UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE APOYO AL CURSO DE MATEMÁTICAS VI PARA ÁREA III

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

JUAN HERIBERTO PÉREZ COLIN

TUTORA
M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
2007

D E D I C A T O R I A

dedicada a mi hija Claudia Jimena y a mi esposa Leticia las cuales me han brindado todo su cariño, apoyo y comprensión, los cuáles me han dado la fuerza necesaria para concluir mis estudios y ser un ejemplo a seguir para mi hija.

También se la dedico a la memoria de dos persona muy especiales las cuales forjaron mis pensamientos y mi vida, aunque no están presentes se que en dondequiera que estén sus bendiciones me guían y me fortalecen para seguir adelante, a quienes me dieron la vida mis padres.

Dedicada también a toda mi familia que siempre me han apoyado en los buenos y malos momentos de mi vida.

Que dios bendiga e ilumine a todas las personas antes mencionadas.

A G R A D E C I M I E N T O S

Un agradecimiento muy especial a mi tutora, la profesora Elena de Oteyza de Oteyza, por sus consejos, apoyo y paciencia sin los cuales hubiera sido más difícil llevar a término este trabajo.

Mi más sincero agradecimiento a los profesores Alejandro Bravo Mújica, Carlos Hernández García Diego, Agustín Ontiveros Pineda y Emma Lam Osnaya por ser mis sinodales y haberse tomado la molestia de leer la tesis y dar sus sabios consejos.

Que dios los bendiga e ilumine para que sigan realizando esta ardua labor de ser profesor.

Índice pagina

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está dirigido como un apoyo para profesores que imparten la materia de matemáticas VI (Cálculo Diferencial e Integral) a los alumnos de preparatoria del área III, basado en la experiencia de haber impartido la materia durante 8 años.

Los alumnos que deciden escoger al área III son alumnos, en su mayoría, más prácticos que teóricos, les cuesta más trabajo aprender matemáticas en comparación con los alumnos de área I o II, es decir, son alumnos que necesitan practicar con bastantes ejercicios para que poco a poco el análisis les sea menos difícil.

El temario que la Universidad Nacional Autónoma de México impone a los alumnos que deciden estudiar una carrera perteneciente a ésta área, es por una parte demasiado extenso y por otra con demasiada profundidad de abstracción matemática, por lo cual se propone por medio de éste trabajo que el nivel de abstracción matemática sea menor, así como darles el mínimo de demostraciones matemáticas, es decir, que el curso sea más práctico que teórico.

También se propone en el presente trabajo algunos cambios en el temario, por cuestiones de madurez y práctica que deben de tener los alumnos para un mejor entendimiento de estos temas, los cambios propuestos son los siguientes.

a) En el tema 1, que es progresiones, se propone anexar el tema fórmulas de recurrencia o recursivas y el tema de notación sumatoria o notación sigma antes de ver sucesiones aritméticas y geométricas.

b) En el tema 2, que es funciones, se incluye el tema de producto cartesiano antes de relaciones y funciones, se propone pasar los temas de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva y función inversa, al tema 3, que es derivada y se propone cambiar el tema de función continua y discontinua y función creciente y decreciente al tema 3.

c) En el tema, gráfica de una función, el análisis se hace para funciones polinomiales, por la dificultad que les causa a los alumnos de área III el análisis a otro tipo de funciones.

No debemos olvidar que los alumnos en éste nivel tienen su primer contacto con el cálculo diferencial, la forma de aprender y la forma de enseñarles cambia, para la mayoría de ellos en forma radical, es decir, los alumnos antes de cálculo diferencial aprenden matemáticas en forma repetitiva y no en forma analítica, que es la gran diferencia en cálculo diferencial, esto aunado a los conocimientos acumulativos que se deben de tener de las matemáticas anteriores al calculo para una mejor comprensión de éste.

TEMA I.- *PROGRESIONES*

En matemáticas es muy común que primero nos pongamos de acuerdo en lo que entendemos o lo que significa una palabra o un concepto, a esto le llamamos definición.

Durante el desarrollo de esta tesis antes de empezar un tema o subtema se intentará dar una idea intuitiva de lo que se entiende, es decir, una aproximación a la definición.

S U C E S I Ó N

La mayoría de nosotros hemos escuchado las palabras sucesión de fichas de domino, sucesión de eventos, sucesión de pagos de una deuda, sucesión de números, etcétera.

Entonces podemos decir, que una sucesión es un conjunto de objetos, eventos o números que vienen uno detrás de otro en un orden definido.

EJEMPLOS:

1.- Los meses del año son una sucesión de meses:

Ene, Feb, Mar, Abr, May, Jun, Jul, Ago, Sep, Oct, Nov, Dic.

2.- Los números del 3 al 12 son una sucesión de números enteros mayores o iguales que 3 y menores o iguales que 12:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Estos dos ejemplos se pueden escribir en forma mas corta usando puntos suspensivos

1.- Ene, Feb,…, Dic.

2.- 3, 4,...,12.

A cada objeto o número de una sucesión se le llama ***<u>término</u>*** de la sucesión.

En este texto las sucesiones que nos interesan son numéricas e infinitas.

EJEMPLO: 1, 1/2, 1/3,…

Los números de una sucesión se pueden colocar en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales **N** o un subconjunto infinito de ellos.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 1/2, & 1/3, & 1/4, & 1/5, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \end{array}$$

Con respecto a esta correspondencia podemos definir una sucesión.

DEFINICIÓN 1:

Sucesión es una función f cuyo dominio es el conjunto de los números naturales **N.**

En general el n-ésimo término es $f(n)$.

En forma de parejas ordenadas una sucesión estaría dada de la siguiente manera

$$(1, f(1)),(2, f(2)),(3, f(3)),...,(n, f(n)),...$$

La notación para sucesiones en general no se pone en términos de función si no en términos de subíndice.

$f(1)=a_1$	primer término
$f(2)=a_2$	segundo término
$f(3)=a_3$	tercer término
.	.
.	.
.	.
$f(n)=a_n$	n-ésimo término de la sucesión.

Con lo anterior la notación para una sucesión es:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Donde a_n se le llama término general.

La notación $\{a_n\}$ se utiliza a menudo para presentar una sucesión donde a_n es el n-ésimo término de la sucesión.

EJEMPLO:

1) Sea f la función definida por:

$f(n)=a_n=2n$ para n ∈ {1,2,3,4,5,6,7,8}.

$f(1)=a_1=2(1)=2$	Primer término
$f(2)=a_2=2(2)=4$	Segundo término
$f(3)=a_3=2(3)=6$	Tercer término
$f(4)=a_4=2(4)=8$	Cuarto término
$f(5)=a_5=2(5)=10$	Quinto término
$f(6)=a_6=2(6)=12$	Sexto término
$f(7)=a_7=2(7)=14$	Séptimo término

Entonces f es una sucesión cuyos primeros 7 términos son:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14… y cuyo término general es $f(n) = a_n = 2n$.

2) Sea f la función definida por:

$f(n) = a_n = 2^n$ Hallar los primeros 5 términos.

Para n = 1 $f(1) = a_1 = 2^1 = 2$

Para n = 2 $f(2) = a_2 = 2^2 = 4$

Para n = 3 $f(3) = a_3 = 2^3 = 8$

Para n = 4 $f(4) = a_4 = 2^4 = 16$

Para n = 5 $f(5) = a_5 = 2^5 = 32$.

Por lo tanto, los primeros 5 términos de la sucesión son:

2, 4, 8, 16, 32…

3) Sea f la función definida por:

$\{a_n\} = \frac{1}{n}$ Hallar los primeros 6 términos.

Para n = 1 $a_1 = {}^1\!/_1 = 1$

Para n = 2 $a_2 = {}^1\!/_2$

Para n = 3 $a_3 = {}^1\!/_3$

Para n = 4 $a_4 = {}^1\!/_4$

Para n = 5 $a_5 = {}^1\!/_5$

Para n = 6 $a_6 = {}^1\!/_6$.

Por lo tanto, los primeros 6 términos de la sucesión son:

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6…

FÓRMULAS DE RECURRENCIA (RECURSIVA)

En algunas sucesiones expresamos a_1 junto con una regla para obtener el término a_{k+1} del término anterior a_k, $k \geq 1$.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots.$$

EJEMPLO 1:

Sea $a_1 = 1$ y $a_{k+1} = a_k + 2$ k = 1, 2, 3,…

Entonces $a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$ para k = 1

$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$ para k = 2

$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$ para k = 3

así sucesivamente.

La sucesión es 1, 3, 5, 7, 9, 11,…

Una sucesión está dada en forma recurrente o recursiva si se proporciona el primer término o los primeros y una fórmula recursiva.

EJEMPLO 2:

Sea $a_1 = 3$ y $a_{k+1} = 2a_k$ k = 1, 2, 3,…

Entonces $a_1 = 3$

$a_2 = 2a_1 = 2(3)6$ para k = 1

$a_3 = 2a_2 = 2(6) = 12$ para k = 2

$a_4 = 2a_3 = 2(12) = 24$ para k = 3

$a_5 = 2a_4 = 2(24) = 48$ para k = 4

Así sucesivamente.

La sucesión es 3, 6, 12, 24, 48, 96,…

Se puede expresar el ejemplo anterior como

$$a_5 = 2^4(3) = 48$$
$$a_6 = 2^5(3) = 96$$

En general, $a_n = 2^{n-1}(3)$ que sería el n-ésimo término o término general.

E J E R C I C I O S

1.- Hallar los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones en las cuales esta definido el n-ésimo término.

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = \dfrac{n}{n+3}$

c) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

d) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$

e) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

f) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

g) $a_n = n\cos n\pi$

h) $a_n = \dfrac{1}{n^3}\, sen\dfrac{n\pi}{2}$

i) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{1+\dfrac{1}{n}}$

j) $a_n = (-1)^{n-1}(1+n)^2$

k) $a_n = (12 - 3n)$

l) $a_n = 10+\dfrac{1}{n}$

m) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+7}{2n}$

n) $a_n = 1+(-1)^{n+1}$

o) $a_n = (-1)^{n+1}+2^{n+1}$

p) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

q) $a_n = (-1)^{n+1}n^2$

r) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

s) $a_n = (n+1)^2$

t) $a_n = (-1)^n n$

u) $\left\{\dfrac{2n-1}{2n+1}\right\}$

v) $\left\{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right\}$

w) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{1+4n}\right\}$

x) $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

y) $\left\{\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2\right\}$

z) $\left\{\dfrac{3n-2}{n^2-1}\right\}$

2.- Hallar los cinco primeros cinco términos de la sucesión en forma recursiva.

a) $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 3a_k - 5$

b) $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = 7 - 2a_k$

c) $a_1 = -3, \quad a_{k+1} = a_{k^2}$

d) $a_1 = 512, \quad a_{k+1} = \left(\frac{1}{4}\right)a_k$

e) $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = ka_k$

f) $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = \left(\frac{1}{a_k}\right)$

g) $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^k$

h) $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

i) $a_1 = 3, \quad a_k = \dfrac{(-1)^k}{a_{k-1}}$

j) $a_1 = 1/2, \quad a_{k+1} = (-1)^k (a_{k-1})^2$

k) $a_1 = 0, \quad a_k = 2 + 3a_{k-1}$

l) $a_1 = 2, \quad a_k = (ka_{k-1})/3$

m) $a_1 = 1, \quad a_k = a_{k-1}/k$

n) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}$

ñ) $a_1 = 7, \quad a_{k+1} = a_{k+2}$

o) $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = a_k + k$

p) $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = a_k + 3$

q) $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{k-1}$

r) $a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \left(-1/k+1\right) a_k$

s) $a_1 = 1, \quad a_k = (k+1)^{a_k}$

t) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1/2, \quad a_k = (a_{k-1})(a_{k-2})$

u) $a_1 = 1/2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{-(k+1)}$

v) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_k = a_{k-2} + a_{k-1}$

w) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}$

x) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_k = (a_{k-1})(a_{k-2})$

S E R I E S

DEFINICIÓN:
La suma de los elementos de una sucesión se le llama **serie** y se denota con una **S**.

Si se están sumando solo algunos términos de la sucesión, entonces se le llama suma parcial y se denota con una **S** con un subíndice para denotar cuantos términos se están sumando, y en general la suma parcial de los primeros n términos se denota con $\mathbf{S_n}$

Las sumas parciales de una sucesión dan lugar a una sucesión de sumas parciales.

EJEMPLO: para la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, 18 entonces la suma $S_6 = 3+6+9+12+15+18$

Pero para la misma sucesión se tienen las siguientes sumas parciales:

$S_1 = 3$
$S_2 = 3 + 6 = 9$
$S_3 = 3 + 6 + 9 = 18$
$S_4 = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$
$S_5 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$
$S_6 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 63$

Donde la sucesión de sumas parciales es 3, 9, 18, 30, 45, 63…

Existe una manera de indicar una serie, esa manera se llama notación sumatoria.

NOTACIÓN SUMATORIA o NOTACIÓN SIGMA

Se le llama así porque se utiliza la letra griega sigma mayúscula $\sum$ que corresponde a la letra s.

Su notación es la siguiente.

Fin de la suma o límite superior

Sumar $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ $\longrightarrow$ Sumandos

Inicio de la suma o limite inferior

Se lee La suma desde $i = 1$ hasta $i = n$ de a subíndice i.
El subíndice i toma los valores (1, 2, 3,…, n)

Nota: La letra i es convencional se puede usar cualquier otra letra como k, t, j, m etc. para referirse a todos los elementos de un conjunto en forma general.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{t=1}^{n} a_t = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

EJEMPLO 1:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Es la suma de los cuatro términos de i elevado al cuadrado desde $i = 1$ hasta $i = 4$.

Nótese que en el límite inferior se indica la letra a la cual se le van cambiando los valores desde el límite inferior hasta el límite superior.

En el ejemplo anterior se dice que i corre desde 1 hasta 4.

EJEMPLO 2:

$$\sum_{k=1}^{20} 3k + 1 = (3(1) + 1) + (3(2) + 1) + (3(3) + 1) + \ldots + (3(20) + 1)$$

para $k = 1$ para $k = 2$ para $k = 3$ así hasta $k = 20$

EJEMPLO 3:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = (-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + (-1)^{3+1} a_3 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$$

$$= 1\, a_1 + -1\, a_2 + 1\, a_3 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n$$

Para el último término: si n es par entonces el coeficiente de a_n es negativo

si n es impar entonces el coeficiente de a_n es positivo

Nota: el índice de la suma puede empezar en un número diferente de uno

EJEMPLO 4:

$$\sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{1}{2^k} = (-1)^0 \frac{1}{2^0} + (-1)^1 \frac{1}{2^1} + (-1)^2 \frac{1}{2^2} + (-1)^3 \frac{1}{2^3} + (-1)^4 \frac{1}{2^4} +$$

$$(-1)^5 \frac{1}{2^5} + (-1)^6 \frac{1}{2^6} + (-1)^7 \frac{1}{2^7} + (-1)^8 \frac{1}{2^8}$$

= 1 – 1/2 +1/4 – 1/8 + 1/16 – 1/32 + 1/64 -1/128 + 1/256

= 171/256.

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

1.- $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

3.- $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo número real c .

2.- $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Al tener una suma de términos se puede en algunos casos poner la suma en notación de sumatoria.

EJEMPLO 1:

Escribir la siguiente suma en notación sigma.

1 – 1/2 + 1/3 -1/4 + 1/5 – 1/6

Observe que la suma está en forma alternada con respecto a los signos empezando con positivo.

$(-1)^{k+1}$ da el cambio de signo alternado si se quiere que empiece con positivo entonces k empieza en 1, para que el exponente sea par y si se quiere que empiece en negativo entonces estaría k sola en el exponente.

1/k da la otra parte de los términos porque cada término es un número racional.

Por lo tanto, se puede escribir:

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{1+1}}{1} + \frac{(-1)^{2+1}}{2} + \frac{(-1)^{3+1}}{3} + \frac{(-1)^{4+1}}{4} + \frac{(-1)^{5+1}}{5} + \frac{(-1)^{6+1}}{6}$$

= 1 – 1/2 + 1/3 – 1/4 + 1/5 – 1/6.

También se podría poner como

$$\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^{k}}{k+1}$$ Obsérvese $(-1)^k$ y 1/(k+1) si k empieza en cero.

EJEMPLO 2:

Escribir la siguiente suma en notación sigma.

-1 + 5 – 9 + 13 – 17 .

Observe que cada uno de los términos 5, 9,13 y 17 es el anterior más 4 esto sugiere 4k en la notación sigma y como el primer término es 1 se necesita escribir 4k-3 para obtener 1 cuando k=1 y puesto que los términos impares están precedidos por un signo negativo y los pares por un signo positivo, se necesita un factor $(-1)^k$.

Por lo tanto, se puede escribir:

$$\sum_{k=1}^{5}(-1)^k(4k-3) = -1 + 5 - 9 + 13 - 17.$$

EJEMPLO 3:

Escribir La siguiente suma en notación sigma

1 - 2/3 + 4/9 – 8/27 + 16/81.

Los signos están en forma alternada y empieza en 1 positivo.

$(-1)^{k-1}$ da el cambio de signo y empieza en 1.

$(2/3)^k$ da la elevación de exponentes de numerador y denominador.

Por lo tanto, se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1} \qquad \text{o} \qquad \sum_{k=0}^{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}$$

EJEMPLO 4:

Escribir la siguiente suma en notación sigma.

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + \frac{1}{27}x^7 - \frac{1}{81}x^9 .$$

Los exponentes de x son impares positivos que son 3, 5, 7 y 9 que se pueden escribir como 2k + 1, entonces quedaría x^{2k+1}.

Como los coeficientes de x son los recíprocos de las potencias sucesivas de 3 se necesita un factor $1/3^k$ y como los términos impares son positivos y los términos pares negativos se necesita un factor $(-1)^{k-1}$.

Por lo tanto, se puede escribir:

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}\frac{1}{3^k}x^{2k+1} ,$$ comprobar sustituyendo.

Existen dos tipos de series importantes en el estudio de las matemáticas que son las aritméticas y las geométricas que se verán con más detalle adelante.

E J E R C I C I O S

1.- Calcular las sumas siguientes.

a) $\sum_{k=1}^{4}(k-1)^2$

b) $\sum_{k=1}^{3}(-1)^k 2^k$

c) $\sum_{i=0}^{5}(i-i^2)$

d) $\sum_{k=1}^{15}3$

e) $\sum_{k=2}^{6}(-1)^k \frac{30}{k}$

f) $\sum_{n=0}^{3}(1-n)^3$

g) $\sum_{k=1}^{3}(k-3)$

h) $\sum_{i=1}^{6}i^2$

i) $\sum_{k=1}^{5}k^3$

j) $\sum_{i=3}^{8}\frac{2i}{3i+1}$

k) $\sum_{j=0}^{4} 2j+1$

l) $\sum_{k=2}^{8}\frac{k+2}{(k-1)k}$

m) $\sum_{n=1}^{8}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{n}$

n) $\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{10^k}$

ñ) $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k$

o) $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^i$

p) $\sum_{j=1}^{6}(-1)^{j+1} j$

q) $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

2.- Escribir los primeros 5 términos de la suma dada.

a) $\sum_{k=1}^{10}\sqrt{k}$

b) $\sum_{k=1}^{8}ka_k$

c) $\sum_{k=0}^{7}\cos k\pi$

d) $\sum_{k=0}^{5}k^2(x)^k$

e) $\sum_{k=1}^{6}\frac{(-2)^{k+1}}{k}$

f) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}x^{k+1}$

g) $\sum_{k=1}^{7}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

h) $\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}(2k-1)^2$

i) $\sum_{k=1}^{9}x^{k-1}$

j) $\sum_{k=0}^{6}(1)^k$

k) $\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

l) $\sum_{k=1}^{7}3\left(\frac{1}{2}\right)^k$

m) $\sum_{n=1}^{6}\left[4+(n-1)^3\right]$

n) $\sum_{n=0}^{5}(-1)^n \frac{3^n}{n+1}$

3.- Escribir las siguientes series en notación sigma

a) $S_5 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

b) $S_6 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \frac{36}{7}$

c) $S_6 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{48} - \frac{1}{96}$

d) $S_5 = \frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{7} + \frac{9}{8} + \frac{11}{9}$

e) $S_6 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

f) $S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

g) $S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$

h) $S_5 = 4 - 7 + 10 - 13 + 16$

n) $S_6 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$

j) $S_5 = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32}$

k) $S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

l) $S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$

m) $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

ñ) $S_6 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \frac{11}{36}$

o) $S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64}$

i) $S_5 = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^7 + \frac{1}{5}x^9$

p) $S_5 = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^8}{10}$

SUCESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Existen dos tipos de sucesiones importantes y que tienen muchas aplicaciones en cálculo que son las aritméticas y las geométricas las cuales dependen de una fórmula de recurrencia y que se podrían pensar como dos casos particulares de sucesiones.

A las sucesiones aritméticas también se les llama **PROGRESIONES ARITMÉTICAS** y a las sucesiones geométricas también se les llama **PROGRESIONES GEOMÉTRICAS** en lo sucesivo se les llamará progresiones.

Existe otro tipo de progresión que se llama progresión **armónica** cuya definición está en términos de progresión aritmética y que veremos después de las geométricas.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

DEFINICIÓN: Una progresión aritmética es una sucesión de números, tales que cada uno de ellos, excepto el primero, es igual al anterior sumado con un número constante que se denomina diferencia común de la progresión.

Debido a la diferencia común, a éste tipo de progresiones se les llama también progresiones por **diferencia**, pues al restar de cualquier término el anterior, se obtiene la diferencia común.

La notación general para una progresión aritmética es:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, ..., a_1 + (n-2)d, a_1 + (n-1)d, ...$$

Donde los subíndices indican el lugar que cada término ocupa en la progresión y a_n representa el n-ésimo término de la progresión.

Así 2, 4, 6, 8,10,… es una progresión aritmética cuya diferencia común es 2 puesto que

$$4-2=2,\ \ 6-4=2,\ \ 8-6=2 \ \text{ y } \ 10-8=2, \text{ etc.}$$

La diferencia común se denota con d = 2
2 ocupa el primer lugar en la progresión, entonces a_1 = 2
4 ocupa el segundo lugar en la progresión, entonces a_2 = 4
6 ocupa el tercer lugar en la progresión, entonces a_3 = 6
8 ocupa el cuarto lugar en la progresión, entonces a_4 = 8
10 ocupa el quinto lugar en la progresión, entonces a_5 = 10, etc.

Si la diferencia común es positiva entonces la progresión es **creciente**.

Si la diferencia común es negativa entonces la progresión es **decreciente**.

Ejemplo:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,... $d = 4-2 = 2$ d es positiva entonces es una progresión creciente.

8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6,… d = 6-8 = -2 d en negativa entonces es una progresión decreciente.

Conocida la diferencia común y un término cualquiera de la progresión aritmética es fácil escribir los demás términos, basta con sumar la diferencia común al término dado para encontrar el siguiente o restarlo para encontrar el anterior y así sucesivamente para escribir el número de términos que queramos.

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

1.- **CÁLCULO DE LA DIFERENCIA COMÚN.**

Por definición d, la diferencia común, se puede obtener restándole a un término cualquiera el anterior, entonces

$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$ que la llamaremos fórmula **F_1**.

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan 2 términos consecutivos de la progresión aritmética.

2.- **CÁLCULO DEL TÉRMINO N-ÉSIMO QUE ES** a_n.

Sea la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...$$

Cuya diferencia común es d, entonces por definición

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

$a_n = \boxed{a_1 + (n-1)d}$ que la llamaremos fórmula **F_2**.

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el primer término y la diferencia común.

EJEMPLO: Sea la progresión aritmética 3, 5, 7, 9,…

Hallar a_{10} el décimo término.

Primero encontramos d usando $\mathbf{F_1}$ $d = a_n - a_{n-1}$ = $5-3$ ó $7-5$ ó $9-7$ = 2

Entonces d = 2

Aplicando $\mathbf{F_2}$ con n = 10 a_1 = 3 y d = 2

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{10} = 3 + (10-1)2$$
$$= 3 + (9)\,2$$
$$= 3 + 18$$
$$a_{10} = 21.$$

Entonces el décimo término es 21 y la progresión aritmética hasta el décimo término es:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.

3.- **CÁLCULO DEL PRIMER TÉRMIN0** a_1.

Si de $\mathbf{F_2}$ se despeja a_1 nos queda

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)d}$$ que la llamaremos fórmula $\mathbf{F_3}$.

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el n-ésimo término y la diferencia común.

EJEMPLO: Hallar el primer término a_1 de la progresión cuyos primeros 8 términos son:

a_1,…,12,14,16.

Para hallar d aplicamos $\mathbf{F_1}$ d = 14-12 = 2.

Entonces d = 2 n = 8 y a_8 = 16.

Aplicamos $\mathbf{F_3}$ $a_1 = a_n - (n-1)d$

$$a_1 = 16 - (8-1)2$$
$$a_1 = 16 - (7)2$$
$$a_1 = 16 - 14$$
$$a_1 = 2.$$

Entonces el primer término es 2 y la progresión es:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

4.- **CÁLCULO DE LA DIFERENCIA COMÚN.**

Si de **F₂** se despeja d nos queda

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n - a_1 = (n-1)d$$
$$\frac{a_n - a_1}{n-1} = d$$
$$\boxed{d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}}$$

que la llamaremos fórmula **F_4** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el n-ésimo término y el primer término.

Nota: Se puede calcular d con **F_2** o **F_4** conociendo los valores de cada fórmula.

EJEMPLO: ¿Cuál es la diferencia común de la progresión aritmética de 9 términos cuyo primer término es 3 y el noveno es 35?

$n = 9$ $a_1 = 3$ y $a_9 = 35$.

Aplicando **F_4**
$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$d = \frac{35 - 3}{9 - 1}$$

$$d = \frac{32}{8}$$

$$d = 4$$

Entonces $d = 4$ y la progresión es:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35,…

5.- **CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS.**

Si de **F_2** se despeja n nos queda

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n - a_1 = (n-1)d$$
$$a_n - a_1 = nd - d$$
$$a_n - a_1 - d = nd$$

$$\frac{a_n - a_1 - d}{d} = n$$

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1}$$ que la llamaremos fórmula $\mathbf{F_5}$.

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el n-ésimo término, el primer término y la diferencia común.

EJEMPLO: ¿Cuál es el subíndice del término igual a 30, en la progresión cuyos primeros términos son?

$d = 6 - 4 = 2$ $\quad a_1 = 4$ $\quad$ y $\quad a_n = 30$

Aplicando $\mathbf{F_5}$ $\quad n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1$

$$n = \frac{30 - 4}{2} + 1$$

$$n = \frac{30 - 4}{2} + 1$$

$$n = \frac{26}{2} + 1$$

$$n = 14.$$

Entonces el número de términos de la progresión es 14 .

6.- **CÁLCULO DE LA SUMA DE LOS PRIMEROS n TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.**

La suma de los términos de una progresión aritmética se denota con **S_n,** y es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k+1)d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + ... + (a_1 + (n-1)d)$$

Sea

S_n = $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$ $\qquad$ 1

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética, si se invierte el orden de los términos, es:.

$\mathbf{S_n} = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$ 2

y si se realiza la suma de 1 y 2 miembro a miembro

$\mathbf{S_n} = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$

+

$\mathbf{S_n} = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ldots + (a_1 + d) + a_1$

$2\mathbf{S_n} = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d].$

Como en el lado derecho tenemos n términos entonces

$2\mathbf{S_n} = n[2a_1 + (n-1)d]$

Despejando $\mathbf{S_n}$ nos queda

$$\boxed{\mathbf{S_n} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$ que la llamaremos fórmula **F_6** .

Sustituyendo $a_1 + (n-1)d = a_n$ en **F_6**

$$\mathbf{S_n} = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$\boxed{\mathbf{S_n} = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]}$$ que le llamaremos fórmula **F_7** .

EJEMPLO: Hallar la suma de los primeros 7 términos de la progresión aritmética 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19,…

d = 13 – 10 = 3 n = 7 a_1 = 1 a_7 = 19.

Aplicando **F_6** : $\mathbf{S_n} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$\mathbf{S_n} = \frac{7}{2}[2(1) + (7-1)3]$$

$$\mathbf{S_n} = \frac{7}{2}[2 + 18]$$

$$\mathbf{S_n} = \frac{7}{2}[20] = 7(10) = 70.$$

Aplicando $\mathbf{F_7}$: $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

$$S_n = \frac{7}{2}[1+19]$$

$$S_n = \frac{7}{2}[20]$$

S_n = 7(10) = 70.

Nota: la aplicación de $\mathbf{F_6}$ o $\mathbf{F_7}$ en un problema es que para $\mathbf{F_6}$ se debe de conocer n, a_1 y d, y para aplicar $\mathbf{F_7}$ se debe de conocer n, a_1 y a_n.

7.- INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS.

Medios aritméticos

Se les llama medios aritméticos a los términos de una progresión aritmética que se hallan entre dos de ellos mismos.

EJEMPLO: En la progresión aritmética 3, 5, 7, 9, 11 los términos 5, 7 y 9 son medios aritméticos entre 3 y 11.

Interpolar medios aritméticos entre 2 números dados es insertar términos entre esos dos, para formar una progresión aritmética cuyo primer término y n-ésimo sean esos dos números dados.

EJEMPLO: Interpolar 4 medios aritméticos entre 1 y 3.

El problema es hallar 4 números entre 1 y 3 de tal manera que los primeros 6 términos de la progresión aritmética sean:

1, a_2, a_3, a_4, a_5, 3 entonces n = 6, a_1 = 1, a_6 = 3.

Aplicamos $\mathbf{F_4}$: = $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ para hallar d

$$d = \frac{3 - 1}{6 - 1} = \frac{2}{5}.$$

Para hallar a_2 se aplica $\mathbf{F_2}$: $a_n = a_1 + (n-1)d$ donde n = 2

$$a_2 = 1 + (2\text{-}1)\frac{2}{5} = 1 + (1)\frac{2}{5} = \frac{7}{5}.$$

Para hallar a_3 se aplica $\mathbf{F_2}$: $a_n = a_1 + (n-1)d$ donde n = 3

$$a_3 = 1 + (3\text{-}1)\frac{2}{5} = 1 + (2)\ \frac{2}{5} = \frac{9}{5}.$$

Para hallar a_4 se aplica **F₂** : $a_n = a_1 + (n-1)d$ donde $n = 4$

$$a_4 = 1 + (4\text{-}1)\frac{2}{5} = 1 + (3)\ \frac{2}{5} = \frac{11}{5}.$$

Para hallar a_5 se aplica **F₂** : $a_n = a_1 + (n-1)d$ donde $n = 5$

$$a_5 = 1 + (5\text{-}1)\frac{2}{5} = 1 + (4)\ \frac{2}{5} = \frac{13}{5}.$$

Entonces la progresión aritmética es:

$$1,\ \frac{7}{5},\ \frac{9}{5},\ \frac{11}{5},\ \frac{13}{5},\ 3,\ldots$$

Si se está insertando un medio aritmético entre dos términos, a este medio aritmético se le llama media aritmética o promedio, si llamamos M a la media aritmética, se tienen los tres términos de la progresión aritmética.

$$a_1,\ M,\ a_3.$$

La diferencia común es M- a_1 o a_3-M y como deben ser iguales

$$M - a_1 = a_3 - M$$
$$M + M = a_3 + a_1$$
$$2M = a_3 + a_1$$
$$M = \frac{a_3 + a_1}{2}$$

le llamaremos fórmula **F₈** .

De modo que la media aritmética o promedio de dos números es la suma de esos dos números dividida entre dos.

Se puede generalizar este concepto y hallar la media aritmética o promedio de un conjunto de números.

La media aritmética de los números $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ esta dada por

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

le llamaremos fórmula **F₉** .

EJEMPLO: Hallar la media aritmética de 6 y 9

$$M = \frac{6+9}{2} = \frac{15}{2}.$$

EJEMPLO: Hallar la media aritmética de los números 6, 7, 8, 9, 10

$$M = \frac{6+7+8+9+10}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

E J E R C I C I O S

1.- Determinar cuales de las siguientes sucesiones son aritméticas, si son aritméticas hallar d y los dos siguientes términos.

a) 2, 4, 8,…
b) 7, 6, 5, 6,…
c) -11, -16, -21,…
d) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{18},...$
e) 5, -1, -7,…
f) 12, 4, $\frac{4}{3}$ …
g) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$
h) 16, 48, 80,…

2.- En las siguientes progresiones aritméticas hallar las cantidades indicadas.

a) $a_1 = -5$ $d = 4$ hallar a_2, a_3, a_4
b) $a_1 = -12$ $a_{16} = -77$ hallar a_{20}
c) $a_1 = -18$ $d = 3$ hallar a_2, a_3, a_4
d) $a_{16} = \frac{69}{4}$ $a_{25} = 31$ hallar a_{30}
e) $a_1 = -3$ $d = 5$ hallar a_{15} y **S_{11}**
f) $a_1 = 3$ $d = 4$ hallar a_1 y **S_{21}**
g) $a_1 = 1$ $a_2 = 5$ hallar **S_{25}**
h) $a_1 = 5$ $a_2 = 11$ hallar **S_{11}**
i) $a_1 = 7$ $a_2 = 5$ hallar a_{15}
j) $a_1 = -3$ $d = -4$ hallar a_{10}
k) $a_1 = 3$ $a_{20} = 117$ hallar d y a_{110}
l) $a_1 = 7$ $a_8 = 28$ hallar d y a_{25}
m) $a_1 = -12$ $a_{40} = 22$ hallar **S_{40}**
n) $a_1 = 24$ $a_{24} = -28$ hallar **S_{24}**
ñ) $a_1 = \frac{1}{3}$ $a_2 = \frac{1}{2}$ hallar a_{11} y **S_{11}**
o) $a_1 = \frac{1}{6}$ $a_2 = \frac{1}{4}$ hallar a_{19} y **S_{19}**
p) $a_5 = 13$ $a_{10} = 55$ hallar a_1
q) $a_9 = -12$ $a_{13} = 3$ hallar a_1
r) $a_2 = 2$ $d = \frac{3}{2}$ $a_n = 8$ hallar n y **S_n**

s) $a_8 = \frac{3}{4}$ $a_9 = 1$ hallar a_1

t) $a_1 = -11$ $a_5 = 1$ hallar S_8

3.- En las siguientes progresiones hallar el término que se pide.

a) 9° término de 7, 10, 13,…
b) 12° término de 5, 10, 15,…
c) 48° término de 9, 12, 15,…
d) 63° término de 3, 10, 17,…
e) 12° término de 11, 6, 1,…
f) 28° término de 19, 12, 5,…
g) 13° término de 3, -1, -5,…
h) 54° término de 8, 0, -8,…
i) 31° término de -8, 2, 12,…
j) 12° término de $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, ...$
k) 39° término de 3, $-1\frac{1}{4}, ...$
l) 19° término de -4, $-\frac{2}{3}, ...$
m) 26° término de $-\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, ...$
n) 41° término de $2\frac{4}{5}, 2\frac{7}{10}, ...$
ñ) 33° término de $3\frac{2}{3}, 2\frac{11}{12}, ...$
o) 19° término de $-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, ...$
p) 13° término de $-\frac{1}{4}, -2\frac{1}{4}, ...$
q) 21° término de $-\frac{3}{5}, -\frac{14}{15}, ...$
r) 15° término de $\frac{2}{7}, \frac{1}{8}, ...$
s) 36° término de $\frac{7}{9}, \frac{1}{3}, ...$
t) 31° término de -7, -3, 1,…
u) 27° término de $3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, ...$
v) 38° término de $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, ...$

4.- El valor de $a_{15} = 20$ $d = \frac{2}{7}$ hallar a_1

5.- El valor de $a_{32} = -18$ $d = 3$ hallar a_1

6.- El valor de $a_5 = \frac{3}{4}$ y $a_9 = 1$ hallar a_1

7.- El valor de $a_5 = 7$ y $a_7 = 8\frac{1}{3}$ hallar a_1

8.- Hallar d de 3,…,8 donde 8 es el sexto término.

9.- Hallar d de -1,…,-4 donde $a_{10} = -4$.

10.- Hallar d de $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{8}$ donde $a_{17} = \frac{3}{8}$.

11.- Si $a_1 = 5$ y $a_{18} = -80$ hallar d.

12.- Si $a_{92} = 1050$ y $a_1 = -42$ hallar d.

13.- ¿Cuál es el subíndice del termino igual a 18 , en la progresión cuyos primeros términos son: 5, $5\frac{1}{3}$,…, 18?

14.- $a_1 = 5\frac{1}{5}$, $a_2 = 6$ y $a_n = 18$ ¿Hallar el número de términos?

15.- Hallar las siguientes sumas.

a) 8 primeros términos de 15, 19, 23,…
b) 19 primeros términos de 31, 38, 45,…
c) 24 primeros términos de 42, 32, 22,…
d) 80 primeros términos de -10, -6, -2,…
e) 60 primeros términos de 11, 1, -9,…
f) 50 primeros términos de -5, -13, -21,…
g) 9 primeros términos de $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$,…
h) 14 primeros términos de $\frac{3}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{2},...$
i) 19 primeros términos de $\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{9}{4},...$
j) 34 primeros términos de $\frac{2}{5},\frac{7}{55},...$
k) 11 primeros términos de $2\frac{1}{3},3\frac{2}{5},...$
l) 46 primeros términos de $3\frac{1}{4},3\frac{13}{20},...$
m) 17 primeros términos de -2, $\frac{1}{4},...$
n) 12, 5, -2,…,-100
o) -5, -3, -1,…,25

16.- Interpolar

a) 8 medios aritméticos entre 3 y 11
b) 7 medios aritméticos entre 19 y -5
c) 5 medios aritméticos entre -13 y -73
d) 4 medios aritméticos entre -42 y 53
e) 5 medios aritméticos entre -81 y -9
f) 3 medios aritméticos entre 1 y 3
g) 4 medios aritméticos entre 5 y 12
h) 5 medios aritméticos entre -4 y 3
i) 5 medios aritméticos entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$
j) 6 medios aritméticos entre -1 y 3
k) 5 medios aritméticos entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{8}$
l) 7 medios aritméticos entre -2 y -5
m) 8 medios aritméticos entre $\frac{1}{2}$ y $-\frac{7}{10}$
n) 5 medios aritméticos entre 4 y 22
o) 3 medios aritméticos entre 18 y -10
p) 6 medios aritméticos entre -2 y 12
q) 6 medios aritméticos entre 11 y 13
r) 5 medios aritméticos entre -1 y 1
s) 9 medios aritméticos entre -10 y 10
t) 5 medios aritméticos entre 8 y 80

17.- Hallar la media aritmética de los siguientes pares de números.

a) 5 y 77
b) 7 y 15
c) -28 y 2
d) -9 y -7
e) 5 y 73
f) -28 y 2
g) 2 y 9
h) 2 y 10
i) 3 y -5
j) 6 y 10
k) 7 y 15

RESUMEN DE FORMULAS PARA
PROGRESIONES ARITMÉTICAS

F₁	$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$	Para hallar la diferencia común conociendo dos términos consecutivos.
F₂	$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$	Para hallar el n-ésimo término conociendo a_1, n **y** d.
F₃	$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)d}$	Para hallar el primer término conociendo a_n, n **y** d.
F₄	$\boxed{d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}}$	Para hallar la diferencia común conociendo a_1, a_n y n.
F₅	$\boxed{n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1}$	Para hallar el subíndice del término n-esimo, conociendo a_1, a_n y d.
F₆	$\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]}$	Para hallar la suma de n términos de una serie aritmética conociendo a_1, d y n.
F₇	$\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]}$	Para hallar la suma de n términos de una serie aritmética conociendo a_1, a_n y n.
F₈	$\boxed{M = \dfrac{a_3 - a_1}{2}}$	Para hallar la media aritmética de dos términos o para insertar un medio aritmético.
F₉	$\boxed{M = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$	Para hallar la media aritmética de un conjunto de números o el promedio.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

DEFINICIÓN: Una progresión geométrica es una sucesión de números tales que cualquier elemento después del primero puede obtenerse al multiplicar el elemento anterior por una constante.

La constante por la que se multiplica en una progresión geométrica se le llama razón y se denota con r.

La notación general para una progresión geométrica es:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots, a_1 r^{n-2}, a_1 r^{n-1}, a_1 r^n.$$

Debido a que un término se multiplica por la razón r para obtener el siguiente término, r se puede obtener dividiendo cualquier término entre el anterior.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

y la progresión geométrica también se le llama progresión por **cociente**.

Así en la progresión 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 la razón se puede obtener como

$$r = \frac{2}{1} = 2 \quad r = \frac{4}{2} = 2 \quad r = \frac{8}{4} = 2 \quad r = \frac{16}{8} = 2 \quad r = \frac{32}{16} = 2 \quad r = \frac{64}{32} = 2$$

$$r = \frac{128}{64} = 2$$

Igual que en una progresión aritmética el primer término es a_1, el n-ésimo término a_n.

En la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,…

$a_1 = 1$ $\quad a_8 = 128$ $\quad n = 8$ $\quad$ y $\quad r = 2$

Una progresión geométrica es **creciente** cuando $r > 1$ y $a_1 > 0$ o $0 < r < 1$ y $a_1 < 0$.

Una progresión geométrica es **decreciente** cuando $0 < r < 1$ y $a_1 > 0$ o $r > 1$ y $a_1 < 0$.

Si la razón es negativa la progresión no es creciente ni decreciente, es decir, los términos alternan entre negativo y positivo o positivo y negativo.

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

1.- **CÁLCULO DE LA RAZÓN.**

Por definición un término se puede obtener multiplicando el anterior por la razón común $a_n = ra_{n-1}$, si de esta igualdad se despeja r

$\boxed{r = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$ que la llamaremos fórmula **G_1** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan dos términos consecutivos de la progresión geométrica.

2.- **CÁLCULO DEL TÉRMINO** a_n .

Sea la sucesión geométrica $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ cuya razón es r entonces por definición

$$
\begin{aligned}
a_2 &= ra_1 \\
a_3 &= ra_2 = r(ra_1) = r^2 a_1 \\
a_4 &= ra_3 = r(r^2 a_1) = r^3 a_1 \\
a_5 &= ra_4 = r(r^3 a_1) = r^4 a_1 \\
&\;\;\vdots \\
a_n &= ra_{n-1} = r(r^{n-2} a_1) = r^{n-1} a_1
\end{aligned}
$$

$\boxed{a_n = r^{n-1} a_1}$ que la llamaremos fórmula **G_2** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el primer término y la razón común.

EJEMPLO:

Hallar el término 17° de la progresión geométrica 3, 6, 12,…

Aplicamos **G_1** $r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{12}{6} = 2$ entonces $r = 2$.

Aplicando **G_2** $a_n = r^{n-1} a_1$ donde $n = 17$ $r = 2$ $a_1 = 3$

$a_{17} = (2)^{17-1} 3$
$= (2)^{16} 3$
$= (65,536)3$

a_{17} = 196,608 entonces el 17° término es 196,608.

3.- **CÁLCULO DEL TÉRMINO a_1 O PRIMER TÉRMINO.**

Si de **G₂** se despeja a_1

$$\boxed{a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}}$$ que la llamaremos fórmula **G_3** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el término n-ésimo, la razón común y el número de términos.

EJEMPLO:

a) Hallar el primer término de la progresión geométrica cuyo cuarto término es 8 y razón r = 4.

Aplicando **G_3** con $r = 4$ $a_4 = 8$ $n = 4$

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{8}{(4)^{4-1}}$$

$$= \frac{8}{(4)^3}$$

$$= \frac{8}{64}$$

$$a_1 = \frac{1}{8}$$ entonces el valor del primer término es $\frac{1}{8}$.

b) Hallar el primer término de la progresión geométrica cuyo cuarto y quinto término son 5 y -3.

Aplicamos **G_1** $r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{5}{-3}$.

Aplicando **G_3** con $r = -\frac{5}{3}$ $a_5 = 5$ $a_4 = -3$ $n = 5$

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{5}{\left(-\frac{5}{3}\right)^{5-1}}$$

$$a_1 = \frac{5}{\left(-\frac{5}{3}\right)^4}$$

$$a_1 = \frac{5}{\frac{5^4}{3^4}}$$

$$a_1 = \frac{3^4}{5^3}$$

$$a_1 = \frac{81}{125}$$ entonces el primer término es $\frac{81}{125}$.

4.- **CÁLCULO DE LA RAZÓN.**

Si de **G₂** se despeja r

$$a_n = r^{n-1} a_1$$

$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

$$\boxed{\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = r}$$ que la llamaremos fórmula **G₄** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el primer término y el n-ésimo término.

EJEMPLO:

a) Hallar la razón de la progresión geométrica cuyos primeros 6 términos son: 3,…, -729

Aplicando **G₄** con a_6 = -729 a_1 = 3 n = 6

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6-1]{\frac{-729}{3}} = \sqrt[5]{-\ 243} = -3.$$

Entonces la razón común es r = -3

b) El primer término de una progresión geométrica es -5 y el octavo es 640. ¿Hallar la razón común?

Aplicando **G₄** con a_8 = 640 a_1 = -5 n = 8

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[8-1]{\frac{640}{-5}} = \sqrt[7]{-\ 128} = -2$$

Entonces la razón común es r = -2

5.- **CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS.**

Si de **G₂** se despeja n

$$a_n = r^{n-1}a$$

$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

n está como un exponente y para despejarlo se utilizan propiedades de los logaritmos

$$\log \frac{a_n}{a_1} = \log r^{n-1}$$

$$\log a_n - \log a_1 = (n-1)\log r$$

$$\frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} = n-1$$

$$\boxed{n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1}$$

que la llamaremos fórmula **G₅**

donde r, a_1, a_n deben ser > 0

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el primer término, el término n-ésimo y la razón común.

EJEMPLO: En la progresión geométrica donde el primer término es 0.0003 y la razón es $r = 10$ ¿Qué lugar ocupa término que es 3, 000,000?

Aplicando **G₅** con $a_1 = 0.0003$ $r = 10$ $a_n = 3,000,000$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log 3000000 - \log 0.0003}{\log 10} + 1$$

$$n = \frac{6.477121255 - (-3.522878845)}{1} + 1$$

$$n = \frac{10}{1} + 1$$

$n = 11$ entonces 3, 000,000 es el onceavo término.

6.- CÁLCULO DE LA SUMA DE LOS PRIMEROS n TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

La suma de los primeros n términos de una progresión geométrica se denota como $\mathbf{S_n}$, y es:

$$\mathbf{S_n} = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n .$$

Sea $\mathbf{S_n} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-3} + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$. (1)

Si se multiplican los dos miembros de ésta igualdad por la razón **r**

$$\mathbf{r\,S_n} = \mathrm{r}\,[\,a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-3} + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}\,]$$

$$\mathbf{r\,S_n} = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad . \qquad (2)$$

Restando la igualdad (2) de la igualdad (1) miembro a miembro:

$$\mathbf{S_n} = a_1 + \cancel{a_1 r} + \cancel{a_1 r^2} + \cancel{\ldots} + \cancel{a_1 r^{n-3}} + \cancel{a_1 r^{n-2}} + \cancel{a_1 r^{n-1}}$$

$$-\quad \mathbf{r\,S_n} = \cancel{a_1 r} + \cancel{a_1 r^2} + \cancel{a_1 r^3} + \cancel{\ldots} + \cancel{a_1 r^{n-2}} + \cancel{a_1 r^{n-1}} + a_1 r^n$$

$\mathbf{S_n} - \mathbf{r\,S_n} = a_1 - a_1 r^n$ todos los demás términos se eliminan quedando el primero de (1) y el último de (2) .

Factorizando $\mathbf{S_n}$ del lado izquierdo y a_1 del lado derecho

$$\mathbf{S_n}\,(1 - r) = a_1 (1 - r^n)$$

Despejando $\mathbf{S_n}$

$$\boxed{\mathbf{S_n} = \frac{a_1 (1 - r^n)}{1 - r}}$$

que la llamaremos fórmula **G₆** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el primer término, la razón común y el número de términos.

Si en la factorización anterior no se factoriza a_1 entonces nos queda

$$\mathbf{S_n} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} r}{1 - r} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$\boxed{\mathbf{S_n} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}}$$ que la llamaremos fórmula **G₇** .

Nota: Esta fórmula se puede aplicar siempre y cuando se conozcan el primer término, el termino n-ésimo y la razón común.

EJEMPLO:

a) Calcular la suma de los primeros 7 términos de la progresión geométrica

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \ldots$$

Aplicamos **G₆** con $n = 6$ $a_1 = 3$ $r = \frac{3/4}{3/2} = \frac{3(2)}{4(3)} = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{S_6} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\mathbf{S_6} = \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 6\left(\frac{63}{64}\right) = \frac{189}{32} = 5\frac{29}{32}$$

$$\mathbf{S_6} = 5\frac{29}{32} = 5.90625.$$

b) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica

$$\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$$

Aplicamos **G₁** para hallar r $\qquad r = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$

Aplicamos **G₂** para hallar a_{10} $\qquad a_{10} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{512}{19683}\right) = \frac{256}{6561}.$

Aplicamos **G_7** para hallar la suma de los 10 términos con $a_1 = \frac{3}{2}$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{\frac{3}{2} - \frac{256}{6561}\left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{2}{3}} = 4.421963115.$$

La suma de los 10 primeros términos es 4.421963115.

7.- CÁLCULO DE SERIES GEOMÉTRICAS.

Una serie geométrica infinita es la suma de términos asociada a una sucesión $a_1, \dots, a_n, \dots$ y se expresa como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Una forma en que podemos determinar la suma de una serie geométrica infinita es aplicando la fórmula previa de suma parcial.

Cada suma parcial **S_n** es la suma de los n primeros términos de la serie, esto significa que cada suma parcial es resultado de un número finito de términos.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_2 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n .$$

S_n se denomina la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

La sucesión de sumas parciales es **$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$**$, \dots$

Si ocurre que, a medida que n crece, **S_n** parece acercarse a un valor fijo denominado **S**, entonces decimos que **S** es la suma de la serie geométrica.

Se debe tener en cuenta que a medida que n crece, **S_n** se aproxima más y más a **S**, pero nunca es **S**.

Considérese una serie geométrica con $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$.

¿Qué le sucede a la suma si n toma valores cada vez mayores?

Para esto se puede escribir $\mathbf{S_n}$ como

$$\mathbf{S_n} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r^n}{1-r}.$$

Para $n = 2$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 - 10(.25) = 10 - 2.5.$

Para $n = 3$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 - 10(.125) = 10 - 1.25.$

Para $n = 4$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}} = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10 - 10(0.0625) = 10 - 0.625.$

Para $n = 10$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 10 - 10(0.0009765)$

$= 10 - 0.009765.$

Es decir, que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace cada vez más pequeño a medida que n se hace más grande.

Se dice que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito y entonces la suma sería

$\mathbf{S_n} = 10 - 0 = 10.$

Por lo tanto, la fórmula para calcular la suma de una serie geométrica es:

$$\mathbf{S} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Considérese la serie geométrica infinita con $a_1 = 5$ y $r = 2$.
¿Qué le sucede a la suma si n toma valores cada vez mayores?

Consideramos $\mathbf{S_n}$ de la misma forma

$$\mathbf{S_n} = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r^n}{1-r}.$$

Para $n = 2$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-2} - \frac{5(2)^2}{1-2}$ = -5 – 10 $(2)^2$ = -5 – 10(4) = -5 – 40 = -45.

Para $n = 3$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-2} - \frac{5(2)^3}{1-2}$ = -5 - 10 $(2)^3$ = -5 – 10(8) = -5 – 80 = -85.

