UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIONES HOMOTÓPICAS DE LOS G-ANR'S

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

LMA. ALEJANDRA SORIA PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGEY ANTONYAN

MÉXICO, D.F. **FEBRERO, 2008**

Agradecimientos

Quiero agradecer con todo respeto:

Especialmente al Dr. Sergey A. Antonyan, por el apoyo, la seriedad, los conocimientos y la paciencia que me brindó durante mis estudios y que me permitieron realizar el trabajo de tesis.

A mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión y por todas las sugerencias propuestas para mejorar este trabajo.

A la Sociedad Matemática Mexicana y a la Fundación Sofía Kovalévskaia, por el apoyo económico complementario proporcionado para concluir esta etapa.

A la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., a mi Comité Tutoral y a todas las personas que laboran en esta Institución que me ayudaron durante mis estudios.

A la Escuela de Matemáticas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, por las facilidades prestadas para realizar los estudios de posgrado, así como a su Cuerpo Académico de Geometría y Topología por el apoyo proporcionado.

A los Maestros Javier B. Espinoza de los Monteros Díaz y J. Othón Huerta Herrera, por su apoyo, amistad y confianza.

A todos aquellos profesores y amigos que con su interés y sus palabras me alentaron a continuar hasta concluir el presente.

A los participantes en el Seminario S. K. de la Escuela de Matemáticas de la U.J.E.D., por generar un campo de discusión sobre el área correspondiente a este trabajo.

A mi familia, principalmente a mis padres Manuel y Salustia, a mis hermanas Cuqui, Citlali y Selene, y a mis sobrinos Lili, July, Jesús, Miguelito, Ale y Jade, quienes me han proporcionando todo tipo de ayuda para poder vivir esta experiencia.

Índice general

Introducción

La Teoría de Retractos fue creada en los años 30-as del siglo XX por el matemático polaco Karol Borsuk. La Teoría de grupos topológicos de transformaciones toma su origen de los trabajos clásicos del matemático noruego Sofus Lie de los años 80-as del siglo XIX. Estas dos teorías dieron origen a una nueva teoría llamada actualmente Teoría Equivariante de Retractos a la cual pertenece la presente tesis doctoral.

Aportaciones importantes en esta teoría, entre otros, tuvieron los siguientes matemáticos: H. Abels [**1**], *S. Antonyan* [**3**], [**4**], [**10**], *I.James y G. Segal* [**31**], *J. Jaworowski* [**32**], [**33**], *A. Kushkuley y Z. Balanov* [**37**], *R. Lasof* [**34**], *S. Illman* [**28**], [**29**], *M. Madirimov* [**38**], [**39**], *R. Palais* [**42**], *Yu. Smirnov* [**43**], [**44**], *J. de Vries* [**45**], [**46**]. *Las recientes aplicaciones de la Teoría Equivariante de Retractos a un problema clásico de Análisis Funcional (más precisamente, a los compactos de Banach-Mazur), dados en los artículos* [**7**] *y* [**10**], *demuestran una vez más la importancia de esta teoría.*

Actualmente la Teoría Equivariante de Retractos está desarollándose activamente; basta mencionar sólo algunos de los trabajos importantes recientes, como los de S. Antonyan [**11**], [**12**], *A. Bykov y M. Texis* [**16**] *y* [**17**], *E. Elfving* [**21**], [**22**], *A. Feragen* [**24**], *M. Kankaanrinta* [**35**], [**36**].

En la Teoría Equivariante de Retractos se estudian los G*-espacios (donde* G *es un grupo compacto de Lie) desde el punto de vista de la Teoría de retractos. Los* G*-ANR's (los retractos* G*-equivariantes absolutos de vecindad) constituyen objetos principales de esta teoría. En esta introducción nos conviene adoptar la siguiente caracterización como la definición de un* G*-ANR: un* G*-espacio metrizable* Y *es un* G*-ANR si y sólo si toda* G*-aplicación* $f : A \to Y$ *de un conjunto cerrado y* G*-invariante* A *de un* G*-espacio metrizable* X *se extiende a una* G*-aplicación* $F : U \to Y$ *definida en una vecindad* G*-invariante* U *de* A *en* X.

En este trabajo estamos interesados en determinar qué propiedades basadas en el concepto de homotopía equivariante, permiten caracterizar a los G-ANR's en la clase de los G-espacios metrizables, donde G es un grupo compacto de Lie.

