aprende a nuevos escenarios.

Por otro lado, está la *perspectiva centrada en la evaluación*; de acuerdo a Bransford *et al* (1999), la evaluación debe ser congruente con los objetivos de aprendizaje establecidos: así, en un ambiente de aprendizaje diseñado para la comprensión deberá contarse con instrumentos de evaluación que permitan, precisamente, inferir el grado de comprensión que se haya logrado en los aprendices. Bransford *et al*. señalan también que, en lo posible, debe evitarse que la evaluación resulte disruptiva respecto a la instrucción. Por otra parte, debe favorecerse lo más posible la presencia de retroalimentación que permita la reflexión sobre lo aprendido, sobre los errores cometidos, las posibilidades de corregirlos y de no cometerlos nuevamente.

De acuerdo a la posición de Bransford *et al*, (1999), es necesario tener presente también una *perspectiva centrada en la comunidad* del salón de clases; al respecto, estos autores destacan la importancia de que el diseño del ambiente de aprendizaje contemple normas que fomenten un ambiente en el que los individuos aprendan unos de otros, mientras se esfuerzan continuamente por mejorar. Estas normas deberían tender hacia una valoración del aprendizaje a través del error, así como de la búsqueda de una comprensión de los conocimientos.

No debe olvidarse que las cuatro perspectivas mencionadas por Bransford *et al* (1999) se complementan entre sí, por lo que no puede considerárseles como aisladas unas de otras.

Uso de tecnología en educación matemática

De acuerdo con varias investigaciones sobre el tema, la educación matemática de los últimos años ha presenciado un cambio revolucionario impulsado por la presencia de herramientas tecnológicas cada vez más accesibles (Hollar y Norwood, 1999; Kaput, 1992; NCTM, 1989; 2000; O'Callaghan, 1992). En estas investigaciones se recomienda el uso de tales herramientas en la enseñanza de las matemáticas, si bien se advierte que su empleo debe ser bien pensado para evitar caer en errores que afecten negativamente la comprensión de los estudiantes (Goldenberg, 1988; Schwartz y Yerushalmy, 1992).

Por lo general, la tecnología ha entrado al aula en la forma de software didáctico, diseñado con el propósito de auxiliar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de tópicos determinados. Por otro lado, en tiempos más recientes una herramienta que ha adquirido mayor importancia es la Internet. Con el gran caudal de información que pone al alcance de prácticamente cualquier persona, su utilidad potencial en la educación matemática es innegable, y ya existen ejemplos importantes de sus posibles usos educativos (Dodge, 1995; 1998; 1999; March, 1998; 2000). Entre dichos empleos se encuentran las llamadas *Webquests* (Dodge, 1995), proyectos de investigación en los que se presenta a los alumnos un problema con un conjunto de recursos, de modo que para su solución deben seleccionar y recuperar datos de la Internet al tiempo que desarrollan habilidades de pensamiento crítico. Es importante señalar que una *webquest* no se reduce a contestar preguntas concretas sobre hechos o conceptos, ni a simplemente copiar lo que aparece en la pantalla de la computadora: se trata de que los alumnos busquen, clasifiquen, discriminen, seleccionen, recuperen, usen, analicen, sinteticen y socialicen información que está en la Internet, para solucionar un problema real.

Siguiendo las sugerencias de la literatura, en este trabajo se ha optado por incluir una *webquest* sencilla que servirá para introducir a los alumnos al concepto de función. El diseño detallado de la misma se presenta más adelante, dentro del apartado correspondiente a los instrumentos empleados para la implementación del ambiente de aprendizaje. Cabe resaltar que si bien una *webquest*, por lo regular, coloca sus fuentes de información en la Internet, esto no es un requisito *sine qua non*, y es posible concebir este tipo de recursos proporcionando fuentes de información como libros y artículos de diversa especie.

Capítulo 3. Propuesta de diseño del ambiente de aprendizaje.

El estudio.

El propósito del estudio fue explorar en qué medida la implementación de un ambiente de aprendizaje diseñado bajo las perspectivas especificadas por Bransford *et al*. (1999), favorece la comprensión –entendida ésta en el sentido de Hiebert y Carpenter (1992)– de ciertos aspectos fundamentales de la noción de función, en particular de funciones lineales, entre estudiantes de primer ingreso al nivel bachillerato.

Para ello, el autor se encargó del diseño de un ambiente de aprendizaje sobre los tópicos mencionados, el cual implementó ante un grupo estudiantes de primer semestre de bachillerato. Antes de comenzar dicha implementación, se aplicó a los alumnos un *pre-test* diseñado con un doble propósito: por un lado, servir como instrumento de evaluación de la comprensión, cuyos resultados fueron comparados con los de un *post-test* aplicado finalizada la puesta en práctica del ambiente de aprendizaje, con lo cual se procuró evaluar el grado en que se consigue el desarrollo de comprensiones profundas sobre los conceptos de interés. Por otro lado, este instrumento procuró información sobre los conocimientos previos de los estudiantes.

La población.

El ambiente de aprendizaje fue implementado ante un grupo de estudiantes de primer ingreso al Colegio de Ciencias y Humanidades. Se trató de un grupo de 25 estudiantes cuyas edades fluctuaban los 15 y los 17 años. Estos estudiantes constituían un grupo normal del CCH, en su entorno natural, con los cuales se trabajó usando el currículum usual de Matemáticas I, de acuerdo a lo contemplado en los Programas de Estudio Actualizados (s/f) del colegio.

Diseño del ambiente de aprendizaje.

Los estudiantes de primer semestre del CCH ya se han enfrentado antes a las nociones de función y de función lineal, de acuerdo a lo establecido en el Plan y Programas de Estudio de la SEP (1993), nivel secundaria; sin embargo, y como se discute en el apartado *Antecedentes y planteamiento del problema*, la literatura, la evidencia empírica y las evaluaciones relacionadas con el tema (Arteaga y Santos, 1999; Davidenko, 1997; Goldenberg, 1988; Hollar y Norwood, 1999; Kalchman y Fuson, 2001; López, 2006; Moschkovich, 1999; Moshckovich *et al*., 1993;

O'Callaghan, 1998; Tall, 1992; Tall *et al.*, 2000) parecen mostrar que los alumnos del nivel medio superior tienen comprensiones pobres de lo que es una función y, en particular, una función lineal. Con el ambiente de aprendizaje diseñado para el presente proyecto se buscó incidir sobre dicha situación, pues se pretendió lograr en los estudiantes comprensiones más desarrolladas sobre estos conceptos.

Con ello en mente, en el diseño del ambiente se procuró seguir los lineamientos propuestos por Bransford *et al.* (1999), en el sentido de tomar en consideración las cuatro perspectivas (centrarse en el aprendiz, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad del salón de clases) mencionadas por estos autores.

Desde una perspectiva centrada en el aprendiz, la literatura (Bransford *et al.*, 1999; Hiebert y Carpenter, 1992) señala que es fundamental que el diseño del ambiente de aprendizaje preste atención a los conocimientos previos de los estudiantes; por tal razón, antes de comenzar a poner en práctica el ambiente de aprendizaje se aplicó una prueba diagnóstica de la cual ya se ha hablado en el apartado *El estudio*, la cual permitió obtener información respecto a dichos conocimientos previos. Esta prueba también hizo las veces de instrumento de evaluación de la comprensión que sobre los conceptos a abordarse tenían los estudiantes, funcionando así como un *pre-test* cuyos resultados fueron comparados con los de un *post-test* aplicado al final de la implementación del ambiente de aprendizaje. De esta comparación pudo inferirse en qué medida se consiguió la comprensión deseada.

Para que la implementación del ambiente de aprendizaje pudiera llevarse a cabo, era necesario que los aprendices tuvieran ya cierta experiencia con las operaciones numéricas básicas, la noción de razón, el concepto de plano cartesiano y su manejo –localización de puntos sobre el mismo y graficación de expresiones algebraicas de dos variables–. Dado que el plan de estudios de matemáticas I en el CCH tiene programados estos conocimientos antes de los temas de interés (función y función lineal), este requisito pudo ser satisfecho.

Debe recalcarse que dentro del diseño del ambiente se consideró importante respetar el lenguaje, las experiencias y comprensiones previas de los alumnos, asumiendo que sobre ellas es posible construir las nuevas comprensiones de interés para el proyecto.

Desde la perspectiva centrada en el conocimiento, es necesario buscar que los estudiantes desarrollen comprensiones ricas de lo que aprenden y la habilidad para transferir conocimientos (Bransford *et al.*, 1999); para alcanzar estos objetivos, Bransford *et al.* recomiendan recurrir a los estándares que, en cada rama del conocimiento, definen los conocimientos y competencias que los estudiantes necesitan adquirir. En el caso de matemáticas, entre tales estándares se encuentran los publicados por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989; 2000). En ellos se sugiere que una instrucción sobre funciones comience por presentar a los estudiantes ejemplos de funciones que existan en el mundo real.

El NCTM (1989; 2000) recomienda también el estudio de situaciones que puedan modelarse por funciones de distintas clases. De este modo, dentro del trabajo se consideró adecuado introducir primero el concepto de función, haciendo patente la existencia de varios tipos de relaciones funcionales y la posibilidad de representarlas por diversos medios, para luego concentrarse en un tipo particular: las funciones lineales. Así se buscó dar a los contenidos una estructura en la que las funciones lineales son vistas como una clase particular de un concepto más amplio, el concepto de función. Bransford *et al*. (1999) afirman que la habilidad para pensar y resolver problemas no viene dada sólo por ciertas habilidades y estrategias de pensamiento, sino que requiere de cuerpos de conocimiento bien organizados; al estructurar los contenidos del modo referido, también se pretendió contribuir al desarrollo de tales cuerpos de conocimiento.

Bajo este enfoque, se trabajó sobre una serie de situaciones didácticas diseñadas para la introducción y comprensión de los conceptos a estudiar. La presentación de estas situaciones ocurrió en dos fases: la primera, dedicada a la noción de función de un modo general; la segunda, centrada en el estudio de una clase particular de funciones, las llamadas lineales.

Es importante señalar que las situaciones didácticas estaban inmersas en contextos no matemáticos, con lo que se esperaba favorecer una comprensión más profunda de los conceptos a trabajarse (Brown *et al*., 1989; Cramer, 2001, en Billings y Schultz, 2005; Coes, 1994; Davidenko, 1997; NCTM, 1989; NCTM, 2000). Algunas de ellas proponían tareas de corte experimental, mientras en otras el enfoque fue hacia el trabajo con lápiz y papel y otras más planteaban trabajo con tecnología.

Se buscó también que cada nueva situación didáctica exigiera a los estudiantes un mayor nivel de pensamiento; así, en las primeras situaciones responder a los cuestionamientos planteados no requería de habilidades particularmente avanzadas, mientras que las últimas situaciones sí suponían procesos cognitivos de mayor nivel.

Cabe destacar que, en este trabajo, se asume una concepción de función como covariación de variables, enfoque sugerido en la literatura sobre el tema (Hines, 2002; NCTM, 1989; NCTM, 2000; Tall, 1992).

La perspectiva centrada en la evaluación lleva a tomar en cuenta ciertos principios (Bransford *et al*., 1999): por un lado, la evaluación debe ofrecer oportunidades de retroalimentación y revisión, así como ser lo menos disruptiva posible; por otro, lo que se evalúa debe ser congruente con las metas de aprendizaje establecidas.

Respecto al primer principio, al sondear los avances y dificultades de los aprendices durante cada una de las sesiones de trabajo, el autor obtenía información sobre el nivel de comprensión que los alumnos mostraban en un tópico determinado (Hiebert y Carpenter, 1992; Pirie y Kieren, 1992). Esto se llevó a cabo dentro de la dinámica de trabajo de cada sesión, de manera que los estudiantes no percibían disrupción alguna en sus actividades. El análisis de sus respuestas a las tareas, registradas en los materiales proporcionados a los aprendices –los cuales quedaron en poder del autor–, así como las notas que el propio autor tomaba en su bitácora de clase, sirvieron como apoyo a la evaluación de la comprensión.

Por otra parte, el instrumento diseñado para la evaluación de la comprensión fue aplicado al final de la implementación del ambiente de aprendizaje, pero en una sesión que para los alumnos tuvo un aspecto 'cotidiano'. Así se procuró evitar, nuevamente, cualquier carácter disruptivo en la evaluación.

Además, durante la implementación del ambiente de aprendizaje se contempló la organización de trabajo en equipo y discusiones grupales, durante las cuales era posible ofrecer la retroalimentación sugerida por Bransford *et al.* (1999).

En cuanto al segundo principio (concerniente a la congruencia entre lo que se evalúa y los objetivos de aprendizaje que se hayan establecido), dado que se pretende conseguir aprendizajes con comprensión, el instrumento de evaluación diseñado –y descrito en detalle más adelante, en el apartado *Diseño del instrumento para la evaluación de la comprensión. Condiciones de su aplicación*– exige del aprendiz habilidades que la literatura considera esenciales en la comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992) de aspectos fundamentales de la noción de función, y en particular de funciones lineales (Arteaga y Santos, 1999; Billings y McClure, 2005; Davis, 2005; Hines, 2002; Moschkovich, 2004; Moschkovich *et al*., 1993; NCTM, 1989; NCTM, 2000; Schwartz y Yerushalmy, 1992; O'Callaghan, 1998): capacidad para moverse flexiblemente entre varias representaciones y perspectivas, así como habilidad para transferir conocimientos a nuevos contextos.

La perspectiva centrada en la comunidad (Bransford *et al.*, 1999), por su parte, hace necesario el establecimiento de normas para fomentar que los alumnos aprendan unos de otros, en un esfuerzo colectivo por mejorar; además, a través de estas normas deben valorarse prácticas como aprender a través de los errores y la búsqueda de comprensión.

El establecimiento de dichas normas de trabajo tiene un importante rol en el diseño de un ambiente de aprendizaje; en el caso presente, se procuró que éstas se fijaran de mutuo acuerdo con los estudiantes (encontrándose aquí una intersección con la perspectiva centrada en el aprendiz): el respeto a la opinión del otro, el esperar turno para hacer uso de la palabra en las discusiones grupales, el ceñirse a las formas de trabajo establecidas, la validez de cometer errores en la tarea de construir el conocimiento, el conceder importancia a la búsqueda de comprensión, fueron normas con las que se trató de favorecer el logro de los objetivos del ambiente de aprendizaje.

Considerando esta perspectiva (centrada en la comunidad) pareció conveniente adoptar una dinámica de trabajo que contemplara para los aprendices trabajo individual, en equipo y grupal. En este punto, puede verse cómo la perspectiva centrada en la comunidad se intersecta con la centrada en la evaluación: párrafos arriba, se menciona que la organización de trabajos en equipo y discusiones grupales obedece también a la posibilidad de dar a los aprendices la oportunidad de obtener retroalimentación sobre sus avances y dificultades.

El trabajo en equipo y las discusiones grupales originaron opiniones y enfoques diversos que debían ser –y fueron– respetados y rescatados, en la medida de lo posible, con el objeto de que el grupo construyera sobre esas bases la comprensión de los contenidos a estudiar. Puede observarse, a este respecto, una intersección entre perspectivas centradas en el aprendiz y en la comunidad.

El ambiente de aprendizaje.

Como ya se hizo mención, antes de comenzar a implementar el ambiente de aprendizaje se aplicó a los alumnos una prueba diagnóstica con dos propósitos: uno, obtener información respecto a sus conocimientos previos, la cual resultó central para la manera de conducir la puesta en práctica del ambiente de aprendizaje. Dos, servir de instrumento de evaluación de la comprensión, haciendo las veces de un *pre-test* que fue comparado con un *post-test* aplicado al final de la implementación del ambiente de aprendizaje; de éste análisis fue posible valorar hasta qué punto tal implementación resultó significativa en el desarrollo de los aprendizajes con comprensión en los tópicos de interés.

La puesta en práctica del ambiente de aprendizaje tuvo lugar a lo largo de once sesiones de trabajo. Cada una de ellas tuvo una estructura similar. En ocasiones, los estudiantes trabajaban individualmente, en otras debieron hacerlo en parejas o en equipos de tres a cuatro integrantes. Cuando era el caso, cada equipo designaba a uno de sus integrantes como 'vocero', encargado de comunicar las respuestas de su equipo al resto del grupo, en las discusiones plenarias que tenían lugar al finalizar cada una de las situaciones didácticas sobre las cuales se trabajó. Los estudiantes recibían por escrito el planteamiento de la situación didáctica a trabajarse, con las instrucciones y datos respectivos, así como las preguntas a responder –en su caso–. En el caso de trabajo en equipo, se les proporcionaba un escrito por equipo. En el cuerpo de dichos materiales había espacios para que escribieran sus respuestas. El planteamiento de la situación, la consigna, datos, etc. eran discutidos en el grupo hasta que todos los estudiantes parecían tenerlos claros, y sólo entonces comenzaba la actividad.

Se consideró conveniente dosificar las tareas a realizar. De este modo, las situaciones didácticas se diseñaron de manera que algunas quedaron divididas en parte 1, parte 2,… Sólo hasta que se concluía el trabajo sobre una parte se pasaba a la siguiente. Con ello se buscaba que los estudiantes no recibieran simultáneamente todas las tareas que se trabajarían sobre un tópico dado. De no procederse así, la solución a algunas tareas pudo haberse visto sesgada cuando los estudiantes "espiaran" tareas subsecuentes.

Así, los alumnos recibían en cada situación tareas específicas, enfocadas a determinados conceptos, sobre los cuales se consideró adecuado efectuar precisiones y/o definiciones, reflexionar, discutir, etc. Como ya se ha hecho mención, el comenzar por introducir una noción general de función, responde a la estructuración matemática de los contenidos definida para este trabajo; la dosificación mencionada busca contribuir a que los aprendizajes de los alumnos reflejen, en cierta medida, esta organización, al construir paulatinamente los conceptos y las conexiones adecuadas.

Parte de las situaciones debían resolverse mediante el uso exclusivo de lápiz y papel; algunas otras planteaban que los estudiantes realizaran una actividad experimental, por medio de la cual se pretendía llevarlos a percibir la relación funcional existente entre dos cantidades. La literatura ofrece varios reportes que sugieren el uso de actividades de este tipo, pues, se afirma, contribuyen a que los alumnos aprecien el poder y la versatilidad del concepto de función, así como a la construcción de comprensiones más ricas (Billings y McClure, 2005; Coes, 1994; Davidenko, 1997; Hines, 2002; NCTM, 1989).

Cabe recalcar que el ambiente de aprendizaje se dividió en dos fases: la primera, dedicada a la introducción de la idea general de función, la segunda, a profundizar en el concepto de función lineal.

En las situaciones, se planteaba que en un primer momento cada estudiante meditara individualmente sobre la situación dada y las preguntas propuestas. Transcurridos alrededor de 5 minutos, se les indicaba que el trabajo debía comenzar. Los alumnos trabajaba entonces en las tareas planteadas, discutiendo –cuando era el caso– en sus equipos las ideas que surgían, escribiendo tanto en sus cuadernos como en la fotocopia proporcionada –en los espacios designados para este fin – sus soluciones, propuestas y/o respuestas, debiendo especificar los casos en los que el equipo llegaba a acuerdos sobre determinada respuesta, y aquellos en los que tal cosa no sucedía, detallando en la medida de lo posible las razones por las cuales no había acuerdo, y consignando, cuando correspondiera, los distintos enfoques que surgieran en el equipo.

Desde luego, todos los miembros de los equipos trabajaron en todas las tareas.

Una vez que los equipos terminaban con la situación en turno (para lo cual, en las tareas de lápiz y papel, disponían de entre 10 y 20 minutos; en tareas de corte experimental este tiempo llego a prolongarse hasta abarcar toda una sesión de trabajo), se procedía a organizar una discusión grupal, en la que, por turnos, los alumnos designados por sus compañeros como 'voceros' comunicaban al resto de la clase las conclusiones a las que hubieran llegado con sus equipos.

Durante dichos discusiones las conclusiones alcanzadas por los equipos respecto a una tarea eran analizadas, discutidas y, en su caso, validadas por el grupo. Finalizada esta discusión grupal, se proporcionaba a los equipos un nuevo escrito con una nueva situación didáctica, o bien, la parte siguiente de la situación anterior. En este último caso, las tareas a desarrollar guardaban relacionadas con la misma situación didáctica, pero se enfocaban hacia conceptos o habilidades diferentes. El esquema de trabajo (reflexión individual, trabajo en equipo, *corte* para discusión grupal) se repetía para esta nueva situación, y se procedía así sucesivamente hasta agotar todas las situaciones planeadas para la sesión. Llegados a este punto, se organizaba una discusión plenaria de cierre, en la cual se retomaban los conceptos principales trabajados, y se llegaba a conclusiones generales.

Por ejemplo, la situación IV, ‘Cuadrados’ (ver *Anexo I. Instrumentos de Instrucción*), planteaba 6 tareas en total. La situación se dividía en 4 partes, cada una de las cuales perseguía una finalidad particular (la cual, en este escrito, se especifica en letras cursivas). Para comenzar, los estudiantes recibieron el escrito con la primera parte de la situación; meditaron individualmente las tareas consignadas por espacio de 5 minutos aproximadamente, para pasar luego a trabajarlas en equipo. Cuando los jóvenes terminaron con esta actividad, sus conclusiones fueron discutidas con todo el grupo. Una vez finalizada esta discusión, se les proporcionó la segunda parte, repitiéndose el esquema anterior. Habiendo concluido el trabajo con las 4 partes, se procedió a una discusión plenaria de cierre, en la que el grupo retomó los conceptos trabajados y llegó a conclusiones generales al respecto.

La existencia de situaciones de variación codependiente de dos cantidades, las diferentes maneras de representar una relación funcional, las características particulares de cada representación, son tópicos que, se procuró quedaran tan claros como fue posible para todo el grupo. Otro punto de importancia fue discutir las ventajas y desventajas que los alumnos notaran para cada representación, al enfrentar una tarea determinada (NCTM, 2000).

Por lo regular, al término de cada sesión se pedía a los estudiantes un trabajo para casa, que en ocasiones consistía (individualmente y/o en equipo) en resolver cuestiones relacionadas con una actividad vista en clase, o en recabar datos para su utilización en la próxima sesión, o en comenzar la resolución de una nueva situación didáctica. De esta manera, se contemplaron en total cinco modalidades de trabajo para los alumnos: trabajo individual en clase, trabajo en equipo en clase, trabajo grupal en clase, trabajo en equipo fuera de clase, y trabajo individual fuera de clase.

Por su parte, se pretendió que la intervención directa del profesor quedara reducida al mínimo posible. Su papel fue procurar que todo el grupo entendiera el planteamiento de la situación didáctica y luego, durante el desarrollo de las sesiones, sondear los avances y dificultades de los alumnos al enfrentar las tareas, así como promover discusiones sobre los conceptos clave, fungir como moderador en las discusiones plenarias, dar nombre a los conceptos clave, lanzar preguntas problematizadoras que ayudaran a los estudiantes a descubrir lo inadecuado de alguna conclusión obtenida por ellos, evaluar sus avances y el grado en que se iban obteniendo aprendizajes con comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992, con conexiones del tipo especificado por Moschkovich *et al*., 1993). Al momento de que los alumnos le pedían ayuda en alguna tarea, el profesor procuraba hacerlos reflexionar sobre sus formas de proceder, buscando que fueran ellos quienes determinaran la validez de sus avances, localizaran las posibles fallas e, idealmente, encontraran modos de seguir avanzando.

Contenidos abordados

Durante el ambiente de aprendizaje se abordaron varias situaciones didácticas que presentaban el concepto de función en contextos no matemáticos. La tabla 1, mostrada a continuación, detalla los nombres dados a cada una de estas situaciones (incluidas en el anexo 1), el tiempo que llevó ponerlas en práctica así como los contenidos y propósitos que se buscó lograr con cada una. Si bien los conocimientos previos necesarios para tratar con dichos contenidos (operaciones numéricas básicas, noción de razón, concepto de plano cartesiano y su uso) ya eran manejados a un nivel adecuado por parte de los estudiantes al inicio de la instrucción, la aplicación del *pre-test* mostró que la comprensión sobre funciones se encontraba en un nivel muy bajo, como se discute en el apartado *Análisis de los datos*.

Tabla 1. Situaciones didácticas, tiempos y contenidos

Situación didáctica	Tiempo empleado	Propósitos/Contenidos
Péndulos, primera parte.	Proyecto de investigación a desarrollarse en dos semanas	Se espera que los alumnos especulen y descubran que existe una relación de interdependencia entre el periodo de un péndulo y su longitud.
Péndulos, segunda parte.	60 minutos	Se introducirán los conceptos de variable, variable dependiente, variable independiente, función, rango y dominio. Deberá ponerse cuidado en especificar que con una función debe ser posible predecir el valor de la variable dependiente si se conoce el de la independiente.
El clima, primera parte.	30 minutos	Hacer surgir la idea de que entre la hora del día y la temperatura ambiente existe una relación funcional. Se identificarán las variables dependiente e independiente. Discutir sobre los conceptos de variable dependiente e independiente, función, rango y dominio. Introducir la posibilidad de representar una función en más de una forma. En particular, se establecerán las representaciones gráfica y tabular de una función.

El clima, segunda parte.	30 minutos	Hacer ver la utilidad de una función particular, al permitir, aunque sea de modo aproximado, encontrar la temperatura en un momento dado del día. Se espera que los alumnos empleen representaciones gráfica y tabular. Se discutirán ventajas y desventajas encontradas en el uso de cada una de ellas.
Cuadrados, primera parte.	20 minutos	Los alumnos concluirán que el área de un cuadrado es función de la longitud de su lado. Determinarán las variables dependiente e independiente, rango y dominio de esta relación funcional.
Cuadrados, segunda parte.	40 minutos	Profundizar en la posibilidad de representar funciones de varias maneras. Se introducirá la notación formal f(x)= y.
Cuadrados, tercera parte.	40 minutos	Emplear las diferentes representaciones de la función área de un cuadrado para resolver problemas sencillos. Discutir posibles ventajas y desventajas que los estudiantes encuentren al usar cada representación.
Cuadrados, cuarta parte.	Tarea para casa (discusión en clase: 50 min)	Los chicos especularán respecto a qué función –en contexto– podría estar representada en la gráfica de $y = x^2 + 4$.
Funciones en el mundo.	Tarea para casa (discusión en clase: 20 min)	Los alumnos buscarán en su mundo cotidiano ejemplos de funciones de dos variables. Además, tendrán que especificar qué cantidades son las variables dependiente e independiente, e identificar el rango y el dominio para las funciones que elijan.
Electricidad, primera parte.	20 minutos	Mostrar a los alumnos cómo el valor de la corriente eléctrica a través de una resistencia cambia al cambiar el voltaje aplicado. Se espera que los alumnos reparen en la existencia de una función entre el voltaje y la corriente a través de este circuito.
Electricidad, segunda parte.	30 minutos	Obtener datos experimentales para valores distintos de la resistencia del circuito. Que los estudiantes noten que la corriente sigue siendo una función del voltaje aplicado, pero que al cambiar la resistencia, esta deja de ser la misma.

Electricidad, tercera parte.	40 minutos	Que los estudiantes representen la función I(V) de varias maneras, entre las que se espera se encontrarán la algebraica y la gráfica. De esta manera, se pretende discutir con ellos algunas características de esta función, la primera de carácter lineal que se presenta en el ambiente de aprendizaje. Se dará ese nombre (“lineal”) a la función I(V),
	Tarea para casa (discusión en clase: 120 minutos)	Que los alumnos observen el efecto del parámetro ‘a’ sobre distintas representaciones de una función de la forma y = ax. Se espera que entre las representaciones propuestas por los alumnos se encuentren la algebraica y la gráfica, de modo que la discusión respecto a los resultados de esta tarea permita llegar a relacionar el valor de ‘a’ con la ‘inclinación’ de la recta que representa gráficamente a la función. El tiempo se extendió debido a que la discusión derivó hacia la característica de proporcionalidad de la representación tabular.
Ganancias en el cine, primera parte.	Tarea para casa (discusión en clase: 60 minutos)	Que los alumnos reparen en la existencia de una relación funcional entre la ganancia obtenida por la venta de boletos en un cine y el número de boletos vendidos. Retomar a mayor profundidad los conceptos de variables dependiente e independiente, rango y dominio. Esta es una función con dominio discreto, lo cual deberá hacerse notar.
Ganancias en el cine, segunda parte.		Representar la función G(B) de al menos tres maneras distintas, y usar estas representaciones para responder una pregunta concreta. Se señalará que esta función es lineal, lo cual dará pie a reafirmar lo discutido respecto a las características de esta clase de funciones.
Ganancias en el cine, tercera parte.	120 minutos	Que los alumnos descubran el rol del parámetro ‘b’ (en y = ax + b) en varias representaciones.
Ganancias en el cine, cuarta parte.		Que los jóvenes extraigan información de la representación gráfica de una función lineal, y que se trasladen de la representación gráfica a la representación algebraica. Se pretende discutir también en profundidad el papel de los parámetros ‘a’ y ‘b’ (en y = ax +b) y sus implicaciones gráficas.
Corriendo, primera parte.	15 minutos	Los estudiantes deberán observar que la distancia recorrida al viajar a una velocidad determinada es una función del tiempo de recorrido. Especificarán las variables dependiente e independiente así como el rango y dominio de esta función, consolidando su conocimiento de estos conceptos.

Corriendo, segunda parte.	30 minutos	Los alumnos representarán algebraica y gráficamente funciones d(t) para velocidades constantes, con lo que se hará notar que dichas funciones son lineales, además del papel que juega la velocidad en ambas representaciones.
Corriendo, tercera parte.	60 minutos	Los alumnos interpretarán las gráficas de tres funciones lineales para obtener información sobre la situación que les dio lugar. Se trasladarán de la representación gráfica a la algebraica. Se buscará que profundicen su conocimiento del papel de los parámetros ‘a’ y ‘b’ en ambas representaciones.
Agua, primera parte	Tarea para casa (Discusión en clase: 20 minutos	Se discutirá el efecto de un parámetro ‘a’ negativo en las representaciones algebraica y gráfica de una función lineal.
Agua, segunda parte	40 minutos	Se profundizará en el estudio de funciones lineales con parámetro ‘a’ negativo, discutiéndose más a fondo el papel de este parámetro en las representaciones gráfica y algebraica de las funciones en cuestión.
Gas	60 minutos	Los estudiantes deberán resolver una serie de cuestiones que requieren flexibilidad en el paso entre diferentes representaciones y perspectivas de las funciones lineales.

A continuación se hace una descripción sucinta de las once sesiones de trabajo, especificándose los conocimientos y conceptos que fueron tratándose en cada una de ellas:

Sesión I.

Para introducir a los alumnos al concepto de función se les planteó una *Webquest* (Dodge, 1995) cuya resolución requirió entre otras cosas que los alumnos descubrieran la dependencia entre dos cantidades físicas (el periodo T de un péndulo simple y su longitud L). Los alumnos recibieron un material escrito con la consigna a realizar y algunas fuentes sugeridas de información, a las cuales podían acudir para auxiliarse en la resolución de la tarea. En este escrito también se introdujo la notación T para el periodo y L para la longitud. Los alumnos contaron con un tiempo (fijado de mutuo acuerdo entre ellos y el profesor) de dos semanas para llevar a cabo lo solicitado en la *webquest*. Más adelante, en el anexo I, se muestra el material escrito que recibieron los alumnos.

Para esta *webquest* los estudiantes debieron organizarse en equipos de tres integrantes, cada uno de los cuales asumiría un rol diferente especificado en la consigna. Siguiendo las sugerencias de la literatura (Dodge, 1995), esta tarea requería que los estudiantes analizaran, sintetizaran y comprendieran la información a su alcance con el objeto de solucionar un problema real, que en este caso fue el diseño y construcción de un péndulo simple cuyo periodo T pudiera modificarse a voluntad.

Llegada la fecha acordada, cada equipo entregó el péndulo que construyó así como un reporte escrito del proceso que siguieron para resolver la tarea encomendada. Los alumnos observaron que existe una relación de dependencia entre T –el periodo de un péndulo simple– y L –su longitud– y razonaron que debían explotar ese conocimiento para que el péndulo que ellos construyeran permitiera modificar el valor de T. De este modo presentaron diversos diseños, todos con el denominador común de que el valor de L (relativamente fácil de manipular directamente) podía ajustarse a conveniencia.

Con el propósito de averiguar hasta qué punto los estudiantes conocían la forma de la función T(L), durante la sesión se le solicitó a cada equipo que ajustara su péndulo para que tuviera un periodo especificado por el autor. Resolver esta tarea implicaba saber de alguna manera que, específicamente, $T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (ecuación válida para oscilaciones del péndulo con amplitud pequeña; $\pi \approx 3.1416$, $g \approx 9.81$ m/s^2), y emplear este conocimiento para determinar qué valores de L darían los valores solicitados para T. L mayoría de los alumnos tuvo éxito ante este problema, y fueron capaces de encontrar tales valores. Los que fallaron lo hicieron por dificultades con la evaluación numérica de la ecuación para T (sólo un equipo tuvo este problema) o por errores en la medición de la longitud del péndulo. Los propios alumnos reconocieron en dónde habían estado sus errores y pudieron decir qué debieron haber hecho para lograr la solución correcta de la tarea.

Esta primera sesión tuvo una duración de sólo una hora, y únicamente se llegaron a remarcar los aspectos señalados arriba: la existencia de una dependencia entre el periodo y la longitud de un péndulo simple, la forma algebraica de esta dependencia, y cómo emplear este conocimiento para solucionar el problema planteado.

Sesión II.

Al comienzo de la siguiente sesión, se recapitularon los aspectos fundamentales involucrados en la resolución de la tarea planteada en la *webquest*: el periodo T de un péndulo depende de su longitud L; la forma específica de esta dependencia puede expresarse –*representarse*, término introducido por el autor durante esta recapitulación grupal– mediante la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; se retomó también el hecho de que, con el fin de ahorrarse el trabajo de realizar una y otra vez los cálculos necesarios para determinar el valor de L correspondiente a un valor dado de T, varios equipos elaboraron tablas en las que consignaron esta información. El autor remarcó que estas tablas eran otra manera de representar la relación entre el periodo T y la longitud L de sus péndulos, y a continuación cuestionó a los estudiantes sobre otras formas en las que podría representarse tal relación. Rápidamente hubo respuestas del grupo en el sentido de que podrían emplearse estas tablas para dibujar una gráfica en un plano cartesiano, la cual sería una representación más de la dependencia en discusión. El autor propuso entonces que cada alumno dibujara dicha gráfica en su cuaderno de notas.

En este punto, surgieron dificultades entre algunos estudiantes, relacionadas con la manera de tratar las escalas de los ejes en un plano cartesiano; varios de ellos dibujaban sobre éstos marcas equidistantes pero las hacían corresponder a valores no equidistantes, los cuales venían dados en las tablas que habían elaborado previamente. Por ejemplo, una tabla consignaba (textualmente):

Segundos	Centímetros
0.2006	1
0.2837	2
0.3474	3
0.4012	4
0.4485	5
⋮	⋮

La gráfica correspondiente presentaba al periodo sobre el eje horizontal (como si de la variable independiente se tratase, error conceptual sobre el que se trabajaría más tarde) y a la longitud sobre el vertical. En este último, los alumnos habían dibujado marcas equidistantes que correspondían a las longitudes 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4cm, 5cm,… Pero en el eje horizontal, las marcas, también equidistantes, correspondían a los periodos 0.2006 s, 0.2837 s, 0.3474 s, 0.4012 s, 0.4485 s,… El autor, al notar esto, buscó que los alumnos se dieran cuenta de lo erróneo de esta situación al hacerles cuestionamientos del tipo “si la distancia entre estas dos marcas representa 0.0831 segundos, ¿no debería valer lo mismo la distancia entre las siguientes dos marcas?” Al obtener una respuesta afirmativa de los jóvenes, venía alguna pregunta del tipo “¿y entonces porqué no es así? Porque según lo que escribieron, las siguientes marcas estarían separadas por

0.2837 segundos. ¿Qué pasa?" Poco a poco los estudiantes repararon en su error y lo corrigieron, con lo que poco tiempo después todos tenían listas sus gráficas.

El profesor instruyó a los alumnos para seguir la convención aceptada, que consiste en colocar en el eje horizontal de sus gráficas a la variable independiente, y en el vertical a la dependiente.

Se concluyó, pues, que existía una dependencia entre el periodo T y la longitud L de un péndulo simple, y que esta podía representarse de, al menos, tres maneras: una ecuación, una tabla o una gráfica. Los nombres formales de estas representaciones, *Representación Algebraica*, *Representación Tabular* y *Representación Gráfica* fueron introducidos en ese momento por el autor. Además, se dio el nombre de *función* a la relación de dependencia que existía entre T y L, cantidades que fueron denominadas *variables* una vez que el grupo se hubo manifestado de acuerdo con el hecho de que eran cantidades cuyos valores podían modificarse. Al discutir sobre cuál de ellas era la que "hacía cambiar" a la otra, se llegó a la conclusión de que T era una *variable dependiente* de al longitud L, la cual fue nombrada *variable independiente.*

El grupo llegó así a una primera aproximación de los conceptos de *función* (la dependencia entre dos cantidades, de modo que al cambiar una, cambia la otra), *variable* (una cantidad cuyo valor puede cambiar, no ser constante) y *variables dependiente* e *independiente* (en una función, si la segunda cambia "provoca" que la primera también lo haga).

Acto seguido se pidió a los alumnos que se organizaran en parejas, para pasar a la siguiente situación didáctica. Elaborando sobre el tema *función*, el autor preguntó al grupo si la temperatura ambiente a lo largo de un día, en un lugar determinado, debería considerarse una cantidad *variable*. Sin dudarlo demasiado, varios alumnos argumentaron que sí debería serlo. Ante la ausencia de argumentos en contra, las siguientes preguntas del autor fueron ¿en qué momento del día sería mayor la temperatura ambiente? ¿y en qué momento sería menor?. Luego de pedirles a los alumnos que anotaran sus respuestas en sus cuadernos, se les hizo entrega de un segundo escrito con la nueva tarea a realizar. Esta vez, el escrito presentaba una gráfica de la variación de la temperatura ambiente con la hora del día, gráfica obtenida con datos reales recabados por investigadores del Centro de Investigaciones en Matemáticas (CIMAT). En el documento –incluido en el Anexo I– se planteaban una pregunta: ¿de acuerdo a esta gráfica, tenían razón en sus respuestas respecto a los momentos más frío y más calurosos de un día? Además, se les pedía que construyeran una representación tabular de la relación funcional Temperatura Ambiente–Hora del Día.

Esta tarea fue resuelta con rapidez, pues los estudiantes fueron capaces de interpretar correctamente la gráfica. Reconocieron que, al menos para el día en que se habían tomado los datos presentados, sus suposiciones sobre los momentos más caluroso y más frío de un día habían estado equivocadas, pudiendo ubicar estos momentos en la gráfica.

Construir una tabla a partir de la gráfica dada tampoco supuso dificultades mayores. En poco tiempo la tarea estaba realizada, y los alumnos recibieron un nuevo documento escrito relacionado con la misma situación didáctica. La nueva tarea consistía en hallar, por lo menos de forma aproximada, la temperatura ambiente a ciertas horas del día, horas que requerían que los estudiantes interpolaran los datos con los que contaban.

Esta interpolación fue llevada a cabo por distintos métodos: algunas parejas propusieron emplear la gráfica, usando regla y lápiz para determinar las temperaturas correspondientes a las horas dadas. Otros sugirieron emplear la información contenida en la tabla, hallando la media entre las dos temperaturas correspondientes a las dos horas más cercanas a las que estaban preguntándose. La falla de este método, que supone que la relación Temperatura Ambiente–Hora del Día es lineal, sería discutida hasta la siguiente sesión.

En relativamente poco tiempo la tarea fue resuelta, y todos los métodos arrojaron resultados muy similares (debido a que, por segmentos, la gráfica se aproximaba bastante a relaciones lineales). Después de poner en común los resultados obtenidos, se dio por terminada la sesión.

Sesión III.

La sesión comenzó con una recapitulación de lo realizado en la anterior, recapitulación constituida por participaciones orales de varios estudiantes. El profesor resaltó el empleo de varias representaciones para expresar la dependencia entre el periodo de un péndulo y su longitud, así como entre la hora del día y la temperatura ambiente en una determinada localidad, y pidió a los alumnos recordar los métodos que se habían empleado par resolver la última tarea planteada en la sesión anterior, hallar la temperatura ambiente a ciertas horas del día.

Rápidamente los estudiantes dieron cuenta de los métodos empleados, e incluso, aquellos que habían empleado interpolaciones lineales expresaron que su método fallaría, aunque no supieron explicar la razón. Como una actividad dirigida a clarificar un poco más este hecho, se les entregó un documento que presentaba la gráfica de la función $f(x) = x^2$ (sin especificar la ecuación que le daba origen); sobre ella aparecían señalados los puntos (1, 1) y (3, 9). La tarea consistían en determinar el valor de la ordenada correspondiente a $x = 2$. De emplearse una interpolación lineal, el resultado se alejaría sensiblemente del obtenido al emplear la gráfica.

No le tomó demasiado tiempo a los aprendices llevar a cabo esta tarea, y los resultados –correctos en prácticamente todo el grupo– fueron comparados con los que se habrían obtenido con una interpolación lineal; ambos puntos fueron señalados sobre la gráfica, y algunos alumnos hicieron notar que el punto obtenido con la interpolación lineal se encontraba alineado con los dos puntos dados en el problema. El profesor, al escuchar esta intervención, trazó la recta que unía a los tres puntos, reconociendo que, efectivamente, el obtenido al hallar la media entre las dos abscisas correspondientes a las dos ordenadas vecinas estaba alineado con (1, 1) y (3, 9). Sólo se hizo mención, por parte del profesor, que este hecho probablemente quería decir que el método que daba el resultado equivocado tal vez funcionaría cuando las gráficas fueran líneas rectas; pero antes de profundizar en ello, se pasó a la siguiente tarea, la cual tenía por objetivo presentar al grupo una nueva relación funcional y reforzar los conceptos recién introducidos: *variable*, *variable dependiente* e *independiente*, *función*.

Antes de comenzar con la siguiente situación didáctica, el profesor definió dos nuevos términos para el grupo: el *dominio* de una función como *el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente*, y el *rango* de una función como *el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente*. Estos conceptos formarían parte de la consigna de la siguiente tarea.

En la primera parte de esta nueva tarea se preguntaba únicamente si existiría una función entre la longitud de un cuadrado y su área. Tanto en caso negativo como afirmativo, los aprendices debían justificar su respuesta. En caso afirmativo, debían especificar además quiénes serían las variables dependiente e independiente, y quiénes el dominio y el rango.

Los estudiantes debían trabajar en parejas, y en poco tiempo la mayoría del grupo había concluido que sí existía una función entre la cantidades mencionadas. Tampoco tardaron mucho en determinar que la longitud del lado del cuadrado jugaría el papel de variable independiente mientras su área quedaría como variable dependiente. Del mismo modo, llegaron a sus primeras expresiones respecto al rango y el dominio de la función sobre la que se trabajaba, expresiones del tipo “el dominio son los números del cero al infinito”.