Para $n = 4$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-2} - \frac{5(2)^4}{1-2}$ = -5 - 10 $(2)^4$ = -5 – 10(16) = -5 – 160 = -165.

Para $n = 10$, $\mathbf{S_n} = \frac{5}{1-2} - \frac{5(2)^{10}}{1-2}$ = -5 -10 $(2)^{10}$ = -5 – 10(1024) = -5 – 10240 = -10245.

Es decir, que $(2)^n$ se hace cada vez más grande a medida que n se hace más grande.

Se dice que $(2)^n$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito y entonces la suma no existe, esto sucede con cualquier valor de r mayor que 1.

Si consideramos la serie geométrica infinita con $a_1 = 5$ pero ahora con $r = 1$.

La serie tomaría la forma:

5 + 5(1) + 5(1)^2 + 5(1)^3 +…+ 5(1)^n +… = 5 + 5 + 5+ 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5…

Y como el número de términos es infinito la suma de ellos también lo es, por lo tanto, la suma infinita no existe.

Por lo tanto, si $|r| < 1$ se observa que r^n está cerca de cero para valores cada vez más grandes de n y la serie geométrica tiene la suma:

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{a_1}{1-r}}$$ que la llamaremos fórmula **G_8**.

A este tipo de series se les llama series infinitas **convergentes**.

Nota: Si $|r| \geq 1$ la serie geométrica no tiene suma y a este tipo de series se les llama serie **divergente.**

Nota: Esta fórmula se puede aplicar para convertir un decimal periódico en un cociente de enteros.

EJEMPLO: Escribir 0.232323… como un cociente de números enteros.

Primero, el decimal se puede escribir como progresión geométrica infinita:

$$0.232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \ldots$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right) + \ldots$$

En donde $a_1 = \frac{23}{100}$ $\quad r = \frac{1}{100} < 1.$

Aplicando **G₈** : $\mathbf{S} = \frac{a_1}{1-r}$

$$\mathbf{S} = \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}$$

Entonces, el cociente de los números enteros $\frac{23}{99}$ es 0.232323…

8.- INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS.

Medios geométricos: se les llama medios geométricos a los términos de una progresión geométrica que se encuentran entre dos de ellos mismos.

En la progresión 1, 4, 16, 64, 256,… los términos 4, 16 y 64 son medios geométricos de 1 y 256.

Interpolar medios geométricos entre dos números, es insertar términos entre esos dos números dados, de tal manera que se forme una progresión geométrica.

EJEMPLO: Interpolar 4 medios geométricos entre 96 y 3.

Hay que formar la progresión geométrica cuyo primer término sea 96 y sexto término sea 3.

$96, a_2, a_3, a_4, a_5, 3$

El número de términos es 6, dos que nos dan y 4 que se quieren insertar.

Aplicando **G₄** con $a_6 = 3$ $a_1 = 96$ $n = 6$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6-1]{\frac{3}{96}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \quad \text{entonces} \quad r = \frac{1}{2}.$$

Para hallar a_2 se aplica **G₂** con $n = 2$

$$a_n = r^{n-1}a_1 \qquad a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} 96 = \left(\frac{1}{2}\right) 96 = 48.$$

Para hallar a_3 se aplica **G₂** con $n = 3$

$$a_n = r^{n-1}a_1 \qquad a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} 96 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} 96 = 24.$$

Para hallar a_4 se aplica **G₂** con $n = 4$

$$a_n = r^{n-1}a_1 \qquad a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} 96 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} 96 = 12.$$

Para hallar a_5 se aplica **G₂** con $n = 5$

$$a_n = r^{n-1}a_1 \qquad a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} 96 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} 96 = 6.$$

Por lo tanto, la progresión geométrica es:

96, 48, 24, 12, 6, 3,…

Si la razón es de $\frac{1}{2}$ se puede ir multiplicando para hallar los siguientes términos en lugar de aplicar **G₂** varias veces.

$$96\left(\frac{1}{2}\right) = 48$$

$$48\left(\frac{1}{2}\right) = 24$$

$$24\left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$12\left(\frac{1}{2}\right) = 6.$$

9.- CÁLCULO DE LA MEDIA GEOMÉTRICA.

Se le llama media geométrica a la interpolación de un medio geométrico.

Sea M un medio geométrico de a_1 y a_3 entonces

a_1, M, a_3 forman una progresión geométrica y la razón es:

$$r = \frac{M}{a_1} = \frac{a_3}{M}$$

Despejando M

$$MM = a_1\ a_3$$

$$M^2 = a_1\ a_3$$

$$\boxed{M = \sqrt{a_1 a_3}}$$ que la llamaremos fórmula **G_9** .

EJEMPLO: Hallar la media geométrica de 4 y 9.

Aplicamos **G_9 :** $M = \sqrt{a_1 a_3} = \sqrt{4(9)} = \sqrt{36} = 6.$

Mediante una generalización de la media geométrica de dos números se define la media geométrica de un conjunto de números $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ como:

$$\boxed{M = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}$$ que la llamaremos fórmula **G_{10}** .

Es decir, la media geométrica de un conjunto de números es la raíz n-ésima del producto de todos los números.

10.- PRODUCTO DE DOS TÉRMINOS EQUIDISTANTES DE LOS DOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

Sea la progresión geométrica:

$$a_1, \ldots, m, \ldots, p, \ldots, a_n$$

Donde entre a_1 y m hay n términos y entre p y a_n hay n términos.
Entonces m y p equidistan de a_1 y a_n.

Se tiene que $m = r^{n-1}a_1$ I aplicando **G_2** .
Y también $a_n = r^{n-1}\, p$ II aplicando **G_2 .**

Despejando r^{n-1} de I y II tenemos

$$r^{n-1} = \frac{m}{a_1} \quad \text{de I} \qquad \text{y} \qquad r^{n-1} = \frac{a_n}{p}.$$

Entonces $$\frac{m}{a_1} = \frac{a_n}{p}$$

$$\boxed{pm = a_1 a_n}$$ que la llamaremos fórmula **G_{11}** .

Es decir, que el producto de dos términos equidistantes de dos términos dados es igual al producto de los números dados.

11.- PRODUCTO DE LOS PRIMEROS n TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ una progresión geométrica.

Sea $\mathbf{P_n}$ el producto de los n términos de la progresión geométrica.

$$\mathbf{P_n} = a_1 \text{ x } a_2 \text{ x } a_3 \text{ x}, \ldots, \text{x } a_{n-2} \text{ x } a_{n-1} \text{ x } a_n . \qquad (1)$$

Si cambiamos el orden de los términos del 2° miembro

$$\mathbf{P_n} = a_n \text{ x } a_{n-1} \text{ x } a_{n-2} \text{ x}, \ldots, \text{x } a_3 \text{ x } a_2 \text{ x } a_1 . \qquad (2)$$

Y multiplicamos miembro a miembro 1 por 2

$$\mathbf{P_n} = a_1 \text{ x } a_2 \text{ x } a_3 \text{ x}, \ldots, \text{x } a_{n-2} \text{ x } a_{n-1} \text{ x } a_n$$

x

$$\mathbf{P_n} = a_n \text{ x } a_{n-1} \text{ x } a_{n-2} \text{ x}, \ldots, \text{x } a_3 \text{ x } a_2 \text{ x } a_1$$

$$(\mathbf{P_n})^2 = (a_1 \text{ x } a_n) \text{ x } (a_2 \text{ x } a_{n-1}) \text{ x } (a_3 \text{ x } a_{n-2}) \text{ x} \ldots \text{x } (a_{n-1} \text{ x } a_2) \text{ x } (a_1 \text{ x } a_n)$$

Como el producto de los términos equidistantes es igual al producto de los extremos entonces todos los productos del lado derecho son $(a_1 \ a_n)$ y se tienen **n** productos.

Entonces

$$(\mathbf{P_n})^2 = (a_1 a_n)^n$$

y despejando $\mathbf{P_n}$

$$\boxed{\mathbf{P_n} = \sqrt{(a_1 a_n)^n}}$$ que la llamaremos fórmula **G_{12}** .

Es decir, el producto de **n** términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado a una potencia igual al número de términos considerados.

EJEMPLO: Hallar el producto de los primeros 5 términos de la progresión

96, 48, 24, 12, 6,…

Aplicando **F12** con $a_1 = 96$ $a_6 = 6$ $n = 5$

$\mathbf{P_n} = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$

$\mathbf{P_6} = \sqrt{(96(6))^5}$

$\mathbf{P_n}$ = 7, 962, 624.

E J E R C I C I O S

1.- Hallar el término que se te pide de las siguientes progresiones geométricas.

a) El 7° término de 4, 20, 100,…
b) El 13° término de 8, 4, 2,…
c) El 16° término de -3, 6, -12,…
d) El 17° término de 3, -1, $1/3$
e) El 8° término de $3/4, -1/2, 1/3, \ldots$
f) El 15° término de $-3/4, -1/4, -1/12, \ldots$
g) El 8° término de $-1/3$, 1, 3,…
h) El 10° término de 1, $2/5, 4/25, \ldots$
i) El 7° término de 3, 2, $4/3, \ldots$

j) El 6° término de $1/2, 1/5, \ldots$
k) El 11° término de $2\,1/4$, 3,…
l) El 9° término de $5/6, 1/2, \ldots$
m) El 13° término de 16, -4, 1,…
n) El 12° término e $-3/5, 3/2, -15/4$
ñ) El 5° término de 4, -6, 9, $-13\,1/2$
o) El 8° término de 2, 6, 18, 54,…

2.- Calcular el 1° término con los datos que se dan.

a) $r = \frac{1}{2}$ el término $a_7 = 64$

b) $r = \frac{2}{3}$ el término $a_9 = \frac{64}{2187}$

c) $a_5 = \frac{16}{125}$ $a_6 = \frac{32}{625}$

d) $a_5 = 9$ $a_6 = 24$

e) $a_7 = 11$ $a_9 = 15$

f) $a_4 = 9$ $a_5 = 3$

g) $a_8 = \frac{1}{3}$ $a_9 = 5$

3.- Calcular la razón común con los datos que se dan.

a) Si a_1 = -5 y a_7 = 4

b) Si $a_1 = \frac{1}{3}$ y a_8 = 729

c) Si a_3 = -2 y a_6 = 54

d) Si a_1 = 2 y a_6 = 64

e) Si $a_1 = \frac{1}{3}$ y a_7 = 243

f) Si a_1 = -5 y a_8 = 640

g) Si $a_1 = \frac{729}{2}$ y $a_6 = \frac{3}{2}$

h) Si a_2 = 3 y a_5 = -81

i) Si a_4 = 4 y a_7 = 12

4.- Responder.

a) En una sucesión geométrica donde a_1 = 0.0003, r = 10, ¿Qué lugar ocupa 3, 000, 000?

b) En la progresión geométrica 27, -18, 12,… ¿Qué lugar ocupa $-\frac{512}{729}$?

c) En una progresión geométrica donde a_1 = 3, $a_n = \frac{1}{559{,}872}$ y $r = \frac{1}{6}$ hallar n

d) En una progresión geométrica donde a_1 = -4, $a_n = -\frac{1}{4096}$, y $r = \frac{1}{2}$ hallar n

5.- Calcular la suma de las siguientes progresiones geométricas que se indican.

a) **S_5 =** ? de 6, 3, $1\frac{1}{2}$,…

b) **S_6 =** ? de 4, -8, 16,…

c) **S_7 =** ? de 12, 4, $1\frac{1}{3}$,…

d) **S_{10} =** ? de $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1,…

e) **S_8 =** ? de $2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$,…

f) **S_7 =** ? de $-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}$,…

g) **S_{10} =** ? de -6, -3, $-1\frac{1}{2}$,…

h) **S_6 =** ? de 9, -3, 1,…

6.- Hallar la suma de los términos dados de las siguientes progresiones geométricas.

a) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \ldots$

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \ldots$

c) 7, 14, 28, 56, 112, 224,…

d) 60, 6, 0.6, 0,006, 0.0006, 0.00006,…

7.- Escribir los siguientes números decimales periódicos como un cociente de números enteros.

a) 0.7777

b) 0.5555

c) 0.545454

d) 0.272727

e) 3.216216216

f) 5.636636

g) 0.3232

h) 2.1818

i) 0.144144

8.- Calcular las siguientes sumas.

a) $3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$

b) $16, 4, 1, \ldots$

c) $21, -3, \frac{3}{7}, \ldots$

d) $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots$

e) $4, 2, 1, \ldots$

f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots$

g) $-5, -2, -\frac{4}{5}, \ldots$

h) $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{6}{49}, \ldots$

i) $-14, -6, -\frac{18}{7}, \ldots$

9.- Hallar la media geométrica de los siguientes números.

a) 4 y 9

b) $-\frac{3}{10}$ y $-\frac{5}{6}$

c) 4, 10 y 25

d) 9, 21 y 49

e) 3 y 9

f) 16 y 25

g) $\frac{1}{3}$, 4 y 6

10.- Interpolar el número de términos que se indica.

a) 4 medios geométricos entre 5 y 6.

b) 7 medios geométricos entre 3 y 9.

c) 3 medios geométricos entre 5 y 3125.

d) 4 medios geométricos entre -7 y -224.

e) 5 medios geométricos entre 128 y 2.

f) 4 medios geométricos entre $4\frac{1}{2}$ y $\frac{16}{27}$

g) 6 medios geométricos entre 2 y $34\frac{11}{64}$

h) 4 medios geométricos entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{27}{256}$

i) 7 medios geométricos entre 8 y $\frac{1}{32}$

11.- Hallar el producto de las siguientes progresiones geométricas aplicando $\mathbf{G_{12}}$.

a) 1, 4, 16, 64, 128

b) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9

d) 1, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{8}{125}$

e) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$

f) 6, 3, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$

RESUMEN DE FÓRMULAS PARA
PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

G1 $r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ — Para hallar la razón común conociendo dos términos consecutivos.

G2 $a_n = r^{n-1}a_1$ — Para hallar el n-ésimo término conociendo r, n y a_1.

G3 $a_1 = \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$ — Para hallar el primer término conociendo r, n y a_n.

G4 $\sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}} = r$ — Para hallar la razón común conociendo n, a_1 y a_n.

G5 $n = \dfrac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$ — Para hallar el valor de n conociendo r, a_1 y a_n.

G6 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ — Para hallar la suma de n términos conociendo r, n y a_1.

G7 $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$ — Para hallar la suma de n términos conociendo r, a_1 y a_n.

G8 $S = \dfrac{a_1}{1-r}$ — Para hallar la suma de una progresión convergente.

G9 $M = \sqrt{a_1 a_3}$ — Para hallar la media geométrica de dos términos.

G10 $M = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ — Para hallar la media geométrica de un conjunto de números.

G11 $pm = a_1 a_n$ — Para hallar el producto de dos números equidistantes de dos términos dados de una progresión geométrica.

G12 $P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$ — Para hallar el producto de n términos de una progresión geométrica.

PROGRESIONES ARMÓNICAS

DEFINICIÓN: Una progresión armónica es una sucesión de números cuyos recíprocos forman una progresión aritmética.

Por ejemplo, la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$ es una progresión armónica ya que 2, 4, 6, 8, $2n, \ldots$ es una progresión aritmética.

En forma general:

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una progresión aritmética,

entonces $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$ es una progresión armónica.

EJEMPLO: Sea la progresión aritmética 3, -2, -7, -12, -17,…
¿Cuál es la progresión armónica?

La progresión armónica es $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{17}, \ldots$

De lo anterior resulta evidente que los problemas de progresiones armónicas pueden resolverse considerando en cada caso la progresión aritmética correspondiente.

EJEMPLO: El 2° término de una progresión armónica es $\frac{1}{5}$ y el 8° término es $\frac{1}{23}$.
Calcular el quinto término.

Como 5 y 23 deben de formar una progresión aritmética entonces $a_2 = 5$ y $a_8 = 23$.

Aplicando la fórmula para a_n de una progresión aritmética tenemos

$$5 = a_1 + d \qquad \text{y}$$

$$23 = a_1 + 7d\,.$$

Restando miembro a miembro

$$18 = 6d\,.$$

Despejando d $\qquad d = \frac{18}{6} = 3$ y $a_1 = 2$.

Entonces $a_5 = a_1 + (n-1)\,d$

$= \mathbf{2} +$ (5-1)3

$= 14.$

Entonces el 5° término de la progresión armónica es $\frac{1}{14}$.

EJEMPLO: Interpolar 4 medios armónicos entre $\frac{1}{7}$ y $-\frac{1}{3}$

Primero interpolamos 4 medios aritméticos entre 7 y -3.

Para encontrar d aplicamos $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ donde $a_n = -3$, $a_1 = 7$ y $n = 6$

$$d = \frac{-3-7}{6-1} = \frac{-10}{5} = -2$$

Como $d = -2$ entonces la progresión aritmética es 7, 5, 3, 1, -1, -3,… y los 4 medios armónicos son $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$, 1, -1.

Por lo tanto, la progresión armónica es $\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$, 1, -1, $-\frac{1}{3}$,…

Si se interpola un solo medio armónico entre dos números dados a éste número se le llama media armónica.

Sea H la media armónica entre dos números dados a y b, entonces a, H, b forman una progresión armónica y por lo tanto, sus recíprocos $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ forman una progresión aritmética.

Por lo tanto, la diferencia común es $d = \frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$.

Si despejamos H

$$\frac{1}{H} + \frac{1}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{2}{H} = \frac{b+a}{ab}$$

$$2ab = H(b+a)$$

$$H = \frac{2ab}{b+a}$$ que la llamaremos fórmula $\mathbf{H_1}$

que nos sirve para calcular la media armónica de dos números.

Nota: Hemos visto que la media aritmética de dos números a y b es M = $\frac{a+b}{2}$ y para la media armónica de dos números a y b es $H = \frac{2ab}{b+a}$.

Entonces la media aritmética y la media armónica de dos números a y b no es igual.

Existe una relación entre la media aritmética, geométrica y armónica de dos números diferentes dados que es la siguiente.

Si A, G, H son las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números a y b diferentes

Entonces A = $\frac{a+b}{2}$ G = $\sqrt{ab}$ H = $\frac{2ab}{b+a}$ y su relación es

$$\mathbf{A > G > H.}$$

Es decir, la media aritmética es mayor que la media geométrica y ésta a su vez es mayor que la media armónica.

E J E R C I C I O S

1.- El 3° término de una progresión armónica es $\frac{4}{3}$ y el 6° es $\frac{2}{3}$. Calcular el 9° término.

2.- El 2° término de una progresión armónica es 5 y el 5° es $\frac{6}{5}$. Calcular el 8° término.

3.- Los tres primeros términos de una progresión armónica son $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}$. Calcular el 6° y 8°.

4.- Los tres primeros términos de una progresión armónica son $-\frac{1}{3}, -1, 1$. Calcular el 9°.

5.- Interpolar tres medios armónicos entre 2 y 1.

6.- Interpolar cuatro medios armónicos entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{13}$.

7.- Interpolar cinco medios armónicos entre 7 y 1.

8.- Hallar la media armónica entre 3 y 9.

DEMOSTRACIÓN: **A > G > H** la media aritmética es mayor que la media geométrica que a su vez es mayor que la media armónica.

La media aritmética, geométrica y armónica de dos números iguales es igual a ellos mismos, ya que:

Si $a=b$, entonces A = $\dfrac{a+a}{2}=a$, G = $\sqrt{aa}=a$ y H = $\dfrac{2aa}{a+a}=\dfrac{2a^2}{2a}=a$

Consideremos el caso en que $a<b$, con $a,b>0$

Si $a<b$ entonces $a-b<0$

Elevando al cuadrado

$$(a-b)^2>0$$

Desarrollando el binomio

$$a^2-2ab+b^2>0$$

Sumando $4ab$ en ambos lados

$$a^2-2ab+b^2+4ab>4ab$$
$$a^2+2ab+b^2>4ab$$

Factorizando

$$(a+b)^2>4ab$$
$$\frac{(a+b)^2}{4}>ab$$

Sacando raíz en ambos lados

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}>\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

Es decir, **A > G**

Si $a<b$ entonces $a-b<0$

Elevando al cuadrado

$$(a-b)^2>0$$

Desarrollando el binomio

$$a^2-2ab+b^2>0$$

Sumando $4ab$ en ambos lados

$$a^2-2ab+b^2+4ab>4ab$$
$$a^2+2ab+b^2>4ab$$

Multiplicando por ab ambos lados

$$ab\left(a^2+2ab+b^2\right)>(4ab)ab$$

Entonces

$$ab(a+b)^2>4a^2b^2$$

Despejando ab

$$ab>\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

Sacando raíz en ambos lados

$$\sqrt{ab}>\sqrt{\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}}$$
$$\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$$

Es decir **G > H**

Por lo tanto, **A > G > H**

Si $a>b$ entonces $a-b>0$ y $(a-b)^2>0$, y sería el mismo resultado.

APLICACIONES DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una aplicación de las progresiones aritméticas esta relacionada con el interés simple.

Todas las actividades financieras descansan en la costumbre de pagar un rédito por el uso del dinero prestado.

Interés: es el alquiler o rédito que se conviene pagar por un dinero tomado en préstamo.

Por el dinero tomado en préstamo es necesario pagar un precio. Este precio se expresa por una cantidad a pagar por cada unidad de dinero prestado en una unidad de tiempo convencionalmente estipulada.

La expresión del precio es la tasa de la operación comercial, la unidad de tiempo que se acostumbra utilizar es el año pudiendo ser una fracción de éste.

La tasa se expresa en tanto por ciento, pero se opera en decimal y es el tipo de interés de la operación.

Si una cantidad C se presta por n años a un interés simple, con un interés $i\,\%$ anual ¿Cuál será el monto M al final de los n años?

Para obtener el monto al final del primer año se multiplica C por $\dfrac{i}{100}$ y se suma a C.

$$M_1 = C\left(i/100\right) + C$$

Para obtener el monto al final del segundo año se multiplica C por $\dfrac{i}{100}$ y se suma al monto del primer año.

$$\begin{aligned} M_2 &= C\left(i/100\right) + M_1 \\ &= C\left(i/100\right) + C\left(i/100\right) + C \\ M_2 &= C + 2C\left(i/100\right) \end{aligned}$$

Para obtener el monto al final del tercer año se multiplica C por i y se suma al monto del segundo año.

$$\begin{aligned} M_3 &= C\left(i/100\right) + M_2 \\ &= C\left(i/100\right) + C + 2C\left(i/100\right) \\ &= C + 3C\left(i/100\right) \\ M_3 &= C\left(1 + 3\left(i/100\right)\right) \end{aligned}$$

Para obtener el monto al final del n-ésimo año sería:

$$M_n = C\left(1 + n\left(i/100\right)\right)$$

Donde: C Es el capital inicial.
M Es el monto o capital final.
n Es el número de periodos a invertir.
i Es el interés por periodo.

Si ponemos los montos en orden

$$M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$$

Formarían una progresión aritmética, donde:

$$M_0 = C$$
$$M_1 = C + C(i/100)$$
$$M_2 = C + 2C(i/100)$$
$$M_3 = C + 3C(i/100)$$

$$M_n = C + nC(i/100) = C(1 + n(i/100))$$

Es decir M_n es a_n el n-ésimo término de la progresión aritmética.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

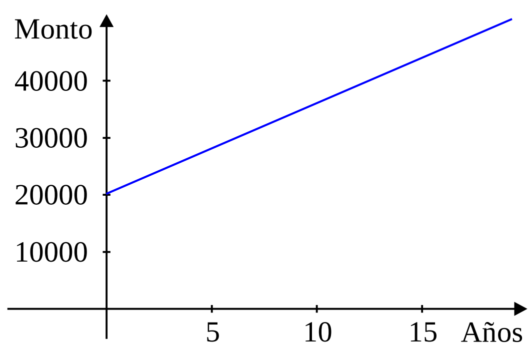
a_1 Es igual a C y d es igual a $C(i/100)$ la diferencia común.

EJEMPLO: Calcular el monto que se debe pagar por una deuda de 20,000 pesos, prestados durante 5 años a un interés anual de 8%.

$$M_n = C(1 + n(i/100)) \qquad C = 20,000$$
$$i = 0.08$$
$$n = 5$$

$$M_5 = 20000(1 + 5(0.08))$$
$$M_5 = 28000$$

Haciendo una gráfica del interés simple y pensando que es continuo:



En las transacciones financieras el interés se indica en forma anual, pero la unidad de inversión no siempre es anual.

Al interés anual se le llama tasa o interés nominal, y al interés que se aplica a la unidad de inversión se le llama tasa o interés efectivo.

Si el interés nominal es del 8% y la unidad de inversión es semestral, el interés que se le aplica al capital semestral es $\frac{0.08}{2} = 0.04$, si es trimestral es $\frac{0.08}{4} = 0.02$, si es mensual es $\frac{0.08}{12} = 0.00666...$ y así sucesivamente, esto es porque:

2 semestres = 1 año
3 cuatrimestres = 1 año
4 trimestres = 1 año
6 bimestres = 1 año
24 quincenas = 1 año
52 semanas = 1 año
365 días = 1 año

Es decir, que para convertir la tasa de interés nominal a tasa de interés efectiva, se divide entre el número de periodos de inversión que tiene un año.

Por otro lado el tiempo de inversión hay que convertirlo en periodos de inversión, si los periodos no son anuales.

Esto no afecta en el interés simple, pero en el interés compuesto si, como veremos más adelante.

EJEMPLO: Calcular el monto que se debe pagar por una deuda de 20,000 pesos, prestados durante 5 años a un interés anual de 8% convertible trimestralmente.

$$M_n = C\left(1 + n\left(i/100\right)\right) \qquad C = 20,000$$

$i_n = 0.08$ Nominal.

$i_e = \frac{0.08}{4} = 0.02$ Efectivo.

Tiempo = 5 años.

$n = 5(4) = 20$ Periodos trimestrales.

$$M_5 = 20000\left(1 + 20\left(0.02\right)\right)$$

$$M_5 = 28000$$

APLICACIONES DE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una de las aplicaciones de las progresiones geométricas está relacionada con el interés compuesto.

En el interés simple el, capital se mantiene al inicio de cada periodo de inversión, los intereses en cada periodo de inversión son iguales.

En el ejemplo anterior los intereses generados por periodo son de $1600 pesos cada año o $ 400 pesos cada trimestre.

En el interés compuesto los intereses obtenidos en cada periodo se acumulan al capital del siguiente periodo para formar un nuevo capital inicial y así el interés a su vez gana interés, es decir, los capitales al inicio de cada periodo de inversión y los intereses de cada periodo de inversión no son iguales.

Sea C el capital prestado a interés compuesto durante t años, siendo $i\,\%$ el tanto por ciento anual.

El capital C gana i por ciento al año o en el periodo de inversión

Entonces el monto en el primer año o periodo sería.

$$M_1 = C + C\left(i/100\right) = C\left(1+\left(i/100\right)\right)$$

$C\left(1+\left(i/100\right)\right)$ es el monto al final del primer año, pero es también el capital inicial para el segundo año, por lo tanto, el monto al final del segundo año sería:

$$\begin{aligned} M_2 &= C\left(1+\left(i/100\right)\right) + C\left(1+\left(i/100\right)\right)\left(i/100\right) \\ &= C\left(1+\left(i/100\right)\right)\left(1+\left(i/100\right)\right) \\ M_2 &= C\left(1+\left(i/100\right)\right)^2 \end{aligned}$$

$C\left(1+\left(i/100\right)\right)^2$ es el monto al final del segundo año, pero es el capital inicial para el tercer año, por lo tanto, el monto para el tercer año sería:

$$\begin{aligned} M_3 &= C\left(1+\left(i/100\right)\right)^2 + C\left(1+\left(i/100\right)\right)^2\left(i/100\right) \\ &= C\left(1+\left(i/100\right)\right)^2\left(1+\left(i/100\right)\right) \\ M_2 &= C\left(1+\left(i/100\right)\right)^3 \end{aligned}$$

Si siguiéramos el mismo procedimiento, para el n-ésimo periodo de inversión el monto sería:

$$M_n = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^n$$

Recuérdese que el tiempo t hay que convertirlo en periodos n, en el caso que el tiempo de inversión sea anual entonces $t = n$, si no entonces $t \neq n$.

Si los montos obtenidos por periodo los ponemos como:

$$M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_n$$

Se forma una progresión geométrica donde:

$$M_0 = C$$
$$M_1 = C\left(1+\left(i/100\right)\right)$$
$$M_2 = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^2$$
$$M_3 = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^3$$
“
“
$$M_n = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^n$$

Donde: M_n Es a_n el n-ésimo término.
C Es el primer término.
$\left(1+\left(i/100\right)\right)$ Es la razón.
n Es el número de periodos de inversión o el numerote términos.

EJEMPLO 1: Una persona deposita 100 pesos, en una cuenta de ahorro que paga el 8% de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendrá al final del segundo año?

$M_n = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^n$ $C = 100$ Pesos.
$n = 2$ Periodos anuales.
$i = 0.08$ Interés efectivo.

$$M = 100\left(1+0.08\right)^2$$
$$M = 116.64 \quad \text{Pesos.}$$

EJEMPLO 2: Una persona deposita 100 pesos, en una cuenta de ahorro que paga el 6% de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendrá al final del segundo año si los intereses se componen a) trimestralmente, b) mensualmente?

a) $M_n = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^n$ $C = 100$ Pesos.
$t = 2$ Años
$n = 4\left(2\right) = 8$ Periodos trimestrales.
$i_n = 0.06$ Interés nominal.
$i_e = \dfrac{0.06}{4} = 0.015$ Interés efectivo

$$M = 100\left(1+0.015\right)^8$$
$$M = 112.6492 \quad \text{Pesos.}$$

b) $M_n = C\left(1+\left(i/100\right)\right)^n$ $C = 100$ Pesos.

$t=2$ Años

$n=12(2)=24$ Periodos mensuales.

$i_n=0.06$ Interés nominal.

$i_e=\dfrac{0.06}{12}=0.005$ Interés efectivo

$$M=100(1+0.005)^{24}$$
$$M=112.7159 \quad \text{Pesos.}$$

En los problemas de interés simple y compuesto, no siempre la incógnita es el monto, por lo que puede ser cualquiera de las variables involucradas en cada una de las fórmulas.

La fórmula $M_n=C(1+n(i/100))$ de interés simple nos da una relación de 4 cantidades, conociendo tres de ellas podemos hallar la cuarta

Para conocer el capital inicial $C=\dfrac{M}{1+n(i/100)}$

Para conocer el número de periodos $n=\dfrac{M-C}{(i/100)}$

Para conocer el interés efectivo $(i/100)=\dfrac{M-C}{n}$

La fórmula $M=C(1+(i/100))^n$ de interés compuesto nos da una relación entre 4 cantidades, conociendo tres de ellas podemos hallar la cuarta.

Para conocer el capital inicial $C=\dfrac{M}{(1+(i/100))^n}$

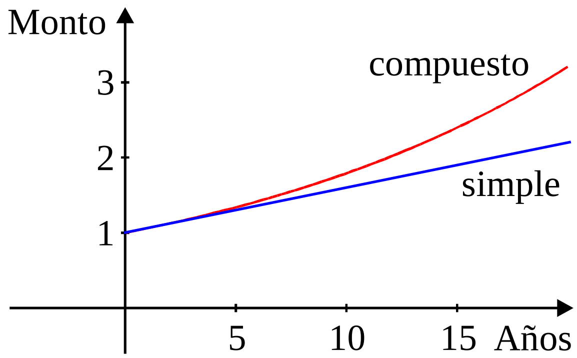
Para conocer el número de periodos $n=\dfrac{\log M-\log C}{\log(1+(i/100))}$

Para conocer el interés efectivo $(i/100)=\sqrt{\dfrac{M}{C}}-1$

La siguiente tabla nos da el monto de un peso a interés simple y a interés compuesto al 6%, y el crecimiento comparativo se ilustra en la gráfica.

Año	Monto a interés simple	Monto a interés compuesto
0	1.000	1.000
1	1.060	1.060
2	1.020	1.124
3	1.180	1.191
4	1.240	1.262
5	1.300	1.338
6	1.360	1.419
7	1.420	1.504
8	1.480	1.594
9	1.540	1.689
10	1.600	1.791

La gráfica sería:



E J E R C I C I O S

1.- Hallar el monto de un pagaré por 1,200 pesos durante 8 meses a un interés efectivo de 3 % mensual.

2.- Hallar el capital que se invirtió para obtener 1,500 pesos al 6 % mensual durante 9 meses.

3.- ¿Cuánto ganarán 2,000 pesos en tres años si se invierten en una cuenta de ahorro que ofrece el 12 % de interés compuesto trimestralmente?

4.- ¿Cuánto obtendrá una persona si invierte 10,000 pesos durante 20 años a un interés compuesto del 10 % convertible bimestralmente?

5.- A que interés simple efectivo son invertidos 2,500 pesos para obtener 5,000 pesos durante 10 meses.

6.- A que interés compuesto efectivo son invertidos 2,500 pesos para obtener 5,000 pesos durante 10 meses.

7.- ¿Cuál será el monto de 60,000 pesos invertidos durante 5 años a un interés compuesto de 15 % anual convertible mensualmente?

8.- Durante cuánto tiempo se invierten 5,000 pesos para obtener 10,000 pesos a un interés simple efectivo de 3 % mensual.

9.- Durante cuánto tiempo se invierten 5,000 pesos para obtener $ 10,000 pesos a un interés compuesto efectivo de 6 % mensual.

10.- ¿En cuánto se convertirán 5,800 pesos al 5 % anual de interés compuesto en 7 años?

11.- ¿En cuánto se convertirán 918.54 pesos al 4 % anual de interés compuesto en un año, capitalizable o convertible por trimestre?

12.- Una suma prestada al 3.5 % de interés compuesto convertible semestralmente durante 9 años se ha convertido en 3,354.60 pesos. ¿Cuál fue la suma prestada?

13.- ¿En cuántos años una suma de 834.00 pesos, prestada al 10 % anual de interés compuesto se convertirá en 1,323.46 pesos?

14.- ¿En cuánto se convertirán 800.00 pesos al 3 % anual, en dos años capitalizando los intereses por semestre?

15.- ¿En cuánto se convertirán 12,500 pesos al 4 % anual en 3.5 años, capitalizando los intereses por trimestre?

16.- Una suma prestada al 8 % anual de interés compuesto se ha convertido en 5,200 pesos en 4 años. ¿Cuál fue la suma prestada?

TEMA II.- *FUNCIONES*

RELACIONES Y FUNCIONES

Los conceptos de relaciones y funciones son muy importantes en casi todas las áreas de las matemáticas.
Para comprender mejor dichos conceptos estudiaremos antes el producto cartesiano para después estudiar relaciones y por último funciones.

PRODUCTO CARTESIANO

Definición: El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de todas las parejas ordenadas, de tal manera que el primer elemento de cualquier pareja pertenece al conjunto A y el segundo elemento pertenece al conjunto B.

En notación de conjuntos se escribe como sigue:

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \{(a,b)/\, a\in A, b\in B\}$$

En la definición de producto cartesiano estamos usando la palabra conjunto, hablaremos un poco de esto.

CONJUNTO
Definición: Conjunto es una colección de objetos, a los cuales se les llama elementos del conjunto.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, y la descripción de un conjunto se puede hacer de dos maneras, por extensión y por comprensión.

Para describir un conjunto se usan dos llaves { }.

Por ejemplo, para describir el conjunto de números naturales menores que seis se hace de la siguiente manera.

A = {1, 2, 3, 4, 5} a esta forma se le llama por extensión.

A = $\{ x\in \mathbb{N} \ / \ x < 6\}$ a esta forma se le llama por comprensión.

Es decir, que al describir un conjunto por extensión se ponen todos los elementos que contiene el conjunto separados cada uno por una coma y al describir al conjunto por comprensión se usa una variable para referirnos a todos los elementos usando una propiedad que tengan en común.
La descripción por comprensión se usa casi siempre para describir conjuntos en los cuales es difícil escribir explícitamente todos sus elementos.

Otro ejemplo, los días de la semana.

B = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}   por extensión.

B = { x / x es un día de la semana}   por comprensión.

Si se tienen dos conjuntos A y B,   A = {1, 2, 3, 4, 5},   B = {a, b, c, d}.
El producto cartesiano entre A y B se denota como $A \times B$ y de acuerdo a la definición de producto cartesiano es:
$A \times B$ = {(1,a), (1,b), (1,c), 1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d), (4,a), (4,b), (4,c), (4,d), (5,a), (5,b), (5,c), (5,d)}.

A es el primer conjunto y B es el segundo conjunto.

El producto cartesiano $B \times A$ es igual a:

$B \times A$ = {(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (b,5), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4), (c,5), (d,1), (d,2), (d,3), (d,4), (d,5)}.

B es el primer conjunto y A es el segundo conjunto.

Nótese que cambiar de orden los conjuntos es cambiar los primeros elementos de las parejas con los segundos elementos.

En matemáticas los conjuntos que nos interesan son los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

Naturales = {1, 2, 3, 4,…} que se denota con una $\mathbb{N}$.

Enteros = {…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,… }   que se denota con una $\mathbb{Z}$.

Racionales = $\{ \frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ que se denotan con una $\mathbb{Q}$.

Es el conjunto de números en forma de quebrado o fracción $\frac{a}{b}$ tal que a y b son enteros y b es distinto de cero.

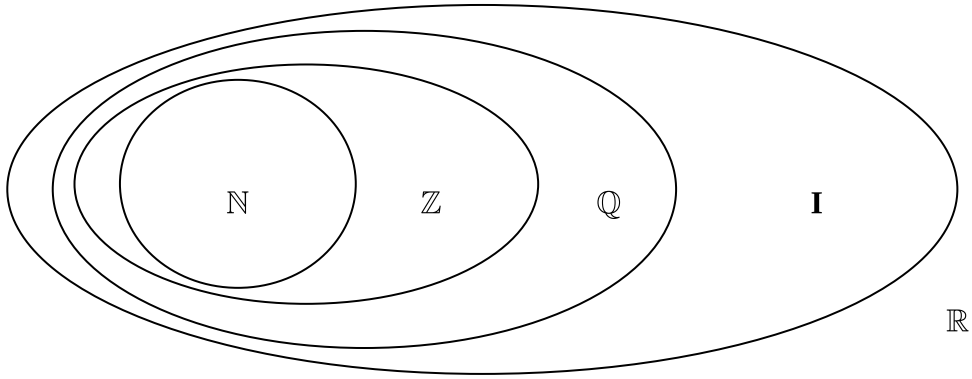
Irracionales = { x / x es una expresión decimal no periódica}   que se denotar con una **I.**

Nota: los números periódicos son racionales.

Un ejemplo sería x = 25.01001000100001….
Otros ejemplos de irracionales serían $\sqrt{2}, \sqrt{5}, e, \pi$.

Reales = $\mathbb{Q} \cup$ **I**   que se representa con una $\mathbb{R}$.
Es la unión de los racionales con los irracionales.

Haciendo un diagrama de los conjuntos anteriores se vería como sigue.



Es decir, el conjunto de los naturales está contenido en los enteros, los enteros están contenidos en los racionales, los irracionales es un conjunto especial y los racionales junto con los irracionales forman el conjunto de los reales.

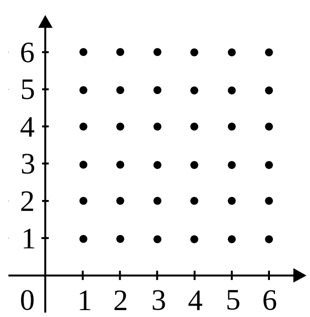
Existe otro conjunto de números, los cuales se estudian en cursos avanzados, aquí solo se mencionan.

Complejos = { $a + b\,i$ / a, b ϵ R, $i^2 = -1$} que se denotan con una $\mathbb{C}$.
Es el conjunto de números de la forma $a + b\,i$ donde a y b son números reales e i^2 es igual a -1, al número a se le denomina parte real y al número b se le denomina parte imaginaria.

El producto cruz $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es:

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ = {(1,1), (1,2), (1,3),…
(2,1), (2,2), (2,3),…
(3,1), (3,2), (3,3),…
.
. …}

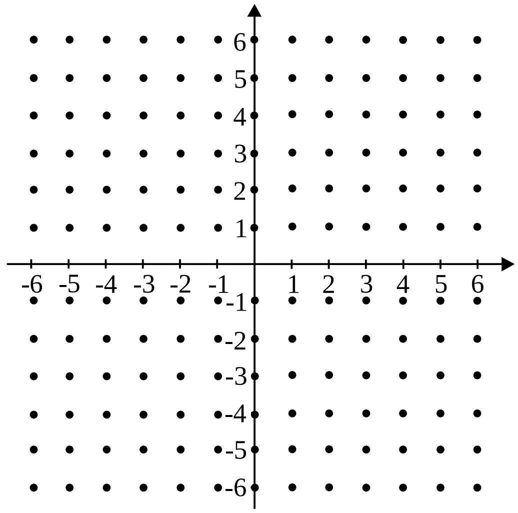
Que es una infinidad de parejas y gráficamente se pueden representar como puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano.



El producto cruz $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es:

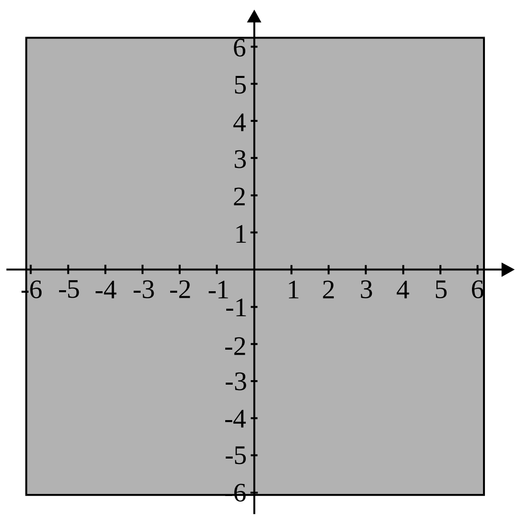
$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ = {…, (-2,-2), (-2,-1), (-2,0), (-2,1), (-2,2),…
…, (-1,-2), (-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2),…
…, (-0,-2), (-0,-1), (-0,0), (-0,1), (-0,2),…
…, (1,-2), (1,-1), (1,0), (1,1), (1,2),…
. . . . .
. . . . . …}

Que es una infinidad de parejas y gráficamente se pueden representar como puntos separados en todo el plano cartesiano.



Siguiendo esta analogía, el producto cruz $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ es:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ = es un conjunto de parejas infinito pero que a diferencia $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ no hay puntos separados todos los puntos llenan por completo el plano cartesiano.



RELACIONES

Definición: Una relación es un conjunto de parejas ordenadas (x, y) tal que obedecen a una regla de correspondencia.

La notación para una relación de un conjunto A a un conjunto B es: R: A→B

Al conjunto A se le llama dominio y al conjunto B se le llama contradominio

Ejemplo 1.- Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {a, b, c, d}, hallar la relación de A a B, tal que el primer elemento sea par.

Entonces R = {(2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (4,a), (4,b), (4,c), (4,d)}.

Como se puede observar una relación es un subconjunto del producto cartesiano de esos mismos conjuntos.

Ejemplo 2.- Con los mismos conjuntos del ejemplo 1, hallar R: A→B tal que el segundo elemento sea vocal.

Entonces R = {(1,a), (2,a), (3,a), (4,a), (5,a)}.

Ejemplo 3.- Con los mismos elementos del ejemplo 1, hallar R: B→A tal que el segundo elemento sea múltiplo de 2.

Entonces R = {(a,2), (a,4), (b,2), (b,4), (c,2), (c,4), (d,2), (d,4)}.

En una relación al primer conjunto se le llama dominio, al conjunto formado por los segundos elementos se le llama rango o imagen y al segundo conjunto se le llama contradominio.

En el ejemplo 1	El dominio es	D = { 2, 4 }	$D \subset A$
	El rango es	C = {a, b, c, d}	
	El contradominio	B = {a, b, c, d}	
En el ejemplo 2	El dominio es	A = {1, 2, 3, 4, 5}	
	El rango es	C = {a}	
	El contradominio es	B = {a, b, c, d}	
En el ejemplo 3	El dominio es	B = {a, b, c, d}	
	El rango es	C = {2, 4}	
	El contradominio	A = {1, 2, 3, 4, 5}	

El rango y el contradominio pueden o no ser iguales.

En matemáticas las relaciones que se estudian son relaciones algebraicas entre conjuntos numéricos.

Por ejemplo:

Dada una expresión algebraica que contenga una literal a la cual se le asignan diferentes valores, la expresión algebraica tomará determinados valores.

Así en la expresión $x^2 - 3x$ si le llamamos y, escribimos $y = x^2 - 3x$

La literal x le llamamos variable independiente y a y le llamamos variable dependiente.

Para obtener las parejas de esta relación, le asignamos a la variable x distintos valores como 2, 3, 4, 5 etc., entonces la variable y tomara los valores para $x = 2$, $y = -2$, para $x = 3$, $y = 0$; para $x = 4$, $y = 4$; para $x = 5$, $y = 10$.

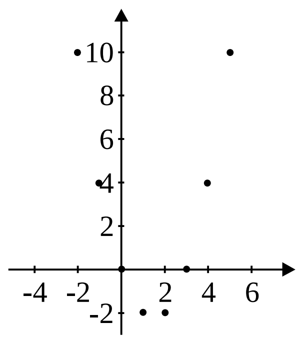
Para escribir las parejas ordenadas de la relación $y = x^2 - 3x$ tomamos como primer elemento los valores de la variable independiente que es la x y como segundos elementos los valores de la variable dependiente que es la y.

{…, (2,-2), (3,0), (4,4), (5,10),…}

En forma tabular nos quedaría:

x	y
2	-2
3	0
4	4
5	10
0	0
-1	4
-2	10

La gráfica de la relación en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ quedaría representada por las parejas ordenadas (x, y) donde x y y sean números enteros que cumplan con la relación, sería de la siguiente manera.



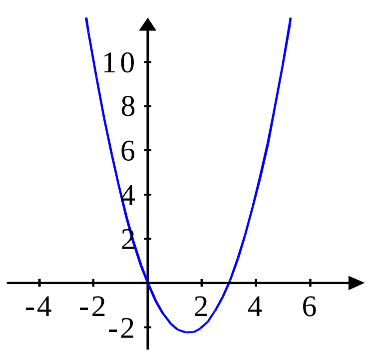
Como se puede observar la relación $y = x^2 - 3x$ es un subconjunto del producto cruz $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Para esta relación en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, el dominio es $\mathbb{Z}$, el contradominio es $\mathbb{Z}$ y el rango o imagen está formado por aquellos valores enteros de la variable dependiente que es la y.

Los valores del rango o imagen son {…,-2, 0, 4, 10, 18, 28,…}

La gráfica de la relación en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ quedaría representada por todas las parejas (x, y) que cumplan con la relación $y = x^2 - 3x$, siempre y cuando $x, y \in \mathbb{R}$.

La gráfica se traza con una línea continua como sigue:



En $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ el dominio es $\mathbb{R}$, el contradominio es $\mathbb{R}$ y el rango o imagen se puede encontrar despejando la variable x y analizando los valores reales que puede tomar la variable *y* tomando en cuenta las operaciones que la afectan.

$$y = x^2 - 3x$$

$$y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{y + \frac{9}{4}} = \left|x - \frac{3}{2}\right|$$

Si $x - \frac{3}{2} \geq 0$ entonces

$$x = \sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}$$

Si $x - \frac{3}{2} < 0$ entonces

$$x = -\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}$$

El radicando debe ser ≥ 0

$$y + \frac{9}{4} \geq 0$$

$$y \geq -\frac{9}{4}$$

Entonces el rango o imagen es:

Rango = $[-\frac{9}{4}, \propto)$ = $\{ y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq -\frac{9}{4} \}$

Y el dominio es:

Dominio = $(-\propto, \propto)$ = $\{ x \in \mathbb{R} \}$

El dominio, contradominio y el rango se pueden poner como intervalos o segmentos de la recta real.

Existen varios tipos de intervalos.

1.- Intervalo abierto (a,b) = { $x \in \mathbb{R}$ / $a < x < b$, } es el conjunto de números mayores que el número a y menores que el número b .

2.- Intervalo cerrado $[a,b]$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $a \leq x \leq b$ } es el conjunto de números mayores o iguales que el número a y menores o iguales que el número b .

La diferencia entre abierto y cerrado es que en el abierto no se cuentan los extremos y en el cerrado si se cuentan los extremos.

3.- Semicerrado o semiabierto $[a,b)$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $a \leq x < b$ }

4.- Semicerrado o semiabierto $(a,b]$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $a < x \leq b$ }

En el intervalo semicerrado o semiabierto uno de los extremos se cuenta y el otro no.

Además existen los intervalos

$(a,\propto)$= { $x \in \mathbb{R}$ / $x > a$ }

$[a,\propto)$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $x \geq a$ }

Si en un extremo del intervalo esta infinito entonces ese extremo siempre se pone abierto y la condición que cumplen los valores es con respecto al otro extremo.

En la recta real es posible graficar los intervalos, contemplando todos los casos posibles estarían como sigue:

1.- $[a,b]$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $a \leq x \leq b$ }

2.- (a,b) = { $x \in \mathbb{R}$ / $a < x < b$ }

3.- $[a,b)$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $a \leq x < b$ }

4.- $(a,b]$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $a < x \leq b$ }

5.- $[a,\propto)$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $x \geq$ a }

6.- $(a,\propto)$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $x > a$ }

7.- $(-\propto,b]$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $x \leq b$ }

8.- $(-\propto,b)$ = { $x \in \mathbb{R}$ / $x < b$ }

9.- $(-\propto,\propto)$ = { $x \in \mathbb{R}$ }

En la relación $y = x^2 - 3x$ el

Dominio = $(-\propto,\propto)$

Contradominio = $(-\propto,\propto)$

Rango = $[-\frac{9}{4},\propto)$

FUNCIONES

Definición: Una función es una relación en la que a cada elemento del dominio le corresponde solo uno del rango.

Por ejemplo A = {(1, a), (2, b), (3, a), (4, c)}

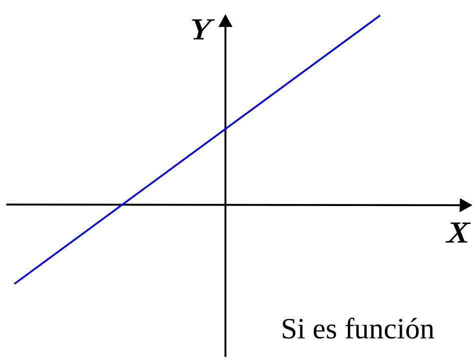
Los primeros elementos de las parejas son 1, 2, 3, 4 todos diferentes, respecto a los segundos elementos no hay condición, es decir, no importa que el elemento a este en la primera y tercera pareja.

Entonces podemos decir que una función es un conjunto de parejas ordenadas, de números reales (x, y) en el que no hay dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer elemento.

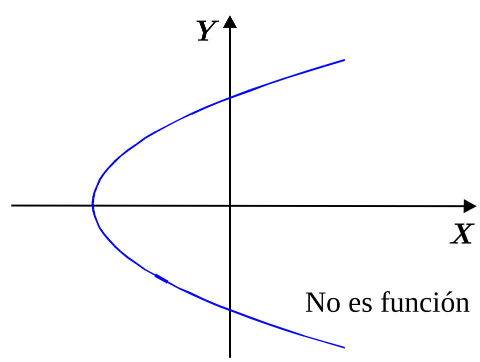
El conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x en una función, se llama **dominio** y el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable y en una función, se llama **rango** o imagen.

