



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“Transición de fase electrodébil en
presencia de campos hipermagnéticos”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

ANGEL SÁNCHEZ CECILIO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ ALEJANDRO AYALA MERCADO

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. SARIRA SAHU

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. GENARO TOLEDO SANCHEZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La tesis de Angel Sánchez Cecilio es aprobada:

Director de tesis

Fecha

Fecha

Fecha

Fecha

Date

Universidad Nacional Autónoma de México

2007

Transición de Fase Electrodébil en Presencia de Campos Hiper magnéticos

Derechos reservados 2007

por

Angel Sánchez Cecilio

A la memoria de mi padre...

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial al Dr. Alejandro Ayala por haberme aceptado como su estudiante. Por aquel curso tan maravilloso de Física moderna III en donde por primera vez hice contacto con la física de altas energías y que ha sido el parteaguas en mi formación. Por compartir esa visión fenomenológica de la física. Por el entusiasmo puesto en todo momento en este trabajo de tesis. Por el manejo tan equilibrado de la parte académica y la amistad, que han hecho de esta investigación toda una experiencia motivadora para explorar nuevos horizontes. Te agradezco Alejandro por todo el conocimiento que me has transmitido y por todo el apoyo brindado.

A la Dra. Gabriella Piccinelli, por la aportación que ha hecho a este trabajo con su amplio conocimiento de la cosmología. Por sus constantes preguntas, que eventualmente repercutieron de manera importante en este trabajo. Por la paciencia y dedicación durante la génesis de este trabajo. Por la amistad y apoyo que me has brindado en todo este tiempo.

A la Dra. Maria Elena Tejeda, por la hospitalidad brindada recientemente en la estancia de trabajo en la ciudad de Hermosillo, Sonora. Por compartir su amplio conocimiento en teoría de campos, que me ha permitido comprender más a fondo los procesos de renormalización y regularización dimensional.

A los miembros del comité sinodal, Dr. Alejandro Ayala, Dra. Gabriella Piccinelli, Dr. Adnan Bashir, Dr. Alfredo Raya, Dr. Abdel Pérez, Dra. Maria Elena Tejeda y al Dr. Manuel Torres, por su disposición de revisar esta tesis en un período corto de tiempo y haber hecho de manera oportuna, las observaciones y correcciones a este trabajo de tesis.

También quiero agradecer a los miembros de mi comité tutorial, el Dr. Genaro Toledo y el Dr. Sarira Sahu, por haberme brindado parte de su conocimiento de la física de partículas, que igualmente han influido en mi formación.

A mi Familia, a Diana Ivonne por la paciencia, comprensión y cariño que me has dado en todo este tiempo, y que sin ellos, esto no hubiera sido posible. A mis hijos, Eduardo y Miguel Angel, que con sus travesuras e inquietud hacia la vida, le han dado mas vida a mi vida, Gracias familia!!!

A mi madre, por haber sido el motor que nos llevo siempre hacia adelante.

A mis Hermanos, Fabiola, Claudia y Octavio, que han sido la luz en mi camino. Por todo el apoyo y cariño que me han mostrado, y que ha sido muy importante para mi. A mis Sobrinos, Daniel y Angel Jesús, por mostrarme otros aspectos de la vida, que disfruto en su compañía.

A mi nueva familia, a mis suegros, Primitivo Pimentel y Martha Mancilla, por el enorme apoyo que me han brindado y sin el cual la historia sería diferente. También agradezco a Jesús Pimentel, Juana Inés Mancilla, José Luis Pimentel y Lourdes por brindarme su confianza.

A mis amigos, Benjamin Morales, por aquellas tardes de café tan agradable en las escaleras del edificio viejo del ICN, gracias amigo, siempre fue muy agradable tu com-

pañía. A Francisco Felix González, Milton Ruiz y Andrea Gutiérrez, por la amistad que me han brindado y por estar presentes en los momentos mas difíciles.

A los amigos de antaño, Roberto Venegas, Armando Ovalle y Rogelio Cardosa.

Al Posgrado en Ciencias Físicas, en especial al Dr. Manuel Torres, por el apoyo brindado como estudiante de doctorado, y por mantener el alto nivel académico en el posgrado.

A Yanalte Herrero y a Rosa Isela Gallegos por aclararme cada una las dudas en los tramites administrativos, que por lo general eran muchas.

A la Lic. Ofelia Jiménez, a la Lic. Claudia Rodríguez de la unidad administrativa del ICN, por el apoyo y la eficiencia que me brindaron durante mi estancia en el ICN en los diversos tramites de viáticos.

Al Fis. Antonio Ramírez del área de computo del ICN, por el apoyo técnico en los diversos problemas que se me presentaron durante mi estancia en el ICN. Igualmente, al Ing. Luciano Díaz por el soporte técnico brindado recientemente en el aspecto de hardware.

Al personal de limpieza, Bety, América y Fabiola, que día con día se tomaron el tiempo en ordenar el cubo 67 del ICN.

Al Instituto de Ciencias Nucleares, por abrirme sus puertas y brindarme la oportunidad de utilizar sus recursos e instalaciones.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por mantener el alto nivel académico, y ofrecerme la oportunidad de alcanzar mis sueños.

A mi padre, por aquellos momentos que pasamos juntos...

Índice general

Índice de figuras	VII
I Introducción	3
1. Introducción	4
1.1. El problema de la Bariogénesis	4
1.2. Condiciones de Sakharov	6
1.2.1. Violación del número bariónico	6
1.2.2. Violación de las simetrías C y CP	7
1.2.3. Condiciones fuera del equilibrio	8
1.3. Bariogénesis electrodébil	8
1.3.1. Violación del número bariónico	8
1.3.2. Violación de C y CP	11
1.3.3. Condiciones fuera del equilibrio	12
1.4. Campos magnéticos en la transición de fase	16
1.5. Sinopsis del trabajo	17
2. Modelo Estándar Electrodébil	19
2.1. Sector de Higgs	20
2.2. Sector de Fermiones	21
2.3. Sector de Yukawa	22
2.4. Sector de Bosones de Norma	23
2.5. Rompimiento espontáneo de la simetría. Lagrangiano que Fija la Norma	24
3. Partículas en presencia de campos magnéticos	28
3.1. Método del Tiempo Propio de Schwinger	29
3.1.1. Propagador de fermiones cargados en presencia de un campo magnético	29
3.2. Niveles de Landau	36
3.3. Límite de Campo Débil	40

3.4. Derivación Alternativa	42
4. Teoría térmica de campos	46
4.1. Formalismo de Tiempo Imaginario	47
4.1.1. Reglas de Transformación de $T = 0$ a $T \neq 0$	52
4.2. Aproximación HTL	53
4.3. Parámetro de Feynman	57
4.4. Transformada de Mellin	58
II Potencial Efectivo	64
5. Potencial Efectivo	65
5.1. Generalidades	65
5.2. Modelo Estándar Electrodébil	68
5.2.1. Autoenergías del Modelo Estándar	68
5.2.2. Boson de Higgs	69
5.2.3. Bosones de Norma	73
5.2.4. Potencial Efectivo	78
5.2.5. Potencial efectivo de diagramas de anillo	82
5.3. Rompimiento de la Simetría	86
III Conclusiones	89
6. Conclusiones	90
IV Apéndice	94
A. Modelo Estándar Electrodébil:	
Reglas de Feynman	95
A.1. Sector de Higgs	95
A.2. Sector de fermiones	96
A.3. Sector de Bosones de Norma	97
B. Parámetro de Feynman en el límite infrarrojo	98
B.1. Parámetro de Feynman	98
C. Autoenergía de los Bosones de Norma	107
D. Propagador inverso del fermión	109

ÍNDICE GENERAL

VI

Bibliografía

110

Índice de figuras

1.1.	Diagrama de Feynman triangular que da origen a la anomalía axial.	9
1.2.	Estructura del vacío del modelo estándar [14].	10
1.3.	(a) Transición de fase de primer orden. A la temperatura crítica T_c , se desarrolla una barrera de potencial entre ambos mínimos, dando origen a un cambio discontinuo en el parámetro de orden. (b) Transición de fase de segundo orden. A la temperatura crítica T_c no se desarrolla la barrera de potencial, por lo que la transición es continua [8].	13
1.4.	Nucleación de burbujas de verdadero vacío. Dentro de las burbujas el valor de expectación del vacío $v \neq 0$ (fase rota), fuera de éstas $v = 0$ (fase simétrica).	14
2.1.	Potencial del modelo de Higgs Abelian, para $\mu > 0$ y $\lambda > 0$	25
3.1.	Contorno de integración en el plano s complejo para el cálculo de la integral del tiempo propio que representa los propagadores de partículas cargadas en presencia de un campo magnético.	37
4.1.	Diagrama de Feynman asociado con la energía libre de un gas de bosones escalares.	51
4.2.	Diagrama de Feynman en una teoría $\lambda\phi^3$	54
4.3.	Trayectoria general sobre la cual se toma el límite de momento externo yendo a cero $p^\mu \rightarrow 0$. La manera en la que el cuádrimomento externo se aproxima al origen determina una situación física muy particular.	56
4.4.	Contorno de integración, que consiste en un semicírculo que encierra los polos de la función $\Gamma(\sigma - t - p/2 - d/2 - a)$ con $\gamma = 2\sigma - 2t - d - 2a$	62
5.1.	El potencial efectivo a 1-loop, consiste en una resumación de diagramas irreducibles de una partícula, con patas externas de momento cero. La expansión diagramática mostrada es para una teoría $\lambda\phi^3$	67

5.2. Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía del campo de Higgs. Las partículas del loop que se ven afectadas por la presencia del campo hipermagnético externo se muestran con línea doble. ϕ_i denotan las componentes del doblete de campos escalares complejos, ψ representa a los fermiones y c representa a los campos fantasmas. A_μ^a y B_μ son los campos de norma de $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. 69

5.3. Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía de los campos de norma A_μ^a y B_μ , de $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. Las partículas del loop que se ven afectadas por la presencia del campo hipermagnético externo son aquellas con línea doble. ϕ_i denotan las componentes del doblete de Higgs, ψ representa a los fermiones y c los campos fantasmas. 74

5.4. Representación esquemática de los diagramas de anillo, los cuales consisten en una resumación de diagramas con inserciones sucesivas de autoenergías en las burbujas de vacío de la energía libre. 82

5.5. V_{eff} como función de v/T para diferentes valores de la temperatura con $H = 0$. La simetría se rompe a medida que la temperatura disminuye al pasar de T_1 a T_2 : el potencial efectivo desarrolla un mínimo secundario, el cual eventualmente se degenera con el original a una cierta temperatura crítica $T_c^0 < T_1 < T_2$. Justo en este instante ocurre la transición de fase. Para este análisis se usó $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91$ GeV, $m_W = 80$ GeV, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$ 87

5.6. V_{eff} como función de v/T para T constante y diferentes valores de $H = h(100 \text{ GeV})^2$ con $h_1 = 0$, $h_2 = 0,03$ y $h_3 = 0,06$. La temperatura T se eligió tal que coincidiera con la temperatura crítica del caso con $h = 0$. A medida que la intensidad del campo se incrementa, la temperatura para la transición disminuye. Esto favorece valores más grandes para el cociente $\langle v \rangle / T_c$. Para este análisis se usó $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91$ GeV, $m_W = 80$ GeV, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$ 88

5.7. V_{eff} como función de v/T para diferentes intensidades de campo hipermagnético $h_3 > h_2 > h_1$, cada uno a su correspondiente temperatura crítica $T_c(h_3) < T_c(h_2) < T_c(h_1)$, con $H = h(100 \text{ GeV})^2$. A medida que la intensidad del campo se incrementa, la barrera del campo entre los dos mínimos también aumenta y además el valor del cociente $\langle v \rangle / T$ también aumenta. Para este análisis se usó $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91$ GeV, $m_W = 80$ GeV, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$ 88

Resumen

Uno de los grandes retos de la física contemporánea es explicar por qué en el universo no existe la misma cantidad de materia y antimateria, el problema de bariogénesis. La manera más natural con la que se ha enfrentado este problema es considerar que esta asimetría ha sido el resultado de procesos dinámicos que ocurrieron a lo largo de la evolución del universo. Para la generación dinámica de la asimetría de materia, es necesario satisfacer las condiciones de Sakharov: 1) Violación del número bariónico, 2) Rompimiento de las simetrías C y CP , y 3) condiciones fuera del equilibrio. En el marco del modelo estándar electrodébil, cada una de estas condiciones se satisface, aunque las dos últimas sea parcialmente, de manera que sólo este marco teórico no es suficiente para explicar el problema de la asimetría de materia y antimateria en el Universo. Sin embargo la propuesta de incluir campos magnéticos durante la transición de fase electrodébil revivió la posibilidad de una bariogénesis basada en el modelo estándar

En este trabajo de tesis, estudiamos el fenómeno del rompimiento de la simetría en el modelo estándar durante la transición de fase electrodébil en la presencia de un campo hipermagnético constante. Calculamos el potencial efectivo a temperatura finita incluyendo las contribuciones de los llamados diagramas de anillo en el límite de campo débil y alta temperatura. Mostramos que bajo estas condiciones, la transición de fase se vuelve mas fuertemente de primer orden. Esto puede tener implicaciones para la descripción de la bariogénesis en el modelo estándar.

Abstract

One of the outstanding problems in cosmology is the explanation of the asymmetry between matter and antimatter, the baryogenesis problem. The most natural way to study this problem is to consider that this asymmetry results as a consequence of dynamical processes that took place during the evolution of the Universe.

In order to have a dynamical scenario to explain this asymmetry it is necessary to satisfy the three Sakharov conditions: 1) baryon number violation breaking of the C and CP symmetries, and 3) Out of equilibrium conditions. Each one of these conditions is satisfied in the electroweak standard model, although the last two are satisfied only partially. This makes this model insufficient to explain the asymmetry between matter and antimatter in the Universe. However, the idea to include magnetic fields during the development of the electroweak phase transition revived the possibility to embed baryogenesis in the standard model.

In this thesis, we study the symmetry breaking phenomenon in the standard model during the electroweak phase transition in the presence of a constant hypermagnetic field. We compute the finite temperature effective potential up to the contribution of ring diagrams in the weak field, high temperature limit and show that under these conditions, the phase transition becomes stronger first order. The above can have consequences for the description of baryogenesis in the standard model.

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Introducción

1.1. El problema de la Bariogénesis

Para entender la historia del universo en etapas muy tempranas es necesario comprender a las partículas elementales y sus interacciones. Para tener una idea más precisa, imagínese que se tiene un contenedor absolutamente vacío, y se comienza a calentarlo gradualmente. Al principio, dentro del contenedor aparecen los fotones, y a medida que se incrementa la temperatura, la densidad de fotones de cuerpo negro (y energía) también se incrementa. Una vez que hemos alcanzado una temperatura alrededor de 1 MeV ¹, los fotones tienen la energía suficiente para producir pares de electrones-positrones (e^+e^-).

A temperaturas aún más altas, del orden de 50 MeV , algunos fotones tienen la energía suficiente para producir otro tipo de pares de partículas, los piones ($\pi^+\pi^-$), formados por quarks y gluones. A medida que la temperatura continúa elevándose, la densidad de piones aumenta hasta el punto que la cantidad de piones es tan grande que el choque entre dos de ellos los “rompe”, liberando así a sus constituyentes; esto sucede a una temperatura del orden de 200 MeV .

A temperaturas mucho más altas, del orden de 100 GeV , el vacío está tan caliente que todas las partículas en el contenedor pierden sus masas “liberando” a otras partículas (“grados de libertad”). Al continuar el proceso de calentamiento, la temperatura llegará a ser semejante a la del *Big Bang* en donde comenzó el universo, pero ahí no sabemos que ocurre.

Esta es una descripción hacia atrás en el tiempo, que resume gran parte del conocimiento adquirido en el último siglo en las áreas de la física de partículas y la cosmología, que nos ayuda a comprender, hasta cierto punto, procesos que sucedieron en etapas tempranas del universo.

¹Para tener idea $20^\circ\text{C} \sim (1/40) \text{ eV}$

Si ahora pensamos en el proceso inverso esbozado en la descripción anterior, tenemos la evolución del universo a medida que éste se fue enfriando y nos encontramos con un problema muy serio pues, no debería haber nada en el universo actual, y sin embargo, hay leptones (e^- , $\mu^- \dots$) y bariones (*protones, neutrones*, etc). El problema no es tanto que estén éstas partículas, sino que sus antipartículas no estén en el universo en la misma proporción. A este problema se le conoce como el problema de la bariogénesis.

Las diversas observaciones a diferentes escalas, indican la ausencia de antimateria en el universo. A la escala más pequeña, la ausencia de procesos de aniquilación $p + \bar{p} \rightarrow \gamma + \gamma$ es evidente, pues no se observa un flujo continuo de rayos γ consistente con el anterior proceso; de este hecho experimental se concluye que a la escala humana no hay antimateria.

Más allá de la escala humana, a la escala del sistema solar, las sondas y satélites indican que éste está constituido del mismo tipo de materia de la que estamos hechos nosotros.

Para determinar si existe antimateria a la escala de nuestra galaxia, se observa a los rayos cósmicos que provienen de los confines de la galaxia. Es ahí en donde por primera vez observamos antiprotones fuera de los aceleradores de partículas. Sin embargo, la fracción de antiprotones observada coincide con la del proceso $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$ que tiene lugar en las capas altas de la atmósfera, y por lo tanto su origen no es primordial.

Más allá de esta escala, en cúmulos de galaxias, la coexistencia de galaxias de materia y antimateria daría origen a un fondo detectable de rayos γ , producto de los procesos de aniquilación de materia y antimateria.

Este conjunto de observaciones pone de manifiesto la ausencia de antimateria en el universo e impone una cota para la asimetría actual de materia y antimateria. Por otro lado, mediante el uso del modelo cosmológico estándar, es posible cuantificar la asimetría de materia del universo, ello se hace mediante el parámetro

$$\eta_B = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s}, \quad (1.1)$$

en donde n_b y $n_{\bar{b}}$ son el número de bariones y antibariones respectivamente, y s es la densidad de entropía. Este número corresponde al número bariónico neto en un volumen comóvil, el cual se conserva en ausencia de procesos que violan número bariónico [1].

Una estimación cuantitativa del valor del parámetro η_B se obtiene de comparar las abundancias de los elementos químicos ligeros predichas por la nucleosíntesis (que dependen sólo de η_B) con aquellas determinadas de manera observacional. Por consistencia entre teoría y observación, η_B debe hallarse en el rango [2]

$$4,8 \times 10^{-11} \leq \eta_B \leq 9,8 \times 10^{-11}. \quad (1.2)$$

Por otro lado, mediciones de $\Omega_B h^2$, con Ω_B la densidad de bariones y h la tasa de expansión de Hubble del universo normalizada al presente, del satélite WMAP

(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) se traducen en un valor de $\eta_B = 8,7 \times 10^{-11}$ [1, 2].

Esta conexión entre la física de partículas y la cosmología ha sido ampliamente explorada, ya que por un lado, el modelo cosmológico estándar provee un escenario en el cual las predicciones sobre la génesis de materia de la física de partículas pueden ponerse a prueba. Y a la inversa, la cosmología estándar hace uso de las predicciones de la física de partículas sobre la naturaleza y el comportamiento de las partículas, a fin de corregir problemas cosmológicos aún no resueltos en la evolución del universo.

1.2. Condiciones de Sakharov

La manera más natural de enfrentar el problema de la asimetría de materia del universo es pensar que fue generada dinámicamente, es decir, que es el producto de diversos procesos físicos que ocurrieron a lo largo de su evolución y que lo llevaron de un estado inicialmente simétrico de materia y antimateria a uno asimétrico.

El mecanismo de creación de asimetría bariónica depende del modelo de partículas empleado, pero todos deben cumplir con las siguientes reglas para una generación dinámica de la asimetría bariónica

1. Violación del número bariónico.
2. Rompimiento de la simetría entre partículas y antipartículas.
3. Condiciones fuera del equilibrio térmico.

Estas reglas fueron establecidas por Sakharov [3] en 1964 y representan las condiciones generales para la generación de la asimetría bariónica. Cada una de estas condiciones se detalla a continuación.

1.2.1. Violación del número bariónico

Una condición necesaria para la generación de número bariónico es la existencia de procesos donde este número no se conserve. De primeros principios, no existe una razón para que este número se mantenga constante. Aún así, experimentalmente no existe evidencia de la violación de número bariónico. Los límites experimentales de la vida media del protón están por encima de $\tau_p \gg 10^{30}$ años [4]. Esto ha propiciado que modelos en donde el decaimiento del protón surge naturalmente, como las teorías de gran unificación (GUT'S) no hayan tenido tanto éxito.

La única evidencia experimental en favor de la no conservación del número bariónico es el propio universo, pues de lo contrario no habría nada en éste; entonces, la carga bariónica no se conserva.

Esta violación también existe en teorías como en el Modelo Estándar (ME); más adelante se verá en detalle como sucede esta violación de número bariónico.

1.2.2. Violación de las simetrías C y CP

A mediados de la década de 1950, se creía que las leyes de la física eran simétricas respecto a la paridad P (inversión espacial), conjugación de carga C (transición de partículas a antipartículas) y T (inversión temporal), pues son simetrías de la teoría que relacionan partículas y antipartículas. Pero en contraste con la no conservación del número bariónico, la violación de las simetrías P , C y CP , son hechos experimentales descubiertos en decaimientos de partículas.

A lo largo de la evolución de las ideas de la física de partículas se han hecho diversos intentos por preservar la simetría entre partículas y antipartículas, en el sentido que para procesos que producen partículas debían existir sus contra partes que producen a las antipartículas. Landau [5] sugirió que la simetría compuesta CP , debía ser la simetría de la naturaleza. Sin embargo, en 1964 se descubrió experimentalmente en el sistema de kaones neutros que esta simetría también está rota [6].

Ahora, para ilustrar por qué es necesaria la violación de las simetrías C y CP para la bariogénesis, tomemos un ejemplo simple: el decaimiento de una partícula supermasiva X y su correspondiente antipartícula \bar{X} , tal que cada una de éstas producen un número bariónico neto [1], esto es

$$\begin{aligned} B_X &= \alpha \left(\frac{2}{3}\right) + (1 - \alpha) \left(\frac{1}{3}\right) = \alpha - \left(\frac{1}{3}\right) \\ B_{\bar{X}} &= \bar{\alpha} \left(\frac{2}{3}\right) + (1 - \bar{\alpha}) \left(\frac{1}{3}\right) = -\bar{\alpha} + \left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

El número bariónico neto, producido por el decaimiento de X y \bar{X} , es

$$B = B_X + B_{\bar{X}} = (\alpha - \bar{\alpha}). \quad (1.4)$$

Por lo tanto si C y CP se conservan, $\alpha = \bar{\alpha}$ y entonces el número bariónico neto es cero.

En el fondo, las simetrías C y CP nos dicen que el número de procesos que produce un exceso de bariones es igual al número de procesos complementarios que producen antibariones, i.e, ambos procesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, lo cual deja de ser cierto cuando las simetrías están rotas, que es justo lo requerido para generar una asimetría.

Otra manera de llegar a la misma conclusión es la siguiente: el efecto de las simetrías C y CP sobre un estado bariónico es $C, CP|B\rangle = -|B\rangle$. Por lo tanto, si el universo comienza en un estado simétrico de materia y antimateria (C y CP invariante), éste no podrá evolucionar a un estado con número bariónico diferente de cero, a menos que en alguna etapa de su evolución las simetrías C y CP se hayan roto.

1.2.3. Condiciones fuera del equilibrio

Un sistema en equilibrio térmico es, por definición, un estado que no evoluciona en el tiempo. Entonces, si el universo comenzó en un estado sin carga bariónica, ésta permanecerá constante en el tiempo, independientemente si hay o no violación de las simetrías C y CP [7].

Por lo tanto, el universo al expandirse no puede considerarse en un equilibrio térmico perfecto, pero si muy cercano a éste, pues la tasa de interacción entre sus partículas es mucho mayor que la tasa de expansión del universo.

Analíticamente esto se demuestra de la siguiente manera: considérese un sistema en equilibrio térmico a una cierta temperatura T , entonces el valor esperado de número bariónico B es

$$\langle B \rangle = Tr [e^{-\beta H} B]. \quad (1.5)$$

Por otro lado, se sabe que el efecto de la simetría CPT es transformar partículas en antipartículas, de modo que $CPT|B\rangle = -|B\rangle$. Por tanto, al introducir la unidad en la Ec. (1.5), se tiene

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= Tr [(CPT)(CPT)^{-1}e^{-\beta H} B] \\ &= Tr [e^{-\beta H}(CPT)^{-1}B(CPT)] \\ &= -Tr [e^{-\beta H} B], \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde se ha usado que CPT es una cantidad conservada (entonces conmuta con H) y la propiedad cíclica de la traza. Como puede observarse, en equilibrio térmico $\langle B \rangle = 0$, y por lo tanto en equilibrio térmico no hay posibilidad de generar una asimetría bariónica [8].

1.3. Bariogénesis electrodébil

Uno de los modelos más ampliamente usados para la generación de número bariónico es el modelo estándar electrodébil, pues éste satisface cada una de las condiciones de Sakharov. A continuación se discute la manera en que las satisface.

1.3.1. Violación del número bariónico

En el modelo estándar electrodébil, el número bariónico y fermiónico, se conservan a nivel clásico, esto es

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_B^\mu &= \sum_{quarks} \partial_\mu (\bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i) = 0, \\ \partial_\mu J_L^\mu &= \sum_{leptones} \partial_\mu (\bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i) = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

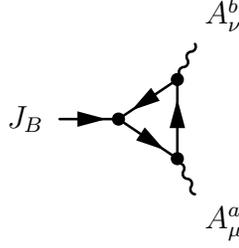


Figura 1.1: Diagrama de Feynman triangular que da origen a la anomalía axial.

donde J_B^μ y J_L^μ son las corrientes bariónica y leptónica.

El número bariónico (leptónico) en la teoría electrodébil no se conserva debido a la llamada anomalía axial. Ésta es una corrección cuántica (véase la Fig. 1.1) que destruye las leyes de conservación de la Ec. (1.7) [9, 10], que ahora en lugar de ser cero, son

$$\partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = \frac{n_f}{32\pi^2} \left(g^2 \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} - g'^2 F'^{\mu\nu} \tilde{F}'_{\mu\nu} \right), \quad (1.8)$$

donde n_f es el número de familias en el modelo estándar y, $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ y $F'^{\mu\nu}$ son los tensores de intensidades de los campos de norma de $S(2)$ y $U(1)$ respectivamente. El tensor dual se define como

$$\tilde{F}'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} F'_{\rho\alpha}, \quad (1.9)$$

y análogamente para $\mathbf{F}^{\mu\nu}$. Nótese que la simetría $B + L$ se viola mientras que la simetría $B - L$ se conserva, es decir, por cada barión creado, se creará un leptón en el caso $n_f = 1$.

Esta violación está asociada básicamente a la estructura topológica del vacío del sector no Abeliano $SU(2)_L$ del modelo estándar electrodébil [11]. Para analizar la estructura del vacío de $SU(2)_L$, nótese que el lado derecho de la Ec. (1.8) puede escribirse en términos de la cuadi-divergencia del vector

$$K^\mu = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\mathbf{F}_{\nu\alpha} \cdot A_\beta - \frac{g}{3} \epsilon_{abc} A_\nu^a A_\alpha^b A_\beta^c \right) \quad (1.10)$$

en términos de éste vector, la Ec. (1.8) es

$$\partial_\mu K^\mu = \frac{g^2}{32\pi^2} \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

donde se ha omitido el sector $U(1)$ y se ha tomado $n_f = 1$.

Usualmente, la derivada total desaparece por integración por partes y condiciones de frontera. Sin embargo, esto no es cierto para K^μ [12], pues si bien $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ se anula en infinito, ello no necesariamente implica que los campos A_μ^a también lo hagan. Esto indica que la estructura de vacío no sólo es la ya conocida, $A_\mu^a = 0$ [13], sino que hay

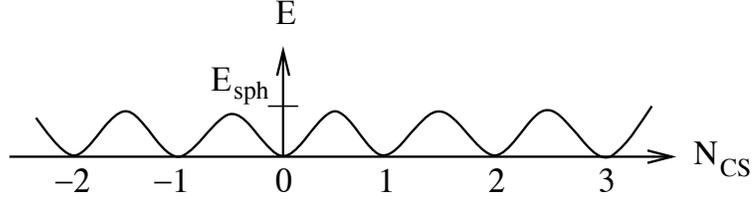


Figura 1.2: Estructura del vacío del modelo estándar [14].

un número infinito de configuraciones, ya que mediante transformaciones de norma, es posible tener un número infinito de campos A_μ^a que satisfacen la misma condición $\mathbf{F}^{\mu\nu} = 0$. Por lo tanto, lo que tenemos es una teoría que posee un número infinito de vacíos, los cuales difieren por la carga obtenida de K^0 [12], la que es un índice topológico que etiqueta a cada vacío, definido como

$$N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \partial_\mu K^\mu \quad (1.12)$$

y es mejor conocido como índice de Chern-Simons (CS).

En una familia de configuraciones estáticas de campos, con una variación continua en el índice de Chern-Simons, sólo para aquellas configuraciones de campo con intensidad cero y energía cero (vacío), el índice de CS tomará valores enteros [14], tal como se muestra en la Fig. 1.2.

Ya que cada mínimo de la Fig. 1.2 es un vacío permitido de la teoría, existe la posibilidad, a nivel cuántico, de pasar de uno a otro mínimo por medio de tunelaje. La amplitud de tunelaje entre vacíos cercanos, en la aproximación semiclásica, se determina por medio de los llamados instantones [11]. El punto más importante de todo esto es que al cambiar de un vacío a otro por tunelaje, el número de CS cambia y se genera número bariónico.

Sin embargo, la amplitud de tunelaje entre dos mínimos es [15]

$$\Gamma_{sph} \sim \exp(-E_{sph}) \sim e^{-4\pi/\alpha_W} \sim \mathcal{O}(10^{-173}) \quad (1.13)$$

donde E_{sph} es la altura de la barrera de energía entre los diferentes vacíos ($\propto 1/\alpha_W$). Como puede verse, los procesos de tunelaje están muy suprimidos, y esa es la principal razón por la que en un principio la violación de B por la anomalía axial no fuese considerada.

En un baño térmico esta situación cambia, pues a altas temperaturas ($T_{EW} \sim 100$ GeV), las transiciones entre los diferentes vacíos puede llevarse a cabo a través de fluctuaciones térmicas que pasan por encima de la barrera [15]. A éstas temperaturas, el factor de supresión exponencial de la Ec. (1.13) se vuelve menos relevante y entonces los procesos que violan número bariónico ocurren a una tasa más elevada.

A altas temperaturas, la transición entre los diferentes mínimos se lleva a cabo por medio del llamado *sphaleron* [16] (del griego “listo para caer”). El sphaleron es la solución estática e inestable de las ecuaciones de campo. La configuración de sphaleron se localiza en el punto de máxima energía entre dos vacíos, y es en ese sentido que es inestable².

Por debajo de la temperatura de la transición de fase electrodébil, $T < T_{EW}$, la amplitud de transición de un sphaleron es [17]

$$\Gamma_{sph}^T \sim e^{-M_W/\alpha_W T}, \quad (1.14)$$

donde M_W es la masa del bosón de norma W y $\alpha_W = g^2/4\pi$ con g la constante de acoplamiento de $SU(2)_L$. Por otro lado, para temperaturas por encima de la temperatura de la transición de fase electrodébil, $T > T_{EW}$, en la fase simétrica, la amplitud de transición es [8, 18]

$$\Gamma_{sph}^T \sim \alpha_W^5 \ln \alpha_W^{-1} T^4, \quad (1.15)$$

Como se observa la amplitud de transición en este caso aumenta, y en consecuencia, los procesos que violan número bariónico no están suprimidos.

Sin embargo, las transiciones entre estos mínimos por procesos de sphaleron son aleatorias, de manera que así como inducen número bariónico neto, también lo borran. Por lo tanto, es necesario tener un mecanismo que permita que haya una dirección preferencial. Esto se logra con la segunda condición de Sakharov.

1.3.2. Violación de C y CP

En el modelo estándar electrodébil, la violación de C es máxima, debido a la naturaleza $V - A$ del acoplamiento entre los fermiones presentes en el modelo y los bosones de $SU(2)_L$. Además, la simetría CP no es una simetría exacta en las interacciones débiles, pues ésta no se conserva en los sistemas de mesones K y B [19].

La violación de CP en el ME se introduce por medio de una matriz de masas compleja de quarks y leptones, conocida como la matriz CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa).

La matrix CKM se obtiene del lagrangiano de Yukawa, esto es

$$\mathcal{L}_Y = \frac{f_{ij}}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j + h.c \quad (1.16)$$

donde f_{ij} en general no es diagonal en la base de los estados de sabor. No obstante, es posible, mediante transformaciones unitarias, diagonalizar la matriz de masa de los quarks. En el caso de las tres familias de quarks del ME, esto es

$$\begin{aligned} \text{diag}(m_u, m_c, m_t) &= V_L^u M^u V_R^u \\ \text{diag}(m_d, m_s, m_b) &= V_L^d M^d V_R^d, \end{aligned} \quad (1.17)$$

²El análogo clásico de ésta configuración es un péndulo invertido.

A partir de las transformaciones U_L^u y V_L^d que diagonalizan a la matriz de masas; la matriz CKM se define como $K_{CKM} \equiv V_L^u (V_L^d)^\dagger$. Para tres familias de fermiones, la matriz unitaria K_{CKM} puede ser parametrizada en términos de 3 ángulos y 6 fases. De las 6 fases, 5 pueden ser absorbidas en las funciones de onda de los quarks, y por lo tanto la fase restante es responsable de la violación de CP en el ME³. Cabe mencionar que para dos familias de quarks, no es posible la violación de CP porque cualquier fase en la matriz de masas puede ser absorbida por las funciones de onda de los quarks [20].