A continuación se entregó a los aprendices la segunda parte de la tarea, en la cual se les pedía representar la función anterior de por lo menos tres maneras diferentes. Ante los titubeos iniciales de una parte importante del grupo, el profesor los refirió al trabajo de las clases anteriores, en las que se había llegado a varias representaciones de dos funciones. Esto pareció aclarar el panorama, de manera que los aprendices se dispusieron a encontrar ecuaciones, gráficas y tablas que expresaran la relación entre el lado de un cuadrado y su área.

Después de unos minutos prácticamente todas las parejas habían construido sus representaciones, de modo que se pasó a discutirlas grupalmente. Las gráficas, ecuaciones y tablas obtenidas eran correctas en general, aunque una pareja optó por escribir tres ecuaciones distintas ($A = l^2$, $A = l \cdot l$, y $\sqrt{A} = l$) y presentarlas como sus tres representaciones de la función; en rigor, los estudiantes habían hallado tres maneras distintas de representarla, de modo que esta respuesta también fue retomada y validada como correcta en el grupo; sin embargo, el profesor solicitó a esa pareja encontrar otras representaciones que no fueran algebraicas, con lo que después de unos minutos obtuvieron una gráfica y una tabla similar a las de sus compañeros.

Para la recta final de la sesión se planteó al grupo la tercera parte de esta situación didáctica. Ahora debían emplear sus tres representaciones para encontrar el área de un cuadrado cuyos lados midieran 5.5cm (medida elegida considerando que, con toda probabilidad, los estudiantes emplearían sólo números enteros en sus gráficas y tablas, por lo que al serles planteado este valor no entero, se vería obligados a usar sus representaciones para interpolar el área requerida). También se les pedía escribir cuál de las representaciones les resultaba más conveniente en este trabajo, y discutir las posibles ventajas y desventajas de cada una.

Encontrar el área no era, de manera alguna, una tarea novedosa para los estudiantes, al menos mediante la representación algebraica $A = l^2$; pero utilizar las representaciones alternativas que habían propuesto anteriormente sí pareció resultarles poco familiar, aunque aparentemente no encontraron complicaciones mayores. Hacia el final de la sesión todo el grupo había concluido esta tarea, cuya solución fue puesta en común y rápidamente se concluyó que era correcta. Respecto a cuál de las representaciones resultaba más conveniente, la mayor parte del grupo se inclinó por la ecuación –probablemente debido a la mayor familiaridad que tenían con ella–, mientras la gráfica les parecía la menos práctica, pues, argumentaban, era “poco precisa” y necesitaba “más cuidado”.

Como tarea para realizar en casa y discutir en la siguiente clase, los alumnos recibieron la cuarta parte de la situación didáctica, en la que se les presentaba la gráfica de la función $y = x^2 + 4$ y se les solicitaba proponer alguna relación funcional “real” que pudiera representarse por esa gráfica (la ecuación no se les proporcionaba).

Sesión IV.

En esta sesión se tenía planeado trabajar con las soluciones que los aprendices hubieran dado a la tarea para casa planteada al final de la clase anterior; sin embargo, un número importante de estudiantes afirmó no haber podido pensar en alguna situación en la cual dos variables cambiaran una con la otra del modo mostrado en la gráfica proporcionada. Ante ello, se decidió que el grupo trataría de proponer una relación funcional de la naturaleza requerida.

Algunos alumnos habían empleado la gráfica para obtener representaciones tabulares de la función, pero no habían ido más allá; estas representaciones tabulares fueron recuperadas y el profesor sugirió encontrar también una representación algebraica que se ajustara a ellas. Después de un tiempo, algunos estudiantes lograron determinar que $y = x^2 + 4$ era la ecuación buscada. El hallazgo se comunicó al resto del grupo, para ser discutido y validado. Ello no tomó más de diez minutos, pero el siguiente paso aún le parecía incierto a la mayor parte de los alumnos: encontrar una situación en la que dos cantidades variaran de acuerdo con la ecuación recién encontrada.

Notando la dificultad para avanzar en este punto, el profesor recordó al grupo que, en ausencia del número 4, la ecuación se reduciría a $y = x^2$, muy parecida a la representación $A = l^2$ con la que se había trabajado en la clase anterior. Esto pareció dar ideas a varios alumnos, y cerca del fin de la sesión se tuvieron diversas variantes de la propuesta siguiente: y podría representar el área de un jardín (patio, habitación, etc) cuadrado, sumada a la de una superficie cuadrada de 2 unidades por lado; los lados del jardín serían variables (x) mientras esta superficie cuadrada (una estancia, una losa, etc) se mantendría constante. La propuesta fue luego consensuada por el grupo, pero no se encontraron otras sustancialmente diferentes. La sesión llegó a su fin, y como tarea para casa se pidió a los estudiantes elaborar una lista de tres relaciones funcionales que observaran en el mundo real, especificando en cada una variables dependiente e independiente, rango y dominio.

Sesión V.

Los estudiantes cumplieron con la tarea para casa, y se le pidió a tres de ellos, al inicio de la sesión, mencionar las relaciones funcionales que habían propuesto. Entre las funciones observadas por estos alumnos se encontraban la que existe entre la humedad de una localidad y la cantidad de vegetación presente, entre la distancia recorrida por un objeto en caída libre y el tiempo de caída transcurrido, la población relativa de un país y su número de habitantes, el número de copas de licor que puede llenar una botella y el contenido neto de la misma, etc.

Esta tarea también permitió notar que algunos estudiantes no tenían claro el significado del término *variable*, ni en qué sentido se entendía la "dependencia" entre dos de ellas. Así, se encontró que un alumno propuso como relación funcional la existente entre los hijos y sus padres, pues los segundos "dependen" de los primeros; la misma idea se encontró en otro estudiante, quien afirmó que habría una función entre los antiguos egipcios y el Río Nilo, dado que dependían de sus aguas para su subsistencia. Estas concepciones erróneas se discutirían posteriormente con los alumnos que las expresaron.

Luego de ser discutidas las propuestas de los alumnos respecto a la tarea para casa, se pasó a la siguiente situación didáctica., con la que se presentaría la primera función lineal a trabajarse en ambiente de aprendizaje. Además, en la tercera parte de esta situación didáctica se estudiaría brevemente el papel gráfico del parámetro a (en la representación $y = ax + b$)

Los aprendices recibieron un nuevo documento escrito, en el que brevemente se explicaba qué es un circuito eléctrico; luego se pedía a los alumnos anotar, en las tablas que el mismo documento incluía, los valores de corriente y voltaje que irían obteniéndose al manipular una fuente de voltaje (construida previamente por el profesor) conectada a una resistencia eléctrica. Para efectuar las mediciones, el grupo se trasladó a los laboratorios de física del plantel, en donde previamente el profesor había montado el circuito (constituido por la fuente de voltaje y una resistencia) descrito en el documento.

Se solicitaron dos voluntarios para tomar las mediciones: uno de ellos manipularía la fuente de voltaje mientras el otro realizaría las lecturas en los multímetros que, también previamente, el profesor había instalado con ese propósito.

El profesor solicitó al primer voluntario que manipulara la fuente de modo que se tuviera un voltaje de 0V. A continuación debía incrementarlo en "pasos" de 5V; el segundo voluntario debía comunicar al resto del grupo los valores de voltaje y corriente arrojados por los multímetros en cada uno de estos "pasos". Se procedería así hasta alcanzar un voltaje de 30V.

En cuestión de minutos las mediciones estuvieron completas, y todo el grupo las tuvo registradas en sus tablas. Entonces el profesor sustituyó la resistencia del circuito por otra de distinto valor, y solicitó la participación de dos nuevos voluntarios, para repetir las mediciones anteriores con la nueva resistencia. El proceso se repitió hasta contar con mediciones voltaje-corriente para cuatro resistencias eléctricas distintas.

Concluida esta toma de datos experimentales, el grupo regresó al salón de clases, en donde se discutió si existía una función entre el voltaje y la corriente eléctrica que pasaba por el circuito. Después de una breve discusión, el grupo llegó al acuerdo de que así era, efectivamente: además, para cada una de las resistencias empleadas en el experimento se tenía una función diferente, la dependencia voltaje-corriente eléctrica no era la misma. Entonces se entregó a cada alumno un escrito con la segunda parte de la tarea. En ella se les solicitaba emplear al menos dos nuevas representaciones para expresar cada una de las funciones encontradas en la primera parte. Rápidamente el grupo optó por graficar los datos de sus tablas, y el profesor indicó que se limitaran a ello; la segunda representación sería una tarea para casa.

Al avanzar en esta labor, pronto resultó claro para varios aprendices que los puntos encontrados se ajustarían a líneas rectas; este hecho se planteó al grupo entero, al mismo tiempo que el profesor cuestionó si sería válido unir los puntos con rectas: ¿tendrían algún significado los puntos que constituirían dichas rectas, aún cuando no se les hubiera obtenido experimentalmente? Los estudiantes no vieron en esta cuestión algún impedimento para trazarlas; los puntos intermedios, argumentaban, corresponderían a los valores de corriente y voltaje que se obtendrían en caso de disminuir el tamaño del "paso", el cual en la práctica había sido de 5V pero que podría ser más pequeño, tanto como lo permitieran las limitaciones experimentales; en principio, y si se contara con aparatos lo suficientemente precisos, podría ser tan pequeño como se deseara.

Esta apreciación es en principio correcta, y aunque pudo haberse profundizado en ella para llegar a la posibilidad de una gráfica discreta a nivel cuántico –o simplemente debido a las limitaciones experimentales–, esto no se llevó a cabo. De haberse hecho así, posiblemente se habría evitado el surgimiento de algunas concepciones erróneas encontradas durante la aplicación del instrumento de evaluación de la comprensión, después de finalizado el ambiente de aprendizaje. Éstas se discuten a profundidad en los apartados *Análisis de los resultados del post-test* y *Comparación entre los resultados del pre-test y el post-test.*

De este modo, hacia el final de la sesión los estudiantes habían construido cuatro gráficas –por sugerencia del profesor, lo habían hecho en el mismo plano cartesiano– cuya naturaleza se discutió brevemente: los puntos se ajustaban a líneas rectas, y era en principio válido trazar esas rectas, uniendo los puntos experimentales. Como tarea para la clase siguiente, deberían proponer otra representación para cada una de las cuatro funciones cuyas gráficas se habían obtenido así. De esta manera se buscaba que, por lo menos algunos de ellos, encontraran las ecuaciones correspondientes a las cuatro rectas obtenidas, con lo cual podrían discutirse algunas características básicas de las funciones lineales en la siguiente sesión.

Sesión VI.

Al comienzo de la sesión, el profesor reconstruyó en el pizarrón, con ayuda del grupo, las cuatro gráficas de la clase anterior. Hecho esto, preguntó a los alumnos qué representaciones alternativas habían propuesto para cada una de las cuatro funciones. Los aprendices expresaron que habían tratado de encontrar representaciones algebraicas para las cuatro rectas, y que habían conseguido hallarlas aunque algunos de los puntos experimentales no se ajustaban de manera exacta a los valores obtenidos al emplear las ecuaciones que habían propuesto. El profesor mencionó que esto no era motivo para suponer que las ecuaciones eran incorrectas, y un alumno pidió la palabra para afirmar que seguramente las mediciones tenían errores que hacían que los puntos no ajustaran exactamente. Esta explicación fue bien acogida por el grupo, y a continuación el profesor pidió a cuatro alumnos escribir en el pizarrón una representación cada uno, junto a la gráfica correspondiente.

Las representaciones propuestas por estos alumnos resultaron correctas, y cuando estuvieron registradas en el pizarrón, otros aprendices llamaron la atención sobre el hecho de que todas tenían la forma $I = CV$, en donde I = intensidad de la corriente eléctrica, V = voltaje aplicado y C = conductancia del circuito (la simbología I, V y C había sido introducida en la sesión anterior cuando se realizaba la toma de datos experimentales; C se define formalmente como el inverso multiplicativo de la resistencia R de un elemento eléctrico; ante el grupo, el profesor había definido esta cantidad en términos de la "facilidad" con que dicho elemento "deja pasar" la electricidad). Resaltando este hecho, el profesor hizo notar que, a mayor valor de C, las gráficas se volvían más "verticales", de modo que el valor de la constante C parecía "controlar la inclinación" de las rectas.

Retomando conocimientos construidos antes de la implementación del ambiente de aprendizaje, el profesor inquirió a los estudiantes sobre el nombre que se da a ecuaciones como $I = CV$. Los estudiantes sabían ya que se les conoce como ecuaciones lineales, y así lo expresaron. En este punto el profesor introdujo la notación $I(V) = CV$, especificando que, al hablar de funciones, el paréntesis no indicaba multiplicación sino dependencia, de manera que $I(V)$ se leería "I, que depende de V" o "I de V". Además, dio el nombre de "funciones lineales" a aquellas cuya representación algebraica consistiera en una ecuación lineal; de este modo se llegó a una primera definición de función lineal.

En este punto, el profesor cuestionó al grupo sobre qué otras características distinguirían a una función lineal, tomando en cuenta las cuatro funciones de este tipo registradas en el pizarrón. Un alumno mencionó el hecho de que sus representaciones gráficas eran líneas rectas, y otro más afirmó que sus representaciones serían "proporcionales". Ante esta última respuesta, el profesor preguntó el significado de la palabra proporcional, a lo cual no hubo respuesta. Al parecer, en el grupo había un conocimiento intuitivo sobre lo que significaba la proporcionalidad, pero este no era lo suficientemente sólido como para ofrecer una definición clara. Para intentar clarificar este punto, el profesor solicitó a cada alumno que escribiera su propia definición de "proporcional". Cuando todos tuvieron listas sus definiciones, se les pidió que intercambiaran la propia con la de algún compañero, y acto seguido tres estudiantes debieron leer las definiciones que tenían en las manos. Estas resultaron poco claras, al punto de que aún quienes las habían leído afirmaron no comprenderlas (pero debe mencionarse que la idea correcta de proporcionalidad subyacía en todas ellas).

Haciendo notar la poca claridad de las definiciones leídas, y ante la ausencia de una mejor definición en este sentido, el profesor fijó como objetivo de la sesión tratar de llegar a una definición consensuada de proporcionalidad, la cual resultara clara para todos. Dibujó en el pizarrón cinco tablas, en tres de las cuales había proporcionalidad entre parejas de datos. Acto seguido preguntó al grupo en cuáles de las tablas habría proporcionalidad, y porqué. Los estudiantes identificaron rápidamente las tablas correctas, y siguió una discusión sobre qué característica las hacía ser proporcionales.

Poco a poco el grupo llegó a una definición según la cual, en una tabla de datos habría proporcionalidad cuando algebraicamente esta tabla pudiera representarse con una ecuación del tipo $y = ax$; si bien esta definición es incompleta, se consideró que tenía potencial para desarrollarse posteriormente, por lo que una vez que el grupo estuvo de acuerdo con ella, se dio por terminada la sesión. Los estudiantes llevaron, como tarea para casa, una nueva situación didáctica en la cual deberían especificar si la ganancia producto de la venta de boletos en un cine (entendidas como el dinero que ingresa por ese concepto, una vez recuperada la inversión necesaria para solventar costos de operación) sería función del número de boletos vendidos; tanto en caso negativo como afirmativo, debían justificar su respuesta, y en el segundo, debían además especificar quiénes serían las variables dependiente e independiente así como el rango y el dominio de la supuesta función.

Sesión VII.

Se retomaron, con ayuda del grupo, aspectos trabajados en sesiones anteriores: la definición de función en términos de la dependencia entre dos cantidades, llamadas variables; una función se denominaría lineal si su representación algebraica es una ecuación lineal; la representación gráfica de una función lineal sería una línea recta, cuya "inclinación" estaría controlada por el valor de la constante que apareciera multiplicando a la variable independiente.

A continuación se pasó a revisar el trabajo de los alumnos en su tarea par casa, la cual debía haberse realizado por equipos. Sin embargo, argumentando que les había resultado complicado reunirse por la tarde del día anterior (cuando habían recibido esta tarea), la mayor parte del grupo afirmó no haber concluido el trabajo solicitado. En vista de ello, se decidió trabajar en la situación didáctica durante la clase.

No hubo dificultades para que el grupo llegar a la conclusión de que la ganancia G era función del número de boletos vendidos B en un cine. Las variables dependiente e independiente involucradas en esta función quedaron definidas como G y B, respectivamente (nomenclatura introducida en el texto de la situación didáctica), mientras que hubo ligeras complicaciones para definir el dominio y el rango de la función: los alumnos tendían a decir, por ejemplo, que el dominio serían "los boletos" y el rango "las ganancias". Fue necesario recordar la definición anterior de dominio y rango como los conjuntos de valores que podrían tomar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Desde este punto de vista, se logró que los aprendices identificaran el dominio con "los números del 0 hasta la cantidad de boletos que llene el cine" y el rango con "los números desde el 0 hasta la cantidad de dinero ganada por la venta de todos los boletos".

Acto seguido se pasó a la segunda parte de la situación didáctica, en la cual, en primer lugar, los estudiantes debían representar la función $G(B)$ de por lo menos tres maneras diferentes. Habiendo trabajado con gráficas, tablas y ecuaciones anteriormente, esas fueron las representaciones elegidas por los estudiantes para resolver esta tarea. En poco tiempo el grupo obtuvo las representaciones necesarias; aquí pudo notarse que algunos alumnos tenían problemas con la elección de escalas adecuadas en el plano cartesiano, e incluso llegaban a considerar válido emplear una escala en un segmento de un eje, y usar otra distinta en otro segmento. Cuando esto les fue señalado por el profesor, admitieron en seguida que no sería correcto, pero que lo hacían "por comodidad". Se les solicitó que lo hicieran, entonces, según lo que consideraban "correcto", y mostraron saber, efectivamente, cómo debía procederse a este respecto. Sin embargo, durante la aplicación del instrumento de evaluación de la comprensión, al final del ambiente de aprendizaje, se encontró evidencia de que seguían dando un uso erróneo a las escalas en un plano cartesiano. Esta fue una deficiencia del ambiente de aprendizaje, dado que no se puso mayor atención a la limitación detectada.

Contando ya con las tres representaciones solicitadas, se les puso en común y se acordó que se había llegado a representaciones correctas. En este punto, sin embargo, debió discutirse a profundidad el hecho de que las gráficas eran discretas. Al no hacerse así, probablemente se fomentó una concepción errónea según la cual, la gráfica de una función lineal es siempre continua. Esta concepción pudo registrarse durante la aplicación del instrumento de *post-test*.

Se pasó a la siguiente tarea. Ahora, debían emplearse las tres representaciones para determinar el número mínimo de boletos que debían venderse para lograr una ganancia de más de $20 000. El sentido de la pregunta pareció claro para todo el grupo y los alumnos pusieron manos a la obra. Hacia el final de la sesión la pregunta estaba respondida, y la solución se validó en una breve discusión grupal.

Ésta fue la última sesión antes de un periodo vacacional de una semana de duración. Buscando que los estudiantes tuvieran un tiempo de descanso, no se les propuso tarea para casa. El ambiente de aprendizaje continuaría hasta transcurrido este periodo vacacional.

Sesión VIII.

Al ser la primera sesión después de un periodo vacacional, el inicio se dedicó a retomar los conceptos trabajados en la primera parte del ambiente de aprendizaje. Para ello se pidió a los estudiantes que reconstruyeran lo visto hasta ese momento dentro del tema de funciones. A juzgar por el tipo de participaciones y su cantidad, pareció que los conocimientos se recordaban bien: primeras nociones de los conceptos de función, variable, variable dependiente e independiente, rango, dominio, representaciones de funciones, funciones lineales y características básicas. A estas alturas del ambiente de aprendizaje, también parecía que los estudiantes tenían conciencia de que tablas, gráficas y ecuaciones eran representaciones de la misma entidad, y no las concebían como objetos aislados entre si.

Se pasó después a la tercera parte de la situación didáctica que había comenzado a trabajarse en la sesión anterior. Se pretendía mostrar el efecto gráfico de cambiar el valor del parámetro b (en la representación $y = ax + b$). Los estudiantes debían suponer que los costos de operación del cine eran a) de \$10 000 y b) de \$30 000, para a continuación obtener tres representaciones de las funciones *G(B)* que resultaban de cada caso. La tarea resultó conceptualmente sencilla para la mayoría del grupo, aunque procedimentalmente mostró ser larga.

Después de varios minutos, los aprendices, trabajando en equipos de tres a cuatro personas, habían construido las representaciones solicitadas. Se solicitó a tres estudiantes de tres equipos registrarlas en el pizarrón (cada alumno una representación diferente), y cuando esto se hubo realizado, hubo acuerdo en el grupo en el sentido de que las representaciones eran correctas. El profesor llamó la atención respecto a la forma de las representaciones algebraicas obtenidas: $G(B) = 42B - c$, donde c era el costo de operaciones en cada inciso. Preguntó al grupo de qué manera afectaba el valor de c a la representación gráfica correspondiente. Varios estudiantes pidieron la palabra, y se llegó a la conclusión de que c determinaba el punto en el que las rectas tocaban al eje vertical. El profesor señaló que este hecho era de importancia, y retomó lo estudiado sesiones atrás respecto a la "inclinación" de las gráficas de funciones lineales. Se recordó que dicha "inclinación" era "controlada" por el valor del número que multiplicaba a la variable independiente. En este punto, el profesor dio la denominación de "parámetros" a estas dos constantes, las cuales determinaban, cada una, la "inclinación" y el punto de intersección con el eje vertical de las gráficas de funciones lineales.

Discutido esto, se pasó a la cuarta parte de la situación didáctica. En ella, se presentaba un plano cartesiano en el cual se encontraban la gráficas de cuatro funciones *G(B)* correspondientes a distintos precios de los boletos y distintos costos de operación. Se planteaban cinco preguntas, de las que sólo se responderían dos; las tres restantes serían tarea para casa y se trabajaría con ellas en la siguiente sesión.

La primera pregunta pedía determinar cuál de las gráficas representaba la situación en la que los costos de operación eran más altos. Minutos antes, se había llegado a la conclusión de que la intersección de estas rectas con el eje vertical daría esa información, de modo que en poco tiempo esta pregunta fue contestada por todo el grupo. En la siguiente pregunta los aprendices debían especificar qué gráfica correspondía a la situación en la que los boletos eran más baratos. Responder esto llevó algo más de tiempo: los estudiantes tuvieron que recordar primero que el precio de los boletos aparecía, en las representaciones algebraicas de las funciones involucradas en esta situación, multiplicando a la variable independiente (el número de boletos vendidos, *B*), y luego debieron conectar esto con un hecho discutido antes: ese número, ese parámetro, "controlaba" la "inclinación" de las rectas, de modo que a mayor valor, mayor inclinación y viceversa. Entonces, llegaron a la conclusión de que la "más horizontal" de las rectas, la "menos inclinada", correspondería al menor valor de dicho parámetro, y por ende, al menor precio de los boletos. Los alumnos llegaban a este resultado cerca del fin de la sesión; se pasó a una breve discusión grupal de las respuestas proporcionadas, que fueron las mismas en todo el grupo.

Como tarea para casa, los aprendices debían resolver las tres preguntas restantes: determinar qué gráficas representaban situaciones en las que el costo de los boletos era el mismo; escribir el costo de operación y el precio de los boletos correspondiente a cada gráfica, y finalmente obtener la representación algebraica de cada una.

Sesión IX.

La sesión comenzó con la revisión de la tarea para casa. Las tres preguntas fueron respondidas, aparentemente, sin dificultades importantes. Al discutir las respuestas del grupo y sus razones para darlas, se recapitularon algunos hechos fundamentales: la representación algebraica de funciones lineales tenía la forma $V.D. = cte \cdot V.I. + cte$. Sus representaciones gráficas eran líneas rectas, cuya "inclinación" era controlada por el valor de la constante que, en la representación algebraica, multiplicaba a la variable independiente, mientras la otra constante determinaba el punto de intersección de la gráfica con el eje vertical. Con ello en mente, resultaba claro para los estudiantes cómo encontrar los costos de operación correspondientes a cada gráfica: sólo debía localizarse la intersección de cada una con el eje vertical.

Por otra parte, para determinar el costo de los boletos se propusieron varios métodos. Al trabajar con gráficas, los aprendices hicieron amplio uso de sus reglas y escuadras. Los métodos registrados, y que fueron compartidos en una discusión grupal organizada con este propósito, fueron los siguientes:

Algunos estudiantes habían localizado gráficamente el número de boletos que debía venderse para recuperar el dinero invertido en costos de operación, en cada gráfica; luego habían dividido el dinero invertido entre la cantidad de boletos así determinada: el resultado era el costo de un boleto.

Otro método consistía en buscar un punto sobre cada gráfica, que correspondiera a valores enteros de G y B (aparentemente, esto se hacía en aras de la "comodidad" en los cálculos, pero en realidad sólo significó más trabajo). Una vez localizado un punto con estas características, se hallaba la distancia entre la intersección de la gráfica con el eje vertical (correspondiente al dinero invertido en costos de operación) y la ganancia correspondiente a ese punto; el resultado era dividido entre el valor de B determinado por el punto localizado, lo cual arrojaba el precio de un boleto.

Un método más fue tomar el "extremo superior" de una gráfica, y determinar los valores de G y B para ese punto. Así se encontraba, gráficamente, el dinero obtenido por la venta de un número conocido de boletos, y se dividía la primera cantidad por la segunda (principio subyacente a todos los métodos encontrados). Esto llevaba al precio de un boleto.

El método considerado como "estándar" apareció también: se tomaba cualquier punto en la gráfica, se determinaban los valores correspondientes para G y B, se dividía uno entre otro y el resultado era el precio de cada boleto. A estas alturas de la sesión, los estudiantes no tuvieron dificultad en ver que éste método era equivalente a los demás y resultaba más eficiente.

Discutidos los diferentes procedimientos para determinar el costo de un boleto, se volvió a la tarea principal, la respuesta a las tres preguntas planteadas en la sesión anterior. La primera ya había sido resuelta sin tener que encontrar los precios exactos de los boletos en cada situación, pues para determinar qué gráficas correspondían al mismo precio sólo era necesario encontrar dos rectas que fueran paralelas (los estudiantes ya habían notado que el precio del boleto correspondía al parámetro que "controlaba" la "inclinación"). La respuesta a la segunda pregunta, que requería escribir los precios de los boletos y los costos de operación para cada función, quedó dada una vez discutidos los métodos para determinar los precios de los boletos (encontrar los costos de operación era más sencillo, como ya se ha mencionada; bastaba localizar el punto de intersección de la gráfica en cuestión con el eje vertical). Conociendo ambas cantidades, y concientes de que ellas correspondían a las constantes de la representación algebraica $V.D. = cte \cdot V.I. + cte$, la tercera pregunta fue contestada prácticamente de inmediato.

Después de discutir los resultados, se pasó a la siguiente situación didáctica. Colocándolos en la situación hipotética de una persona que corre a una velocidad dada, se le preguntó a los alumnos si la distancia recorrida por esta persona sería función del tiempo que lleva corriendo. Sin dudarlo, varios estudiantes respondieron afirmativamente. Esta respuesta fue puesta a consideración del grupo, que la respaldó con argumentos sencillos como “la distancia que recorra depende de cuánto tiempo lleve corriendo”. Entonces se hizo entrega del documento sobre el cual se trabajaría. En la consigna se proporcionaban las velocidades máximas que alcanzan un caballo y un perro. Los estudiantes debían representar gráfica y algebraicamente las funciones $d(t)$ para cada uno de estos animales.

Transcurrido un tiempo la mayor parte del grupo había obtenido las gráficas y ecuaciones solicitadas. En algunos casos se encontraron dificultades con el concepto de velocidad, las cuales aparentemente no resultaron graves y pudieron ser resueltas en breve. La manera de proceder, en general, consistía en obtener una tabla en la que se consignaran algunos valores para t y d, para graficarlos en un plano cartesiano. Hecho esto, se les unía con una recta, lo cual parecía correcto pues los puntos se ajustaban a una, y era además válido pues el tiempo transcurre continuamente; esto se mencionó pero no se profundizó en ello.

Se pasó a discutir la forma de las representaciones obtenidas. De nuevo, las ecuaciones eran lineales y las gráficas rectas, de modo que se trataba de funciones lineales. Las ecuaciones eran de la forma $d(t) = cte \cdot t$, y la constante había resultado ser la velocidad de cada animal. La gráfica correspondiente al más rápido era más “vertical” que la otra, lo que dio pie a una breve discusión en la que volvió a tocarse el hecho de que ese parámetro determinaba la “inclinación” de una recta.

Para finalizar la sesión, se entregó, por parejas, el documento con la segunda parte de esta situación didáctica. Se presentaba un plano cartesiano con las gráficas de tres funciones lineales, correspondientes a las tres funciones $d(t)$ de una liebre, un perro y una persona, cuyas velocidades –distintas para cada una– se daban en el texto. En él también se explicaba que, en una carrera ficticia, los tres competidores habían partido desde distintas posiciones, uno con ventaja sobre el otro, y el tercero con ventaja sobre los otros dos, con el objeto de volver la carrera más equitativa, pues la liebre –la más rápida de los tres– corría a una velocidad significativamente mayor que la persona –la más lenta–. Esto se veía reflejado en las gráficas presentadas. En la situación se planteaban cinco preguntas.

La primera pregunta solicitaba identificar qué gráfica correspondía a cada competidor de esta carrera ficticia, con base en la información proporcionada. Para responder correctamente, podía procederse de dos maneras: una, identificar las ordenadas al origen de las tres rectas; así se conocerían las "ventajas" de cada competidor y podría inferirse qué línea correspondía a cada uno. La otra manera de encontrar la respuesta era asociar la recta más "inclinada" con el competidor más veloz, y proceder similarmente con los otros dos.

La consigna especificaba que debían explicarse las razones por las cuales daba determinada respuesta, y al discutir grupalmente las soluciones de los alumnos se observó que el primer método había predominado.

En la segunda pregunta debía determinarse la ventaja con la que había salido cada competidor. Implícitamente los alumnos habían resuelto esta cuestión en la pregunta anterior, así que en unos momentos pudo pasarse a la tercera pregunta.

Esta pregunta consistía en determinar si la liebre alcanzaba al perro, y de ser así, después de cuánto tiempo. Los estudiantes comprendieron rápidamente que para responder esto debían determinar si la gráfica de la liebre intersectaba a la del perro; notaron que así era, y con ayuda de escuadras determinaron el valor de t para el que esto sucedía, con lo que obtuvieron la respuesta.

La manera de encontrar la solución fue discutida y validada en grupo, antes de dar por terminada la sesión y establecer la tarea para casa: resolver las dos preguntas restantes.

Sesión X.

La sesión comenzó recapitulando el trabajo de la anterior y pidiendo soluciones a las preguntas que habían quedado como tarea para casa. En la primera de estas los estudiantes tenían que averiguar si el perro alcanzaba a la persona, y de ser así, en cuánto tiempo. La respuesta se había encontrado del mismo modo que la de la pregunta anterior, lo cual no presentó mayor dificultad.

La última pregunta de esta situación requería escribir las representaciones algebraicas de las tres funciones lineales involucradas. Algunos aprendices tuvieron problemas para resolverla; no habían comprendido que las ecuaciones que obtuvieran debían ser consistentes con las gráficas del problema. Después de unos minutos en los que fue evidente a estos alumnos les sería difícil superar esta dificultad, se organizó una discusión grupal para poner en común los métodos de solución que estaban intentándose en el grupo. Un alumno dio la clave que sus compañeros aparentemente necesitaban: la ecuación para una recta dada debía producir puntos de esa recta al sustituir en ella distintos valores de *t*, la variable independiente. Al recibir esta información, los aprendices que habían tenido problemas pudieron comenzar a resolver la tarea, y después de unos minutos más se tuvieron listas las primeras ecuaciones que solucionaban la tarea.

Al exponer al grupo sus métodos de solución, varios alumnos afirmaron haber procedido de la manera "estándar", localizando puntos sobre cada recta, colocándolos en forma tabular y luego buscando una ecuación que se ajustara a ellos. Algunos agregaron que habían empleado la información del problema, buscando incluir la velocidad y la ventaja de cada competidor en sus ecuaciones. Resultaba claro que la ventaja debía aparecer sumando, pero sólo se convencieron de que la velocidad debía multiplicar a la variable independiente hasta que notaron que así obtenían una ecuación que se ajustaba a los puntos localizados.

El fin de la sesión llegó después de esta discusión. Como tarea para casa, se entregó a cada alumno el escrito que planteaba la siguiente situación didáctica. Ésta mostraba la gráfica de una función lineal decreciente. Se explicaba que la gráfica correspondía a la variación con el tiempo de la cantidad de agua en un tinaco, y se preguntaba si el tinaco estaba llenándose o vaciándose, y en cualquier caso, cuánta agua había inicialmente. También se pedía encontrar una representación algebraica para esta gráfica.

Sesión XI.

La última sesión del ambiente de aprendizaje comenzó con la discusión de las respuestas del grupo a las preguntas que habían quedado como tarea para casa.

Determinar la cantidad inicial de agua, y si la gráfica correspondía a un tinaco llenándose o a uno vaciándose, no pareció causar dificultades. Encontrar la representación algebraica de la gráfica mostrada también le fue posible a todo el grupo, y al discutirse los modos de hacerlo se encontró que se habían empleado diversas variantes del expuesto por algunos estudiantes en la sesión anterior.

En este punto, el profesor preguntó cuál sería el valor de la constante que multiplicaba a la variable independiente. Un alumno dio la respuesta, -1. Se resaltó que la constante era negativa, la primera que se encontraba con esa característica. Se señaló también que la recta tenía una "inclinación hacia abajo", por oposición a las rectas anteriores que tenían siempre "inclinaciones hacia arriba". Esto se asoció con el hecho de que la constante fuera negativa, y se le denominó "pendiente".

Una vez discutidos los puntos anteriores, se pasó a la segunda parte de la situación didáctica. Se solicitaba encontrar la representaciones gráfica y algebraica de varias funciones $C(t)$, con C = cantidad de agua en el tinaco y t = tiempo, para diversas condiciones dadas. A veces el tinaco debía estar llenándose, otras vaciándose. Se daban la cantidad inicial de agua y la velocidad a la que el tinaco se vaciaba o se llenaba en cada caso.

El grupo, trabajando por parejas, puso manos a la obra, y después de un tiempo razonable las gráficas y ecuaciones solicitadas estaban listas. Siguiendo la metodología de trabajo de otras sesiones, se pasó a discutir en grupo las distintas soluciones y métodos que pudieran haber surgido. Al no haberse presentado problemas de mayor envergadura, las ecuaciones y gráficas correctas fueron validadas y consensuadas con relativa facilidad. De nuevo, se hizo notar que aquellas ecuaciones con "pendiente negativa" correspondían a gráficas "inclinadas hacia abajo", y cómo mientras mayor valor absoluto tuviera la pendiente, mayor "verticalidad" para la recta. Volvió a señalarse el papel que jugaba la otra constante, determinando la intersección de las gráficas con el eje vertical. También se relacionó esto con los roles particulares que en este caso jugaban ambas constantes: velocidad de llenado o vaciado y cantidad inicial de agua.

Finalizada esta fase, se procedió a entregar, por parejas, el documento que planteaba la última situación didáctica del ambiente. En un breve texto se explicaba el sistema de cobro por consumo de gas aplicado por algunas empresas; el gas se surte desde un tanque de cientos de litros de capacidad, y al usuario se le cobra la instalación de un medidor cuyas lecturas permitirán determinar la cantidad de gas que consume. Así, el usuario paga, en total, la instalación del medidor más lo correspondiente a los litros de gas que haya consumido.

Después del texto se mostraba un plano cartesiano en el que aparecían dos rectas paralelas, ambas con ordenadas al origen positivas, una mayor que la otra. Los ejes del plano no tenían marca alguna, salvo las indicaciones "*C (en litros)*" y "*D (en $)*" en el horizontal y el vertical, respectivamente. C era la cantidad de gas consumida por un usuario y D el dinero que debería pagar en total (instalación del medidor más consumo de gas). Así, las dos rectas representaban dos funciones $D(C)$ correspondientes al mismo precio del gas, pero a diferentes costos por la instalación del medidor.

La situación planteaba seis preguntas. La primera de ellas inquiría cuál de las dos gráficas representaba la situación en la que la instalación del medidor era más cara. Algunos estudiantes tuvieron dificultades para responder esto; fue necesario indicarles que, para un consumo de cero litros de gas, en ambas gráficas ya se tenía un costo a pagar. La información fue suficiente para que dieran con la respuesta correcta.

La segunda pregunta consistía en especificar qué gráfica representaba la situación en la que el litro de gas era más caro. Hubo algunos aprendices que notaron que, al ser ambas rectas paralelas, el precio del gas sería el mismo en ambos casos; pero una parte importante del grupo tuvo problemas en esta pregunta, pues en la gráfica no había ninguna indicación numérica y les parecía necesario contar con alguna para responder. Algunos de estos alumnos definieron escalas arbitrarias para tomar valores hipotéticos de consumo, que les daban precios hipotéticos a pagar. Este método pronto fue adoptado por prácticamente todos los estudiantes que habían tenido dificultades con la pregunta. Al emplearlo, se obtiene una cantidad de dinero mayor para la recta con la instalación mas cara, lo que llevó a algunos a afirmar que el gas era más caro para esa recta; el profesor les recordó que, en la cantidad a pagar que habían encontrado, estaba incluida la instalación del medidor, la cual debía descontarse si lo que se buscaba era el precio del gas. Al tomar esto en cuenta, llegaron a la conclusión correcta, el precio del gas era el mismo en ambos casos.

En la tercera pregunta se mostraba una lista de cuatro ecuaciones lineales, entre las que se hallaban las correspondientes a las rectas de la gráfica. Los alumnos debían indicar qué ecuación correspondía a cada recta. Conscientes ya de que la pendiente de las rectas era la misma y de que la intersección con el eje D era mayor en una que en la otra, la mayor parte del grupo determinó rápidamente las ecuaciones correctas. Pudo pasarse así a la siguiente pregunta.

En la cuarta pregunta era necesario establecer cuál era el costo por la instalación del medidor en cada caso. Contando con las ecuaciones de las rectas, la pregunta fue resuelta en poco tiempo por prácticamente todo el grupo. Sólo algunos alumnos tuvieron dificultades para asociar la ordenada al origen de las rectas con el costo de instalación del medidor, pero no fue necesaria ninguna intervención; después de pensarlo un poco, lograron dar la respuesta correcta.

La quinta pregunta requería hallar el precio del gas en cada caso. El método predominante para encontrar la respuesta consistió en emplear las ecuaciones para calcular el precio a pagar por un consumo dado de gas. Al resultado se le restaba lo correspondiente a la instalación del medidor, y la cantidad obtenida se dividía entre los litros de gas consumidos. Así se obtenía el precio de un litro de gas. También se registraron algunos estudiantes que evitaron este trabajo extra, notando que el precio del litro de gas correspondía a la pendiente de las rectas. Al discutir grupalmente las respuestas a esta pregunta, varios aprendices cayeron en la cuenta de que habían trabajado más de lo necesario.

En la última pregunta se pedía suponer que un punto señalado sobre una de las rectas correspondía a un consumo de setenta litros de gas. El segmento de recta que iba desde este punto hasta la segunda gráfica era paralelo al eje *D*. Se debía encontrar el dinero total a pagarse por este consumo, para ambas funciones. Una vez resueltas la preguntas anteriores, ésta no pareció ofrecer dificultades importantes a la generalidad del grupo, que pudo encontrar las cantidades solicitadas.

Como cierre de sesión, se discutieron los diferentes métodos y respuestas encontrados para cada pregunta. Aunque se registraron algunas variantes, todo el grupo había empleado esencialmente las mismas ideas en sus soluciones, por lo que no fue difícil llegar a un acuerdo sobre las maneras más eficientes de proceder y respecto a las respuestas correctas a esta tarea.

Durante la siguiente sesión se aplicó el instrumento *post-test*, lo cual se llevó a cabo sin previo aviso a los estudiantes. Los resultados registrados en este instrumento, y su comparación con los del *pre-test*, arrojan luz respecto a los logros y limitaciones del ambiente de aprendizaje descrito en las páginas precedentes. Esto se discute en profundidad en el apartado *Análisis de los datos*.

Diseño del instrumento para la evaluación de la comprensión. Condiciones de su aplicación.

Evaluar hasta qué punto se ha conseguido un aprendizaje con comprensión hace necesario contar con algún instrumento que permita explorar en qué medida los estudiantes son competentes en tareas que impliquen la comprensión de los temas a tratar. El modelo de comprensión adoptado hasta el momento está basado en las conexiones entre representaciones internas de dichos conocimientos, por lo que idealmente lo deseable sería contar con un instrumento con el cual fuera posible observar directamente esta clase de conexiones; pero sucede que las representaciones internas son entidades mentales no observables directamente. Al respecto, Hiebert y Carpenter (1992) sugieren la posibilidad de trabajar con representaciones externas (lenguaje hablado y escrito, gráficas, objetos físicos), al tiempo que otras fuentes (Moschkovich *et al.*, 1993; NCTM, 2000), proporcionan lineamientos concretos en el sentido de explorar en qué medida los estudiantes hacen conexiones entre representaciones externas de una función (gráfica, algebraica, tabular, verbal), entre diferentes perspectivas del concepto (función como *objeto* y función como *proceso*), y distinguen cuáles son más útiles en una situación dada. Todo ello es aplicable al caso particular de funciones lineales. Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) afirman que una de las consecuencias del aprendizaje con comprensión es que la habilidad para transferir conocimientos a nuevas áreas se ve afectada favorablemente.

De esta manera, para evaluar el grado de comprensión del concepto de función, y en particular del de función lineal, que los estudiantes poseyeran antes y después de la implementación del ambiente de aprendizaje, se diseñó una prueba escrita constituida por 36 reactivos cuya resolución demanda las habilidades mencionadas, consideradas en la literatura como esenciales para la comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992) de los conceptos de interés (Arteaga y Santos, 1999; Billings y McClure, 2005; Davis, 2005; Hines, 2002; Moschkovich, 2004; Moschkovich *et al.*, 1993; NCTM, 1989; NCTM, 2000; Schwartz y Yerushalmy, 1992; O'Callaghan, 1998). Recapitulando, tales habilidades incluirían capacidad para moverse flexiblemente entre varias representaciones y perspectivas de una función, así como para transferir conocimientos a nuevos contextos.

Para explorar ésta última habilidad, durante la implementación del ambiente de aprendizaje los contenidos fueron presentados dentro de contextos no matemáticos. El instrumento de evaluación de la comprensión incluyó únicamente tareas en contextos puramente matemáticos, de modo que para su resolución los estudiantes tuvieron que transferir lo aprendido en un tipo de contexto, a otro completamente diferente.

El instrumento de evaluación de la comprensión fue aplicado a los alumnos, de manera individual, en dos momentos distintos: el primero, antes de comenzar con la implementación del ambiente de aprendizaje, cuando tomó el doble papel de un *pre-test* con el cual explorar el nivel de comprensión que los alumnos ya tenían sobre los conceptos a trabajarse, y el de una prueba diagnóstica que permitiera evaluar los conocimientos previos de los aprendices.