A las funciones se les designa con una $f, g, h, \ldots$etc., casi siempre se usa la f, donde la expresión algebraica establece la regla de correspondencia, con la que se determina un valor único de y, siempre que se tenga un valor para x.

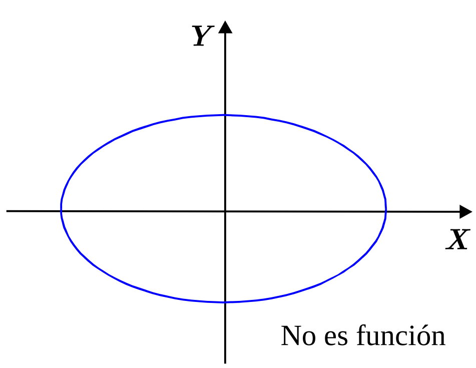
Si se tiene la gráfica de una relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donde el eje horizontal representa los valores de la variable x y el eje vertical representa los valores de la variable y, y se quiere saber si ésta gráfica representa una función o no, se trazan líneas paralelas al eje vertical, si alguna de las paralelas toca a la gráfica en más de un punto entonces no es función, si todas las paralelas tocan a la gráfica en un sólo punto entonces si es función.



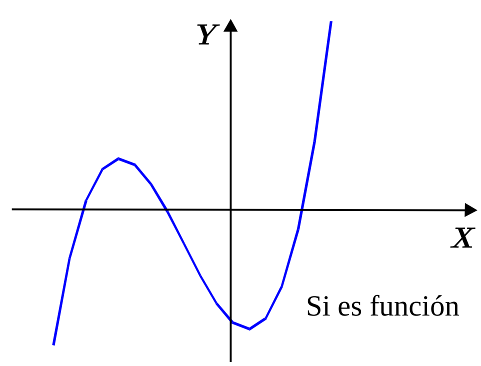
Si es función



No es función



No es función



Si es función

Ejemplo 1

Decir si la relación $x^2 + y^2 = 9$ es o no función, hallar el dominio, el rango y hacer la gráfica.

Despejando la variable dependiente y

$$|y| = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{De donde}$$

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{o} \quad -y = \sqrt{9 - x^2}$$

Para un valor de x hay dos valores de y, entonces no es función.

Para hallar el dominio teniendo la y despejada se analizan las operaciones que afectan a la variable x, que son el cuadrado, el signo menos, la suma con nueve y la raíz cuadrada.

Para aplicar la raíz cuadrada el radicando debe ser mayor o igual a cero.

Entonces $\quad 9 - x^2 \geq 0$

Resolviendo esta desigualdad para x.

$$9 - x^2 \geq 0$$
$$-x^2 \geq -9$$
$$x^2 \leq 9$$
$$|x| \leq \sqrt{9}$$

$|x| \leq 3$ el valor absoluto de x es menor o igual que 3 que se puede interpretar como $-3 \leq x \leq 3$

Dominio es el intervalo cerrado $[-3,3] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -3 \leq x \leq 3 \}$

Para hallar el rango, se despeja la variable x, y se analizan las operaciones que afectan a la variable y.

Despejando x $\quad |x| = \sqrt{9 - y^2}$ de donde

$$x = \sqrt{9 - y^2} \quad \text{o} \quad -x = \sqrt{9 - y^2}$$

Las operaciones que afectan a la variable y, son el cuadrado, el signo menos, la suma con nueve y la raíz cuadrada.

Para aplicar la raíz cuadrada el radicando debe ser mayor o igual a cero.

Entonces $\quad 9 - y^2 \geq 0$

Resolviendo esta desigualdad para y.

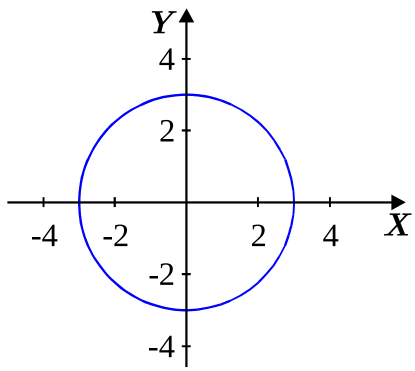
$$9 - y^2 \geq 0$$

$$-y^2 \geq -9$$
$$y^2 \leq 9$$
$$|y| \leq \sqrt{9}$$
$|y| \leq 3$ el valor absoluto de y es menor o igual que 3 que se puede interpretar como $-3 \leq y \leq 3$

Entonces

Rango es el intervalo cerrado [-3,3] = { $y \in \mathbb{R}$ / $-3 \leq y \leq 3$ }

Haciendo la gráfica de $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$



Algunas parejas son {(-3,0), (-2,2.23), (-2,-2.23), (-1,2.82), (-1,-2.82), (0,3), (0,-3), (1,2.82), (1,-2.82), (2,2.23), (2,-2.23), (3,0)}

Al cero le toca 3 y -3, por lo tanto, no es función.
En la gráfica al trazar paralelas al eje y entre -3 y 3, intersecan a la gráfica en dos puntos, por lo tanto no es función.

Ejemplo 2

Decir si la relación $y = 2x^2 + 5$ es o no función, hallar el dominio, el rango y hacer la gráfica.

Para un valor de x hay solo un valor de y, entonces sí es función.

Para hallar dominio se observa que la variable x está afectada por el cuadrado, el producto por dos y la suma con cinco, y que a cualquier número real se le pueden aplicar estas operaciones, por lo tanto, el dominio son todos los reales.

Dominio = ($-\infty$, ∞) = { $x \in \mathbb{R}$ }

Para hallar el rango se despeja la variable x

$$y = 2x^2 + 5$$
$$\frac{y-5}{2} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{y-5}{2}}=|x|$$

$$|x|=\sqrt{\frac{y-5}{2}}$$

Como la variable y esta afectada por una raíz cuadrada entonces el radicando debe ser mayor o igual a cero

$$\frac{y-5}{2}\geq 0$$

Resolviendo para y:

$$\frac{y-5}{2}\geq 0$$
$$y-5\geq 0$$
$$y\geq 5$$

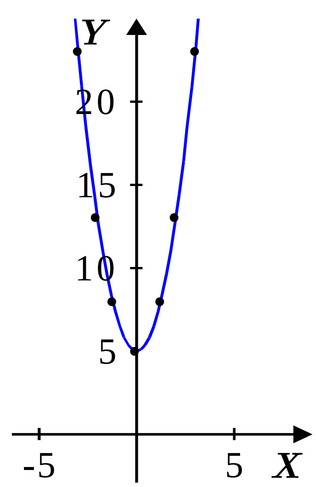
El rango son todos los valores mayores o iguales a cinco.

También se puede observar que en la ecuación $y=2x^2+5$, la x está al cuadrado y sea negativo o positivo, siempre quedará positivo entonces el menor valor de y es 5 cuando x toma su menor valor que es cero.

Por lo tanto, el rango de la función es:

Rango = $[5,\propto\ )$ = $\{\ y\in\mathbb{R}\ /\ y\geq 5\ \}$

Para hacer la gráfica de $y=2x^2+5$, se hace la tabulación, dando valores a x tomados del dominio.



En la gráfica se observa que sí es función.

Ejemplo 3

Decir si la relación $y^2 - x^2 + 9 = 0$ es o no función, hallar el dominio, el rango y hacer la gráfica.

Como no se tiene la variable y despejada, entonces se observa que existe en la ecuación una sola variable y que tiene exponente par, entonces no es función.

Para hallar el dominio se despeja la variable y.

$$y^2 - x^2 + 9 = 0$$
$$y^2 = x^2 - 9$$
$$|y| = \sqrt{x^2 - 9}$$

Se analizan las operaciones que afectan a la variable x, que son el cuadrado, una resta con nueve y una raíz cuadrada.

Elevar al cuadrado se le puede aplicar a todo número real, restarle 9 se le puede aplicar a todo número real, pero la raíz cuadrada se le puede aplicar sólo a números mayores o iguales a cero.

Entonces el radicando x^2 - 9 debe ser mayor o igual a cero.

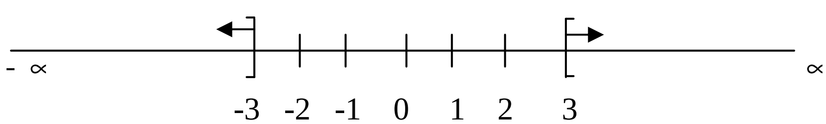
$$x^2 - 9 \geq 0$$

Resolviendo para x

$$x^2 - 9 \geq 0$$
$$x^2 \geq 9$$
$$|x| \geq \sqrt{9}$$
$$|x| \geq 3$$

El valor absoluto de x es mayor o igual que 3 que se puede interpretar como $x \geq 3$ o $x \leq -3$.

En la recta real estos intervalos estarían como sigue:



Entonces el dominio son los valores menores o iguales que - 3 o los valores mayores o iguales que 3, que son dos segmentos separador.

Por lo tanto, el dominio de la relación es la unión de los dos intervalos.

Dominio = $(- \propto, -3] \cup [3, \propto)$ = $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq -3 \text{ o } x \geq 3 \}$

Para hallar el rango, se despeja x de la ecuación $y^2 - x^2 + 9 = 0$

$$y^2 - x^2 + 9 = 0$$
$$-x^2 = -9 - y^2$$

$$x^2 = y^2 + 9$$
$$|x| = \sqrt{y^2 + 9}$$

Se analizan las operaciones que afectan a la variable y, que son un cuadrado, una suma y una raíz cuadrada, el cuadrado se le puede aplicar a todos los números reales, la suma con 9 también, pero la raíz cuadrada solo a los números mayores o iguales que cero.

Entonces, el radicando $y^2 + 9 \geq 0$ debe ser mayor o igual a cero

Resolviendo para y:

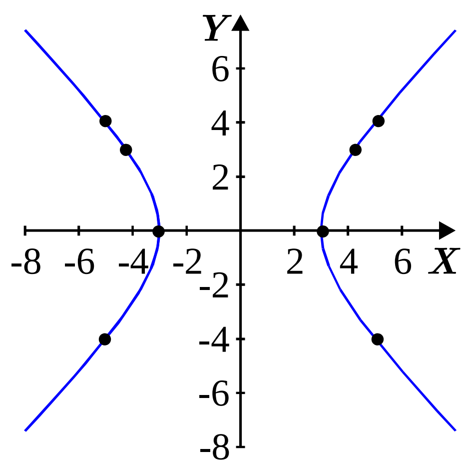
$$y^2 + 9 \geq 0$$
$$y^2 \geq -9$$

La pregunta sería qué números elevados al cuadrado son mayores o iguales que -9, esos números son todos los reales.

Entonces el rango son todos los reales

Rango = $(-\infty, \infty)$ = $\{ y \in \mathbb{R} \}$

Para hacer la gráfica de $|y| = \sqrt{x^2 - 9}$, se hace la tabulación, dando valores a x tomados del dominio.



En la gráfica se observa que no es función.

Ejemplo 4

Decir si la relación $2x - y - 1 = 0$ es función o no, hallar el dominio, el rango y hacer la gráfica.

Como en la expresión algebraica (ecuación) no está despejada la variable dependiente y, entonces observamos que sólo hay una y con exponente uno, que es impar, por lo tanto sí es función.

Para hallar el dominio despejamos la variable y:

$$2x - y - 1 = 0$$
$$-y = -2x + 1$$
$$y = 2x - 1$$

Analizando las operaciones que afectan a la variable x, que son un producto con 2 y una resta, estas operaciones se le pueden aplicar a todos los números reales.

Por lo tanto, el dominio son todos los reales.

Dominio = $(-\infty, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \}$

Para hallar el rango se despeja la variable x:

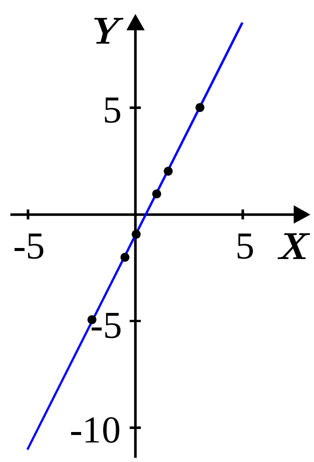
$$2x - y - 1 = 0$$
$$x = \frac{y + 1}{2}$$

Analizando las operaciones que afectan a la variable y, que son una suma y división entre 2, estas operaciones se le pueden aplicar a todos los números reales.

Entonces el rango son todos los reales.

Rango = $(-\infty, \infty) = \{ y \in \mathbb{R} \}$

Para hacer la gráfica de $y = 2x - 1$, se hace la tabulación, dando valores a x tomados del dominio.



E J E R C I C I O S

1.- En los siguientes pares de conjuntos hallar el producto cartesiano.

a).- Si A = {a, b, c} y B = {3, 4} hallar
 $A \times B$ y $B \times A$

b).- Si $E = \{\, x \;/\; 2 \leq x \leq 12,\; x \in \mathbb{N} \,\}$ y $F = \{\, x \;/\; 5 < x \leq 10,\; x \in \mathbb{N} \,\}$ hallar
 $E \times F$ y $E \times E$

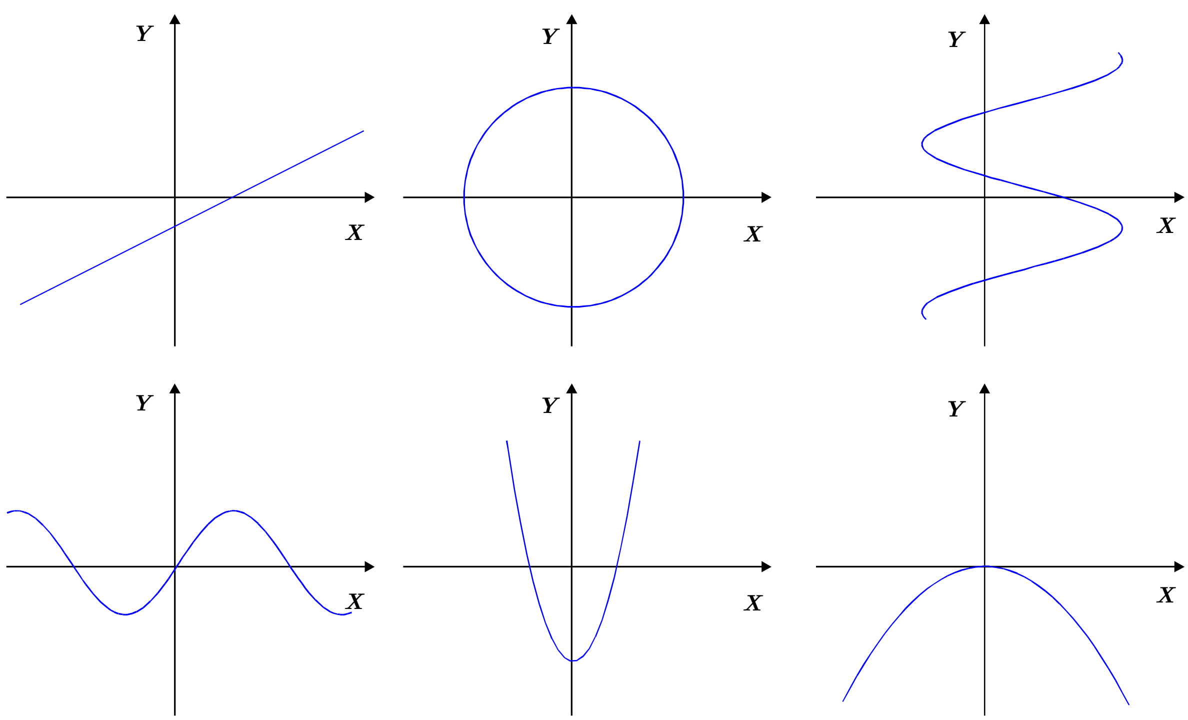
c).- Si C = {María, Lourdes, Claudia, Leticia, Rosa} D = {Juan, Pedro, José}
 G = {paleta, helado, cono, agua, fruta} hallar
 $C \times D$, $D \times C$, $C \times G$, $G \times C$, $D \times G$, $G \times D$.

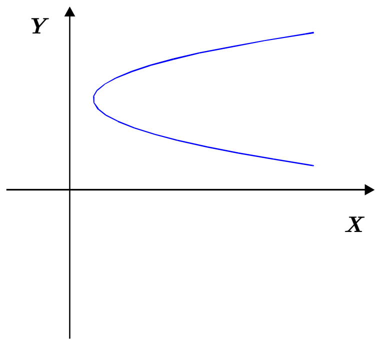
d).- Si A = { a, b, c, d, e, f, g, h} $B = \{\alpha, \beta, \mu, \pi, \tau\}$ hallar
 $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, $B \times A$.

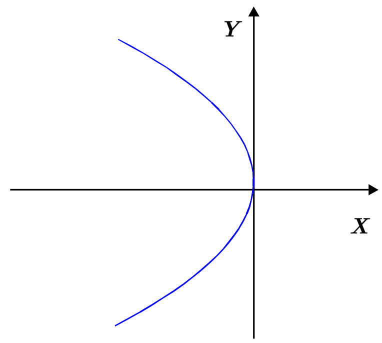
2.- En los siguientes ejercicios decir si el conjunto de parejas representa una función o no y por qué.

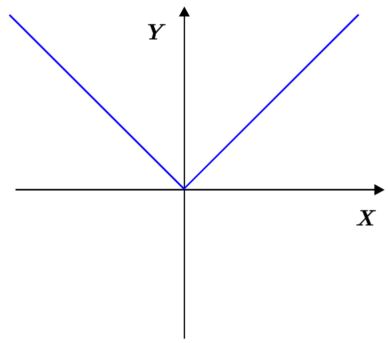
a) {(-1,-1), (0,2), (1,3), (2,3), (3,3)}
b) {(-1,-1), (2,0), (3,1), (3,3), (1,4)}
c) {(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)}ç
d) {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}
e) {(3,2), (2,-1), (3,4)}
f) {(2,3), (2,-2), (2,1)}

3.- En las siguientes gráficas decir si representa una función o no y por qué.









4.- En las siguientes expresiones algebraicas decir si son funciones o no, hallar el dominio, el rango y hacer la gráfica.

a) $y = 3x - 10$

b) $2xy + x + 2y = 0$

c) $y = x^2 + 2x - 5$

d) $y = \sqrt{6 - 8x}$

e) $y = \sqrt{4x}$

f) $y = \sqrt{5x + 4}$

g) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$

h) $3x - 5y - 15 = 0$

i) $xy^2 + 2x - 5 = 0$

j) $y^2 - 8x - 6y + 25 = 0$

k) $y = \sqrt[3]{x^2 - 144}$

l) $y = 3x - 1$

m) $y = 5 - x^2$

n) $y = \sqrt{3x - 4}$

ñ) $y = x^2 + 2$

o) $y = \sqrt[4]{x + 1}$

p) $y = \sqrt{4 - x^2}$

q) $y = 3x - 6$

r) $y = \sqrt{5 - x}$

s) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

a) Se les llama funciones algebraicas, a aquellas funciones que tienen las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación únicamente.

b) Se les llama funciones trascendentes, a aquellas que además de las operaciones algebraicas también tienen funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

ECUACIONES EXPLÍCITAS e IMPLÍCITAS

a) Una ecuación está en forma explícita, si alguna de las dos variables x o y está despejada.

b) Una ecuación está en forma implícita, si ninguna de las dos variables x y y están despejadas.

Ejemplo 1
Dada la ecuación $y = 3x^3 - 2x + 3$ decir si es algebraica o trascendente y si está en forma explícita o implícita.

Como la ecuación es polinomial entonces es función **algebraica**.
Como la variable y esta despejada entonces está en forma **explícita**.

Ejemplo 2
Dada la función $y = 3senx^2$ decir si es algebraica o trascendente y si está en forma explícita o implícita.

Como tiene la función seno, entonces es ecuación **trascendente**.
Como la variable y esta despejada entonces está en forma **explícita**.

Ejemplo 3
Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 9$ decir si es algebraica o trascendente y si está en forma explícita o implícita.

Como es un polinomio y las operaciones que tiene son solo algebraicas, entonces es ecuación **algebraica**.
Como ninguna variable esta despejada entonces está en forma **implícita**.

Ejemplo 4
Dada la ecuación y - $\log xy = 0$ decir si es algebraica o trascendente y si está en forma explícita o implícita.

Como tiene la función logaritmo, entonces es ecuación **trascendente**.
Como ninguna variable esta despejada entonces está en forma **implícita**.

E J E R C I C I O S

1.- Decir si las siguientes ecuaciónes son algebraicas o trascendentes y si están en forma explícita o implícita.

a) $y = x^3 - 2x + 1$

b) $y = 4senx$

c) $y = \left(x^3 - 4x^2 + 2\right)^6$

d) $y = 4^{2x-3}$

e) $y = \tan^3 6x$

f) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

g) $y = 5x^{-4}$

h) $y = \dfrac{x^2\sqrt{5} - 9}{3x - 4}$

i) $y = x^x$

j) $y^2 = 8x$

k) $y = x^3\sqrt{2x}$

l) $x^2 = 9y$

m) $2xy + 1 = 4x^2 + y$

n) $y = 4^x$

ñ) $y = e^{2x}$

o) $y - 4sen2x = 0$

p) $y = \tan\dfrac{x}{3}$

q) $y = \ln 8x^2$

r) $y = sen^2\left(5x - 7\right)$

s) $x^3 - \tan\left(5x^4 - 2x + 6\right) - 3y = 0$

t) $x^3 - 3xy + \log 2x = 0$

u) $2 - \ln\sqrt{x} - y^2 + 2y = 0$

v) $y = 2^x + 3x^2 - 5x$

w) $x^2 - 3x + 2e - 5 = 9$

x) $y = 3x + 2x^3 - 2x^{5x}$

y) $senx - \cos x + 2y - 1 = 0$

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Cuando se tiene que una relación es función, entonces se utiliza una notación muy especial para referirse a la variable dependiente.

Si a la variable dependiente y, que depende de la variable independiente x, le llamamos $f(x)$ lo cual nos señala que es una función que depende de la variable x, entonces $y = f(x)$.

Es importante entender que $f(x)$ no es una multiplicación de f por x, sino que es una función que depende de la variable x.

Las funciones se denotan con distintas letras ya sean minúsculas o mayúsculas y la variable que se usa entre los paréntesis es la que se toma como variable independiente, como:

$$f(x),\ g(x),\ h(x),\ F(x),\ G(x),\ P(t),\ P(y),\ \varphi(x),\ sen(\alpha),\ tg(\beta),\ A(r)\ldots\text{etc.}$$

En realidad no hay ninguna restricción en qué letras se deben de usar, sino que es por comodidad de las personas que definen las funciones.

Al cambiar la notación para la variable dependiente nos cambian algunas cosas.

Lo primero que cambia es la forma de escribir las funciones.

Antes	Ahora
$y = 3x^2 + 2x - 4$	$f(x) = 3x^2 + 2x - 4$
$y = \sqrt{9 - x^2}$	$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
$y = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$	$f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

Lo segundo que cambia es la forma de obtener los valores de la función asignándole valores a la variable, aunque lo que se está haciendo es hallar las mismas parejas, solo que se le llama de otra manera.

En la notación anterior se dice hacer la tabulación o hallar la tabla de valores, y por medio de éstas, se forman las parejas ordenadas, en la nueva notación se dice evaluar f en x, donde x es un valor del dominio de la función.

Por ejemplo, si tenemos la función $y = 3x^2 + 2x - 4$ y queremos hallar cuánto vale la variable y si $x = 3$, entonces sustituimos 3 en la ecuación para hallar el valor de y

$$y = 3x^2 + 2x - 4$$
$$y = 3(3)^2 + 2(3) - 4$$
$$y = 27 + 6 - 4$$
$$y = 29$$

Entonces, si $x = 3$, $y = 29$ y la pareja que se forma es $(3,29)$

Con la notación de función $f(x)=3x^2+2x-4$, y para hallar cual es el valor de la función si $x=3$ decimos que hay que hallar f de 3, o decimos que hay que evaluar la función en $x=3$.

$$f(x)=3x^2+2x-4$$
$$f(3)=3(3)^2+2(3)-4$$
$$f(3)=27+6-4$$
$$f(3)=29$$

Entonces, si $x=3$, $f(3)=29$ y la pareja que se forma es $(3, f(3))$ o $(3,29)$

Lo tercero que cambia, es que con la notación de funciones, podemos hacer la suma, resta, multiplicación y división entre funciones que dependen de la misma variable.

Lo cuarto que cambia y que es lo más importante, es que con la notación de función no solo podemos evaluar la función en un valor numérico, sino que también podemos hacer evaluaciones de funciones en otras funciones, que se le llama composición de funciones.

OPERACIONES ENTRE FUNCIONES

Si se tienen dos funciones f y g, la suma, la resta, la multiplicación y la división, se definen como sigue.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Donde el dominio de la suma $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ es el conjunto de números que pertenecen a la intersección del dominio de f con el dominio de g.

El dominio de la división es el conjunto de números que pertenecen a la intersección del dominio de f con el dominio de g, pero hay que excluir los números para los cuales $g(x)\neq 0$

Ejemplo 1

Dadas las funciones $f(x)=x^2-16$ y $g(x)=x-4$ hallar: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ así como el dominio de cada una de ellas y haz sus gráficas.

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^2-16)+(x-4)$

$$=x^2-16+x-4$$
$$=x^2+x-20$$

El dominio de $f(x)$ son todos los reales porque cualquier numero real se puede elevar al cuadrado y restarle 16.

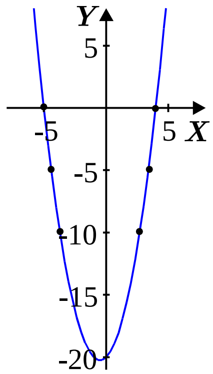
Dominio de $f(x)$ es $(-\infty,\infty)$

El dominio de $g(x)$ son todos los reales porque a cualquier número real se le puede restar 4.

Dominio de $g(x)$ es $(-\infty,\infty)$

Entonces el dominio de $(f+g)(x)$ es $(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)$

La gráfica de $(f+g)(x)$ sería:



b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^2-16)-(x-4)$

$$=x^2-16-x+4$$

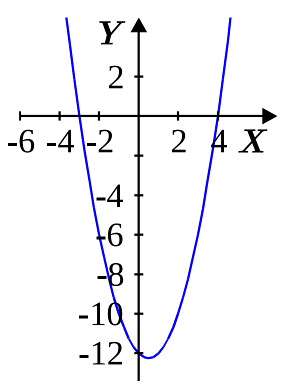
$$=x^2-x-12$$

El dominio de $f(x)$ son todos los reales, entonces dominio de $f(x)$ es $(-\infty,\infty)$

El dominio de $g(x)$ son todos los reales, entonces dominio de $g(x)$ es $(-\infty,\infty)$

Entonces el dominio de $(f-g)(x)$ es $(-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)$

La gráfica de $(f-g)(x)$ sería:



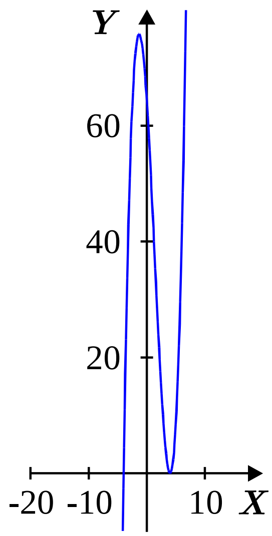
c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 16)(x - 4)$

$$= x^3 - 4x^2 - 16x + 64$$

El dominio de $f(x)$ son todos los reales, entonces dominio de $f(x)$ es $(-\propto, \propto)$
El dominio de $g(x)$ son todos los reales, entonces dominio de $g(x)$ es $(-\propto, \propto)$

Entonces el dominio de $(f \cdot g)(x)$ es $(-\propto, \propto) \cap (-\propto, \propto) = (-\propto, \propto)$

La gráfica de $(f \cdot g)(x)$ sería:



d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x + 4$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 4$$

El dominio de $f(x)$ son todos los reales, entonces dominio de $f(x)$ es $(-\propto, \propto)$
El dominio de $g(x)$ son todos los reales, entonces dominio de $g(x)$ es $(-\propto, \propto)$

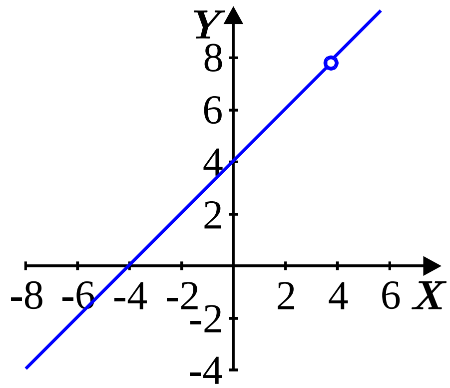
Entonces el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $(-\propto, \propto) \cap (-\propto, \propto) = (-\propto, \propto)$ menos los valores donde $g(x) \neq 0$

$$x - 4 \neq 0$$
$$x \neq 4$$

El dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es todos los reales excepto $x = 4$

Dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

La gráfica de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ sería:



Ejemplo 2

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+7}$ y $g(x) = \sqrt{x-5}$ hallar: $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ así como el dominio de cada una de ellas y hacer sus gráficas.

a) $(f - g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}$

El dominio de $f(x) = \sqrt{x+7}$ se obtiene analizando las operaciones que afectan a la variable, que son una suma y una raíz, la suma se le puede aplicar a todos los reales pero la raíz solo a los valores mayores o iguales a cero.

Entonces $x + 7 \geq 0$
$x \geq -7$

Dominio = $[-7, \infty)$

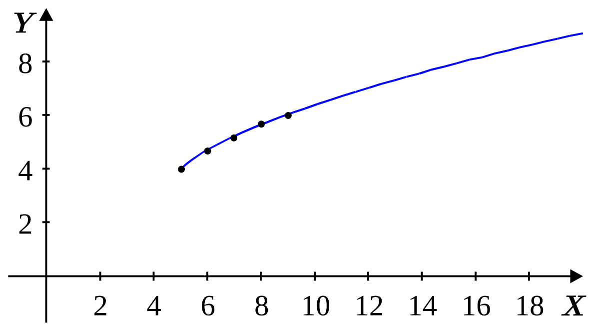
El dominio de $g(x) = \sqrt{x-5}$ se obtiene analizando las operaciones que afectan a la variable, que son una resta y una raíz, la resta se le puede aplicar a todos los reales pero la raíz solo a los valores mayores o iguales a cero.

Entonces $x - 5 \geq 0$
$x \geq 5$

Dominio = $[5, \infty)$

Por lo tanto, el dominio de $(f+g)(x)$ es $[-7,\infty)\cap[5,\infty)=[5,\infty)$

La gráfica de $(f+g)(x)$ sería:



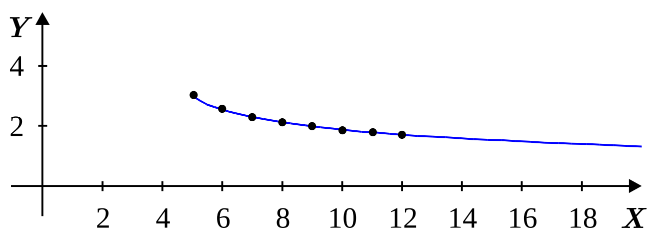
b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}$

El dominio de $f(x)=\sqrt{x+7}$ es $[-7,\infty)$

El dominio de $g(x)=\sqrt{x-5}$ es $[5,\infty)$

Por lo tanto, el dominio de $(f-g)(x)$ es $[-7,\infty)\cap[5,\infty)=[5,\infty)$.

La gráfica de $(f-g)(x)$ sería:



c) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x-5}$

$$=\sqrt{(x+7)(x-5)}$$

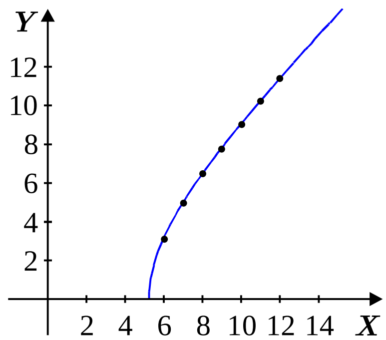
$$=\sqrt{x^2+2x-35}$$

El dominio de $f(x)=\sqrt{x+7}$ es $[-7,\infty)$

El dominio de $g(x)=\sqrt{x-5}$ es $[5,\infty)$

Por lo tanto, el dominio de $(f\cdot g)(x)$ es $[-7,\infty)\cap[5,\infty)=[5,\infty)$.

La gráfica de $(f \cdot g)(x)$ sería:



d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-5}} = \sqrt{\frac{x+7}{x-5}}$

El dominio de $f(x) = \sqrt{x+7}$ es $[-7, \infty)$

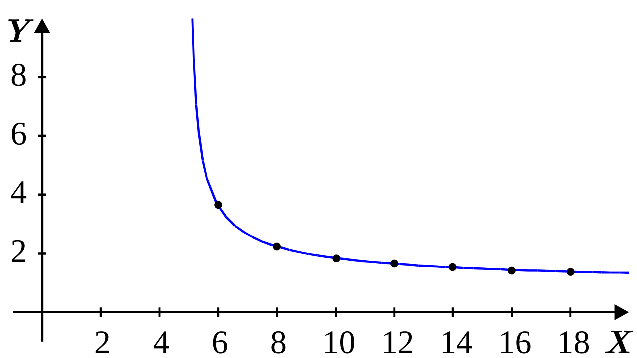
El dominio de $g(x) = \sqrt{x-5}$ es $[5, \infty)$

Así, el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $[-7, \infty) \cap [5, \infty) = [5, \infty)$ menos los números que cumplan que $g(x) \neq 0$.

Es decir $x - 5 \neq 0$
$x \neq 5$

Por lo tanto, el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $(5, \infty)$, los valores mayores que 5.

La gráfica de $(f \cdot g)(x)$ sería:



EVALUACIÓN Y COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sea la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Si queremos conocer cuánto vale la función evaluada en 3, es decir, $f(3)$, la variable x de la función debe sustituirse por el número 3.

$$f(3) = (3)^2 - 2(3) + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$$

Si queremos conocer $f(0)$ sustituimos x por 0 en la función

$$f(0) = (0)^2 - 2(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

Si queremos conocer $f(z)$ sustituimos x por z en la función

$$f(z) = (z)^2 - 2(z) + 3 = z^2 - 2z + 3$$

Si queremos conocer $f(z^3)$ sustituimos x por z^3 en la función

$$f(z^3) = (z^3)^2 - 2(z^3) + 3 = z^6 - 2z^3 + 3$$

En forma general tenemos que dada una función $f(x)$, podemos encontrar f de cualquier valor o f evaluada en otra función, haciendo la sustitución del nuevo valor que se le esta dando a x en la función.

Ejemplo 1

Dada la función $f(x) = x^2 + x - 1$ hallar:

a) $f(0)$, b) $f(3)$, c) $f(h)$, d) $f(2h)$, e) $f(3x+2)$, f) $f(x+h)$, g) $f(x)+f(h)$

a) $f(0) = 0^2 + 0 - 1 = -1$

b) $f(3) = 3^2 + 3 - 1 = 9 + 3 - 1 = 11$

c) $f(h) = h^2 + h - 1$

d) $f(2h) = (2h)^2 + 2h - 1 = 4h^2 + 2h - 1$

e) $f(3x+2) = (3x+2)^2 + (3x+2) - 1 = (3x)^2 + 2(3x)(2) + 2^2 + 3x + 2 - 1$

$$= 9x^2 + 12x + 4 + 3x + 2 - 1$$
$$= 9x^2 + 15x + 5$$

f) $f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h) - 1 = (x)^2 + 2(x)(h) + h^2 + x + h - 1$

$$= x^2 + 2xh + h^2 + x + h - 1$$

g) $f(x) + f(h) = (x^2 + x - 1) + (h^2 + h - 1) = x^2 + x + h^2 + h - 2$

Ejemplo 2

Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ hallar: a) $f(1)$ b) $f(-2)$ c) $f(0)$ d) $f(x+h)-f(x)$

a) $f(1) = \dfrac{1}{1^2} = 1$

b) $f(-2) = \dfrac{-2}{(-2)^2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

c) $f(0)$ la función no esta definida en cero.

d) $$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}$$
$$= \frac{x^2-\left(x^2+2xh+h^2\right)}{\left(x^2+2xh+h^2\right)x^2}$$

Simplificando

$$f(x+h)-f(x) = \frac{-2xh-h^2}{x^4+2x^3h+x^2h^2}$$

Ejemplo 3

Dada la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2}$ hallar:

a) $f(0)$ b) $f(-1)$ c) $f(2a)$ d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e) $f(x+h)$

a) $f(0) = \dfrac{0-1}{0^2+2} = -\dfrac{1}{2}$

b) $f(-1) = \dfrac{-1-1}{(-1)^2+2} = \dfrac{-2}{1+2} = -\dfrac{2}{3}$

c) $f(2a) = \dfrac{2a-1}{(2a)^2+2} = \dfrac{2a-1}{4a^2+2}$

d) $f(x+h) = \dfrac{x+h-1}{(x+h)^2+2} = \dfrac{x+h-1}{x^2+2xh+h^2+2}$

Ejemplo 4

Dada la función $g(x)=\sqrt{2x-1}$ hallar:

a) $g(1)$ b) $g(-1)$ c) $g(0)$ d) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ con $h\neq 0$

a) $g(1) = \sqrt{2(1)-1} = \sqrt{1} = 1$

b) $g(-1) = \sqrt{2(-1)-1} = \sqrt{-3}$ raíz cuadrada de -3 no existe en los reales, asi -1 no pertenece al dominio de la función.

c) $g(0) = \sqrt{2(0)-1} = \sqrt{-1}$ raíz cuadrada de -1 no existe en los reales, asi 0 no pertenece al dominio de la función

d) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{2(x+h)-1}-\sqrt{2x-1}}{h}$

multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del numerador

$$= \frac{\sqrt{2(x+h)-1}-\sqrt{2x-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \frac{(2x+2h-1)-(2x-1)}{h\left(\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$= \frac{2h}{h\left(\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}}$$

Ejemplo 5

Dada la función $f(x)=x^2+4x$ hallar: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con $h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\left[(x+h)^2+4(x+h)\right]-\left(x^2+4x\right)}{h}$$

$$= \frac{x^2+2xh+h^2+4x+4h-x^2-4x}{h}$$

$$= \frac{2xh+h^2+4h}{h}$$

$$= \frac{h(2x+h+4)}{h}$$

$$= 2x+h+4$$

Existe otra manera importante en que dos funciones f y g pueden combinarse para formar una nueva función. Esta nueva función se llama **función compuesta**.

Si f y g son dos funciones, la función compuesta $f\circ g$ se define por

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad \text{es decir,} \quad f \text{ evaluada en } g.$$

El dominio de la función compuesta $f \circ g$ es el conjunto de todas las x que están en el dominio de g y cuya imagen $g(x)$ pertenecen al dominio de $f(x)$.

Nota: la composición de funciones se lleva a cabo de derecha a izquierda, primero se evalúa g en x y después se evalúa f en $g(x)$, conforme al orden de aplicación de las funciones $f \circ g$ se nombra g seguida de f ó g compuesta con f.

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 7$ hallar: a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x - 7] = (x-7)^3$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^3] = x^3 - 7$

Ejemplo 2

Si $f(x) = \sqrt{x+7}$ y $g(x) = \sqrt{x-5}$ hallar: a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{x-5}\right] = \sqrt{\sqrt{x-5}+7}$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\sqrt{x+7}\right] = \sqrt{\sqrt{x+7}-5}$

Ejemplo 3

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 3$ hallar:
a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ g \circ f$ d) $(f \circ g)(3)$ e) $(g \circ f)(0)$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x - 3] = \sqrt{2x-3}$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\sqrt{x}\right] = 2\sqrt{x} - 3$

c) $(f \circ g \circ f)(x) = f[g[f(x)]] = f\left[g\left(\sqrt{x}\right)\right] = f\left(2\sqrt{x}-3\right) = \sqrt{2\sqrt{x}-3}$

d) $(f \circ g)(3) = \sqrt{2(3)-3} = \sqrt{3}$

e) $(g \circ f)(0) = 2\sqrt{0} - 3 = -3$

Ejemplo 4

Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2-1$ hallar:

a) $f\circ f$ b) $g\circ g$ c) $f\circ g$ d) $g\circ f$ e) $f\circ f\circ f$ f) $g\circ g\circ g$

a) $(f\circ f)(x) = f[f(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

b) $(g\circ g)(x) = g[g(x)] = g\left(x^2-1\right) = \left(x^2-1\right)^2-1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$

c) $(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(x^2-1\right) = \sqrt{x^2-1}$

d) $(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2-1 = x - 1$

e) $(f\circ f\circ f)(x) = f[f[f(x)]] = f\left[f\left(\sqrt{x}\right)\right] = f\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[8]{x}$

f) $(g\circ g\circ g)(x) = g[g[g(x)]] = g\left[g\left(x^2-1\right)\right] = g\left(\left(x^2-1\right)^2-1\right) = \left(\left(x^2-1\right)^2-1\right)^2-1$

$$= \left(x^4-2x^2\right)^2-1$$

E J E R C I C I O S

1.- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ hallar:

a) $(f + g)(x)$ b) $(f + g)(4)$ c) $(f - g)(x)$ d) $(f - g)(4)$

e) $(g - f)(x)$ f) $(g - f)(5)$ g) $(f \cdot g)(x)$ h) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

i) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ j) $(f \circ g)(3)$ k) $(f \circ f \circ g)(3)$ l) $(g \circ f)(x)$

2.- Dadas las funciones $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 3x^2 + x$ hallar:

a) $(f + g)(x)$ b) $(f - g)(x)$ c) $(g - f)(x)$ d) $(f \cdot g)(x)$

e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ f) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ h) $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ i) $(f \circ g)(x)$

j) $(f \circ f)(x)$ k) $(f \circ g \circ f)(x)$ l) $(f \circ f \circ g)(x)$ m) $(g \circ g)(3)$

n) $(g \circ f)(5)$ ñ) $(g \circ g \circ g)(2)$

3.- Dada la función $f(x) = 2x - 1$ hallar:

a) $f(3)$ b) $f(-2)$ c) $f(0)$ d) $f(a + 1)$ e) $f(x + 1)$ f) $f(2x)$ g) $2f(x)$

h) $f(x + h)$ i) $f(x) + f(h)$

4.- Dada la función $f(x) = \frac{3}{x}$ hallar:

a) $f(1)$ b) $f(-3)$ c) $f(6)$ d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ e) $f\left(\frac{3}{a}\right)$ f) $f\left(\frac{3}{x}\right)$ g) $\frac{f(3)}{f(x)}$

h) $f(x - 3)$ i) $f(x) - f(3)$ j) $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

5.- Dada la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ hallar:

a) $f(0)$ b) $f(3)$ c) $f(x + h)$ d) $f(3x)$ e) $\frac{f(x + h)}{f(h)}$ f) $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

6.- Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ hallar:

a) $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ b) $f(2x^2) - f(x^2)$

7.- Dada la función $f(x) = 4x^2 - 5x - 3$ hallar:

a) $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ b) $f(x^2) - f(x)$

8.- Dada la función $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ hallar:

a) $f(-2)$ b) $f(-1)$ c) $f(0)$ d) $f(h+1)$ e) $f(2x^2)$ f) $f(x^2 - 3)$

g) $f(x+h)$ h) $f(x)+f(h)$ i) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9.- Dada la función $g(x) = 3x^2 - 4$ hallar:

a) $g(-4)$ b) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ c) $g(x^2)$ d) $g(3x^2 - 4)$ e) $g(x-h)$ f) $g(x)-g(h)$

g) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

10.- Dada la función $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ hallar:

a) $g(3)$ b) $g(-3)$ c) $g(x-1)$ d) $g(x)-g(1)$ e) $g(x^2)$ f) $(g(x^2))$

g) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

11.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ hallar:

a) $f(1)$ b) $f(-1)$ c) $f(0)$ d) $f(x-1)$ e) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ f) $\dfrac{1}{f(x)}$ g) $\dfrac{f(-1)}{f(1)}$

h) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

12.- En los siguientes pares de funciones hallar:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$ e) $f \circ f \circ g$ f) $g \circ g \circ f$
g) $f \circ g \circ f$ h) $g \circ f \circ g$ i) $g \circ g \circ g$ j) $g \circ g \circ f$ k) $(f \circ g)(2)$
l) $(g \circ f)(1)$

i.	$f(x) = x - 5$	$g(x) = x^2 - 1$	vi.	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = 4 - x^2$
ii.	$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$	$g(x) = \dfrac{1}{x}$	vii.	$f(x) = \sqrt{x+4}$	$g(x) = x^2 - 4$
iii.	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = x^2 - 1$	viii.	$f(x) = x^2$	$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
iv.	$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$	$g(x) = \dfrac{x}{x-2}$	ix.	$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	$g(x) = \sqrt{x}$
v.	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = x^2 + 1$			

TEMA III.- *LA DERIVADA*

LÍMITES (CONCEPTO INTUITIVO)

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Lo que nos interesa es analizar el comportamiento de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se va aproximando o se va acercando a una constante a, pero necesariamente distinto de a. En muchas ocasiones el número a no se encuentra en el dominio de $f(x)$, es decir, $f(a)$ no está definida.

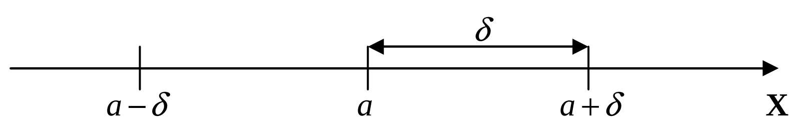
La pregunta sería: ¿así como x se va acercando más y más a la constante a $(\text{pero } x \neq a)$, de la misma manera se irá acercando $f(x)$ a algún valor L?, si la respuesta es afirmativa, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, es igual a L y se denota como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Que se lee como: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L.

VECINDAD DE UN PUNTO

Se llama vecindad de un punto a en $\mathbb{R}$, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta) = \{x / a-\delta < x < a+\delta\}$, en donde δ se llama radio del intervalo.



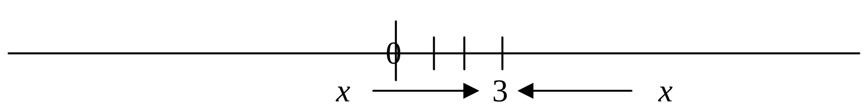
Tal intervalo con centro en a y radio δ suele también indicarse como: $\{x \in \mathbb{R} / |x-a| < \delta\}$, si en tal intervalo se quiere excluir al punto a, entonces se pone como sigue: $\{x \in \mathbb{R} / 0 < |x-a| < \delta\}$

Aunque en realidad no hablamos del intervalo sino de los números que satisfacen estar en tal intervalo.

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = x - 2$, y queremos analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a 3, es decir $x \to 3$.

Tabulamos la función asignándole valores a x que se aproximen a 3, por la izquierda y por la derecha.



Valores por la izquierda

x	$f(x)$
2	0
2.3	0.3
2.5	0.5
2.7	0.7
2.9	0.9
2.99	0.99
2.999	0.999
2.9999	0.9999
$x \to 3$	$f(x) \to 1$

Valores por la derecha

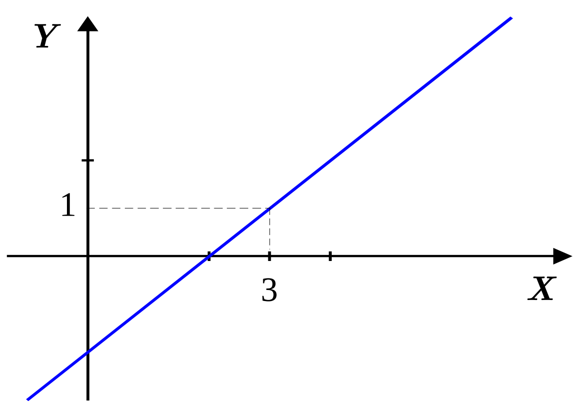
x	$f(x)$
4	2
3.9	1.9
3.7	1.7
3.5	1.5
3.1	1.1
3.01	1.01
3.001	1.001
3.0001	1.0001
$x \to 3$	$f(x) \to 1$

En las tabulaciones se observa que, a medida que x se aproxima a 3, $f(x)$ se aproxima a 1, y entre más cerca se encuentra x de 3, $f(x)$ estará más cerca de 1.

Estas aproximaciones (de la variable y de la función) pueden expresarse con la notación de límite.

$$\lim_{x \to 3} x - 2 = 1$$

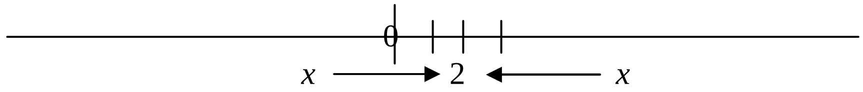
Haciendo la gráfica se vería como sigue:



Ejemplo 2:

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 3}$, y queremos analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a 2, es decir $x \to 2$.

Tabulamos la función asignándole valores a x que se aproximen a 2, por la izquierda y por la derecha.



Valores por la izquierda

x	$f(x)$
1	0.5
1.3	0.182352
1.5	-0.16666
1.7	-0.68461
1.9	-0.46363
1.99	-1.94069
1.999	-1.99400
1.9999	-1.99940
$x \to 2$	$f(x) \to -2$

Valores por la derecha

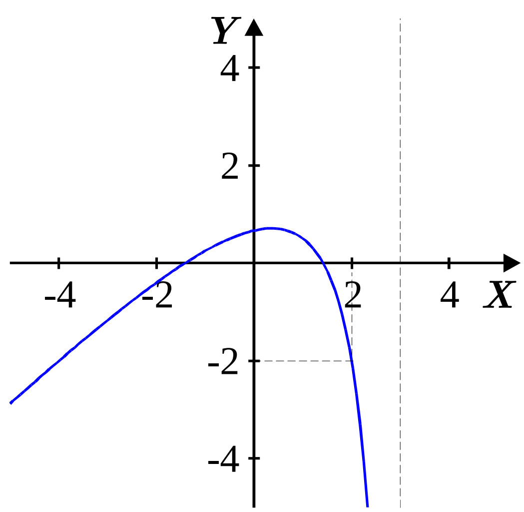
x	$f(x)$
3	No hay
2.7	-17.6333
2.5	-8.5
2.3	-4.7
2.1	-2.67777
2.01	-2.06070
2.001	-2.00600
2.0001	-2.00060
$x \to 2$	$f(x) \to -2$

En las tabulaciones se observa que, a medida que x se aproxima más a 2, $f(x)$ se aproxima más a -2.

Estas aproximaciones (de la variable y de la función) pueden expresarse con la notación de límite.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2}{x - 3} = -2$$

Haciendo la gráfica se vería como sigue:

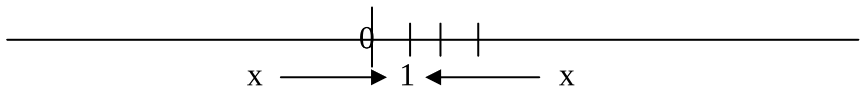


Ejemplo 3:

Sea la función $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}=\dfrac{(3x+1)(x-1)}{x-1}$ y queremos analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a 1, es decir, cuando x se acerca a 1.

f está definida para todos los valores, excepto para $x=1$, además si $x\neq 1$ la función puede reducirse a $f(x)=3x+1$.

Tabulamos la función asignándole valores a x que se aproximen a 1, por la izquierda y por la derecha.



