



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN**

ANÁLISIS DE EFICIENCIA
DE LA COMPAÑÍA PETRÓLEOS MEXICANOS (PEMEX),
UTILIZANDO LA TEORÍA
“DATA ENVELOPMENT ANALYSIS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y COMPUTACIÓN

PRESENTA

MARÍA DEL ROCIO MUÑOZ CARRILLO

ASESOR: DOCTOR REFUGIO TRUJILLO CORTEZ



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

*Nada tengo que no me haya sido dado por los demás...
Madre Teresa de Calcuta.*

Gracias a Dios por las bendiciones que he recibido en mi vida y a la Universidad Nacional Autónoma de México, mi Alma Matter.

Un agradecimiento muy especial por su gran apoyo, al personal de la Jefatura del Programa de Matemáticas Aplicadas y Computación, de la FES Acatlán.

Con respeto y admiración agradezco infinitamente a mis maestros: Ya que sin su apoyo y estímulo no hubiera sido posible concluir esta meta.

Agradezco también a mi maestro y amigo el Doctor Sergio Pineda Martínez, por todas sus grandes enseñanzas en el área de las matemáticas.

Al Doctor Refugio Trujillo Cortez mi asesor de tesis: Muchas gracias Doctor por compartir conmigo tus conocimientos y tu experiencia.

A mis amigos y compañeros de carrera en la universidad, gracias por todo su entusiasmo y su compañía.

A mis padres Ana y Raúl (†): Por el apoyo y palabras de entusiasmo que recibí de ellos.

A mi hija Diana Laura: Gracias por tu comprensión, por todas las veces que no tuviste mi compañía.

A mi tía, Celia Muñoz y a mi abuela Lucía Cruz (†). Mis dos grandes pilares. Gracias por enseñarme a ser una guerrera y a tener disciplinas.

A mi primas Elizabeth y Jaqueline Jones: Gracias por estar conmigo cuando las he necesitado y por su gran apoyo incondicional.

A Edgar Jones: Gracias primo por todo el apoyo y porque siempre estuviste atento a mis necesidades para lograr concluir este trabajo. Eres un ejemplo a seguir.

Agradezco también al Doctor Vinicio Suro, al Ing. Rodrigo Pulido y al Ing. Javier Almaráz; de la Subdirección de Planeación y Evaluación de PEMEX Exploración y Producción, por la valiosa orientación y el apoyo recibidos.

Índice

	página
Introducción	6
<u>Capítulo I</u>	
<u>Antecedentes de la Teoría "Data Envelopment Analysis" (DEA)</u>	8
I.1 Breve Historia de la teoría DEA	8
I.2 Conceptos Básicos de la teoría DEA	9
I.3 Estudio General de la teoría DEA	13
I.4 Algunas Aplicaciones de la teoría DEA	25
<u>Capítulo II</u>	
<u>Conocimientos Previos a la Teoría "Data Envelopment Analysis"(DEA)</u>	28
II.1 Programación Lineal	28
II.2 El Modelo de Programación Lineal	28
II.2.1 Supuestos de un problema de Programación Lineal	29
II.2.2 Equivalencias de un problema de Programación Lineal	30
II.3 El Método Simplex	36
II.3.1 Definición de Soluciones Básicas Factibles	37
II.3.2 Algoritmo Simplex	38
II.4 El Modelo Primal y el Modelo Dual	45
II.4.1 Forma Canónica o Simétrica de Dualidad	45
II.4.2 Forma Estándar o no-Simétrica de Dualidad	45
II.4.3 Formas Mixtas de Dualidad	46
II.5 Teoremas de Dualidad y de Holgura Complementaria	48
II.6 Interpretación Económica de las Variables del Dual	52
II.7 Soluciones a los Modelos Primal y Dual	55
II.7.1 Método Dual Simplex	55

<u>Capítulo III</u>	
<u>La Teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA)</u>	58
III. 1 El Modelo CCR (Charnes-Cooper-Rhodes), Orientado a Entradas	59
III. 2 Ejemplos sobre el Modelo CCR	66
III. 3 Teoremas de Eficiencia del Modelo CCR	84
III. 4 Procedimientos de Solución del Modelo CCR y Ejemplo	88
III. 5 El Modelo CCR (Charnes-Cooper-Rhodes), Orientado a Salidas	99
III. 6 El Modelo BCC (Banker-Charnes-Cooper)	107
III. 7 Teoremas de Eficiencia del Modelo BCC	113
III. 8 El Modelo BCC (Banker-Charnes-Cooper), Orientado a Salidas	115
III. 9 El Modelo Aditivo y Ejemplo	116
III.10 Resumen de los Modelos Básicos de DEA	122
<u>Capítulo IV</u>	
<u>Análisis de Sensibilidad</u>	124
IV.1 El Análisis de Sensibilidad en la teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA)	124
IV.2 La Robustéz de los Datos	126
<u>Capítulo V</u>	
<u>Aplicación a la Compañía Petróleos Mexicanos (PEMEX)</u>	128
V.1 Breve Descripción de la Compañía Petróleos Mexicanos (PEMEX)	128
V.2 La Producción de Petróleo Crudo en Barriles	130
V.3 La Producción de Gas	131
V.4 Análisis de Eficiencia de la Compañía Petróleos Mexicanos (PEMEX)	132
V.4.1 Estado Actual	132
V.4.2 Datos de Entrada	132
V.4.3 Modelo Propuesto con la Aplicación de la Teoría “Data Envelopment Analysis”	136
V.4.4 Resultados del Modelo y Datos de Salida	167

apítulo VI
Conclusiones

168

Bibliografía

173

Referencias

174

Introducción

La tendencia hacia la globalización que en materia económica estamos viviendo actualmente, demanda de las empresas mayores niveles de productividad y el mejor aprovechamiento de sus recursos; ya sean humanos, materiales o financieros, para el cumplimiento de sus objetivos y la preservación de un buen posicionamiento en el mercado en el que se desenvuelven, ante la aguerida competencia.

Se entiende por productividad, la cantidad de producto que se obtiene por una unidad de insumo o recurso, de un factor durante un lapso determinado. Si el concepto de productividad puede aplicarse a algunos de los factores de producción, por ejemplo trabajo, tierra, capital; se hace con respecto al trabajo. Así, podemos hablar de productividad por hora-hombre de trabajo en una empresa. En éste sentido podemos referirnos también al aumento o la disminución del rendimiento financiero o físico que ocurre ante la variación de alguno de los factores que intervienen en la producción [4].

Consecuentemente, se entiende también que uno de los objetivos primordiales de una empresa es mejorar la eficiencia o efectividad del uso de sus recursos y procesos; con la finalidad de obtener los mejores beneficios financieros a un costo mínimo o significativos ahorros en sus procesos, mejor servicio a sus clientes o mayor control administrativo, según sea el caso. Siendo así, podemos ver a una empresa u organización como un sistema, el cual tiene componentes que interactúan entre sí, en donde fluye información y a la vez interactúa también con otros sistemas.

En Economía el término "Eficiencia" se define de dos maneras: primeramente la eficiencia en la producción; lo cuál se refiere a que una planta es eficiente si todos sus recursos (tierra, trabajo, capital) son bien aprovechados, esto es, que un producto se esté produciendo con el mínimo costo en sus insumos.

El segundo término se refiere a "La Eficiencia de un Sistema Económico". Un sistema económico es eficiente si los recursos se están usando y los bienes y servicios se están distribuyendo de tal forma que sea imposible mejorar a algunos sin perjudicar a otros. Este concepto de eficiencia fue desarrollado por el economista italiano-francés Vilfredo Pareto y se le conoce como la "Eficiencia de Pareto" o el "Óptimo de Pareto" [3,4]. Es decir, "Eficiencia" es el máximo beneficio económico identificado como una posición en una economía, en la cuál es imposible mejorar cualquier beneficio alterando la producción o intercambio sin perjudicar algún otro beneficio.

El concepto de eficiencia también es definido por otras disciplinas como las Ciencias e Ingeniería. Para ilustrar su definición tomaremos un ejemplo sobre el fenómeno de la combustión: "Eficiencia es la proporción de la cantidad de calor liberada por un combustible en un dispositivo o aparato, en relación con la máxima cantidad de calor o energía que podría ser liberada por ese combustible" [5].

En general, la forma de cómo se evalúa o define la eficiencia depende de el área de conocimiento en que se aplica. Más aun, la evaluación de eficiencia depende de la disciplina y de los parámetros que se usen para definirla.

El objetivo de este trabajo es aplicar la Teoría de Data Envelopment Analysis, para analizar la eficiencia de la empresa Petróleos Mexicanos, a quien nos referiremos en forma abreviada como PEMEX; en términos de diferentes parámetros o procesos de esta empresa, siendo nuestra hipótesis la siguiente: "PEMEX puede mejorar sus niveles de eficiencia en la extracción (producción) de petróleo crudo y gas natural".

"Data Envelopment Analysis" es una teoría, a la cuál nos referiremos en forma abreviada como DEA. Nos permite evaluar, medir, comparar y mejorar la eficiencia entre diversas entidades en condiciones semejantes. Llamaremos a estas entidades Unidades de Toma de Decisiones; para determinar aquellas que mejor desempeño tienen en el grupo y aquellas que no son eficientes volverlas eficientes. Para lo cuál identificaremos los recursos o insumos de una empresa como nuestros datos de entrada e identificaremos como datos de salida o resultados a los productos, servicios, beneficios, rendimientos, objetivos, producción o bienes generados según sea el tipo de empresa u organización.

Además de que se pretende que el presente estudio sea de utilidad a la empresa PEMEX, se deja abierta la posibilidad para que se profundice en temas relacionados.

Este trabajo consta de seis capítulos. En el primero se dan a conocer los antecedentes y la historia del surgimiento de la teoría "Data Envelopment Analysis" (DEA), algunos conceptos básicos y una variedad de aplicaciones. El segundo capítulo incluye un repaso de toda la teoría de programación lineal que es necesario tener presente para el estudio de la teoría DEA. En el tercer capítulo se describen de manera detallada los teoremas y los fundamentos matemáticos que sustentan a esta teoría. El cuarto capítulo contiene el análisis de sensibilidad tan importante tanto en la Programación Lineal como en esta teoría.

El quinto capítulo está dedicado a la aplicación de la teoría DEA en la empresa Petróleos Mexicanos (PEMEX), la recolección de la información y los modelos propuestos aplicando la teoría descrita en el capítulo III así como los resultados del estudio. Finalmente en el último capítulo se muestran las conclusiones y el resultado de nuestra hipótesis.

Capítulo I

Antecedentes de la Teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA)

I.1 Breve Historia de la Teoría DEA

La información contenida en este capítulo ha sido en su mayoría obtenida de la teoría de la bibliografía [1] y [2] de este trabajo.

“Data Envelopment Analysis” es una teoría y como tal, se trata de un conocimiento sustentado en principios y teoremas que además pueden aplicarse para conseguir un fin.

Los autores que crearon esta teoría aproximadamente en 1978, acordaron darle el nombre “Data Envelopment Analysis” debido a la forma en que “envuelve” o “involucra” los datos u observaciones.

El término “Unidad de Toma de Decisiones” (Decision Making Unit, DMU) se usó por primera vez en el modelo CCR, propuesto por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978. Este fue publicado en el artículo “Measuring the Efficiency of Decision Making Units”, en la revista no. 2 de “European Journal of Operational Research”.

El término DEA “Data Envelopment Analysis” fue introducido en su reporte: “A Data Envelopment Analysis Approach to Evaluation of the Program Follow Through Experiments in U.S. Public School Education”, publicado en la revista “Management Science Research”, Report No. 432; publicado por los mencionados autores.

La teoría DEA tiene su origen en los esfuerzos por evaluar en los primeros años de la década de los setentas, un proyecto llamado “Program Follow Through”, que fue un gran intento del Departamento de Educación por aplicar principios estadísticos para el diseño de experimentos para un conjunto de escuelas en iguales condiciones, a nivel nacional. El propósito de estos experimentos era la evaluación de programas educacionales diseñados para ayudar a alumnos en condiciones de menoscabo en nivel educacional, en escuelas públicas de los Estados Unidos.

Sin embargo los resultados de los planteamientos estadístico-económicos no fueron satisfactorios para ellos, debido a que obtuvieron algunos resultados que les parecieron absurdos. En respuesta a esta situación e investigando encontraron un artículo llamado “The Measurement of Productive Efficiency”, en la revista “Journal of the Royal Statistical Society” (1957), publicado por Farrell [2].

Este trabajo fue extendido dando como resultado la teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA), como base de análisis de eficiencia. Estos resultados fueron publicados en 1981, en la revista “Management Science” No. 27, bajo el nombre “Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through”.

A partir de este estudio la teoría de DEA se ha desarrollado en diferentes direcciones y en diversas aplicaciones, tanto en empresas lucrativas, como en empresas sin finalidades de lucro; como son por ejemplo evaluaciones de eficiencia de comités escolares, polígonos para entrenamiento de pilotos y unidades de combate de la fuerza Aérea Norteamericana, hospitales, bibliotecas. Una de las más impresionantes aplicaciones ha sido la prevención de fallas en un banco; cuyo modelo fue desarrollado por el Banco de Reservas Federales de Dallas.

También ha tenido aplicación en la evaluación de la eficiencia del servicio de algunas bibliotecas universitarias en Estados Unidos.

I.2 Conceptos Básicos de la Teoría DEA

Llamaremos “datos de entrada” a los recursos humanos, materiales, financieros ó insumos con que cuente una empresa; y usaremos el término “datos de salida” para referirnos a las utilidades o beneficios financieros, rendimientos, productividad, servicios, bienes generados u objetivos a cumplir por las “entradas” antes mencionadas, según sea el caso.

El objetivo es identificar una “Frontera de Eficiencia”, la cuál es usada para evaluar éstos datos u observaciones que representan el desempeño de un conjunto de entidades a ser evaluadas. El término “Unidad de Toma de Decisiones” (Decision Making Unit, DMU) [2] se usará en adelante para identificar a cualquiera de las entidades o unidades a ser evaluadas y que son parte de una colección de elementos que utilizan entradas o recursos similares para producir salidas o beneficios similares. Podemos considerar así al conjunto de hospitales que forman parte del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), una cadena de restaurantes o una cadena de hoteles, por citar algunos ejemplos.

El resultado de las evaluaciones se representa en una “calificación” o puntuación por desempeño, cuyo margen o rango está entre cero y uno. Esta puntuación o calificación representa el grado de eficiencia obtenido por cada una de estas entidades que hemos llamado “Unidades de Toma de Decisiones”. En la obtención de ésta puntuación, la teoría DEA puede identificar los orígenes de las ineficiencias en cada entrada y salida de datos para cada unidad de Toma de Decisiones. Se identifican también las unidades de decisión localizadas en la “Frontera de Eficiencia”, y las unidades de decisión que rápidamente alcanzan este lugar. Estas pueden usarse como puntos de referencia (récords o marcas), o como guía para el mejoramiento en el desempeño de otras Unidades de Toma de Decisiones.

Definiremos el sentido de eficiencia para la teoría Data Envelopment Analysis (DEA). Primeramente al hablar de eficiencia nos referiremos a diferentes tipos de eficiencia definidos según una disciplina en particular. Retomando los conceptos de Economía, podemos referirnos a “eficiencia técnica”, como también “mixta” y otros tipos de eficiencia.

La “Eficiencia Técnica” es un concepto puramente físico, referido a los insumos físicos requeridos para producir una unidad de producto, como tiempo del trabajador, tiempo de máquina, tierra, insumos o materias primas. Se dice entonces que un proceso de producción no es técnicamente eficiente si no es posible usar menos cantidad de un insumo para producir el mismo producto sin tener que usar más cantidad de otro insumo. De igual forma ineficiencia técnica representará desperdicio o despilfarro. Si se desea profundizar en éstas definiciones, puede consultarse la bibliografía [4] de este trabajo.

Hemos comentado ya que la puntuación o calificación de la medida de eficiencia de cada unidad de decisión se encuentra en un valor entre cero y uno. Este valor es una proporción entre las salidas/entradas. Es decir, una razón de las salidas sobre las entradas.

Para ilustrar ésta razón o proporción de salidas/entradas, nos referiremos como ejemplo a la definición de eficiencia usada en Ingeniería y Ciencias, que nos ilustra con una muestra sobre combustión: “Eficiencia es la proporción de la cantidad de calor liberada por un combustible en un dispositivo o aparato, en relación con la máxima cantidad de calor o energía que podría ser liberada por éste combustible”. En símbolos, esto significa: $E = y_r / y_R$, donde y_R = máxima cantidad de calor que puede obtenerse de una entrada. En éste caso la entrada es el combustible y y_r = estimación de la cantidad de calor obtenida de este mismo combustible por el dispositivo o aparato en el momento que se está evaluando.

Otro ejemplo es el caso de la evaluación de un horno que una empresa ha fabricado y que posteriormente saldrá a la venta. El desempeño de éste horno se evaluaría comparándolo con un horno que cumpliera con los estándares de calidad establecidos para considerarlo como “Eficiente”; obteniendo un valor de uno cuando la medida de calor obtenido del horno es igual a la medida de calor obtenida del horno que se ha calificado como “Eficiente”.

Para profundizar sobre la definición de eficiencia en el área de ingeniería, referirse a la fuente bibliográfica [5].

La teoría DEA involucra otros factores como los costos, y extiende el significado de “razón o proporción de las salidas entre las entradas”, a múltiples salidas sobre múltiples entradas de datos.

Así, la teoría “Data Envelopment Analysis” identifica a las Unidades de Toma de Decisiones que tienen el mejor desempeño o que son eficientes de entre un conjunto de unidades, para ponerlas como un marcador o récord de medida de eficiencia más alta. Por ejemplo, un récord de producción obtenido por una fábrica.

Esto puede identificarse representando por medio de un punto en una “Frontera de Eficiencia” a estas unidades de decisión; en donde también se asigna un valor entre 0 y 1 a las restantes unidades de toma de decisiones, es decir: $0 < E < 1$, siendo E = Eficiencia. La calificación que se les asigna dentro de este último valor se obtiene de la comparación del desempeño de éstas unidades restantes con las unidades eficientes que se encuentran en la “Frontera de Eficiencia”.

Esta medida de eficiencia refleja una serie de insumos que producen este récord más alto de eficiencia, por lo que llamaremos “multiplicadores” a ciertos insumos, aportaciones o entradas. Estos multiplicadores pueden usarse para evaluar cambios en el nivel de eficiencia de una unidad de toma de decisiones, que tendrá también cambios en sus correspondientes entradas o salidas. Así, éstos multiplicadores pueden usarse para llevar a cabo “Análisis de sensibilidad” para determinar cambios en todos los datos que podrían dar como resultado un cambio en la clasificación de “eficiente” a “ineficiente” o viceversa, para cualquier Unidad de Toma de Decisiones. Puede identificarse de ésta forma un rango permisible en la variación de los datos, sin que ocurra algún cambio en la calificación de eficiencia de una unidad de toma de decisiones. Este rango es llamado “rango de estabilidad” de los datos, y se asocia con cualquier unidad de toma de decisiones en particular.

Como mencionamos anteriormente, existen otras definiciones de eficiencia usadas en otras disciplinas, tal es el caso de la conocida definición de eficiencia llamada “Optimalidad de Pareto” usada en Economía, la cuál dice: “Un punto óptimo de Pareto es el máximo beneficio económico definido como una posición, en una economía o sistema económico, de la cuál es imposible mejorar cualquier beneficio al variar la producción o intercambio sin perjudicar algún otro beneficio”. Si se desea profundizar en ésta definición de eficiencia, se recomienda consultar la bibliografía [3] y [4] de éste trabajo.

Esta definición establece una base para una economía de bienestar común, en la que una reforma económica antes de ser adoptada se somete a juicio para determinar si aumenta el bienestar de algo sin empeorar el beneficio de otros.

Posteriormente ésta definición se extendió a las “economías de producción” [3] introduciendo precios de eficiencia (multiplicadores), para llevar a la producción e intercambio a una posición similar al punto óptimo de Pareto. Este planteamiento es también explorado en la teoría Data Envelopment Analysis por medio de la definición de eficiencia de “Pareto-Koopmans” [2].

Las aparentemente diferentes definiciones de eficiencia de Ingeniería y Ciencias y la de Pareto-Koopmans, están matemáticamente relacionadas la una con la otra por medio del “Teorema de Dualidad” de programación lineal, el cuál desarrollaremos ampliamente en el siguiente capítulo de este trabajo. Para precisar esto de otra manera: hay un problema que es dual al usado cuando se implementa la definición de eficiencia de ingeniería; la cuál emplea los mismos datos de manera diferente para alcanzar la medida de eficiencia de Pareto-Koopmans. Entonces en sus correspondientes mínimo y máximo valores, las medidas de eficiencia de Pareto-Koopmans y la de ingeniería son iguales.

Este problema dual utiliza una variante al beneficio óptimo en la definición de eficiencia:

Definición de Pareto Koopmans de Eficiencia.- El desempeño de una Unidad de Toma de Decisiones es eficiente sí y sólo sí no es posible mejorar cualquier entrada o salida (insumo o utilidad) sin afectar ó empeorar cualquier otra entrada o salida [2] □.

Tenemos además la siguiente definición:

Definición de Ineficiencia.- El desempeño de una Unidad de Toma de Decisiones no es eficiente sí y sólo sí es posible mejorar alguna entrada o salida (insumo o utilidad) sin afectar o empeorar alguna otra entrada o salida [2] □.

De esta manera, puede clasificarse a una Unidad de Toma de Decisiones como ineficiente, sí y sólo sí las coordenadas del conjunto de entradas-salidas seleccionado de esta unidad, no se encuentran en la “Frontera de Eficiencia”. A la inversa, los puntos geométricos asociados con el desempeño de la Unidad de Toma de Decisiones que será evaluada con la teoría DEA, serán eficientes sí y sólo sí están en la Frontera de Eficiencia.

La definición de eficiencia del área de Ciencias e Ingeniería citada anteriormente, involucra además el maximizar una relación de entradas-salidas, sujeta a un conjunto de restricciones en forma de desigualdades teniendo como límite a la unidad en sus posibles valores. Este problema no convexo y no lineal puede ser reemplazado por un problema de programación lineal; cuya solución puede obtenerse fácilmente por medio del empleo de software para resolver problemas de programación lineal.

La utilización de la relación dual de la programación lineal para abarcar las dos diferentes definiciones de eficiencia descritas anteriormente, le otorga a la teoría DEA una gran versatilidad y habilidad, convirtiéndola en una potente herramienta para su amplia aplicación a una gran diversidad de problemas.

La Teoría DEA (Data Envelopment Analysis) también nos da la posibilidad de identificar ineficiencias tanto en las entradas (recursos) como en las salidas (beneficios), en cada Unidad de Toma de Decisiones. La programación lineal (y matemática) de modelos y métodos que usa la Teoría DEA elabora sus evaluaciones a partir del desempeño, y por tanto revierte la manera usual en la cuál se usan los modelos de programación.

Esto ha conducido a nuevos resultados además de nuevas admisiones de uso en otras partes de la literatura en programación; por lo que este uso en programación lineal ha conducido además a nuevos principios de inferencia a partir de datos empíricos dirigidos a obtener las mejores evaluaciones para cada una de las entidades (o actividades) en una colección de entidades. Este hecho contrasta con el habitual enfoque de la Estadística, en la obtención del promedio ó media de los datos.

De esta manera las evaluaciones efectuadas usando la teoría DEA identifican los recursos e ineficiencias en cada entrada y cada salida para cada entidad, mientras proveen una medida global de eficiencia para cada entidad o actividad de interés.

En este sentido hacemos también una importante diferenciación en el significado de los términos “Efectividad y Eficiencia”, definiendo a ambas de la siguiente manera:

Efectividad: “La Habilidad para precisar y alcanzar metas” [2] □.

Eficiencia: “Beneficios garantizados con los recursos utilizados” [2] □.

Así, Efectividad (o Eficacia) se refiere a la realización de metas, que en contraste con la definición de Eficiencia, no hace alusión a los recursos utilizados.

El análisis de sensibilidad en la Teoría DEA, nos lleva a hacer estudios en los que se consideran rangos en los cuáles un solo dato puede variar sin alterar la evaluación de una Unidad de Toma de Decisiones y métodos para examinar el efecto resultante en la evaluación de una Unidad de Toma de Decisiones al variar todos los datos simultáneamente. Por ejemplo empeorar el desempeño de una unidad de Toma de Decisiones, modificando los datos de salidas-entradas para unidades eficientes, o mejorar el desempeño de una unidad ineficiente, al variar sus datos de salidas-entradas.

El análisis de sensibilidad no sólo se ocupa de la variación de los datos en las salidas-entradas, sino que además propone la eliminación de algunos datos o la introducción de algunos otros datos de manera adicional, para ser tomados en cuenta.

I.3 Estudio General de la Teoría DEA

El estudio de la Teoría Data Envelopment Analysis, como anteriormente mencionamos, tiene que ver con evaluaciones de desempeño y con la evaluación de actividades de organizaciones, empresas, instituciones educativas, dependencias gubernamentales, etc. Estas evaluaciones toman una variedad de formas en los análisis habituales, por ejemplo el costo por unidad producida, utilidad por unidad, beneficio obtenido, etc. Estas son medidas establecidas en forma de proporción, relación o razón como la siguiente:

$$\frac{\text{salidas}}{\text{entradas}} = \frac{\text{producción, rendimiento, utilidad, objetivo, bienes}}{\text{insumos, recursos}} \quad (1.3.1)$$

Esta es una medida de eficiencia comúnmente usada. Esta medida usual de productividad supone además una razón, relación o proporción cuando se usa para evaluar el desempeño de un trabajador. La establecemos como “producción por hora-trabajador”, o “producción por trabajador”. Estos son ejemplos en ventas, utilidades u otras medidas de rendimiento, las cuáles aparecen en el numerador de la relación (1.3.1).

Estas medidas a veces son referidas como “medidas parciales de productividad”, esta terminología se distingue del “Factor Total de Medidas de Productividad”, en que éste último factor total trata de obtener una relación de salidas – entradas en la cuál se tomen en cuenta todas las salidas (beneficios, utilidades, rendimientos, producciones, objetivo), y todas las entradas (insumos, recursos) combinando todas las entradas y todas las salidas para obtener una sola relación que no tenga ganancias atribuibles a un factor o alguna otra aportación fuera de la actividad “natural” de la empresa, como por ejemplo un aumento en el capital o una mejora en la administración, podrían erróneamente ser atribuidas a la actividad “natural” de la empresa.

Sin embargo al identificar los elementos que forman parte de este “Factor Total de Medidas de Productividad”, podrían tenerse ciertas dificultades en la elección de las entradas y salidas a ser consideradas y las contribuciones que deben tomarse en

cuenta para obtener una relación de una sola salida a una sola entrada, que se reduzca a la expresión de la forma (1.3.1).

Es decir, se presentan problemas y limitaciones cuando se trata de evaluar la productividad o eficiencia cuando deben tomarse en cuenta múltiples entradas y salidas. La teoría de DEA utiliza programación matemática, con la cuál puede manejar un gran número de variables y relaciones (restricciones). Esto disminuye los requerimientos que se presentan cuando existe la limitante de escoger sólo pocas entradas y salidas. Se manipulan de manera más simple los problemas complejos.

Para tener un primer acercamiento a esta teoría, plantearemos el caso de la relación entre una sola salida y una sola entrada referida en la tabla (1.3.1). Veamos el siguiente ejemplo:

Supongamos que existen 8 sucursales de una tienda departamental, las cuáles identificamos con letras de la A a la H, en la siguiente tabla:

Tienda	A	B	C	D	E	F	G	H
Empleados	2	3	3	4	5	5	6	8
Ventas	1	3	2	3	4	2	3	5
Ventas/Empleados	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabla 1.3.1 Se tiene un solo concepto de salida o utilidad, en relación con un solo concepto de entrada o recurso.

El número de empleados y ventas (medidas en \$100,000 de pesos) está registrado en cada columna. La última línea de la tabla muestra las ventas por empleado, una medida de productividad frecuentemente usada en disciplinas como la administración y el análisis de inversiones. Podemos notar que aplicando la expresión (1.3.1), los resultados pueden tratarse en un contexto más general de "Eficiencia", ya que con esta medida o relación, podemos identificar a la tienda B como la más eficiente y a F como a la menos eficiente.

Representemos estos datos en la figura 1.3.1 trazando el número de empleados en el eje horizontal y las ventas en el eje vertical. La pendiente de la línea que pasa por el origen se intersecta con el punto que representa a la tienda cuya relación de ventas/empleados es igual a uno. Llamaremos a esta línea la "Frontera de Eficiencia". Esta frontera toca al menos un punto (B) y los puntos restantes están por debajo de la línea. El nombre "Data Envelopment Analysis" (DEA) viene de esta propiedad, porque tal frontera "Envuelve o involucra" a estos puntos.

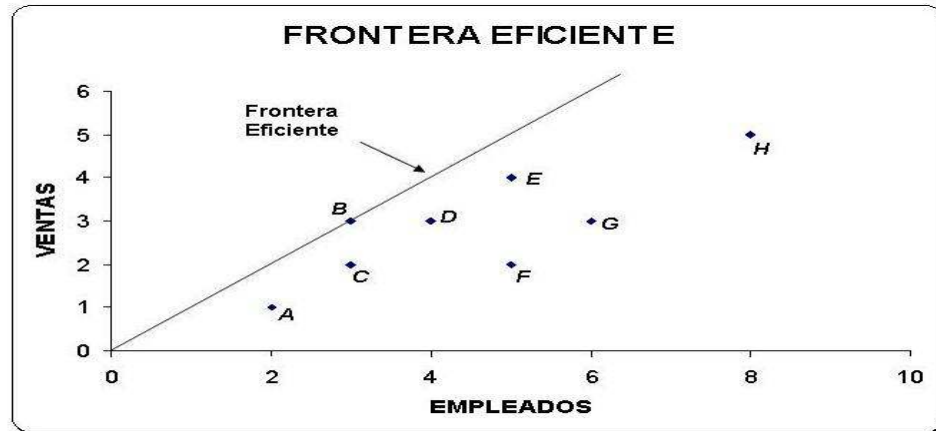


Figura 1.3.1 Sucursales de una tienda departamental.

Al ver estos datos estaríamos tentados a hacer una regresión lineal (método de la estadística) que se ajuste a los datos. La línea punteada en la figura 1.3.2 nos muestra la recta de regresión lineal, la cuál pasa también por el origen. La ecuación de regresión lineal es la siguiente: $y = 0.622x$.

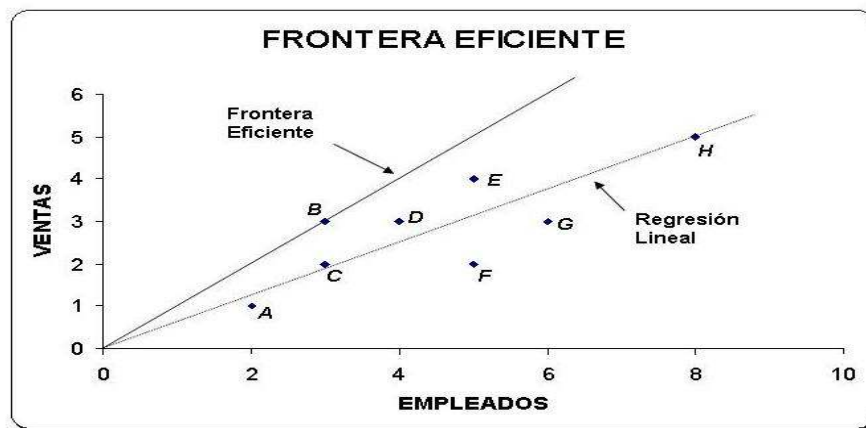


Figura 1.3.2 Regresión Lineal vs. Frontera

Esta línea, determinada por el método estadístico llamado regresión lineal, nos indica la “media” de éstos puntos, por lo que podríamos definir como “excelentes” a los puntos arriba de ésta, e inferiores o insatisfactorios a los puntos que están bajo la línea. Podríamos medir la excelencia o inferioridad de estos puntos por la magnitud de la desviación de ésta línea punteada. Por otra parte, la línea que hemos llamado “Frontera de Eficiencia” nos muestra el desempeño de la mejor tienda (B) y nos da la posibilidad de medir la eficiencia de las otras tiendas por medio de las desviaciones con respecto a ella.

Por lo tanto existe una diferencia fundamental entre la regresión lineal, perteneciente al área de la Estadística y el análisis con la teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA); ya que el análisis estadístico de regresión lineal nos refleja el promedio o tendencia central sobre el comportamiento de los datos, mientras la teoría DEA trata con el mejor desempeño y evalúa todos los desempeños por las desviaciones de los datos con respecto a la línea llamada “Frontera de Eficiencia”.

Ambos puntos de vista, tanto de la regresión lineal como de DEA, tienen grandes diferencias en sus conceptos cuando se usan como métodos de evaluación. Se trata de diferentes enfoques para analizar y plantear cómo pueden hacerse mejoras a un problema o planteamiento; ya que mientras la teoría DEA identifica un punto como B, para hacer referencia a él como un “récord de eficiencia” o “marca de eficiencia” y buscar mejoras teniéndolo como meta a alcanzar por los demás puntos (Unidades de Toma de Decisiones); por otra parte el planteamiento estadístico promedia al dato B con las otras observaciones (datos), tomando en cuenta también a F para sugerir dónde podrían hacerse mejoras.

No es razonable tampoco creer que la línea de eficiencia se extenderá al infinito, con la misma pendiente. Analizaremos este problema conforme usemos diferentes modelos de DEA. Sin embargo asumimos que ésta línea es eficaz en nuestro rango de interés y asumiremos también en algún momento que es la línea de constantes regresos a escala; más adelante nos referiremos a esto.

Retomando nuestro sencillo ejemplo, el resto de las tiendas comparadas con la tienda B son ineficientes. Podemos medir la eficiencia de las otras tiendas con relación a la tienda B como sigue:

$$0 \leq \frac{\text{Ventas por Empleado de otras Tiendas}}{\text{Ventas por Empleado de la Tienda B}} \leq 1 \quad (1.3.2)$$

Y ponerlas en el siguiente orden en relación con los resultados mostrados en la tabla 1.3.2

$$1 = B > E > D > C > H > A = G > F = 0.4$$

Así interpretamos que siendo F la de peor desempeño, obtiene $0.4 \times 100\% = 40\%$ de la eficiencia de B. podemos ver estos resultados en la tabla 1.3.2

Tienda	A	B	C	D	E	F	G	H
Eficiencia	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Tabla 1.3.2 Eficiencia de cada tienda en relación con la tienda B.

Nos enfrentamos ahora con otra situación: ¿Cómo hacemos que las tiendas restantes sean eficientes?, ¿Cómo llevarlas a la frontera de eficiencia?

Por ejemplo, puede mejorarse la actuación de la tienda A mostrada en la figura 1.3.3, de varias maneras: Una es reduciendo las entradas que es el número de empleados hacia A_1 con coordenadas (1,1) sobre la frontera de eficiencia y otra manera es incrementando las salidas, aumentando las ventas (recordemos que están dadas en unidades por \$100,000), hacia $A_2(2,2)$. Cualquier punto sobre el segmento de línea $\overline{A_1A_2}$ nos ofrece una oportunidad de hacer mejoras, asegurándonos de que nuestras entradas o recursos no se incrementen, y que nuestras salidas o utilidades no disminuyan al hacer a la tienda eficiente.

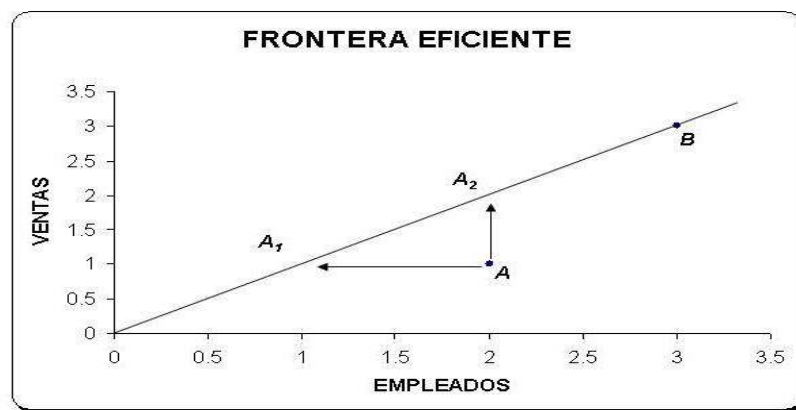


Figura 1.3.3 Mejoras a la tienda A

Este ejemplo muy simple nos lleva de las razones o proporciones mostradas en la tabla 1.3.1, hasta la razón de razones o proporción de proporciones mostrada en la tabla 1.3.2. Esto nos conduce a su vez a un importante punto: Los valores en la tabla 1.3.1 dependen de las unidades de medida utilizadas, no siendo éste el caso en la tabla 1.3.2. Por ejemplo, si las ventas se fijaran en unidades de \$10,000, la razón o proporción de F cambiaría de $\frac{2}{5} = 0.4$ a $\frac{20}{5} = 4$; sin embargo el valor en la tabla 1.3.2 permanecería sin cambio en $\frac{4}{10} = 0.4$, ya que también la eficiencia de la tienda B estaría dada por:

$\frac{30}{3} = 10$; y el marcador o récord de eficiencia relativa asociado con F no se afectaría por la elección de una unidad de medida diferente.

Esta propiedad, a menudo conocida como “Invariancia de Unidades” es muy importante tenerla en cuenta, al igual que se tiene en cuenta en el área de ciencias (principalmente en la Física) [2].

Veamos nuevamente el ejemplo de ingeniería que mostramos en un principio, en la definición de eficiencia del campo de la ingeniería.

Tenemos del campo de la combustión la clasificación de eficiencia de un horno, que se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$0 \leq E_r = \frac{Y_r}{Y_R} \leq 1 \quad (1.3.3)$$

Donde Y_r = Calor obtenido de una unidad dada de combustible por el horno que se está evaluando.

Y_R = Máximo calor que puede obtenerse de ésta misma entrada (o cantidad) de combustible.

Tenemos que el máximo calor puede calcularse por medio de análisis químico-físicos satisfactorios cuyos procedimientos salen fuera del alcance de éste trabajo. El punto que queremos enfatizar aquí es que x , la cantidad de combustible usado debe ser la misma, así que, matemáticamente:

$$0 \leq \frac{Y_r / x}{Y_R / x} = \frac{Y_r}{Y_R} \leq 1 \quad (1.3.4)$$

Por lo tanto, la fórmula (1.3.3) se obtiene de una razón de razones o proporción de proporciones que tiene invariancia de unidades.

Regresando a las razones o proporciones mostradas en la tabla 1.3.2 observamos que además estos valores están limitados entre cero y la unidad. Sin embargo las variaciones registradas en esta tabla pueden deberse a un exceso en la cantidad de entradas, o una deficiencia en las salidas, razón por la cuál haremos uso de formulas como la (1.3.4), misma que está restringida sólo al caso de una salida y una entrada. Si tenemos el caso de múltiples entradas y salidas, podríamos confundirnos en el concepto de “Factor de Producción Parcial” y “Factor de Producción Total”, como medidas. Por lo que ahora trataremos el caso de dos entradas y una salida.

Veamos la tabla (1.3.3), en la cuál se muestra ahora el desempeño de 9 supermercados, cada uno con dos entradas (recursos o insumos) y una salida (utilidad o beneficio).

La entrada x_1 es el número de empleados (en unidad: 10), la entrada x_2 es el área o piso (unidades: 1000m²). De salidas tenemos a las ventas identificadas como “ y ” (unidades: \$100,000). Estas ventas son llevadas a la unidad, bajo la concepción de “rendimientos constantes a escala”.

Hagamos aquí un pequeño alto para aclarar éste concepto: En Economía esto significa que si estamos utilizando cierta cantidad de factores, representada por un vector de factores “ x ” (trabajo, máquinas, horas-hombre, etc.) para obtener un determinado nivel de producción “ y ”, podemos aumentar o reducir todos los factores en una proporción para aumentar o reducir el nivel de producción en una determinada cantidad. Si esto es

posible, decimos que la tecnología de la empresa muestra rendimientos constantes de escala. Si se desea profundizar en esto último, se recomienda consultar la bibliografía [3] de este trabajo.

Volviendo a nuestro ejemplo, tenemos que los valores de entrada son ajustados (o normalizados) para obtener una unidad en las ventas.

Tienda		A	B	C	D	E	F	G	H	I
Empleados	x_1	4	7	8	4	2	5	6	5.5	6
Superficie de piso	x_2	3	3	1	2	4	2	4	2.5	2.5
Ventas	y	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 1.3.3 Caso de dos Entradas y una salida

Ahora tomamos a las dos entradas y a la salida, de la siguiente forma:

$$\text{Entrada } x_1 / \text{salida } y \quad \text{y} \quad \text{Entrada } x_2 / \text{Salida } y$$

Como ejes en la Figura 1.3.4:

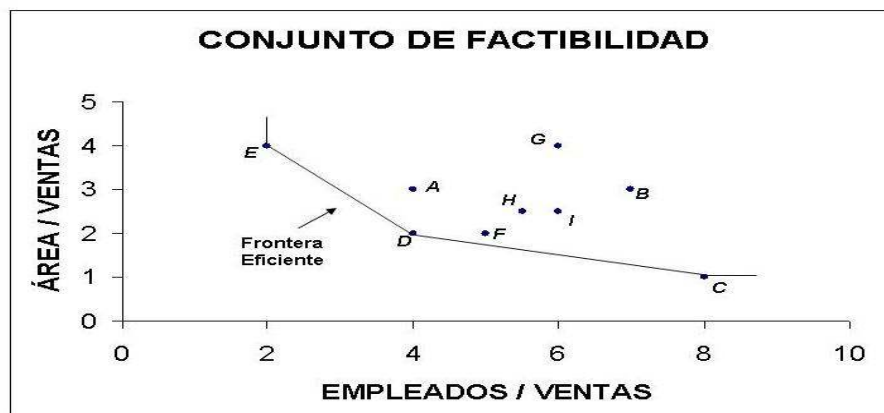


Figura 1.3.4 Caso de 2 entradas y 1 salida.

Desde el punto de vista de la eficiencia, es natural considerar tiendas que usan menos entradas para obtener una salida como más eficientes, por consiguiente identificamos la frontera eficiente como la línea que conecta a los puntos C, D y E. No discutimos el orden de acomodo entre estas tres tiendas, sino simplemente vemos que no hay puntos en la línea de frontera que puedan mejorar uno de los valores de entrada sin empeorar otro. Pueden involucrarse o “envolverse” todos los datos dentro de la región junto a la línea de frontera y la línea horizontal que pasa por el punto C y la línea vertical que pasa por el punto E.

Llamamos a ésta región el conjunto factible de producción. (más adecuadamente, podría llamarse conjunto de factibilidades de producción lineal, puesto que está

garantizado que el límite de ésta región sea lineal, por ejemplo, formado por segmentos como el segmento que conecta E y D, y el que conecta a D y C). Esto significa que los puntos nos proveen cierta evidencia (empírica) de que la productividad es posible en los rangos especificados por las coordenadas de cualquier punto en ésta región.

La eficiencia de las tiendas que no están en la frontera se puede medir por referencia a un punto de la frontera así: por ejemplo, A es ineficiente. Para medir su ineficiencia tracemos un segmento de línea \overline{OA} , es decir, la línea del origen al punto A; y el punto donde se intersecta este segmento de línea con la frontera de eficiencia, llamémoslo P. Veamos esto gráficamente en la figura 1.3.5. Entonces la eficiencia de A puede ser evaluada por

$$\frac{OP}{OA} = 0.8571$$

Significa que la ineficiencia de A va a ser evaluada por la combinación de D y E, debido a que el punto P se encuentra en la línea que conecta a estos dos puntos. Llamaremos a D y E el “conjunto referencia” para A. El conjunto referencia de una tienda ineficiente puede variar de tienda en tienda. Por ejemplo, B tiene el conjunto referencia compuesto por C y D (en la figura 1.3.4). Podemos ver que muchas tiendas están juntas en torno a D, y por lo tanto puede decirse que D es una tienda eficiente que además es representativa, mientras C y E son también eficientes, pero poseen características únicas en relación a su asociación con segmentos de fronteras que están distantes de cualquier dato u observación.

Ahora extenderemos el análisis de la figura 1.3.3 para identificar mejoras por referencia de comportamientos ineficientes a la frontera de eficiencia en el caso de éstas dos entradas y una salida. Por ejemplo, el punto A puede ser efectivamente mejorado si se mueve al punto P, considerando un valor para la entrada $x_1 = 3.4$ y otro valor para la entrada $x_2 = 2.6$, dado que éstas son las coordenadas del punto P; el punto en la frontera de eficiencia que se identificó con el segmento de línea \overline{OA} en la figura 1.3.5. Además, cualquier punto en el segmento de línea $\overline{DA_1}$ también puede usarse para una mejora. El punto D se alcanza reduciendo la entrada x_2 (área del piso), mientras A_1 se obtiene reduciendo la entrada x_1 (empleados).

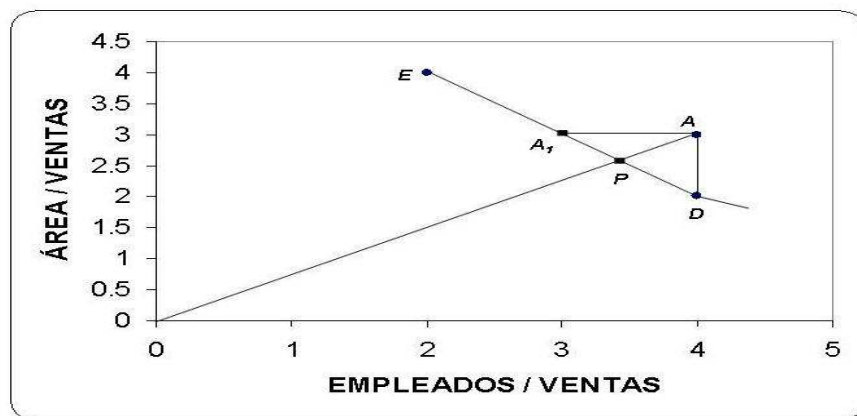


Figura 1.3.5 Mejoría de la tienda A

Analicemos ahora el caso de una entrada (insumo o recurso) y dos salidas (beneficios o utilidades).

En la tabla 1.3.4 se muestra el número de clientes (unidad = 10) por vendedor y las ventas (unidad = \$100,000) por vendedor, de 7 sucursales de una cadena de tiendas. Para obtener una frontera ajustada o normalizada (de una sola unidad) en este caso, dividimos por el número de empleados (vendedores), que se considera la única entrada de interés. Entonces la frontera eficiente la componen las líneas que conectan a los puntos B, E, F y G, como se muestra en la figura 1.3.6.

		Tiendas						
		A	B	C	D	E	F	G
Vendedores	x	1	1	1	1	1	1	1
Clientes	y_1	1	2	3	4	4	5	6
Ventas	y_2	5	7	4	3	6	5	2

Tabla 1.3.4. Una entrada y Dos Salidas

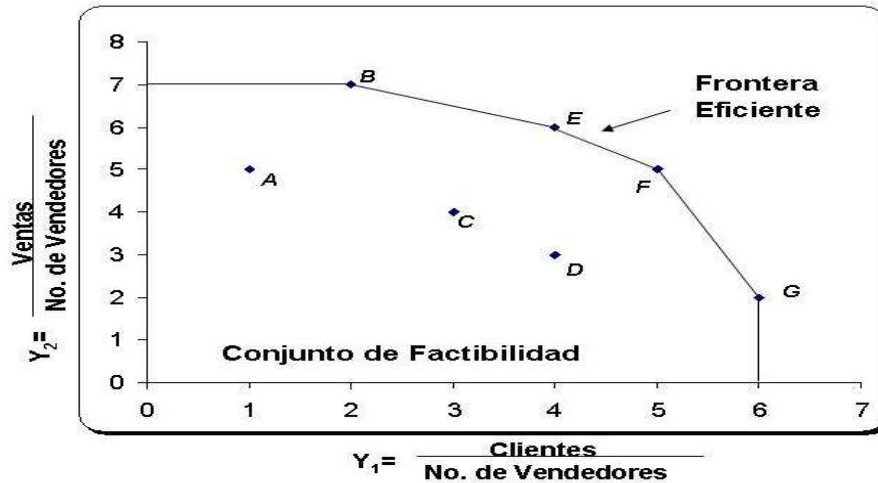


Figura 1.3.6 Caso de una entrada y dos salidas.