Sin embargo, esta fuente de violación de CP no es suficiente para explicar la asimetría bariónica de la Ec. (1.1), pues de acuerdo al análisis de Shaposhnikov [21], a la temperatura de la transición de fase electrodébil, la asimetría generada va como

$$\eta_B \simeq \frac{\delta_{CKM}}{T_{EW}^{12}}, \quad (1.18)$$

donde δ_{CKM} es el determinante de la matriz CKM que cuantifica la violación de CP . En el ME, a la temperatura de la transición de fase, la combinación anterior tiene un valor aproximado de [15, 20]

$$\eta_B \sim 10^{-20}, \quad (1.19)$$

la cual es muy pequeña en comparación con la requerida por la nucleosíntesis (véase Ec. (1.2)).

Esta es una de las principales razones por las cuales el ME ya no ha sido considerado como un modelo que lleva a una bariogénesis exitosa. De ahí que hayan tomado más relevancia otros modelos en donde se introducen más dobletes de Higgs [22] que aumentan la violación de CP , o modelos más allá del modelo estándar, como la supersimetría [23], etc. Sin embargo, el uso del ME no está del todo descartado en cuanto a la violación de CP , pues como se ha mostrado en las Refs. [24, 25, 26], una violación adicional de CP puede ser obtenida mediante la segregación de carga axial inducida por la presencia de un campo hipermagnético externo. Esta segregación se da durante la transmisión y reflexión de fermiones quirales en las paredes de las burbujas de vacío ($v \neq 0$), y se debe básicamente a la naturaleza quiral del acoplamiento del campo hipermagnético externo con los fermiones. Para más detalles véase la Ref. [26].

1.3.3. Condiciones fuera del equilibrio

Uno de los logros de la teoría cuántica de campos aplicada a diversos modelos de la física de partículas ha sido mostrar que las constantes de interacción entre las partículas, no son constantes y que por el contrario éstas varían con la energía. Un ejemplo muy dramático es el caso de la QCD, en donde a bajas energías el acoplamiento de las partículas es $\alpha_{QCD} \sim 1$ y a energías del orden de $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ $\alpha_{QCD} \ll 1$ [27].

³La fase en la matriz CKM rompe la invariancia del lagrangiano bajo CP pues $K_{CKM} \neq K_{CKM}^*$.

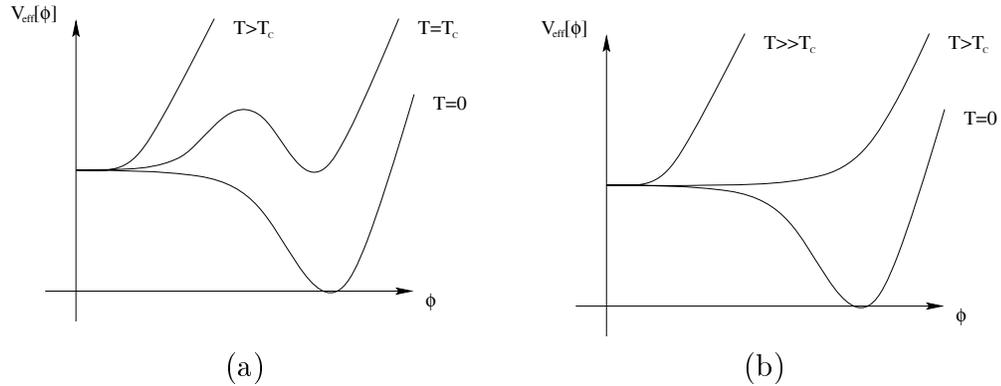


Figura 1.3: (a) Transición de fase de primer orden. A la temperatura crítica T_c , se desarrolla una barrera de potencial entre ambos mínimos, dando origen a un cambio discontinuo en el parámetro de orden. (b) Transición de fase de segundo orden. A la temperatura crítica T_c no se desarrolla la barrera de potencial, por lo que la transición es continua [8].

Esta variación de las constantes de acoplamiento con la energía ha motivado una serie de experimentos en aceleradores de partículas para descubrir un nuevo estado de la materia, el llamado plasma de quarks y gluones (QGP por sus siglas en inglés), mediante la colisión de iones pesados a altas energías. Este es un ejemplo claro de una transición de fase (TF) en la física de partículas [28], en donde inicialmente se tiene un estado hadrónico (de quarks confinados) y al aumentar la energía, el estado cambia a la configuración donde estos quarks están libres, el QGP.

Por otro lado, de la cosmología estándar se sabe que el universo comenzó en una gran explosión, y al evolucionar, éste se fue expandiendo y enfriando paulatinamente. Al mismo tiempo, a escalas más pequeñas, la intensidad de la interacción entre las partículas también se fue modificando, y al igual que el QGP; ello hace pensar que el universo, eventualmente, atravesó por alguna transición de fase. La manera en que sucede una transición de fase depende del modelo de partículas empleado en la descripción del universo. En el caso muy concreto de emplear el modelo estándar electrodébil, la transición de fase por la que atravesó el universo, a una temperatura $T \sim 100$ GeV, recibe el nombre de transición de fase electrodébil (TFED) y consiste en ir de un estado en donde las partículas no tienen masa a otro en donde éstas se vuelven masivas.

Esta transición de fase en particular, resulta ser muy importante para el problema de la bariogénesis, pues a la temperatura de la TFED, la tasa de procesos de sphaleron que violan número bariónico aumenta considerablemente. Sin embargo, para satisfacer la tercera condición de Sakharov es necesario que la TFED sea de primer orden, pues

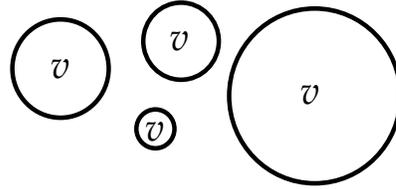


Figura 1.4: Nucleación de burbujas de verdadero vacío. Dentro de las burbujas el valor de expectación del vacío $v \neq 0$ (fase rota), fuera de éstas $v = 0$ (fase simétrica).

es en ese tipo de TF en donde la variación discontinua del parámetro de orden (en este caso el valor de expectación del campo de Higgs en el vacío, v), provee las condiciones fuera del equilibrio. Cabe mencionar que en una transición de fase de segundo orden, el parámetro de orden no cambia de manera discontinua, por lo que la transición de un estado a otro sucede tan “suavemente”, que el equilibrio térmico no se ve tan afectado, y por lo tanto no se produce la asimetría bariónica requerida [8].

Para saber si la TFED fue de primer o de segundo orden, hay que calcular el potencial efectivo a temperatura finita como función del valor esperado v del Higgs. En la Fig 1.3 se muestran los dos posibles comportamientos del potencial durante la transición de fase. En una transición de fase de 1er orden, el potencial efectivo desarrolla una barrera que separa a la fase rota ($v \neq 0$) de la simétrica ($v = 0$). A la temperatura crítica ambas fases poseen la misma energía de manera que el paso de una fase a otra se lleva a cabo mediante tunelaje. En el caso de una transición de fase de 2o. orden, la barrera no se desarrolla, por lo que las transiciones entre los puntos extremos del potencial se llevan a cabo por “rodamiento clásico”.

En una transición de fase de primer orden, alrededor de la temperatura crítica, se comienzan a crear burbujas de verdadero vacío ($v \neq 0$) dentro del mar de falso vacío ($v = 0$), pero al principio, la competencia entre la energía volumétrica y superficial hace que las burbujas se creen y desaparezcan aleatoriamente. Una vez que la temperatura ha descendido un poco más, las burbujas creadas logran alcanzar un tamaño suficiente como para comenzar a expandirse y chocar unas con otras, de modo que cuando este proceso llena todo el espacio, la transición de fase se ha completado.

No obstante que se satisface la condición fuera del equilibrio por este mecanismo de nucleación de burbujas y se genera asimetría bariónica por procesos de sphaleron, una vez que termina la transición de fase, las condiciones de equilibrio se restauran, pero los procesos de sphaleron continúan, de modo que cualquier asimetría generada durante la transición de fase puede borrarse, a menos que una vez que termine la transición de fase, los procesos del sphaleron sean más lentos que la tasa de expansión del universo [7].

Por un lado, se sabe que a bajas temperaturas ($T < T_c$), la tasa de los procesos que violan número bariónico por unidad de volumen depende de la energía del sphaleron y la temperatura, esto es [7, 29]

$$\Gamma_{sph}^T = \mu \left(\frac{M_W^3}{\alpha_W T} \right) M_W^4 e^{-\frac{E_{sph}}{T}}, \quad (1.20)$$

donde μ es una constante adimensional y $E_{sph} = M_W^2/\alpha_W$.

Por otro lado, la tasa de expansión del universo es [29]

$$H \sim \frac{g_*^{1/2} T^2}{m_{Pl}}, \quad (1.21)$$

donde g_* es el número efectivo de grados de libertad y m_{Pl} la masa de Planck.

Por lo tanto, comparando la tasa de los procesos de sphaleron con la tasa de expansión del universo, se puede llegar a establecer una cota que garantiza que el número bariónico no se borre:

$$\frac{E_{sph}(T_{nucl})}{T_{nucl}} > A; \quad \text{con } A = 35 - 45. \quad (1.22)$$

T_{nucl} es la temperatura en donde comienza la nucleación de burbujas y es el momento en que el proceso de borrado ocurre con mayor intensidad [29]. La temperatura T_{nucl} no es la misma que la temperatura crítica T_c , pues como se dijo, la nucleación empieza a una temperatura más baja que T_c .

La condición de la Ec. (1.22), haciendo algunas aproximaciones como $M_H \sim M_W \approx gv$ y $T_{nucl} = T_c$, puede escribirse en términos del parámetro de orden v a la temperatura crítica como sigue [14, 29]

$$\left(\frac{v}{T} \right)_{min} \sim 1,0 - 1,5, \quad (1.23)$$

en donde el cociente v/T es una medida de la intensidad de la transición de fase [14]. Aunque la condición anterior es un estimado que surge de un cálculo aproximado, ésta es ampliamente aceptada [8, 13, 30].

En el caso del ME, la estimación del cociente v/T se realiza mediante el potencial efectivo a la temperatura crítica, es decir, cuando los dos mínimos están degenerados ($V'(\phi)|_{T_c} = 0$), y el valor máximo que se encuentra para este cociente es 0.55 con una masa de Higgs $m_H = 0$. A medida que la masa del Higgs se incrementa, la transición se vuelve más débilmente de primer orden hasta el punto que, para una masa del Higgs $m_H \approx 72$ GeV, la transición de fase se vuelve de segundo orden [31]. Esta propiedad de los sphalerones hace que la preservación de cualquier asimetría bariónica sea una de las condiciones más difíciles de satisfacer, no sólo por el ME electrodébil, sino por la mayoría de los escenarios propuestos para la bariogénesis.

No obstante, la incorporación de campos magnéticos externos al escenario de la bariogénesis ha sido estudiado en los últimos años, pues se ha mostrado que este ingrediente puede aumentar el orden de la transición de fase. En la siguiente sección se muestra los puntos más importantes de estos trabajos.

1.4. Campos magnéticos en la transición de fase

Tal como se ha visto en las secciones anteriores, en el marco teórico del ME, las condiciones de Sakharov se satisfacen parcialmente, esto es:

1. La violación de CP del sector CKM es $\eta_B \sim 10^{-20}$, pero nucleosíntesis requiere que η_B sea 10^{-11} .
2. La TFED débilmente de primer orden $v/T \approx 0,55$ con $m_{higgs} = 0$, y para evitar que procesos de sphaleron borren la asimetría generada se requiere $v/T \approx 1-1,5$.

Estos dos hechos motivaron a la comunidad científica a descartar al ME como marco teórico para explicar el problema de la bariogénesis. Sin embargo, en 1998 la adición de un campo hipermagnético externo ($U(1)_Y$) durante la TFED revivió la posibilidad de una bariogénesis basada en el ME, pues se descubrió que la presencia de este campo afecta directamente la dinámica de la transición de fase, volviéndola más fuertemente de primer orden aún para masas de Higgs $m_H \lesssim 80$ GeV [30, 32].

La imagen física del fenómeno es exactamente la misma que la encontrada en superconductores tipo I bajo la influencia de un campo magnético externo. En ausencia de este campo, la transición a la fase superconductor es de 2o orden, mientras que en la presencia del campo magnético, ésta se vuelve de 1er orden, por efecto Meissner. El cambio en el orden de la TF se debe a que dentro de la fase superconductor, el campo magnético no se propaga (efecto Meissner), ésto crea una presión extra que actúa sobre la pared superconductor, aumentando así la energía dentro de la cavidad.

Un fenómeno análogo al de los superconductores ocurre durante la TFED en presencia de un campo hipermagnético⁴ externo, esto es: En la fase simétrica el campo hipermagnético permea todo el medio. Sin embargo, al momento de que se lleva a cabo la TFED, mediante la nucleación de burbujas de verdadero vacío ($v \neq 0$), una de las dos componentes del campo hipermagnético (Z^0) es expulsada de la fase rota, penetrando sólo la componente electromagnética (γ). Esto crea, al igual que en el caso superconductor, una diferencia de presiones, como consecuencia del aumento de la diferencia de energía entre las dos fases, esto es [33]

$$V(0, T_c) - V(v, T_c) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_W) (B_Y)^2, \quad (1.24)$$

con B_Y el campo hipermagnético externo.

No obstante, cabe señalar que los límites inferiores para la masa del Higgs que la colocan en $m_H > 114,4$ GeV [34] hacen que aún en presencia de campo magnético, el escenario para la bariogénesis sea marginal.

⁴En la fase simétrica $S(2)_L \times U(1)_L$, los campos que no se ven apantallados por el medio, y que, por lo tanto, se propagan libremente, son los campos B_Y de $U(1)_Y$. Al ser esta característica la misma que el modo magnético de $U(1)_{em}$, a éstos campos se les denomina hipermagnéticos.

El efecto de campos magnéticos sobre la TFED, ha sido estudiado analíticamente a nivel clásico [33] y a 1-loop de aproximación [30], así como por simulaciones de lattice [32]. Estos estudios coinciden en que la presencia del campo externo, aumenta la intensidad de la TFED, aunque el cociente v/T_c , no alcanza el valor deseado para una masa de higgs grande. Por otro lado, existen otras aproximaciones analíticas [35, 36], en donde se estudia el potencial efectivo a temperatura finita en la presencia de un campo magnético intenso. En estos trabajos se concluye, que la presencia del campo externo, inhibe una TF de 1er orden, como resultado de la contribución de fermiones ligeros, los cuales, en general, son despreciado en otros trabajos.

1.5. Sinopsis del trabajo

En este trabajo se estudia la transición de fase electrodébil en presencia de campos hipermagnéticos, con los grados de libertad de la fase simétrica. Esta selección tiene la ventaja que los bosones de norma en esa fase no se acoplan al campo hipermagnético externo.

El trabajo está dividido de la siguiente manera:

- En el capítulo 2, se presenta cada uno de los elementos que conforman el ME electrodébil antes del rompimiento de la simetría. Escribo de manera explícita el Lagrangiano de cada uno de los sectores del modelo estándar electrodébil. Lo anterior permitirá, por un lado, conocer las correcciones cuánticas al potencial efectivo y, por el otro, determinar cuáles son las partículas de la fase simétrica que se ven afectadas por la presencia del campo externo.
- En el capítulo 3, se muestra el método del tiempo propio de Schwinger con el cual se incorporan los efectos del campo hipermagnético externo sobre las partículas a las que se acopla. Por otro lado, se ha elegido la jerarquía de escalas $\mathbf{y}H < m^2$, donde la masa se tomará como la masa térmica. Esta elección surge naturalmente de considerar que durante la transición de fase, las masas de las partículas crecen de cero y son proporcionales a la temperatura, mientras que el valor de H se mantiene fijo. Esta elección resulta también conveniente para avanzar analíticamente en los cálculos. Asimismo, dada la jerarquía de escalas $\mathbf{y}H \ll m^2$, obtenemos para los distintos propagadores una expansión perturbativa en potencias del campo $\mathbf{y}H$.
- En el capítulo 4, se hace una presentación breve de la teoría térmica de campos, en particular del formalismo de tiempo imaginario, y se muestra la técnica de la transformada de Mellin, que se emplea en el cálculo del potencial efectivo. Mediante el empleo de esta técnica, es posible obtener una expansión asintótica, en términos del cociente (m/T) , que eventualmente nos permite identificar las contribuciones dominantes en la temperatura.

- En el capítulo 5, se muestra el cálculo explícito del potencial efectivo del modelo estándar electrodébil a orden anillo, empleando las técnicas de los capítulos previos. Analizamos el comportamiento del rompimiento de la simetría, introduciendo los parámetros del modelo estándar en el potencial efectivo.
- En el capítulo 6, se dan las conclusiones de este trabajo y se presenta un análisis en torno a las aproximaciones empleadas y las consecuencias que han tenido en los resultados. Éstos son comparados con los de otros trabajos realizados con otras aproximaciones y en un caso en donde se trabaja al mismo orden que el mostrado en el presente trabajo. En éste último en particular, se hace una crítica en cuanto a sus conclusiones sobre el efecto que tienen los fermiones ligeros en la transición de fase, las cuales difieren del presente trabajo. Finalmente, se plantea la posibilidad que, en condiciones menos restrictivas, otros efectos puedan influir en el escenario de la bariogénesis dentro del ME.

El trabajo ha sido reportado en las Refs. “*Effective potential at finite temperature in a constant magnetic field: Ring diagrams in a scalar theory*”, Phys. Rev. D **71**, 023004 (2005) y “*Effective potential at finite temperature in a constant hypermagnetic field: Ring diagrams in the standard model*” Phys. Rev. D **75**, 043004 (2007), que constituyen la aportación central de esta tesis y se describen de manera detallada en el capítulo 5.

Capítulo 2

Modelo Estándar Electrodébil

Uno de los modelos de partículas más exitosos con el que hasta este momento se cuenta es el modelo estándar. El éxito de este modelo radica en el hecho de que varias de sus predicciones teóricas han sido comprobadas experimentalmente. Sin embargo, no es un modelo completo, ya que no ha sido posible explicar a partir de éste el origen de otros fenómenos, como la jerarquía de masas entre las diferentes partículas que lo conforman, ó por qué sólo hay tres familias de leptones, por qué no hay neutrinos derechos, etc.

La construcción de este modelo se basa en el principio de invariancia de norma local. Bajo este principio, las partículas mediadoras de las interacciones (bosones de norma) entre las partículas de materia (fermiones) se obtienen de manera natural, relegando a la fuerza a un papel secundario.

El modelo estándar se basa en una teoría de norma no-Abeliana con grupo de simetría $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. $SU(3)_c$ es el grupo asociado a la interacción fuerte y sus mediadores son los gluones. El grupo compuesto $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es el grupo asociado a la interacción electrodébil y sus mediadores son los bosones A_μ^q de $SU(2)$ y B_μ de $U(1)_Y$.

Aquí nos concentraremos sólo en el sector electrodébil, *i.e.* $SU(2)_L \times U(1)_Y$, pues, como ya se ha mencionado, este sector satisface cada una de las condiciones de Sakharov relevantes para la generación de número bariónico. El Lagrangiano del modelo estándar electrodébil (ME) consta de los siguientes elementos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{gb} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh} \quad (2.1)$$

donde \mathcal{L}_H es el Lagrangiano del Higgs, \mathcal{L}_f el de fermiones, \mathcal{L}_{gb} el de bosones de norma, \mathcal{L}_{gf} el Lagrangiano que fija la norma, y \mathcal{L}_{gh} el de fantasmas.

El objetivo de este capítulo es básicamente, mostrar la estructura de cada sector del ME, ya que ello nos permitirá encontrar cada una de las reglas de Feynman para los vértices de interacción, así como establecer los diagramas que se ven afectados por la presencia del campo externo, lo cual será de vital importancia en el cálculo del potencial efectivo tanto a 1-loop como a orden anillo.

2.1. Sector de Higgs

Una característica central del modelo estándar es el rompimiento espontáneo de la simetría del estado base en el sector electrodébil, el cual permite que tanto los fermiones como los bosones de norma W^\pm y Z^0 adquieran masa. Esto se lleva a cabo mediante la introducción del llamado campo de Higgs en el sector electrodébil.

En el modelo estándar mínimo, el campo de Higgs es un doblete de $SU(2)$ con hipercarga $\mathbf{y} = +1$. El Lagrangiano de este campo es

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + c^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.2)$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a + i \frac{g' \mathbf{y}}{2} B'_\mu \quad (2.3)$$

con τ^a las matrices de Pauli, \mathbf{y} es el operador de hipercarga, $B'_\mu = B_\mu + B_\mu^{\text{ext}}$ y A_μ^a , B_μ son los campos de norma de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ respectivamente. Finalmente, el doblete Higgs se toma como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

en donde el campo ϕ_1 es el campo de Higgs físico que desarrollará un valor de expectación v cuando la temperatura del sistema sea $T = 0$.

Esta estructura tan particular del Lagrangiano es la que eventualmente permite que las partículas no masivas adquieran masa. Esto último se discute en más detalle en la última sección. Cabe recordar que en este trabajo, estamos interesados en describir la transición de fase electrodébil, usando los grados de libertad de la fase simétrica, *i.e.*, los campos A_μ , B_μ no masivos, en vez de W_μ^\pm y Z_μ^0 masivos.

Para obtener las reglas de Feynman y encontrar todos los vértices del modelo, desarrollamos el Lagrangiano de la Ec. (2.2), con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + c^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{g^2}{4} \Phi^\dagger [\delta^{ab} + i\epsilon^{abc} \tau^c] \Phi A_\mu^a A^{b\mu} \\ &+ \frac{g'^2}{4} \Phi^\dagger \mathbf{y}^2 \Phi B_\mu B^\mu - ig \Phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tau^a \Phi A_\mu^a - ig' \Phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi B_\mu + \frac{gg'}{2} \Phi^\dagger \mathbf{y} \tau^a \Phi A_\mu^a B^\mu, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde se ha usado la identidad entre las matrices de Pauli $\tau^a \tau^b = \delta^{ab} + i\epsilon^{abc} \tau^c$, con $a, b = 1, 2, 3$, como los índices de sabor, y la definición

$$X \overleftrightarrow{\partial}^\mu Y \equiv \frac{1}{2} \left(X \overrightarrow{\partial}^\mu Y - X \overleftarrow{\partial}^\mu Y \right). \quad (2.6)$$

Nótese que el penúltimo término de la Ec. (2.5) acopla dos campos de Higgs con el campo B^μ ; esto nos indica que el campo de Higgs se verá afectado por la presencia del campo hipermagnético externo.

En el apéndice A se muestra la forma diagramática para los vértices de interacción del Lagrangiano de la Ec. (2.5) así como sus reglas de Feynman.

2.2. Sector de Fermiones

El Lagrangiano del sector fermiónico está dado por

$$\mathcal{L}_f = \sum_{f_i} \left[\bar{\Psi}_L \left(i\not{\partial} - \frac{g'}{2} \mathbf{Y} B' - \frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A} \right) \Psi_L + \bar{\Psi}_R \left(i\not{\partial} - \frac{g'}{2} \mathbf{Y} B' \right) \Psi_R \right], \quad (2.7)$$

donde Ψ_L es un doblete de fermiones izquierdos y Ψ_R es un singlete de fermiones derechos, ambos de $SU(2)_L$. La suma corre sobre todos los fermiones del modelo, esto es, 3 familias de leptones y 3 familias de quarks por cada color.

Por otro lado, los estados de quiralidad izquierda o derecha están dados por

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi, \quad \Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi. \quad (2.8)$$

Usando esta definición y escribiendo de manera explícita las contracciones de las matrices γ con los campos de norma, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = \sum_{f_i} & \left[\bar{\Psi}_R i\not{\partial} \Psi_R + \bar{\Psi}_L i\not{\partial} \Psi_L - \bar{\Psi} \frac{g}{4} (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \boldsymbol{\tau}^a \Psi A^a_\mu \right. \\ & \left. - \bar{\Psi} \frac{g'}{4} (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \mathbf{Y} \Psi B'^\mu - \bar{\Psi} \frac{g}{4} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu \mathbf{Y} \Psi B'^\mu \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

en donde hay que tener presente que \mathbf{Y} es el operador de hipercarga. En el Cuadro 2.1, se muestran los eigenvalores para los operadores de isospín débil T y de hipercarga \mathbf{Y} , los cuales se obtienen fácilmente de la relación de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T_3 + \frac{\mathbf{Y}}{2}. \quad (2.10)$$

Nótese que en la Ec. (2.7) existen 2 términos en donde el campo hipermagnético externo se acopla tanto a fermiones derechos como a izquierdos. Esto nos indica que la propagación de estos campos será afectada por la presencia del campo externo, y por lo tanto el efecto del campo deberá ser tomado en cuenta, tal como se muestra en el Cap. 3, para el cálculo del potencial efectivo.

Los diagramas de Feynman para los vértices de interacción del Lagrangiano de la Ec. (2.9), así como las reglas de Feynman asociadas a éstos se muestran de manera explícita en el Apéndice A

fermión	T	T_3	Y	Q
ν_e, ν_μ, ν_τ	1/2	1/2	-1	0
e_L, μ_L, τ_L	1/2	-1/2	-1	-1
e_R, μ_R, τ_R	0	0	-2	-1
u_L, c_L	1/2	1/2	1/3	2/3
d_L, s_L	1/2	-1/2	1/3	-1/3
u_R, c_R	0	0	4/3	2/3
d_R, s_R	0	0	-2/3	-1/3

Cuadro 2.1: Eigenvalores de los operadores de isoespín débil y de hipercarga para cada fermión del ME.

2.3. Sector de Yukawa

El Lagrangiano de Yukawa es el responsable de dar masa a los campos fermiónicos por medio del acoplamiento de éstos al campo de Higgs. De manera explícita, el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \sum_{fermiones} f_i \bar{\Psi}_L \Phi \Psi_R + \sum_{quarks} f_i \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} \Psi_R + h.c. \quad (2.11)$$

donde la suma es sobre todos los leptones y quarks presentes en el modelo, f_i es la constante de acoplamiento de Yukawa cuyo valor depende del campo fermiónico, y finalmente $\tilde{\Phi}$ se define como

$$\tilde{\Phi} = -i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^{+*} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La razón por la que aparecen dos sumas en el Lagrangiano de la Ec. (2.11) se debe al hecho que la primera suma sólo acopla el campo de Higgs físico a los fermiones con proyección de isoespín débil $T_3 = -1/2$, quedando fuera, los fermiones con $T_3 = +1/2$. Ésto es suficiente, si se considera sólo el sector de leptones, pues, en el ME mínimo los neutrinos ($T_3 = 1/2$) no adquieren masa. No obstante, al considerar a los quarks, todos aquellos con $T_3 = +1/2$, como (u, c, t), al no acoplarse al campo de Higgs, no adquirirán masa. Sin embargo, se sabe que estos son masivos, de ahí la segunda suma en la Ec. (2.11), en donde estos quarks se acoplan al campo de Higgs.

Como se sabe, las masas de los fermiones abarcan un rango de energías muy grande, éste va desde los eV, para los neutrinos, hasta los 174 GeV para el quark top . Esta enorme variación en la masa de los fermiones se contempla en el ME mediante las constantes de acoplamiento f_i . El valor máximo corresponde al quark top con $f_t \sim 1$, y los valores más pequeños corresponden a los fermiones más ligeros. De lo anterior, es de esperar que la principal contribución de este sector al potencial efectivo se deba al

quark *top*. Por lo tanto, centrando nuestra atención en los términos del Lagrangiano de la Ec. (2.11) que involucran al *top*, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{top} &= -\frac{f}{2}(\bar{t}\phi^{0*} + \bar{b}\phi^{+*})(1 + \gamma_5)t - \frac{f}{2}\bar{t}(1 - \gamma_5)(\phi^0 t - \phi^+ b) \\ &\rightarrow -\frac{f}{2}\bar{t}[\phi^0 + \phi^{0*}]t + \frac{f}{2}\bar{t}[\gamma_5(\phi^0 - \phi^{0*})]t\end{aligned}\quad (2.13)$$

donde la flecha indica que nos quedamos sólo con términos que contribuyen a 1-loop, que en este caso será a la autoenergía del Higgs. Al igual que en las secciones anteriores, los diagramas y las reglas de Feynman de este sector las he colocado en el Apéndice A.

2.4. Sector de Bosones de Norma

En este sector, el Lagrangiano está conformado únicamente por los términos de energía cinética de los bosones de norma de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, esto es

$$\mathcal{L}_{gb} = -\frac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Nótese que en el caso del grupo $U(1)_Y$ los bosones de norma no presentan términos de interacción, mientras que en el caso del grupo $SU(2)_L$, la naturaleza no-Abeliana da origen a términos de auto-interacción entre bosones de norma. Para determinar de manera explícita esta interacción, sustituimos $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ en el Lagrangiano, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gb} &= -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a)(\partial_\mu A^\nu_a - \partial_\nu A^\mu_a) \\ &\quad - g^2\epsilon^{abc}\epsilon_{aef}A^\mu_b A^\nu_c A^\mu_e A^\nu_f - g\epsilon_{abc}(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a)A^\mu_b A^\nu_c,\end{aligned}\quad (2.16)$$

donde la posición de los índices latinos es totalmente arbitraria, ya que estos siguen la regla tradicional de suma, mientras que los índices de Minkowski no.

Por otro lado, la ausencia de términos de interacción entre bosones $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, indica que los campos de norma no serán afectados por la presencia de un campo hipermagnético externo. Este punto es muy importante y es la razón principal por la que en el cálculo del potencial efectivo no será necesario tomar los efectos del campo externo en los bosones de norma. Esta situación cambia en la fase rota, pues ahí los grados de libertad son los bosones W^\pm los cuales sí se acoplan al campo electromagnético. Tal como lo he señalado anteriormente, los diagramas y las reglas de Feynman que corresponden a este sector, se encuentran en el Apéndice A.

2.5. Rompimiento espontáneo de la simetría. Lagrangiano que Fija la Norma

Con el fin de analizar los diversos aspectos que hay alrededor del rompimiento espontáneo de la simetría del estado base en el ME, en esta sección analizaremos este fenómeno en el modelo de Higgs Abelian, con simetría de norma local $U(1)$.

El Lagrangiano del modelo de Higgs Abelian se construye de tal manera que el campo escalar complejo sea invariante bajo transformaciones de norma local del grupo $U(1)$. Explícitamente, el Lagrangiano tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

con

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad (2.18)$$

en donde el término de energía cinética $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ del campo de norma A^μ se introduce a mano en el Lagrangiano.

Un elemento importante en el estudio de la simetría es el potencial de los campos escalares, en este caso dado por

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.19)$$

en donde el comportamiento de la simetría del estado base depende del valor de los parámetros μ^2 y λ . Se considera el estado base como el estado en el cual el potencial toma su valor mínimo. En este caso, el potencial toma valores extremos cuando

$$\left(-\mu^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^2 \right) |\phi| = 0 \quad (2.20)$$

donde $|\phi|$ es la magnitud del campo escalar complejo.

En el caso $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$, la Ec. (2.20) sólo acepta la solución $|\phi| = 0$. En este caso se dice que la simetría del estado base de la teoría no está rota. No obstante la situación cambia para $\mu^2 > 0$ y $\lambda > 0$, en este caso el potencial presenta dos valores extremos, uno de ellos corresponde al valor $|\phi| = 0$, el cual ahora corresponde a un máximo local. El otro valor extremo corresponde a

$$|\phi| \equiv v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.21)$$

esta solución en realidad representa una circunferencia de radio v , tal como se muestra en la Fig. 2.1, lo cual nos indica que el mínimo es degenerado. Sin embargo, al elegir uno de ellos como el estado base de la teoría, por ejemplo

$$\langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0, \quad (2.22)$$

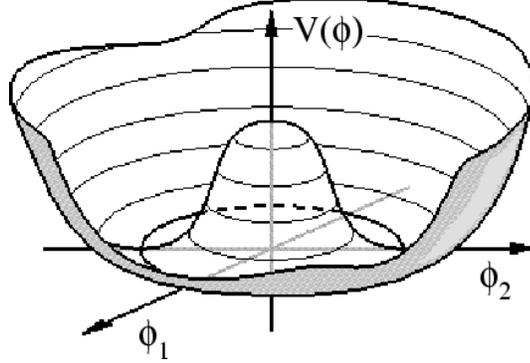


Figura 2.1: Potencial del modelo de Higgs Abeliano, para $\mu > 0$ y $\lambda > 0$.

la simetría del estado base de la teoría se rompe espontáneamente, pues el estado base deja de ser invariante ante transformaciones locales de $U(1)$. Este mecanismo es conocido como el mecanismo de Higgs, y es por éste medio que las partículas de la teoría adquieren masa. A esta fase, en donde las partículas tienen masa, se le denomina *fase rota*.

Para desarrollar la teoría alrededor del estado base elegido, hacemos lo siguiente

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\chi) \quad (2.23)$$

donde h y χ son los nuevos campos desarrollados alrededor del vacío, que al reemplazar en el Lagrangiano, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - evA_\mu \partial^\mu \chi - 2eA_\mu (h \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi) + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ &+ e^2(vh)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2(h^2 + \chi^2)A_\mu A^\mu + \frac{\lambda v^4}{16} - \frac{\lambda v^2}{4}h^2 - \frac{\lambda v}{4}h^3 - \frac{\lambda v}{4}h\chi^2 \\ &- \frac{\lambda}{16}(h^2 + \chi^2)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

de donde se observa que el espectro de partículas ha adquirido las siguientes masas

$$m_A = ev, \quad m_h = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_\chi = 0. \quad (2.25)$$

En este punto debemos tener cuidado en la interpretación del espectro de partículas del Lagrangiano de la Ec. (2.24), pues en el Lagrangiano de la Ec. (2.17) consta de 4 grados de libertad, 2 de ϕ y 2 de A^μ . Mientras el último consta de 5 grados de libertad: 2 escalares y 3 de A^μ pues es masivo. En realidad el grado de libertad extra es espurio y representa una libertad de norma en el campo masivo A^μ . Esto se ve claramente usando la norma para el campo A^μ dada por

$$\tilde{A}^\mu = A^\mu - \frac{1}{ev}\partial^\mu \chi, \quad (2.26)$$

en la Ec. (2.24), con lo cual la parte cinética del campo χ desaparece, esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\chi &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - evA_\mu\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu \\ &\rightarrow \frac{1}{2}e^2v^2\tilde{A}_\mu\tilde{A}^\mu,\end{aligned}\quad (2.27)$$

esto comprueba que χ no es un grado de libertad físico, y por lo tanto el número de grados de libertad antes y después del rompimiento de la simetría se conserva.