El segundo momento de su aplicación fue una vez finalizada la implementación del ambiente. En esta segunda aplicación, el instrumento sirvió como un *post-test* cuyos resultados fueron comparados con los del *pre-test*, con lo que se recabó información sobre la incidencia del ambiente de aprendizaje en la comprensión que los estudiantes alcanzaron sobre los conceptos estudiados.

Cabe mencionar que durante la implementación del ambiente de aprendizaje, el autor sondeó los avances y dificultades de los alumnos en su trabajo en las tareas asignadas, con lo cual pudo obtenerse información extra sobre el desarrollo de la comprensión que los alumnos mostraban en un tópico determinado (Hiebert y Carpenter, 1992; Pirie y Kieren, 1992). El análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas, registradas en los materiales que les fueron proporcionados –los cuales quedaron en poder del autor–, así como las notas que el propio autor tomaba en su bitácora de clase, han servido también como apoyo al instrumento de evaluación de la comprensión.

El instrumento se presenta, tal y como lo recibieron los estudiantes para su solución, en el anexo 2 de este trabajo. Las habilidades y conocimientos que se evalúan en cada uno de los reactivos que lo constituyen quedan especificadas en la tabla 2:

Tabla 2. Habilidades y conocimientos evaluados por reactivo.

Habilidades/Conocimientos	Reactivo
Conceptos básicos: variable, función, función lineal.	1
	2
	3
Identificación de los elementos de $y = ax + b$.	4a
	4b
Identificación de la forma de la gráfica de $y = ax + b$. Perspectiva de función como objeto	4c
Identificación de regularidades en representaciones tabulares de relaciones lineales. Perspectiva de función como proceso.	5
	6a
Paso de la representación tabular a la representación algebraica de una función lineal. Perspectiva de función como proceso.	6b
Conocimiento del plano cartesiano. Paso de la representación tabular a la representación gráfica de una función lineal. Perspectiva de función como proceso.	7
Conocimiento del plano cartesiano. Paso de la representación algebraica a la representación gráfica de una función lineal. Perspectiva de función como proceso.	8
Conocimiento del plano cartesiano. Paralelismo y pendiente. Perspectiva de función como objeto.	9a
Conocimiento del plano cartesiano. Intersecciones de gráficas de funciones lineales con el eje y. Perspectiva de función como objeto.	9b
Paso de la representación gráfica a la representación algebraica de funciones lineales y cuadráticas. Perspectiva de función como objeto.	9c
	11a-11i

Paso de la representación gráfica a la representación algebraica de una función lineal. Paso de la perspectiva de función como objeto a la de función como proceso.	9d, 9d', 9d'', 9d'''
	9e, 9e'
	9f, 9f'
	9g, 9g'
Conocimiento del plano cartesiano. Paralelismo. Perspectiva de función como objeto.	10a
	10c
Paso de la representación algebraica a la representación gráfica de una función lineal. Paso entre las perspectivas de función como objeto y como proceso.	10b
	10d

Recabación de datos.

La principal fuente de datos para valorar las comprensiones desarrolladas por los alumnos fue el instrumento para la evaluación de la comprensión, consistente en una prueba escrita diseñada siguiendo los lineamientos sugeridos por literatura pertinente (Hiebert y Carpenter, 1992, Moschkovish et al., 1993). Ésta fue aplicada antes y después de la puesta en práctica del ambiente de aprendizaje, y la comparación entre los resultados de ambas aplicaciones permitió explorar en qué medida se lograron las comprensiones deseadas.

Por otra parte, durante la implementación del ambiente de aprendizaje también se recabaron datos concernientes al desarrollo de las comprensiones de interés. Durante cada sesión de trabajo con los alumnos, éstos recibían un escrito con la tarea a realizar y espacio para escribir sus desarrollos y respuestas. Dicho material quedó en poder del autor, constituyendo una suerte de registro del desarrollo de la comprensión de cada estudiante, así como de algunos obstáculos y dificultades que éstos encontraron durante la instrumentación del ambiente de aprendizaje.

Finalmente, la bitácora de clase del autor sirvió como apoyo a las dos fuentes de datos anteriores. Durante y después de cada sesión de trabajo, se tomaban notas concernientes al desarrollo de la clase, las dificultades que se presentaban y los modos de enfrentarlas, estrategias seguidas por los estudiantes para resolver las tareas encomendadas, entre otras generalidades relacionadas con la implementación del ambiente.

Análisis de los datos.

Los datos recabados han sido analizados e interpretados bajo la luz del modelo de aprendizaje con comprensión de Hiebert y Carpenter (1992) y de los lineamientos sugeridos por Moschkovich *et al*. (1993) y el NCTM (1989; 2000) en cuanto a la comprensión de los conceptos de función y función lineal. Estos datos son de naturaleza primordialmente cualitativa, y de su análisis es posible inferir hasta qué punto el ambiente de aprendizaje diseñado favoreció que los estudiantes desarrollaran una comprensión de los contenidos señalados.

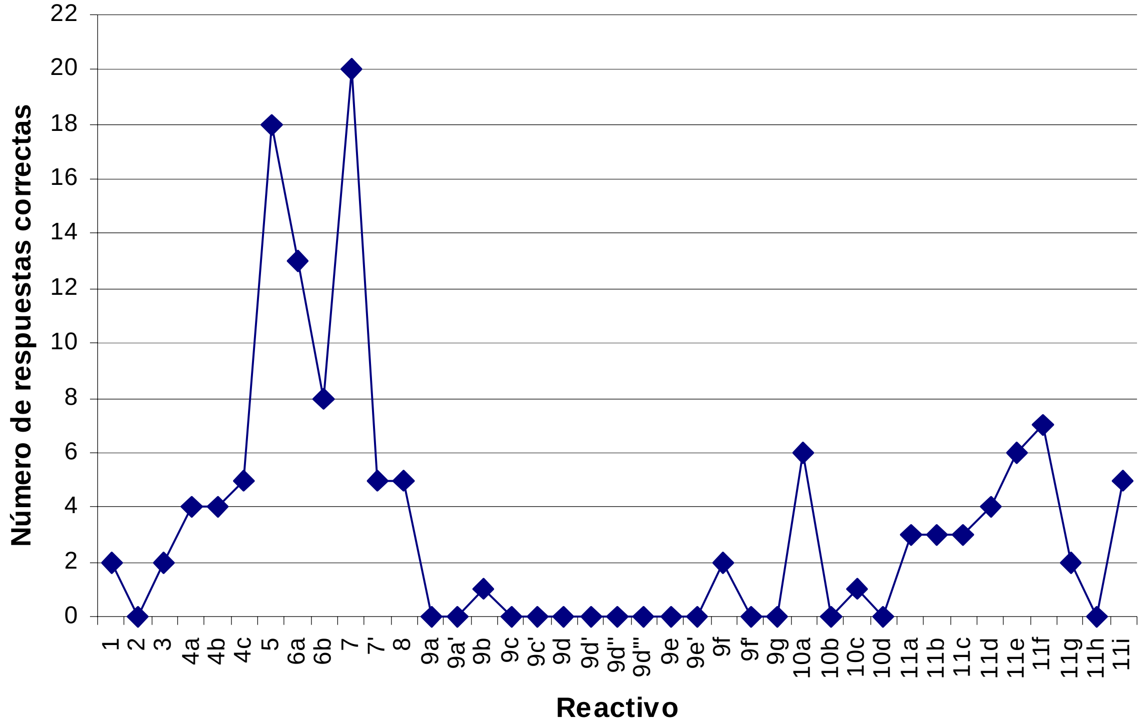
En particular, se examinó en qué medida los estudiantes llegaron a comprender a las funciones como relaciones de dependencia entre variables, que pueden ser representadas de diversas maneras, y hasta qué punto eran capaces de realizar conexiones entre diversas representaciones y perspectivas de estas entidades matemáticas (Moschkovich, *et al*., 1993, NCTM, 1989; NCTM, 2000). También fue de interés evaluar el desempeño de los alumnos al transferir conocimientos adquiridos en contextos no matemáticos a contextos puramente matemáticos. Recuérdese que, siguiendo a Hiebert y Carpenter (1992), una consecuencia de la comprensión es que esta clase de procesos de transferencia se ve favorecida.

El instrumento de evaluación de la comprensión constó de una prueba escrita de 36 reactivos, seleccionados siguiendo las sugerencias de literatura pertinente al tema de la comprensión de funciones (Moschkovich, *et al*., 1993). Como ya se hizo mención, este instrumento fue aplicado individualmente a los estudiantes, antes y después de la implementación del ambiente de aprendizaje al cual fueron sometidos. Esto, con la finalidad de evaluar en qué medida dicho ambiente incidió en el desarrollo de comprensiones sobre los conceptos en estudio. En los párrafos que siguen, se analizan los resultados encontrados al aplicar el instrumento antes de la implementación del ambiente (*pre-test*), después de dicha implementación (*post-test*) para acto seguido realizar una comparación entre ambas pruebas.

Análisis de los resultados del *pre-test*

La aplicación de este instrumento antes de la implementación del ambiente de aprendizaje arrojó los resultados consignados en la gráfica 1, la cual especifica el número de respuestas ‘correctas’ (en una primera aproximación; la mayoría de los reactivos permitía respuestas abiertas y en muchos casos no se puede hablar de una respuesta absolutamente ‘correcta’ o ‘incorrecta’) para cada reactivo. La prueba se aplicó a un total de 21 alumnos, de modo que 21 es el número máximo de respuestas correctas que un reactivo hubiera podido registrar:

Gráfica 1.
Respuestas correctas por reactivo, pre-test



Las etiquetas del eje horizontal corresponden a los aspectos que, para la elaboración de la gráfica, fueron evaluados en reactivo; estos se enlistan a continuación (puede también consultarse el Instrumento de Evaluación de la Comprensión, incluido en el Anexo 2):

Tabla 3. Aspectos evaluados por reactivo

Reactivo	Aspectos evaluados
1	Dar una definición matemáticamente correcta del concepto de *variable*.
2	Dar una definición matemáticamente correcta del concepto de *función*.
3	Dar una definición matemáticamente correcta del concepto de *función lineal*.
4a	Identificar correctamente las variables de $y = ax + b$.
4b	Identificar correctamente las constantes de $y = ax + b$.
4c	Especificar correctamente la forma de la gráfica de $y = ax + b$.
5	Identificar la regularidad que caracteriza a la representación tabular de una función lineal.
6a	Especificar verbalmente la regularidad hallada en la representación tabular de una función lineal.
6b	Pasar correctamente de la representación tabular de una función lineal a su representación algebraica.

7, 7’	Graficar en un plano cartesiano los puntos especificados en la representación tabular de una función lineal. (7’: No unir con una línea recta los puntos graficados en el reactivo anterior).
8	Pasar correctamente de la representación algebraica de una función lineal a su representación gráfica
9a, 9a’	Especificar que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente. (9a’: Especificar que la pendiente de funciones lineales decrecientes es negativa)
9b	Especificar el signo de la ordenada al origen de funciones lineales cuyas representaciones gráficas están a la vista.
9c 9c’	Identificar las ecuaciones correspondientes a las gráficas de dos funciones lineales. (9c’: En el reactivo anterior, especificar claramente qué ecuación corresponde a qué gráfica)
9d	Determinación de las coordenadas del primer punto solicitado.
9d’	Determinación de las coordenadas del segundo punto solicitado.
9d’’	Determinación de las coordenadas del tercer punto solicitado.
9d’’’	Determinación de las coordenadas del cuarto punto solicitado.
9e 9e’	Determinación de las coordenadas del quinto punto solicitado. Determinación de las coordenadas del sexto punto solicitado.
9f	Especificar que varios segmentos paralelos al eje *y*, los cuales unen dos puntos en dos rectas paralelas, tienen la misma longitud.
9f’	Encontrar la longitud de los segmentos involucrados en el reactivo anterior.
9g, 9g’	Especificar que es posible conocer la longitud de un segmento paralelo al eje *y*, que una dos puntos en dos rectas paralelas, si se conoce la de otro segmento de las mismas características. (9g’: Encontrar la longitud de dicho segmento)
10a	Dibujar en un plano cartesiano la recta que se solicita.
10b	Encontrar una ecuación para la recta dibujada en el reactivo anterior.
10c	Dibujar en un plano cartesiano la recta que se solicita.
10d	Encontrar una ecuación para la recta dibujada en el reactivo anterior.
11a-11i	Asociar ecuaciones de funciones lineales y cuadráticas con sus correspondientes gráficas.

Como puede observarse en la gráfica 1, el desempeño de los estudiantes en el *pre-test* muestra, en términos generales, una comprensión más bien pobre del concepto de función. Ningún alumno supo decir qué es una función en matemáticas (reactivo 2), ni resolver tareas que exigían el paso de una representación a otra para una función dada, o de una perspectiva a otra (reactivos 9c al 9e). Tampoco hubo un estudiante que pudiera trasladarse correctamente de la representación gráfica de una función lineal a su representación algebraica (reactivos 10b y 10d)

Por otro lado, los aprendices fueron más exitosos en tareas como la identificación de regularidades en representaciones tabulares de funciones lineales (reactivos 5 y 6a) y el paso de esta representación a la gráfica (reactivo 7). Demostraron también capacidad para identificar dos rectas paralelas en el plano cartesiano (reactivo 9a), aunque ninguno de ellos mencionó que las pendientes de dos de tales rectas deben ser iguales.

Un análisis reactivo por reactivo resulta de ayuda para profundizar en los resultados encontrados:

Reactivo 1.

Sólo dos de los alumnos a los que se aplicó el *pre-test* pudieron dar una respuesta satisfactoria al reactivo 1, el cual consistía en la pregunta *¿Qué es una variable?*

Para que una respuesta fuera considerada matemáticamente correcta, debía hacer específico el carácter de variación de este concepto. En cambio, en las respuestas de los alumnos al *pre-test* pudieron encontrarse concepciones erróneas que colocaban al término *variable* como sinónimo de *incógnita* ("Es una incógnita en cualquier ecuación", "Es la incógnita a despejar"), o hacían referencia a representaciones gráficas ("Es el eje de un plano cartesiano", "Es una línea que se trabaja en un plano cartesiano"). También se encontraron alumnos que expresaron no saber el significado del término (cinco alumnos), y casos que dejaron la pregunta sin responder (tres alumnos). Un estudiante escribió no recordar lo que es una variable, de donde podría decirse que el término no le es completamente novedoso. Esto no sería de extrañar si se toma en cuenta que, de acuerdo al plan de estudios vigente (SEP, 1993), los alumnos se enfrentan al concepto en cuestión desde el segundo año de secundaria. Esta situación también hace que llame la atención el reducido número de estudiantes que, en la aplicación de esta prueba, pudieron dar una definición matemáticamente correcta de *variable*.

Reactivo 2.

El segundo reactivo preguntaba al estudiante *¿Qué es una función?* Ningún alumno supo dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta, cuando una respuesta matemáticamente correcta –para el nivel escolar de los jóvenes– habría tenido que mencionar, de un modo o de otro, que una función es a)una relación entre variables, o b)un conjunto de parejas ordenadas.

En las respuestas a este reactivo se encontraron desde concepciones relativas al uso cotidiano de la palabra ("Es para lo que sirve algo") hasta otras en las cuales *función* es considerado sinónimo de *ecuación* ("Es una ecuación", "Es la ecuación que se usa en el plano cartesiano para marcar una línea", más cercano a una respuesta correcta, pero que carece del componente esencial de la covariación de dos cantidades) o parece confundírsele con la noción de expresión algebraica

(“Es cualquier operación en la que intervenga una incógnita”). No faltaron los casos de alumnos que escribieron “No sé” (seis alumnos) o que dejaron el reactivo sin responder (tres alumnos). Del mismo modo a lo encontrado en el reactivo 1, un estudiante expresó no recordar lo que es una función, aunque no se trató del mismo alumno que respondió de esa manera en el reactivo anterior.

Reactivo 3.

En el reactivo 2 se preguntaba a los estudiantes qué es una función. El tercer reactivo lanzaba la pregunta *¿Cuándo se dice que una función es ‘lineal’?* Para que una respuesta fuera considerada matemáticamente correcta, debía especificar de alguna forma que una función es lineal si su representación algebraica es una ecuación lineal, y/o su representación gráfica es una línea recta no vertical, y/o existe proporcionalidad entre incrementos correspondientes de las variables dependiente e independiente.

Únicamente dos estudiantes dieron una respuesta de este tipo en el *pre-test*. Las concepciones erróneas que se tenían sobre lo que es una función parecen haber afectado negativamente el desempeño en este reactivo: al tomar función como sinónimo de ecuación, se caía en el mismo error en el caso función lineal–ecuación lineal. Por otro lado algunas respuestas mostraban las deficiencias en la concepción de *ecuación lineal*: “Cuando no tiene exponentes”, “Cuando el exponente tiene valor 0”. Seis estudiantes expresaron no saber cuándo una función se considera lineal, mientras tres dejaron el reactivo sin responder.

Reactivo 4.

El reactivo 4 pedía identificar, en un contexto puramente matemático, los elementos de la ecuación $y = ax + b$. El reactivo constaba de tres incisos:

4a) En primer lugar, se pedía a los alumnos identificar quiénes eran las variables en $y = ax + b$. Únicamente cuatro estudiantes dieron una respuesta correcta, lo que significaba indicar que x y y representan las variables en dicha ecuación. Fue común encontrar respuestas en el sentido de que las variables de la ecuación eran a y b, o incluso que ax representaba una variable y b a otra. Si bien es posible decir que siendo x variable, la cantidad ax también lo será, o que a y b podrían tomar los roles de variables si se toma a x y y como constantes, esto va en contra de las convenciones aceptadas matemáticamente. Convenciones que, si se toma en cuenta el plan de estudios del nivel secundaria (SEP, 1993), no deberían resultar novedosas para los alumnos. Ningún estudiante expresó no saber la respuesta, mientras tres dejaron el reactivo sin responder.

4b) La segunda parte del reactivo 4 era un complemento de la primera, preguntando esta vez quiénes serían las constantes de $y = ax + b$. Sólo los cuatro alumnos que respondieron correctamente la parte a) hicieron lo propio en este inciso. De modo semejante a lo hallado en el inciso a), varios alumnos afirmaron que las constantes de la ecuación serían x y y, únicamente y (el alumno que respondió esto había establecido antes que las variables eran $ax + b$), o a, b y x. Es posible interpretar algunas de estas respuestas como "correctas", si se considera, por ejemplo, que tomando a y b como variables, x y y podrían tomar el papel de constantes. Pero en cualquier caso, esto contradice la convención aceptada.

Dos estudiantes escribieron "No sé" en este reactivo, mientras cuatro lo dejaron sin responder.

4c) La tercera parte del reactivo 4 inquiría a los estudiantes sobre la forma de la gráfica de expresiones del tipo $y = ax + b$. Para que una respuesta fuera considerada correcta era necesario que expresara, de alguna forma, que la gráfica sería una línea recta. Sólo cinco estudiantes proporcionaron una respuesta en este sentido, siendo más comunes afirmaciones como "Lineal" (en caso de que los estudiantes entiendan por "línea" una línea recta, esta respuesta podría considerarse correcta; pero ese no es necesariamente el caso). Dos estudiantes escribieron que la gráfica tendría "forma de U" o sería "una parábola". Siete alumnos manifestaron no saber la forma de la gráfica; cinco dejaron el reactivo sin contestar.

Reactivo 5.

Este reactivo presentaba una representación tabular de una función lineal. Requería únicamente que los estudiantes observaran la regularidad presente en dicha tabla, y expresaran si percibían dicha regularidad. Dieciocho estudiantes así lo afirmaron. De los tres alumnos restantes, dos dejaron el reactivo sin responder y el otro expresó no percibir la regularidad. Fue común encontrar que los estudiantes desatendían la consigna escrita, pues no sólo escribían si percibían la regularidad sino que además hacían intentos por describirla, cosa que sólo debían realizar hasta el siguiente reactivo.

Reactivo 6.

Dividido en dos incisos, la consigna del reactivo 6 especificaba que sólo debía ser respondido si la respuesta al reactivo anterior había sido afirmativa, a saber, si el alumno percibía la regularidad existente en una tabla que representaba una relación lineal.

6a) Se solicitaba al alumno describir verbalmente la regularidad que había observado en la tabla que se mostraba en el reactivo 5. Trece estudiantes describieron correctamente la regularidad, estableciendo, de distintas maneras, que los números de la segunda columna de la tabla eran el triple de los de la primera. Un estudiante afirmó "no recordar" la relación que existía entre ambas columnas de números, mientras tres omitieron responder. Los restantes describieron relaciones incorrectas ("Sus diferencias son de 2", "los números de la segunda columna se obtienen sumando el doble de los de la primera más 2").

6b) La segunda parte del reactivo pedía a los estudiantes escribir la regularidad anterior empleando una expresión algebraica. Una respuesta correcta debía presentar la ecuación $y = 3x$ o alguna variante equivalente a ella. Siguiendo este criterio, sólo ocho alumnos dieron una contestación matemáticamente correcta. Entre las respuestas equivocadas destacan el intercambiar los papeles de las variables ("$x = 3y$") o el malinterpretar el hecho de que y crecía tres veces más rápido que x (dando afirmaciones del tipo "$y = x + 3$"). Una alumna había escrito que los valores de y se obtenían, a partir de x, "sumando lo doble de ese número [x] y luego +2 para que nos dé el resultado". Su traducción algebraica de tal afirmación fue $y = x^2 + 2$, mostrando una deficiencia en su dominio del lenguaje algebraico.

Se encontró que un alumno expresó no saber escribir la ecuación correspondiente, mientras cuatro omitieron responder.

Reactivo 7.

El reactivo 7 mantenía relación con los reactivos 5 y 6. Se le presentaba al estudiante un plano cartesiano, y se le pedía graficar en él los datos de la tabla mostrada en el reactivo 5. Una respuesta matemáticamente correcta requería exclusivamente localizar y señalar los puntos indicados en la tabla. El error más común encontrado en esta tarea fue el unir los puntos con una línea recta, pues no se solicitaba graficar la función lineal representada en la tabla: sólo se requería graficar los puntos dados.

Sólo cinco estudiantes realizaron exactamente lo que se pedía, a saber, limitarse a encontrar y señalar en el plano cartesiano los untos dados en la tabla (a esto se refiere la etiqueta 7' de la Gráfica 1). Sin embargo, prácticamente todo el grupo (diecinueve alumnos) localizó correctamente los puntos, cometiendo únicamente el error de unirlos después con una línea recta. Este hecho parece mostrar que había en el grupo un manejo aceptable del plano cartesiano, aunque con poca claridad respecto al significado de unir puntos en dicho plano con una línea. Sólo una alumna mostró dificultades con el uso del plano, al marcar las abscisas y ordenadas correctas pero luego uniéndolas, por parejas, con segmentos de recta.

Reactivo 8.

Continuando con la representación gráfica de funciones lineales, en este reactivo se requería que los estudiantes obtuvieran la gráfica de la ecuación $y = 2x + 1$ en un plano cartesiano que se les presentaba en el mismo reactivo.

Sólo cinco estudiantes obtuvieron la gráfica solicitada. Ellos y varios otros de sus compañeros intentaron la resolución del problema a través de métodos tabulares: daban valores –enteros– a x y obtenían los correspondientes valores de y. A partir de esta información, marcaban algunos puntos en el plano y los unían con una recta. El hecho de que no se encontrara ningún intento por resolver esta tarea siguiendo un método distinto sugiere que los estudiantes habían desarrollado una comprensión de las ecuaciones con dos variables como "recetas numéricas" (Schwartz y Yerushalmyu, 1992, p. 265), y que posiblemente no eran capaces de concebirlas como objetos. Es razonable suponer que, al enfrentarse al concepto de función durante el ambiente de aprendizaje implementado, lo hicieran primeramente desde una perspectiva de proceso. Durante dicha implementación se pretendió que, paulatinamente, pudieran percibir a las funciones como objetos y llegaran a pasar de una perspectiva a otra con flexibilidad.

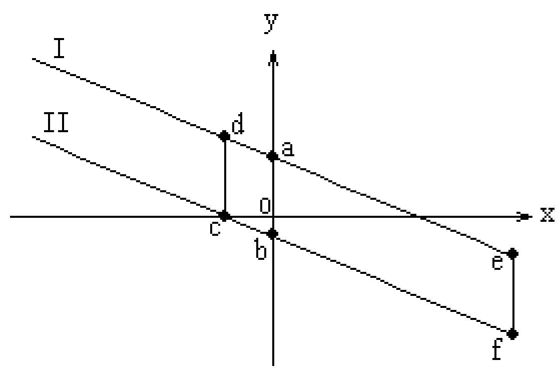
Entre los errores encontrados al tratar de resolver este reactivo se encuentran desde equivocaciones al evaluar la expresión $y = 2x + 1$ hasta dificultades para entender lo que significa obtener la gráfica de dicha expresión: por ejemplo, un estudiante señaló en el plano los puntos (0, 1) y (2, 0) (quizá atendiendo a los valores de los parámetros a y b en la ecuación dada, relacionando a con el eje de las abscisas y b con el de las ordenadas) y los unió con un segmento de recta, anotando a su lado la expresión cuya gráfica se solicitaba.

Cuatro estudiantes manifestaron no saber cómo obtener la gráfica requerida, y tres no dieron respuesta alguna.

Reactivo 9.

Este reactivo constituía un problema más extenso que el resto de los incluidos en el instrumento de evaluación de la comprensión. El problema, tomado del trabajo de Moschkovich et al. (1993), busca que en su solución el aprendiz se mueva entre las perspectivas objeto y proceso de una función, así como entre las representaciones gráfica y algebraica de la misma. Se le reproduce íntegramente a continuación (también puede encontrársele en el Anexo 2):

9. Observa la gráfica siguiente y responde:



a. ¿Qué puedes decir sobre las pendientes de las rectas I y II?

b. ¿Qué puedes decir de las intersecciones de ambas rectas con el eje *y*?

c. La siguiente lista incluye las ecuaciones de las dos rectas. Señala a qué ecuación le corresponde cada recta:

$$y = 2x + 6 \qquad y = -2x - 2$$

$$y = 2x - 6 \qquad y = -2x + 6$$

d. Encuentra las coordenadas de los puntos a, b, c y d, sabiendo que los segmentos cd y ef son paralelos al eje y.

e. Si la coordenada x del punto e es 5, encuentra su coordenada y y las coordenadas del punto f. ¿Aparenta esto ser correcto en la gráfica?

f. Encuentra las longitudes de los segmentos *ef*, *cd* y *ab*. ¿Tiene sentido tu resultado? ¿por qué?

g. Dibuja otro segmento que conecte ambas rectas, paralelo al eje *y*. ¿Puedes predecir su longitud sin saber las coordenadas de sus extremos? Explica. ¿La ecuación sería útil en esta tarea? ¿por qué?

El problema comienza presentando las gráficas de dos funciones lineales. Parece ser que esta representación hace sobresalir el aspecto de objeto de una función (Schwartz y Yerushalmy, 1992), de modo que quien comienza a trabajar en el problema tenderá a resolverlo desde esa perspectiva. De hecho, los primeros tres incisos pueden resolverse enteramente dentro de ella, efectuando conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones involucradas; sin embargo, al avanzar al inciso d), el problema requiere que quien lo resuelve pase a una perspectiva de proceso, mientras sigue moviéndose entre las representaciones gráfica y algebraica. La literatura (Moschkovich et al., 1993) reporta que realizar este cambio de perspectiva resulta problemático para estudiantes de nivel medio superior, y que se trata de una habilidad que no se desarrolla fácilmente.

9a) Para que una respuesta se considerara completamente correcta, debía contener la afirmación de que las pendientes de las rectas eran iguales (en la gráfica 1, etiqueta 9a) y negativas (etiqueta 9a'). En la aplicación del *pre-test*, ningún estudiante estableció alguna de las dos afirmaciones. Por el contrario, la mayor parte de ellos (diecisiete) notó que las líneas eran paralelas, pero no mencionó más. El resto de los aprendices hizo afirmaciones falsas, como que las rectas eran perpendiculares o que eran paralelas al eje *y*.

9b) La segunda parte del reactivo 9 se refería a las intersecciones de las rectas presentadas con el eje *y*. Una respuesta completa exigía mencionar que una de ellas era negativa y la otra positiva, aunque afirmar que una era mayor que la otra también se consideró matemáticamente correcto. Sin embargo, sólo uno de los alumnos dio una respuesta que en este sentido resultara satisfactoria. Seis estudiantes expresaron no saber qué decir al respecto, en tanto que dos dejaron la pregunta si responder. El resto lanzó afirmaciones diversas pero que no cumplieron con los criterios para ser consideradas "correctas", entre las que se encontraron "que las intersecciones son en el centro" o "que forman ángulos y son perpendiculares". Es de notar que dos alumnos, dejando prácticamente de lado lo que se preguntaba, manifestaron que al ser paralelas las rectas involucradas, los segmentos *ab*, *dc* y *ef* (ver la gráfica incluida en el texto del reactivo 9) tendrían la misma longitud.

9c) Este tercer inciso presentaba una lista de cuatro ecuaciones lineales, entre las cuales se encontraban las de las gráficas involucradas. Se solicitaba al estudiante que señalara qué ecuación correspondía a cada recta. Ningún alumno indicó correctamente las ecuaciones de las dos rectas. Ocurrió, sin embargo, que algún aprendiz señalaba una ecuación correcta pero no indicaba a qué recta correspondería (faltando a lo solicitado en la consigna). Debido a esto, en la Gráfica 1 la etiqueta 9c se refiere a elegir las ecuaciones correctas, mientras que 9c'' indica haber señalado a qué recta correspondía cada una.

Tres estudiantes escribieron no saber qué ecuación debía asociarse a cada recta; otros tres dejaron el reactivo sin realizar ninguna indicación.

9d) Mientras que los incisos anteriores podían ser resueltos completamente dentro de la perspectiva de función como objeto, el inciso d) requiere que se pase a una perspectiva de función como proceso. Concretamente, se le pedía al alumno que encontrara las coordenadas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d* (ver la gráfica incluida en el texto del reactivo). Ningún estudiante pudo hacerlo, encontrándose que varios (siete) manifestaban no saber cómo proceder para encontrar las coordenadas solicitadas. Uno escribió no recordarlo, mientras otros trataron de resolver la tarea definiendo arbitrariamente una unidad de longitud sobre los ejes de la gráfica para así asignar coordenadas a los puntos en cuestión (en la Gráfica 1, las etiquetas 9d, 9d', 9d'' y 9d''' corresponden a hallar las coordenadas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d*, respectivamente).

Siete aprendices omitieron responder este inciso.

9e) Con la coordenada *x* del punto *e* (ver gráfica) dada, se pedía a los estudiantes encontrar su coordenada *y*, así como las coordenadas del punto *f*. Tampoco en este inciso hubo un estudiante que pudiera encontrar las coordenadas solicitadas (en la Gráfica 1, las etiquetas 9e y 9e' corresponden a hallar las coordenadas de *e* y *f*, respectivamente). De hecho, cinco estudiantes afirman no saber cómo encontrar las coordenadas solicitadas, en tanto que diez no dieron respuesta alguna.

Ninguno de los estudiantes que trató de resolver el inciso pareció utilizar las ecuaciones dadas, intentando determinar las coordenadas que se solicitaban asignando una unidad de longitud arbitraria a cada eje en la gráfica en cuestión.

9f) Resolver este inciso requería que los estudiantes notaran que, al ser paralelas las rectas I y II (ver gráfica incluida en el texto del reactivo 9) los segmentos *ab*, *cd* y *ef* tendrían la misma longitud: 8 unidades. En la Gráfica 1, la etiqueta 9f corresponde a que los alumno notaran el primer hecho (los segmentos miden lo mismo) mientras la etiqueta 9f' sirve para indicar si el estudiante pudo hallar la longitud correcta de los segmentos.

Sólo dos aprendices notaron que los segmentos deberían tener la misma longitud, y ninguno pudo encontrar su valor. Siete alumnos escribieron "No sé" mientras doce no dieron respuesta alguna.

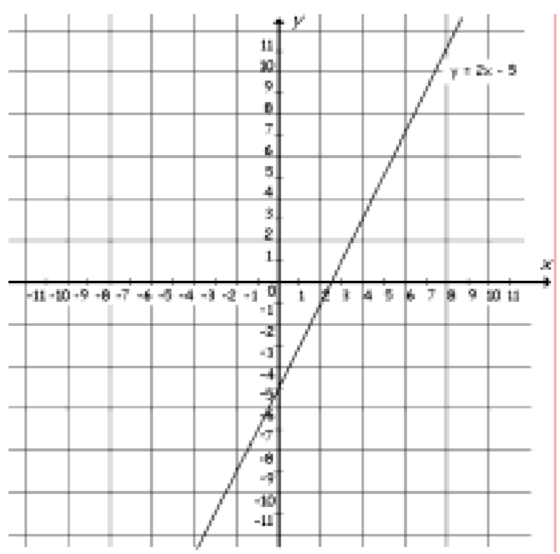
9g) El último inciso del reactivo 9 pedía dibujar un segmento que conectara las rectas I y II (ver gráfica), paralelo al eje *y*, y determinar si era posible hallar su longitud sin conocer las coordenadas de sus extremos. Dar una respuesta correcta requería haber determinado las ecuaciones de las rectas en cuestión; notar su paralelismo pudo haber sido de ayuda pero no era indispensable.

Ninguno de los alumnos pudo responder correctamente este inciso. Quince de ellos omitió dar respuesta, seis afirmó no saber cómo encontrar lo que se solicitaba.

Reactivo 10.

Este reactivo involucra habilidades que en la literatura son consideradas esenciales para la comprensión de las funciones lineales (Moschkovich et al., 1993). Se le transcribe íntegramente a continuación:

10. a) En el siguiente plano cartesiano, dibuja una línea paralela a $y = 2x - 5$, que pase por el origen.



b) Encuentra una ecuación para la recta anterior y escríbela a continuación.

c) En el mismo plano, dibuja una línea paralela a las anteriores, que pase por el punto (1, 4).

d) Encuentra una ecuación para la recta anterior y escríbela a continuación.

El problema, modificado a partir de una tarea que apareció en la *Nacional Assesment of Educational Progress* del año 1990 (referida en Moschkovich *et al*., 1993), exige en su solución un empleo flexible de las perspectivas de objeto y proceso de una función lineal, mientras se realizan conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones involucradas. Debe mencionarse que de acuerdo a lo reportado (Moschkovich *et al*., 1993), este problema plantea un reto serio incluso para alumnos del doceavo grado (en el sistema escolar norteamericano): únicamente el 16% de los estudiantes que presentaron esa evaluación dibujó las rectas requeridas y escribió sus ecuaciones correctamente.

Resolver el primer inciso del problema 10 requiere, esencialmente, la habilidad de localizar el origen en la gráfica, la recta $y = 2x – 5$, y comprender el término *paralela* (es notable el hecho de que, según Moschkovich et al., sólo 32% de los estudiantes de doceavo grado que presentaron la evaluación en 1990 respondieron correctamente esta parte del problema).

Una manera de atacar el siguiente inciso es como sigue: en primer lugar, el problema puede resolverse puesto que para determinar una recta, en cualquiera de sus representaciones, bastan dos trozos de información independientes (como dos puntos por los que pasa esta recta, los valores de su pendiente y su ordenada al origen, etc.) Por otro lado, dado que la ecuación de la recta dada se presenta en la forma $y = a\,x + b$, resulta razonable usar esa forma. Comprendiendo el papel de cada letra en esa ecuación, la cuestión se reduce a hallar los valores correctos de los parámetros a y b.

La perspectiva de función como objeto resulta natural para encontrar a (Moschkovich et al., 1993), dado que la pendiente es un atributo de una recta como un todo. Conociendo el significado del término *paralela*, se concluye rápidamente que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, de modo que la recta solicitada tendrá el mismo valor de a que la recta dada. De este modo, $a = 2$. Queda por determinarse el valor de b. Pero puesto que la recta solicitada debe pasar por el origen, se sabe que su intersección con el eje y es cero, de modo que $b = 0$. Queda entonces $y = 2x$, con lo que el inciso b) está resuelto.

La tercera parte es similar a la primera, requiriéndose básicamente las mismas habilidades en ambas. La tarea se vuelve matemáticamente más compleja al avanzar hacia la parte d). Después de hallar el valor de a de un modo similar a como se hizo en el inciso b), debe encontrarse el valor del parámetro b. Es en este punto en el que se requiere un cambio de perspectiva: la información del problema establece que la recta solicitada pasa por el punto (1, 4). Explotar correctamente este dato necesita que el sujeto esté familiarizado con el hecho de que, si un punto del plano está sobre una recta, entonces sus coordenadas satisfarán la ecuación que la representa algebraicamente. Desde una perspectiva de función como proceso, esto significa que la ecuación que se busca debe producir el valor $y = 4$ cuando se hace $x = 1$. Esto da $4 = 2(1) + b$, de donde $b = 2$, y la ecuación solicitada es $y = 2x + 2$.

Conviene recalcar que, si bien el experto en la materia podría encontrar el análisis anterior excesivamente detallado para una tarea tan aparentemente sencilla, la evidencia parece indicar que el estudiante de bachillerato, todavía en sus primeros pasos en el dominio de las funciones, necesita seguir una trayectoria similar a la descrita para desarrollar un aprendizaje con comprensión de tales conceptos. No debe olvidarse que muchos de los elementos que pueden parecer triviales para el experto resultan fuentes mayores de dificultad para el aprendiz (Moschkovich et al., 1993).

10a) El primer inciso requería únicamente el trazo de una recta con las características dadas, pero sólo seis estudiantes lo realizaron correctamente. Un alumno trató de marcar puntos sobre el plano, los cuales definieran una recta que reuniera las características deseadas. Sin embargo, sólo marcó dos de estos puntos y no los unió; aparentemente renunció a ese camino de solución. Se encontraron también respuestas que eran definitivamente incorrectas: un alumno trazó la recta $y = -x$, otros dibujaron rectas que pasaban por el origen pero no eran paralelas a la dada. Siete estudiantes dejaron el problema sin solución.

10b) Aquí se pedía hallar una ecuación para la recta dibujada en el inciso anterior. Ningún estudiante lo hizo correctamente. Se encontró una gran variedad de respuestas: dos alumnos pretendieron encontrar la ecuación deseada cambiando los signos de la ecuación dada, obteniendo $y = -2x + 5$ y $y = -2x - 5$. Otros afirmaron que la ecuación sería $y = x$ o intentaron hallarla sumando algún valor constante a ésta última.

Un alumno expresó no saber cómo encontrar la ecuación, otro escribió no recordar cómo hacerlo. Diez no dieron respuesta alguna.

10c) Aumentando la complejidad de la tarea, se pedía ahora dibujar una paralela a la recta dada a través del punto (1, 4). Sólo un estudiante dibujó la recta solicitada, mientras cuatro parecieron tener problemas con la notación convencional (x, y): trazaron segmentos de recta que unían los puntos (0, 4) y (1, 0), o señalaban el punto (4, 1) –sin dibujar nada más–. Otros trataron de dibujar rectas paralelas a la dada, pero que no pasaban por (1, 4). Unos más señalaban el punto (1, 4), pero no dibujaron la recta solicitada. Un estudiante escribió "No sé", mientras siete dejaron el inciso sin contestar.

10d) El último inciso solicitaba encontrar una ecuación para la recta anterior. De nueva cuenta, sólo un alumno encontró una ecuación correcta para la recta en cuestión: $y = 2x + 2$. Se registraron varios intentos, que aparentemente trataban de obtener la respuesta directamente de las coordenadas del punto por el que la recta debía pasar, (1, 4). Así, algunos alumnos escribieron ecuaciones como $y = x - 4$ o $y = x + 4$. Otras respuestas fueron las expresiones $-2y + 4$, o $x = 1y + 4$. Un estudiante afirmó no saber cómo proceder, doce no respondieron el inciso.

Reactivo 11.

Este reactivo estaba compuesto por nueve incisos, y mostraba, de un lado de la hoja, una lista de nueve funciones en su representación algebraica, algunas lineales y otras cuadráticas. Frente a esta lista, aparecían las representaciones gráficas de ocho de las funciones anteriores. La consigna era asociar cada ecuación con su gráfica correspondiente. El incluir más ecuaciones que gráficas pretendía minimizar las posibilidades de que los estudiantes respondieran el reactivo al azar.