Valores por la izquierda

x	$f(x)$
0	1
0.5	2.5
0.75	3.25
0.8	3.4
0.9	3.7
0.99	3.97
0.999	3.997
0.9999	3.9997
$x\to 1$	$f(x)\to 4$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=4$$

Valores por la derecha

x	$f(x)$
2.0	7
1.5	5.5
1.3	4.9
1.2	4.6
1.1	4.3
1.01	4.03
1.001	4.003
1.0001	4.0003
$x\to 1$	$f(x)\to 4$

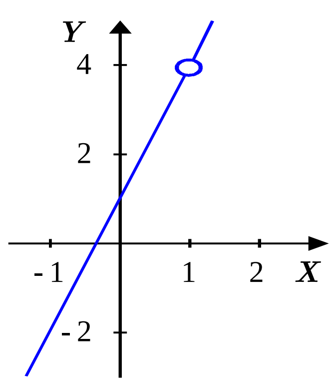
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=4$$

En las tabulaciones se observa que, a medida que x se aproxima más a 1, $f(x)$ se aproxima más a 4.

Estas aproximaciones (de la variable y de la función) pueden expresarse con la notación de límite.

$$\lim_{x\to 1}=\frac{3x^2-2x-1}{x-1}=4$$

Haciendo la gráfica se vería como sigue:

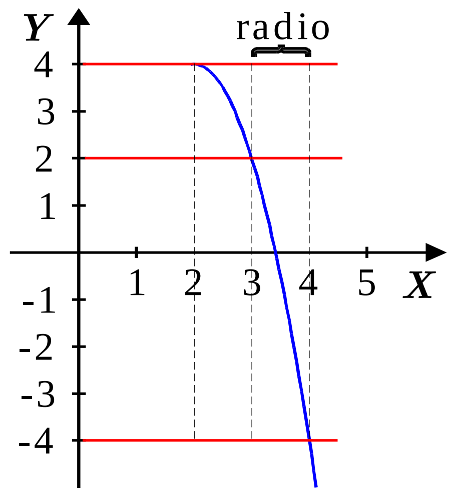


Ejemplo 4:

Sea la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, se quiere analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a 3, es decir, en un intervalo con centro en 3 y radio 1.

Seleccionaremos primero un intervalo, es decir, $2 < x < 4$.

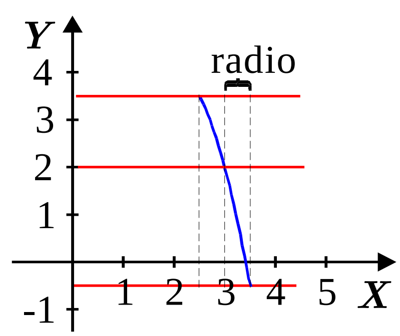
La gráfica de la función en éste entorno muestra que para $x = 2$ se tiene $f(2) = 4$ y para $x = 4$ se tiene $f(4) = -4$.



La gráfica de la función se encuentra en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2$, $x = 4$, $y = 4$ y $y = -4$.

Ahora seleccionaremos un intervalo más pequeño, por ejemplo de 0.5, es decir, $2.5 < x < 3.5$.

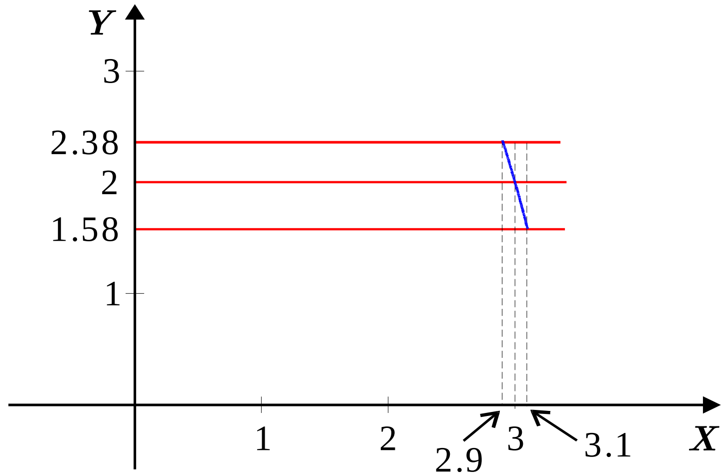
La gráfica de la función en éste intervalo muestra que para $x = 2.5$ se tiene $f(2.5) = 3.5$ y para $x = 3.5$ se tiene $f(3.5) = -0.5$.



La gráfica se encuentra ahora en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2.5$, $x = 3.5$, $y = 3.5$ y $y = -0.5$.

Tomamos un intervalo de radio menor de 0.5, por ejemplo de radio 0.1, es decir, $2.9 < x < 3.1$.

La gráfica de la función muestra que para $x = 2.9$ se tiene $f(2.9) = 2.38$ y para $x = 3.1$ se tiene $f(3.1) = 1.58$



El aspecto principal a resaltar es que, a medida que el ancho de estos disminuye la altura también de reduce.

Si ahora tomamos un radio de 0.01, es decir, $2.99 < x < 3.01$, el rectángulo que contiene la gráfica de la función está limitado por las rectas $x = 2.99$, $x = 3.01$, $y = 1.96$ y $y = 2.04$.

Por lo tanto, se puede decir que conforme las rectas $x = cte.$ se aproximan al valor $x = 3$, las rectas $y = cte.$ se acercan al valor $y = 2$.

La pregunta es ¿cuál es el objeto de toda ésta complicación, si por sustitución directa se podría obtener $y = 2$ cuando $x = 3$? Obsérvese que en todo el análisis de éste ejemplo no se ha utilizado éste hecho, más aún, se ha evitado toda consideración de lo que sucede cuando $x = 3$.

Nos interesa solamente el comportamiento de la función cuando está en algún intervalo alrededor del valor tres.

Se observa que cuando x se aproxima al valor 3, $f(x)$ se aproxima o tiende al valor 2.

Se dice entonces que $f(x)$ tiende a 2 cuando x tiende a 3, proposición que se abrevia como:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 3} -2x^2 + 8x - 4 = 2$$

Si una función está definida para valores de x en un intervalo con centro en a, y si al tender x al número a, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más cercanos a un número específico L, se puede escribir:

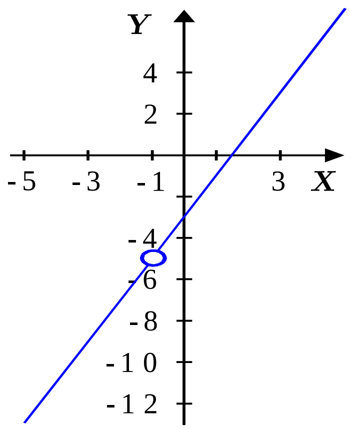
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Geométricamente esto significa que la sucesión de rectángulos alrededor de a, cuyos anchos son cada vez más pequeños, tienen alturas cada vez menores y se acumulan en torno al punto (a,L).

Ejemplo 5:

Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$, hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1, es decir, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$.

Para tener una idea de lo que sucede, se elabora una tabla de valores y la gráfica de $f(x)$.



Se obtiene una línea recta con un agujero en el punto $(-1,-5)$.

Con un análisis geométrico sobre los rectángulos como se realizó en el ejemplo 4, se concluye para éste ejemplo que:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}=-5$$

Sin embargo es necesario disponer de un método más sistemático, sin necesidad de hacer gráficas y consideraciones intuitivas.

Por ejemplo, se puede factorizar el numerador y la función se escribe como:

$$f(x)=\frac{2x^2-x-3}{x+1}=\frac{(2x-3)(x+1)}{x+1}$$

Si $x\neq -1$ se puede simplificar como:

$$f(x)=2x-3$$

Esta función tiende a -5 cuando x tiende a -1, porque ahora se puede efectuar la sustitución directa, por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Se debe observar que en ningún momento se sustituye el valor de $x = -1$ en la función original.

Ejemplo 6:

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3, es decir $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

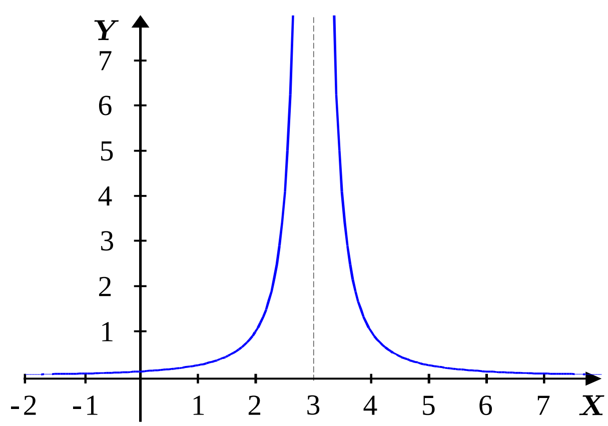
Haciendo la gráfica de la función, en un intervalo con centro en $x = 3$, se puede observar cómo $f(x)$ crece sin límite cuando x tiende a 3.

Valores por la izquierda

x	$f(x)$
1	0.25
1.5	0.444
2	1
2.5	4
2.7	11.111
2.9	100
2.99	10,000
2.999	1,000,000
$x \to 3$	

Valores por la izquierda

x	$f(x)$
5	0.25
4.5	0.444
4	1
3.5	4
3.3	1.111
3.1	100
3.01	10,000
3.001	1,000,000
$x \to 3$	



Si se toma un intervalo de valores de x, en torno a 3 y se busca en qué rectángulo están los valores de la función, se verá claramente la no existencia de tales rectángulos por pequeños que sean los intervalos escogidos alrededor de $x = 3$.

En tal caso se dice que: $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ no existe.

Los ejemplos anteriores nos presentan la noción de límite de una manera informal con expresiones como intervalos pequeños, números cercanos a otros, cantidades acercándose a una constante, etcétera.

DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

A continuación se dará la definición formal de límite, donde se involucran dos letras del alfabeto griego ε (épsilon) y δ (delta).

Podemos ver la situación de los ejemplos anteriores desde otro punto de vista, considerando primero los valores de $f(x)$. Podemos hacer que el valor de $f(x)$ se aproxime a L tanto como queramos, tomando x suficientemente cercano a a, es decir, que podemos hacer el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L tan pequeña como queramos haciendo que el valor absoluto de la diferencia entre x y a sea suficientemente pequeña.

Esto es $|f(x)-L|$ se puede hacer tan pequeño como queramos, haciendo que $|x-a|$ sea lo suficientemente pequeño.

Una manera más precisa de decir lo anterior es utilizando los símbolos ε y δ para éstas pequeñas diferencias.

De manera que se establece, que para cualquier número positivo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo $\delta > 0$ seleccionado adecuadamente tal que:

Si $|x-a| < \delta$ y $|x-a| > 0$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$

La definición formal nos queda de la siguiente manera:

Dados una función $f(x)$ y los números a y L, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, si para todo número positivo ε, existe un número positivo δ tal que:

Si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$

Una forma abreviada para decir que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En otras palabras la definición anterior establece que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a un límite L, a medida que x se aproxima a un número a, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando x suficientemente cercano a a, pero no igual a a.

En la definición no se menciona del valor de la función cuando $x = a$, es decir, no es necesario que $f(x)$ esté definida en a como condición para que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ exista.

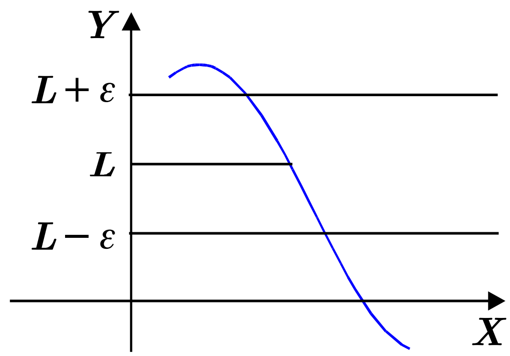
Geométricamente sería de la siguiente manera:

Recuérdese que $|x-a|<\delta$ es equivalente a la desigualdad $a-\delta<x<a+\delta$.

Esta desigualdad establece cómo debe estar contenida x en un intervalo de a.

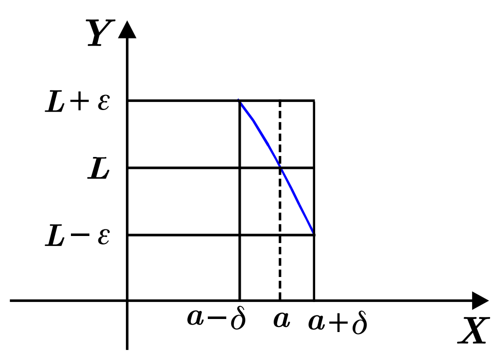
La parte de la desigualdad $0<|x-a|$ establece que x no puede tomar el valor de a, es decir, se trata de un entorno del punto a, ya que éste valor se excluye de él.

La desigualdad $|f(x)-L|<\varepsilon$ equivale a la desigualdad $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$ y establece que la función $f(x)$ está por encima de la recta $y=L-\varepsilon$ y por debajo de la recta $y=L+\varepsilon$.



La interpretación geométrica establece que dado un $\varepsilon>0$ debe ser posible encontrar un $\delta>0$ tal que la gráfica de la función $f(x)$ se encuentra en el rectángulo limitado por las rectas $x=a-\delta$, $x=a+\delta$, $y=L-\varepsilon$ y $y=L+\varepsilon$, nada se dice acerca del valor de la función cuando $x=a$.

Haciendo la gráfica de lo anterior sería como sigue:



EJEMPLO

Sea la función $f(x)=3x-2$, hallar el límite cuando $x\to 5$.

Utilizaremos un radio igual a 1, es decir $4<x<6$, y formaremos una tabla con las siguientes columnas.

1.- Valor de x en estudio $x=a$.
2.- Valor contenido en el intervalo de a.
3.- Valor absoluto de la diferencia $x-a$.
4.- Valor de la función en x.

1	2	3	4	5	6
a	x	$\lvert x-a\rvert$	$f(x)$	L	$\lvert f(x)-L\rvert$
5	4.5	0.5	11.5	13	1.5
5	4.9	0.1	12.7	13	0.3
5	4.95	0.05	12.85	13	0.15
5	4.99	0.01	12.97	13	0.03
5	4.995	0.005	12.99	13	0.01
5	4.999	0.001	12.997	13	0.003

Al observar las cuatro primeras columnas de la tabla, se ve como a medida que $|x-a|$ tiende a cero, la función tiende al valor 13, que se escribe como:

$$\lim_{x\to 5} f(x)=13$$

Aumentando en la tabla las columnas

5.- El valor del límite de la función.
6.- El valor absoluto de la diferencia $f(x)-L$

Se observa que para cada valor de $|x-a|$ de la tabla, existe un valor $|f(x)-L|$, y ambos tienden a cero.

Se requiere hacer ver cómo dado un $\varepsilon>0$, se puede encontrar un $\delta>0$ tal que

$$|3x-2-13|<\varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x-5|<\delta$$

Como $|3x-15|=|3(x-5)|$ si se da un ε, se toma simplemente $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, entonces si $|x-5|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, se encuentra $3|x-5|<\varepsilon$, que equivale al resultado buscado $|3x-15|<\varepsilon$.

La resolución de problemas sobre límites, no solo puede hacerse por tabulación o utilizando la definición con ε y δ, sino también utilizando teoremas que nos sirven para simplificar el proceso.

Teorema 1.- Si a y c son números reales cualesquiera, entonces:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

Teorema 2.- Si a es un número real cualquiera, entonces:

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

Teorema 3.- Si a, b y $m \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{x\to a} mx+b = ma+b.$$

Teorema 4.- Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces:

a) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\bullet g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \bullet L_2$

c) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$ y $g(x) \neq 0$.

Teorema 5.- Si $f(x)$ es polinomial, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Teorema 6.- Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y n es entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = L^n.$$

Teorema 7.- Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

a) si $L > 0$ y n es un entero par positivo.

b) si $L \leq 0$ y n es un entero impar positivo.

Teorema 8.- (límites unilaterales)

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

EJEMPLOS

Resolver los siguientes límites, aplicando los teoremas correspondientes:

1.- $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$

2.- $\lim\limits_{x \to 0} (-3) = -3$

3.- $\lim\limits_{x \to -2} x = -2$

4.- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} -x = -\frac{1}{4}$

5.- $\lim\limits_{x \to 3} 2x = \lim\limits_{x \to 3} 2 \bullet \lim\limits_{x \to 3} x = 2 \bullet 3 = 6$

6.- $\lim\limits_{x \to 6} \frac{1}{2} x = \lim\limits_{x \to 6} \frac{1}{2} \bullet \lim\limits_{x \to 6} x = \frac{1}{2} \bullet 6 = 3$

7.-
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} 2x - 2 &= \lim_{x \to 1} 2x - \lim_{x \to 1} 2 \\
&= \lim_{x \to 1} 2 \bullet \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 2 \\
&= 2 \bullet 1 - 2 = 0
\end{aligned}$$

8.-
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} 3x^2 + 3x - 3 &= \lim_{x \to 2} 3 \bullet \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 3} 3 \bullet \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 3 \\
&= 3 \bullet 2^2 + 3 \bullet 2 - 3 \\
&= 12 + 6 - 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + 3x - 3 = 15$

9.-
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \sqrt{2x + 4} &= \sqrt{\lim_{x \to 0} 2 \bullet \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} 4} \\
&= \sqrt{2 \bullet 0 + 4} \\
&= 2
\end{aligned}$$

10.-
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 16}{2x^2 + 7}} &= \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x + 16}{2x^2 + 7}} \\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 3} x^3 + \lim_{x \to 2} 2 \bullet \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 3} 16}{\lim_{x \to 3} 2 \bullet \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7}} \\
&= \sqrt{\frac{3^3 + 2 \bullet 3 + 16}{2 \bullet 3^2 + 7}} \\
&= \sqrt{\frac{27 + 6 + 16}{18 + 7}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

Resolver límites aplicando estrictamente los teoremas puede resultar un trabajo lento y monótono, por lo cual se recomienda resolver bastantes ejercicios para adquirir solvencia a la hora de tratar de resolver cualquier limite.

EJEMPLOS DE LÍMITES QUE SE RESUELVEN CON $f(a)$

Se evalúa $f(x)$ en el valor al que tiende la variable x

EJEMPLO 1: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1} x^2-2x+3$$

$$f(x)=x^2-2x+3$$

Evaluar $f(x)$ en $x=1$

$$f(1)=1^2-2(1)+3=1-2+3=2$$

Entonces $\lim_{x\to 1} x^2-2x+3=2$

También se puede hacer directamente la sustitución.

$$\lim_{x\to 1} x^2-2x+3=1^2-2(1)+3$$

$$=1-2+3=2$$

$$\lim_{x\to 1} x^2-2x+3=2$$

EJEMPLO 2: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to -2} 3x^2-5x+1=3(-2)^2-5(-2)+1$$

$$=3(4)+10+1=23$$

$$\lim_{x\to -2} 3x^2-5x+1=23$$

EJEMPLO 3: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{0^2+0+4}$$

$$=\sqrt{4}=2$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+4}=2$$

EJEMPLO 4: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{x^2+x-8}=\frac{8-2^3}{2^2+2-8}$$
$$=\frac{8-8}{4+2-8}=\frac{0}{-2}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{x^2+x-8}=0$$

EJEMPLO 5: hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-8}{8-x^3}=\frac{2^2+2-8}{8-2^3}$$
$$=\frac{-2}{0}$$ No tiene límite.

EJEMPLO 6: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-1}=\frac{3+1}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-1}=2$$

EJEMPLO 7: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2-4x+18}{x+2}}=\sqrt{\frac{0^2-4(0)+18}{0+2}}$$
$$=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2-4x+18}{x+2}}=3$$

EJEMPLOS DE LÍMITES INDETERMINADOS $\frac{0}{0}$

Si al evaluar $f(x)$ en el valor al que tiende la variable x, nos queda un valor indeterminado $\frac{0}{0}$, para resolverlos se factoriza o se racionaliza.

EJEMPLO 1: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{5^2-25}{5-5}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, entonces se factoriza.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}x+5=5+5=10$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=10$ nótese que se factoriza para eliminar la indeterminación $\frac{0}{0}$ y después se vuelve a evaluar la función resultante en el valor al que tiende la variable x.

EJEMPLO 2: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{-2+2}{(-2)^2-4}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, entonces se factoriza.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$

EJEMPLO 3: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, entonces se factoriza.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}x+1=1+1=2$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

EJEMPLO 4: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-x^2}{2x^2+x}=\frac{5(0)^3-(0)^2}{2(0)^2+(0)}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, entonces se factoriza.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-x^2}{2x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(5x^2-x\right)}{x\left(2x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-x}{2x+1}=\frac{5(0)-0}{2(0)+1}=\frac{0}{1}=0$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-x^2}{2x^2+x}=0$

EJEMPLO 5: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-3x-4}=\frac{-1+1}{(-1)^2-3(-1)-4}=\frac{0}{1+3-4}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, entonces se factoriza.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x-4)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-4}=\frac{1}{-1-4}=-\frac{1}{5}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-3x-4}=-\frac{1}{5}$

EJEMPLO 6: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-11x+12}{x-1}=\frac{1^3-2(1)^2-11(1)+12}{1-1}=\frac{1-2-11+12}{0}=\frac{0}{0}$$ Factorizar.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-11x+12}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2-x-12\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}x^2-x-12=1-1-12=-12$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-11x+12}{x-1}=-12$

EJEMPLO 7: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5-\sqrt{x+25}}{x}=\frac{5-\sqrt{0+25}}{0}=\frac{5-5}{0}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado. Entonces se Racionalizar.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5-\sqrt{x+25}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5-\sqrt{x+25}}{x}\right)\left(\frac{5+\sqrt{x+25}}{5+\sqrt{x+25}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5^2-\left(\sqrt{x+25}\right)^2}{x\left(5+\sqrt{x+25}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{25-x-25}{x\left(5+\sqrt{x+25}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\left(5+\sqrt{x+25}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\left(5+\sqrt{x+25}\right)} = \frac{-1}{5+\sqrt{0+25}} = \frac{-1}{5+5} = -\frac{1}{10}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{5-\sqrt{x+25}}{x} = -\frac{1}{10}$

EJEMPLO 8: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{h+4}-2} = \frac{0}{\sqrt{0+4}-2} = \frac{0}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0}$$ Indeterminado. Entonces se Racionaliza.

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{h+4}-2} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{\sqrt{h+4}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{h+4}+2}{\sqrt{h+4}+2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{\left(\sqrt{h+4}\right)^2 - 2^2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{h+4-4}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt{h+4}+2 = \sqrt{0+4}+2 = 2+2 = 4$$

Por lo tanto, $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{h+4}-2} = 4$

EJEMPLOS DE LÍMITES INFINITOS

Si al evaluar $f(x)$ no tenemos un número, ni $\frac{0}{0}$, entonces se debe de tener una de las siguientes interpretaciones con $c \neq 0$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{c}{x} = \pm\infty$ el límite no existe

b) $\lim_{x\to \pm\infty} cx = \pm\infty$ el límite no existe

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{c} = \pm\infty$ el límite no existe

d) $\lim_{x\to \infty} \frac{c}{x} = 0$

Nota: La notación $x \to \infty$ debe leerse " x tiende a infinito" y "no x se aproxima al infinito

EJEMPLO 1: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to 2} \frac{5}{(x-2)^2} = \frac{5}{(2-2)^2} = \frac{5}{0^2} = \frac{5}{0}$$ No tiene límite.

EJEMPLO 2: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{3} = \frac{0^2+0}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

EJEMPLO 3: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to 0} -\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{0^2} = -\frac{3}{0}$$ No tiene límite.

EJEMPLO 4: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x} = 0$$

EJEMPLO 5: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 - 8x + 15 = x^2\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}\right)$$ No tiene límite.

EJEMPLO 6: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to -3} \frac{5}{x+3} = \frac{5}{-3+3} = \frac{5}{0}$$ No tiene límite.

EJEMPLO 7: Hallar el siguiente límite.

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}$$ No tiene límite.

E J E R C I C I O S

Resolver los siguientes límites y hacer la grafica para verificar el resultado.

1.- $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

3.- $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

4.- $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

2.- $\lim_{x \to 3} 4x-5$

5.- $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

6.- $\lim_{x\to 3}2x-8$

7.- $\lim_{x\to -2}x^2-3x+1$

8.- $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{12-x^2}}{x^4}$

9.- $\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x}+1\right)$

10.- $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

11.- $\lim_{x\to 1}\frac{5x-x^2}{x^2+2x-4}$

12.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

13.- $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$

14.- $\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}$

15.- $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-16x}{x^2+4x}$

16.- $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

17.- $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

18.- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x+2}$

19.- $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x-4}{x-3}$

20.- $\lim_{t\to 2}\frac{t^2-5t+6}{t^2-t-2}$

21.- $\lim_{u\to 1}\frac{u^2+6u-7}{u^2-1}$

22.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

23.- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

24.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

25.- $\lim_{x\to 4}3x-7$

26.- $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

27.- $\lim_{x\to 3}x^2+x-5$

28.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-1}$

29.- $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$

30.- $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-4x}{x}$

31.- $\lim_{x\to 2}\sqrt{2x}$

32.- $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}$

33.- $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^2-1}$

34.- $\lim_{x\to 2}2x^2-4x+3$

35.- $\lim_{x\to 3}x^2-2x$

36.- $\lim_{x\to 0}x^4$

37.- $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

38.- $\lim_{x\to 2}\frac{7x^5-10x^4-13x+16}{3x^2-6x-8}$

39.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x+7}{x^2-2x+1}$

40.- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$

41.- $\lim_{x\to 3}7x-4$

42.- $\lim_{x\to -1}2x^3-5x$

43.- $\lim_{x\to 2}\left(x^2+1\right)\left(3x-1\right)$

44.- $\lim_{x\to 4}\frac{2x}{3x^3-16}$

45.- $\lim_{x\to -2}\frac{3x^4-8}{x^3+24}$

46.- $\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-5}$

47.- $\lim_{x\to -3}\sqrt{5x^2+2x}$

48.- $\lim_{x\to -2}\left(2x^3+15\right)^3$

49.- $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-x^3-2x^2+1}{3x^2-5x+7}$

50.- $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-24}{x-4}$

51.- $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x+2}$

52.- $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+7x+6}{x^2-4x-5}$

53.- $\lim_{u\to 2}\frac{u^2-2u}{u^2-4}$

54.- $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+7x+7}{x^2-4x-5}$

55.- $\lim_{y\to 1}\frac{\left(y-1\right)\left(y^2+2y-3\right)}{y^2-2y+1}$

56.- $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

57.- $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1+x}}{4+4x}$

58.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

59.- $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

60.- $\lim_{h\to 0}\frac{\left(4+h\right)^2-16}{h}$

61.- $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

62.- $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

63.- $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$

64.- $\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^3+64}$

65.- $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}$

66.- $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-x}{x-3}$

67.- $\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-13x-10}{x-5}$

68.- $\lim_{x\to -3}\frac{3x+9}{x^2-9}$

CONTINUIDAD

FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

De manera intuitiva:

a) Se dice que una función definida en un intervalo es continua, si se puede dibujar una gráfica sin levantar el lápiz.

b) Se dice que una función definida en un intervalo es discontinua si al dibujar la gráfica se tiene que levantar el lápiz.

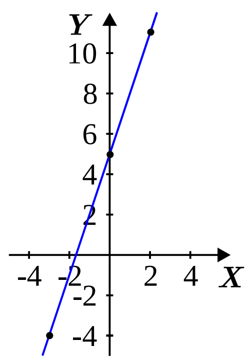
La continuidad o discontinuidad se puede pensar en un punto o en un intervalo, más adelante lo veremos con más detalle con límites.

Ejemplo 1

Dada la función $y=3x+5$ decir si es continua o discontinua

Como la variable y esta despejada, analizamos las operaciones que afectan a la variable x, que son un producto y una suma, como estas operaciones se le pueden aplicar a todos los reales entonces su dominio son todos los reales.

Haciendo la gráfica de $y=3x+5$



En la gráfica se puede observar la continuidad

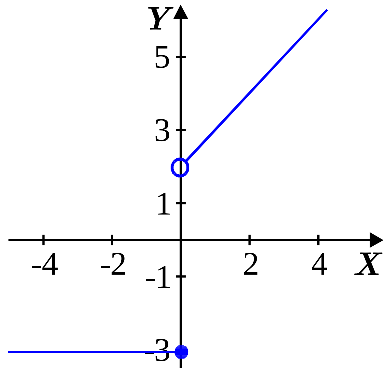
Ejemplo 2

Dada la función $y=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\geq 0 \\ -3 & \text{si } x<0 \end{cases}$ decir si es continua o discontinua.

Como la función esta definida en dos partes se puede analizar el dominio por separado.

Para $y=x+2$ el dominio es el intervalo $[0,\infty)$ y el dominio para $y=-3$ es el intervalo $(-\infty,0)$, por lo tanto, el dominio para la función son todos los reales $(-\infty,\infty)$.

Haciendo la gráfica de $y = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 0 \\ -3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



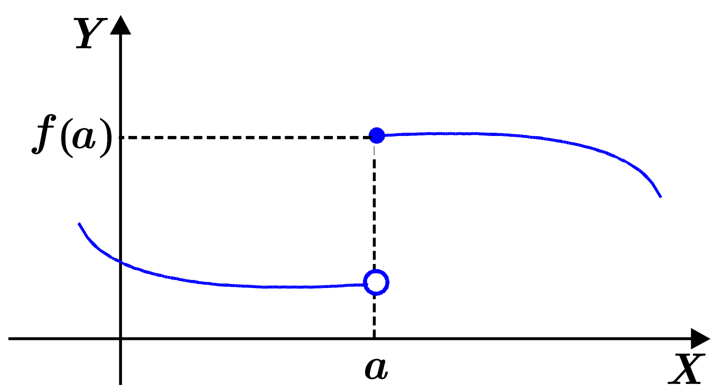
En la gráfica se puede observar un salto en $x = 0$, por lo tanto, la función es discontinua.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La idea intuitiva de continuidad sugiere que la trayectoria de la función definida en un intervalo no presente cortes, huecos o saltos bruscos en el punto estudiado.

Para formalizar el concepto de continuidad, se analizan los siguientes casos para una función,

Caso 1: Sea f una función cuya gráfica es la siguiente.



Aquí se observa que la función está definida en $x = a$, sin embargo se ve claramente un salto en ese valor.

Se observa también que el límite cuando $x \to a$ no existe ya que los límites laterales en éste punto no son iguales, por lo que a pesar de tener valor $f(x)$ en $x = a$ la función es no continua, es decir, es discontinua.

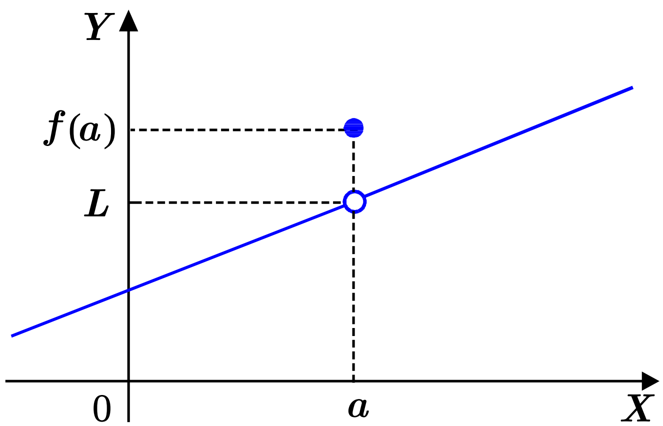
Esto se expresa como:

$f(a)$ Existe

$\lim_{x \to a} f(x)$ No existe

Luego $f(x)$ no es continua.

Casi 2: Sea f una función cuya gráfica es la siguiente.



Se puede observar que la función y el limite en $x = a$ existen y sus valores son $f(a)$ y L respectivamente.

A pesar de esto, se ve un hueco que manifiesta la discontinuidad en $x = a$, pero que nos hace pensar en la igualdad del valor de la función en a y el limite para condicionar la continuidad.

$\lim_{x \to a} f(x)$ Existe

$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Luego $f(x)$ no es continua.

Los dos casos anteriores nos llevan a la siguiente definición.

DEFINICIÓN:

Sea f una función definida en un cierto dominio, se dice que f es continua en $x = a$, $a \in$ dominio de f, si se cumplen las condiciones siguientes:

1) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

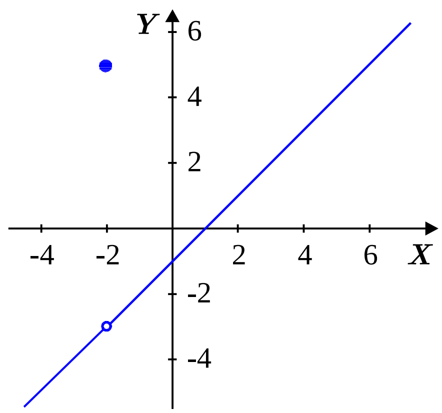
2) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Estas condiciones se pueden expresar en la tercera $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ ya que su presencia en la igualdad implica necesariamente su existencia.

Una función f es discontinua para $x = a$ si no satisface una de las dos condiciones de continuidad.

EJEMPLO 1: Sea f la función definida como: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

Trazar su gráfica e investigar si es continua en $x = -2$



Probando las condiciones de continuidad.

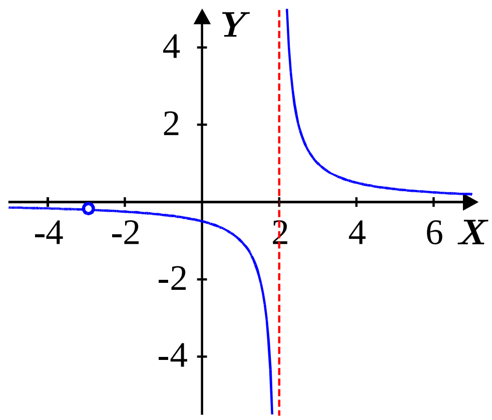
$$f(-2) = 5$$

1) $\lim_{x \to -2} f(x) = -3$ satisface la primera condición.

2) $f(-2) \neq \lim_{x \to -2} f(x)$ no satisface la segunda condición, por lo tanto, f es discontinua en $x = -2$.

EJEMPLO 2: Sea g la función definida como: $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2 + x - 6}$, investigar si existe algún punto de discontinuidad para dicha función.

Haciendo la gráfica nos queda:



Analizando la función. $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+x-6}$

$$=\frac{x+3}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{(x-2)} \qquad \text{si} \quad x\neq -3$$

Se observa que la función no esta definida para $x=-3$, por lo tanto,

$$g(x)=\frac{1}{(x-2)} \qquad \text{Para} \quad x\neq -3$$

Además $x-2$ debe de ser $\neq 0$ por lo tanto g no está definida para $x=2$.

El dominio de g es $\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$ o Dominio = $(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,\infty)$

Se concluye que g no esta definida en $x=-3$ y $x=2$, en todos los demás puntos se puede ver que $\lim\limits_{g(x)\to a} g(x)=g(x)$ para a en el dominio de g y g es continua en todo su dominio.

EJEMPLO 3: Sea f la función definida como: $f(x)=\sqrt{x-2}$, decir si es continua o discontinua en a) $x=2$, b) $x=0$ c) $x=6$.

a) El dominio de f es $[2,\infty)$, $2\in[2,\infty)$ y $f(2)=\sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}=\sqrt{2-2}=0$

2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x=2$.

b) El dominio de f es $[2,\infty)$

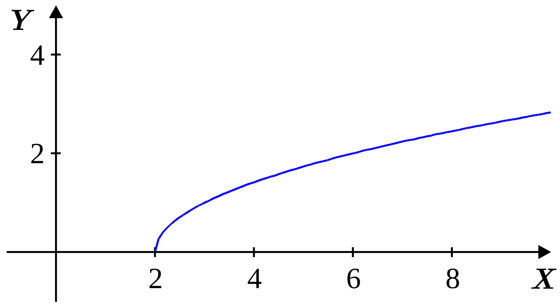
$0\notin$ al dominio de f, por lo tanto, en éste punto no se puede hacer el análisis.

c) El dominio de f es $[2,\infty)$, $6\in[2,\infty)$ y $f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$

1) $\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{x\to 6} \sqrt{x-2} = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$

2) $\lim_{x\to 6} f(x) = f(6)$

Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x = 6$.



EJEMPLO 4: Sea la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$, decir si es continua o discontinua en a) $x = 1$, b) $x = 0$ c) $x = -3$.

a) El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $1 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ y $f(1) = \dfrac{1+1}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{1+1}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

b) El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $0 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ y $f(0) = \dfrac{0+1}{0+3} = \dfrac{1}{3}$

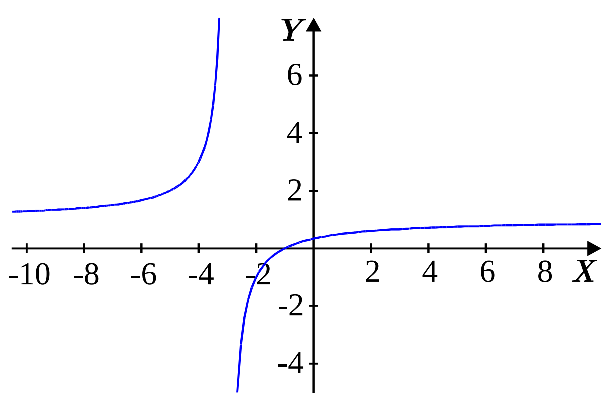
1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{0+1}{0+3} = \dfrac{1}{3}$

2) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

c) -3 no pertenece al dominio de f, no se puede evaluar la función en $x = -3$

Por lo tanto, en éste punto no se puede hacer el análisis.



CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Definición: $f(x)$ es continua en un intervalo (a,b) abierto, si y sólo si es continua para todo número de dicho intervalo.

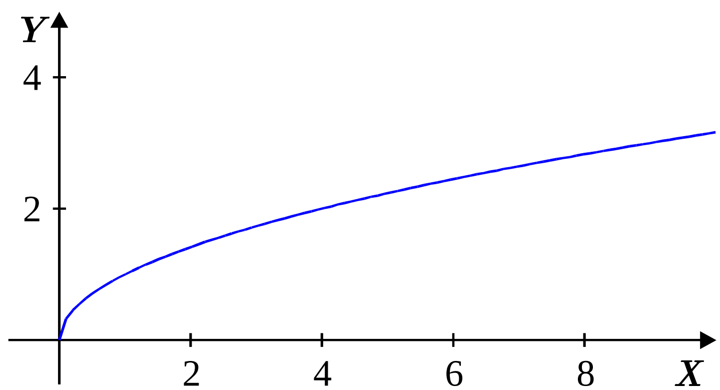
Definición: $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, si y sólo si es continua para todo número en el intervalo (a,b), y además es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

Definición: $f(x)$ es continua en un intervalo semicerrado $[a,b)$, si y sólo si es continua para todo número en el intervalo (a,b), y además es continua por la derecha en a.

Definición: $f(x)$ es continua en un intervalo semicerrado $(a.b]$, si y sólo si es continua para todo número en el intervalo (a,b), y además es continua por la izquierda en b.

EJEMPLO 1: Sea la función $f(x)=\sqrt{x}$, decir si es continua en los intervalos a) $(-\infty,\infty)$ b) $[0,\infty)$ c) $(-2,2)$.

Haciendo la gráfica:



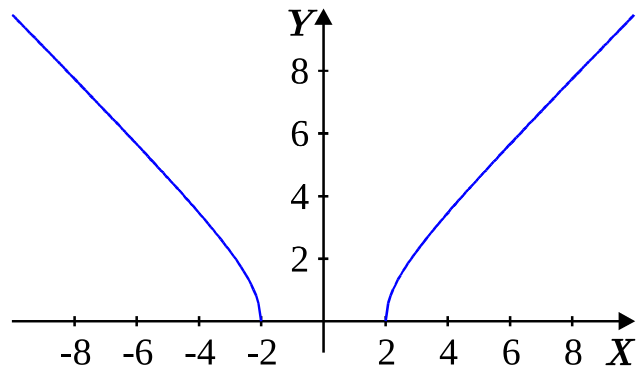
a) $f(x)$ no está definida en $(-\infty,0)$, por lo tanto, no podemos analizar la continuidad se analiza en los puntos del dominio.

b) $f(x)$ es continua en $[0,\infty)$ y además es continua en cero por la derecha, por lo tanto, $f(x)$ es continua en $[0,\infty)$.

c) $f(x)$ no está definida en $(-2,2)$, por lo tanto, no podemos analizar la continuidad se analiza en los puntos del dominio.

EJEMPLO 2: Sea la función $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, decir si es continua en los intervalos a) $(-\infty,2]$ b) $(-2,2)$ c) $(2,\infty)$.

Haciendo la gráfica:



El dominio de f es $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

a) $f(x)$ es continua en $(-\infty,-2)$, ahora verificamos si es continua por la izquierda en -2.

$$f(-2)=\sqrt{(-2)^2-4}=\sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\sqrt{(-2)^2-4}=\sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=f(-2)$$

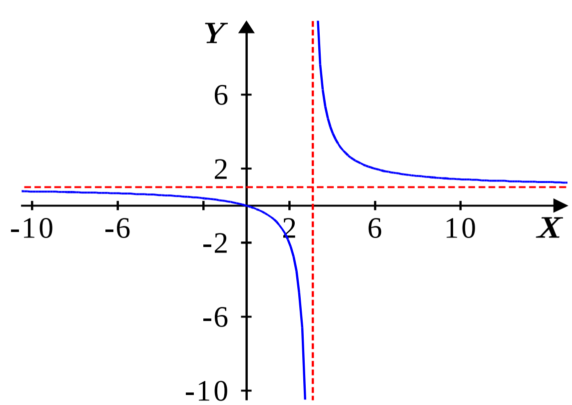
Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty,-2]$.

b) $f(x)$ no está definida en $(-2,2)$, por lo tanto, no podemos analizar la continuidad.

c) $f(x)$ es continua en $(2,\infty)$, ya que es continua para todo número de dicho intervalo.

EJEMPLO 3: Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, decir si es continua en los intervalos a) $(-\infty,\infty)$ b) $(3,\infty)$ c) $(-\infty,3]$

Haciendo la gráfica:



El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

a) $f(x)$ no esta definida en $x = 3$, por lo tanto, no podemos analizar la continuidad en $(-\infty, \infty)$.

b) $f(x)$ es continua en $(3, \infty)$, pues es continua para todo número de dicho intervalo.

c) $f(x)$ es continua en $(-\infty, 3)$, pero en 3 no está definida por la izquierda nos queda:

$$f(3) = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0} \qquad \text{no existe}$$

Por lo tanto, no podemos analizar la continuidad en $(-\infty, 3]$.

E J E R C I C I O S

1.- Decir si las funciones siguientes son continuas en los valores de x que se indican y hacer la gráfica.

a) $f(x)=\sqrt{x}$ para $x=0$, $x=-1$, $x=4$.

b) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ para $x=3$, $x=2$, $x=0$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ para $x=1$, $x=-1$, $x=2$.

d) $f(x)=\sqrt{1-x}$ para $x=0$, $x=2$, $x=1$.

e) $f(x)=\dfrac{x}{x+5}$ para $x=-5$, $x=0$, $x=-3$.

f) $f(x)=x^3-8$ para $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2$, $x=0$.

g) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ para $x=-1$, $x=2$.

2.- Decir en qué puntos las funciones siguientes no están definidas.

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+4x+3}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{x^3-27}$

d) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{2}{x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

g) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

h) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

3.- Decir si las funciones siguientes son continuas o discontinuas en los intervalos que se indica y hacer la gráficas.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ en $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,3]$, $[3,\infty)$.

b) $f(x)=\sqrt{3-x}$ en $(-\infty,3]$, $(-3,3)$, $(0,3]$.

c) $f(x)=x^2+2x-1$ en $(-\infty,\infty)$, $(-2,2)$, $(2,\infty)$.

d) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ en $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,3]$, $(3,\infty)$.

e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $(-\infty,0]$, $[-2,0)$, $(0,\infty)$.

f) $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-2x-8}$ en $(-2,6)$.

g) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ en $(0,4)$

INCREMENTOS

Si a la variable independiente x con un valor inicial x_1, se le da un valor final x_2, a la diferencia $x_2 - x_1$ se le llama incremento de la variable x.

Esto se denota usando la letra griega delta (Δ), que se antepone a la variable.

$\Delta x = x_2 - x_1$ **Nota:** Δ y x no se están multiplicando, Δx es un número

Si se registra un aumento de valor el incremento es positivo.

Ejemplo:

Obtener el valor del incremento de la variable x, con $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$.

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 9 - 4 = 5$ Incremento positivo.

Si se registra disminución de valor el incremento es negativo.

Ejemplo:

Obtener el valor del incremento de la variable x, con $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$.

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 0 - 3 = -3$ Incremento negativo.

Si no hay una diferencia de valor el incremento es nulo.

Ejemplo:

Obtener el valor del incremento de la variable x, con $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$.

$\Delta x = x_2 - x_1$

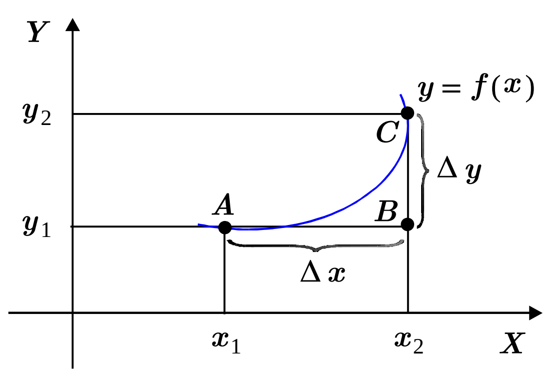
$\Delta x = 4 - 4 = 0$ Incremento nulo.

INCREMENTOS DE UNA FUNCIÓN

Si y está en función de x, tenemos $y = f(x)$, y cuando x recibe un incremento Δx, también de la función recibe un incremento Δy, que es: $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, donde $y_2 = f(x_2)$ y $y_1 = f(x_1)$.

Gráficamente se puede expresar como:

Sean los puntos $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ de una curva cuya ecuación es de la forma $y = f(x)$ y $B(x_2, y_1)$



Los incrementos de x y de y son:

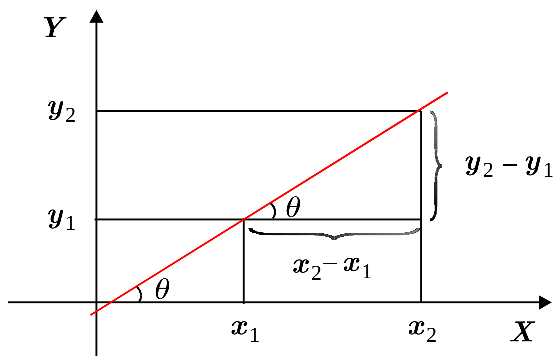
$$\Delta x = x_2 - x_1 = \overline{AB}$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = \overline{BC}$$

PENDIENTE Y RAZÓN DE CAMBIO

Recuérdese que la pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación y que la tangente de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$m = tg\theta = \frac{\text{cat. opt.}}{\text{cat. ady.}}$$

Sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en una recta.



La pendiente se obtendrá como:

$$m = tg\theta = \frac{\text{cat. opt.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces la pendiente se puede obtener como:

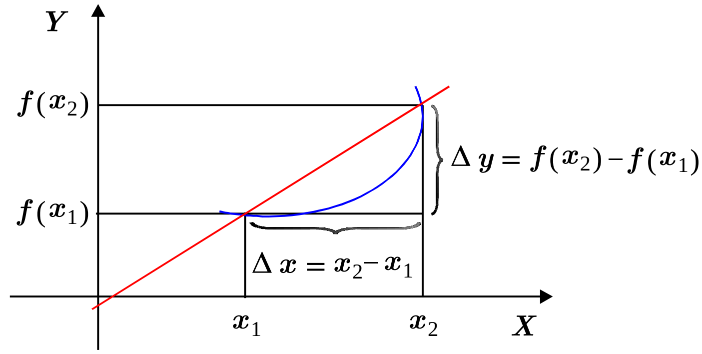
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Que es la razón de cambio de y con respecto a x, es decir, el valor numérico de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la razón de cambio de la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Si $y = f(x)$ entonces:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Que será la razón de cambio de una función y se estará obteniendo la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2).



Como $\quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad$ entonces $\quad x_2 = x_1 + \Delta x \quad$ y $\quad f(x_2) = f(x_1 + \Delta x_1)$

Por lo tanto, $\quad m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x}$

Si $\Delta x \to 0$, entonces el punto (x_2, y_2) se acerca al punto (x_1, y_1) y se obtendrá la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (x_1, y_1).

Esto se puede poner como un límite:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A éste limite se le llama la derivada de la función, y es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (x_1, y_1).

DEFINICIÓN:

La derivada de una función con respecto a la variable independiente x, es el límite cuando el $\Delta x \to 0$ del cociente $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ y se denota como:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La derivada de una función se puede expresar en cualquiera de las siguientes formas:

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{d}{dx} y, \quad f'(x), \quad y', \quad D_x y, \quad D_x f(x), \quad \dot{y}, \quad f(\dot{x}).$$

Todas ellas denotan la primera derivada de la función con respecto de x.

Las más usadas son las primeras cuatro.

Para obtener la derivada de una función aplicando la definición, podemos seguir los siguientes 4 pasos, al cual se le llama método de los cuatro pasos.

MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS

Partiendo de que se tiene una función $f(x)$.

Paso 1- Se evalúa $f(x)$ en $x+\Delta x$

$$f(x+\Delta x)$$

Paso 2- A la evaluación anterior se le resta $f(x)$

$$f(x+\Delta x)-f(x)$$

Paso 3- El resultado de la resta se divide entre Δx.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Paso 4- Se calcula el límite del cociente cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Si éste límite existe, entonces dicho limite es la derivada de la función.

EJEMPLO 1: Calcular la derivada de $f(x)=3x^2+4$.

1) $f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)^2+4$

$$=3\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)+4$$

$$=3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+4$$

2) $f(x+\Delta x)-f(x)=\left(3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+4\right)-\left(3x^2+4\right)=6x\Delta x+3(\Delta x)^2$

3) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=6x+3\Delta x$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}6x+3\Delta x=6x$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=3x^2+4$ es $6x$.

El resultado se puede expresar como:

$y'=6x$ $\quad f'(x)=6x$ $\quad \dfrac{d}{dx}\left(3x^2+4\right)=6x$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=6x$ $\quad \dfrac{d}{dx}f(x)=6x$

$D_x y=6x$ $\quad D_x f(x)=6x$ $\quad D_x\left(3x^2+4\right)=6x$

Que se leen como la derivada de $3x^2+4$ con respecto a x es igual a $6x$.

EJEMPLO 2: Calcular la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1) $f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$

2) $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\dfrac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\dfrac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}$

3) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}}{\Delta x}=\dfrac{-\Delta x}{\Delta x\left(x^2+x\Delta x\right)}=\dfrac{-1}{x^2+x\Delta x}$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\dfrac{-1}{x^2+x\Delta x}=-\dfrac{1}{x^2}$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

EJEMPLO 3: Calcular la derivada de $f(x)=c$, donde c es una constante.

1) $f(x+\Delta x)=c$

2) $f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$

3) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=c$ es $f'(x)=0$.

EJEMPLO 4: Calcular la derivada de $f(x)=x$.

1) $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$

2) $f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x$

3) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=x$ es $f'(x)=1$.

EJEMPLO 5: Calcular la derivada de $f(x) = mx + b$, donde m, b son constantes.

1) $f(x + \Delta x) = m(x + \Delta x) + b = mx + m\Delta x + b$

2) $f(x + \Delta x) - f(x) = mx + m\Delta x + b - (mx + b) = m\Delta x$

3) $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{m\Delta x}{\Delta x} = m$

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m = m$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$.

EJEMPLO 6: Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x-2}$.

1) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x - 2}$

2) $f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x-2}$

3) $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x-2}}{\Delta x}$

4)
$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x-2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x-2}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x-2}} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x - 2}\right)^2 - \left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x-2}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - 2 - (x-2)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x-2}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x-2}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x-2}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = \sqrt{x-2}$ es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$.

EJEMPLO 7: Calcular la derivada de $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

1) $$f(x+\Delta x)=\frac{2(x+\Delta x)+3}{x+\Delta x-1}=\frac{2x+2\Delta x+3}{x+\Delta x-1}$$

2)
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{2x+2\Delta x+3}{x+\Delta x-1}-\frac{2x+3}{x-1}=\frac{(2x+2\Delta x+3)(x-1)-(2x+3)(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2-2x+2x\Delta x-2\Delta x+3x-3-2x^2-2x\Delta x+2x-3x-3\Delta x+3}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$=\frac{-5\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{-5\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x}=\frac{-5\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)}=\frac{-5}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

4) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-5}{(x+\Delta x-1)(x-1)}=\frac{-5}{(x-1)(x-1)}=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ es $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$.

E J E R C I C I O S

Calcular la derivada de las siguientes funciones, aplicando el método de los 4 pasos.

1.- $f(x)=3x$

2.- $f(x)=-4x$

3.- $f(x)=\frac{5x}{3}$

4.- $f(x)=-x$

5.- $f(x)=-\frac{3}{2}x$

6.- $f(x)=3-5x$

7.- $f(x)=3x+2$

8.- $f(x)=x-5$

9.- $f(x)=\frac{x}{2}+3$

10.- $f(x)=\frac{4}{3}-5x$

11.- $f(x)=x^2-2$

12.- $f(x)=\frac{4}{x^2+2}$

13.- $f(x)=5x^2-x+2$

14.- $f(x)=x^2-3x+1$

15.- $f(x)=x^3-1$

16.- $f(x)=5x^3+x^2$

17.- $f(x)=-\frac{1}{x^3}$

18.- $f(x)=\frac{1}{3x^2+1}$

19.- $f(x)=\frac{x+2}{1-x^2}$

20.- $f(x)=3-x^2$

21.- $f(x)=\frac{2}{x}$

22.- $f(x)=\frac{x+4}{1-x}$

23.- $f(x)=\sqrt{4x-4}$

24.- $f(x)=\sqrt{4x^2-1}$

25.- $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

26.- $f(x)=\frac{1}{x^2}-x$

27.- $f(x)=\sqrt{x}-x$

28.- $f(x)=\sqrt{1-2x}$

29.- $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$

30.- $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$

31.- $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$

32.- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x}}$

33.- $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$

34.- $f(x)=\sqrt{x}$

35.- $f(x)=x^4$

36.- $f(x)=\frac{1+2x}{1-2x}$

37.- $f(x)=ax^2$

38.- $f(x)=cx^3$

39.- $f(x)=3x^3-2x+7$

FÓRMULAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

Derivar una función aplicando la definición (regla de los 4 pasos), puede resultar tedioso y monótono y en algunos casos poco práctico y difícil.

Normalmente la derivación se lleva a cabo aplicando fórmulas que se obtienen mediante la definición o regla general de los 4 pasos.

Las fórmulas son las siguientes:

1.- $\frac{d}{dx}c=0$ La derivada de una función constante, con respecto a x es cero.

Ejemplos:

a.- Si $f\left(x\right)=8$ $\rightarrow$ $f'(x)=0$

b.- Si $y=-5$ $\rightarrow$ $y'=0$

c.- Si $f\left(x\right)=\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $f'(x)=0$

d.- Si $f\left(x\right)=\sqrt{4}$ $\rightarrow$ $f'(x)=0$

e.- Si $y=4\pi$ $\rightarrow$ $y'=0$

2.- $\frac{d}{dx}x=1$ La derivada de la variable x con respecto de x es 1.

Ejemplo:

a.- Si $f\left(x\right)=x$ $\rightarrow$ $f'(x)=1$

b.- Si $y=x$ $\rightarrow$ $y'=1$

c.- Si $y=x$ $\rightarrow$ $\frac{d}{dx}x=1$

3.- $\frac{d}{dx}u\pm v\pm w=\frac{d}{dx}u\pm\frac{d}{dx}v\pm\frac{d}{dx}w$ donde u,v y w son funciones de x.

La derivada de la suma o resta de funciones con respecto de x, es igual a la suma o resta de sus derivadas.

Ejemplos:

a.- Si $f\left(x\right)=x-5$ $\rightarrow$ $f'(x)=\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}5=1$

b.- Si $y=x+2$ $\rightarrow$ $y'=\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}2=1$

4.- $\frac{d}{dx}cu=c\frac{d}{dx}u$ donde c es una constante y u es función de x.

La derivada del producto de una constante por una función con respecto de x, es igual a la constante por la derivada de la función.

Ejemplos:

a.- Si $f\left(x\right)=3x+5$ $\rightarrow$ $f'(x)=\frac{d}{dx}3x+\frac{d}{dx}5$

$$=3\bullet\frac{d}{dx}x+0$$
$$=3\left(1\right)$$
$$=3$$

b.- Si $y=\frac{3x}{4}$ $\rightarrow$ $y'=\frac{3}{4}\bullet\frac{d}{dx}x$

$$=\frac{3}{4}\left(1\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

c.- Si $y=\frac{x}{2}-6x-2$ $\rightarrow$ $y'=\frac{d}{dx}\frac{x}{2}-\frac{d}{dx}6x-\frac{d}{dx}2$

$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{d}{dx}x-6\bullet\frac{d}{dx}x-0$$
$$=\frac{1}{2}\left(1\right)-6\left(1\right)$$
$$=\frac{1}{2}-6=-\frac{11}{2}$$

5.- $\frac{d}{dx}uv=u\frac{d}{dx}v+v\frac{d}{dx}u$

La derivada del producto de dos funciones con respecto de x, es igual a la primera función por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función.

Ejemplos:

a.- Si $f\left(x\right)=\left(3-x\right)\left(2+x\right)$, hallar la derivada de $f\left(x\right)$

Decimos que $u=3-x$ y $v=2+x$ y sustituimos el valor de u y v en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\underset{\substack{u\\1^{o}}}{\left(3-x\right)}\underset{\substack{v\\2^{o}}}{\left(2+x\right)}=\underset{\substack{u\\1^{o}}}{\left(3-x\right)}\bullet\frac{d}{dx}\underset{\substack{v\\2^{o}}}{\left(2+x\right)}+\underset{\substack{v\\2^{o}}}{\left(2+x\right)}\bullet\frac{d}{dx}\underset{\substack{u\\1^{o}}}{\left(3-x\right)}$$

$$=\left(3-x\right)\left[\frac{d}{dx}2+\frac{d}{dx}x\right]+\left(2+x\right)\left[\frac{d}{dx}3-\frac{d}{dx}x\right]$$
$$=\left(3-x\right)\left[0+1\right]+\left(2+x\right)\left[0-1\right]$$
$$=\left(3-x\right)+\left(-2-x\right)$$
$$=3-x-2-x$$
$$=1-2x$$

b.- Si $f(x)=(2x-1)(3x+2)$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u=2x-1$ y $v=3x+2$ y sustituimos el valor de u y v en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\underset{\substack{u\\1^{\text{o}}}}{(2x-1)}\underset{\substack{v\\2^{\text{o}}}}{(3x+2)}=\underset{\substack{u\\1^{\text{o}}}}{(2x-1)}\bullet\frac{d}{dx}\underset{\substack{v\\2^{\text{o}}}}{(3x+2)}+\underset{\substack{v\\2^{\text{o}}}}{(3x+2)}\bullet\frac{d}{dx}\underset{\substack{u\\1^{\text{o}}}}{(2x-1)}$$

$$\begin{aligned}
&=(2x-1)\left[\frac{d}{dx}3x+\frac{d}{dx}2\right]+(3x+2)\left[\frac{d}{dx}2x-\frac{d}{dx}1\right]\\
&=(2x-1)\left[3\bullet\frac{d}{dx}x+0\right]+(3x+2)\left[2\bullet\frac{d}{dx}x\right]\\
&=(2x-1)\left[3(1)\right]+(3x+2)\left[2(1)\right]\\
&=(6x-3)+(6x+4)\\
&=12x+1
\end{aligned}$$

6.- $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ donde n es una constante.

La derivada de la variable independiente elevada a una potencia n, es igual al producto de la potencia n por la variable elevada a la potencia n disminuida en uno.

Ejemplos:

a.- Si $f(x)=x^5$ $\rightarrow$ $f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$

b.- Si $f(x)=x^{-7}$ $\rightarrow$ $f'(x)=-7x^{-7-1}=-7x^{-8}=-\frac{7}{x^8}$

c.- Si $f(x)=x^{2/5}$ $\rightarrow$ $f'(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

Recuérdese que $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

7.- $\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$ donde n es una constante.

La derivada de una función elevada a un exponente con respecto de x, es igual al producto del exponente por la función elevada a ese exponente reducido en uno por la derivada de la función.

Ejemplos:

a.- Si $f(x)=x^3$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = x$ y $n = 3$ y sustituimos el valor de u y n en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^{3-1} \bullet \frac{d}{dx}x = 3x^2(1)$$
$$= 3x^2$$

b.- Si $f(x) = 5x^2 - 3x$, hallar la derivada de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}5x^2 - 3x = \frac{d}{dx}5x^2 - \frac{d}{dx}3x$$
$$= 5 \bullet \frac{d}{dx}x^2 - 3 \bullet \frac{d}{dx}x$$
$$= 5\left(2x^{2-1}\frac{d}{dx}x\right) - 3(1)$$
$$= 5(2x(1)) - 3$$
$$= 10x - 3$$

c.- Si $f(x) = (3x+2)^5$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = 3x+2$ y $n = 5$ y sustituimos el valor de u y n en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}(3x+2)^5 = 5(3x+2)^{5-1} \bullet \frac{d}{dx}(3x+2)$$
$$= 5(3x+2)^4\left[\frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}2\right]$$
$$= 5(3x+2)^4\left[3 \bullet \frac{d}{dx}x\right]$$
$$= 5(3x+2)^4\left[3(1)\right]$$
$$= 15(3x+2)^4$$

d.- Si $f(x) = (5x-3)^{-4}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = 5x-3$ y $n = -4$ y sustituimos el valor de u y n en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}(5x-3)^{-4} = -4(5x-3)^{-4-1} \bullet \frac{d}{dx}(5x-3)$$
$$= -4(5x-3)^{-5}\left[\frac{d}{dx}5x - \frac{d}{dx}3\right]$$
$$= -4(5x-3)^{-5}\left[5 \bullet \frac{d}{dx}x\right]$$
$$= -4(5x-3)^{-5}\left[5(1)\right]$$

$$= \frac{-20}{(5x-3)^5}$$

e.- Si $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$, hallar la derivada de $f(x)$

Recuérdese que $\sqrt{a} = a^{1/2}$, entonces $\sqrt{x^2+2x} = (x^2+2x)^{1/2}$

Decimos que $u = x^2+2x$ y $n = \frac{1}{2}$ y sustituimos el valor de u y n en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+2x)^{\frac{1}{2}-1} \bullet \frac{d}{dx}(x^2+2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}\left[2x^{2-1} \bullet \frac{d}{dx}x + 2 \bullet \frac{d}{dx}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}\left[2x(1)+2(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}\left[2x+2\right]$$

Recuérdese que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, entonces $(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(x^2+2x)^{1/2}}$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x)^{1/2}}\left[2x+2\right]$$

$$= \frac{2x+2}{2(x^2+2x)^{1/2}}$$

$$= \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}$$

8.- $\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al cociente del producto del denominador por la derivada del numerador menos el producto del numerador por la derivada del denominador todo entre el cuadrado del denominador.

Ejemplos:

a.- Si $f(x) = \frac{x^3}{4x-1}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = x^3$ y $v = 4x - 1$ y sustituimos el valor de u y v en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\frac{x^3}{(4x-1)} = \frac{(4x-1)\bullet \frac{d}{dx}x^3 - x^3 \bullet \frac{d}{dx}(4x-1)}{(4x-1)^2}$$

$$= \frac{(4x-1)(3x^2) - x^3(4(1)-0)}{(4x-1)^2}$$

$$= \frac{12x^3 - 3x^2 - 4x^3}{(4x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^3 - 3x^2}{(4x-1)^2}$$

b.- Si $f(x) = \frac{2-x}{1+2x^2}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = 2 - x$ y $v = 1 + 2x^2$ y sustituimos el valor de u y v en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\frac{2-x}{1+2x^2} = \frac{(1+2x^2)\bullet \frac{d}{dx}(2-x) - (2-x)\bullet \frac{d}{dx}(1+2x^2)}{(1+2x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\left[\frac{d}{dx}2 - \frac{d}{dx}x\right] - (2-x)\left[\frac{d}{dx}1 + 2x^2\right]}{(1+2x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+2x^2)[0-1] - (2-x)[0+4x]}{(1+2x^2)^2}$$

$$= \frac{-1 - 2x^2 - 8x + 4x^2}{(1+2x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 8x - 1}{(1+2x^2)^2}$$

c.- Si $f(x) = \frac{3x+2}{8}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = 3x + 2$ y $c = 8$ y sustituimos el valor de u y c en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\frac{3x+2}{8} = \frac{\frac{d}{dx}3x+2}{8}$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}2}{8} = \frac{3\frac{d}{dx}x + 0}{8} = \frac{3(1)}{8} = \frac{3}{8}$$

d.- Si $f(x)=\dfrac{\left(3x^2+5x\right)^4}{6}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u=\left(3x^2+5x\right)^4$ y $c=6$ y sustituimos el valor de u y c en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\frac{\left(3x^2+5x\right)^4}{6}=\frac{\frac{d}{dx}\left(3x^2+5x\right)^4}{6}$$

$$=\frac{4\left(3x^2+5x\right)^{4-1}\frac{d}{dx}\left(3x^2+5x\right)}{6}$$

$$=\frac{4\left(3x^2+5x\right)^3\left[\frac{d}{dx}3x^2+\frac{d}{dx}5x\right]}{6}$$

$$=\frac{4\left(3x^2+5x\right)^3\left[6x+5\right]}{6}$$

$$=\frac{2\left(3x^2+5x\right)^3\left[6x+5\right]}{3}$$

e.- Si $f(x)=\dfrac{4}{3x^4}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $v=3x^4$ y $c=4$ y sustituimos el valor de v y c en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\frac{4}{3x^4}=\frac{-4\frac{d}{dx}3x^4}{\left(3x^4\right)^2}$$

$$=\frac{-4\left(12x^3\right)}{9x^8}=-\frac{16}{3x^5}$$

f.- Si $f(x)=\dfrac{5}{x^3+2x}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $v=x^3+2x$ y $c=5$ y sustituimos el valor de v y c en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\frac{5}{x^3+2x}=\frac{-5\frac{d}{dx}\left(x^3+2x\right)}{\left(x^3+2x\right)^2}$$

$$=\frac{-5\left[\frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}2x\right]}{\left(x^3+2x\right)^2}=-\frac{5\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^2}$$

9.- $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{2\sqrt{u}}$

La derivada del la raíz cuadrada de una función, es igual al cociente de la derivada de la función entre dos veces la raíz de la función.

a.- Si $f(x) = \sqrt{x}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = x$ y sustituimos el valor de u en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\frac{d}{dx}x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b.- Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = x^2 - 1$ y sustituimos el valor de u en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 - 1\right)}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}1}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

10.- $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

La derivada del la raíz n-ésima de una función, es igual al cociente de la derivada de la función entre n veces la raíz n-ésima de la función elevada a la potencia n-1.

a.- Si $f(x) = \sqrt[4]{3x^2}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u = 3x^2$ y $n = 4$ y sustituimos el valor de u y n en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[4]{3x^2} = \frac{\frac{d}{dx}3x^2}{4\sqrt[4]{\left(3x^2\right)^{4-1}}} = \frac{6x}{4\sqrt[4]{\left(3x^2\right)^3}} = \frac{3x}{2\sqrt[4]{\left(3x^2\right)^3}}$$

b.- Si $f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)^3}$, hallar la derivada de $f(x)$

Decimos que $u=(x^2+1)^3$ y $n=5$ y sustituimos el valor de u y n en la fórmula.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{(x^2+1)^3}=\frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)^3}{5\sqrt[5]{\left((x^2+1)^3\right)^{5-1}}}$$

$$=\frac{3(x^2+1)^2\frac{d}{dx}(x^2+1)}{5\sqrt[5]{\left((x^2+1)^3\right)^4}}$$

$$=\frac{3(x^2+1)^2\,2x}{5\sqrt[5]{(x^2+1)^{12}}}$$

$$=\frac{6x(x^2+1)^2}{5\sqrt[5]{(x^2+1)^{12}}}$$

RESUMEN DE FÓRMULAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

Donde c y n son constantes y u, v y w son funciones de x.

1.- $\frac{d}{dx}c = 0$ derivada de puna constante.

2.- $\frac{d}{dx}x = 1$ derivada de la variable x.

3.- $\frac{d}{dx}u \pm v \pm w = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v \pm \frac{d}{dx}w$ derivada de una suma o resta de funciones.

4.- $\frac{d}{dx}cu = c\frac{d}{dx}u$ derivada del producto de una constante y una función.

5.- $\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$ derivada del producto de dos funciones.

6.- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ derivada de la potencia de la variable independiente.

7.- $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$ derivada de la potencia de una función.

8.- $\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$ derivada del cociente de dos funciones.

9.- $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{2\sqrt{u}}$ derivada de la raíz cuadrada de una función.

10.- $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ derivada de la raíz n-ésima de una función.

Debemos de tener en cuenta que cada fórmula solo sirve para derivar una sola operación y debemos aprender a identificar en una función cual es la última operación en la aplicación de las operaciones, porque es ésta última operación la primera que se deriva.

Ejemplos:

a) Si en $f(x) = \left(3x^2 + 2\right)^5$ queremos hallar cuánto vale la función si $x = 2$, tendremos que realizar las siguientes operaciones, en éste orden, por la jerarquía de operaciones:

1.- Elevar al cuadrado.
2.- multiplicar por tres.
3.- sumarle dos.
4.- elevar a la quinta potencia.

Estas operaciones las podemos poner como sigue:

x^2, (3), $+2$, $(\ )^5$

Este sería el orden de aplicación o por jerarquía de operaciones y elevar a la quinta potencia sería la última operación, para derivar se empieza por ésta ultima operación de aplicación, que es elevar a la quinta potencia.

Esto quiere decir, que debemos de usar la fórmula 7 para derivar exponente de una función.

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$$

$$f(x) = \left(3x^2+2\right)^5$$

Decimos que $u = 3x^2 + 2$ y $n = 5$

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2+2\right)^5 = 5\left(3x^2+2\right)^4 \frac{d}{dx}3x^2+2$$

Lo que se acaba de hacer es derivar la función elevada a la quinta potencia, pero no hemos terminado de derivar, pues se tienen que derivar todas las operaciones involucradas en la función inicial.

Puesto que ya se derivó la potencia quinta, ahora la operación que sigue sería la suma, que es la penúltima en el orden de aplicación de operaciones.

$$= 5\left(3x^2+2\right)^4\left[\frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}2\right]$$

Hasta aquí hemos derivado la potencia a la quinta y la suma, la operación que sigue sería el producto por tres que es la antepenúltima operación en el orden de aplicación de operaciones.

$$= 5\left(3x^2+2\right)^4\left[3\frac{d}{dx}x^2\right]$$ La derivada de dos es cero.

La única operación que nos queda por derivar es el exponente dos.

$$= 5\left(3x^2+2\right)^4\left[3 \bullet 2x\right]$$

El resultado de la derivada de la función sería:

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2+2\right)^5 = 30x\left(3x^2+2\right)^4$$

Con lo anterior podemos decir, que para derivar una función, se debe de hacer exactamente en el orden contrario al orden de aplicación o jerarquía de operaciones de la función.

En la función $f(x)=\left(3x^2+2\right)^5$ el orden de aplicación de las operaciones es:

x^2, (3), $+2$, $(\ )^5$, Para derivar es $(\ )^5$, $+2$, (3), x^2.

b) En $y=5x^2-3x$ la última operación es la resta:

Para derivar se empieza por la resta, luego el producto por 5, luego el producto por 3 y al último el cuadrado, entonces para derivar:

$y=5x^2-3x$	Función original.
$\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}5x^2-\frac{d}{dx}3x$	Derivada de la resta.
$=5\frac{d}{dx}x^2-3\frac{d}{dx}x$	Derivada por 5 y por 3.
$=5\bullet 2x-3$	Derivada del cuadrado.
$\frac{d}{dx}y=10x-3$	Resultado.

c) En $y=(x+3)(x+2)$ la última operación es el producto de dos funciones.

Para derivar se empieza por el producto, luego la suma con 3 y luego la suma con dos:

La primera operación para derivar es el producto, como se trata funciones entonces se utiliza la fórmula 5, que es:

$$\frac{d}{dx}uv=u\frac{d}{dx}v+v\frac{d}{dx}u$$

$$y=(x+3)(x+2)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}y&=(x+3)\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)\frac{d}{dx}(x+3)\\&=(x+3)\left[\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}2\right]+(x+2)\left[\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}3\right]\\&=(x+3)(1+0)+(x+2)(1+0)\\&=(x+3)+(x+2)\\&=2x+5\end{aligned}$$

También debemos tener en cuenta que podemos hacer operaciones algebraicas antes de empezar a derivar, a la mitad de una derivada o al terminar la derivada, esto con el fin de poder simplificar la derivada.

En el ejemplo anterior $y=(x+3)(x+2)$ podemos realizar el producto de los binomios antes de empezar a derivar, nos quedaría:

$$\begin{aligned} y &= (x+3)(x+2) \\ &= x^2+2x+3x+6 \\ y &= x^2+5x+6 \end{aligned}$$

Que es más fácil de derivar y quedaría como:

$$y = x^2+5x+6$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}5x + \frac{d}{dx}6$$

$$\frac{d}{dx}y = 2x + 5\frac{d}{dx}x + 0$$

$$= 2x+5$$

d) Para $y=\sqrt{x^2+2x}$ poner el orden operaciones de aplicación, de derivación y derivar.

De aplicación

Se eleva x al cuadrado, se multiplica x por 2, se suman los dos valores anteriores, se saca la raíz de la suma.

De derivación $\sqrt{\ }$, $+$, (2), x^2

La raíz es la primera operación que se deriva, entonces utilizamos la fórmula 9.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{\frac{d}{dx}u}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+2x\right)}{2\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

e) Para $y=x^2(2x+1)$ poner el orden de operaciones de aplicación, de derivación y derivar.

En éste caso es más fácil multiplicar primero.

$$y = 2x^3 + x^2$$

De aplicación , el valor de x se eleva al cubo, se multiplica por 2 el valor anterior, el valor de x se eleva al cuadrado, se suman los dos valores anteriores.

De derivación $+$, (2), x^3, x^2

La suma es la primera operación que se deriva, entonces utilizamos la fórmula 3.

$$\frac{d}{dx}u \pm v \pm w = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v \pm \frac{d}{dx}w$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}2x^3 + \frac{d}{dx}x^2$$

$$= 2\frac{d}{dx}x^3 + 2x$$

$$= 2 \bullet 3x^2 + 2x$$

$$= 6x^2 + 2x$$

E J E R C I C I O S

Para las siguientes funciones, poner el orden de operaciones para derivar y hallar la derivada aplicando las fórmulas.

1.- $y=3x$

2.- $y=8-x^2$

3.- $y=\left(4x+1\right)^2$

4.- $y=\dfrac{x^3}{3}$

5.- $y=\sqrt{1+x^2}$

6.- $y=1-2x^3$

7.- $y=\dfrac{x+2}{x}$

8.- $y=\dfrac{3}{x^2-1}$

9.- $y=\dfrac{1}{x^2}$

10.- $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

11.- $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3}$

12.- $y=\dfrac{2x+1}{5}$

13.- $y=\left(x^2+3\right)\left(4x^2-5\right)$

14.- $y=\left(x-5\right)^4\left(x+3\right)^5$

15.- $y=\left(x-1\right)\sqrt{x}$

16.- $y=\dfrac{x^3-3}{5-x^2}$

17.- $y=\dfrac{5x}{\left(5-2x\right)^3}$

18.- $y=\dfrac{\left(3x^2+6\right)^3}{2x-3}$

19.- $y=\dfrac{2}{\left(x^3+5\right)^5}$

20.- $y=\sqrt[5]{6x^2-5}$

21.- $y=\sqrt[4]{\left(4+3x\right)^2}$

22.- $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$

23.- $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

24.- $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

25.- $y=\sqrt{6}$

26.- $y=-\dfrac{2x}{7}+1$

27.- $y=3x^2-x+5$

28.- $y=x^2-5x+3$

29.- $y=2x^2-8x+5$

30.- $y=x^3-x$

31.- $y=\left(4-x^2\right)\left(3+x^3\right)$

32.- $y=9\left(x^6-3\right)$

33.- $y=3x^7$

34.- $y=3x^4-6x^3+4x^2-8x+6$

35.- $y=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2}}$

36.- $y=\sqrt[5]{x^3}$

37.- $y=\sqrt[3]{x^5}$

38.- $y=\dfrac{x^4}{5}$

39.- $y=\dfrac{x^3+1}{x}$

40.- $y=\dfrac{x}{x^4+x^3}$

41.- $y=\dfrac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}$

42.- $y=6x^{4/3}+3x^{3/2}$

43.- $y=\dfrac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}-\dfrac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}$

44.- $y=\sqrt{3-x^4}$

45.- $y=\left(3x^2+2\right)\sqrt{1+5x^2}$

46.- $y=3x^4+2x^2+8$

47.- $y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$

48.- $y=2x^{3/4}+4x^{-1/4}$

49.- $y=\sqrt[3]{4-9x}$

50.- $y=\sqrt{2x}+\sqrt[3]{3x}$

51.- $y=\left(x^{-2}-x\right)^{-3}$

52.- $y=(-2x)^{-1/3}+(2x)^{2/3}$

53.- $y=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$

54.- $y=\dfrac{x^2+2}{2-x^2}$

55.- $y=\dfrac{\sqrt{5-2x}}{2x+1}$

56.- $y=x^2\sqrt{1-4x}$

57.- $y=\sqrt[5]{3x^5-1}$

58.- $y=\sqrt{x-1}\sqrt[3]{6x+2}$

59.- $y=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{4}$

60.- $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x^{3/5}+\dfrac{1}{x^2}$

61.- $y=\left(x^2-4x+1\right)^{-3}$

62.- $y=x^3\sqrt{3-4x}$

63.- $y=\dfrac{\sqrt{2x+7}}{\sqrt{1-2x}}$

64.- $y=\left(\sqrt{2x+1}-x^2\right)^{-1}$

65.- $y=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^3$

66.- $y=\left(\dfrac{3x-9}{2x+4}\right)^3$

67.- $y=\left(x^2+3x\right)^{-5}$

68.- $y=\left(4x^2-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$

69.- $y=5\sqrt{x}+5\sqrt{x}$

70.- $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$

DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Aparte de las funciones algebraicas existen también las funciones logarítmicas, las exponenciales y las trigonométricas, las cuales son llamadas funciones trascendentes.

Para derivar éstas funciones, al igual que las algebraicas, se ocupan fórmulas, las cuales se obtienen aplicando la definición o método de los cuatro pasos.

Las fórmulas se aplican igual que las algebraicas, tomando en cuenta el orden de aplicación de las operaciones en sentido inverso.

Las fórmulas son las siguientes:

Donde u es función de x y a es constante.

13.- $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{d}{dx}u$ La derivada de la función exponencial elevado a una función, es igual a la función exponencial elevada a la función, todo multiplicado por la derivada de la función.

14.- $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx}u$ La derivada de la función exponencial con base a elevada a una función, es igual a la función exponencial con base a elevada a la función, todo multiplicado por el logaritmo natural de a, por la derivada de la función.

15.- $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$ La derivada del logaritmo natural de una función, es igual a la derivada de la función entre la función.

16.- $\frac{d}{dx}\log u = \frac{\log e}{u}\frac{d}{dx}u$ La derivada del logaritmo base 10 de una función, es igual al logaritmo base 10 del número e entre la función, todo multiplicado por la derivada de la función.

17.- $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{d}{dx}u$ La derivada del seno de una función, es igual al coseno de la función por la derivada de la función.

18.- $\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{d}{dx}u$ La derivada del coseno de una función, es igual a menos el seno de la función por la derivada de la función.

19.- $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{d}{dx}u$ La derivada de la tangente de una función, es igual al cuadrado de la secante de la función por la derivada de la función.

20.- $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{d}{dx}u$ La derivada de la cotangente de una función, es igual a menos el cuadrado de la cosecante de la función por la derivada de la función.

21.- $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \bullet \tan u \frac{d}{dx}u$ La derivada de la secante de una función, es igual a la secante de la función por la tangente de la función por la derivada de la función.

22.- $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \bullet \mathrm{ctg} u \frac{d}{dx}u$ La derivada de la cosecante de una función, es igual a menos la cosecante de la función por la cotangente de la función por la derivada de la función.

23.- $\frac{d}{dx}\mathrm{arcsen} u = \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$ La derivada del arco seno de una función, es igual a la derivada de la función entre la raíz de uno menos el cuadrado de la función.

24.- $\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$ La derivada del arco coseno de una función, es igual a menos la derivada de la función entre la raíz de uno menos el cuadrado de la función.

25.- $\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$ La derivada de la arco tangente de una función, es igual a la derivada de la función entre uno mas el cuadrado de la función.

26.- $\frac{d}{dx}\mathrm{arc}\cot u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$ La derivada de la arco cotangente de una función, es igual a menos la derivada de la función entre uno mas el cuadrado de la función.

27.- $\frac{d}{dx}\mathrm{arc}\sec u = \frac{\frac{d}{dx}u}{u\sqrt{u^2-1}}$ La derivada de la arco secante de una función, es igual a la derivada de la función entre la función multiplicada por la raíz descuadrado de la función menos uno.

28.- $\frac{d}{dx}\mathrm{arc}\csc u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{u\sqrt{u^2-1}}$ La derivada de la arco cosecante de una función, es igual a menos la derivada de la función entre la función multiplicada por la raíz del cuadrado de la función menos uno.

EJEMPLOS:

Derivada de funciones exponenciales.

a) Derivar $y = e^{2x}$

Decimos que $u = 2x$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{d}{dx} u$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{2x} &= e^{2x} \frac{d}{dx} 2x \\ &= e^{2x}(2) \\ &= 2e^{2x}\end{aligned}$$

b) Derivar $y = 10^{4x}$

Decimos que $a = 10$, $u = 4x$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx} u$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} 10^{4x} &= 10^{4x} \ln 10 \frac{d}{dx} 4x \\ &= 10^{4x}(\ln 10)(4) \\ &= 4(10^{4x})(\ln 10)\end{aligned}$$

c) Derivar $y = e^{t^2}$

Decimos que $u = t^2$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{d}{dx} u$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} e^{t^2} &= e^{t^2} \frac{d}{dt} t^2 \\ &= e^{t^2}(2t) \\ &= 2te^{t^2}\end{aligned}$$

Nota: no solo podemos derivar una función con respecto a x, también con respecto de otra variable, en éste caso la variable independiente es t y no x. Es cuestión de cómo se nombre a la función y a la variable independiente.

Por ejemplo: $A = 2\pi r^2$ en éste caso A es la función y r es la variable independiente, y si se quiere derivar la función A, se deriva con respecto de r.

$$\frac{d}{dr} A = 2\pi \frac{d}{dr} r^2 = 2\pi(2r) = 4\pi r$$

d) Derivar $y = 2^{x^3}$

Decimos que $a = 2$ y $u = x^3$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx}u$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}2^{x^3} &= 2^{x^3} \ln 2 \frac{d}{dx}x^3 \\ &= 2^{x^3}(\ln 2)(3x^2) \\ &= 3x^2 2^{x^3} \ln 2\end{aligned}$$

e) Derivar $y = e^{\sqrt{x}}$

Decimos que $u = \sqrt{x}$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{d}{dx}u$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\sqrt{x}} &= e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dt}\sqrt{x} \\ &= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

f) Derivar $y = 5^{\sqrt[3]{x}}$

Decimos que $a = 5$ y $u = \sqrt[3]{x}$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx}u$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}5^{\sqrt[3]{x}} &= 5^{\sqrt[3]{x}} \ln 5 \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} \\ &= 5^{\sqrt[3]{x}} \ln 5 \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{5^{\sqrt[3]{x}} \ln 5}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}$$

g) Derivar $y = \frac{3}{e^{x^2}}$

La última operación es la división, el numerador es constante y el denominador es una función, entonces $c = 3$ y $v = e^{x^2}$ las cuales sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}\frac{c}{v} = \frac{-c\frac{d}{dx}v}{v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{3}{e^{x^2}} &= \frac{-3\frac{d}{dx}e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{-3\left[e^{x^2}\frac{d}{dx}x^2\right]}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{-3e^{x^2}(2x)}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{-6x}{e^{x^2}}\end{aligned}$$

Derivada de funciones logarítmicas.

a) Derivar $y = \ln\sqrt{x}$

Decimos que $u = \sqrt{x}$ y sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{\frac{d}{dx}u}{u}$

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x} = \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

b) Derivar $y = \log\sqrt[3]{x}$

Decimos que $u = \sqrt[3]{x}$ y sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx}\log u = \dfrac{\log e}{u}\dfrac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}\log\sqrt[3]{x} = \frac{\log e}{\sqrt[3]{x}}\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}$$

$$= \frac{\log e}{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\log e}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}} = \frac{\log e}{3\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\log e}{3x}$$

c) Derivar $y = \ln x^3$

Decimos que $u = x^3$ y sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{\frac{d}{dx}u}{u}$

$$\frac{d}{dx}\ln x^3 = \frac{\frac{d}{dx}x^3}{x^3}$$

$$= \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

d) Derivar $y = \log x^5$

Decimos que $u = x^5$ y sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx}\log u = \dfrac{\log e}{u}\dfrac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}\log x^5 = \frac{\log e}{x^5}\frac{d}{dx}x^5$$

$$= \frac{\log e}{x^5}5x^4$$

$$= \frac{5x^4\log e}{x^5}$$

$$= \frac{5\log e}{x}$$

e) Derivar $y = \ln\sqrt{x^2+1}$

Decimos que $u = \sqrt{x^2+1}$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x^2+1} = \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{\frac{d}{dx}x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}$$

f) Derivar $y = \log(3x-1)^5$

Decimos que $u = (3x-1)^5$ y sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}\log u = \frac{\log e}{u}\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}\log(3x-1)^5 = \frac{\log e}{(3x-1)^5}\frac{d}{dx}(3x-1)^5$$

$$= \frac{\log e}{(3x-1)^5}5(3x-1)^4 = \frac{5\log e}{3x-1}$$

Se debe observar que en las fórmulas se necesita la derivada de u, que es una función de x, entonces se puede derivar u y después sustituir en la fórmula u y la derivada de u al mismo tiempo.

A esto se le llama función compuesta o función de función y existe una fórmula para derivar una función de función que es la siguiente:

29.- $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y \bullet \frac{d}{dx}u$ La derivada de la función y con respecto de x, es igual a la derivada de y con respecto de u, multiplicada por la derivada de u con respecto a x.

A ésta fórmula se le llama **REGLA DE LA CADENA.**

g) Derivar $y = \ln(5x^2-1)$ para aplicar la regla de la cadena decimos que $u = (5x^2-1)$, entonces nos queda $y = \ln u$ y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u = 5x^2+1 \qquad \frac{d}{dx}u = 10x$$

$$y = \ln u \qquad \frac{d}{du}y = \frac{1}{u} = \frac{1}{5x^2+1}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y \bullet \frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{5x^2+1}\bullet 10x = \frac{10x}{5x^2+1}$$ Que es la derivada buscada.

h) Derivar $y=\ln(5x-1)^2$

Decimos que $u=(5x+1)^2$, entonces nos queda $y=\ln u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u=(5x+1)^2 \qquad \frac{d}{dx}u=2(5x+1)5=10(5x+1)$$

$$y=\ln u \qquad \frac{d}{du}y=\frac{1}{u}=\frac{1}{(5x+1)^2}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y=\frac{d}{du}y\bullet\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=\frac{1}{(5x+1)^2}10(5x+1)$$

$$\frac{d}{dx}y=\frac{10}{5x+1}$$ Que es la derivada buscada.

i) Derivar $y=x^2\ln x$

La ultima operación es el producto de dos funciones, decimos que $u=x^2$ y $v=\ln x$, y como en la fórmula del producto de dos funciones se necesitan las derivadas de u y v.

$$u=x^2 \qquad \frac{d}{dx}u=2x$$

$$v=\ln x \qquad \frac{d}{dx}v=\frac{1}{x}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}uv=u\frac{d}{dx}v+v\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=x^2\frac{1}{x}+(\ln x)(2x)$$
$$=x+2x\ln x=x(1+2\ln x)$$

j) Derivar $y=\log\frac{4}{x}$

Decimos que $u=\frac{4}{x}$, entonces nos queda $y=\log u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u=\frac{4}{x} \qquad \frac{d}{dx}u=\frac{-4}{x^2}$$

$$y=\log u \qquad \frac{d}{du}y=\frac{\log e}{u}=\frac{\log e}{\frac{4}{x}}=\frac{x\log e}{4}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y=\frac{d}{du}y\bullet\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=\frac{x\log e}{4}\left(\frac{-4}{x^2}\right)=-\frac{\log e}{x}$$

k) Derivar $y=\ln\left(5x\sqrt{3x-1}\right)$

En la derivada de las funciones logarítmicas podemos aplicar las propiedades de los logaritmos antes de comenzar a derivar, esto con el objeto de simplificar la función y que sea más fácil derivar.

Las propiedades de los logaritmos son:

1.- $\log A\bullet B=\log A+\log B$

2.- $\log\dfrac{A}{B}=\log A-\log B$

3.- $\log A^n=n\bullet\log A$

4.- $\log\sqrt[n]{A}=\dfrac{1}{n}\log A$

Aplicando las propiedades tenemos:

$$y=\ln\left(5x\sqrt{3x-1}\right)$$
$$y=\ln 5x+\ln\sqrt{3x+1}$$
$$y=\ln 5+\ln x+\frac{1}{2}\ln(3x+1)$$

Derivando ésta función nos queda:

$$\frac{d}{dx}\ln 5+\ln x+\frac{1}{2}\ln(3x+1)=\frac{d}{dx}5+\frac{d}{dx}\ln x+\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(3x+1)$$
$$=0+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(3x+1)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}(3x+1)}{3x+1}=\frac{1}{x}+\frac{3}{2(3x+1)}$$

Derivada de funciones trigonométricas.

a) Derivar $y=\text{sen}5x$

Decimos que $u=5x$, entonces nos queda $y=\text{sen}u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u=5x \qquad \frac{d}{dx}u=5$$
$$y=\text{sen}u \qquad \frac{d}{du}y=\cos u=\cos 5x$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx}y=\dfrac{d}{du}y\bullet\dfrac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=(\cos 5x)\bullet 5=5\cos 5x$$

b) Derivar $y=\cos\frac{1}{2}x$

Decimos que $u=\frac{1}{2}x$, entonces nos queda $y=\cos u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u=\frac{1}{2}x \qquad \frac{d}{dx}u=\frac{1}{2}$$

$$y=\cos u \qquad \frac{d}{du}y=-\text{sen}u=-\text{sen}\frac{1}{2}x$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y=\frac{d}{du}y\bullet\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=\left(-\text{sen}\frac{1}{2}x\right)\bullet\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{1}{2}x$$

c) Derivar $y=\tan 3x^2$

Decimos que $u=3x^2$, entonces nos queda $y=\tan u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u=3x^2 \qquad \frac{d}{dx}u=6x$$

$$y=\tan u \qquad \frac{d}{du}y=\sec^2 u=\sec^2 3x^2$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y=\frac{d}{du}y\bullet\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=\left(\sec^2 3x^2\right)6x=6x\sec^2 3x^2$$

d) Derivar $y=\cot 6x$

Decimos que $u=6x$, entonces nos queda $y=\cot u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u=6x \qquad \frac{d}{dx}u=6$$

$$y=\cot u \qquad \frac{d}{du}y=-\csc^2 u=-\csc^2 6x$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y=\frac{d}{du}y\bullet\frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y=\left(-\csc^2 6x\right)\bullet 6=-6\csc^2 6x$$

e) Derivar $y = \sec \dfrac{x}{3}$

Decimos que $u = \dfrac{x}{3}$, entonces nos queda $y = \sec u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u = \frac{x}{3} \qquad \frac{d}{dx} u = \frac{1}{3}$$

$$y = \sec u \qquad \frac{d}{du} y = \sec u \tan u = \sec \frac{x}{3} \tan \frac{x}{3}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx} y = \dfrac{d}{du} y \bullet \dfrac{d}{dx} u$

$$\frac{d}{dx} y = \left(\sec \frac{x}{3} \tan \frac{x}{3} \right) \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sec \frac{x}{3} \tan \frac{x}{3}$$

f) Derivar $y = \csc x^2$

Decimos que $u = x^2$, entonces nos queda $y = \csc u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u = x^2 \qquad \frac{d}{dx} u = 2x$$

$$y = \csc u \qquad \frac{d}{du} y = -\csc u \cot u = -\csc x^2 \cot x^2$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\dfrac{d}{dx} y = \dfrac{d}{du} y \bullet \dfrac{d}{dx} u$

$$\frac{d}{dx} y = -\csc x^2 \cot x^2 \bullet 2x = -2x \csc x^2 \cot x^2$$

g) Derivar $y = \operatorname{sen} 2x - \cos 5x$

La última operación es la resta, entonces sustituimos en la fórmula para derivar una resta de funciones.

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx} u - \frac{d}{dx} v \qquad \text{donde} \qquad u = \operatorname{sen} 2x \qquad \text{y} \qquad v = \cos 5x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 2x - \cos 5x) = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} 2x - \frac{d}{dx} \cos 5x$$

Ahora derivamos las funciones trigonométricas seno y coseno, donde $u = 2x$ en la función seno y $u = 5x$ en la función coseno.

$$= \cos 2x \frac{d}{dx} 2x - (-\operatorname{sen} 5x) \frac{d}{dx} 5x$$
$$= (\cos 2x) 2 + (\operatorname{sen} 5x) 5$$
$$= 2 \cos 2x + 5 \operatorname{sen} 5x$$

Nota: se debe de observar que cada vez que se aplica una fórmula para derivar, el valor de u y v son distintos.

h) Derivar $y = 2\tan x^2$

La última operación es el producto de 2 por $\tan x^2$, entonces $c = 2$ y $v = \tan x^2$, luego sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}cu = c\frac{d}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}2\tan x^2 = 2\frac{d}{dx}\tan x^2 \qquad 1$$

No hemos terminado de derivar, nos falta la derivada de $\tan x^2$, donde $u = x^2$ y $\frac{du}{dx} = 2x$, esto lo sustituimos en la fórmula para derivar la tangente.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan u &= \sec^2 u\frac{d}{dx}u \\ &= \left(\sec^2 x^2\right)2x \\ &= 2x\sec^2 x^2\end{aligned}$$

Ahora esto lo sustituimos en 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}2\tan x^2 &= 2\left(2x\sec^2 x^2\right) \\ &= 4x\sec^2 x^2\end{aligned}$$

i) Derivar $y = \text{sen}3x\cos x$

La última operación es el producto de dos funciones, donde $u = \text{sen}3x$ y $v = \cos x$, luego sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\text{sen}3x\cos x &= \text{sen}3x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}\text{sen}3x \\ &= \text{sen}3x\left(-\text{sen}x\right) + \cos x\left(\cos 3x\right)3 \\ &= -\text{sen}3x\text{sen}x + 3\cos x\cos 3x\end{aligned}$$

j) Derivar $y = \text{sen}^3 x^2$

La última operación es el exponente 3 de la función $\text{sen}x^2$, donde $u = \text{sen}x^2$ y $n = 3$, luego sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\text{sen}^3 x^2 &= 3\text{sen}^{3-1}x^2\frac{d}{dx}\text{sen}x^2 \\ &= \left(3\text{sen}^2 x^2\right)\cos x^2\frac{d}{dx}x^2 \\ &= \left(3\text{sen}^2 x^2\right)\left(\cos x^2\right)2x \\ &= 6x\text{sen}^2 x^2\cos x^2\end{aligned}$$

Las funciones trascendentes se pueden dar como función de función, como en los siguientes ejemplos:

a) Derivar $y = e^{\operatorname{sen} 3x}$

Decimos que $u = \operatorname{sen} 3x$, entonces nos queda $y = e^u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u = \operatorname{sen} 3x \qquad \frac{d}{dx}u = \cos 3x \frac{d}{dx}3x = 3\cos 3x$$

$$y = e^u \qquad \frac{d}{du}y = e^u = e^{\operatorname{sen} 3x}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y \bullet \frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y = e^{\operatorname{sen} 3x}3\cos 3x$$
$$= 3e^{\operatorname{sen} 3x}\cos 3x$$

b) Derivar $y = \ln\left(\operatorname{sen} x^2\right)$

Decimos que $u = \operatorname{sen} x^2$, entonces nos queda $y = \ln u$, y obtenemos las derivadas de y y de u.

$$u = \operatorname{sen} x^2 \qquad \frac{d}{dx}u = \cos x^2 \frac{d}{dx}x^2 = 2x\cos x^2$$

$$y = \ln u \qquad \frac{d}{du}y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\operatorname{sen} x^2}$$

Ahora sustituimos en la fórmula $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y \bullet \frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{\operatorname{sen} x^2}2x\cos x^2$$
$$= \frac{2x\cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}$$

c) Derivar $y = \ln\left(\tan x^2\right)$

Decimos que $u = \tan x^2$ y $\frac{d}{dx}u = \left(\sec^2 x^2\right)2x = 2x\sec^2 x^2$, y sustituimos en la fórmula

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{\frac{d}{dx}u}{u}$$

$$\frac{d}{dx}\ln\tan x^2 = \frac{2x\sec^2 x^2}{\tan x^2}$$

Como se puede observar en los dos ejemplos anteriores, en uno se sustituyo en la regla de la cadena y en el otro en la fórmula del logaritmo natural.

En cualquiera de las dos formas que se use se tendrá el mismo resultado, el secreto esta en saber sustituir adecuadamente en las fórmulas para derivar.

d) Derivar $y = \text{sen}^2\left(x^2 - 2\right)$

La última operación es el cuadrado de la función seno, entonces decimos que $u = \text{sen}(x^2 - 2)$, $n = 2$ y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u &= \cos(x^2-2)\frac{d}{dx}(x^2-2)\\ &= \cos(x^2-2)2x\\ &= 2x\cos(x^2-2)\end{aligned}$$

Y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\text{sen}^2(x^2-2) = 2\left[\text{sen}^{2-1}(x^2-2)\right]\left(2x\cos(x^2-2)\right)\\ &= 4x\left(\text{sen}(x^2-2)\right)\left(\cos(x^2-2)\right)\end{aligned}$$

e) Derivar $y = x^2\tan x^3$

La última operación es el producto de dos funciones, decimos que $u = x^2$, $v = \tan x^3$ y $\frac{d}{dx}u = 2x$, $\frac{d}{dx}v = \left(\sec^2 x^3\right)3x^2 = 3x^2\sec^2 x^3$ los cuales sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^2\tan x^3 &= x^2\left(3x^2\sec^2 x^3\right) + \left(\tan x^3\right)2x\\ &= 3x^4\sec^2 x^3 + 2xtgx^3\end{aligned}$$

Derivada de funciones trigonométricas inversas.

a) Derivar $y = \text{arcsen}x^2$

Decimos que $u = x^2$, $\frac{d}{dx}u = 2x$ y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\text{arcsen}u = \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\text{arcsen}x^2 &= \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\end{aligned}$$

b) Derivar $y = \arccos 3x$

Decimos que $u = 3x$, $\frac{d}{dx}u = 3$ y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arccos 3x = -\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

c) Derivar $y = \operatorname{arc}\cot e^{2x}$

Decimos que $u = e^{2x}$, $\frac{d}{dx}u = e^{2x} \bullet 2 = 2e^{2x}$ y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot e^{2x} = -\frac{2e^{2x}}{1+\left(e^{2x}\right)^2}$$
$$= -\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

d) Derivar $y = \arctan(\operatorname{sen} x)$

Decimos que $u = \operatorname{sen} x$, $\frac{d}{dx}u = \cos x$ y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan(\operatorname{sen} x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$$

e) Derivar $y = \operatorname{arc}\operatorname{sen}(\cos 2x)$

Decimos que $u = \cos 2x$, $\frac{d}{dx}u = -2\operatorname{sen} 2x$ y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\operatorname{sen} u = \frac{\frac{d}{dx}u}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\operatorname{sen}(\cos 2x) = \frac{-2\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1-\cos^2 2x}}$$

E J E R C I C I O S

Para las siguientes funciones, hallar la derivada aplicando las fórmulas correspondientes.