En el proceso de cuantización de una teoría de norma, es muy importante hacer una elección de la norma remanente del rompimiento espontáneo. En cálculos en teorías de campo, es muy importante que las observables físicas no dependan de la elección de norma. Por ello es conveniente hacer un estudio en la norma arbitraria R_ξ , ya que ésta mantiene a todos los campos que hay antes del rompimiento, a expensas de introducir dos Lagrangianos que cancelan los grados de libertad extra, como el campo χ . Estos Lagrangianos son:

- el Lagrangiano que fija la norma en el modelo de Higgs Abeliano

$$\mathcal{L}_{gf} = - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu + \xi ev\chi)^2, \quad (2.28)$$

- el Lagrangiano de fantasmas

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c} [-\partial^2 - \xi e^2 v(v+h)] c, \quad (2.29)$$

donde c son los campos fantasmas, en el sentido que éstos no obedecen el principio del espín y la estadística, pues al ser bosones, anticonmutan.

Por lo tanto en la norma R_ξ , el Lagrangiano de la Ec. (2.24) es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 2eA_\mu(h\overleftrightarrow{\partial}^\mu\chi) + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - \frac{\xi}{2}e^2v^2\chi^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\ &+ e^2(vh)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2(h^2 + \chi^2)A_\mu A^\mu + \frac{\lambda v^4}{16} - \frac{\lambda v^2}{4}h^2 - \frac{\lambda v}{4}h^3 - \frac{\lambda v}{4}h\chi^2 \\ &- \frac{\lambda}{16}(h^2 + \chi^2)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial^\mu\bar{c}\partial_\mu c - \xi e^2v^2\bar{c}c - \xi e^2vh\bar{c}c,\end{aligned}\quad (2.30)$$

en la norma arbitraria, en vez de desaparecer el campo χ por completo, éste aparece con una masa proporcional al parámetro de norma ξ , lo cual es una señal de que este campo es ficticio y no es producido en ningún proceso físico. Lo mismo sucede con los campos fantasma, su masa es proporcional al parámetro de norma.

En el caso del modelo estándar electrodébil, el Lagrangiano que fija la norma y el de fantasmas están dados por [37]

$$\mathcal{L}_{gf} = - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^i - \frac{1}{2}\xi gv\phi^i)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu B_\mu - \frac{1}{2}\xi g'v\phi_2)^2, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}_{gh} = - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^i - \frac{1}{2}\xi g v \phi^i)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\xi g' v \phi_2)^2, \quad (2.32)$$

donde $i = 2, 3, 4$.

Una nota importante respecto a la elección de norma es en torno al potencial efectivo, pues en principio éste es un objeto dependiente de norma [38], pero las observables físicas obtenidas a partir de éste son independientes de norma [39].

En el cálculo del potencial efectivo del ME en presencia del campo hipermagnético externo, la forma diagramática mostrada en el apéndice A, será muy útil, ya que nos permitirá determinar cuáles partículas se acoplan al campo B_{ext}^μ de $U(1)$. Como veremos en el siguiente capítulo, la propagación de tales partículas se ve modificada por la presencia del campo externo.

Debido a que durante la transición de fase electrodébil, la tasa de interacción entre las partículas era mayor que la tasa de expansión del universo, se puede considerar al sistema en equilibrio térmico, y por lo tanto el FTI puede ser aplicado sin ningún problema.

La teoría térmica de campos en el FTI puede formularse por dos caminos; uno es el método de operadores y el otro es el de integral de trayectoria. De éstos, el que ha sido ampliamente explotado en teorías con transición de fase como superfluidez, superconductividad, plasmas y el modelo de Ising, ha sido el de la integral de trayectoria, ya que es posible obtener una expansión perturbativa en los acoplamientos, a la cual se asocia una forma diagramática, al estilo del caso de temperatura cero.

El objetivo de este capítulo es mostrar algunos de los elementos esenciales de la teoría térmica de campos en su formulación de tiempo imaginario, así como desarrollar algunas técnicas que se emplearán en el cálculo del potencial efectivo.

4.1. Formalismo de Tiempo Imaginario

Tenemos, en la imagen de Schrödinger, al operador de un campo escalar al tiempo $t = 0$, como $\hat{\phi}(\mathbf{x}, 0)$, y el operador de momento como $\hat{\pi}(\mathbf{x}, 0)$. Los eigenestados del operador del campo etiquetados por $|\phi\rangle$ satisfacen,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, 0)|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi\rangle, \quad (4.1)$$

donde $\phi(\mathbf{x})$ es el eigenvalor. Como es bien sabido, estos eigenestados satisfacen condiciones de completos y ortogonalidad, esto es,

$$\begin{aligned} \int d\phi(\mathbf{x})|\phi\rangle\langle\phi| &= 1 \\ \langle\phi_a|\phi_b\rangle &= \delta[\phi_a(\mathbf{x}) - \phi_b(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Análogamente, los eigenestados del operador del momento etiquetados por $|\pi\rangle$ satisfacen

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, 0)|\pi\rangle = \pi(\mathbf{x})|\pi\rangle, \quad (4.3)$$

con sus correspondientes relaciones de completos y ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int d\pi(\mathbf{x})|\pi\rangle\langle\pi| &= 1 \\ \langle\pi_a|\pi_b\rangle &= \delta[\pi_a(\mathbf{x}) - \pi_b(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ya que los campos cuánticos poseen un número infinito de grados de libertad, el traslape entre los operadores de posición y momento que se obtiene en la mecánica cuántica se generaliza en el caso de campos a la relación

$$\langle\phi|\pi\rangle = \exp \left[i \int d^3x \pi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \right]. \quad (4.5)$$

Como es bien sabido del caso de la mecánica cuántica, el Hamiltoniano, que depende de las variables canónicas del problema, permite hacer el análisis de la dinámica del sistema. En el caso de campos cuánticos sucede lo mismo, sólo que ahora el Hamiltoniano es expresado como la funcional del campo y el momento conjugado, esto es

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}). \quad (4.6)$$

Con ayuda del Hamiltoniano es posible evolucionar estados $|\phi_a\rangle$ al tiempo $t = 0$ a estados a un tiempo posterior t_f por medio de la operación $|\phi_b\rangle = e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle$. La amplitud de transición entre los estados ϕ_a y ϕ_b es entonces $\langle\phi_b|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle$.

Ya que estamos interesados en usar la mecánica estadística para obtener las propiedades termodinámicas de un sistema de partículas descritas por la teoría de campos, entonces tal sistema debe cumplir con ciertas condiciones de la mecánica estadística, una de las cuales restringe al sistema a hallarse en equilibrio. Esto tiene como efecto que los estados iniciales, al evolucionar de un tiempo inicial $t = 0$ a uno final t_f , regresen a su estado original. Dividiendo el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ en N intervalos con la misma duración $\Delta t = t_f/N$ e insertando alternativamente los conjuntos completos de las Ecs. (4.2), (4.4), la amplitud de transición entre los estados $|\phi_a\rangle$ y $|\phi_a\rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle\phi_a|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \langle\phi_a|\pi_N\rangle \langle\pi_N|e^{-iH\Delta t}|\phi_N\rangle \langle\phi_N|\pi_{N-1}\rangle \\ &\times \langle\pi_{N-1}|e^{-iH\Delta t}|\phi_{N-1}\rangle \times \cdots \times \langle\phi_2|\pi_1\rangle \langle\pi_1|e^{-iH\Delta t}|\phi_1\rangle \langle\phi_1|\phi_a\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otro lado, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, el operador de evolución puede ser aproximado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle\pi_i|e^{-iH\Delta t}|\phi_i\rangle &\simeq \langle\pi_i|(1 - iH\Delta t)|\phi_i\rangle \\ &= \langle\pi_i|\phi_i\rangle(1 - iH_i\Delta t) \\ &= (1 - iH_i\Delta t) \exp \left[-i \int d^3x \pi_i(x) \phi_i(x) \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

en donde $H_i = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_i(x), \phi_i(x))$ y se ha usado la Ec. (4.5).

Haciendo uso de la ecuación anterior en la Ec. (4.7) y, después de un poco de álgebra, esta se reduce a

$$\begin{aligned} \langle\phi_a|e^{-iHt_f}|\phi_a\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \delta(\phi_1 - \phi_a) \\ &\times \exp \left[-i\Delta t \sum_{j=1}^N \int d^3x \left(\mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) - \pi_j \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\Delta t} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\phi_{N+1} = \phi_a = \phi_1$. En el proceso de simplificación de la Ec. (4.9) se usó la definición de la exponencial,

$$e^{-a} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^N. \quad (4.10)$$

Para obtener la representación funcional de la amplitud de transición, tomamos el límite continuo de la Ec. (4.9), esto es

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(x,0)}^{\phi(x,t_f)} [d\phi] \\ &\times \exp \left[i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left(\pi(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi(x,t), \phi(x,t)) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde los símbolos $[d\pi]$ y $[d\phi]$ indican la integración funcional. Nótese además que las condiciones de periodicidad sólo restringen a la función de onda ϕ y no al momento π . La ventaja que tiene la Ec. (4.11) es que ésta ya no hace referencia a ningún operador [55].

En el caso muy particular de una teoría escalar con el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + V(\phi), \quad (4.12)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial, la integración sobre el momento canónico π en la Ec. (4.11) es muy simple y se obtiene

$$\langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle = N \int_{\phi(x,0)}^{\phi(x,t_f)} [d\phi] e^{iS} \quad (4.13)$$

en donde N es un factor constante de normalización que no tiene importancia y el factor que aparece en la exponencial es la acción del campo escalar, esto es

$$S = \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi) \right). \quad (4.14)$$

Para hacer la conexión con la física estadística, en la Ec. (4.13) hacemos el cambio $t_f \rightarrow -i\tau$ con τ en el intervalo $[0, \beta]$ y finalmente le tomamos la traza, con ello se deriva lo siguiente

$$\int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta H} | \phi_a \rangle = N \int d\phi_a \int_{\phi(x,0)}^{\phi(x,-i\beta)} [d\phi] e^{-S_E} \quad (4.15)$$

donde S_E es la acción Euclidiana, dada por

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi + V(\phi) \right], \quad (4.16)$$

en donde hemos integrado por partes y usado condiciones de frontera.

En este punto la conexión con la física estadística se hace clara, pues la función de partición Gran Canónica (con $\mu = 0$) se define como

$$Z \equiv \text{Tr} e^{-\beta H} = \langle \phi_a | e^{-\beta H} | \phi_a \rangle, \quad (4.17)$$

tiene el mismo significado que la Ec. (4.16) pero desde un punto de vista funcional de teoría de campos. Una nota adicional referente a las condiciones de equilibrio es que éstas están contenidas en la periodicidad de las funciones ϕ_a , y en caso de tratar con fermiones, éstas se reflejarán en la antiperiodicidad para las funciones ψ_a por tratarse de variables de Grassman. En cualquiera de los dos casos, la energía se discretiza en las llamadas frecuencias de Matsubara.

Para obtener la función de partición en el caso de campos escalares sin interacciones, usamos Ec. (4.15) con $V(\phi) = 0$. De la teoría de campos a temperatura cero, sabemos que la funcional generatriz de la Ec. (4.15) se relaciona con el determinante del operador inverso de la acción, esto es

$$Z = A(\det[D^{-1}])^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.18)$$

donde A es una constante y

$$D^{-1} = \beta^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right). \quad (4.19)$$

Por lo tanto, la energía libre de un gas de campos escalares es

$$\Omega \equiv -\beta^{-1} \ln Z = \frac{1}{2} \beta^{-1} \ln(\det[D^{-1}]), \quad (4.20)$$

en donde el determinante es trivial si se escoge una base en la cual el operador D^{-1} es diagonal. Esta base se encuentra fácilmente si se expresan los campos ϕ en su serie de Fourier asociada a $[0, \beta] \times \mathbb{R}^3$, esto es

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \sum_n \sum_p e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \tilde{\phi}_n(p), \quad (4.21)$$

donde la condición $\phi(x, 0) = \phi(x, \beta)$ implica $\omega_n = 2n\pi T$ con ω_n las frecuencias de Matsubara¹. Por lo tanto, reescribiendo la energía libre, se tiene

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \beta^{-1} \ln(\det[D^{-1}]) \\ &= \frac{1}{2} VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega_p^2) \end{aligned} \quad (4.22)$$

¹En el caso de fermiones la frecuencia de Matsubara es $\omega_n = (2n + 1)\pi T$.

donde $\omega_p^2 = p^2 + m^2$ y V es el volumen. Además, se ha reemplazado la suma por la integral sobre el momento.

Para hacer la suma sobre las frecuencias de Matsubara, derivamos la Ec. (4.22) con respecto a ω_p y usamos la identidad

$$T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_p} = \frac{1}{2\omega_p} + \frac{n(\omega_p)}{\omega_p}, \quad (4.23)$$

con $n(\omega_p)$ la distribución de Bose-Einstein. Una vez hecho esto, integramos con respecto a ω_p y obtenemos que la energía libre es

$$\Omega = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_p}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_p}) \right], \quad (4.24)$$

donde el primer término es la energía de vacío y el segundo es la contribución de la materia. En el límite $m^2 \ll T^2$ el resultado de ésta última es

$$\Omega = -V \frac{\pi^2 T^4}{90}, \quad (4.25)$$

donde la presión del gas ideal de bosones se obtiene fácilmente si recordamos que $\Omega = PV$, con P la presión. Dado que el formalismo que hemos empleado hasta ahora es el de integral de trayectoria, el diagrama de Feynman asociado a la Ec. (4.25) es el mostrado en la Fig. 4.1.

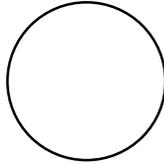


Figura 4.1: Diagrama de Feynman asociado con la energía libre de un gas de bosones escalares.

Al igual que en el caso de temperatura cero, la introducción de una fuente de campos escalares en la acción de la forma

$$S_E \rightarrow S_E + \int_0^\beta d^4x J(x)\phi(x) \quad (4.26)$$

nos permite aplicar el método funcional para obtener correcciones cuánticas a la energía libre, así como las funciones de Green de n puntos.

En el caso de fermiones, se puede aplicar el mismo formalismo, de tal manera que en este caso la función de partición es

$$Z_f = A(\det[\tilde{D}^{-1}]), \quad (4.27)$$

esta forma se debe a que los fermiones se expanden en términos de las variables de Grassman.

En las siguientes secciones se hará una revisión de algunos de los métodos más empleados en teoría térmica de campos y algunos no tan explotados, como la transformada de Mellin, para llevar a acabo los cálculos que involucran integrales con loops. Como veremos, en el fondo, todos estos métodos están relacionados, pues hacen referencia a una expansión perturbativa en donde la temperatura es la escala dominante.

4.1.1. Reglas de Transformación de $T = 0$ a $T \neq 0$

Como se mostró en la sección anterior, existe una enorme similitud entre la teoría de campos a $T = 0$ y $T \neq 0$, en el formalismo de tiempo imaginario, al grado que se puede establecer una serie de reglas que nos permitirán transformar expresiones de loops obtenidas de aplicar las reglas de Feynman de $T = 0$ a expresiones con $T \neq 0$.

Para derivar estas reglas, debemos notar que un cambio de variable $t \rightarrow -i\tau$ en la Ec. (4.14) tiene la siguiente consecuencia

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \xrightarrow{t \rightarrow -i\tau} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right), \quad (4.28)$$

y en el espacio de momentos el cambio anterior es

$$(k_\mu k^\mu - m^2) \longrightarrow \left(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right). \quad (4.29)$$

En esta última expresión debemos notar que la métrica de Minkowski se transforma en la métrica de Euclides y además el signo relativo entre la masa y las componentes espaciales del momento no cambia al cambiar de métrica, ésto nos indica que el signo de las componentes espaciales no cambia. Por otra parte, no hay que olvidar que los “operadores” de la Ec. (4.29) son parte de la integral funcional en el caso $T = 0$ y $T \neq 0$ respectivamente, y que darán origen a las funciones de Green de n puntos.

Para obtener una regla que nos permita pasar de $T = 0$ a $T \neq 0$, notemos que a partir del lado izquierdo de la Ec. (4.29), es posible obtener el lado derecho mediante el cambio $k_0 \rightarrow i\omega_n$, salvo un signo. Por lo tanto, una regla es

$$k_0 \rightarrow i\omega_n \implies (k_\mu k^\mu - m^2)^\sigma \xrightarrow{T \neq 0} (-1)^\sigma \left(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right)^\sigma. \quad (4.30)$$

Por otro lado, de las Ecs. (4.20) y (4.21), notemos que el elemento de volumen del espacio fase sólo se ve afectado por las condiciones de frontera impuestas a los campos

(en ese caso escalares). Por lo tanto la regla que se establece de esta observación es

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \xrightarrow{T \neq 0} T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (4.31)$$

A $T = 0$, los vértices y las funciones de Green de dos puntos de una teoría en general van acompañados por un factor i , esto da como resultado que la funcional generatriz $Z[J]$ (véase la Ec. (4.13)) esté dada en términos de la fase iS , con S la acción. En cambio, a $T \neq 0$, el factor i está ausente de la funcional generatriz (véase la Ec. (4.15)), y entonces, ni vértices ni propagadores contendrán factores de i . Por lo tanto, la expansión perturbativa de la funcional generatriz a $T = 0$ tendrá un cambio de signo extra respecto a $T \neq 0$.

Finalmente, las reglas anteriormente discutidas pueden ser resumidas en la siguiente expresión:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [k_0^{2b} - \mathbf{k}^{2a}] D^\sigma \xrightarrow{T \neq 0} -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(-1)^b \omega_n^{2b} - \mathbf{k}^{2a}] [(-1)^\sigma \Delta^\sigma] \quad (4.32)$$

donde

$$D = \frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2}, \quad \Delta = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (4.33)$$

con $\{a, b, \sigma\}$ números enteros positivos y el primer signo negativo del lado derecho toma en cuenta el hecho que la acción es Euclidiana. Este conjunto de reglas forman parte central del procedimiento empleado en el cálculo de las autoenergías de los bosones del modelo estándar.

4.2. Aproximación HTL

La aproximación *Hard Thermal Loops* (HTL) es uno de los métodos más ampliamente empleados en TTC. Esta aproximación permite obtener la contribución dominante en la temperatura de las integrales de momento, al considerar que los momentos del loop son del orden de la temperatura T . Esto se justifica en el hecho que la integral, al infinito, está regulada por la distribución de Bose-Einstein (o Fermi-Dirac), por lo que el corte ultravioleta natural es la temperatura. De este modo, por ejemplo, en integrales cuadráticamente divergentes, es de esperarse que la principal contribución en la temperatura sea $\mathcal{O}(T^2)$, etc [28].

Para mostrar en qué consiste este método, desarrollaré el cálculo explícito de la autoenergía de un campo escalar en una teoría $\lambda\phi^3$, esto es²

$$\Pi = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]}. \quad (4.34)$$

²Esté ejemplo me va a permitir más adelante discutir dos puntos que son importantes en el cálculo de esta tesis: 1) Los fenómenos infrarrojos y, 2) El uso del parámetro de Feynman en cálculos a temperatura finita.

El diagrama de Feynman correspondiente se muestra en la Fig. 4.2.

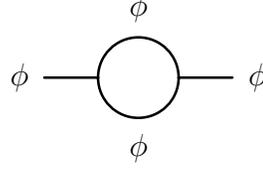


Figura 4.2: Diagrama de Feynman en una teoría $\lambda\phi^3$.

Aplicando la regla de la Ec. (4.32), la autoenergía a temperatura finita es

$$\Pi = -\frac{\lambda^2}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2][(\omega_n + \omega_m)^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m^2]}. \quad (4.35)$$

Para hacer la suma sobre las frecuencias de Matsubara, seguimos el procedimiento descrito en el apéndice B. Se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi(i\omega_m, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{4\omega_k \left((\omega_k + s i\omega_m)^2 - \omega_{k+p}^2\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\coth\left(\frac{\omega_{k+p}}{2T}\right)}{4\omega_{k+p} \left((\omega_{k+p} + s i\omega_m)^2 - \omega_k^2\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde $\omega_x^2 = x^2 + m^2$. Usando una vez más fracciones parciales y factorizando términos, se tiene

$$\begin{aligned} \Pi(i\omega_m, \mathbf{p}) &= -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k \omega_{k+p}} \left\{ \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right) + \coth\left(\frac{\omega_{k+p}}{2T}\right)}{2(i s\omega_m + \omega_k + \omega_{k+p})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right) - \coth\left(\frac{\omega_{k+p}}{2T}\right)}{2(i s\omega_m + \omega_k - \omega_{k+p})} \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Hasta el momento, no hemos aplicado ningún tipo de aproximación en la deducción de la Ec. (4.37); ésta es exacta y coincide con la Ref. [28], sustituyendo $\coth(\omega/2T) = 1 + 2n(\omega)$, donde $n(\omega)$ es la distribución de Bose-Einstein. Como puede observarse de la Ec. (4.37), la integración sobre el 3-momento resulta muy complicada debido a las variables angulares. Es ahí donde las aproximaciones nos pueden ayudar a extraer la física relevante al problema. En particular, estamos interesados en una situación en donde el plasma está muy caliente y las partículas que se mueven dentro son no masivas, *i.e.*, un régimen de energías en donde la temperatura es la escala más alta. Por lo tanto, considerar que las fluctuaciones cuánticas adquieran energías del

orden de la temperatura es una buena aproximación. Justo estas son las condiciones en donde la aproximación HTL brinda un método para obtener las contribuciones térmicas relevantes al problema. Esta aproximación consiste en lo siguiente [28]:

$$\begin{aligned} k \sim T &\gg p, m \\ \omega_{k+p} &\approx \omega_k + \frac{kp}{\omega} \cos(\theta) \\ n(\omega_{k+p}) &\approx n(\omega_k) + \frac{kp}{\omega_k} \cos(\theta) \frac{dn(\omega_k)}{d\omega_k} \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{p} . En realidad en la aproximación HTL, la masa se desprecia de modo que $\omega_k \approx k$, no obstante, previendo el resultado que se obtiene usando otros métodos, se mantendrá m finita.

Reemplazando estas aproximaciones en la Ec. (4.37), llegamos a

$$\Pi(i\omega_m, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k^2} \left\{ \frac{1 + 2n(\omega_k)}{s i\omega_m + 2\omega_k} + \frac{dn(\omega_k)}{d\omega_k} \frac{kp x}{(s i\omega_m \omega_k - kp x)} \right\}, \quad (4.39)$$

donde $x = \cos(\theta)$. Nótese que mediante el uso de la aproximación HTL ha sido posible separar la integral angular. En lo que sigue mostraré que esta aproximación rescata los puntos esenciales de la parte térmica de la autoenergía.

Nótese que en el primer término el factor $i\omega_m$ es pequeño comparado con $k \sim T$, además éste no depende de los factores angulares. Sin embargo, esto no ocurre con el segundo término, ya que ahí todas las escalas que aparecen son pequeñas comparadas con T ($\omega_k \sim k$). Este último término es esencial, ya que pone en evidencia la no analiticidad de la autoenergía cerca del origen cuando la variable discreta ω_m se continúa analíticamente a valores reales³ [56]. Para ver lo anterior en detalle, centremos la atención sólo en éste término. Una vez que se hace la integral angular en la Ec. (4.39), obtenemos

$$\tilde{\Pi}(i\omega_m, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{k^2}{4\omega^2} \frac{dn(\omega_k)}{d\omega_k} \left[-2 - \frac{i s \omega_m \omega_k}{kp} \ln \left(\frac{i s \omega_m \omega_k - kp}{i s \omega_m \omega_k + kp} \right) \right] \right\}, \quad (4.40)$$

donde se ha usado

$$\int dx \frac{x}{(s i\omega_m \omega_k - kp x)} = -\frac{x}{kp} - \frac{i s \omega_m \omega_k}{k^2 p^2} \ln(i s \omega_m \omega_k - kp x). \quad (4.41)$$

³La continuación analítica se puede hacer de varias maneras, y en cada una la información física que se extrae es diferente, por ejemplo en el caso de $\omega_m \rightarrow p_0 + i\eta$ la información que se obtiene de $Im(\Pi)$ es la tasa de decaimiento de las partículas dentro del plasma.

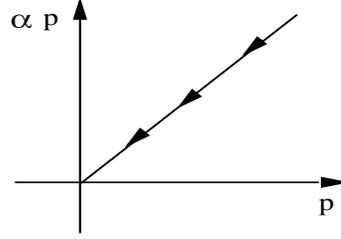


Figura 4.3: Trayectoria general sobre la cual se toma el límite de momento externo yendo a cero $p^\mu \rightarrow 0$. La manera en la que el cuadrimomento externo se aproxima al origen determina una situación física muy particular.

Haciendo la continuación analítica $i\omega_m \rightarrow p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}$, y después haciendo $p_0 = \alpha p$, se tiene lo siguiente

$$\tilde{\Pi}(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{4\omega^2} \frac{dn(\omega_k)}{d\omega_k} \left\{ -4 - \frac{\alpha\omega_k}{k} \ln \left[\left(\frac{\alpha\omega_k - k}{\alpha\omega_k + k} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.42)$$

Con la sustitución anterior, se está parametrizando la forma en que el momento externo se acerca al origen, tal como se muestra en la Fig. 4.3. La manera en que se toma este límite tiene dos significados físicos totalmente diferentes: el límite ($p_0 = 0, \mathbf{p} \rightarrow 0$) da cuenta del apantallamiento que sufre la partícula en el plasma, mientras el límite ($p_0 \rightarrow 0, \mathbf{p} = 0$) da cuenta de las oscilaciones del plasma, aunque esta última interpretación se cuestiona en la Ref. [57]. Estas dos situaciones físicas corresponden a tomar en la Ec. (4.42) $\alpha \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow \infty$, respectivamente, y analíticamente corresponden a lo siguiente

$$\tilde{\Pi}(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{4\omega^2} \frac{dn(k)}{dk} \left[-4 - \begin{cases} 0, & \alpha \rightarrow 0 \\ -4, & \alpha \rightarrow \infty \end{cases} \right]. \quad (4.43)$$

Por lo tanto, sustituyendo la Ec. (4.43) en la Ec. (4.39), se tiene

$$\Pi(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{k^2}{\omega_k^3} n(\omega_k) + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{dn(k)}{dk} \delta_{\alpha 0} \right\}, \quad (4.44)$$

donde $\delta_{\alpha 0}$ es la delta de Kronecker. Además se ha omitido el término de vacío. Nótese que haber preservado la masa desde el inicio evita las divergencias infrarrojas en la Ec. (4.44).

La no conmutación de los límites está asociada a la presencia de puntos rama de la función logarítmica de la Ec. (4.42). Estos puntos se hallan en $\alpha\omega_k = \pm k$ [56], en donde no hay que olvidar que el origen de este término resulta de la integración

angular, y que en general aparecen independientemente del método que se use para hacer las integrales en loops.

Como puede verse, la aproximación HTL permite obtener las contribuciones dominantes en la temperatura⁴ pero el procedimiento, a pesar de ser relativamente simple en el caso de dos propagadores, se vuelve complicado cuando hay más propagadores involucrados. En este tipo de circunstancias sería ideal, en analogía al caso de la teoría de campos a $T = 0$, implementar el uso del parámetro de Feynman que permite condensar la información de todos los propagadores, sin importar el número de estos, en un único factor. En la siguiente sección exploramos las condiciones bajo las cuales es posible implementar el parámetro de Feynman en el formalismo de tiempo imaginario, ya que, como hemos visto en el Cap. 3, la incorporación del campo hipemagnético externo complica la estructura funcional de los propagadores.

4.3. Parámetro de Feynman

La implementación del parámetro de Feynman a temperatura finita no es tan inmediata como en el caso de $T = 0$, la dificultad surge de la presencia de puntos rama, tal como se vió en la sección anterior. El empleo directo del parámetro de Feynman, tanto en el FTR como en el de FTI [58, 59] condujeron a diversos resultados erróneos [56]. No obstante, en el caso del FTR, se lograron establecer las bases para la aplicación metódica del parámetro de Feynman [60]. Para el uso del parámetro de Feynman en el FTI no hay literatura al respecto.

En esta sección se muestra la viabilidad del uso del parámetro de Feynman en el FTI en el límite infrarrojo ($p_0 = 0, \mathbf{p} \rightarrow 0$). La manera de mostrarlo es mediante el uso de diversas técnicas bien establecidas en el campo de temperatura finita, para el cálculo de loops, y comparar los resultados con aquellos en donde se usó el parámetro de Feynman. El procedimiento será el siguiente: a) Para determinar el límite infrarrojo usamos el método de Weldon⁵ [56] y tomamos ($\alpha = 0$), donde α es el cociente entre la componente cero del momento y la magnitud del 3-momento. b) Una vez que se tiene la estructura funcional para el loop, procedemos a usar la técnica de regularización dimensional usada por Dolan y Jackiw [38] para obtener los términos dominantes en la temperatura. c) Este resultado se compara con aquel obtenido de usar el parámetro de Feynman.

⁴En el sentido que, al no haber otra escala de energía presente en las integrales de momento –pues en la aproximación HTL se desprecia la masa– el resultado de las integrales esté en función de la única escala presente, la temperatura.

⁵El método consiste en calcular primero la suma sobre las frecuencias de Matsubara y la integración angular, y después, tomar el límite $p^\mu \rightarrow 0$ sobre una línea recta con inclinación arbitraria α , tal como la mostrada en la Fig. 4.3.

Del ejemplo de la sección anterior, tomamos el límite infrarrojo ($\alpha = 0$), esto es

$$\Pi(0, \mathbf{p} \rightarrow 0) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{n(\omega_k)}{\omega_k} + \frac{dn(k)}{dk} \right\}, \quad (4.45)$$

en esta expresión se han cancelado términos de masa que no comprometen la convergencia de la integral. En el primer término usamos el método de Dolan y Jackiw [38] (para detalles véase el apéndice B). Para el segundo término, el resultado es directo y resulta ser $\mathcal{O} \sim (T/m)$. Por lo tanto, el resultado final es

$$\Pi(0, \mathbf{p} \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left\{ \frac{\pi T}{m} + \ln \left(\frac{m}{4\pi T} \right) + \gamma_E - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right\}. \quad (4.46)$$

Al aplicar el parámetro de Feynman a la Ec. (4.35) el resultado es

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left\{ \frac{\pi T}{m} + \frac{1}{2\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu}{2\sqrt{\pi T}} \right) + \frac{\gamma_E}{2} - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right\}. \quad (4.47)$$

Este último resultado se obtiene mediante la aplicación del método que se desarrolla en la siguiente sección. Cabe mencionar que este último método usa regularización dimensional y no separa la parte de materia de la del vacío, y por ello aparece el término $(1/\epsilon)$. Una vez que se extrae la parte de vacío, ambos resultados coinciden, tal como se muestra en el apéndice B. Como puede notarse, en ambos casos los resultados coinciden exactamente. Este mismo procedimiento es empleado para una estructura funcional un poco más compleja y, al comparar ambos métodos, los resultados coinciden. Los detalles se muestran en el apéndice B.

Esto es aún tema de investigación, que surgió de manera paralela al cálculo central de esta tesis y actualmente se encuentra en pleno desarrollo. Sin embargo, los casos que se han probado con dos tipos de estructuras funcionales arrojan resultados alentadores. Lo anterior, aunado al hecho que los resultados dominantes en la temperatura que se obtienen en esta tesis coinciden con los de la Ref. [61] para el caso de la TFED sin campos magnéticos, nos hacen pensar que el uso del parámetro de Feynman arroja resultados correctos en el límite infrarrojo ($p_0 = 0, \mathbf{p} \rightarrow 0$).

En la siguiente sección se desarrolla un método que nos permite de manera simple obtener una expansión asintótica en el régimen de alta temperatura, y al mismo tiempo, nos indica la principal contribución de las escalas pequeñas en esté régimen.

4.4. Transformada de Mellin

Una de las técnicas que se emplean para obtener el comportamiento asintótico de sumas e integrales infinitas es la llamada transformada de Mellin [62]. El par de

funciones relacionadas por esta transformación, se define como

$$F(p) = \int_0^{\infty} dx f(x) x^{p-1}, \quad \alpha < \text{Re}(p) < \beta \quad (4.48)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) x^{-p}, \quad \alpha < c < \beta \quad (4.49)$$

donde $F(p)$ es la transformada de Mellin y $f(x)$ la transformada inversa.

El uso de esta transformada en sumas infinitas, se basa en lo siguiente: Supongamos que se tiene una suma que converge uniformemente de la forma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad (4.50)$$

donde $f(n)$ es alguna función, a la cual le corresponde una transformada de Mellin inversa $F(p)$, esto es

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) n^{-p}. \quad (4.51)$$

Sustituyendo la Ec. (4.51) en la Ec. (4.50) se tiene

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) n^{-p} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) \zeta(p), \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde $\zeta(p)$ es la función zeta de Reimann y el intercambio entre la suma e integral es posible debido a que hemos supuesto que la suma converge uniformemente en el contorno de integración [62] de p . Nótese que en la Ec. (4.52), el problema de hacer la suma sobre n se ha convertido en calcular la transformada de Mellin de $f(n)$.