11a) Tres alumnos asociaron correctamente $y = 3x + 1$ con su gráfica. Siete dejaron el inciso en blanco. El resto efectuó asociaciones incorrectas. La tabla siguiente muestra la frecuencia con la que se asociaron distintas gráficas con la ecuación $y = 3x + 1$:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = 3x + 1$
$y = 3x + 1$	3
$y = -x^2$	2
$y = x - 2$	3
$y = -2x - 3$	1
$y = x$	2
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	1
$y = x^2 + 1$	1

11b) Tres alumnos asociaron $y=-x^2$ con la gráfica que le correspondía, mientras ocho omitieron dar respuesta. Las frecuencias con las que los estudiantes asociaron las gráficas disponibles con esta ecuación se muestran en la tabla siguiente:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y=-x^2$
$y=3x+1$	4
$y=-x^2$	3
$y=x-2$	0
$y=-2x-3$	0
$y=x$	1
$y=x^2-2$	4
$y=-x+1$	0
$y=x^2+1$	1

11c) Tres estudiantes supieron asociar correctamente $y=x-2$ con la gráfica que le correspondía. Diez no asociaron la ecuación a gráfica alguna. Las frecuencias con las que el grupo asoció las gráficas mostradas con la ecuación $y=x-2$ se especifican a continuación:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y=x-2$
$y=3x+1$	3
$y=-x^2$	1
$y=x-2$	3
$y=-2x-3$	0
$y=x$	1
$y=x^2-2$	1
$y=-x+1$	0
$y=x^2+1$	2

11d) Cuatro estudiantes asociaron $y=-2x-3$ con la gráfica que le correspondía. Diez dejaron el inciso sin responder. A continuación se consignan las frecuencias con las que los alumnos que contestaron el inciso asociaron diversas gráficas a esta ecuación:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y=-2x-3$
$y=3x+1$	0
$y=-x^2$	1
$y=x-2$	4
$y=-2x-3$	4
$y=x$	0
$y=x^2-2$	1
$y=-x+1$	0
$y=x^2+1$	1

11e) Seis estudiantes parecieron notar que la gráfica de $y = -3x^2$ no aparecía en la lista, por lo que esa ecuación no debía asociarse con ninguna gráfica. Por otro lado, se ha considerado que un estudiante no había contestado a este inciso cuando había dejado en blanco más de la mitad de los que constituían el reactivo. Nueve estudiantes se encontraron en este caso. Las frecuencias con que el resto de los alumnos asoció distintas gráficas a esta ecuación se muestran en la tabla (un alumno asoció dos gráficas a $y = -3x^2$, la de $y = x^2 - 2$ y la de $y = -x^2$):

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = -3x^2$
$y = 3x + 1$	0
$y = -x^2$	1
$y = x - 2$	1
$y = -2x - 3$	2
$y = x$	1
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	0
$y = x^2 + 1$	1

11f) Siete alumnos asociaron correctamente $y = x$ con su gráfica. Otros siete dejaron el inciso en blanco. El resto le asoció distintas gráficas, con las siguientes frecuencias (un estudiante la asoció con dos gráficas; una, la correcta, $y = x$, y otra, la de $y = -x + 1$):

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x$
$y = 3x + 1$	0
$y = -x^2$	3
$y = x - 2$	1
$y = -2x - 3$	0
$y = x$	7
$y = x^2 - 2$	0
$y = -x + 1$	1
$y = x^2 + 1$	2

11g) Dos estudiantes asociaron $y = x^2 - 2$ con su gráfica. Diez dejaron el inciso sin responder. Las frecuencias con las que los aprendices asociaron a esta ecuación distintas gráficas aparecen a continuación:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x^2 - 2$
$y = 3x + 1$	1
$y = -x^2$	1
$y = x - 2$	0
$y = -2x - 3$	2
$y = x$	1
$y = x^2 - 2$	2
$y = -x + 1$	4
$y = x^2 + 1$	0

11h) En el *pre-test*, ningún estudiante pudo asociar la ecuación $y = -x + 1$ con su correspondiente gráfica. Trece dejaron el inciso sin respuesta, siendo éste el que registró mayor número de omisiones entre todos los que constituyeron el reactivo 11. Los alumnos asociaron varias gráficas a esta ecuación, con las frecuencias especificadas en la tabla:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = -x + 1$
$y = 3x + 1$	1
$y = -x^2$	1
$y = x - 2$	0
$y = -2x - 3$	3
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	0
$y = x^2 + 1$	2

11i) Cinco estudiantes respondieron correctamente el último inciso del reactivo 11, mientras que diez estudiantes lo dejaron sin respuesta. La tabla siguiente presenta las frecuencias con las que los alumnos asociaron varias gráficas a la ecuación $y = x^2 + 1$:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x^2 + 1$
$y = 3x + 1$	0
$y = -x^2$	0
$y = x - 2$	0
$y = -2x - 3$	1
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	4
$y = x^2 + 1$	5

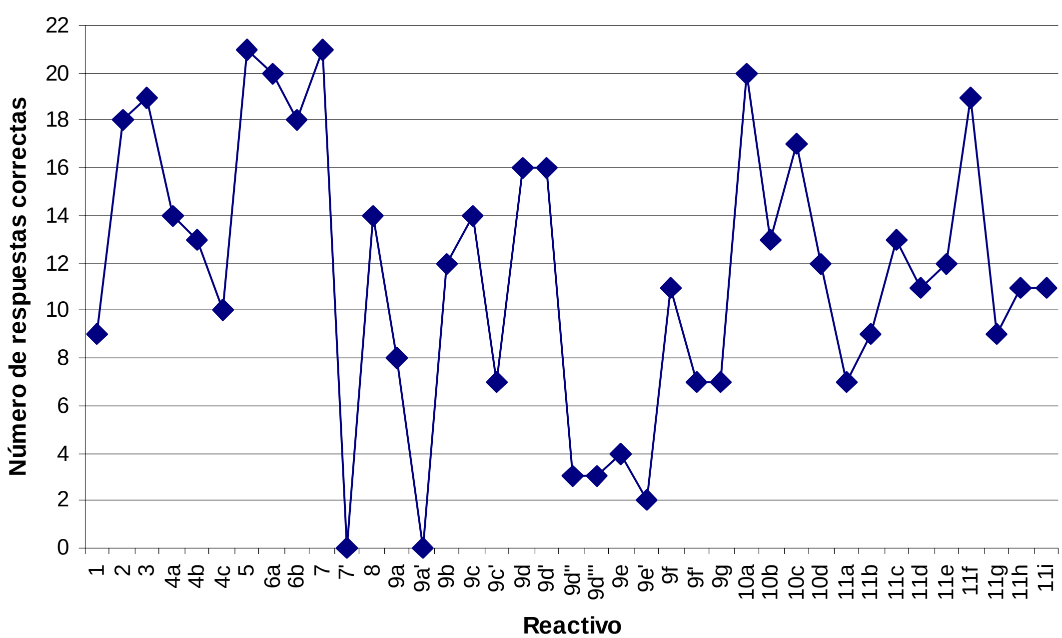
Por lo que puede observarse en las tablas anteriores, parece ser que, en el momento en que el *pre-test* fue aplicado, el paso entre las representaciones algebraica y gráfica de funciones lineales y cuadráticas suponía una dificultad importante para los estudiantes. Es notorio el hecho de que varios de ellos asociaron la ecuación de una función lineal con la gráfica de una función cuadrática (incisos 11a, 11c, 11d, 11f, 11h) y viceversa (incisos 11b, 11e, 11g, 11i).

De acuerdo con los resultados arrojados por la aplicación del *pre-test*, los estudiantes poseían, al comienzo de la implementación del ambiente de aprendizaje, una comprensión poco desarrollada sobre los conceptos de interés: funciones –en general– y funciones lineales –en particular–. El análisis de los resultados obtenidos con la aplicación del *post-test*, y su comparación con los ya expuestos, permitirá evaluar en qué medida el ambiente de aprendizaje incidió en el desarrollo de comprensiones más ricas.

Análisis de los resultados del *post-test*

Concluida la implementación del ambiente de aprendizaje, los alumnos fueron sometidos a una prueba *post-test* con la finalidad de evaluar las comprensiones que hubieran desarrollado sobre los conceptos en estudio. La gráfica 2 presenta el número de respuestas correctas registradas para cada reactivo en esta prueba (al igual que como sucede en la Gráfica 1, algunos reactivos permitían respuestas abiertas difícilmente calificables como absolutamente "correctas" o "incorrectas", de manera que la Gráfica 2 es sólo una primera aproximación a los resultados del *post-test*):

Gráfica 2.
Respuestas correctas por reactivo, post-test



Cada etiqueta del eje horizontal corresponde a un aspecto que, en cada reactivo, se evaluó para construir la Gráfica 2 (aspectos idénticos a los considerados en la elaboración de la Gráfica 1; ver la tabla 3 en el apartado *Análisis de los resultados del pre-test*).

En términos generales, al trabajar en este instrumento los estudiantes mostraron comprensiones de cierto nivel sobre el concepto general de función –y el de función lineal en particular–. Más de la mitad de los alumnos dio respuestas matemáticamente correctas en reactivos relativos a conceptos básicos (2 a 4b), en tareas que requerían observar la regularidad en la representación tabular de una función lineal y el paso a su representación gráfica (reactivos 5 a 7), o el paso de la representación gráfica a la algebraica (reactivos 9c, 11c, 11e, 11f), y viceversa (reactivo 8). Igualmente ocurrió con problemas en los que el aprendiz debía moverse entre las representaciones grafica y algebraica mientras también lo hacía entre las perspectivas de función como objeto y función como proceso (reactivos 9d, 10a-10d).

Se observó un desempeño ligeramente inferior en tareas como la planteada en la pregunta 9b, que requería una correcta interpretación gráfica del parámetro b (en $y = ax + b$), o en el reactivo 9f, en cuya solución estaba involucrada la habilidad de moverse entre diferentes representaciones y perspectivas de una función lineal (de un modo similar a lo que ocurría en los reactivos 9d, 10a-10d, en los cuales, sin embargo, el desempeño fue levemente superior). Las preguntas 11d, 11h y 11i se encuentran en el mismo caso, pues requiriendo habilidades similares a las de otros reactivos (paso entre representaciones gráfica y algebraica en una perspectiva de proceso) obtuvieron resultados poco por debajo de los de aquellos.

Por otra parte, el número de respuestas correctas fue sensiblemente menor en algunos reactivos que, desde el punto de vista de las habilidades requeridas en su solución, no eran sustancialmente distintos a los ya mencionados. Es el caso de las tareas planteadas en las partes tercera y cuarta de la pregunta 9d, y de la 9e a la 9g (paso entre representaciones y perspectivas), o las preguntas 11a, 11b y 11g en las cuales era necesario que el estudiantes se moviera entre las representaciones gráfica y algebraica de funciones lineales y cuadráticas. También se encontraron resultados poco favorables en una pregunta relacionada con el uso correcto del plano cartesiano (7’, ningún estudiante dio una respuesta matemáticamente correcta y completa), y en otra relativa a la interpretación gráfica del parámetro a en $y = ax + b$ (9a’, no hubo tampoco un estudiante que diera una respuesta matemáticamente correcta y completa). El bajo desempeño se observó asimismo en dos preguntas sobre conceptos básicos (1 y 4c), y en la segunda parte del reactivo

9c, donde era necesario efectuar conexiones entre representaciones gráfica y algebraica de funciones lineales.

Un análisis reactivo por reactivo será útil para profundizar en estos resultados:

Reactivo 1.

Ante la pregunta *¿Qué es una variable?*, una respuesta matemáticamente correcta debía hacer específico, de alguna manera, el carácter de *variación* de este concepto. En el *post-test*, se encontró que nueve estudiantes proporcionaron una respuesta de este tipo. Cuatro no dieron respuesta alguna, y no hubo un alumno que expresara no saber qué contestar.

Entre las respuestas consideradas como incorrectas se encontraron afirmaciones que reflejaban una comprensión limitada del concepto, circunscribiéndolo al ámbito algebraico y/o identificándolo con un valor determinado, el cual no variaría ("es el valor que pueden tomar *y* o *x*", "es el valor que toman las cantidades dependiente e independiente en una tabla o gráfica"). También se encontraron respuestas que reducían el concepto a aquellas variables que "aparecen en una función lineal". Un alumno identificó *variable* e *incógnita* como sinónimos.

Estas respuestas se obtuvieron después de que los estudiantes participaron en un ambiente de aprendizaje diseñado con el fin de favorecer la comprensión de la noción de *función*, y particularmente de función *lineal*. Se habrían esperado mejores resultados en este reactivo, siendo que el concepto de *variable* está íntimamente ligado al de función. Sin embargo, hay por lo menos dos factores que deberían tomarse en cuenta: uno de ellos es el bajo nivel de comprensión –sobre estos tópicos– con el cual los estudiantes contaban al iniciarse el trabajo en el ambiente de aprendizaje. El otro factor tiene que ver con el propio diseño del ambiente, el cual tal vez, al poner el acento en la noción de función, descuidó otros conceptos relacionados, entre ellos el de variable.

Reactivo 2.

Apoyando esta posibilidad, se encontró que prácticamente todos los estudiantes dieron una respuesta matemáticamente correcta a la pregunta *¿Qué es una función?*, cuando hacerlo requería que de un modo u otro se especificara que una función es a) un tipo de relación entre variables o b) un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos. En el ambiente de aprendizaje se buscó que los alumnos llegaran a una definición de función acorde con la primera opción, siguiendo las sugerencias de la literatura (Hines, 2002; Sierpinska, 1988, citada en Tall, 1992, p. 497), según las cuales la segunda opción, si se emplea para introducir el concepto, tiende a hacer que las diversas representaciones de una función pierdan su significado y se perciban esencialmente como aisladas.

Dado lo anterior, era de esperarse un número importante de respuestas que definieran *función* en términos de una dependencia, covariación, o relación entre variables, como realmente ocurrió. Un total de dieciocho alumnos lo hizo así, encontrándose, por otro lado, sólo un estudiante que dejó el reactivo sin respuesta y ninguno que afirmara no saber qué responder.

Entre las respuestas consideradas como matemáticamente incorrectas se encontró la afirmación de que una función es "la cantidad de variables que puede tener una ecuación", o definiciones más imprecisas como "es algo que depende de otra cosa", en la cual está presente la noción de dependencia pero aparentemente se identifica *función* con *variable*.

Reactivo 3.

Diecinueve de veintiún estudiantes dieron una respuesta correcta a la pregunta *¿Cuándo se dice que una función es lineal?*, lo cual significaba que de alguna forma establecieran que hay linealidad si la representación algebraica de una de estas funciones es una ecuación lineal, y/o su representación gráfica es una línea recta (no vertical), y/o se tiene proporcionalidad entre incrementos correspondientes de las variables dependiente e independiente. Un estudiante omitió responder a la pregunta y otro afirmó que una función sería lineal cuando "su ecuación no está elevada al cuadrado [condición que, si se interpreta como que son las variables las que no deben estar elevadas al cuadrado, es necesaria pero no suficiente], también podría ser cuando esta va consecutiva [condición que parece hacer referencia a la proporcionalidad, pero sin llegar a establecerlo claramente]".

Dado que durante la implementación del ambiente de aprendizaje se puso el acento sobre esta clase de funciones, el resultado obtenido es el esperado. Sin embargo, como ya se ha mencionado y se analiza en detalle más adelante, algunos reactivos cuya solución requería el empleo de habilidades esenciales para la comprensión de funciones lineales demostraron ser difíciles de resolver para los estudiantes.

Reactivo 4.

El reactivo 4 contenía tres incisos, todos construidos alrededor de la representación algebraica $y = ax + b$. En el primero de ellos, los estudiantes debían identificar correctamente las variables de esa ecuación; en el segundo, se les pedía hacer lo mismo con las constantes de la misma, y en el tercero se les preguntaba por la forma que tendría la gráfica de una ecuación de ese tipo.

4a). Un total de catorce alumnos identificó correctamente las variables de $y = ax + b$, estableciendo –en concordancia con la convención aceptada– que éstas son x y y. De los siete estudiantes restantes, uno omitió responder el reactivo mientras seis dieron respuestas diversas, entre las que se encontraron que "y es la variable", o que "y es la variable dependiente, $ax + b$ la dependiente" (respuesta que sugiere una comprensión poco desarrollada del concepto de ecuación, al igual que "y es la variable, $ax + b$ es la constante"). Se encontraron tres casos en los que se respondió que "y y a son las variables", o que lo son "y y b", lo cual podría interpretarse como correcto si se toma a x y b –o a– como constantes (inciso siguiente), cosa que sólo realizó uno de éstos alumnos. De cualquier modo, este tipo de afirmaciones no concuerdan con la convención aceptada.

4b). Trece de veintiún estudiantes señalaron que las constantes en $y = ax + b$ son a y b, lo cual constituía la única respuesta que se consideró matemáticamente correcta. Tres aprendices dejaron el reactivo sin respuesta; cinco contestaron de forma incorrecta al afirmar, por ejemplo, que únicamente b es constante (dos estudiantes), o que lo es la expresión ax. Como se comentó en el inciso anterior, en un caso un alumno estableció que, mientras y era variable, $ax + b$ era constante, lo cual lleva a pensar que no consiguió desarrollar una comprensión robusta de la noción de ecuación. En un caso más, se afirmó que mientras las variables serían y y a, las constantes serían x y b. Si bien la respuesta podría interpretarse como correcta, está en desacuerdo con la convención aceptada.

4c). El tercer inciso requería que se mencionara que la gráfica de una ecuación del tipo $y = ax + b$ es una línea recta. Diez estudiantes lo hicieron así. No se consideró correcto decir únicamente que la gráfica era "lineal" (tal fue la respuesta de cinco alumnos), pues dicho término no es, rigurosamente, sinónimo de "línea recta" –como parecen haberlo entendido los estudiantes que dieron esa respuesta–. Tres alumnos dejaron sin respuesta este inciso; en un caso se afirmó que la gráfica sería "curva, no recta", justamente lo opuesto a lo esperado.

Otro estudiante expresó en su respuesta que la gráfica tendría la forma de una "línea recta ascendente". Si su uso de la palabra "ascendente" se interpreta como queriendo decir que la pendiente de la recta es positiva, esta respuesta deja de lado la posibilidad de que la pendiente sea negativa y así la gráfica sea una línea recta "descendente". Tal interpretación podría significar que el alumno concibe a la recta como generada de izquierda a derecha; a esta concepción pueden haber contribuido numerosos factores, desde el hecho mismo de que la escritura del español es de izquierda a derecha hasta el propio diseño de las situaciones didácticas con las que se trabajó en el ambiente de aprendizaje. En éstas, por lo regular se construían las representaciones gráficas de funciones lineales asignando valores crecientes a la variable independiente.

En un caso más, un alumno escribió que la gráfica sería "paralela", respuesta que deja al descubierto una concepción errónea sobre la noción de paralelismo.

Reactivo 5.

En este reactivo, se mostraba al alumno una representación tabular de la función lineal $y = 3x$. Se le preguntaba únicamente si observaba alguna relación entre los valores de x y y consignados en la tabla. Todos los estudiantes afirmaron notar una relación, siendo notorio el hecho de que un número significativo de ellos fue más allá de la consigna y no sólo afirmaba ver una relación sino que hacía intentos por describirla, cosa que sólo debía realizarse en el siguiente reactivo.

Reactivo 6.

Este reactivo, compuesto de dos incisos, se relaciona con el anterior en cuanto a que hacía referencia a la misma tabla mostrada en aquel. Se buscaba que los estudiantes se trasladaran de esta representación tabular a una representación verbal (primer inciso) y a una algebraica (segundo inciso). En la consigna se especificaba que sólo debía ser respondido en caso de haberse contestado afirmativamente al reactivo 5. En el primer inciso se pedía al estudiante que describiera la relación que hubiera percibido entre los valores de x y y. En el segundo, el aprendiz debía dar una representación algebraica para tal relación.

6a). Veinte de veintiún estudiantes describió correctamente la relación en cuestión, empleando afirmaciones del tipo "los valores de x y y van aumentando proporcionalmente", "los valores de y son tres veces más grandes que los de x" o "los valores de x se obtienen multiplicando los de y por 3". Sólo un estudiante ofreció una respuesta incorrecta, de acuerdo a la cual "por cada x son $3y$". Así, invirtió los papeles de ambas variables, error que otros estudiantes cometieron en el siguiente inciso.

6b). Dieciocho aprendices proporcionaron una ecuación correcta para la tabla que se les presentaba en el reactivo 5. Esta ecuación debía ser equivalente a $y = 3x$; se registraron varias respuestas entre las que se encontraba la propia $y = 3x$ (nueve respuestas) pero también $y = x(3)$ (nueve respuestas) o $x = \frac{y}{3}$ (una respuesta; un alumno dio ambas representaciones, $y = x(3)$ y $x = \frac{y}{3}$). Es razonable suponer que la alta incidencia de la forma $y = x(3)$ pueda deberse a la manera en que el estudiante piensa en la relación que media entre los valores de x y los de y: "para obtener y, debo multiplicar x por 3" y así se llega, de forma natural, a $y = x(3)$.

Entre las ecuaciones incorrectas, por otra parte, un estudiante escribió $x = y + 3$, aparentemente trasladándose equivocadamente de la afirmación verbal "y es tres veces más grande que x" a su representación algebraica. En otro caso, se afirmó que la ecuación debía ser $x = 3y$, con lo que se invierten los roles de ambas variables. Un estudiante omitió dar respuesta al reactivo.

Reactivo 7.

La consigna de este reactivo pedía que se graficaran, en un plano cartesiano que aparecía junto al texto, los datos contenidos en la tabla presentada en el reactivo 5; de este modo se pretendía llevar a los alumnos a trasladarse de la representación tabular de una función lineal a su representación gráfica. Todos los estudiantes localizaron los puntos en el plano y los señalaron correctamente, pero también sin excepción, unieron estos puntos con una línea recta, lo cual iba más allá de lo solicitado y posiblemente sea evidencia de una concepción errónea respecto a las representaciones gráficas de funciones: parece ser que los alumnos conciben la gráfica de una función como invariablemente continua. En el ambiente de aprendizaje se trabajó con varios ejemplos de funciones, pero sólo en uno de ellos el dominio de la función era discreto, obteniéndose así una representación gráfica no continua; es de suponer que una mayor cantidad de ejemplos con esta característica, u otras formas de enfatizar la posibilidad de que el dominio sea un conjunto discreto, habrían contribuido a una comprensión más completa en lo tocante a las representaciones gráficas de funciones.

En la Gráfica 2, la etiqueta 7 corresponde a haber localizado correctamente los puntos de la tabla (presentada a los alumnos en el reactivo 5) en el plano cartesiano; la etiqueta 7' corresponde a *no unir* estos puntos con una línea recta.

Reactivo 8.

En este reactivo, se presentaba a los estudiantes la ecuación $y = 2x + 1$ y se les pedía dibujar su gráfica en el plano cartesiano que se mostraba junto al texto. El objeto era propiciar un traslado de la representación algebraica de una función lineal a su representación gráfica. Catorce de veintiún aprendices dieron una representación gráfica correcta, mientras uno omitió responder. Se encontró una variedad de respuestas incorrectas. Se observó que en muchos casos los estudiantes obtenían la gráfica solicitada al asignar valores arbitrarios a la variable x para calcular los correspondientes valores de la variable y; graficaban estos puntos en el plano cartesiano y los unían con una línea recta. Este método, que podría considerarse como el más "rudimentario", deja ver una concepción de las funciones como procesos más que como objetos. Sin embargo, en reactivos posteriores los aprendices mostraron capacidad para pensar en una función como objeto, si bien se observó que el paso entre ambas perspectivas resultó difícil para la generalidad.

Un alumno trató de seguir este método pero aparentemente encontró serias dificultades para conectar la representación algebraica $y = 2x + 1$ con el plano cartesiano. Su gráfica revela limitaciones para relacionar correctamente puntos del plano con valores de x y y en la ecuación dada; fue el único caso en el que se encontraron, de forma evidente, dificultades de este tipo.

De acuerdo con Moschkovich et al. (1993), en ausencia de herramientas tecnológicas que apoyen el proceso de aprendizaje, parece existir una progresión "natural" en el desarrollo de la comprensión del concepto de función, progresión que comenzaría en la perspectiva de proceso para luego pasar a la perspectiva de objeto, llegando eventualmente a la capacidad de establecer conexiones entre ambas. Dado que en el ambiente de aprendizaje implementado en este trabajo las herramientas tecnológicas se emplearon exclusivamente como fuentes de información (Internet), resulta plausible suponer que las comprensiones desarrolladas por los estudiantes siguieron esta progresión, de manera que al enfrentar tareas como la planteada en este reactivo los aprendices tendieron a invocar primero la perspectiva de proceso, al resultarles de alguna manera más sólida.

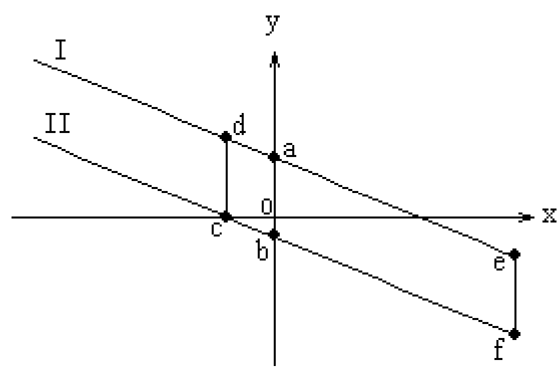
Cuatro estudiantes dibujaron rectas que pasaban por los puntos (2, 0) y (0, 1); aparentemente buscaron emplear en su gráfica los valores de los parámetros a y b (los cuales eran 2 y 1, respectivamente) de la ecuación dada, pero su interpretación de los mismos resultó equivocada. Parecería que estos estudiantes asociaron el parámetro a con la intersección de la gráfica con el eje x, haciendo lo propio con el parámetro b y la intersección de la gráfica con el eje y. Mientras tal asociación es correcta para el caso de b, no ocurre lo mismo con a. Esta manera de proceder por parte de los cuatro aprendices lleva a hacer, al menos, dos consideraciones: una, aparentemente atacaron el problema desde la perspectiva de función como objeto; dos, es posible que su comprensión del papel de b haya alcanzado un desarrollo sustancialmente superior al de su comprensión del rol de a.

Respecto a la primera consideración, los resultados que estos aprendices lograron en otros reactivos (9a y 9b) parecen confirmar que se sentían cómodos trabajando con la perspectiva de objeto, lo cual los colocaría en una situación de excepción respecto al grueso del grupo, que mostraba tendencia a atacar los problemas desde la perspectiva de proceso. Sin embargo, el pobre desempeño de estos tres alumnos en el resto del *post-test* confirma que no basta entender a las funciones como objetos (de acuerdo a la literatura, tampoco es suficiente entenderlas como procesos, cosa que los resultados obtenidos en este trabajo también parece confirmar; hace falta la habilidad de moverse entre ambas perspectivas) para desarrollar una comprensión robusta de las mismas.

En cuanto a la segunda consideración, resulta razonable pensar que la interpretación gráfica del parámetro b –la intersección de la gráfica de la función con el eje y– es más sencilla de comprender que la del parámetro a –nada menos que la pendiente de la gráfica, noción más relacionada con el carácter dinámico, de cambio, de una función–. Es posible que los estudiantes, al encontrarse con dificultades para interpretar a gráficamente, hayan optado por lo que parecía el camino más corto para salir del problema: asignarle un papel análogo al de b, de manera que a diera la intersección de la gráfica con el eje x. Se han encontrado reportes en la literatura en los que estudiantes de noveno y décimo grado (en el sistema escolar norteamericano) proceden de esta manera (Moschkovich, 1999). En otro caso, un alumno dibujó la gráfica de la recta $y = x + 1$, en apariencia interpretando de manera correcta el papel del parámetro b en la ecuación dada, pero fallando en hacer lo mismo con el parámetro *a*. Aunque procedió de manera distinta a aquellos que interpretaron *a* como la intersección de la gráfica con el eje *x*, su dificultad pareció encontrarse en el mismo punto: la comprensión del papel de *a* en la representación gráfica de una función lineal.

Reactivo 9.

En el apartado *Análisis de los resultados del pre-test* se incluye el texto íntegro del reactivo 9, el cual constituyó uno de los más extensos de la prueba. También puede encontrársele en el Anexo 2. Los estudiantes debían responder siete incisos, en los que se planteaba una serie de preguntas con base en la gráfica siguiente:



La solución de este problema, tomado del trabajo de Moschkovich *et al.* (1993), propicia el empleo de habilidades que se consideran fundamentales para la comprensión de las funciones lineales; habilidades ya mencionadas con anterioridad y que incluyen el trasladarse flexiblemente entre representaciones y perspectivas diversas de estas funciones.

9a) En el primer inciso del problema se pedía a los estudiantes decir todo lo que pudieran sobre las pendientes de las rectas I y II, mostradas en la gráfica. En una primera instancia, todo lo que puede decirse sobre esas pendientes es de carácter cualitativo: ambas son iguales y de signo negativo. Ocho aprendices mencionaron la primera característica, mientras que no hubo uno que hiciera lo propio respecto a la segunda. Entre el resto de los alumnos, la respuesta –prácticamente unánime– consistió en señalar que las rectas "son paralelas", pero sin hacer alusión específica a sus pendientes. Un estudiante no dio respuesta alguna.

Esta falta de mención de las características de las pendientes parece haberse debido a una comprensión pobre del concepto *pendiente*. Todos los alumnos notaron que las rectas eran paralelas, sin embargo pocos llevaron esta observación al plano formal y hablaron propiamente de *pendientes*. De esta manera, la mayor parte del grupo falló en dar una respuesta matemáticamente correcta a la pregunta que se planteaba.

Durante la implementación del ambiente de aprendizaje, hubo varias ocasiones en las que el grupo discutió sobre el parámetro a (en la representación $y = ax + b$) y sus efectos sobre la representación gráfica de una función lineal. Sin embargo, no se llegó a profundizar en la definición formal de pendiente ($m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$), aunque sí se registraron menciones en el sentido de que a definiría la "pendiente" (término introducido por el autor durante las sesiones de trabajo; los estudiantes hablaban de "inclinación" de las rectas) de la representación gráfica de $y = ax + b$. Como pudo constatarse durante la implementación del ambiente, los estudiantes sabían que las ecuaciones de dos rectas paralelas tendrían el mismo valor para a, pero posiblemente el término *pendiente* les resultaba todavía poco familiar al realizar el *post-test*.

De la misma manera fue posible observar, durante las sesiones de trabajo, que los aprendices sabían que una función lineal decreciente tendría una representación algebraica con a negativa. De nueva cuenta, parece razonable suponer que su poca experiencia con la terminología formal les llevó a no identificar el parámetro a con la pendiente de las rectas.

Es posible que el diseño del ambiente de aprendizaje haya adolecido de carencias en cuanto a la formalización del concepto de pendiente; lo que pudo constatarse fue que los estudiantes lograron una comprensión, en un primer nivel, del papel del parámetro a en la representación gráfica de funciones lineales.

En la Gráfica 2, la etiqueta 9a corresponde a haber escrito que las pendientes de las rectas eran iguales; la etiqueta 9a', a haber expresado que ambas pendientes serían negativas.

9b) En el segundo inciso se pedía a los alumnos decir todo lo que les fuera posible respecto a las intersecciones de las rectas I y II con el eje *y*. Sin otra información, todo lo que puede decirse respecto a estas intersecciones es que una de ellas es negativa y la otra positiva. Doce estudiantes así lo hicieron. Un alumno no respondió. Entre los otros ocho aprendices se encontró una variedad de respuestas, que incluyó tres en las cuales aparentemente los aprendices malinterpretaron la pregunta, al establecer que las intersecciones "también son paralelas". Es posible, por otra parte, que al encontrarse sin recursos para responder lo que se pedía, estos alumnos hayan optado por establecer de nuevo el paralelismo de las rectas –característica que pudo parecerles sobresaliente en la gráfica–.

Un estudiante afirmó que las intersecciones serían "el punto de partida" de las rectas. Su aseveración hace pensar que concibe a las rectas como generadas de izquierda a derecha; en la discusión del reactivo 4c en este mismo apartado, otro estudiante, al hablar de "rectas ascendentes", exhibe lo que podría ser una concepción muy similar. Ésta es posiblemente debida a la manera de estudiar a las funciones lineales durante las sesiones de trabajo; en todas ellas, se discutió sobre situaciones didácticas en contextos no matemáticos, en los cuales, por lo general, los valores de la variable independiente eran vistos como crecientes. Así, pudo haberse generado una tendencia a que los estudiantes pensaran en las rectas siendo generadas, siempre, de izquierda a derecha. Ésta puede ser una deficiencia del diseño del ambiente de aprendizaje, en el cual se pretendió lograr una instrucción centrada completamente en situaciones didácticas dentro de contextos no matemáticos.

Otras respuestas establecían hechos que podrían interpretarse como correctos, pero que no constituían una respuesta, en rigor, a la pregunta planteada. Por ejemplo, que en el punto de intersección, ambas rectas –el eje y y la representación gráfica de alguna de las funciones– "tendrían el mismo valor" en la coordenada y. Otro estudiante afirmó que "la diferencia entre las rectas I y II será la misma". Si se entiende por diferencia "distancia", la respuesta señala un hecho cierto, pues al ser las rectas paralelas la distancia entre ellas siempre se mantendrá constante. También se encontró una respuesta en la que el alumno establecía que "las intersecciones se dan cuando x es cero", lo cual es correcto pero no llega a ser una respuesta que pueda considerarse completa.

En una respuesta más se dice que el eje y "corta exactamente en el mismo punto a ambas" rectas. Parece ser que este estudiante hace referencia, con la expresión "el mismo punto", al hecho de que la coordenada x en el punto de intersección es la misma para ambas rectas (a saber, $x = 0$). Así interpretada, la respuesta establece algo cierto pero alejado de lo que se pregunta; además, el estudiante deja ver una deficiencia importante en el uso del lenguaje matemático.

9c) En este inciso se presentaba a los alumnos una lista de cuatro ecuaciones lineales, entre las cuales se encontraban las correspondientes a las rectas I y II. Las ecuaciones incluidas en la lista eran $y = 2x + 6,\ y = -2x - 2,\ y = 2x - 6,\ y = -2x + 6$. La consigna especificaba que debía señalarse qué ecuación correspondía a cada recta. Catorce aprendices señalaron las ecuaciones correctas; sin embargo, sólo siete de ellos especificaron con claridad a qué recta correspondía cada una de las ecuaciones que habían señalado, faltando con ello a lo que se solicitaba en la consigna.

Hubo cuatro casos en los que los estudiantes señalaron que la ecuación $y = 2x + 6$ correspondería a la recta I, mientras que $y = -2x - 2$ correspondería a la recta II. De ambas asociaciones, sólo la segunda es correcta. Otros dos alumnos señalaron esas ecuaciones, pero sin indicar a qué recta correspondería cada una. Resulta interesante observar que, en esos seis casos, los alumnos parecen haberse guiado por el valor de la ordenada al origen b para realizar su elección; habiendo observado en el inciso anterior que, en la recta I, b sería mayor que en la recta II, optaron por dos ecuaciones que mostraran esas características. Este resultado podría ser indicativo de que los estudiantes lograron comprensiones más desarrolladas de la interpretación gráfica de b que de la de a, impresión que se ve reforzada por lo encontrado en otros reactivos (ver discusión de los resultados para el reactivo 8, en este mismo apartado).

En concordancia con lo anterior, un aprendiz señaló las ecuaciones $y = 2x - 6$ (asociándola incorrectamente con la recta II) y $y = -2x + 6$ (asociándola con la recta I, lo cual es correcto). Este estudiante también parece haberse guiado por el hecho de que b debía ser positiva para I y negativa para II. Pero como otros de sus compañeros, falló al no considerar que a debía ser negativa para ambas rectas.

En la Gráfica 2, la etiqueta 9c corresponde a haber señalado las ecuaciones correctas, mientras 9c' corresponde a haber indicado claramente qué ecuación correspondía a cada recta.

9d) Los tres incisos anteriores podían ser resueltos enteramente dentro de la perspectiva de función como objeto: por un lado, la pendiente y la ordenada al origen son atributos de una recta como un todo; por otro, al presentar las gráficas de las funciones involucradas al inicio del problema, la perspectiva de objeto resulta natural para comenzar a resolverlo (Schwartz y Yerushalmy, 1992). El cuarto inciso, a diferencia de aquellos, demandaba un cambio de perspectiva –a la perspectiva de función como proceso– pues en él se solicitaba a los estudiantes encontrar las coordenadas de los puntos señalados en la gráfica como a, b, c y d.

Dado que la gráfica sólo aportaba información cualitativa, la única manera de encontrar estas coordenadas era a través del empleo de las ecuaciones de las rectas I y II. En el caso de los puntos c y d, resulta crucial estar consciente de dos factores: por un lado, los puntos en cuestión se encuentran sobre las mencionadas rectas; por otro, las coordenadas de cualquier punto que forme parte de una curva satisfarán la ecuación de dicha curva. Atacando un punto a la vez, pronto resulta evidente que se tienen dos incógnitas (las dos coordenadas del punto) y sólo una ecuación; el problema no podrá resolverse en tanto no se cuente con dos piezas independientes de información; pero al observar la gráfica, puede concluirse que la coordenada y de, por ejemplo, el punto c, es cero, y entonces será posible emplear la ecuación de la recta II para encontrar su coordenada x. Es aquí donde se requiere cambiar de perspectiva: emplear la ecuación para encontrar las coordenadas de un punto de la recta es trabajar desde la perspectiva de función como proceso.

Una vez encontradas las coordenadas de c, los estudiantes podrían regresar a la gráfica y notar que el segmento que une c y d es paralelo al eje y, lo cual indica que sus coordenadas x son idénticas. Empleando la ecuación de la recta I se encontraría la coordenada y del punto d. Ahora bien, para el caso de los puntos a y b no resulta imprescindible hacer conciencia de que las coordenadas de un punto sobre una curva satisfacen su ecuación; es posible que los estudiantes notaran que a y b corresponden a las intersecciones de las rectas con el eje y, lo que les daría la información de que $x = 0$ para ambos puntos. Encontrarían sus ordenadas "leyéndolas" directamente de los valores de b en las ecuaciones para I y II. Es posible llevar esto a cabo manteniéndose dentro de la perspectiva de función como objeto.

Se encontró que 16 estudiantes pudieron encontrar las coordenadas de los puntos a y b, pero sólo tres lograron lo propio con las de c y d. Dado que, como se discute en los párrafos precedentes, hallar las primeras era posible dentro de la perspectiva de objeto mientras que hallar las segundas demandaba un cambio de perspectiva, parecería que el paso de una perspectiva a otra resultó problemático para los estudiantes, resultado que reporta también la literatura (Moschkovich *et al.*, 1993). Esta es una de las habilidades consideradas como más complejas y más importantes para la comprensión del concepto de función (Moschkovich *et al.*, 1993; NCTM, 2000). Los resultados indicarían que el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes no llegó a desarrollarse lo suficiente como para verse reflejado en un mejor desempeño en este reactivo. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que encontrar las coordenadas de cualquiera de los puntos requiere que se realicen conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones involucradas (al igual que las tareas planteadas en los incisos 9a, 9b y 9c). En este punto, los alumnos se mostraron capaces de lograr resultados aceptables, encontrándose un número significativo de estudiantes que consiguieron resolver correctamente dichas tareas. El paso entre diferentes representaciones de una función también es considerado en la literatura como esencial para la comprensión del concepto (Moschkovich *et al*., 1993; NCTM, 2000).

Por otra parte, al estudiar el tipo de errores cometidos por los estudiantes en sus intentos por resolver la tarea, surge otra posible interpretación de los resultados, que se discute a continuación.

Al analizar las formas en que los alumnos trataron de resolver esta tarea, se encontró que varios de ellos pretendieron hallar las coordenadas solicitadas de la siguiente manera: una vez conocidas las de los puntos a y b, dibujaron marcas equidistantes sobre el eje y de la gráfica, de manera que las coordenadas de a y b, en el plano, coincidieran con las halladas algebraicamente (por ejemplo, las coordenadas de a, calculadas mediante la ecuación de la recta I, son (0, 6). El alumno haría entonces seis marcas equidistantes entre el origen y el punto a, extendiéndolas después para cubrir todo el eje y; luego dibujaría marcas equidistantes sobre el eje x). Empleando la escala que de este modo obtenían, trataron de de determinar las coordenadas de los puntos c y d.

Algunos de estos alumnos emplearon la misma escala en ambos ejes. Su método falló pues en la gráfica que se les proporcionó cada eje está dibujado a una escala diferente. Los otros, al avanzar al reactivo 9e notaron que ambos ejes debían tener escalas diferentes, y realizaron sus marcas en concordancia con este hecho.

Esta manera de proceder revela cierta comprensión de las convenciones del plano cartesiano; pero en el caso de los cinco estudiantes que emplearon la misma escala en los dos ejes, también deja ver que tal comprensión es limitada, pues no tomaron en cuenta la posibilidad de que cada eje estuviera dibujado con una escala distinta. También queda de manifiesto el desarrollo de cierta habilidad para moverse entre las representaciones gráfica y algebraica de funciones lineales.

Dos estudiantes omitieron responder todo el reactivo. Los resultados para cada uno de los puntos, a, b, c y d, quedaron como sigue:

Para el punto a, dieciséis alumnos hallaron las coordenadas correctas, uno trató de hallarlas con el método de marcar los ejes –llegando a valores erróneos al emplear escalas aparentemente arbitrarias–, y dos tuvieron errores de carácter aritmético-algebraico.

Respecto al punto b, dieciséis alumnos dieron sus coordenadas correctas, uno intentó hallarlas usando marcas arbitrarias sobre los ejes (llegando a valores equivocados debido a la arbitrariedad de su escala), uno cometió errores de tipo aritmético-algebraico y otro más no dio respuesta.

En cuanto al punto c, tres estudiantes encontraron las coordenadas que le correspondían; siete dieron coordenadas erróneas al parecer debido a equivocaciones aritméticas y en la manipulación algebraica de $y=-2x-2$; estos alumnos pudieron obtener de la gráfica la información de que, para el punto c, $y=0$, pero cometieron errores al operar con la ecuación, llegando a valores incorrectos para x. Además, algunos de ellos habían elegido ecuaciones erróneas para las rectas I y II, con lo que sus intentos estaban dirigidos al fracaso. Un alumno notó que la ordenada de c debía ser cero, pero al pasar a las ecuaciones pareció invertir los papeles de las variables x y y, escribiendo que $x=0$. Tres estudiantes omitieron responder, y siete trataron de encontrar las coordenadas del punto usando marcas sobre los ejes, que en ocasiones eran arbitrarias, y en otras se definían para ser consistentes con las coordenadas –ya conocidas a esta altura del problema– de los puntos a y b. Dentro de esta vertiente se distinguieron dos casos: algunos estudiantes emplearon la misma escala para ambos ejes; otros parecen haber notado, en el reactivo siguiente, que las escalas no podían ser iguales, pero esto únicamente los causó desconcierto y terminaron por asignar valores arbitrarios a dichas escalas.

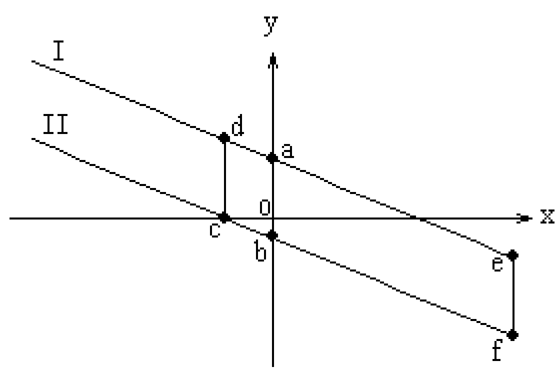
Respecto al punto d, tres aprendices encontraron las coordenadas correctas, mientras doce erraron en el cálculo de las coordenadas: aunque notaron que el segmento que une c y d es paralelo al eje y, de modo que ambos puntos compartirían la misma abscisa, habían encontrado un valor erróneo para la abscisa de c, y lo emplearon para tratar de hallar la ordenada de d, llegando a resultados incorrectos. Tres alumnos más habían elegido, en el reactivo anterior, una ecuación equivocada para la recta I; cometieron además el mismo error que sus compañeros, fallando al calcular la abscisa de c y usando ese valor en el cálculo de las coordenadas de d. El estudiante que había invertido los papeles de x y y al calcular la ordenada de c cometió aquí el mismo error; dos más no dieron respuesta.

Es de destacar que, de acuerdo a lo discutido en los párrafos precedentes, el grueso de los aprendices fue capaz de trasladarse entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones involucradas, y de efectuar el paso de la perspectiva de función como objeto a la de función como proceso: habiendo resuelto los incisos anteriores dentro de la primera perspectiva, una parte significativa del grupo supo que debía usar las ecuaciones de las rectas –y cómo hacerlo– para encontrar las coordenadas requeridas. Emplear así dichas ecuaciones significa trabajar desde la perspectiva de proceso.

Una parte importante de los errores cometidos por los estudiantes se relacionó con dificultades aritmético-algebraicas, con no haber elegido correctamente –en el inciso anterior– las ecuaciones para las rectas I y II, o con no haber considerado la posibilidad de que cada eje de un plano cartesiano esté dibujado a una escala diferente (o con el desconcierto que esta posibilidad parece haber generado en algunos estudiantes). Aparentemente, y en términos generales, los estudiantes desarrollaron habilidades para trasladarse entre perspectivas y representaciones diferentes de las funciones con las cuales debían trabajar, pero se encontraron con dificultades de tipo procedimental, o con una falta de competencia al tratar con representaciones específicas.

En la Gráfica 2, las etiquetas 9d, 9d', 9d'' y 9d''' corresponden a encontrar las coordenadas correctas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d*, respectivamente.

9e) En este reactivo se solicitaba a los alumnos suponer que la abscisa del punto *e* en la gráfica era 5, y a partir de ello encontrar su ordenada así como las coordenadas del punto *f*.