El conjunto factible de producción es la región limitada por los ejes y la frontera de eficiencia. Las sucursales A, C y D son ineficientes y su eficiencia se puede evaluar por referencia a las líneas en la frontera. Por ejemplo, si vemos la figura 1.3.7, la eficiencia de D es evaluada por

$$\frac{d(O,D)}{d(O,P)} = 0.75 \quad (1.3.5)$$

Donde $d(O,D)$ y $d(O,P)$ es la distancia del origen al punto D y la distancia del origen al punto P, respectivamente.

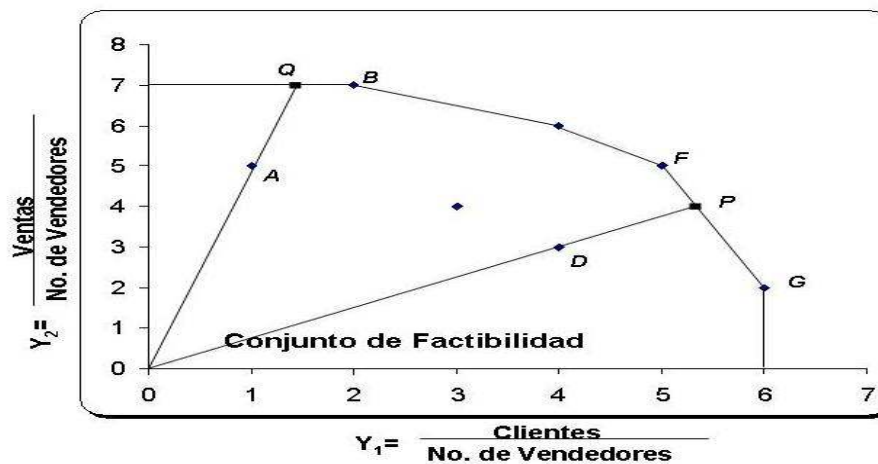


Figura 1.3.7 Mejoras

Nos referiremos a la relación (1.3.5) como “medida radial” y puede interpretarse como la razón o proporción existente entre dos medidas de distancia. Esta distancia está dada por la conocida fórmula de un punto al origen en geometría Euclidiana:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De tal manera que:

$$d(O, D) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$d(O, P) = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{20}{3}$$

Donde los términos bajo el signo radical son los cuadrados de las coordenadas del punto D y P, respectivamente, obtenidas de la tabla 1.3.4 para D, y de la intersección de $y_2 = \frac{3}{4}y_1$ y $y_2 = 20 - 3y_1$ para el punto P. sustituyendo en (1.3.5), tenemos entonces:

$$\frac{5}{\frac{20}{3}} = \frac{15}{20} = 0.75$$

Esta interpretación de “proporción de distancias” concuerda con el planteamiento que hemos hecho anteriormente sobre proporciones (o razones). Debido a que ésta proporción se obtiene de la distancia Euclidiana del origen sobre el conjunto de posibilidades de producción, siempre obtendremos una medida entre cero y la unidad.

Además podemos interpretar el resultado para usos administrativos (u otros usos) de una manera relativamente simple. El valor de la razón o proporción mostrada en (1.3.5) siempre tendrá un valor entre cero y la unidad. Debido a que estamos interesados en las salidas (beneficios, utilidades), no obstante, es fácil interpretar a (1.3.5) en términos de su recíproco:

$$\frac{d(O, P)}{d(O, D)} = \frac{20/3}{5} = 1.33$$

Este resultado significa que para ser eficiente, D tendría que incrementar sus dos salidas (beneficios) en $\frac{4}{3}$. Para confirmar esto, simplemente incorporamos ésta proporción a las coordenadas de D y obtenemos:

$$\frac{4}{3}(4, 3) = \left(\frac{16}{3}, 4\right)$$

Lo cuál es coincidente con las coordenadas de P, el punto en la frontera de eficiencia usado para evaluar al punto D.

Regresando a la relación (1.3.5) sabemos que 0.75 se refiere a la proporción de la salida (beneficio) que P muestra que fue posible de lograr. Es muy importante aclarar que esto se refiere a la proporción de ineficiencia presente en ambas salidas para D. Así, ésta falla en las salidas (beneficios, utilidades) de D puede corregirse por el aumento de ambas salidas sin cambiar sus proporciones hasta que P sea alcanzada.

Para una unidad ineficiente, uno puede mantener las salidas constantes y multiplicar sus valores de entrada por la medida de eficiencia, o mantener sus entradas (vector) constantes y multiplicar las salidas por el recíproco de la medida de eficiencia.

Este es sólo uno de los varios tipos de ineficiencia que describiremos a continuación. El tipo de ineficiencia que puede eliminarse sin cambiar las proporciones será referida como “Ineficiencia Técnica”. Otro tipo de ineficiencia será la que ocurra cuando sólo algunas (pero no todas) las salidas (o también entradas) muestren “conducta ineficiente”. Este tipo de ineficiencia la llamaremos “Ineficiencia Mixta”, debido a que su eliminación alterará las proporciones en las que las salidas (beneficios) (o entradas utilizadas) se presentan.

Ilustraremos el caso de “Ineficiencia Técnica” usando D y P en la figura 1.3.7. Podemos usar Q y B para ilustrar “Ineficiencia Mixta”, o podemos usar A, Q y B para ilustrar ambos tipos de ineficiencia: técnica y mixta. Refiriéndonos a la ineficiencia mixta, identificamos como componente en el desempeño de A, a la eficiencia técnica por medio de la siguiente medida radial:

$$\frac{d(O,A)}{d(O,Q)} = 0.714 \quad (1.3.6)$$

Usando el recíproco de ésta medida e incorporándolo a las coordenadas de A en sus salidas, obtenemos:

$$\frac{1}{0.714}(1,5) = (1.4,7),$$

Como coordenadas de Q.

Podemos ver que éstas salidas ajustadas están en la proporción $1.4/7 = 1/5$, que es la misma proporción (o razón) que se muestra en la tabla 1.3.4 para

$$A: \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{5} = \frac{\text{clientes}}{\text{ventas}}$$

Esto incrementa ambas salidas de A sin empeorar sus entradas y sin alterar las proporciones de las salidas. Esta mejoría en la eficiencia técnica por el movimiento a Q no elimina todas las ineficiencias. Aún si Q está en la frontera, no está en una parte eficiente de la frontera. La comparación de Q con B muestra una falla en la salida 1 (número de clientes atendidos), así que un aumento adicional en ésta salida se puede lograr por el movimiento lateral de Q a B. así, ésta mejoría se puede alcanzar sin empeorar o declinar la otra salida (beneficio o utilidad) o el valor de la entrada. Al corregir el valor de la salida y_1 sin alterar y_2 cambiará sus proporciones; sin embargo así podemos identificar dos fuentes de ineficiencias, del desempeño de A: primero una ineficiencia técnica por medio de la medida radial dada en (1.3.6), seguida por una ineficiencia mixta representada por la falla en la salida que permanece en y_1 después de que todas las ineficiencias técnicas son eliminadas.

Introduciremos ahora el término “Puramente Ineficiencia Técnica”, así que para simplificar; podemos usar el término “Ineficiencia Técnica” para referirnos a todas las fuentes de desperdicio, (ineficiencia puramente técnica y mixta), las cuáles pueden eliminarse sin afectar o empeorar cualquier otra entrada o salida. Esto simplificará la situación cuando hagamos referencia a los precios, costos y otros tipos de valores o cargas que pueden asignarse a las diferentes fuentes de ineficiencia.

Aclaración: el término “Eficiencia Técnica” se ha tomado de la literatura sobre Economía, el cuál se usa para distinguir los aspectos “tecnológicos” de la producción, de otros aspectos generalmente referidos como “Eficiencia Económica”, éste último concepto es de importancia para los economistas. Puede consultarse la bibliografía [3] Variant et. al., de este trabajo, para profundizar en el tema.

“Eficiencia Económica”, la cuál involucra recursos de información sobre precios, costos u otras consideraciones de valor. Por el momento nos referiremos a las ineficiencias puramente técnicas y mixtas, las cuáles representan desperdicio que puede ser justificablemente eliminado sin requerir datos adicionales tales como precios y costos. Sólo queremos garantizar que las mejoras resultantes valen la pena aún cuando no se les asigna específicamente un valor.

El término “Ineficiencia Mixta” se ha tomado de la literatura sobre contabilidad, donde además se le han dado otros nombres como “Varianza Física” o “Varianza de Eficiencia”, esto se refiere a los aspectos físicos de la producción que exceden un estándar preestablecido y por lo tanto representan uso excesivo de labores, materias primas, etc.

I.4 Algunas Aplicaciones de la Teoría DEA

Ésta técnica ha sido usada no sólo en empresas lucrativas, sino también en organismos gubernamentales, empresas de beneficencia social como escuelas, hospitales, la Fuerza Armada de los Estados Unidos de Norteamérica en diferentes bases geográficas; para el entrenamiento de pilotos, fuerzas policíacas y sistemas judiciales; desempeño de sucursales bancarias; para medir la eficiencia de universidades en el desempeño de su enseñanza y en una gran variedad de problemas y aplicaciones que a la fecha han aparecido en aproximadamente más de 3200 artículos, libros, monografías, etc. Por más de 1600 autores en aproximadamente 42 países. Una de las principales razones de su uso, es que ha abierto posibilidades de aplicación en contextos donde la aplicación de otras disciplinas no han tenido resultados satisfactorios debido a la naturaleza compleja de las relaciones entre las múltiples entradas o recursos y las múltiples salidas o beneficios involucrados en muchas de estas actividades.

Algunas de las implementaciones y desarrollos de la Teoría DEA se publican en dos revistas: Operations Research/Management Science y revistas de Economía.

Veremos una sencilla aplicación en la evaluación de eficiencia de 12 hospitales, tomado de la bibliografía [2] de éste trabajo; los cuáles mostramos en la tabla 1.3.5; en términos de dos entradas: número de doctores y número de enfermeras; y dos salidas: número

de pacientes externos y número de pacientes internos. (Cada uno en unidades de 100 personas/mes).

Hospital	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Doctores	20	19	25	27	22	55	33	31	30	50	53	38
Enfermeras	151	131	160	168	158	255	235	206	244	268	306	284
Pac. Externos	100	150	160	180	94	230	220	152	190	250	260	250
Pac. Internos	90	50	55	72	66	90	88	80	100	100	147	120

Tabla 1.3.5 Caso de Hospitales.

DEA permite asignar a los valores de las entradas y de las salidas un cierto peso. Estos pesos son tratados como variables, y se les conoce como variables de peso. Estos pesos son determinados directamente de los datos y son los valores que obtenemos al resolver el problema. Estos son elegidos de manera que asignan el mejor conjunto de pesos a cada hospital. El término “Mejor”, significa aquí que la proporción resultante de entradas-salidas para cada hospital se maximiza en relación a todos los otros hospitales cuando estos pesos son asignados a éstas entradas y salidas para cada hospital.

Hospital	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
CCR (DEA)	1	1	0.88	1	0.76	0.84	0.90	0.80	0.96	0.87	0.96	0.96

Tabla 1.3.6 Resultados de Proporciones de Eficiencia en DEA con el modelo CCR.

La tabla 1.3.6 muestra los resultados obtenidos de DEA, usando lo que se llama “modelo CCR”, el cuál veremos a detalle en el capítulo III de este trabajo.

Por el momento comentaremos que ésta “Mejor proporción” se obtiene bajo las siguientes condiciones:

- 1.- Todos los datos y todos los pesos son positivos (o al menos no negativos)
- 2.- La proporción resultante debe estar entre cero y la unidad.
- 3.- Los pesos de la Unidad de Toma de Decisiones que se está analizando (hospital), se aplican a todas las unidades.

En cada caso la evaluación se efectúa desde un punto sobre una frontera eficiente. Así que un valor como 0.88 para el hospital C significa que es 12% ineficiente. Esto es, comparado con miembros de un conjunto referencia eficiente, es posible identificar “ineficiencia técnica pura” del 12% -y posiblemente ineficiencia mixta- aún bajo el mejor conjunto de pesos que cada uno de estos hospitales podría elegir para evaluar sus propias ineficiencias.

Las fuentes de ineficiencia, como ineficiencia técnica pura e ineficiencia mixta se identifican automáticamente para cada entidad por DEA y sus montos estimados.

Además, el conjunto referencia usado para señalar estas ineficiencias también puede identificarse. Esto también lo veremos más adelante en el capítulo III.

Veamos otro ejemplo:

Se supone que el administrador de una cadena de tiendas está tratando de evaluar el desempeño de cada tienda. Los factores que ha elegido para evaluar son los siguientes:

1. El promedio anual de salario por empleado, como dato en las entradas.
2. El número de empleados, como dato de entrada
3. El promedio anual de las ventas por empleado, como dato de salida.

Representaríamos con p_i el número de empleados de la tienda i . Con c_i el salario anual total pagado por la tienda i , y con d_i el total anual de ventas de la tienda i . Entonces la proporción de salidas-entradas puede expresarse como:

$$\frac{u_1 d_i / p_i}{v_1 c_i / p_i + v_2 p_i}$$

Donde u_1 = peso para la salida d_i/p_i (el promedio de ventas por empleado), v_1 = peso para la entrada c_i/p_i (el salario promedio por empleado) y v_2 = peso para la entrada p_i (el número de empleados).

La proporción salidas-entradas quedaría como sigue:

$$\frac{u_1 d_i}{v_1 c_i + v_2 p_i}$$

Finalmente tenemos:

1. El salario total pagado por la tienda, como entrada.
2. El número de empleados, como entrada.
3. Las ventas totales anuales de la tienda, como salidas.

Vale la pena mencionar aquí que debemos ser cuidadosos en el manejo y procesamiento de los datos, con los valores por área, promedios o datos en bruto al mismo tiempo. Ya que no es lo mismo manejar la información con base en promedios, que con sus datos exactos.

Capítulo II

Conocimientos Previos a la Teoría "Data Envelopment Analysis" (DEA)

II.1 Programación Lineal

La mayor parte de los conceptos de este capítulo han sido extraídos de la bibliografía [7], [8] y [11].

La programación lineal tiene sus orígenes aproximadamente en la época de la segunda guerra mundial, cuando George B. Dantzig desarrolla el método simplex en 1947, para resolver problemas de planificación y coordinación entre varios proyectos en el área militar, así como el uso eficaz de los recursos disponibles.

La programación lineal es un tipo de modelo de programación matemática destinada a la asignación eficiente de recursos limitados en actividades conocidas con el objetivo de satisfacer las metas deseadas, ya sea minimizar costos o maximizar ganancias. Siendo así, podemos verla como una herramienta que nos ayuda a resolver el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de manera óptima.

La palabra programación no se refiere a la programación en computadoras, sino que es sinónimo de planeación. De esta manera, la programación lineal trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, es decir, el resultado que mejor alcance la meta especificada entre varias alternativas de solución de un problema.

Ya que la programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema, el adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales.

En concreto, La programación lineal estudia el problema de minimizar o maximizar una ecuación lineal sujeta a limitantes y requerimientos planteados como desigualdades o igualdades lineales que son las restricciones del modelo.

II.2 El Modelo de Programación Lineal

La estructura general del modelo es:

$$\text{Minimizar ó Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \quad (\geq, \leq, =) \quad b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad (\geq, \leq, =) \quad b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad (\geq, \leq, =) \quad b_m$$

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$$

Con n variables y m restricciones.

Donde $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ es la función objetivo que debe minimizarse o maximizarse, y se denotará por Z . Los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n son los coeficientes de costo conocidos y x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de decisión (variables, o niveles de actividad) que se deben determinar.

La desigualdad $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq, \leq, = b_i$ denota la i -ésima restricción. Los coeficientes

a_{ij} con $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$ son los coeficientes tecnológicos. Estos coeficientes tecnológicos forman la matriz de restricciones A , si se plantea el modelo de forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El vector columna del lado derecho, cuya i -ésima componente es b_i representa los requerimientos mínimos que deben satisfacerse en cada restricción. Las restricciones $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ representan la condición de no negatividad. Las variables deben ser no negativas debido a que en la mayoría de los problemas prácticos las variables representan cantidades físicas.

Una solución x_1, \dots, x_n que satisface todas las restricciones se llama un punto factible o vector factible. El conjunto de todos esos puntos se llama región factible o espacio factible.

El objetivo del método de solución se puede resumir como sigue: entre todos los vectores factibles, encontrar aquél que minimiza ó maximiza la función objetivo (o función criterio).

Para poder representar un problema de optimización de recursos como un problema de programación lineal, deben cumplirse los siguientes supuestos:

II.2.1 Supuestos de un Problema de Programación Lineal

1. Proporcionalidad.- Dada una variable x_j , su contribución al costo total es c_jx_j y su contribución a la i -ésima restricción es $a_{ij}x_j$. Por ejemplo, si se dobla o triplica

el valor de x_j , entonces de igual forma se dobla o triplica su contribución al costo total y a cada una de las restricciones.

Por ejemplo: supongamos que x_j es la cantidad que se usa de la actividad j . Si $x_j = 5$ entonces el costo de esta actividad es $5c_j$. Si $x_j = 20$, entonces el costo es $20c_j$, y así sucesivamente. Esto nos indica que no se logra ningún ahorro o costo extra usando más de la actividad j . Tampoco se incurre en ningún costo inicial por empezar la actividad.

2. Aditividad.- Esta suposición garantiza que el costo total es la suma de los costos individuales, y que la contribución total a la i -ésima restricción es la suma de las contribuciones individuales de cada actividad.
3. Divisibilidad.- Esta suposición asegura que las variables de decisión se pueden dividir en cualquier nivel fraccional, de modo que se permiten valores no enteros para las variables de decisión.

Un problema de optimización se puede escribir como un programa lineal sólo si se cumplen las suposiciones anteriores, es decir, el problema debe ser lineal. Esto excluye casos en los que existen economías de escala. Por ejemplo cuando el costo unitario decrece al aumentar la cantidad producida. En estos casos debe recurrirse a programas no lineales. Debe tomarse en cuenta que los parámetros c_j , a_{ij} , y b_i deben ser conocidos o estimados.

Hemos comentado que un programa lineal es un problema de maximizar o minimizar una ecuación lineal en presencia de restricciones lineales en forma de desigualdad y/o igualdad, por lo que podemos transformar el problema de una forma a otra equivalente por medio de equivalencias.

II.2.2 Equivalencias de un Problema de Programación Lineal

Se usará la forma de la programación lineal denominada forma canónica, para mostrar las equivalencias de un problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= cX \\ \text{Sujeto a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX &\leq b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

Cualquier otra forma es equivalente a ésta última si se puede probar por medio del uso de cualquiera de las siguientes cinco reglas:

Regla 1.-

- a) Maximizar cX es equivalente a Minimizar $-cX$.
 b) Minimizar cX es equivalente a Maximizar $-cX$.

Veamos un ejemplo:

a) $Max \ Z = 3X_1 - 4X_2 + 5X_3$
 es equivalente a $Min \ -Z = -3X_1 + 4X_2 - 5X_3$

b) $Min \ Z = 16X_1 - 5X_2$
 es equivalente a $Max \ -Z = -16X_1 + 5X_2$

Regla 2.-

- a) La desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \geq -b$
 b) La desigualdad $AX \geq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \leq -b$

Ejemplo:

a) $3X_1 + 4X_2 - 3X_3 \leq 1000$
 es equivalente a $-3X_1 - 4X_2 + 3X_3 \geq -1000$

b) $12X_1 - 4X_2 \geq 800$
 es equivalente a $-12X_1 + 4X_2 \leq -800$

Regla 3.-

Toda igualdad de la forma $AX = b$, puede descomponerse como la intersección de dos desigualdades $AX \leq b$ y $AX \geq b$.

Ejemplo:

$14X_1 - 3X_2 = 7$
 es equivalente a $14X_1 - 3X_2 \leq 7$
 y $14X_1 - 3X_2 \geq 7$

Regla 4.-

- a) Toda desigualdad de la forma $AX \leq b$ puede convertirse en igualdad mediante la

adición de un vector Y , llamado de holgura. El vector columna Y tiene m componentes, todas ellas no-negativas, es decir:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Toda desigualdad de la forma $AX \geq b$ puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector Z , llamado superfluo. El vector columna Z , tiene m componentes, todas no-negativas, es decir:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 14X_1 - 3X_2 \leq 10 \\ 12X_1 + 4X_2 \leq 12 \end{array}$$

es equivalente a

$$\begin{array}{r} 14X_1 - 3X_2 + X_3 = 10 \\ 12X_1 + 4X_2 + X_4 = 12 \\ X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0 \end{array}$$

donde el vector de holgura es

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 16X_1 - 8X_2 \geq 5 \\ 7X_1 + 3X_2 \geq 10 \end{array}$$

es equivalente a

$$\begin{array}{r} 16X_1 - 8X_2 - X_3 = 5 \\ 7X_1 + 3X_2 - X_4 = 10 \\ X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0 \end{array}$$

donde el vector de exceso o superfluo es

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Regla 5.-

Una variable no restringida, o sea aquella que puede tomar toda clase de valores positivos, cero y negativos puede escribirse como la diferencia de dos variables no-negativas.

Ejemplo:

Sea X_1 una variable no restringida, entonces

$$X_1 = X_2 - X_3$$

Donde $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$. Nótese que si $X_2 > X_3$, esto implica que $X_1 > 0$; si $X_2 = X_3$, entonces $X_1 = 0$; si $X_2 < X_3$ se tiene que $X_1 < 0$.

Como un ejemplo de la aplicación de estas reglas, se tiene el siguiente programa lineal para convertirlo a la forma canónica, la cuál se planteó al inicio de éste apartado:

$$\text{Min } Z = 3X_1 - 4X_2 + X_3$$

Sujeto a

$$0.5X_1 + 2X_2 \geq 3$$

$$X_2 - X_3 = 4$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \leq 0, X_3 \text{ no restringida}$$

Por medio de la regla 1, la función objetivo queda:

$$\text{Max } h = -Z = -3X_1 + 4X_2 - X_3$$

Usando la regla 2, se tiene que la segunda restricción queda:

$$-0.5X_1 - 2X_2 \leq -3,$$

Mientras que

$$X_4 = -X_2 \geq 0$$

Usando la regla 3, la igualdad queda como

$$X_2 - X_3 \leq 4 \quad \text{y} \quad X_2 - X_3 \geq 4,$$

O equivalentemente:

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 &\leq 4 \\ -X_2 + X_3 &\leq -4 \end{aligned}$$

Por último, utilizando la regla 5, se tiene que

$$\begin{aligned} X_3 &= X_5 - X_6 \\ X_5 &\geq 0, \quad X_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Y resumiendo todos estos elementos se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Max } h &= -3X_1 + 4X_2 - X_3 \\ \text{Sujeto a} \\ -0.5X_1 - 2X_2 &\leq -3 \\ X_2 - X_3 &\leq 4 \\ -X_2 + X_3 &\leq -4 \\ X_1 &\geq 0, \quad X_2 \leq 0, \quad X_3 \text{ no restringida} \end{aligned}$$

Esto es igual a

$$\begin{aligned} \text{Max } h &= -3X_1 - 4X_4 - X_5 + X_6 \\ \text{Sujeto a} \\ -0.5X_1 + 2X_4 &\leq -3 \\ -X_4 - X_5 + X_6 &\leq 4 \\ X_4 + X_5 - X_6 &\leq -4 \\ X_1 &\geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0, \quad X_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Esta forma ya tiene la estructura canónica vista al principio de este apartado. Así, hemos transformado el problema de una forma a otra equivalente por medio de estas reglas de equivalencia.

Mediante las transformaciones adecuadas, un programa lineal dado se puede escribir en distintas formas equivalentes. Particularmente existen dos formas: la forma estándar y las formas canónicas. Se dice que un programa lineal está en su forma estándar si todas las restricciones están como igualdades y todas las variables son no negativas. El método símplex puede aplicarse entonces después de que el problema se ha escrito en forma estándar, ya que está diseñado para resolver programas lineales en los que las variables son no negativas.

Las formas canónicas son especialmente útiles para analizar relaciones de dualidad. Un problema de minimización está en forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo \geq . Un problema de maximización está en forma canónica si todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo \leq .

Podemos expresar también un problema de programación lineal en notación matricial de la siguiente forma:

Si tenemos el siguiente problema

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujeta a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - s_i = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad s_i \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Denotaremos por c el vector fila (c_1, c_2, \dots, c_n) , y consideraremos los vectores columna x de n componentes y b de m componentes, el vector de holgura s_i (en este caso), además de la matriz A de $m \times n$ dados por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & -1 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & & & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos escribir el problema como sigue:

$$\text{Minimizar } cx$$

$$\text{Sujeta a } \begin{aligned} Ax - s &= b \\ x &\geq 0, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos también representar el problema usando las columnas de A , escribiendo a A como $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, en donde a_j es la j -ésima columna de A . Entonces el problema se puede formular como sigue:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujeta a } \sum_{j=1}^n a_j x_j - s_i = b$$

$$x_j \geq 0, s_i \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, m$$

II.3 El Método Simplex

Cada restricción define un área acotada que contiene un número infinito de puntos, dando lugar a un conjunto llamado región factible que consiste de todos los vectores solución \bar{X} tales que satisfacen al conjunto de restricciones simultáneamente. Intuitivamente diremos que los puntos en los bordes, aristas o lados del conjunto solución son los puntos extremos.

Una solución óptima es un punto factible que hace, en el caso de maximización que el valor de Z (el valor de la función objetivo) sea el mayor. Y para el caso de minimización el valor de Z sea el menor.

El método simplex es un concepto sistemático que se repite una y otra vez hasta obtener la solución óptima. El desarrollo del método está basado en el uso de la forma estándar del modelo de programación lineal. En ésta las desigualdades deben estar en forma de igualdad. Si alguna restricción tiene la desigualdad del tipo “menor o igual que (\leq)”, debe sumársele una variable de holgura para que se convierta en igualdad.

Cuando alguna restricción tiene la desigualdad (\geq), debe restársele una variable de exceso para que se convierta en una igualdad. Todas las variables, incluyendo holgura y exceso, deben ser mayores o iguales que cero ($s_i \geq 0$). Los requerimientos de cada restricción también deben ser mayores o iguales que cero ($b_i \geq 0$).

Ejemplo:

Forma canónica de maximización

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

Sujeta a

$$2X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$-3X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$2X_2 \leq 5$$

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Forma estándar

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

Sujeta a

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 6$$

$$-3X_1 + 2X_2 + X_4 = 3$$

$$2X_2 + X_5 = 5$$

$$2X_1 + X_2 + X_6 = 4$$

$$X_i = 1, \dots, 6$$

En este ejemplo, en la forma estándar hemos designado a las variables de holgura como: X_3, X_4, X_5, X_6 .

La solución óptima siempre se encontrará en un punto extremo de la región factible. El concepto de punto extremo es un concepto geométrico, pero para poder utilizarlo desde un punto de vista computacional, es necesaria una caracterización algebraica de los puntos extremos.

Si A es una matriz de $m \times n$ (m -renglones y n -columnas) entonces los puntos extremos de la región factible tienen al menos $n - m$ componentes igual a cero (0).

En este punto introduciremos las soluciones básicas factibles, las cuáles corresponden a los puntos extremos. Puesto que existe una caracterización algebraica de tales soluciones, (y por lo tanto de los puntos extremos), será posible ir de una solución básica factible a otra, hasta alcanzar la optimalidad.

II.3.1 Definición de Soluciones Básicas Factibles.

Definición de Soluciones básicas factibles.-

Considérese el sistema $Ax = b$ y $x \geq 0$, en donde A es una matriz $m \times n$ y b es un vector.

Una solución es básica si $n - m$ variables valen cero (0) y del resto (m) se obtienen sus valores resolviendo el sistema de m incógnitas con n -ecuaciones.

A las $n - m$ variables que valen cero (0) se les denomina variables no básicas. A las m variables que se utilizaron para resolver el sistema, se les denomina variables básicas (a veces, estas variables básicas pueden valer cero, y se les llama variables degeneradas).

Si todas las variables básicas de una solución básica son no-negativas, a la solución se le denomina solución básica factible.

Supóngase que se tiene una matriz $A_{m \times n}$. Para encontrar una solución inicial básica factible tenemos m variables básicas y $n + m - m = n$ variables no básicas.

Una matriz base se obtiene al eliminar las variables no básicas del modelo en su forma estándar:

$$(A, I) \begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} = B$$

Esta matriz contiene entonces los coeficientes de las variables básicas de las restricciones del modelo en su forma estándar. Los m vectores que forman la matriz base $B_{m \times m}$ deben ser linealmente independientes, de tal manera que B sea una matriz de la cuál siempre se pueda obtener su matriz inversa B^{-1} .

Después de un posible rearrreglo de las columnas de A , sea $A = [B, N]$. En donde B es la matriz invertible $m \times m$ y N es una matriz $m \times (n - m)$ de variables no básicas.

Un sistema de m ecuaciones y m variables se denota de la siguiente manera:

$$B \cdot X_B = b$$

Donde

$$\begin{aligned} X_B &= \text{vector columna de las variables básicas} \\ B &= \text{matriz base} \end{aligned}$$

Obteniendo B^{-1} y multiplicándola en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned} B^{-1} \cdot B \cdot X_B &= B^{-1}b \\ I \cdot X_B &= B^{-1}b \\ X_B &= B^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

El punto $X = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, en donde

$$\begin{aligned} X_B &= B^{-1}b \\ X_N &= 0 \end{aligned}$$

Se llama una solución básica del sistema. Si $X_B \geq 0$, entonces X se llama solución básica factible del sistema. Si $X_B > 0$, entonces X se llama solución básica factible no degenerada, y si al menos una componente de X_B es cero, entonces X se llama solución básica factible degenerada.

Dada una solución básica factible, se describirá el método simplex revisado, el cuál nos permite encontrar la solución óptima.

II.3.2 Algoritmo Simplex

El método y el ejemplo expuesto aquí, han sido extraídos de la bibliografía [11].

El criterio de optimalidad en el caso de maximización es el siguiente: Una solución básica factible es óptima si todas las $Z_j - C_j \geq 0$ para las variables no básicas.

Para el caso de minimización: Una solución básica factible es óptima si todas las $Z_j - C_j \leq 0$ para las variables no básicas.

Aclaración: $Z_j - C_j$ es la forma de expresar la función objetivo. Por ejemplo si nuestra función objetivo es: $Max \quad Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$.

Al expresarla de la forma $Z_j - C_j$ quedaría: $Z - 60X_1 - 30X_2 - 20X_3 = 0$

En el ejemplo expuesto adelante se muestra claramente cómo se utiliza esta expresión en una primera tabla (tableau), así como los coeficientes de las restricciones.

A continuación se expondrá el método simplex revisado, por ser un procedimiento que computacionalmente es más práctico que trabajar con el formato llamado "tableau". Este último es un procedimiento algebraico directo. Sin embargo, la forma de calcularlo no es la más eficiente, ya que se calculan y almacenan números innecesarios. Para aprovechar las propiedades básicas de la estructura del método simplex, se ha creado el método simplex revisado, el cuál utiliza operaciones con matrices.

Veamos primeramente los elementos que utilizaremos:

- En cada iteración el vector básico está dado por $X_B = B^{-1}b$. Siendo B la base correspondiente a esa iteración.
- Valor de la Función Objetivo en cada iteración: $Z = C_B X_B$ donde C_B es el vector renglón de los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo (y corresponden en el mismo orden con X_B)
- Valores que indican la optimalidad de la base:

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - c_j \quad j \in A \quad (\text{para la elección de la variable de entrada a la base}).$$

En cada iteración el elemento indispensable es B^{-1} , ya que conociendo B^{-1} se puede calcular X_B , Z y $Z_j - C_j$

Supongamos que en dos iteraciones consecutivas del método simplex se tiene a B^{-1} asociada con el tableau anterior y a B_{sig}^{-1} con el tableau actual. Ambas matrices son de m por m . Sea

$$I_{m \times m} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matriz identidad}$$

Donde \hat{e}_i es el i -ésimo vector unitario, $i = 1, \dots, m$.

Sea a_r el vector de salida de la base y a_j el vector de entrada en la nueva base, entonces la siguiente relación asocia a B^{-1} y B_{sig}^{-1} :

$$B_{sig}^{-1} = E B^{-1}$$

donde

- $E = (e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, \varepsilon, e_{r+1}, \dots, e_m)$. Es una matriz identidad con una columna modificada.

Y para calcular a E necesitamos obtener:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -Y_{1j}/Y_{rj} \\ -Y_{2j}/Y_{rj} \\ 1/Y_{rj} \\ \vdots \\ -Y_{mj}/Y_{rj} \end{bmatrix} \quad Y_j = B^{-1}a_j$$

Para calcular ε , se debe calcular Y_j .

Y_{ij} es un elemento del último tableau asociado a la i -ésima restricción ($i = 1, \dots, m$) y a la j -ésima actividad ($j = 1, \dots, n$), es decir, es una componente de $Y_j = B^{-1}a_j$. Una vez computado B_{sig}^{-1} , puede calcularse X_B , Z y $z_j - c_j$.

El tableau asociado a B_{sig}^{-1} tendrá la siguiente estructura:

1	$c_B B_{sig}^{-1}$	$c_B B_{sig}^{-1} b$
0	B_{sig}^{-1}	$B_{sig}^{-1} b$

Si además se hace: $T = \begin{pmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ entonces $T_{sig} = E_{sig} T$

$$\text{Donde } E_{sig} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(z_j - c_j)/Y_{rj} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & e_1 & e_2 & \dots & e_{r-1} & \varepsilon & e_{r+1} & \dots & e_m \end{array} \right]$$

Entonces, el criterio de entrada y de salida de vectores entre dos bases consecutivas, se hace como en el método simplex y Z, X_B se calculan mediante

$$\begin{pmatrix} \hat{Z} \\ \hat{X}_B \end{pmatrix} = T_{sig} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ b \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Resuélvase: $Max \quad Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$3X_1 + 2X_3 \leq 460$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

La tabla original sería:

		Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	
	$Z_j - C_j$	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
EI	X ₄	0	1	2	1	1	0	0	430
	X ₅	0	3	0	2	0	1	0	460
	X ₆	0	1	4	0	0	0	1	420

procedimiento es el siguiente:

1ª. Iteración:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} Z \\ \bar{X}_B \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix}$$

$$N = \{X_1, X_2, X_3\}, \quad B = \{X_4, X_5, X_6\}$$

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \quad j \text{ en } N,$$

$$= (0,0,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} - (3,2,5) = (-3, -2, -5),$$

Por lo que el vector de entrada será X_3 .

Se determinará el vector de salida con la siguiente relación:

$$\text{Min}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{Bi}}{Y_{i3}} Y_{i3} > 0 \right\}$$

Donde:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{bmatrix} = B^{-1} X_3 = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\text{Min} \left\{ \frac{430}{1}, \frac{460}{2} \right\} = 230$ y X_5 sale de la base.

Como X_5 sale de la base, la tercera columna de E_{sig} (correspondiente al vector X_5) debe modificarse.

2ª. Iteración:

Como ha salido X_5 , la tercera columna de E_{sig} correspondiente al vector X_5 debe modificarse.

$$T_{sig} = E_{sig}T = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -(-5/2) & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T_{sig} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ X_B \end{pmatrix} = T_{sig} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1150 \\ - \\ 200 \\ 230 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ - \\ X_4 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

Para calcular los elementos que indican el criterio de optimalidad se tiene que

$$N = \{X_1, X_2, X_5\}, \quad B_{sig} = \{X_4, X_3, X_6\}, \quad z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \quad j \text{ en } N,$$

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = [0 \quad 5 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} - [3 \quad 2 \quad 0] = [9/2 \quad -2 \quad 5/2]$$

Ahora X_2 entra a la nueva base B. El vector de salida de la base B vuelve a hacerse mediante:

$$\text{Min}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{Bi}}{Y_{i2}} \right\}$$

Siendo:

$$Y_2 = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{bmatrix} = B_{sig}^{-1} X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $Min\left\{\frac{200}{2}, \frac{420}{4}\right\} = 100$ Siendo X_4 quien sale de la base.

3ª. Iteración:

Como X_4 ha salido de la base, se modificará la segunda columna de E_{sig} correspondiente al vector X_4 .

$$T_{sig} = E_{sig} T = \begin{bmatrix} 1 & | & -(-2/2) & 0 & 0 \\ - & | & - & - & - \\ 0 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & | & -4/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 & 5/2 & 0 \\ - & | & - & - & - \\ 0 & | & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ - & | & - & - & - \\ 0 & | & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & | & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo entonces la nueva solución:

$$\begin{bmatrix} \hat{Z} \\ \hat{X}_B \end{bmatrix} = T_{sig} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ - & | & - & - & - \\ 0 & | & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & | & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1350 \\ - \\ 100 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ - \\ X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

Para la variable de entrada (criterio de optimalidad):

$$N = \{X_1, X_4, X_5\} \quad B_{sig} = \{X_2, X_3, X_6\}$$

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \quad j \text{ en } N,$$

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = [2 \quad 5 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - [3 \quad 0 \quad 0] = [4 \quad 1 \quad 2]$$

Por lo que la solución Z_{sig}, \hat{X}_B es óptima:

$$Z = 1350$$

$$X_2 = 100, X_3 = 230 \quad X_6 = 20$$

$$X_1 = X_4 = X_5 = 0.$$

II.4 El Modelo Primal y el Modelo Dual

Asociado con cada problema de programación lineal se tiene otro problema de programación lineal llamado el problema dual. El programa lineal dual posee muchas propiedades importantes relativas al programa lineal primal original. Existen dos formas (definiciones) importantes de la dualidad. La forma canónica o simétrica y la forma estándar o no simétrica de dualidad. Estas dos formas son completamente equivalentes.

II.4.1 Forma Canónica o Simétrica de Dualidad

Supóngase que el problema original, a quien llamaremos primal, está dado en la forma:

$$P: \text{Minimizar } cX$$

$$\text{Sujeta a } \begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces el problema dual está definido por:

$$D: \text{Maximizar } w^T b$$

$$\text{Sujeta a } \begin{aligned} w^T A &\leq c \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

Existe exactamente una variable dual por cada restricción primal, y exactamente una restricción dual por cada variable primal.

II.4.2 Forma Estándar o no-Simétrica de Dualidad

Otra definición equivalente de dualidad se aplica cuando las restricciones son igualdades. Supóngase que el programa lineal primal está dado en la forma:

$$P: \text{Minimizar } cX$$

$$\text{Sujeta a } \begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

D: Maximizar wb

Sujeta a $wA \leq c$
 w no restringida

Supóngase que se acepta la forma estándar como una definición y se desea demostrar que la forma canónica es correcta. Añadiendo variables de holgura a la forma canónica de un programa lineal, se puede aplicar la forma estándar de dualidad para obtener el problema dual.

P: Minimizar cx

D: Maximizar wb

Sujeta a $Ax - Ix_s = b$

Sujeta a $wA \leq c$

$x, x_s \geq 0$

$-wI \leq 0$

w no restringida

Pero puesto que $-wI \leq 0$ es lo mismo que $w \geq 0$, se obtiene la forma canónica del problema dual.

Se tiene también que el modelo dual del dual, es el primal. Para obtener una demostración de éste hecho, puede consultarse la bibliografía [7] de este trabajo.

II.4.3 Formas Mixtas de Dualidad

En la práctica, muchos programas lineales contienen algunas restricciones del tipo “menor o igual que”, algunas del tipo “mayor o igual que”, y algunas del tipo “igual a”. Asimismo, las variables pueden ser “ ≥ 0 ”, “ ≤ 0 ”, ó “no restringida”. En teoría, esto no presenta problema alguno porque se pueden aplicar las técnicas de transformación que hemos visto en el apartado II.2 de este capítulo. Para convertir cualquier problema “mixto” a una de las formas primal o dual. En la práctica, tales conversiones pueden ser tediosas, pero es posible dar de inmediato el dual de cualquier programa lineal. En la tabla 2.4.1 se resumen los cambios que deben hacerse.

MINIMIZACION DEL PROBLEMA		MAXIMIZACION DEL PROBLEMA	
Variables	≥ 0	\leq	Restricciones
	≤ 0	\geq	
	No restringido	=	
Restricciones	\geq	≥ 0	Variables
	\leq	≤ 0	
	=	No restringido	

Tabla 2.4.1 relaciones entre los problemas Primario y Dual.

Ejemplo.

Consideremos el siguiente programa lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & cX \\ & A_1x \geq b_1 \\ \text{Sujeta a} & A_2x = b_2 \\ & A_3x \leq b_3 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Convirtiendo éste problema al formato estándar, se obtiene

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & cx \\ \text{Sujeta a} & A_1x - Ix_s = b_1 \\ & A_2x = b_2 \\ & A_3x + Ix_t = b_3 \\ & x, x_s, x_t \geq 0 \end{array}$$

El dual de este problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & w_1b_1 + w_2b_2 + w_3b_3 \\ \text{Sujeta a} & w_1A_1 + w_2A_2 + w_3A_3 \leq c \\ & -w_1I \leq 0 \\ & w_3I \leq 0 \\ & w_1, w_2, w_3 \text{ no restringidas} \end{array}$$

De este ejemplo se ve que las restricciones de la forma “mayor o igual que” en el problema de minimización dan origen a las variables “ ≥ 0 ” en el problema de maximización. Asimismo, las restricciones “igual a” en el problema de minimización dan origen a variables “no restringidas” en el problema de maximización; y las restricciones “menor o igual que” en el problema de maximización.

II.5 Teoremas de Dualidad y de Holgura Complementaria

Existen muchas relaciones importantes entre los programas lineales primal y dual. Considérese la forma canónica de dualidad, y sean x_0 y w_0 soluciones factibles de los programas primal y dual respectivamente. Entonces $Ax_0 \geq b$, $x_0 \geq 0$, $w_0A \leq c$ y $w_0 \geq 0$. Multiplicando $Ax_0 \geq b$ por $w_0 \geq 0$ a la izquierda, y $w_0A \leq c$ por $x_0 \geq 0$ a la derecha, se obtiene

$$cx_0 \geq w_0Ax_0 \geq W_0b$$

Siendo el siguiente el resultado.

Lemma 2.5.1

El valor de la función objetivo, para cualquier solución factible del problema de minimización, es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo para cualquier solución factible del problema de maximización. En particular, el valor objetivo de cualquier solución factible del problema de minimización da una cota superior del objetivo óptimo del problema de maximización. Análogamente, el valor objetivo de cualquier solución factible del problema de maximización es una cota inferior del objetivo óptimo del problema de minimización \square .

Ejemplo

Para clarificar la aplicación de éste lema, supóngase que se tiene el siguiente programa lineal y su dual:

P: Minimizar $6x_1 + 8x_2$

Sujeto a
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

D: Maximizar $4w_1 + 7w_2$

Sujeto a
$$\begin{aligned} 3w_1 + 5w_2 &\leq 6 \\ w_1 + 2w_2 &\leq 8 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se seleccionan las soluciones factibles primales y duales como $x_0 = \left(\frac{7}{5}, 0\right)^T$ y $w_0 = (2, 0)$. Entonces $cx_0 = \frac{42}{5} = 8.4$ y $w_0b = 8$. Por lo tanto, la solución óptima para cualquiera de los dos problemas tiene un valor objetivo entre 8 y 8.4. Esto permite tener el procedimiento de solución de un programa lineal con una solución casi óptima.

Los siguientes corolarios son consecuencia inmediata del lema 2

Corolario 2.5.1

Si x_0 y w_0 son soluciones factibles de los problemas primal y dual y son tales que $cx_0 = w_0b$, entonces x_0 y w_0 son soluciones óptimas de sus respectivos problemas \square .

Corolario 2.5.2

Si uno de los dos problemas tiene un valor objetivo no acotado, entonces el otro problema no tiene ninguna solución factible \square .

Este corolario indica que el no acotamiento en uno de los problemas implica no factibilidad en el otro problema. ¿Es simétrica esta propiedad?, ¿No factibilidad en uno de los problemas implica no acotamiento en el otro?. No necesariamente.

Condiciones de Kuhn-Tucker

Se sabe que las condiciones de optimalidad para un programa lineal establecen que una condición necesaria y suficiente [7] para que x^* sea un punto óptimo del programa lineal:

Minimizar Cx

Sujeta a $Ax \geq b$
 $x \geq 0$,

es que exista un vector w^* tal que

1. $Ax^* \geq b$, $x^* \geq 0$

2. $w^*A \leq c$, $w^* \geq 0$

3. $w^*(Ax^* - b) = 0$

$$(c - w^*A)x^* = 0$$

La condición 1 anterior simplemente requiere que el

punto óptimo x^* debe ser factible para el problema primario. En vista de lo que hemos visto sobre dualidad, se puede interpretar la condición 2. Esta condición indica que el vector w^* debe ser un punto factible para el problema dual. De la condición 3 anterior, se sigue que $cx^* = w^*b$. Por lo tanto w^* debe ser una solución óptima del problema dual.

Estas condiciones, llamadas de **Kuhn-Tucker** para el problema dual implican la existencia de una solución factible primal cuyo objetivo es igual al del dual óptimo. Esto lleva al siguiente lemma.

Lemma 2.5.2 si uno de los problemas tiene una solución óptima, entonces ambos problemas tienen soluciones óptimas y los dos valores objetivos óptimos son iguales \square .

También es posible ver cómo las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker en forma natural dan origen a la definición del problema dual. En lugar de resolver directamente para el óptimo x^* , sería razonable buscar entre los valores de w que satisfacen la condición 2 anterior. Sabiendo que cualquier w_0 factible satisface $w_0 b \leq cx^*$, surge de manera natural la maximización de la forma lineal wb sobre todos los valores factibles de w que satisfacen la condición 2. Utilizando los resultados anteriores se obtienen dos importantes teoremas básicos de dualidad. Estos dos teoremas permitirán usar el problema dual para resolver el problema primal, y asimismo, desarrollar nuevos algoritmos para resolver ambos problemas.

Obtenemos ahora el teorema fundamental de dualidad.

Teorema 2.5.1 (Teorema Fundamental de Dualidad)

Con respecto a los problemas de programación lineal primario y dual, exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta:

1. Ambos problemas tienen soluciones óptimas x^* y w^* , con $cx^* = w^*b$.
2. Uno de los problemas tiene valor objetivo no acotado, en cuyo caso el otro problema debe ser no factible.
3. Ambos problemas son no factibles.

De este teorema se ve que la dualidad no es completamente simétrica. Lo más que se puede decir es que aquí, óptimo significa óptimo finito, y no acotado significa tener objetivo óptimo no acotado \square .

Tenemos por lo tanto las siguientes conclusiones:

P = primal

D = dual

P Óptimo	\Leftrightarrow	D Óptimo
P No acotado	\Rightarrow	D No factible
D No acotado	\Rightarrow	P No factible
P No factible	\Rightarrow	D No acotado o no factible
D No factible	\Rightarrow	P No acotado o no factible

Holgura Complementaria

Sean x^* y w^* cualquier par de soluciones óptimas de los problemas primal y dual, respectivamente, en forma canónica. Entonces

$$cx^* \geq w^* Ax^* \geq w^* b$$

Pero $cx^* = w^* b$

Luego $cx^* = w^* Ax^* = w^* b$

Esto da $w^*(Ax^* - b) = 0$ y $(c - w^* A)x^* = 0$. Puesto que $w^* \geq 0$ y $Ax^* - b \geq 0$, entonces $w^*(Ax^* - b) = 0$ implica que $w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0$ para $i = 1, \dots, m$. De igual manera $(c - w^* A)x^* = 0$ implica que $(c_j - w^* a_j)x_j^* = 0$ para $j = 1, \dots, n$. Por lo tanto se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.5.2 (Teorema débil de holgura complementaria)

Si x^* y w^* son puntos óptimos cualesquiera de los problemas primario y dual en la forma canónica, entonces

$$(c_j - w^* a_j)x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Y

$$w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Este es un teorema muy importante que relaciona los problemas primario y dual. Indica que al menos uno de los dos factores en cada una de las expresiones anteriores debe ser cero. En particular,

$$\begin{aligned} x_j^* > 0 &\Rightarrow w^* a_j = c_j \\ w^* a_j < c_j &\Rightarrow x_j^* = 0 \\ w_i^* > 0 &\Rightarrow a^i x^* = b_i \\ a^i x^* > b_i &\Rightarrow w_i^* = 0 \end{aligned}$$

El teorema débil de holgura complementaria también se puede enunciar como sigue: en caso de optimalidad, “si una variable en uno de los problemas es positiva, entonces la restricción correspondiente en el otro problema es sin holgura”, y “si una restricción en uno de los problemas es con holgura, entonces la variable correspondiente en el otro problema debe ser cero”.