Los problemas correspondientes no equivariantes pueden ser consultados en los textos sobre Teoría de Retractos, particularmente podemos mencionar a Borsuk [**14**], *Hu* [**27**] *y van Mill* [**40**].

Un hecho conocido dentro de la Teoría Equivariante de Retractos, es que todo espacio G-ANR es localmente G-contraíble. Recordemos que un G-espacio X se llama localmente G-contraíble si para todo punto $x \in X$ y toda G_x-vecindad U de x existe una G_x-vecindad V de x tal que V es contraíble en U a un punto por medio de una homotopía G_x-equivariante, donde G_x denota el estabilizador del punto x.

*En 1978, Jaworowski probó (*ver [**33**]*) que si G es un grupo compacto de Lie, entonces para G-espacios de* dimensión finita *la G-contraibilidad local es justamente equivalente a la propiedad de ser un G-ANR. De otro lado, sin la propiedad de la dimensión finita, la G-contraibilidad local por sí sola no es suficiente para caracterizar a los G-ANR's incluso cuando G es el grupo trivial (*ver [**14**, Capítulo V, §11] *para un contraejemplo).*

*Otra propiedad necesaria para que un G-espacio metrizable sea un G-ANR es la propiedad de extensión de homotopía G-equivariante (abreviado G-PEH) con respecto a todo G-par metrizable (X,A) (*ver [**3**]*). Aqui se dice que un G-par (X,A) tiene la propiedad G-PEH con respecto a un G-espacio Y si y sólo si cada G-homotopía parcial $h_t : A \to Y,\ t \in I$ de una G-aplicación arbitraria $f : X \to Y$ posee una G-extensión*

$$f_t : X \to Y,\ t \in I \quad \textit{tal que} \quad f_0 = f.$$

Uno de los resultados principales de esta tesis, que se prueban en el Capítulo 4, es que si G es un grupo compact de Lie, entonces la G-contraibilidad local junto con la propiedad G-PEH caracterizan a los G-ANR's dentro de la clase de todos los G-espacios metrizables (ver Teorema 4.12). En ese mismo capítulo se da una versión equivariante controlada *del teorema de extensión de homotopías de Borsuk (ver Teorema 4.10). Ahí definimos la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$, que permite por sí sola caracterizar completamente a los G-ANR's en la clase de todos los G-espacios metrizables. Esta propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$ es una especie de la G-PEH, en donde en lugar de las homotopías equivariantes cualesquiera, participan homotopías equivariantes* pequeñas *controladas con una cubierta abierta $\mathcal{V}$.*

Ambas nuestras caracterizaciones homotópicas de los G-ANR's estan basadas en la caracterización local de los G-ANE's, cuya deducción se exhibe en el Capítulo 3 (Teorema 3.7): un G-espacio X es un G-ANE si y sólo si cada punto $x \in X$ admite una vecindad G_x-invariante U, la cual es un G_x-ANE.

*Otro resultado de esta tesis corresponde a la caracterización de subespacios cerrados invariantes de los espacios G-ANR's, los cuales también son G-ANR's. Resulta ser que si X es un G-ANR entonces un subconjunto cerrado e invariante A de X es un G-ANR si y sólo si el G-par (X,A) satisface a la propiedad G-*PEH *con respecto a todo G-espacio (Teorema 4.12).*

La estructura que presenta este trabajo es dada por cuatro capítulos. En el primero de ellos se dan los conceptos básicos de la Teoría Equivariante de Retractos.

En el segundo se describe a los objetos que se tratan de caracterizar, los G-ANR's. Igualmente se presentan teoremas que serán relevantes para las pruebas de los últimos capítulos, en particular, un teorema de unión de G-ANE's. En el tercer capítulo se da una caracterización local de los G-ANR's.

Finalmente, en el último capítulo se presentan ambas caracterizaciones homotópicas de los G-ANR's arriba mencionadas. Se concluye con la caracterización de subespacios cerrados invariantes de los espacios G-ANR's, los cuales también son G-ANR's.

CAPíTULO 1

Nociones básicas

El objetivo de este trabajo es presentar caracterizaciones homotópicas de los G-ANR's. En esta sección se describirán los conceptos básicos relativos a la equivarianza y se darán algunas proposiciones que serán de utilidad.