Cuatro de veintiún estudiantes hallaron el valor correcto de la ordenada de *e*; dos pudieron hallar las coordenadas de *f*. En una primera aproximación, estos números harían pensar que los estudiantes no lograron desarrollar una comprensión lo suficientemente robusta como para enfrentar la tarea; sin embargo, y como sucede en el inciso anterior, al analizar los procedimientos seguidos por los aprendices puede constatarse que fueron capaces de realizar conexiones cruciales entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones en juego, además de trabajar con ellas como procesos –después de haber venido tratándolas como objetos en los tres primeros incisos–, con lo que mostraron habilidad para moverse entre ambas perspectivas. El análisis de los procedimientos empleados por los estudiantes revela, esencialmente, las mismas fallas halladas en el inciso anterior: errores procedimentales y en el trabajo dentro de representaciones específicas.

Siete estudiantes dejaron el reactivo completo sin respuesta. Los resultados para cada punto, e y f, se discuten a continuación:

Para el punto e, cuatro estudiantes encontraron correctamente las coordenadas correspondientes. Cuatro cometieron errores de tipo aritmético-algebraico; uno de ellos, además, había elegido una ecuación incorrecta para la recta I. Seis trataron de hallar sus coordenadas dibujando marcas sobre los ejes de la gráfica; cuatro de ellos emplearon para este fin la información dada en el inciso, a saber, la abscisa de e debía ser 5. Sin embargo, al proceder así llegaron a inconsistencias con el inciso anterior, pues para resolverlo ya habían asignado una escala al eje x que no podría ser igual a la que asignaban para resolver este inciso. Aparentemente esto les resultó problemático y en general, determinaron escalas más o menos arbitrarias que no les permitieron hallar las coordenadas correctas del punto e. Los otros dos pasaron por alto el dato $x = 5$ y emplearon la misma escala para ambos ejes (escala determinada en el inciso anterior, al hallar las coordenadas de los puntos a y b).

En el caso del punto f, dos alumnos proporcionaron sus coordenadas correctamente. Tres omitieron responder. Cinco aprendices presentaron errores de tipo aritmético-algebraico, mientras cuatro intentaron hallar las coordenadas empleando el método de dibujar marcas sobre los ejes de la gráfica. De ellos, tres cayeron en inconsistencias con la escala que habían definido previamente para resolver el inciso 9d, lo cual aparentemente les llevó a definir escalas arbitrarias que arrojaron valores incorrectos para las coordenadas buscadas. El otro supuso la misma escala para ambos ejes, enfoque que no lo llevó a la solución de la tarea.

De un modo similar a lo registrado para el inciso anterior, las dificultades de los estudiantes en este reactivo parecen haberse encontrado en el terreno de lo procedimental y en el de la competencia al trabajar dentro de una misma representación: si bien hay muestras de que los aprendices sabían qué camino tomar para solucionar la tarea planteada, y de que fueron capaces de moverse entre dos representaciones distintas, su dominio de cada una de ellas aparentó no encontrarse lo suficientemente desarrollado como para permitirles llegar a resoluciones completas y correctas.

Cabe mencionar que, de acuerdo con lo reportado en la literatura (Msschkovich *et al*., 1993), desarrollar las habilidades descritas –paso entre representaciones y perspectivas de una función– resulta arduo y complejo. El ambiente de aprendizaje diseñado para este trabajo parece haber conseguido pasos importantes en este sentido entre los alumnos que formaron parte del ambiente; en un momento posterior, será necesario realizar adecuaciones que permitan atacar las debilidades halladas en la competencia procedimental y al interior de una representación dada.

En la Gráfica 2, las etiquetas 9e y 9e' corresponden a haber encontrado correctamente las coordenadas de los puntos *e* y *f*, respectivamente.

9f) Atendiendo a la misma gráfica de la cual emanaban las tareas anteriores, en el inciso f se pedía a los estudiantes hallar las longitudes de los segmentos *ef*, *cd* y *ab*. Mientras doce alumnos notaron que los tres segmentos deberían tener la misma longitud, sólo siete de ellos hallaron el valor correcto de ésta. Los otros cinco dieron valores erróneos debido a que también lo habían sido sus respuestas para los reactivos 9d y 9e, en los cuales debían dar las coordenadas de los puntos involucrados: *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*. De este modo, aunque procedieron correctamente en este reactivo, sus respuestas fueron incorrectas numéricamente.

Es interesante notar que algunos de los estudiantes que respondieron correctamente habían obtenido coordenadas erróneas para *c*, *d*, *e* y *f*; sólo para los puntos *a* y *b* encontraron las coordenadas correctas. De este modo, aparentemente emplearon éstas últimas en su cálculo de la longitud de los segmentos solicitados. Dado el paralelismo de las rectas I y II, probablemente emplearon este resultado para inferir las longitudes de los otros segmentos. De hecho, varios de estos estudiantes manifestaron por escrito estar conscientes de que debían haber cometido algún error, pues sus cálculos arrojaban longitudes diferentes para cada segmento, cuando esperaban que fueran iguales. En este punto, dejaron ver que estaban más seguros de haber obtenido las coordenadas correctas para los puntos *a* y *b* (que correspondían a las ordenadas al origen de las rectas I y II) que del resto de los puntos, por lo que adoptaron el valor que obtenían empleando las primeras. Esto es consistente con lo expuesto en la discusión de los resultados de los reactivos 8 y 9c, en este mismo apartado.

Nueve aprendices omitieron dar respuesta a este inciso.

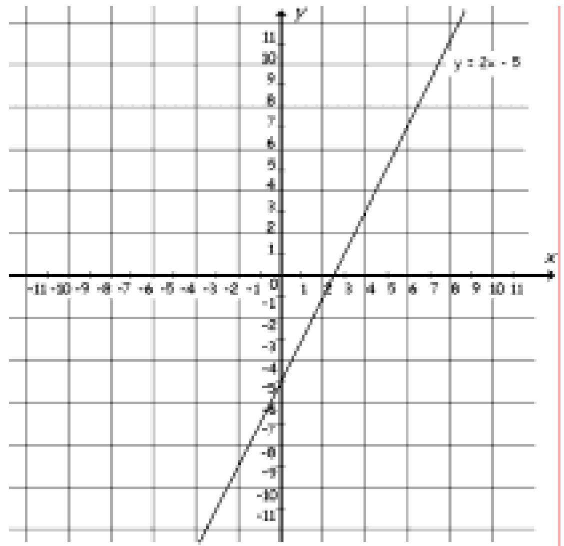
9g) En el último inciso del problema 9, los estudiantes debían trazar un segmento de recta, paralelo al eje *y*, que uniera a las rectas I y II, y decir si sería posible predecir su longitud. Siete alumnos así lo hicieron, mientras trece dejaron el reactivo sin respuesta, el número más elevado de omisiones entre todos los reactivos que constituyeron la prueba. Es posible que, siendo el problema 9 el más largo y el más complejo, matemáticamente hablando, de todo el instrumento, los estudiantes hayan llegado a un punto en el que el agotamiento los haya hecho preferir omitir sus últimos incisos.

Aparentemente un estudiante malinterpretó la consigna de este reactivo, pues trazó un segmento de recta paralelo al eje *x*, no al *y* como se pedía. Afirmó que para conocer la longitud de este segmento sería necesario contar con las coordenadas de sus extremos, lo cual –dadas las condiciones del problema– es correcto pero falta a lo que se solicitaba en la consigna. El desempeño de este aprendiz en el resto de la prueba hace pensar que, de haber interpretado correctamente el reactivo, habría notado que la longitud del segmento solicitado podía conocerse sin conocer las coordenadas de sus extremos, dado que las rectas I y II eran paralelas y que ya conocía las longitudes de otros segmentos congruentes al propuesto en este inciso.

Reactivo 10.

El siguiente reactivo contenía cuatro incisos; tomado del trabajo de Moschkovich *et al*., (1993), las tareas propuestas en dichos incisos pretenden llevar al alumno a efectuar conexiones entre las representaciones algebraica y gráfica de funciones lineales, así como a moverse entre las perspectivas de función como objeto y función como proceso. Cabe destacar que una versión de este problema fue incluida en la *Nacional Assesment of Educational Progress* (*NAEP*) del año 1990 (referida en Moschkovich *et al*., 1993), y de acuerdo a los resultados reportados, plantea un reto serio incluso para alumnos del doceavo grado (en el sistema escolar norteamericano): únicamente el 16% de los estudiantes que presentaron esa evaluación respondió correctamente todo el problema.

10a) En el primer inciso se presentaba a los estudiantes el siguiente plano cartesiano:



Se pedía trazar una paralela a $y = 2x - 5$, que pasara por el origen. Veinte alumnos dibujaron la recta solicitada; uno trazó una recta paralela a la dada, pero que no pasaba por el origen de la gráfica. En cambio, intersectaba al eje *y* en $y = -2$. Aparentemente ignoró o malinterpretó la consigna planteada. Otra posibilidad es que el alumno no haya podido localizar el origen en la gráfica, aunque tal situación resulta poco probable pues este aprendiz había mostrado familiaridad con el plano cartesiano durante la implementación del ambiente de aprendizaje.

Si bien el experto podría considerar la tarea como trivial, debe recalcarse que la literatura reporta que en la *NAEP* del año 1990, sólo el 32% de los estudiantes dibujaron la línea solicitada en este problema (Moschkovich *et al*., 1993).

10b) Al pasar al siguiente inciso, los aprendices debían encontrar y escribir una ecuación para la línea que acababan de trazar. Hacer esto demanda conexiones entre representaciones y perspectivas de las función involucradas (ver la discusión sobre éste mismo reactivo, en el apartado *Análisis de los resultados del pre-test*). Se encontró que trece estudiantes escribieron ecuaciones correctas para la recta en cuestión, como $y = 2x$ o $y = x2$. La última forma parece reflejar la manera en la que algunos alumnos piensan en la ecuación de la recta: "*y* es igual a *x* por 2", de un modo similar a lo que se encontró en el reactivo 6b (ver discusión al respecto, en este mismo apartado).

Por otra parte, se registró una variedad de ecuaciones incorrectas, como $y = 2x - 4$ o $y = 2x - 2$ (un caso cada una). Parece ser que los estudiantes que dieron estas respuestas comprendían que dos líneas paralelas deberían tener la misma pendiente, la cual podían identificar con el parámetro a en $y = ax + b$. Sin embargo, fallaron al determinar el valor correcto del parámetro b. Ahora bien, determinar a resulta natural desde la perspectiva de función como objeto (Moschkovich *et al*., 1993), y al trabajar con la representación gráfica de una función, ésa es la perspectiva que tiende a invocarse en primer lugar (Schwartz y Yerushalmy, 1992). Dado que en este problema se presentaba a los estudiantes, precisamente, una gráfica de la función $y = 2x - 5$, resulta razonable suponer que comenzaron la resolución del problema desde la perspectiva de objeto, y que emplearon esa misma perspectiva para encontrar el valor de a. Pero ella no es la más natural para encontrar el valor de b; en cambio, parece ser que los estudiantes tienden a hallar ese parámetro pensando en la función como un proceso (Moschkovich *et al*., 1993). Así, es posible que los alumnos se hayan visto en la necesidad de efectuar un cambio de perspectiva para calcular b. Moshckovich *et al*., (1993) han reportado que este cambio de perspectiva resulta complicado y difícil de dominar para los aprendices de matemáticas, lo cual podría explicar el hecho de que, en este caso, los alumnos hayan dado un valor correcto para a pero uno incorrecto para b.

Un alumno dio por respuesta en este inciso la ecuación $y = 2x - 2$, pero la recta que había trazado en el inciso anterior correspondía precisamente a esa ecuación. Con ello, el estudiante estaría mostrando haber desarrollado ciertas habilidades para el traslado entre representaciones y perspectivas de la función con la que trabajaba. Respecto al hecho de haber trazado una recta que no era la solicitada, aparentemente el alumno malinterpretó o ignoró las especificaciones que se hacían en la consigna del reactivo.

Se registraron tres aprendices que dieron por respuesta la ecuación $y = x - 1$. En ella, ninguno de los parámetros a o b tiene el valor correcto. El desempeño de estos estudiantes en el resto de la prueba hace pensar que su comprensión de las funciones lineales alcanzó un desarrollo limitado, el cual se vería reflejado en su respuesta equivocada a este inciso.

Un alumno respondió con la ecuación $y = x/2$, otro más con $x = 2y$. Ambos intentaron encontrar la ecuación de la recta que habían trazado de la siguiente manera: en el plano cartesiano, localizaron puntos sobre dicha recta y determinaron sus coordenadas; luego trataron de hallar una ecuación que se ajustara a las mismas. Al hacer esto, evidenciaron estar trabajando desde la perspectiva de proceso; es difícil saber si comenzaron el problema en la perspectiva de objeto (cosa probable, de acuerdo a lo reportado por Moschkovich *et* *al.*, 1993) y de este modo realizaron después un cambio de perspectiva. En cualquier caso, efectuaron conexiones entre las representaciones algebraica y gráfica de la función examinada, y aparentemente notaron que los valores de y eran el doble que los de x (o que los de x eran la mitad de los de y). Sin embargo, erraron al pasar de esta regla verbal a una representación algebraica; la fuente de su equivocación parece encontrarse en que la afirmación verbal "y es el doble de x" tiende a visualizarse como "$y2 = x$", o bien, $x = 2y$. Otro tanto puede decirse respecto a $y = x/2$. Fue común encontrar esta clase de error durante la sesiones de trabajo con el grupo; es necesario diseñar instrumentos de instrucción específicos para atacar las dificultades mostradas al respecto por los estudiantes.

10c) En el tercer inciso los estudiantes debían dibujar una nueva recta, paralela a las anteriores, que pasara por el punto (1, 4). Diecisiete aprendices trazaron la recta correctamente.

Un alumno se limitó a señalar el punto (1, 4) en el plano, sin llegar a trazar la recta solicitada. Por el modo en que había procedido en el inciso 10a, parece ser que este alumno marcaba puntos en el plano que se encontraran sobre la recta solicitada, para luego trazar la recta y encontrar una ecuación que se ajustara a los puntos así localizados. El hecho de que, en este inciso, se haya limitado a señalar el punto por el que debía pasar la recta requerida, parece indicar que se disponía a proceder del mismo modo, pero quizá por razones de tiempo omitió el trazo de la recta.

En otro caso, un estudiante trazó una recta que pasaba por (1, 4) pero que no era paralela a las anteriores; en cambio, pasaba por el origen de la gráfica. Es posible que el estudiante tuviera problemas con el término "paralela".

Se encontró también una respuesta en la que el alumno trazó una recta paralela a las demás, pero que no pasaba por el punto especificado. Sobre esta recta, señaló los puntos (1, 0) y (3, 4) (pues pasaba por ellos). Puede ser que el alumno haya interpretado incorrectamente la parte de la consigna en la que se especificaba que la nueva recta debía pasar por el punto (1, 4); quizás la notación le resultó poco familiar (durante las sesiones de trabajo, se dedicó poco tiempo a la notación (x, y); prácticamente todo el grupo había dado muestras de conocerla con anterioridad y de poder trabajar con ella), de modo que parece haber pensado en la condición "la recta debe pasar por el punto (1, 4)" como "la recta debe pasar por $x = 1$ y $y = 4$". La recta que trazó, al pasar por (1, 0) y (3, 4), cumple con esta interpretación –incorrecta– de la consigna.

Un aprendiz dejó el reactivo sin contestar.

10d) En el último inciso, los estudiantes debían encontrar y escribir una ecuación para la recta que hubieran trazado en el inciso 10c. Doce aprendices dieron una ecuación válida para esta recta. Cuatro dejaron el inciso sin respuesta.

Un estudiante escribió que la ecuación de la recta sería $y = 4x$. La manera en que trataron de resolver esta tarea revela que lo hicieron efectuando conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica desde la perspectiva de función como proceso; esencialmente, parece que la idea era localizar puntos sobre la recta en cuestión y luego hallar una ecuación que se ajustara a ellos. Sin embargo, en este caso, sólo se ocuparon de localizar un punto, (1, 4) –por el cual se pedía que pasara la recta–. Este satisface la ecuación $y = 4x$, razón por la cual posiblemente la reportaron en lugar de la ecuación correcta, $y = 2x + 2$, o alguna forma equivalente. Al dar esta respuesta, el alumno mostró una comprensión pobre de las funciones como objetos: no reparó en que su ecuación debía tener el mismo valor de a que la ecuación dada en el inciso 10a. Además, no consideró que para determinar completamente una recta son necesarios dos puntos, y no sólo uno como pretendió hacerlo.

Dos alumnos escribieron la ecuación $x = 4y$. Por lo que puede observarse, siguieron el mismo procedimiento y cometieron los mismos errores que su compañero del párrafo precedente, más una equivocación adicional: al darse cuenta de que, para el punto que analizaba, y era "cuatro veces mayor que x", escribieron una expresión equivalente a $y4 = x$. Como se discute en el reactivo 10b (en este mismo apartado), parece ser que hay una tendencia a visualizar frases del tipo "y es n veces más grande que x" como $yn = x$. Es necesario diseñar instrumentos de instrucción específicos para atacar esta situación.

Un estudiante dio por respuesta la ecuación $y = x + 4$, aunque no trazó la recta solicitada en el inciso anterior: se limitó a señalar el punto (1, 4). Parece que trató de encontrar una ecuación que produjera el valor $y = 4$ cuando se hace $x = 1$, pero fracasó en ello. Por otra parte, hubiera necesitado al menos dos puntos de la recta para asegurar encontrar una ecuación correcta. La comprensión de este estudiante respecto a las funciones lineales no llegó a desarrollarse de manera importante, de acuerdo a lo que pudo apreciarse en su desempeño en el *post-test*.

Otro aprendiz escribió la ecuación $y = 4x - 1$. Posiblemente trató de incluir en su expresión algebraica, de una manera directa, el hecho de que la recta debería pasar por (1, 4). Esta manera de proceder se ha reportado con anterioridad en la literatura (Moschkovich, 1999), y parece constituir una concepción transicional hacia comprensiones más desarrolladas. Sin embargo, no se cuenta con evidencia de que este aprendiz realmente se encontrara empleando esta concepción transicional. Lo que puede afirmarse es que su situación es similar a la de su compañero del párrafo anterior, y su comprensión de las funciones lineales parece no haber alcanzado niveles de desarrollo sustanciales.

Reactivo 11.

Constituido por nueve incisos, este reactivo mostraba, de un lado de la hoja, una lista de nueve funciones en su representación algebraica, algunas lineales y otras cuadráticas. Frente a esta lista, aparecían las representaciones gráficas de ocho de las funciones anteriores. La consigna era asociar cada ecuación con su gráfica correspondiente. El incluir más ecuaciones que gráficas fue un medio para minimizar las posibilidades de que los estudiantes obtuvieran respuestas correctas asociando gráficas y ecuaciones al azar.

11a) Siete estudiantes asociaron la ecuación $y = 3x + 1$ con la gráfica que le correspondía. El resto asoció a esa ecuación las gráficas de una variedad de funciones, y en la tabla siguiente se consignan las frecuencias con las que asociaron distintas gráficas con la ecuación $y = 3x + 1$:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = 3x + 1$
$y = 3x + 1$	7
$y = -x^2$	0
$y = x - 2$	1
$y = -2x - 3$	1
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	2
$y = x^2 + 1$	1

Ocho estudiantes dejaron la ecuación sin asociarla con ninguna gráfica. Por otro lado, la mayor parte de asociaciones erróneas fue con la gráfica de $y = -x + 1$; es posible que los estudiantes se hayan guiado, en sus asociaciones, por el valor del parámetro *b*, el cual identificaban con la intersección de la gráfica con el eje *y*. Esto es consistente con lo discutido en los reactivos 8, 9c y 9f, en cuanto a que parece que, al efectuar conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica, los estudiantes tendieron a guiarse por el parámetro b y a dejar de lado, o malinterpretar, el parámetro a –cuyo rol en la representación gráfica es aparentemente más difícil de comprender–.

Un alumno asoció la gráfica con la ecuación $y = x^2 + 1$, la cual probablemente trató de ver en una manera análoga a la forma $y = ax + b$, identificando el número 1 en $y = x^2 + 1$ con b en $y = ax + b$. De esta manera, como otros de sus compañeros, da la apariencia de haber atendido más al valor de b para realizar la asociación que, incluso, al hecho de que estaba asociando una ecuación cuadrática con la gráfica de una función lineal, lo cual refuerza la impresión mencionada en el párrafo anterior.

Cabe mencionar que, en este inciso, se encontró a dos alumnos que asociaron la gráfica de una ecuación cuadrática con una ecuación lineal. Esto refleja una deficiencia importante al realizar conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica de funciones.

11b) Se encontró que nueve alumnos asociaron correctamente la ecuación $y = -x^2$ con la gráfica correspondiente. Seis omitieron asociar la ecuación con alguna gráfica, y el resto del grupo realizó asociaciones incorrectas. El grupo en general asoció varias gráficas a esta ecuación, con las frecuencias que aparecen en la tabla que sigue:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = -x^2$
$y = 3x + 1$	0
$y = -x^2$	9
$y = x - 2$	1
$y = -2x - 3$	1
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	3
$y = -x + 1$	1
$y = x^2 + 1$	0

Aunque la asociación incorrecta más frecuente fue con la gráfica de $y = x^2 - 2$ –tres alumnos lo hicieron así– se encuentra también que otros tres estudiantes asociaron ecuaciones lineales a la gráfica de una ecuación cuadrática. Dicho resultado parece indicar que, en su mayor parte, los estudiantes comenzaron a reconocer que una función cuadrática no podría asociarse con una línea recta, pero que esta falla persistía en algunos estudiantes.

11c) Trece aprendices asociaron correctamente $y = x - 2$ con su gráfica, en tanto que dos no indicaron ninguna asociación. Se observaron varias asociaciones incorrectas, que se incluyen en esta tabla junto a las correctas:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x - 2$
$y = 3x + 1$	2
$y = -x^2$	1
$y = x - 2$	13
$y = -2x - 3$	2
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	2
$y = -x + 1$	0
$y = x^2 + 1$	0

Un estudiante asoció la ecuación $y = x - 2$ con dos gráficas, la de $y = x^2 - 2$ y la de $y = -2x - 3$. Tres aprendices le asociaron a $y = x - 2$ –una ecuación lineal– gráficas de ecuaciones cuadráticas. En dos de estos casos, se le asoció la gráfica de $y = x^2 - 2$. Es posible que los alumnos siguieran guiándose por el valor de b para realizar sus asociaciones, tratando de establecer una analogía entre $y = x^2 - 2$ y la forma $y = ax + b$. Pero al pasar por alto que estaban asociando ecuaciones lineales con gráficas de funciones cuadráticas, mostraron una pobre habilidad para trasladarse entre las representaciones gráfica y algebraica de funciones de este tipo.

11d) Once alumnos realizaron una asociación correcta entre las representaciones gráfica y algebraica de la función representada por $y = -2x - 3$. Las frecuencias con las que el grupo asoció distintas gráficas a esa ecuación se refieren en la tabla siguiente:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = -2x - 3$
$y = 3x + 1$	2
$y = -x^2$	0
$y = x - 2$	1
$y = -2x - 3$	11
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	2
$y = x^2 + 1$	0

Cuatro aprendices omitieron asociar esta ecuación con alguna grafica. En esta ocasión, sólo se encontró un caso en el que el estudiante asoció una ecuación lineal con la gráfica de una ecuación cuadrática. Sin embargo, dicha asociación, así como las otras realizadas de manera incorrecta en este inciso (seis en total) no parecen haberse guiado –al menos no de una forma tan directa como en otros incisos– por los valores de los parámetros a o b. Parece que algunos aprendices hicieron uso de su conocimiento de que un valor negativo para a resultaría en una recta "inclinada hacia abajo", mientras otros ignoraron este hecho y se enfocaron en quizá sólo en la forma de las gráficas, recordando que la gráfica debería ser una línea recta pues la ecuación era lineal.

11e) En este inciso se encontraba la ecuación $y = -3x^2$, cuya gráfica no aparecía entre las mostradas para esta tarea; de esta manera, lo correcto era no asociar esta ecuación con ninguna gráfica. Sin embargo, era posible que algún alumno dejara de contestar el inciso simplemente por el hecho de omitirlo. Por ello, la falta de asociación de este inciso con alguna ecuación sólo se consideró correcta cuando el estudiante había respondido más de la mitad de los incisos de este problema. Doce alumnos se encontraron en este caso. Se consideró, asimismo, que tres estudiantes no contestaron el inciso.

Por otra parte, algunos aprendices sí asociaron la ecuación $y = -3x^2$ con alguna gráfica, con las frecuencias siguientes:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = -3x^2$
$y = 3x + 1$	0
$y = -x^2$	0
$y = x - 2$	0
$y = -2x - 3$	1
$y = x$	1
$y = x^2 - 2$	1
$y = -x + 1$	1
$y = x^2 + 1$	2

Aquí vuelve a encontrarse que tres estudiantes asociaron una ecuación cuadrática con la gráfica de una función lineal, dando muestras de pobres conexiones entre representaciones gráfica y algebraica de esta clase de funciones. Otros tres estudiantes asociaron con la ecuación $y = -3x^2$ las gráficas de distintas funciones cuadráticas; aparentemente, el único criterio que emplearon fue el asociar líneas rectas con ecuaciones lineales, y curvas con ecuaciones cuadráticas.

11f) Diecinueve aprendices asociaron la ecuación $y = x$ con la gráfica que le correspondía. Un alumno no contestó el inciso mientras otro asoció esa ecuación con la gráfica de $y = x - 2$. En este caso, no hubo un alumno que asociara ecuaciones lineales con gráficas de funciones cuadráticas, o viceversa. La tabla muestra las frecuencias con las que se asociaron distintas gráficas a esta ecuación:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x$
$y = 3x + 1$	0
$y = -x^2$	0
$y = x - 2$	1
$y = -2x - 3$	0
$y = x$	19
$y = x^2 - 2$	0
$y = -x + 1$	0
$y = x^2 + 1$	0

11g) Nueve alumnos efectuaron una asociación correcta entre la ecuación $y = x^2 - 2$ y su gráfica. Seis aprendices omitieron dar respuesta en este inciso. En todo el grupo, se observaron algunas asociaciones entre esta ecuación y otras gráficas. Éstas se enlistan a continuación:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x^2 - 2$
$y = 3x + 1$	1
$y = -x^2$	5
$y = x - 2$	0
$y = -2x - 3$	0
$y = x$	0
$y = x^2 - 2$	9
$y = -x + 1$	0
$y = x^2 + 1$	0

Como puede verse en la tabla anterior, un estudiante asoció la gráfica de $y = 3x + 1$, una ecuación lineal, con la ecuación cuadrática $y = x^2 - 2$. No es claro que lo haya hecho así atendiendo a los valores de los parámetros a o b (en $y = ax + b$) y buscando una analogía con la forma $y = ax^2 + b$, como parece ser el caso en otros incisos del problema. El desempeño de este alumno en el resto de la tarea parece indicar que tuvo problemas para efectuar conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones involucradas.

El grueso de las asociaciones incorrectas en este inciso fue con la gráfica de $y=-x^2$; como en otros incisos, esto da la impresión de que varios alumnos atacaron el problema asociando las gráficas de líneas rectas con ecuaciones lineales, y aquellas de líneas curvas con ecuaciones cuadráticas, sin tomar en cuenta más información.

11h) Once estudiantes realizaron la asociación correcta entre la ecuación $y=-x+1$ y su gráfica. Tres de los aprendices que presentaron la prueba omitieron responder este inciso, al tiempo que se encontraron varias asociaciones entre esta ecuación y gráficas diversas. Éstas se presentan en la siguiente tabla:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y=-x+1$
$y=3x+1$	2
$y=-x^2$	0
$y=x-2$	1
$y=-2x-3$	2
$y=x$	1
$y=x^2-2$	0
$y=-x+1$	11
$y=x^2+1$	1

Entre las asociaciones realizadas incorrectamente, una relaciona esta ecuación lineal con la gráfica de una función cuadrática, $y=x^2+1$. Las respuestas del estudiante que hizo esto hacen pensar que se guiaba por el valor del parámetro b en la forma $y=ax+b$, incluso dejando de lado el hecho de que asociaba una ecuación lineal con la gráfica de una función cuadrática.

Otros dos estudiantes asociaron la gráfica de $y=3x+1$ con la ecuación de este inciso, por lo que parece ser que también prestaban atención al valor de b.

Se observaron también dos casos en los que se asoció la gráfica de $y=-2x-3$ con la ecuación de este inciso. Aparentemente, los aprendices que así lo hicieron tomaron en cuenta que un valor negativo de a resulta en líneas “inclinadas hacia abajo”, pero no consideraron otros factores, como el valor de b o una interpretación más precisa del papel de a en la representación gráfica de una función lineal.

11i) Finalmente, se registraron once respuestas correctas en el inciso 11i, en las que los alumnos asociaron la ecuación $y = x^2 + 1$ con la gráfica que le correspondía. Siete estudiantes dejaron el inciso sin responder. En todo el grupo hubo distintas asociaciones de esta ecuación con varias gráficas. Dichas asociaciones se presentan en la tabla:

Gráfica	Número de alumnos que la asoció con la ecuación $y = x^2 + 1$
$y = 3x + 1$	1
$y = -x^2$	0
$y = x - 2$	0
$y = -2x - 3$	0
$y = x$	1
$y = x^2 - 2$	0
$y = -x + 1$	1
$y = x^2 + 1$	11

En dos de las tres asociaciones erróneas del inciso, los estudiantes parecen hacer observado el valor de b (en la forma $y = ax + b$) y tratado de buscarle un análogo en la ecuación de este inciso, $y = x^2 + 1$. En ambos casos, el empleo de este recurso los llevó a asociar ecuaciones cuadráticas con gráficas de funciones lineales, probablemente al dejar de lado otros datos importantes para la tarea.

En general, a lo largo del reactivo 11 fue posible observar que una porción pequeña del grupo podía asociar ecuaciones lineales a gráficas de funciones cuadráticas, y viceversa, sin reparar aparentemente en lo incorrecto de dicha respuesta. Por otra parte, una parte significativa del grupo fue capaz de asociar correctamente la ecuación de una función con su gráfica, tarea para la cual es necesario realizar conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica de las funciones con las que esté trabajándose.

Los resultados encontrados parecen apuntalar la suposición, ya mencionada en el análisis de los reactivos 8, 9c, 9f, 11a y 11i, de que los estudiantes llegaron a una comprensión del papel gráfico del parámetro b más desarrollada que la que pudieron construir para el rol del parámetro a (en la representación $y = ax + b$). Esto último puede haberse debido, entre otras causas, a un reducido tiempo en las sesiones de trabajo dedicado al concepto de pendiente, el cual se relaciona íntimamente con el parámetro a.

Se encontró también, en términos generales, que algunos aprendices caían frecuentemente en el error de escribir ecuaciones del tipo $x = ny$, cuando lo que en querían expresar era probablemente "*y* es *n* veces más grande que *x*" (reactivos 6b, 10b de este mismo apartado).

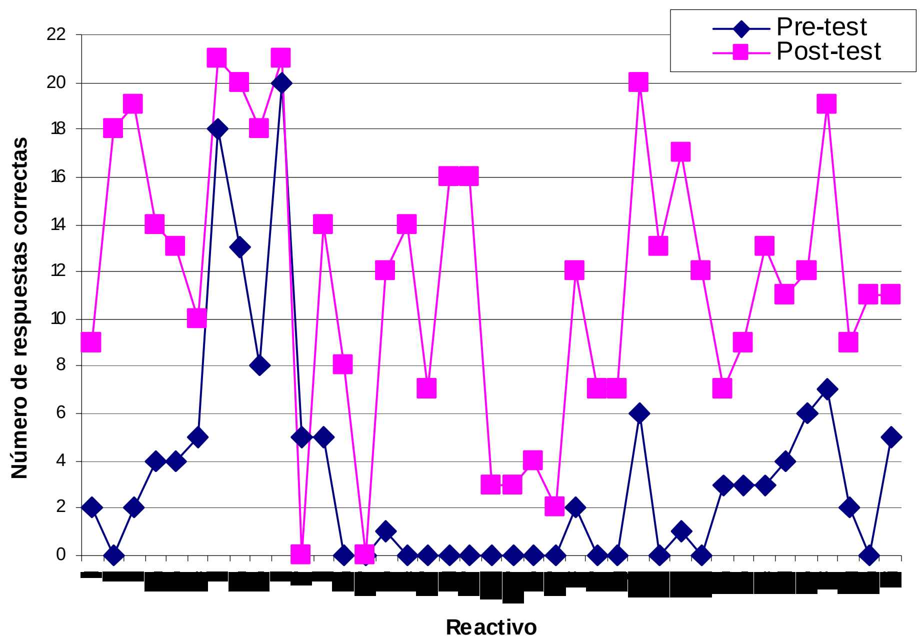
Del mismo modo, hay evidencia de que los aprendices desarrollaron, hasta cierto nivel, habilidades para pasar de una representación a otra, y de una perspectiva a otra de las funciones con las que debían trabajar, habilidades que se consideran esenciales para la comprensión del rubro (Moschkovich *et al.*, 1993; NCTM, 2000). Sin embargo, los resultados hallados también parecen indicar que los alumnos alcanzaron un dominio limitado de cada representación y perspectiva por separado, y que tuvieron que lidiar con dificultades de tipo procedimental (reactivos 9d, 9e). Lo aquí expuesto parece indicar que es necesario el diseño de instrumentos de instrucción específicos para la atención de este tipo de deficiencias.

Comparación entre los resultados del *pre-test* y el *post-test*

El instrumento de evaluación de la comprensión fue aplicado, a modo de *pre-test* y *post-test*, en dos momentos diferentes: antes y después de la implementación del ambiente de aprendizaje, respectivamente. Con ello se esperaba obtener información respecto a la comprensión que sobre los conceptos de interés lograron desarrollar los estudiantes, así como respecto a la incidencia del ambiente de aprendizaje en dicho desarrollo.

Aunque este instrumento contenía varias preguntas abiertas, cuyas respuestas difícilmente pueden calificarse como absolutamente "correctas" o "incorrectas", en un primer análisis –el cual resulta ilustrativo–, se adoptó un criterio de "correcto-incorrecto" para la elaboración de las gráficas 1 y 2 (apartados *Análisis de los resultados del pre-test* y *Análisis de los resultatos del post-test*). La Gráfica 3, que a continuación se incluye, es una comparación entre las dos primeras, y permite observar, *grosso modo*, las diferencias registradas en los resultados de *pre-* y *post-test*:

Gráfica 3.
Comparación entre respuestas correctas, pre- y post-test



Es posible notar una mejoría –si bien ligera en algunos casos– en el desempeño de los alumnos en prácticamente todos los reactivos de la prueba. Una excepción se encuentra en la etiqueta 7’, que forma parte del reactivo 7: los estudiantes debían graficar en un plano cartesiano los datos que se les presentaban en una tabla; puesto que estos datos eran discretos, una gráfica correcta debía consistir únicamente de una serie de puntos discretos. Gran parte de los estudiantes (todo el grupo, en el *post-test*) localizó los puntos en el plano y los señaló correctamente (a esto se refiere la etiqueta 7 de la gráfica 3); pero varios alumnos (el grupo entero, en el *post-test*) unían luego estos puntos con una línea recta, lo cual es incorrecto pues no se pedía graficar una función lineal de dominio continuo que se ajustara a los puntos dados, sino simplemente graficar estos puntos (a esto se refiere la etiqueta 7’).

Otra excepción se encuentra en la etiqueta 9a’, la cual forma parte del reactivo 9a. En éste, se pedía a los estudiantes mencionar todo lo que pudieran respecto a las pendientes de dos rectas paralelas en un plano cartesiano, gráfica que se les mostraba en el reactivo. Las pendientes de las rectas eran negativas. La etiqueta 9a corresponde a mencionar que las pendientes de ambas rectas eran iguales, mientras que 9a’ corresponde a mencionar que son negativas (esa era toda la información que podía extraerse de la gráfica). En la aplicación del *post-test* (al igual que en la del *pre-test*), ningún estudiante mencionó la segunda característica –que las pendientes eran negativas–.

En una primera aproximación, en el *post-test* se observa un desempeño sustancialmente superior –respecto al *pre-test* – en reactivos sobre conceptos básicos (2 a 4b), sobre características de la representación gráfica de funciones lineales desde una perspectiva de función como objeto (9b), concernientes a la habilidad para pasar de la representación gráfica a la algebraica –dentro de la perspectiva de objeto– (9c), y viceversa (10a a 10d), relacionados con el paso de una perspectiva de objeto a una de proceso mientras se pasa también de la representación gráfica a la algebraica (9d y 9f). Se observó también una mejor actuación al relacionar las gráficas de diversas funciones lineales y cuadráticas con sus correspondientes representaciones algebraicas (reactivos 11a a 11i). Para profundizar en los resultados de la comparación es conveniente pasar a estudiar lo encontrado reactivo por reactivo:

Reactivo 1.

A pesar de que, de acuerdo al plan de estudios vigente (SEP, 1993), los alumnos del sistema educativo mexicano se enfrentan al concepto de *variable* desde el nivel secundaria, en la aplicación del *pre-test* sólo dos estudiantes dieron respuestas matemáticamente correctas a la pregunta *¿Qué es una variable?* El número aumentó a nueve estudiantes en la aplicación del *post-test*. Este aumento, sin embargo, es inferior al que se hubiera esperado, tomando en cuenta que el ambiente de aprendizaje diseñado pretendía favorecer la comprensión del concepto de *función*, y el de *variable* se encuentra íntimamente relacionado con aquel.

Muchos son los factores que pueden haber influido en este resultado. Entre ellos, es posible que durante el propio ambiente de aprendizaje se haya hecho poco énfasis en la noción de *variable* para concentrarse más en la de *función*; así, los estudiantes pueden haber desarrollado su comprensión del segundo concepto mientras entendían el primero a un nivel informal, pero sin llegar a ser capaces de dar una definición clara del mismo: entre las definiciones "incorrectas" registradas en el *post-test*, se encontraban algunas como "es el valor que pueden tomar *y* o *x*", "es el valor que toman las cantidades dependiente e independiente en una tabla o gráfica". Este tipo de definición muestra una circunscripción a ámbitos específicos, ya sea el algebraico, el tabular o el gráfico, y no deja claro el carácter de variación detrás del concepto de *variable*. Sin embargo, como pudo constatarse en el siguiente reactivo, varios de los alumnos que daban estas definiciones entendían el concepto de función como la "dependencia entre dos cantidades", y en reactivos posteriores mostraron cierta capacidad para trasladarse entre diferentes representaciones y perspectivas de algunas funciones.

Dado lo anterior, es posible que la ausencia de más respuestas matemáticamente correctas a la pregunta *¿Qué es una variable?* guarde relación con una dificultad para verbalizar el concepto, producto de una comprensión poco desarrollada. Parece razonable suponer que, de haberse puesto mayor énfasis en este concepto durante la implementación del ambiente de aprendizaje, esta deficiencia se habría presentado en menor medida. Por otra parte, parece que el tener dificultades para verbalizar una definición matemáticamente correcta del concepto de *variable* tuvo poca influencia en el desarrollo de otras habilidades consideradas de interés en este estudio: el paso entre distintas representaciones y perspectivas de funciones.

Cabe mencionar también que, en el *pre-test*, cinco alumnos expresaron no saber qué responder, mientras otros tres dejaron el reactivo sin respuesta. En el *post-test*, ningún alumno se encontró en alguno de estos casos.

Reactivo 2.

En la aplicación del *pre-test* se halló que ningún estudiante pudo dar una definición matemáticamente correcta de *función*, cuando de acuerdo al plan de estudios vigente (SEP, 1993) este concepto es introducido desde el nivel secundaria. Por su parte, en el *post-test* se registraron dieciocho respuestas correctas (entre veintiún estudiantes que presentaron la prueba) en este sentido. Mientras en el primer ejercicio hubo seis alumnos que expresaron no saber lo que es una función y tres que dejaron el reactivo sin contestar, en el segundo estos números se redujeron a un estudiante que omitió responder y a ninguno que afirmara no saber lo que era una función.

Varias concepciones erróneas que pudieron detectarse en el *pre-test* (una función "es la incógnita a despejar", "es el eje de un plano cartesiano", "es una ecuación") no aparecieron más en el *post-test*, viéndose sustituidas en prácticamente todos los casos por definiciones que pueden considerarse como correctas.

Parece ser que, a nivel conceptual, los alumnos consiguieron desarrollar una comprensión de la noción de función en términos de dependencia entre dos cantidades –en el plan de estudios actualizado para el CCH, (UNAM, s/f) sólo se contemplan funciones de dos variables a este nivel; la instrucción efectuada durante el ambiente de aprendizaje se atuvo a esta restricción–. Ésta, de acuerdo a la literatura (Hines, 2002; Sierpinska, 1988, citada en Tall, 1992, p. 497), resulta conveniente para introducir el concepto pues favorece las conexiones entre las distintas representaciones de una función dada, en oposición a lo que sucede con definiciones de corte conjuntista.

Sin embargo, por lo que pudo observarse en reactivos posteriores, quedaron deficiencias en cuanto a conocimientos procedimentales, así como en la competencia para trabajar dentro de una representación determinada de una función. Estos resultados parecen indican que haber desarrollado una noción conceptual correcta del concepto de función no es suficiente para garantizar un desempeño aceptable en tareas que requieran las habilidades mencionadas, las cuales se han considerado esenciales en la comprensión del concepto de función (Moshkovich et al., 1993; NCTM, 2000).

Reactivo 3.

Ante la pregunta *¿Cuándo se dice que una función es lineal?*, dos alumnos dieron una respuesta matemáticamente correcta al aplicárseles el *pre-test*. Por su lado, al llegar el momento de aplicar el *post-test*, este número se elevó a diecinueve estudiantes. Además, en la aplicación de la primera prueba se registraron seis casos en los que los alumnos manifestaron ignorar cuándo una función sería lineal, mientras tres omitieron responder el reactivo. Para la segunda prueba, sólo un estudiante dejó este reactivo sin respuesta, y no se encontró a ninguno que expresara no saber cuándo una función sería lineal.

Entre las respuestas a este reactivo registradas en el *pre-test*, se encontraron varias en las que se identificaba función lineal con ecuación lineal, del mismo modo en que en el reactivo anterior se llegó a identificar función con ecuación; esta concepción errónea no se registró en los resultados del *post-test*. En éste último, únicamente un estudiante dio una definición incorrecta de función lineal, en la cual establecía que una función sería lineal si "su ecuación no está elevada al cuadrado [si se supone que son las variables las que no deben estar elevadas al cuadrado, esta condición es necesaria pero no suficiente], también podría ser cuando esta va consecutiva [condición que parece hacer referencia a la proporcionalidad, pero sin llegar a establecerlo claramente]". El desempeño del estudiante que dio esta respuesta fue pobre en el resto del post-test, lo que lleva a pensar que no consiguió desarrollar una comprensión robusta de los conceptos tratados.

Reactivo 4.

Este se componía de tres incisos, los cuales hacían referencia a la representación algebraica $y = ax + b$.