En este trabajo, debido al uso del formalismo de tiempo imaginario para incorporar los efectos de la temperatura en el potencial efectivo, será común que encontremos sumas sobre frecuencias de Matsubara de la forma

$$S = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\omega_n^{2t} \mathbf{k}^{2a}}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}, \quad (4.53)$$

donde ω_n es la frecuencia de Matsubara, ya sea de bosón o fermión, y μ es el factor de escala empleado en métodos de regularización dimensional. El procedimiento que a continuación se detalla está basado en la Ref. [63].

Aprovechando que el sumando es par, en la suma infinita bastará con tomar el doble de las frecuencias positivas. En el caso muy particular de $t=0$ y frecuencias de

bosones, el término $n = 0$ se calculará por separado. Teniendo en cuenta lo anterior, las sumas a realizar serán de la forma

$$S = 2T \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\omega_n^{2t} \mathbf{k}^{2a}}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.54)$$

En este tipo de cálculos la contribución de vacío no se ha aislado, es por lo tanto de esperarse que algunas veces el resultado contenga divergencias, pero éstas son en general divergencias ultravioletas que provienen de la parte del vacío de los propagadores. Por otro lado, la invariancia de norma del modelo estándar en la fase simétrica demanda implementar el esquema de regularización dimensional, el cual preserva la invariancia de norma, de ahí la escala de adicional μ de la Ec. (4.53), que preserva las unidades globales de energía.

En lo que sigue, se procederá a implementar la técnica de la transformada de Mellin a la Ec. (4.54), en donde identificamos $f(n)$ como

$$f(n) = \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\omega_n^{2t} \mathbf{k}^{2a}}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma} \quad (4.55)$$

Por lo tanto, si usamos la Ec. (4.52), sólo resta encontrar la transformada de Mellin de la Ec. (4.55). Aplicando la definición de la Ec. (4.49), se tiene

$$F(p) = \int_0^\infty d\omega_n \omega_n^{p-1} \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\omega_n^{2t} \mathbf{k}^{2a}}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.56)$$

Para realizar esta integral, la idea básica es pensar que la integral sobre ω_n es la integral radial del vector ω_n en $2t+p$ dimensiones. Para llevar a cabo esto, multiplicamos y dividimos por el ángulo sólido, esto es

$$F(p) = \mu^{-d} \frac{\Gamma(\frac{2t+p}{2})}{2\pi^{\frac{2t+p}{2}}} \int d^{2t+p} \omega_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathbf{k}^{2a}}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma} \quad (4.57)$$

donde el ángulo en r dimensiones está dado por

$$\int d\Omega_r = \frac{2\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})}$$

y por lo tanto, la integral sobre ω_n ya contiene la integral del ángulo sólido en $2t+p$ dimensiones. Nótese que un tratamiento análogo puede realizarse con la integral sobre el momento, con lo cual se llega a

$$F(p) = \frac{(4\pi)^a \mu^{-d} \Gamma(\frac{2t+p}{2}) \Gamma(\frac{d+2a}{2})}{2\pi^{\frac{2t+p}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \int d^{2t+p} \omega_n \int \frac{d^{d+2a} k}{(2\pi)^{d+2a}} \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.58)$$

La combinación $\omega_n^2 + k^2$ nos permite llevar las dos integrales anteriores a una sola en donde la variable de integración ahora estará en un espacio de $2t + p + d + 2a$ dimensiones, esto es

$$F(p) = \frac{(4\pi)^{\frac{2t+p}{2}+a} \mu^{-d} \Gamma(\frac{2t+p}{2}) \Gamma(\frac{d+2a}{2})}{2 \Gamma(\frac{d}{2})} \int \frac{d^{2t+p+d+2a} k'}{(2\pi)^{2t+p+d+2a} (\mathbf{k}'^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.59)$$

De aquí la integración es inmediata y el resultado es

$$F(p) = \frac{\mu^{-d} \Gamma(\frac{2t+p}{2}) \Gamma(\frac{d+2a}{2}) \Gamma(\sigma - \frac{(2t+p+d+2a)}{2})}{2(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\sigma - \frac{(2t+p+d+2a)}{2}}. \quad (4.60)$$

Ya que hemos hecho la transformada de Mellin a partir de las frecuencias de Matsubara, en la Ec. (4.52) debemos hacer la transformada inversa en términos de ω_n , esto es

$$\begin{aligned} S &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) \omega_n^{-p} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-p} (n-s)^{-p} \\ &= 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp F(p) \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-p} \zeta(p, 1-s), \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde hemos usado $\omega_n = 2\pi(n-s)\beta^{-1}$, con $s = 0$ para bosones y $s = 1/2$ para fermiones, y $\zeta(p, 1-s)$ la función zeta de Reinmann generalizada. Nótese que para $n = 1$, la frecuencia de los fermiones es $\omega_1 = 2\pi(1 - 1/2)\beta^{-1}$, la cual concuerda con la frecuencia positiva más baja para los fermiones.

Sustituyendo la Ec. (4.60) en Ec. (4.61), se tiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu^{-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+2a}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\sigma - (2t+d+2a)} \\ &\quad \times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \Gamma\left(\frac{2t+p}{2}\right) \Gamma\left(\sigma - \frac{(2t+p+d+2a)}{2}\right) \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-p} \zeta(p, Z), \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde $Z = 1/2, 1$ para fermiones o bosones, respectivamente [64]. Nótese que la dependencia en p en el argumento de las funciones Γ aparece con signos contrarios, por lo tanto, el comportamiento asintótico de estas funciones se cancela, de modo que la convergencia del integrando dependerá únicamente del factor $(2\pi)/(\beta m)$, el cual determinará en el plano complejo de p , hacia donde cerrar el contorno de integración para realizar la integral.

Desde el punto de vista de nuestro problema, las condiciones presentes en el universo, justo antes de la transición de fase, en donde las partículas no tienen masa, excepto por su masa térmica, proporcional a la constante de acoplamiento, impone una jerarquía de escala de la forma $m < T$, o en términos del factor en cuestión $(2\pi)/(\beta m) > 1$. Con esta condición, el contorno de integración debe cerrarse hacia la derecha tal como se muestra en la Fig. (4.4).

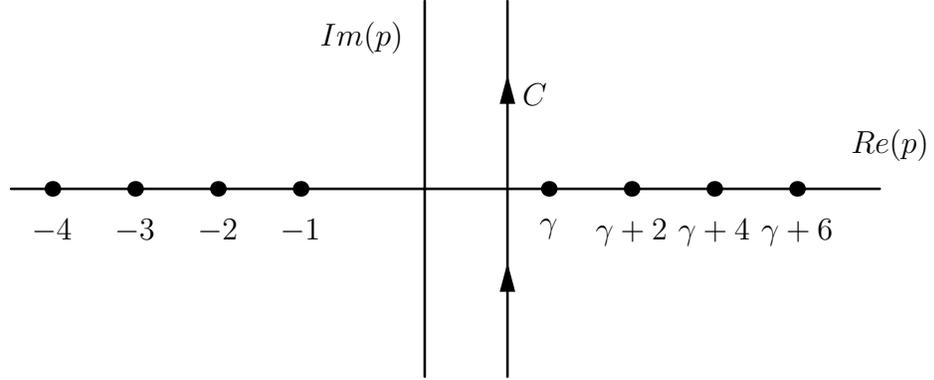


Figura 4.4: Contorno de integración, que consiste en un semicírculo que encierra los polos de la función $\Gamma(\sigma - t - p/2 - d/2 - a)$ con $\gamma = 2\sigma - 2t - d - 2a$.

Una vez que se ha determinado hacia donde cerrar el contorno de integración, por el teorema del residuo, el valor de la integral estará determinado por los polos que encierra dicho contorno, los cuales corresponden a los polos de la función $\Gamma(\sigma - (2t + p + d + 2a)/2)$. La función gamma tiene polos cuando su argumento toma valores enteros negativos, esto es

$$-j = \sigma - \frac{(2t + p + d + 2a)}{2} \Rightarrow p = 2j + 2\sigma - 2t - d - 2a$$

donde $j = 0, 1, 2, \dots$, y a los cuales corresponden los residuos $-2(-1)^j/j!$.

Por lo tanto, aplicando el teorema del residuo a la Ec. (4.62), se tiene que la suma es

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu^{-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+2a}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\sigma-(2t+d+2a)} \\ &\times (-2\pi i) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{-2(-1)^j}{j!} \Gamma\left(\frac{2j+2\sigma-d-2a}{2}\right) \right. \\ &\times \left. \zeta(2j+2\sigma-2t-d-2a, Z) \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-(2j+2\sigma-2t-d-2a)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Al simplificar la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2\mu^{-d}\Gamma(\frac{d+2a}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-2\sigma+2t+d+2a} \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j}{j!} \Gamma\left(j + \sigma - \frac{d}{2} - a\right) \zeta(2j + 2\sigma - 2t - d - 2a, Z) \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-2j} \right\};
\end{aligned} \tag{4.64}$$

nótese que este resultado es una expansión descendiente en términos del cociente $m/T < 1$. En el caso que hubiéramos cerrado el contorno hacia la izquierda, lo que habríamos encontrado sería una expansión ascendente en términos del cociente $m/T > 1$.

Retomando el caso muy particular $t = 0$ y frecuencias de bosones con $n = 0$ de la Ec. (4.53), que se ha excluido en el resultado anterior, se tiene

$$T\mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathbf{k}^{2a}}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma} = \frac{T\mu^{-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + a)\Gamma(\sigma - \frac{d}{2} - a)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\sigma-d-2a}. \tag{4.65}$$

Tomando en cuenta la Ec. (4.64), el resultado queda completo y contempla los casos que aparecerán en el cálculo del potencial efectivo.

La expansión asintótica de la Ec. (4.64) es central en este cálculo, pues de una sola vez se obtiene la contribución dominante en la temperatura en el límite infrarrojo. Con esta parte se completa la lista de herramientas que emplearemos a lo largo del cálculo del potencial efectivo del ME, que procedemos a analizar en lo que resta de la tesis.

Capítulo 3

Partículas en presencia de campos magnéticos

Como bien se sabe desde el punto de vista clásico, el movimiento de las partículas cargadas en presencia de un campo magnético externo deja de ser el de una partícula libre. Ello puede asociarse con el hecho de que la presencia del campo externo rompe con la isotropía del espacio, y por tanto, el movimiento en la dirección a lo largo del campo es diferente al de la dirección transversa. De hecho, hay un efecto muy conocido por medio del cual se estudia la presencia de campos magnéticos en el espacio exterior [40], *el efecto Faraday*, el cual consiste en la rotación de la polarización de fotones que viajan en presencia de un campo magnético.

Un hecho contundente del efecto de los campos magnéticos sobre la materia se observa en los superconductores, donde la transición a la fase superconductora pasa de segundo a primer orden. Esto resulta ser una característica muy importante en el contexto de la bariogénesis pues, como es sabido, la transición de fase electrodébil no es lo suficientemente de primer orden como para poder explicar la asimetría bariónica en el universo. Sin embargo, la posibilidad de modificar el orden de la transición de fase electrodébil, por medio de la inclusión de campos magnéticos, permite que la bariogénesis puede ser aún viable dentro del ME.

Para incorporar el efecto de campos magnéticos externos dentro de teorías del campo existen varias técnicas que tienen mayor o menor grado de utilidad, dependiendo del problema físico específico.

En este contexto, en este capítulo presento el método usado en los cálculos de esta tesis, el método de tiempo propio de Schwinger. He dividido el capítulo de la siguiente manera: En la Sec. 3.1 muestro en qué consiste el método del tiempo propio de Schwinger siguiendo muy de cerca el trabajo original [41]. En la Sec. 3.2 muestro de manera explícita como la presencia del campo magnético externo afecta directamente a la energía de las partículas, haciendo que ésta sea discreta en los llamados niveles de Landau. En la Sec. 3.3, en el límite de campo débil, se obtienen los primeros términos relevantes en el campo externo del propagador. Finalmente en la Sec. 3.4 encuentro

de manera muy simple la expansión de campo débil del propagador, abriendo la posibilidad de considerar el caso en el que la intensidad del campo externo es arbitraria en comparación con la masa de las partículas sobre las que actúa.

3.1. Método del Tiempo Propio de Schwinger

Existen al menos dos métodos muy usados para la incorporación de los efectos del campo magnético en las partículas en teorías de campo. Uno de ellos es el llamado método de las eigenfunciones de Ritus, el cual consiste en el uso de las eigenfunciones (E_p) del operador $(\gamma_\mu \Pi^\mu)^2$, que llevan la información de la presencia del campo externo, en vez de las funciones de ondas planas. Una vez que se tienen estas funciones se lleva a cabo el análogo a una transformada de Fourier de las funciones de Green de estas partículas. Desde el punto de vista práctico, el uso de estas funciones puede entenderse como una rotación entre el espacio de coordenadas y el de momentos. El método de Ritus ha sido ampliamente explotado en trabajos de catálisis magnética [42, 43] así como en la generación dinámica de masa [44].

En esta tesis, usamos el método del tiempo propio de Schwinger, el cual es un método elegante que introduce los efectos del campo magnético en los propagadores de partículas cargadas. Este método, fue desarrollado por Schwinger y Fock hacia el año de 1954, acepta soluciones exactas en el caso de campos magnéticos constantes y variación suave en el tiempo.

El método del tiempo propio de Schwinger fue introducido para calcular Lagrangianos efectivos, funciones de Green y otras cantidades en la aproximación a 1-loop para la electrodinámica cuántica. Una propiedad muy importante de este método es que las cantidades físicas que se obtienen son invariantes de norma. Asimismo, el procedimiento empleado por Schwinger en este método ha sido aplicado para el análisis de varios problemas con campo externo, por ejemplo, para calcular el operador de polarización. A continuación, mostramos a grandes rasgos en qué consiste el método del tiempo propio de Schwinger siguiendo muy de cerca el trabajo original [41]¹.

3.1.1. Propagador de fermiones cargados en presencia de un campo magnético

Buscamos una función de Green $G(x, x')$ que satisfaga la siguiente ecuación

$$H(x, i\partial_x)G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (3.1)$$

donde H es un polinomio de ∂_x . La idea es considerar H como un Hamiltoniano que describe la evolución en el tiempo propio de un sistema. Esta ecuación es justo la

¹En las Refs. [45, 46] se detalla de manera muy pedagógica el método de Schwinger.

definición de la función de Green de $H(x, p)$ en el espacio de configuración, en donde se satisface

$$\langle x|x' \rangle = \delta^4(x, x') \quad (3.2)$$

$$[x^\mu, p^\nu] = -ig^{\mu\nu}, \quad \text{con } p_\mu = i\partial_\mu. \quad (3.3)$$

Introduciendo el operador de evolución unitario $U(s)$

$$i\frac{\partial}{\partial s}U(x, x'; s) = H(x, p)U(x, x'; s), \quad (3.4)$$

donde

$$U(x, x'; s) \equiv \langle x(s)|x'(0) \rangle = \langle x|e^{-iHs}|x' \rangle \equiv \langle x|U(s)|x' \rangle. \quad (3.5)$$

En esta notación es más evidente que el operador $U(s)$ describe la evolución del sistema gobernado por el Hamiltoniano H en un tiempo s . y que evoluciona el estado $x(0)$ al estado $x(s)$. Por otro lado, este operador de evolución debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(s) = \delta^4(x, x'), \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} U(s) = 0. \quad (3.6)$$

donde la primera se sigue de la Ec. (3.2), y la segunda es una condición de causalidad.

Por lo tanto, de las Ecs. (3.5), (3.4) y las condiciones de frontera, se obtiene la solución de la Ec. (3.1), esto es

$$G(x, x') = -i \int_{-\infty}^0 ds U(x, x'; s). \quad (3.7)$$

Nótese que el problema de encontrar a $G(x, x')$ se ha convertido en determinar al operador de evolución $U(x, x'; s)$.

El procedimiento para obtener la forma funcional de $U(x, x'; s)$, consiste básicamente en expresar al operador $H(x, p)$ en términos de los operadores $x(s)$ y $x'(0)$, ordenados de manera tal que $x(s)$ esté a la izquierda de $x'(0)$. Esto último nos permitirá explotar las propiedades de los operadores de posición² y establecer una ecuación diferencial. Con lo anterior en mente, procedo a mostrarlo en detalle.

Derivando la Ec. (3.5) con respecto al tiempo propio y usando el hecho que el operador $U(s)$ es unitario, se tiene

$$\begin{aligned} i\partial_s \langle x(s)|x'(0) \rangle &= \langle x|H(x, p)U(s)|x' \rangle = \langle x|U(s)U^\dagger(s)H(x, p)U(s)|x' \rangle \\ &= \langle x(s)|H(x(s), p(s))|x'(0) \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

² $x'(0)|x'(0) \rangle = x'|x'(0) \rangle$ y $x(s)|x(s) \rangle = x|x(s) \rangle$.

Nótese que $H(x(s), p(s))$ depende de $p(s)$ pero puede ser expresado en términos de $x(s)$ al resolver las relaciones de Ehrenfest:

$$\frac{dx_\mu(s)}{ds} = i[H, x_\mu], \quad \frac{dp_\mu(s)}{ds} = i[H, p_\mu]. \quad (3.9)$$

Lo anterior indica que $H(x(s), p(s))$ es función de los operadores $x(s)$ y $x(0)$, por lo que al ser ordenados de manera que $x(s)$ esté a la izquierda de $x(0)$ y con ayuda del conmutador $[x(s), x(0)]$, es posible expresar el lado derecho de la Ec. (3.8) en términos de una función de los eigenvalores, $F(x, x'; s)$, es decir

$$\langle x(s)|H(x(s), p(s))|x'(0)\rangle = F(x, x'; s)\langle x(s)|x'(0)\rangle. \quad (3.10)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (3.8), obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para $U(x, x'; s)$ cuya solución es

$$U(x, x'; s) = C(x, x')e^{-i \int^s ds' F(x, x'; s')}, \quad (3.11)$$

donde la forma funcional de $C(x, x')$ se determina al resolver el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} [i\partial_\mu^x + eA_\mu(x)] \langle x(s)|x'(0)\rangle &= \langle x(s)|\Pi_\mu(s)|x'(0)\rangle \\ [-i\partial_\mu^{x'} + eA_\mu(x)] \langle x(s)|x'(0)\rangle &= \langle x(s)|\Pi_\mu(0)|x'(0)\rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

con $\Pi_\mu \equiv i\partial_\mu^x + eA_\mu$. Al igual que antes, la idea es expresar a los momentos $\Pi_\mu(s)$ y $\Pi_\mu(0)$ en términos de los operadores de posición $x(s)$ y $x(0)$ de manera ordenada. Por otra parte, para el lado izquierdo de las Ecs. (3.12) se usa de manera explícita la Ec. (3.11).

La anterior descripción muestra en detalle cada uno de los pasos empleados en el método de Schwinger. En lo que sigue se detalla el empleo de este procedimiento en el caso concreto de un propagador de fermión en la presencia de campo magnético externo.

Para una partícula de Dirac que interactúa con un campo externo, la función de Green $G(x, x')$ a encontrar, satisface lo siguiente

$$(i\cancel{\partial} + e\mathcal{A} - m)G(x, x') = \delta(x - x') \quad (3.13)$$

donde $\delta(x - x')$ es la función delta de Dirac y m la masa del campo de Dirac. Siguiendo los pasos empleados por Schwinger, donde se identifica $G(x, x')$ con los elementos de matriz de un operador G , esto es $G(x, x') = \langle x|G|x'\rangle$, tal que

$$(\cancel{\mathbb{A}} - m)G = 1, \quad (3.14)$$

con $\Pi_\mu = p_\mu + eA_\mu$ el momento canónicamente conjugado, el cual obedece las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\Pi_\mu, x_\nu] &= ig_{\mu\nu} \\ [\Pi_\mu, \Pi_\nu] &= ieF_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde el tensor de intensidades del campo de norma es $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La Ec. (3.14) puede resolverse formalmente haciendo uso de la identidad

$$G = \frac{1}{\mathbb{M} - m} = -i \int_0^\infty ds (\mathbb{M} + m) e^{-is(m^2 - \mathbb{M}^2)}. \quad (3.16)$$

La representación integral de G implica

$$G(x, x') = -i \int_0^\infty ds e^{-ism^2} \langle x' | (\mathbb{M} + m) U(s) | x \rangle, \quad (3.17)$$

donde $U(s) = e^{-iHs}$, con $H \equiv -(\mathbb{M})^2 = -\Pi^2 - \frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Nótese que $U(s)$ puede ser interpretado como un operador de evolución unitario si H es tomado como el Hamiltoniano efectivo que evoluciona los estados $|x\rangle$, esto es

$$|x(s)\rangle = U(s)|x(0)\rangle, \quad (3.18)$$

donde s es conocida como la variable de tiempo propio. Con esto, la Ec. (3.17) se reescribe como

$$G(x, x') = -i \int_0^\infty ds e^{-im^2s} [\gamma^\mu \langle x'(0) | \Pi_\mu(s) | x(s) \rangle + m \langle x'(0) | x(s) \rangle], \quad (3.19)$$

donde $\Pi_\mu(s)$ actúa sobre $|x(s)\rangle$, mientras que $\Pi_\mu(0)$ sobre $|x(0)\rangle$. En el caso de un campo de intensidades $F_{\mu\nu}$ constante, los operadores x_μ y Π_μ satisfacen las relaciones de Ehrenfest

$$\begin{aligned} \frac{dx_\mu}{ds} &= -i [x_\mu, H] = 2\Pi_\mu, \\ \frac{d\Pi_\mu}{ds} &= -i [\Pi_\mu, H] = -2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En notación de matriz $dx/ds = 2\Pi$ y $d\Pi/ds = -2eF\Pi$.

Para encontrar explícitamente la Ec. (3.19), necesitamos primero resolver la Ec. (3.20), de la cual se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= e^{-2eFs}\Pi(0), \\ x(s) - x(0) &= (1 - e^{-2eFs})(eF)^{-1}\Pi(0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Esta solución implica que

$$\begin{aligned}
 \Pi^2 &\equiv -H - \frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
 &= (x(s) - x(0))K(x(s) - x(0)), \\
 [x_\mu(s), x_\nu(0)] &= i(1 - e^{-2eFs})(eF)^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $K \equiv \frac{1}{4}(eF)^2 \sinh^{-2} eFs$.

Por lo tanto se tiene

$$\langle x'(0)|H|x(s) \rangle = -\frac{1}{2}e\sigma F - (x - x')K(x - x') - \frac{i}{2}\text{tr}(eF \coth eFs). \tag{3.23}$$

Sustituyendo el resultado de la Ec. (3.23) en la Ec. (3.8), es posible determinar $\langle x'(0)|x(s) \rangle$, esto es

$$\begin{aligned}
 \langle x'(0)|x(s) \rangle &= C(x, x')s^{-2} \exp \left[-\frac{1}{2}\text{tr} \ln[(eFs)^{-1} \sinh(eFs)] \right] \\
 &\times \exp \left[-\frac{i}{4}(x - x')eF \coth(eFs)(x - x') + \frac{i}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}s \right],
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

en donde el factor $C(x, x')$ se determina sustituyendo la Ec. (3.24) en las Ecs. (3.12). Haciendo uso de las Ecs. (3.21), el lado derecho de las Ecs. (3.12) está dado por

$$\begin{aligned}
 \langle x'(0)|\Pi(s)|x(s) \rangle &= \frac{1}{2}[eF \coth(eFs) - eF](x - x')\langle x'(0)|x(s) \rangle, \\
 \langle x'(0)|\Pi(0)|x(s) \rangle &= \frac{1}{2}[eF \coth(eFs) + eF](x - x')\langle x'(0)|x(s) \rangle;
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

con todo lo anterior, se tiene que las ecuaciones que satisface $C(x, x')$ son

$$\begin{aligned}
 \left[i\partial_\mu + eA_\mu(x) - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x' - x)^\nu \right] C(x, x') &= 0, \\
 \left[-i\partial'_\mu + eA_\mu(x') + \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x' - x)^\nu \right] C(x, x') &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para $C(x, x')$ se encuentra que

$$\begin{aligned}
 C(x, x') &= C'(x') \exp \left[ie \int_{x'}^x d\xi^\mu \left(A_\mu + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\xi - x')^\nu \right) \right] \\
 &= C(x) \exp \left[ie \int_{x'}^x d\xi^\mu \left(A_\mu + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\xi - x)^\nu \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde $C'(x')$ y $C(x)$ son constantes de integración de x' y x respectivamente.

Debido a que la fase es independiente del camino de integración que conecta x y x' , se puede mostrar que $C'(x') = C(x)$, por lo que estas son constantes independientes de x y x' . Aplicando la condición de frontera $\langle x(s)|x'(0) \rangle \rightarrow \delta^4(x - x')$ en el límite $s \rightarrow 0$, se tiene que la constante es

$$C = -i(4\pi)^{-2}, \quad (3.28)$$

donde se ha hecho uso de la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia^2x^2} dx = \sqrt{\frac{i\pi}{a^2}}. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, de las Ecs. (3.19), (3.24), (3.25) y (3.28), el propagador del electrón en presencia de un campo magnético constante es

$$G(x, x') = \Phi(x, x')\mathcal{G}(x, x'), \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x') &\equiv -(4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[m + \frac{1}{2} \gamma \cdot (eF \coth(eFs) - eF) (x - x') \right] \\ &\times \exp(-im^2s + \frac{i}{2} e\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s) \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \ln[(eFs)^{-1} \sinh(eFs)] \right. \\ &\left. - \frac{i}{4} (x - x') (eF \coth(eFs)) (x - x') \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\Phi(x, x') \equiv \exp \left\{ ie \int_{x'}^x d\xi^\mu \left[A_\mu + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\xi - x')^\nu \right] \right\}. \quad (3.32)$$

Nótese que la invariancia translacional se ha roto debido a la presencia de la fase $\Phi(x, x')$. Adicionalmente, el segundo término en la fase se anula si la trayectoria entre x y x' es una línea recta. En el caso de un campo magnético constante en la dirección z , tal que $F_{12} = -F_{21} = B$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2F_{12}\sigma_3 \equiv 2F_{12} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \\ \exp[-\frac{1}{2} \text{tr} \ln(F^{-1} \sinh F)] &= \frac{B}{\sin B}, \\ \gamma(F \coth F - F)x &= (\gamma \cdot x)_\parallel - \frac{B}{\sin B} (\gamma \cdot x)_\perp e^{iF_{12}\sigma_3}, \\ x(F \coth F)x &= x_\parallel^2 - B \cot B x_\perp^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

con $(a \cdot b)_\parallel \equiv a^0 b^0 - a^3 b^3$ y $(a \cdot b)_\perp \equiv a^1 b^1 + a^2 b^2$ para dos 4-vectores a^μ y b^μ arbitrarios.

Al usar las relaciones de la Ec. (3.33) en el propagador $\mathcal{G}(x, x')$ de la Ec. (3.31), éste se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &= -(4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp(-im^2s + ieBs\sigma_3) \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{4s} (x_\parallel^2 - eBs \cot(eBs) x_\perp^2) \right] \\ &\times \left[m + \frac{1}{2s} \left(\gamma \cdot x_\parallel - \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp(-ieBs\sigma_3) \gamma \cdot x_\perp \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La representación en el espacio de momento de la ecuación anterior se obtiene por medio de

$$\mathcal{G}(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \mathcal{G}(p), \quad (3.35)$$

en donde la parte translacionalmente invariante del propagador es

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p) &= \int d^4x e^{ipx} \mathcal{G}(x) \\ &= -i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp \left[is \left(p_\parallel^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_\perp^2 - m^2 + i\epsilon \right) \right] \\ &\times \left[\exp(ieBs\sigma_3) (m + \gamma \cdot p_\parallel) - \frac{\gamma \cdot p_\perp}{\cos(eBs)} \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para obtener esta última ecuación se ha tenido que hacer la integración espacial, la cual involucra integrales gaussianas.

Este método ha sido extendido al caso de otros campos como por ejemplo para bosones vectoriales el propagador es [47]

$$\begin{aligned} iG^{\mu\nu}(p) &= - \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp \left[is \left(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} - M^2 + i\epsilon \right) \right] \\ &\times \left\{ [g_\parallel^{\mu\nu} + g_\perp^{\mu\nu} \cos(2eBs)] + F^{\mu\nu} \frac{\sin(2eBs)}{B} - \left(\frac{1 - e^{is(1-\xi)M^2}}{M^2} \right) \right. \\ &\times \left[\left(p^\mu + p_\lambda F^{\mu\lambda} \frac{\tan(eBs)}{B} \right) \left(p^\nu + p_\rho F^{\rho\nu} \frac{\tan(eBs)}{eB} \right) \right. \\ &\left. \left. + i \frac{e}{2} (F^{\mu\nu} - g_\perp^{\mu\nu}) B \tan(eBs) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

El caso de campos escalares cargados se tiene que el propagador en el tiempo propio de Schwinger es [47]

$$iD^B(p) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp \left[is \left(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - m^2 + i\epsilon \right) \right]. \quad (3.38)$$

Nótese que en el límite $B \rightarrow 0$ y con ayuda de la identidad

$$\frac{1}{q^2 + i\epsilon} = -i \int_0^\infty ds e^{is(q^2 + i\epsilon)} \quad (3.39)$$

se recuperan las expresiones conocidas para los propagadores de Feynman libres en el vacío. Cabe mencionar, sin embargo, que el límite $B \rightarrow 0$ no garantiza que la fase de la Ec. (3.32) se anule, por lo que formalmente, el límite que debe emplearse es $A \rightarrow 0$. No obstante, en este trabajo estamos interesados en el cálculo del potencial efectivo, que diagramáticamente es representado por burbujas de vacío, de modo que la fase se anula idénticamente en estos diagramas.

3.2. Niveles de Landau

Debido a que el cálculo del potencial efectivo consiste en burbujas de vacío, que no dependen del momento externo, el factor de fase de la Ec. (3.32) se anula.

En cálculos que involucran el campo magnético, es bien sabido que los grados de libertad ortogonales al campo se discretizan. Ello se debe a que las partículas cargadas alrededor de las líneas de campo sufren el efecto de la fuerza de Lorentz, obligándolas a describir trayectorias circulares. Es debido a esta condición de frontera que el movimiento ortogonal al campo se discretiza. Aunque en la expresión de los propagadores los niveles de Landau no se ven de manera explícita, es posible, por medio de la integración del tiempo propio, mostrar que éstos están presentes.

Para ejemplificarlo, procedo a hacer el cálculo explícito en el caso del propagador de una partícula escalar cargada. Con el cambio de variable $eBs \rightarrow s$ en la Ec. (3.38), tenemos

$$iD^B(k) = \frac{1}{eB} \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(s)} e^{i\frac{s}{eB} (k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan s}{s} - m^2 + i\epsilon)}. \quad (3.40)$$

El integrando en la Ec. (3.40) es analítico en el semi-plano inferior del plano complejo s , ya que todas las raíces de $\cos(s)$ están localizadas sobre el eje real. Por otro lado, el factor $i\epsilon$ en el exponente asegura que la integral se anule en el límite $s \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el contorno de integración se puede cerrar en el *IV* cuadrante, tal como se muestra en la Fig. (3.1). Aplicando el teorema integral de Cauchy, la Ec. (3.40) puede reescribirse como

$$iD^B(k) = \frac{-1}{eB} \int_{-i\infty}^0 \frac{ds}{\cos(s)} e^{i\frac{s}{eB} (k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan s}{s} - m^2 + i\epsilon)}. \quad (3.41)$$

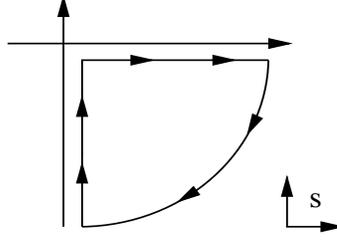


Figura 3.1: Contorno de integración en el plano s complejo para el cálculo de la integral del tiempo propio que representa los propagadores de partículas cargadas en presencia de un campo magnético.

Haciendo el cambio de variable $s = -i\tau$ por τ en la Ec. (3.41), con τ real, la Ec. (3.41) se convierte en

$$iD^B(k) = \frac{-i}{eB} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\cos(-i\tau)} e^{\frac{\tau}{eB}(k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan(-i\tau)}{(-i\tau)} - m^2 + i\epsilon)} \quad (3.42)$$

Nótese que esta integral converge si $\text{Re}(k_\parallel^2 - m^2 + i\epsilon) < 0$, lo cual es equivalente a considerar momentos en el espacio Euclidiano. Esto es útil en cálculos a temperatura finita, cuando se emplea el formalismo de tiempo imaginario, y también los momentos se toman en el espacio Euclidiano.

Haciendo uso de las identidades:

$$\cos(-i\tau) = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2}, \quad i \tan(-i\tau) = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}}, \quad (3.43)$$

expresadas en términos de la variable $u = e^{-2\tau}$:

$$\frac{1}{\cos(-i\tau)} = \frac{2u^{1/2}}{1+u}, \quad i \tan(-i\tau) = 1 - \frac{2u}{1+u}, \quad (3.44)$$

la Ec. (3.42) se escribe como

$$iD^B(k) = \frac{-2i}{eB} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{eB}(k_\parallel^2 - m^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{k_\perp^2}{eB} u^{1/2}} \frac{e^{\frac{2k_\perp^2}{eB} \left(\frac{u}{1+u}\right)}}{1+u}. \quad (3.45)$$

Nótese que la convergencia de la integral dependerá únicamente del argumento de la primera exponencial, ya que el resto del integrando es finito en el intervalo de integración. Esto impone la condición $(k_\parallel^2 - m^2 + i\epsilon)/eB < 0$, lo cual se garantiza para momentos en el espacio Euclidiano³.

³El resultado también es válido cuando $(k_\parallel^2 - m^2 + i\epsilon)/eB > 0$, es decir para momentos en el espacio de Minkowski, por medio de una continuación analítica [40].