1.- $y = \arctan\left(\ln \frac{1}{x}\right)$

2.- $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{1-x^2}\right)$

3.- $y = e^{e^x}$

4.- $y = \tan\sqrt{1-x}$

5.- $y = 2^{\tan\frac{1}{x}}$

6.- $y = \operatorname{arc}\cot\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$

7.- $y = \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$

8.- $y = \frac{x^6}{1+x^2} - \operatorname{arc}\cot x^6$

9.- $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

10.- $y = \arccos\left(\cos^2 x\right)$

11.- $y = \sqrt{1-x^2}\arccos x$

12.- $y = \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$

13.- $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}}{x}$

14.- $y = 3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

15.- $y = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

16.- $y = \ln\frac{x^4}{1+x^4}$

17.- $y = \log^3 x^3$

18.- $y = e^3\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)$

19.- $y = \tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$

20.- $y = \operatorname{sen}^3 x\cos 3x$

21.- $y = \arctan\frac{1}{x}$

22.- $y = 5\tan^3 x^3$

23.- $y = \frac{1}{2}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

24.- $y = \operatorname{sen}\left(\ln x\right)$

25.- $y = \arctan\left(\tan^2 x\right)$

26.- $y = \ln\left(3-2x^2\right)$

27.- $y = x^2 e^{x^2}\ln x$

28.- $y = \arctan\frac{2x^4}{1-x^8}$

29.- $y = e^{\tan^2 x}\cos x$

30.- $y = \ln\frac{x-2}{x+2}$

31.- $y = 2\left(\tan\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)$

32.- $y = \operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

33.- $y = \frac{e^x}{3^{4x}}$

34.- $y = 2^{\cos^3 x} - 3\cos x$

35.- $y = \ln\left(2x+1\right)^3$

36.- $y = \frac{\ln x}{x^5}$

37.- $y = \frac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$

38.- $y = 2x\tan 2x$

39.- $y = \ln^2\left(\cos 2x^2\right)$

40.- $y = \ln\sqrt{x^2+2x}$

41.- $y = \log\left(1-\frac{1}{x}\right)$

42.- $y = \ln\left(\sec^2 x\right)$

43.- $y = \tan^4\frac{x}{2} - \cot^4\frac{x}{2}$

44.- $y = \ln\left(\operatorname{sen}\sqrt{x}\tan\sqrt{x}\right)$

45.- $y = \ln^3 3 - \ln^2 x + 6\ln x$

46.- $y = \operatorname{arc}\cot\left(x^2+1\right)$

47.- $y = e^x - \operatorname{sen}e^x$

48.- $y = \operatorname{sen}^3 e^x\cos e^x$

49.- $y = 3x\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$

50.- $y = 2x\operatorname{sen}x\cos x$

51.- $y = \left(x^5+3\right)\ln\left(x^5+3\right)$

52.- $y = \left(\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)^2$

53.- $y = \left(\frac{x^5}{x^5+2}\right)$

54.- $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$

55.- $y = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

56.- $y = e^{-x} - \operatorname{sen}e^{-x}\cos e^{-x}$

57.- $\operatorname{arcsen}\frac{2x^3}{1+x^6}$

58.- $y = \arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$

59.- $y = \arctan\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

60.- $y = -\cot^2\frac{x}{2} - 2\ln\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

61.- $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\sqrt{x}$

62.- $y = \tan 2x + \frac{2}{3}\tan^3 2x$

63.- $y = \ln\left(\tan\frac{2x+1}{4}\right)$

64.- $y = \cos^3\frac{x}{3}$

65.- $y = \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$

66.- $y = \sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$

67.- $y = x\arccos\frac{x}{2}$

68.- $y = \ln\left(2x^3+3x^2\right)$

69.- $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

70.- $y = \frac{1}{2}\tan^2\sqrt{x}$

71.- $y = \ln\cos\sqrt{x}$

72.- $y = e^x\arctan e^x$

73.- $y=\arctan\dfrac{\ln x}{3}$

74.- $y=\ln\sqrt{2\text{sen}x+1}$

75.- $y=\tan(\ln x)$

76.- $y=\sqrt{x}\left(3\ln(x-2)\right)$

77.- $y=4^{\arctan x}$

78.- $y=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$

79.- $y=\text{arcsen}e^{x^2}$

80.- $y=\tan^3 2x\cos^2 2x$

81.- $y=x^2 2^x$

82.- $y=e^{x\ln x}$

83.- $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

84.- $y=(x-1)e^x$

85.- $y=\ln(\ln x^2)$

86.- $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$

87.- $y=\ln^2 x$

88.- $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$

89.- $y=\dfrac{\tan x}{\sqrt{x}}$

90.- $y=x-\tan x$

91.- $y=(\tan x-\cot x)^2$

92.- $y=\tan^4\left(x^2+1\right)$

93.- $y=\dfrac{\cos x}{1-\text{sen}x}$

94.- $y=\dfrac{\text{sen}2x}{\cos 2x}$

95.- $y=x^2\cos x$

96.- $y=\cos\dfrac{x^3}{2}$

97.- $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$

98.- $y=\text{sen}x^6$

99.- $y=\text{sen}^3 x^2$

100.- $y=\text{arcsen}x^{1/3}$

101.- $y=\text{arc}\sec(\cos 3x)$

102.- $y=\text{arc}\csc\left(e^x\right)$

103.- $y=\sqrt{x}\,\text{arcsen}x$

104.- $y=\arccos(\text{sen}3x)$

105.- $y=\text{arc}\csc\left(e^{x^2}\right)$

106.- $y=\dfrac{\text{arc}\sec}{\sqrt{x}}$

107.- $y=x^2\text{arc}\sec\sqrt{x}$

108.- $y=\arccos(\ln 2x)$

109.- $y=\sqrt{\cos 3x}$

110.- $y=\dfrac{1}{\sqrt{\text{sen}x}}$

111.- $y=e^{\tan 2x}$

112.- $y=10^{\text{sen}2x}$

113.- $y=\sqrt[3]{\sec 5x}$

114.- $y=\tan^{2/3}x$

115.- $y=e^{3x}\tan 4x$

116.- $y=\log\sqrt{4x-1}$

117.- $y=8\sqrt{x}$

118.- $y=2^x-\dfrac{1}{2^x}$

119.- $y=\dfrac{e^x+3}{e^x-3}$

120.- $y=\dfrac{4}{e^x}-e^x$

121.- $y=\dfrac{x^2}{e^{4x}}$

122.- $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

123.- $y=\dfrac{5}{4^{2x}}$

124.- $y=\cot\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

125.- $y=\dfrac{2}{\sqrt{\sec x}}$

DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Las fórmulas que se han visto hasta ahora son para derivar funciones que están en forma explícita, es decir, la variable y esta despejada, pero hay veces que la variable y no está despejada, entonces se dice que la función está en forma implícita.

Una función está en forma explícita si alguna de las dos variables está despajada.

Una función está en forma implícita si ninguna de las dos variables está despejada.

Si una función está en forma implícita y se quiere hallar la derivada de la variable y con respecto de x, se puede optar por pasar la ecuación de implícita a explícita, despejando la variable y, y después derivar con las fórmulas anteriores. Esto no siempre es posible o puede ser demasiado difícil.

También se puede optar por derivar la ecuación en forma implícita, con alguno de los dos métodos siguientes:

PRIMER MÉTODO DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA

a) Se iguala a cero la ecuación.
b) Se deriva término a término considerando la variable y como función de x, lo que en nuestras fórmulas es u, v o w.
c) Se despeja $\frac{d}{dx}y$, si $\frac{d}{dx}y$ está como factor de varios términos, se factoriza y después se despeja.

Ejemplo 1.- Derivar $x^2 + y^2 = 9$

a) Se iguala a cero.

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

b) Se deriva término a término:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}9 = 0$$

$$2x + 2y\frac{d}{dx}y - 0 = 2x + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

c) Se despeja $\frac{d}{dx}y$:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-2x}{2y}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

Ejemplo 2.- Derivar $5x^2 - xy = -y^2$

a) Se iguala a cero.

$$5x^2 - xy + y^2 = 0$$

b) Se deriva término a término:

$$\frac{d}{dx}5x^2 - \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^2 = 0$$

$$10x - \left[x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x\right] + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

$$10x - x\frac{d}{dx}y - y + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

c) Se despeja $\frac{d}{dx}y$:

$$10x + (-x + 2y)\frac{d}{dx}y - y = 0$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-10x + y}{-x + 2y}$$

Ejemplo 3.- Derivar $2x^3 - 4x^2y + y^2 = 0$

a) La ecuación ya está igualada a cero.

b) Se deriva término a término:

$$\frac{d}{dx}2x^3 - \frac{d}{dx}4x^2y + \frac{d}{dx}y^2 = 0$$

$$6x^2 - \left[4x^2\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}4x^2\right] + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

$$6x^2 - 4x^2\frac{d}{dx}y - y(8x) + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

$$6x^2 - 8xy - 4x^2\frac{d}{dx}y + 2y\frac{d}{dx}y = 0$$

c) Se despeja $\frac{d}{dx}y$:

$$6x^2 - 8xy + (-4x^2 + 2y)\frac{d}{dx}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{8xy - 6x^2}{-4x^2 + 2y}$$

Ejemplo 4.- Derivar $x^2y^2-5xy^2+4x^2y=0$

a) La ecuación ya está igualada a cero.

b) Se deriva término a término:

$$\frac{d}{dx}x^2y^2-\frac{d}{dx}5xy^2+\frac{d}{dx}4x^2y=0$$
$$\left[x^2\frac{d}{dx}y^2+y^2\frac{d}{dx}x^2\right]-\left[5x\frac{d}{dx}y^2+y^2\frac{d}{dx}5x\right]+\left[4x^2\frac{d}{dx}y+y\frac{d}{dx}4x^2\right]=0$$
$$x^2 2y\frac{d}{dx}y+y^2 2x-5x2y\frac{d}{dx}y-y^2 5+4x^2\frac{d}{dx}y+y8x=0$$
$$2x^2y\frac{d}{dx}y+2xy^2-10xy\frac{d}{dx}y-5y^2+4x^2\frac{d}{dx}y+8xy=0$$

c) Se despeja $\frac{d}{dx}y$:

$$(2x^2y-10xy+4x^2)\frac{d}{dx}y+2xy^2-5y^2+8xy=0$$
$$\frac{d}{dx}y=\frac{5y^2-2xy^2-8xy}{2x^2y-10xy+4x^2}$$

Ejemplo 5.- Derivar $e^y=\cos(x+y)$

a) Se iguala a cero.

$$e^y-\cos(x+y)=0$$

b) Se deriva término a término:

$$\frac{d}{dx}e^y-\frac{d}{dx}\cos(x+y)=0$$
$$e^y\frac{d}{dx}y-\left[-\operatorname{sen}(x+y)\frac{d}{dx}(x+y)\right]=0$$
$$e^y\frac{d}{dx}y-\left[-\operatorname{sen}(x+y)\left(1+\frac{d}{dx}y\right)\right]=0$$
$$e^y\frac{d}{dx}y-\left[-\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x+y)\frac{d}{dx}y\right]=0$$
$$e^y\frac{d}{dx}y+\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x+y)\frac{d}{dx}y=0$$

c) Se despeja $\frac{d}{dx}y$:

$$\left(e^y+\operatorname{sen}(x+y)\right)\frac{d}{dx}y+\operatorname{sen}(x+y)=0$$
$$\frac{d}{dx}y=\frac{-\operatorname{sen}(x+y)}{e^y+\operatorname{sen}(x+y)}$$

Ejemplo 6.- Derivar $e^x \text{sen} y + e^y \cos x = 1$

a) Se iguala a cero.

$$e^x \text{sen} y + e^y \cos x - 1 = 0$$

b) Se deriva término a término:

$$\frac{d}{dx} e^x \text{sen} y + \frac{d}{dx} e^y \cos x - \frac{d}{dx} 1 = 0$$

$$\left[e^x \frac{d}{dx} \text{sen} y + \text{sen} y \frac{d}{dx} e^x \right] + \left[e^y \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} e^y \right] - 0 = 0$$

$$e^x \cos y \frac{d}{dx} y + (\text{sen} y) e^x + e^y (-\text{sen} x) + \cos x \left(e^y \frac{d}{dx} y \right) = 0$$

$$e^x \cos y \frac{d}{dx} y + e^x \text{sen} y - e^y \text{sen} x + e^y \cos x \frac{d}{dx} y = 0$$

c) Se despeja $\frac{d}{dx} y$:

$$\left(e^x \cos y + e^y \cos x \right) \frac{d}{dx} y + e^x \text{sen} y - e^y \text{sen} x = 0$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{e^y \text{sen} x - e^x \text{sen} y}{e^x \cos y + e^y \cos x}$$

SEGUNDO MÉTODO DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Este método consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx} y = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f}{\frac{\partial}{\partial y} f}$$

Donde $\frac{\partial}{\partial x} f$ significa derivar parcialmente la función con respecto a x, esto es, que la variable y se considera una constante.

También en forma análogamente $\frac{\partial}{\partial y} f$ significa derivar parcialmente la función con respecto a y, esto es, que la variable x se considera una constante.

Nota: Se derivan los mismos ejemplos que en el método 1, para verificar que el resultado es el mismo por cualquier método.
En particular el método 2 es más fácil, por la consideración de las constantes.

a) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x} f$ y $\frac{\partial}{\partial y} f$.

b) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx} y = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f}{\frac{\partial}{\partial y} f}$.

Ejemplo 1.- Derivar $x^2 + y^2 = 9$

a) Se iguala a cero.

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

b) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x} f$ y $\frac{\partial}{\partial y} f$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 2x + 0 - 0 = 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 + 2y - 0 = 2y$$

c) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx} y = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f}{\frac{\partial}{\partial y} f}$:

$$\frac{d}{dx} y = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo 2.- Derivar $5x^2 - xy = -y^2$

a) Se iguala a cero.

$$5x^2 - xy + y^2 = 0$$

b) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x} f$ y $\frac{\partial}{\partial y} f$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2 - xy + y^2\right) = 10x - y + 0 = 10x - y$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2 - xy + y^2\right) = 0 - x + 2y = -x + 2y$$

c) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx} y = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f}{\frac{\partial}{\partial y} f}$:

$$\frac{d}{dx}y=-\frac{10x-y}{-x+2y}=\frac{y-10x}{-x+2y}$$

Ejemplo 3.- Derivar $2x^3-4x^2y+y^2=0$

a) La ecuación ya está igualada a cero.

b) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x}f$ y $\frac{\partial}{\partial y}f$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3-4x^2y+y^2\right)=6x^2-4y2x+0=6x^2-8xy$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3-4x^2y+y^2\right)=0-4x^2+2y=-4x^2+2y$$

c) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx}y=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}f}{\frac{\partial}{\partial y}f}$:

$$\frac{d}{dx}y=-\frac{6x^2-8xy}{-4x^2+2y}=\frac{8xy-6x^2}{-4x^2+2y}$$

Ejemplo 4.- Derivar $x^2y^2-5xy^2+4x^2y=0$

a) La ecuación ya está igualada a cero.

b) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x}f$ y $\frac{\partial}{\partial y}f$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^2-5xy^2+4x^2y\right)=y^2 2x-y^2 5+4y2x=2xy^2-5y^2+8xy$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^2-5xy^2+4x^2y\right)=x^2 2y-5x2y+4x^2=2x^2y-10xy+4x^2$$

c) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx}y=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}f}{\frac{\partial}{\partial y}f}$:

$$\frac{d}{dx}y=-\frac{2xy^2-5y^2+8xy}{2x^2y-10xy+4x^2}=\frac{5y^2-2xy^2-8xy}{2x^2y-10xy+4x^2}$$

Ejemplo 5.- Derivar $e^y=\cos\left(x+y\right)$

a) Se iguala a cero.

$$e^y-\cos\left(x+y\right)=0$$

b) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x} f$ y $\frac{\partial}{\partial y} f$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y}-\cos\left(x+y\right)\right)=0-\left(-\text{sen}(x+y)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x+y\right)=\left(\text{sen}(x+y)\right)\left(1+0\right)=\text{sen}(x+y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y}-\cos\left(x+y\right)\right)=e^{y}-\left(-\text{sen}(x+y)\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x+y\right)=e^{y}+\left(\text{sen}(x+y)\right)(1+0)=e^{y}+\text{sen}(x+y)$$

c) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx}y=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}f}{\frac{\partial}{\partial y}f}$:

$$\frac{d}{dx}y=-\frac{\text{sen}(x+y)}{e^{y}+\text{sen}(x+y)}=\frac{-\text{sen}(x+y)}{e^{y}+\text{sen}(x+y)}$$

Ejemplo 6.- Derivar $e^{x}\text{sen}y+e^{y}\cos x=1$

a) Se iguala a cero.

$$e^{x}\text{sen}y+e^{y}\cos x-1=0$$

b) Se obtiene $\frac{\partial}{\partial x} f$ y $\frac{\partial}{\partial y} f$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x}\text{sen}y+e^{y}\cos x-1\right)=\left(\text{sen}y\right)e^{x}+e^{y}\left(-\text{sen}x\right)-0=e^{x}\text{sen}y-e^{y}\text{sen}x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x}\text{sen}y+e^{y}\cos x-1\right)=e^{x}\cos y+e^{y}\cos x-0=e^{x}\cos y+e^{y}\cos x$$

c) Se sustituyen las derivadas parciales en la fórmula $\frac{d}{dx}y=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}f}{\frac{\partial}{\partial y}f}$:

$$\frac{d}{dx}y=-\frac{e^{x}\text{sen}y-e^{y}\text{sen}x}{e^{x}\cos y+e^{y}\cos x}=\frac{e^{y}\text{sen}x-e^{x}\text{sen}y}{e^{x}\cos y+e^{y}\cos x}$$

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios hallar $\frac{d}{dx}y$, por los dos métodos.

1.- $5x^2+y^2=1$

2.- $x^2+5y^2=3$

3.- $x^2y^2-y^2=x^2$

4.- $5-y^3=x$

5.- $y^2=8px$

6.- $5xy-1=0$

7.- $x-5y^2=3y$

8.- $x^3-xy+y^2=0$

9.- $x^2-y^2=5y$

10.- $\sqrt{5x}-\sqrt{y}=-1$

11.- $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=8$

12.- $\sqrt{x+y}=\frac{y}{2}$

13.- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

14.- $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}$

15.- $x^2+y^2-4xy=0$

16.- $x^4-x^3y^3-x^2+5y^2=0$

17.- $2x^4+6x^2y^2=\left(y^2+1\right)^2$

18.- $x^2\cos y-y^2\operatorname{sen}x=0$

19.- $e^x\cos y-e^y\operatorname{sen}x=1$

20.- $y=\operatorname{sen}\left(x+y\right)$

21.- $e^y=\cos\left(x+y\right)$

22.- $\cos y=\ln\left(x+y\right)$

23.- $\operatorname{sen}y=\ln\left(x+y\right)$

24.- $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

25.- $x^2+y^2=16$

26.- $x^2=\frac{x+2y}{x-2y}$

27.- $\sqrt{xy}+\sqrt{y}=4$

28.- $y\sqrt{2+3x}+x\sqrt{1+y}=x$

29.- $\frac{y}{x-y}=2+x^2$

30.- $x^2y^3=x^4-y^4$

31.- $2x^3y+3xy^3=5$

32.- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

33.- $5x^4+2y=\left(x^2+y^2\right)^2$

34.- $y+\sqrt{xy}=3x^3$

35.- $\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{y}=x$

36.- $\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2=x^3+y^3$

37.- $x^3+y^3=8xy$

38.- $\frac{x}{y}-4y=x$

39.- $x^2y^2=x^2+y^2$

40.- $\left(2x+3\right)^4=3y^4$

41.- $\sqrt{xy}+2x=\sqrt{y}$

42.- $x^4+y^4=12x^2y$

43.- $x^3y+2y^4-x^4=0$

44.- $y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=9$

45.- $x^2+4y^2-4x-8y+3=0$

46.- $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

47.- $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$

48.- $x\operatorname{sen}y+y\operatorname{sen}x=0$

49.- $e^{x/y}-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=0$

50.- $\arctan\left(x+y\right)=x$

DERIVADAS SUCESIVAS

La derivada de una función de x es también una función de x. Por ello puede suceder que la nueva función se pueda derivar, en éste caso la derivada de la derivada se llama la 2ª derivada de la función original.

De igual manera la derivada de la 2ª derivada se llama la tercera derivada de la función original, y así sucesivamente.

La notación para las derivadas sucesivas es según la notación que se use.

Función	1º derivada	2ª derivada	3ª derivada
y	$\frac{d}{dx}y$	$\frac{d^2}{dx^2}y$	$\frac{d^3}{dx^3}y$
y	y'	y''	y'''
y	$D_x y$	$D_x^2 y$	$D_x^3 y$
$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$

Ejemplo 1.- Hallar la 1ª, 2ª y 3ª derivada de $y = 2x^4$

a) $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}2x^4 = 8x^3$

b) $\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}8x^3 = 24x^2$

c) $\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}24x^2 = 48x$

Ejemplo 2.- Hallar la 3ª derivada de $y = \frac{1}{x^3}$

$$y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

a) $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^{-3} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$

b) $\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}-3x^{-4} = 12x^{-4-1} = 12x^{-5}$

c) $\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}12x^{-5} = -60x^{-5-1} = -60x^{-6} = -\frac{60}{x^6}$

Ejemplo 3.- Hallar la 4^a derivada de $y=2x^5-3x^2+6x$

a) $\dfrac{d}{dx}y=\dfrac{d}{dx}\left(2x^5-3x^2+6x\right)=10x^4-6x+6$

b) $\dfrac{d^2}{dx^2}y=\dfrac{d}{dx}\left(10x^4-6x+6\right)=40x^3-6$

c) $\dfrac{d^3}{dx^3}y=\dfrac{d}{dx}\left(40x^3-6\right)=120x^2$

d) $\dfrac{d^4}{dx^4}y=\dfrac{d}{dx}120x^2=240x$

Ejemplo 4.- Hallar la 3^a derivada de $y=\sqrt[3]{4-9x}$

$$y=\sqrt[3]{4-9x}=(4-9x)^{\frac{1}{3}}$$

a) $\dfrac{d}{dx}y=\dfrac{d}{dx}(4-9x)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}(4-9x)^{\frac{1}{3}-1}(-9)=-3(4-9x)^{-\frac{2}{3}}$

b) $\dfrac{d^2}{dx^2}y=\dfrac{d}{dx}-3(4-9x)^{-\frac{2}{3}}=-3(-\dfrac{2}{3})(4-9x)^{-\frac{2}{3}-1}(-9)=-18(4-9x)^{-\frac{5}{3}}$

c) $\dfrac{d^3}{dx^3}y=\dfrac{d}{dx}-18(4-9x)^{-\frac{5}{3}}=-18(-\dfrac{5}{3})(4-9x)^{-\frac{5}{3}-1}(-9)=-270(4-9x)^{-\frac{8}{3}}=-\dfrac{270}{\sqrt[3]{(4-9x)^8}}$

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios hallar $1^a, 2^a$ y 3^a derivada.

a) $y=x^3-5x^2+7x-1$

b) $y=e^{4x^2}$

c) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$

d) $y=\text{sen}5x$

e) $y=\arctan x$

f) $y=\sqrt{x}$

g) $y=\sqrt{x^2-9}$

h) $y=\left(x^2-x+1\right)^3$

i) $y=x\ln x$

j) $y=e^{x^3}$

k) $y=\dfrac{e^x}{x}$

l) $y=x\text{sen}x$

m) $y=e^x\text{sen}x$

n) $y=\dfrac{\cos x}{x}$

ñ) $y=e^{-x}\text{sen}x$

o) $y=5\cos\dfrac{1}{5}x$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

La definición de la derivada de una función es $\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

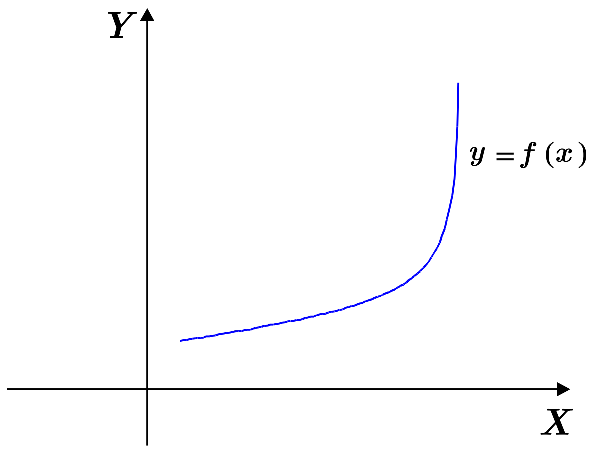
Donde $f(x+\Delta x)$ es la función incrementada.

$f(x)$ es la función original.

Δx es el incremento de x.

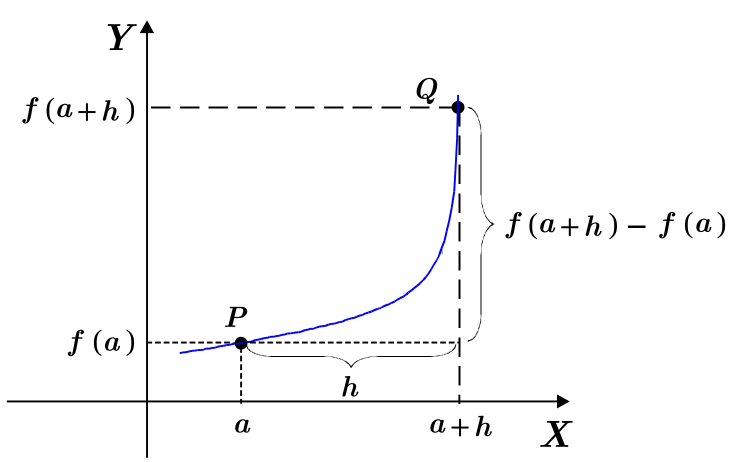
¿Qué significa geométricamente esto?

Consideremos la función $y = f(x)$ cuya gráfica es la siguiente:



Tomamos un valor $x = a$ y evaluamos $f(x)$ en a, entonces tendremos el punto $P(a, f(a))$, si al valor a se le da un incremento pequeño digamos h, entonces tenemos el valor $x = a + h$, y al evaluar la función en $a+h$ obtenemos el punto $Q(a+h, f(a+h))$.

Entre estos dos puntos la diferencia de las abscisas es $a+h-a = h$ y la diferencia de las ordenadas es $f(a+h) - f(a)$, como se muestra en la siguiente gráfica.

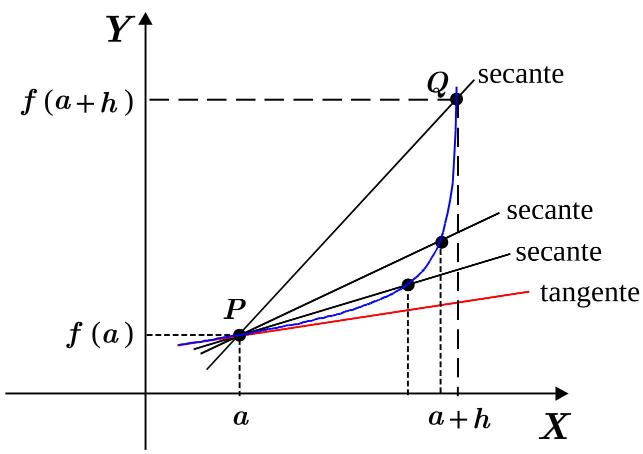


Para obtener la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos, aplicamos la fórmula $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ que para éste caso sería:

$$m_{PQ}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A esta recta se le llama recta secante a la curva por cortar a la gráfica en dos puntos.

Si consideramos el punto P fijo y movemos el punto Q a lo largo de la curva en dirección hacia el punto P, esto nos daría varias rectas secantes al ir acercando Q hacia P y además h sería cada vez más pequeño, es decir, $h\rightarrow 0$ como se muestra en la siguiente gráfica:



Si $h\rightarrow 0$ entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la curva en el punto $P(a, f(a))$ y la pendiente de la recta secante tiende a ser la pendiente de la recta tangente en el punto P.

Es decir, el limite de la pendiente de la secante cuando $h\rightarrow 0$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $x=a$.

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m_{\tan} \text{ en } x=a$$

Entonces la interpretación geométrica de la derivada, es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto en que se evalué la derivada.

Obsérvese que en este caso tomamos el punto $x=a$, si lo hacemos en general para cualquier punto x nos quedaría:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m_{\tan} \text{ en el punto } x$$

Y tendríamos la pendiente de la recta tangente como una función de x.

Ejemplo 1.- Hallar la pendiente de la recta tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto $(2,4)$.

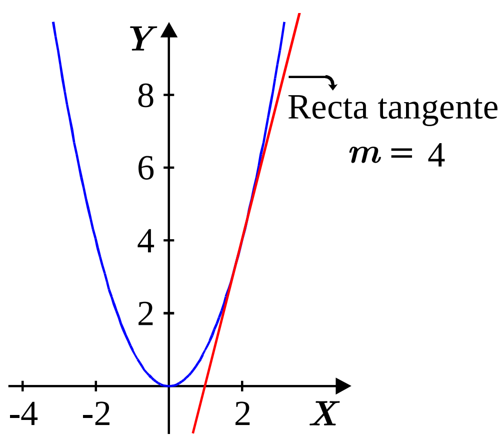
Como $y=f(x)$ entonces $f(x)=x^2$

La derivada de $f(x)$ es $f'(x)$

$$f'(x)=2x$$

La derivada evaluada en $x=2$ es $f'(2)=2(2)=4$, entonces la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=2$ es 4.

Gráficamente sería:



Es decir, se deriva la función y se evalúa en la coordenada x del punto de tangencia.

Nota: Si la función se deriva en forma implícita, entonces la derivada se evalúa en las coordenadas x y y.

Ejemplo 2.- Hallar la pendiente de la recta tangente de $y = x^2 - 3x + 3$ en $x = 1$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 3$$

La derivada de $f(x)$ es:

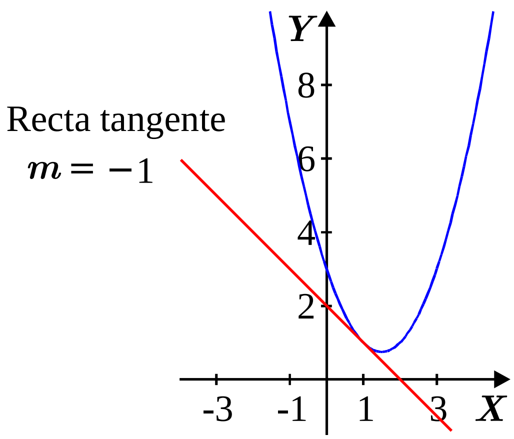
$$f'(x) = 2x - 3$$

La derivada evaluada en $x = 1$ es:

$$f'(1) = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

Entonces la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 1$ es $m = -1$

Gráficamente sería:



Obsérvese que la notación de $f(x)$ para la función, y las derivadas, resulta muy apropiada para simbolizar la evaluación en un punto.

Ejemplo 3.- Hallar la pendiente de la recta tangente de $y = e^x$ en el punto $(0,1)$.

$$f(x) = e^x$$

La derivada de $f(x)$ es:

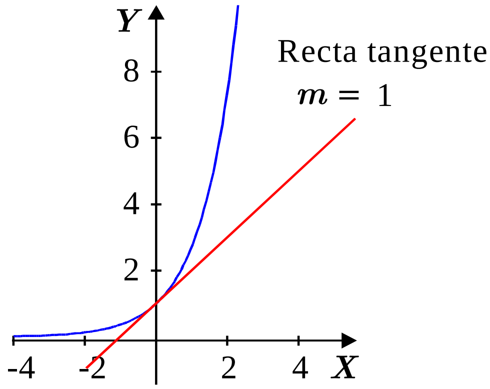
$$f'(x) = e^x$$

La derivada evaluada en $x = 0$ es:

$$f'(0) = e^0 = 1$$

Entonces la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=0$ es $m=1$

Gráficamente sería:



Ejemplo 4.- Hallar la pendiente de la recta tangente de $y=e^x$ en el punto $(1,0)$.

$$xy-2y-x+1=0$$

La derivada de $f(x)$ es:

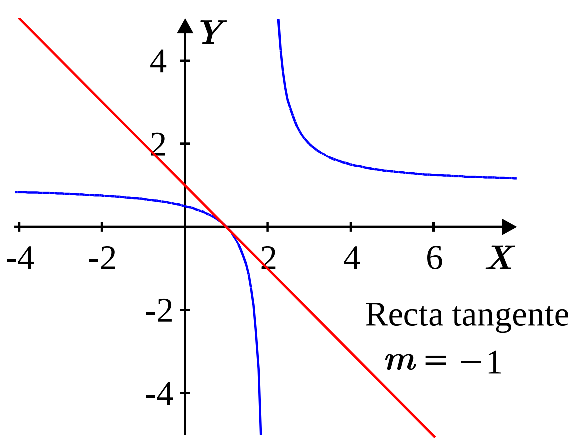
$$\frac{\partial}{\partial x} xy-2y-x+1=y-0-1+0=y-1$$
$$\frac{\partial}{\partial x} xy-2y-x+1=x-2-0+0=x-2$$
$$f'(x)=-\frac{y-1}{x-2}$$

La derivada evaluada en $(1,0)$ es:

$$f'(1,0)=-\frac{0-1}{1-2}=\frac{-1}{-1}=1$$

Entonces la pendiente de la recta tangente a la curva en $(1,0)$ es $m=1$

Gráficamente sería:



EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios hallar la pendiente de la recta tangente, en el punto que se indica y hacer la gráfica.

a) $y = x^3$ en $x = 2$

b) $y = \dfrac{1}{x}$ en $x = 3$

c) $y = 3x^2 + 5x$ en $x = 1$

d) $y = x^2$ en $x = 0$

e) $y = \sqrt{x}$ en $x = 2$

f) $y = 2x + 5$ en $x = 3$

g) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ en $x = \dfrac{3}{2}$

h) $y = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -2$

i) $y = x^3 - x$ en $x = \dfrac{5}{2}$

j) $y = x^2 - 1$ en $x = 0$

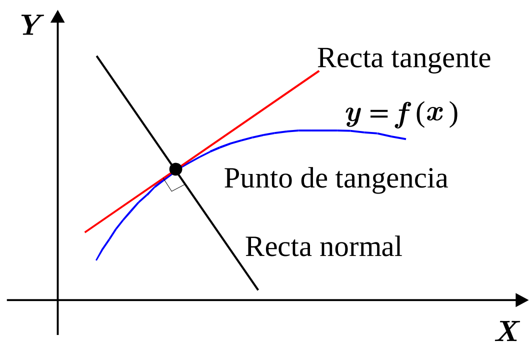
k) $y = x^4 + x$ en $x = -1$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

En geometría analítica vimos que para hallar la ecuación de una recta se necesita conocer un punto por donde pasa la recta y la pendiente de esa recta.

En cálculo para conocer la ecuación de la recta tangente a una curva, debemos tener un punto de tangencia y la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia, que es la derivada evaluada en éste punto.

La recta normal a una curva se define como la recta perpendicular a la recta tangente y que se cortan con la recta tangente en el punto de tangencia, como se muestra en la siguiente gráfica.



Si dos rectas son perpendiculares, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario o su producto es igual a menos 1 $\quad m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \quad$ o $\quad m_1 \bullet m_2 = -1$

Si se conoce la pendiente de la recta tangente a una curva, entonces podemos obtener la pendiente de la recta normal a esa misma curva, y como la recta tangente y normal pasan por el mismo punto, entonces podemos obtener la ecuación de las dos rectas.

Ejemplo 1.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, a la curva $y = x^3$ en el punto $(1,1)$.

Paso 1.- Se deriva la función $y = f(x)$.

$$f'(x) = 3x^2$$

Paso 2.- Se calcula m_T.

$$f'(1) = 3(1)^2 = 3 \qquad \text{Entonces} \qquad m_T = 3$$

Paso 3.- Se calcula m_N.

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{3} \qquad \text{Entonces} \qquad m_N = -\frac{1}{3}$$

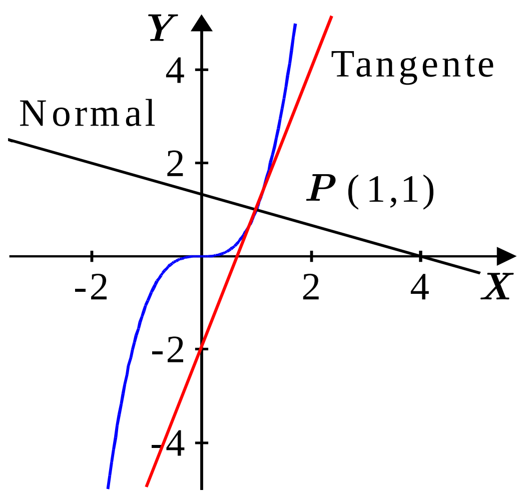
Paso 4.- Se obtiene la ecuación de la recta tangente, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 = m_T\left(x - x_1\right)$$
$$y - 1 = 3\left(x - 1\right)$$
$$y - 1 = 3x - 3$$
$$3x - y - 3 + 1 = 0$$
$$3x - y - 2 = 0$$ Ecuación de la recta tangente.

Paso 5.- Se obtiene la ecuación de la recta normal, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 = m_N\left(x - x_1\right)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{3}\left(x - 1\right)$$
$$3(y - 1) = -1\left(x - 1\right)$$
$$3y - 3 = -x + 1$$
$$x + 3y - 3 - 1 = 0$$
$$x + 3y - 4 = 0$$ Ecuación de la recta normal.

La gráfica sería:



Ejemplo 2.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, a la curva $y=\sqrt{x+4}$ en el punto $(5,3)$.

Paso 1.- Se deriva la función $y=f(x)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

Paso 2.- Se calcula m_T.

$$f'(5)=\frac{1}{2\sqrt{5+4}}=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6} \qquad \text{Entonces} \qquad m_T=\frac{1}{6}$$

Paso 3.- Se calcula m_N.

$$m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{\frac{1}{6}}=-6 \qquad \text{Entonces} \qquad m_N=-6$$

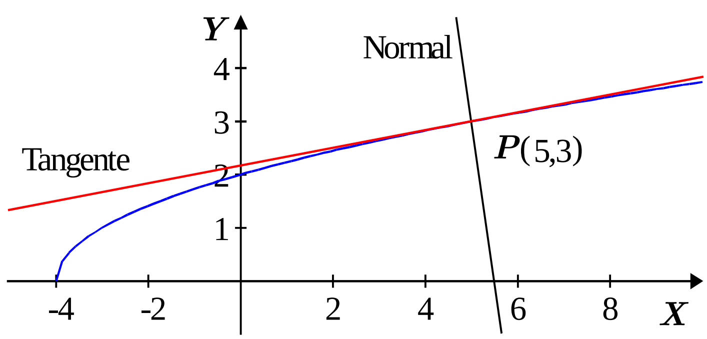
Paso 4.- Se obtiene la ecuación de la recta tangente, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y-y_1=m_T(x-x_1)$$
$$y-3=\frac{1}{6}(x-5)$$
$$6(y-3)=1(x-5)$$
$$6y-18=x-5$$
$$x-6y+13=0 \qquad \text{Ecuación de la recta tangente.}$$

Paso 5.- Se obtiene la ecuación de la recta normal, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y-y_1=m_N(x-x_1)$$
$$y-3=-6(x-5)$$
$$y-3=-6x+30$$
$$6x+y-33=0 \qquad \text{Ecuación de la recta normal.}$$

La gráfica sería:



Ejemplo 3.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, a la curva $x^2+2y^2=18$ en el punto $(4,1)$.

Paso 1.- Se deriva la función $y=f(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2y^2-18\right)=2x+0-0=2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+2y^2-18\right)=0+4y-0=4y$$
$$\frac{d}{dx}f(x)=-\frac{2x}{4y}=-\frac{x}{2y}$$

Paso 2.- Se calcula m_T en el punto $(4,1)$.

$$m_T=-\frac{4}{2(1)}=-2$$

Paso 3.- Se calcula m_N.

$$m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}\qquad \text{Entonces}\qquad m_N=\frac{1}{2}$$

Paso 4.- Se obtiene la ecuación de la recta tangente, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y-y_1=m_T\left(x-x_1\right)$$
$$y-1=-2(x-4)$$
$$y-1=-2x+8$$
$$2x+y-9=0$$

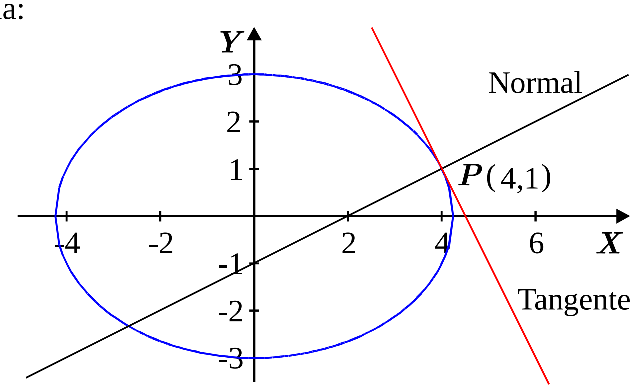
Ecuación de la recta tangente.

Paso 5.- Se obtiene la ecuación de la recta normal, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y-y_1=m_N\left(x-x_1\right)$$
$$y-1=\frac{1}{2}(x-4)$$
$$2(y-1)=x-4$$
$$2y-2=x-4$$
$$x-2y-2=0$$

Ecuación de la recta normal.

La gráfica sería:



Ejemplo 4.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, a la curva $y = x^2 - 5x + 8$ en el punto $(3,2)$.

Paso 1.- Se deriva la función $y = f(x)$.

$$f'(x) = 2x - 5$$

Paso 2.- Se calcula m_T en el punto $(3,2)$.

$$m_T = 2(3) - 5 = 1$$

Paso 3.- Se calcula m_N.

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{1} = -1 \qquad \text{Entonces} \qquad m_N = -1$$

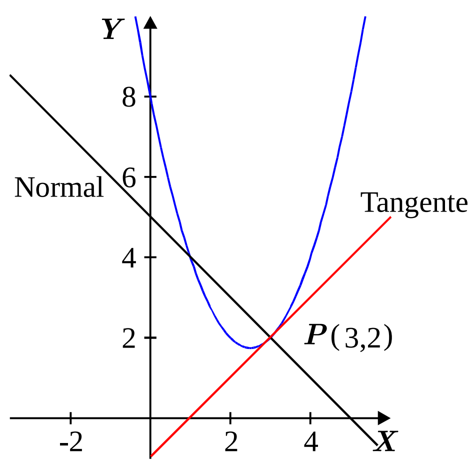
Paso 4.- Se obtiene la ecuación de la recta tangente, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 = m_T(x - x_1)$$
$$y - 2 = 1(x - 3)$$
$$y - 2 = x - 3$$
$$x - y - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación de la recta tangente.}$$

Paso 5.- Se obtiene la ecuación de la recta normal, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 = m_N(x - x_1)$$
$$y - 2 = -1(x - 3)$$
$$y - 2 = -x + 3$$
$$x + y - 5 = 0 \qquad \text{Ecuación de la recta normal.}$$

La gráfica sería:



Ejemplo 5.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(4,3)$.

Paso 1.- Se deriva la función $y = f(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 25\right) = 2x + 0 - 0 = 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 25\right) = 0 + 2y - 0 = 2y$$
$$\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Paso 2.- Se calcula m_T en el punto $(4,3)$.

$$m_T = -\frac{4}{3}$$

Paso 3.- Se calcula m_N .

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Entonces $m_N = \frac{3}{4}$

Paso 4.- Se obtiene la ecuación de la recta tangente, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 = m_T\left(x - x_1\right)$$
$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$
$$3(y - 2) = -4(x - 3)$$
$$3y - 6 = -4x + 12$$
$$4x + 3y - 18 = 0$$

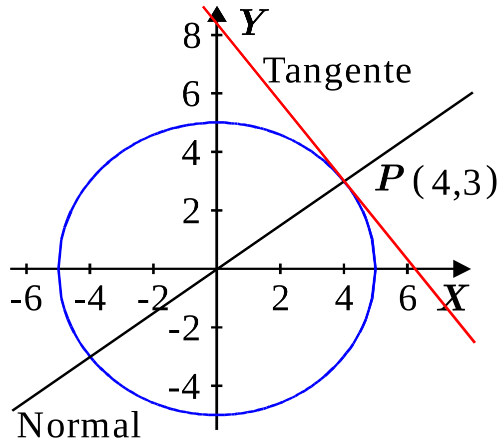
Ecuación de la recta tangente.

Paso 5.- Se obtiene la ecuación de la recta normal, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 = m_N\left(x - x_1\right)$$
$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - 4)$$
$$4(y - 3) = 3(x - 4)$$
$$4y - 12 = 3x - 12$$
$$3x - 4y = 0$$

Ecuación de la recta normal.

La gráfica sería:



Ejemplo 6.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, a la curva $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ en el punto $(1,-2)$.

Paso 1.- Se deriva la función $y=f(x)$.

$$f'(x)=\frac{(x-2)(1)-(x+1)(1)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

Paso 2.- Se calcula m_T.

$$f'(1)=\frac{-3}{(1-2)^2}=\frac{-3}{(-1)^2}=-3 \qquad \text{Entonces} \qquad m_T=-3$$

Paso 3.- Se calcula m_N.

$$m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3} \qquad \text{Entonces} \qquad m_N=\frac{1}{3}$$

Paso 4.- Se obtiene la ecuación de la recta tangente, aplicando la ecuación punto pendiente.

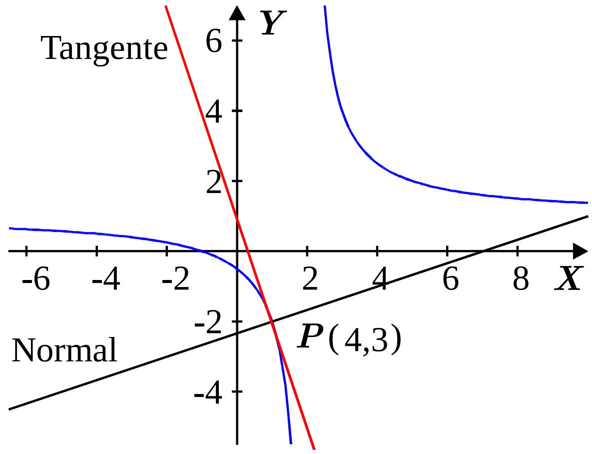
$$y-y_1=m_T(x-x_1)$$
$$y-(-2)=-3(x-1)$$
$$y+2=-3x+3$$
$$3x+y-1=0 \qquad \text{Ecuación de la recta tangente.}$$

Paso 5.- Se obtiene la ecuación de la recta normal, aplicando la ecuación punto pendiente.

$$y-y_1=m_N(x-x_1)$$
$$y-(-2)=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$3(y+2)=1(x-1)$$

$$3y+6=x-1$$
$$x-3y-7=0 \qquad \text{Ecuación de la recta normal.}$$

La gráfica sería:



EJERCICIOS

Hallar la ecuación de la recta tangente y normal, hacer la gráfica de las curvas dadas en el punto de tangencia indicado.

1.- $y=x^3-3x+1$ $\quad P(0,1)$

2.- $y=x^2+1$ $\quad P(2,5)$

3.- $y=\sqrt{x+1}$ $\quad P(3,2)$

4.- $y=(x-1)^3$ $\quad P(2,1)$

5.- $y=4x^2$ $\quad P(1,4)$

6.- $xy+2y-x=5$ $\quad P(1,2)$

7.- $4x^2-y^2=7$ $\quad P(2,3)$

8.- $3x^2+2y^2=30$ $\quad P(-2,3)$

9.- $xy+y^2+3=0$ $\quad P(-4,3)$

10.- $y=x^3-4$ $\quad P(1,-3)$

11.- $y=x^3-2x+1$ $\quad x=\dfrac{1}{2}$

12.- $x^2+y^2=13$ $\quad P(2,3)$

13.- $y=\sqrt{5+4x^2}$ $\quad x=1$

14.- $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ $\quad x=2$

15.- $x^2-y^2+3x=9$ $\quad P(2,1)$

16.- $x^2+4y^2=8$ $\quad P(2,1)$

17.- $y=\dfrac{\sqrt{9+3x}}{x}$ $\quad x=\dfrac{1}{2}$

18.- $y=x^3-5x$ $\quad P(2,-2)$

19.- $y=x^3-3x^2-5x+3$ $\quad P(1,-2)$

20.- $xy=9$ $\quad P(3,3)$

21.- $x^2+y^2=10$ $\quad P(1,-3)$

22.- $x^2+y^2-5y=1$ $\quad P(1,0)$

23.- $y=\dfrac{2x+1}{3-x}$ $\quad P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

24.- $y^2-8x=0$ $\quad P(2,4)$

25.- $y=\sqrt{x-3}$ $\quad P(7,2)$

26.- $y=x^2-4x+3$ $\quad P(4,3)$

27.- $y=3x^2-7$ $\quad P(2,5)$

28.- $y^3=x^2$ $\quad P(-1,1)$

29.- $y=5x-x^2$ $\quad P(5,0)$

30.- $y^2=9-x$ $\quad P(5,2)$

31.- $x^2+y^2=16$ $\quad x=3$

32.- $y=4x-x^2$ $\quad P(3,3)$

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

a) Una función es creciente, si para todo punto en el dominio al aumentar el valor de la variable independiente x, aumenta el valor de la función o si al disminuir el valor de la variable independiente el valor de la función disminuye.

También se puede decir que observando la gráfica de izquierda a derecha, la gráfica va hacia arriba.

b) Una función es decreciente, si al aumentar el valor de la variable independiente x, disminuye el valor de la función, o si al disminuir el valor de la variable independiente x, el valor de la función aumenta.

También se puede decir que observando la gráfica de derecha a izquierda, la gráfica va hacia abajo.

Para saber si una función es creciente o decreciente en un intervalo de su dominio, se comparan dos valores diferentes en un intervalo que pertenezca al dominio, si se conserva la desigualdad al evaluar la función en ambos puntos entonces la función es creciente, si no se conserva entonces es decreciente.

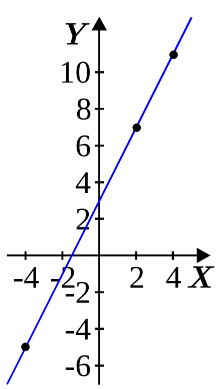
Ejemplo 1
Dada la función $y = 2x + 3$ decir si es creciente o decreciente en $(2,6) \subset \mathbb{R}$.

El dominio son todos los reales, el intervalo $(2,6) \subset \mathbb{R}$, entonces dados $x_1, x_2 \in (2,6)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
x_1 &< x_2 \\
2x_1 &< 2x_2 \\
2x_1 + 3 &< 2x_2 + 3 \\
f(x_1) &< f(x_2) \qquad f \text{ es creciente}
\end{aligned}
$$

La desigualdad se conserva, por lo tanto, la función es creciente.

Haciendo la gráfica de $y = 2x + 3$



En la gráfica se observa que la función es creciente.

Ejemplo 2

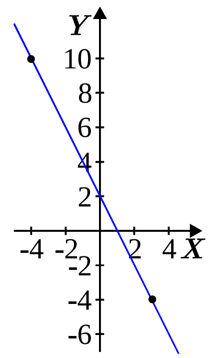
Dada la función $y = -2x + 2$ decir si es creciente o decreciente en el intervalo [0,5).

El dominio son todos los reales, el intervalo $[0,5) \subset \mathbb{R}$, entonces dados $x_1, x_2 \in [0,5)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos:

$$\begin{gathered} x_1 < x_2 \\ -2x_1 > -2x_2 \\ -2x_1 + 2 > -2x_2 + 2 \\ f(x_1) > f(x_2) \qquad f \text{ es decreciente} \end{gathered}$$

La desigualdad cambia, por lo tanto, la función es decreciente.

Haciendo la gráfica de $y = -2x + 2$



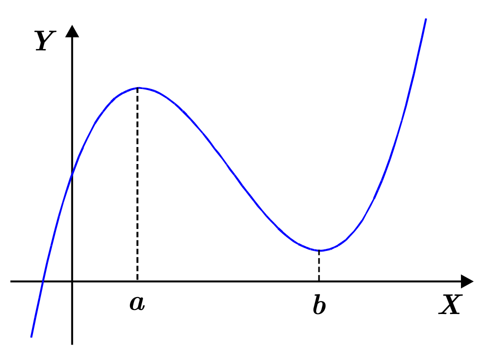
En la gráfica se observa que es decreciente.

El análisis para saber si una función es creciente o decreciente es más fácil si se utiliza la derivada de la función.

Si representamos gráficamente una función, al moverse un punto sobre la gráfica de izquierda a derecha, se observa que a veces va hacia arriba o hacia abajo.

Si el punto va hacia arriba, se dice que la función es creciente.
Si el punto va hacia abajo, se dice que la función es decreciente.

Observando la siguiente gráfica vemos que:



La función es:

Creciente desde $-\infty$ hasta a
Decreciente desde a hasta b
Creciente desde b hasta $+\infty$

Los valores de x en la gráfica $x=a$ y $x=b$ en los cuales la gráfica de la función cambia de creciente a decreciente o al revés, se llaman valores críticos y a los puntos correspondientes $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se les llama puntos críticos.

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación.

$$m=\tan\theta$$

La primera derivada de una función $f'(x)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto cuya abscisa es x.

$$f'(x)=m_T$$

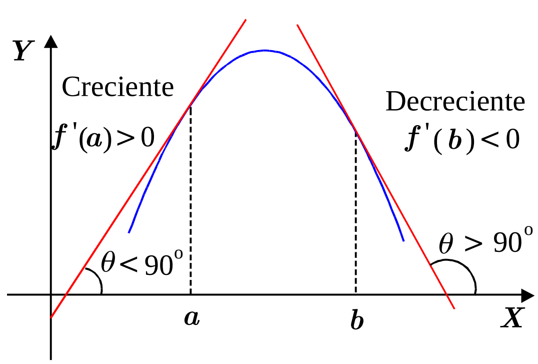
Si θ es un ángulo agudo $<90°$, la pendiente es positiva y por lo tanto la primera derivada $f'(x)$ será >0.