4a) Cuando, en el *pre-test*, se preguntó a los estudiantes quiénes serían las variables en la ecuación anterior, cuatro estudiantes dieron la respuesta convencional (x y y). Para la aplicación del post-test, se registraron catorce respuestas correctas. En la primera instancia, tres aprendices omitieron dar respuesta al reactivo, mientras que en la segunda un estudiante se encontró en esa situación.

Debe tomarse en cuenta que durante las sesiones de trabajo, se emplearon situaciones didácticas en las que se presentaban distintas funciones y se trabajaba con ellas en diferentes representaciones y desde distintas perspectivas, todo ello dentro de contextos no-matemáticos. Por otra parte, éste reactivo se encuentra situado en un contexto puramente matemático, de manera que la correcta identificación de las variables de la ecuación $y = ax + b$ es hasta cierto punto una medida de la capacidad de los estudiantes para transferir sus conocimientos de un contexto a otro. Al encontrarse un elevado número de aprendices que dieron respuestas correctas en este reactivo, resulta razonable suponer que una porción importante del grupo desarrolló su capacidad de transferencia en forma significativa. De acuerdo a lo afirmado por Hiebert y Carpenter (1992), una de las consecuencias del desarrollo de la comprensión es que la capacidad para transferir conocimientos se ve favorecida.

4b) Similarmente a lo que se solicitaba en el reactivo 4a, en el 4b los alumnos debían señalar quiénes eran las constantes en la ecuación $y = ax + b$. En los resultados correspondientes al pre-test, se encontró que cuatro aprendices dieron una respuesta correcta de acuerdo a lo establecido convencionalmente. En el post-test el número fue de trece estudiantes. Del mismo modo, al aplicarse el instrumento por primera vez cuatro alumnos dejaron este reactivo sin contestar, mientras dos afirmaron no saber quiénes serían las constantes en la ecuación. Cuando se le aplicó por segunda vez, tres alumnos omitieron dar respuesta, y ninguno expresó no saber qué contestar.

Como ocurre con el inciso anterior, haber proporcionado una respuesta correcta a la pregunta que se planteaba en este inciso puede interpretarse como señal de que la capacidad de transferencia de conocimientos de un contexto a otro fue desarrollada de manera significativa por una parte importante del grupo; en la literatura se afirma que entre las consecuencias de la comprensión se encuentra una mejora en dicha capacidad de transferencia.

Cabe mencionar que en el *pre-test* las respuestas erróneas incluían afirmar que las constantes de la ecuación serían x y y, únicamente y o a, b y x juntas. Este tipo de concepciones erróneas no se encontró en el *post-test*, aunque aparecieron otras como el establecer que únicamente b es constante, o que lo es la expresión ax. En un caso un alumno afirmó que, mientras y era variable, $ax + b$ era constante, lo cual lleva a pensar que este estudiante no consiguió desarrollar una comprensión robusta de la noción de ecuación. En otro caso, se afirmó que mientras las variables serían y y a, las constantes serían x y b. Si bien esta respuesta podría interpretarse como correcta, está en desacuerdo con la convención aceptada.

4c) En el tercer inciso, los aprendices debían decir qué forma tendría la gráfica de una ecuación del tipo $y = ax + b$. Cuando esta pregunta se planteó en el *pre-test*, se encontraron cinco respuestas correctas; para el *post-test* se registraron diez. Además, en el pre-test siete alumnos manifestaron no saber la forma de la gráfica y cinco dejaron el reactivo sin contestar. Para el *post-test*, fueron tres los aprendices que no dieron una respuesta en este reactivo, y ninguno manifestó no saber la forma de la gráfica.

De cualquier manera, en ambas aplicaciones se encontraron respuestas erróneas; en el caso del *pre-test*, seis alumnos escribían que la gráfica seria simplemente “lineal”, al tiempo que dos afirmaron que tendría forma parabólica y uno escribió que sería “paralela”, dejando ver lo que parece ser una concepción errónea de la noción de paralelismo.

En el *post-test*, volvieron a observarse respuestas incorrectas en el sentido de que la gráfica sería “lineal” (cinco alumnos), mientras en un caso se afirmó que la gráfica sería “curva, no recta”, justamente lo opuesto a lo esperado. El alumno que en el pre-test había afirmado que la gráfica sería “paralela” manifestó esta vez que debía ser una línea recta, pero la respuesta de otro aprendiz volvió a emplear el término “paralela” para referirse a la forma de la gráfica en cuestión. Éste, en el *pre-test*, había respondido que la gráfica sería “lineal”. El desempeño general de este alumno hace pensar que su comprensión de los conceptos tratados alcanzó un desarrollo limitado, debido probablemente a serias deficiencias en sus conocimientos previos, situación detectada en el *pre-test* y que, por lo que los resultados dejan ver, no fue posible remediar.

Un aprendiz afirmó, en el *post-test*, que la gráfica sería una "línea recta ascendente", con lo que parece expresar dos concepciones erróneas: una, la ecuación $y = ax + b$ representará siempre funciones lineales crecientes; dos, sus gráficas son generadas de izquierda a derecha. La primera revela una visión limitada de las posibilidades encerradas en la ecuación $y = ax + b$, la cual parece haber persistido aún cuando durante la implementación del ambiente de aprendizaje se trataron algunos casos de funciones lineales decrecientes; quizá un mayor número de ejemplos de esta clase de funciones ayudaría a cambiar esta concepción. La segunda parece ser debida a la manera en la que se trabajó en el ambiente de aprendizaje, en el que se estudiaron estas funciones en contextos no matemáticos: en las situaciones didácticas planteadas siempre se hacía aumentar a variable independiente para observar los cambios en la dependiente, lo cual probablemente contribuyó de manera importante a que el alumno pensara que la gráfica de una función lineal siempre es generada, en el plano cartesiano, de izquierda a derecha. Por esta razón parece recomendable incluir situaciones didácticas en las que la variable independiente decrezca. También es posible que el uso de software didáctico ayude a combatir este tipo de concepciones.

Como ya se hizo mención en los dos reactivos anteriores, durante la implementación del ambiente de aprendizaje se trabajó en situaciones didácticas dentro de contextos no-matemáticos; así, la representación algebraica $y = ax + b$ apareció siempre en esa clase de contextos. Es posible que al identificarla como la representación algebraica de una función lineal, como aquellas con las que habían trabajado, los estudiantes hayan estado mostrando cierta capacidad para transferir conocimientos adquiridos en un contexto hacia otro distinto.

Reactivo 5.

En el reactivo 5 se presentaba a los estudiantes una tabla en la que los valores de dos variables, x y y, cambiaban de acuerdo a la ecuación $y = 3x$. Se les preguntaba únicamente si percibían la relación entre las dos columnas de la tabla.

Dieciocho estudiantes afirmaron percibir la relación en el *pre-test*; veintiuno –la totalidad del grupo–hicieron lo propio en el *post-test*. En ambas pruebas, una parte importante del grupo fue más allá de la consigna y trató de especificar la naturaleza de la relación entre ambas columnas. En el *pre-test*, fueron trece los aprendices que procedieron así, de los cuales uno realizó una afirmación incorrecta respecto a la relación entre las dos columnas de la tabla: "*y* va aumentando el doble de x mas dos números más”. En cuanto al *post-test*, once estudiantes explicaron la relación entre las columnas, haciéndolo todos correctamente, pero recuérdese que ello no se solicitaba.

Tres estudiantes no dieron respuesta a este reactivo en el *pre-test*; todos lo contestaron en el *post-test*.

Reactivo 6.

Este reactivo se dividía en dos incisos. Era en el primero de ellos en donde se pedía a los alumnos que especificaran cuál era la relación que veían entre las dos columnas de la tabla presentada. En el segundo, se les solicitaba expresar dicha relación mediante una ecuación. Ambos incisos debían contestarse sólo en caso de haber respondido afirmativamente al reactivo 5.

6a) La primera parte del reactivo fue respondida correctamente por trece estudiantes en el *pre-test*, y por veinte en el *post-test*. En la primera aplicación, tres estudiantes omitieron dar una respuesta, mientras todo el grupo contestó el reactivo en la segunda.

En los resultados del pre-test se encontraron respuestas erróneas o incompletas como “ambas columnas son variables”, “sumándole a x su doble y luego 2 nos da el valor de y”, “tienen una diferencia de 2”. Este tipo de respuesta dio paso, en el *post-test*, a diversas expresiones verbales que remitían correctamente a la ecuación $y = 3x$; por otro lado, en el *post-test* se registró una respuesta incorrecta, en la que el alumno afirmaba que “por cada x son $3y$”. Así, invirtió los papeles de ambas variables, error que otros estudiantes cometieron en el siguiente inciso. Este estudiante cometió el mismo error en reactivos posteriores, a saber, escribir expresiones de la forma $x = ny$ cuando, aparentemente, lo que quería expresar era “y es n veces más grande que x”. Los resultados hallados muestran que resulta problemático subsanar esta dificultad para pasar de la representación verbal de una relación a su representación algebraica.

6b) La segunda parte del reactivo reveló ser un reto mayor para los estudiantes, aunque en mayor medida en el *pre-test* que en el *post-test*. En el primero, se registraron ocho respuestas correctas, contra las dieciocho encontradas en el segundo. Además, cuatro aprendices dejaron el reactivo sin responder en el *pre-test*, en tanto que uno hizo lo mismo en el *post-test*.

Se hallaron varias respuestas incorrectas; en la primera aplicación del instrumento aparecieron ecuaciones como $x = 3y$ (dos casos, en los que se invierten los roles de ambas variables), $y = x + 3$, (tres casos, en los que los alumnos muestran dificultad para pasar de la expresión verbal "y es tres veces más grande que x" a una representación algebraica) o $y = x + 2$ (un caso; el estudiante aparentemente empleó el primer renglón de la tabla para corroborar la validez de esta expresión, sin hacerlo con otros renglones). Una alumna había escrito que los valores de y se obtenían, a partir de x, "sumando lo doble de ese número [x] y luego +2 para que nos dé el resultado". Su traducción algebraica de tal afirmación fue $y = x^2 + 2$, mostrando una deficiencia en su dominio del lenguaje algebraico.

En la segunda aplicación de la prueba los errores volvieron a incluir $x = y + 3$ y $x = 3y$ (un caso cada una). Las razones de estas equivocaciones parecen haber sido las mismas que en el *pre-test*: dificultad para pasar de las representaciones verbales a las algebraicas. En el ambiente de aprendizaje se dedicó poco tiempo a las representaciones verbales de funciones, hecho que podría haber influido en este resultado.

Reactivo 7.

En este reactivo, los estudiantes debían graficar, en un plano cartesiano que se les proporcionaba, los datos incluidos en la tabla del reactivo 5. Aparentemente la tarea no supuso una dificultad mayor para los estudiantes en ninguno de los dos momentos en los que se implementó el instrumento de evaluación, aunque los resultados encontrados señalan que probablemente, durante las sesiones de trabajo con el grupo se favoreció la proliferación de una concepción errónea respecto a la graficación de datos: después de la implementación del ambiente de aprendizaje, todos los estudiantes parecían considerar que una gráfica en el plano cartesiano debía ser siempre continua, lo cual no ocurría antes de comenzar el trabajo con el ambiente de aprendizaje; en el *pre-test*, cinco estudiantes se limitaron, como era lo correcto, a marcar en el plano los puntos indicados por la tabla. En el *post-test*, todos los aprendices unieron estos puntos con una línea recta, con lo cual su gráfica es, en rigor, incorrecta.

Es necesario tomar muy en cuenta este punto, para evitar caer en el mismo error en diseños posteriores de ambientes de aprendizaje sobre este rubro.

Reactivo 8.

En el siguiente reactivo, los estudiantes debían dibujar, en un plano cartesiano que se les proporcionaba, la gráfica de la función $y = 2x + 1$. Cinco estudiantes obtuvieron la gráfica solicitada en la aplicación del *pre-test*, registrándose también que cuatro expresaron no saber cómo dibujar la gráfica y tres dejaron el reactivo sin contestar; al realizarse el *post-test*, catorce aprendices dieron una gráfica correcta y uno omitió responder.

Pudo observarse, en los resultados de ambos instrumentos, que el método predominante para trazar la gráfica solicitada consistía en asignar valores a la variable *x*, y emplear la ecuación dada para calcular los correspondientes valores de *y*. A continuación, se marcarían sobre el plano los puntos definidos por estas dos variables, y después de calcular dos o más puntos, se les uniría con una línea recta.

Al proceder así, se está trabajando con la función desde la perspectiva de proceso, por lo que los resultados registrados parecen indicar que la mayoría de los aprendices tendía a trabajar desde esa perspectiva. En la literatura (Moschkovich et al., 1993) se han encontrado reportes en el sentido de que, en ausencia de software didáctico que apoye la enseñanza-aprendizaje del concepto función, parece existir una “progresión natural” en el desarrollo de la comprensión del concepto de función. Ésta comenzaría en la perspectiva de proceso para luego pasar a la perspectiva de objeto, llegando eventualmente a la capacidad de establecer conexiones entre ambas. Una característica del ambiente de aprendizaje implementado en este trabajo fue que las herramientas tecnológicas se emplearon exclusivamente como fuentes de información (Internet), por lo que es factible que las comprensiones desarrolladas por los estudiantes hayan seguido dicha progresión. Así, al enfrentar tareas como la planteada en este reactivo la atacaron primero desde la perspectiva de proceso, al resultarles de alguna manera más sólida.

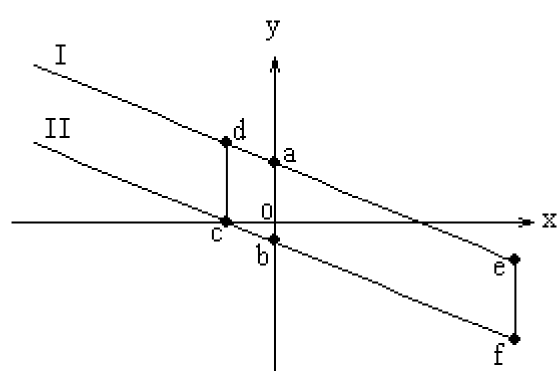
Sólo en el *post-test* se encontraron métodos de solución distintos al expuesto arriba; algunos alumnos parecen haber intentado obtener la gráfica directamente de los valores de los parámetros *a* y *b* dados en la ecuación, aparentemente tratando la función desde la perspectiva de objeto. Sin embargo, estos alumnos no llegaron a dibujar una gráfica correcta, pues asociaban –correctamente– el valor de *b* a la intersección de la gráfica con el eje *y*, pero el valor de *a* lo asociaban a su intersección con el eje *x*. Ésta concepción se ha reportado en otros trabajos (Moschkovich, 1999), y parece tratarse no de una concepción errónea sino de una “concepción transicional” con el potencial de refinarse para contribuir a una comprensión más desarrollada.

De acuerdo con estos resultados, parece ser que antes de la implementación del ambiente de aprendizaje un parte importante del grupo de alumnos había desarrollado cierta comprensión de las funciones desde la perspectiva de proceso, la cual se volvió más sólida después de implementado el ambiente; algunos estudiantes llegaron a desarrollar, paralelamente, una comprensión de las funciones como objetos, pero ésta no fue aún lo suficientemente robusta como para ayudarles a encontrar una respuesta correcta a esta tarea.

Lo encontrado en otros reactivos permite suponer que, al mismo tiempo, una parte sustancial del grupo llegó a ser capaz de efectuar conexiones entre ambas perspectivas, así como entre diferentes representaciones de las funciones con las que trabajaban, aunque dichas habilidades no alcanzaron el nivel necesario para hablar de comprensiones profundas y robustas de este dominio.

Reactivo 9.

El reactivo nueve podría considerarse como el más extenso y más matemáticamente complejo de toda la prueba. Tomado del trabajo de Moschkovich *et al.*, (1993) constaba de varios incisos elaborados alrededor de la gráfica siguiente:



El diseño del problema busca que al resolverlo, los estudiantes efectúen conexiones entre distintas representaciones y perspectivas de las funciones involucradas; realizar dichas conexiones, y explotarlas correctamente para la solución de tareas como la propuesta en el problema, ha mostrado ser complejo y difícil de desarrollar en estudiantes de niveles similares a los que participaron en este trabajo (Moschkovich et al., 1993). Los resultados hallados parecen confirmar lo anterior.

9a) Cuando, en el *pre-test*, se pedía a los alumnos decir todo lo que pudieran sobre las pendientes de las rectas I y II, ninguno expresó alguna de las dos características que pueden obtenerse de la gráfica: las pendientes son iguales y negativas. Esta situación cambió ligeramente en al aplicarse el *post-test*, en el cual se encontró que ocho aprendices mencionaron que las pendientes eran iguales. Sin embargo, tampoco se registraron respuestas en las que se mencionara que eran negativas. Éste último aspecto, junto al correspondiente al reactivo 7 –en el que no debían unirse los puntos graficados con ninguna clase de línea–, fueron los únicos en lo que no se registró una mejora cuantitativa del *pre-test* al *post-test*.

Lo que pudo observarse es que en ambas pruebas, la respuesta mayoritaria consistió en afirmar que las rectas eran paralelas, lo cual es correcto pero matemáticamente no responde a la pregunta planteada. Dicho resultado indicaría que la comprensión de concepto *pendiente* no llegó a desarrollarse de forma importante entre el grueso del grupo.

Durante las sesiones de trabajo los alumnos mostraron comprender, en un primer nivel, el papel gráfico del parámetro a, siendo capaces de establecer que tendría el mismo valor en las ecuaciones de dos rectas paralelas, e incluso que sería negativo para la representación algebraica de una función lineal decreciente. Sin embargo, no hubo un momento en el que llegara a formalizarse el concepto de pendiente, en el sentido de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. El grupo sí llegó a establecer que el valor de a determinaría la "pendiente" de una recta (con afirmaciones del tipo "a mayor valor de a, mayor 'inclinación' de la recta"), pero ese término, "pendiente", fue introducido por el profesor y es posible que aún resultara poco familiar para varios estudiantes al llegar el momento de la aplicación del *post-test*.

Lo anterior lleva a pensar que el diseño posterior de un ambiente de aprendizaje en el que se busque el desarrollo de comprensiones del concepto de función, y en particular del de función lineal, deberá tomar en cuenta tareas dirigidas a formalizar la noción de pendiente.

9b) El segundo inciso era similar al primero, en cuanto a que se solicitaba a los alumnos escribir todo lo que pudieran respecto a las intersecciones de las rectas I y II con el eje y. Durante la aplicación del pre-test, un estudiante dio una respuesta correcta, lo cual requería establecer de alguna manera que en la recta I la intersección sería positiva, y negativa en la recta II. El número de respuestas correctas aumentó a doce en el *post-test*.

El tipo de respuestas erróneas también cambió del *pre-test* al *post-test*. En el primero, seis alumnos dejaron el reactivo sin contestar, mientras otros hicieron afirmaciones diversas entre las que se encontraron "que las intersecciones son en el centro" o "que forman ángulos y son perpendiculares"., las cuales reflejan aspectos sobre los conocimientos previos de estos estudiantes –conocimientos que parecen haber sido pobres–, y se alejan de lo que se hubiera podido considerarse afirmaciones correctas. Dos alumnos manifestaron que al ser paralelas las rectas involucradas, los segmentos *ab*, *dc* y *ef* tendrían la misma longitud.

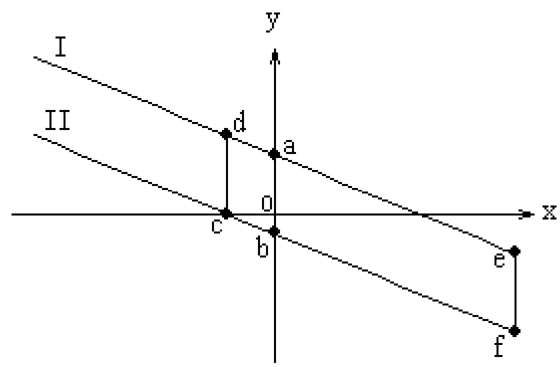
En el *post-test*, un estudiante omitió contestar el reactivo, y las respuestas consideradas como incorrectas son de otra naturaleza; en muchas de ellas se afirman hechos ciertos, pero que no constituyen en rigor una respuesta completa a la pregunta planteada: es el caso del alumno que escribió que "las intersecciones se dan cuando *x* es cero", o del que afirmó que "la diferencia entre las rectas I y II será la misma", aparentemente entendiendo "distancia" por "diferencia".

Se hallaron dos casos en los que los estudiantes dejaron entrever que concebían a estas rectas como siendo generadas de izquierda a derecha: uno de ellos expresó que sus intersecciones con el eje *y* son "el punto de partida", otro habló de "rectas ascendentes" (reactivo 4c). Parece ser que esta concepción fue favorecida en el ambiente de aprendizaje, en el cual la variable independiente en las relaciones funcionales estudiadas siempre se hacía aumentar para observar los cambios correspondientes en la variable independiente. Diseñar situaciones didácticas en las que la variable independiente también decrezca podría ayudar a subsanar esta falla; es posible que el uso de software didáctico apropiado para la graficación de funciones también resulte útil.

9c) En el tercer inciso los alumnos debían seleccionar, de una lista de cuatro ecuaciones, las que correspondían a las rectas I y II. Ningún estudiante seleccionó las ecuaciones correctas en el *pre-test*, mientras que catorce sí las señalaron en el *post-test*.

Pudo observarse, en el *post-test*, que varios estudiantes parecieron guiarse en su elección por el valor del parámetro *b*, el cual interpretaban correctamente como la intersección de la recta con el eje *y*; sin embargo, no tomaron en cuenta –o lo hicieron equivocadamente– el valor de *a*, de manera que en varios casos seleccionaron ecuaciones en las que *b* era correcta pero no *a*. Esto parece ser señal de que una parte importante del grupo consiguió desarrollar su comprensión del rol gráfico del parámetro *b* más allá de lo correspondiente para el parámetro *a*; el diseño del ambiente de aprendizaje puede haber contribuido a este resultado, pues se dedicó aproximadamente el mismo tiempo –y el mismo tipo de tareas– a la construcción de los roles gráficos de cada parámetro, *a* y *b*, cuando aparentemente el de *a* resulta más difícil de comprender. Diseño s posteriores deberán tomar este punto en cuenta.

9d) Los incisos cuarto y siguientes mostraron resultar sensiblemente más problemáticos para los alumnos que los tres primeros. Esto era de esperarse, pues en ellos se requiere efectuar cambios de representaciones al tiempo que se pasa de una perspectiva a otra, habilidad considerada en la literatura como compleja y difícil de desarrollar (Moschkovich *et al*., 1993). Ninguno de los estudiantes que presentaron el *pre-test* pudo calcular correctamente las coordenadas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d* de la gráfica, que era lo solicitado en este inciso. Para el *post-test* se observó un cambio en esta situación: dieciséis alumnos encontraron las coordenadas de *a* y *b*, aunque sólo tres hicieron lo propio con las de *c* y *d*.



Parece ser que, en el *post-test*, varios estudiantes localizaron *a* y *b* "leyendo" el valor de su ordenada directamente de las ecuaciones para las rectas I y II, las cuales habían debido determinar en el inciso anterior. Esto confirma parcialmente la suposición de que en términos generales, en el grupo se desarrolló una comprensión de cierto nivel sobre el papel gráfico que juega el parámetro *b*. Estos alumnos se vieron en dificultades al tratar de localizar los puntos *c* y *d*, en ocasiones debido a errores de tipo aritmético-algebraico, en otras por causa de haber seleccionado una ecuación incorrecta para alguna –o ambas– de las rectas involucradas.

Otro modo de proceder consistió en tratar de localizar los puntos realizando marcas equidistantes sobre los ejes de la gráfica, para así contar con una escala que permitiera dar con las coordenadas de los puntos en cuestión. Algunos de los alumnos que procedieron de este modo parecen haber elegido dicha escala de manera arbitraria, mostrando una comprensión limitada del plano cartesiano; la mayoría, por otro lado, eligió la escala de modo que fuera consistente con las coordenadas, que a esta altura del problema ya conocían, de los puntos *a* y *b*. El método hubiera tenido buenas posibilidades de funcionar, de no ser porque no tomaron en cuenta que cada eje estaba dibujado a una escala diferente. Aunque algunos estudiantes notaron esto al avanzar al siguiente inciso, parece ser que ya no tuvieron la oportunidad o el ánimo de regresar y corregir sus cálculos anteriores.

En la realización del *pre-test* se registró un alto número de estudiantes que o bien dejaron el inciso sin responder o bien expresaron no saber cómo dar con la solución. Los que intentaron resolver el problema lo hicieron por métodos similares al expuesto en el párrafo anterior, con la diferencia de que todos ellos parecieron haber empleado escalas completamente arbitrarias.

Resulta de interés notar que, aunque una gran parte del grupo no encontró las coordenadas de todos los puntos requeridos en el *post-test*, sí fue capaz de trasladarse entre las diferentes representaciones y perspectivas involucradas en el problema, habilidad que se considera fundamental para la comprensión del concepto de función (Moschkovich et al., 1993; NCTM, 2000).

9e) Tanto en el *pre-test* como en el *post-test*, los resultados para este inciso fueron similares a los registrados en el anterior, lo cual era de esperarse pues las tareas planteadas en ambos son hasta cierto punto similares. Lo que se requería era suponer que la abscisa del punto *e* era igual a cinco, y a partir de ello encontrar su ordenada así como las coordenadas del punto *f*. En el *pre-test* ningún alumno halló dichos datos, en tanto que en el *post-test* hubo cuatro estudiantes que encontraron la ordenada de *e*, y dos que hicieron lo propio con las coordenadas de *f*.

Los métodos de solución en este inciso fueron semejantes a los empleados en el anterior; así, en el *pre-test* ninguno de los estudiantes pareció emplear las ecuaciones para calcular los datos solicitados, intentando encontrarlos definiendo una escala arbitraria sobre el plano cartesiano que se les mostraba. Por otra parte, en el *post-test* hubo casos de estudiantes que trataron de calcular las coordenadas a través de las ecuaciones de las rectas, aunque erraron en sus cálculos debido, en general, a problemas aritmético-algebraicos o a haber elegido incorrectamente la ecuación correspondiente a una –o ambas– rectas. También se tienen registrados intentos de solución en los que emplearon la información del problema –la abscisa de *e* es cinco– para dibujar marcas sobre los ejes, definiendo así una escala que les permitiera localizar los puntos en cuestión. Aquí entraron en conflicto con lo hallado en el problema anterior, pues notaron que las coordenadas adoptadas entonces no eran consistentes con las actuales, si se suponía que ambos ejes estaban dibujados con la misma escala. Esto fue la fuente de prácticamente todos los errores de quienes siguieron dicho procedimiento.

9f) En este inciso los estudiantes debían hallar las longitudes de los segmentos *ef*, *cd* y *ab*. En el *pre-test*, ningún alumno pudo hacerlo, aunque dos expresaron que los tres segmentos tendrían la misma longitud debido a que las rectas I y II eran paralelas. En el *post-test*, doce estudiantes notaron esto, pero sólo siete hallaron las longitudes requeridas. En la primera prueba fueron muchos –diecinueve de veintiuno– los estudiantes que dejaron el inciso sin respuesta o que expresaron no saber cómo proceder. En la segunda, nueve se encontraron en este caso, en tanto el resto del grupo trató de hallar la respuesta explotando el paralelismo de las rectas, en donde revelaron estar más seguros de sus cálculos de las coordenadas de los puntos *a* y *b* que de *c*, *d*, *e* y *f*, pues el resultado obtenido empleando las primeras era considerado como "el correcto"; cuando el valor arrojado al usar las segundas difería de éste, manifestaban que debían haber cometido un error pues, afirmaban, todas las longitudes deberían ser iguales a la del segmento *ab*.

Una de las fuentes más importantes de error en este inciso fue la elección equivocada de las ecuaciones que representaban correctamente a las rectas I y II –inciso 9c–, otra fue el cálculo erróneo de las coordenadas de los puntos involucrados –incisos 9d y 9e–. Fuera de ello, el grueso del grupo mostró, en el *post-test*, haber desarrollado habilidades para trasladarse entre las representaciones y perspectivas necesarias en este problema. Dichas habilidades no se observaron en el *pre-test*.

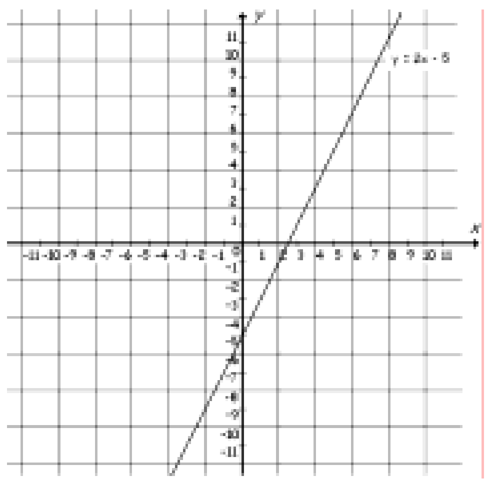
9g) El último inciso del problema era semejante al anterior, pues en él se preguntaba si sería posible predecir la longitud de otro segmento arbitrario, cuyos extremos fueran puntos de las rectas I y II, paralelo al eje *y*. Ningún estudiante en el *pre-test* dio una respuesta satisfactoria, en tanto que en el *post-test* se registraron siete respuestas en las que los aprendices notaban que la longitud del nuevo segmento podía predecirse con la información conocida a esta altura del problema.

Fue notorio el elevado número de alumnos que, en ambas pruebas, dejó ésta pregunta sin contestar. Es posible que esto se haya debido a la complejidad y extensión del problema 9, características que tal vez hayan llevado a varios estudiantes a "dejar para después" sus últimos incisos. El instrumento de evaluación no era una prueba corta, y puede ser que en el último momento estos alumnos hayan decidido que no tenían tiempo –o ánimos– para responder completo este problema.

En términos generales, la comparación entre los resultados obtenidos para esta tarea, en el *pre-test* y en el *post-test*, arroja evidencia en el sentido de que los estudiantes llegaron a desarrollar comprensiones de cierto nivel sobre las funciones lineales, siendo capaces de moverse entre diferentes perspectivas y representaciones de las funciones involucradas en este problema; pudo observarse que la mayor parte de los errores cometidos tuvo relación con conocimientos procedimentales –errores de cálculo aritmético-algebraico– o con su dominio de determinadas representaciones en particular (algunos alumnos mostraron problemas para trabajar con representaciones algebraicas, otros con representaciones gráficas).

Reactivo 10

En el siguiente reactivo de la prueba, tomado con ligeras modificaciones del trabajo de Moschkovich *et al*., (1993) se planteaba otro problema cuya solución demandaba el paso entre perspectivas y representaciones distintas de funciones lineales. Éste constaba de cuatro incisos, y comenzaba presentando a los alumnos el siguiente plano cartesiano:



10a) El primer inciso del problema requería únicamente que se trazara, en el plano anterior, una recta paralela a $y = 2x - 5$, que pasara por el origen. En el *pre-test*, seis estudiantes trazaron esta recta; veinte lo hicieron en el *post-test*. El único estudiante que en el *post-test* no respondió correctamente esta pregunta pareció haber ignorado la consigna, pues trazó una línea paralela a la dada pero que intersectaba al eje de las ordenadas en $y = 2$, cuando su desempeño durante las sesiones de trabajo mostraba que era capaz de localizar del origen de un plano cartesiano.

Es notable que un número grande de alumnos no trazara la recta requerida en el *pre-test*, cuando hacerlo exigía, básicamente, una comprensión del término "paralela", y la capacidad de localizar el origen y la recta $y = 2x - 5$ en el plano. Este y los resultados de otros reactivos hacen pensar que los estudiantes habían llegado al ambiente de aprendizaje con una comprensión pobremente desarrollada del concepto de función lineal. Asimismo, lo encontrado en el *post-test* parece indicar que las comprensiones de la generalidad del grupo habían alcanzado un desarrollo mayor al finalizar la implementación del ambiente de aprendizaje.

10b) La segunda tarea que se planteaba en el problema consistía en escribir una ecuación para la recta que se había trazado en el inciso anterior. Ninguno de los estudiantes que presentó el *pre-test* encontró una ecuación correcta para dicha línea. En el *post-test* se registraron trece respuestas correctas. Un número importante de aprendices (diez) omitió responder el inciso en el *pre-test*, cifra que se redujo a cero en la segunda aplicación del instrumento, cuando las respuestas incorrectas se relacionaron, en ocasiones, con dificultades para trasladarse correctamente de la representación gráfica a la algebraica, y en otras con problemas con el paso de una representación verbal a una algebraica, todo ello al tiempo que los alumnos debían moverse entre las perspectivas de proceso y de objeto. Esto es señal de que, si bien en términos generales los alumnos desarrollaron su comprensión de los conceptos involucrados, éste desarrollo no alcanzó la solidez necesaria para que la totalidad del grupo resolviera correctamente tareas como la de este inciso.

10c) En el tercer inciso se debía trazar otra paralela, esta vez por el punto (1, 4). Un alumno en el *pre-test* trazó la línea solicitada, diecisiete en el *post-test* lo hicieron así. En el *pre-test* se registraron algunas dificultades con la notación (x, y), las cuales prácticamente desaparecieron para cuando se aplicó el *post-test*. En éste último, un alumno omitió dibujar alguna línea, y los tres que no trazaron correctamente las línea que se requería tuvieron errores de diferentes índoles; uno de ellos seguía teniendo problemas con la notación (x, y), otro parece haberse quedado sin tiempo, y otro más interpretó incorrectamente el término "paralela".

10d) El último inciso de este problema era similar al segundo, pues se pedía a los aprendices escribir una ecuación para la línea trazada en el inciso 10c. Al aplicarse el *pre-test*, ningún estudiante dio una respuesta correcta, en tanto que doce sí lo hicieron en el *post-test*.

En la primera aplicación del instrumento se detectó que varios estudiantes aparentemente trataban de incluir directamente en su ecuación al punto (1, 4), con lo que daban respuestas como $y = x - 4$ o $y = x + 4$. Este tipo de respuesta prácticamente desapareció al aplicarse el *post-test*, en el cual, entre los errores cometidos se encontraron varios intentos por encontrar ecuaciones que produjeran el valor $y = 4$ cuando $x = 1$, sin considerar que son necesarios dos puntos para definir una recta. También se encontraron casos en los que los estudiantes tenían dificultades para pasar de la representación verbal a la algebraica de una función lineal, al escribir, por ejemplo, $x = 4y$ cuando lo que tenían en mente eran afirmaciones del tipo "*y* es cuatro veces más grande que *x*".

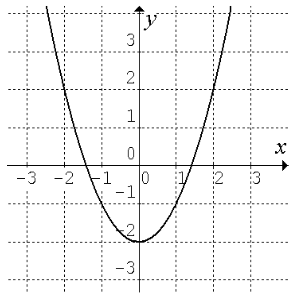
El hecho de que el grueso del grupo haya conseguido un desempeño aceptable en la resolución de este problema, arroja evidencia en el sentido de que lograron desarrollar, por lo menos en un primer nivel, habilidades para moverse entre diferentes perspectivas y representaciones de funciones lineales, habilidades que conforman una base para la comprensión de las mismas.

Reactivo 11

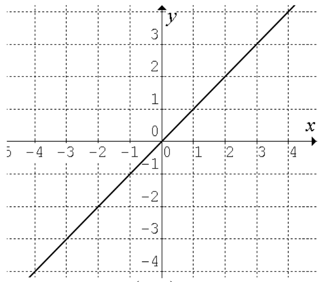
El último reactivo de la prueba consistía en un ejercicio de asociación de varias ecuaciones que representaban funciones de dos variables, con las gráficas que les correspondían. Se incluían funciones lineales y cuadráticas, además de que el número de ecuaciones era distinto al de gráficas, como una medida para evitar, hasta donde fuera posible, que los estudiantes realizaran asociaciones al azar.

El reactivo se presenta a continuación, tal cual como apareció en el instrumento de evaluación de la comprensión (también se le puede encontrar en el Anexo 2):

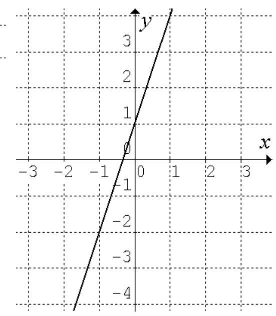
11. Asocia cada ecuación con su gráfica, anotando entre los paréntesis la letra de la ecuación correcta.



( )



( )



( )

A) $y = 3x + 1$

B) $y = -x^2$

C) $y = x - 2$

D) $y = -2x - 3$

E) $y = -3x^2$

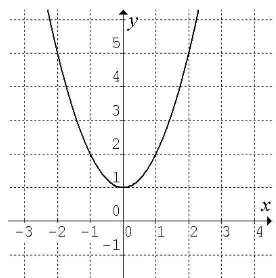
F) $y = x$

G) $y = x^2 - 2$

H) $y = -x + 1$

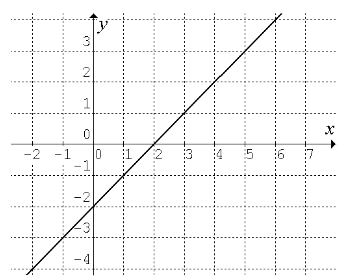
I) $y = x^2 + 1$

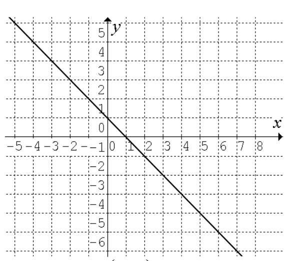
J) $y = 4x + 3$



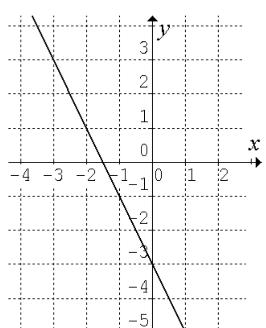
( )

( )

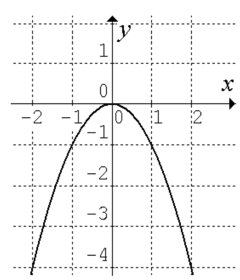




( )



( )

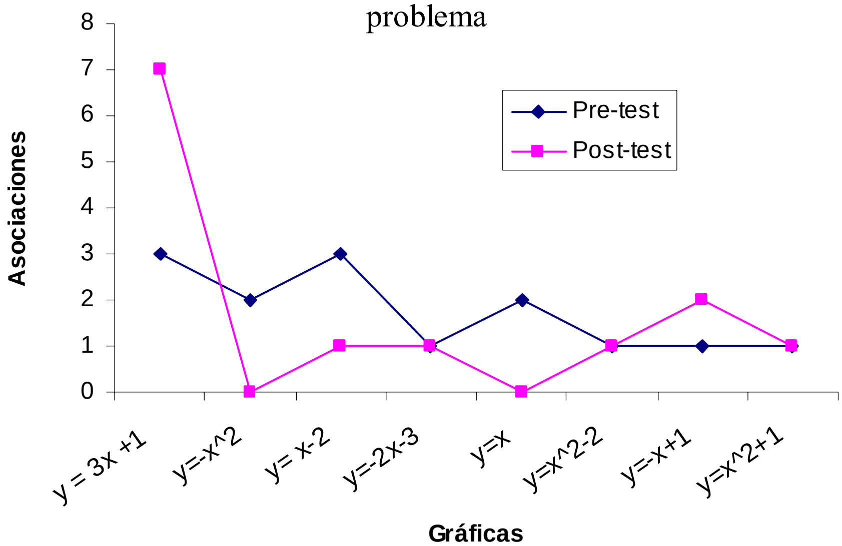


( )

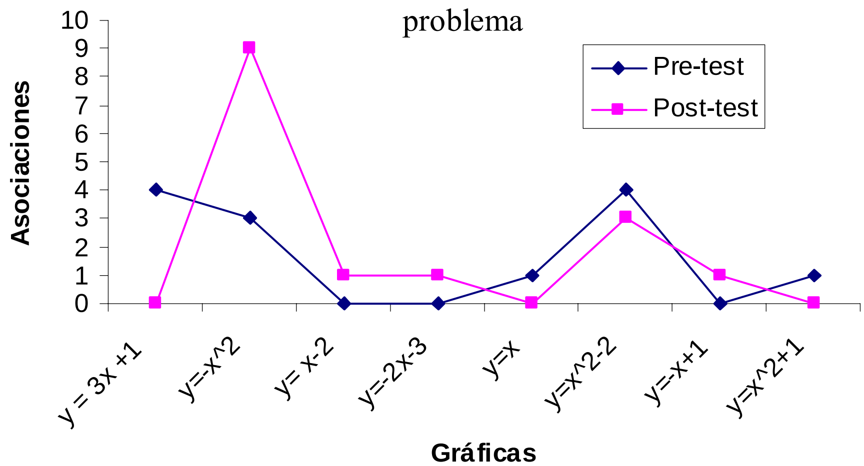
Tanto en el *pre-test* como en el *post-test*, se encontró que varios alumnos efectuaban asociaciones incorrectas, aunque el número de esta clase de asociaciones disminuyó sensiblemente en el *post-test*, en todos los incisos. Esto puede observarse en las siguientes gráficas, que consignan, inciso por inciso, las frecuencias con las que los alumnos asociaban cada ecuación con las gráficas del problema.

En el eje horizontal está representada cada una de las gráficas del problema; en el eje vertical se representa el número de asociaciones que, en cada inciso, los alumnos realizaban entre la ecuación indicada y cada una de las gráficas listadas en el eje horizontal.