En lo que sigue, utilizaremos el término ***aplicación*** *para referirnos a una función continua. Igualmente consideraremos a las* ***vecindades****, como conjuntos abiertos.*

En la consulta de las nociones básicas de la Teoría de los Grupos de Transformación, mencionamos como principales referencias [**15**], [**30**] *y* [**42**].

1. G-espacios

Definición 1.1. *Un conjunto G con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G se llama un* ***grupo topológico*** *si*

(1) $(G, \cdot)$ *es un grupo;*
(2) (G, τ) *es un espacio topológico;*
(3) *las funciones $\mu : (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$ y $\iota : (G, \tau) \to (G, \tau)$, dadas por $\mu(x, y) = x \cdot y$ y $\iota(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x.*

Los grupos topológicos en este trabajo son básicamente compactos de Hausdorff. De hecho, los resultados principales corresponden a las acciones de grupos compactos de Lie. Enseguida describiremos los grupos de Lie.

Definición 1.2. *Un* ***grupo de Lie*** *es un grupo topológico segundo numerable G con estructura de n-variedad diferencial, tal que las operaciones del grupo son funciones diferenciables.*

Sobre los grupos de Lie tenemos lo siguiente que resulta relevante en nuestro estudio: todo grupo de Lie es, como consecuencia de su definición, un espacio metrizable y separable. Además, los subgrupos cerrados de Lie, son también grupos de Lie y los productos finitos de grupos de Lie, son grupos de Lie.

Definición 1.3. *Sea G un grupo multiplicativo con elemento identidad e. Diremos que G* ***actúa*** *(por la izquierda) en un conjunto X no vacío si existe una función $\theta : G \times X \to X$, llamada* ***acción*** *de G en X (o bien, una G-****acción*** *en X), tal que*

(i) *$\theta(e, x) = x$ para cada $x \in X$.*
(ii) *$\theta\big(h, \theta(g, x)\big) = \theta(hg, x)$ para cada $g, h \in G$ y $x \in X$.*

*Entonces llamaremos a X un G-****conjunto****.*

Observación 1.4. *Escribiremos, con el fin de facilitar la notación, gx en lugar de $\theta(g, x)$, ocasionalmente utilizaremos la notación $g \star x$, o bien, $g \cdot x$. Entonces podemos expresar las propiedades enunciadas en la definición 1.3 en la siguiente forma:*

(i) *$ex = x$ para cada $x \in X$.*
(ii) *$h(gx) = (hg)x$ para cada $g, h \in G$ y $x \in X$.*

Definición 1.5. *Sea θ la acción de un grupo G en un conjunto X. Entonces θ induce, para cada $g \in G$, la transformación*

$$\theta_g : X \to X, \text{ dada por } \theta_{\mathrm{g}}(\mathrm{x}) = \theta(\mathrm{g}, \mathrm{x}) = \mathrm{gx}$$

que llamaremos ***transición****.*

Observación 1.6. *Por las propiedades de la acción θ en el conjunto X,*

(i) *$\theta_e(x) = x$, para cada $x \in X$, es una función identidad.*
(ii) *$\theta_h \theta_g = \theta_{hg}$ para cada h,$g \in G$.*

Proposición 1.7. *Sea θ la acción de un grupo G en un conjunto X. Entonces para cada $g \in G$, la transición θ_g es una biyección.*

Demostración. Si $\theta_g(x_1) = \theta_g(x_2)$, entonces $gx_1 = gx_2$ y de ahí, $g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2)$. Por la definición 1.3, $(g^{-1}g)x_1 = (g^{-1}g)x_2$, por tanto, $ex_1 = ex_2$ y nuevamente de la definición 1.3, $x_1 = x_2$, por tanto, θ_g es inyectiva.