En esta última ecuación aparece la función generatriz de los polinomios de Laguerre [40] $L_l(x)$, definida como

$$\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z} = \sum_{l=0}^{\infty} L_l(x) z^l. \quad (3.46)$$

Usando la Ec. (3.46) en Ec. (3.45) e intercambiando la integral por la suma se tiene

$$iD^B(k) = \frac{-2i}{eB} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l\left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB}\right) e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \int_0^{\infty} d\tau u^{l+1/2} e^{\frac{\tau}{eB}(k_{\parallel}^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (3.47)$$

Al evaluar explícitamente la integral sobre τ , se obtiene

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{\frac{\tau}{eB}(k_{\parallel}^2 - (2l+1)eB - m^2 + i\epsilon)} = \frac{-eB}{k_{\parallel}^2 - (2l+1)eB - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.48)$$

por lo tanto la expresión final del propagador es

$$iD^B(k) = 2i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l L_l\left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB}\right) e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{k_{\parallel}^2 - (2l+1)eB - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.49)$$

en donde aparecen explícitamente los llamados niveles de Landau, es decir, el término $(2l+1)eB$ [48].

Aplicando un procedimiento análogo para el caso del propagador de fermiones se obtiene [49]

$$iS_B(k) = i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l\left(\frac{k_{\perp}^2}{eB}\right) D + d'_l\left(\frac{k_{\perp}^2}{eB}\right) \bar{D}}{k_{\parallel}^2 - 2leB - m^2 + i\epsilon} + \frac{\not{k}_{\perp}}{k_{\perp}^2}, \quad (3.50)$$

donde $d_l(\alpha) \equiv (-1)^n e^{-\alpha} L_l^{-1}(2\alpha)$, $d'_n = \partial d_n / \partial \alpha$,

$$\begin{aligned} D &= (m + \not{k}_{\parallel}) + \not{k}_{\perp} \frac{m^2 - k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}, \\ \bar{D} &= \gamma_5 \not{k}_{\perp} (m + \not{k}_{\parallel}), \end{aligned} \quad (3.51)$$

y L_l , L_l^m son los polinomios de Laguerre y asociados de Laguerre respectivamente, y u^{μ} , b^{μ} son cuadri-vectores que describen el sistema en reposo del plasma y la dirección del campo magnético, respectivamente, es decir, $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, $b^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$.

En el caso de los bosones vectoriales cargados, el propagador escrito en términos de niveles de Landau es

$$iG^{\mu\nu}(k) = 2i \sum_{\lambda=-1}^1 T^{\mu\nu}(\lambda) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l L_l\left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB}\right) e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{k_{\parallel}^2 - (2l + \lambda + 1)eB - m^2 + i\epsilon} \quad (3.52)$$

donde

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(-|\lambda| + 1) + g_{\perp}^{\mu\nu} \left(\frac{|3\lambda| - 2}{2} \right) + i \frac{F^{\mu\nu}}{B} \left(\frac{\lambda}{2} \right), \quad (3.53)$$

con $F^{\mu\nu}$ el tensor de intensidades del campo electromagnético.

Cabe notar que en las Ecs. (3.49), (3.50), (3.52), el espín aparece explícitamente acompañando a los niveles de Landau, lo cual era de esperarse, ya que éste también está cuantizado y se acopla al campo externo.

Aunque las expresiones para los propagadores en las Ecs. (3.49), (3.50), (3.52) parecen manejables, es todo un reto llevar a cabo cálculos con ellas. En la práctica, es necesario tomar ciertos límites del campo magnético de acuerdo con el problema físico que esté bajo estudio. Los límites más socorridos son el llamado límite de campo fuerte y el límite de campo débil respecto a alguna cantidad física involucrada en el estudio.

El límite de campo fuerte ha sido ampliamente empleado en el contexto de campos magnéticos presentes en estrellas de neutrones. Asimismo, en el estudio del rompimiento de la simetría quiral [42], photon splitting [50], oscilaciones de neutrinos, polarización del fotón [40], etc.

El límite de campo fuerte es más simple de considerar, pues sólo basta con tomar el primer nivel de Landau del propagador. Por ejemplo, en el caso de una partícula escalar cargada, los niveles de energía están dados por

$$E_l = k_3^2 + (2l + 1)eB + m^2, \quad (3.54)$$

por lo que en presencia de un campo intenso la partícula no dispone de suficiente energía cinética para saltar entre los diferentes niveles de Landau, permaneciendo confinada en el nivel más bajo.

En el límite de campo débil esto no es tan simple y se requiere hacer una resumación de todos los niveles de Landau para obtener la contribución del campo magnético, ya que ahora todos los niveles son importantes. De hecho es posible obtener el propagador como una serie de potencias del campo magnético.

Por otro lado, diversos estudios muestran que la presencia de campos magnéticos primordiales pueden afectar de manera importante las anisotropías de la temperatura en la CMB, la formación de estructuras de gran escala así como la abundancia de elementos ligeros [51]. Este último hecho, en particular, impone una cota sobre la intensidad del campo externo, tal que la abundancia de elementos ligeros se preserve. Una estimación cuantitativa simple para la intensidad del campo externo se obtiene de requerir que la densidad de energía magnética $\rho_B \sim B^2$ sea menor que la densidad de la energía en forma de radiación $\rho_{rad} \sim T^4$ durante la nucleosíntesis. De esta condición se obtiene una cota para la intensidad del campo comparada con la temperatura: $(\mathbf{y}H) \lesssim T^2$ [52]. Además, para mantener condiciones de estabilidad, evitando la formación de modos taquionicos de los bosones W en la fase rota, es necesario que

la intensidad del campo sea menor que la masa de los bosones W , m_W [53]. No obstante, esta condición se vuelve menos restrictiva una vez que los efectos térmicos son tomados en cuenta [35], de modo que entre estas dos escalas no hay una jerarquía definida.

En esta tesis, trabajamos explícitamente con la jerarquía de escalas

$$\mathbf{v}H \ll m^2 \ll T^2 \quad (3.55)$$

donde m^2 es una masa genérica del problema, que contiene los efectos térmicos. La jerarquía entre la intensidad del campo y la masa surge naturalmente de considerar que en el desarrollo de la transición de fase las masas de las partículas crecen desde cero y son proporcionales a la temperatura, mientras que el valor del campo magnético se mantiene fijo. Bajo esta jerarquía de escalas, el límite que emplearemos es el de campo débil, el cual se procede a analizar en la siguiente sección.

3.3. Límite de Campo Débil

En esta sección mostramos el camino para obtener una expansión en potencias de eB del propagador escalar. Este camino sigue muy de cerca la idea empleada por la Ref. [49] en donde se hace la expansión de campo débil para el propagador de fermiones.

Para el caso del propagador escalar, partimos de la Ec. (3.49) y la reescribimos como

$$iD^B(k) = 2i \frac{e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l L_l \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right)}{1 - (2l+1)eB/(k_{\parallel}^2 - m^2)}. \quad (3.56)$$

Dada la jerarquía de escalas, discutida al final de la sección anterior, el sumando de la Ec. (3.56) puede ser reemplazado por una serie geométrica, esto es

$$\frac{1}{1 - (2l+1)eB/(k_{\parallel}^2 - m^2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{eB[2l+1]}{k_{\parallel}^2 - m^2} \right)^j. \quad (3.57)$$

Al sustituir la Ec. (3.57) en la Ec. (3.56), el propagador escalar se reescribe como

$$iD^B(k) = \frac{i}{(k_{\parallel}^2 - m^2)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{eB}{k_{\parallel}^2 - m^2} \right)^j \left\{ 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) (2l+1)^j \right\}. \quad (3.58)$$

Por otro lado, la suma entre llaves

$$S_j \equiv \left\{ 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) (2l+1)^j \right\} \quad (3.59)$$

puede ser calculada de manera explícita por medio de la siguiente identidad

$$f(x) \equiv \frac{e^{-i\left(\frac{k_{\perp}^2}{eB}\right)\tan(x)}}{\cos(x)} = 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) e^{-i(2l+1)x}, \quad (3.60)$$

de la cual se sigue que para una determinada j , S_j se obtiene haciendo

$$S_j = i^j \left. \frac{d^j f}{dx^j} \right|_{x=0}. \quad (3.61)$$

Por lo tanto, calculando explícitamente para un número pequeño de j , por ejemplo $j = 15$, es posible identificar las series, esto es

$$\begin{aligned} iD^B(k) = & \frac{i}{(k_{\parallel}^2 - m^2)} \left[1 + \frac{k_{\perp}^2}{(k_{\parallel}^2 - m^2)} + \frac{k_{\perp}^4}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^2} + \frac{k_{\perp}^6}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^3} \right. \\ & + \frac{k_{\perp}^8}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^4} + \frac{k_{\perp}^{10}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^5} + \frac{k_{\perp}^{12}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^6} + \frac{k_{\perp}^{14}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^7} \\ & + \frac{k_{\perp}^{16}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^8} + \frac{k_{\perp}^{18}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^9} + \frac{k_{\perp}^{20}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{10}} + \frac{k_{\perp}^{22}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{11}} \\ & + \frac{k_{\perp}^{24}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{12}} + \frac{k_{\perp}^{26}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{13}} + \frac{k_{\perp}^{28}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{14}} + \frac{k_{\perp}^{30}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{15}} \\ & - \frac{(eB)^2}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{5k_{\perp}^2}{(k_{\parallel}^2 - m^2)} + \frac{14k_{\perp}^4}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^2} + \frac{30k_{\perp}^6}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^3} \right. \\ & + \frac{55k_{\perp}^8}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^4} + \frac{91k_{\perp}^{10}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^5} + \frac{140k_{\perp}^{12}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^6} + \frac{204k_{\perp}^{14}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^7} \\ & + \frac{285k_{\perp}^{16}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^8} + \frac{385k_{\perp}^{18}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^9} + \frac{506k_{\perp}^{20}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{10}} + \frac{650k_{\perp}^{22}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{11}} \\ & \left. \left. + \frac{819k_{\perp}^{24}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{12}} + \frac{1015k_{\perp}^{26}}{(k_{\parallel}^2 - m^2)^{13}} \right) \right] \quad (3.62) \end{aligned}$$

en donde se ve que la primera serie corresponde a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (3.63)$$

para $x = k_{\perp}^2/(k_{\parallel}^2 - m^2)$. La segunda, que va acompañada de coeficiente $(eB)^2$, corresponde a la combinación de las series

$$\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^4} = 1 + 5x + 14x^2 + 30x^3 + 55x^4 + 91x^5 + \dots \quad (3.64)$$

entonces sustituyendo las Ecs. (3.63, 3.64) en la Ec. (3.62) y después de un poco de álgebra, se tiene que el propagador escalar expandido hasta orden $(eB)^2$ es

$$iD^B(k) \xrightarrow{eB \rightarrow 0} \frac{i}{k^2 - m^2} \left\{ 1 - \frac{(eB)^2}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{2(eB)^2 k_\perp^2}{(k^2 - m^2)^3} \right\}. \quad (3.65)$$

En el caso del propagador de fermiones de la Ec. (3.50) el resultado de aplicar el anterior procedimiento es

$$iS(k)_B = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} + \frac{\gamma_5 \not{\not{k}} (\not{k}_\parallel + m)(eB)}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{2(eB)^2 k_\perp^2}{(k^2 - m^2)^4} \left(m + \not{k}_\parallel + \not{k}_\perp \frac{m^2 - k_\parallel^2}{k_\perp^2} \right), \quad (3.66)$$

que concuerda con la el resultado de la Ref. [49].

Finalmente el propagador de bosones vectoriales cargados, en la norma $\xi = 1$, en el límite de campo débil es

$$iG_B^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - m^2} - \frac{2eF^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} + i(eB)^2 \frac{(g^{\mu\nu} - 4g_\perp^{\mu\nu})}{(k^2 - m^2)^3} + i(eB)^2 \frac{2g^{\mu\nu} k_\perp^2}{(k^2 - m^2)^4}. \quad (3.67)$$

Esta última expresión no se empleará en el análisis del potencial efectivo, ya que los bosones de norma en la fase simétrica no se acoplan con el campo hipermagnético externo y por lo tanto su movimiento en el plasma no sufre el efecto del campo externo de manera directa.

3.4. Derivación Alternativa

En este trabajo, las condiciones durante la transición de fase electrodébil son tales que la aproximación de campo débil es suficiente para la descripción del problema. Sin embargo, y con miras a aplicaciones en donde la intensidad del campo magnético externo sea arbitraria, como por ejemplo, condiciones de campos magnéticos intensos en comparación con las masas de las partículas con las que interactúa, en esta sección mostraré una manera bastante simple de obtener los efectos del campo a diversas intensidades.

En el método del tiempo propio de Schwinger, los propagadores para las diversas partículas cargadas comparten diversas características, por tal motivo comenzaré escribiendo de manera general una cierta función que contenga esas características, esto es

$$F(f, eB) = \int_0^\infty ds e^{-sD^{-1}} e^{ik_\perp \left(s - \frac{\tan(eBs)}{eB} \right)} f(eBs) \quad (3.68)$$

en donde $f(eBs)$ es una función periódica en el intervalo $[0, \pi/eB]$ y D es el propagador de una partícula escalar. Nótese que las demás funciones involucradas en el integrando son fases, y por lo tanto la contribución de la integral está dictada básicamente por la amplitud de la función f . Por otro lado, usando propiedades de la integral reescribimos la Ec. (3.68) como

$$F(f, eB) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n\pi}{eB}}^{\frac{(n+1)\pi}{eB}} ds e^{-sD^{-1}} e^{ik_{\perp}^2(s - \frac{\tan(eBs)}{eB})} f(eBs), \quad (3.69)$$

en donde hemos dividido el intervalo de integración en términos del período de la función $f(eBs)$. Dependiendo de qué tipo de función se trate, ésta puede cambiar de signo de un intervalo a otro, esto es

$$f(eBs + n\pi) = \begin{cases} f(eBs) \\ (-1)^n f(eBs). \end{cases} \quad (3.70)$$

Usando la notación $f(eBs + n\pi) = a^n f(eBs)$ con $a = \pm 1$, junto con el cambio de variable $eBs = eBx + n\pi$ en la Ec. (3.69), ésta puede reescribirse como sigue

$$F(f, eB) = \frac{1}{1 - a e^{\frac{\pi}{eB}(-D^{-1} + ik_{\perp}^2)}} \int_0^{\frac{\pi}{eB}} ds e^{-sD^{-1}} e^{ik_{\perp}^2(s - \frac{\tan(eBs)}{eB})} f(eBs). \quad (3.71)$$

en donde además se ha usado el hecho que

$$\text{Re}(-D^{-1} + ik_{\perp}^2) < 0 \Rightarrow |e^{\frac{\pi}{eB}(-D^{-1} + ik_{\perp}^2)}| < 1, \quad (3.72)$$

lo cual nos permite usar la serie geométrica. Nótese que esta misma condición permite la convergencia de la Ec. (3.68).

Por otro lado, es fácil probar que si desplazamos una cantidad $-i\delta$ al intervalo de integración, el integrando es finito para cualquier tipo de función trigonométrica que presente un polo simple en $\pi/2$, pues el factor $\tan(eBs)$ en la exponencial elimina cualquier divergencia en ese punto.

Integrando por partes la Ec. (3.71), se obtiene

$$F(f, eB) = D \left[f(0) + i(eB)^2 k_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial(k_{\perp}^2)^2} F(f, eB) + F\left(\frac{\partial f}{\partial s}, eB\right) \right] \quad (3.73)$$

Ordenando términos,

$$\left[1 - iD(eB)^2 k_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial(k_{\perp}^2)^2} \right] F(f, eB) = D \left[f(0) + F\left(\frac{\partial f}{\partial s}, eB\right) \right] \quad (3.74)$$

invirtiendo el operador del lado izquierdo de la igualdad anterior

$$F(f, eB) = \left[1 - iD(eB)^2 k_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial(k_{\perp}^2)^2} \right]^{-1} D \left[f(0) + F\left(\frac{\partial f}{\partial s}, eB\right) \right] \quad (3.75)$$

resolviendo esta ecuación de manera iterativa, se obtiene

$$F(f, eB) = Z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f(eBs)}{\partial s^n} \Big|_{s=0} Z^n, \quad (3.76)$$

donde

$$Z = \left[1 - iD(eB)^2 k_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial (k_{\perp}^2)^2} \right]^{-1} D. \quad (3.77)$$

Nótese que en la serie que aparece en la Ec. (3.76), la derivada de la función $f(eBs)$, al ser evaluada en $s = 0$, sólo indica los cambios de signo entre los diferentes términos, y, en este caso, por tratarse de funciones trigonométricas, éstas sólo pueden tener signos alternados o iguales. Por lo tanto, la serie que se forma es en realidad una serie del tipo geométrica. Por ejemplo, en el caso de $f(eBs) = \sec(eBs)$ la serie asociada es de la forma

$$F(f, eB) = Z \frac{1}{1 - (eB)^2 Z^2}. \quad (3.78)$$

Cabe mencionar que durante la deducción de la Ec. (3.78) no se ha usado ningún tipo de aproximación, y por tanto la serie geométrica debe entenderse como una funcional. Para corroborar tal afirmación tomamos los dos límites conocidos, campo cero y campo fuerte, esto es

$$F(f, eB) = Z \frac{1}{1 - (eB)^2 Z^2} = \begin{cases} \xrightarrow{eB \rightarrow 0} D \\ \xrightarrow{eB \rightarrow \infty} Z \end{cases} \quad (3.79)$$

Por lo tanto una forma muy simple de obtener la aproximación de campo débil se resume en la siguiente expresión

$$F(f, eB) = \int_0^{\infty} ds e^{-sD_m^{-1}} \left\{ f(0) + sf'(0)eB + \left(\frac{1}{2}s^2 f''(0) - \frac{1}{3}is^3 f(0)k_{\perp}^2 \right) (eB)^2 \right\}, \quad (3.80)$$

donde se ha hecho uso de la Ec. (3.76) en el límite de campo débil. La integral sobre s se puede hacer término a término con lo cual se obtiene,

$$F(f, eB) = f(0)D + D^2 f'(0)eB - \frac{1}{6}iD (12f(0)k_{\perp}^2 D^3 + 6if''(0)D^2) (eB)^2. \quad (3.81)$$

En el caso de una partícula escalar cargada, donde la función $f(eBs) = \cos^{-1}(eBs)$, es fácil mostrar que el resultado obtenido de la Ec. (3.81) coincide con el de la Ec. (3.65).

Los resultados encontrados en este capítulo serán importantes cuando se analice el efecto del campo magnético en la transición de fase electrodébil. Sin embargo, dadas las condiciones de alta densidad y alta temperatura durante la misma, es necesario hacer un tratamiento basado en la teoría térmica de campos, por lo cual, en el siguiente capítulo, daré detalles generales de esta teoría. Por lo tanto, será hasta el capítulo V donde se hará uso de los propagadores en el límite de campo débil, en conjunción con las técnicas de teoría térmica de campos para el cálculo tanto de las autoenergías como del potencial efectivo.

Capítulo 4

Teoría térmica de campos

El estudio de la teoría térmica de campos (TTC) fue inicialmente motivado por problemas cosmológicos donde, la descripción de la evolución del universo temprano requiere de considerar también su evolución térmica. Más recientemente la TTC ha sido ampliamente usada en la física de las colisiones de iones pesados relativistas, donde se especula existe una transición de fase de la materia hadrónica a un nuevo estado de la materia conocido como el plasma de quarks y gluones. En este tipo de escenarios, una descripción en base a una teoría de campos en el vacío no es suficiente ya que las condiciones extremas de alta temperatura y densidad modifican las relaciones de dispersión de las partículas inmersas en ese tipo de medios. Un ejemplo que ha sido muy estudiado es el movimiento de un fotón en un plasma de QED super caliente y denso, en donde los efectos del medio se reflejan en que el fotón desarrolla una masa térmica, o de Debye, *i.e.*, el fotón en el medio “se vuelve masivo”. Debido a estos efectos y dado que estamos interesados en describir una etapa del universo en la cual éste se hallaba a la temperatura de la transición de fase electrodébil, del orden de 100GeV [1], es indispensable hacer uso de una formulación de la teoría de campos a temperatura finita para describir a las partículas que se mueven en es medio.

Existen al menos dos formulaciones de la TTC, la formulación de tiempo imaginario (FTI) y la formulación de tiempo real (FTR). Ambas están relacionadas por una transformación unitaria [54] cuando están escritas en términos de funciones de Green retardadas, y por lo tanto son físicamente equivalentes. Ambas son ampliamente usadas en el estudio de propiedades estáticas del sistema, como por ejemplo, la ecuación de estado, funciones de correlación, etc. Las diferencias entre estas dos formulaciones son a nivel de cálculo, esto es: en FTI, el tiempo se restringe al intervalo $[0, \beta]$ lo cual se traduce en la discretización de la componente temporal del momento, que eventualmente tiene que ser continuada analíticamente a valores reales. Este procedimiento no resulta nada trivial. En el caso de FTR, no hay necesidad de hacer una continuación analítica, pues la componente temporal del momento no es discreta, pero el precio a pagar es que se dobla el número de grados de libertad.

Parte II

Potencial Efectivo

Capítulo 5

Potencial Efectivo

Una de las piezas más importantes en el estudio del rompimiento de la simetría del estado base en un modelo basado en una teoría de campos es el potencial clásico, que describe las interacciones entre las diferentes partículas presentes en el modelo. Sin embargo, desde el punto de vista cuántico, el potencial clásico puede recibir contribuciones de fluctuaciones cuánticas que pueden ser capaces de cambiar el comportamiento del potencial clásico, de tal manera que, en las regiones en donde en un inicio el potencial clásico era estable, las correcciones cuánticas lo vuelvan inestable o provoquen que una simetría que se rompe espontáneamente a nivel clásico sea restaurada por los efectos cuánticos.

Los efectos de las correcciones cuánticas sobre la simetría fueron estudiados por primera vez por Coleman y Weinberg [65] en los 70's. En este trabajo, ellos mostraron que la simetría del estado base de la teoría se modificaba al incluir correcciones radiativas. Un año más tarde, Dolan y Jackiw [38] por un lado, y S. Weinberg [66] por otro, mostraron que los efectos de la temperatura en algunas teorías, pueden restaurar una simetría que estaba rota a temperatura cero. En ambos casos, la inclusión de las correcciones radiativas son fundamentales en el comportamiento de la simetría del estado base.

En este capítulo, se presenta con detalle el trabajo central de esta tesis. El capítulo se divide de la siguiente manera: en la sección 5.1 se hace una introducción muy breve del potencial efectivo. En la Sec. 5.2 se aplican las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores en el cálculo del potencial efectivo, calculando primero las autoenergías de los bosones del ME en presencia del campo hipermagnético externo, para finalmente calcular el potencial a 1-loop y anillo.

5.1. Generalidades

El potencial efectivo de una teoría dada, por construcción, considera todas las fluctuaciones cuánticas del vacío, por lo que no es posible tenerlo en forma cerrada.

No obstante, es posible utilizar el formalismo de la integral de trayectoria para hacer una expansión perturbativa en términos de las constantes de acoplamiento de tal modo que podemos obtener correcciones al potencial orden por orden. Este procedimiento se debe básicamente al trabajo de Coleman y Weinberg [65] en el caso de una teoría a temperatura cero, y, a Dolan y Jackiw [38] en el caso de temperatura finita.

En el método de integral de trayectoria, la funcional generatriz de las funciones de Green, en el caso de un campo escalar, está dada por

$$Z[J] \equiv e^{iW[J]} \quad (5.1)$$

$$= \langle 0^+ | 0^- \rangle_J$$

$$= \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) \right\}, \quad (5.2)$$

en donde ésta representa las transiciones del vacío al vacío, en presencia de una fuente externa J y $W[J]$ es la funcional generatriz de estos diagramas conectados, por medio de la cual el campo escalar clásico se define como

$$\begin{aligned} \phi_c &\equiv \frac{\delta W}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\langle 0^+ | \phi | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Este campo se denomina clásico en el sentido que será el que tome eventualmente un valor de expectación del vacío en ausencia de fuentes, *i.e.*, $J \rightarrow 0$, esto es

$$\langle \phi \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \phi_c. \quad (5.4)$$

Cuando se toma la serie de Taylor funcional de $W[J]$, los coeficientes de ésta son las funciones de Green de diagramas conectados de n puntos, esto es

$$W[J] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (5.5)$$

En esta expresión se condensan todas las posibles fluctuaciones cuánticas y, por lo tanto, al extender estas ideas al caso de temperatura finita, ésta será la energía libre que toma en cuenta todas las fluctuaciones cuánticas. Sin embargo, si se busca estudiar el comportamiento del estado base de la teoría, en donde la variable natural es el valor esperado del campo ϕ_c en el vacío, el potencial $W[J]$ no brinda esta información de manera directa. Pero al igual que en el caso termodinámico, el uso de otros potenciales puede facilitar la obtención de la información requerida del sistema. En completa analogía al caso termodinámico, en teoría de campos el “potencial” que nos brinda información sobre los efectos cuánticos al estado base es [67]

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int dx J(x)\phi_c(x), \quad (5.6)$$

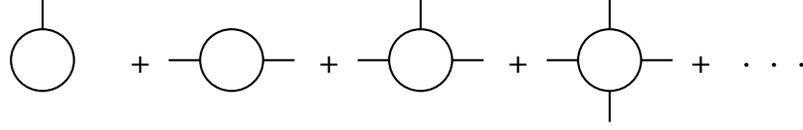


Figura 5.1: El potencial efectivo a 1-loop, consiste en una resumación de diagramas irreducibles de una partícula, con patas externas de momento cero. La expansión diagramática mostrada es para una teoría $\lambda\phi^3$.

el cual es la transformada funcional de Legendre de $W[J]$ y satisface

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c} = -J(x). \quad (5.7)$$

Al potencial de la Ec. (5.6) se le denomina *Acción Efectiva* del campo clásico ϕ_c [68], pues al igual que en el caso clásico, en ausencia de fuentes externas ($J(x) \rightarrow 0$), las configuraciones del campo ϕ_c quedan determinadas por los valores extremos de $\Gamma[\phi_c]$.

En términos de los diagramas de Feynman, $\Gamma[\phi_c]$ es la funcional generatriz de los diagramas irreducibles de 1-partícula, pues la serie funcional de Taylor de Γ es

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \cdots \phi_c(x_n), \quad (5.8)$$

donde los coeficientes dados por

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\delta^n \Gamma}{\delta\phi_c(x_1) \cdots \delta\phi_c(x_n)} \quad (5.9)$$

son precisamente las funciones irreducibles de 1-partícula de n puntos. La conexión con el potencial efectivo se pone en evidencia si en vez de hacer una serie de Taylor en términos de ϕ_c , se hace en términos de las derivadas de ϕ_c , esto es

$$\Gamma[\phi_c] = \int dx \left[-V(\phi_c) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c + \cdots \right], \quad (5.10)$$

donde la función $V(\phi)$ se conoce como el potencial efectivo [65]. Nótese que cuando ϕ_c es constante, los términos con derivadas se anulan. Es fácil mostrar que si los coeficientes de la Ec. (5.8) se expresan en términos de su transformada de Fourier, en el límite de momento externo yendo a cero, la conexión entre el potencial efectivo y las funciones irreducibles de 1-partícula de n puntos [9] es

$$U(\phi_c) = - \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) [\phi_c(x)]^n \quad (5.11)$$

Esta última relación contiene correcciones cuánticas a todos los órdenes. No obstante, es posible obtener una serie en potencias de \hbar . Sin embargo, a cada orden en \hbar le corresponde un número infinito de diagramas con diferentes inserciones de campo con momento cero [9], por lo que la contribución a 1-loop consiste en una resumación de estos diagramas, tal como se muestra en la Fig. 5.1. Cuando esta resumación se lleva a cabo, el resultado coincide con la expresión de la energía libre que calculamos en el Cap. 4 [9].

5.2. Modelo Estándar Electro débil

En este problema trabajaremos con los grados de libertad de la fase simétrica del modelo estándar, en el sentido que el valor de expectación del vacío es cero, razón por la cual las partículas no tienen masa. Sin embargo, éstas aparecen a lo largo del cálculo como funciones del “*vacuum expectation value*” (v), es decir, no se le asigna ningún valor definido al estado base. Por otro lado, como se sabe, partículas que se mueven en la presencia de un plasma desarrollan una masa térmica, usualmente llamada masa de Debye. Este tipo de masa es importante tomarla en cuenta en estos cálculos, pues regula el comportamiento infrarrojo, tal como lo veremos a lo largo de esta sección.

En esta primera parte calculamos las masas térmicas de los bosones de la teoría, ya que en este tipo de partículas, los fenómenos infrarrojos son muy importantes, al grado de hacer relevantes al potencial efectivo, términos de origen no perturbativo como los diagramas de anillo [28].

5.2.1. Autoenergías del Modelo Estándar

Como bien se sabe, en ausencia del campo magnético externo, las autoenergías del modelo estándar no dependen de la norma cuando se considera únicamente la contribución dominante en la temperatura [28]. Sin embargo, como veremos más adelante cuando se toman en cuenta los efectos del campo hipermagnético externo, las autoenergías se volverán dependientes de norma.

En lo que sigue, usaremos todas las herramientas desarrolladas en los primeros capítulos, como lo es la expansión en campo débil, así como la técnica de la transformada de Mellin para llevar a cabo, de una sola vez, las integrales y sumas de Matsubara en el cálculo de las autoenergías, así como en el caso del potencial efectivo.

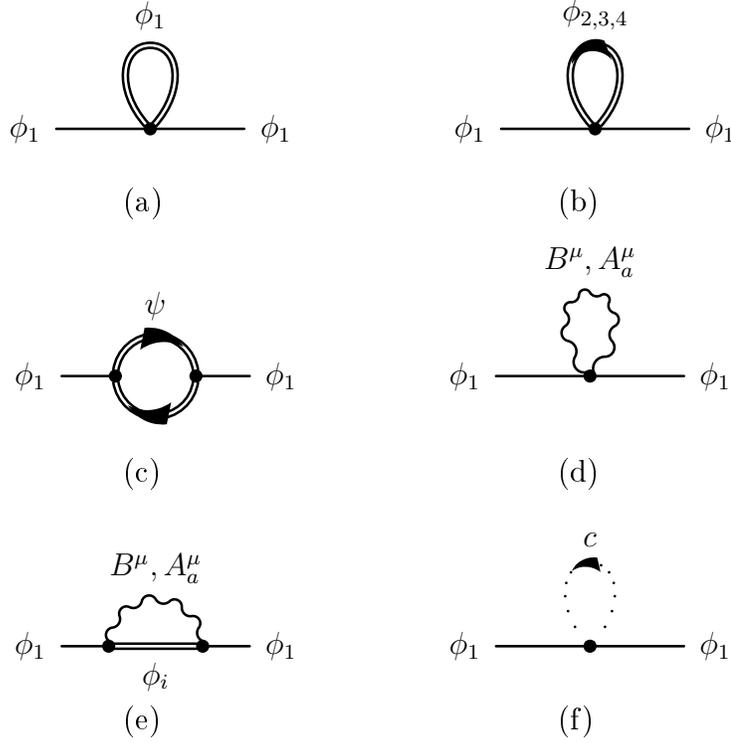


Figura 5.2: Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía del campo de Higgs. Las partículas del loop que se ven afectadas por la presencia del campo hipermagnético externo se muestran con línea doble. ϕ_i denotan las componentes del doblete de campos escalares complejos, ψ representa a los fermiones y c representa a los campos fantasmas. A_μ^a y B_μ son los campos de norma de $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente.

5.2.2. Boson de Higgs

En la Fig. 5.2 se muestran los diagramas que contribuyen a la autoenergía del campo de Higgs, en donde aquellas partículas que se ven afectadas por el campo hipermagnético externo son indicadas por líneas dobles.

Para mostrar la manera en la que son empleadas cada una de las herramientas desarrolladas en los capítulos previos, desarrollaré el cálculo explícito del diagrama de la Fig. 5.2(a), siguiendo las reglas de Feynman a $T = 0$ mostradas en el apéndice A para el sector del campo de Higgs, esto es

$$\Pi_{(a)}^{Higgs} = (-i6\lambda) \frac{1}{2} \int \frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4} D_H(k; m^2 \rightarrow m^2 + \Pi_1), \quad (5.12)$$

donde $D_H(k; m^2 \rightarrow m^2 + \Pi_1)$ es el propagador con campo magnético dado por la

Ec. (3.38) y el factor $1/2$ es un factor de simetría¹.

Nótese que la la Ec. (5.12) se calcula de manera autoconsistente, con la aproximación del lado derecho $\Pi_{(a)}^{Higgs} \rightarrow \Pi_1$, donde Π_1 está dada por [61]

$$\Pi_1 = \frac{T^2}{4} \left\{ \frac{3}{4}g^2 + \frac{1}{4}g'^2 + 2\lambda + f^2 \right\}, \quad (5.13)$$

y representa la principal contribución en la temperatura a la autoenergía del escalar. La necesidad de calcular de manera autoconsistente la autoenergía está relacionada, por un lado, con el hecho que en el ME, las masas de los escalares pueden anularse como función del *v.e.v.*, y por otro lado, la presencia del campo magnético origina términos inversamente proporcionales a las masas (véase Ec. (5.21)). Por lo tanto, para momentos suaves k , donde la contribución de los diagramas de anillo es relevante, una expansión perturbativa no es suficiente. Como bien se sabe, la corrección al comportamiento infrarrojo se da en términos de las propiedades de apantallamiento del plasma y, en el caso de la Ec. (5.12), tal corrección la hemos aproximado como la contribución principal en la temperatura a Π^{Higgs} , la cual una vez que es resumada, previene las divergencias infrarrojas más severas [38].

Ahora, para obtener el límite de campo débil y temperatura finita de la Ec. (5.12), usamos la Ec. (3.65) y la Ec. (4.32); se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)}^{Higgs} &= 3\lambda T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \tilde{m}^2)} \\ &\times \left(1 - \frac{(\mathbf{y}H)^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \tilde{m}^2)^2} + \frac{2(\mathbf{y}H)^2 \mathbf{k}_\perp^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \tilde{m}^2)^3} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde hemos usado la notación $\tilde{m}^2 = m^2 + \Pi_1$.