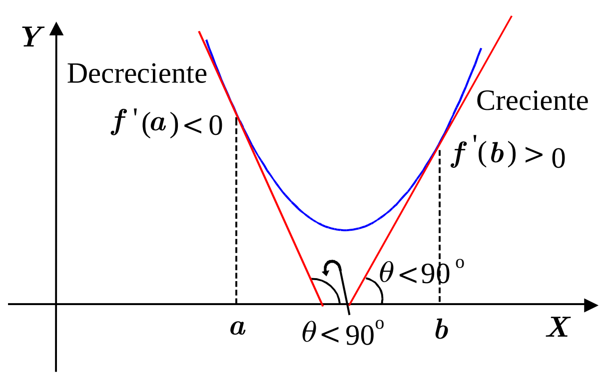
Si θ es un ángulo obtuso $>90°$, la pendiente es negativa y por lo tanto la primera derivada $f'(x)$ será <0.

Entonces: Supongamos que f tiene derivada en (a,b).

$f(x)$ es creciente en (a,b), si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$
$f(x)$ es decreciente en (a,b), si $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$

Gráficamente se vería:





Ejemplo:

Verifica si la función $y=-3x^2+12x-1$ es creciente o decreciente.
Obtenemos $f'(x)$, la igualamos a cero y resolvemos.

$$f'(x)=-6x+12$$

$$-6x+12=0$$

$x=2$ entonces en los intervalos $(-\infty,2)$ y $(2,\infty)$ la derivada es distinta de cero

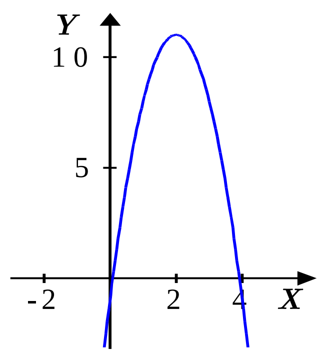
Tomemos un punto en el intervalo $(-\infty,2)$, por ejemplo $x=0$

$f'(0)=-6(0)+12=12$ Positiva, es creciente en $(-\infty,2)$

Tomemos un punto en el intervalo $(2,\infty)$, por ejemplo $x=3$

$f'(3)=-6(3)+12=-18+12=-6$ Negativa, entonces es decreciente en $(2,\infty)$

La gráfica sería:



E J E R C I C I O S

1.- En las siguientes funciones, decir si son crecientes o decrecientes en el intervalo en que se indica. Hacer la gráfica.

a) $y=x^2-6x+9$ $(0,8)$

b) $y=3x-6$ $(-5,0)$

c) $y=\sqrt{x}$ $[0,\infty)$

d) $y=\sqrt{9-x^2}$ $[-3,3]$

e) $y=\sqrt{9+x^2}$ $[-6,6]$

f) $y=x^3$ $[-2,2]$

g) $y=5-2x$ $(0,5]$

FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

a) Una función es **<u>inyectiva</u>** si dos elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes en el rango.

Es decir, en la gráfica de f, no pueden existir dos parejas con distinto primer elemento y segundo elemento igual.

A las funciones inyectivas también se les llama uno a uno.

Ejemplo Sea la función $y=x^2-4x+4$.

El dominio son todos los reales, tomemos 1 y 3 del dominio.

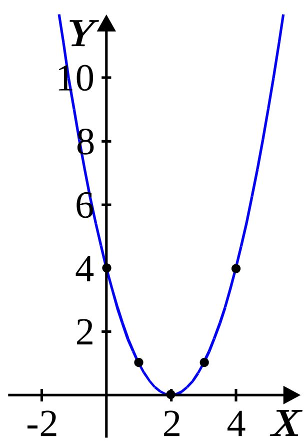
Los valores correspondientes en el rango para $x=1$ y $x=3$ son:

$y=1^2-4(1)+4 = 1-4+4 = 1$. Si $x=1$, entonces $y=1$.

$y=3^2-4(3)+4 = 9-12+4 = 1$. Si $x=3$, entonces $y=1$.

Entonces las parejas son (1,1) y (3,1), como el segundo elemento de las parejas es igual, entonces la función no es inyectiva.

La gráfica de $y=x^2-4x+4$ es:



Nota: Si se tiene la gráfica de una función y se quiere saber si es inyectiva, se trazan rectas paralelas al eje horizontal, si alguna toca a la gráfica en 2 o más puntos entonces no es inyectiva, si ninguna paralela toca a la gráfica en más de un punto entonces sí es inyectiva.

b) Una función es **<u>suprayectiva</u>** si el rango de la función es igual al contradominio de la función.

Ejemplo Sea la función $y = x^2 - 4x + 4$

El contradominio son todos los reales.

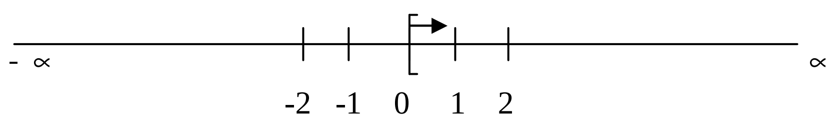
Para hallar el rango se despeja la variable independiente:

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 4x + 4 \\
y &= (x-2)^2 \\
\sqrt{y} &= |x-2| \\
\sqrt{y} + 2 &= x \quad \text{si} \quad x \geq 2 \\
-\sqrt{y} + 2 &= x \quad \text{si} \quad x < 2 \\
x &= \pm\sqrt{y} + 2
\end{aligned}
$$

Analizando las operaciones que afectan a la variable y, existe una raíz par, entonces y debe ser mayor o igual a cero.

$$y \geq 0$$

El rango son los valores mayores o iguales a cero.



Rango = $\left[0,\propto\right)$ = $\{\, y \in \mathbb{R} \;/\; y \geq 0 \,\}$

El rango es un subconjunto de los reales, por lo tanto, la función no es suprayectiva.

Nota: para saber si una función es suprayectiva, se tiene que hallar el rango y el contradominio y compararlos.

c) Una función es <u>**biyectiva**</u> si es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplo Sea la función $y = x^3$.

El dominio son todos los reales puesto que elevar al cubo se le puede aplicar a todo número real.

La función es inyectiva puesto que no hay dos números que elevados al cubo sean iguales.

El contradominio son todos los reales.

Para hallar el rango se despeja la variable independiente x

$$y = x^3$$

$$x=\sqrt[3]{y}$$

Analizamos las operaciones que afectan a la variable y que es solo la raíz cúbica, y como una raíz impar se le puede aplicar a todos los reales entonces el rango son todos los reales.

Rango = $(-\propto,\propto)$ = { $y\in$ **R**}

Como el rango y contradominio son iguales entonces la función es suprayectiva.

La función es inyectiva y suprayectiva, por lo tanto, es biyectiva.

Nota: algunas funciones pueden ser inyectivas y no ser suprayectivas o viceversa, en ambos casos las funciones no son biyectivas.

FUNCIONES INVERSAS

En matemáticas ya estamos acostumbrados a las operaciones inversas, la suma y la resta son operaciones inversas, la multiplicación y la división, la elevación a potencias y la extracción de raíces también lo son.

Esto quiere decir que una de cada par de operaciones deshace la otra operación, es decir, haciendo las dos operaciones una seguida de la otra es como si no hiciéramos nada.

Por ejemplo; Si se suma 5 a x, la suma es $x+5$, si luego se resta 5 de ésta suma la diferencia es $(x+5)-5$ igual a x.

Si x se multiplica por 4 el producto es $4x$, si el producto se divide entre 4 el cociente es $\frac{4x}{4}$ igual a x.

Si x se eleva a la tercera potencia tenemos x^3, si se saca raíz cúbica a la elevación tenemos $\sqrt[3]{x^3}$ igual a x.

Para las funciones existe el concepto de función inversa y se denota como $f^{-1}, g^{-1}, F^{-1}, H^{-1}$, etc...

Debe tenerse muy en cuenta que el -1 no se toma como exponente como lo hacemos en algebra, en funciones éste -1 quiere decir inversa y no $\frac{1}{f}$.

Las operaciones algebraicas se pueden ver como funciones y sus inversas.

Por ejemplo:

a) Sea $f(x) = x+5$ y $g(x) = x-5$

Si hacemos $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ tenemos

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f(x-5) = (x-5)+5 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(x+5) = (x+5)-5 = x$$

b) Sea $f(x) = 4x$ y $g(x) = \dfrac{x}{4}$

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left(\frac{x}{4}\right) = 4\left(\frac{x}{4}\right) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(4x) = \frac{4x}{4} = x$$

c) Sea $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left(x^3\right) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Cada par de funciones f y g satisfacen que:

$$f\left[g(x)\right] = x \qquad \text{y} \qquad g\left[f(x)\right] = x$$

Donde la función g se le llama f^{-1}

A las funciones que satisfacen éstas dos condiciones se les llama funciones inversas.

El dominio de f es el contradominio de $g = f^{-1}$ y el dominio de $g = f^{-1}$ es el contradominio de f.

La condición necesaria para que exista la función inversa es que sea inyectiva o uno a uno, por lo tanto hay veces que se tiene que restringir su dominio.

Ejemplo.- Sea $f(x) = x^2$

El dominio de f son todos los reales y el rango es el intervalo $[0,\infty)$, pero la función no es inyectiva.

Es decir, $f(3) = 9$ y $f(-3) = 9$, para dos valores distintos de x en el dominio les corresponden el mismo valor en el rango.

Si ésta misma función la definimos como $f(x)=x^2$ para $x\in[0,3]$.

El dominio es $[0,3]$ y el rango es $[0,9]$ la situación es diferente, es decir, solo nos fijamos en un pedazo de la función.

Entonces ya no sucede que para dos valores diferentes del dominio se tiene un mismo valor en el rango.

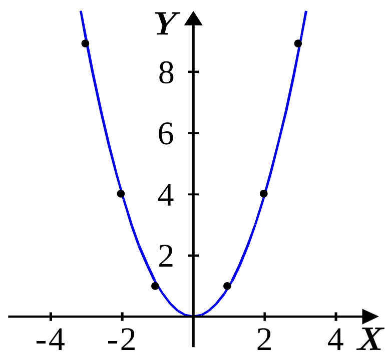
La función definida solo en éste intervalo es inyectiva, entonces se puede hallar la función inversa.

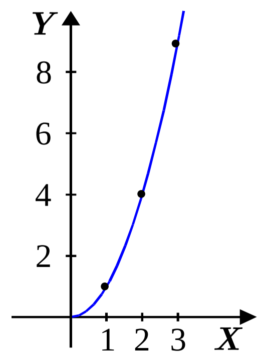
Se dice que una función es biunívoca o uno a uno si para dos valores distintos en el dominio $x_1\neq x_2$ pasa que $f(x_1)\neq f(x_2)$, esto quiere decir que la función es inyectiva.

Por lo tanto, $f(x)=x^2$ no es uno a uno

y $f(x)=x^2$ para $x\in[0,3]$ si es uno a uno.

Si observamos las graficas de $f(x)=x^2$ y $f(x)=x^2$ para $x\in[0,3]$





También podemos decir que una función es uno a uno si es creciente o decreciente en todo su dominio o en todo el intervalo que esta definida.

Por todo lo anterior podemos decir que si f es una función biyectiva y suprayectiva, entonces existe otra función f^{-1} denominada inversa de f donde f^{-1} se define como:

$x=f^{-1}(y)$ si y solo si $y=f(x)$

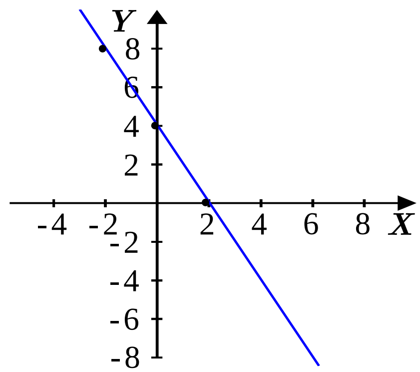
Para verificar si una función es uno a uno, la forma más fácil es hacer la gráfica y observar si trazando rectas horizontales alguna recta corta a la gráfica en más de un punto entonces no es uno a uno, si todas las rectas cortan a la gráfica en un solo punto entonces sí es uno a uno.

Para determinar la inversa de una función se siguen los siguientes pasos.

a) Verificar que la función sea biyectiva.
b) Despejar x en términos de y en la ecuación $y=f(x)$.
c) Intercambiar las (x por y) y las (y por x) en el despeje anterior.
d) Cambiar y por $f^{-1}(x)$

Ejemplo 1.- Sea $f(x) = -2x+4$, verificar que es uno a uno, hallar $f^{-1}(x)$ y hacer las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo plano cartesiano y verificar las composiciones.

a) Haciendo la gráfica de $f(x)$ nos queda como sigue.



En la gráfica se observa que $f(x) = -2x+4$ si es uno a uno.

b) Despejar x de

$$y = -2x+4$$

$$\frac{y-4}{-2} = x$$

$$x = -\frac{1}{2}y+2$$

c) Intercambiar las (x por y) y las (y por x) en el despeje anterior.

$$x = -\frac{1}{2}y+2$$

$$y = -\frac{1}{2}x+2$$

d) Cambiar y por $f^{-1}(x)$

$$y = -\frac{1}{2}x+2$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x+2$$

Por lo tanto, la inversa de $f(x) = -2x+4$ es $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x+2$.

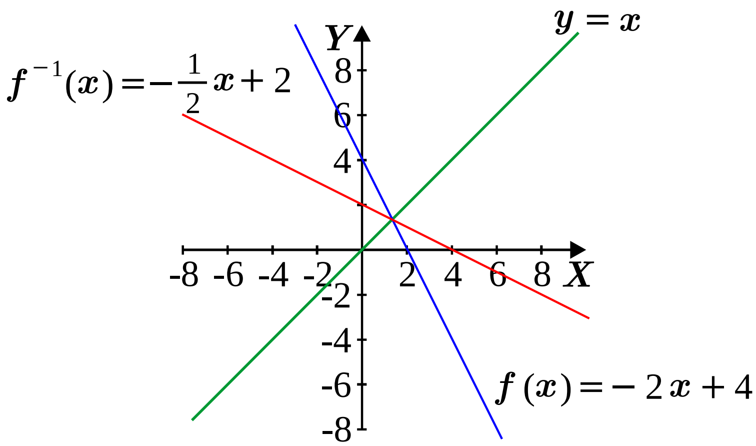
Para saber si las funciones son inversas podemos verificar que las composiciones dan como resultado la función identidad.

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left(-\frac{1}{2}x+2\right) = -2\left(-\frac{1}{2}x+2\right)+4 = x-4+4 = x$$

$$f^{1}\left[f(x)\right] = f(-2x+4) = -\frac{1}{2}(-2x+4)+2 = x-2+2 = x$$

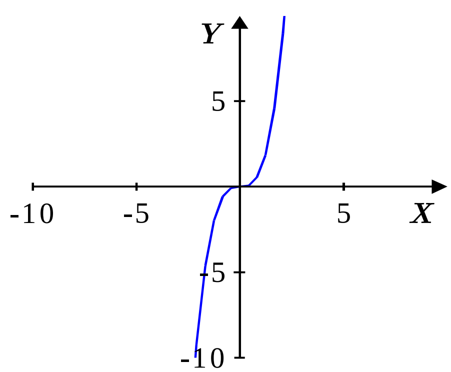
Si hacemos las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ y la función identidad $y = x$ en el mismo plano cartesiano, observaremos que la función identidad acciona como eje de simetría de las funciones inversas, se dice que la gráfica de $f^{-1}(x)$ es una reflexión de la gráfica de $f(x)$ con respecto a la función identidad $y = x$, o viceversa.

Las gráficas de $f(x), f^{-1}(x)$ y $y = x$ son.



Ejemplo 2.- Sea $f(x) = x^3$, verificar que es uno a uno, hallar $f^{-1}(x)$, hacer las gráficas de $f(x), f^{-1}(x)$, $y = x$ en el mismo plano cartesiano y verificar las composiciones.

a) Haciendo la gráfica de $f(x)$ nos queda como sigue.



En la gráfica se observa que $f(x) = x^3$ si es uno a uno.

b) Despejar x de $y = x^3$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

c) Intercambiar las (x por y) y las (y por x) en el despeje anterior.

$$x = \sqrt[3]{y}$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

d) Cambiar y por $f^{-1}(x)$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

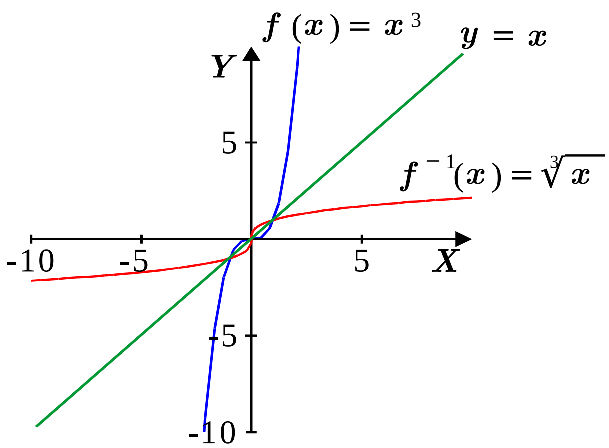
Por lo tanto, la inversa de $f(x)=x^3$ es $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

Las composiciones quedarían:

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

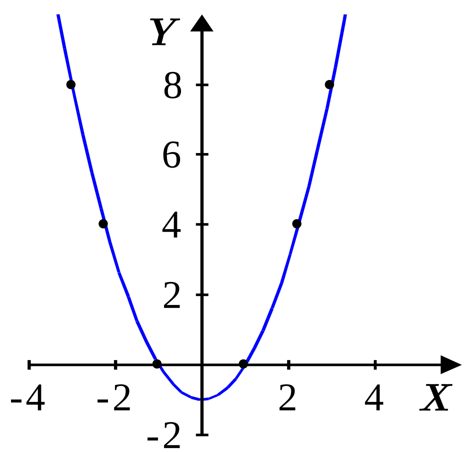
$$f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}\left(x^3\right) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Las gráficas de $f(x), f^{-1}(x)$ y $y=x$ son:



Ejemplo 3.- Sea $f(x)=x^2-1$, verificar que es uno a uno, hallar $f^{-1}(x)$, hacer las gráficas de $f(x), f^{-1}(x)$, $y=x$ en el mismo plano cartesiano y verificar las composiciones.

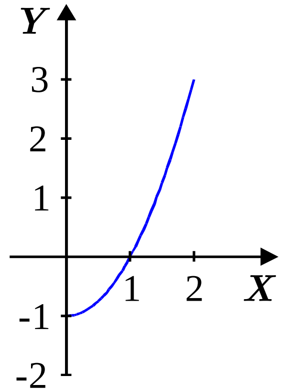
a) Haciendo la gráfica de $f(x)$ nos queda como sigue.



En la gráfica se observa que la función no es uno a uno entonces no tiene inversa.

Sin embargo si definimos la función como $f(x)=x^2-1$ para $x\in[0,2]$, esto hace que $f(x)=x^2-1$ sea uno a uno.

Entonces la gráfica sería:



b) Despejar x de $\quad y = x^2 - 1$

$$\sqrt{y+1} = x$$
$$x = \sqrt{y+1}$$

c) Intercambiar las (x por y) y las (y por x) en el despeje anterior.

$$x = \sqrt{y+1}$$
$$y = \sqrt{x+1}$$

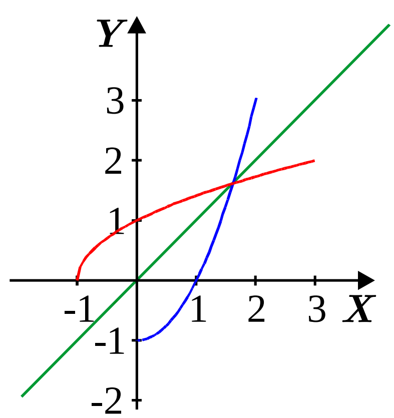
d) Cambiar y por $f^{-1}(x)$

$$y = \sqrt{x+1}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$$

Por lo tanto, la inversa de $f(x) = x^2 - 1$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.
Las composiciones quedarían:

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \sqrt{x+1}^{\,2} - 1 = x + 1 - 1 = x$$
$$f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}\left(x^2 - 1\right) = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad \text{ya que } x \in [0, 2]$$

Las gráficas de $f(x), f^{-1}(x)$ y $y = x$ son:



E J E R C I C I O S

1.- dibujar las gráficas de las siguientes funciones y decir si son uno a uno

a) $f(x)=2x+2$

b) $f(x)=(x^2-4)$

c) $f(x)=4-x^3$

d) $f(x)=(x-2)^4$

e) $f(x)=\sqrt{x+3}$

f) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$

g) $f(x)=|x-2|$

h) $f(x)=6-3x$

i) $f(x)=4-x^2$

j) $f(x)=x^3-2$

k) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

l) $f(x)=(x^2-4)$

2.- En cada una siguientes funciones, decir si son inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = x$

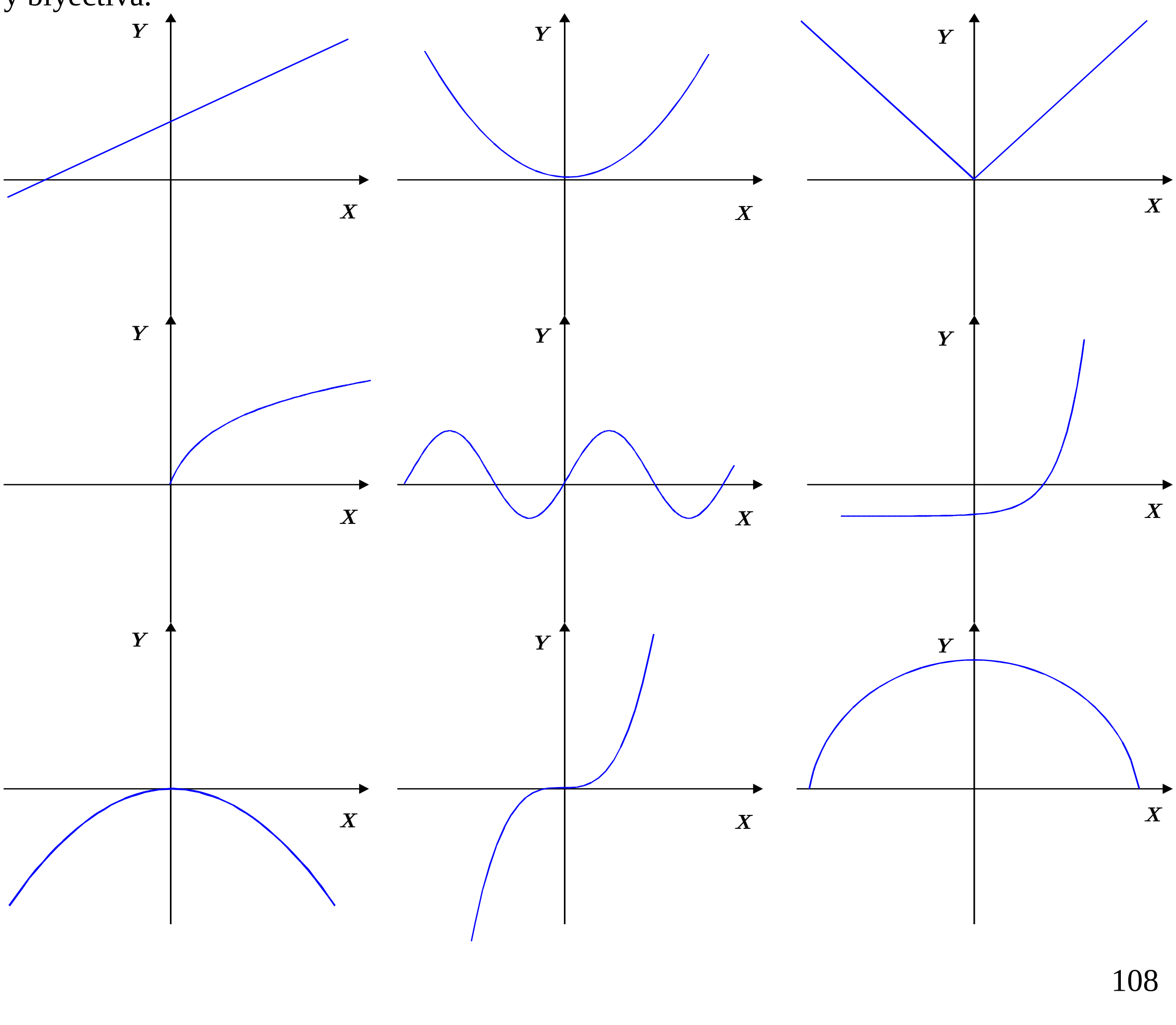
c) $y = x^2$

d) $y = x^3$

e) $y = \sqrt{x}$

f) A = {1, 2, 3, 4} B = {a, e, i, o, u}
f = {(1,a), (2,e), (3,u), (4,o)}

3.- Dadas las siguientes gráficas, decir si pertenecen a una función inyectiva, suprayectiva y biyectiva.



4.- En las siguientes funciones verificar que es uno a uno, hallar $f^{-1}(x)$, hacer las graficas de $f(x), f^{-1}(x)$, $y = x$ en el mismo plano cartesiano y verificar las composiciones.

a) $f(x) = 3 - 2x$

b) $f(x) = x^3 + 2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

d) $f(x) = 3x - 2$

e) $f(x) = (x+2)^3$

f) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

h) $f(x) = x^2$ para $x \in [-4, 0]$

i) $f(x) = -(x-2)^2$ para $x \in (-\infty, 2]$

j) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ para $x \in [-1, 6]$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in (0, \infty)$

l) $f(x) = x^{2/3}$ para $x \in [0, \infty)$

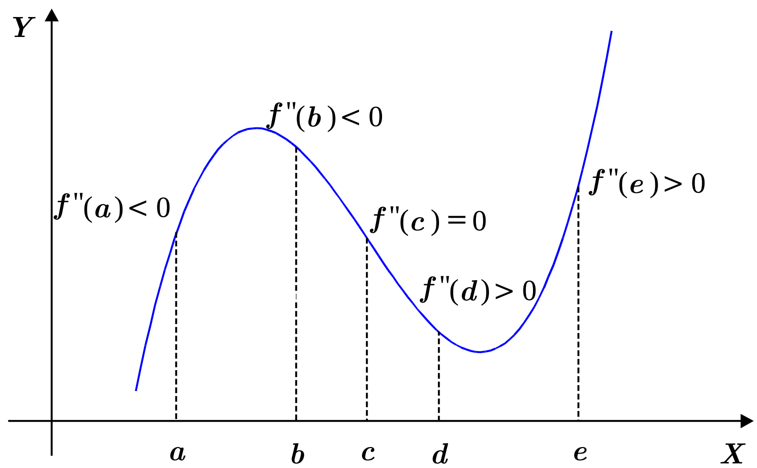
m) $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3$ para $x \in [-1, 1]$

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

i) Si $f''(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es cóncava hacia abajo $\cap$ en (a,b).

ii) Si $f''(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es cóncava hacia arriba $\cup$ en (a,b).

Gráficamente sería:



La gráfica es cóncava hacia abajo en $x\in(-\infty,c)$ ya que $f''(a)<0$ y $f''(b)<0$.

La gráfica es cóncava hacia arriba en $x\in(c,\infty)$ ya que $f''(d)>0$ y $f''(e)>0$.

Un punto en el cual la gráfica cambia de concavidad se le llama punto de inflexión.

La gráfica tiene un punto de inflexión en $x=c$.

Para calcular el sentido de la concavidad de una función en un intervalo cualquiera, sustituimos en $f''(x)$ el valor de un $x\in(a,b)$ en que se quiere saber el sentido de la concavidad, si el resultado es negativo la curva es cóncava hacia abajo $\cap$, si es positivo la curva es cóncava hacia arriba $\cup$.

Para calcular puntos de inflexión de una función:

a) Se calcula la primera, segunda y tercera derivada $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

b) La segunda derivada $f''(x)$ se iguala a cero y se resuelve para x, obteniendo así las raíces que se les llama puntos críticos de $f''(x)$.

c) Analizamos $f'''(x)$.

Sea la raíz x_1 de la 2ª derivada, si $f'''(x_1)$ es diferente de cero entonces hay punto de inflexión x_1.

Ejemplo:

a) Encontrar los puntos de inflexión de $y = x^4 + 2x^3 - 7$ si existen.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x$$
$$f'''(x) = 24x + 12$$

b) Igualamos a cero $f''(x)$ y resolvemos.

$$f''(x) = 0$$
$$12x^2 + 12x = 0$$
$$12x(x+1) = 0$$

$$12x = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = -1$$

Los valores críticos de $f''(x)$ para puntos de inflexión son $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$.

c) Analizamos en la tercera derivada.

Para $x_1 = 0$

$f'''(0) = 24(0) + 12 = 12$ Como es diferente de cero entonces existe un punto de inflexión en $x = 0$

Para $x_2 = -1$

$f'''(-1) = 24(-1) + 12 = -24 + 12 = -12$ Como es diferente de cero entonces existe un punto de inflexión en $x = -1$

Calculamos las ordenadas de $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7$$

Para $x_1 = 0$

$$f(0) = (0)^4 + 2(0)^3 - 7 = -7$$

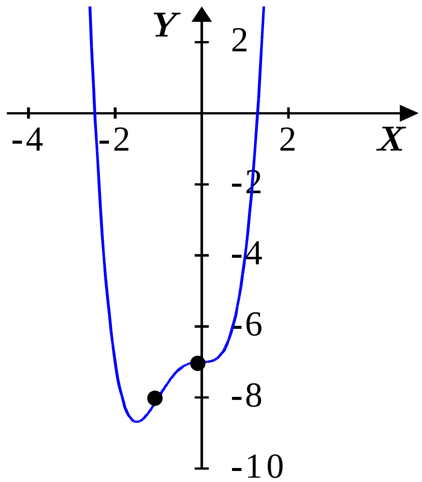
Para $x_2 = -1$

$$f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 7 = -1 - 2 - 7 = -8$$

Las coordenadas de los puntos de inflexión son:

$$(0,-7) \quad \text{y} \quad (-1,-8)$$

La gráfica es:



MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN.

Un máximo y un mínimo relativos no son necesariamente el mayor ni el menor valor de la función, no deben confundirse con los puntos máximos y mínimos de una curva, que son aquellos cuya ordenada es mayor o menor de la gráfica completa de toda la función.

Los valores de x donde hay un máximo o mínimo relativo, se les llama valores críticos, los puntos que les correspondan en la gráfica reciben el nombre de puntos críticos.

Para obtener los puntos máximos y los mínimos relativos, hay dos procedimientos:

1.- Criterio de la primera derivada.

2.- Criterio de la segunda derivada.

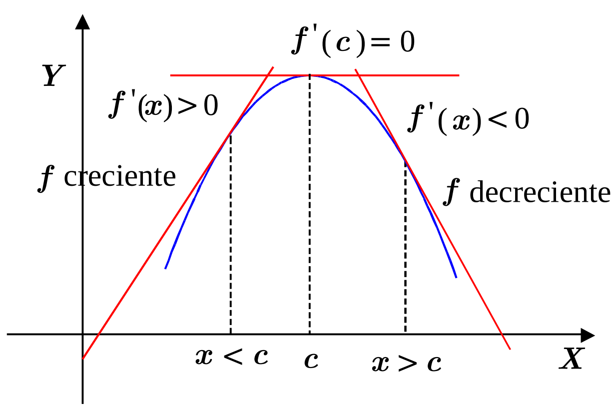
CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Si el ángulo de inclinación θ de una recta tangente, es igual a 0°, entonces m_T vale cero.

Sea f una función derivable en un intervalo (a,b) excepto tal vez en $c \in (a.b)$ y c es un punto crítico de f entonces:

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces f alcanza un máximo en c.

Gráficamente sería:

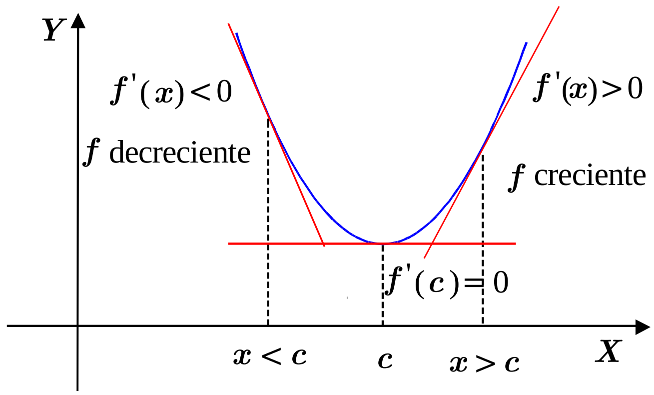


En un máximo relativo, la función pasa de creciente a decreciente, también el valor de la derivada pasa de positiva a negativa, de $+$ a $-$.

Sea f una función derivable en un intervalo (a,b) excepto tal vez en $c \in (a.b)$ y c es un punto crítico de f entonces:

Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces f alcanza un mínimo en c.

Gráficamente sería:



En un mínimo relativo, la función pasa de decreciente a creciente, también el valor de la derivada pasa de negativa a positiva, de $-$ a $+$.

Si $f'(x)$ no cambia de signo entonces $f(x)$ no alcanza máximo ni mínimo en c

Los pasos para calcular los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$ son:

a) Calcular la primera derivada $f'(x)$ y se analiza dónde la derivada no existe.

Si $f'(x)$ existe.

b) $f'(x)$ se iguala a cero y se resuelve. Las raíces $x_1, x_2, x_3, \ldots$ son los valores críticos para los cuales la función puede tener un máximo un mínimo o no existir ninguno de los dos.

c) Se analiza $f'(x)$:

Tomamos el primer valor crítico y se calcula $f'(x)$ en un valor a la izquierda del valor crítico y en otro valor a la derecha del valor crítico, si al evaluar a la izquierda es < 0 y al evaluar a la derecha es > 0, el valor crítico es un mínimo, si al evaluar a la izquierda es > 0 y al evaluar a la derecha es < 0, el valor crítico es un máximo.

En forma semejante se hace para todos los valores críticos encontrados.

Si la derivada pasa de $(+ \text{ a } +)$ positiva a positiva o de $(- \text{ a } -)$ negativa a negativa, no podemos señalar máximo o mínimo en ese valor.

d) Para hallar las ordenadas de los valores máximos y mínimos relativos, sustituimos el valor de las abscisas en la función original.

Ejemplo:

Calcular los puntos máximos y mínimos relativos de $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$, utilizando criterio de la primera derivada.

a) Calculamos $f'(x)$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

b) Igualamos a cero la primera derivada y resolvemos.

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$
$$3\left(3x^2 - 2x - 5\right) = 0$$
$$(3x)^2 - 2(3x) - 15 = 0$$
$$(3x - 5)(3x + 3) = 0$$
$$(3x - 5)(x + 1) = 0$$

$$3x - 5 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$$
$$x = \frac{5}{3} \qquad\qquad x = -1$$

Los valores críticos para máximos y mínimos son $x = \frac{5}{3}$ y $x_2 = -1$.

c) Se analiza $f'(x)$:

Para $x = \frac{5}{3}$ $\quad 1 \longleftarrow \frac{5}{3} \longrightarrow 2$ $\quad$ uno a la izquierda y dos a la derecha.

$$f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 5 = 3 - 2 - 5 = -4 \qquad \text{Negativa.}$$
$$f'(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 5 = 12 - 4 - 5 = 3 \qquad \text{Positiva.}$$

Como la derivada pasa de $-$ a $+$, entonces hay un mínimo cuando $x = \frac{5}{3}$.

Para $x = -1$ $\quad -2 \longleftarrow -1 \longrightarrow 0$ $\quad$ menos dos a la izquierda y cero a la derecha.

$$f'(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) - 5 = 12 + 4 - 5 = 11 \qquad \text{Positiva.}$$
$$f'(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 5 = 0 - 0 - 5 = -5 \qquad \text{Negativa.}$$

Como la derivada pasa de $+$ a $-$, entonces hay un máximo cuando $x = -1$.

d) Calculamos las ordenadas de los valores máximos y mínimos:

Para $x = \frac{5}{3}$, $\quad f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{3}\right) + 7$

$$= \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{25}{3} + 7 = \frac{14}{27}$$

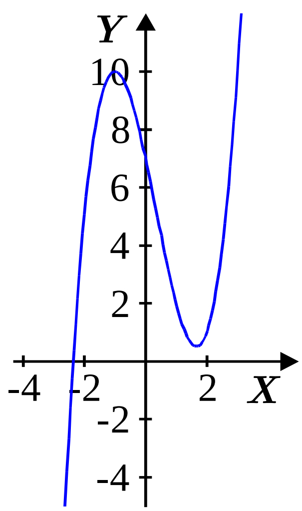
Entonces en el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{27}\right)$ hay un mínimo relativo de la función $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$

Para $x = -1$, $\quad f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) + 7$

$$= -1 - 1 + 5 + 7 = 10$$

Entonces en el punto $(-1, 10)$ hay un máximo relativo de la función $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$

La gráfica sería:



CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

$f(x)$ **tiene un máximo relativo en** $x = c$ **si cumple las siguientes condiciones.**

a) Que $f'(c) = 0$

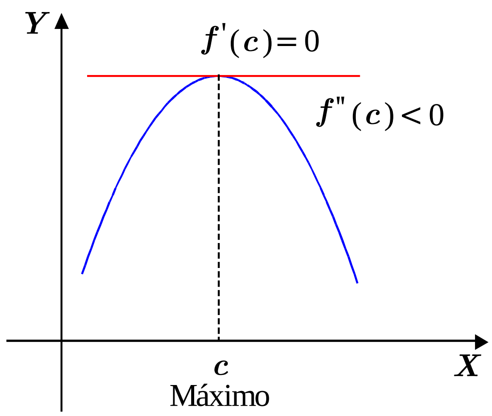
b) Que $f''(c) < 0$

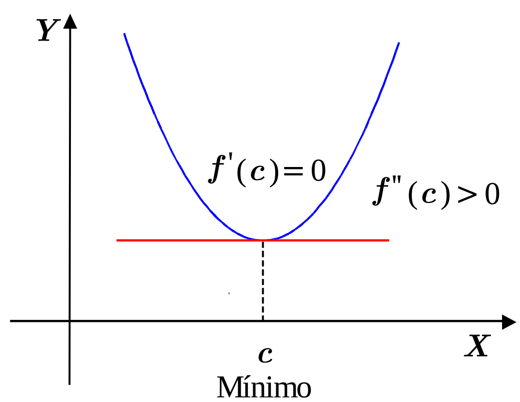
$f(x)$ **tiene un mínimo relativo en** $x = c$ **si cumple las siguientes condiciones.**

a) Que $f'(c) = 0$

b) Que $f''(c) > 0$

Gráficamente sería:





Los pasos para calcular los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$ aplicando el criterio de la segunda derivada son:

a) Calcular la primera derivada $f'(x)$, y la segunda derivada $f''(x)$.

b) $f'(x)$ se iguala a cero y se resuelve. Las raíces $x_1, x_2, x_3, \ldots$ son los valores críticos para los cuales la función puede tener un máximo un mínimo o no existir ninguno de los dos.

c) Sustituir x_1 valor crítico en f'', si $f''(x_1) < 0$, entonces x_1 es un máximo relativo, si $f''(x_1) > 0$, entonces x_1 es un mínimo relativo.

d) Para hallar las ordenadas de los valores máximos y mínimos relativos, sustituimos el valor de las abscisas en la función original.

Ejemplo 1:

Calcular los puntos máximos y mínimos relativos de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$, utilizando el criterio de la segunda derivada. Hacer la gráfica.

a) Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$$
$$f'(x) = x^2 + 2x - 3$$
$$f''(x) = 2x + 2$$

b) Igualamos a cero la primera derivada y resolvemos.

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \qquad\qquad x - 1 = 0$$
$$x = -3 \qquad\qquad x = 1$$

Los valores críticos para máximos y mínimos son $x = -3$ y $x = 1$.

c) Sustituimos $x = -3$ en $f''(x)$.

$$f''(x) = 2x + 2$$
$$f''(-3) = 2(-3) + 2 = -6 + 2 = -4$$ Negativa, entonces en $x = -3$ hay un máximo.

Sustituimos $x = 1$ en $f''(x)$.

$$f''(x) = 2x + 2$$
$$f''(1) = 2(1) + 2 = 2 + 2 = 4$$ Positiva, entonces en $x = 1$ hay un mínimo.

d) Calculamos las ordenadas de los valores máximos y mínimos:

Para $x = -3$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$$
$$f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 1$$
$$= \frac{1}{3}(-27) + 9 + 9 + 1$$
$$= -9 + 9 + 9 + 1 = 10$$

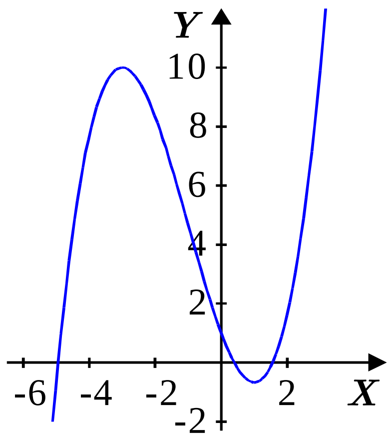
En el punto $(-3, 10)$ existe un máximo relativo.

Para $x=1$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$$
$$f(1)=\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2-3(1)+1$$
$$=\frac{1}{3}+1-3+1=-\frac{2}{3}$$

En el punto $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ existe un mínimo relativo.

La gráfica sería:



Ejemplo 2:

Calcular los puntos máximos y mínimos relativos de $y=2x^3-3x^2-12x+2$, utilizando el criterio de la segunda derivada. Hacer la gráfica.

a) Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$.

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$$
$$f'(x)=6x^2-6x-12$$
$$f''(x)=12x-6$$

b) Igualamos a cero la primera derivada y resolvemos.

$$f'(x)=0$$
$$6x^2-6x-12=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x-2=0 \qquad\qquad x+1=0$$
$$x=2 \qquad\qquad x=-1$$

Los valores críticos para máximos y mínimos son $x=2$ y $x=-1$.

c) Sustituimos $x=2$ en $f''(x)$.

$$f''(x)=12x-6$$

$$f''(2)=12(2)-6=24-6=18$$ Positiva, entonces en $x=2$ hay un mínimo.

Sustituimos $x=-1$ en $f''(x)$.

$$f''(x)=12x-6$$

$$f''(-1)=12(-1)-6=-12-6=-18$$ Negativa, entonces en $x=-1$ hay un máximo.

d) Calculamos las ordenadas de los valores máximos y mínimos:

Para $x=2$

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$$

$$f(2)=2(2)^3-3(2)^2-12(2)+2$$

$$=16-12-24+2=-18$$

En el punto $(2,-18)$ existe un mínimo relativo.

Para $x=-1$

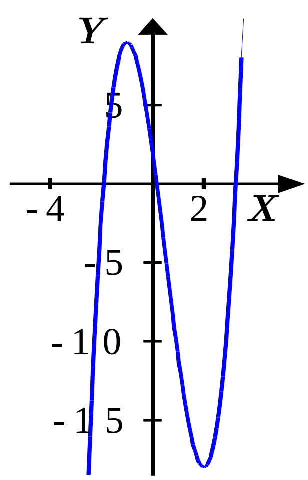
$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$$

$$f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)+2$$

$$=-2-3+12+2=9$$

En el punto $(-1,9)$ existe un máximo relativo.

La gráfica sería:



Ejemplo 3:

Calcular los puntos máximos y mínimos relativos utilizando el criterio de la segunda derivada, hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de la función $y=3x^4-4x^3+1$. Hacer la gráfica.

a) Calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

$$f(x)=3x^4-4x^3+1$$
$$f'(x)=12x^3-12x^2$$
$$f''(x)=36x^2-24x$$
$$f'''(x)=72x-24$$

b) Igualamos a cero la primera derivada y resolvemos.

$$f'(x)=0$$
$$12x^3-12x^2=0$$
$$12x^2(x-1)=0$$

$$12x^2=0 \qquad\qquad x-1=0$$
$$x=0 \qquad\qquad x=1$$

Los valores críticos para máximos y mínimos son $x=0$ y $x=1$.

c) Sustituimos $x=0$ en $f''(x)$.

$$f''(x)=36x^2-24x$$

$f''(0)=36(0)^2-24(0)=0$ Ni positiva ni negativa, entonces en no se puede concluir la existencia de máximo o mínimo.

Sustituimos $x=1$ en $f''(x)$.

$$f''(x)=36x^2-24x$$

$f''(1)=36(1)^2-24(1)=36-24=12$ Positiva, entonces en $x=1$ hay un mínimo.

d) Calculamos las ordenadas de los valores máximos y mínimos:

Para $x=1$

$$f(x)=3x^4-4x^3+1$$
$$f(1)=3(1)^4-4(1)^3+1=0$$

En el punto $(1,0)$ existe un máximo relativo.

e) Igualamos a cero la segunda derivada y resolvemos.

$$f''(x)=0$$
$$36x^2-24x=0$$
$$12x(3x-2)=0$$

$$12x=0 \qquad\qquad 3x-2=0$$
$$x=0 \qquad\qquad x=\frac{2}{3}$$

Los valores críticos para puntos de inflexión son $x=0$ y $x=\frac{2}{3}$.

f) Analizamos en la tercera derivada.

$$f'''(x)=72x-24$$

Para $x=0$

$$f'''(0)=72(0)-24=-24$$ como es diferente de cero entonces existe un punto de inflexión.

Para $x=\frac{2}{3}$

$$f'''\left(\frac{2}{3}\right)=72\left(\frac{2}{3}\right)-24=48-24=24$$ como es diferente de cero entonces existe un punto de inflexión.

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right)=36\left(-\frac{1}{2}\right)^2-24\left(-\frac{1}{2}\right)=9+12=21$$ Positiva es cóncava hacia arriba.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=36\left(\frac{1}{2}\right)^2-24\left(\frac{1}{2}\right)=9-12=-3$$ Negativa es cóncava hacia arriba.

Calculamos las ordenadas de $x=0$ y $x=\frac{2}{3}$.

$$f(x)=3x^4-4x^3+1$$

Para $x=0$

$$f(0)=3(0)^4-4(0)^3+1=1$$

Para $x=\frac{2}{3}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^4-4\left(\frac{2}{3}\right)^3+1=\frac{16}{81}-\frac{32}{27}+1=\frac{11}{27}$$

Las coordenadas de los puntos de inflexión son:

$$(0,1) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{3},\frac{11}{17}\right)$$

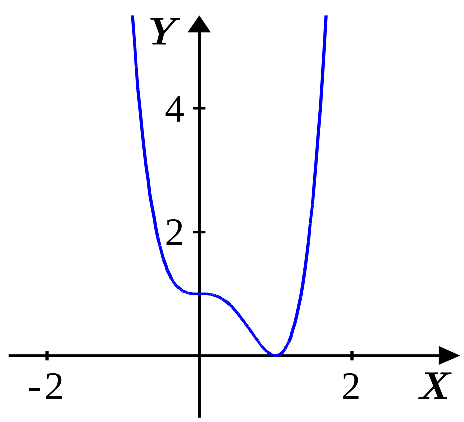
g) Analizamos los intervalos $(-\infty,0),\left(0,\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ con la segunda derivada.

$f''\left(-\frac{1}{2}\right)=36\left(-\frac{1}{2}\right)^2-24\left(-\frac{1}{2}\right)=9+12=21$ positiva, es cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)$.

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=36\left(\frac{1}{2}\right)^2-24\left(\frac{1}{2}\right)=9-12=-3$ negativa, es cóncava hacia abajo en $\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

$f''(1)=36(1)^2-24(1)=36-24=12$ positiva, es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$.

La gráfica sería:



Conclusiones:

La función $f(x)=3x^4-4x^3+1$ es:

En $(-\infty,0)$ es cóncava hacia arriba.

En $x=0$ tiene un punto de inflexión $(0,1)$.

En $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ es cóncava hacia abajo.

En $x=\frac{2}{3}$ tiene un punto de inflexión $\left(\frac{2}{3},\frac{11}{17}\right)$.

En $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ es cóncava hacia arriba.

En $x=1$ tiene un punto mínimo relativo $(1,0)$.

En $(1,\infty)$ es cóncava hacia arriba

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Dada una función $f(x)$:

Paso 1.- Calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

Paso 2.- Igualar a cero $f'(x)$ y resolver para x. Las raíces son los valores críticos para máximos y mínimos.

Paso 3.- Igualar a cero $f''(x)$ y resolver para x. Las raíces son los valores críticos para puntos de inflexión.

Paso 4.- Elaborar una tabla, asignándole a x valores menores, iguales y mayores que cada valor critico encontrado y observamos valores y signos que adquieren $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$, para saber intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidades, puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión.

Paso 5.- Dibujamos la grafica con los datos obtenidos en el paso 4.

Ejemplo 1:

Dibujar la gráfica de la siguiente función $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, indicando los intervalos donde es creciente o decreciente, donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo, puntos máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

Paso 1.- Calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

Paso 2.- Igualar a cero $f'(x)$ y resolver.

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \qquad\qquad x - 1 = 0$$
$$x = 3 \qquad\qquad x = 1$$

Los valores críticos para máximos y mínimos son $x = 3$ y $x = 1$.

Paso 3.- Igualar a cero $f''(x)$ y resolver.

$$f''(x)=0$$
$$6x-12=0$$
$$x=\frac{12}{6}=2$$

El valor crítico para punto de inflexión es $x=2$.

Paso 4.- Elaborar tabla.

Consideremos los intervalos $(-\infty,1)$, $(1,3)$ y $(3,\infty)$

$0\in(-\infty,1)$ $\quad f'(0)=3(0)^2-12(0)+9=9$ $\quad$ positivo f es creciente en $(-\infty,1)$.

$2\in(1,3)$ $\quad f'(2)=3(2)^2-12(2)+9=12-24+9=-3$ $\quad$ negativa f es decreciente en $(1,3)$.

$4\in(3,\infty)$ $\quad f'(4)=3(4)^2-12(4)+9=48-48+9=9$ $\quad$ positiva f es creciente en $(3,\infty)$.

Evaluamos $f''(x)=6x-12$ en los puntos críticos.

$f''(1)=6(1)-12=6-12=-6$ $\quad$ negativa, hay un máximo $x=1$.

$f''(3)=6(3)-12=18-12=6$ $\quad$ positivo, hay un mínimo en $x=3$.

Consideremos los intervalos $(-\infty,2)$ y $(2,\infty)$

$0\in(-\infty,2)$ $\quad f''(0)=6(0)-12=-12$ $\quad$ negativa, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,2)$.

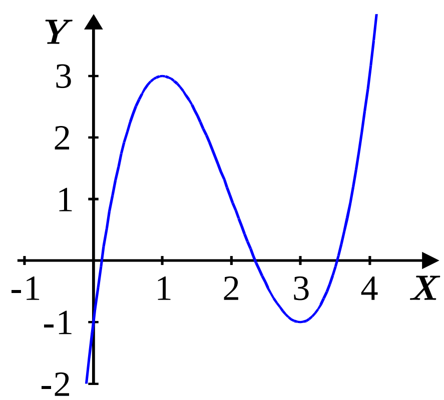
$3\in(2,\infty)$ $\quad f''(3)=6(3)-12=18-12=6$ $\quad$ positiva, f es cóncava hacia arriba en $(2,\infty)$.

Evaluamos $f'''(x)=6$ en el punto crítico $x=2$.