Veamos que θ_g es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Entonces por la definición 1.3, $x = ex = gg^{-1}x = g(g^{-1}x) = \theta_g(g^{-1}x)$, tenemos que θ_g es sobreyectiva. $\square$

Definición 1.8. *Llamaremos* ***grupo topológico de transformaciones*** *a la terna* (G, X, θ) *formada por un grupo topológico* G*, un espacio topológico* X *y una acción continua* $\theta : G \times X \to X$*. Un* G***-espacio*** *es un grupo topológico de transformaciones cuyo grupo actuante es el* G*.*

Sea G un grupo topológico. Como ejemplos de G-espacios, tenemos

(a) I, el intervalo unitario, es un G-espacio bajo la acción $gx = x$, para cada $g \in G$ y $x \in I$.
(b) Supongamos que X es un G-espacio, entonces $X \times I$, bajo la acción diagonal dada por $g(x, t) = (gx, t)$, es un G-espacio.
(c) G es un G-espacio, donde G actúa por translación izquierda. Sin embargo, G es también un G-espacio, mediante la acción $(g, t) \mapsto g \star t = tg^{-1}$.

Proposición 1.9. *Sea* (G, X, θ) *un grupo topológico de transformaciones. Entonces para cada* $g \in G$*, la transición* θ_g *es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la proposición 1.7, sabemos que para cada $g \in G$, θ_g es una biyección. Como para cada $g \in G$, θ_g es una restricción de la función continua θ, también es continua. Particularmente, $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. Por lo tanto, cada θ_g es un homeomorfismo. □

Observación 1.10. *Para un espacio topológico* X*, denotaremos por* $Homeo(X)$ *el conjunto de todos los homeomorfismos de* X*. La composición de aplicaciones convierte a* $Homeo(X)$ *en un grupo cuyo elemento neutral es el homeomorfismo idéntico de* X*. La función* $\Theta : G \to Homeo(X)$ *del grupo topológico* G *en el grupo* $Homeo(X)$*, dada por* $\Theta(g) = \theta_g$*, determina un homomorfismo. En efecto,* θ_e *es la función identidad,* $\theta_{gh} = \theta_g \theta_h$*, y* $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$*. Por eso se usa el término de* grupo topológico de transformaciones *para referirse a la terna* (G, X, θ)*.*

Definición 1.11. *Sea* (G, X, θ) *un grupo topológico de transformaciones. Sean* H *un subgrupo de* G*,* A *un subconjunto de* X *y* $x \in X$*.*

1. *Denotaremos por* $H(A)$ *el subconjunto* $\{ha | h \in H, a \in A\}$ *de* X *y llamaremos a* $H(A)$ *la* H*-saturación de* A*. Diremos que* A *es un* ***conjunto*** H***-invariante*** *en* X *respecto a la acción de* G *en* X *si* $H(A) = A$*. Si* A *es* G*-invariante, diremos que* A *es un* ***conjunto invariante****, a menos que exista alguna ambigüedad.*

2. *Llamaremos al conjunto $G(A)$ simplemente la* ***saturación*** *de A.*
3. *Llamaremos al conjunto $G(x) = \{gx|g \in G\}$, la* ***órbita*** *de x. Denotaremos al conjunto de órbitas por X/G.*
4. *Definimos la* ***proyección orbital*** *como la función*
$$\pi : X \to X/G,$$
donde $\pi(x) = G(x)$ vista como elemento de X/G.
5. *Llamaremos al conjunto $G_x = \{g \in G|gx = x\}$ el* ***estabilizador*** *o el* ***grupo de isotropía*** *de x.*
6. *Diremos que x es un* ***punto G-fijo*** *si $G_x = G$. Denotaremos por X^G al conjunto de puntos G-fijos.*

Proposición 1.12. *Sean X un G-espacio y A un subconjunto de X. Entonces A es invariante si y sólo si $gA = \{ga|a \in A\} \subset A$ para cada $g \in G$.*

Demostración. Si A es un conjunto invariante entonces claramente $gA \subset A$, para cada $g \in G$. Ahora, si $gA \subset A$ para todo $g \in G$, entonces $A = (gg^{-1})A = g(g^{-1}A) \subset gA$ y de ahí obtenemos la igualdad $A = gA$ para todo g, lo que implica que $G(A) = \bigcup\limits_{g \in A} gA = A$. □

Proposición 1.13. *Sea X un G-espacio. Entonces la unión, la intersección y complementos de subconjuntos invariantes de X, son invariantes también.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos invariantes de X. Entonces $G(A) = A$ y $G(B) = B$. Por la proposición 1.12, basta verificar que $g(A \cup B) \subset A \cup B$ y que $g(A \cap B) \subset (A \cap B)$, para cada $g \in G$. Sea $y \in g(A \cup B)$. Entonces $y = gc$, para algún $c \in A \cup B$. Entonces resulta claro que $y \in A \cup B$, por la invarianza de A y de B. De ahí $A \cup B$ es invariante. En forma semejante, inferimos que $A \cap B$ y complementos de subconjuntos invariantes son invariantes. □

Proposición 1.14. *Sea X un G-espacio. Entonces,*

(a) *X es un H-espacio para cada subgrupo H de G.*
(b) *Si A es un conjunto invariante de X, entonces A es un G-espacio.*
(c) *Si A es un conjunto H-invariante de X, donde H es un subgrupo de G, entonces A es un H-espacio.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio.