La Ec. (5.14), en general, contiene términos de la forma

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \tilde{m}^2]^\alpha [\omega_n^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \tilde{m}^2]^\beta}. \quad (5.15)$$

Haciendo uso del parámetro de Feynman $I_{\alpha\beta}$, se escribe como

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[\omega_n^2 + \mathbf{k}'^2(x) + m'^2(x)]^{\alpha+\beta}}, \quad (5.16)$$

¹Los factores de simetría dan cuenta del número de patas del vértice que ya no son diferentes y su función es eliminar el número de veces que se permutaron dos patas con momento diferente en el instante de simetrizar el vértice.

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{k}'(x) &= \mathbf{k} - (1-x)\mathbf{q} \\ m'^2(x) &= \tilde{m}^2 + x(1-x)\mathbf{q}^2,\end{aligned}\quad (5.17)$$

y Γ es la función Gama. Además, hay que notar que en el caso en que uno de los argumentos de la función $I_{\alpha\beta}$ sea cero, el uso del parámetro de Feynman no es necesario. Como ya se ha discutido en el Cap. 4, en el límite infrarrojo, el uso del parámetro de Feynman en el FTI arroja resultados correctos, ya que los puntos ramas se anulan [56].

La idea de usar la parametrización de Feynman es convertir las integrales a la forma de la Ec. (4.53), para emplear tanto la Ec. (4.64) como Ec. (4.65) para obtener una expansión asintótica en el límite de alta temperatura. Es importante hacer notar que este método utiliza el esquema de regularización dimensional, el cual es adecuado para teorías de norma no Abelianas [68].

En términos de las funciones $I_{\alpha\beta}$, la Ec. (5.14) se reescribe como

$$\Pi_{(a)}^{Higgs} = 3\lambda T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[I_{10}(\mathbf{k}, 0) + (\mathbf{y}H)^2 I_{30}(\mathbf{k}, 0) + \frac{4}{3}k^2 (\mathbf{y}H)^2 I_{40}(\mathbf{k}, 0) \right]. \quad (5.18)$$

En esta última expresión hemos usado que al integrar sobre k_\perp^2 , el resultado es equivalente a integrar sobre $2k^2/3$, ya que la integral no depende de la dirección del vector k .

Finalmente, usando la Ec. (4.64) y Ec. (4.65), el resultado en el límite de alta temperatura es

$$\Pi_{(a)}^{Higgs} = \lambda \left[\frac{T^2}{4} - \frac{3mT}{4\pi} - \frac{3m^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + \ln \left(\frac{\mu^2}{4\pi T^2} \right) \right) - \frac{T(\mathbf{y}H)^2}{32m^3\pi} \right]. \quad (5.19)$$

La contribución del diagrama de la Fig. 5.2(b) a la autoenergía del Higgs es

$$\Pi_{(b)}^{Higgs} = -i3\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_H(k, m_i), \quad (5.20)$$

y ya que esta contribución es igual a la Ec. (5.12), el resultado en el caso de los escalares se puede resumir en la siguiente expresión

$$\Pi^{Higgs} = \frac{\lambda}{2} T^2 \left(1 - \sum_{i=1}^2 \left[\frac{3}{2\pi} \frac{\tilde{m}_i}{T} + \frac{(\mathbf{y}H)^2}{16\pi T \tilde{m}_i^3} \right] \right), \quad (5.21)$$

donde $\tilde{m}_i^2 = m_i^2 + \Pi_1$, con m_i la masa de los bosones escalares dadas por

$$\begin{aligned}m_1^2 &= 3\lambda v^2 - c^2 \\ m_2^2 &= m_3^2 = m_4^2 = \lambda v^2 - c^2.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Cabe mencionar que el término \tilde{m}/T surge de la frecuencia de Matsubara $n = 0$.

En el caso del diagrama de la Fig. 5.2(c), el procedimiento es el siguiente:

$$\Pi_{(c)}^{Higgs} = -3 \frac{f^2}{4} \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S_H(k)S_H(k-p)], \quad (5.23)$$

donde (-3) se debe a que son fermiones y hay tres colores, y S_H es el propagador de fermiones con campo hipermagnético en su expansión de campo débil de la Ec. (3.66). Para el cálculo de la traza, usamos la aproximación HTL para el numerador, *i.e.*, despreciamos todos aquellos términos en el numerador que dependen del momento externo. Una vez hecho esto, el cálculo de trazas a orden $(\mathbf{y}H)^2$ es

$$\begin{aligned} \Pi_{(c)}^{Higgs} = & -3f^2 \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \left[\frac{(k^2 + m^2)}{(k^2 - m_f^2)((k-q)^2 - m_f^2)} \right. \\ & \left. + (\mathbf{y}H)^2 \frac{k_{\parallel}^2 + m^2}{(k^2 - m_f^2)^2((k-q)^2 - m_f^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para obtener la contribución dominante en temperatura, primero usamos la Ec. (4.32) para obtener la expresión a temperatura finita, después usamos parametrización de Feynman, para finalmente usar la Ec. (4.64) con $Z = 1/2$ pues son fermiones.

Por lo tanto, la contribución del quark *top* a la autoenergía del Higgs en el límite infrarrojo, *i.e.*, $q_0 = 0$, $\mathbf{q} \rightarrow 0$, es

$$\Pi_{(c)}^{Higgs}(0) = \frac{f^2}{4} T^2 \left(1 + \frac{14\zeta(3)}{(2\pi)^4} \frac{(\mathbf{y}H)^2}{T^4} \right), \quad (5.25)$$

en donde de aquí en adelante usaremos la notación $\mathcal{F}(0) \equiv \mathcal{F}(q_0 = 0, \mathbf{q} \rightarrow 0)$ para representar el límite infrarrojo de cualquier función \mathcal{F} . Nótese que en este caso no aparece un término del tipo m/T , puesto que la frecuencia de Matsubara más baja de fermiones es distinta de cero.

Para el diagrama de la Fig. 5.2(d), el cálculo es simple, ya que el boson de norma no se acopla con el campo hipermagnético externo. Siguiendo un procedimiento análogo al empleado con los otros tres diagramas, la contribución dominante en la temperatura con loop de bosones de norma es

$$\Pi_{(d)}^{Higgs}(0) = \frac{1}{16} (3g^2 + g'^2) T^2. \quad (5.26)$$

Es importante hacer notar que tanto en la Ec. (5.21) como en la Ec. (5.25), aparte de la contribución dominante en T , hemos mantenido tres diferentes tipos de términos $(\mathbf{y}H)^2/T^4$, \tilde{m}_i/T y $(\mathbf{y}H)^2/T\tilde{m}_i^3$. Por jerarquía de escalas, el primer tipo de términos puede ser despreciado sin ningún problema. Es común que en la expansión de alta temperatura los términos del orden \tilde{m}_i/T sean despreciados con respecto a T . Sin

embargo, ya que en estos cálculos estamos interesados en mantener la contribución dominante en el campo hipermagnético, esto nos obliga a mantener el segundo tipo de términos. Además, para una masa del orden de la masa del quark top, este tipo de términos son del mismo orden que el término $(\mathbf{y}H)^2/T\tilde{m}_i^3$.

El diagrama de la Fig. 5.2(e) es proporcional al parámetro de norma ξ , y por lo tanto, en la norma de Landau, su contribución es nula. En el caso de la Fig. 5.2(f), en la norma de Landau, los fantasmas se desacoplan del Higgs y por lo tanto éste diagrama no existe.

Finalmente, sumando las contribuciones de los diferentes sectores a la autoenergía del Higgs en el límite infrarrojo, se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi^{Higgs}(0) &= \frac{T^2}{4} \left\{ \frac{3}{4}g^2 + \frac{1}{4}g'^2 + 2\lambda + f^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{3(m_i^2 + \Pi_1)^{1/2}}{T} + \frac{(\mathbf{y}H)^2}{8T(m_i^2 + \Pi_1)^{3/2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Cabe mencionar que el resultado anterior, el término divergente $\sim m^2(1/\epsilon + \dots)$ de la Ec. (5.19) no está presente. Aunque no se muestra de manera explícita, esto se debe a que la contribución del vacío ha sido substraída. Por otro lado, el coeficiente del término $\sim m^2$ que resulta de este proceso ahora finito y no aparece en la Ec. (5.27) debido a que su contribución es despreciable comparada con T^2 .

5.2.3. Bosones de Norma

Para expresar la autoenergía de los bosones de norma en la presencia del campo hipermagnético externo, disponemos de tres vectores independientes para formar estructuras transversas al momento del bosón q^μ , a saber, u^μ , q^μ y b^μ . A partir de estos vectores es posible, en general, escribir a la autoenergía como una combinación lineal de 9 estructuras independientes [40]. Sin embargo, ya que estamos interesados en el límite infrarrojo $q_0 = 0, \mathbf{q} \rightarrow 0$, solo disponemos de u^μ y b^μ . Nótese que la simetría correcta para la autoenergía es $\Pi_{ab}^{\mu\nu}(q) = \Pi_{ab}^{\nu\mu}(-q)$ [69]. Sin embargo, en el límite infrarrojo, esta condición permite que la autoenergía sea simétrica bajo el intercambio de los índices de Lorentz y por lo tanto podemos escribir la autoenergía como

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu} = \Pi_{ab}^Q Q^{\mu\nu} + \Pi_{ab}^R R^{\mu\nu} + \Pi_{ab}^S S^{\mu\nu} + \Pi_{ab}^M g^{\mu\nu}, \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= u^\mu u^\nu, \\ R^{\mu\nu} &= b^\mu b^\nu, \\ S^{\mu\nu} &= u^\mu b^\nu + u^\nu b^\mu, \end{aligned} \quad (5.29)$$

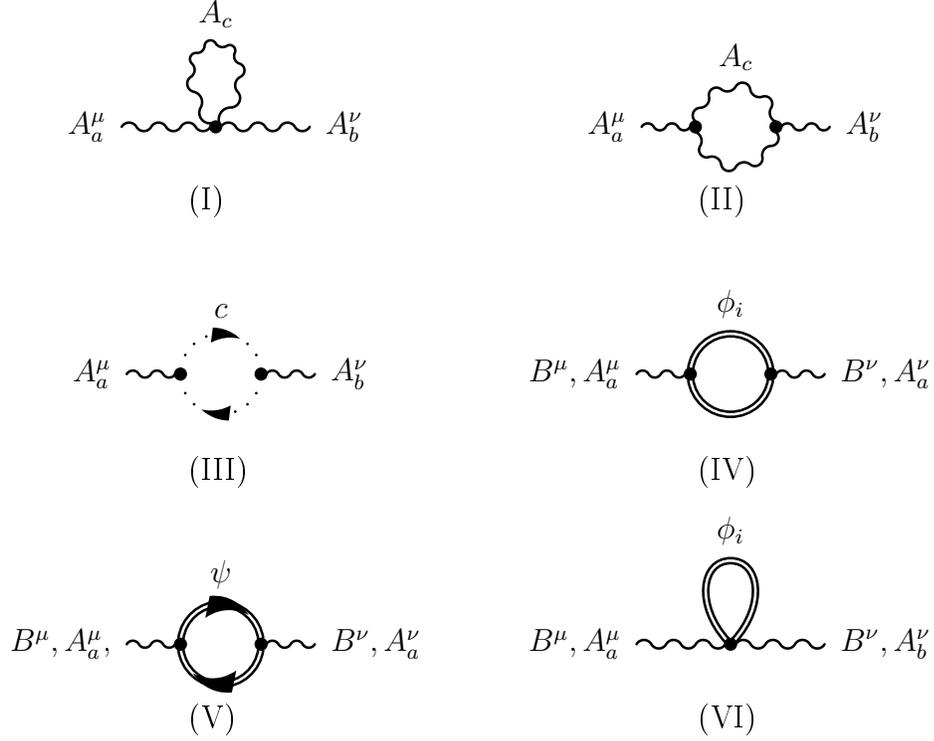


Figura 5.3: Diagramas de Feynman que contribuyen a la autoenergía de los campos de norma A_μ^a y B_μ , de $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. Las partículas del loop que se ven afectadas por la presencia del campo hipermagnético externo son aquellas con línea doble. ϕ_i denotan las componentes del doblete de Higgs, ψ representa a los fermiones y c los campos fantasmas.

y la condición de transversalidad $q_\mu \Pi_{ab}^{\mu\nu} = 0$ se satisface trivialmente en el límite infrarrojo.

En la Fig. 5.3, se muestran las diversas contribuciones a la autoenergía de los bosones de norma, en donde las partículas que son afectadas por la presencia del campo externo se denotaron con doble línea. Al igual que en el caso del campo de Higgs, se procede a calcular cada uno de ellos.

En esta parte, es importante mencionar que en la aproximación HTL, la contribución más dominante en la temperatura no depende del parámetro de norma ξ [28]. Para mostrar este hecho procederé a calcular ésta contribución. Al diagrama de la Fig. 5.3(I) le corresponde la expresión

$$\Pi_{(I)ab}^{\mu\nu} = -\frac{g^2}{2}(2\delta_{ab}) \int \frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{2(2+\xi)g^{\mu\nu} + 2(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m^2}}{k^2 - m^2}. \quad (5.30)$$

Para obtener la componente “00” de este tensor, contraemos con el tensor $u^\mu u^\nu$, donde u^μ es el cuadri-vector en donde el plasma se halla en reposo. Una vez hecho

esto, aplicamos la Ec. (4.64) y Ec. (4.65), para obtener la expansión asintótica en la temperatura; con esto se obtiene

$$\Pi_{(I)ab}{}^{00} = g^2 \delta_{ab} \frac{1 + \xi}{4} T^2 \quad (5.31)$$

Ahora al diagrama de la Fig. 5.3(II) le corresponde

$$\Pi_{(II)ab}{}^{\mu\nu} = \frac{g^2}{2} (2\delta_{ab}) \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{2(6 - \xi)k^\mu k^\nu + 2\xi k^2 g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)((k - p)^2 - m^2)}. \quad (5.32)$$

Procediendo de la misma forma que en el caso del diagrama anterior, la contribución dominante en la temperatura es

$$\Pi_{(II)ab}{}^{00} = g^2 \delta_{ab} \frac{2 - \xi}{4} T^2. \quad (5.33)$$

Finalmente, el diagrama mostrado en la Fig. 5.3(III) es el último que contribuye al sector puramente de norma, explícitamente dado por

$$\Pi_{(III)ab}{}^{\mu\nu} = -2g^2 \delta_{ab} \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 (k - p)^2} \quad (5.34)$$

y su contribución a alta temperatura es

$$\Pi_{(III)ab}{}^{00} = -g^2 \delta_{ab} \frac{T^2}{12}. \quad (5.35)$$

Sumando estas tres contribuciones, la autoenergía de los bosones de norma de $SU(2)$ es

$$\Pi_{SU(2)ab}{}^{00} = \frac{2}{3} g^2 T^2; \quad (5.36)$$

como vemos, el resultado a alta temperatura no depende del parámetro de norma, tal como era de esperarse.

Nótese que, en el caso de los diagramas que son afectados por el campo hiper-magnético externo, las patas externas pueden ser de bosones de norma de $SU(2)$ ó $U(1)$. Por lo tanto, la forma de proceder será realizar primero el cálculo con un loop genérico y después contar los grados de libertad en el ME.

Comenzando con el diagrama de la Fig. 5.3(IV), su contribución es

$$\Pi_{(IV)B}{}^{\mu\nu}(q) = \left(\frac{g'}{2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2k^\mu - q^\mu)(2k^\nu - q^\nu) D_H(k) D_H(k - q). \quad (5.37)$$

donde el subíndice B denota al campo B^μ de $U(1)$. Además no hay que olvidar que D_H es el propagador escalar en el límite de campo débil de la Ec. (3.65). Nótese que

la hipercarga neta que fluye en el loop es cero, y por lo tanto, el factor de fase de la Ec. (3.32) se anula.

Al igual que en los casos anteriores, para obtener la componente “00” a temperatura finita con los efectos del campo externo, primero contraemos la Ec. (5.37) con el tensor $u^\mu u^\nu$, para entonces aplicar la Ec. (4.32) y obtener para un solo campo escalar, lo siguiente

$$\begin{aligned} \Pi_{(IV)B}{}^{00}(0) &= -g'^2 T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_n^2 \{ I_{11}(\mathbf{k}, 0) \\ &+ (\mathbf{y}H)^2 [I_{13}(\mathbf{k}, 0) + I_{31}(\mathbf{k}, 0) + 2\mathbf{k}_\perp^2 I_{14}(\mathbf{k}, 0) + 2\mathbf{k}_\perp^2 I_{41}(\mathbf{k}, 0)] \}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde hemos puesto el resultado en términos de las funciones $I_{\alpha\beta}$ definidas en la Ec. (5.16). Cabe mencionar que en el sistema en donde el medio está en reposo se tiene que $\Pi_{(I)B}{}^{00} = \Pi_{(IV)B}^Q + \Pi_{(IV)B}^M$. Además, ya que la integral en la Ec. (5.37) no da origen a términos inversamente proporcionales a m , en este caso no es necesaria la sustitución $m^2 \rightarrow m^2 + \Pi_1$.

Usando la Ec. (4.64) y Ec. (4.65) en la Ec. (5.38), manteniendo los términos dominantes, tal como fue discutido al final de la Sec. 5.2.2, obtenemos

$$\Pi_{(IV)B}{}^{00}(0) = \frac{g'^2}{12} T^2, \quad (5.39)$$

donde la contribución de los 4 campos escalares reales ya ha sido considerada.

La expresión para el diagrama de la Fig 5.3(V), para un fermión izquierdo, es

$$\Pi_{(V)B}{}^{\mu\nu}(q) = - \left(\frac{g'}{4} \right)^2 \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} Tr[\gamma^\mu (1 - \gamma_5) S_H(k) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) S_H(k - p)]. \quad (5.40)$$

En estos diagramas la contribución del campo hipermagnético externo es subdominante, y su principal contribución en el límite infrarrojo se halla en la componente “00” la cual es puramente térmica, esto es

$$\Pi_{(V)B}{}^{00}(0) = \left(\frac{g'}{4} \right)^2 \frac{2}{3} T^2. \quad (5.41)$$

Para hallar la contribución completa del sector fermiónico al campo B^μ de $U(1)$, debemos tener presente que el operador de hipercarga \mathbf{y} tiene un eigenvalor determinado (véase el Cuadro 2.1), dependiendo del fermión sobre el que actúa. La Ec. (5.41) estará multiplicada por la suma de las hipercargas de todos los fermiones, esto es

$$\Pi_{(V)B}{}^{00}(0) = 40 \left(\frac{g'}{4} \right)^2 \frac{2}{3} T^2. \quad (5.42)$$

En el caso de los bosones de norma A^μ de $SU(2)$, el resultado difiere de la Ec. (5.41) por un factor $2\delta_{ab}$. Procediendo como en el caso de $U(1)$, el factor es el número de dobletes izquierdos del ME. Por lo tanto, para los bosones de norma $SU(2)$, la contribución de fermiones es

$$\Pi_{(V)A_{ab}}{}^{00}(0) = 12 \times 2\delta_{ab} \left(\frac{g}{4}\right)^2 \frac{2}{3} T^2. \quad (5.43)$$

Finalmente, el diagrama de la Fig 5.3(VI) es directo, pues la topología del diagrama es la misma que la de la Fig. 5.2(a), por lo que el resultado es

$$\Pi_{(VI)B}{}^{00}(0) = \frac{g'^2}{12} T^2 \left(1 - \sum_{i=0}^4 \left[\frac{3}{4\pi} \frac{\tilde{m}_i}{T} + \frac{1}{32\pi} \frac{(\mathbf{y}H)^2}{T\tilde{m}_i^3} \right] \right), \quad (5.44)$$

el cual será el mismo para los bosones de norma de $SU(2)$. Nótese que al igual que en el diagrama de la Fig. 5.2(a), en este diagrama aparece un término del tipo $\sim 1/\tilde{m}_i^3$; todo parece indicar que es la topología del diagrama la que induce la aparición de este tipo de términos. En el cálculo de estos diagramas es necesario hacer el reemplazo $m^2 \rightarrow m^2 + \Pi_1$ (véase la discusión en la Sec. 5.2.2).

Es fácil ver que la suma de todas las contribuciones al bosón de norma de $U(1)$ es la misma que la de bosones de norma de $SU(2)$, por lo tanto el resultado para los bosones de norma del modelo estándar electrodébil es

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^{00} &= \tilde{g}^2 \frac{11}{6} T^2 \left(1 - \sum_{i=0}^4 \left[\frac{3}{88\pi} \frac{(m_i^2 + \Pi_1)^{1/2}}{T} + \frac{1}{704\pi} \frac{(\mathbf{y}H)^2}{T(m_i^2 + \Pi_1)^{3/2}} \right] \right) \delta_{ab} \\ &\equiv \tilde{g}^2 \Pi_G(T, H) \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde $\tilde{g} = g$ para $a = b = 1, 2, 3$ y $\tilde{g} = g'$ para $a = b = 4$.

Tal como se muestra en el apéndice C, las otras componentes no nulas de la autoenergía de los bosones de norma, con origen en el loop de fermiones, son despreciables

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^{11} = \Pi_{ab}^{22}, \quad \Pi_{ab}^{33} &\sim \mathcal{O}(m_i^2) \\ \Pi_{ab}^{03} = \Pi_{ab}^{30} &\sim \mathcal{O}(\mathbf{y}H), \end{aligned} \quad (5.46)$$

por lo que $\Pi_{ab}^{00} \simeq \Pi_{ab}^Q$.

Nótese que en la Ec. (5.45) no se han incluido términos del orden $\mathcal{O}(M_{ab}/T)$, donde M_{ab} es la matriz de masas de los bosones de norma. Estas masas son proporcionales a $\tilde{g}v$ mientras que para valores grandes de f , \tilde{m}_i es proporcional a fv . Por lo tanto, términos del orden de $\mathcal{O}(\tilde{M}_{ab}/T)$ son más pequeños que los términos del orden $\mathcal{O}(\tilde{m}_i/T)$. Estos términos en principio pueden ser calculados mediante la diagonalización de M_{ab} o trabajando explícitamente con los grados de libertad de la fase rota. En realidad esto último es parte de un trabajo que está en proceso y que eventualmente explorará la dependencia del parámetro de norma de las autoenergías y el potencial efectivo [70].

Es importante hacer notar que la contribución de anillo de los fermiones es subdominante ya que éstos no presentan los fenómenos infrarrojos de los bosones por lo que no necesitan ser tomados en cuenta.

5.2.4. Potencial Efectivo

En el ME el potencial a nivel árbol está dado por,

$$V_{tree}(v) = -\frac{1}{2}c^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4. \quad (5.47)$$

El potencial efectivo a 1-loop recibe contribuciones de cada sector, esto es

$$V^{(1)}(v) = V_{gb}^{(1)}(v) + V_{Higgs}^{(1)}(v) + V_f^{(1)}(v), \quad (5.48)$$

donde cada una de estas contribuciones en general está dada por

$$V^{(1)}(v) = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\ln [D(\omega_n, \mathbf{k})^{-1}]), \quad (5.49)$$

donde D puede referirse tanto al propagador escalar, como al fermiónico o al de norma, y la traza se toma sobre todos los índices internos.

En el límite de campo débil, la contribución del sector de Higgs es

$$\begin{aligned} V_{Higgs}^{(1)} &= \sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln[D_H^{-1}(\omega_n, \mathbf{k}; m_i^2 \rightarrow m_i^2 + \Pi_1)] \\ &\simeq \sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{Y}H)^2 \left[\frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1)^2} - \frac{2(k_\perp^2)}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1)^3} \right] \right\}. \quad (5.50) \end{aligned}$$

El primer término de la Ec. (5.50) con $\Pi_1 = 0$ representa la contribución a orden más bajo al potencial efectivo a temperatura finita y campo magnético nulo. Tal como lo hemos visto en el Cap. 4, esta contribución es la de *gas ideal* de bosones escalares [28]. Para mantener las correcciones más bajas en λ , hacemos $\Pi_1 = 0$ en la Ec. (5.50). Por lo tanto, con la jerarquía de escalas consideradas hasta el momento y omitiendo la contribución de la energía del punto cero, la contribución del sector escalar está dada por [38]

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2) \\
\simeq \sum_{i=1}^4 \left(-\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_i^2 T^2}{24} - \frac{m_i^3 T}{12\pi} - \frac{m_i^4}{32\pi^2} \ln\left(\frac{m_i}{4\pi T}\right) + \mathcal{O}(m_i^4) \right).
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Nótese que existe el término potencialmente peligroso m_i^3 en la Ec. (5.51) que éste puede volverse imaginario para valores negativos de m_i . Sin embargo, como se verá más adelante, este término se cancela cuando se incluyen correcciones al Higgs provenientes de los diagramas de anillo.

El término que depende de H en la Ec. (5.50) se anula idénticamente [48], esto es inmediato si integramos por partes el segundo término que depende de H , esto es

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4}{3}\right) T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{k}^2 f(\mathbf{k})^3 = & - \left(\frac{1}{3}\right) T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \nabla_k \cdot (\mathbf{k} f(\mathbf{k}^2)) \\
& + \left(\frac{1}{3}\right) T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}^2) \nabla_k \cdot \mathbf{k},
\end{aligned} \tag{5.52}$$

donde $f(\mathbf{k}) = (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^{-1}$ y además se ha usado $k_\perp^2 = 2k^2/3$, pues cabe recordar que al integrar sobre k_\perp^2 el resultado es equivalente a integrar sobre $2k^2/3$ ya que la integral no depende de la dirección del vector k . Nótese que el primer término de la Ec. (5.52), es un término de superficie que se anula en infinito, y por lo tanto, usando $\nabla_k \cdot \mathbf{k} = 3$, el resultado se sigue. Entonces, en el límite de campo débil, el potencial efectivo del sector de Higgs a 1-loop es independiente del campo hipermagnético de modo que su contribución es solamente la de gas ideal de la Ec. (5.51).

En el límite de campo débil, la contribución del sector de fermiones está dada por²

$$\begin{aligned}
V_f^{(1)} &= \sum_{i=1}^{N_f} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\ln[S_H^{-1}(\omega_n, \mathbf{k}; m_{f_i})]] \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N_f} 2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_{f_i}^2] + 2(\mathbf{y}H)^2 \frac{\omega_n^2 + k_3^2 + m_{f_i}^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_{f_i}^2)^3} \right\},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

donde la suma corre sobre el número de fermiones del ME, N_f , con masas $m_{f_i} = \frac{f}{\sqrt{2}}v$. Hemos de enfatizar que la única masa que se mantiene en el análisis es la masa del quark top.

²El cálculo explícito del propagador inverso del fermión se muestra en el Apéndice E.

Al igual que en el caso de los bosones, el primer término en la Ec. (5.53) representa la contribución de *gas ideal* de fermiones [28], la cual es explícitamente dada por [38]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_f} 2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_{f_i}^2] \\ \simeq \sum_{i=1}^{N_f} \left\{ -7 \frac{\pi^2 T^4}{180} + \frac{m_{f_i}^2 T^2}{12} + \frac{m_{f_i}^4}{16\pi^2} \ln \left(\frac{m_{f_i}^2}{T^2} \right) + \mathcal{O}(m_{f_i}^4) \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Ahora, usando la Ec. (4.65) para fermiones, la contribución con campo hipermagnético de la Ec. (5.53) al potencial a 1-loop de fermiones, es

$${}^2V_f^{(1)} = \frac{2(\mathbf{Y}H)^2}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{7\xi(3)}{2\pi^2} \frac{m_{f_i}^2}{T^2} + \ln \left(\frac{4\mu^2}{\pi T^2} \right) + \gamma_E + \frac{2}{3} \right], \quad (5.55)$$

donde el índice a la izq. indica el orden en el campo externo del término bajo estudio. Este resultado, dado el procedimiento para obtener la expansión asintótica de alta temperatura de la Ec. (4.65), contiene tanto la contribución del vacío como la de materia. Sin embargo, la parte puramente térmica no es divergente ya que la distribución estadística regula el comportamiento ultravioleta [28]. Por lo tanto, sustrayendo la parte de vacío de la Ec. (5.55), el resultado es

$${}^2V_f^{(1)} = \frac{(\mathbf{Y}H)^2}{(4\pi)^2} \left(1 + 2\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\pi^2 T^2} \right) - \frac{7}{2} m^2 \zeta(3) \beta^2 \right). \quad (5.56)$$

La parte de vacío se obtiene fácilmente haciendo la suma sobre las frecuencias de Matsubara por métodos tradicionales y aislando la parte que no tiene temperatura. Para este caso, el término de vacío es

$${}^2V_{f \text{ vac}}^{(1)} = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{3}{16\omega_k^5}. \quad (5.57)$$

A primera vista, la contribución del campo hipermagnético de la Ec. (5.56) se vuelve importante para los fermiones ligeros. Sin embargo, esto no es cierto, pues, al igual que en el caso de los bosones, en el límite de masa cero, la masa térmica de los fermiones se vuelve importante (del orden $\sim fT^2$). Esto hace que el término de logaritmo se vuelva constante, y por lo tanto, la contribución de este término al potencial efectivo, dada la jerarquía de escalas, es subdominante. De esto se concluye que la principal contribución del sector fermiónico al potencial efectivo a 1-loop, proviene solamente de la parte del gas ideal de la Ec. (5.54), en el límite de campo débil. No obstante, existen otros cálculos [35, 36] en donde se afirma que los términos logarítmicos dependientes del cociente m/T (m la masa de un fermión, T la

temperatura), cuyo origen, según se asegura en esas referencias, es no perturbativo, vuelve menos fuerte de 1er orden la transición de fase. La validez de este análisis es cuestionable ya que tal comportamiento divergente debido a la masa de los fermiones ligeros, planteado en las Refs. [35, 36], no toma en cuenta los efectos de apantallamiento del plasma, y por lo tanto la contribución de la masa de Debye a la masa de los fermiones, lo que eventualmente evita que el término logarítmico diverja. Más aún, estos términos surgen también en el análisis de esta tesis, como se muestra en la Ec. (5.56), al substraer la contribución del vacío en el potencial efectivo de fermiones a 1-loop. Y tal como se ha mencionado, éstos no fueron tomados en cuenta en esta tesis ya que tienen una dependencia muy suave con el parámetro de orden, pudiendo ser aproximados por una constante, que puede sustraerse del análisis.

Finalmente, ya que en la fase simétrica los bosones de norma no se acoplan con el campo hipermagnético, el cálculo es directo y su contribución al potencial efectivo es [61]

$$\begin{aligned}
V_{gb}^{(1)} &= \sum_G \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln[(D_{ab}^{\mu\nu})^{-1}(\omega_n, \mathbf{k}; m_G)] \\
&\simeq \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 6 \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_W^2) + 3 \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_Z^2) \right. \\
&\quad \left. + 2 \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2) \right\}, \tag{5.58}
\end{aligned}$$

donde, en el lado derecho de la primera línea, el índice G corre sobre todos los bosones de norma de ME, y dado que este no depende de la base en la que se trabaja, en la segunda línea usamos la base de la matriz de masas, en donde $m_W^2 = g^2 v^2/4$ y $m_Z^2 = (g^2 + g'^2)v^2/4$. Los factores en frente de cada uno de estos términos corresponden a sus diferentes grados de libertad.

Usando la Ec. (5.51) en la Ec. (5.58), la contribución del sector de bosones de norma al potencial efectivo es

$$\begin{aligned}
V_{gb}^{(1)} &= -11 \frac{\pi^2 T^4}{90} + 3 \frac{(2m_W^2 + m_Z^2)T^2}{24} - \frac{(2m_W^3 + m_Z^3)T}{12\pi} \\
&\quad - 6 \frac{m_W^4}{32\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{4\pi T}\right) - 3 \frac{m_Z^4}{32\pi^2} \ln\left(\frac{m_Z}{4\pi T}\right) + \mathcal{O}(m_W^4). \tag{5.59}
\end{aligned}$$

En todas las expresiones para el potencial efectivo a 1-loop a temperatura finita, las divergencias ultravioletas son tratadas como en el caso del potencial fermiónico de la Ec. (5.56), y eventualmente son absorbidas al emplear un esquema de renormalización [71].

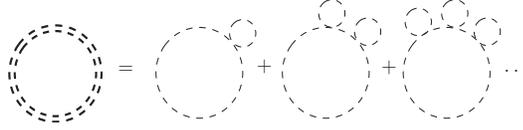


Figura 5.4: Representación esquemática de los diagramas de anillo, los cuales consisten en una resumación de diagramas con inserciones sucesivas de autoenergías en las burbujas de vacío de la energía libre.

5.2.5. Potencial efectivo de diagramas de anillo

Los llamados *diagramas de anillo*, descritos esquemáticamente en la Fig. 5.4, representan la siguiente contribución importante al potencial efectivo en el límite infrarrojo [28].

En el caso de los campos escalares, la contribución de éstos al potencial efectivo es

$$\begin{aligned} V_{Higgs}^{(ring)}(v) &= -\sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} [-D_H(\omega_n, \mathbf{k}; m_i) \Pi^{Higgs}(0)]^N \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln[1 + \Pi^{Higgs}(0) D_H(\omega_n, \mathbf{k}; m_i)], \end{aligned} \quad (5.60)$$

y en el caso de los bosones de norma, la contribución es

$$V_{gb}^{(ring)}(v) = -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} [-\Pi_{\mu\lambda}^{ab}(0) D_{bc}^{\lambda\nu}(\omega_n, \mathbf{k})]^N \right\}, \quad (5.61)$$

en donde no hay que perder de vista que estamos interesados en el límite de campo débil, y por lo tanto, los propagadores deberán ser tomados en su expansión de campo débil.

Nótese que la contribución dominante en las Ecs. (5.60) y (5.61) proviene del modo $n = 0$, pues en cada uno de los términos de la serie, donde el índice de la suma es N , es el término que presenta la divergencia mas severa y por lo tanto la necesidad de la resumación.