Supóngase que $x_{n+1} = a^i x - b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ son las m variables de holgura en el problema primal, y sean $w_{m+j} = c_j - w a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ las n variables de holgura en el

problema dual. Entonces se pueden escribir las condiciones de holgura complementaria como sigue:

$$x_j^* w_{m+j}^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$w_i^* x_{n+i}^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Esto relaciona las variables en uno de los problemas con las variables de holgura en el otro problema.

Debe observarse que si x^* y w^* son factibles para sus problemas respectivos y satisfacen las condiciones de holgura complementaria, entonces son óptimos \square .

II.6 Interpretación Económica de las Variables del Dual

No perdamos de vista que el problema de programación lineal puede considerarse como un modelo de asignación de recursos, donde el objetivo es maximizar las utilidades (o ingresos), sujetas a recursos limitados. Así, el problema dual asociado nos ofrece interpretaciones económicas interesantes [8].

Consideraremos la siguiente representación de los problemas más generales primal y dual, en donde el primal asume el papel de un modelo de asignación de recursos:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^m b_i y_i$
Sujeta a	Sujeta a
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$	$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

El problema primal tiene n actividades económicas y m recursos. El coeficiente c_j del primal representa la utilidad por unidad de actividad j . El recurso i , cuya disponibilidad máxima es b_i , se consume con la tasa de a_{ij} unidades por unidad de actividad j .

Para dos soluciones factibles primal y dual cualquiera, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w$$

La igualdad estricta $z = w$, es válida cuando las soluciones primal y dual son ambas óptimas.

Veamos primero la condición óptima $z = w$. Como el problema primal representa un modelo de asignación de recursos, podemos imaginar que z representa la utilidad monetaria. Como b_i representa la cantidad disponible de unidades del recurso i . Por consiguiente la ecuación $z = w$ puede expresarse como sigue:

$$\$ = \sum_i (\text{unidades del recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad del recurso } i)$$

Lo cuál quiere decir que las variables duales y_i representan el valor por unidad del recurso i . A estas variables y_i generalmente se les conoce como “precios duales”, “precios sombra” o “multiplicadores simplex”.

A la desigualdad $z < w$ asociada con dos soluciones asociadas (primal y dual), se le interpreta como:

$$(\text{utilidad}) < (\text{valor de los recursos})$$

Esta relación nos indica que siempre que los ingresos totales por todas las actividades sean menores que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no son óptimas. La optimalidad sólo se alcanza cuando se han explotado los recursos por completo, y esto sólo puede suceder cuando los datos (valor de los recursos) son iguales a los resultados (utilidad). Entonces en términos económicos, decimos que el sistema permanece inestable (no óptimo) cuando los datos (valor de los recursos) son mayores que el resultado (ingreso); por lo que la estabilidad sólo se obtiene cuando las dos cantidades son iguales [8].

Las soluciones primal y dual se relacionan de forma tan estrecha que la solución óptima del problema primal produce en forma directa la solución óptima del dual. Describiremos un método para hacerlo, obtenido de la bibliografía [8] y de ésta forma hacer la interpretación económica de las variables del dual.

Valores óptimos de las variables duales. = vector renglón de los coeficientes objetivos originales de las variables básicas óptimas primales \times Inversa óptima primal

Los elementos del vector renglón de los coeficientes objetivos del primal original deben aparecer en el mismo orden que aparecen las variables en la columna básica de la tabla simplex.

Regresando al ejemplo expuesto en el apartado II.3.2:

Resuélvase: Max. $Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &\leq 430 \\ 3X_1 + 2X_3 &\leq 460 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 420 \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

El modelo dual es:

$$\begin{aligned} \text{Min } G &= 430y_1 + 460y_2 + 420y_3 \\ \text{Sujeto a:} \\ y_1 + 3y_2 + y_3 &\geq 3 \\ 2y_1 + 4y_3 &\geq 2 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Del modelo primal y de los cálculos efectuados en la sección II.3.2:

$$\text{Tenemos que } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C_B = [X_2 \quad X_3 \quad X_6] = [2 \quad 5 \quad 0]$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C_B \cdot B^{-1} = [2 \quad 5 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2 \quad 0]$$

Entonces $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, representan el valor por unidad del recurso (precios sombra para el recurso).

Significa que por cada unidad de recurso de y_1 ($y_1 = 1$) se tiene una unidad para la ganancia del primer recurso. De igual forma por cada unidad de recurso de y_2 ($y_2 = 2$) se tienen dos unidades para la ganancia del segundo recurso. Si disminuyo el tercer recurso no sucede nada, ya que $y_3 = 0$

Sustituyendo los valores en la función objetivo:

$$\text{Min } G = 430(1) + 460(2) + 420(0) = 1350$$

Sustituyendo los valores en las restricciones:

$$1 + 3(2) + 0 \geq 3$$

$$2(1) + 4(0) \geq 2$$

$$1 + 2(2) \geq 5$$

$7 \geq 3$ significa que no conviene producir X_1 , ya que el costo real es de \$7.00. Hay un déficit de \$4.00

$2 \geq 2$ no hay pérdida para producir X_2

$5 \geq 5$ no hay pérdida para producir X_3

II.7 Soluciones a los Modelos Primal y Dual

II.7.1 Método Dual Simplex

El siguiente procedimiento y ejemplo han sido extraídos de la bibliografía [11].

Así como en el método simplex se requiere que en cada iteración exista factibilidad primaria, es decir, $X_B = B^{-1}b \geq 0$, así en el método que se explica a continuación se requiere que en cada iteración exista factibilidad dual, es decir, $Z_j - C_j \geq 0$ para toda $j \in A$. Los pasos del método dual simplex se describen a continuación:

Paso 1. Comenzar con un tableau donde todas las $Z_j - C_j \geq 0$ para toda $j \in A$.

Paso 2. Si $X_{Bi} \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, m$, el tableau actual es óptimo. Si no, dónesele como vector de salida de la base, aquél cuto correspondiente X_{Bi} sea el más negativo.

Paso 3. El vector a_k de entrada será aquél que satisfaga la siguiente regla:

$$\frac{z_k - c_k}{Y_{ik}} = \text{Max}_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{ij}} \mid Y_{ij} < 0 \right\}$$

Paso 4. La columna a_k se convierte en el vector unitario e_i con el pivote Y_{ik} igual a uno. Los cambios se llevan a cabo con operaciones elementales de renglón y de columna. Regrészese al paso 2 y repítase hasta que las condiciones de optimalidad se cumplan.

Si durante la aplicación del paso 3, todos los elementos $Y_{ik} \geq 0$, el programa original no tiene solución.

Ejemplo.-

Resolver por el método dual simplex el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2X_1 + X_2 \\ \text{Sujeto a} \\ 3X_1 + X_2 &\geq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 3 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este programa puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{Max } h &= -Z = -2X_1 - X_2 \\ \text{Sujeto a} \\ -3X_1 - X_2 + X_3 &= -3 \\ -4X_1 - 3X_2 + X_4 &= -6 \\ -X_1 - 2X_2 + X_5 &= -3 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

El primer tableau es:

	h	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	1	2	1	0	0	0	0
a_3	0	-3	-1	1	0	0	-3
a_4	0	-4	-3	0	1	0	-6 ←
a_5	0	-1	-2	0	0	1	-3

Nótese que existe factibilidad dual, pues todas las $z_j - c_j \geq 0$, para toda $j \in A$. La solución actual ni es óptima pues X_B no es mayor o igual que cero. se selecciona al vector a_4 como el vector que sale, pues $X_{B4} = -6$ es el más negativo. Para seleccionar al vector que entra se usa la regla

$$\begin{aligned} \frac{z_k - c_k}{Y_{B4k}} &= \text{Máx}_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{B4j}} \mid Y_{B4j} < 0 \right\} \\ &= \text{Máx} \left\{ \frac{2}{-4}, \frac{1}{-3} \right\} \\ &= \text{Máx} \{-0.5, -0.33\} = -0.33 \end{aligned}$$

El elemento $Y_{B4,k}$ resulta ser el $Y_{2,2}$

Y por lo tanto a_2 entra a la base. El pivote es el elemento $Y_{B4,2}$ o sea el $Y_{2,2}$. El vector a_2 se convierte en la columna unitaria con un uno en la posición del pivote. Esto se logra con operaciones matriciales elementales que generan el siguiente tableau:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccc} & Z & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ \hline & 1 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_3 & 0 & -5/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \leftarrow \\ a_2 & 0 & 4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2 \\ a_5 & 0 & 5/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

Repitiendo una iteración más, se ve que la solución actual no es óptima, porque $X_{B1} = -1 < 0$. El vector a_3 sale de la base y la regla de entrada indica

$$\begin{aligned} \text{Máx} \left\{ \frac{2/3}{-5/3}, \frac{1/3}{-1/3} \right\} = \\ \text{Máx} \{-0.4, -1.0\} = -0.4 \end{aligned}$$

O sea que a_1 entra en la base. Haciendo el pivote $Y_{B1,1}$ ($Y_{1,1}$) igual a uno y el resto de la columna a_1 igual a cero, por medio de operaciones matriciales elementales, se obtiene el siguiente tableau, que es óptimo, pues el vector $X_B \geq 0$

$$\begin{array}{cccccc} & h & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 & -12/5 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 0 & 3/5 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & -3/5 & 0 & 6/5 \leftarrow \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

La solución óptima es:

$$= \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \\ - \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 6/5 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\text{Y} \quad h = -Z = -12/5, \quad Z = 12/5$$

Capítulo III

La Teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA)

La mayor parte del desarrollo de éste capítulo se ha apoyado en la bibliografía [2] de éste trabajo, así que antes de entrar en materia brevemente describiremos lo que en él se tratará:

1. Introduciremos el modelo más básico de la aplicación de la teoría DEA, llamado “modelo CCR”.
2. Para cada Unidad de Toma de Decisiones, formaremos las entradas y salidas por los aún desconocidos pesos (o valores) de (v_i) y (u_r) :

$$\begin{aligned} \text{Entradas} &= v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} \\ \text{Salidas} &= u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \end{aligned}$$

3. Usaremos programación lineal para determinar los pesos (v_i) y (u_r) , así como para maximizar la proporción: $\frac{\text{salidas}}{\text{entradas}}$, para cada DMU. Los pesos variarán de una DMU a otra.
4. Conoceremos el modelo CCR orientado tanto a entradas, como a salidas (apartado III.5).
5. Se trabajará con datos semipositivos, es decir, aplicaciones que involucran cero en sus datos en entradas y/o salidas.
6. Mostraremos el modelo Dual de Programación Lineal (DLPo) llamado también “Forma Envolvente” y el modelo primal, llamado “Modelo Multiplicador”, para el modelo CCR dentro de la literatura de la teoría DEA (apartado III.4), e identificaremos la existencia de exceso en las entradas (desperdicios) y deficiencias en las salidas.
7. Introduciremos también el Conjunto Factible de Producción de los datos de entrada y salida.
8. El Modelo BCC (Banker-Charnes-Cooper)
9. El Modelo Aditivo, que tiene el mismo Conjunto Factible de Producción que los modelos CCR y BCC y sus variantes, pero trata a las holguras (los excesos en las entradas y las deficiencias en las salidas), directamente en la función objetivo.

III.1 El Modelo CCR (Charnes-Cooper-Rhodes), Orientado a Entradas

Uno de los modelos más básicos de la teoría DEA es el modelo CCR, propuesto por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978.

Para cada Unidad de Toma de Decisiones, formamos las entradas y salidas por los aún desconocidos pesos (v_i) y (u_r) :

$$\text{Entradas} = v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}$$

$$\text{Salidas} = u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$$

Se trata de determinar los pesos usando programación lineal así como para maximizar la proporción $\frac{\text{salidas}}{\text{entradas}}$.

Los pesos óptimos pueden variar de una unidad de toma de decisiones a otra. Lo que se va a obtener como resultado, es precisamente el valor de éstos pesos (v_i) y (u_r) para que la unidad que se está analizando sea eficiente.

Genéricamente una Unidad de Toma de Decisiones (DMU) es considerada como la entidad responsable de transformar las entradas en salidas (recursos o insumos en beneficios o utilidades), y su desempeño será evaluado. El nombre "Unidad de Toma de decisiones" tiene la flexibilidad de utilizarse en un amplio número de aplicaciones, por ejemplo en aplicaciones administrativas las Unidades de Toma de Decisiones (DMUs) podrían ser cada una de las sucursales bancarias, un grupo de tiendas departamentales o una cadena de supermercados, un grupo de hospitales, escuelas, o bibliotecas públicas; por citar algunos ejemplos.

Supongamos que hay n número de unidades de decisión Unidad₁, Unidad₂,...,Unidad_n. Algunas entradas y salidas comunes a cada una de éstas $j=1,\dots,n$ Unidades, se seleccionan de la siguiente forma:

- 1.- Se asume que los valores numéricos de cada entrada y salida son positivos.
- 2.- Cada registro de entradas y salidas debe elegirse con base en los intereses directivos de la empresa u organización en particular, de acuerdo al giro de la misma; ya que tanto las entradas (insumos, recursos) como salidas (beneficios, utilidades) tomarán parte en la evaluación de eficiencia de las Unidades de Toma de Decisiones.
- 3.-En principio, deben preferirse pequeñas cantidades de entradas y grandes cantidades de salidas para que los marcadores de eficiencia reflejen estos principios.
- 4.- las unidades de medida de diferentes entradas y salidas no necesitan ser congruentes. Algunas pueden involucrar número de personas ó áreas (espacios) de piso, gastos monetarios, etc.

Supónganse que m entradas y s salidas se seleccionan bajo las condiciones 1 y 2. Sean las entradas $= (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ y salidas $= (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$. La matriz X de datos de entrada y la matriz Y de datos de salida son las siguientes:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_{s1} & y_{s2} & \dots & y_{sn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Donde X es una matriz de (mxn) y Y una matriz de (sxn)

Dados los datos, medimos la eficiencia de cada Unidad de Toma de decisiones y por tanto necesitaremos n optimizaciones, una para cada j -ésima Unidad de Toma de Decisiones a ser evaluada. Designemos a esa unidad de Toma de Decisiones como la Unidad de Toma de Decisiones "o" (DMU_o) donde $o = 1, 2, \dots, n$. Resolveremos entonces el siguiente problema de programación fraccional para obtener valores para las variables: entradas ó pesos (v_i) con ($i = 1, \dots, m$) y las salidas ó pesos (u_r) con ($r = 1, \dots, s$). El planteamiento es el siguiente:

Programación Fraccional (FPo):

$$\max_{v, u} \theta = \frac{u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \dots + v_m x_{mo}} \quad (3.3)$$

Sujeto a

$$\frac{u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.4)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (3.5)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_m \geq 0 \quad (3.6)$$

Las restricciones significan que la proporción de las salidas-entradas no deben exceder de 1 para cada Unidad de Toma de Decisiones (DMU). El objetivo es obtener los pesos (o valores) de (v_i) y (u_r) que maximicen la proporción (o razón) de ésta Unidad de Toma de Decisiones "o" (DMU_o) (la unidad que estamos evaluando). Debido a las restricciones, el valor óptimo de θ es a lo más 1. Asumiremos que todas las entradas y salidas tienen valores diferentes de cero.

Ahora reemplazamos éste problema de programación fraccional (FPo) por uno de programación lineal (LPo):

Programación Lineal (LPo):

$$\max_{\mu, v} \theta = \mu_1 y_{1o} + \dots + \mu_s y_{so} \quad (3.7)$$

Sujeto a

$$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \quad (3.8)$$

$$\mu_1 y_{1j} + \dots + \mu_s y_{sj} \leq v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj} \quad (3.9)$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (3.10)$$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \geq 0 \quad (3.11)$$

Para sustentar el hecho de que un programa de programación fraccional (FPo) puede representarse como un programa de programación lineal (LPo), nos referiremos a los siguientes teoremas:

Teorema 3.1 Un programa fraccional (FPo) es equivalente a uno Lineal (LPo).

Prueba:

Bajo la suposición de que v es un valor diferente de cero y $X > 0$ (matriz X), el denominador de la restricción del problema de programación fraccional (FPo) es positivo para cada j , y por lo tanto obtenemos (3.3). Multiplicamos ambos lados de (3.4) por el denominador. Enseguida, vemos que un número fraccionario es invariable bajo la multiplicación de ambos, numerador y denominador por el mismo número diferente de cero.

Después de efectuar ésta multiplicación, fijamos el denominador de (3.3) igual a 1, y lo transcribimos en restricción, como se ha hecho en (3.8).

Maximizando el numerador; tenemos como resultado un problema de programación lineal (LPo). Dejemos entonces como una solución óptima de éste (LPo) a $(v = v^*, \mu = \mu^*)$ y como valor óptimo objetivo a θ^* .

La solución $(v = v^*, u = \mu^*)$ es también óptima para el problema de programación fraccional (FPo), puesto que la transformación hecha anteriormente es reversible bajo los supuestos que se han hecho. Así, el problema de Programación Fraccional (FPo) y el problema de programación lineal (LPo) tienen el mismo valor óptimo θ^* \square .

Podemos notar también que las medidas de eficiencia que hemos presentado son “unidades invariantes”. Por ejemplo, son independientes de las unidades de medida usadas en el sentido de que la multiplicación de cada entrada por una constante $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, y cada salida por una constante $\rho_r > 0$, $r = 1, \dots, s$, no cambian la solución obtenida. Para asentar esto de una forma precisa, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2 de Unidades de Invariancia.

Los valores óptimos de $\max \theta = \theta^*$ en (3.3) y (3.7) son independientes de las unidades en las cuales las entradas y salidas sean medidas, siempre que éstas unidades sean las mismas para cada unidad de toma de decisiones (DMU) \square .

Prueba:

Sean θ^* , u_r^* , v_i^* los óptimos para (3.3)-(3.6). Ahora reemplacemos el original y_{rj} y x_{ij} por $\rho_r y_{rj}$ y $\delta_i x_{ij}$ para algunas elecciones de $\rho_r, \delta_i > 0$. Pero luego, eligiendo $u_r' = u_r^* / \rho_r$ y $v_i' = v_i^* / \delta_i$ tenemos una solución para el problema transformado con $\theta' = \theta^*$. Un valor óptimo para el problema transformado debe por lo tanto tener $\theta'^* \geq \theta^*$. Ahora, suponiendo que podríamos tener: $\theta'^* > \theta^*$, entonces, no obstante que $u_r = u_r^* \rho_r$, y $v_i = v_i^* \delta_i$ satisfacen las restricciones originales, la suposición $\theta'^* \geq \theta^*$ contradice la optimalidad aceptada por θ^* bajo éstas restricciones. La única posibilidad restante es $\theta'^* = \theta^*$. Esto provee la invariancia requerida para (3.3) \square .

Así, una persona puede medir salidas en millas y entradas en galones de gasolina y cuartos de aceite, mientras otra persona mide estas mismas salidas y entradas en kilómetros y litros. Sin embargo obtendrán el mismo valor de eficiencia de (3.3) o (3.7), al evaluar el mismo conjunto de automóviles, por ejemplo.

El teorema 3.1 demostró la equivalencia de (LPo) a (FPo). Y así, el mismo resultado debe mantenerse y el teorema se ha probado.

Antes de continuar, señalemos que un problema de programación lineal (LPo) puede resolverse por el método simplex de programación lineal. La solución óptima puede obtenerse fácilmente trabajando con la parte dual de (LPo). Ésto lo explicaremos a detalle más adelante.

En cualquier caso supongamos que tenemos una solución óptima de (LPo), la cuál representamos por (θ^*, v^*, u^*) (usamos la notación v y u en lugar de v y μ en LPo); donde v^* y u^* son valores con restricciones dadas en (3.10) y (3.11). Podemos

identificar si la eficiencia del modelo CCR ha sido alcanzada o no, por lo siguiente. Tenemos:

Definición 3.1 Eficiencia del Modelo CCR.

- 1.- Una unidad de toma de decisiones (DMUo) es eficiente según el modelo CCR si $\theta^* = 1$ y existe al menos un óptimo (v^*, u^*) , con $v^* > 0$ y $u^* > 0$.
- 2.- De otra forma, la unidad de toma de decisiones (DMUo) es ineficiente según el modelo CCR \square .

Así, ineficiencia en el modelo CCR significa obtener cualesquiera de:

- (i) $\theta^* < 1$ ó
- (ii) $\theta^* = 1$ y si al menos un elemento de (v^*, u^*) es cero para cada solución óptima de (LPo).

Explicaremos esto último con algunos ejemplos, un poco más adelante.

Los valores de (v^*, u^*) obtenidos como soluciones óptimas para un problema de programación lineal (LPo) resultan ser un conjunto de pesos óptimos para la unidad (DMUo). La proporción (razón) es evaluada por:

$$\theta^* = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io}} \quad (3.13)$$

Retomando (3.8), el denominador es 1 y por lo tanto:

$$\theta^* = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro} \quad (3.14)$$

Como se mencionó antes, (v^*, u^*) son el conjunto de los pesos más favorables para la DMUo en el sentido de maximización de la escala de la razón ó proporción. v_i^* es el peso óptimo para la entrada i y su magnitud expresa qué tan bien se ha evaluado la entrada. Similarmente para u_r^* sucede lo mismo en las salidas r . Además, si examinamos cada entrada $v_i^* x_{io}$ en el conjunto de entradas:

$$\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io} (= 1), \quad (3.15)$$

Podemos ver la importancia relativa de cada entrada por referencia al valor de cada $v_i^* x_{io}$. La misma situación es para $u_r^* y_{ro}$ donde u_r^* provee una medida de la contribución

de y_{ro} al valor total de θ^* . Estos valores no sólo muestran qué salidas contribuyen a la evaluación de la DMUo, sino además el alcance que tienen.

Para tener un primer acercamiento a la aplicación del modelo CCR, ilustraremos con un pequeño ejemplo tomado de la bibliografía [2].

Hemos comentado ya que para tratar con múltiples entradas y salidas, debe usarse una proporción como la siguiente:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_i} = \frac{u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_s y_s}{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_s y_m}$$

Donde:

y_r = Cantidad de salida r

u_r = Peso asignado a la salida r

x_i = Cantidad de entrada i

v_i = Peso asignado a la entrada i

Retomando el ejemplo de la sección 1.4, tenemos la evaluación de la eficiencia de 12 hospitales en términos de dos entradas: Número de doctores y número de enfermeras, y dos salidas identificadas como número de pacientes externos y número de pacientes internos (en unidades de 100 personas/mes).

Hospital	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Doctores	20	19	25	27	22	55	33	31	30	50	53	38
Enfermeras	151	131	160	168	158	255	235	206	244	268	306	284
Pac. Externos	100	150	160	180	94	230	220	152	190	250	260	250
Pac. Internos	90	50	55	72	66	90	88	80	100	100	147	120

Tabla 1.3.5 Caso de Hospitales.

Determinaremos un conjunto de pesos del hospital B, con los cuáles mejorará su clasificación con relación al hospital A.

Usando la tabla, podríamos determinar pesos (para las entradas y las salidas), los cuáles traerían a B a la par de A, con la solución de:

$$A = B$$

$$\frac{100u_1 + 90u_2}{20v_1 + 151v_2} = \frac{150u_1 + 50u_2}{19v_1 + 131v_2}$$

Una forma fácil sería resolver el siguiente planteamiento:

$$\text{Max} \frac{150u_1 + 50u_2}{19v_1 + 131v_2}$$

Sujeta a:

$$B = \frac{150u_1 + 50u_2}{19v_1 + 131v_2} \leq 1$$

$$A = \frac{100u_1 + 90u_2}{20v_1 + 151v_2} \leq 1$$

$$\text{Con } u_1, u_2, v_1, v_2 > 0$$

La elección de u_1, u_2 y v_1, v_2 debe maximizar la proporción del hospital B. Éste programa no lineal puede ser reemplazado por el siguiente programa lineal:

$$\text{Max } 150u_1 + 50u_2$$

Sujeta a:

$$150u_1 + 50u_2 \leq 19v_1 + 131v_2$$

$$100u_1 + 90u_2 \leq 20v_1 + 151v_2$$

$$19v_1 + 131v_2 = 1$$

Y todas las variables son restringidas a ser positivas.

Al resolver éste problema, obtenemos los resultados: $u_1^* = 0.00463$, $u_2^* = 0.00611$, $v_1^* = 0.0275$, $v_2^* = 0.00364$, donde \approx significa “aproximadamente igual a”. Esta solución es óptima con

$$\frac{150(0.00463) + 50(0.00611)}{19(0.0275) + 131(0.00364)} = 1.000660436, \text{ para el hospital B.}$$

Y para el hospital A:

$$\frac{100(0.00463) + 90(0.00611)}{20(0.0275) + 131(0.00364)} = 0.986$$

Este cambio en la clasificación de la eficiencia puede llevar al hospital “A” a calcular sus propios mejores pesos, y similarmente para los otros hospitales. Se puede ir más allá de sólo éste par de comparaciones, para lo cual consideraremos a los 12 hospitales simultáneamente para cada evaluación. De hecho, los hospitales A y B son clasificados ambos como completamente eficientes cuando cada uno está dando su propio “mejor peso” al considerar a los 12 hospitales simultáneamente utilizando el modelo CCR de DEA (ver tabla 1.3.6, sección I.4). Con excepción del hospital “D”, ninguno de los otros hospitales logra completamente (100%) la eficiencia con la teoría DEA, aún cuando cada uno obtenga sus propios “mejores pesos”.

Ilustraremos ahora la utilización del modelo CCR por medio de más ejemplos en pequeña escala.

III.2 Ejemplos sobre el Modelo CCR

Ejemplo 3.1 (Caso de 1 entrada y 1 salida)

La tabla 3.1 nos muestra 8 unidades de toma de decisión (DMUs) con una entrada y una salida. Hacemos referencia a la tabla 1.3.1, sección I.3:

Tienda	A	B	C	D	E	F	G	H
Empleados- entradas (v_i)	2	3	3	4	5	5	6	8
Ventas- salidas (u_i)	1	3	2	3	4	2	3	5

Podemos evaluar la eficiencia de la unidad de toma de decisiones A (DMU A), resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\langle A \rangle \quad \max \quad \theta = u$$

$$\text{Sujeto a} \quad 2v = 1$$

$$u \leq 2v \quad (\text{A}) \quad 3u \leq 3v \quad (\text{B})$$

$$2u \leq 3v \quad (\text{C}) \quad 3u \leq 4v \quad (\text{D})$$

$$4u \leq 5v \quad (\text{E}) \quad 2u \leq 5v \quad (\text{F})$$

$$3u \leq 6v \quad (\text{G}) \quad 5u \leq 8v \quad (\text{H})$$

Donde todas las variables son restringidas a ser no negativas.

La solución óptima, está dada por:

($v^* = 0.5$, $u^* = 0.5$, $\theta^* = 0.5$). Así, la eficiencia de A en el modelo CCR es $\theta^* = u^* = 0.5$. Se encuentra que el conjunto referencia para A es $E_A = \{B\}$, e insertando $u^* = 0.5$ y $v^* = 0.5$, tenemos los mejores pesos posibles para la DMU A en cada una de las restricciones anteriores.

Así, el desempeño de B se usa para caracterizar a A y clasificarla como ineficiente incluso con los mejores pesos que los datos admiten para A.

La eficiencia de B puede evaluarse similarmente de los datos en la tabla 3.1 por:

$$\langle B \rangle \quad \max \quad \theta = 3u$$

$$\text{Sujeto a} \quad 3v = 1$$

$$u \leq 2v \quad (\text{A}) \quad 3u \leq 3v \quad (\text{B})$$

$$\begin{array}{ll}
 2u \leq 3v & \text{(C)} \\
 4u \leq 5v & \text{(E)} \\
 3u \leq 6v & \text{(G)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 3u \leq 4v & \text{(D)} \\
 2u \leq 5v & \text{(F)} \\
 5u \leq 8v & \text{(H)}
 \end{array}$$

La solución óptima es ($v^* = 0.3333$, $u^* = 0.3333$, $\theta^* = 1$) y B es eficiente según el modelo CCR (ver Definición 3.1).

Podemos proceder en similar forma con las otras DMUs para obtener los resultados que se muestran en la tabla 3.2. Solo B es eficiente y está en el conjunto referencia de todas las otras DMUs (ver figura 3.1). La figura 3.1 representa la situación geoméricamente. La frontera eficiente representada por la línea pasa sólo por el punto B. los valores de θ^* en la tabla 3.2 muestran que es necesario llevar a cada DMU sobre la frontera de eficiencia.

Por ejemplo, el valor de $\theta^* = \frac{1}{2}$ aplicado a las entradas de A, llevará a A sobre la frontera de eficiencia por la reducción de sus entradas en un 50%, mientras deja sus salidas en su valor presente. Similarmente $0.6667 \times 3 = 2$ posicionará a C en la frontera, y así sucesivamente.

DMU	CCR (θ^*)	Conjunto Referencia
A	0.5000	B
B	1.0000	B
C	0.6667	B
D	0.7500	B
E	0.8000	B
F	0.4000	B
G	0.5000	B
H	0.6250	B

Tabla 3.2 Resultados del ejemplo 3.1.

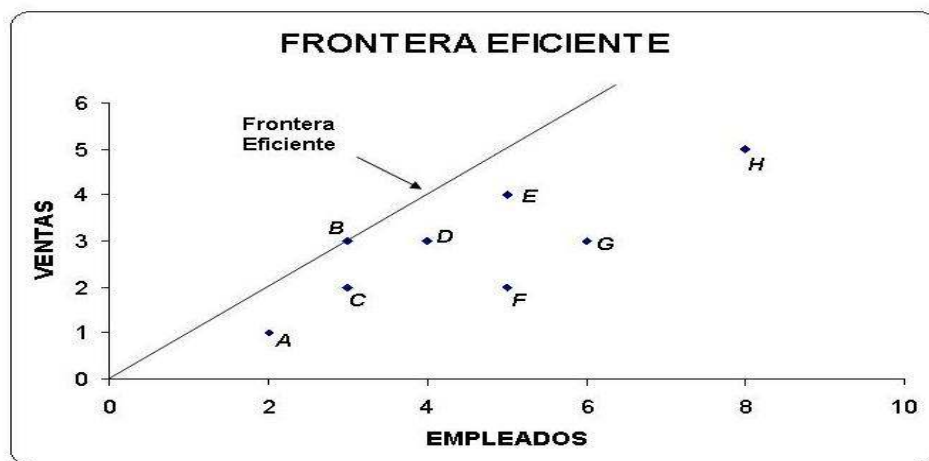


Figura 3.1

Ejemplo 3.2 (caso de 2 entradas y 1 salida)

La tabla 3.3 muestra 6 DMUs con 2 entradas y 1 salida donde el valor de salidas es llevado a 1 para cada DMU.

		DMU (Unidades de Toma de Decisión)					
		A	B	C	D	E	F
Entradas (v_i)	x_1	4	7	8	4	2	10
	x_2	3	3	1	2	4	1
Salidas (u_i)	y	1	1	1	1	1	1

Tabla 3.3

(1) El programa lineal para la DMU A es:

$$\langle A \rangle \max \quad \theta = u$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
 &4v_1 + 3v_2 = 1 \\
 &u \leq 4v_1 + 3v_2 \quad (A) & u \leq 7v_1 + 3v_2 \quad (B) \\
 &u \leq 8v_1 + v_2 \quad (C) & u \leq 4v_1 + 2v_2 \quad (D) \\
 &u \leq 2v_1 + 4v_2 \quad (E) & u \leq 10v_1 + v_2 \quad (F)
 \end{aligned}$$

Donde todas las variables se restringen a ser no negativas.

Este problema puede resolverse por programación lineal. Puede además resolverse simplemente borrando v_2 de las desigualdades e insertando $v_2 = (1 - 4v_1)/3$ y observando la relación entre v_1 y u .

La única solución óptima es $(v_1^* = 0.1429, v_2^* = 0.1429, u^* = 0.8571, \theta^* = 0.8571)$ y la eficiencia de A en el modelo CCR es 0.8571. De la figura 3.2 observamos que el conjunto referencia de A es $E_A = \{D, E\}$.

(2) El programa lineal para la DMU B es:

$$\langle B \rangle \max \theta = u$$

Sujeto a

$$7v_1 + 3v_2 = 1$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 \quad (\text{A}) \qquad u \leq 7v_1 + 3v_2 \quad (\text{B})$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 \quad (\text{C}) \qquad u \leq 4v_1 + 2v_2 \quad (\text{D})$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \quad (\text{E}) \qquad u \leq 10v_1 + v_2 \quad (\text{F})$$

La única y óptima solución es $(v_1^* = 0.0526, v_2^* = 0.2105, u^* = 0.6316, \theta^* = 0.6316)$ la eficiencia de B para el modelo CCR es 0.6316, y el conjunto referencia es $E_B = \{C, D\}$ (observar figura 3.2).

(3) Una solución óptima para la DMU C es $(v_1^* = 0.0833, v_2^* = 0.3333, u^* = 1, \theta^* = 1)$ y C es eficiente según el modelo CCR, bajo la definición 3.1. Sin embargo, la solución óptima no está exclusivamente determinada.

De la misma manera, D y E son eficientes según el modelo CCR.

(4) El programa lineal para la unidad de toma de decisiones F (DMU F) es:

$$\langle F \rangle \max \theta = u$$

Sujeta a

$$10v_1 + v_2 = 1$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 \quad (\text{A}) \qquad u \leq 7v_1 + 3v_2 \quad (\text{B})$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 \quad (\text{C}) \qquad u \leq 4v_1 + 2v_2 \quad (\text{D})$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \quad (\text{E}) \qquad u \leq 10v_1 + v_2 \quad (\text{F})$$

La solución óptima para F es $(v_1^* = 0, v_2^* = 1, u^* = 1, \theta^* = 1)$, y con $\theta = 1$, F parece eficiente, sin embargo vemos que $v_1^* = 0$. Por lo tanto asignamos un pequeño valor positivo ε a v_1 y observamos el cambio en θ^* . Esto es, usamos los datos para F y $10\varepsilon + v_2 = 1$ para obtener $v_2 = 1 - 10\varepsilon$. Insertando este valor en las desigualdades, se obtienen las siguientes restricciones:

$$u \leq 3 - 26\varepsilon \quad (\text{A}) \qquad u \leq 3 - 23\varepsilon \quad (\text{B})$$

$$u \leq 1 - 2\varepsilon \quad (\text{C}) \qquad u \leq 2 - 16\varepsilon \quad (\text{D})$$

$$u \leq 4 - 38\varepsilon \quad (\text{E}) \qquad u \leq 1 \quad (\text{F})$$

Debemos notar que ε es un pequeño valor positivo, el mínimo de los términos del lado derecho es

$$u = 1 - 2\varepsilon$$

Por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$, se sigue que $\theta^* = 1 - 2\varepsilon < 1$. De ésta manera, v_1 debe ser cero para que F tenga $\theta^* = 1$. Por lo tanto concluimos que F es ineficiente según el modelo CCR, por la definición 3.1.

Además examinemos la eficiencia de F por la comparación de F con C:

C tiene las entradas $x_1 = 8$ y $x_2 = 1$, mientras F tienen entradas $x_1 = 10$ y $x_2 = 1$. F tiene 2 unidades de exceso en la entrada x_1 comparada con C. Esta deficiencia está oculta porque la solución óptima ocasiona que el peso de la entrada x_1 sea cero ($v_1^* = 0$). C es el conjunto referencia de F y por comparación directa podemos identificar el hecho de que F ha usado una cantidad excesiva de esta entrada.

No siempre es fácil ver tal exceso en una entrada (o una escasez en las salidas), de la solución óptima del modelo CCR. Posteriormente abordaremos el modelo CCR desde el lado dual de un programa lineal y será posible determinar los excesos y las carencias o fallas explícitamente por los valores diferentes de cero con los cuáles éstos se identifican.

Una DMU como F, con $\theta^* = 1$ y con un exceso en las entradas y/o una carencia o falla en las salidas, es llamada "Ineficiencia Mixta". Además claramente podemos observar que F es ineficiente, porque podemos mejorar (reducir) su entrada x_1 sin afectar ó empeorar la otra entrada (o salida). Esto coincide con la definición de ineficiencia de Pareto-Koopmans, vista en la sección 1.2 de éste trabajo.

La tabla 3.4 muestra la eficiencia (θ^*) de acuerdo al modelo CCR para el ejemplo 3.2, y la figura 3.2 describe la frontera eficiente.

DMU	x_1	x_2	y	CCR(θ^*)	Conjunto Referencia	v_1	v_2	u
A	4	3	1	0.8571	D E	0.1429	0.1429	0.8571
B	7	3	1	0.6316	C D	0.0526	0.2105	0.6316
C	8	1	1	1	C	0.0833	0.3333	1
D	4	2	1	1	D	0.1667	0.1667	1
E	2	4	1	1	E	0.2143	0.1429	1
F	10	1	1	1	C	0	1	1

Tabla 3.4. Resultados del ejemplo 3.2

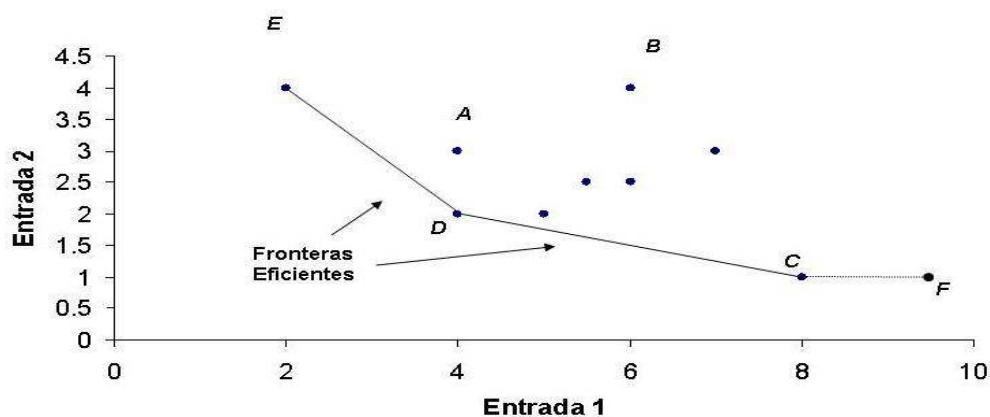


Figura 3.2

A fin de demostrar el papel de los pesos (u, v) en la identificación de la eficiencia de las Unidades de Toma de Decisión (DMUs), mostraremos gráficamente la frontera de eficiencia del ejemplo 3.2 en los pesos variables (=multiplicadores). El ejemplo 3.2 tiene 2 entradas y 1 salida, cuyo valor ha sido llevado a la unidad. Para este ejemplo simple podemos ilustrar las situaciones usando una gráfica de 2 dimensiones. Las restricciones del problema de programación lineal para cada DMU tienen las siguientes desigualdades en común con todas las variables restringidas a no ser negativas:

$$\begin{array}{ll} u \leq 4v_1 + 3v_2 & \text{(A)} \\ u \leq 8v_1 + v_2 & \text{(C)} \\ u \leq 2v_1 + 4v_2 & \text{(E)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} u \leq 7v_1 + 3v_2 & \text{(B)} \\ u \leq 4v_1 + 2v_2 & \text{(D)} \\ u \leq 10v_1 + v_2 & \text{(F)} \end{array}$$

Dividiendo estas expresiones por $u > 0$, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{ll} 1 \leq 4(v_1/u) + 3(v_2/u) & \text{(A)} \\ 1 \leq 8(v_1/u) + (v_2/u) & \text{(C)} \\ 1 \leq 2(v_1/u) + 4(v_2/u) & \text{(E)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 1 \leq 7(v_1/u) + 3(v_2/u) & \text{(B)} \\ 1 \leq 4(v_1/u) + 2(v_2/u) & \text{(D)} \\ 1 \leq 10(v_1/u) + (v_2/u) & \text{(F)} \end{array}$$

Estas desigualdades se muestran en la figura 3.3 tomando v_1/u y v_2/u como ejes. El área denotada por P muestra la región factible para las restricciones. El límite de P se compone de tres segmentos de línea y 2 ejes. Los tres segmentos de línea corresponden a las unidades de toma de decisión eficientes (DMUs) C, D y E.

Explicaremos esto último usando a D como ejemplo y además explicaremos la relación entre ésta región y las unidades de toma de decisiones ineficientes usando a A como ejemplo.

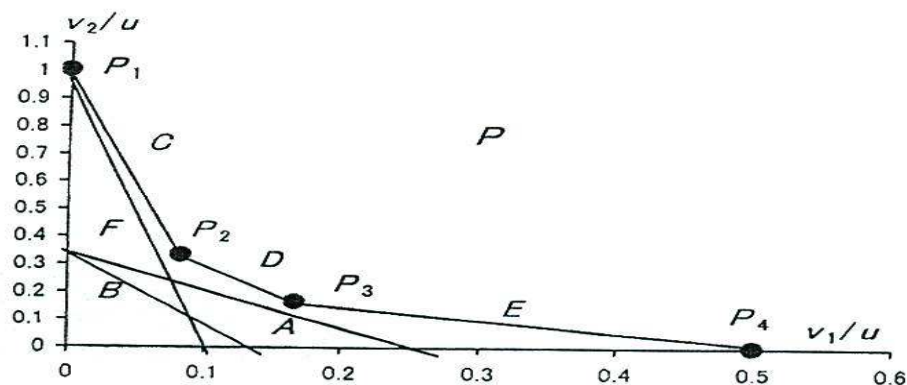


Figura 3.3 Región P

Ejemplo para D:

El programa lineal de D se compone de las precedentes desigualdades más lo siguiente:

$$\text{Max } u$$

$$\text{Sujeto a } 4v_1 + 2v_2 = 1 \quad (3.16)$$

Dividiendo (3.16) por u , tenemos

$$4(v_1/u) + 2(v_2/u) = 1/u \quad (3.17)$$

La función objetivo $u \rightarrow \max$ produce la misma solución que $1/u \rightarrow \min$, así que el problema es encontrar el mínimo t para el cuál la siguiente línea toca la región P:

$$4(v_1/u) + 2(v_2/u) = t \quad (3.18)$$

De la figura (3.3) se tiene que $t = 1$ (y por lo tanto $u = 1$) representa la línea óptima para D, mostrando que D es eficiente. Además es fácil de ver que D es eficiente para cualquier peso (v_1, v_2) en el segmento de línea (P_2, P_3) . Esta observación lleva a la conclusión de que el óptimo (v_1, v_2) para D no es único. De hecho, el valor $(v_1 = .1667, v_2 = .1667)$ para D en la tabla 3.4 es un ejemplo, y actualmente corresponde a P_3 en la figura 3.3.

De manera similar, cualquier (v_1, v_2) en el segmento de línea (P_1, P_2) expresa el peso óptimo para C y cualquier (v_1, v_2) en el segmento de línea (P_3, P_4) para E.

Así, los pesos óptimos para una DMU eficiente no necesariamente son únicos y debemos ser cuidadosos para tener esto muy presente.

Ejemplo para A:

Enseguida, consideremos las unidades de toma de decisiones ineficientes (DMUs), tomando a A como un ejemplo. El programa lineal para A se compone de las siguientes expresiones sumadas a las desigualdades especificadas anteriormente:

$$\begin{aligned} \text{Max } & u \\ \text{Sujeto a } & 4v_1 + 3v_2 = 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Igual que con el ejemplo D, podemos transformarla en

$$4(v_1/u) + 3(v_2/u) = t \quad (3.20)$$

Luego el problema es encontrar el mínimo t dentro de la región P. Refiriéndonos a la figura 3.4, podemos ver que la solución es dada por el punto P_3 , donde la línea paralela a la línea A toca la región P por vez primera. P_3 es la intersección de las líneas D y E y ésta es la correspondencia geométrica del hecho de que el conjunto referencia para A, se compone de D y E. Con un simple cálculo se tiene que $t = 1/0.8571$ y por lo tanto la eficiencia de A es $u = 0.8571$. El valor de (v_1, v_2) en P_3 es:

$$v_1 = 0.1667 \times 0.8571 = 0.1429 \quad v_2 = 0.1667 \times 0.8571 = 0.1429 \quad (3.21)$$

El cuál tiene los pesos óptimos para A. Los pesos óptimos para A son únicos. Usualmente, los pesos óptimos para unidades ineficientes (DMUs) son únicos. La excepción puede darse cuando la línea de la unidad (DMU) es paralela a uno de los límites de la región P.

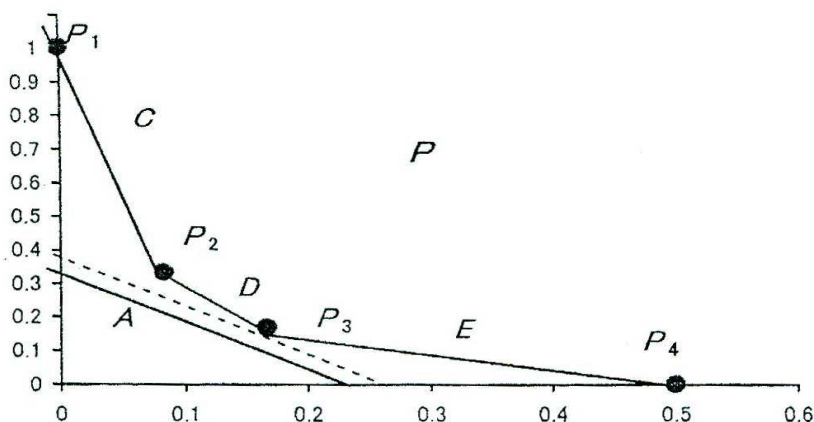


Figura 3.4 El caso de unidad de Toma de Decisiones DMUA

Supongamos ahora que los datos con los que trabajaremos serán semipositivos, es decir, supondremos que algunas (pero no todas) entradas y salidas son positivas. Esto

nos permitirá trabajar con aplicaciones que involucran cero en sus datos en entradas y/o salidas. Introduciremos también el conjunto factible de producción de estos datos de entrada y salida (X, Y) . Construiremos también el problema dual del modelo CCR para mostrar que el problema dual evalúa la eficiencia con base en un problema de programación lineal aplicado al conjunto de datos (X, Y) ; redefiniendo así el modelo CCR, tomando en cuenta todos los excesos de entradas y el déficit en las salidas.

Las observaciones (datos) que forman el conjunto factible de producción son muy importantes en el sentido que hacen posible evaluar el modelo CCR desde un amplio punto de vista y extender éste modelo a otros modelos que posteriormente introduciremos.

Una versión del modelo CCR se propone minimizar entradas mientras se satisfagan al menos los niveles de salida deseados. Este modelo es llamado "Modelo orientado a Entradas". Existe otro tipo de modelo que intenta maximizar las salidas sin requerir más de cualquiera de las entradas dispuestas. Este es llamado "Modelo orientado a Salidas". Esto se mostrará también posteriormente junto con una combinación de los dos modelos.

Hemos trabajado hasta ahora con pares de vectores de entradas y salidas positivas (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, n$) para n Unidades de Toma de Decisión (DMUs). Ahora se asumirá también que los datos son no negativos, pero al menos un componente de cada vector de entrada y salida es positivo. A esto nos referimos con el término "semipositivo", al tener la siguiente caracterización matemática dada por $x_j \geq 0$, $x_j \neq 0$ y $y_j \geq 0$, $y_j \neq 0$ para algún $j = 1, \dots, n$.

Por lo tanto, trabajaremos bajo el supuesto de que cada DMU tendrá al menos un valor positivo tanto en entradas como salidas. Llamaremos a tal par de entradas semipositivas $x \in R^m$, y salidas $y \in R^s$ una actividad, y la expresaremos por la notación (x, y) . Los componentes de cada vector pueden considerarse como un punto semipositivo en el cuadrante del espacio vectorial lineal $(m + s)$; en el cuál m y s especifican el número de dimensiones requeridas para expresar entradas y salidas, respectivamente. El conjunto de actividades factibles se llama conjunto factible de producción y se denota por P . Mostramos enseguida las propiedades del conjunto factible de producción:

Propiedades del Conjunto Factible de Producción P

- 1.- Las actividades (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, n$) pertenecen a P .
- 2.- Si una actividad (x, y) pertenece a P , entonces la actividad (tx, ty) pertenece a P , para cualquier escalar positivo t . Esta propiedad es llamada "de constantes regresos a escala".

3.- Para una actividad (x, y) en P , cualquier actividad semipositiva (\bar{x}, \bar{y}) con $\bar{x} \geq x$ y $\bar{y} \leq y$ es incluida en P . Esto es, cualquier actividad con entrada no menor que x en cualquier componente y con salida no mayor que y en cualquier componente es factible.

4.- Cualquier combinación lineal semipositiva de actividades en P , pertenece a P .