(a) Restringimos la acción de G en X, al conjunto $H \times X$. Entonces la restricción es continua y se verifican las condiciones de la definición de acción. Por tanto, X es un H-espacio.

(b) Si A es invariante, $G(A) = A$. Restringimos la acción de G en X, al conjunto $G \times A$, la cual es continua. Como en el caso anterior, se observan las propiedades de acción. Entonces A es un G-espacio.

(c) Consecuencia inmediata de (a) y (b).

□

Proposición 1.15. *Sean X un G-espacio y A un subconjunto de X. Entonces gA es abierto (respectivamente cerrado) si y sólo si A es abierto (respectivamente cerrado).*

Demostración. Como para cada g, θ_g es un homeomorfismo por la proposición 1.9, tenemos que θ_g es una aplicación abierta (respectivamente cerrada). De ahí que si A es abierta (respectivamente cerrada), $\theta_g(A) = gA$ es abierta (respectivamente cerrada), y si gA es abierta (respectivamente cerrada), $\theta_{g^{-1}}(gA) = A$ es abierta (respectivamente cerrada). □

Proposición 1.16. *Sea X un G-espacio. Entonces dos órbitas son o disjuntas o coinciden, esto es, X es particionada en sus órbitas.*

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos de X. Si

$$x \in G(x_1) \cap G(x_2),$$

entonces existen g_1 y g_2 en G tales que $g_1x_1 = x = g_2x_2$. Entonces $x_1 = g_1^{-1}g_2x_2 \in G(x_2)$ y $x_2 = g_2^{-1}g_1x_1 \in G(x_1)$, de donde $G(x_1) = G(x_2)$. □

Definición 1.17. *El **espacio de órbitas** o **espacio orbital** de un G-espacio X, es el conjunto de órbitas X/G dotado con la topología cociente con respecto a la proyección orbital*

$$\pi : X \to X/G,$$

esto es, $U \subset X/G$ es abierto en X/G si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X.

Observación 1.18. *La acción natural de G en X/G es*

$$(g, G(x)) = G(x),$$

donde $g \in G$ y $G(x) \in X/G$.

Observación 1.19. *Dada la importancia que tiene el concepto de topología cociente en este trabajo, mencionamos enseguida algunos puntos de la topología general relativos a las identificaciones.*

Sean X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y

$$f : X \to Y$$

una función sobreyectiva. Si dotamos a Y con la topología

$$T_f = \{U | f^{-1}(U) \text{ es abierto en X}\},$$

*diremos que f es una **identificación** o **función cociente**, a T_f le llamamos **topología cociente** y a Y con tal topología, **espacio cociente**. Entonces observaremos que:*

1. *f es continua.*
2. *T_f es la mayor topología en Y que hace continua a f.*
3. *T_f es la única topología en Y con la llamada **propiedad universal del cociente** siguiente: una función $\varphi : Y \to Z$ en un espacio Z es continua si y sólo si la composición $\varphi f : X \to Z$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi f"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

4. *De la propiedad universal del cociente se puede deducir el **teorema de transgresión**: Sea f una identificación. Entonces toda función continua $\psi : X \to Z$ que envía cada fibra $f^{-1}(y)$ en un sólo punto de Z, induce una única función continua $\widetilde{\psi} : Y \to Z$ tal que $\widetilde{\psi} f = \psi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & Y \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.20. *Sea X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es abierta.*

Demostración. Sea U un abierto de X. Entonces

$$\pi^{-1}\pi(U) = GU = \bigcup_{g\in G} gU$$

es unión de abiertos en X, por la proposición 1.15, por lo tanto, $\pi(U)$ es abierto en X/G. $\square$