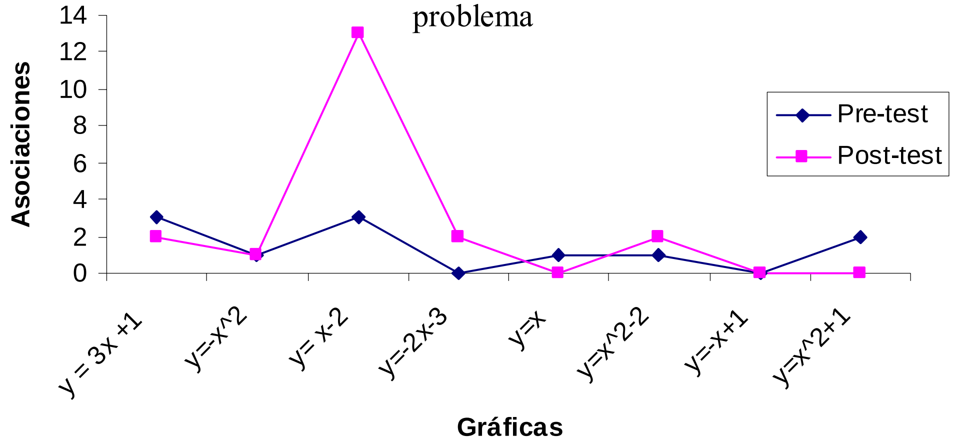
11a) Asociaciones de la ecuación $y = 3x + 1$ con las gráficas del problema



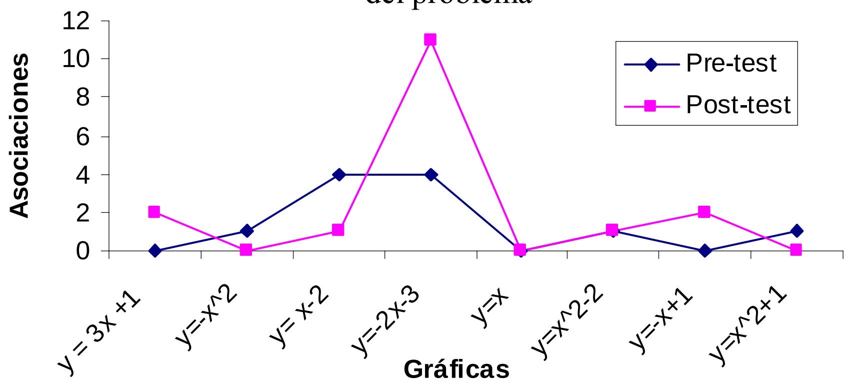
11b) Asociaciones de la ecuación $y = -x^2$ con las gráficas del problema



11c) Asociaciones de la ecuación $y = x - 2$ con las gráficas del problema

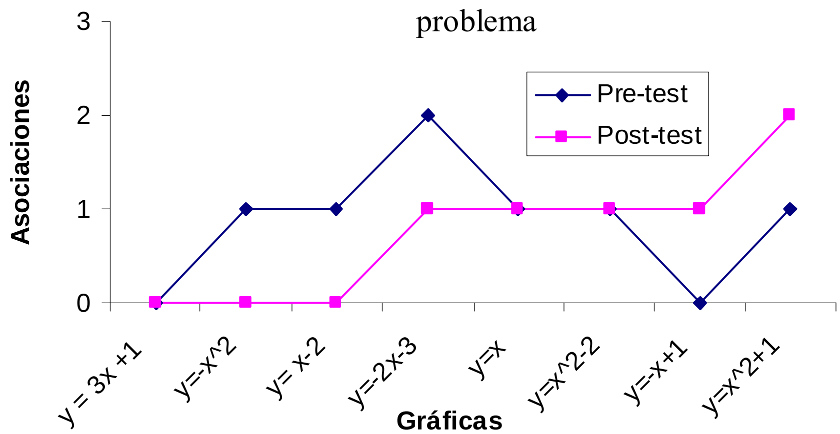


11d) Asociaciones de la ecuación $y = -2x - 3$ con las gráficas del problema



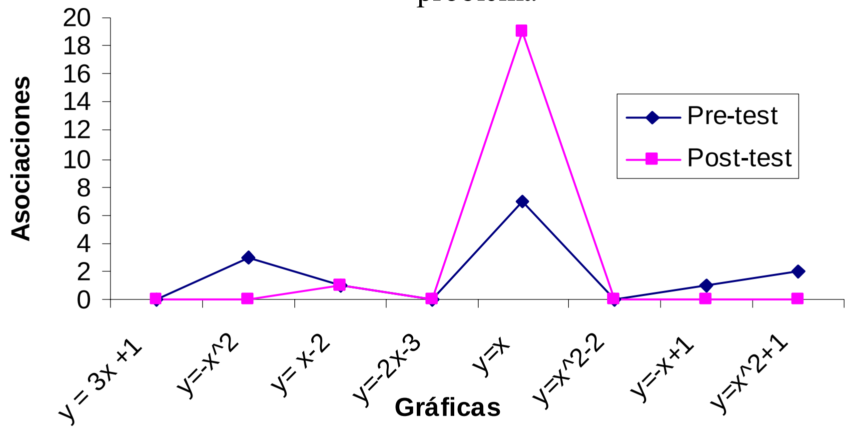
11e) La gráfica de la ecuación $y = -3x^2$ no aparecía en el problema.

Asociaciones de la ecuación $y = -3x^2$ con las gráficas del problema



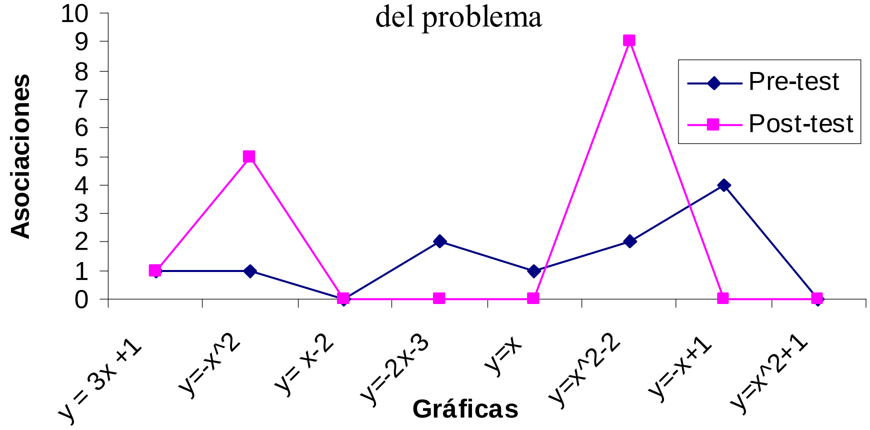
11f)

Asociaciones de la ecuación $y = x$ con las gráficas del problema



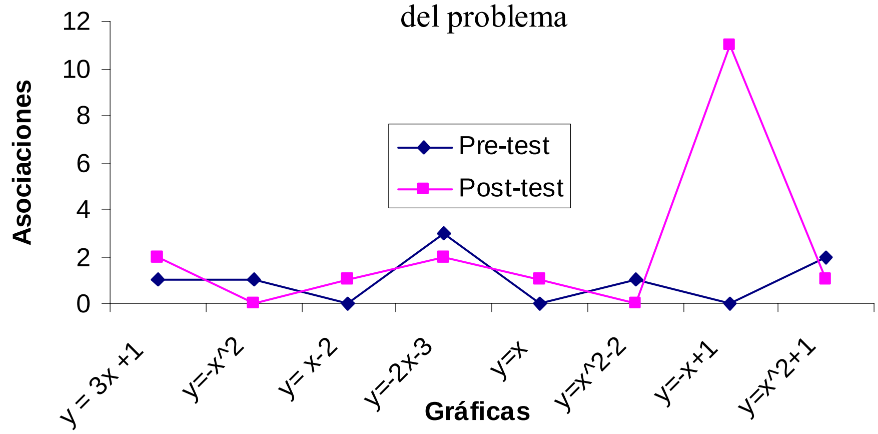
11g)

Asociaciones de la ecuación $y = x^2 - 2$ con las gráficas del problema



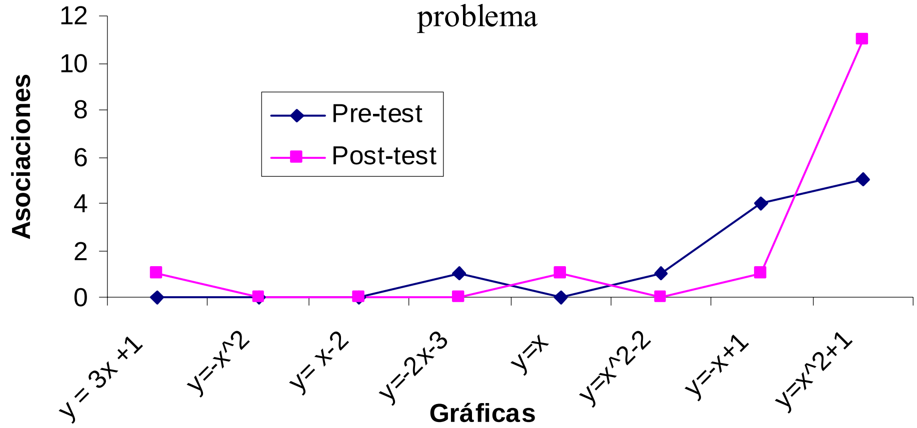
11h)

Asociaciones de la ecuación $y = -x + 1$ con las gráficas del problema



11i)

Asociaciones de la ecuación $y = x^2 + 1$ con las gráficas del problema



En las gráficas anteriores puede apreciarse cómo, en el *post-test*, las asociaciones correctas aumentaron significativamente respecto a las registradas en el *pre-test*. Parece ser que en el momento de aplicación del *post-test*, los alumnos habían desarrollado su habilidad para efectuar conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica, a un grado mayor que el que presentaban al implementarse el *pre-test*.

Esta comparación entre los resultados hallados en la aplicación de ambas pruebas parece indicar que, en términos generales, los estudiantes contaban con comprensiones sobre las funciones lineales más desarrolladas después de la implementación del ambiente de aprendizaje que antes de la misma. Sin embargo, se encontraron algunos aspectos que seguían resultándoles problemáticos: en el *post-test*, varios alumnos mostraron dificultades de tipo aritmético-algebraico, de corte procedimental, así como una competencia limitada en el trato con determinadas representaciones de las funciones estudiadas; algunos estudiantes efectuaban "traducciones" de afirmaciones del tipo "*y* es *n* veces más grande que *x*" al lenguaje algebraico de manera errónea; el grupo entero llegó a concebir la gráfica de una función lineal como una línea continua, invariablemente; una parte significativa del mismo parece haber alcanzado una mayor comprensión del papel gráfico del parámetro *a* (en $y = ax + b$) que aquella desarrollada para el de *a*, que más bien fue limitada; aunque el grueso del grupo mostró ser capaz de trasladarse entre representaciones y perspectivas de funciones, muchos aprendices cometían errores en el proceso;

algunos alumnos parecieron concebir las gráficas de funciones lineales como siendo generadas de izquierda a derecha.

El diseño de ambientes de aprendizaje posteriores, que busquen la comprensión del concepto de función, debería considerar seriamente estas dificultades.

Correlaciones encontradas entre los reactivos del instrumento de evaluación de la comprensión

Al analizar los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento de evaluación de la comprensión, se hallaron ciertas correlaciones entre algunos de los reactivos que lo constituyen. Buscar estas correlaciones perseguía dos objetivos principales: uno, contar con herramientas para optimizar versiones posteriores del instrumento; las correlaciones entre diversos ítems podrían indicar si algunos de éstos estaban arrojando información redundante. Dos, esta información también podría ser útil para detectar posibles relaciones entre diferentes habilidades importantes para la comprensión del concepto de función.

Se consideró adecuado buscar las correlaciones únicamente entre los resultados del *post-test*, dado que los estudiantes habrían pasado ya por un periodo de instrucción dedicado a los conceptos de interés y presumiblemente habrían desarrollado hasta cierto nivel las habilidades que interesaba correlacionar.

A la respuesta de cada estudiante a cada reactivo del *post-test* le fue asignada una calificación del 0 al 10, para lo cual se siguieron los criterios que se indican en la tabla 3 (apartado *Análisis de los resultados del pre-test*). De este modo pudo construirse una matriz de tamaño 21x31 –veintiún estudiantes, treinta y un reactivos– que contenía todas las calificaciones, obtenidas en todo el *post-test*, por todo el grupo. A continuación, con ayuda del software MS Excel se calcularon los coeficientes de correlación para cada columna de datos respecto a todas las demás.

El coeficiente de correlación se obtiene a través de la fórmula

$$\rho_{x,y} = \frac{\Sigma(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\Sigma(x_i - \mu_i)^2 \, \Sigma(y_i - \mu_y)^2}}$$

en donde x_i, y_i son cada uno de los datos medidos, y μ_x, μ_y son las medias de cada conjunto de datos a correlacionar. Se trata de un coeficiente adimensional que indica en qué medida dos conjuntos de datos varían conjuntamente a través de una relación lineal. Un valor de $\rho_{x,y}$ cercano a 1 o a -1 es señal de una correlación lineal fuerte, mientras que si su valor es cercano a 0, las correlación lineal es débil o completamente inexistente. Debe tomarse en cuenta que, por ejemplo, si los datos variaran conjuntamente, pero a través de alguna relación no-lineal, ésta no sería detectada mediante el cálculo de $\rho_{x,\ y}$. Para este apartado, interesaba principalmente encontrar si entre los diversos ítems del instrumento de evaluación de la comprensión había una correlación de tipo lineal.

Se encontraron correlaciones altas ($\rho_{x,\ y} > 0.8$) para los resultados de los reactivos que aparecen en la tabla 4:

Tabla 4. Reactivos para los cuales se encontraron correlaciones altas

Reactivos	$\rho_{x,\ y}$
4a y 4b	0.8090
10a y 10c	0.8210
10b y 10d	0.8633
11a y 11b	0.8165
11a y 11g	0.8165
11b y 11g	0.8056
11c y 11e	0.8257
11e y 11g	0.9083

Las correlaciones que se registran en la tabla 4 eran las esperadas, pues, efectivamente, los contenidos de los reactivos que aparecen en ella se relacionaban matemáticamente de manera muy cercana. La tabla 5 recoge dichos contenidos:

Tabla 5. Contenidos matemáticos de los reactivos con correlación alta.

Reactivos	**Contenidos**
4a 4b	Identificación de los elementos de la representación algebraica $y = ax + b$.
10a 10c	Conocimiento del plano cartesiano. Paralelismo. Perspectiva de función como objeto.
10b 10d	Paso de la representación algebraica a la representación gráfica de una función lineal. Paso entre las perspectivas de función como objeto y función como proceso.

11a-11i	Paso de la representación gráfica a la representación algebraica de funciones lineales y cuadráticas. Perspectiva de función como objeto.

De esta manera, el análisis de las correlaciones entre los reactivos del *post-test* no arroja información novedosa o inesperada, respecto a las posibles relaciones que pudieran existir entre las diferentes habilidades involucradas en la comprensión de la noción de función: los reactivos con correlaciones altas fueron precisamente aquellos cuyos contenidos matemáticos ya estaban íntimamente relacionados.

Del mismo modo, parece ser que el diseño del instrumento de evaluación de la comprensión resultó adecuado, en cuanto a que no se encontraron reactivos que proporcionaran información redundante. Aquellos cuyos resultados mostraron tener cierta correlación habían sido diseñados de manera que así debía ocurrir, y permitieron obtener información más profunda respecto a las comprensiones desarrolladas por los aprendices.

Capítulo 4. Conclusiones y vías de desarrollo

En el presente trabajo se planteó un problema relativo al desarrollo de comprensiones sobre el concepto de función, y el de función lineal como un caso particular del primero. El problema planteado es:

> ¿Hasta qué punto la implementación de un ambiente de aprendizaje orientado a la comprensión de aspectos de la noción de función, con particular énfasis en funciones lineales, se ve reflejada en el desarrollo de una comprensión de tales conceptos, en estudiantes de primer semestre de bachillerato?

Con el fin de obtener información que arrojara luz sobre dicho problema, se concibió, diseñó e implementó frente a un grupo de alumnos del CCH, un ambiente de aprendizaje enfocado hacia la comprensión de los conceptos matemáticos señalados, presentándolos además en contextos no-matemáticos. Asimismo, se diseñó e implementó un instrumento de evaluación de la comprensión, el cual fue aplicado en dos momentos diferentes sirviendo como *pre-test* y *post-test*. Del análisis y comparación entre los resultados de ambos fue posible extraer, hasta cierto punto, la información requerida.

Se encontró que los estudiantes lograron desarrollar ciertas habilidades que la literatura ha considerado esenciales para la comprensión del concepto de función (Moschkovich *et al.*, 1993; NCTM, 2000): el paso entre distintas representaciones y perspectivas del mismo. El trasladarse entre dichas representaciones y perspectivas conlleva la realización de conexiones entre ellas. La comprensión se caracteriza, entre otras cosas, por el grado en que a un individuo le es posible efectuar estas conexiones (Hiebert y Carpenter, 1992).

De igual manera, la mejoría registrada en el desempeño de los estudiantes en el *post-test* –respecto a lo observado en el *pre-test*– es señal de que los alumnos fueron capaces, en términos generales, de transferir conocimientos construidos en contextos no-matemáticos a contextos puramente matemáticos. De acuerdo al modelo adoptado en este trabajo, la comprensión tiene entre sus consecuencias el favorecer los procesos de transferencia (Hiebert y Carpenter, 1992). De esta manera, los resultados parecen indicar que el desarrollo de las comprensiones de interés se vio de alguna manera favorecido por la implementación del ambiente de aprendizaje diseñado.

Por otra parte también se encontró que, si bien los estudiantes parecían estar haciendo conexiones entre representaciones y perspectivas, en varias ocasiones fallas en el proceso les impedían llegar a resoluciones correctas de las tareas que se planteaban en el instrumento de evaluación de la comprensión. Esto no significa necesariamente que los aprendices fracasaran en hacer las conexiones; más bien, parece ser –en la mayor parte de los casos– que las dificultades eran de orden procedimental (problemas para lidiar con manipulaciones aritméticas-algebraicas), o se encontraban en el dominio de una representación dada. Así, algunos estudiantes mostraban entender que gráficas, tablas y ecuaciones, lejos de constituir entidades aisladas, eran representaciones del mismo objeto (o proceso), la misma función, aunque al momento de efectuar el traslado de una a otra representación o perspectiva, complicaciones con el álgebra involucrada –e incluso con la artimética– impedían llegar a soluciones correctas de los problemas en cuestión. Igualmente pudieron observarse algunos casos en los que los aprendices, aunque aparentemente conscientes de la existencia de relaciones fundamentales entre representaciones y perspectivas, se veían limitados por una falta de dominio de una determinada representación: problemas con aspectos sutiles del plano cartesiano, o del terreno de las representaciones algebraicas, o del de las tabulares. La puesta en practica de nuevos ambientes de aprendizaje enfocados a la comprensión de funciones, deberían poner mayor cuidado al tratar con esta clase de dificultades.

Por otro lado, se registró que algunos alumnos tuvieron problemas para ir de la representación verbal de una relación lineal a su representación algebraica; el más común consistió en escribir ecuaciones del tipo $x = ny$ cuando, verbalmente, el alumno expresaba que "y es n veces mayor que x". Esto, aparentemente, tiene su origen en la manera en que estas expresiones son visualizadas por el estudiante; en su representación mental, la n y la y aparecerían más ligadas que la n y la x. Al llevarse al lenguaje algebraico, se tendería a escribir $x = ny$ en lugar de la ecuación correcta, $y = nx$. En la búsqueda de información para la realización de este trabajo no se encontró literatura concerniente a dificultades de esta naturaleza; es posible que sean necesarios estudios que las exploren, para contribuir así al posterior diseño de ambientes de aprendizaje sobre éstos conceptos.

En lo que parece ser una de las deficiencias más importantes del ambiente de aprendizaje diseñado, los resultados indican que la generalidad de los estudiantes llegó a desarrollar algunas concepciones erróneas en cuanto a las representaciones gráficas de funciones: tal parece que, para ellos, la gráfica de una función debía ser siempre continua (a tal punto, que mientras en el *pre-test* algunos alumnos parecían considerar la posibilidad de gráficas discretas, para el *post-test* ningún estudiante dio muestras de tener esto en cuenta). Algunos alumnos, además, aparentaban concebir –al serles aplicado el instrumento de *post-test*– la gráfica de una función como siendo generada siempre de izquierda a derecha. Resulta plausible que el desarrollo de estas concepciones haya sido favorecido por el tipo de situaciones didácticas empleadas en el ambiente de aprendizaje: en prácticamente todas ellas, las funciones manejadas se caracterizaban por tener dominio y rango continuos, y se tendía a efectuar incrementos en la variable independiente para observar cambios en la dependiente. De este modo, los aprendices trabajaron casi exclusivamente con funciones de gráficas continuas, construidas de izquierda a derecha en el plano cartesiano.

Es posible argumentar que estas concepciones no deberían considerarse como absolutamente incorrectas; de hecho, se piensa en este trabajo que tienen potencial para ser empleadas como cimientos sobre los cuales construir "puentes hacia nuevas comprensiones" (Duckworth, 1987, en Bransford *et al*., 1999, p. 124). En cualquier caso, el diseño de nuevos ambientes de aprendizaje para el concepto de función debería considerar estas limitaciones para hallar maneras de aminorarlas.

Otro aspecto que cabe resaltar es el hecho de que los alumnos parecieron haber desarrollado comprensiones sobre el rol que juega el parámetro b (de la representación $y = ax + b$) más sólidas que aquellas desarrolladas para el parámetro a. Siendo que, gráficamente, b representa directamente el punto de intersección de la gráfica de una función lineal con el eje de las ordenadas, mientras que el papel de a no resulta interpretable de una manera tan "inmediata", el que los aprendices hayan desarrollado mejores comprensiones sobre el primer parámetro que sobre el segundo no parece sorprendente; sin embargo, este hecho sí es indicativo de que en el ambiente de aprendizaje no se consiguió que los estudiantes desarrollaran comprensiones razonablemente robustas y profundas para *ambos* parámetros. De nuevo, es factible que las situaciones didácticas empleadas en el ambiente, así como el modo de trabajar con ellas, hayan contribuido a este resultado, dado que las tareas dirigidas a la comprensión de b fueron, en tiempo y forma, similares a las correspondientes para a, cuando probablemente éstas últimas deberían haberse diseñado tomando en consideración la mayor complejidad que, aparentemente, presenta la comprensión de nociones como *razón de cambio* y *pendiente*.

Es interesante mencionar que, al inicio de la implementación del ambiente de aprendizaje, una parte sustancial del grupo de estudiantes contaba ya con cierta comprensión de la noción de función desde la perspectiva de proceso; la información recabada mediante el instrumento de evaluación de la comprensión da pie a pensar que ésta se volvió más sólida después de concluido el ambiente, al tiempo que habrían comenzado a desarrollarse comprensiones de las funciones como objetos (las cuales no llegaron a ser, en varios casos, lo suficientemente robustas como para reflejarse en soluciones correctas de tareas matemáticas complejas). Esta "secuencia" en el desarrollo de la comprensión, de la perspectiva de proceso a la de objeto, para luego pasar a efectuar conexiones entre ambas, ya ha sido sostenida por Moschkovich *et al*., (1993) en su trabajo sobre funciones lineales. De acuerdo a este reporte, la secuencia caracteriza procesos de aprendizaje en los que no se recurre a herramientas tecnológicas como los *software* didácticos. Parece que es posible alterarla con ayuda de esta clase de herramientas, de modo que los estudiantes estarían en posibilidad de desarrollar primero su comprensión de las funciones como objetos y más tarde como procesos, o incluso de realizar conexiones entre ambas perspectivas desde etapas muy tempranas del proceso instruccional (Shoenfeld, 1990). Este aspecto se cuenta entre aquellos que vuelven atractivo el uso de tecnología en la enseñanza de conceptos como el de función.

Es precisamente en el empleo de herramientas tecnológicas donde se encuentran grandes posibilidades de desarrollo para el trabajo presentado aquí. Es factible que algunas de las limitaciones discutidas arriba puedan atacarse con ayuda de *software* didáctico. Una vez consideradas dichas limitaciones, es posible pensar en el diseño de nuevas situaciones didácticas, y/o en la adecuación de algunas de las ya diseñadas, incluyendo un mayor empleo de las herramientas tecnológicas (recuérdese que, en este trabajo, sólo se utilizó la Internet, como fuente de información).

La propia Internet resulta de gran ayuda en la búsqueda de herramientas adecuadas. Por ejemplo, a través de páginas como www.google.com pueden emprenderse búsquedas que de ordinario no tomarán más allá de unos minutos, y que arrojarán decenas de programas diseñados para servir a la enseñanza-aprendizaje de varios conceptos matemáticos, incluido el de función. En particular, aquí se han considerado interesantes algunos programas que, empleados adecuadamente, tienen potencial para ayudar a los estudiantes a desarrollar fluidez en el paso entre las representaciones gráfica y algebraica de funciones. Uno de ellos es el programa *Graphmatica*, el cual resulta muy útil para dibujar numerosos tipos de funciones en varios sistemas de coordenadas (cartesianas, polares, paramétricas). El programa también permite el cálculo de derivadas, integrales, etc. Los desarrolladores del programa ofrecen licencias asequibles para centros educativos y se permite "descargar" de la red una versión de demostración completamente operativa durante un mes, a través de la dirección http://www8.pair.com/ksoft/. Hay disponible una versión en español.

En la misma línea se encuentra el programa *Derive*, cuyos creadores también ofrecen licencias a precios reducidos para centros educativos y estudiantes. *Derive* permite realizar cálculos algebraicos, resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones simultáneas, efectuar cálculos matriciales, estudiar funciones y sus gráficas, obtener derivadas, integrales, trabajar con trigonometría, etc.

La última versión, la versión 5, incluye considerables mejoras respecto a la anterior, en lo referente a gráficos 3D, hojas de trabajo, etc. Es distribuida por Derisoft y pueden hallarse mayores informes en la página http://www.derive.com/.

Otro programa que ha parecido de interés y con potencial para incorporarse al diseño de posteriores ambientes de aprendizaje con ésta temática es *Cabri*. Éste es un programa comercial diseñado para "hacer geometría" al estilo sintético o métrico. Permite estudiar en el plano todo tipo de propiedades geométricas y lugares geométricos de forma sencilla e intuitiva, de manera que resulta por lo general muy fácil de utilizar para los alumnos. El programa puede "descargarse" desde la pagina http://www.cabri.com/fr/, y aunque podría parecer más apropiado para la enseñanza-aprendizaje de la geometría, no es difícil hallar maneras de adaptarlo a una instrucción sobre funciones.

Mathematica es el nombre de un *software* que permite realizar una gran variedad de tareas, desde efectuar cálculos aritméticos hasta resolver complejas ecuaciones integro-diferenciales. Entre sus capacidades, está la de dibujar la gráfica de prácticamente cualquier función, además de que da al usuario una gran libertad para elegir diversos parámetros en la presentación de estas gráficas: posición del origen, inclusión o no de ejes, sus escalas, el sistema de coordenadas a utilizar, incluso el tipo de letra a presentar y el ancho que se desea para las líneas. En *Mathematica* –al igual que en los otros programas mencionados aquí, con la excepción de *Graphmatica*– pueden obtenerse vistosas gráficas en tres dimensiones, las cuales, en un momento dado, pueden emplearse para ayudar a los estudiantes a desarrollar comprensiones más profundas sobre esta manera de representar funciones. El programa puede obtenerse en la página http://www.wolfram.com, con la posibilidad de licencias accesibles para estudiantes y centros educativos.

La Internet también proporciona acceso a multitud de programas educativos que pueden ser empleados en la enseñanza-aprendizaje de las funciones, y que además pueden obtenerse gratuitamente. Éstas son herramientas que deberían por lo menos ser exploradas y su pertinencia evaluada en lo que respecta a su uso para los fines aquí señalados.

Como ocurre regularmente al llevar nuevos elementos a un dominio dado, su introducción debe conducirse cuidadosamente para que existan posibilidades de conseguir resultados alentadores. Goldenberg (1988) señala que el mero uso de computadoras para generar gráficas que sustituyan los "crudos dibujos que uno realiza a mano" (Moschkovich *et al*., 1993, p. 76) no garantiza el desarrollo de la comprensión entre los estudiantes, y que incluso, el empleo "poco informado […] de cualquier *software* graficador conlleva varias trampas" (Goldenberg, 1988, p. 136) que conviene evitar. Si las herramientas tecnológicas no se utilizan de una manera "bien pensada" (Goldenberg, 1988, p. 136), resulta muy probable que incluso contribuyan al desarrollo de concepciones erróneas similares a las encontradas en este trabajo. Por otro lado, en la literatura se ha encontrado evidencia sustancial en el sentido de que en el uso "bien pensado" de *software* educativo hay mucho que ganar, encontrándose que resulta de ayuda a los estudiantes para desarrollar nuevas visiones para atacar problemas, así como mayor profundidad y claridad en diversos conceptos, incluido el de función (Goldengerg, 1988; Hollar y Norwood, 1999; NCTM, 2000; O'Callaghan, 1998; Schwartz y Yerushalmy, 1992).

Dadas las consideraciones anteriores, no resulta aventurado afirmar que el trabajo que se ha presentado en estas páginas tiene posibilidades de continuar desarrollándose, buscándose maneras de trabajar en sus limitaciones así como de explotar de mejor forma sus puntos fuertes. Ello podría ser el tema de posteriores estudios que quizá llevarían a nuevos resultados de interés para la educación matemática.

Anexo I. Instrumentos de Instrucción.

En la instrucción propuesta para este trabajo, se presentaron a los alumnos situaciones didácticas en contextos no matemáticos. Se trabajó con un total de 9 situaciones, algunas de ellas constituidas por varias tareas, diseñadas con la finalidad de ayudar a los estudiantes a construir comprensiones lo más profundas posible sobre la idea de función, y en particular, de función lineal.

Varios autores (Brown *et al*., 1989; Cramer, 2001, en Billings y Schultz, 2005; Davidenko, 1997; NCTM, 1989; NCTM, 2000) hablan de la conveniencia de colocar el concepto de función en un contexto rico, para lograr una comprensión más profunda del concepto. Como ya se ha hecho mención, se consideró adecuado introducir primero la noción general de función, de modo que se comenzó por un estudio de diferentes clases de funciones que tienen lugar en el mundo real (NCTM, 1989; 2000). De esta forma, se pretendió estructurar los contenidos de manera que el tema de interés, *funciones lineales*, pudiera conectarse a la noción más general de *función*. Al proceder así, se buscó contribuir al desarrollo de cuerpos de conocimiento bien organizados, fundamentales para el diseño de un ambiente de aprendizaje desde una perspectiva centrada en el conocimiento (Bransford *et al*., 1999).

Las situaciones propuestas involucraban la dependencia de dos cantidades, y buscaban llamar la atención sobre la posibilidad de representar esta dependencia de diversas maneras, así como sobre las diferentes características de dichas representaciones.

En este anexo se incluyen notas explicativas en cursivas, que no aparecieron en las versiones para los alumnos. La forma de trabajo ya se he especificado en el apartado *El ambiente de aprendizaje*; recuérdese que algunas situaciones están divididas en varias partes, y que al final de cada situación –o de cada parte, si es el caso– se organizaban discusiones grupales sobre las conclusiones de los equipos, antes de que se proporcionara a los alumnos el escrito con la siguiente situación didáctica.

A continuación, se incluyen los escritos en los que se planteaban las situaciones didácticas a trabajar:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

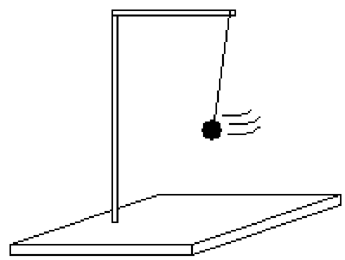
Péndulos

Alumnos: ____

____

____

Un péndulo simple (constituido por un hilo sujeto por uno de sus extremos a algún soporte fijo, mientras que del otro extremo cuelga una masa) puede servir para medir el tiempo, si se conoce su periodo. El periodo de un péndulo es el tiempo que le toma realizar una oscilación completa, ida y vuelta.



El objetivo de esta tarea es fabricar un péndulo cuyo periodo podamos modificar a voluntad. Para ello, habrá que determinar de qué depende el periodo de un péndulo, si es que depende de algo, y cómo usar esa información para fabricar el péndulo solicitado.

Para cumplir con el objetivo, se organizarán en equipos de tres personas. Una vez organizados, lean atentamente las especificaciones siguientes:

1. Uno de ustedes será el Científico del equipo, otro el Ingeniero y otro más el Técnico. Las responsabilidades de cada miembro del equipo son las siguientes:
   - El Científico tendrá la responsabilidad de averiguar <u>de qué depende el periodo de un péndulo</u>, y cómo es esa dependencia. Por ejemplo, si el periodo del péndulo dependiera de su temperatura (que desde luego no es así, ¡esto es sólo un ejemplo!) el científico tendrá que averiguar eso y también cómo afectan los cambios de temperatura al periodo del péndulo: a más temperatura ¿mayor periodo? ¿o al revés? ¿existirá alguna fórmula que permita calcular el periodo para una temperatura determinada? Etc.

- El Ingeniero se encargará de emplear la información obtenida por el Científico para decirle al Técnico cómo fabricar el péndulo para que su periodo pueda modificarse. Por ejemplo, regresando al supuesto de que el periodo dependiera de la temperatura, el Ingeniero tendrá que decirle al Técnico a qué temperaturas debe colocar el péndulo para que tenga los periodos que se necesitan
- El trabajo del Técnico será fabricar el péndulo, con base en la información que le proporcionen el Científico y el Ingeniero. El péndulo deberá estar hecho de materiales tan sencillos y fáciles de conseguir como sea posible.

2. Los tres integrantes tendrán que trabajar cooperativamente; por ejemplo, aunque el único encargado de encontrar la información necesaria sea el Científico, todos los miembros deben conocer esa información. Otro ejemplo: aunque el Técnico sea el único encargado de la fabricación del péndulo, todos los miembros deben conocer detalladamente cómo lo hizo. Si llegara a ser necesario comprar algún material para la realización de esta tarea, los tres integrantes deberán contribuir con los gastos (¡procuren no gastar mucho!).

3. Podrán utilizar cualquier libro o revista que encuentren sobre el tema. La internet puede ser una fuente importante de información; de hecho, en las páginas siguientes encontrarán datos que quizá les sean útiles:
   - www.areamatema.org. Deben ir al vínculo “alumnos” y ahí buscar otro vínculo que dice “material del profesor Daniel Cruz”.
   - Si tuvieran problemas con la dirección anterior, pueden ir a www.pendulos.blogspot.com, en donde se encuentra la misma información.
   - En http://darkmatter.blogalia.com/historias/43824 hay datos útiles con una curiosa redacción.
   - Otra página que podría ser útil es http://usuarios.lycos.es/pefeco/pendulo.htm.

4. En la fecha acordada en el grupo, cada equipo entregará su péndulo así como un reporte escrito, en el que explicarán claramente todo el proceso que siguieron para completar la tarea, desde responder a la pregunta ¿de qué depende el periodo de un péndulo? hasta los detalles de su fabricación.

5. Los péndulos serán sometidos a prueba: el profesor solicitará a cada equipo que ajuste el suyo para que tenga ciertos periodos.

6. Este es un trabajo en equipo, por lo que todos sus miembros compartirán la misma calificación.

7. El trabajo se evaluará de acuerdo con la tabla siguiente:

	El periodo del péndulo se puede modificar a voluntad.	El equipo pudo ajustar su péndulo para obtener el periodo solicitado por el profesor.	Todos los miembros del equipo colaboraron en la realización del trabajo.	El reporte escrito del equipo explica claramente todo el proceso que siguieron.	
Si					
Medianamente					
Suficientemente					
No					

Sí=10 Medianamente=8 Suficientemente=6 No=5

Por ejemplo, un equipo cuyo péndulo SÍ (10) permita modificar el periodo a voluntad, pero que ajusten SUFICIENTEMENTE (6) su péndulo al periodo solicitado, mientras que sus miembros conocen MEDIANAMENTE (8) lo realizado por sus compañeros, y cuyo reporte NO (5) sea claro, tendrá un total de 10+6+8+5=29 puntos, que divididos entre los cuatro criterios de evaluación dan una calificación de 29/4=**7,25**.

Adelante y que la Fuerza los acompañe.

Fecha de entrega: ______________________

Tiempo estimado: 60 minutos.
Recursos: lápices, papel, hilo, masas de diversos tamaños, cronómetros, reglas, transportadores, soportes universales.
Como un proyecto para realizarse en ocho días, los alumnos deberán averiguar de qué depende el periodo de un péndulo para así fabricar uno cuyo periodo pueda modificarse a voluntad.
Una vez que los chicos presenten los resultados de su proyecto, se introducirán los conceptos de variable, variable dependiente, variable independiente, función, rango y dominio, empleando para ello la relación funcional que existe entre el periodo de un péndulo y su longitud. Se introducirá también la notación T(L).
Se pondrá especial cuidado en especificar que con una función debe ser posible predecir unívocamente el valor de la variable dependiente si se conoce el de la independiente. En términos de esta tarea, el periodo del péndulo será una función de alguna variable independiente, si dado el valor de ésta última es posible saber el del periodo.
De este modo, hay una función entre dos variable si al cambiar una cambia la otra, pero también si al cambiar la independiente, la dependiente se mantiene constante; no existe función si para un solo valor de la variable independiente pueden darse múltiples valores de la dependiente, pues en ese caso es imposible predecir unívocamente el valor de la segunda (el periodo del péndulo) aunque se conozca el de la primera.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez
Péndulos, segunda parte

Alumnos: ____

____

____

Como encontraron en la tarea anterior, el periodo de un péndulo depende de su longitud. En matemáticas, se dice que existe una función entre el periodo del péndulo y su longitud, o bien, que el periodo del péndulo es función de su longitud.

La ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ nos dice la forma exacta de la dependencia longitud-periodo. Podemos usar esa ecuación para encontrar el periodo que tendrá un péndulo de determinada longitud. Sin embargo, realizar los cálculos cada vez que necesitemos esa información puede llegar a ser poco práctico. ¿De qué manera podríamos evitarnos ese trabajo extra?

Tiempo aprox: 60 minutos.
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
Esta tarea probablemente formará parte de la discusión que seguirá a la tarea denominada "Péndulos". Es decir, probablemente su desarrollo sea completamente verbal; se pretende llegar a que los chicos perciban la posibilidad de representar la función T(L) tabulándola y/o graficándola, además de hacerlo algebraicamente. Al final, los chicos deberían entregar un escrito con las formas de representar la función T(L) que ellos propongan.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

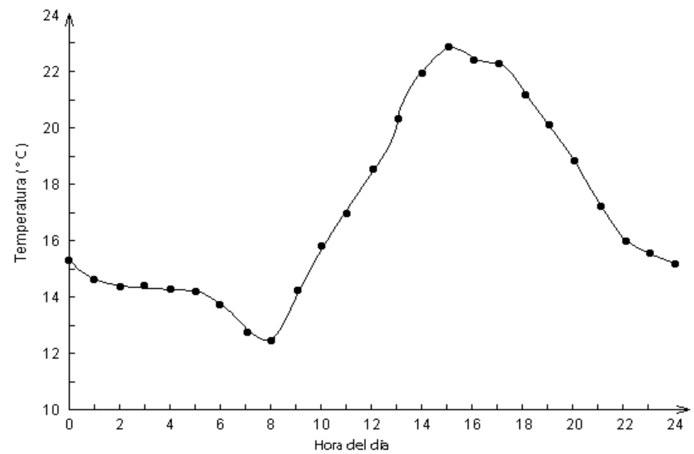
El clima, primera parte.

Alumnos: ____

____

Trabajando en parejas, lean y respondan las siguientes preguntas en los espacios en blanco, justificando lo mejor que puedan sus afirmaciones.

1. La gráfica 1 representa la variación de la temperatura a lo largo de un día en la Ciudad de México, de acuerdo con datos obtenidos en la página Web (www.cimat.mx) del CIMAT (Centro de Investigación en Matemáticas).
   De acuerdo a la gráfica, ¿tenían razón en sus respuestas a las preguntas planteadas en clase? En caso negativo, ¿cuáles serían las respuestas correctas?



Gráfica 1

2. Construyan una representación tabular de la función anterior.

Tiempo aprox: 30 minutos.
Recursos: Lápices, papel.
Antes de entrar a esta tarea, se preguntará verbalmente a los alumnos sobre a qué hora consideran que hace más frío y a qué hora hace más calor. Así, se procurará hacerles reflexionar sobre el hecho de que la temperatura ambiente es una función de la hora del día, a lo largo de un día dado. Una vez conseguido esto, se profundizará en los conceptos de variable dependiente e independiente, función, rango y dominio. En esta tarea se reiterará la posibilidad de representar una función de diversas maneras, centrándose en las representaciones gráfica y tabular.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

El clima, segunda parte

Alumnos: ____

____

3. Encuentren, aunque sea de manera aproximada, cuál fue la temperatura ambiente a las 6:30, a las 11:30 y a las 13:30 horas. Expliquen con todo el detalle posible cómo lo hicieron.

Tiempo aprox. 30 minutos.
Recursos: lápices, papel, reglas, escuadras.
Esta tarea pretende hacer ver la utilidad de una función particular, al permitir, aunque sea de modo aproximado, encontrar la temperatura en un momento dado del día. Se respetarán todos los métodos de los chicos consideren adecuados para realizar la tarea. Se les discutirá grupalmente una vez concluida la tarea, hablándose sobre sus ventajas y desventajas. Se espera que los alumnos empleen alguna de las dos representaciones con las que contarán (gráfica y tabular), y que en todo el grupo podrán encontrarse ejemplos de usos de ambas representaciones. De ser así, se discutirán también las ventajas y desventajas encontradas en el uso de cada una de ellas.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

Funciones en el mundo

Alumno: ____

Usa las hojas blancas que te proporcionará el profesor para responder las preguntas siguientes.

1. Individualmente, menciona por lo menos tres funciones de dos variables. Especifica claramente quién es la variable dependiente y quién la independiente.
2. Para cada una de las relaciones que escribas, especifica quién es el dominio y quién el rango.
3. ¿Para qué podría servir conocer las funciones que mencionaste?

Tarea para casa
Recursos: Lápiz, papel.
Los alumnos deberán buscar en su mundo cotidiano ejemplos de funciones de dos variables. Además, tendrán que especificar qué cantidades son las variables dependiente e independiente, e identificar el rango y el dominio para las funciones que elijan.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez
Cuadrados, primera parte

Alumnos: ____

____

Trabajen con una pareja *distinta* a la de las tareas anteriores. Lean atentamente y respondan lo que se pide en los espacios en blanco.

1. Discutan si hay una función entre la longitud del lado de un cuadrado y su área. En caso afirmativo, especifiquen quiénes serían las variables dependiente e independiente, el rango y el dominio. Anoten sus conclusiones, justificándolas lo mejor que puedan.

Tiempo aproximado: 20 minutos
Recursos: Lápices, papel.
Se espera, con esta tarea, que los alumnos se convenzan de que, efectivamente, el área de un cuadrado es función de la longitud de su lado.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez
Cuadrados, segunda parte

Alumnos: ____

____

Trabajando con la misma pareja, lean atentamente y respondan lo que se pide en los espacios en blanco.

2. Representen la función que existe entre la longitud del lado de un cuadrado y su área por lo menos de tres maneras diferentes.

Tiempo aprox: 40 minutos.
Recursos: Lápiz, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
Esta situación buscará profundizar en la posibilidad de representar funciones de varias maneras. En particular, se espera obtener la representación algebraica de la función área de un cuadrado. Se nombrará "cuadrática" a esta función, en referencia al tipo de ecuación que la representa algebraicamente. Se introducirá la notación formal f(x)= y.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

Cuadrados, tercera parte

Alumnos: ____

____

Trabajando con la misma pareja, lean atentamente y respondan lo que se pide en los espacios en blanco.

3. Encuentren el área de un cuadrado cuyos lados midan 5.5 cm. Empleen todas las representaciones que hayan propuesto en la tarea anterior.

4. ¿Cuál de las representaciones les parece más conveniente para resolver la pregunta anterior? Discutan y anoten ventajas y desventajas de unas y otras.