Colocando los conjuntos de datos en matrices $X = (x_j)$ y $Y = (y_j)$, podemos definir el conjunto factible de producción P , satisfaciendo las propiedades 1 a 4 como:

$$P = \{(x, y) / x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}, \quad (3.22)$$

Donde λ es un vector semipositivo en R^n .

En otras palabras, se tendrá una actividad λ que permitirá obtener nuevos valores en las entradas, que sean menores ó iguales a las que originalmente se tenían; y también se tendrán nuevos valores para las salidas, que serán mayores ó iguales que los que se tenían en un principio. Estos nuevos valores en las entradas y las salidas también pertenecerán al conjunto factible de producción P .

La figura 3.5 muestra un Conjunto factible de producción en dos dimensiones para el modelo CCR, para el caso de una entrada y una salida, así que $m=1$ y $s=1$, respectivamente. En éste ejemplo el conjunto factible es determinado por B y el rayo desde el origen y a través de B, es la frontera eficiente.

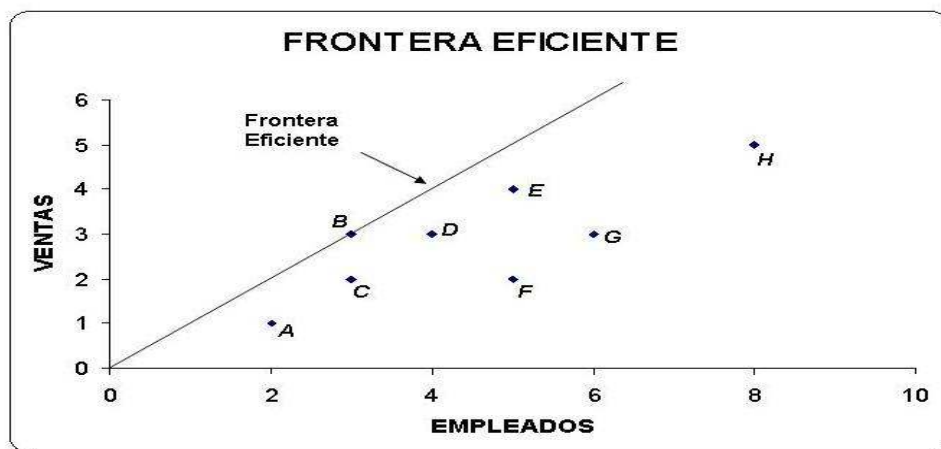


Figura 3.5 Conjunto Factible de Producción

Con base en la matriz (X, Y) , hemos formulado ya anteriormente al modelo CCR como un problema de programación lineal (LPO), con el vector renglón v para los multiplicadores de las entradas, y el vector renglón u para los multiplicadores en las salidas. Estos multiplicadores son tratados como variables en el siguiente problema de programación lineal (en forma de multiplicador):

$$(LPo) \quad \max_{v,u} \quad uy_o \quad (3.23)$$

$$\text{Sujeto a} \quad vx_o = 1 \quad (3.24)$$

$$-vX + uY \leq 0 \quad (3.25)$$

$$v \geq 0, \quad u \geq 0 \quad (3.26)$$

Es el mismo planteamiento que el mostrado en (3.7)-(3.11), pero ahora expresado en notación vector-matriz.

El problema dual del problema de programación lineal (LPo) está expresado con una variable real θ y la transpuesta T , de un vector no-negativo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ de variables como sigue:

$$(DLPo) \quad \min_{\theta, \lambda} \quad \theta \quad (3.27)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \theta x_o - X\lambda \geq 0 \quad (3.28)$$

$$Y\lambda \geq y_o \quad (3.29)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.30)$$

Haremos aquí un pequeño alto para identificar cómo se ha hecho ésta transformación del modelo Primal al modelo Dual, relacionándola con la notación usual de programación lineal (PL).

Comenzamos con el siguiente planteamiento:

$$\text{Min } a^T x$$

$$\text{s.a. } Ax \geq b \\ x \geq 0$$

Su correspondiente problema Dual es:

$$\text{Max } b^T y$$

$$\text{s.a. } A^T y \leq a \\ y \geq 0$$

Tomando $b^T = (y_o^T, 0)$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A^T = \begin{bmatrix} 0 & x_o^T \\ 0 & -x_o^T \\ Y^T & -X^T \end{bmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix}$,

Y teniendo en cuenta que $uy_o = y_o^T \cdot u^T$,

Entonces (LPo) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Max } (y_o^T, 0) \cdot \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} \\ & \text{s.a. } \begin{bmatrix} 0 & x_o^T \\ 0 & -x_o^T \\ Y^T & -X^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos (usando la teoría de Dualidad) que su Dual (o primal) es:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\theta_1, \theta_2, \lambda} (1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ & \text{s.a. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y \\ x_o & -x_o & -X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_o \\ 0 \end{pmatrix} \\ & (\theta_1, \theta_2, \lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

Y en consecuencia $\text{Min}_{\theta_1, \theta_2, \lambda} (\theta_1 - \theta_2)$

$$\begin{aligned} & \text{s.a. } Y\lambda \geq y_o \\ & x_o(\theta_1 - \theta_2) - X\lambda \geq 0 \\ & (\theta_1, \theta_2, \lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

Y haciendo $\theta = \theta_1 - \theta_2$, se tiene que (θ no tiene restricción de signo: puede ser positivo o negativo).

$$\text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

$$\begin{aligned} & \text{s.a. } Y\lambda \geq y_o \\ & x_o\theta - X\lambda \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

□.

Y es a donde queríamos llegar.

Una vez identificado cada elemento en la transformación del modelo Primal al Dual, se muestran las correspondencias entre el modelo primal (LPo) y el dual (DLPo) en restricciones y variables, en la tabla 3.5.

Restricciones en (LPo). (en Forma de Multiplicadores)	Variable en (DLPo). (Forma Envolvente)	Restricción en (DPLo). (Forma Envolvente)	Variabes en (LPo). (en Forma de Multiplicadores).
$vx_o = 1$	θ	$\theta x_o - X\lambda \geq 0$	$v \geq 0$
$-vX + uY \leq 0$	$\lambda \geq 0$	$Y\lambda \geq y_o$	$u \geq 0$

Tabla 3.5
Correspondencias o equivalencias.

(DLPo) tiene una solución factible $\theta = 1$, $\lambda_o = 1$, $\lambda_j = 0$ ($j \neq o$). Por lo tanto el óptimo θ , denotado por θ^* , no es mayor que 1. Por otra parte, debido a que se asume que los datos son diferentes de cero, la restricción (3.29) obliga a λ a no ser cero debido a que $y_o \geq 0$ y $y_o \neq 0$. Por lo tanto, de (3.28), θ debe ser mayor que cero. Considerando todo esto, tenemos $0 < \theta^* \leq 1$. Ahora observamos la relación entre el conjunto factible de producción P y (DPLo). Las restricciones de (DPLo) requieren que la actividad $(\theta x_o, y_o)$ pertenezca a P , mientras la función objetivo busca el mínimo θ que reduzca el vector de entrada x_o radialmente a θx_o mientras permanezca en P .

En (DLPo), estamos buscando una actividad λ en P ($\lambda \in P$) que garantice por lo menos el nivel de salidas (rendimiento) y_o de DMUo en todos los componentes (3.29); mientras se reduce el vector de entrada x_o proporcionalmente (radialmente) tanto como sea posible [$\theta x_o \geq X\lambda$ de (3.28)]. Puede decirse que $(X\lambda, Y\lambda)$ hace que sea más eficaz $(\theta x_o, y_o)$ cuando $\theta^* < 1$. Con referencia a esta propiedad, definimos los excesos en las entradas: $s^- \in R^m$ y el déficit en las salidas: $s^+ \in R^s$; y los identificamos como vectores de holgura por:

$$s^- = \theta x_o - X\lambda, \quad s^+ = Y\lambda - y_o \quad (3.31)$$

Con $s^- \geq 0$, $s^+ \geq 0$ para cualquier solución factible (θ, λ) de (DPLo). Para descubrir los posibles excesos en las entradas (insumos, recursos), y déficit en las salidas (rendimientos, utilidades, bienes), resolvemos las siguientes dos fases del problema de programación lineal:

Fase I

Resolvemos en (DLPo), y su valor óptimo θ , lo denotaremos como θ^* . Por el teorema de dualidad de programación lineal, θ^* es igual al valor óptimo de (LPo) y además es el valor de eficiencia del modelo CCR también llamado “Eficiencia de Farrell” (si $\theta^* = 1$ es eficiente). Este valor de θ^* es incorporado en la siguiente fase.

Fase II

Sabiendo lo que representa θ^* , lo incorporamos a la fase II y resolvemos el siguiente programa lineal, usando (λ, s^-, s^+) como variables:

$$\max_{\lambda, s^-, s^+} \quad w = es^- + es^+ \quad (3.32)$$

$$\text{Sujeto a} \quad s^- = \theta^* x_o - X\lambda \quad (3.33)$$

$$s^+ = Y\lambda - y_o \quad (3.34)$$

$$\lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0$$

Donde $e = (1, \dots, 1)$ (un vector de unos), así que $es^- = \sum_{i=1}^m s_i^-$ y $es^+ = \sum_{r=1}^s s_r^+$.

El objetivo de la fase II es encontrar el máximo de la suma de los excesos en las entradas y las deficiencias en las salidas, mientras se mantiene el nivel de eficiencia: $\theta = \theta^*$.

Podríamos reemplazar el término en la función objetivo (3.32) con cualquier suma sujeta a un peso de excesos en las entradas y deficiencias en las salidas tal como:

$$w = w_x s^- + w_y s^+, \quad (3.35)$$

Donde los pesos w_x y w_y son vectores renglón positivos. La función objetivo modificada puede resultar en una solución óptima diferente para la fase II. Sin embargo, podemos tener el óptimo $w^* > 0$ en (3.32) sí y solo sí se obtiene además un valor no nulo cuando la función objetivo en (3.32) es reemplazada con (3.35). Así, la función objetivo en (3.32) identificará algunas holguras no nulas con ineficiencia sí y sólo si algunas holguras no nulas (posiblemente diferentes) son encontradas con ineficiencia en (3.35).

Definición 3.2 (Solución holgura - Máxima, Actividad de holgura cero)

Una solución óptima $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ de la fase II, es llamada solución de holgura máxima. Si ésta solución satisface $s^{-*} = 0$ y $s^{+*} = 0$, entonces es llamada de cero- holgura \square .

Definición 3.3 (Eficiencia- CCR, Eficiencia Radial, Eficiencia Técnica)

Si una solución óptima $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ de los dos problemas de programación lineal especificados anteriormente, satisface $\theta^* = 1$ y tiene cero-holgura ($s^{-*} = 0, s^{+*} = 0$) entonces la unidad de toma de decisiones (DMUo) es llamada CCR-Eficiente (eficiente bajo el modelo CCR). De otra forma, la DMUo es llamada CCR-Ineficiente, debido a que:

- (i) $\theta^* = 1$
- (ii) todas las holguras son cero

Ambas deben ser satisfechas para alcanzar la eficiencia completamente \square .

Nos referimos a la primera de éstas dos condiciones como “eficiencia radial”. También es identificada como “eficiencia técnica” debido a que un valor de $\theta^* < 1$ significa que todas las entradas pueden simultáneamente reducirse sin alterar las proporciones, en las cuales ellas son utilizadas. Debido a que $(1 - \theta^*)$ es la máxima reducción proporcional permitida por el conjunto factible de producción, cualquier reducción adicional asociada con holguras no nulas, necesariamente cambiará las proporciones de las entradas. Por lo tanto, las ineficiencias asociadas con cualquier holgura no nula identificada en el procedimiento de las dos fases es referida como “ineficiencia mixta”. Se usan otros nombres también para caracterizar estas dos fuentes de ineficiencia. Por ejemplo el término “eficiencia débil” se usa algunas veces cuando la atención sólo se concentra en (i) sin importar los valores de s^{-*} y s^{+*} . En la definición 3.3 se consideran ambas condiciones (i) e (ii) y describen lo que es además llamado “Eficiencia de Pareto Koopmans” o “Eficiencia Fuerte”, a las cuáles nos referiremos enseguida.

Definición 3.4 de Eficiencia de Pareto-Koopmans.-

Una unidad de toma de decisiones (DMU) es completamente eficiente sí y sólo sí no es posible mejorar alguna entrada o salida sin afectar ó empeorar alguna otra entrada o salida \square .

Nos referimos también a la definición 3.3 como “Eficiencia-CCR”, cuando éste procedimiento sea utilizado en datos empíricos y se cumpla con ambas: (i) e (ii).

Ya hemos dado una definición de “Eficiencia-CCR” anteriormente (Def. 3.1, Secc. III.1). Para el conjunto de datos (X, Y) bajo la suposición de semipositividad, podemos además definir la “Eficiencia-CCR” (para el modelo CCR), por la definición 3.1 (Secc. III.1). Ahora probaremos que la definición de “Eficiencia-CCR” vista arriba, tiene la misma caracterización de eficiencia que la obtenida de la definición 3.1 (Secc. III.1). Esto se formalizará por medio del siguiente teorema:

Teorema 3.1.-

La “Eficiencia-CCR” de la Definición 3.3, es equivalente a aquella dada por la definición 3.1 (Secc. III.1) □.

Prueba

Primero, debemos notar que los vectores v y u de un problema de programación Lineal (LPo) son multiplicadores duales correspondientes a las restricciones (3.28) y (3.29) de un problema Dual de programación Lineal (DLPo), respectivamente. (Ver la tabla 3.5). Ahora, las siguientes “Condiciones de Complementariedad” se mantienen entre algunas soluciones óptimas (v^*, u^*) de un problema de Programación Lineal (LPo) y $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ de un problema Dual de Programación Lineal (DLPo).

$$v^* s^{-*} = 0 \quad \text{y} \quad u^* s^{+*} = 0 \quad (3.36)$$

Conocida como la “Condición de Holguras Complementarias”, esto significa que si algún componente de v^* ó u^* es positivo, entonces el correspondiente componente de s^{-*} ó s^{+*} debe ser cero, y a la inversa; con la posibilidad también permitida, de que ambos componentes puedan ser cero simultáneamente.

Ahora demostramos que la Definición 3.3 implica a la Definición 3.1 (Secc. III.1):

- (i) Si $\theta^* < 1$, entonces la Unidad de Toma de Decisiones DMUo es ineficiente según el modelo CCR, por la definición 3.1 (Secc. III.1), ya que un problema de programación Lineal (LPo) y uno Dual de programación Lineal (DLPo) tienen el mismo valor objetivo óptimo θ^* .
- (ii) Si $\theta^* = 1$ y no tiene holgura cero ($s^{-*} \neq 0$ y/o $s^{+*} \neq 0$), entonces, por la condición de complementariedad anterior, los elementos de v^* ó u^* correspondientes a las holguras positivas deben ser cero.

De ésta manera, la Unidad de Toma de Decisiones DMUo es ineficiente según el modelo CCR por la Definición 3.1 (Secc. III.1).

- (iii) Finalmente, si $\theta^* = 1$ y con holgura cero, entonces, por el “Teorema Fuerte de Complementariedad”, un problema de programación Lineal (LPo) tiene asegurada una solución óptima positiva (v^*, u^*) y por lo tanto la unidad de toma de decisiones DMUo es eficiente según el modelo CCR, por la definición 3.1 (Secc. III.1).

Lo inverso es además verdadero por la relación de Complementariedad y el Teorema de Complementariedad fuerte entre (v^*, u^*) y (s^{-*}, s^{+*}) .

Hablaremos ahora del conjunto referencia y la mejora en la eficiencia. Ya hemos estado mencionando en capítulos anteriores de manera intuitiva, el significado de Conjunto Referencia.

Definición 3.5 de Conjunto Referencia.-

Para una DMUo ineficiente, definimos su conjunto referencia E_o , con base en la solución de holgura máxima, como la obtenida en las fases I y II –ver (3.32)- por

$$E_o = \{j / \lambda_j^* > 0\} \quad (j \in \{1, \dots, n\}). \quad (3.37)$$

Una solución óptima puede expresarse como

$$\theta^* x_o = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^* + s^{-*} \quad (3.38)$$

$$y_o = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^* - s^{+*},$$

Donde $j \in E_o$ significa que el índice j está incluido en el conjunto E_o . Esto puede ser interpretado como sigue,

$$x_o \geq \theta^* x_o - s^{-*} = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^*$$

Lo cuál significa:

$$\begin{aligned} x_o \geq & \text{ineficiencia técnica – ineficiencia mixta,} \\ & = \text{a una combinación positiva de valores de entrada} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Además

$$y_o \leq y_o + s^{+*} = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^*$$

Significa:

$$y_o \leq \text{salidas} + \text{déficit}$$

= una combinación positiva de valores de salida. (3.40)

Estas relaciones sugieren que la eficiencia de (x_o, y_o) para una Unidad de Toma de Decisiones DMUo puede mejorarse si los valores de entrada son reducidos radialmente por la proporción θ^* y el exceso de entrada registrado en s^{-*} (variable de exceso), es eliminado. Similarmente la eficiencia puede alcanzarse si los valores de salida se aumentan por medio del déficit en las salidas registrado en s^{+*} (variable de holgura). Así, tenemos un método para mejorar una DMU ineficiente, acorde con la Definición 3.3.

La mejora en las entradas Δx_o y la mejora en las salidas Δy_o puede calcularse a partir de:

$$\Delta x_o = x_o - (\theta^* x_o - s^{-*}) = (1 - \theta^*)x_o + s^{-*} \quad (3.41)$$

$$\Delta y_o = s^{+*}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, tenemos una fórmula que nos ayudará a mejorar las entradas y las salidas, la cuál se llama la "Proyección CCR":

$$\hat{x}_o = x_o - \Delta x_o = \theta^* x_o - s^{-*} \leq x_o \quad (3.43)$$

$$\hat{y}_o = y_o + \Delta y_o = y_o + s^{+*} \geq y_o \quad (3.44)$$

Haremos algunos comentarios sobre la Proyección CCR:

En (3.43) estamos reduciendo las entradas radialmente (con la multiplicación de θ^* por las entradas), y además estamos eliminando el sobrante ó desperdicio registrado en s^{-*} . Esto significa que la entrada mejorada \hat{x}_o usa menos ó igual cantidad de las entradas x_o .

En (3.44), la salida mejorada \hat{y}_o produce más ó igual cantidad de las salidas de y_o y además estamos aumentando el déficit que pudiera existir en alguna salida. Este déficit se registra en s^{+*} .

En la siguiente sección veremos que la actividad mejorada (\hat{x}_o, \hat{y}_o) proyecta a una DMUo al conjunto referencia E_o y cualquier combinación no negativa de algunas DMUs en E_o , es eficiente. Esto lo mostraremos con los teoremas de la siguiente sección.

III.3 Teoremas de Eficiencia del Modelo CCR

Teorema 3.3.-

la actividad mejorada (\hat{x}_o, \hat{y}_o) definida por (3.43) y (3.44), representa la eficiencia del modelo CCR.

Prueba

La eficiencia de (\hat{x}_o, \hat{y}_o) es evaluada resolviendo el siguiente problema de programación lineal (LP):

$$(DLPe) \quad \min_{\theta, \lambda, s^-, s^+} \theta \quad (3.45)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \theta \hat{x}_o - X\lambda - s^- = 0 \quad (3.46)$$

$$Y\lambda - s^+ = \hat{y}_o \quad (3.47)$$

$$\lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0 \quad (3.48)$$

Sea $(\hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+)$ una solución óptima para (DPLe). Insertando los valores de \hat{x}_o y \hat{y}_o de acuerdo a (3.43) y (3.44) en las restricciones, tenemos:

$$\hat{\theta} \hat{\theta}^* x_o = X\hat{\lambda} + \hat{s}^- + \hat{\theta} s^{-*}$$

$$y_o = Y\hat{\lambda} - \hat{s}^+ - s^{+*}$$

Podemos además escribir ésta solución como

$$\tilde{\theta} x_o = X\hat{\lambda} + \tilde{s}^-$$

$$y_o = Y\hat{\lambda} - \tilde{s}^+$$

Donde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} \hat{\theta}^*$ y $\tilde{s}^- = \hat{s}^- + \hat{\theta} s^{-*} \geq 0$, $\tilde{s}^+ = \hat{s}^+ + s^{+*} \geq 0$. Sin embargo, θ^* es parte de una solución óptima, así que debemos tener $\tilde{\theta} = \hat{\theta} \hat{\theta}^* = \theta^*$ así, $\hat{\theta} = 1$. Adicionalmente, con $\hat{\theta} = 1$ tenemos:

$$e\tilde{s}^- + e\tilde{s}^+ = (e\hat{s}^- + es^{-*}) + (e\hat{s}^+ + es^{+*}) \leq es^{-*} + es^{+*}$$

Puesto que $es^{-*} + es^{+*}$ es máximo. De aquí sigue lo que debemos tener: $e\tilde{s}^- + e\tilde{s}^+ = 0$ lo cuál implica que todos los componentes de \hat{s}^- y \hat{s}^+ son cero. Por lo tanto las condiciones (i) y (ii) de la definición 3.3 son ambas satisfechas y la eficiencia en el modelo CCR se ha alcanzado.

Corolario 3.1 (corolario del teorema 3.3)

El punto con coordenadas \hat{x}_o, \hat{y}_o definido por (3.43) y (3.44)

$$\hat{x}_o = \theta^* x_o - s^{-*} = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^* \quad (3.49)$$

$$\hat{y}_o = y_o + s^{+*} = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^* \quad (3.50)$$

Es el punto en la frontera de eficiencia usado para evaluar el desempeño de la Unidad de Toma de Decisiones DMUo, y es muy importante para hacer una unidad ineficiente a eficiente.

En otras palabras, las proyecciones del modelo CCR identifican el punto como una combinación positiva de otras DMUs con $x_o \geq \hat{x}_o$ y $\hat{y}_o \geq y_o$ a menos que $\theta^* = 1$ y todas las holguras sean cero, en cuyo caso $x_o = \hat{x}_o$ y $\hat{y}_o = y_o$, así que la operación en (3.49) aplicada en las observaciones de una DMUo, la convierte en una nueva DMU posicionada sobre la frontera eficiente. A la inversa, el punto asociado con la DMU generada evalúa el desempeño de una DMUo exhibiendo los excesos en las entradas $x_o - \hat{x}_o$ y deficiencias (déficit) en las salidas $\hat{y}_o - y_o$.

Observamos que el mejoramiento por medio de la fórmula (3.43) y (3.44) debe lograrse usando la solución de holgura-máxima. Si lo hacemos basándonos en otra solución diferente de ésta, la actividad mejorada (\hat{x}_o, \hat{y}_o) no es necesariamente eficiente bajo el modelo CCR. Mostraremos esto en el siguiente ejemplo con 4 Unidades de Toma de Decisión DMUs: A, B, C y D, cada una con 3 entradas x_1, x_2, x_3 y produciendo todas una salida en cantidad $y = 1$.

	A	B	C	D
x_1	2	2	2	1

x_2	1	1.5	2	1
x_3	1	1	1	2
y	1	1	1	1

Aquí la situación para la unidad de toma de decisiones DMU C es obvia. Podemos observar, por ejemplo, que la DMU C tiene dos posibles holguras en x_2 , 1 contra A y 0.5 contra B. Si elegimos B como el conjunto referencia para C, entonces la actividad mejorada coincide con B, la cuál aún tiene una holgura de 0.5 en x_2 contra A. Por lo tanto la actividad mejorada no es eficiente de acuerdo al modelo CCR. Sin embargo, si mejoramos C usando la solución holgura – máxima, entonces movemos a la DMU A directamente hacia la eficiencia, de acuerdo al modelo CCR.

Lemma 3.1

Para la actividad mejorada (\bar{x}_o, \bar{y}_o) , existe una solución óptima (\hat{v}_o, \hat{u}_o) para el problema (LPe), el cuál es dual a (DLPe), tal que

$$\hat{v}_o > 0 \quad y \quad \hat{u}_o > 0$$

$$\hat{v}_o x_j = \hat{u}_o y_j \quad (j \in E_o) \quad (3.51)$$

$$\hat{v}_o X \geq \hat{u}_o Y \quad (3.52)$$

Prueba

Puesto que (\bar{x}_o, \bar{y}_o) tiene cero-holgura, el teorema fuerte de complementariedad nos dice que existe una solución óptima positiva (\hat{v}_o, \hat{u}_o) para (LPe). La igualdad (3.51) es la condición de complementariedad entre las soluciones óptimas del primal-dual. La desigualdad (3.52) es una parte de las restricciones de (LPe) \square .

Teorema 3.4 .-

Las unidades de Toma de decisión DMUs en E_o , como se han definido en (3.37), son eficientes según el modelo CCR.

Prueba

Como se describió en el Lemma 3.1, existe un multiplicador positivo (\hat{v}_o, \hat{u}_o) . Esos vectores además satisfacen

$$\hat{v}_o x_j = \hat{u}_o y_j \quad (j \in E_o) \quad (3.53)$$

$$\hat{v}_o X \geq \hat{u}_o Y \quad (3.54)$$

Para cada $(j \in E_o)$, podemos ajustar (\hat{v}_o, \hat{u}_o) usando un multiplicador escalar para que la relación $\hat{v}_o x_j = \hat{u}_o y_j = 1$ se mantenga, mientras (3.54) sea satisfecha. Así, la actividad (x_j, y_j) es eficiente según el modelo CCR por la definición (3.1).

Teorema 3.5.-

Cualquier combinación semipositiva de DMUs en E_o , es eficiente según el modelo CCR.

Prueba

Sea la actividad combinada:

$$x_c = \sum_{j \in E_o} c_j x_j \quad y \quad y_c = \sum_{j \in E_o} c_j y_j \quad (3.55)$$

$$\text{Con } c_j \geq 0 \quad (j \in E_o)$$

El multiplicador (\hat{v}_o, \hat{u}_o) en el Lemma 3.1 satisface

$$\hat{v}_o x_c = \hat{u}_o y_c \quad (3.56)$$

$$\hat{v}_o X \geq \hat{u}_o Y \quad (3.57)$$

$$\hat{v}_o > 0, \quad \hat{u}_o > 0 \quad (3.58)$$

Así, (x_c, y_c) es eficiente según el modelo CCR, por la definición (3.1).

III.4 Procedimientos de Solución del modelo CCR y Ejemplo

Veremos en detalle los procedimientos para resolver programas lineales para el modelo CCR. Son los aspectos computacionales de la teoría DEA.

Como ya se ha descrito en la sección III.2, el esquema computacional del modelo CCR para una DMUo se representa en los siguientes dos estados de un problema lineal (LP).

(DLPo)

$$\text{Fase I función objetivo: } \min \quad \theta \quad (3.59)$$

$$\text{Fase II función objetivo: } \min -es^- - es^+ \quad (3.60)$$

$$\text{Sujeto a } \theta x_o = X\lambda + s^- \quad (3.61)$$

$$y_o = Y\lambda - s^+ \quad (3.62)$$

$$\theta \geq 0, \lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0, \quad (3.63)$$

Donde en la fase II se reemplaza la variable θ con un valor determinado de $\min \theta = \theta^*$. Usando la notación usual de programación lineal (PL), podemos reescribir al modelo dual de programación lineal (DLPo) como sigue:

(DLP'_o)

$$\text{Fase I función objetivo } \min z_1 = cx \quad (3.64)$$

$$\text{Fase II función objetivo } \min z_2 = dx \quad (3.65)$$

$$\text{Sujeto a } Ax = b \quad (3.66)$$

$$x \geq 0, \quad (3.67)$$

Donde c y d son vectores renglón.

Las correspondencias entre (DLPo) y (DLP'_o) son:

$$x = (\theta, \lambda^T, s^{-T}, s^{+T})^T \quad (3.68)$$

$$c = (1, 0, 0, 0) \quad (3.69)$$

$$d = (0, 0, -e, -e) \quad (3.70)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_o & -X & -I & O \\ 0 & Y & O & -I \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ y_o \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

Donde e es el vector con todos los elementos unitarios $e = (1, \dots, 1)$.

Fase I

Primero, resolvemos el problema de programación lineal (LP) con la función objetivo señalada en la fase I. Dejando una base óptima B , usamos ésta matriz B como sigue: Primero calculamos varios valores, como se observa abajo, donde R es la parte no básica de la matriz A y el exponente B (ó R) muestra las columnas de A correspondientes a B (ó R).

$$\text{Solución Básica} \quad x^B = \bar{b} = B^{-1}b \quad (3.73)$$

$$\text{Multiplicador simplex} \quad \pi = c^B B^{-1} \quad (3.74)$$

$$\text{Fase I criterio simplex} \quad p^R = \pi R - c^R \quad (3.75)$$

$$\text{Fase II criterio simplex} \quad q^R = \pi R - d^R \quad (3.76)$$

Donde B^{-1} es la inversa de B, π es un vector de “multiplicadores” derivado de los datos (como en (3.74)), y p^R y q^R son referidos como “costos reducidos” (precios sombra).

De la optimalidad de la base B, tenemos:

$$\bar{b} \geq 0, \quad (3.77)$$

Debido a que las condiciones de no negatividad son satisfechas por x^B en (3.73) y

$$p^R \leq 0, \quad (3.78)$$

Como se requiere para la optimalidad en (3.75) y, por las columnas de la base B, tenemos:

$$p^B = \pi B - c^B = 0$$

Fase II

Excluimos las columnas con $p_j < 0$ en la tabla óptima simplex al final de la fase I para futuras consideraciones. El resto es llamado el problema restringido o tabla restringida y se trabaja con ella en los cálculos del siguiente paso.

En la fase II, resolvemos el problema de programación lineal con la segunda función objetivo.

Interrumpimos las iteraciones hasta que el criterio simplex de la fase II satisfaga $q^R \leq 0$. Así, la solución básica obtenida es una solución de holgura máxima. Este es el procedimiento para encontrar θ^* , y una solución de holgura máxima (s^{-*}, s^{+*}) para DMU_o. Vemos entonces que el problema de programación lineal (LP_o) es dual a (DPL_o).

Las caracterizaciones dadas en (3.73)-(3.76) adoptan formas de la terminología de programación lineal en la cuál los componentes de π son referidos como “multiplicadores simplex”, debido a que están asociados con el uso del método simplex, con el cuál se generan tales multiplicadores en el curso de la solución de problemas de programación lineal tales como (DLP_o). El método “simplex” y “dual simplex” se usan en la teoría DEA (Data Envelopment Analysis). Al problema dual de programación lineal le llamamos la “**Forma Envolvente**”, éste es el origen del nombre “Data Envelopment Analysis” (análisis del envolvimiento de datos).

Haciendo referencia a la Fig. 3.5.1 (en la pag. 84), observamos primeramente que todos los datos están al interior de la frontera que se extiende desde F hasta R. Además, por lo menos una DMU está tocando la frontera, por lo tanto, la manera de “envolver” todos los datos por la frontera es de gran importancia, debido a que se usa ésta frontera para analizar y evaluar el desempeño de las unidades de toma de decisión (DMUs) asociadas con otras DMUs como aquellas representadas en la figura 3.5.1.

En una forma más breve, decimos que DEA se usa para evaluar el desempeño de cada DMU con relación a la frontera que “envuelve” a todas las DMUs. Los multiplicadores π en el simplex al final de la fase I, se asocian con una solución óptima de su problema dual, como se ha visto en (3.23)-(3.26), de hecho, π es un vector $(m+s)$ en el cuál los primeros m componentes asignan pesos óptimos v^* a las entradas, y los restantes s componentes asignan pesos óptimos u^* a las salidas. Observando el problema dual de (DLP_o) en (3.59)-(3.63), puede mostrarse que v^* y u^* satisfacen (3.24)-(3.26). El símbolo I, para la matriz identidad de A en (3.71), se asocia con las holguras (entradas y salidas), y aplicando el criterio simplex a éstas columnas representadas por los “vectores de precios” p^{s^-} y p^{s^+} :

Tenemos que estos vectores se relacionan con v^* y u^* en la siguiente forma:

$$v^* = -p^{s^-} \quad (\geq 0) \quad (3.79)$$

$$u^* = -p^{s^+} \quad (\geq 0) \quad (3.80)$$

No es aconsejable resolver el (PLo) directamente. Las razones son:

- 1.- El esfuerzo computacional de LP crece en proporción al número de restricciones. Usualmente en DEA, n , el número de DMUs es considerablemente mayor que $(m+s)$, el número de entradas y salidas y por lo tanto toma más tiempo resolver un (LPo) que tiene n restricciones que resolver un (DLPo) que tiene $(m+s)$ restricciones. En suma, puesto que el tamaño de memoria necesitado para mantener las bases (o sus inversas) es el cuadrado del número de restricciones, (DLPo) es más adecuado para el propósito de ahorrar memoria.
- 2.- No podemos encontrar la solución de holgura máxima conveniente resolviendo (LPo).
- 3.- Las interpretaciones del modelo dual de programación lineal (DLPo) son más precisas debido a que las soluciones son caracterizadas como entradas y salidas que corresponden a los datos originales, mientras los multiplicadores dados por la solución de (LPo) representan evaluaciones de esos valores observados. Esos valores son además importantes, por supuesto, pero son reservados para análisis suplementarios después de haber alcanzado la solución para el (DPLo).

Ejemplo 3.1

Retomaremos el ejemplo 3.2, el cuál se muestra en la tabla 3.6, agregando la actividad G, donde aplicaremos el modelo de programación lineal dual (DLPo).

	DMU	A	B	C	D	E	F	G
Entrada	x_1	4	7	8	4	2	10	3
	x_2	3	3	1	2	4	1	7
Salida	y	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 3.6

1) El modelo de programación lineal dual (DLP_A) para A es:

$$\text{Fase I} \quad \min \theta$$

$$\text{Fase II} \quad \min -s_1^- - s_2^- - s^+$$

Sujeto a

$$4\theta - 4\lambda_A - 7\lambda_B - 8\lambda_C - 4\lambda_D - 2\lambda_E - 10\lambda_F - 3\lambda_G - s_1^- = 0$$

$$3\theta - 3\lambda_A - 3\lambda_B - \lambda_C - 2\lambda_D - 4\lambda_E - \lambda_F - 7\lambda_G - s_2^- = 0$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F + \lambda_G - s^+ = 1$$

Donde las variables son restringidas a valores no negativos en los vectores λ, s^- y s^+ .

La solución óptima de (DLP_A) es:

$$\theta = 0.8571$$

$$\lambda_D^* = 0.7143 \quad \lambda_E^* = 0.2857, \text{ otras } \lambda_j^* = 0$$

$$s_1^{-*} = s_2^{-*} = s^{+*} = 0 \quad (\text{holguras})$$

Dado que $\lambda_D^* > 0$ y $\lambda_E^* > 0$, el conjunto referencia para A es $E_A = \{D, E\}$.

Y $\lambda_D^* = 0.7143$, $\lambda_E^* = 0.2857$ muestran las proporciones con las que contribuyen D y E al punto usado para evaluar a A. Por lo tanto A es técnicamente ineficiente. Ineficiencias mixtas no se presentan debido a que todas las holguras son cero. Así, la eliminación de todas las ineficiencias se logra reduciendo todas las entradas en 0.1429 $[(1-\theta) = (1-0.8571) = 0.1429]$ o aproximadamente, 15% de sus valores observados.

En suma, basado en éste conjunto referencia y λ^* , podemos expresar los valores de entrada y salida necesarios para llevar a A a un status eficiente como sigue:

$$0.8571 \times (\text{Entrada de A}) = 0.7143 \times (\text{Entrada de D}) + 0.2857 \times (\text{Entrada de E})$$

$$\theta^* \times x_{1A} = \lambda_D^* \times x_{1D} + \lambda_E^* \times x_{1E}$$

$$(\text{Salida de A}) = 0.7143 \times (\text{Salida de D}) + 0.2857 \times (\text{Salida de E}).$$

$$y_A = \lambda_D^* \times y_D + \lambda_E^* \times y_E$$

Partiendo de los coeficientes del lado derecho, A tiene más similitud con D que con E. La DMU A puede hacerse eficiente ya sea usando estos coeficientes, $\lambda_D^* = 0.7143$, $\lambda_E^* = 0.2857$ o reduciendo ambas entradas por la reducción del valor de entrada radialmente en la proporción 0.8571 (contracción radial). Esta se logra de la siguiente manera:

Proyección para A:

$$\text{Teniendo en cuenta que } (1 - \theta) = (1 - 0.8571) = 0.1429 = 14.29\%$$

Entonces tenemos las actividades mejoradas:

$$\hat{x}_1 \leftarrow \theta^* x_1 = 0.8571 \times 4 = 3.4286 \quad (14.29\% \text{ de reducción})$$

$$\hat{x}_2 \leftarrow \theta^* x_2 = 0.8571 \times 3 = 2.5714 \quad (14.29\% \text{ de reducción})$$

$$\hat{y} \leftarrow y = 1 \quad (\text{sin cambio})$$

La solución óptima de (LP_A) para los multiplicadores es: $v_1^* = 0.1429$, $v_2^* = 0.1429$, $u^* = 0.8571$ (ver ejemplo 3.2-(1), sección III.2). Esta solución satisface las restricciones (3.24)-(3.26) y maximiza la función objetivo en (3.23), por ejemplo, $u^* y = 0.8571 \times 1 = 0.8571 = \theta^*$ en el valor objetivo óptimo de (DPL_A). Los pesos óptimos para las entradas y salidas son:

$$v_1^* x_1 = 0.1429 \times 4 = 0.5714$$

$$v_2^* x_2 = 0.1429 \times 3 = 0.4286$$

$$u^* y = 0.8571 \times 1 = 0.8571$$

La suma de los primeros dos términos es 1, el cuál corresponde a la restricción (3.24).

$$v_1^* x_1 + v_2^* x_2 = 0.1429 \times 4 + 0.1429 \times 3 = 1$$

El último término es el valor óptimo de la función objetivo en éste caso.

2) Para la DMU B, la solución óptima es:

$$\begin{aligned}\theta^* &= 0.6316 \\ \lambda_A^* &= \lambda_B^* = 0, \lambda_C^* = 0.1053, \lambda_D^* = 0.8947, \lambda_E^* = \lambda_F^* = \lambda_G^* = 0 \\ s_1^{-*} &= s_2^{-*} = s^{+*} = 0 \\ v_1^* &= 0.0526, v_2^* = 0.2105, u^* = 0.6316.\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda_C^* > 0, \lambda_D^* > 0$, el conjunto referencia para B es $E_B = \{C, D\}$.

B puede expresarse como:

$$0.6316 \times (\text{Entrada de B}) = 0.1053 \times (\text{Entrada de C}) + 0.8947 \times (\text{Entrada de D})$$

$$\theta^* \times x_{1B} = \lambda_C^* \times x_{1C} + \lambda_D^* \times x_{1D}$$

$$(\text{Salida de B}) = 0.1053 \times (\text{salida de C}) + 0.8947 \times (\text{salida de D})$$

$$y_B = \lambda_C^* \times y_C + \lambda_D^* \times y_D$$

Esto es, puede expresarse en forma de proporción o como una combinación no negativa de $\lambda_j^* > 0$. Usando la expresión en forma de proporción, la proyección en el modelo CCR para B es:

Proyección para B:

$$\text{Teniendo en cuenta que } (1 - \theta) = (1 - 0.6316) = 0.3684 = 36.84\%$$

Entonces tenemos las actividades mejoradas:

$$\hat{x}_1 \leftarrow \theta^* x_1 = 0.6316 \times 7 = 4.4211 \quad (36.84\% \text{ de reducción})$$

$$\hat{x}_2 \leftarrow \theta^* x_2 = 0.6316 \times 3 = 1.8974 \quad (36.84\% \text{ de reducción})$$

$$\hat{y} \leftarrow y = 1 \quad (\text{sin cambio})$$

3) C, D, y E

Estas tres DMUs se han encontrado eficientes (ver ejemplo 3.2-(1), sección III.2).

4) La solución óptima del problema de programación lineal (LP) para F es:

$$\begin{aligned}\theta^* &= 1 \\ \lambda_A^* &= \lambda_B^* = 0, \quad \lambda_C^* = 1, \quad \lambda_D^* = \lambda_E^* = \lambda_F^* = \lambda_G^* = 0 \\ s_1^{-*} &= 2, \quad s_2^{-*} = s^{+*} = 0\end{aligned}$$

$$v_1^* = 0, \quad v_2^* = 1, \quad u^* = 1$$

Donde, de nuevo, el último conjunto de valores se refiere a las soluciones del problema primal (multiplicadores). Para el modelo, tenemos que $\lambda_C^* > 0$, como el único valor positivo de λ . Por lo tanto el conjunto referencia para F es $E_F = \{C\}$.

Considerando el exceso en la entrada 1 ($s_1^{-*} = 2$), F puede expresarse como:

$$\begin{array}{rcl} \text{(Entrada 1 de F)} & = & \text{(Entrada 1 de C)} + 2 & 10 = 8 + 2 \\ \text{(Entrada 2 de F)} & = & \text{(Entrada 2 de C)} & 1 = 1 \\ \text{(Salida de F)} & = & \text{(Salida de C)} & 1 = 1 \end{array}$$

Aunque F es radialmente eficiente, sin embargo es ineficiente según el modelo CCR debido a este exceso (ineficiencia mixta) asociada con $s_1^{-*} = 2$. Por lo tanto el desempeño de F puede mejorarse sustrayendo 2 unidades de la entrada 1 y dejando a $s_1^{-*} = 0$ sin empeorar (o afectar) cualquier otra entrada y salida. Por lo tanto la condición (ii) en la definición (3.3) no está satisfecha hasta que esto sea hecho, así que F no alcanza la eficiencia de Pareto Koopmans en su desempeño. (ver definición 3.4).

5) La solución óptima del problema de programación lineal (LP) para G es:

$$\begin{array}{l} \theta^* = 0.6667 \\ \lambda_A^* = \lambda_B^* = \lambda_C^* = \lambda_D^* = 0, \quad \lambda_E^* = 1, \quad \lambda_F^* = \lambda_G^* = 0 \\ s_1^{-*} = 0, \quad s_2^{-*} = 0.6667, \quad s^{+*} = 0 \\ v_1^* = 0.3333, \quad v_2^* = 0, \quad u^* = 0.6667 \end{array}$$

Podemos observar que G no cumple con ninguna de las dos condiciones especificadas en la definición 3.3.

Puesto que $\lambda_E^* > 0$, el conjunto referencia para G es: $E_G = \{E\}$.

Considerando los excesos en la entrada 2 ($s_2^{-*} = 0.6667$), G puede expresarse como:

$$\begin{array}{rcl} 0.6667 \times \text{(Entrada 1 de G)} & = & \text{(Entrada 1 de E)} \\ 0.6667 \times \text{(Entrada 2 de G)} & = & \text{(Entrada 2 de E)} + 0.6667 \\ \text{(Salida de G)} & = & \text{(Salida de E)}. \end{array}$$

Para mejorar a G podemos reducir todos sus valores de entrada multiplicándolos por 0.6667 y posteriormente restar 0.6667 de la entrada 2. Una vez hecho esto, los nuevos valores coincidirán con las coordenadas de E. Geométricamente entonces, la proyección CCR para G es:

$$\hat{x}_1 \leftarrow \theta^* x_1 - s_1^{-*} = 0.6667 \times 3 - 0 = 2 \quad (33.33 \% \text{ de reducción})$$

$$\hat{x}_2 \leftarrow \theta^* x_2 - s_2^{-*} = 0.6667 \times 7 - 0.6667 = 4 \quad (42.86 \% \text{ de reducción})$$

$$\hat{y} \leftarrow y = 1 \quad (\text{sin cambio}),$$

Donde $\hat{x}_1 = 2$, $\hat{x}_2 = 4$, $\hat{y} = 1$ cuyos valores son los mismos que los de E, en la tabla 3.6, mostrados gráficamente en la figura 3.5.1

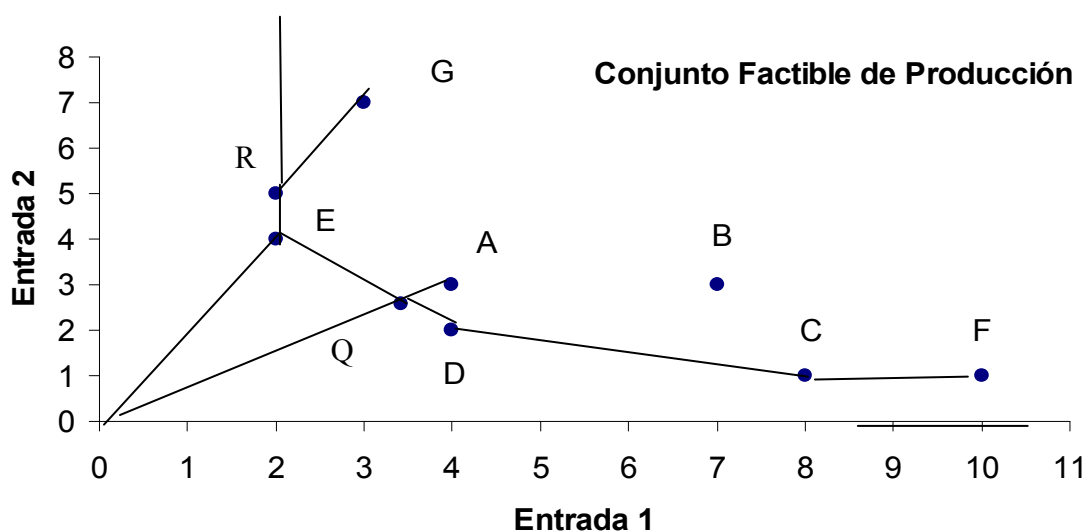


Fig. 3.5.1 –Gráfica del Ejemplo 3.1

Puesto que el valor de salida es 1 para todas las DMUs, podemos comparar sus eficiencias por los valores de entrada. La frontera de eficiencia se conforma por la línea \overline{CDE} y el conjunto factible de producción es la región enmarcada por ésta frontera de eficiencia mas la línea vertical que va desde el punto E hacia arriba, y la línea horizontal que se extiende a la derecha desde C.

Q es el punto de intersección de OA y DE. La actividad Q tiene entrada proporcional a la de A (4,3), y es el mínimo valor de entrada sobre OA en el conjunto factible de producción y:

$$\frac{OQ}{OA} = 0.8571$$

Cuya medida se ha obtenido con la fórmula euclidiana:

$$\frac{d(OQ)}{d(OA)} = \frac{\sqrt{(3.428)^2 + (2.571)^2}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{18.36}}{\sqrt{25}} = 0.8571$$

Y corresponde a la eficiencia radial (ó proporción) de A. Además, tenemos:

$$\text{Entrada 1 de Q} = 0.8571 \times 4 (\text{Entrada 1 de A}) = 3.428 = \hat{x}_1$$

$$\text{Entrada 2 de Q} = 0.8571 \times 3 (\text{Entrada 2 de A}) = 2.571 = \hat{x}_2$$

Sin embargo, Q es el punto que divide D y E en la proporción 0.7143 a 0.2857; por lo tanto sus valores son calculados nuevamente, como:

$$\text{Entrada 1 de Q} = 0.7143 \times 4 (\text{Entrada 1 de D}) + 0.2857 \times 2 (\text{Entrada 1 de E}) = 3.428$$

$$\text{Entrada 2 de Q} = 0.7143 \times 2 (\text{Entrada 2 de D}) + 0.2857 \times 4 (\text{Entrada 2 de E}) = 2.571,$$

Donde $\lambda_D^* = 0.7143$ y $\lambda_E^* = 0.2857$. Comparando éstos resultados vemos que las coordenadas de Q, la DMU usada para evaluar a A, pueden derivarse de alguna de éstas dos formas.

También podemos ver el rol de las holguras no-nulas, mismas que podemos ilustrar con F y G. Observando la figura 3.5.1, es evidente que si reducimos de la entrada 1 de F el valor de la holgura no-nula $s_1^{-*} = 2$, entonces F coincidirá con C, y será eficiente. Con la presencia de ésta holgura no-nula, F no es eficiente de acuerdo a la definición de Pareto-Koopmans de eficiencia (ver definición 3.4), aún cuando su valor radial sea $\theta^* = 1$.

En la tabla 3.7 se muestra un resumen de la información obtenida en los pasos **1)** a **5)** para cada DMU de la tabla 3.6. Sólo C, D y E son completamente eficientes. A y B tiene falla porque $\theta^* < 1$, de su intersección con la frontera obtenemos su ineficiencia radial con cero holguras porque intersectan una porción eficiente de la frontera, radialmente. F tiene el valor de $\theta = 1$ porque está en la frontera. Sin embargo ésta porción de la frontera no es eficiente, como evidentemente lo vemos por medio de su holgura no-nula s_1^- en la tabla 3.7.