Proposición 1.21. *Sea X un G-espacio y A un subconjunto de X. Entonces, que A sea abierto en X, implica que $H(A)$ es abierto en X para cada $H \subset G$.*

Demostración. Sea A abierto en X. Podemos escribir $H(A) = \bigcup_{g\in H} gA$, donde por la proposición 1.15 cada gA es abierto en X. Luego $H(A)$ es abierto en X. $\square$

Proposición 1.22. *Sea X un G-espacio. Si X es compacto, entonces X/G es compacto.*

Demostración. Claramente se sigue de la continuidad de la proyección orbital. $\square$

Definición 1.23. *Sean X e Y G-espacios. Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es G-**equivariante** o que es una G-**aplicación** (a menos que haya alguna ambigüedad, que es **equivariante**), cuando $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$. Una aplicación f de un G-espacio X en un espacio topológico Y es llamada **invariante** si $f(gx) = f(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$, esto es, si f es constante en cada órbita.*

Observación 1.24. *Particularmente, una proyección orbital es invariante.*

Proposición 1.25. *Sean X e Y G-espacios, con proyecciones orbitales π y π' respectivamente y sea f una aplicación equivariante.*

(1) *f induce una única aplicación $f/G : X/G \to Y/G$ que hace al siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi' f"] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\
X/G \arrow[r, "f/G"] & Y/G
\end{tikzcd}$$

(2) *Si* $\varphi : Y \to Z$ *es equivariante, entonces* $\varphi f : X \to Z$ *es equivariante y* $(\varphi f)/G = (\varphi/G)(f/G)$.

Demostración. Puesto que f envía órbitas en órbitas, por el teorema de transgresión (ver la observación 1.19), aplicado a la función continua $\pi' f : X \to Y/G$, existe una única función continua

$$f/G : X/G \to Y/G, \text{ tal que (f/G)}\pi = \pi'\varphi.$$

Por lo tanto, $(f/G)(G(x)) = G\big(f(x)\big)$ y se verifica la primera afirmación. La prueba de la segunda afirmación es inmediata. □

Definición 1.26. *Sean* X *e* Y *dos* G*-espacios y* $f : X \to Y$ *una aplicación equivariante. Si* f *es un homeomorfismo, diremos que* f *es un* G***-homeomorfismo*** *y que los espacios* X *y* Y *son* G*-espacios* G*-homemomorfos.*

Definición 1.27. *Sea* X *un* G*-espacio. Diremos que una acción de* G *en* X *es:*

- ***trivial*** *si* $G_x = G$ *para todo* $x \in X$.
- ***libre*** *si* $G_x = \{e\}$ *para todo* $x \in X$.
- ***efectiva o fiel*** *si* $\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$.
- ***transitiva*** *si tiene una sola órbita.*

Proposición 1.28. *Sea* X *un* G*-espacio. La acción* θ *de* G *en* X *es una aplicación abierta.*

Demostración. Se sigue de que $\theta(S \times E) = \bigcup_{g\in G} gE$ para todo $S \subset G$ y todo $E \subset X$. □

Proposición 1.29. *Sea* G *un grupo topológico y* H *un subgrupo de* G*. Entonces el conjunto de clases laterales izquierdas de* H*, denotado por* G/H *con la topología cociente con respecto a* $q : G \to G/H$ *donde* $q(g) = gH$*, es un* G*-espacio con acción:*

$$(g^{'}, gH) \mapsto g^{'}gH.$$

para g', $g \in G$.

Demostración. Es inmediato que es una acción, puesto que G es un grupo topológico. □

Definición 1.30. *Sea X un G-espacio. Para cada $x \in X$, llamamos función **movimiento** a la función inducida por la acción θ de G en X,*

$$\theta^x : G \to G(x), \text{ dada por } \theta^{\mathrm{x}}(\mathrm{g}) = \theta(\mathrm{g}, \mathrm{x}) = \mathrm{gx}.$$

Proposición 1.31. *Sea X un G-espacio. Entonces para cada $x \in X$, la función movimiento es continua, sobreyectiva, equivariante, con imagen la órbita $G(x)$.*

Demostración. Es inmediato de la definición 1.30. $\square$

Proposición 1.32. *Sea X un G-espacio. Entonces para cada $x \in X$, la función movimiento θ^x determina una única G-aplicación biyectiva*

$$\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x)$$

del espacio cociente G/G_x a $G(x)$. Además, si G es compacto y X es de Hausdorff, $\overline{\theta^x}$ es un G-homeomorfismo.