Tiempo aprox: 40 minutos.
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras, calculadoras.
Con esta tarea se buscará que los alumnos profundicen en la posibilidad de representar una función de varias maneras, además de emplearlas para resolver un problema sencillo. Se pretende discutir estos hechos además de las posibles ventajas y desventajas que los estudiantes encuentren al usar cada representación.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

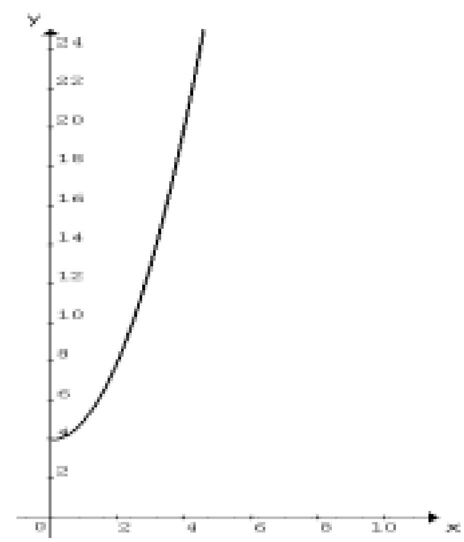
Cuadrados, cuarta parte

Alumnos:

____

____

5. Observen la gráfica siguiente. ¿Qué relación funcional de la vida real podría representar? ¿Quiénes serían las variables dependiente e independiente, quiénes el rango y el dominio?



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez
Cuadrados, quinta parte

Alumno: ____

6. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene un área de 6.25 cm^2? Emplea todas las representaciones que hayas propuesto con tu pareja en clase.

7. ¿Cuál de las representaciones te parece más conveniente para resolver la pregunta anterior? Discute y anota ventajas y desventajas de cada una.

Tarea para casa.
Recursos: lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras, calculadora.
Esta tarea pretende ejercitar a los chicos en el empleo de diversas representaciones de una función sencilla para resolver un problema simple. Las ventajas y desventajas encontradas por los chicos serán discutidas grupalmente de regreso en el salón de clases.

Con este primer grupo de situaciones se buscó introducir los conceptos de *función*, *variable dependiente* e *independiente*, *rango* y *dominio*, así como la posibilidad de representar una relación funcional mediante una variedad de medios. Posteriormente, la instrucción se concentró en una clase específica de funciones, las funciones lineales:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez

Electricidad, primera parte

Alumno: ____

Trabaja individualmente. Lee con atención y realiza lo que se pide.

Un circuito eléctrico es el trayecto o ruta que sigue una corriente eléctrica. Usualmente está constituido por ciertos dispositivos capaces de conducir la electricidad, y una fuente de energía (voltaje) que haga fluir la corriente a través del circuito. En esta actividad, trabajaremos con un circuito eléctrico sencillo, como el que se muestra en la figura 1. Este circuito consta de una fuente de energía (voltaje) y un elemento que opone cierta

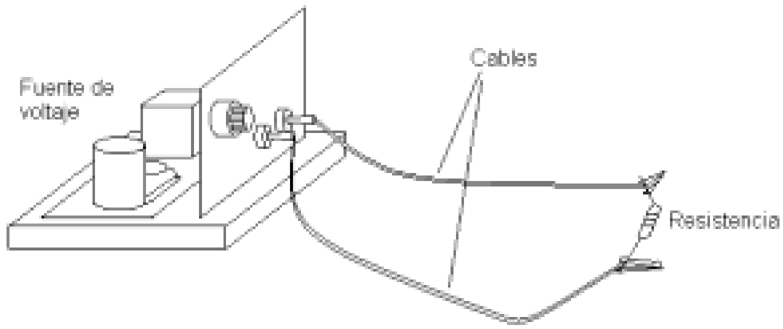


Figura 1

resistencia al paso de la corriente.

1. Anota en la tabla 1 los valores de voltaje y corriente eléctrica que vayan obteniéndose.

Tabla 1. (Conductancia: 0.15 mS)

Voltaje (V)	Corriente (mA)

Tiempo aprox: 20 minutos.
Recursos: Lápices, papel, fuente de voltaje directo, multímetros, cable, resistencias de varios valores.
El profesor empleará una fuente de voltaje directo, construida por él, para mostrar a los alumnos cómo el valor de la corriente eléctrica a través de una resistencia cambia al cambiar el voltaje aplicado. Se espera que los alumnos reparen en la existencia de una función entre el voltaje y la corriente a través de este circuito, cuestión que será discutida al concluir esta parte de la tarea.
Dado que el concepto de interés es la relación funcional –lineal– existente entre la Corriente eléctrica y el Voltaje en un circuito sencillo como éste, no se profundizará en el funcionamiento del circuito ni en cuestiones relacionadas a errores de medición o incertidumbre experimental.
En esta tarea, alumnos voluntarios usarán la fuente de voltaje para variar su valor y comunicar a sus compañeros las lecturas de los multímetros.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez
Electricidad, segunda parte

Alumno: ____

Trabaja individualmente. Lee con atención y realiza lo que se pide.

2. Anota en las tablas 2, 3 y 4 los valores de voltaje y corriente eléctrica que vayan obteniéndose con las nuevas resistencias.

Tabla 2. (Conductancia: 0.18 mS)

Voltaje (V)	Corriente (mA)

Tabla 3. (Conductancia: 0.26 mS)

Voltaje (V)	Corriente (mA)

Tabla 4. (Conductancia: 0.30 mS)

Voltaje (V)	Corriente (mA)

Tiempo aprox: 30 minutos
Recursos: Lápices, papel, fuente de voltaje directo, multímetros, cable, resistencias de varios valores.
Empleando el mismo arreglo de la tarea anterior, se obtendrán datos experimentales para valores distintos de la resistencia que forma parte del circuito eléctrico.
Se buscará hacer que los estudiantes noten que la corriente eléctrica sigue siendo una función del voltaje aplicado, pero que al cambiar la resistencia, la función deja de ser la misma.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez
Electricidad, tercera parte

Alumno: ____

Trabaja individualmente. Lee con atención y realiza lo que se pide.

3. Las tablas 1, 2, 3, y 4 son representaciones tabulares de varias funciones I(V). Emplea al menos otras dos representaciones para expresar cada una.

4. En cada caso, emplea tus dos representaciones para encontrar:
   a) el valor de la corriente eléctrica para un voltaje de 12V.
   b) el voltaje necesario para tener una corriente eléctrica de 10 mA.
   c) el valor de la corriente eléctrica para 20V.

Tiempo aprox: 60 minutos
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
Se busca que los estudiantes representen la función I(V) de varias maneras, entre las que se espera se encontrarán la algebraica y la gráfica. De esta manera, se pretende discutir con ellos algunas características de esta función, la primera de carácter lineal que se presenta en el ambiente de aprendizaje. Se dará ese nombre ("lineal") a la función I(V), en referencia a la ecuación que la representa algebraicamente, y procurando que los estudiantes conecten esta denominación a la de "función cuadrática", que ya se habrá discutido con anterioridad en la tarea "Cuadrados, segunda parte".
Se pretende también que los alumnos observen el efecto del parámetro 'a' sobre distintas representaciones de una función de la forma y = ax. La discusión respecto a los resultados de esta tarea deberá permitir llegar a relacionar el valor de 'a' con la 'inclinación' de la recta que representa gráficamente a la función. Para ello, antes de que comiencen a representar las funciones, se acordará que de usarse una representación gráfica, se emplee el mismo plano cartesiano para las de todas las funciones I(V).
La pregunta 4 pretende ejercitar a los alumnos en una tarea que ya habrán realizado a estas alturas, emplear varias representaciones para resolver un problema sencillo.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez
Ganancias en el cine, primera parte

Alumnos: ____

____

____

En equipos de tres personas, lean atentamente y respondan lo que se pregunta. Procuren llegar a un acuerdo sobre lo que responderán. Tanto si lo logran como si no, especifíquenlo en su respuesta. En caso de que no logren un acuerdo, especifiquen también porqué no lo consiguieron y escriban los puntos de vista de todos los integrantes del equipo.

Cuando una persona invierte cierta cantidad de dinero en un negocio (una tienda, una papelería, etc.), parte de sus ventas sólo servirá para recuperar el dinero invertido, por lo que de ellas no obtendrá ninguna ganancia. Sólo hasta que haya recuperado lo que invirtió, obtendrá ganancias por lo que siga vendiendo.
Los costos de operación de un cine (sueldos de los empleados, adquisición de las películas, mantenimiento) ascienden a $20,000 diarios. Los boletos cuestan $42.

1. Bajo las condiciones especificadas, ¿es la ganancia una función del número de boletos vendidos? En caso negativo, justifiquen claramente por qué lo creen así. En caso afirmativo, especifiquen claramente: a) porqué lo creen así, b) quién sería la variable dependiente y quién la variable independiente, c) quién sería el dominio y quién el rango.

Tiempo aprox: 15 minutos.
Recursos: Lápices, papel.
Se busca que los alumnos reparen en la existencia de una relación funcional entre la ganancia obtenida por la venta de boletos en un cine y el número de boletos vendidos. En la discusión grupal procurará llegarse a la conclusión de que esa función efectivamente existe, y se retomarán los conceptos de variables dependiente e independiente, rango y dominio.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

Ganancias en el cine, segunda parte

Alumnos: ____

____

____

Trabajando con el mismo equipo, lean con atención y realicen lo que se pide.

2. Representen la función G(B) por lo menos de tres maneras distintas.

3. Empleen todas las representaciones que hayan propuesto para determinar el número mínimo de boletos que deben venderse para obtener una ganancia de más de $20000.

Tiempo aprox: 40 minutos
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras
Una vez que los chicos concluyan que la ganancia G es una función del número de boletos vendidos B, se les pedirá que representen esta relación utilizando al menos tres maneras distintas, y que usen estas representaciones para responder una pregunta concreta. Se espera que, quizá entre otras, emerjan las representaciones gráfica y algebraica de la función G(B). Se señalará que esta función, como la de la tarea anterior (Electricidad) es una función lineal, lo cual dará pie a reafirmar lo discutido respecto a las características de esta clase de funciones.
Habrán de discutirse también las maneras de emplear cada representación para resolver la pregunta planteada.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

Ganancias en el cine, tercera parte

Alumnos: ____

____

____

Trabajen con el mismo equipo.

4. Supongamos que los costos de operación fueran a) de $10000 b) de $30000. Representa las funciones G(B) que resultarían de estas nuevas condiciones de por lo menos tres maneras.

Tiempo aprox: 50 minutos.
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
El objetivo de esta tarea es que los alumnos descubran el rol del parámetro ‘b’ (en $y = ax + b$) en varias representaciones. En particular, se espera que entre las representaciones por ellos propuestas se encuentren la algebraica y la gráfica, en las cuales el papel de ‘b’ es especialmente claro.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

Ganancias en el cine, cuarta parte

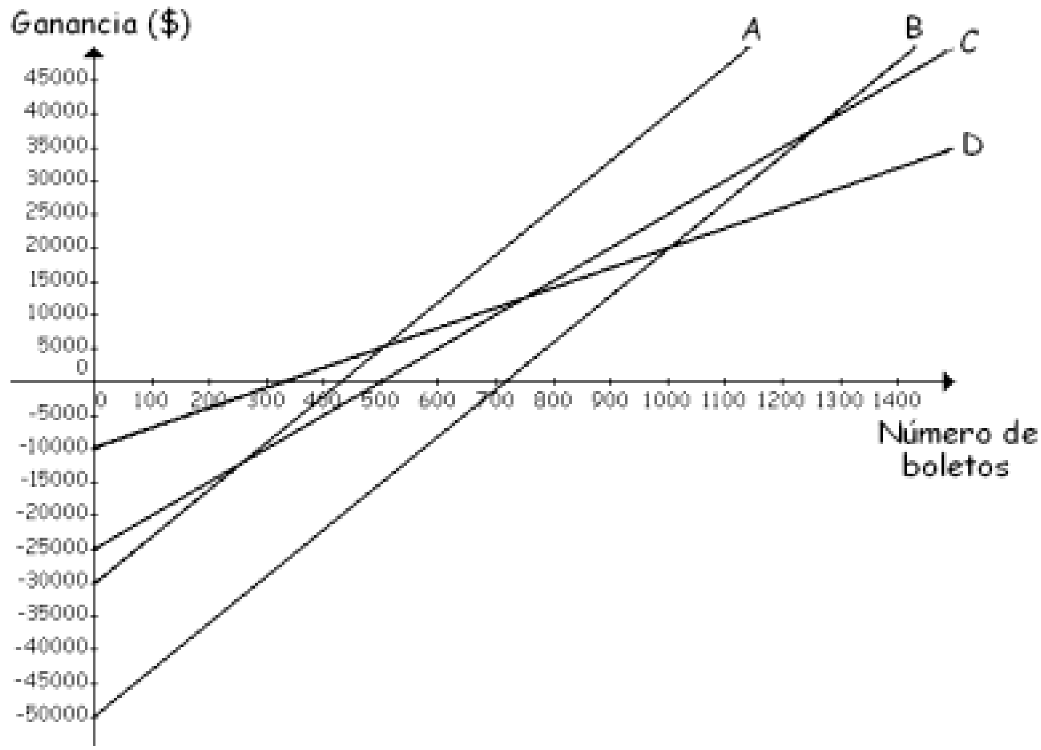
Alumnos: ____

____

____

Trabajando con el mismo equipo, lean con atención y realicen lo que se pide.

Las cuatro rectas que se muestran en la gráfica siguiente representan cuatro funciones G(B) para diferentes condiciones (distintos precios para los boletos, distintos costos de operación). Respondan lo que se pregunta, justificando claramente sus respuestas.



5. ¿Qué gráfica representa la situación en la que los costos de operación son más altos?

6. ¿De acuerdo a qué gráfica los boletos son más baratos?

7. Dos gráficas representan funciones en las que el costo de los boletos es el mismo. ¿Cuáles son?

8. Escriban cuál es el costo de operación y cuál el precio de los boletos de acuerdo a cada gráfica.
   A)

   B)

   C)

   D)

9. Escriban la representación algebraica correspondiente a cada gráfica.
   A)

   B)

   C)

   D)

Tiempo aprox: 70 minutos
Recursos: Lápices, papel, reglas, escuadras.
Con esta actividad se pretende que los jóvenes extraigan información de la representación gráfica de una función lineal, y que se trasladen de la representación gráfica a la representación algebraica. Se pretende discutir también en profundidad el papel de los parámetros 'a' y 'b' (en y = ax +b) y sus implicaciones gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez
Corriendo

Alumnos: ____

____

Lean con detenimiento y respondan lo que se pregunta.
Cuando se corre a cierta velocidad, ¿es la distancia recorrida función del tiempo que se lleva corriendo? Tanto en caso negativo como afirmativo, justifiquen claramente porqué lo consideran así. En caso afirmativo, especifiquen también quiénes serían las variables dependiente e independiente, quién el rango y quién el dominio.

Tiempo aprox: 15 minutos.
Recursos: Lápices, papel.
Esta serie de preguntas se planteará de manera verbal. Los jóvenes no las recibirán por escrito. Deberán observar que la distancia recorrida al viajar a una velocidad determinada es una función del tiempo de recorrido. Especificarán las variables dependiente e independiente así como el rango y dominio de esta función, consolidando su conocimiento de estos conceptos.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez
Corriendo, primera parte

Alumnos: ____

____

Trabajando en parejas, lean con atención y respondan lo que se pide.

1. Un caballo a galope puede recorrer 19 metros en un segundo. Un perro alcanza los 16 m/s. Supongan que ambos animales se mueven sin cambiar sus velocidades. Con d=distancia recorrida y t=tiempo transcurrido, representen las funciones d(t) del caballo a galope y del perro corriendo, algebraica y gráficamente.

Tiempo aprox: 30 minutos.
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
Los alumnos representarán algebraica y gráficamente funciones d(t) para velocidades constantes, con lo que se hará notar que dichas funciones son lineales, además del papel que juega la velocidad en ambas representaciones.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129B Profesor Daniel Cruz Vázquez

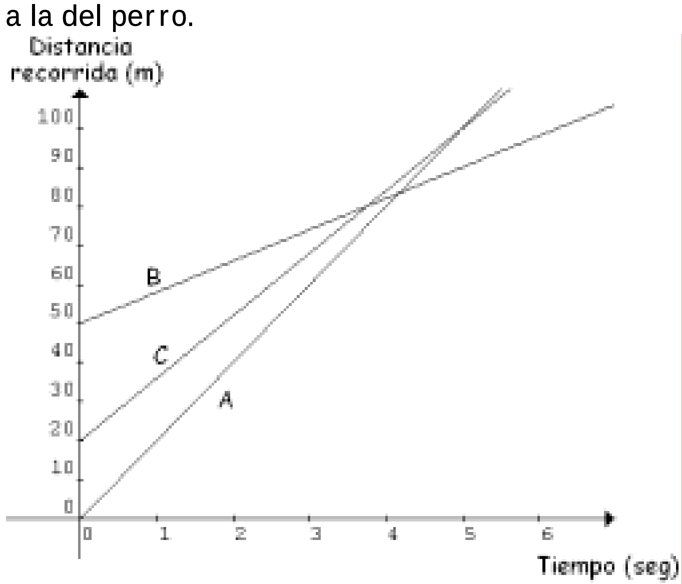
Corriendo, segunda parte

Alumnos: ____

____

Trabajando con la misma pareja, lean con atención y respondan lo que se pide. Justifiquen claramente y con todo el detalle posible cada una de sus respuestas.

Una liebre puede correr a una velocidad de 20 m/s. Un perro puede hacerlo a 16 m/s, y una persona, a unos 8 m/s. En una carrera entre los tres, la liebre ganaría seguramente, simplemente porque corre más rápido. Pero si les damos ventaja a la persona y al perro haciendo que salgan desde una posición adelantada respecto a la liebre, tal vez la competencia sea más equilibrada.
La gráfica siguiente representa las funciones d(t) para la liebre, el perro y la persona, en una carrera en la que se le permitió al perro arrancar desde una posición adelantada respecto a la liebre, mientras que a la persona se le permitió arrancar desde una posición adelantada respecto a la del perro.



2. ¿Qué gráfica corresponde a la función d(t) del perro? ¿Qué gráfica representa la función d(t) de la liebre? ¿Cuál de las gráficas muestra la función d(t) de la persona?

3. ¿Cuánta ventaja se le dio al perro? ¿y a la persona?

4. De acuerdo a lo mostrado en la gráfica, ¿alcanza la liebre al perro? ¿a los cuántos segundos?

5. De acuerdo a lo mostrado en la gráfica, ¿alcanza el perro a la persona? ¿a los cuántos segundos?

6. Escribe las representaciones algebraicas de las tres funciones, especificando claramente cuál corresponde a quién.

Tiempo aprox: 60 minutos
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
Los alumnos interpretarán las gráficas de tres funciones lineales para obtener información sobre la situación que les dio lugar. Se trasladarán de la representación gráfica a la algebraica. Se buscará que profundicen su conocimiento del papel de los parámetros ‘a’ y ‘b’ en ambas representaciones.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez

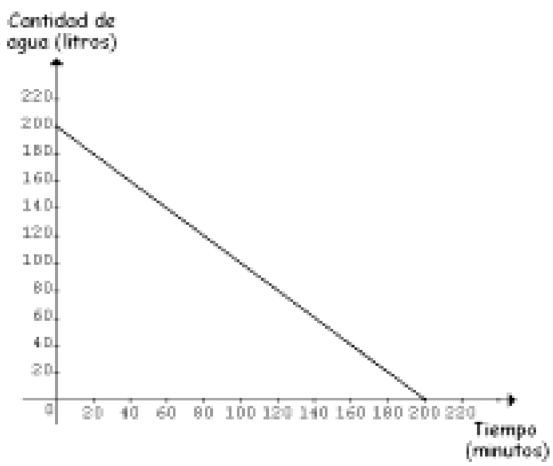
Agua, primera parte.

Alumnos: ____

____

Trabajando en parejas, lean con atención y respondan lo que se pregunta.

Un viejo amigo me contó que subió un día a su azotea y observó que la cantidad de agua en su tinaco estaba cambiando cada segundo. Por pura curiosidad (el hombre es un científico), se tomó la molestia de medir la cantidad de agua en el tinado conforme pasaba el tiempo. Con sus mediciones obtuvo la siguiente gráfica, que representa la función entre la cantidad de agua y el tiempo transcurrido desde el momento en que comenzó a tomar mediciones.



Mi amigo me lanzó un reto: sólo viendo esta gráfica, decirle cuánta agua había en su tinaco cuando comenzó a tomar sus mediciones, y si el tinaco se estaba llenando o se estaba vaciando.

En ese entonces yo no había tomado mi curso de Matemáticas II, así que me costó bastante trabajo responderle. Pero a ustedes debería resultarles más sencillo. Respondan las dos preguntas de mi amigo, y además:

2. Escriban la representación algebraica de esta función.

Tiempo aprox: 20 minutos.
Recursos: Lápices, papel, reglas y escuadras.
Esta situación presenta por primera vez una función lineal en la que el parámetro ‘a’ es negativo. En esta primera parte, se interpretará la gráfica para obtener información sobre la situación práctica que le dio origen y se obtendrá la representación algebraica de la función, con el objetivo de discutir el efecto de tener un parámetro ‘a’ negativo.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez

Agua, segunda parte.

Alumnos: ____

____

Trabajando con la misma pareja de la tarea anterior, lean las preguntas siguientes y respóndanlas correctamente:

3. Dibujen la representación gráfica de la función C(t) para los siguientes casos:
   a) El tinaco contiene inicialmente 250 litros y está vaciándose a una razón de 3 litros cada minuto
   b) El tinaco contienen inicialmente 150 litros y está vaciándose a una razón de 0.5 litros cada minuto.
   c) El tinaco no contiene agua originalmente y está llenándose a una razón de 1 litro cada minuto.

   A lado de cada gráfica escriban la representación algebraica correspondiente.

Tiempo aprox: 50 minutos
Recursos: Lápices, papel, papel milimétrico, reglas, escuadras.
Esta tarea profundiza en el estudio de funciones lineales con parámetro 'a' negativo. Se discutirá más a fondo el papel de este parámetro en las representaciones gráfica y algebraica de las funciones en cuestión.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
Matemáticas II. Grupo 129BProfesor Daniel Cruz Vázquez

Gas.

Alumnos: ____

____

Trabajen por parejas. Lean con atención y respondan lo que se pregunta, explicando y/o justificando en detalle sus dichos.

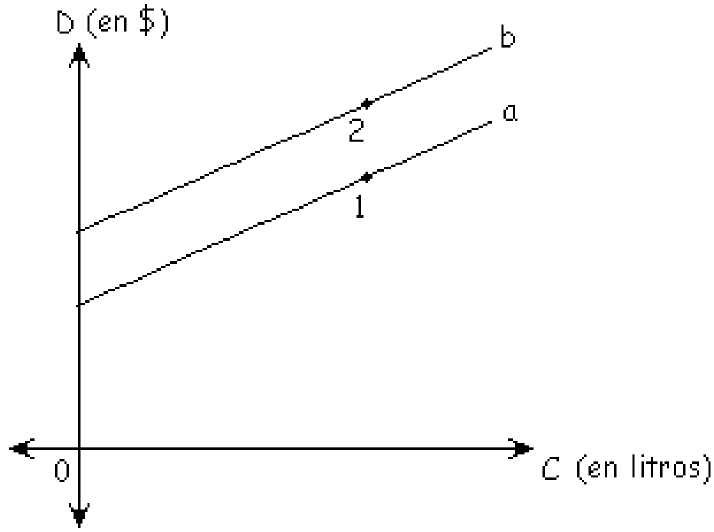
El consumo de gas doméstico es en nuestros días algo bastante común. La gente suele comprar el gas en tanques de unos 20 o 30 litros de capacidad. Estos son instalados por los repartidores de gas y duran más o menos un mes. Al término de este mes, los repartidores vuelven, se llevan el tanque y lo reemplazan por uno lleno.
En fechas más recientes, se ha vuelto popular otra forma de servicio, generalmente llamada Servicio de Gas Estacionario: la compañía de gas instala un tanque de gran capacidad

(cientos o miles de litros) en la casa habitación y un medidor de consumo. En lugar de reemplazar el tanque cada mes, se le rellena de gas cuando el usuario lo solicita.

Los edificios de departamentos suelen contar con Servicio de Gas Estacionario. Por lo regular, cuando una persona adquiere un departamento, en el precio viene incluido el costo de la instalación del tanque. Cuando comienza a vivir en el departamento, contacta a la compañía de gas para que vengan, le instalen el medidor y pueda contar con el servicio.

Llamemos C a la cantidad de gas (en litros) que consumen en un departamento de estos, y D al dinero (en pesos) que sus habitantes deben pagar por la instalación del medidor y por su consumo de gas.

Las siguientes gráficas representan dos funciones D(C) (¿quiénes son el rango y el dominio de estas funciones?).



1. ¿Cuál de las gráficas representa la situación en la que resultó más cara la instalación del medidor?

2. ¿En cuál de ellas el precio del gas es más alto?

3. La siguiente lista incluye las representaciones algebraicas de las dos funciones. Señala qué ecuación corresponde a qué gráfica.

$i)\ D = 5C + 400$ $\qquad$ $iii)\ D = 7C + 300$

$ii)\ D = 3C + 600$ $\qquad$ $iv)\ D = 5C + 600$

4. ¿Cuánto costó la instalación del medidor en cada caso?

5. ¿Cuál es el precio del litro de gas en cada caso?

6. El punto 1 de la gráfica corresponde a un consumo de 70 litros de gas. El segmento de recta que va de 1 a 2 es paralelo al eje D. Encuentra el dinero a pagarse correspondiente a los puntos 1 y 2.

Anexo 2. Instrumento de evaluación de la comprensión.

Valorar el grado en que la puesta en práctica del ambiente de aprendizaje favoreció el desarrollo de comprensiones del concepto de función y del de función lineal, requirió del diseño de un instrumento que permitiera observar el desempeño de los estudiantes en tareas cuya resolución demandara habilidades que la literatura considera fundamentales para la comprensión de estos conceptos (Hiebert y Carpenter, 1992; Moschkovich et al., 1993): flexibilidad para moverse entre diferentes representaciones y perspectivas de las funciones bajo estudio.

Con este fin, se diseñó una prueba escrita constituida por 31 reactivos del tipo sugerido por la literatura (Moschkovich et al., 1993). Los estudiantes debieron resolver dicha prueba, individualmente, antes (a manera de *pre-test*) y después (haciendo el rol de *post-test*) de la instrumentación del ambiente de aprendizaje. El instrumento prueba escrita se incluye a continuación:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
EXAMEN DIAGNÓSTICO

Profesor Daniel Cruz Vázquez.

Alumno: ____

Grupo: ____________________

Lee con atención:

Éste es un examen diagnóstico. Eso significa que sólo sirve para que el profesor obtenga información sobre los conocimientos que tienes sobre los temas que se preguntan en el examen. También significa que NO TENDRÁ NINGÚN VALOR PARA FINES DE CALIFICACIÓN.

Lee detenidamente las siguientes preguntas, y contéstalas con tanto detalle como puedas en los espacios en blanco. Si requieres más espacio, comunícaselo al profesor y él te proporcionará hojas blancas.

1. ¿Qué es una *variable*?

2. ¿Qué es una *función*?

3. ¿Cuándo se dice que una función es *lineal*?

4. Considera la expresión $y = ax + b$.

   a) ¿Quiénes son variables?

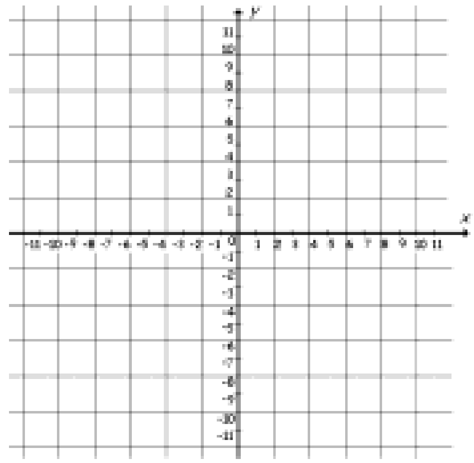
   b) ¿Quiénes son constantes?

   c) ¿Qué forma tiene la gráfica de expresiones de ese tipo?

5. Observa la tabla de la derecha. ¿Notas alguna relación entre los valores de "x" y los correspondientes valores de "y"?

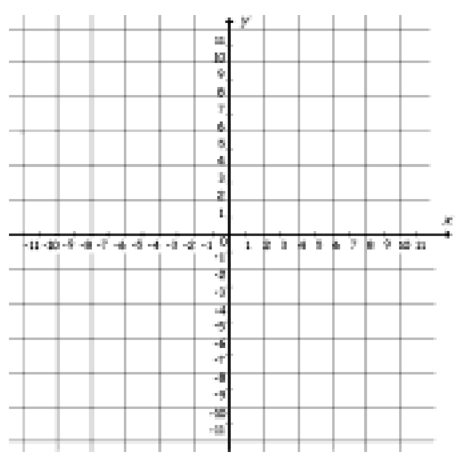
x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12

6. Si respondiste afirmativamente a la pregunta anterior, contesta los siguientes dos incisos; en caso contrario, pasa a la pregunta 7.
   a) Explica cuál es la relación entre los valores “*x*” y los correspondientes valores de “*y*”.
   b) Expresa esta relación utilizando una expresión algebraica.

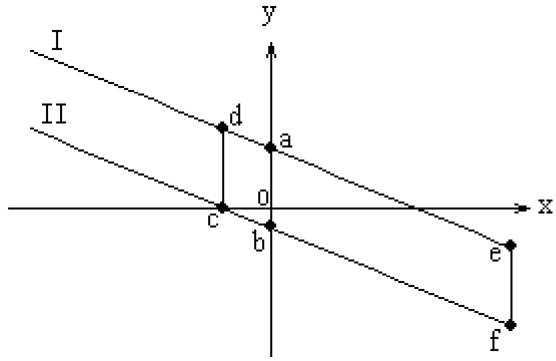


7. n el siguiente plano cartesiano, grafica los datos de la tabla anterior.

8. En el siguiente plano cartesiano dibuja la gráfica de la expresión $y = 2x + 1$.



9. Observa la gráfica siguiente y responde:



a. ¿Qué puedes decir sobre las pendientes de las rectas I y II?

b. ¿Qué puedes decir de las intersecciones con el eje *y* de ambas rectas?

c. La siguiente lista incluye las ecuaciones de las dos rectas. Señala a qué ecuación le corresponde cada recta:

$$y = 2x + 6 \qquad y = -2x - 2$$

$$y = 2x - 6 \qquad y = -2x + 6$$

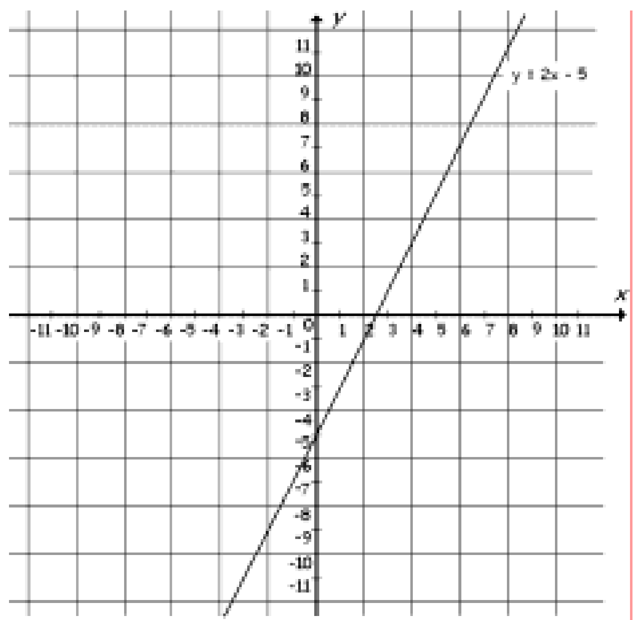
d. Encuentra las coordenadas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d*, sabiendo que los segmentos *cd* y *ef* son paralelos al eje *y*.

e. Si la coordenada *x* del punto *e* es 5, encuentra su coordenada *y* y las coordenadas del punto *f*. ¿Aparenta esto ser correcto en la gráfica?

f. Encuentra las longitudes de los segmentos *ef*, *cd* y *ab*. ¿Tiene sentido tu resultado? ¿por qué?

g. Dibuja otro segmento que conecte ambas rectas, paralelo al eje *y*. ¿Puedes predecir su longitud sin saber las coordenadas de sus extremos? Explica. ¿La ecuación sería útil en esta tarea? ¿por qué?

10. a) En el siguiente plano cartesiano, dibuja una línea paralela a $y = 2x - 5$, que pase por el origen.

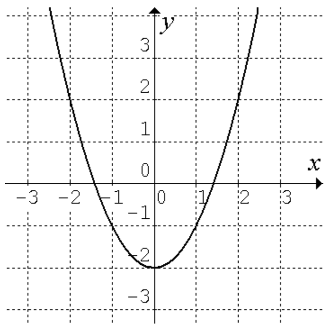


b) Encuentra una ecuación para la recta anterior y escríbela a continuación.

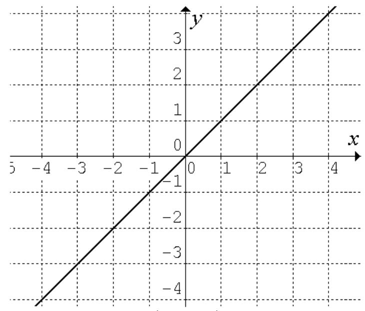
c) En el mismo plano, dibuja una línea paralela a las anteriores, que pase por el punto (1, 4).

d) Encuentra una ecuación para la recta anterior y escríbela a continuación.

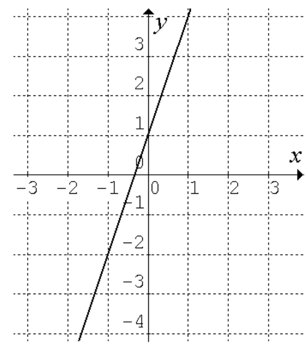
11. Asocia cada ecuación con su gráfica, anotando entre los paréntesis la letra de la ecuación correcta.



(   )



(   )



(   )

A) $y = 3x + 1$

B) $y = -x^2$

C) $y = x - 2$

D) $y = -2x - 3$

E) $y = -3x^2$

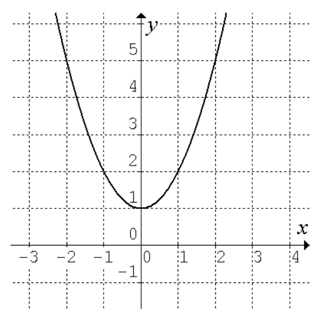
F) $y = x$

G) $y = x^2 - 2$

H) $y = -x + 1$

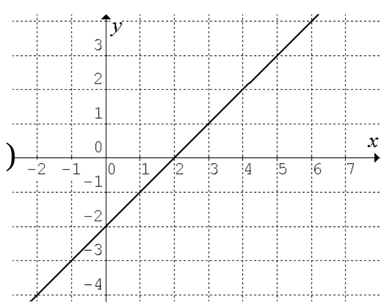
I) $y = x^2 + 1$

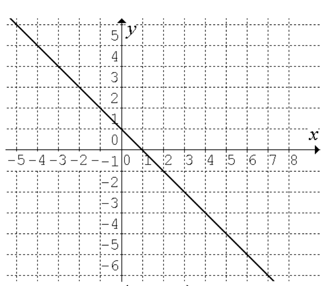
J) $y = 4x + 3$



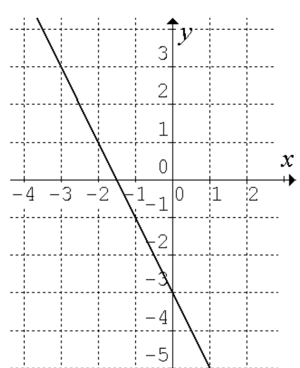
(   )

(   )

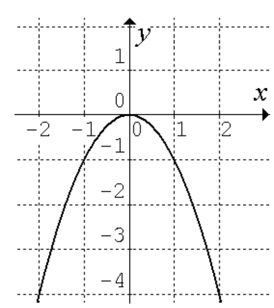




(   )



(   )



(   )

Bibliografía.

Arteaga, C., Santos, M. (1999). Students' understanding of graphical and symbolic representation of functions and its relationships. *Proceedings of the 21st international Conference on Psychology of Mathematics Education*. 2, pp. 524-529.

Atkinson, L. (2002) Where do functions come from? *The College Mathematics Journal*, 33(2), pp. 107-112.

Billings, E., McClure, S. (2005). Mailing a publication: Exploring linear and step funcions in a real-world context. *Mathematics teaching in the middle school*. 10(7), pp. 349-354.

Bransford, J., Brown A., Cocking, R. (1999) The design of learning environments. En Bransford, J., Brown A., Cocking, R. (eds.), *How people learn. Brain, mind, experience and school*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Broekman, H., Scott, H. (1999) Independent/dependent learning is a false dichotomy. *Mathematics in school*. May 1999, pp. 36-37

Brown, J., Collins, A., Duguid, P. (1989). Situated cognition ant the culture of learning. *Educational researcher*. 18 (1), pp. 32-41.

Carranza M., (2002) De la didáctica tradicional al constructivismo. En Anzaldúa R., Ramírez B., *Formación y tendencias educativas*. , México: UAM Azcapotzalco. pp. 211-252.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y educación*. Zaragoza: Edelvives.

Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de las matemáticas modernas*. México: Trillas. pp. 162-168.

Coes, L. (1994). The functions of a toy balloon. *Mathematics Teacher*. 87(8), pp. 619-621.

Davidenko, S., (1997) Buliding the Concept of Function from Student's Everyday Activities. *Mathematics Teacher*. 90(2), pp. 144-149

Davis, J. (2005) Connecting procedural and conceptual knowledge of functions. *Mathematics Teacher*. 99(1), pp. 36-39.

Díaz, F., Hernández, G. (2002) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw-Hill, 2da edición.

Dodge, B. (1995) WebQuests: a technique for Internet-based learning. *Distance Educator*, 1(2). pp. 10-13.

Fernandez, E. (2005) Understanding functions without using the vertical line test. *Mathematics teacher*, 99(2), pp. 96-100.

Goldenberg, P. (1988). Mathematics, metaphors and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7 (2), pp. 135-173.

Granville, W., Smith, P., Longley, W. (1991) *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

Hiebert, J., Carpenter, T. (1992) Learning and teaching with understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: McMillan.

Hines, E. (2002) Developing the concept of linear function: one student's experiences with dynamic physical models. *Journal of Mathematical Behavior*. 20, pp. 337-361.

Hollar, J., Norwood, K. (1999). The effects of a graphing-approach intermediate algebra curriculum on students' understanding of function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30, pp. 220-226.

Kalkman, M., Fuson, K. (2001). Conceptual understanding of functions: a tale of two schemas. *Proceedings of the 23rd international Conference on Psychology of Mathematics Education*. 1, pp. 195-205.

Kaput, J.J. (1992) Technology and mathematics education. En D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research onmathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.

Kleiner, I (1989) Evolution of the Function Concept: A brief survey. *The College mathematics Journal*, 20(4), pp. 282-300.

Kline, M. (1972) *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna. Porqué Juanito no sabe sumar* (pp. 4-20) Siglo XXI.

Kline, M. (1974). *La naturaleza de las matemáticas. Las matemáticas en el mundo moderno. Selecciones de Scientific American*. (pp. 2-5) Madrid: Blume.

Leikin, R., Zaslavsky, O. (1999). Cooperative learning in mathematics. *The Mathematics Teacher*. 92(3), pp. 240-246.

López, E. (2006). Pruebas diagnósticas aplicadas a estudiantes de primer ingreso en el Colegio de Ciencias y Humanidades (sin publicar).

Mason, J., Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*. 28, pp. 135-161.

McGowen M., DeMarois, P., Tall, D. (2000). Using the function machine as a cognitive root for building a rich concept image of the functions concept. *Proceedings of the 22nd international Conference on Psychology of Mathematics Education*. 1, pp. 247-254

Moschkovich, J. (2004). Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use an explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in mathematics*. 55, pp. 49-80.

Moschkovich, J. (1999). Students' use of the *x*-intercept as an instance of a transitional conception. *Educational Studies in mathematics*. 37, pp. 169-197

Moschkovich, J., Schoenfeld, A., Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: on multiple perspectives and representations of linear functions, and connections among them. En T.A. Romberg, E. Fennema y T.P. Carpenter (eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 69-100.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newton, I. (2005) Tratado de Métodos de Series y Fluxiones. En A. Reyes, J. Recio, F. Ruz, T. Reyes, M. Ramírez J. Díaz (eds), *Antología de los Fundamentos Teórico-Metodológicos de las Matemáticas* (sin publicar).

O'Callaghan, B. (1998). Computer-Intensive Algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29, pp. 21-40.

Ocáriz, J. (1997) *El Concepto de Función*. Maestría en Educación Matemática. UACPyP (sin publicar).

Ornelas, C. (1995). *El sistema educativo mexicano: la transición de fin de siglo*. Centro de Investigación y Docencia Económicas, Nacional Financiera, Fondo de Cultura Económica, México.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas* (pp. 70-132) Madrid: Morata.

Pirie, S., Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 23, pp. 505-528.

Ríbnikov, K. (1987) *Historia de las Matemáticas*. Mir Moscú.

Schwartz, J., Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (MAA Notes, Vol. 25), Mathematical Association of America, Washington, DC, pp- 261-289.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y Programas de Estudio. Educación básica. Secundaria*. SEP, México.

Shaaf, W.A. (1930). Mathematics and world history. *Mathematics Teacher*, 23, pp. 496-503.

Shoenfeld, A.H. (1990) GRAPHER: A case study in educational technology, research, and development. En A. diSessa, M. Gardner, J. Greeno, F. Reif, A.H. Shoenfeld, E. Stage (Eds.), *Toward a scientific practice of science education* (pp. 281-300). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sigurdson, S., Olson, A. (1992). Teaching mathematics with meaning. *Journal of Mathematical Behavior*. 11, pp. 37-57.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26(2), pp. 114-145.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: McMillan.

Tall, D., McGowen, M., DeMarois, P. (2000). The function machine as a cognitive root for the function concept. *Proceedings of the 22nd international Conference on Psychology of Mathematics Education*. 1, pp. 255-261.

Universidad Nacional Autónoma de México [UNAM] (s/f). *Programas de Estudio Actualizados*. Colegio de Ciencias y Humanidades. Área de Matemáticas.

Webgrafía

Derisoft. http://www.derive.com/. [Consulta 20/05/2007]

Cabri. http://www.cabri.com/fr/ [Consulta 20/05/2007]

Dodge, B. 1998. WebQuests: a strategy for scaffolding higher level learning. Comunicación presentada en la National Educational Computing Conference, San Diego, 22-24 de junio de 1998. http://webquest.sdsu.edu/necc98.htm. [Consulta 05/12/2006].

Dodge, B. 1999. Selecting a WebQuest project. http://webquest.sdsu.edu/project-selection.html [Consulta 05/12/2006].

Ksoft. http://www8.pair.com/ksoft/ [Consulta 19/05/2007]

March, T. 1998. WebQuests for learning. Why WebQuest? An introduction. <http://www.ozline.com/webquests/intro.html>. [Consulta 05/06/2004].

March, T. 2000. WebQuests 101. *Multimedia Schools*, 7, (5). pp.55-58 <http://www.infotoday.com/MMSchools/oct00/march.htm>. [Consulta 05/06/2004].

Wolfram Research. http://www.wolfram.com [Consulta 19/05/2007]