Finalmente, la eficiencia de G es calculada por $OR/OG = 0.6667$. Así, G no es radialmente eficiente. Se le ha evaluado a través de R ; sin embargo R tampoco es eficiente. Podemos hacerla eficiente reduciendo su entrada 2, por 0.6667 (eliminando su exceso en ésta entrada) y cambiandola por la de E.

Por lo tanto G falla en ambas condiciones especificadas en la definición 3.3 (sección III.2). Tiene falla en la eficiencia debido a dos causas: $\theta^* < 1$ y sus holguras no-nulas, que tienen relación con su evaluación con respecto a E, un punto en la porción eficiente de la frontera.

DMU	Eficiencia-CCR	Conjunto Referencia	Excesos s_1^-	Excesos s_2^-	Déficit s^+
A	0.8571	D E	0	0	0
B	0.6316	C D	0	0	0
C	1.0000	C	0	0	0
D	1.0000	D	0	0	0
E	1.0000	E	0	0	0
F	1.0000	C	2	0	0

G	0.6667	E	0	0.6667	0
---	--------	---	---	--------	---

Tabla 3.7 resultados del ejemplo 3.1

Ejemplo 3.2

A continuación veremos otro ejemplo, en el que haremos análisis sobre la información obtenida. En la tabla 3.8 se muestran los datos de 5 tiendas (A, B, C, D y E) con dos entradas: el número de empleados y el área del piso (el espacio que ocupa cada tienda). Tenemos también dos salidas: el volumen de ventas y las utilidades.

Datos					Resultados		
Tienda (DMU)	Empleados (entrada)	Área (entrada)	Ventas (salida)	Utilidades (salida)	θ^*	Rango	Conj. Ref. λ^*
A	10	20	70	6	0.933333	2	E (0.77778)
B	15	15	100	3	0.888889	3	E (1.11111)
C	20	30	80	5	0.533333	5	E (0.88889)
D	25	15	100	2	0.666667	4	E (1.11111)
E	12	9	90	8	1	1	E (1)

Tabla 3.8 datos y resultados de 5 tiendas (DMUs)

La tienda E es la única DMU eficiente en relación con el resto de las tiendas. Los pesos óptimos y las holguras se muestran en la tabla 3.9.

Tienda	Pesos				Holguras			
	Empleados v_1^*	Área v_2^*	Ventas u_1^*	Utilidades u_2^*	Empleados s_1^{-*}	Área s_2^{-*}	Ventas s_1^{+*}	Utilidades s_2^{+*}
A	0.1	0	0.0133	0	0	11.6667	0	0.2222
B	0.0667	0	0.00889	0	0	3.3333	0	5.8889
C	0.05	0	0.00667	0	0	8	0	2.1111
D	0	0.0667	0.00667	0	3.3333	0	0	6.8889
E	0.0702	0.0175	0.00526	0.0658	0	0	0	0

Tabla 3.9 Pesos óptimos y Holguras.

La condición de holguras complementarias vista en (3.36) sostiene que para una solución óptima tenemos:

$$v_i^* s_i^{-*} = 0 \quad (\text{para } i = 1, 2) \quad \text{y} \quad u_r^* s_r^{+*} = 0 \quad (\text{para } r = 1, 2).$$

Esto significa que si $v_i^* > 0$ entonces $s_i^{-*} = 0$, y si $s_i^{-*} > 0$ entonces $v_i^* = 0$. Las mismas relaciones se establecen entre u^* y s^{+*} . Esto puede interpretarse así: si una DMU tiene un exceso (s^{-*}) en una entrada, con respecto a la DMU referente, entonces la entrada correspondiente no tiene valor, así que la solución óptima asigna un valor de cero al correspondiente peso (v^*), para la DMUo que se está evaluando. De manera similar podemos verlo para un valor positivo asignado a un peso v_i^* , la correspondiente holgura óptima s_i^{-*} debe ser cero.

La DMU C tiene en uno de sus pesos óptimos a $u_1^* = 0.00667$ y puede interpretarse en dos sentidos: primero con respecto al programa fraccional descrito en (3.3)-(3.6). Podemos interpretar al peso óptimo para las ventas u_1^* como el grado de influencia que una unidad de ventas tiene en la calificación óptima θ^* .

Así, si la DMU C aumenta sus ventas por una unidad, entonces se espera que θ^* aumente de 0.00667 ($=u_1^*$) a $0.533333+0.00667=0.54$, puesto que el denominador en (3.3) no cambia y retiene el valor 1. Por otra parte, $u_2^* = 0$ implica que una unidad de aumento en las utilidades no tiene efecto en la calificación óptima θ^* para la DMU C.

La segunda interpretación es que en (3.80) introdujimos a u^* como “vector de determinación de precios” y en la forma envolvente de LP, u_r^* es el costo reducido inducido por el cambio de una unidad en la salida r .

Por tanto $u_1^* = 0.00667$ muestra el grado de contribución que el cambio de una unidad de ventas puede hacer en el marcador de eficiencia θ^* . Estas observaciones contribuyen a identificar qué salidas tienen la mayor influencia en la calificación de eficiencia θ^* . Sin embargo tal análisis de influencia es válido sólo en un rango limitado de observaciones. Para revisar éste rango, se puede cambiar la calificación de eficiencia θ^* de la DMU C adicionando al conjunto de datos una tienda virtual C', con ventas de 101 y otro dato igual a C; y efectuando de nuevo el proceso para obtener nuevamente los resultados de la calificación de eficiencia θ^* , los pesos óptimos y las holguras. Este análisis de sensibilidad en los datos se explicará en el capítulo IV.

La DMU B tiene la holgura $s_2^{+*} = 5.889$ (-déficit en utilidades-, ver tabla 3.9) y, por el teorema de holguras complementarias, $u_2^{+*} = 0$, mostrando que éste nivel de utilidades no tiene efecto en la evaluación de eficiencia. Sumando éste valor a las actuales utilidades, éstas se incrementarán a 8.889.

Aumentamos el conjunto de datos adicionando una DMU virtual B', con ésta utilidad de 8.889 y otras observaciones iguales a las de B para nuevamente hacer el cálculo del nuevo marcador de eficiencia θ^* , los pesos óptimos y las holguras; teniendo como resultado para B' a $s_2^{+*} = 0$ y $u_2^{+*} = 0.1$. Esto significa que a éste nivel de utilidades, esta salida tiene una influencia positiva en la calificación de eficiencia θ^* , en cuyo caso es 0.1 por unidad.

B además tiene el peso óptimo $v_1^* = 0.0667$. Puede decirse que cambios en el número de empleados afectan el marcador de eficiencia θ^* . En éste caso un análisis de reducción de costos usando LP no es tan sencillo como en u^* . Por tanto, utilizar el programa fraccional dado en (3.3)-(3.6) sería apropiado para un análisis de sensibilidad sobre los empleados. Si B reduce sus empleados de 15 a 14, entonces el denominador de (3.3) disminuye por la influencia de $v_1^* = 0.0667$. Puesto que los otros términos permanecen sin cambio, la función objetivo (3.3) toma el valor:

$$(0.00889 \times 100 + 0 \times 3) / (0.0667 \times 14 + 0 \times 15) = 0.952 = \theta^*.$$

Puesto que el valor del marcador de eficiencia θ^* es aún menor que 1 y todas las restricciones dadas en (3.4) han sido satisfechas por éste conjunto de (v^*, u^*) , podemos decir que una entrada con un valor amplio de v_i^* afecta significativamente el valor de eficiencia.

III.5 El Modelo CCR (Charnes-Cooper-Rhodes), Orientado a Salidas

Hemos estado tratando con un modelo cuyo objetivo es minimizar las entradas mientras se producen al menos los niveles de rendimiento dados. Este tipo de modelos es llamado "orientado a entradas". Hay otro tipo de modelo que intenta aumentar al máximo los rendimientos (salidas), sin usar más de la cantidad que se tiene dispuesta de cualquier entrada. Este se llama "modelo orientado a salidas" (o rendimientos), formulado como:

$$(DPL0o) \quad \max_{\eta, \mu} \eta \quad (3.81)$$

$$\text{Sujeto a} \quad x_o - X\mu \geq 0 \quad (3.82)$$

$$\eta y_o - Y\mu \leq 0 \quad (3.83)$$

$$\mu \geq 0 \quad (3.84)$$

Una solución óptima de (DLPOo) puede derivarse directamente de una solución óptima del modelo CCR orientado a entradas, dado en (3.27)-(3.30) como sigue. Definamos:

$$\lambda = \frac{\mu}{\eta}, \quad \theta = \frac{1}{\eta} \quad (3.85)$$

Recordemos que para una unidad ineficiente, uno puede mantener las salidas constantes y multiplicar sus valores de entrada por la medida de eficiencia, o mantener sus entradas constantes y multiplicar las salidas por el recíproco de la medida de eficiencia.

Entonces (DLPOo) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 & \text{(DLPO)} \quad \min_{\theta, \lambda} \quad \theta \\
 & \text{Sujeto a} \quad \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\
 & \quad \quad \quad y_o - Y\lambda \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \lambda \geq 0,
 \end{aligned}$$

Que es el modelo CCR orientado a entradas, de ésta manera, una solución óptima del modelo orientado a salidas se asocia con el modelo orientado a entradas por medio de:

$$\eta^* = 1/\theta^*, \quad \mu^* = \lambda^*/\theta^*. \quad (3.86)$$

La holgura (t^-, t^+) del modelo orientado a salidas está definida por:

$$\begin{aligned}
 X\mu + t^- &= x_o \\
 Y\mu - t^+ &= \eta y_o
 \end{aligned}$$

Estos valores también están relacionados al modelo orientado a entradas por medio de:

$$t^{-*} = s^{-*}/\theta^*, \quad t^{+*} = s^{+*}/\theta^* \quad (3.87)$$

Ahora, $\theta^* \leq 1$, así que regresando a (3.85), η satisface

$$\eta^* \geq 1 \quad (3.88)$$

El marcador de eficiencia θ^* expresa la proporción de reducción de entrada, mientras η describe la proporción de agrandamiento de las salidas. De las relaciones arriba citadas, podemos concluir que un modelo CCR orientado a entradas será eficiente para cualquier DMU sí y solo sí es además eficiente cuando el modelo CCR orientado a salidas se usa para evaluar su desempeño.

El problema dual de (DLPOo) es expresado en el siguiente modelo, con componentes de vectores p y q como variables.

$$\text{(LPOo)} \quad \min_{p, q} \quad px_o \quad (3.89)$$

$$\text{Sujeto a } \quad qy_o = 1 \quad (3.90)$$

$$\quad - pX + qY \leq 0 \quad (3.91)$$

$$\quad p \geq 0, q \geq 0 \quad (3.92)$$

Por el lado del multiplicador tenemos:

Teorema 3.6.-

Sea una solución óptima de (LPO): (v^*, u^*) , entonces una solución óptima del modelo orientado a salidas (LPOo) se obtiene de

$$p^* = v^* / \theta^*, \quad q^* = u^* / \theta^*. \quad (3.93)$$

Prueba

Es claro que (p^*, q^*) es factible para (LPOo). Su optimalidad viene de la ecuación:

$$p^* x_o = v^* x_o / \theta^* = \eta^* \quad (3.94)$$

De ésta manera, la solución del modelo orientado a salidas CCR puede obtenerse del modelo orientado a entradas \square .

El mejoramiento al usar éste modelo es expresado por:

$$\hat{x}_o \Leftarrow x_o - t^{-*} \quad (3.95)$$

$$\hat{y}_o \Leftarrow \eta^* y_o + t^{+*} \quad (3.96)$$

Además vemos que (LPOo) es equivalente al siguiente programa de programación fraccional:

$$\min_{\pi, \rho} \quad \frac{\pi x_o}{\rho y_o} \quad (3.97)$$

$$\text{Sujeto a } \quad \frac{\pi x_j}{\rho y_j} \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.98)$$

$$\quad \pi \geq 0, \rho \geq 0 \quad (3.99)$$

Esto es, intercambiamos el numerador y el denominador de (3.3) y (3.4), y minimizamos la función objetivo. Por consiguiente, es natural que las soluciones estén vinculadas por una simple regla. Esta transformación matemática no implica que no haya decisión por parte de los dirigentes administrativos de una empresa en la elección de los modelos. Diferentes mejoras pueden asociarse con maximización de salidas y minimización de entradas. La diferencia puede ser sustancial, así que las elecciones merecen consideración. Más adelante mostraremos otros modelos donde las salidas son maximizadas y simultáneamente son minimizadas las entradas.

Nos referiremos nuevamente al ejemplo 3.1 y a la tabla 3.6 de la anterior sección (III.4) usando ahora el modelo CCR orientado a salidas para comparar su correspondiente proyección-CCR con la del caso orientado a entradas.

Para hacer ésta comparación de una manera sencilla con el caso orientado a entradas, recordemos que el valor objetivo óptimo η^* ha quedado de manifiesto por su inverso $\theta^*(=1/\eta^*)$; es decir: $\eta^* = 1/\theta^*$.

Entonces la solución óptima para A es la siguiente:

$$\theta^* = 0.8571, \quad \eta^* = 1/\theta^* = 1/.8571 = 1.1667$$

$$\lambda_D^* = \lambda_D^*/\theta^* = 0.7143/.8571 = 0.8333, \quad \lambda_E^* = \lambda_E^*/\theta^* = .2857/.8571 = 0.3333$$

$$\text{Otras } \lambda_j^* = 0$$

$$s_1^{-*} = s_2^{-*} = s^{+*} = 0$$

La proyección del modelo CCR orientado a salidas ha sido desarrollada conforme a (3.95)-(3.96), con la cuál tenemos que:

$$\hat{x}_1 \leftarrow x_1 = 4 \quad (\text{sin cambio})$$

$$\hat{x}_2 \leftarrow x_2 = 3 \quad (\text{sin cambio})$$

$$\hat{y} \leftarrow \eta^* y = 1.167 \times 1 = 1.167 \quad (16.7\% \text{ de aumento}).$$

Estos resultados difieren del caso orientado a entradas, reflejando diferencias en la orientación del modelo. La tabla 3.8 muestra la proyección CCR en ambos casos: orientación a entradas y orientación a salidas.

DMU	DATOS			Calificación θ^*	Orientación a Entradas			Orientación a Salidas		
	x_1	x_2	y		x_1	x_2	y	x_1	x_2	y
A	4	3	1	0.8571	3.43	2.57	1	4	3	1.17
B	7	3	1	0.6316	4.42	1.89	1	7	3	1.58
C	8	1	1	1.0000	8	1	1	8	2	1
D	4	2	1	1.0000	4	2	1	4	2	1

E	2	4	1	1.0000	2	4	1	2	4	1
F	10	1	1	1.0000	8	1	1	8	1	1
G	3	7	1	0.6667	2	4	1	3	6	1.5

Tabla 3.8 Proyección CCR en orientación a entradas y orientación a salidas.

En esta tabla observamos la variación de resultados en ambos modelos CCR. El orientado a entradas, cuando se desea reducir las entradas manteniendo al menos los niveles de salidas que se tienen; y el modelo orientado a salidas cuando se desea incrementar las salidas manteniendo al menos los niveles de entrada disponibles. En ambos modelos además se elimina tanto el sobrante o desperdicio en las entradas, como el déficit o faltante en las salidas.

Hasta aquí, hemos asumido que todas las entradas y salidas pueden variar, a discreción del administrador u otros usuarios. Estas pueden ser identificadas como variables discretionales.

Variables no discretionales, no sujetas al control administrativo, también puede ser necesario considerarlas. Por ejemplo, en la evaluación del desempeño de diferentes bases de la fuerza aérea armada, es necesario considerar el clima como una entrada, puesto que el número de salidas (misiones exitosamente cumplidas) y de misiones “abortadas” (no completadas) tratadas como salidas, podrían ser afectadas por el clima (medido en grados y en días en que pueden efectuarse vuelos), en diferentes bases.

Es importante tomar en cuenta tales entradas de manera que sean reflejadas en las medidas de eficiencia usadas.

Seguimos el camino estipulado por Banker y Morey [12] quienes se refieren a tales variables como “exógenamente determinadas” en formas como “edad de la tienda”, por ejemplo, en su uso de la teoría DEA para evaluar el desempeño de 60 DMUs en una red de restaurantes de comida rápida.

Podemos representar su formulación por la siguiente modificación del modelo CCR.

$$\text{Min } \theta - \varepsilon \left(\sum_{i \in D} s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (3.100)$$

$$\text{Sujeto a } \theta x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^-, \quad i \in D \quad (3.101)$$

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^-, \quad i \in ND \quad (3.102)$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+, \quad r = 1, \dots, s. \quad (3.103)$$

Donde todas las variables (excepto θ) están restringidas a ser no negativas. Aquí el símbolo $i \in D$ e $i \in ND$ se refiere a los conjuntos de “Discrecionalidad” y “No Discrecionalidad” en las entradas, respectivamente. Para notarse en las restricciones, es el hecho de que la variable θ no está aplicada a las últimas entradas debido a que esos valores son exógenamente determinados y por lo tanto no es posible variarlos a discreción del administrador. Esto puede manejarse introduciendo todas las x_{io} , $i \in ND$.

Regresando a la función objetivo en (3.100), utilizamos el símbolo $\varepsilon > 0$ para indicar que las variables de holgura (mostradas en el paréntesis) van a ser manejadas en un segundo escenario donde, como se ha descrito previamente, van a ser maximizadas de manera que no perturben el (previamente determinado) primer escenario de la minimización de θ para alcanzar $\theta = \theta^*$.

Finalmente, observamos que las holguras $s_i^-, i \in ND$ son omitidas de la función objetivo. Por lo tanto, estas entradas “No Discrecionales” no entran directamente en las medidas de eficiencia que están optimizándose en (3.100). Pueden, sin embargo, afectar las evaluaciones de eficiencia en virtud de su presencia en las restricciones.

Podemos clarificar la forma en que estas variables “No discrecionales” afectan los marcadores de eficiencia escribiendo el dual de (3.100)-(3.103) en la siguiente forma modificada del modelo multiplicador,

$$\mathbf{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i \in ND} v_i x_{io} \quad (3.104)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i \in ND} v_i x_{io} - \sum_{i \in D} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.105)$$

$$\sum_{i \in D} v_i x_{io} = 1 \quad (3.106)$$

$$v_i \geq \varepsilon, i \in D \quad (3.107)$$

$$v_i \geq 0, i \in ND \quad (3.108)$$

$$u_r \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s \quad (3.109)$$

Como puede verse, las entradas no discrecionales entran a la función objetivo (3.104), pero no las entradas discrecionales. Los valores de los multiplicadores asociados con estas entradas no discrecionales pueden ser cero, como en (3.108), pero las otras variables deben siempre ser positivas, como en (3.107) y (3.109).

Las interpretaciones que ahora se darán vienen del “principio de holguras complementarias” de la programación lineal.

Si (3.102) se satisface estrictamente en un óptimo, entonces $v_i^* = 0$ es asociado con ésta restricción y éste x_{io} no afecta la evaluación registrada en (3.100). Por otra parte, si $v_i^* > 0$ para cualquier $i \in ND$ entonces el marcador de eficiencia registrado en (3.100) es reducido por el multiplicador asociado a x_{io} para ésta DMUo.

Esto resulta del teorema dual de programación lineal.

$$\theta - \varepsilon \left(\sum_{i \in D} s_i^{-*} + \sum_{r=1}^s s_r^{+*} \right) = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro} - \sum_{i \in ND} v_i^* x_{io} \quad (3.110)$$

Con esta misma relación vemos que una disminución en éste mismo x_{io} aumentará el marcador de eficiencia registrado en la expresión [el lado izquierdo de la igualdad (3.110)].

Para uso administrativo, el sentido de esta caracterización matemática puede ser interpretado de la siguiente manera: El rendimiento alcanzado, registrado en y_{ro} merece clasificarse en el rango de altamente eficiente, cuando ha sido alcanzado bajo una restricción relativamente muy estricta; y en un marcador de baja eficiencia cuando esta restricción es relajada (no muy estricta) por el incremento de este x_{io} .

Ejemplo

Un estudio de 638 escuelas públicas secundarias en Texas fue emprendido por un consorcio de 3 universidades en colaboración con la Agencia de Educación Texas (TEA). El estudio fue realizado para desarrollar métodos mejorados para la evaluación del desempeño y responsabilidad de escuelas. Adicionalmente a las entradas discretionales como salarios de maestros, instrucción especial, etc. Las siguientes entradas no discretionales tuvieron que ser tomadas en cuenta,

- 1.- Minoría.- El menor número de estudiantes, expresado como un porcentaje del total de estudiantes matriculados.
- 2.- Desventajas.- Número de estudiantes en desventaja económica, expresado como un porcentaje del total de estudiantes matriculados.
- 3.- LEP.- Número de estudiantes con poca habilidad en el idioma inglés, expresado como un porcentaje del total de estudiantes matriculados.

Estas entradas difieren de las que Banker y Morey [12] tuvieron en mente. Por ejemplo, un cálculo de regresión hecho en una primera fase produjo coeficientes negativos.

El estudio rindió coeficientes negativos que fueron estadísticamente significantes para cada una de estas 3 entradas en términos de sus efectos en los resultados de la prueba académica.

En el siguiente estudio de DEA fue considerado invertir el signo asociado con el x_{io} en la expresión a la derecha de (3.110). Esto se logró invirtiendo (3.102).

$$\text{De } \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{io} \quad \text{A} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq x_{io} \quad (3.111)$$

Para cada una de estas $i \in ND$. De esta manera una habilidad para procesar más de estas entradas cuando es crítico, fue reconocida en la forma de marcadores altamente eficientes (preferentemente más que bajos marcadores). Se observó que los resultados eran suficientemente satisfactorios para hacer una recomendación para otorgar el reconocimiento a la eficiencia así como la efectividad en las asignaciones presupuestarias estatales a los diferentes distritos escolares.

Haremos las siguientes consideraciones:

La efectividad implica

- La habilidad de declarar las metas deseadas
- La habilidad de lograr las metas deseadas

La eficiencia relaciona a

- Los beneficios realizados
- Los recursos usados

Considere, por ejemplo, las Normas de la Excelencia asignadas para Texas consideradas en la tabla 3.8. Éstos representan declaraciones de metas deseadas y las escuelas se premian (o no) con base en sus logros. Nada se dice sobre las cantidades (o variedades) de recursos usados.

	El indicador del resultado	La Norma de la excelencia Estado-asignada
1	La Valoración de Texas de prueba de habilidades	90% de estudiantes que

	Académicas (TAAS)	pasan en todas las pruebas estándar.
2	La asistencia	97% de la matrícula total en la escuela
3	La Proporción marginada	Menos de o iguala al 1% de la matrícula total.
4	La proporción de la graduación	99% de graduados
5	La Prueba de Admisión de la escuela	35% de graduados que están dentro del criterio del record que es igual a 25 en el ACT y 1000 en el SAT 70% de graduados que toman el ACT o el SAT

ACT = Las Pruebas Colegiadas americanas
SAT= Los Exámenes de aptitud escolar

Tabla 3.8 Normas de la Excelencia Estado-asignadas en los Resultados de los estudiantes.

No debe ser sorpresa que sólo una de las escuelas calificada como excelente que se incluyó en este estudio se encontró eficiente. Las otras escuelas calificadas como excelentes por el Estado de Texas tenían todos los recursos excesivos para lograr estas metas. Por otro lado se encontraron muchas escuelas que no lograron la excelencia no obstante que produjeron los rendimientos deseados bajo condiciones muy difíciles. Por consiguiente alguna manera de reconocer este tipo de logros se necesita si la “eficiencia” así como la “efectividad” van a ser premiadas.

La tabla 3.9 contiene porciones de la copia impresa de un estudio de DEA que involucra una de estas escuelas excelentes.

El renglón de la fila Desventaja (= económicamente en desventaja) muestra un valor de holgura de 15 estudiantes. Juzgando las actuaciones de su grupo del par de escuelas eficaces, esta escuela

	El nivel actual	Holgura	Valor en eficiencia		
Tabla 3.9 Entradas	Minoría	47	--	47	- no
	Desventaja	14	15	29	
	LEP	3.5	--	3.5	

Discrecionales-.

Debe de haber sido por consiguiente capaz de más del doble del número de tales estudiantes que procesó sin que afectara su récord de eficiencia porque:

- La holgura para $i \in ND$ no está en la función objetivo de (3.100).
- La presencia de holguras no nulas para cualquier $i \in ND$ significa la asociada $v_i^* = 0$. En suma, las otras entradas no discrecionales (ND) están asociadas con multiplicadores positivos, así que esta escuela tendrá la capacidad de aumentar su record de eficiencia por el aumento de “Minoría” y LPE (La baja habilidad de hablar el idioma inglés = Principalmente hispanos). Esto puede hacerse introduciendo

restricciones para asegurar que no haya empeoramiento de alguna excelencia lograda.

III.6 El Modelo BCC (Bankers-Charnes-Cooper)

Hemos dicho ya que el modelo CCR está construido sobre la aceptación de constantes regresos a escala de actividades, como se ha representado ya por la frontera en el caso de una entrada y una salida, en la figura 3.6. Se ha dicho también que el conjunto factible de producción tiene la siguiente propiedad: Si (x, y) es un punto factible, entonces (tx, ty) para cualquier t positivo, es también factible. Puede modificarse ésta suposición para obtener conjuntos factibles de producción con diferentes postulados. El modelo BBC tiene en sus fronteras características lineales y cóncavas, las cuáles se muestran en la figura 3.7; por lo que ahora existen variables regresos a escala con las siguientes caracterizaciones:

- a) crecientes regresos a escala que ocurren en el primer segmento de la línea, seguido por:
- b) decrecientes regresos a escala en el segundo segmento y,
- c) constantes regresos a escala que ocurren en el punto donde la transición del primero al segundo segmento es hecha.

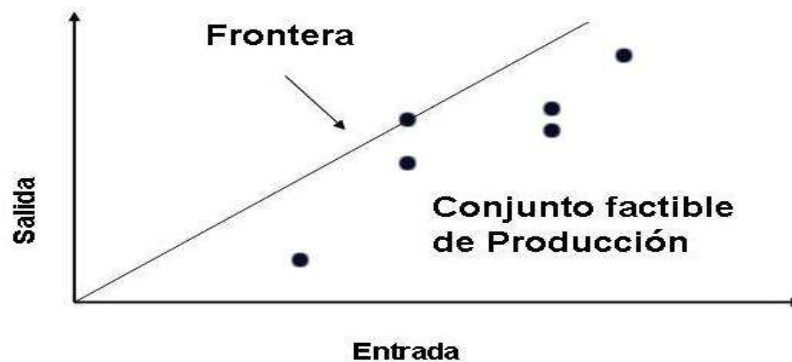


Figura 3.6 Frontera en el Modelo CCR

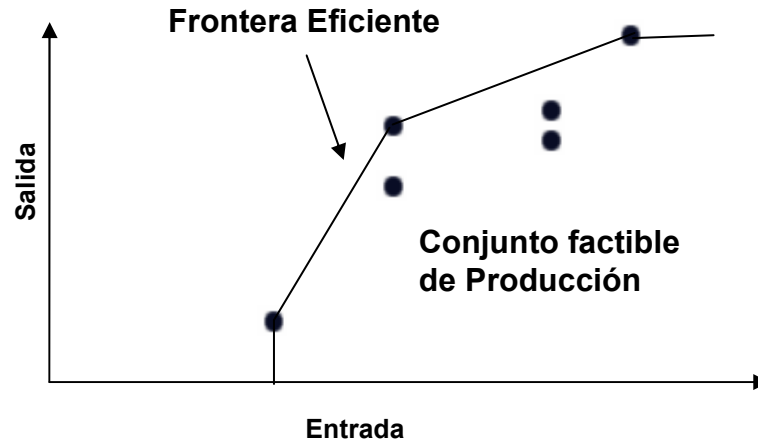


Figura 3.7 Fronteras en el Modelo BCC

Los modelos del tipo CCR, bajo el concepto de eficiencia débil, evalúan la eficiencia θ^* (radial, proporcional), pero no toman cuenta los excesos en las entradas ni el déficit en las salidas que se representan por las holguras no nulas. Esta es una desventaja porque θ^* no incluye estas holguras.

A continuación veremos primeramente el modelo BCC, y enseguida trataremos con el modelo "Aditivo", el cuál tiene el mismo conjunto factible de producción que el modelo CCR y el BCC, con sus variantes, pero maneja las holguras (excesos en las entradas y déficit en las salidas) directamente en la función objetivo.

Aunque el modelo Aditivo trabaja directamente con los excesos en las entradas y el déficit en las salidas, y puede discriminar unidades (DMUs) eficientes e ineficientes, no tiene manera de calcular la medida de ineficiencia por medio de una medida escalar similar a la de θ^* en los modelos del tipo CCR.

Los modelos BCC incluyen la condición de convexidad en sus restricciones:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \geq 0, \forall_j$$

De ésta manera, comparten propiedades en común y muestran diferencias. Además comparten propiedades con los correspondientes modelos aditivos. Así, el modelo aditivo sin la restricción de convexidad caracterizará a una DMU como eficiente sí y solo sí el modelo CCR la caracteriza como eficiente. Similarmente, el modelo BCC caracterizará a una DMU como eficiente sí y solo sí el correspondiente modelo aditivo también la caracteriza como eficiente.

El concepto de “translación de invariancia” trata con cambios laterales de las restricciones para que los datos negativos, por ejemplo, puedan convertirse a valores positivos que puedan manejarse con nuestros métodos de solución, mismos que asumen que todos los datos son no negativos. Como veremos, los modelos aditivos que incluyen la restricción de convexidad, son de translación invariante, pero esto no se cumple exactamente cuando la restricción de convexidad se omite. Los modelos CCR no son de translación invariante, mientras los modelos BCC sí son de translación invariante para los cambios en los datos en solo algunas de sus restricciones.

Vayamos de lleno al tema con un sencillo ejemplo. La figura 3.8 exhibe 4 DMUs: A, B, C y D, cada una con una entrada y una salida.

La frontera eficiente de los modelos CCR es la línea punteada que pasa a través de B desde el origen. Las fronteras del modelo BCC son las líneas acentuadas que conectan a A, B y C. El conjunto factible de producción es el área que consta de la frontera junto con las actividades observadas o posibles actividades con un exceso en las entradas y/o un déficit en las salidas comparadas con las fronteras.

A, B y C están sobre las fronteras y son eficientes según el modelo BCC. Esto es válido también para todos los puntos en la línea que conecta A y B, B y C. Sin embargo, sólo B es eficiente según el modelo CCR.

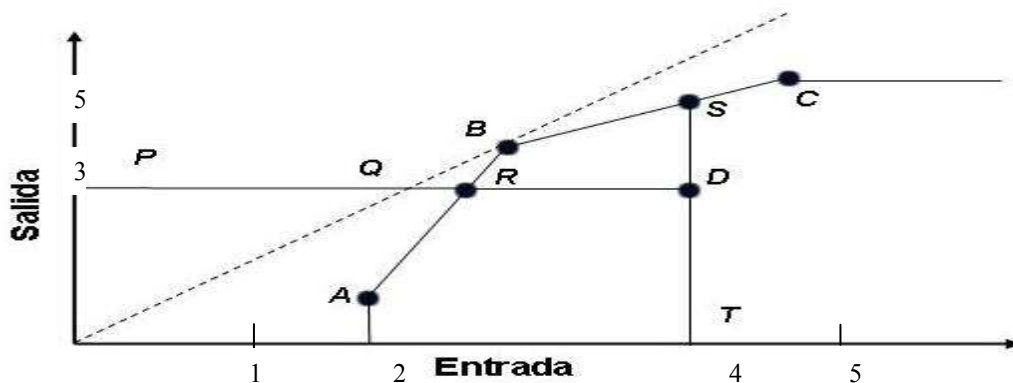


Figura 3.8 El modelo BCC

Observando los valores en la gráfica, la eficiencia de D según el modelo de eficiencia BCC, está evaluada por:

$$\frac{PR}{PD} = \frac{2.6667}{4} = 0.6667,$$

Mientras su eficiencia con respecto al modelo CCR es más pequeña, con un valor de:

$$\frac{PQ}{PD} = \frac{2.25}{4} = 0.5625.$$

Generalmente, la eficiencia del modelo CCR no excede a la eficiencia del modelo BCC.

En el modelo BCC orientado a salidas, observamos el eje vertical de la figura 3.8 para encontrar a D evaluado por:

$$\frac{ST}{DT} = \frac{5}{3} = 1.6667$$

Esto significa que para alcanzar la eficiencia podría requerirse el aumento de las salidas de D, en $1.6667 \times 3 = 5$ unidades. El aumento comparable para el modelo CCR se obtiene del recíproco de su entrada eficiente, $\frac{1}{0.5625} = 1.7778$ así como se ve claramente en el diagrama, aún se necesita un aumento mayor para alcanzar la eficiencia. (Nota: esta sencilla "relación recíproca" entre eficiencias de entradas y salidas no está disponible para el modelo BCC).

Banker, Charnes y Cooper [2] en 1984 publicaron el modelo BCC cuyo conjunto factible de producción P_B está definido por:

$$P_B = \{(x, y) / x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\} \quad (3.6.1)$$

Donde $X = (x_j) \in R^{m \times n}$ y $Y = (y_i) \in R^{s \times n}$ son un conjunto de datos dado, $\lambda \in R^n$ y e es un vector renglón con todos los elementos iguales a 1. El modelo BCC difiere del modelo CCR solo en el anexo de la condición $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ (de convexidad) con la que también escribimos $e\lambda = 1$ donde e es un vector renglón con todos los elementos unidad y λ es un vector columna con todos los elementos no-negativos. Junto con la condición $\lambda_j \geq 0$, para toda j .

Esto impone una condición de convexidad en las maneras aceptables en las cuáles las observaciones para las n DMUs deben combinarse.

El modelo BCC orientado a entradas evalúa la eficiencia de DMU_o ($o = 1, \dots, n$) resolviendo el siguiente programa lineal (Forma Envolvente):

$$(BCCo) \quad \min_{\theta_B, \lambda} \theta_B \quad (3.6.2)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \theta_B x_o - X\lambda \geq 0 \quad (3.6.3)$$

$$Y\lambda \geq y_o \quad (3.6.4)$$

$$e\lambda = 1 \quad (3.6.5)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.6.6)$$

Donde θ_B es un escalar

La forma dual (modelo multiplicador) de éste programa lineal (BCCo) se expresa como:

$$\max_{v, u, u_0} z = uy_o - u_0 \quad (3.6.7)$$

$$\text{Sujeto a } vx_o = 1 \quad (3.6.8)$$

$$-vX + uY - u_0e \leq 0 \quad (3.6.9)$$

$$v \geq 0, u \geq 0 \quad u_0 \text{ libre en signo} \quad (3.6.10)$$

Donde v y u son vectores y z y u_0 son escalares y éste último, sin restricción en signo, puede ser positivo ó negativo (o cero).

El programa fraccional equivalente en el modelo BCC se obtiene del programa dual:

$$\max \frac{uy_o - u_0}{vx_o} \quad (3.6.11)$$

$$\text{Sujeto a } \frac{uy_j - u_0}{vx_j} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.6.12)$$

$$v \geq 0, u \geq 0, \quad u_0 \text{ sin restricción} \quad (3.6.13)$$

Las correspondencias (relación) entre las restricciones del primal-dual y las variables se representan en la tabla 3.6.1.

Restricciones del modelo en "Forma	Variables del "Modelo	Restricciones del "Modelo	Variables del modelo en "Forma
------------------------------------	-----------------------	---------------------------	--------------------------------

Envolvente"	Multiplicador"	Multiplicador"	Envolvente"
$\theta_B x_o - X\lambda \geq 0$	$v \geq 0$	$v x_o = 1$	θ
$Y\lambda \geq y_o$	$u \geq 0$	$-vX + uY - u_0 e \leq 0$	$\lambda \geq 0$
$e\lambda = 1$	u_0		

Tabla 3.6.1 Correspondencias primal y Dual en el Modelo BCC

Es claro que una diferencia entre los modelos CCR y BCC es la variable libre u_0 , que es la variable dual asociada con la restricción $e\lambda = 1$ en el modelo envolvente, que además no aparece en el modelo CCR.

El modelo primal ($BCCo$) se resuelve usando un procedimiento de dos fases similar al caso CCR. En la primera fase, minimizamos θ_B y, en la segunda fase, maximizamos la suma de los excesos en las entradas y el déficit de las salidas, conservando $\theta_B = \theta_B^*$ (el valor objetivo óptimo obtenido en la fase I). Las evaluaciones obtenidas de los modelos CCR y BCC están además relacionadas una con la otra de la siguiente forma:

Una solución óptima para el modelo ($BCCo$) se representa por $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$, donde s^{-*} y s^{+*} representan el máximo exceso en las entradas y el déficit en las salidas, respectivamente. Notemos que θ_B^* no es menos que el valor objetivo óptimo θ^* del modelo CCR, puesto que ($BCCo$) impone una restricción adicional, $e\lambda = 1$, así que su región factible es un subconjunto de la región factible del modelo CCR.

III.7 Teoremas de Eficiencia del Modelo BCC.

Definición 3.7.1. Eficiencia del Modelo BCC.-

Si una solución óptima $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ obtenida en éste proceso de dos-fases para (BCC_o) satisface $\theta_B^* = 1$ y no tiene holguras ($s^{-*} = 0, s^{+*} = 0$), entonces la DMUo es llamada eficiente, según el modelo BCC, de otra forma es ineficiente \square .

Definición 3.7.2. Conjunto Referencia.-

Para una DMUo ineficiente bajo el modelo BCC, definimos su conjunto referencia, E_o , con base en una solución óptima λ^* por:

$$E_o = \{j / \lambda_j^* > 0\} \quad (j \in \{1, \dots, n\}) \quad (3.7.1)$$

Si existen múltiples soluciones óptimas, podemos elegir alguna para encontrar que:

$$\theta_B^* x_o = \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* x_j + s^{-*} \quad (3.7.2)$$

$$y_o = \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* y_j - s^{+*} \quad (3.7.3)$$

De ésta manera, tenemos una fórmula que nos ayudará a mejorar entradas y salidas, vía la proyección BCC:

$$\hat{x}_o \Leftarrow \theta_B^* x_o - s^{-*} \quad (3.7.4)$$

$$\hat{y}_o \Leftarrow y_o + s^{+*}. \quad (3.7.5)$$

\square .

Los siguientes dos teoremas y el lemma pueden probarse en una forma similar a las pruebas usadas para el modelo CCR. (referirse al apartado III.3 o la bibliografía [2] de éste trabajo).

Teorema 3.7.1.-

La actividad mejorada (\hat{x}_o, \hat{y}_o) es eficiente según el modelo BCC \square .

Similarmente, el siguiente lemma se adapta al modelo BCC,

Lemma 3.7.1.-

Para la actividad mejorada (\hat{x}_o, \hat{y}_o) , existe una solución óptima $(\hat{v}_o, \hat{u}_o, \hat{u}_0)$ para su problema dual de tal manera que:

$$\hat{v}_o > 0 \quad \text{y} \quad \hat{u}_o > 0 \quad (3.7.6)$$

$$\hat{v}_o x_j = \hat{u}_o y_j - \hat{u}_0 \quad (j \in E_o) \quad (3.7.7)$$

$$\hat{v}_o X \geq \hat{u}_o Y - \hat{u}_0 e. \quad (3.7.8)$$

□.

Teorema 3.7.2.-

Cada DMU en E_o asociada con un $\lambda_j^* > 0$ como se definió en (3.7.1), es eficiente según el modelo BCC □.

Esta es una extensión del teorema 3.4 (sección III.3). Finalmente, el siguiente teorema muestra una propiedad del modelo de eficiencia BCC para la versión orientada a entradas del modelo. Esta propiedad no está garantizada por el modelo CCR, así que en ambos debe revisarse si ésta propiedad está presente.

Teorema 3.7.3.-

Una DMU que tiene un mínimo valor de entrada en cualquiera de las entradas observadas, o un máximo valor de salida en cualquiera de las salidas observadas, se considera eficiente bajo el modelo BCC.

Prueba

Supóngase que una DMUo tiene un mínimo valor de entrada para la entrada 1, $x_{1o} < x_{1j} \quad (\forall_j \neq o)$. Entonces, de (3.6.3) y (3.6.5), ésta DMUo tiene la única solución $(\theta_B^* = 1, \lambda_o^* = 1, \lambda_j^* = 0 \quad (\forall_j \neq o))$. Por lo tanto, DMUo tiene $\theta_B^* = 1$ sin holguras.

Entonces se considera eficiente en el modelo BCC. El caso de la máxima salida puede probarse análogamente. [2] □.

III.8 El Modelo BCC (Banker-Charnes-Cooper), Orientado a Salidas.

Para el modelo BCC orientado a salidas, tenemos:

$$(BCC - Oo) \quad \max_{\eta, B, \lambda} \quad \eta B \quad (3.8.1)$$

$$\text{Sujeto a } X\lambda \leq x_o \quad (3.8.2)$$

$$\eta B y_o - Y\lambda \leq 0 \quad (3.8.3)$$

$$e\lambda = 1 \quad (3.8.4)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.8.5)$$

Esta es la "Forma Envolvente" del modelo BCC orientado a salidas. La forma Dual (multiplicador) asociada con el programa lineal (BCC - O_o), se expresa de la siguiente manera:

$$\min_{v, u, v_0} z = vx_o - v_0 \quad (3.8.6)$$

$$\text{Sujeto a } uy_o = 1 \quad (3.8.7)$$

$$vX - uY - v_0e \geq 0 \quad (3.8.8)$$

$$v \geq 0, \quad u \geq 0 \quad (3.8.9)$$

$$v_0 \text{ libre en signo,}$$

Donde v_0 es el escalar asociado con $e\lambda = 1$ en el modelo envolvente. Finalmente, tenemos la formulación del programa fraccional equivalente para el modelo BCC, para la anterior forma Dual (modelo multiplicador).

$$\min \frac{vx_o - v_0}{uy_o} \quad (3.8.10)$$

$$\text{Sujeto a } \frac{vx_j - v_0}{uy_j} \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.8.11)$$

$$v \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v_0 \text{ libre en signo,} \quad (3.8.12)$$

III.9 El Modelo Aditivo y Ejemplo.

En los modelos precedentes, teníamos que distinguir entre modelo orientado a entradas y modelo orientado a salidas. Ahora combinamos ambas en un modelo simple, llamado el Modelo Aditivo.

El modelo básico aditivo es el siguiente:

$$(ADD_o) \quad \max_{\lambda, s^-, s^+} z = es^- + es^+ \quad (3.9.1)$$

$$\text{Sujeto a } X\lambda + s^- = x_o \quad (3.9.2)$$

$$Y\lambda - s^+ = y_o \quad (3.9.3)$$

$$e\lambda = 1 \quad (3.9.4)$$

$$\lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0 \quad (3.9.5)$$

Una variante que no exploramos aquí, es un modelo aditivo que omite la condición $e\lambda = 1$.

El problema dual al de arriba puede expresarse como sigue:

$$\min_{v, u, u_0} w = vx_o - uy_o + u_0 \quad (3.9.6)$$

$$\text{Sujeto a } vX - uY + u_0e \geq 0 \quad (3.9.7)$$

$$v \geq e \quad (3.9.8)$$

$$u \geq e \quad (3.9.9)$$

$$u_0 \text{ libre} \quad (3.9.10)$$

Para explicar éste modelo usamos la figura 3.9.1, donde se muestran cuatro DMUs A, B, C y D, cada una con una entrada y una salida. Puesto que por (3.9.2)-(3.9.5) el modelo (ADD_o) tiene el mismo conjunto factible de producción que el modelo BCC, la frontera eficiente, que es continua, consiste de los segmentos de línea \overline{AB} y \overline{BC} . Ahora consideremos cómo debe evaluarse la unidad de toma decisiones D. Una sustitución factible de D con s^- y s^+ se denota por las flechas s^- y s^+ en la figura 3.9.1. Como se muestra en la línea punteada en la figura, el máximo valor de $s^- + s^+$ es alcanzado en B. Es claro que este modelo considera los excesos de entradas y el déficit de las salidas simultáneamente, al llegar a un punto de la frontera eficiente que está muy distante de D.

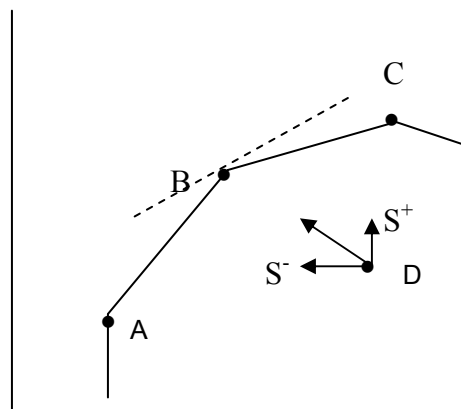


Figura 3.9.1 El Modelo Aditivo

Tomando estas consideraciones en cuenta, podemos obtener una definición de eficiencia, para el modelo aditivo.

Sean las soluciones óptimas $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$. La definición de eficiencia para una DMU eficiente en el modelo aditivo está entonces dada por:

Definición 3.9.1 Eficiencia del Modelo Aditivo (ADD).-

Una Unidad de Toma de Decisiones DMUo es eficiente para el modelo Aditivo, sí y solo sí es eficiente para el modelo BCC \square .

Una prueba de éste teorema puede encontrarse en T. Ahn et.al.[6]. Aquí sin embargo, es suficiente con tener en cuenta que el marcador de eficiencia θ^* no es medido explícitamente, pero implícitamente está presente en las holguras s^{-*} y s^{+*} . Es más, considerando que θ^* refleja solo la “Eficiencia de Farrell” (eficiencia débil), el objetivo en un modelo aditivo (ADD_o) es reflejar todas las ineficiencias que el modelo puede identificar tanto en las entradas como en las salidas.

Teorema 3.9.2.- Definamos $\hat{x}_o = x_o - s^{-*}$ y $\hat{y}_o = y_o + s^{+*}$. Entonces, (\hat{x}_o, \hat{y}_o) es eficiente para el modelo aditivo (ADD_o).

Por éste teorema, la mejoría de una actividad eficiente se alcanza por la siguiente fórmula (Proyección para el Modelo Aditivo):

$$\hat{x}_o \Leftarrow x_o - s^{-*} \quad (3.9.11)$$

$$\hat{y}_o \Leftarrow y_o + s^{+*} \quad (3.9.12)$$

Con (\hat{x}_o, \hat{y}_o) como coordenadas para el punto en la frontera de eficiencia usada para evaluar a DMUo.

Ejemplo

Para clarificar todo lo expuesto anteriormente, mostramos en la tabla 3.9.1, 8 DMUs con una entrada y una salida. La solución del modelo aditivo y la del modelo BCC se exhiben aquí. El conjunto referencia se determina como el conjunto de DMUs que están en el conjunto básico óptimo del problema de programación lineal (LP). Es de interés hacer notar que B, C y E son todos completamente eficientes bajo ambos modelos, el BCC y ADD_o.

Además, la holgura no nula bajo s^{+*} para A, muestra que no es completamente eficiente para el modelo BCC (ni en el ADD_o, por el Teorema 3.9.1) aún cuando es débilmente eficiente con un valor de $\theta^* = 1$. Esto significa que A está en una parte de la frontera que no es eficiente, por supuesto, mientras en todos los otros valores con $\theta^* < 1$, significa que ellos no alcanzaron la frontera, y como puede observarse además tienen holguras no nulas en sus soluciones óptimas (2^a. etapa).

	Entrada	Salida	BCC		Modelo Aditivo	
DMU	x	y	θ^*	s^{-*}	s^+	Ref.
A	2	1	1	0	1	C
B	3	3	1	0	0	B
C	2	2	1	0	0	C
D	4	3	0.75	1	0	B
E	6	5	1	0	0	E
F	5	2	0.40	3	0	C
G	6	3	0.50	3	0	B
H	8	5	0.75	2	0	E

Tabla 3.9.1 datos y resultados del Ejemplo.

La siguiente definición nos trae otra distinción importante entre el modelo Aditivo y el modelo BCC (o los modelos CCR).

Definición 3.9.2 (Mixta).-

Definimos como “Mixta” a las proporciones en las cuáles las entradas se usan o como las proporciones en las que las salidas son producidas \square .

Regresando a los modelos BCC (o CCR), puede observarse que $(1 - \theta^*)$ representa las reducciones que pueden lograrse sin alterar la mezcla de las entradas utilizadas, y $(\eta^* - 1)$ jugaría un papel similar para las expansiones de las salidas, que no alterarían la mezcla de éstas.