Para obtener la contribución dominante del campo hipermagnético externo al

potencial de anillo de los escalares, hacemos la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}
 \ln[1 + \Pi_H \Delta_H(k)] &\simeq \ln \left[1 + \frac{\Pi_1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1} \right] \\
 &+ \ln \left[1 - \frac{\Pi_1 (\mathbf{Y}H)^2 / (8\pi T (m_i^2 + \Pi_1)^{3/2})}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1} \right] \\
 &+ \ln \left[1 - \frac{\Pi_1 (\mathbf{Y}H)^2}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1} \right] \\
 &\times \left(\frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1)^2} - \frac{2k_\perp^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2 + \Pi_1)^3} \right) \Bigg].
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Con esta aproximación, la contribución con campo hipermagnético en el límite de campo débil al potencial de anillo es [48]

$$V_{Higgs}^{(ring)} = - \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{T}{12\pi} \left[(m_i^2 + \Pi_1)^{3/2} - m_i^3 \right] - \frac{(\mathbf{Y}H)^2}{4\pi} \left(\frac{\Pi_1}{48} \right) \left(\frac{T}{(m_i^2 + \Pi_1)^{3/2}} \right) \right\} \tag{5.63}$$

donde la contribución de todos los escalares ya ha sido tomada en cuenta.

En el caso de los bosones de norma, el resultado no es tan directo, pues no se dispone de una ecuación tan simple como en el caso de los bosones escalares, puesto que el producto de matrices $\Pi_{\mu\lambda}^{ab}(0) D_{bc}^{\lambda\nu}(\omega_n, \mathbf{k})$ en la fase simétrica no es diagonal. Sin embargo, de la Ec. (5.45) tenemos que $\Pi^{ab}(0)$ es diagonal en el espacio del grupo de norma. Entonces, podemos usar la misma matriz que diagonaliza a la matriz de masas dada explícitamente por

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_W^H & \sin \tilde{\theta}_W^H \\ -\sin \tilde{\theta}_W^H & \cos \tilde{\theta}_W^H \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

donde $\tilde{\theta}_W^H$ es el ángulo de Weinberg modificado por la temperatura y el campo hipermagnético. Por otro lado, en el espacio de Lorentz, la versión Euclidiana del propagador de los bosones de norma en la norma de Landau puede ser escrito como

$$D_{\mu\nu} = \left\{ P_{\mu\nu}^L + P_{\mu\nu}^T \right\} \frac{1}{k^2 + m^2}, \tag{5.65}$$

donde

$$\begin{aligned}
 P_{00}^T = P_{0i}^T = 0 & \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j \\
 P_{\mu\nu}^L = \delta^{\mu\nu} & - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - P_{\mu\nu}^T.
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

Es fácil ver que si consideramos sólo el término dominante en el producto, entonces $\Pi_{\mu\lambda}(0)D^{\lambda\nu}(\omega_n, \mathbf{k})$

$$\Pi_{\mu\lambda}D^{\lambda\nu} = \frac{\Pi_{ab}^Q}{k^2 + m^2} \left[1 + \frac{(k \cdot u)^2}{k^2} \right] Q_\mu^\nu. \quad (5.67)$$

Tomando el término estático, $n = 0$, y la traza en la Ec. (5.61), obtenemos

$$\begin{aligned} V_{gb}^{(ring)}(v) &= - \sum_G \frac{1}{2} T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[1 + \frac{\Pi_{ab}^Q}{\mathbf{k}^2 + m_G^2} \right] \\ &= - \frac{T}{12\pi} \{ 2m_W^3(T, H) + m_Z^3(T, H) + m_\gamma^3(T, H) - 2m_W^3 - m_Z^3 \}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

donde $m_G(T, H)$ están dadas explícitamente por

$$\begin{aligned} m_W^2(T, H) &= m_W^2 + g^2 \Pi_G \\ m_Z^2(T, H) &= \frac{1}{2} \left\{ m_Z^2 + (g^2 + g'^2) \Pi_G \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[m_Z^2 + (g^2 + g'^2) \Pi_G]^2 - 8 \frac{g^2 g'^2 \Pi_G}{(g^2 + g'^2)} [m_Z^2 + \frac{(g^2 + g'^2)}{2} \Pi_G]} \right\} \\ m_\gamma^2(T, H) &= \frac{1}{2} \left\{ m_Z^2 + (g^2 + g'^2) \Pi_G \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{[m_Z^2 + (g^2 + g'^2) \Pi_G]^2 - 8 \frac{g^2 g'^2 \Pi_G}{(g^2 + g'^2)} [m_Z^2 + \frac{(g^2 + g'^2)}{2} \Pi_G]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Aprovechando estas definiciones, la matriz de la Ec. (5.64), se escribe como

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{g[m_W^2(T, H) - m_\gamma^2(T, H)]}{\sqrt{g'^2 m_W^4 + g^2 [m_\gamma^2(T, H) - m_W^2(T, H)]^2}} & \frac{g' m_W^2}{\sqrt{g'^2 m_W^4 + g^2 [m_\gamma^2(T, H) - m_W^2(T, H)]^2}} \\ - \frac{g' m_W^2}{\sqrt{g'^2 m_W^4 + g^2 [m_\gamma^2(T, H) - m_W^2(T, H)]^2}} & \frac{g[m_W^2(T, H) - m_\gamma^2(T, H)]}{\sqrt{g'^2 m_W^4 + g^2 [m_\gamma^2(T, H) - m_W^2(T, H)]^2}} \end{array} \right); \quad (5.70)$$

esta matriz, en el límite $H \rightarrow 0$, coincide con la matriz de la Ref. [71].

El ángulo de Weinberg a temperatura finita, es

$$\tan \tilde{\theta}_W = \frac{g' m_W^2}{g[m_W^2(T, H) - m_\gamma^2(T, H)]} \quad (5.71)$$

en donde es claro que, en el límite de campo cero y $T = 0$, el ángulo de Weinberg toma el valor conocido de la fase rota. Por el contrario, en el límite de muy alta temperatura,

éste se vuelve cero, pues en esa región de energías, las masa de los bosones de norma son de origen totalmente térmico ($\sim T^2$). Esto representa otra forma de visualizar la restauración (rompimiento) de la simetría a altas (bajas) temperaturas, pues en ése límite $\tan \tilde{\theta}_W \sim 0$ (g'/g) y por lo tanto los campos de norma $A^{a\mu}$ de $SU(2)$ y B^μ de $U(1)$ no se mezclan (se mezclan) para formar los bosones de la fase rota Z y γ .

Nótese que tanto las correcciones de temperatura como las del campo magnético a las masas de los bosones de norma están concentradas en Π_G . Además, en el límite $H \rightarrow 0$, las masas de los bosones de norma tienden a las masas térmicas usuales [61]

$$\begin{aligned} m_W^2(T, H \rightarrow 0) &\rightarrow m_W^2(T), \\ m_Z^2(T, H \rightarrow 0) &\rightarrow m_Z^2(T), \\ m_\gamma^2(T, H \rightarrow 0) &\rightarrow m_\gamma^2(T), \end{aligned} \quad (5.72)$$

donde $m_G^2(T)$ puede ser obtenida de las Ecs (5.45) y (5.69) haciendo $H = 0$.

Para obtener de manera explícita la dependencia en el campo hipermagnético en $V_{gb}^{(ring)}$, expandimos los términos de masa al cubo que aparecen en la Ec. (5.68) hasta el orden $(\mathbf{y}H)^2$, con el que hemos estado trabajando. Por lo tanto, usando las definiciones de las masas de la Ec. (5.69), la contribución explícita es

$$\begin{aligned} V_{gb}^{(ring)}(v) &= -\frac{T}{12\pi} \{2m_W^3(T) + m_Z^3(T) + m_\gamma^3(T) - 2m_W^3 - m_Z^3\} \\ &+ \frac{T}{12\pi} \left\{ \frac{3}{4} [2g^2 m_W(T) + (g^2 + g'^2)(m_Z(T)R_Z - m_\gamma(T)R_\gamma)] \right. \\ &\times \left. \frac{T}{384\pi} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{(m_i^2 + \Pi_1)^{3/2}} \right) \right\} (\mathbf{y}H)^2, \end{aligned} \quad (5.73)$$

donde

$$\begin{aligned} R_Z &= \frac{2m_Z^2(T)}{m_Z^2(T) - m_\gamma^2(T)} - \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)^2} \frac{m_Z^2(T) + m_\gamma^2(T)}{m_Z^2(T) - m_\gamma^2(T)} \\ R_\gamma &= \frac{2m_\gamma^2(T)}{m_Z^2(T) - m_\gamma^2(T)} - \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)^2} \frac{m_Z^2(T) + m_\gamma^2(T)}{m_Z^2(T) - m_\gamma^2(T)}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

La expresión final para el potencial efectivo se obtiene sumando los resultados en las Ecs. (5.47), (5.51), (5.54), (5.59), (5.63) y (5.73):

$$V_{eff}(v) = V_{tree}(v) + V_{Higgs}^{(1)} + V_f^{(1)} + V_{gb}^{(1)} + V_{Higgs}^{(ring)} + V_{gb}^{(ring)}. \quad (5.75)$$

Nótese que los términos peligrosos m_i^3 provenientes de $V_{Higgs}^{(1)}$ se cancelan idénticamente con aquellos que provienen de $V_{Higgs}^{(ring)}$. En el caso de los bosones de norma, este tipo de cancelación no se da. Sin embargo, las masas para los bosones de norma son

positivas definidas aún sin incluir la masa térmica. Al trabajar en la fase simétrica e ir bajando gradualmente la temperatura, la masa efectiva de los escalares eventualmente evolucionará a sus valores conocidos de la fase rota, y por lo tanto, en algún momento, la temperatura no será lo suficientemente alta para garantizar la validez de la serie asintótica, en términos del cociente (m/T) , obtenida de la transformada de Mellin. Esto nos restringe al rango de temperaturas

$$T > T_1 \equiv \sqrt{\frac{-16m_1^2(v=0)}{3g^2 + g'^2 + 8\lambda + 4f^2}}, \quad (5.76)$$

el cual define la temperatura más baja. Asimismo, la expansión en campo débil $\mathbf{y}H < \tilde{m}^2$ impone una cota más restrictiva a partir de la cual el intervalo de temperaturas permitidas es

$$T > T_2 \equiv \sqrt{\frac{\mathbf{y}H - 16m_1^2(v=0)}{3g^2 + g'^2 + 8\lambda + 4f^2}}. \quad (5.77)$$

El factor $(\mathbf{y}H)^2/\tilde{m}_i^3$ relacionado con el *tadpole* de escalares hipercargados, presente tanto en el potencial $V_{Higgs}^{(ring)}$ como en $V_{gb}^{(ring)}$, es el responsable de aumentar el orden de la transición de fase electrodébil, como veremos en la siguiente sección.

5.3. Rompimiento de la Simetría

En esta sección, procedemos a obtener cuantitativamente los efectos del campo hipermagnético sobre la transición de fase electrodébil, para lo cual graficamos el V_{eff} como una función del valor de expectación del vacío v usando los parámetros conocidos del ME, esto es $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91$ GeV, $m_W = 80$ GeV, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$, lo cuales corresponde a las cotas actuales para la masa del Higgs.

La Fig. 5.5 muestra V_{eff} para diferentes temperaturas, con $H = 0$. En esa figura se muestra el comportamiento de rompimiento de simetría pues, a medida que la temperatura del sistema desciende, el sistema comienza a desarrollar un mínimo secundario, y a una cierta temperatura crítica $T_c^0 < T_1 < T_2$, el segundo mínimo se degenera con el original. Justo en ese instante se dice que ocurre la transición de fase.

Para estudiar el efecto del campo magnético en el potencial efectivo, parametrizamos al campo en términos de la temperatura de la transición de fase electrodébil, $H = h(100 \text{ GeV})^2$. No hay que olvidar que la jerarquía de escalas que hemos usado durante todo el cálculo, impone restricciones sobre los valores de H y T , tal que, con la parametrización que se ha elegido, los valores que puede tomar h son todos aquellos para los cuales se satisface la relación $h(\mathbf{y}(100\text{GeV})^2) < \tilde{m}_1^2(v=0)$, donde tomamos la masa del bosón escalar \tilde{m}_1 , ya que ésta es la más pequeña en la fase simétrica.

La Fig. 5.6 muestra al potencial V_{eff} para diferentes intensidades de campo $H_3 > H_2 > H_1$, a una temperatura T constante que coincide con el valor de la temperatura

crítica de la transición en el caso con $h = 0$. Nótese que a medida que la intensidad del campo aumenta, la transición de fase se retrasa. Este efecto favorece valores más altos del cociente entre el valor de expectación del vacío $\langle v \rangle$ de la fase rota y la temperatura crítica T_c , y por lo tanto, la transición de fase se vuelve más fuertemente de primer orden a medida que el campo aumenta.

En la Fig. 5.7 se hace la comparación del potencial V_{eff} para diferentes intensidades de campo $H_3 > H_2 > H_1$, cada uno a su temperatura crítica, $T_c(h_3) < T_c(h_2) < T_c(h_1)$ para intensidades $h_3 = 0,25$, $h_2 = 0,2$ y $h_1 = 0,1$. De esta figura, es claro que a medida que la intensidad del campo aumenta, la barrera del potencial entre los dos mínimos aumenta, y el cociente $\langle v \rangle / T$ para el segundo mínimo (“fase rota”) crece, lo cual hace que la transición de fase se vuelva más fuertemente de primer orden [13].

En resumen, el campo hipermagnético tiene dos efectos en la transición de fase electrodébil: el primer efecto es retrasar el comienzo de la transición de fase, y el segundo efecto, es aumentar el valor de expectación del vacío para la fase rota (segundo mínimo). Ambos efectos ayudan a la supresión de la tasa de transiciones de sphaleron entre los diferentes vacíos topológicos de $SU(2) \times U(1)$, y por lo tanto puede favorecer la asimetría bariónica durante la transición de fase electrodébil.

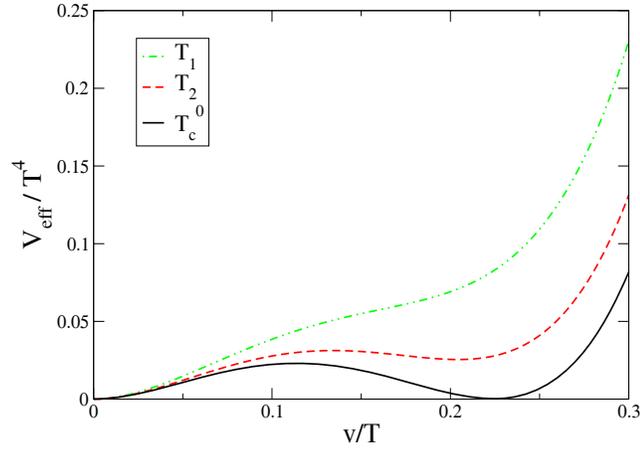


Figura 5.5: V_{eff} como función de v/T para diferentes valores de la temperatura con $H = 0$. La simetría se rompe a medida que la temperatura disminuye al pasar de T_1 a T_2 : el potencial efectivo desarrolla un mínimo secundario, el cual eventualmente se degenera con el original a una cierta temperatura crítica $T_c^0 < T_1 < T_2$. Justo en este instante ocurre la transición de fase. Para este análisis se usó $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91$ GeV, $m_W = 80$ GeV, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$.

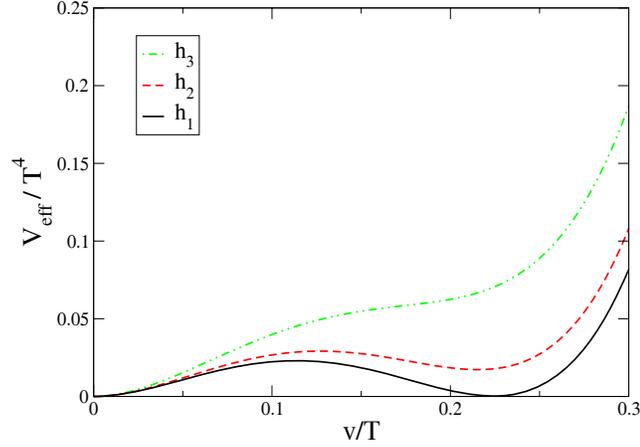


Figura 5.6: V_{eff} como función de v/T para T constante y diferentes valores de $H = h(100 \text{ GeV})^2$ con $h_1 = 0$, $h_2 = 0,03$ y $h_3 = 0,06$. La temperatura T se eligió tal que coincidiera con la temperatura crítica del caso con $h = 0$. A medida que la intensidad del campo se incrementa, la temperatura para la transición disminuye. Esto favorece valores más grandes para el cociente $\langle v \rangle/T_c$. Para este análisis se usó $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91 \text{ GeV}$, $m_W = 80 \text{ GeV}$, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$.

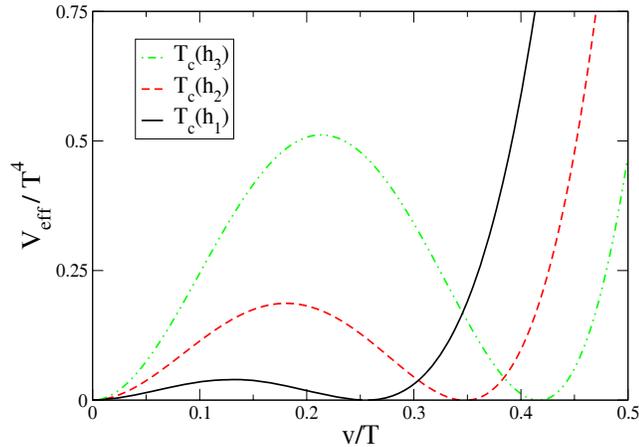


Figura 5.7: V_{eff} como función de v/T para diferentes intensidades de campo hipermagnético $h_3 > h_2 > h_1$, cada uno a su correspondiente temperatura crítica $T_c(h_3) < T_c(h_2) < T_c(h_1)$, con $H = h(100 \text{ GeV})^2$. A medida que la intensidad del campo se incrementa, la barrera del campo entre los dos mínimos también aumenta y además el valor del cociente $\langle v \rangle/T$ también aumenta. Para este análisis se usó $g' = 0,344$, $g = 0,637$, $m_Z = 91 \text{ GeV}$, $m_W = 80 \text{ GeV}$, $f = 1$ y $\lambda = 0,11$.

Parte III

Conclusiones

Capítulo 6

Conclusiones

Discusión y conclusiones

En esta tesis se ha calculado el potencial efectivo a temperatura finita, del modelo estándar electrodébil en su fase simétrica en presencia de un campo hipermagnético externo, considerando el efecto de los diagramas de anillo. El análisis de éste nos ha permitido llegar a la conclusión que la transición de fase electrodébil se vuelve más fuertemente de primer orden en comparación con el caso cuando el campo no está presente.

Se han introducido los efectos del campo hipermagnético externo usando el formalismo de tiempo propio de Schwinger. De este modo todos los niveles de Landau han sido tomados en cuenta. En el límite de campo débil, se ha llevado a cabo una expansión sistemática en potencias del campo externo hasta orden $(g'H)^2$.

La presencia del campo hipermagnético origina términos en el potencial efectivo proporcionales a $(gH)^2\Pi_1/\tilde{m}^3$, donde \tilde{m} es la masa de los campos escalares, corregida con las contribuciones térmicas $\mathcal{O}(g)$ y Π_1 es la corrección térmica a la masa $\mathcal{O}(g)$, g simboliza una constante de acoplamiento genérica en el cálculo. Estos términos provienen de los diagramas de *tadpole*, donde la partícula del loop es un bosón escalar y resultan ser los relevantes para hacer que la transición de fase sea más fuertemente de primer orden.

Notemos que un conteo inocente de las potencias en g del término relevante, anteriormente discutido, indicaría que éste es de orden g , mientras que la contribución dominante, independiente del campo magnético, que proviene de los diagramas de anillo, es de orden g^3 , lo que parecería indicar que la contribución originada por el campo magnético es la dominante, al tener menos potencias de g . Para ver donde este conteo inocente está equivocado, consideremos por el momento que el acoplamiento del campo externo con las partículas de la teoría, g_Y , es diferente del acoplamiento de las partículas mismas en ausencia del campo λ_Y . A primera vista, la primera contribución no trivial al potencial efectivo en presencia del campo debería ser, en teoría de perturbaciones, una burbuja de vacío a 1-loop con dos inserciones del campo

magnético externo. Como se muestra en esta tesis, esta contribución es idénticamente cero. La siguiente contribución en λ_Y al mismo orden en el campo magnético debe surgir de los diagramas de anillo donde, cada propagador de las partículas cargadas contribuye con dos inserciones de campo magnético. Como es bien sabido, este procedimiento de resumación origina un comportamiento no analítico en λ_Y . Puesto que un término $(g_Y H)^2$, que tiene las dimensiones del potencial efectivo se factoriza, los otros factores en el potencial efectivo deben ser adimensionales. Este último factor debe incluir la temperatura T , ya que ésta es la mayor de entre las escalas de energía que tenemos a nuestra disposición y el cálculo se realiza a orden dominante en T . De las consideraciones anteriores se sigue que los factores restantes deben ser un cociente de “masas”, con dimensiones m^{-1} . Debido a que las masas al cuadrado son proporcionales al acoplamiento entre las partículas, λ_Y , no es de sorprenderse que el factor sea del orden $\lambda_Y^{-1/2}$. De esta manera, la primera contribución no trivial en el campo magnético es de orden $g_Y^2/\lambda_Y^{-1/2}$. Si $\lambda_Y^{-1/2}$ y g_Y son del mismo orden, entonces el término bajo escrutinio es orden g_Y . Sin embargo, nótese que en realidad λ_Y es una combinación de las distintas constantes de acoplamiento presentes en el cálculo y, al ser g_Y la más pequeña de entre todas éstas, se cumple $g_Y^2/\lambda_Y^{-1/2} < \lambda^{3/2}$. Por lo tanto, en términos de las constantes de acoplamiento, la primera contribución no trivial en el campo al potencial efectivo es menor que aquella que no contiene al campo.

El campo hipermagnético externo tiene dos efectos simultáneos en el comportamiento del potencial efectivo: Uno, retrasa el inicio de la transición de fase en comparación con el caso sin campo; dos, el valor esperado del Higgs en el vacío, en la fase rota, se vuelve mayor. Ambos efectos favorecen la supresión de la tasa de transición de sphaleron, lo cual ayuda a preservar la posible asimetría bariónica generada durante la transición de fase electrodébil.

Aunque este estudio muestra que para valores razonables de la intensidad del campo durante la transición de fase, el cociente $\langle v \rangle/T$ no es lo suficientemente grande para evitar que los procesos de sphaleron borren la asimetría bariónica generada, debe tenerse presente que estos resultados fueron obtenidos bajo condiciones muy restrictivas, derivadas de la jerarquía de escalas con la que se trabajó, es decir $g'H \ll m^2 \ll T^2$, donde m es una masa genérica del problema. Por lo anterior es posible pensar que relajando esta restricción, se pueda aumentar el valor del cociente antes mencionado.

Cabe destacar que otros estudios [71] muestran que la inclusión de ordenes superiores en el cálculo del potencial efectivo en ausencia de campo incrementan el valor esperado del Higgs en el vacío entre un 20 % a un 40 %, lo cual abre también la posibilidad que ésto suceda en presencia de campos hipermagnéticos.

El cálculo en el presente trabajo ha sido llevado a cabo en el marco de la teoría de perturbaciones, en la que se considera que todos los parámetros de expansión son pequeños. Sin embargo, para tomar en cuenta el valor de la masa del quark *top* y el límite actual de la masa del Higgs, en el análisis numérico se ha considerado el

acoplamiento de Yukawa $f = 1$ y la constante de autointeracción del Higgs $\lambda = 0,11$. En este sentido, el cálculo presentado en esta tesis puede ser considerado como una herramienta analítica para explorar este régimen no perturbativo.

También se debe mencionar que el resultado obtenido en este trabajo coincide con el de otros trabajos en donde el efecto del campo externo ha sido estudiado ya sea clásicamente [33] o en la aproximación 1-loop [30] para el potencial efectivo. No obstante, existen otros cálculos en donde también se consideran las contribuciones de los diagramas de anillo, que obtienen conclusiones distintas [35, 36]. En éstos se afirma que, considerando el efecto de fermiones ligeros, la presencia del campo magnético vuelve menos fuertemente de primer orden a la transición de fase, debido a la aparición de términos logarítmicos dependientes del cociente m_f/T (m_f la masa de un fermión, T la temperatura), cuyo origen, según se afirma es esas referencias, es no perturbativo. La validez de este análisis es cuestionable ya que tal comportamiento divergente debido a la masa de los fermiones ligeros, planteado en las Refs. [35, 36], no toma en cuenta los efectos de apantallamiento del plasma, y por lo tanto la contribución de la masa de Debye a la masa de los fermiones, lo que eventualmente evita que el término logarítmico diverja. Más aún, estos términos surgen también en el análisis de esta tesis, como se muestra en el capítulo 5, al substraer la contribución del vacío en el potencial efectivo de fermiones a 1-loop. Éstos no fueron tomados en cuenta en esta tesis ya que tienen una dependencia muy suave con el parámetro de orden, pudiendo ser aproximados por una constante, que puede sustraerse del análisis.

El escenario mostrado en esta tesis se ve desfavorecido por la existencia del momento dipolar magnético del sphaleron, cuya interacción con el campo hipermagnético disminuye la energía de la barrera entre los diferentes vacíos topológicos de la teoría. Esto impone condiciones más estrictas sobre el orden de la transición de fase para la preservación del número bariónico [72].

Otro punto de cuidado es el intercambio en el orden de la integración sobre el momento y la expansión en campo débil. Es sabido, sin embargo, que tal intercambio puede realizarse cuando en cada potencia de la expansión no existen divergencias infrarrojas [73], lo cual es el caso en el presente análisis, debido a la masa térmica de las partículas. No existe literatura en esta dirección, por lo que es una posible avenida para ser explorada.

En conclusión, la presencia del campo hipermagnético externo durante la transición de fase electrodébil contribuye favorablemente en dos de las condiciones de Sakharov para generar la asimetría bariónica del universo: 1) aumenta la violación de CP mediante la segregación de carga axial [24, 25, 26] y 2) hace a la transición de fase más fuertemente de primer orden [48]. El relajamiento en las condiciones impuestas sobre las intensidades del campo respecto a la masa nos permitiría explorar otros efectos sobre la transición de fase. Por ejemplo, recientemente se ha mostrado que campos magnéticos catalizan el rompimiento dinámico de la simetría quiral aún cuando la interacción entre los fermiones es débil. En esencia, este efecto es producto de la reducción dimensional $D \rightarrow D - 2$ en la dinámica de los pares fermión-antifermión

del vacío en presencia del campo magnético. Cuando el acoplamiento es débil, la dinámica es dominada por el nivel mas bajo de Landau [74]. Este efecto junto con la exploración de un espacio de parámetros mayor al considerado en esta tesis, podría tener repercusiones sobre la transición de fase electrodébil e influir en el escenario de la bariogénesis dentro del modelo estándar.

Parte IV

Apéndice

Apéndice A

Modelo Estándar Electrodébil: Reglas de Feynman

La forma diagramática desarrollada por R. Feynman, permite, de manera muy sencilla, incorporar cada uno de los elementos presentes en el cálculo de ciertos diagramas, como lo son propagadores, vértices y factores de simetría, por complicado que parezca el diagrama.

Debido a ello, en este apéndice muestro cada uno de los vértices de interacción entre las diferentes partículas del ME, presentes en la fase simétrica, *i.e.*, en la fase en donde el campo de Higgs aún no adquiere un valor de expectación del vacío. Éstos se obtienen fácilmente de la estructura del Lagrangiano.

La expresión analítica para los vértices de interacción se obtiene por medio de la convención estándar de momentos, *i.e.*, todos los momentos en un vértice entran a éste, y, en el caso de varias patas bosónicas de una misma partícula (con la misma carga), éstas se simetrizan.

A.1. Sector de Higgs

Para el sector del Higgs, se tienen lo siguientes vértices.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \phi_i \quad \phi_i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \phi_i \quad \phi_i \end{array} & = -6i\lambda & \begin{array}{c} \phi_j \quad \phi_j \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \phi_i \quad \phi_i \end{array} & = -2i\lambda
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } A^{a\mu}, A^{b\nu} \text{ and } \phi_i, \phi_i \rightarrow i \frac{g^2}{2} \delta^{ab} g^{\mu\nu} \\
 & \text{Diagram 2: } B^\mu, B^\nu \text{ and } \phi_i, \phi_i \rightarrow i \frac{g'^2}{2} g^{\mu\nu} \\
 & \text{Diagram 3: } A^{a\mu} \text{ and } \phi_i, \phi_i \rightarrow i \frac{g}{2} \tau^a (p - p')^\mu \\
 & \text{Diagram 4: } B^\mu \text{ and } \phi_i, \phi_i \rightarrow i \frac{g'}{2} (p - p')^\mu \\
 & \text{Diagram 5: } A^{a\mu}, B^\nu \text{ and } \phi^0, \phi^+, \phi^{0*}, \phi^{+*} \rightarrow \text{no contribuye a 1-loop.}
 \end{aligned}$$

A.2. Sector de fermiones

Para el sector de los fermiones, los vértices de interacción con los bosones del ME son

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } B^\mu \text{ and } \Psi_R, \bar{\Psi}_R \rightarrow -i \frac{g'}{4} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \\
 & \text{Diagram 2: } B^\mu \text{ and } \Psi_L, \bar{\Psi}_L \rightarrow -i \frac{g'}{4} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \\
 & \text{Diagram 3: } A^{a\mu} \text{ and } \Psi_L, \bar{\Psi}_L \rightarrow -i \frac{g'}{4} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \tau^a \\
 & \text{Diagram 4: } \phi_1 \text{ and } t, \bar{t} \rightarrow \frac{f}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

donde A_μ^a son los bosones de $SU(2)_L$, B^μ el boson de norma de $U(1)_Y$ y ϕ_1 el campo de Higgs.

A.3. Sector de Bosones de Norma

Finalmente, los vértices de interacción de los bosones de norma están dados por

$$\begin{array}{c}
 A_b^\nu \quad A_a^\mu \\
 \diagdown \quad / \\
 \bullet \\
 / \quad \diagdown \\
 A_c^\rho \quad A_d^\sigma
 \end{array}
 = -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \right. \\
 \left. + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \right. \\
 \left. + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right]$$

$$\begin{array}{c}
 A_a^\mu \\
 | \\
 \bullet \\
 / \quad \diagdown \\
 A_b^\nu \quad A_c^\rho
 \end{array}
 = gf^{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu]$$

$$\begin{array}{c}
 A_b^\mu \\
 | \\
 \bullet \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \cdots c^a \quad \cdots \bar{c}^c
 \end{array}
 = gf^{abc} (k^\mu)_a$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(2)$. Cabe mencionar, que en el último diagrama, índice latino en el momento k^μ indica que el momento corresponde al campo fantasma c^a .

Apéndice B

Parámetro de Feynman en el límite infrarrojo

B.1. Parámetro de Feynman

En esta parte se describe el procedimiento que sigue Weldon en su artículo [56], donde pone de manifiesto que un empleo directo del parámetro de Feynman puede dar origen a resultados erróneos.

En este trabajo, se comienza con la expresión para la autoenergía en una teoría $\lambda\phi^3$

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(2\pi nT)^2 + \omega_k^2][(2\pi nT - ip_{0l})^2 + \omega_{k+p}^2]}, \quad (\text{B.1})$$

donde $\omega_x^2 = x^2 + m^2$ y $p_{0l} = i2\pi lT$. Ahora, para hacer la suma sobre n , usamos fracciones parciales para separar el integrando, con lo cual obtenemos las siguientes sumas

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = & \frac{\lambda^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{i}{2\omega_k[2n\pi T - i\omega_k][\omega_k^2 - 2p_{0l}\omega_k + p_{0l}^2 - \omega_{k+p}^2]} \right. \\ & - \frac{i}{2\omega_k[2n\pi T + i\omega_k][\omega_k^2 + 2p_{0l}\omega_k + p_{0l}^2 - \omega_{k+p}^2]} \\ & + \frac{i}{2\omega_{k+p}[2n\pi T - ip_{0l} + i\omega_{k+p}][\omega_k^2 - p_{0l}^2 - \omega_{k+p}^2 + 2p_{0l}\omega_{k+p}]} \\ & \left. - \frac{i}{2\omega_{k+p}[2n\pi T - ip_{0l} - i\omega_{k+p}][\omega_k^2 - p_{0l}^2 - \omega_{k+p}^2 - 2p_{0l}\omega_{k+p}]} \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Ahora, podemos hacer cada una de estas sumas con ayuda de métodos estándar en

teoría térmica de campos (véase por ejemplo las Ecs. (2.55a, 2.78) de la Ref. [28]):

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{4\omega_k ((\omega_k + s p_{0l})^2 - \omega_{k+p}^2)} + (\omega_k \leftrightarrow \omega_{k+p}) \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Nótese que el segundo término es igual al primero si en el segundo término hacemos un cambio de variable de la forma $k + p \rightarrow k'$, de modo que la dependencia angular sólo aparezca en el denominador, de la misma forma que en el primer término. Por lo tanto, la contribución total será el doble de la primera.