$f'''(2)=6$ $\quad$ diferente de cero, entonces $x=2$ es un punto de inflexión.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**CONCLUSIÓN**
$x<1$		$+$	$-$	**Creciente y cóncava** $\cap$
$x=1$	3	0	$-$	**Máximo en** $(1,3)$
$1<x<2$		$-$	$-$	**Decreciente y cóncava** $\cap$
$x=2$	1	$-$	0	**Punto de inflexión en** $(2,1)$
$2<x<3$		$-$	$+$	**Decreciente y cóncava** $\cup$
$x=3$	-1	0	$+$	**Mínimo en** $(3,-1)$
$x>3$		$+$	$+$	**creciente y cóncava** $\cup$

Paso 5.- Elaborar la gráfica con los datos de la tabla.



EJERCICIOS

Dibujar la gráfica de las siguientes funciones, indicando los intervalos donde es creciente o decreciente, donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo, puntos máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

1) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
2) $y = x^4 - 18x^2 + 20$
3) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 9$
4) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$
5) $y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x + 1$
6) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$
7) $y = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
8) $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$
9) $y = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
10) $y = 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 12x + 12$
11) $y = x^3 - 12x + 1$
12) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$
13) $y = x^4 - 4x^3 + 16x$
14) $y = 3x^4 - 4x^3 - 1$
15) $y = x^4 - 2x^3 - 1$
16) $y = x^4 - 4x^3$
17) $y = x^3 - 4x$
18) $y = 3x^3 - x + 1$
19) $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$
20) $y = 3x^5 + 5x^3$
21) $y = x^3 + x^2 - 5x$
22) $y = x^2(x+4)^3$
23) $y = 3x^5 + 5x^4$
24) $y = 3x^{2/3} - 2x$
25) $y = 3x^{1/3} - x$
26) $y = 3x^{4/3} - 4x$
27) $y = x^{1/3} + 2x^{4/3}$
28) $y = x^3 - 5x + 4$
29) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$
30) $y = x^3 - 9x + 1$
31) $y = x^4 - 3x^3 + 2x$
32) $y = x^4 + 8x - 2$
33) $y = x^5 - 2x^3 + 1$
34) $y = x^3 - 3x^2 + 4$
35) $y = x^5 - 20x^2 + 1$
36) $y = x^3 + 3x + 1$
37) $y = x^3 - 3x + 1$

PROBLEMAS PRÁCTICOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Estamos, dentro del estudio del cálculo, en un punto fundamental que es la aplicación práctica de los conocimientos adquiridos en aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial.

Resolver problemas prácticos de máximos y mínimos, significa en la mayoría de los casos, el buen uso de los recursos, para no gastar más de lo necesario o no desperdiciar, es decir, optimizar los recursos, obteniendo el máximo provecho de ellos.

No existe un procedimiento general para resolver problemas prácticos de máximos y mínimos, pero en la mayoría de ellos podemos guiarnos por el siguiente orden.

a) Si el problema nos lo permite, debemos elaborar un esquema del mismo, que incluya los datos y variables.

b) A partir del enunciado del problema, aplicar nuestros conocimientos de matemáticas, para establecer tantas relaciones entre datos y variables como sea posible.

c) Con lo anterior determinar la función que deseamos maximizar o minimizar.

d) Si la expresión resultante contiene más de una variable, las condiciones del problema proporcionarán suficientes relaciones entre éstas, para que la función pueda expresarse en términos de una sola variable.

d) Calculamos los máximos y mínimos de la función, por cualquiera de los dos métodos.

e) Siempre es conveniente construir la gráfica de la función para comprobar los resultados obtenidos.

Ejemplo 1: Encuentra dos números positivos cuya suma sea 60 y el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

Sea el primer número = x y el segundo número = y

Entonces $x + y = 60$

$$p = x\left(y^2\right)$$

El problema es maximizar el producto, por lo tanto, se debe de tener la función p en términos de una sola variable.

Despejamos y de $x + y = 60$, y la sustituimos en $p = x\left(y^2\right)$

$$y = 60 - x$$

$$p = x\left(y^2\right)$$

$$= x\left(60 - x\right)^2 = x\left(3600 - 120x + x^2\right)$$

$$= 3600x - 120x^2 + x^3$$

$p = 3600x - 120x^2 + x^3$ Que es la función a maximizar.

Paso 1.- Hallar p' y p''

$$p' = 3600 - 240x + 3x^2$$
$$p'' = -240 + 6x$$

Paso 2.- $p' = 0$ y resolver.

$$3600 - 240x + 3x^2 = 0$$

Dividimos entre 3

$$x^2 - 80x + 1200 = 0$$

Resolvemos

$$x = \frac{-(-80) \pm \sqrt{80^2 - 4(1)(1200)}}{2(1)} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4800}}{2} = \frac{80 \pm 40}{2}$$

De donde

$$x_1 = 60$$

$x_2 = 20$ Que son los valores críticos.

El valor de $x_1 = 60$ no sirve, puesto que el otro número tendría que ser 0 y el producto no sería máximo.

Evaluamos la segunda derivada en $x_2 = 20$

$p''(20) = -240 + 6(20) = -240 + 120 = -120$ Negativa, entonces en $x_2 = 20$ hay un máximo.

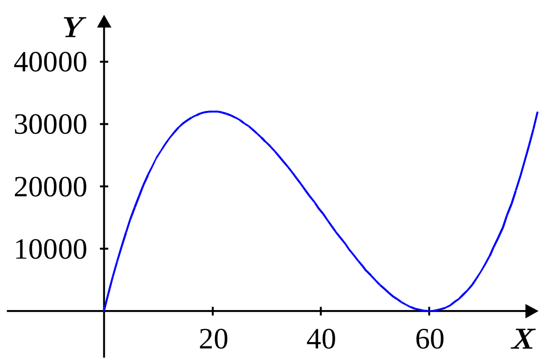
Para hallar el otro número y

$$y = 60 - x = 60 - 20 = 40$$
$$p = x(y^2) = 20(40)^2 = 32000$$

Conclusiones:

Primer número $x = 20$
Segundo número $y = 40$
Producto máximo 32000

La gráfica de $p = 3600x - 120x^2 + x^3$ es:



Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

También podemos resolver éste problema despejando x en vez de y.

Despejamos x de $x + y = 60$, y la sustituimos en $p = x(y^2)$

$$x = 60 - y$$
$$p = x\left(y^2\right) = \left(60 - y\right)y^2 = 60y^2 - y^3$$

$p = 60y^2 - y^3$ Que es la función a maximizar.

Paso 1.- Hallar p' y p''

$$p' = 120y - 3y^2$$
$$p'' = 120 - 6y$$

Paso 2.- $p' = 0$ y resolver.

$$120y - 3y^2 = 0$$
$$3y\left(40 - y\right) = 0$$

$y_1 = 0$ y $40 - y = 0$

$$y_2 = 40$$

De donde

$$y_1 = 0$$

$y_2 = 40$ Que son los valores críticos.

El valor de $y_1 = 0$ no sirve, puesto que el otro número tendría que ser 60 y el producto no sería máximo.

Evaluamos la segunda derivada en $y_2 = 40$

$p''\left(40\right) = 120 - 6\left(40\right) = 120 - 240 = -120$ Negativa, entonces en $y_2 = 40$ hay un máximo.

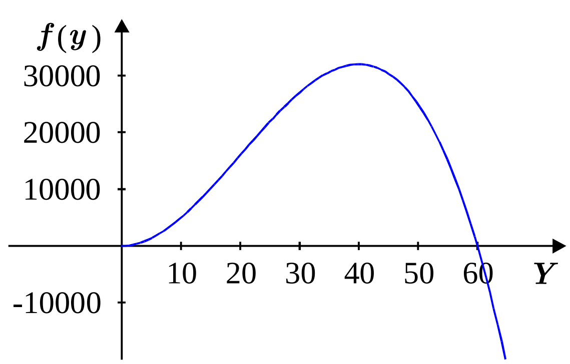
Para hallar el otro número x

$$x = 60 - y = 60 - 40 = 20$$
$$p = x\left(y^2\right) = 20\left(40\right)^2 = 32000$$

Conclusiones:

Primer número $x = 20$
Segundo número $y = 40$
Producto máximo 32000

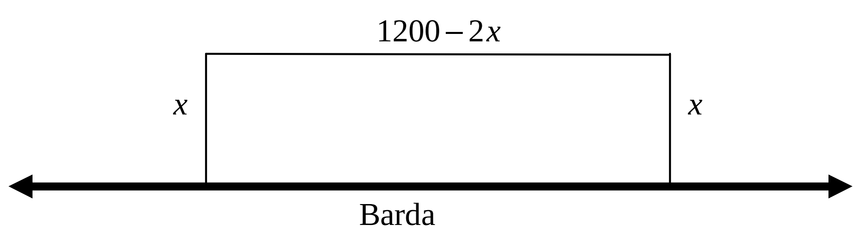
La gráfica de $p\left(y\right) = 60y^2 - y^3$ sería:



Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

Ejemplo 2: Una persona tiene un muro de piedra en un costado de un terreno. Desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados, si dispone de 1,200 metros de malla para hacer la cercar ¿qué dimensiones debe tener el corral para encerrar la mayor área posible?

Hacer un dibujo del terreno.
Como disponemos de 1,200 metros de malla para cercar, entonces $2x+y=1200$



El área es:

$$A(x)=x(1200-2x)=1200x-2x^2 \qquad \text{Que es la función a maximizar.}$$

Hallando la primera y la segunda derivada

$$A'=1200-4x$$
$$A''=-4$$

Igualando a cero A' y resolviendo

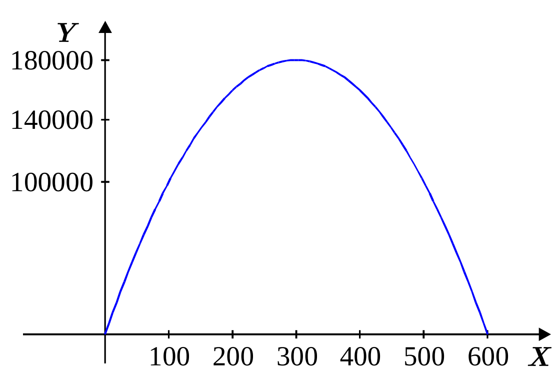
$$1200-4x=0$$
$$x=300 \qquad \text{valor crítico.}$$

Evaluamos la segunda derivada en $x=300$

$$A''(300)=-4$$ Negativa, entonces en $x=300$ hay un máximo.

Conclusiones:
El ancho del corral debe ser de 300 metros.
El largo es de $1200-2x=1200-2(300)=1200-600=600$ metros
El área máxima es de $1200x-2x^2=1200(300)-2(300)^2=180000$ metros.

La gráfica de $A(x)=1200x-2x^2$ es:

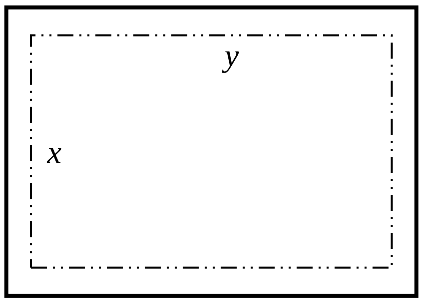


Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

Ejemplo 3: Una página rectangular contiene 65 cm^2 de impresión. Los márgenes superior e inferior de la página tienen 0.5 cm de anchura cada uno, los márgenes laterales tienen 1 cm de anchura cada uno. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página de tal manera que la cantidad de papel a emplear sea mínima?

Hacemos un dibujo de cómo sería la página.

Llamamos x al largo del texto y y al ancho.



$$x \bullet y = 65 \quad cm^2$$
$$A = (x+2)(y+1)$$

El problema es minimizar el área, por lo tanto, se debe de tener la función A en términos de una sola variable.

Despejamos y de $x \bullet y = 65$, y la sustituimos en $A = (x+2)(y+1)$

$$y = \frac{65}{x}$$
$$\begin{aligned} A &= (x+2)(y+1) \\ &= (x+2)\left(\frac{65}{x}+1\right) \\ &= 65 + x + \frac{130}{x} + 2 \\ A &= x + \frac{130}{x} + 67 \end{aligned}$$

Que es la función a minimizar.

Hallando la primera y la segunda derivada

$$A' = 1 - \frac{130}{x^2}$$
$$A'' = \frac{260}{x^3}$$

Igualando a cero A' y resolviendo

$$1 - \frac{130}{x^2} = 0$$
$$x = \pm\sqrt{130} \approx \pm 11.40$$
$$x_1 = 11.40$$
$$x_2 = -11.40$$

Son los valores críticos para máximos y mínimos.

El valor de $x_2 = -11.40$ no nos sirve por ser negativo.

Evaluamos la segunda derivada en $x_1 = 11.40$

$A''(11.40) = \frac{260}{11.40^3} = 0.17549$ Positiva, entonces en $x_1 = 11.40$ hay un mínimo.

Para encontrar el valor de y

$$y = \frac{65}{x} = \frac{65}{11.40} = 5.70$$

El área de la página es:

$$\begin{aligned} A &= (x+2)(y+1) \\ &= (11.40+2)(5.70+1) \\ &= 89.78 \quad \text{cm}^2 \end{aligned}$$

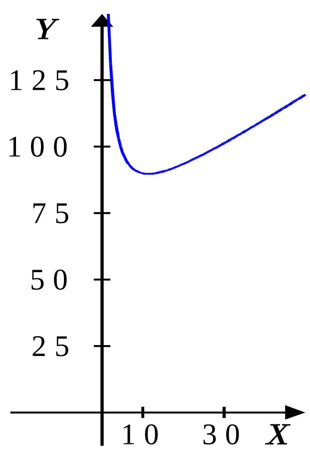
Conclusiones:

El ancho de la página es 6.70 cm

El largo de la página es 13.40 cm

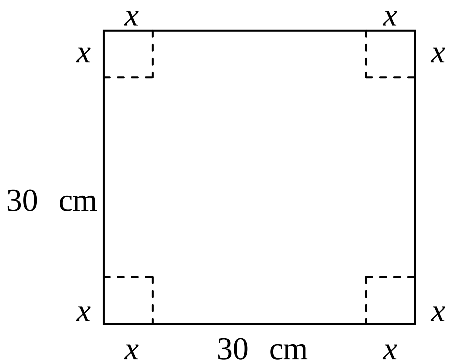
El área mínima es 98.78 cm^2

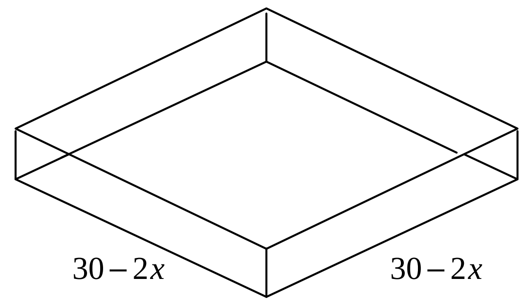
La gráfica de $A = x + \frac{130}{x} + 67$ es:



Ejemplo 4: Se desea construir una caja sin tapa, cortando cuadros en las esquinas de una hoja de cartón de 30 cm de lado. ¿De qué medida deben cortarse los cuadrados en las esquinas para obtener el máximo volumen de la caja?

Hacemos un dibujo de cómo sería la caja.





El volumen de la caja es:

$$V = \text{ largo por ancho por alto}$$
$$V = (30-2x)(30-2x)\,x$$
$$= \left(900-120x+4x^2\right)x$$
$$V = 900x-120x^2+4x^3 \qquad \text{Que es la función a maximizar.}$$

Hallando la primera y la segunda derivada

$$V' = 900-240x+12x^2$$
$$V'' = -240+24x$$

Igualando a cero V' y resolviendo

$$900-240x+12x^2 = 0$$
$$x^2-20x+75=0$$
$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2-4(1)(75)}}{2(1)} = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{2} = \frac{20 \pm 10}{2}$$
$$x_1 = 15$$
$$x_2 = 5 \qquad \text{Son los valores críticos.}$$

El valor de $x_2 = 15$ no nos sirve, pues se obtiene volumen cero.

Evaluamos la segunda derivada en $x_2 = 5$

$$V''(5) = -240+24x = -240+24(5) = -120$$

Negativa, entonces en $x_2 = 5$ hay un máximo.

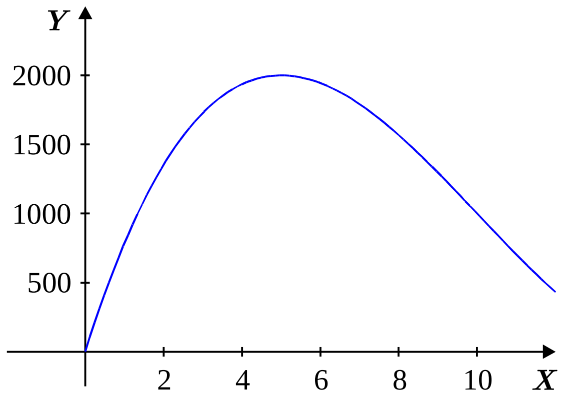
El volumen es de:

$$V(5) = 900(5) - 120(5)^2 + 4(5)^3 = 4500-3000+500 = 2000$$

Conclusiones:

El volumen máximo es de 2000 cm^3, cuando se cortan las esquinas cuadradas de 5 cm

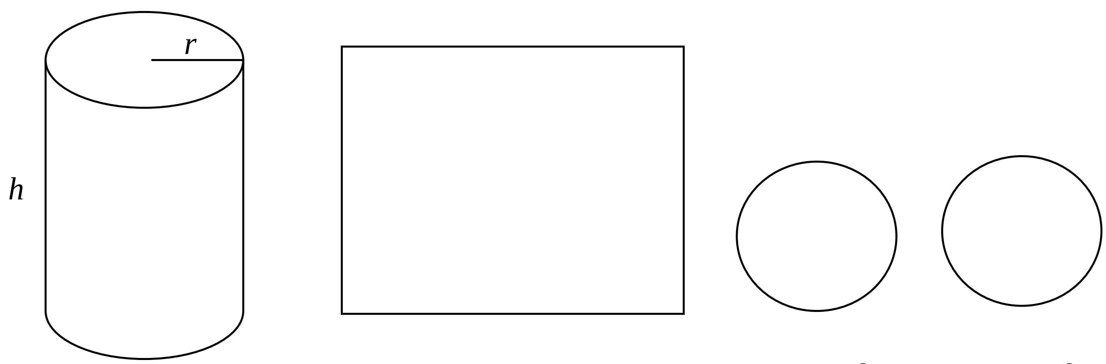
La gráfica de $V = 900x - 120x^2 + 4x^3$ es:



Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

Ejemplo 5: Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular, de 50000 litros de capacidad. ¿Qué dimensiones debe de tener el recipiente para que la cantidad de metal usado sea mínima (Área total)?

Hacemos un dibujo de cómo sería el recipiente.



$A_1 = 2\pi rh$ $\qquad A_2 = \pi r^2$ $\qquad A_3 = \pi r^2$

Para hallar el volumen del recipiente cilíndrico.

$$V = 50000 \text{ cm}^3 = 50 \text{ m}^3$$
$$V = \pi r^2 h$$
$$\pi r^2 h = 50$$

El área total sería:

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

El problema es minimizar el área total, por lo tanto, se debe de tener la función A_t en términos de una sola variable.

Despejamos h de $\pi r^2 h = 50$, y la sustituimos en $A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$h = \frac{50}{\pi r^2}$$

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r\left(\frac{50}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$A_t = \frac{100}{r} + 2\pi r^2$$ Que es la función a minimizar.

Hallando la primera derivada

$$A_t' = -\frac{100}{r^2} + 4\pi r$$

Igualando a cero A_t' y resolviendo

$$-\frac{100}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$-\frac{100}{r^2} = -4\pi r$$

$$-100 = -4\pi r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{100}{4\pi}} = 1.9964 \quad .$$

$r = 1.9964$ Que es el valor crítico.

Evaluamos para saber si hay un máximo o un mínimo en $r = 1.9964$ usando el criterio de la primera derivada.

$$A_t'(1) = -\frac{100}{(1)^2} + 4\pi(1) = -100 + 12.56 = -87.43$$ Negativo.

$$A_t'(3) = -\frac{100}{(3)^2} + 4\pi(3) = -\frac{100}{9} + 37.69 = 26.58$$ Positivo.

Como cambia de negativo a positivo, entonces hay un mínimo en $r = 1.9964$

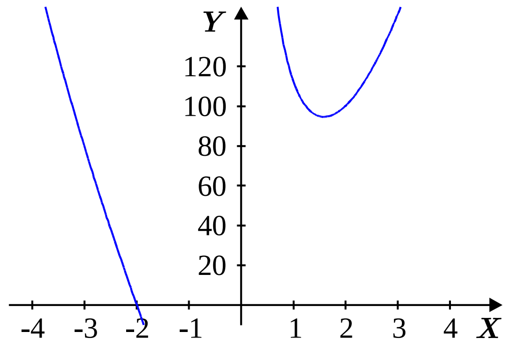
Si $r = 1.9964$, entonces $h = \frac{50}{\pi r^2} = \frac{50}{\pi(1.9964)^2} = 3.9932$ y el área total es:

$$A_t = \frac{100}{r} + 2\pi r^2 = \frac{100}{1.9964} + 2\pi(1.9964)^2 = 50.09 + 25.04 = 75.13$$

Conclusiones:

La cantidad mínima de metal es de 75.13 m^2, cuando las dimensiones del recipiente cilíndrico son $r = 1.9964$ y $h = 3.9932$.

La gráfica de $A_t = \dfrac{100}{r} + 2\pi r^2$ es:



Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

Ejemplo 6: Un fruticultor calcula que si se siembran 60 árboles por hectárea, cada árbol dará 500 manzanas al año aproximadamente. Si el rendimiento promedio por árbol se reduce a 5 manzanas por cada árbol adicional que se plante por hectárea. ¿Cuántos árboles por hectárea deben plantarse para maximizar la producción de dicha fruta?

Sea x el número de árboles adicionales.

PRODUCCIÓN	NÚMERO DE ÁRBOLES	NÚMERO DE FRUTOS
inicial	60	500
ajustada	$60+x$	$500-5x$

La producción P ajustada será:

$$P = (60+x)(500-5x)$$
$$P = 30000 - 300x + 500x - 5x^2$$
$$P = -5x^2 + 200x + 30000$$

Que es la función a maximizar.

Hallando la primera y la segunda derivada

$$P' = -10x + 200$$
$$P'' = -10$$

Igualando a cero P' y resolviendo

$$-10x + 200 = 0$$
$$x = \frac{-200}{-10} = 20$$

$x = 20$ Es el valor crítico.

Evaluamos la segunda derivada en $x = 20$

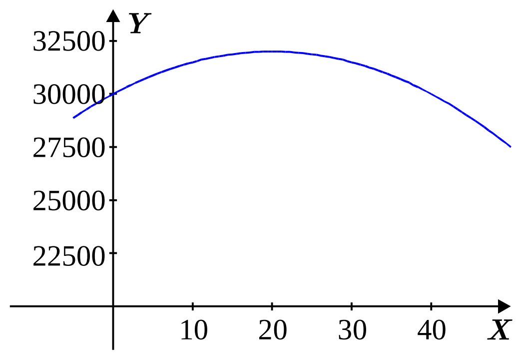
$P''(20) = -10$ Negativa, entonces en $x = 20$ hay un máximo.

Evaluamos la función en $x = 20$.

$$P(20) = -5(20)^2 + 200(20) + 30000 = -2000 + 4000 + 30000 = 32000$$

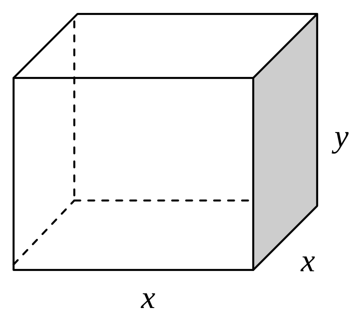
Conclusiones:
La producción máxima que se puede obtener es de 32000 manzanas si se plantan 20 árboles adicionales a los 60 ya existentes, es decir 80 árboles en total.

La gráfica de $P = (60 + x)(500 - 5x)$ es:



Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

Ejemplo 7: Se quiere construir una cisterna con una capacidad de 10,000 litros. Si la forma de la cisterna es la de un paralelepípedo de base cuadrada y el costo del piso y de las paredes laterales es la mitad de lo que cuesta la tapa, encuentra qué medidas debe tener la cisterna para que su costo sea mínimo.



10,000 litros = 10 m^3

$$V = x^2 y$$

$$x^2 y = 10$$

$$y = \frac{10}{x^2}$$

Área del piso = x^2
Área total lateral = $4xy$
Área de la tapa = x^2

Sea a = costo por m^2 del material utilizado para piso y paredes.
$2a$ = costo por m^2 del material utilizado para la tapa.

C = costo total.

$$C = ax^2 + a(4xy) + 2a(x^2)$$

$$C = 3ax^2 + 4axy$$ En esta ecuación sustituimos $y = \frac{10}{x^2}$

$$C = 3ax^2 + 4ax\left(\frac{10}{x^2}\right)$$

$$C = 3ax^2 + \frac{40a}{x}$$ Que es la función a minimizar.

Hallando la primera y la segunda derivada

$$C' = 6ax - \frac{40a}{x^2}$$

$$C'' = 6a + \frac{80a}{x^3}$$

Igualando a cero C' y resolviendo

$$C' = 0$$

$$6ax - \frac{40a}{x^2} = 0$$

$$6ax^3 - 40a = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{40a}{6a}} = \sqrt[3]{\frac{20}{3}} = 1.882$$

$x = 1.882$ Es el valor crítico.

Evaluamos la segunda derivada en $x = 1.882$

$$C'' = 6a + \frac{80a}{(1.882)^3} = 18.0013a$$ Positiva, entonces en $x = 1.882$ hay un mínimo.

Hallamos la altura de la cisterna.

$$y = \frac{10}{x^2} = \frac{10}{(1.882)^2} = 2.823$$

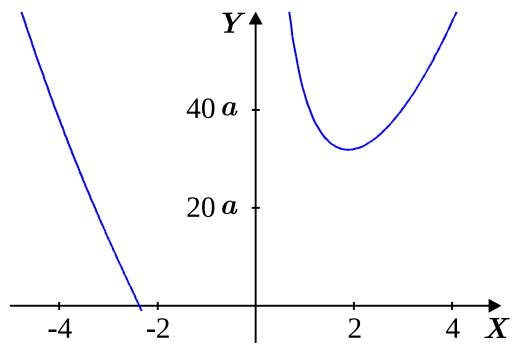
Evaluamos la función en $x = 1.882$.

$$C(1.882) = 3a(1.882)^2 + \frac{40a}{1.882} = 31,879a$$

Conclusiones:

La cisterna tendrá un costo mínimo de $31,879a$, cuando las medidas de la cisterna sean $x = 1.882\text{m}$ y $y = 2.823\text{m}$.

La gráfica de $C = 3ax^2 + \dfrac{40a}{x}$ es:



Debemos observar que las escalas de los ejes son distintas por efectos de visualización.

EJERCICIOS

1.- Encuentra dos números enteros positivos, cuyo producto sea 200, y la suma del primero más el doble del segundo sea mínima.

2.- Encuentra dos números enteros positivos, cuya suma sea 60, y el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

3.- Un impresor quiere obtener 300 cm^2 de impresión por página. Los márgenes superior e inferior deben tener 1.5 cm y 2 cm en cada lado de la página. ¿Cuáles serán las dimensiones de la página si se quiere utilizar una mínima cantidad de papel?

4.- Se desea cercar un campo rectangular de 6000 m^2 de área y dividirlo en dos, mediante otra cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. La cerca central cuesta \$ 100.00 por metro lineal y el resto de la cerca cuesta \$ 150.00 por metro lineal. Hallar las dimensiones que debe tener el terreno para que el costo de la cerca sea mínimo.

5.- Se quiere construir una caja con una pieza cuadrada de aluminio de 144 cm^2 de área, de sus esquinas se cortan cuadrados iguales y se doblan sus lados. ¿De qué medida deberán cortarse los cuadrados en las esquinas para que el volumen de la caja sea máximo?

6.- Una pieza larga y rectangular de lámina de 80 cm de ancho va a convertirse en una canal para agua cuando se doblan hacia arriba dos de sus aristas, hasta formar ángulos de 90º con la base. ¿De qué medida deberán de ser los dobleces para que el canal tenga una capacidad máxima.

7.- Se va a partir un alambre de 24 cm de largo en dos pedazos, uno de los pedazos se dobla para formar un cuadrado, y el otro para formar un círculo. ¿Cómo debe partirse el alambre para que el área combinada de las dos figuras sea máxima.

8.- Se desea construir un tanque de acero para almacenar sustancias químicas, en forma de un cilindro circular recto, con un hemisferio en cada extremo. La capacidad del tanque debe ser de 30,000 litros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones que requieren la menor cantidad de material?

9.- Se desea construir una cisterna con la forma de un paralelepípedo rectangular de base cuadrada. El costo por metro cuadrado de la base y de las paredes laterales es la mitad de lo que cuesta por metro cuadrado la tapa de la cisterna. Si la cisterna debe tener una capacidad de 20,000 litros, determina sus dimensiones para que su costo sea mínimo.

10.- Se quiere construir un vaso de papel cónico que tenga un volumen de 150 cm^3. Calcula las dimensiones que requieren la menor cantidad de papel.

11.- Un campo petrolero contiene 50 pozos. Cada uno produce 90 barriles de petróleo diario en promedio. Empíricamente se ha encontrado que la perforación de pozos adicionales en el mismo campo, provocan una disminución en la producción de 3 barriles diarios por cada pozo adicional. ¿Cuál será el número óptimo de pozos para obtener la máxima producción diaria?

12.- Calcula las dimensiones de un rectángulo con perímetro de 240 metro, de manera que el rectángulo sea el de área máxima.

13.- Se quiere construir un recipiente cilíndrico sin tapa, de base circular y de 64 cm^3 de volumen. Calcula las dimensiones que debe tener el recipiente para que la cantidad de metal sea mínima.

14.- Encuentra dos números cuya suma sea 125 y que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

15.- Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 900 m^2 de área, ¿Cuánto deben medir los rectángulos para que se haga la mínima cantidad de barda.

16.- Encuéntrese dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

17.- Se quiere construir una caja sin tapa de 36,000 cm^3. Si la caja debe tener el doble de largo que de ancho, ¿qué dimensiones debe tener para que ocupe la menor cantidad de material?

18.- Un cable de 100 cm de longitud es cortado en dos piezas, una es utilizada para formar un cuadrado y la otra para formar un triangulo equilátero. ¿Dónde debe cortarse para que la suma de las dos áreas sea mínima.

19.- Se quiere construir una caja con capacidad de 1 litro. ¿Cuáles serán las medidas de la caja para que se gaste el menor cartón en construirla?

20.- Se quiere hacer una caja con un cartón de 12 por 12 cm cortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando hacia arriba los cuatro lados. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede hacerse de esta manera.

APLICACIONES DE DERIVADAS EN ECONOMÍA

Función COSTO, INGRESO Y UTILIDAD.

Un grupo de taxis cobra a \$1.00 el banderazo, más \$2.00 por kilómetro.
Para calcular el costo C de un viaje de x kilómetros recorridos:
Costo de 1 viaje de 1 kilómetro $C = 2(1)+1 = 3$ pesos
1 kilómetro a \$2.00 por kilómetro, más \$1.00 por banderazo.
Costo de 1 viaje de 2 kilómetros $C = 2(2)+1 = 5$ pesos.
2 kilómetro a \$2.00 por kilómetro, más \$1.00 por banderazo.
Costo de 1 viaje de 3 kilómetros $C = 2(3)+1 = 7$ pesos.
3 kilómetro a \$2.00 por kilómetro, más \$1.00 por banderazo.

El costo de un viaje de x kilómetros, se determina con la función lineal:

$$C(x) = 2x+1$$

Se observa que la pendiente 2 es el incremento de costo por kilómetro.

En economía se dice que 2 es el costo marginal.

La cantidad $2x$ se llama costo variable, la ordenada al origen o intersección con el eje C es 1, que es el costo del banderazo, y se le llama costo fijo.

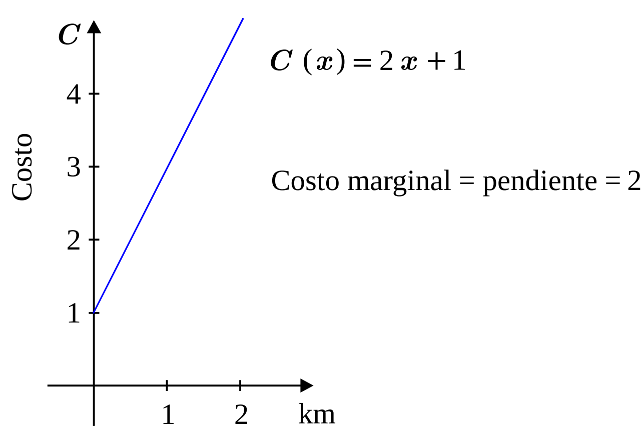
En general, una función de costo lineal tiene la forma: $C(x) = mx+b$
Donde: m es el costo marginal.
b es el costo fijo.
mx es el costo variable.

Se puede aplicar la fórmula de la función costo para calcular el costo de un viaje de 40 kilómetros

$$C(40) = 2(40)+1 = \$81.00$$

El costo de 1 kilómetro adicional es de \$2.00, que es el costo marginal.

Si hacemos la gráfica de costo, la cual podemos interpretar como una gráfica de costo contra kilómetro sería como sigue:



El costo fijo es la ordenada al origen y el costo marginal es la pendiente de la recta.

La función **costo** especifica el costo C como una función de la cantidad de artículos x, en consecuencia, $C(x)$ es el costo de x artículos.

El **ingreso** que resulta de una o más transacciones comerciales es el pago total recibido y se le llama **ingreso bruto**.

Si $I(x)$ es el ingreso por vender x artículos al precio m cada uno, entonces es la función lineal $I(x)=mx$ y el precio de venta también se puede llamar ingreso marginal.

La utilidad es el ingreso neto, es decir, lo que queda de los ingresos después de restarle los costos.

Si la utilidad depende en forma lineal de la cantidad de artículos, la pendiente m se llama utilidad marginal.

La utilidad, el ingreso y el costo se relacionan con la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} Utilidad &= ingreso - \cos to \\ U &= I - C \end{aligned}$$

Si la utilidad es negativa, por ejemplo -500, se denomina pérdida.

El equilibrio quiere decir que no hubo utilidad ni perdida. De esta forma, el equilibrio se alcanza cuando $U=0$ o bien $I=C$.

El punto de equilibrio es la cantidad de x artículos a la cual se presenta el equilibrio.

Ejemplo 1: Si el costo diario (incluidos los costos de operación) de fabricar x camisetas es, $C(x)=8x+100$ y los ingresos obtenidos por vender x camisetas es $I(x)=10x$, entonces la utilidad diaria que resulta de fabricar y vender x camisetas es:

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x)-C(x) \\ &= 10x-(8x+100) \\ &= 2x-100 \end{aligned}$$

El equilibrio se presenta cuando $U(x)=0$, o bien cuando $x=50$.

Ejemplo 2: El gerente de una fábrica de refrigeradores observa que el lunes la empresa fabricó 30 refrigeradores a un costo de 425,000.00, el martes fabricó 40 a un costo de $30,000.00.

a) Hallar una función lineal de costo basada en los datos. ¿Cuál es el gasto fijo diario y cuál es el costo marginal?

b) La empresa vende sus refrigeradores a \$1,500.00 cada uno. ¿Cuál es el la función de ingreso?

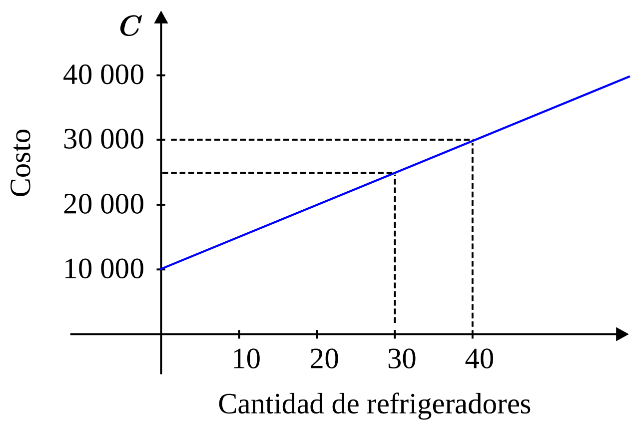
c) ¿Cuál es la función utilidad y cuántos refrigeradores debe vender esa empresa, por día, para alcanzar el equilibrio?

SOLUCIÓN:

a) El problema es determinar C en función de x $C(x)=mx+b$.

Se indica que $C=25000$ cuando $x=30$ y $C=30000$ cuando $x=40$, entonces $(30,25000),(40,3000)$ son dos puntos de la recta.

La gráfica sería:



Para hallar la ecuación de ésta recta, se necesita la pendiente m.

$$m=\frac{C_2-C_1}{x_2-x_1}=\frac{30000-25000}{40-30}=\frac{5000}{10}=500$$

El costo marginal es de \$500.00 por refrigerador.

Aplicando la fórmula de punto pendiente con $m=500$ y el punto $(30,25000)$.

$$\begin{aligned} y-y_0&=m(x-x_0)\\ C-C_0&=m(x-x_0)\\ C-25000&=500(x-30)\\ C&=500x-15000+25000\\ C&=500x+10000 \end{aligned}$$

El costo fijo es de \$10,000.00 y el costo marginal es de \$500.00.

b) El ingreso que obtiene la empresa por vender un refrigerador es de $1,500.00 pesos. Por lo tanto, si vende x refrigeradores, obtiene un ingreso de $I(x)=1500x$

c) Para hallar la utilidad usaremos la fórmula:

$$U = I - C$$
$$U(x)=1500x-(500x+10000)$$
$$U(x)=1000x-10000$$

Donde:

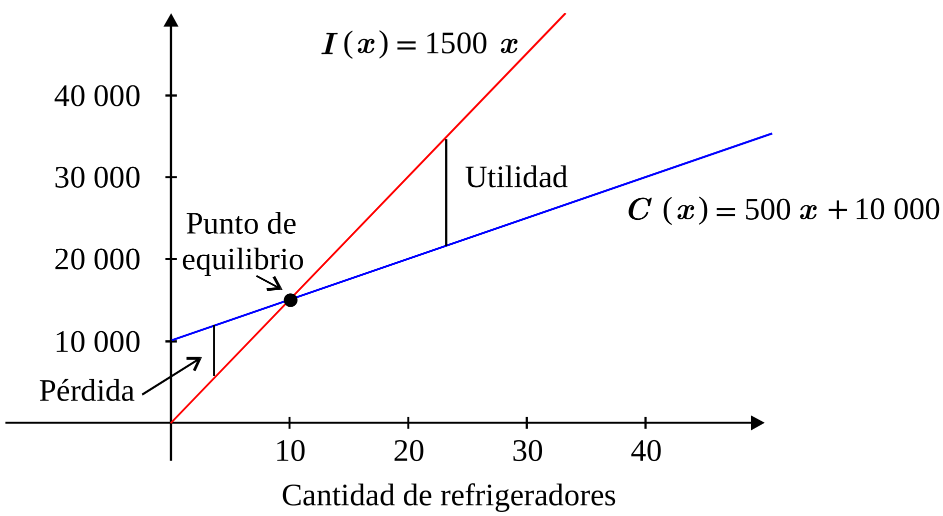
$U(x)$ es la utilidad diaria por fabricar y vender x refrigeradores por día.

El equilibrio se obtiene cuando $U(x)=0$

$$U(x)=1000x-10000$$
$$1000x-10000=0$$
$$x=\frac{10000}{1000}=10$$

Para alcanzar el equilibrio, la empresa necesita fabricar y vender 10 refrigeradores por día.

Haciendo las gráficas de ingreso y costo juntas:



Para valores de x menores que el punto de equilibrio $x=10$, $U(x)$ es negativa por lo que la empresa tendrá pérdidas.

Para valores de x mayores que el punto de equilibrio $x=10$, $U(x)$ es positiva donde la empresa tendrá utilidades. Ésta es la razón por la que nos interesa el punto donde $U(x)=0$, o bien $I(x)=C(x)$.

EJERCICIOS

1.- Un fabricante de pianos tiene un costo fijo diario de $1,200 y un costo marginal de $1,500 por piano. Calcule el costo $C(x)$ de fabricar x pianos en un día.

2.- El costo de alquilar trajes para un evento es $88 de deposito más $20 por traje. Exprese el costo C como una función de x, la cantidad de trajes alquilados.

3.- Una fábrica de bicicletas puede producir 100 unidades por día, a un costo total de $10,500, también puede ensamblar 120 bicicletas por día a un costo total de $11,000. ¿Cuáles son los costos fijos diarios de la empresa, y cuánto es el costo marginal por bicicleta?

4.- Un fabricante de bebidas gaseosas puede producir 1000 cajas de producto por semana, a un costo total de $6,000, y 1500 cajas a $8,500. Calcule los costos fijos semanales del fabricante, y el costo marginal por caja.

5.- El periódico de una escuela, el informador, tiene costos fijos de producción de $70 por edición, y costos marginales de impresión y distribución de 40 centavos por ejemplar. El informador se vende a 50 centavos el ejemplar.

a) Escriba las funciones asociadas de costo, ingreso y utilidad.
b) ¿Qué utilidad (o pérdida) se obtiene al vender 500 ejemplares.
c) ¿Cuántos ejemplares se deben vender para estar en equilibrio?

6.- La sociedad ecológica de la universidad científica está organizando su campaña anual de adquisición de fondos, se cobraran 50 centavos por persona por servir una orden de pasta. Los únicos gastos de la sociedad son el costo de la pasta, que se estiman en 15 centavos por ración, y $350 por la renta de las instalaciones durante la tarde.

a) Escriba las funciones correspondientes de costo, ingreso y utilidad.
b) ¿Cuántas raciones de pasta debe vender la sociedad para llegar al equilibrio?
c) ¿Qué utilidad (o pérdida) resultará al vender 1500 raciones de pasta?

DEFINICIÓN:

La función de costo marginal es la derivada $C'(x)$ de la función costo $C(x)$ y mide la tasa de cambio del costo respecto a x.

Las unidades del costo marginal son las del costo por artículo. Se interpreta a $C'(x)$ como el costo aproximado de producir un artículo más.

Ejemplo 1: COSTO MARGINAL

El costo por fabricar reproductores de CD portátiles se expresa con:

$$C(x) = 150000 + 20x - 0.0001x^2$$

Donde x es la cantidad de reproductores portátiles fabricados.

Calcular la función de costo marginal y estimar el costo de fabricar 50001 reproductor de CD.

SOLUCIÓN:

Como $C(x) = 150000 + 20x - 0.0001x^2$ la función de costo marginal es:

$$C'(x) = 20 - 0.0002x$$

El costo de producir el 50001 reproductor es la cantidad que subiría el costo total si la producción aumentara de 50000 a 50001 reproductores. Por lo tanto, se necesita conocer la tasa con la que aumentara el costo total al aumentar la producción.

Esta tasa de cambio se mide con la derivada que es el costo marginal en $x = 50000$.

$$\begin{aligned} C'(x) &= 20 - 0.0002x \\ C'(50000) &= 20 - 0.0002(50000) \\ C'(x) &= 10 \end{aligned}$$

Se estima que el 50001 reproductor costara \$10.00.

En realidad el costo marginal sólo es una aproximación al costo del 50001 reproductor.

$$\begin{aligned} C'(50000) &\approx \frac{C(50001) - C(50000)}{1} \\ &= C(50001) - C(50000) \\ &= \text{ Costo del 50001 reproductor} \end{aligned}$$

El costo exacto del reproductor 50001 es:

$$C(50001) - C(50000)$$

$$\left[15000 + 20(50001) - 0.0001(50001)^2\right] - \left[15000 + 20(50000) - 0.0001(50000)^2\right] = 9.9999$$

Así que el costo marginal es una buena aproximación al costo real.

Gráficamente estamos usando la recta tangente para aproximar la función costo cerca de un nivel de aproximación de 50000.

Calcule el costo promedio por reproductor si se fabrican 50000

SOLUCIÓN:

El costo por fabricar 50000 reproductores está dado por:

$$C(50000) = 15000 + 20(50000) - 0.0001(50000)^2 = 900000$$

Como fabricar 50000 reproductores cuesta \$900,000 en total, el costo promedio de fabricación de uno de ellos es igual a éste costo dividido entre 50000.

$$\overline{C}(50000) = \frac{\$900000}{50000} = \$18.00 \qquad \text{Costo promedio de 50000.}$$

Si se fabrican 50000 reproductores, cada uno cuesta al fabricante un promedio de \$18.00.

No hay nada especial en el número 50000, si lo sustituimos por x obtendremos el costo promedio de fabricar x reproductores.

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

La función $\overline{C}(x)$ se le llama costo promedio.

En general a $\dfrac{[C(x+h) - C(x)]}{h}$ se le llama cociente de diferencias y expresa el costo promedio por artículo, de producir h artículos más un nivel actual de producción de x artículos.

Pero $C'(x)$ es más fácil de calcular que el cociente de diferencias.

Ejemplo 2: COSTO PROMEDIO

Suponga que el costo en pesos de fabricar reproductores de CD portátiles se representa por:

$$C(x) = 150000 + 20x - \frac{x^2}{10000}$$

Donde x es la cantidad de reproductores fabricados. Calcule el costo promedio por reproductor si se fabrican 50000.

SOLUCIÓN:

El costo total por fabricar 50000 reproductores está dado por:

$$C(50000) = 15000 + 20(50000) - \frac{50000^2}{10000} = \$900,000$$

Como fabricar 50000 reproductores cuesta $900,000 en total, el costo promedio de fabricación de uno de ellos es igual a este costo dividido entre 50000.

$$\bar{C}(50000) = \frac{\$900000}{50000} = \$18.00 \text{ por reproductor.}$$

Si se fabrican 50000 reproductores, cada uno cuesta al fabricante en promedio $18.00.

No hay nada de especial en el número 50000, si lo sustituimos por x obtenemos el costo promedio de fabricar x reproductores para CD.

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

A la función $\bar{C}(x)$ se le llama función de costo promedio.

En el ejemplo 1, calculamos el costo marginal a un nivel de reproducción de 50000 reproductores como:

$$C'(50000) = \$10 \qquad \text{por reproductor}$$

El costo promedio y el costo marginal expresan información distinta pero relacionada.
El costo promedio $\bar{C}(50000)$ es el costo por artículo, de fabricare los primeros 50000 reproductores, mientras que el costo marginal $C'(50000)$ expresa el costo aproximado de fabricar el siguiente reproductor.

Según nuestros cálculos los primeros 50000 reproductores cuestan $18.00 en promedio, pero solo cuesta aproximadamente $10.00 pesos fabricar el 50001 reproductor.

EJERCICIOS

1.- Cada una de las siguientes funciones representa el costo de fabricar x artículos. Calcular el costo marginal en el nivel x de producción dada.

a) $C(x)=10000+5x-\dfrac{x^2}{10000}$; $\quad x=1000$

b) $C(x)=20000+7x-\dfrac{x^2}{20000}$; $\quad x=10000$

c) $C(x)=15000+100x-\dfrac{1000}{x}$; $\quad x=100$

d) $C(x)=20000+50x-\dfrac{10000}{x}$; $\quad x=100$

2.- El costo de publicidad, en miles de pesos, de transmitir comerciales en TV durante un partido de fútbol, está dada por:

$$C(x)=150+1200x-0.002x^2$$

a) Determinar la función de costo marginal y úsenla para estimar con que rapidez sube el costo cuando $x=4$. Compare esto con el costo de transmitir el quinto comercial.

b) Calcular la función costo promedio $\overline{C}$ y evaluar $\overline{C}(4)$. Comparar resultados con a).

3.- El costo de producir x ositos de peluche al día, en una empresa, fue calculado por el departamento de mercadeo y se obtuvo la fórmula:

$$C(x)=100+40x-0.001x^2$$

a) Determinar la función de costo marginal y úsenla para estimar con que rapidez sube el costo a un nivel de producción de 100 ositos. Compare esto con el costo exacto e producir 101 ositos.

b) Calcular la función costo promedio $\overline{C}$ y evaluar $\overline{C}(100)$.
¿Qué indica el resultado?

B I B L I O G R A F I A

1.- Leithold, Louis, Matemáticas previas al calculo, México, OXFORD, 1998.
2.- Raymond, A. Barnet, Álgebra y trigonometría, México, McGRAW-HILL, 1988.
3.- Postigo, Luis, Matemáticas, México, RAMON SOPENA, 1965.
4.- Peterson, Jhon C., Matemáticas Básicas, México, CECSA, 2001.
5.- Swokowski, Earl W., Álgebra Trigonometría con Geometría Analítica, México, IBEROAMERICANA, 1988.
6.- Oteyza, Elena de Oteyza, Temas Selectos de Matemáticas, México, PRENTICE HOLL, 1998.
7.- Dennis, G. Zill, Álgebra y Trigonometría, México, McGRAW-HILL, 1992.
8.- Murray, R. Spiegel, Estadística, México, SHAUM McGRAW-HILL, 1970.
9.- Baldor, Aurelio, Álgebra, México, PUBLICACIONES CULTURALES, 1985
10.- Gechtman, Murray, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, México, LIMUSA, 1999.
11.- Dolciani, Mary P., Álgebra Moderna y Trigonometría, México, PUBLICACIONES CULTURALES, 1972.
12.- Louis, Leithold, Álgebra, México, OXFORD, 1995.
13.- Laso, Silva, Fundamentos de Matemáticas, México, LIMUSA, 2001.
14.- Bosch, Carlos G., Matemáticas Curso de Álgebra, México, SANTILLANA, 2004.

1.- Granville, William Anthony, Calculo Diferencial e Integral, México, LIMUSA, 1997.
2.- Murria, R. Spiegel, Calculo Superior, México, McGRAW-HILL, 1991.
3.- Banah, S., Calculo Diferencial e Integral, México, PUBLICACIONES CULTURALES, 1961.
4.- Warner, Stefan, Calculo Aplicado, México, THOMSON LEARNING, 2002.
5.- Purcel, Edwin J., Cálculo Diferencial e Integral, México, PEARSON EDUCACION, 2000.
6.- Finney, Ross L., Calculo de una Variable, México, PRENTICE HALL, 2000.
7.- Frank, Ayres Jr., Calculo Diferencial e Integral, México, SHAUM McGRAW-HILL, 1997.
8.- Leithold, Louis, El Calculo con Geometría Analítica, México, HARLA, 1987.
9.- Anfossi, Agustín, Calculo Diferencial e Integral, México, PROGRESO, 2000.
10.- Andrade, Arnulfo, Calculo Diferencial e Integral, México, UNAM FAC. de INGENIERÍA, 1984.
11.- Del Grande, M. A., Introducción al Calculo Elemental, México, HARLA, 1976.
12.- Leithold, Louis, Calculo para Ciencias administrativas Biológicas y Sociales, México, HARLA, 1988.
13.- Martínez, Miguel Ángel, Calculo Diferencial, México, McGRAW-HILL, 1997.
14.- Wisniewski, Piotr Marian, Problemas de Calculo Diferencial, México, THOMSON LEARNING, 2001.
15.- Apóstol, Tom M., Calculus Vol 1, México, REVERTE, 1973.
16.- Apóstol, Tom M., Calculus Vol 2, México, REVERTE, 1980.
17.- Smith, Robert T., Calculo Diferencial e Integral, México, McGRAW-HILL, 2003.
18.- Fuenlabrada, Samuel de la Vega, Calculo Diferencial, México, McGRAW-HILL, 1995.
19.- Fuenlabrada, Samuel de la Vega, Calculo Integral, México, McGRAW-HILL, 1996.