En la literatura de DEA, como en la de economía, esta proporción se identifica como “Ineficiencia Técnica”.

Con las ineficiencias técnicas encontradas en los modelos CCR y BCC, la segunda fase de optimización está dirigida a encontrar el máximo de las holguras, para detectar si se presentan ineficiencias adicionales. Al alterarse cualquier holgura no nula obtenida en la segunda fase de optimización, necesariamente se altera la proporción de las entradas o salidas (ineficiencia mixta).

Cuando sea importante hacerlo, se perfeccionará la terminología distinguiendo cuando hay “meramente ineficiencia técnica” para θ^* y η^* , para distinguirla de la ineficiencia mixta, dada en la definición 3.9.2.

En muchas aplicaciones puede ser necesario manejar datos negativos en algunas entradas o salidas. Es necesario tomar en cuenta datos semipositivos para manejar tanto pérdidas como beneficios, tratándose de las salidas. Esto podrá manejarse por medio del empleo de una propiedad del modelo aditivo (ADDo), llamada “translación de invariancia”, la cuál definiremos enseguida:

Definición 3.9.3. (Translación de Invariancia).-

Dado cualquier problema, se dice que un modelo DEA será de translación invariante si el traslado de los valores originales de los datos de entrada o salida resulta en un nuevo problema que tenga la misma solución óptima que el primer problema original, para la forma envolvente. \square .

Primero examinemos el modelo BCC orientado a entradas. En la figura 3.9.2, D tiene la eficiencia PR/PD . Esta proporción es invariante aún si cambiamos el valor de la salida por el cambio del origen de O a O' . Así, el modelo BCC orientado a entradas es de translación invariante con respecto a las salidas (pero no a las entradas). Similar razonamiento muestra que el modelo BCC orientado a salidas es invariante bajo la translación de entradas (pero no de salidas).

Regresando al modelo aditivo, la figura 3.9.3 muestra que este modelo es de translación invariante tanto en entradas como en salidas, puesto que las evaluaciones de la eficiencia no dependen del origen del sistema coordenado cuando se usa este modelo. Esto es porque no se está trabajando con medidas radiales como θ^* y η^* , y se está trabajando directamente con las holguras en la función objetivo.

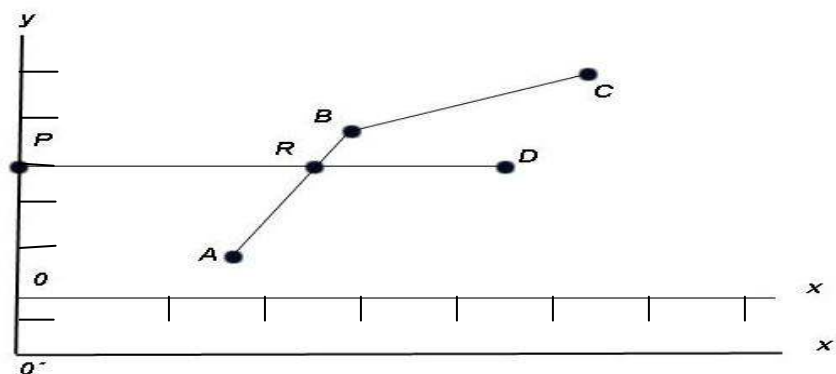


Figura 3.9.2 Translación en el Modelo BCC

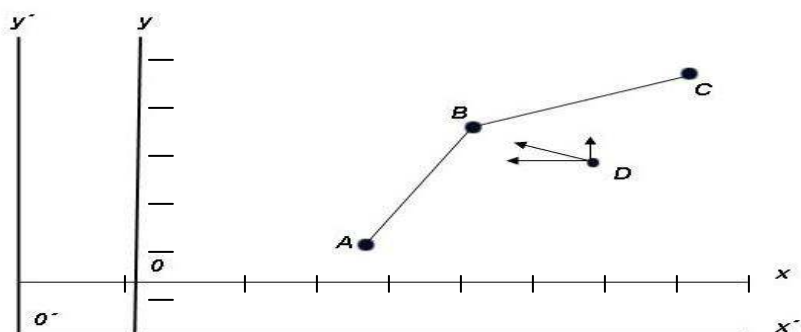


Figura 3.9.3 Translación en el Modelo Aditivo

Ahora veremos esta propiedad del modelo aditivo en detalle. Traslademos el conjunto de datos (X, Y) por la introducción de constantes arbitrarias $(\alpha_i : i = 1, \dots, m)$ y $(\beta_r : r = 1, \dots, s)$ para obtener nuevos datos.

$$x'_{ij} = x_{ij} + \alpha_i \quad (i = 1, \dots, m : j = 1, \dots, n) \quad (3.9.13)$$

$$y'_{rj} = y_{rj} + \beta_r \quad (r = 1, \dots, s : j = 1, \dots, n) \quad (3.9.14)$$

Para mostrar que éste modelo es invariante bajo ésta traslación arbitraria, observamos que los valores de x (3.9.2) se convierten en:

$$\sum_{j=1}^n (x'_{ij} - \alpha_i) \lambda_j + s_i^- = \sum_{j=1}^n x'_{ij} \lambda_j + s_i^- - \alpha_i = x'_{io} - \alpha_i$$

Así que

$$\sum_{j=1}^n x'_{ij} \lambda_j + s_i^- = x'_{io} \quad (i = 1, \dots, m)$$

El cuál es el mismo λ_j, s_i^- que satisface

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{io} \quad (i = 1, \dots, m)$$

Similarmente, el mismo λ_j, s_r^+ que satisface

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{ro} \quad (r = 1, \dots, s)$$

También Satisface

$$\sum_{j=1}^n y'_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y'_{ro} \quad (r = 1, \dots, s)$$

Observemos que la condición de convexidad $e \lambda = 1$ es el factor importante para derivar las relaciones. Las igualdades muestran que si $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ es una solución óptima del problema original, entonces es también óptima para el problema trasladado y viceversa. Finalmente, tenemos:

$$s_i^- = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - x_{io} = \sum_{j=1}^n x'_{ij} \lambda_j - x'_{io}$$

$$s_r^+ = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - y_{ro} = \sum_{j=1}^n y'_{rj} \lambda_j - y'_{ro}$$

De ésta forma el valor de la función objetivo tampoco es afectado, y por lo tanto tenemos el siguiente teorema para el modelo aditivo (3.9.1)-(3.9.5) de Ali y Seiford [2]

Teorema 3.9.3 (Ali y Seiford). -

El modelo aditivo dado en (3.9.1)-(3.9.5) es de traslación Invariante \square .

III.10 Resumen de los Modelos básicos de DEA

En la tabla 3.10.1 Mostramos algunos aspectos importantes a considerar en la elección entre modelos básicos de la teoría DEA. En ésta tabla, ‘Semi-p’ (semipositivo) significa elementos no negativos con al menos un elemento positivo en los datos de cada DMU.

“Libre” permite datos negativos, positivos o cero. Aunque se han desarrollado algunos modelos de DEA bajo la suposición de un conjunto positivo de datos, ésta suposición puede ser atenuada como se ve en la tabla. Por ejemplo, en el modelo BBC-E orientado a entradas ó el modelo BBC-O orientado a salidas, entradas y salidas aparecen sin restricción (libre), debido al teorema de translación de invariancia.

El marcador de eficiencia θ^* del modelo CCR-O orientado a salidas, es el recíproco de $\eta^*(\geq 1)$. “técnica” o “mixta” indica que el modelo mide ya sea eficiencia técnica o mixta. “CRE” y “VRE” significan constante y variable retornos a escala, respectivamente. El retorno a escala para un modelo aditivo (ADDo) depende de la restricción de convexidad $e\lambda = 1$.

Debe ser considerada cuidadosamente la selección del modelo, incluyendo elecciones de múltiples modelos para probar si los resultados dependen o no de los modelos (o métodos utilizados).

Modelo		CCR-E	CCR-S	BCC-E	BCC-O	ADD
Dato	X Y	Semi-p Libre	Semi-p Libre	Semi-p Libre	Libre Semi-p	Libre Libre
Translac. De invar.	X Y	No No	No No	No Si	Si No	Si ^a Si ^a
Unidades de Invariancia		Si	Si	Si	Si	No
θ^*		[0,1]	[0,1]	(0,1]	(0,1]	No
Técnica Mixta	o	Técnica	Técnica	Técnica	Técnica	Mixta
Retornos Escala	a	CRE	CRE	VRE	VRE	C(V)RE ^b

a: El modelo aditivo es de translación invariante sólo cuando la restricción de convexidad es adherida.

b: C(V)RE significa constantes o variables retornos a escala de acuerdo a si la restricción de convexidad se

incluye o no.

Tabla 3.10.1 Resumen de los Modelos Básicos de DEA.

El modelo CCR está basado en la suposición de que constantes retornos a escala prevalecen en las fronteras eficientes, mientras que los modelos BCC y Aditivo suponen variables retornos a escala en sus fronteras, por ejemplo: crecientes, constantes y decrecientes retornos a escala. Si previamente se hace un reconocimiento de la función de producción (ésta debe ser lineal), puede encontrarse un modelo DEA adecuado según sea el caso. Si no puede identificarse las características de la frontera por reconocimientos preliminares (convexa o no convexa), puede ser arriesgado confiar en un modelo en particular, lo acertado es tratar con diferentes modelos y métodos,

comparar resultados y tener un conocimiento experto del problema. Identificamos si una frontera es convexa o no, probando si ese conjunto es convexo o no. Recordemos que un conjunto convexo A es aquél que satisface:

Para todo $x_1, x_2 \in A$, se tiene que:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = x \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

□.

Por otra parte, si el número de DMUs (n) es menor que el número combinado de entradas y salidas ($m + s$), una gran porción de las DMUs serán identificadas como eficientes y la discriminación de eficiencia entre las DMUs se cuestionaría, debido a un inadecuado número de grados de libertad; ya que en el modelo envolvente, el número de grados de libertad aumentará con el número de DMUs y disminuirá con el número de entradas y salidas.

Por lo tanto, es deseable que n exceda a $m + s$ en varias veces. Se recomienda elegir en el modelo envolvente n (= el número de DMUs), igual o mayor que $\max\{m \times s, 3 \times (m + s)\}$ [2].

La selección de los elementos que conformarán las entradas y las salidas es crucial para una exitosa aplicación de la teoría de DEA. Por lo tanto se recomienda generalmente un proceso de selección de un pequeño conjunto de entradas y salidas en un inicio, y gradualmente aumentar el conjunto para observar los efectos de la adición de entradas ó salidas. A esto se refiere el punto número 3 del apartado III.1, cuando menciona que en principio deben preferirse pequeñas cantidades de entradas y grandes cantidades de salidas para que los marcadores de eficiencia reflejen éstos principios.

Capítulo IV Análisis de Sensibilidad

IV.1 El Análisis de Sensibilidad en la teoría “Data Envelopment Analysis” (DEA)

Algunos de los ejemplos expuestos en éste capítulo se han apoyado en la bibliografía [2] y [9].

Una DMU eficiente puede tener variaciones en su entradas o salidas y seguir siendo eficiente; es decir, puede haber rangos de variación en éstos datos de tal forma que la DMU en cuestión puede seguir permaneciendo eficiente o ineficiente.

La teoría de sensibilidad en DEA, nos permite encontrar el rango dentro del cuál las variaciones de los datos no alterarán la clasificación de una DMU de eficiente a ineficiente, o viceversa. Este rango puede ser medido con base en una distancia (o longitud), para la cuál tendría que definirse en qué tipo de magnitud se representaría (o mediría).

Por ejemplo, considerando el caso de una DMU con una entrada y una salida (x_o, y_o) y suponiendo que es técnicamente eficiente bajo el esquema de un modelo orientado a salidas; si su salida ha sido un valor mayor de y_o , ésta DMU permanecería clasificada como eficiente, pero una pequeña reducción en ésta salida no necesariamente disminuiría su eficiencia técnica del 100% con respecto a otras DMUs con quienes se esté comparando.

Veamos un ejemplo numérico. Supongamos que tenemos a siete DMUs para las cuáles tenemos una sola entrada y salida, las cuáles mostramos en la tabla 4.1., y en la figura 4.1.

DMU	A	B	C	D	E	F	G
Entrada (x)	4	5	8	12	16	8	14
Salida (y)	6	7	14	20	22	9	19

Tabla 4.1 Entrada y salida de siete DMUs.

La línea \overline{JACDE} y su extensión, es la frontera de eficiencia del conjunto factible de producción (con variables retornos a escala. Ver capítulo III, sección III.6). Los puntos A, C, D, y E son eficientes, mientras los puntos B, F, y G son ineficientes.

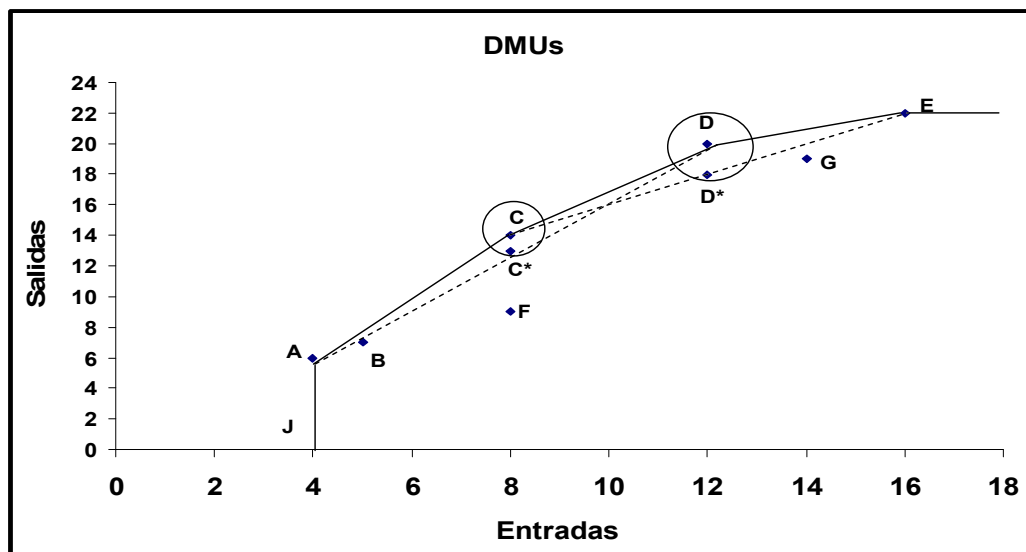


Fig. 4.1 Frontera de Eficiencia de siete DMUs.

Observemos ahora los dos puntos C y D. La DMU en el punto C usa 8 unidades de la entrada (x) para producir 14 unidades de la salida (y). Aún si ésta DMU redujera su salida a 13 unidades, seguiría permaneciendo eficiente en el punto C*, sobre la nueva frontera $\overline{JAC^*DE}$ (a través de la línea punteada) y su extensión. Se consideraría ineficiente si su salida se redujera aún más de éste nivel; siendo entonces el punto C* un punto crucial, el cuál muestra su combinación exacta de entradas-salidas.

Similarmente, para la DMU en el punto D, el punto crucial (o crítico) es D*, sobre la frontera $\overline{JACD^*E}$ (a través de la línea punteada) y su extensión. Donde la salida producida de sus 12 unidades de entrada ($x=12$), sólo necesita ser de 18 unidades para (y). Así, la DMU D puede permitirse una reducción del 10% en su salida sin convertirse técnicamente ineficiente. Por otra parte la DMU C puede reducir solamente su salida en un 7.14% y permanecer aún 100% eficiente.

Veamos el siguiente ejemplo gráficamente en la figura 4.2, en donde el punto F que está centrado dentro del cuadrado cuya distancia (o radio) hacia la frontera de eficiencia dependerá del tipo de magnitud en que se mida; representa su rango.

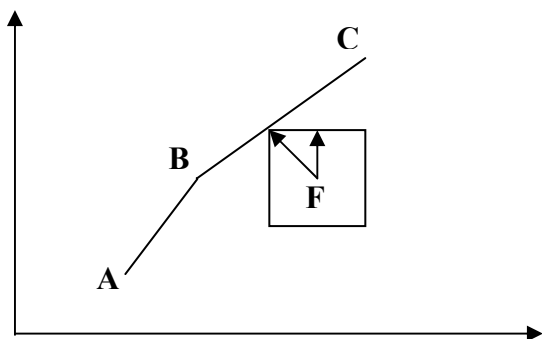


Figura 4.2- Rango de Estabilidad -.

En éste caso pueden hacerse cambios en entradas y salidas para éste punto ineficiente, antes que su estatus cambie a eficiente; como se observa en el extremo superior izquierdo del cuadrado que rodea a F, el cuál alcanza a la frontera de eficiencia. En ésta gráfica la distancia se mide con la función de la suma de las diferencias, en valor absoluto, entrada por entrada.

Por otra parte, supongamos que una empresa petrolera calificada como eficiente tiene un declive en su producción de petróleo y de gas, y desea saber cuál es el límite que puede tolerarse para el nivel de reducción en éstas salidas, sin que se vuelva ineficiente.

Podríamos entonces hacer una reducción de todas o algunas de sus salidas en un 5%, por ejemplo.

De igual forma ésta empresa podría ir incrementando sus entradas en un porcentaje, por ejemplo en parte de sus costos; en la creación de fuentes de empleo al contratar más empleados y determinar hasta qué punto puede seguir contratando personal de tal forma que no se vuelva ineficiente.

Existe en la teoría de DEA un procedimiento que permite calcular directamente los rangos exactos ó radios de variación de una DMU, para que se mantenga en el estado eficiente (o ineficiente) en el que se encuentra. Dicho procedimiento así como su demostración tiene que ver con tópicos relacionados con Topología; lo cuál está fuera del alcance de éste trabajo. Si el lector desea profundizar en éste tema puede consultar los siguientes artículos que forman parte de la bibliografía de éste trabajo: [15], [19], [20], [21], [22].

IV.2 La Robustéz de los Datos

Hablar aquí de la robustéz de los datos, es en el sentido en el que la información con la que trabajamos sea confiable y consistente.

La información con la que se trabajó para el modelado, ha sido extraída en su mayor parte de una revista especializada en información sobre la industria petrolera a nivel mundial, llamada "Energy Intelligence Top 100" [30], quien a su vez no puede garantizar que la información esté libre de errores. La mayoría de los datos se recaban de las propias compañías, pero en ocasiones se trabaja sobre datos estimados ya que algunas compañías no tienen disponible toda la información.

Alguna información de PEMEX sobre los años 2004 y 2005 fue proporcionada directamente por la Subdirección de Planeación y Evaluación del área PEMEX Exploración y Producción (PEP).

Se han elegido 41 empresas petroleras incluyendo a PEMEX, para hacer la comparación de eficiencia entre ellas. Algunas empresas petroleras tienen participación estatal y algunas otras son privadas. Cabe aclarar que se eligieron también empresas grandes y pequeñas en términos de su producción y sus recursos, ya que el tamaño de la empresa no implica en lo absoluto que se esté desempeñando de manera

completamente eficiente, de acuerdo con la teoría y bajo los criterios expuestos en éste trabajo.

Se ha hecho también un cálculo estimado del 15% del total de empleados de cada empresa petrolera, que podrían pertenecer al área de exploración y producción; por no estar disponible el dato exacto sobre el número de personas desempeñándose en ésta área (por cada empresa). En las tablas donde se muestra la información se señala de qué empresas se ha hecho éste supuesto.

Capítulo V

Aplicación a la Compañía Petróleos Mexicanos (PEMEX)

V.1 Breve descripción de la compañía Petróleos Mexicanos (PEMEX)

La siguiente información se ha extraído del sitio web de PEMEX [27].

PETRÓLEOS MEXICANOS (PEMEX)

Visión y propósito

PEMEX orgullo de México y de los petroleros, se ha convertido en una de las empresas estatales más competitivas del mundo, ya que opera en forma oportuna, moderna, transparente, eficiente y eficaz, con estándares de excelencia y honradez.

La economía nacional ha dado un giro gracias a que PEMEX, a través de sus alianzas con la industria, se ha posicionado como palanca del desarrollo nacional generando altos índices de empleo.

Su tecnología de vanguardia le ha permitido aumentar sus reservas y reconfigurar su plataforma de exportación, vendiendo al exterior crudo de mayor calidad y valor, además de ser autosuficiente en gas natural. Abastece materias primas, productos y servicios de altísima calidad a precios competitivos. Cuenta con una industria petroquímica moderna y en crecimiento.

PEMEX es una empresa limpia y segura, comprometida con el medio ambiente, su alta rentabilidad y moderno régimen fiscal le han permitido seguir siendo un importante contribuyente al erario público, cuyos recursos se utilizan en beneficio del país.

Propósito de PEMEX:

Maximizar el valor económico de los hidrocarburos y sus derivados, para contribuir al desarrollo sustentable del país.

Estructura Orgánica

Petróleos Mexicanos	
	Dirección Corporativa de Administración
	Dirección Corporativa de Finanzas
	Dirección Corporativa de Operaciones
	Dirección Corporativa de Ingeniería y Desarrollo de Proyectos
	Organo Interno de Control
Pemex Exploración y Producción	
	Pemex Exploración y Producción Nivel Central 1
	Pemex Exploración y Producción Nivel Central 2
	Pemex Exploración y Producción Nivel Central 3
	Pemex Exploración y Producción Nivel Regional 1
	Pemex Exploración y Producción Nivel Regional 2
	Pemex Exploración y Producción Nivel Regional 3
	Pemex Exploración y Producción Nivel Regional 4
Pemex Refinación	
	Pemex Refinación Nivel Regional
Pemex Gas y Petroquímica Básica	
Pemex Petroquímica	
PMI Comercio Internacional	
Instituto Mexicano del Petróleo	

PEMEX opera por conducto de un corporativo y cuatro organismos subsidiarios:

- **Petróleos Mexicanos**
- **PEMEX Exploración y Producción**
- **PEMEX Refinación**
- **PEMEX Gas y Petroquímica Básica**
- **PEMEX Petroquímica**

Petróleos Mexicanos es el responsable de la conducción central y de la dirección estratégica de la industria petrolera estatal, y de asegurar su integridad y unidad de acción.

PEMEX Exploración y Producción tiene a su cargo la exploración y explotación del petróleo y el gas natural.

PEMEX Refinación produce, distribuye y comercializa combustibles y demás productos petrolíferos.

PEMEX Gas y Petroquímica Básica procesa el gas natural y los líquidos del gas natural; distribuye y comercializa gas natural y gas LP; y produce y comercializa productos petroquímico-básicos.

PEMEX Petroquímica a través de sus siete empresas filiales (Petroquímica Camargo, Petroquímica Cangrejera, Petroquímica Cosoleacaque, Petroquímica Escolín, Petroquímica Morelos, Petroquímica Pajaritos y Petroquímica Tula) elabora, distribuye y comercializa una amplia gama de productos petroquímicos secundarios.

P.M.I. Comercio Internacional realiza las actividades de comercio exterior de Petróleos Mexicanos.

V.2 La Producción de Petróleo Crudo en Barriles

El petróleo es un compuesto complejo de hidrocarburos, es decir, una combinación de carbono e hidrógeno exclusivamente [27].

Los líquidos del gas natural (LGN) son la parte del gas natural que se encuentra en fase líquida en una determinada condición de presión y temperatura en la superficie obtenida en los procesos de separación de campo, en unidades de procesamiento de gas natural o en operaciones de transferencia en gasoductos [27].

Los condensados son hidrocarburos líquidos del gas natural que se recuperan en instalaciones de separación en campos productores de gas asociado y no asociado. Incluyen hidrocarburos líquidos recuperados de gasoductos, los cuales se forman por condensación durante el transporte del gas natural [27].

La anterior descripción obedece a que en el análisis de eficiencia que se realizará, se utilizará como dato la producción de petróleo crudo, líquidos del gas natural y condensados; en millones de barriles diarios.

Los pozos productores de petróleo se clasifican en fluyentes y de producción artificial o bombeo. Los fluyentes son aquellos en los que el aceite surge del yacimiento al exterior, mediante energía natural, la que puede ser de empuje hidráulico o de gas. Los de producción artificial o bombeo (neumático, mecánico, hidráulico, etc.), son un sistema de explotación que se aplica cuando la presión no permite que el petróleo fluya por energía natural.

El aceite que producen los pozos es enviado por su propia energía o la que se les proporcione artificialmente hasta un primer centro de recolección, en donde se separa el aceite del gas y del agua. Posteriormente se miden y envían a otros centros recolectores de mayor importancia y de ahí a los centros de tratamiento y refinación. En muchos de sus pozos PEMEX utiliza gas para bombeo neumático en la extracción del petróleo.

Para hacer el análisis de eficiencia de PEMEX con la teoría DEA, se utilizarán únicamente los costos de producción (extracción) del petróleo y del gas natural, dentro de los cuáles se consideran los costos necesarios para operar y mantener pozos, equipos e instalaciones relacionadas con la producción y la mano de obra [26]. Estos costos se encuentran dentro de la cadena de valor de PEMEX.

En la cadena de valor de PEMEX, se toman en cuenta los siguientes rubros: Costos de exploración, Costos de desarrollo, Costos de producción (extracción), Costos de transporte y comercialización. Si el lector se interesa en ver a detalle la estructura de éstos costos, puede referirse a la bibliografía [26] de éste trabajo.

La definición de los rubros que comprenden los costos de producción de hidrocarburos, puede verse también en un documento llamado “Financial Accounting Standards Board (FASB), Statement of Financial Accounting Standards No. 19 (SFAS)”, esta definición fue creada por un organismo internacional llamado “Financial Accounting Foundation”, ubicado en Connecticut, U.S.A.

Este documento establece estándares a nivel internacional, sobre contabilidad financiera y el reporte de actividades relacionadas con la producción de crudo y gas, para la empresa petrolera.

En particular, en los párrafos 23 a 25 se exponen de manera detallada estos rubros que involucran los costos de extracción (producción), del petróleo crudo y del gas natural. Si el lector se interesa en conocer a detalle dichos rubros, puede referirse a la bibliografía [22] de éste trabajo.

Otro dato que se utilizará también para el análisis, son las reservas probadas de petróleo y líquidos del gas natural, así como las reservas de gas natural. Éstas son reservas de petróleo y/o gas natural que, basado en el análisis de datos geológicos y de ingeniería, se estima poder recuperar comercialmente de los reservorios descubiertos y evaluados, con alto grado de acierto y cuyo estimado considera las condiciones económicas vigentes, los métodos operativos comúnmente viables y los reglamentos instituidos por las legislaciones petrolífera y tributaria. Las reservas probadas son estimadas según las definiciones previstas por un organismo internacional llamado “Securities and Exchange Commission” (SEC).

V.3 La Producción de Gas

La siguiente información ha sido extraída de los sitios de Internet [28] y [29].

El gas natural es un combustible compuesto por metano, propano y otros componentes más pesados. No tiene olor ni color. Generalmente se encuentra en forma natural mezclado con otros hidrocarburos. El gas natural contiene impurezas como agua, ácido sulfhídrico, dióxido de carbono y nitrógeno que tienen que extraerse antes de su transporte y comercialización.

Se clasifica en gas asociado y no asociado. El gas asociado es el que se extrae junto con el petróleo crudo y contiene grandes cantidades de hidrocarburos como etano, propano, butano y naftas. El gas no asociado es el que se encuentra en depósitos que contienen únicamente gas natural.

Se encuentra generalmente en depósitos subterráneos profundos formados por roca porosa o en las bóvedas de los depósitos naturales de petróleo crudo.

Se extrae usando pozos de perforación para luego llevarlo a la superficie por medio de ductos. En la mayoría de los pozos, la presión del gas natural es suficiente para impulsarlo hacia afuera y conducirlo por conexiones a puntos centrales de recolección. Luego de ser procesado, el gas natural es comprimido y distribuido.

V.4 Análisis de Eficiencia de la Compañía Petróleos Mexicanos (PEMEX)

Se llevará a cabo una comparación de la eficiencia de PEMEX con 40 compañías petroleras. Para lo cual se eligió a algunas de las más destacadas en producción, así como a empresas petroleras privadas, con participación estatal y empresas pequeñas en términos de sus recursos y su producción, ya que la eficiencia de una empresa no depende de su tamaño. El análisis se realizará solamente en el área de exploración y producción.

V.4.1 Estado Actual

Actualmente PEMEX es la tercera empresa productora de petróleo a nivel mundial, contando casi con 6,000 pozos productores. Durante los últimos años su campo petrolero más grande y productivo había sido Cantarell, ubicado en Campeche. Este campo petrolero durante 2005 representó el 61% de la producción nacional de petróleo crudo y el 16% de la producción total de gas [23]. Actualmente se le considera un campo maduro y ha estado disminuyendo su producción paulatinamente.

Por ésta razón se están intensificando las actividades de extracción en un complejo petrolero llamado Ku-Maloob-Zaap, ubicado a 105 km. al Noroeste de Ciudad del Carmen, Campeche. Las nuevas reservas incorporadas de éste complejo permitirán reemplazar producción de campos maduros. En particular, se espera mantener la producción del complejo por un período de más de 15 años y por arriba de los 750 miles de barriles por día de aceite, y más de 300 millones de pies cúbicos diarios de gas.

V.4.2 Datos de Entrada

La información con la que se trabajará para la elaboración de los modelos, es de los años 2004, 2005 y 2006. Se muestra a continuación en las siguientes tablas, de las que explicamos el significado de los títulos de las columnas:

Cosprod = Costos de producción (extracción) en miles de dólares americanos.

NumEmp = Número de Empleados en el área de Exploración y Producción. (En miles)
(* Se realizó una estimación del 15% del total de empleados de la empresa, por no estar disponible la información).

PrdLiq = Producción de Petróleo Crudo, Líquidos del Gas Natural y Condensados, en millones de barriles diarios.

PrdGas = Producción de Gas Natural en miles de millones de pies cúbicos por día

(mmpc/d).

ResGas = Reservas de Gas Natural, en billones (millones de millones) de pies cúbicos.

ResLiq = Reservas de Petróleo y Líquidos del Gas Natural, en millones de barriles.

DATOS 2006

	Compañía	Cosprod	NumEmp	PrdLiq	PrdGas	ResGas	ResLiq
1	Exxon Mobil	11.715	12.885	2.571	9.864	60.362	11.651
2	BP	11.008	15.435	2.531	8.503	48.507	9.934
3	PEMEX	5.934	48.371	3.754	3.363	14.807	14.803
4	Shell	9.868	16.800 *	2.333	8.808	40.566	5.503
5	Petrobras	5.240	20.585	1.649	2.154	11.247	9.945
6	Chevron	6.321	8.480 *	1.737	3.958	19.675	8.140
7	Total	7.686	16.710 *	1.695	4.894	22.785	7.003
8	ConocoPhillips	7.898	5.370 *	1.195	3.317	17.696	5.539
9	Eni	6.119	10.725 *	1.034	3.540	18.435	4.008
10	Repsol YPF	1.474	5.001 *	0.567	3.360	18.207	1.683
11	Statoil	5.330	3.585 *	0.719	2.137	14.416	1.720
12	Petrochina	7.179	63.626 *	2.124	2.786	44.645	11.019
13	Petro-Canada	2.489	0.718 *	0.306	0.873	2.473	0.801
14	Marathon	0.944	3.871 *	0.170	0.999	3.472	0.560
15	Pogo	1.086	0.039 *	0.051	0.324	1.080	0.116
16	Lukoil	2.289	22.500 *	1.735	0.475	24.598	15.972
17	Encana	4.707	0.614 *	0.261	3.005	10.460	0.860
18	Occidental	1.649	1.081 *	0.460	0.637	2.975	2.036
19	Anadarko	2.993	0.495 *	0.230	1.740	7.528	1.113
20	CNOOC	1.550	0.379 *	0.319	0.364	4.646	1.455
21	BG	1.852	0.776 *	0.128	1.964	9.076	0.635
22	Devon Energy	3.103	0.585 *	0.279	2.434	7.494	0.828
23	Burlington	1.644	0.332 *	0.151	1.914	8.226	0.630
24	Apache	3.337	0.396 *	0.242	1.235	6.028	0.932
25	Unocal	1.626	0.989 *	0.159	1.510	6.568	0.659
26	CNR	3.537	0.192 *	0.257	1.104	2.690	1.066
27	Gazprom	5.826	49.920 *	0.240	52.574	1140.000	14.372
28	OMV	2.105	8.622 *	0.076	0.299	3.493	0.827
29	Talismán	2.182	0.281 *	0.196	1.014	4.082	0.562
30	Kerr-McGee	1.508	0.613 *	0.159	0.921	4.153	0.526
31	Amerada Hess	1.434	1.668 *	0.246	0.575	2.400	0.646
32	Pioneer	0.653	0.233 *	0.069	0.685	3.681	0.409
33	EOG Resources	1.510	0.188 *	0.033	1.036	5.047	0.100
34	RWE-DEA	0.309	0.143 *	0.097	0.208	2.534	0.335
35	Santos	0.589	0.229 *	0.036	0.522	2.693	0.163
36	Noble Energy	0.632	0.084 *	0.046	0.371	1.987	0.193
37	El paso	0.728	0.960 *	0.024	0.669	1.793	0.065
38	Nexen	1.227	0.431 *	0.134	0.244	0.600	0.606
39	Sinopec	2.562	58.418 *	0.749	0.566	3.033	3.267
40	WoodsidePetroleum	0.759	0.391 *	0.067	0.521	3.901	0.266
41	Murphy Oil	0.839	0.874 *	0.097	0.140	0.269	0.341

Tabla 5.1. Datos 2006

En el caso de PEMEX se tomó el mismo dato del año 2005 para NumEmp, en el área de Exploración y Producción, para el año 2006.

DATOS 2005

	Compañía	Cosprod	NumEmp	PrdLiq	PrdGas	ResGas	ResLiq
1	Exxon Mobil	9.230	13.200 *	2.516	10.119	54.769	12.856
2	BP	15.370	17.000	2.121	8.613	48.024	10.081
3	PEMEX	4.366	48.371	3.723	4.818	14.850	16.041
4	Shell	8.276	17.850 *	2.334	8.849	44.920	7.257
5	Petrobras	4.086	18.310	1.701	2.010	11.202	9.772
6	Chevron	5.675	9.230 *	1.808	4.292	20.191	8.599
7	Total	6.042	14.849	1.661	4.786	22.267	7.323
8	ConocoPhillips	4.508	12.024	1.241	3.522	16.060	5.171
9	Eni	6.475	10.861 *	0.981	3.486	18.008	4.138
10	Repsol YPF	2.472	4.668 *	0.594	3.021	19.942	1.882
11	Statoil	3.056	2.899 *	0.740	1.921	13.886	1.789
12	Petrochina	6.374	62.584 *	2.120	2.407	41.147	10.997
13	Petro-Canada	1.353	0.677 *	0.320	0.868	2.545	0.768
14	Marathon	0.971	4.152 *	0.185	1.170	2.784	0.578
15	Pogo	0.520	0.033 *	0.066	0.297	1.012	0.115
16	Lukoil	1.784	6.150 *	1.622	0.364	24.473	15.977
17	Encana	4.732	0.555 *	0.226	2.537	8.411	0.957
18	Occidental	1.237	1.070 *	0.446	0.606	2.594	2.038
19	Anadarko	2.719	0.525 *	0.230	1.762	7.724	1.226
20	CNOOC	0.998	0.367 *	0.306	0.291	4.154	1.436
21	BG	1.076	0.679 *	0.118	1.859	8.758	0.645
22	Devon Energy	2.587	0.589 *	0.230	2.364	7.316	0.870
23	Burlington	1.585	0.317 *	0.111	1.899	8.074	0.613
24	Apache	1.595	0.353 *	0.215	1.217	4.876	0.844
25	Unocal	1.523	1.005 *	0.160	1.728	6.505	0.675
26	CNR	1.799	0.243 *	0.222	1.030	2.552	0.895
27	Gazprom	3.360	48.330 *	0.221	52.244	988.400	13.561
28	OMV	0.595	0.921 *	0.078	0.250	1.039	0.237
29	Talisman	2.048	0.264 *	0.186	0.891	3.514	0.536
30	Kerr-McGee	0.869	0.587 *	0.150	0.726	3.181	0.496
31	Amerada Hess	1.286	1.755 *	0.259	0.683	2.332	0.646
32	Pioneer	0.698	0.152 *	0.058	0.581	2.198	0.423
33	EOG Resources	1.204	0.165 *	0.027	0.955	4.645	0.095
34	RWE-DEA	0.336	0.135 *	0.117	0.250	2.089	0.541
35	Santos	0.494	0.255 *	0.044	0.630	2.754	0.177
36	Noble Energy	0.493	0.087 *	0.040	0.368	1.642	0.183
37	El paso	1.429	1.136 *	0.033	0.970	2.203	0.078
38	Nexen	1.038	0.431 *	0.143	0.247	0.661	0.537
39	Sinopec	2.490	60.077 *	0.742	0.514	2.888	3.257
40	Woodside Petroleum	0.540	0.333 *	0.077	0.512	3.626	0.344
41	Murphy Oil	0.763	0.718 *	0.084	0.215	0.449	0.351

Tabla 5.2. Datos 2005

DATOS 2004

	Compañía	Cosprod	NumEmp	PrdLiq	PrdGas	ResGas	ResLiq
1	Exxon Mobil	8.024	13.875 *	2.496	10.452	55.718	12.623
2	BP	9.699	15.600	2.018	8.707	48.789	9.165
3	PEMEX	0.676	47.975	3.529	4.573	14.985	17.196
4	Shell	13.146	17.400 *	2.372	9.423	53.438	10.133
5	Petrobras	3.380	17.556	1.535	1.650	9.473	8.955
6	Chevron	6.283	9.906 *	1.897	4.376	19.335	8.668
7	Total	5.811	14.597 *	1.589	4.532	21.575	7.231
8	ConocoPhillips	3.276	11.814 *	0.986	2.047	16.040	5.137
9	Eni	5.330	12.098 *	0.921	3.306	18.629	3.783
10	Repsol YPF	1.026	4.890 *	0.584	2.336	18.206	2.019
11	Statoil	2.162	2.567 *	0.742	1.800	13.470	1.866
12	Petrochina	5.565	62.940 *	2.109	2.175	38.819	10.999
13	Petro-Canada	0.957	0.670 *	0.245	0.825	2.759	0.830
14	Maratón	0.873	4.225 *	0.207	1.230	3.377	0.720
15	Pogo	0.382	0.033 *	0.052	0.279	0.874	0.118
16	Lukoil	1.411	22.500 *	1.545	0.345	24.164	15.258
17	Encana	3.093	0.547 *	0.204	1.978	7.666	1.204
18	Occidental	1.038	1.087 *	0.410	0.627	2.049	1.970
19	Anadarko	2.310	0.570 *	0.247	1.759	7.180	1.131
20	CNOOC	1.397	0.307 *	0.299	0.273	3.548	1.425
21	BG	1.494	0.691 *	0.115	1.547	8.385	0.522
22	Devon Energy	3.426	0.515 *	0.167	2.085	5.836	0.636
23	Burlington	1.601	0.300 *	0.109	1.916	7.890	0.588
24	Apache	1.037	0.294 *	0.161	1.080	4.055	0.637
25	Unocal	1.546	0.992 *	0.167	1.826	6.559	0.681
26	CNR	1.098	0.252 *	0.192	0.978	2.588	0.848
27	Gazprom	2.489	48.000 *	0.204	48.000	1320.000	15.000
28	OMV	0.314	0.874 *	0.053	0.180	1.019	0.173
29	Talisman	1.333	0.235 *	0.273	1.036	3.413	0.612
30	Kerr-McGee	0.988	0.671 *	0.191	0.762	3.275	0.487
31	Amerada Hess	1.404	1.749 *	0.325	0.754	2.477	0.782
32	Pioneer	0.627	0.147 *	0.054	0.359	2.135	0.381
33	EOG Resources	0.821	0.150 *	0.027	0.924	4.091	0.085
34	RWE-DEA	0.603	0.110 *	0.094	0.232	4.290	0.470
35	Santos	0.378	0.261 *	0.048	0.653	3.136	0.209
36	Noble Energy	0.544	0.094 *	0.034	0.388	1.601	0.201
37	El Paso	2.301	1.778 *	0.049	1.334	4.419	0.136
38	Nexen	0.944	0.415 *	0.223	0.279	0.803	0.550
39	Sinopec	2.443	62.831 *	0.739	0.490	3.329	3.320
40	WoodsidePetroleum	0.363	0.363 *	0.098	0.465	3.810	0.309
41	Murphy Oil	0.632	0.602 *	0.076	0.297	0.525	0.368

Tabla 5.3. Datos 2004

V.4.3 Modelo Propuesto con la aplicación de la Teoría “Data Envelopment Analysis”.

Veremos en éste apartado la aplicación la teoría DEA con el modelo CCR, considerando cuatro modelos para cada año: 2004, 2005, 2006 y teniendo en cuenta los siguientes datos:

Modelo 1 CCR-E orientado a entradas y **Modelo 1-A CCR-S** orientado a salidas, para los que usaremos las variables:

Variables de entrada (Entradas): CosPrd, NumEmp.

Variables de salida (Salidas): PrdLiq, PrdGas, ResGas, ResLiq.

Modelo 2 CCR-E orientado a entradas y **Modelo 2-A CCR-S** orientado a salidas, para los que usaremos las variables:

Variables de entrada (Entradas): CosPrd, NumEmp.

Variables de salida (Salidas): PrdLiq, PrdGas.

A continuación plantearemos el modelo 1 CCR-E orientado a entradas y el modelo 1-A CCR-S orientado a salidas y daremos los resultados. En los restantes modelos sólo se darán los resultados, ya que se trata del mismo planteamiento para los modelos CCR orientados a entradas o salidas.

Modelo 1 CCR-E orientado a entradas:

Tenemos las siguientes variables:

Variables de entrada (Entradas): CosPrd = x_{n1} , NumEmp = x_{n2} .

Variables de salida (Salidas): PrdLiq = y_{n1} , PrdGas = y_{n2} , ResGas = y_{n3} ,
ResLiq = y_{n4} .

Para los años 2006 nuestras matrices de datos de entrada y salida serán X y Y , respectivamente; estos datos son tomados de la tabla 5.1.

Tenemos ($m = 2$) entradas, ($s = 4$) salidas y ($n = 1, \dots, 41$) DMUs (Unidades de Toma de Decisión), que son las empresas petroleras; con entradas = $(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ y salidas = $(y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{ns})$.

La matriz X de entradas de $(n \times m) = (41 \times 2)$ tendrá a las variables de entrada: CosPrd, NumEmp.

La matriz Y de salidas de $(n \times s) = (41 \times 4)$ contendrá a las variables de salida: PrdLiq, PrdGas, ResGas, ResLiq.

Recordemos que a la unidad de toma de decisiones (empresa petrolera) a ser evaluada, se le designa como “ o ” (DMU_o), donde $o = 1, 2, \dots, n$.

El correspondiente problema de programación fraccional será para obtener los valores de las variables (v_i) , con $(i = 1, \dots, m)$ que son las entradas (o pesos); y salidas (o pesos) (u_r) con $(r = 1, \dots, s)$, con el objetivo de maximizar la proporción $\frac{\text{salidas}}{\text{entradas}}$.

Tenemos entonces que primeramente el problema de Programación Fraccional (FPo), se plantea como el que hemos visto en el capítulo III, sección III.1 para el modelo CCR; en el cuál necesitaremos $n = 41$ optimizaciones, una para cada j -ésima Unidad de Toma de Decisiones (DMU) a ser evaluada, por eso es que $(j = 1, \dots, 41)$.

Se reemplaza ahora éste problema de programación fraccional (FPo) por uno de programación Lineal (LPo), como el visto en el capítulo III, sección III.1.

En dicha sección sustentamos que un problema fraccional se puede representar como un problema de programación lineal (LPo), con el teorema 3.1.

Utilizando el software de DEA anexo en la bibliografía [2]; tenemos los primeros resultados de θ^* (el marcador que nos dá la calificación de eficiencia) y los pesos óptimos $(v = v^*, u = u^*)$; donde DMU_o es eficiente si el valor óptimo $\theta^* = 1$ y existe una solución óptima (u^*, v^*) , tal que $u^* > 0$ y $v^* > 0$. En otro caso DMU_o es CCR-ineficiente. Veamos la tabla 5.4.

Rango	DMU	Calificación (θ^*)
1	RWE-DEA	1
1	EOG Resources	1
1	Gazprom	1
1	CNR	1
1	Burlington	1
1	CNOOC	1
1	Occidental	1
1	Lukoil	1
1	Pogo	1
1	Repsol YPF	1
11	Noble Energy	0.99112469
12	Pioneer	0.98668405
13	PEMEX	0.9491637
14	Talisman	0.87749736
15	Devon Energy	0.85096515
16	Chevron	0.81584904

Rango	DMU	Calificación (θ^*)
17	EnCana	0.80674661
18	Anadarko	0.79932035
19	BG	0.77754928
20	Apache	0.77156904
21	Exxon Mobil	0.76937261
22	BP	0.69286598
23	Shell	0.68388319
24	Unocal	0.67957823
25	Petrobras	0.66443102
26	Santos	0.66372739
27	Petro-Canada	0.6002446
28	Total	0.58695442
29	ConocoPhillips	0.58564894
30	Kerr-McGee	0.57885121
31	Woodside Petroleum	0.55682929
32	Amerada Hess	0.50314768
33	Nexen	0.48841008
34	Eni	0.4841994
35	Marathon	0.4480159
36	Statoil	0.44486837
37	Petrochina	0.43899936
38	El Paso	0.41519156
39	Sinopec	0.40048141
40	Murphy Oil	0.33868438
41	OMV	0.12661569

Tabla 5.4 –marcador de eficiencia para el Modelo 1 CCR-E orientado a entradas-

Como podemos observar, PEMEX aparece en el lugar no. 13 comparado con las 40 empresas petroleras restantes y tiene una eficiencia casi del 95%.

Veamos a continuación en la tabla 5.5 los resultados para los pesos óptimos: v_1^*, v_2^* y $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$. Que son las entradas (o pesos) y salidas (o pesos) que maximizan la proporción de las *entradas/salidas*.

Tabla 5.5 – Pesos óptimos para el Modelo 1 CC R-E. Aquí nos referimos a la definición 3.1 de eficiencia CC R mostrada en el capítulo	33	EOG Resources	1	0.01203727	5.2224666	0.03756436	0.00268225	0.19716637	0.00882899
				v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	34	RWE-DEA	Calificación	2.78811147	0.96834655	5.02680193	0.35893435	0.01655317	1.181481
	No	DMU	(θ^*)	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	35	Santos	0.66372739	1.32732696	0.95285773	3.41090495	1.03627359	0	0
	1	Exxon Mobil	0.76937261	0.05287475	0.02953608	0	0.02062636	0	0.04857216
	36	Noble Energy	0.99112469	0.11449483	11.0433246	0	0	0.35595283	1.47070677
	2	BP	0.69286598	0.07122018	0.01399470	0.17353826	0.01750436	0	0.01054973
	37	El Paso	0.41519156	0.60480102	0.58302589	0	0.82061519	0	0
	3	PEMEX	0.9491637	0.07795385	0.01111041	0.24432633	0.00950420	0	0
	38	Nexen	0.48841008	0.61041812	0.58240596	0	0.02608993	0	0.79545238
	4	Shell	0.68388319	0.08154991	0.01162295	0.25559727	0.00994264	0	0
	39	Sinopec	0.40048141	0.39032006	0	0.50374038	0.04095384	0	0
	5	Petrobras	0.66443102	0.1223408	0.01743669	0.38344583	0.01491590	0	0
	40	Petroleum	0.55682939	0.86182518	0.69047234	2.47165497	0.75991824	0	0.08307375
	8	Chevron	0.87584964	0.09043258	0.9551693	0.03327760	0	0	0
	41	Murphy Oil	0.33868438	1.01946277	0.16552716	3.49159154	0	0	0
	7	Total	0.58695472	0.09532652	0.01415698	0.31131976	0.01241022	0	0
	8	ConocoPhillips	0.58564894	0.09176242	0.05125891	0	0.03579638	0	0.08429542
	9	Eni	0.4841994	0.12155908	0.02388625	0.29619625	0.02987656	0	0.01800635
	10	Repsol YPF	1	0.42020718	0.07610770	1.08904081	0.08757056	0.00063816	0.04554835
	11	Statoil	0.44486837	0.12652479	0.09082926	0.32513769	0.09878071	0	0
	12	Petrochina	0.43899936	0.08375830	0.00626629	0.18783089	0.01437421	0	0
	13	Petro-Canada	0.6002446	0.10125584	1.04174683	1.54586723	0.14571504	0	0
	14	Marathon	0.4480159	0.81063226	0.06064664	1.81787095	0.13911696	0	0
	15	Pogo	1	0.45595465	12.9444424	5.65906871	2.06028794	0.00468553	0.33442955
	16	Lukoil	1	0.33338051	0.01052853	0.17844659	0.01274182	0.00058762	0.04194143
	17	EnCana	0.80674661	0.02981590	1.40009211	0	0.26846809	0	0
	18	Occidental	1	0.41549547	0.29125621	0.15529407	0.01108864	0.00051138	0.45185654
	19	Anadarko	0.79932035	0.11388491	1.33160092	0	0.19037122	0	0.42055206
	20	CNOOC	1	0.31807516	1.33768734	1.94220997	0.07087630	0.00326864	0.23329893
	21	BG	0.77754928	0.39176046	0.3536851	0	0.28808686	0	0.33345935
	22	Devon Energy	0.85096515	0.10962947	1.12789701	1.67370706	0.15776536	0	0
	23	Burlington	1	0.13659866	2.33563796	0.42627951	0.03043811	0.07500220	0.41334147
	24	Apache	0.77156904	0.05490221	2.06260437	1.09229128	0	0.06437408	0.1278837
	25	Unocal	0.67957823	0.42808576	0.307313	1.10007548	0.33421604	0	0
	26	CNR	1	0.13778561	2.67006409	3.32515039	0.0307026	0.00141593	0.10106176
	27	Gazprom	1	0.01961464	0.01774289	0.02996356	0.01481931	0.00009867	0.00704252
	28	OMV	0.12661569	0.14448176	0.08070818	0	0.05636212	0	0.13272481
	29	Talisman	0.87749736	0.19712193	2.02804254	3.00944952	0.28367382	0	0
	30	Kerr-McGee	0.57885121	0.51333155	0.368509	1.31913627	0.40076932	0	0
	31	Amerada Hess	0.50314768	0.59818179	0.08525618	1.87484729	0.07293087	0	0
	32	Pioneer	0.98668405	1.15827258	1.04569959	0	0.85175292	0	0.98590048

o III sección III.1, que nos dice que ineficiencia es obtener $\theta < 1$ ó $\theta = 1$ y si al menos un elemento de (v^*, u^*) es cero para cada solución óptima de (LPo).