El modo de proceder es el siguiente: primero escribir de manera explícita la combinación $\omega_k^2 - \omega_{p+k}^2$ con lo cual la expresión anterior se reduce a

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{2\omega_k} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{1}{p_{0l}^2 + 2s\omega_k p_{0l} - p^2 - 2kxp} \right), \quad (\text{B.4})$$

en donde $x = \cos(\theta)$ y la integración sobre ϕ ya ha sido realizada. Ahora hacemos la integral sobre x , la cual da

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty k dk \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{4\omega_k p} \ln \left(\frac{p_{0l}^2 - p^2 + 2s\omega_k p_{0l} + 2kp}{p_{0l}^2 - p^2 + 2s\omega_k p_{0l} - 2kp} \right) \quad (\text{B.5})$$

y tomamos el límite $p_0 \rightarrow 0$. Para ello hacemos la sustitución $p_0 = \alpha p$ y después tomamos $p \rightarrow 0$ el límite con lo cual obtenemos

$$\Pi(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{2\omega_k} \frac{k^2(\alpha^2 - 1)}{k^2 - \alpha^2 \omega_k^2}. \quad (\text{B.6})$$

Ahora, mediante la identidad

$$\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right) = (1 + 2n(\omega_k)), \quad (\text{B.7})$$

donde $n(\omega_k)$ es la distribución de Bose-Einstein, es posible separar la parte térmica de la parte de vacío sustituyendo la Ec. (B.7) en la Ec. (B.6), por lo que la parte puramente térmica es

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{n(\omega_k)}{\omega_k} \frac{k^2(\alpha^2 - 1)}{k^2 - \alpha^2 \omega_k^2}. \quad (\text{B.8})$$

Esta última ecuación concuerda con la Ec. (24) de la referencia [56].

APÉNDICE B. PARÁMETRO DE FEYNMAN EN EL LÍMITE INFRARROJO 100

En el caso de interés, límite infrarrojo, debemos tomar $\alpha = 0$, con ello la integral que resta por hacer es

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}. \quad (\text{B.9})$$

Este tipo de integral es finita tanto en el origen, ya que ω no es nula, como en infinito, ya que la distribución se anula. Para hacer este tipo de integrales, recurrimos al método de regularización dimensional. Entonces se debe extender la integral primero al semieje $-k$ y dado que el integrando es par, se debe multiplicar por $1/2$. Una vez hecho lo anterior se lleva la integral a d -dimensiones, esto es,

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \int d^d \mathbf{k} \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}, \quad (\text{B.10})$$

dado que el integrando no tiene dependencia angular, podemos hacer la integral angular, esto es

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty k^{d-1} dk \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}, \quad (\text{B.11})$$

usando la identidad (Ec. (2.38) Ref. [55])

$$\frac{n(\omega_k)}{\omega_k} = -\frac{1}{2\omega_k} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\beta\omega_k)^2 + (2\pi n)^2} \quad (\text{B.12})$$

en la Ec. (B.11), las integrales a realizar son

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty k^{d-2} dk^2 \left(-\frac{1}{2\omega_k} + T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 + (2\pi nT)^2} \right). \quad (\text{B.13})$$

Nótese que en ésta última ecuación se ha escrito la diferencial en términos de la variable k^2 , lo cual arroja un factor $1/2$ que ya se ha cancelado. Haciendo el cambio de variable [38],

$$y = \frac{1}{k^2 + a^2} \Rightarrow \begin{cases} k^2 & = y^{-1} - a^2 \\ dk^2 & = -y^{-2} dy \\ y & \in [a^{-2}, 0] \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

donde a puede ser la masa o alguna otra combinación, entonces la Ec. (B.13) se transforma en

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{m^{-2}} dy (1 - m^2 y)^{\frac{d}{2}-1} y^{-\frac{d+1}{2}} \right. \\ &+ \left. T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{(m^2 + (2\pi nT)^2)^{-1}} dy [1 - (m^2 + (2\pi nT)^2)y]^{\frac{d}{2}-1} y^{-\frac{d}{2}} \right\} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

mediante el cambio de variable $y = a^{-2}z$, la Ec. anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left\{ -\frac{1}{2} m^{d-1} \int_0^1 dz (1-z)^{\frac{d}{2}-1} z^{-\frac{d+1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m^2 + (2\pi nT)^2)^{\frac{d-2}{2}} \int_0^1 dz (1-z)^{\frac{d}{2}-1} z^{-\frac{d}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Las integrales que se han obtenido son bien conocidas y éstas pueden ser escritas en términos de las funciones gama, esto es

$$\int_0^1 dz (1-z)^\alpha z^\gamma = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}, \quad (\text{B.17})$$

por lo tanto, la Ec. (B.16) es

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left\{ -\frac{1}{2} m^{d-1} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right. \\ &\quad \left. + T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m^2 + (2\pi nT)^2)^{\frac{d-2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Separando el término $n = 0$ de la suma infinita y teniendo en cuenta que el sumando es par, se tiene que,

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \pi^{\frac{d}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} m^{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) T m^{d-2} \right. \\ &\quad \left. + 2T \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + (2\pi nT)^2)^{\frac{d-2}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

El primer y tercer términos de la expresión anterior presentan singularidades cuando $d = 1$, que debemos aislar. Dado que en el tercer término la singularidad no es tan obvia, me concentraré en él.

Para aislar la singularidad en el tercer término, sumamos cero, esto es,

$$\begin{aligned} S_3 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m^2 + (2\pi nT)^2)^{\frac{d-2}{2}} - (2\pi nT)^{d-2} + (2\pi nT)^{d-2} \right] \\ &= (2\pi T)^{d-2} \zeta(2-d) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m^2 + (2\pi nT)^2)^{\frac{d-2}{2}} - (2\pi nT)^{d-2} \right] \\ &= (2\pi T)^{d-2} \zeta(2-d) + \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi nT)^{d-2} \left[\left(\frac{m^2}{(2\pi nT)^2} + 1 \right)^{\frac{d-2}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

donde ζ es la función Zeta de Riemann, que tiene un polo en $d = 1$. En el límite de alta temperatura, $m^2 \ll T^2$, podemos aproximar el paréntesis por medio de una binomial, con lo cual,

$$\begin{aligned} S_3 &\approx (2\pi T)^{d-2} \zeta(2-d) + \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n T)^{d-2} \left[\frac{d-2}{2} \frac{m^2}{(2\pi n T)^2} \right] \\ &= (2\pi T)^{d-2} \zeta(2-d) + \frac{d-2}{2} (2\pi T)^{d-4} m^2 \zeta(4-d). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Sustituyendo la Ec. (B.21) en la Ec. (B.19) se tiene

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \pi^{\frac{d}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} m^{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) T m^{d-2} \right. \\ &\quad \left. + 2T \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left[(2\pi T)^{d-2} \zeta(2-d) + \frac{d-2}{2} (2\pi T)^{d-4} m^2 \zeta(4-d) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Ahora, tomamos $d = 1 - \epsilon$ dentro de las llaves y hacemos una serie para $\epsilon \rightarrow 0$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \mu^{1-d} \pi^{\frac{d}{2}} \left\{ \left(\frac{\ln(m)}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} + \frac{\gamma_E}{2\sqrt{\pi}} \right) + \frac{\sqrt{\pi} T}{m} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\ln(T)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} - \frac{\ln(4\pi)}{\sqrt{\pi}} + \frac{\gamma_E}{2\sqrt{\pi}} \right) - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^{5/2} T^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

donde γ_E es la gama de Euler. Nótese que los infinitos que aparecen como $1/\epsilon$ se cancelan, por lo cual, los factores externos que provienen de expandir μ^ϵ no son relevantes, al igual que los factores de $\pi^{-\epsilon/2}$. Por lo tanto, el resultado es

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left\{ \frac{\pi T}{m} + \ln\left(\frac{m}{4\pi T}\right) + \gamma_E - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right\}, \quad (\text{B.24})$$

lo cual concuerda con el resultado de la Ref. [38]. Por otro lado, si aplicamos directamente el método de la Ref. [63] a la Ec. (B.1), usando parametrización de Feynman, lo que obtenemos es

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left\{ \frac{\pi T}{m} + \frac{1}{2\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu}{2\sqrt{\pi} T}\right) + \frac{\gamma_E}{2} - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right\}. \quad (\text{B.25})$$

Cabe mencionar que en la Ec. (B.1) no se ha separado explícitamente la parte de materia de aquella que proviene del vacío. Sin embargo, cuando se subtrae la parte del vacío al resultado anterior el resultado coincide con la Ec. (B.24). Esto se muestra en detalle al final del siguiente ejemplo. Como nota adicional se debe mencionar que

en el resultado de la Ec. (B.25) también se recurre a la regularización dimensional, pero en éste caso se toma $d = 3 - 2\epsilon$.

Ahora vamos a ver qué pasa en el caso cuando se tiene una frecuencia de Matsubara en el numerador, de la forma

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n^2}{[\omega_n^2 + \omega_k^2][(\omega_n - ip_{0l})^2 + \omega_{k+p}^2]}. \quad (\text{B.26})$$

Haciendo la suma sobre las frecuencias de Matsubara por métodos tradicionales de teoría térmica de campos, se obtiene

$$\begin{aligned} I(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left[2 \frac{\coth\left(\frac{\omega_{k+p}}{2T}\right)}{\omega_{k+p}} + \frac{\omega_k \coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{(\omega_k + s p_0)^2 - \omega_{k+p}^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\omega_k^2}{\omega_{k+p}} \right) \frac{\coth\left(\frac{\omega_{k+p}}{2T}\right)}{(\omega_{k+p} + s p_0)^2 - \omega_k^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

La suma e integral angular en el primer término es directa. Si hacemos los cambios $k + p \rightarrow k'$ y $\omega_n - ip_{0l} \rightarrow \omega'_n$, y después empleamos la Ec. (B.12) para hacer la suma sobre n . Dado que el segundo término es igual a la Ec. (B.4), podemos usar el resultado de la Ec. (B.6) sin el factor $-\lambda^2/2$ y dividido por 2. Para el tercer término, hacemos el cambio $k + p \rightarrow k'$ de manera que la dependencia angular esté fuera del cosh y de ahí procedemos de la misma forma como en la Ec. (B.4). Con lo anterior se obtiene lo siguiente

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \frac{\coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)}{8kp\omega_k} \left\{ (2\omega^2 + 2sp_0\omega + p_0^2) \right. \quad (\text{B.28})$$

$$\left. \times \ln \left(\frac{-p^2 + 2kp + p_0^2 + 2s\omega p_0}{-p^2 - 2kp + p_0^2 + 2s\omega p_0} \right) \right\}. \quad (\text{B.29})$$

Ahora, para analizar el comportamiento cerca del origen, hacemos la sustitución $p_0 \rightarrow \alpha p$ y hacemos una serie alrededor de $p = 0$. Con lo anterior se obtiene

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right) \frac{(\alpha^2 - 1)\omega_k}{2(k^2 - \alpha^2\omega_k^2)} \quad (\text{B.30})$$

en el límite infrarrojo ($\alpha = 0$),

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2(2\pi)^2} \int dk \coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right) \omega_k. \quad (\text{B.31})$$

Multiplicando al integrando por el factor ω_k/ω_k

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right) \left\{ \frac{k^2}{\omega_k} + \frac{m^2}{\omega_k} \right\} \quad (\text{B.32})$$

en donde se ha usado $\omega_k^2 = k^2 + m^2$. Separando la parte térmica de la expresión anterior, las integrales a realizar son

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{m^2}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{n(\omega_k)}{\omega_k} - \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}. \quad (\text{B.33})$$

El primer término es igual a la Ec. (B.9), y para el segundo, usamos la Ec. (B.10) omitiendo el factor $\lambda^2/4$. Además, multiplicamos y dividimos por el ángulo sólido en 3-dimensiones y reemplazamos $\mu^{1-d} \rightarrow \mu^{3-d}$, con lo cual el segundo término de la Ec. (B.33) es

$$\tilde{I}(p_{0l}, \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} \mu^{3-d} \int d^d \mathbf{k} \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}. \quad (\text{B.34})$$

Entonces el resultado para esta integral es la Ec. (B.22), omitiendo el factor $\lambda^2/4$ reemplazando

$$\frac{\mu^{1-d}}{(2\pi)^2} \rightarrow \frac{\mu^{3-d}}{2(2\pi)^3}. \quad (\text{B.35})$$

Nótese que al igual que en el caso anterior, aquí también aparecen infinitos, pues tanto $\Gamma((1-d)/2)$ como $\zeta(4-d)$ tienen polos cuando $d \rightarrow 3$. Pero, al igual que en el caso anterior, esperamos que estos infinitos se eliminen entre sí. Con lo anterior, el segundo término de la Ec. (B.33) es explícitamente

$$\begin{aligned} \tilde{I}(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \mu^{3-d} \pi^{\frac{d}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} m^{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) T m^{d-2} \right. \\ &+ 2T \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left[(2\pi T)^{d-2} \zeta(2-d) + \frac{d-2}{2} (2\pi T)^{d-4} m^2 \zeta(4-d) \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \frac{d-2}{2} \frac{d-4}{2} (2\pi T)^{d-6} m^4 \zeta(6-d) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

En esta última ecuación, se ha tomado la expansión de la Ec. (B.21) al siguiente orden. Ahora, tomando $d = 3 - \epsilon$ y expandiendo para ϵ pequeño, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{I}(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \mu^\epsilon \pi^{\frac{3-\epsilon}{2}} \left\{ \left(-\frac{\ln(m)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\epsilon} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right) m^2 \right. \\ &- 2m\sqrt{\pi}T + \frac{2}{3} \pi^{\frac{3}{2}} T^2 + \left(\frac{\ln(T)}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}\epsilon} + \frac{\ln(4\pi)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi}} \right) m^2 \\ &\left. + \frac{m^4 \zeta(3)}{16\pi^{5/2} T^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Nótese que, al igual que antes, los infinitos representados por $1/\epsilon$ se cancelan, como era de esperarse, ya que estamos trabajando con la parte puramente térmica que no dependerá de la escala adicional μ . Simplificando el resultado anterior, los términos dominantes en la temperatura son

$$\tilde{I}(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{T^2}{24} - \frac{Tm}{8\pi} + \frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left(1 - 2\gamma_E - 2 \ln \left(\frac{m}{4\pi T} \right) \right) + \frac{m^4 \zeta(3)}{256\pi^4 T^2}. \quad (\text{B.38})$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. (B.24) (con la modificación $\lambda^2/2 \rightarrow m^2$) y la Ec. (B.38), en la Ec. (B.33), se obtiene

$$\begin{aligned} I(p_{0l}, \mathbf{p}) &= -\frac{m^2}{2(2\pi)^2} \left\{ \frac{\pi T}{m} + \ln \left(\frac{m}{4\pi T} \right) + \gamma_E - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right\} \\ &- \frac{T^2}{24} + \frac{Tm}{8\pi} - \frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left(1 - 2\gamma_E - 2 \ln \left(\frac{m}{4\pi T} \right) \right) - \frac{m^4 \zeta(3)}{256\pi^4 T^2} \\ &= -\frac{T^2}{24} - \frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left(1 + 2\gamma_E + 2 \ln \left(\frac{m}{4\pi T} \right) \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \frac{m^4 \zeta(3)}{64\pi^4 T^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Nótese que el término Tm se cancela, lo cual es de esperarse pues este tipo de términos tiene su origen en la frecuencia de Matsubara $n = 0$, en cuyo caso la integral en cuestión es nula. Por otro lado, empleando el método de la Ref.[63], para el cálculo de la Ec. (B.26), se tiene

$$I(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{T^2}{24} - \frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left(2 + \gamma_E + \frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu^2}{4\pi T^2} \right) \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \frac{m^4 \zeta(3)}{64\pi^4 T^2}. \quad (\text{B.40})$$

Debido a que en el método de Bedingham se trabaja tanto con la parte del vacío como con la temperatura, aparecen términos que son divergentes. Pero estos términos provienen de la parte del vacío, de modo que, para quedarnos con la parte puramente térmica, al resultado de la Ec. (B.40) hay que restarle la parte del vacío. Ésta se obtiene fácilmente de la Ec. (B.31), que explícitamente es

$$I^{vac}(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2(2\pi)^2} \int dk \omega_k. \quad (\text{B.41})$$

Para llevar a acabo esta integral, usamos regularización dimensional y las definiciones de la Ec. (B.14), con lo cual se obtiene

$$I^{vac}(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left[1 + \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{\mu^2}{\pi m^2} \right) \right]. \quad (\text{B.42})$$

Por lo tanto, restando Ec. (B.42) a la Ec. (B.40), para quedarnos con la parte puramente térmica, el resultado es idéntico a la Ec. (B.39), hasta un factor de π en el

logaritmo. Tal como se ha mencionado en el capítulo 4, esto es aún tema de investigación y actualmente se encuentra en pleno desarrollo. Sin embargo, los casos que se han mostrado en este apéndice con dos tipos de estructuras funcionales arrojan resultados alentadores. Lo anterior, aunado al hecho que los resultados dominantes en la temperatura que se obtienen en esta tesis coinciden con los de la Ref. [61] para el caso de la TFED sin campos magnéticos, nos hacen pensar que el uso del parámetro de Feynman arroja resultados correctos en el límite infrarrojo ($p_0 = 0, \mathbf{p} \rightarrow 0$).

Apéndice C

Autoenergía de los Bosones de Norma

En este apéndice se muestra el cálculo del diagrama de Feynman de la Fig. 5.3(V), que representa la contribución de fermiones a 1-loop al tensor de autoenergía de los bosones de norma hasta orden $(\mathbf{y}H)^2$, en donde no es evidente que las componentes fuera de la diagonal sean despreciables.

$${}^0\Pi_{\mu\nu} = \left(\frac{g}{4}\right)^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{16k_\mu k_\nu - 8k^2 \delta_{\mu\nu}}{[k^2 + m_{f_i}^2][(k-p)^2 + m_{f_i}^2]}. \quad (\text{C.1})$$

donde se ha usado la notación ${}^n\Pi_{\mu\nu}$, $n = 0, 1, 2$, donde n indica el orden en el campo $\mathbf{y}H$.

A orden cero, usando la Ec. (4.64) para fermiones, se tiene

$$\begin{aligned} {}^0\Pi_{\mu\nu} &= \left(\frac{g}{4}\right)^2 \left\{ \left(\frac{2}{3}T^2 + \frac{m_{f_i}^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{4\mu^2}{\pi T^2}\right) - 1 \right] \right) \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_{f_i}^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{4\mu^2}{\pi T^2}\right) \right] \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

A primer orden en el campo se tiene

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{\mu\nu} &= -8(\mathbf{y}H) \left(\frac{g}{4}\right)^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \right. \\ &\quad \times [k_3(k_\mu u_\nu + k_\nu u_\mu) + \omega_n(k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu) - 2\omega_n k_3 \delta_{\mu\nu}] [I_{12}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + I_{21}(\mathbf{k}, \mathbf{q})] \\ &\quad \left. + 8i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [k_3 k^\alpha u^\beta + \omega_n k^\alpha b^\beta] [I_{12}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - I_{21}(\mathbf{k}, \mathbf{q})] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Usando de nuevo la Ec. (4.64), explícitamente se tiene

$${}^1\Pi_{\mu\nu} = \left(\frac{g}{4}\right)^2 \frac{(\mathbf{y}H)}{2\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{4\mu}{\pi T}\right) + \frac{1}{3} \right] (\delta_{\mu 3} \delta_{\nu 0} + \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 3}). \quad (\text{C.4})$$

Las contribuciones a segundo orden en el campo contienen dos términos, esto es

$$\begin{aligned}
 {}^2\Pi_{\mu\nu}^a &= 8(\mathbf{Y}H)^2 \left(\frac{g}{4}\right)^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [k_3^2(2u_\mu u_\nu - \delta_{\mu\nu}) \\
 &\quad + 2\omega_n k_3(u_\mu b_\nu + u_\nu b_\mu) + \omega_n^2(2b_\mu b_\nu - \delta_{\mu\nu})] I_{22}(\mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 {}^2\Pi_{\mu\nu}^b &= -8(\mathbf{Y}H)^2 \left(\frac{g}{4}\right)^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ [I_{41}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + I_{14}(\mathbf{k}, \mathbf{q})] \right. \\
 &\quad \times [4k_\mu k_\nu(k_3^2 - \omega_n^2) - 2((k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu)k_3 - (k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu)\omega_n)(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)] \\
 &\quad \left. - 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^2 [k_3 b^\alpha k^\beta - \omega_n u^\alpha k^\beta] [I_{41}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - I_{14}(\mathbf{k}, \mathbf{q})] \right\}. \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

Usando una vez más la Ec. (4.64), se obtiene

$${}^2\Pi_{\mu\nu}^a = -8 \left(\frac{\mathbf{Y}H}{T}\right)^2 \left(\frac{g}{4}\right)^2 \frac{7\xi(3)}{48\pi^4} \{ \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} + (2 + 3b^i b^j) \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} \}, \quad (C.7)$$

y

$${}^2\Pi_{\mu\nu}^b = 8 \left(\frac{\mathbf{Y}H}{T}\right)^2 \left(\frac{g}{4}\right)^2 \frac{7\xi(3)}{144\pi^4} \{ \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} + 6\delta_{\mu 3} \delta_{\nu 3} - 9\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \}. \quad (C.8)$$

De la Ec. (C.2), se observa que la principal contribución corresponde al término proporcional a T^2 y de ahí el resultado de la Ec. (5.45), una vez que se ha sumado sobre todos los fermiones hipercargados. Después de factorizar las contribuciones dominantes, nótese que los términos proporcionales a $(m_{f_i}/T)^2$ aparecen junto con un factor asociado a la renormalización. En este trabajo no se llevó a cabo en detalle el corrimiento de la masa y constante de acoplamiento en función de la escala de energía μ , pero, al igual que en el caso del potencial de fermiones, al extraer la parte del vacío, la dependencia en el factor de escala μ se elimina. Por lo tanto estos términos dan correcciones proporcionales a $(m_{f_i}/T)^2$. De esta manera, para valores de v durante la transición de fase, estas correcciones pueden ser despreciadas sin ningún problema.

De la Ec. (C.4), y por el mismo procedimiento del término a orden cero en el campo, la contribución de los términos fuera de la diagonal es proporcional a $\mathbf{Y}H/T^2$ y, comparando con la contribución principal en la temperatura, estos términos también pueden ser despreciados sin ningún problema.

Finalmente de la Ec. (C.7) y (C.8), nótese que las contribuciones a segundo orden en el campo son proporcionales a $(\mathbf{Y}H/T^2)^2$ y por lo tanto su contribución es despreciable.

Apéndice D

Propagador inverso del fermión

En este apéndice mostramos el procedimiento para invertir el propagador de fermiones utilizado en el cálculo del potencial de fermiones a 1-loop en presencia del campo hipermagnético.

El procedimiento es muy simple y consiste en lo siguiente: A partir del propagador del fermión en el límite de campo débil

$$iS(k)_B = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} + \frac{\gamma_5 \not{k} \not{b} (\not{k}_\parallel + m)(eB)}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{2(eB)^2 k_\perp^2}{(k^2 - m^2)^4} \left(m + \not{k}_\parallel + \not{k}_\perp \frac{m^2 - k_\parallel^2}{k_\perp^2} \right), \quad (\text{D.1})$$

se propone una forma funcional del propagador inverso con las mismas características que el propagador de la Ec. (D.1), esto es

$$(iS(k)_B)^{-1} = (\not{k} - m) + \frac{eB}{(k^2 - m^2)^2} \mathbf{A} + \frac{2(eB)^2 k_\perp^2}{(k^2 - m^2)^4} \mathbf{B} \quad (\text{D.2})$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos matrices. Para determinar estas matrices, usamos la relación

$$(iS(k)_B)(iS(k)_B)^{-1} = \mathbf{1}. \quad (\text{D.3})$$

Esta relación plantea un sistema de ecuaciones en términos de \mathbf{A} y \mathbf{B} que al resolverse se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -(\not{k} - m) \gamma_5 \not{k} \not{b} (\not{k}_\parallel + m) (\not{k} - m) \\ \mathbf{B} &= (\not{k} - m) \left[(\not{k}_\parallel + m) + \not{k}_\perp \left(\frac{m^2 - k_\parallel^2}{k_\perp^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2k_\perp^2} \gamma_5 \not{k} \not{b} (\not{k}_\parallel + m) (\not{k} - m) \gamma_5 \not{k} \not{b} (\not{k}_\parallel + m) \right] (\not{k} - m). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Con lo anterior, el propagador inverso de fermiones de la Ec. (D.2) queda determinado hasta $\mathcal{O}((eB)^2)$.

Bibliografía

- [1] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Westview Press., 1990.
- [2] K. A. Olivie and J. A. Peacock. *Big-Bang Cosmology*. J. Phys. G **33**, 210 (2006).
- [3] A. D. Sakharov. *Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe*. Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. **5**, 32 (1967).
- [4] F. Halzen and A. D. Martin. *Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley and Sons, 1984.
- [5] L. D. Landau. *On the conservation laws for weak interactions*. Nucl. Phys. **3**, 127 (1957).
- [6] J. Christenson, J. Cronin, V. Fitch and R. Turlay. *Evidence for the 2π Decay of the $k(2)0$ Meson*. Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
- [7] M. E. Shaposhnikov. *Electroweak baryogenesis*. Contemp. Phys. **39**, 177 (1998).
- [8] M. Trodden. *Electroweak baryogenesis*. Rev. Mod. Phys. **71**, 1463 (1999).
- [9] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, New York., 1992.
- [10] A. Zee. *Quantum field theory in a nutshell*. Princeton, 2003.
- [11] S. Coleman. *Aspects of symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [12] A. D. Dolgov. *Baryogenesis, 30 years after*. hep-ph/9707419.
- [13] N. Petropoulos. *Baryogenesis at the electroweak phase transition*. hep-ph/0304275.
- [14] J. M. Cline. *Baryogenesis*. hep-ph/0609145.
- [15] M.-C. Chen. *TASI 2006 Lectures on Leptogenesis*. hep-ph/0703087.
- [16] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton. *A Saddle Point Solution in the Weinberg-Salam Theory*. Phys. Rev. D **30**, 2212 (1984).

- [17] P. Arnold and L. McLerran. *Sphalerons, small fluctuations, and baryon-number violation in electroweak theory*. Phys. Rev. D **36**, 581 (1987).
- [18] P. Arnold, D. Son and L. Yaffe. *The Hot baryon violation rate is $O(\alpha_w^{*5} T^{*4})$* . Phys. Rev. D **55**, 6264 (1997).
- [19] A. I. Sanda. *CP Violation in physics beyond the standard model*. In I. Mannelli M. Giorgi and A. I. Sanda, editors, *CP violation: From quarks to Leptons*, page 5, 2006.
- [20] A. D. Dolgov. *CP Violation in cosmology*. In I. Mannelli M. Giorgi and A. I. Sanda, editors, *CP violation: From quarks to Leptons*, page 407, 2006.
- [21] M. E. Shaposhnikov. *Standard model solution of the baryogenesis problem*. Phys. Lett. B **277**, 324 (1992).
- [22] L. McLerran. *Can the Observed Baryon Asymmetry Be Produced at the Electroweak Phase Transition?* Phys. Rev. Lett. **62**, 1075 (1989).
- [23] A. Masiero. *CP Violation in physics beyond the standard model*. In I. Mannelli M. Giorgi and A. I. Sanda, editors, *CP violation: From quarks to Leptons*, page 133, 2006.
- [24] A. Ayala, J. Besprosvany, G. Pallares and G. Piccinelli. *Axially asymmetric fermion scattering off electroweak phase transition bubble walls with hypermagnetic fields*. Phys. Rev. D **64**, 123529 (2001).
- [25] A. Ayala, G. Piccinelli and G. Pallares. *Fermion scattering off electroweak phase transition kink walls with hypermagnetic fields*. Phys. Rev. D **66**, 103503 (2002).
- [26] A. Ayala and J. Besprosvany. *Axial charge segregation and CP violation during the electroweak phase transition with hypermagnetic fields*. Nucl. Phys. B **651**, 211 (2003).
- [27] P. Arnold. *Quark-Gluon Plasmas and Thermalization*. hep-ph/07080812.
- [28] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [29] G. Piccinelli and A. Ayala. *Electroweak baryogenesis and primordial hypermagnetic fields*. Lect. Notes Phys. **646**, 293 (2004).
- [30] P. Elmfors, K. Enqvist and K. Kainulainen. *Strongly first order electroweak phase transition induced by primordial hypermagnetic fields*. Phys. Lett. B **440**, 269 (1998).

- [31] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov. *The Electroweak phase transition: A Nonperturbative analysis*. Nucl. Phys. B **466**, 189 (1996).
- [32] K. Kajantie, M. Laine, J. Peisa, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov. *The Electroweak phase transition in a magnetic field*. Nucl. Phys. B **544**, 357 (1999).
- [33] M. Giovannini and M. E. Shaposhnikov. *Primordial hypermagnetic fields and triangle anomaly*. Phys. Rev. D **57**, 2186 (1998).
- [34] W.-M. Yao et al. *Review of Particle Physics*. J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [35] V. Skalozub and V. Demchik. *Electroweak phase transition in strong magnetic fields in the Standard Model of elementary particles*. hep-th/9912071.
- [36] V. Skalozub and M. Bordag. *Ring diagrams and electroweak phase transition in a magnetic field*. Int. J. Mod. Phys. A **15**, 349 (2000).
- [37] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press., 1992.
- [38] L. Dolan and R. Jackiw. *Symmetry Behavior at Finite Temperature*. Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [39] N. K. Nielsen. *On the Gauge Dependence of Spontaneous Symmetry Breaking in Gauge Theories*. Nucl. Phys. B **101**, 173 (1975).
- [40] J. C. D'Olivo, J. F. Nieves and S. Sahu. *Field theory of the photon selfenergy in a medium with a magnetic field and the Faraday effect*. Phys. Rev. D **67**, 025018 (2003).
- [41] J. Schwinger. *On gauge invariance and vacuum polarization*. Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [42] C. N. Leung, S. -Y. Wang, Leung. *Gauge independent approach to chiral symmetry breaking in a strong magnetic field*. Nucl. Phys. B **747**, 266 (2006).
- [43] E. Ferrer. *Nonperturbative effects of strong magnetic fields on neutrino self-energy: A New approach*. Phys. Lett. B **481**, 287 (2000).
- [44] A. Ayala, A. Bashir, A. Raya and E. Rojas. *Dynamical mass generation in strongly coupled quantum electrodynamics with weak magnetic fields*. Phys. Rev. D **73**, 10500 (2006).
- [45] F. A. Barone, H. Boshi-Filho and C. Farina. *Three methods for calculating the Feynman propagator*. Am. J. Phys. **71**, 483 (2003).

- [46] A. Aragao, H. Boschi-Filho, C. Farina, F.A. Barone. *Non-Relativistic Propagators via Schwinger's Method*. *quant-ph/0704.1645v1*.
- [47] A. Erdas and G. Feldman. *Magnetic Field Effects On Lagrangians And Neutrino Selfenergies In The Salam-Weinberg Theory In Arbitrary Gauges*. Nucl. Phys. B **343**, 597 (1990).
- [48] A. Ayala, A. Sánchez, G. Piccinelli and S. Sahu. *Effective potential at finite temperature in a constant magnetic field: Ring diagrams in a scalar theory*. Phys. Rev. D **71**, 023004 (2005).
- [49] T.-K. Chyi et. al. *The weak field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field*. Phys. Rev. D **62**, 105014 (2000).
- [50] V. V. Usov. *Photon splitting in the superstrong magnetic fields of pulsars*. Astrophys. J. **572**, L87 (2002).
- [51] D. G. Yamazaki et al. *Primordial magnetic field constrained from CMB anisotropies, and its generation and evolution before, during and after the BBN*. *astro-ph/0610234*.
- [52] R. Maartens. *Cosmological magnetic fields*. Pramana **55**, 575 (2000).
- [53] J. Ambjørn and P. Olesen. *On Electroweak Magnetism*. Nucl. Phys. B **315**, 606 (1989).
- [54] Hong-Hua Xu. *Relation between real time and imaginary time formalisms of finite temperature quantum field theory*. Phys. Rev. D **47**, 2622 (1993).
- [55] J. Kapusta. *Finite-Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [56] H. A. Weldon. *Mishaps with Feynman parametrization at finite temperature*. Phys. Rev. D **47**, 594 (1993).
- [57] G. Metikas. *Uniqueness of thermal effective potential*. *hep-th/9910063*.
- [58] P. F. Bedaque and A. Das. *On the zero momentum limit of Feynman amplitudes at finite temperature*. Phys. Rev. D **45**, 2906 (1992).
- [59] P. S. Gribosky and B. R. Holstein. *The Zero momentum limit of the vacuum polarization at finite temperature*. Z. Phys. C **47**, 205 (1990).
- [60] A. Das. *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific Publishing Company, 1997.
- [61] M. E. Carrington. *Ring diagram summations in the finite temperature effective potential*. Phys. Rev. D **45**, 2933 (1992).

- [62] B. Davies. *Integral Transforms and their Applications*. Springer-Verlag, 2002.
- [63] D. J. Bedingham. *Dimensional regularization and Mellin summation in high temperature calculations*. *hep-ph/0011012*.
- [64] A. Sánchez, A. Ayala and G. Piccinelli. *Effective potential at finite temperature in a constant hypermagnetic field: Ring diagrams in the standard model*. *Phys. Rev. D* **75**, 043004 (2007).
- [65] S. Coleman and E. Weinberg. *Radiative Corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*. *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).
- [66] S. Weinberg. *Gauge and global symmetries at high temperature*. *Phys. Rev. D* **9**, 3357 (1974).
- [67] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [68] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press., 2002.
- [69] J. F. Nieves and P. B. Pal. *P and CP Odd Terms In The Photon Selfenergy Within A Medium*. *Phys. Rev. D* **39**, 652 (1989).
- [70] J. L. Navarro et al. *Electroweak Symmetry restoration. Work in progress*.
- [71] P. Arnold and O. Espinosa. *The Effective potential and first order phase transitions: Beyond leading-order*. *Phys. Rev. D* **47**, 3546 (1993).
- [72] D. Comelli, D. Grasso, M. Pietroni and A. Riotto. *The Sphaleron in a magnetic field and electroweak baryogenesis*. *Phys. Lett. B* **458**, 304 (1999).
- [73] I. A. Shushpanov and A. V. Smilga. *Quark condensate in a magnetic field*. *Phys. Lett. B* **402**, 351 (1997).
- [74] V.P. Gusynin, V.A. Miransky , I.A. Shovkovy. *Theory of the magnetic catalysis of chiral symmetry breaking in QED*. *Nucl. Phys. B* **563**, 361 (1999).