En el caso de PEMEX como $\theta < 1$ entonces es CCR-ineficiente y como consecuencia, podría tener también déficit en alguna salida o exceso en alguna entrada.

Para detectar ésta situación de manera más detallada, planteamos el problema dual de programación lineal (DLPo); con el que buscamos una actividad $\lambda \in P$ (que pertenezca al conjunto factible de producción) y que garantice por lo menos el nivel de salidas y_o de DMUo en todos los componentes; mientras se reduce el vector de entrada x_o radialmente a θx_o .

Recordemos que nuestro modelo es orientado a entradas, por tal motivo se busca la reducción de las mismas, garantizando por lo menos los niveles de salidas; esto independientemente de que pudiéramos encontrar algún déficit en las salidas (o exceso en las entradas). En la función objetivo buscamos el mínimo θ que reduzca éste vector de entradas.

Este modelo es el dual (DLPo) planteado en el capítulo III, sección III.2, (3.27).

Podemos obtener además el Conjunto Referencia de cada DMU. Recordemos que el Conjunto Referencia son las DMUs que están posicionadas en la frontera de eficiencia; y que a través de una combinación lineal positiva de ellas, otras DMUs no eficientes pueden posicionarse en la frontera eficiente. Recordemos también que éste conjunto es diferente para cada DMU. Esto lo estudiamos primero de manera intuitiva en el capítulo I sección I.3 y posteriormente con la definición 3.5 de Conjunto Referencia en el capítulo III, sección III.2.

Entonces una DMU puede hacerse eficiente usando los valores λ de su conjunto referencia o reduciendo sus entradas radialmente en la proporción θ^* (contracción radial). Esto último aunado al hecho de que deben eliminarse sus excesos en las entradas y aumentarse sus valores de salida al encontrar el déficit en ellas. (Esto lo veremos un poco más adelante, con la solución de las 2 fases del problema de programación lineal).

Mostramos los valores λ del conjunto referencia para cada empresa petrolera (DMU) en la siguiente tabla. PEMEX es la DMU número 3.

No	DMU Compañía	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
1	Exxon Mobil	Lukoil	0.0915153	Gazprom	0.0800456	RWE- DEA	26.9818		
2	BP	Repsol YPF	0.8210623	Lukoil	0.0994729	Gazprom	0.0314648	RWE- DEA	19.436296
3	PEMEX	Repsol YPF	0.6677158	Lukoil	1.8852788	RWE- DEA	1.0767676		
4	Shell	Repsol YPF	1.8126585	Lukoil	0.0250694	RWE- DEA	13.007498		
5	Petrobras	Repsol YPF	0.1588356	Lukoil	0.5307707	RWE- DEA	6.5778664		
6	Chevron	Lukoil	0.1806208	Gazprom	0.0139591	RWE- DEA	15.088075		
7	Total	Repsol YPF	0.8677767	Lukoil	0.1852756	RWE- DEA	9.0878091		
8	ConocoPhillips	Lukoil	0.0359018	Gazprom	0.0049677	RWE- DEA	14.609497		
9	Eni	Repsol YPF	0.5676677	Lukoil	0.0522640	Gazprom	0.0052864	RWE- DEA	6.3936666
10	Repsol YPF	Repsol YPF	1						
11	Statoil	Burlington	0.0226652	Gazprom	0.0107413	RWE- DEA	7.3505119		
12	Petrochina	Repsol YPF	0.3029567	Lukoil	1.1219512	Gazprom	0.0234933		
13	Petro-Canada	Burlington	0.0821657	CNR	0.1558573	RWE- DEA	2.6137903		
14	Marathon	Repsol YPF	0.2532979	Lukoil	0.0148340	Gazprom	0.0026795		
15	Pogo	Pogo	1						
16	Lukoil	Lukoil	1						
17	EnCana	Pogo	1.5058203	Burlington	1.3151067				
18	Occidental	Occidental	1						
19	Anadarko	CNOOC	0.2967843	Burlington	0.7344261	CNR	0.2049629		
20	CNOOC	CNOOC	1						
21	BG	Burlington	0.8482688	Gazprom	0.0063678	RWE- DEA	0.0270828		
22	Devon Energy	Burlington	1.0929076	CNR	0.1768536	RWE- DEA	0.7063876		
23	Burlington	Burlington	1						
24	Apache	Pogo	0.2754390	Burlington	0.3446921	CNR	0.4225314	RWE- DEA	0.6939540
25	Unocal	Burlington	0.4808030	Gazprom	0.0077695	RWE- DEA	0.8714852		
26	CNR	CNR	1						
27	Gazprom	Gazprom	1						
28	OMV	Lukoil	0.0379199	Gazprom	0.0032888	RWE- DEA	0.5196344		
29	Talisman	Burlington	0.2447131	CNR	0.3699843	RWE- DEA	0.6594057		
30	Kerr-McGee	Burlington	0.3074333	Gazprom	0.0017513	RWE- DEA	1.1562606		
31	Amerada Hess	Repsol YPF	0.0443145	Lukoil	0.0146431	RWE- DEA	2.0151331		
32	Pioneer	Burlington	0.2574836	Gazprom	0.0008923	RWE- DEA	0.6983925		

No	DMU Compañía	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
33	EOG Resources	EOG Resources	1						
34	RWE-DEA	RWE-DEA	1						
35	Santos	Burlington	0.2310745	Gazprom	0.0014858	RWE-DEA	0.0077440		
36	Noble Energy	Pogo	0.1152446	Burlington	0.2123563	CNR	0.0430086		
37	El Paso	Burlington	0.1593157	Gazprom	0.0069249				
38	Nexen	Occidental	0.0226706	CNOOC	0.2188438	RWE-DEA	0.7206717		
39	Sinopec	Lukoil	0.4307494	Gazprom	0.0068740				
40	Woodside Petroleum	Burlington	0.1710823	Gazprom	0.0020222	RWE-DEA	0.4193943		
41	Murphy Oil	Lukoil	0.0076727	RWE-DEA	0.8627620				

Tabla 5.6 –Conjunto Referencia para cada DMU en el modelo 1 CCR-E orientado a entradas-

El conjunto referencia para PEMEX se compone de las empresas: Repsol YPF, Lukoil y RWE-DEA, en donde cada valor λ de estas empresas muestra su contribución para llevar a PEMEX a posicionarse en la frontera de eficiencia, al formar una combinación lineal positiva entre ellas.

A continuación identificamos los excesos en las entradas $s^- \in R^m$ (desperdicios, sobrantes), cuando $\theta^* < 1$; con el vector de excesos $s^- = \theta x_o - X\lambda$.

Así como el déficit en las salidas $s^+ \in R^s$, identificado con el vector de holgura $s^+ = Y\lambda - y_o$; siendo $s^-, s^+ \geq 0$ (3.31).

Para encontrar las cantidades de los posibles excesos en las entradas y el déficit en las salidas para la DMU que estamos evaluando, se resuelven ahora las siguientes dos fases del problema de programación lineal:

Fase I

Hemos resuelto el dual (DLPo) (planteado en el capítulo III, sección III.2) y su valor óptimo θ , lo denotaremos como θ^* .

(Si $\theta^* = 1$ entonces es eficiente la DMU). Este valor de θ^* es incorporado en la siguiente fase.

Fase II

Usando θ^* , se resuelve el problema lineal cuya función objetivo es: $\max : w = es^- + es^+$, visto en el capítulo III, sección III.2, (3.32); usando a (λ, s^-, s^+) como variables.

El objetivo de la fase II es encontrar el máximo de la suma de los excesos en las entradas y el déficit en las salidas, mientras se mantiene el nivel de eficiencia $\theta = \theta^*$. Si la solución óptima (llamada solución de holgura máxima, por la definición 3.2), $(\theta^*, \lambda^*, s_1^{-*}, s_2^{+*})$ de las dos fases satisface: $\theta^* = 1$, $s_1^{-*} = 0$ y $s_2^{+*} = 0$ (no hay excesos en las entradas, ni déficit en las salidas); entonces DMUo es llamada eficiente. Si las holguras (déficit) o los excesos son diferentes de cero, entonces la DMU tiene ineficiencia mixta.

Veamos a continuación la tabla 5.7 de excesos (s_i^{-*}) y déficit (s_j^{+*}) con ($i=1,2$) y ($j=1,2,3,4$).

No.	DMU	Calificación (θ^*)	Exceso Cosprod s_1^{-*}	Exceso NumEmp s_2^{-*}	Déficit PrdLiq s_1^{+*}	Déficit PrdGas s_2^{+*}	Déficit ResGas s_3^{+*}	Déficit ResLiq s_4^{+*}
1	Exxon Mobil	0.76937261	0	0	0.22422455	0	101.512925	0
2	BP	0.69286598	0	0	0	0	54.0103844	0
3	PEMEX	0.9491637	0	0	0	0	46.4527176	16.7931557
4	Shell	0.68388319	0	0	0	0	26.0147291	2.30562375
5	Petrobras	0.66443102	0	0	0	0	21.3691313	1.00337518
6	Chevron	0.81584904	0	0	0.04327047	0	38.9144615	0
7	Total	0.58695442	0	0	0	0	20.6005276	0.46110566
8	ConocoPhillips	0.58564894	0	0	0.28560298	0	25.8707433	0
9	Eni	0.4841994	0	0	0	0	15.4141919	0
10	Repsol YPF	1	0	0	0	0	0	0
11	Statoil	0.44486837	0	0	0	0	16.6417084	0.91107431
12	Petrochina	0.43899936	0	0	0	0	15.2510894	7.7483252
13	Petro-Canada	0.6002446	0	0	0	0	5.24549585	0.292528
14	Marathon	0.4480159	0	0	0	0	4.55933149	0.14173924
15	Pogo	1	0	0	0	0	0	0
16	Lukoil	1	0	0	0	0	0	0
17	EnCana	0.80674661	0	0	0.01437795	0	1.98435363	0.14319238
18	Occidental	1	0	0	0	0	0	0
19	Anadarko	0.79932035	0	0	0.02824799	0	0.44359882	0
20	CNOOC	1	0	0	0	0	0	0
21	BG	0.77754928	0	0	0.00424390	0	5.22976946	0
22	Devon Energy	0.85096515	0	0	0	0	3.76197964	0.28569749
23	Burlington	1	0	0	0	0	0	0
24	Apache	0.77156904	0	0	0	0.12479998	0	0
25	Unocal	0.67957823	0	0	0	0	8.45266915	0.04751681
26	CNR	1	0	0	0	0	0	0
27	Gazprom	1	0	0	0	0	0	0
28	OMV	0.12661569	0	0	0.04098482	0	2.50571104	0
29	Talisman	0.87749736	0	0	0	0	0.59720201	0.20747345
30	Kerr-McGee	0.57885121	0	0	0	0	3.30234191	0.08019930
31	Amerada Hess	0.50314768	0	0	0	0	3.87337262	0.33753024
32	Pioneer	0.98668405	0	0	0.03783824	0	1.22398776	0
33	EOG Resources	1	0	0	0	0	0	0
34	RWE-DEA	1	0	0	0	0	0	0
35	Santos	0.66372739	0	0	0	0	0.92121554	0.00652460
36	Noble Energy	0.99112469	0	0	0.00299648	0.12027066	0	0
37	El Paso	0.41519156	0	0	0.00171864	0	7.4119188	0.13489357

38	Nexen	0.48841008	0	0	0.01614478	0	2.31037505	0
39	Sinopec	0.40048141	0	13.3603108	0	0	15.3989418	3.71172291
40	Woodside Petroleum	0.55682929	0	0	0	0	0.87436064	0.01134181
41	Murphy Oil	0.33868438	0	0	0	0.04309901	2.10597123	0.07057322

Tabla 5.7 –Excesos (desperdicios) en entradas y Holguras (déficit) en las salidas del Modelo 1 CCRE

Encontramos que para éste modelo, en PEMEX existe ineficiencia mixta, representada por el déficit (faltante) en las reservas de gas (ResGas) y en las reservas de petróleo (ResLiq). Observamos también que las DMUs que tienen como calificación $\theta^* = 1$, tienen cero en sus variables de exceso y holgura, es decir, son completamente eficientes (no tienen faltantes en las salidas ni sobrantes o desperdicio en sus entradas).

En la última tabla 5.8, veremos finalmente un resumen de los datos con la “Proyección CCR” de cada DMU. Por medio de ésta obtenemos una “mejoría” tanto en las entradas como en las salidas; ya que reducimos las entradas (se hace hincapié nuevamente en que el modelo está orientado a entradas); eliminamos además el exceso (desperdicio) en las entradas y se aumentan los valores de las salidas por medio del déficit registrado en la variable de holgura s_i^{+*} . Es decir, tenemos la proyección de la DMUo a la frontera eficiente.

La proyección CCR fue estudiada en el capítulo III, sección III.2, (3.43) y (3.44).

En ésta tabla mostramos únicamente a las 11 empresas con mayor producción petrolera, dentro de este grupo de 41 compañías; aunque la comparación sigue siendo entre las 41 empresas petroleras descritas al inicio de éste apartado.

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
1	Exxon Mobil	0.76937261			
	Cosprod	11.715	9.01320016	-2.70179984	-23.06%
	NumEmp	12.885	9.91336612	-2.97163388	-23.06%
	PrdLiq	2.571	2.79522455	0.22422455	8.72%
	PrdGas	9.864	9.864	0	0.00%
	ResGas	60.362	161.874925	101.512925	168.17%
	ResLiq	11.651	11.651	0	0.00%
2	BP	0.69286598			
	Cosprod	11.008	7.62706867	-3.38093133	-30.71%
	NumEmp	15.435	10.6943863	-4.74061366	-30.71%
	PrdLiq	2.531	2.531	0	0.00%
	PrdGas	8.503	8.503	0	0.00%
	ResGas	48.507	102.517384	54.0103844	111.35%
	ResLiq	9.934	9.934	0	0.00%
3	PEMEX	0.9491637			
	Cosprod	5.934	5.63233737	-0.30166263	-5.08%
	NumEmp	48.371	45.9119971	-2.45900286	-5.08%
	PrdLiq	3.754	3.754	0	0.00%

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
	PrdGas	3.363	3.363	0	0.00%
	ResGas	14.807	61.2597176	46.4527176	313.72%
	ResLiq	14.803	31.5961557	16.7931557	113.44%
4	Shell	0.68388319			
	Cosprod	9.868	6.74855928	-3.11944072	-31.61%
	NumEmp	16.8	11.4892375	-5.31076247	-31.61%
	PrdLiq	2.333	2.333	0	0.00%
	PrdGas	8.808	8.808	0	0.00%
	ResGas	40.566	66.5807291	26.0147291	64.13%
	ResLiq	5.503	7.80862375	2.30562375	41.90%
5	Petrobras	0.66443102			
	Cosprod	5.24	3.48161855	-1.75838145	-33.56%
	NumEmp	20.585	13.6773126	-6.90768743	-33.56%
	PrdLiq	1.649	1.649	0	0.00%
	PrdGas	2.154	2.154	0	0.00%
	ResGas	11.247	32.6161313	21.3691313	190.00%
	ResLiq	9.945	10.9483752	1.00337518	10.09%
6	Chevron	0.81584904			
	Cosprod	6.321	5.15698179	-1.16401821	-18.42%
	NumEmp	8.48	6.91839987	-1.56160013	-18.42%
	PrdLiq	1.737	1.78027047	4.33E-02	2.49%
	PrdGas	3.958	3.958	0	0.00%
	ResGas	19.675	58.5894615	38.9144615	197.79%
	ResLiq	8.14	8.14	0	0.00%
7	Total	0.58695442			
	Cosprod	7.686	4.51133169	-3.17466831	-41.30%
	NumEmp	16.71	9.8080084	-6.9019916	-41.30%
	PrdLiq	1.695	1.695	0	0.00%
	PrdGas	4.894	4.894	0	0.00%
	ResGas	22.785	43.3855276	20.6005276	90.41%
	ResLiq	7.003	7.46410566	0.46110566	6.58%
8	ConocoPhillips	0.58564894			
	Cosprod	7.898	4.62545536	-3.27254464	-41.44%
	NumEmp	5.37	3.14493483	-2.22506517	-41.44%
	PrdLiq	1.195	1.48060298	0.28560298	23.90%
	PrdGas	3.317	3.317	0	0.00%
	ResGas	17.696	43.5667433	25.8707433	146.20%
	ResLiq	5.539	5.539	0	0.00%
9	Eni	0.4841994			
	Cosprod	6.119	2.96281613	-3.15618387	-51.58%
	NumEmp	10.725	5.19303857	-5.53196143	-51.58%
	PrdLiq	1.034	1.034	0	0.00%
	PrdGas	3.54	3.54	0	0.00%
	ResGas	18.435	33.8491919	15.4141919	83.61%
	ResLiq	4.008	4.008	0	0.00%
10	Repsol YPF	1			
	Cosprod	1.474	1.474	0	0.00%
	NumEmp	5.001	5.001	0	0.00%

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
	PrdLiq	0.567	0.567	0	0.00%
	PrdGas	3.36	3.36	0	0.00%
	ResGas	18.207	18.207	0	0.00%
	ResLiq	1.683	1.683	0	0.00%
12	Petrochina	0.43899936			
	Cosprod	7.179	3.15157642	-4.02742358	-56.10%
	NumEmp	63.626	27.9317734	-35.6942266	-56.10%
	PrdLiq	2.124	2.124	0	0.00%
	PrdGas	2.786	2.786	0	0.00%
	ResGas	44.645	59.8960894	15.2510894	34.16%
	ResLiq	11.019	18.7673252	7.7483252	70.32%

Tabla 5.8 -"Proyección CCR en el Modelo 1 CCR-E orientado a Entradas"-.

Haremos algunos cálculos para explicar de qué forma se han obtenido los resultados de ésta tabla (5.8).

Recordemos que la proyección CCR (o actividad mejorada) para las entradas es: $\hat{x}_o = \theta^* x_o - s^{*-}$, siendo $x_o = 5.934$ los costos de producción (CosProd). Entonces:

$$\hat{x}_o = \theta^* x_o - s^{*-} = 0.9491637 \times 5.934 = 5.63233737$$

En éste caso no se registran excesos en las entradas.

De aquí obtenemos la diferencia entre la proyección CCR y x_o :

$$\hat{x}_o - x_o = 5.63233737 - 5.934 = -.30166263$$

Enseguida obtenemos el porcentaje de disminución de los costos de producción (CosProd):

$$\frac{-.30166263}{5.934} = -.0508363043 \cong -5.08\%$$

De la misma manera puede hacerse éste cálculo para la otra entrada NumEmp.

Podemos observar que para el caso de PEMEX, que tiene una eficiencia del 94.91%; tendría que reducir sus entradas, es decir sus costos de producción y su personal en el área de exploración y producción en un 5.08%.

Y de acuerdo con la "Proyección CCR" para las salidas: $\hat{y}_o = y_o + s^{+*}$, siendo $y_o = 14.803$ las reservas de petróleo (ResLiq), tenemos:

$$\hat{y}_o = y_o + s^{+*} = 14.803 + 16.7931557 = 31.5961557$$

Obtenemos a continuación la diferencia entre la proyección CCR y y_o :

$$\hat{y}_o - y_o = 31.5961557 - 14.803 = 16.7931557$$

Que es el déficit en las reservas de petróleo.

Enseguida obtenemos el porcentaje de aumento para las reservas de petróleo (ResLiq):

$$\frac{16.7931557}{14.803} = 1.134442728 \cong 113.44\%$$

De igual manera puede hacerse éste cálculo para las reservas de gas (ResGas).

Con éste modelo orientado a entradas, PEMEX tendría que reducir sus costos de producción y su personal en el área de exploración y producción en un 5.08%. Así como aumentar sus salidas es decir, sus reservas de petróleo en un 113.44% y sus reservas de gas en un 313.72%, para alcanzar una eficiencia del 100%.

Veremos ahora el **Modelo 1-A CCR-S** orientado a salidas, con el cuál usaremos las mismas variables que el modelo anterior.

Con éste modelo se pretende aumentar al máximo las salidas, sin usar más de la cantidad disponible de entradas; en donde la diferencia básica con el modelo orientado a entradas, es que se multiplicarán las salidas por el recíproco de la medida de eficiencia.

El modelo (DLPOo) está planteado en el capítulo III, sección III.5, (3.81). Siendo ahora $\eta^* = 1/\theta^*$ y $\mu^* = \lambda^*/\theta^*$. Además de que η describe la proporción de agrandamiento de salidas y satisface $\eta^* \geq 1$ (ver capítulo III, sección III.5, (3.88)). Nuestros datos siguen siendo los mismos de la tabla 5.1 para el año 2006. Mostraremos únicamente los resultados, ya que el desarrollo del modelo es igual que el anterior orientado a entradas y sólo haremos algunas aclaraciones cuando sea necesario.

Los primeros resultados del marcador de eficiencia θ^* son los mismos que los de la tabla 5.4. Tenemos a PEMEX en el lugar número 13 y con una eficiencia del 94.91%.

Los resultados de los valores para los pesos óptimos: v_1^*, v_2^* y $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ se muestran en la tabla 5.9, en donde haciendo referencia al planteamiento del modelo (LPOo) (capítulo III, sección III.5, (3.89)); v^* y u^* serán divididos entre θ^* y éste nuevo cociente se representará por $p^* = v^*/\theta^*$ y $q^* = u^*/\theta^*$ (3.93).

3	PEMEX	0.9491637	0.08212898	0.01170548	0.25741222	0.01001324	0	0
4	Shell	0.9888319	0.11924538	0.01699551	0.37374404	0.01453851	0	0
5	Petrobras	0.66443102	0.18412867	0.02624304	0.57710404	0.02244913	q_3^*	q_4^*
No.	DMO	θ^*	p_1^*	p_2^*	q_1^*	q_2^*	q_3^*	q_4^*
6	Chevron	0.81584904	0.11084469	0.06191836	0	0.04324035	0	0.1918249
7	Exxon Mobil	0.76937261	0.06872450	0.03838982	0	0.02686932	0	0.06313216
1	Total	0.58695442	0.16922698	0.02411917	0.53039852	0.02063231	0	0
2	BP	0.89286596	0.10279071	0.02019826	0.2504644	0.02526571	0	0.01522622

8	ConocoPhillips	0.58564894	0.15668503	0.08752498	0	0.06112260	0	0.14393507
9	Eni	0.4841994	0.25105169	0.04933143	0.6117237	0.06170301	0	0.03718788
10	Repsol YPF	1	0.45729542	0.06517628	1.43327511	0.05575387	0	0
11	Statoil	0.44486837	0.28440949	0.20417108	0.73086269	0.2220448	0	0
12	Petrochina	0.43899936	0.19079367	0.01427404	0.42786142	0.03274313	0	0
13	Petro-Canada	0.6002446	0.16869096	1.73553718	2.57539546	0.24275944	0	0
14	Marathon	0.4480159	1.80938279	0.13536716	4.05760365	0.3105179	0	0
15	Pogo	1	0	25.6410256	18.2123173	0.21966611	0	0
16	Lukoil	1	0.436872	0	0.57636888	0	0	0
17	EnCana	0.80674661	0.03695820	1.73547939	0	0.3327787	0	0
18	Occidental	1	0.42144268	0.28218411	0.28339424	0	0	0.42713097
19	Anadarko	0.79932035	0.14247718	1.66591644	0	0.23816636	0	0.52613705
20	CNOOC	1	0.26550365	1.55268956	3.13479624	0	0	0
21	BG	0.77754928	0.50384003	0.45487161	0	0.37050624	0	0.42885944
22	Devon Energy	0.85096515	0.12882957	1.32543267	1.96683385	0.18539579	0	0
23	Burlington	1	0.07083755	2.66127431	1.40932831	0	0.08305862	0.16500188
24	Apache	0.77156904	0.07115657	2.67325964	1.41567536	0	0.08343269	0.16574498
25	Unocal	0.67957823	0.6299286	0.45221136	1.6187621	0.49179922	0	0
26	CNR	1	0.13489101	2.72338806	3.89105058	0	0	0
27	Gazprom	1	0.01853613	0.01786876	0	0.01902081	0	0
28	OMV	0.12661569	1.14110467	0.63742633	0	0.44514321	0	1.04824931
29	Talisman	0.87749736	0.22464105	2.31116654	3.42958242	0.32327598	0	0
30	Kerr-McGee	0.57885121	0.88681088	0.63662129	2.27888659	0.69235291	0	0
31	Amerada Hess	0.50314768	1.18887916	0.16944564	3.72623657	0.14494922	0	0
32	Pioneer	0.98668405	1.17390424	1.059812	0	0.86324789	0	0.99920586
33	EOG Resources	1	0.00846542	5.25115539	0	0	0.19813751	0
34	RWE-DEA	1	3.01006728	0.48873573	10.3092784	0	0	0
35	Santos	0.66372739	1.99980742	1.4356161	5.13901491	1.56129399	0	0
36	Noble Energy	0.99112469	0.11552011	11.1422153	0	0	0.35914032	1.48387664
37	El Paso	0.41519156	1.45667946	1.40423347	0	1.49476831	0	0
38	Nexen	0.48841008	1.24980654	1.19245279	0	0.05341808	0	1.62865675
39	Sinopec	0.40048141	0.97462716	0	1.25783709	0.10226152	0	0
40	Woodside Petroleum	0.55682929	1.72732506	1.24000723	4.43880202	1.34856097	0	0
41	Murphy Oil	0.33868438	3.01006728	0.48873573	10.3092784	0	0	0

Tabla 5.9 – Pesos Óptimos en el Modelo 1-A CCR-S Orientado a Salidas-

La definición 3.1 de eficiencia a CCR most rada en el capítulo III sección III.1, nos dice que ineficien

cia es obtener el marcador de eficiencia $\theta^* < 1$ ó $\theta^* = 1$ y si al menos un elemento de (v^*, u^*) es cero para cada solución óptima de (LPo).

Nuevamente en el caso de PEMEX $\theta^* < 1$ y tenemos que $q_3^* = q_4^* = 0$, correspondientes a las reservas de gas y reservas de petróleo respectivamente. Como consecuencia, podría tener déficit en alguna de éstas salidas.

Mostramos los valores λ del conjunto referencia para cada empresa, en la tabla 5.10.

No	DMU	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
1	Exxon Mobil	Lukoil	0.1189480	Gazprom	0.1040401	RWE-DEA	35.069873		
2	BP	Repsol YPF	1.1850233	Lukoil	0.1435673	Gazprom	0.0454126	RWE-DEA	28.052028
3	PEMEX	Repsol YPF	0.7034780	Lukoil	1.9862525	RWE-DEA	1.1344383		
4	Shell	Repsol YPF	2.6505381	Lukoil	0.0366574	RWE-DEA	19.020059		
5	Petrobras	Repsol YPF	0.2390551	Lukoil	0.7988349	RWE-DEA	9.8999989		
6	Chevron	Lukoil	0.2213899	Gazprom	0.0171099	RWE-DEA	18.493709		
7	Total	Repsol YPF	1.4784397	Lukoil	0.3156558	RWE-DEA	15.482989		
8	ConocoPhillips	Lukoil	0.0613025	Gazprom	0.0084824	RWE-DEA	24.945826		
9	Eni	Repsol YPF	1.1723841	Lukoil	0.1079390	Gazprom	0.0109179	RWE-DEA	13.204615
10	Repsol YPF	Repsol YPF	1						
11	Statoil	Burlington	0.0509480	Gazprom	0.0241449	RWE-DEA	16.522892		
12	Petrochina	Repsol YPF	0.6901074	Lukoil	2.5557010	Gazprom	0.0535157		
13	Petro-Canada	Burlington	0.1368871	CNR	0.2596563	RWE-DEA	4.3545419		
14	Marathon	Repsol YPF	0.565377	Lukoil	0.0331105	Gazprom	0.0059809		
15	Pogo	Pogo	1						
16	Lukoil	Lukoil	1						
17	EnCana	Pogo	1.8665344	Burlington	1.6301360				
18	Occidental	Occidental	1						
19	Anadarko	CNOOC	0.3712958	Burlington	0.9188132	CNR	0.2564214		
20	CNOOC	CNOOC	1						
21	BG	Burlington	1.0909518	Gazprom	0.0081896	RWE-DEA	0.0348310		
22	Devon Energy	Burlington	1.2843153	CNR	0.2078271	RWE-DEA	0.8301016		
23	Burlington	Burlington	1						
24	Apache	Pogo	0.3569855	Burlington	0.4467417	CNR	0.5476262	RWE-DEA	0.89940618
25	Unocal	Burlington	0.7075020	Gazprom	0.0114328	RWE-DEA	1.2823913		

No	DMU	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
26	CNR	CNR	1						
27	Gazprom	Gazprom	1						
28	OMV	Lukoil	0.2994880	Gazprom	0.0259745	RWE-DEA	4.1040282		
29	Talisman	Burlington	0.2788762	CNR	0.4216358	RWE-DEA	0.7514617		
30	Kerr-McGee	Burlington	0.5311093	Gazprom	0.0030254	RWE-DEA	1.9975091		
31	Amerada Hess	Repsol YPF	0.0880746	Lukoil	0.0291010	RWE-DEA	4.005053		
32	Pioneer	Burlington	0.2609585	Gazprom	0.0009043	RWE-DEA	0.7078178		
33	EOG Resources	EOG Resource	1						
34	RWE-DEA	RWE-DEA	1						
35	Santos	Burlington	0.3481467	Gazprom	0.0022385	RWE-DEA	0.0116674		
36	Noble Energy	Pogo	0.1162766	Burlington	0.2142579	CNR	0.0433937		
37	El Paso	Burlington	0.3837161	Gazprom	0.0166788				
38	Nexen	Occidental	0.0464171	CNOOC	0.4480738	RWE-DEA	1.4755462		
39	Sinopec	Lukoil	1.0755791	Gazprom	0.0171644				
40	Woodside Petroleum	Burlington	0.3072438	Gazprom	0.0036316	RWE-DEA	0.7531829		
41	Murphy Oil	Lukoil	0.0226544	RWE-DEA	2.5473922				

Tabla 5.10 –Conjunto Referencia para el modelo 1-A CCR-S orientado a Salidas-

El conjunto referencia para PEMEX se compone nuevamente de las empresas: Repsol YPF, Lukoil y RWE-DEA.

A continuación identificamos los excesos en las entradas $t^{-*} = s^{-*} / \theta^*$ (desperdicios, sobrantes) cuando $\theta^* < 1$, del modelo (DLPOo); así como el déficit en las salidas $t^{+*} = s^{+*} / \theta^*$, (ver (3.87)). Éstos se muestran en la tabla 5.11.

No.	DMU	Calificación θ^*	Exceso Cosprod t_1^{-*}	Exceso NumEmp t_2^{-*}	Déficit PrdLiq t_1^{+*}	Déficit PrdGas t_2^{+*}	Déficit ResGas t_3^{+*}	Déficit ResLiq t_4^{+*}
1	Exxon Mobil	0.76937261	0	0	0.29143817	0	131.942473	0
2	BP	0.69286598	0	0	0	0	77.9521382	0
3	PEMEX	0.9491637	0	0	0	0	48.9406809	17.6925811
4	Shell	0.68388319	0	0	0	0	38.0397261	3.37137071
5	Petrobras	0.66443102	0	0	0	0	32.1615497	1.51012694
6	Chevron	0.81584904	0	0	0.05303735	0	47.6981151	0
7	Total	0.58695442	0	0	0	0	35.0973207	0.78559023
8	ConocoPhillips	0.58564894	0	0	0.48766925	0	44.1744898	0
9	Eni	0.4841994	0	0	0	0	31.8343887	0
10	Repsol YPF	1	0	0	0	0	0	0
11	Statoil	0.44486837	0	0	0	0	37.4081628	2.04796379
12	Petrochina	0.43899936	0	0	0	0	34.740573	17.6499692
13	Petro-Canada	0.6002446	0	0	0	0	8.73893046	0.48734799
14	Marathon	0.4480159	0	0	0	0	10.176718	0.316371
15	Pogo	1	0	0	0	0	0	0
16	Lukoil	1	0	0	0	0	0	0
17	EnCana	0.80674661	0	0	0.01782214	0	2.45969877	0.17749362
18	Occidental	1	0	0	0	0	0	0
19	Anadarko	0.79932035	0	0	0.03534001	0	0.55497001	0
20	CNOOC	1	0	0	0	0	0	0
21	BG	0.77754928	0	0	0.00545804	0	6.72596526	0
22	Devon Energy	0.85096515	0	0	0	0	4.42083868	0.33573348
23	Burlington	1	0	0	0	0	0	0
24	Apache	0.77156904	0	0	0	0.16174829	0	0
25	Unocal	0.67957823	0	0	0	0	12.4381106	0.06992104
26	CNR	1	0	0	0	0	0	0
27	Gazprom	1	0	0	0	0	0	0
28	OMV	0.12661569	0	0	0.32369465	0	19.7898932	0
29	Talisman	0.87749736	0	0	0	0	0.68057414	0.23643769
30	Kerr-McGee	0.57885121	0	0	0	0	5.70499265	0.13854907
31	Amerada Hess	0.50314768	0	0	0	0	7.69828175	0.67083731
32	Pioneer	0.98668405	0	0	0.03834889	0	1.24050628	0
33	EOG Resources	1	0	0	0	0	0	0
34	RWE-DEA	1	0	0	0	0	0	0
35	Santos	0.66372739	0	0	0	0	1.38794263	0.00983024
36	Noble Energy	0.99112469	0	0	0.00302332	0.12134765	0	0
37	El Paso	0.41519156	0	0	0.00413940	0	17.8518049	0.32489477
38	Nexen	0.48841008	0	0	0.03305579	0	4.7304	0
39	Sinopec	0.40048141	0	33.36063	0	0	38.4510774	9.26815277
40	Woodside Petroleum	0.55682929	0	0	0	0	1.57024902	0.02036855
41	Murphy Oil	0.33868438	0	0	0	0.12725419	6.21809377	0.20837459

Tabla 5.11 -Excesos (desperdicios) y Holguras (déficit) en el Modelo 1-A CCR-S orientado a Salidas-

Nuevamente existe déficit en las salidas de PEMEX, en las reservas de gas y de petróleo; y como es un modelo orientado a salidas en el que estamos trabajando, se busca además agrandar la proporción de éstas.

Observamos también que las DMUs que tienen como calificación $\theta^* = 1$, tienen además cero en sus variables de exceso y holgura es decir, son completamente eficientes.

En la última tabla 5.12, veremos finalmente un resumen de los datos con una “mejoría” tanto en las entradas como en las salidas; expresada por: $\hat{x}_o \leftarrow x_o - t^{-*}$ (ver (3.95)) y $\hat{y}_o \leftarrow \eta^* y_o + t^{+*}$ (ver (3.96)), en donde eliminamos los excesos en las entradas, agrandamos la proporción de las salidas y eliminamos el déficit existente en éstas. (Referirse al capítulo III, sección III.5).

En ésta tabla mostramos únicamente las 11 empresas con mayor producción petrolera dentro del grupo de 41 compañías; aunque la comparación sigue siendo entre las 41 empresas petroleras descritas al inicio de éste apartado.

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación $\eta^* = 1/\theta^*$ y Datos	Proyección	Diferencia	%
1	Exxon Mobil	1.29976033			
	Cosprod	11.715	11.715	0	0.00%
	NumEmp	12.885	12.885	0	0.00%
	PrdLiq	2.571	3.63312197	1.06212197	41.31%
	PrdGas	9.864	12.8208359	2.95683588	29.98%
	ResGas	60.362	210.398606	150.036606	248.56%
	ResLiq	11.651	15.1435076	3.49250758	29.98%
2	BP	1.44328057			
	Cosprod	11.008	11.008	0	0.00%
	NumEmp	15.435	15.435	0	0.00%
	PrdLiq	2.531	3.65294312	1.12194312	44.33%
	PrdGas	8.503	12.2722147	3.76921467	44.33%
	ResGas	48.507	147.961349	99.4543488	205.03%
	ResLiq	9.934	14.3375492	4.40354917	44.33%
3	PEMEX	1.05355905			
	Cosprod	5.934	5.934	0	0.00%
	NumEmp	48.371	48.371	0	0.00%
	PrdLiq	3.754	3.95506067	0.20106067	5.36%
	PrdGas	3.363	3.54311908	0.18011908	5.36%
	ResGas	14.807	64.5407298	49.7337298	335.88%
	ResLiq	14.803	33.2884157	18.4854157	124.88%
4	Shell	1.46223803			
	Cosprod	9.868	9.868	0	0.00%
	NumEmp	16.8	16.8	0	0.00%
	PrdLiq	2.333	3.41140131	1.07840131	46.22%
	PrdGas	8.808	12.8793925	4.07139253	46.22%
	ResGas	40.566	97.3568738	56.7908738	140.00%
	ResLiq	5.503	11.4180666	5.91506657	107.49%
5	Petrobras	1.50504713			
	Cosprod	5.24	5.24	0	0.00%
	NumEmp	20.585	20.585	0	0.00%

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación $\eta^*=1/\theta^*$ y Datos	Proyección	Diferencia	%
	PrdLiq	1.649	2.48182271	0.83282271	50.50%
	PrdGas	2.154	3.24187151	1.08787151	50.50%
	ResGas	11.247	49.0888147	37.8418147	336.46%
	ResLiq	9.945	16.4778206	6.53282062	65.69%
6	Chevron	1.22571695			
	Cosprod	6.321	6.321	0	0.00%
	NumEmp	8.48	8.48	0	0.00%
	PrdLiq	1.737	2.1821077	0.4451077	25.63%
	PrdGas	3.958	4.8513877	0.8933877	22.57%
	ResGas	19.675	71.8140962	52.1390962	265.00%
	ResLiq	8.14	9.97733599	1.83733599	22.57%
7	Total	1.7037098			
	Cosprod	7.686	7.686	0	0.00%
	NumEmp	16.71	16.71	0	0.00%
	PrdLiq	1.695	2.88778811	1.19278811	70.37%
	PrdGas	4.894	8.33795575	3.44395575	70.37%
	ResGas	22.785	73.9163485	51.1313485	224.41%
	ResLiq	7.003	12.7166699	5.71366994	81.59%
8	ConocoPhillips	1.70750756			
	Cosprod	7.898	7.898	0	0.00%
	NumEmp	5.37	5.37	0	0.00%
	PrdLiq	1.195	2.52814078	1.33314078	111.56%
	PrdGas	3.317	5.66380258	2.34680258	70.75%
	ResGas	17.696	74.3905436	56.6945436	320.38%
	ResLiq	5.539	9.45788438	3.91888438	70.75%
9	Eni	2.06526485			
	Cosprod	6.119	6.119	0	0.00%
	NumEmp	10.725	10.725	0	0.00%
	PrdLiq	1.034	2.13548385	1.10148385	106.53%
	PrdGas	3.54	7.31103756	3.77103756	106.53%
	ResGas	18.435	69.9075462	51.4725462	279.21%
	ResLiq	4.008	8.27758151	4.26958151	106.53%
10	Repsol YPF	1			
	Cosprod	1.474	1.474	0	0.00%
	NumEmp	5.001	5.001	0	0.00%
	PrdLiq	0.567	0.567	0	0.00%
	PrdGas	3.36	3.36	0	0.00%
	ResGas	18.207	18.207	0	0.00%
	ResLiq	1.683	1.683	0	0.00%
12	Petrochina	2.27790764			
	Cosprod	7.179	7.179	0	0.00%
	NumEmp	63.626	63.626	0	0.00%
	PrdLiq	2.124	4.83827582	2.71427582	127.79%
	PrdGas	2.786	6.34625068	3.56025068	127.79%
	ResGas	44.645	136.437759	91.7927595	205.61%
	ResLiq	11.019	42.7502334	31.7312334	287.97%

Tabla 5.12 –Proyección en el Modelo 1-A CCR-S orientado a Salidas-

Haremos algunos cálculos para explicar de qué forma se han obtenido los resultados de ésta tabla (5.12).

De acuerdo a la proyección CCR: $\hat{x}_o \Leftarrow x_o - t^{-*}$. Para obtener una mejoría en la entrada costos de producción (Cosprod) tenemos:

$$\hat{x}_o \Leftarrow x_o - t^{-*} = 5.934, \text{ siendo } \text{Cosprod} = x_o = 5.934.$$

De igual forma puede hacerse éste cálculo para la otra entrada número de empleados (NumEmp).

Con el modelo orientado a salidas se desea conservar los niveles de entradas. No se registran excesos (desperdicios) en ninguna de las dos entradas ($t^{-*} = 0$).

Ahora, de acuerdo a la proyección CCR: $\hat{y}_o \Leftarrow \eta * y_o + t^{+*}$, para obtener una mejoría (agrandamiento) en las salidas; siendo $y_o = 3.754$ la producción de petróleo (PrdLiq), tenemos:

$$\hat{y}_o \Leftarrow \eta * y_o + t^{+*} = 1.05355905 \times 3.754 = 3.955060674$$

No se registra faltante en la producción de petróleo ($t^{+*} = 0$).

A continuación obtenemos la diferencia entre la proyección CCR y y_o :

$$\hat{y}_o - y_o = 3.95506067 - 3.754 = .20106067$$

Entonces la proporción de agrandamiento en la salida (producción de petróleo) es:

$$\frac{.20106067}{3.754} = .053559049 \cong 5.36\%$$

De igual forma puede hacerse éste cálculo para la producción de gas (PrdGas), en donde tampoco se registra faltante (déficit).

Haremos ahora éste cálculo para las reservas de petróleo con $y_o = 14.803$, la proyección CCR es:

$$\hat{y}_o \Leftarrow \eta * y_o + t^{+*} = 1.05355905 \times 14.803 + 17.6925811 = 33.2884157$$

En éste caso sí se registra un déficit (o faltante) en las reservas de petróleo, ($t^{+*} = 17.6925811$).

Ahora obtenemos la diferencia entre la proyección CCR y y_o :

$$\hat{y}_o - y_o = 33.2884157 - 14.803 = 18.4854157$$

Entonces la proporción de agrandamiento en la salida reservas de petróleo es:

$$18.4854157 / 14.803 = 1.248761447 \cong 124.88\%$$

Éste cálculo puede hacerse de la misma manera para las reservas de gas.

Con éste modelo orientado a salidas, vemos que si PEMEX desea conservar el nivel de costos y el número de empleados que tiene en el área de exploración y producción; para mejorar su eficiencia la compañía tendría que aumentar su producción de petróleo y de gas en un 5.36%.

Simultáneamente tendría que aumentar sus reservas de petróleo en un 124.88% y sus reservas de gas en un 335.88%, para alcanzar una eficiencia del 100%.

A continuación mostraremos los resultados **del Modelo 2 CCR-E** orientado a entradas y del **Modelo 2-A CCR-S** orientado a salidas, para los que usaremos las variables:

Variables de entrada (Entradas): CosPrd, NumEmp.

Variables de salida (Salidas): PrdLiq, PrdGas.

No tomamos en cuenta las reservas de petróleo ni las de gas. En la primera tabla de éste modelo, mostramos los primeros resultados del marcador de eficiencia θ^* .

Rango	DMU	Calificación (θ^*)
1	RWE-DEA	1
1	Gazprom	1
1	CNR	1
1	Burlington	1
1	CNOOC	1
1	Lukoil	1
1	Pogo	1
1	Repsol YPF	1

Rango	DMU	Calificación (θ^*)
9	PEMEX	0.9491637
10	EOG Resources	0.90232788
11	Talisman	0.87749736
12	Pioneer	0.86814315
13	Occidental	0.86349844
14	Devon Energy	0.85096515
15	Noble Energy	0.82620346
16	EnCana	0.80674661
17	Chevron	0.78712423
18	BG	0.775118
19	Anadarko	0.74395533
20	Apache	0.73832803
21	Exxon Mobil	0.7090649
22	Shell	0.68388319
23	Unocal	0.67957823
24	BP	0.67909931
25	Petrobras	0.66443102
26	Santos	0.66372739
27	Petro-Canada	0.6002446
28	Total	0.58695442
29	Kerr-McGee	0.57885121
30	Woodside Petroleum	0.55682929
31	Amerada Hess	0.50314768
32	ConocoPhillips	0.48693404
33	Eni	0.48020479
34	Marathon	0.4480159
35	Statoil	0.44486837
36	Petrochina	0.43899936
37	Nexen	0.42481316
38	El Paso	0.41519156
39	Sinopec	0.40048141
40	Murphy Oil	0.33868438
41	OMV	0.08238416

Tabla 5.13 marcador de eficiencia para el Modelo 2 CCR-E orientado a entradas.-

Ahora bajo éste modelo PEMEX tiene el lugar número 9, nuevamente con una eficiencia del 94.91%.

Mostramos enseguida los resultados de los valores para los pesos óptimos: v_1^*, v_2^* y u_1^*, u_2^* en la tabla 5.14.

No.	DMU	Calificación (θ^*)	CosProd	NumEmp	PrdLiq	PrdGas
			v_1^*	v_2^*	u_1^*	u_2^*
1	Exxon Mobil	0.7090649	0.06668644	0.01697853	0.18889741	0.02264899
2	BP	0.67909931	0.07571237	0.01079095	0.23730098	0.00923092
3	PEMEX	0.9491637	0.07795385	0.01111041	0.24432633	0.00950420
4	Shell	0.68388319	0.08154991	0.01162295	0.25559727	0.00994264
5	Petrobras	0.66443102	0.1223408	0.01743669	0.38344583	0.01491590
6	Chevron	0.78712423	0.13280889	0.01892866	0.41625537	0.01619218
7	Total	0.58695442	0.09932852	0.01415685	0.31131976	0.01211022
8	ConocoPhillips	0.48693404	0.10793057	0.02747939	0.30572642	0.03665691
9	Eni	0.48020479	0.13076021	0.01863667	0.40983431	0.01594240
10	Repsol YPF	1	0.45729542	0.06517628	1.43327511	0.05575387
11	Statoil	0.44486837	0.12652479	0.09082926	0.32513769	0.09878071
12	Petrochina	0.43899936	0.08375830	0.00626629	0.18783089	0.01437421
13	Petro-Canada	0.6002446	0.10125584	1.04174683	1.54586723	0.14571504
14	Marathon	0.4480159	0.81063226	0.06064664	1.81787095	0.13911696
15	Pogo	1	0.49154873	11.9532841	7.52480502	1.9019597
16	Lukoil	1	0.20364073	0.02372739	0.56850733	0.02871532
17	EnCana	0.80674661	0.02981590	1.40009211	0	0.26846809
18	Occidental	0.86349844	0.54808973	0.08899171	1.87717052	0
19	Anadarko	0.74395533	0.12367527	1.27240388	1.88814346	0.17797835
20	CNOOC	1	0.24615181	1.63183296	3.07220911	0.05484971
21	BG	0.775118	0.38460635	0.37075906	0	0.39466293
22	Devon Energy	0.85096515	0.10962947	1.12789701	1.67370706	0.15776536
23	Burlington	1	0.06368722	2.69668136	0.19874688	0.50678643
24	Apache	0.73832803	0.13493178	1.3882138	2.05999592	0.19417734
25	Unocal	0.67957823	0.42808576	0.307313	1.10007548	0.33421604
26	CNR	1	0.14069939	2.61638685	3.75637173	0.03135187
27	Gazprom	1	0.02400244	0.01723080	0.06168039	0.01873924
28	OMV	0.08238416	0.29995304	0.04275097	0.94012582	0.03657055
29	Talisman	0.87749736	0.19712193	2.02804254	3.00944952	0.28367382
30	Kerr-McGee	0.57885121	0.51333155	0.368509	1.31913627	0.40076932

No.	DMU	Calificación (θ^*)	CosProd	NumEmp	PrdLiq	PrdGas
			v_1^*	v_2^*	u_1^*	u_2^*
31	Amerada Hess	0.50314768	0.59818179	0.08525618	1.87484729	0.07293087
32	Pioneer	0.86814315	1.21911764	0.87517673	3.13283353	0.95179217
33	EOG Resources	0.90232788	0.09672971	4.54222413	0	0.87097286
34	RWE-DEA	1	3.03599643	0.43270703	9.51555156	0.37015144
35	Santos	0.66372739	1.32732696	0.95285773	3.41090495	1.03627359
36	Noble Energy	0.82620346	0.66835349	6.87619753	10.2037156	0.96181278
37	El Paso	0.41519156	0.60480102	0.58302589	0	0.62061519
38	Nexen	0.42481316	0.17298992	1.8277062	2.74644721	0.23274275
39	Sinopec	0.40048141	0.39032006	0	0.50374038	0.04095384
40	Woodside Petroleum	0.55682929	0.96182518	0.69047234	2.47165497	0.75091824
41	Murphy Oil	0.33868438	1.01946277	0.16552716	3.49159154	0

Tabla 5.14 –pesos óptimos del Modelo 2 CCR-E, orientado a entradas-

Ineficiencia según el modelo CCR, es obtener $\theta^* < 1$ ó $\theta^* = 1$ y si al menos un elemento de (v^*, u^*) es cero para cada solución óptima de (LPo).

En el caso de PEMEX como $\theta < 1$ entonces es CCR-ineficiente y como consecuencia, podría tener déficit en alguna salida o exceso en alguna entrada.

Se muestran a continuación los valores λ del conjunto referencia para cada empresa petrolera (DMU) en la tabla 5.15. PEMEX es la DMU número 3.

No.	DMU	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
1	Exxon Mobil	Repsol YPF	0.5667202	Gazprom	0.06023482	RWE-DEA	23.043436
2	BP	Repsol YPF	1.47920115	Lukoil	0.02956488	RWE-DEA	16.9175039
3	PEMEX	Repsol YPF	0.66771575	Lukoil	1.8852788	RWE-DEA	1.07676763
4	Shell	Repsol YPF	1.81265846	Lukoil	0.02506935	RWE-DEA	13.0074983
5	Petrobras	Repsol YPF	0.15883563	Lukoil	0.5307707	RWE-DEA	6.57786636
6	Chevron	Repsol YPF	0.31992497	Lukoil	0.13948087	RWE-DEA	13.5423014
7	Total	Repsol YPF	0.86777673	Lukoil	0.18527557	RWE-DEA	9.08780912
8	ConocoPhillips	Repsol YPF	0.06344971	Gazprom	0.01188027	RWE-DEA	11.9193067
9	Eni	Repsol YPF	0.67783017	Lukoil	0.0402466	RWE-DEA	5.97775722
10	Repsol YPF	Repsol YPF	1				
11	Statoil	Burlington	0.02266514	Gazprom	0.01074129	RWE-DEA	7.35051191
12	Petrochina	Repsol YPF	0.30295671	Lukoil	1.12195109	Gazprom	0.02349334
13	Petro-Canada	Burlington	0.08216572	CNR	0.15585727	RWE-DEA	2.61379027
14	Marathon	Repsol YPF	0.25329789	Lukoil	0.01483401	Gazprom	0.00267952
15	Pogo	Pogo	1				
16	Lukoil	Lukoil	1				
17	EnCana	Pogo	1.50582031	Burlington	1.3151067		
18	Occidental	Lukoil	0.01280186	RWE-DEA	4.5132863		
19	Anadarko	Burlington	0.69657883	CNR	0.25157957	RWE-DEA	0.62021286
20	CNOOC	CNOOC	1				

No.	DMU	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
21	BG	Burlington	0.85053267	Gazprom	0.00639252		
22	Devon Energy	Burlington	1.09290755	CNR	0.17685357	RWE-DEA	0.70638755
23	Burlington	Burlington	1				
24	Apache	Burlington	0.27461631	CNR	0.50528478	RWE-DEA	0.72860564
25	Unocal	Burlington	0.48080298	Gazprom	0.00776951	RWE-DEA	0.87148523
26	CNR	CNR	1				
27	Gazprom	Gazprom	1				
28	OMV	Repsol YPF	0.08270545	Lukoil	0.01272664	RWE-DEA	0.07242571
29	Talisman	Burlington	0.24471314	CNR	0.36998431	RWE-DEA	0.65940566
30	Kerr-McGee	Burlington	0.30743327	Gazprom	0.00175126	RWE-DEA	1.15626056
31	Amerada Hess	Repsol YPF	0.04431454	Lukoil	0.01464308	RWE-DEA	2.01513313
32	Pioneer	Burlington	0.29243142	Gazprom	0.00138332	RWE-DEA	0.25268926
33	EOG Resources	Pogo	0.5851878	Burlington	0.44221481		
34	RWE-DEA	RWE-DEA	1				
35	Santos	Burlington	0.23107449	Gazprom	0.00148577	RWE-DEA	0.00774400
36	Noble Energy	Burlington	0.14476243	CNR	0.07624915	RWE-DEA	0.04685402
37	El Paso	Burlington	0.15931568	Gazprom	0.00692490		
38	Nexen	CNOOC	0.14590431	CNR	0.00606827	RWE-DEA	0.88553585
39	Sinopec	Lukoil	0.43074942	Gazprom	0.00687401		
40	Woodside Petroleum	Burlington	0.17108233	Gazprom	0.00202219	RWE-DEA	0.41939427
41	Murphy Oil	Lukoil	0.00767268	RWE-DEA	0.86276195		

Tabla 5.15 – Conjunto Referencia para cada DMU del Modelo 2 CCR-E.-

El conjunto referencia para PEMEX nuevamente se compone de las empresas: Repsol YPF, Lukoil y RWE-DEA.

A continuación identificamos los excesos en las entradas y el déficit en las salidas. Esto lo mostramos en la tabla 5.15.

No.	DMU	Calificación (θ^*)	Exceso Cosprod s_1^{-*}	Exceso NumEmp s_2^{-*}	Déficit PrdLiq s_1^{+*}	Déficit PrdGas s_2^{+*}
1	Exxon Mobil	0.7090649	0	0	0	0
2	BP	0.67909931	0	0	0	0
3	PEMEX	0.9491637	0	0	0	0
4	Shell	0.68388319	0	0	0	0
5	Petrobras	0.66443102	0	0	0	0
6	Chevron	0.78712423	0	0	0	0
7	Total	0.58695442	0	0	0	0
8	ConocoPhillips	0.48693404	0	0	0	0
9	Eni	0.48020479	0	0	0	0
10	Repsol YPF	1	0	0	0	0
11	Statoil	0.44486837	0	0	0	0
12	Petrochina	0.43899936	0	0	0	0
13	Petro-Canada	0.6002446	0	0	0	0
14	Marathon	0.4480159	0	0	0	0

No.	DMU	Calificación (θ^*)	Exceso Cosprod S_1^{-*}	Exceso NumEmp S_2^{-*}	Déficit PrdLiq S_1^{+*}	Déficit PrdGas S_2^{+*}
15	Pogo	1	0	0	0	0
16	Lukoil	1	0	0	0	0
17	EnCana	0.80674661	0	0	0.01437795	0
18	Occidental	0.86349844	0	0	0	0.30784443
19	Anadarko	0.74395533	0	0	0	0
20	CNOOC	1	0	0	0	0
21	BG	0.775118	0	0	0.00196464	0
22	Devon Energy	0.85096515	0	0	0	0
23	Burlington	1	0	0	0	0
24	Apache	0.73832803	0	0	0	0
25	Unocal	0.67957823	0	0	0	0
26	CNR	1	0	0	0	0
27	Gazprom	1	0	0	0	0
28	OMV	0.08238416	0	0	0	0
29	Talisman	0.87749736	0	0	0	0
30	Kerr-McGee	0.57885121	0	0	0	0
31	Amerada Hess	0.50314768	0	0	0	0
32	Pioneer	0.86814315	0	0	0	0
33	EOG Resources	0.90232788	0	0	0.06361901	0
34	RWE-DEA	1	0	0	0	0
35	Santos	0.66372739	0	0	0	0
36	Noble Energy	0.82620346	0	0	0	0
37	El Paso	0.41519156	0	0	0.00171864	0
38	Nexen	0.42481316	0	0	0	0
39	Sinopec	0.40048141	0	13.3603108	0	0
40	Woodside Petroleum	0.55682929	0	0	0	0
41	Murphy Oil	0.33868438	0	0	0	0.04309901

Tabla 5.15 –Excesos (desperdicios) en entradas y Holguras (déficit) en las salidas, del Modelo 2 CCR-E-.

En éste modelo PEMEX tiene cero en sus variables de exceso y holgura (déficit), por lo que no tiene eficiencia mixta, sólo presenta eficiencia técnica y bastará con reducir sus entradas (Cosprod y NumEmp), para que sea eficiente.

En la última tabla 5.16, veremos finalmente un resumen de los datos con la “Proyección CCR” de cada DMU. Mostramos nuevamente sólo a las 11 empresas con mayor producción de petróleo dentro del grupo de las 41 empresas. La comparación sigue siendo entre las 41 empresas.

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
1	Exxon Mobil	0.7090649			
	Cosprod	11.715	8.30669536	-3.40830464	-29.09%
	NumEmp	12.885	9.13630129	-3.74869871	-29.09%
	PrdLiq	2.571	2.571	0	0.00%
	PrdGas	9.864	9.864	0	0.00%
2	BP	0.67909931			
	Cosprod	11.008	7.47552521	-3.53247479	-32.09%
	NumEmp	15.435	10.4818979	-4.95310214	-32.09%
	PrdLiq	2.531	2.531	0	0.00%
	PrdGas	8.503	8.503	0	0.00%
3	PEMEX	0.9491637			
	Cosprod	5.934	5.63233737	-0.30166263	-5.08%
	NumEmp	48.371	45.9119971	-2.45900286	-5.08%
	PrdLiq	3.754	3.754	0	0.00%
	PrdGas	3.363	3.363	0	0.00%
4	Shell	0.68388319			
	Cosprod	9.868	6.74855928	-3.11944072	-31.61%
	NumEmp	16.8	11.4892375	-5.31076247	-31.61%
	PrdLiq	2.333	2.333	0	0.00%
	PrdGas	8.808	8.808	0	0.00%
5	Petrobras	0.66443102			
	Cosprod	5.24	3.48161855	-1.75838145	-33.56%
	NumEmp	20.585	13.6773126	-6.90768743	-33.56%
	PrdLiq	1.649	1.649	0	0.00%
	PrdGas	2.154	2.154	0	0.00%
6	Chevron	0.78712423			
	Cosprod	6.321	4.97541224	-1.34558776	-21.29%
	NumEmp	8.48	6.67481345	-1.80518655	-21.29%
	PrdLiq	1.737	1.737	0	0.00%
	PrdGas	3.958	3.958	0	0.00%
7	Total	0.58695442			
	Cosprod	7.686	4.51133169	-3.17466831	-41.30%
	NumEmp	16.71	9.8080084	-6.9019916	-41.30%
	PrdLiq	1.695	1.695	0	0.00%
	PrdGas	4.894	4.894	0	0.00%
8	ConocoPhillips	0.48693404			
	Cosprod	7.898	3.84580508	-4.05219492	-51.31%
	NumEmp	5.37	2.61483582	-2.75516418	-51.31%
	PrdLiq	1.195	1.195	0	0.00%
	PrdGas	3.317	3.317	0	0.00%
9	Eni	0.48020479			
	Cosprod	6.119	2.93837311	-3.18062689	-51.98%
	NumEmp	10.725	5.15019637	-5.57480363	-51.98%
	PrdLiq	1.034	1.034	0	0.00%
	PrdGas	3.54	3.54	0	0.00%
10	Repsol YPF	1			
	Cosprod	1.474	1.474	0	0.00%

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
	NumEmp	5.001	5.001	0	0.00%
	PrdLiq	0.567	0.567	0	0.00%
	PrdGas	3.36	3.36	0	0.00%
12	Petrochina	0.43899936			
	Cosprod	7.179	3.15157642	-4.02742358	-56.10%
	NumEmp	63.626	27.9317734	-35.6942266	-56.10%
	PrdLiq	2.124	2.124	0	0.00%
	PrdGas	2.786	2.786	0	0.00%

Tabla 5.16 –Proyección en el Modelo 2 CCR-E Orientado a Entradas-.

Con éste modelo orientado a entradas y con las cuatro variables que se han tomado en cuenta, para el caso de PEMEX tendrían que reducirse los costos y el número de empleados en un 5.08%, para alcanzar la eficiencia al 100%. No hay ineficiencia mixta, sólo se presenta ineficiencia técnica, la cuál se elimina reduciendo sus entradas en la proporción del valor θ^* .

Veamos ahora los resultados del **Modelo 2-A CCR-S** orientado a salidas con el mismo número de variables.

Los primeros resultados del marcador de eficiencia θ^* son los mismos que los de la tabla 5.13. Tenemos a PEMEX en el lugar número 9 y con una eficiencia del 94.91%.

Los resultados de los valores para los pesos óptimos: $p^* = v^* / \theta^*$ y $q^* = u^* / \theta^*$, se muestran en la tabla 5.17.

			CosProd	NumEmp	PrdLiq	PrdGas
No.	DMU	Calificación θ^*	p_1^*	p_2^*	q_1^*	q_2^*
1	Exxon Mobil	0.7090649	0.09404843	0.02394496	0.26640356	0.03194206
2	BP	0.67909931	0.11148939	0.01589009	0.34943488	0.01359289
3	PEMEX	0.9491637	0.08212898	0.01170548	0.25741222	0.01001324
4	Shell	0.68388319	0.11924538	0.01699551	0.37374404	0.01453851
5	Petrobras	0.66443102	0.18412867	0.02624304	0.57710404	0.02244913
6	Chevron	0.78712423	0.16872672	0.02404787	0.52883059	0.02057131
7	Total	0.58695442	0.16922698	0.02411917	0.53039852	0.02063231
8	ConocoPhillips	0.48693404	0.22165337	0.0564335	0.62786003	0.07528106
9	Eni	0.48020479	0.27230093	0.03880984	0.85345737	0.03319918
10	Repsol YPF	1	0.45729542	0.06517628	1.43327511	0.05575387
11	Statoil	0.44486837	0.28440949	0.20417108	0.73086269	0.2220448
12	Petrochina	0.43899936	0.19079367	0.01427404	0.42786142	0.03274313
13	Petro-Canada	0.6002446	0.16869096	1.73553718	2.57539546	0.24275944
14	Marathon	0.4480159	1.80938279	0.13536716	4.05760365	0.3105179
15	Pogo	1	0	25.6410256	18.2123173	0.21966611
16	Lukoil	1	0.436872	0	0.57636888	0
17	EnCana	0.80674661	0.03695820	1.73547939	0	0.3327787
18	Occidental	0.86349844	0.63473158	0.10305949	2.17391304	0
19	Anadarko	0.74395533	0.16624018	1.71032296	2.53797961	0.23923258
20	CNOOC	1	0.26550365	1.55268956	3.13479624	0
21	BG	0.775118	0.49619071	0.47832596	0	0.50916497
22	Devon Energy	0.85096515	0.12882957	1.32543267	1.96683385	0.18539579
23	Burlington	1	0.19764003	2.03337288	3.01735931	0.28441941
24	Apache	0.73832803	0.18275315	1.88021277	2.79008223	0.26299603
25	Unocal	0.67957823	0.6299286	0.45221136	1.6187621	0.49179922
26	CNR	1	0.13489101	2.72338806	3.89105058	0
27	Gazprom	1	0.01853613	0.01786876	0	0.01902081
28	OMV	0.08238416	3.6409069	0.51892222	11.4114882	0.44390267
29	Talisman	0.87749736	0.22464105	2.31116654	3.42958242	0.32327598
30	Kerr-McGee	0.57885121	0.88681088	0.63662129	2.27888659	0.69235291
31	Amerada Hess	0.50314768	1.18887916	0.16944564	3.72623657	0.14494922
32	Pioneer	0.86814315	1.40428182	1.00810186	3.60866007	1.09635395
33	EOG Resources	0.90232788	0.10720018	5.03389534	0	0.96525097
34	RWE-DEA	1	3.01006728	0.48873573	10.3092784	0
35	Santos	0.66372739	1.99980742	1.4356161	5.13901491	1.56129399
36	Noble Energy	0.82620346	0.8089454	8.32264431	12.3501246	1.1641355
37	El Paso	0.41519156	1.45667946	1.40423347	0	1.49476831
38	Nexen	0.42481316	0.40721412	4.30237664	6.46507099	0.54787085
39	Sinopec	0.40048141	0.97462716	0	1.25783709	0.10226152
40	Woodside Petroleum	0.55682929	1.72732506	1.24000723	4.43880202	1.34856097
41	Murphy Oil	0.33868438	3.01006728	0.48873573	10.3092784	0

Tabla 5.17 - Pesos Óptimos para el Modelo 2-A CCR-S orientado a salidas. -

Recordemos que éstos pesos óptimos son los que hacen posible la maximización de las *entradas/salidas*. En el caso de PEMEX ningún peso óptimo es cero. Pero su marcador de eficiencia es menor que 1 ($\theta^* < 1$), entonces es CCR-ineficiente.

Tenemos a continuación el conjunto referencia para cada DMU, con sus valores para λ , en la tabla 5.18.

No.	DMU	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ	Conj. Ref.	λ
1	Exxon Mobil	Repsol YPF	0.7992501	Gazprom	0.08494966	RWE-DEA	32.4983451
2	BP	Repsol YPF	2.17818091	Lukoil	0.04353543	RWE-DEA	24.9116788
3	PEMEX	Repsol YPF	0.70347797	Lukoil	1.98625253	RWE-DEA	1.13443828
4	Shell	Repsol YPF	2.65053812	Lukoil	0.03665735	RWE-DEA	19.0200587
5	Petrobras	Repsol YPF	0.23905511	Lukoil	0.79883491	RWE-DEA	9.89999888
6	Chevron	Repsol YPF	0.40644788	Lukoil	0.17720312	RWE-DEA	17.2047828
7	Total	Repsol YPF	1.47843971	Lukoil	0.3156558	RWE-DEA	15.4829894
8	ConocoPhillips	Repsol YPF	0.13030453	Gazprom	0.02439810	RWE-DEA	24.4782776
9	Eni	Repsol YPF	1.41154396	Lukoil	0.08381132	RWE-DEA	12.4483498
10	Repsol YPF	Repsol YPF	1				
11	Statoil	Burlington	0.05094796	Gazprom	0.02414487	RWE-DEA	16.5228918
12	Petrochina	Repsol YPF	0.69010741	Lukoil	2.55570096	Gazprom	0.05351565
13	Petro-Canada	Burlington	0.13688707	CNR	0.25965627	RWE-DEA	4.35454189
14	Marathon	Repsol YPF	0.565377	Lukoil	0.03311046	Gazprom	0.00598085
15	Pogo	Pogo	1				
16	Lukoil	Lukoil	1				
17	EnCana	Pogo	1.86653443	Burlington	1.63013602		
18	Occidental	Lukoil	0.01482558	RWE-DEA	5.22674517		
19	Anadarko	Burlington	0.93631809	CNR	0.33816488	RWE-DEA	0.83366949
20	CNOOC	CNOOC	1				
21	BG	Burlington	1.09729443	Gazprom	0.00824716		
22	Devon Energy	Burlington	1.28431529	CNR	0.20782705	RWE-DEA	0.83010162
23	Burlington	Burlington	1				
24	Apache	Burlington	0.3719435	CNR	0.68436354	RWE-DEA	0.98683188
25	Unocal	Burlington	0.70750204	Gazprom	0.01143284	RWE-DEA	1.28239134
26	CNR	CNR	1				
27	Gazprom	Gazprom	1				
28	OMV	Repsol YPF	1.00389991	Lukoil	0.15447921	RWE-DEA	0.87912178
29	Talisman	Burlington	0.27887621	CNR	0.42163581	RWE-DEA	0.7514617
30	Kerr-McGee	Burlington	0.53110932	Gazprom	0.00302540	RWE-DEA	1.99750909
31	Amerada Hess	Repsol YPF	0.08807461	Lukoil	0.02910295	RWE-DEA	4.005053
32	Pioneer	Burlington	0.336847	Gazprom	0.00159343	RWE-DEA	0.29106866
33	EOG Resources	Pogo	0.64853122	Burlington	0.49008218		
34	RWE-DEA	RWE-DEA	1				
35	Santos	Burlington	0.34814669	Gazprom	0.00223852	RWE-DEA	0.01166744
36	Noble Energy	Burlington	0.17521403	CNR	0.09228859	RWE-DEA	0.05671003
37	El Paso	Burlington	0.38371609	Gazprom	0.01667881		
38	Nexen	CNOOC	0.34345526	CNR	0.01428457	RWE-DEA	2.0845302
39	Sinopec	Lukoil	1.07557905	Gazprom	0.01716436		
40	Woodside Petroleum	Burlington	0.30724376	Gazprom	0.00363161	RWE-DEA	0.75318285
41	Murphy Oil	Lukoil	0.02265435	RWE-DEA	2.5473922		

Tabla 5.18 – Conjunto Referencia para cada DMU-

Nuevamente el conjunto referencia para PEMEX se compone de las empresas Repsol YPF, Lukoil y RWE-DEA.

Se muestran ahora los excesos en las entradas $t^{-*} = s^{-*} / \theta^*$ (desperdicios, sobrantes) cuando $\theta^* < 1$, del modelo (DLPOo); y el déficit en las salidas $t^{+*} = s^{+*} / \theta^*$ en la tabla 5.19.

No.	DMU	Calificación θ^*	Exceso Cosprod t_1^{-*}	Exceso NumEmp t_2^{-*}	Déficit PrdLiq t_1^{+*}	Déficit PrdGas t_2^{+*}
1	Exxon Mobil	0.7090649	0	0	0	0
2	BP	0.67909931	0	0	0	0
3	PEMEX	0.9491637	0	0	0	0
4	Shell	0.68388319	0	0	0	0
5	Petrobras	0.66443102	0	0	0	0
6	Chevron	0.78712423	0	0	0	0
7	Total	0.58695442	0	0	0	0
8	ConocoPhillips	0.48693404	0	0	0	0
9	Eni	0.48020479	0	0	0	0
10	Repsol YPF	1	0	0	0	0
11	Statoil	0.44486837	0	0	0	0
12	Petrochina	0.43899936	0	0	0	0
13	Petro-Canada	0.6002446	0	0	0	0
14	Marathon	0.4480159	0	0	0	0
15	Pogo	1	0	0	0	0
16	Lukoil	1	0	0	0	0
17	EnCana	0.80674661	0	0	0.01782214	0
18	Occidental	0.86349844	0	0	0	0.35650839
19	Anadarko	0.74395533	0	0	0	0
20	CNOOC	1	0	0	0	0
21	BG	0.775118	0	0	0.00253463	0
22	Devon Energy	0.85096515	0	0	0	0
23	Burlington	1	0	0	0	0
24	Apache	0.73832803	0	0	0	0
25	Unocal	0.67957823	0	0	0	0
26	CNR	1	0	0	0	0
27	Gazprom	1	0	0	0	0
28	OMV	0.08238416	0	0	0	0
29	Talisman	0.87749736	0	0	0	0
30	Kerr-McGee	0.57885121	0	0	0	0
31	Amerada Hess	0.50314768	0	0	0	0
32	Pioneer	0.86814315	0	0	0	0
33	EOG Resources	0.90232788	0	0	0.07050543	0
34	RWE-DEA	1	0	0	0	0
35	Santos	0.66372739	0	0	0	0
36	Noble Energy	0.82620346	0	0	0	0
37	El Paso	0.41519156	0	0	0.00413940	0
38	Nexen	0.42481316	0	0	0	0
39	Sinopec	0.40048141	0	33.3606266	0	0
40	Woodside Petroleum	0.55682929	0	0	0	0
41	Murphy Oil	0.33868438	0	0	0	0.12725419

Tabla 5.19 -Excesos (desperdicios) y Holguras (déficit) en el Modelo 2-A CCRS orientado a Salidas-

En el caso de PEMEX no se presentan excesos en las entradas ni déficit en las salidas, por lo que no existe ineficiencia mixta.

En la última tabla 5.20, veremos finalmente un resumen de los datos con una mejoría en las salidas; en donde agrandamos la proporción de las salidas. (Referirse al capítulo III, sección III.5).

En ésta tabla nuevamente se muestran solamente las 11 empresas con mayor producción petrolera dentro de estas 41 compañías; aclarando también que la comparación sigue siendo entre las 41 empresas petroleras descritas al inicio de éste apartado.

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación $\eta^*=1/\theta^*$ y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
1	Exxon Mobil	1.41030813			
	Cosprod	11.715	11.715	0	0.00%
	NumEmp	12.885	12.885	0	0.00%
	PrdLiq	2.571	3.6259022	1.0549022	41.03%
	PrdGas	9.864	13.9112794	4.0472794	41.03%
2	BP	1.47253868			
	Cosprod	11.008	11.008	0	0.00%
	NumEmp	15.435	15.435	0	0.00%
	PrdLiq	2.531	3.72699539	1.19599539	47.25%
	PrdGas	8.503	12.5209964	4.01799636	47.25%
3	PEMEX	1.05355905			
	Cosprod	5.934	5.934	0	0.00%
	NumEmp	48.371	48.371	0	0.00%
	PrdLiq	3.754	3.95506067	0.20106067	5.36%
	PrdGas	3.363	3.54311908	0.18011908	5.36%
4	Shell	1.46223803			
	Cosprod	9.868	9.868	0	0.00%
	NumEmp	16.8	16.8	0	0.00%
	PrdLiq	2.333	3.41140131	1.07840131	46.22%
	PrdGas	8.808	12.8793925	4.07139253	46.22%
5	Petrobras	1.50504713			
	Cosprod	5.24	5.24	0	0.00%
	NumEmp	20.585	20.585	0	0.00%
	PrdLiq	1.649	2.48182271	0.83282271	50.50%
	PrdGas	2.154	3.24187151	1.08787151	50.50%
6	Chevron	1.27044749			
	Cosprod	6.321	6.321	0	0.00%
	NumEmp	8.48	8.48	0	0.00%
	PrdLiq	1.737	2.20676729	0.46976729	27.04%
	PrdGas	3.958	5.02843117	1.07043117	27.04%
7	Total	1.7037098			
	Cosprod	7.686	7.686	0	0.00%
	NumEmp	16.71	16.71	0	0.00%
	PrdLiq	1.695	2.88778811	1.19278811	70.37%

No.	DMU Entradas y Salidas	Calificación $\eta^*=1/\theta^*$ y Datos	Proyección CCR	Diferencia	%
	PrdGas	4.894	8.33795575	3.44395575	70.37%
8	ConocoPhillips	2.05366622			
	Cosprod	7.898	7.898	0	0.00%
	NumEmp	5.37	5.37	0	0.00%
	PrdLiq	1.195	2.45413114	1.25913114	105.37%
	PrdGas	3.317	6.81201087	3.49501087	105.37%
9	Eni	2.08244487			
	Cosprod	6.119	6.119	0	0.00%
	NumEmp	10.725	10.725	0	0.00%
	PrdLiq	1.034	2.15324799	1.11924799	108.24%
	PrdGas	3.54	7.37185484	3.83185484	108.24%
10	Repsol YPF	1			
	Cosprod	1.474	1.474	0	0.00%
	NumEmp	5.001	5.001	0	0.00%
	PrdLiq	0.567	0.567	0	0.00%
	PrdGas	3.36	3.36	0	0.00%
12	Petrochina	2.27790764			
	Cosprod	7.179	7.179	0	0.00%
	NumEmp	63.626	63.626	0	0.00%
	PrdLiq	2.124	4.83827582	2.71427582	127.79%
	PrdGas	2.786	6.34625068	3.56025068	127.79%

Tabla 5.20 –Proyección en el Modelo 2-A- CCRS Orientado a Salidas-.

Con éste Modelo 2-A-CCRS orientado a salidas, en el caso de PEMEX no se registran excesos en las entradas ni déficit en las salidas. No hay ineficiencia mixta, por lo que únicamente habrá que agrandar las salidas –producción de petróleo y gas-, en un 5.36% para eliminar la ineficiencia técnica que se presenta y alcanzar la eficiencia al 100%.

V.4.4 Resultados del Modelo y Datos de Salida

Se tiene aquí un resumen de los modelos presentados en el apartado anterior.

Modelo 1 CCR-E orientado a entradas y **Modelo 1-A CCR-S** orientado a salidas, para los que usamos las variables:

Variables de entrada (Entradas): CosPrd, NumEmp.

Variables de salida (Salidas): PrdLiq, PrdGas, ResGas, ResLiq.

En el **Modelo 1 CCR-E** orientado a entradas, para el caso de PEMEX que tiene una eficiencia del 94.91%, tendría que reducir sus entradas, es decir, sus costos de producción y su personal en el área de exploración y producción en un 5.08%. Y de acuerdo a la “Proyección CCR” eliminar el déficit existente en sus salidas -reservas de petróleo y de gas-, incrementándolas en un 113.44% y un 313.72%, respectivamente para alcanzar una eficiencia del 100%.

En el **Modelo 1-A CCR-S** orientado a salidas con una eficiencia del 94.91%, vemos que si PEMEX desea conservar el nivel de costos y el número de empleados en el área de exploración y producción; para mejorar su eficiencia la compañía tendría que aumentar su producción de petróleo y de gas en un 5.36%.

Simultáneamente tendría que eliminar el déficit existente en sus reservas de petróleo y de gas, incrementándolas en un 124.88% y en un 335.88% respectivamente, para alcanzar una eficiencia del 100%.

Llegado a éste punto, tendría que evaluarse cuál de las dos alternativas resultaría más viable aplicar para PEMEX; el modelo orientado a entradas ó el modelo orientado a salidas, con las mismas variables en entradas y salidas.

Con cualquiera de los dos modelos alcanzaría el 100% de eficiencia. Lo que es un hecho es que en ambos modelos se manifiesta un déficit en las reservas de petróleo y de gas, con la información del año 2006.

En el **Modelo 2 CCR-E** orientado a entradas y el **Modelo 2-A CCR-S** orientado a salidas, se utilizaron las variables:

Variables de entrada (Entradas): CosPrd, NumEmp.

Variables de salida (Salidas): PrdLiq, PrdGas

Con el **Modelo 2 CCR-E** orientado a entradas y con las cuatro variables que se han tomado en cuenta, vemos que para el caso de PEMEX tendrían que reducirse los costos y el número de empleados del área de exploración y producción en un 5.08%, para alcanzar la eficiencia al 100%. No hay ineficiencia mixta, sólo se presenta ineficiencia técnica, la cuál se elimina reduciendo sus entradas en la proporción del valor del marcador de eficiencia θ^* .

Con el **Modelo 2-A-CCRS** orientado a salidas no se registran excesos en las entradas ni déficit en las salidas. No hay ineficiencia mixta, por lo que únicamente habrá que agrandar las salidas –producción de petróleo y gas-, en un 5.36% para eliminar la ineficiencia técnica que se presenta y alcanzar la eficiencia al 100%.

Capítulo VI **Conclusiones**

Los modelos para los años 2005 y 2004 son los mismos que los del año 2006 y se han desarrollado de la misma forma. Dicho desarrollo se omite aquí para evitar redundancia y se mostrarán únicamente los resultados. Para los modelos de los años 2005 y 2004 se ha trabajado con su respectiva información, mostrada en las tablas 5.2 y 5.3.

Por consiguiente en éste capítulo primeramente se mostrará un resumen por año de los modelos en los que se ha trabajado. Posteriormente se harán las consideraciones finales a modo de conclusión.

PEMEX 2006							
Modelo	Orientación	Eficiencia	tipo de variable	Variables	Valores	Reducir (-) / Aumentar (+)	Tipo de ineficiencia:
Modelo 1 CCR-E	Entradas	94.91%	entrada	Cosprod	5.934	(-) 5.08%	Mixta
			entrada	NumEmp	48.371	(-) 5.08%	
			salida	PrdLiq	3.754		
			salida	PrdGas	3.363		
			salida	ResGas	14.807	(+) 313.72%	
			salida	ResLiq	14.803	(+) 113.44%	
Modelo 1-A CCR-S	Salidas	94.91%	entrada	Cosprod	5.934		Mixta
			entrada	NumEmp	48.371		
			salida	PrdLiq	3.754	(+) 5.36%	
			salida	PrdGas	3.363	(+) 5.36%	
			salida	ResGas	14.807	(+) 335.88%	
			salida	ResLiq	14.803	(+) 124.88%	
Modelo 2 CCR-E	Entradas	94.91%	entrada	Cosprod	5.934	(-) 5.08%	Técnica
			entrada	NumEmp	48.371	(-) 5.08%	
			salida	PrdLiq	3.754		
			salida	PrdGas	3.363		
Modelo 2-A CCR-S	Salidas	94.91%	entrada	Cosprod	5.934		Técnica
			entrada	NumEmp	48.371		
			salida	PrdLiq	3.754	(+) 5.36%	
			salida	PrdGas	3.363	(+) 5.36%	

Tabla 6.1 –Modelos CCR para en año 2006-

PEMEX 2005

Modelo	Orientación	Eficiencia	tipo de variable	Variables	Valores	Reducir (-) / Aumentar (+)	Tipo de ineficiencia:
Modelo 1 CCR-E	Entradas	99.23%	entrada	Cosprod	4.366	(-) 0.76%	Mixta
			entrada	NumEmp	48.371	(-) 63.33%	
			salida	PrdLiq	3.723		
			salida	PrdGas	4.818		
			salida	ResGas	14.850	(+) 784.41%	
			salida	ResLiq	16.041	(+) 134.03%	
Modelo 1-A CCR-S	Salidas	99.23%	entrada	Cosprod	4.366		Mixta
			entrada	NumEmp	48.371	(-) 63.04%	
			salida	PrdLiq	3.723	(+) 0.77%	
			salida	PrdGas	4.818	(+) 0.77%	
			salida	ResGas	14.850	(+) 791.22%	
			salida	ResLiq	16.041	(+) 135.83%	
Modelo 2 CCR-E	Entradas	99.23%	entrada	Cosprod	4.366	(-) 0.76%	Mixta
			entrada	NumEmp	48.371	(-) 63.33%	
			salida	PrdLiq	3.723		
			salida	PrdGas	4.818		
Modelo 2-A CCR-S	Salidas	99.23%	entrada	Cosprod	4.366		Mixta
			entrada	NumEmp	48.371	(-) 63.04%	
			salida	PrdLiq	3.723	(+) 0.77%	
			salida	PrdGas	4.818	(+) 0.77%	

Tabla 6.2 –Modelos CCR para el año 2005-

El aumento requerido de las reservas de gas del 784.41%, se explica debido a que para los datos del 2005, al hacer los mismos cálculos que en los modelos del año 2006; PEMEX cambia su conjunto referencia, siendo ahora las empresas Gazprom y Lukoil. Gazprom es la empresa con la mayor reserva de gas dentro del grupo de las 41 empresas. (988.400 bill. p/c.).

Recordemos que el conjunto referencia son las empresas que están posicionadas en la frontera de eficiencia, y a través de una combinación positiva de ellas, las empresas no eficientes pueden posicionarse en la frontera eficiente.

En éste sentido el Modelo 1 CCR-E orientado a entradas, nos arroja un déficit en las reservas de gas de 116.485097. Si calculamos su proyección CCR:

$$\hat{y}_o = y_o + s^{+*} = 14.850 + 116.485097 = 131.335097$$

Obteniendo la diferencia entre la proyección CCR y y_o :

$$\hat{y}_o - y_o = 131.335097 - 14.850 = 116.485097 .$$

Finalmente, obteniendo el porcentaje de aumento para las reservas de gas:

$$116.485097 / 14.850 = 7.844114276 \cong 784.41\%$$

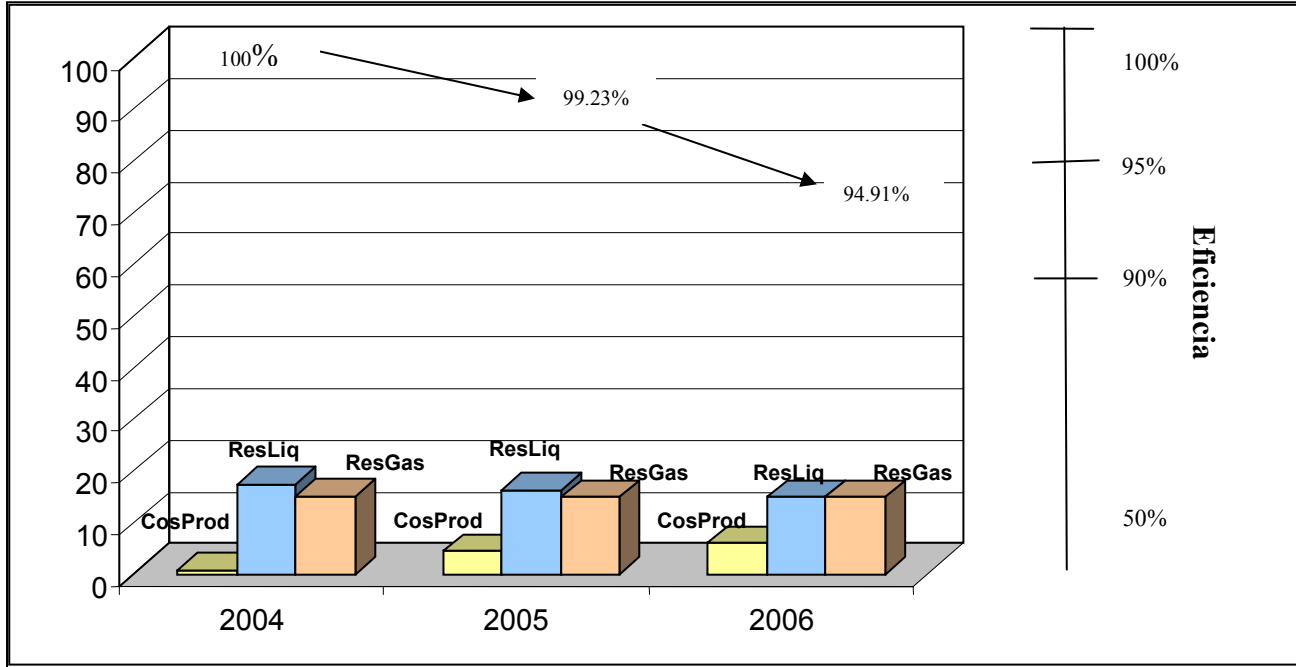
Se presenta la misma situación para el Modelo 1-A CCRS. Orientado a salidas.

PEMEX 2004							
Modelo	Orientación	Eficiencia	tipo de variable	Variables	Valores	Reducir (-) / Aumentar (+)	Tipo de ineficiencia:
Modelo 1 CCR-E	Entradas	100.00%	entrada	Cosprod	0.676	0.00%	No existe ineficiencia
			entrada	NumEmp	47.975	0.00%	
			salida	PrdLiq	3.529	0.00%	
			salida	PrdGas	4.573	0.00%	
			salida	ResGas	14.985	0.00%	
			salida	ResLiq	17.196	0.00%	
Modelo 1-A CCR-S	Salidas	100.00%	entrada	Cosprod	0.676	0.00%	No existe ineficiencia
			entrada	NumEmp	47.975	0.00%	
			salida	PrdLiq	3.529	0.00%	
			salida	PrdGas	4.573	0.00%	
			salida	ResGas	14.985	0.00%	
			salida	ResLiq	17.196	0.00%	
Modelo 2 CCR-E	Entradas	100.00%	entrada	Cosprod	0.676	0.00%	No existe ineficiencia
			entrada	NumEmp	47.975	0.00%	
			salida	PrdLiq	3.529	0.00%	
			salida	PrdGas	4.573	0.00%	
Modelo 2-A CCR-S	Salidas	100.00%	entrada	Cosprod	0.676	0.00%	No existe ineficiencia
			entrada	NumEmp	47.975	0.00%	
			salida	PrdLiq	3.529	0.00%	
			salida	PrdGas	4.573	0.00%	

Tabla 6.3 –Modelos CCR para el año 2004-

En el año 2004 PEMEX operó con una eficiencia del 100%.

Se tiene a continuación la siguiente gráfica donde se muestra la información en la que más cambios se han registrado durante el período 2004-2006.



Gráfica 6.1 –Principales cambios registrados durante el período 2004-2006-.

Podemos observar que se ha reducido la calificación de eficiencia para PEMEX a medida que ha transcurrido el tiempo. Se registró en el año 2004 el 100% de eficiencia y en el año 2006 se llegó hasta un 94.91% de eficiencia. Esto se debe al incremento en los costos de producción y a la disminución en sus reservas de petróleo y de gas. También en los modelos del año 2005 se ha manifestado un exceso de personal en el área de exploración y producción, así como déficit en las reservas de petróleo y de gas para los años 2005 y 2006.

Conforme ha transcurrido el tiempo, los costos de extracción se han incrementado y las reservas de petróleo han disminuído.

El análisis de eficiencia de la compañía PEMEX con la teoría de Data Envelopment Analysis, nos ha mostrado qué recursos (entradas) y qué bienes (salidas) deben modificarse para que la empresa nuevamente opere con una eficiencia del 100%; por tal motivo se ha cumplido la hipótesis planteada en la introducción de éste trabajo: “PEMEX puede mejorar sus niveles de eficiencia en la extracción (producción) de petróleo crudo y gas natural”.

Lo siguiente sería valorar qué es más viable para la empresa: la aplicación de un modelo orientado a entradas ó a salidas.

El estudio de eficiencia que se ha realizado aquí, ha sido sólo para el área de exploración y producción. De manera similar puede llevarse a cabo análisis de eficiencia en las áreas de refinación, gas, petroquímica y petroquímica básica .

Actualmente la teoría de DEA posee alrededor de 30 diferentes modelos para medir la eficiencia y tiene además una amplia gama de aplicaciones. En éste trabajo sólo se han presentado los modelos más básicos.

Aún se sigue haciendo investigación en la aplicación de ésta teoría.

La teoría de optimización, en particular la de programación lineal, ha abierto muchos caminos de investigación en ésta área.

Resultados parciales de esta investigación sobre PEMEX fueron presentados por el Doctor Refugio Trujillo Cortez, asesor de esta tesis, el día 16 de febrero del año 2007, en el Coloquio de Control Estocástico y Aplicaciones CINVESTAV'07; llevado a cabo en el CINVESTAV-IPN.

Bibliografía

- [1]. Data Envelopment Analysis and Extensions for Decision Support and Management Planning
By Charles Terrance Clark, B.A., M.S.
A Dissertation presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy
1983.
- [2] Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses
With DEA-Solver Software and References
William W. Cooper, Lawrence M. Seiford and Kaoru Tone
Springer Science + Business Media, Inc.
2006.
- [3] Análisis Microeconómico
Hal R. Varian
Tercera Edición, traducción de Ma. Esther Rabasco y Luis Toharia, Universidad de Alcalá
Antoni Bosch, editor
1992.
- [4] Conceptos Económicos Básicos
Werner Sichel y Peter Eckstein
Western Michigan University
Traducción de Solón Zabre Morel
Editorial El Manual Moderno, S.A.
1979.
- [5] Ingeniería Termodinámica
David Burghardt
Segunda edición, traducción de José Carlos Escobar Hernández
Copyright by Harla, S.A de C.V.
1984
- [6] Efficiency Characterizations in Diferent DEA Models,
T. Ahn, A. Charnes and W.W. Cooper
Socio-Economic Planning Sciences
1988.
- [7] Programación Lineal y Flujo en redes
Mokhtar Bazaraa
Editorial Limusa
8ª. edición, 1993
- [8] Investigación de Operaciones
Hamdy A. Taha
Pearson Prentice Hall

7ª. edición, 2004

- [9] Data Envelopment Analysis
Theory and Techniques for Economics and Operations Research
Subhash C. Ray
Cambridge University Press, 2004
- [10] Investigación de Operaciones
Hieller- Lieberman
Mc Graw Hill
7ª. edición, 2001
- [11] Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones
Volumen I Modelos Determinísticos
Juan Prawda
Limusa, Noriega Editores
Decimacuarta reimpresión, 1995

Referencias

- [12] R.D. Banker and R.C. Morey (1986), "Efficiency analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs", *Operations Research* 34, 1986, 513-521
- [13] Kashani, Hossein A. 2005. Regulation and efficiency: An empirical analysis of the united kingdom continental shelf petroleum industry. *Energy Policy* 33, (7): 915.
- [14] Doyle, J. R., A. Arthurs, R. Green, L. McAulay, M. Pitt, P. Bottomley, and W. Evans, et al. 1996. DEA/AR efficiency and profitability of 14 major oil Companies in U.S. exploration and production. *Computers and Operations Research* 23, : 357.
- [15] Thompson, R. G., P. S. Dharmapala, J. Diaz, M. D. Gonzalez-Lima, and R. M. Thrall. 1996. DEA multiplier analytic center sensitivity with an illustrative Application to independent oil companies. *Annals of Operations Research* 66, 163-177.
- [16] Thompson, R. G., P. S. Dharmapala, L. J. Rothenberg, and R. M. Thrall. 1996. DEA/AR efficiency and profitability of 14 major oil companies in US exploration and Production. *Computers & Operations Research* 23, (4): 357-373.
- [17] Thompson, R. G., E. Lee, and R. M. Thrall. 1992. DEA AR-efficiency of United-States Independent Oil Gas Producers Over Time. *Computers & Operations Research* 19, (5): 377-391.
- [18] Thompson, Russell G., P. S. Dharmapala, Louis J. Rothenberg, and Robert M. Thrall. 1994. DEA ARs and CRs applied to worldwide major oil companies. *Journal of Productivity Analysis* 5, (2): 181-203.
- [19] L. Seiford and J. Zhu. 1998. Sensitivity Analysis of DEA Models for Simultaneous Changes in All the Data. *Journal of the Operational Research Society* 49, pp. 1060-1071.
- [20] L. Seiford and J. Zhu. 1998. Stability Regions for Maintaining Efficiency in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research* 108, pp. 127-139.
- [21] L. Neralic. 1997. Sensitivity in Data Envelopment Analysis for Arbitrary Perturbations Of Data. *Glasnik Matematicki*, Vol. 32, No. 2, pp. 315-335.
- [22] A. Charnes and L. Neralic. 1992. Sensitivity Analysis in Data Envelopment Analysis 3. *Glasnik Matematicki*, Vol. 27, No. 47, pp. 191-201.
- [23] Financial Accounting Standards Board (FASB), Statement of Financial Accounting Standards No. 19 (SFAS) paragraphs 23 to 25. Financial Accounting and Reporting by Oil and Gas Producing Companies, December 1977.

- [24] Reporte Anual 2005, PEMEX Exploración y Producción
Subdirección de Planeación y Evaluación de Pemex Exploración y Producción.
Primera edición, septiembre de 2006.
- [25] Reporte Anual 2004, PEMEX Exploración y Producción
Subdirección de Planeación y Evaluación de Pemex Exploración y Producción.
Primera edición, julio de 2005.
- [26] Publicación del Sistema Integral de Costos
Subdirección de Planeación y Evaluación de Pemex Exploración y Producción.
Primera edición, 2004.

Referencias de Sitios de internet

- [27] <http://www.pemex.com.mx>
- [28] <http://www.tierramerica.net>
- [29] <http://www.gas.pemex.com>
- [30] <http://www.energyintel.com>