Demostración. Por la proposición 1.29, G/G_x es un G-espacio. Sea $p : G \to G/G_x$ la función cociente y $\theta^x : G \to G(x)$, la función movimiento. Por el teorema de transgresión (ver la observación 1.19) y dado que $\theta^x(p^{-1}(gG_x))$ es univaluada, tenemos que existe una única función continua

$$\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x),$$

tal que $\overline{\theta^x}p = \theta^x$, esto es, tenemos el diagrama conmutativo siguiente,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\theta^x"'] & & G/G_x \arrow[dl, "\overline{\theta^x}"] \\ & G(x) & \end{tikzcd}$$

Entonces $\overline{\theta^x}$ es dada por $\overline{\theta^x}(gG_x) = gx$.

Veamos que $\overline{\theta^x}$ es biyectiva. Tenemos que $\overline{\theta^x}(gG_x) = \overline{\theta^x}(hG_x)$ si y sólo si $gx = hx$. Pero, $gx = hx \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x$. Tenemos que $\overline{\theta^x}$ es inyectiva y claramente sobreyectiva.

Veamos que es equivariante. En efecto,

$$\overline{\theta^x}\big(g'(gG_x)\big) = \overline{\theta^x}(g'gG_x) = g'gx = g'\overline{\theta^x}(gG_x).$$

Finalmente, supongamos que G es compacto y X es de Hausdorff. Observamos que ser de Hausdorff es una propiedad hereditaria, por tanto, $G(x)$ es de Hausdorff. Vamos a probar que $\overline{\theta^x}$ es cerrada. Como la función cociente $p : G \to G/G_x$ es continua y sobreyectiva, y G es compacto, la imagen de G bajo p es compacta, de ahí que G/G_x es compacto. Ahora, sea C un cerrado en G/G_x. Entonces C es compacto en G/G_x. Como $\overline{\theta^x}$ es continua, $\overline{\theta^x}(C)$ es compacto en $G(x)$ y como $G(x)$ es de Hausdorff, $\overline{\theta^x}(C)$ es cerrado en $G(x)$.

Por tanto, $\overline{\theta^x}$ es un G-homeomorfismo. □

Proposición 1.33. *Sea X un G-espacio.*

i) *Si G es compacto, las órbitas son compactas.*
ii) *Si X es T_1, entonces los estabilizadores son cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$.

i) Si G es compacto, entonces la órbita $G(x) = \theta^x(G)$ también lo es, al ser imagen continua del compacto bajo la función movimiento.
ii) Como x es cerrado en X por ser X un espacio T_1, y por tanto es cerrado en $G(x)$, entonces $G_x = \theta^{x^{-1}}(x)$ es cerrado en G por continuidad de θ^x.

□

Proposición 1.34. *Para un compacto K de un grupo topológico G y un subconjunto S de un G-espacio de Hausdorff X, la restricción $\theta' : K \times S \to K(S)$ de la acción θ de G en X, es una función cerrada.*

Demostración. Sea F un cerrado de $K \times S$ y x un punto de $\overline{\theta'(F)}$ Entonces existe una red $\big((g_\lambda, x_\lambda)\big)$ en F tal que la red $g_\lambda \cdot x_\lambda$ converge a x. Queremos demostrar que $x \in \theta'(F)$. Como K es compacto, alguna subred (g_{λ_γ}) converge a un elemento g de K, luego $g_{\lambda_\gamma}^{-1} \rightsquigarrow g^{-1}$, y entonces

$$x_{\lambda_\gamma} = g_{\lambda_\gamma}^{-1}(g_{\lambda_\gamma} x_{\lambda_\gamma}) \rightsquigarrow g^{-1}x.$$

Por consiguiente $(g_{\lambda_\gamma}, x_{\lambda_\gamma})$ converge al punto $(g, g^{-1}x)$ del cerrado F, y por lo tanto, $x = \theta'(g, g^{-1}x) \in \theta'(F)$. □

Proposición 1.35. *Sea G un grupo compacto, H un subgrupo de G y X un G-espacio. Sea θ la acción de G en X. Entonces*

a) *θ es cerrada.*
b) *Si H es cerrado en G y C es cerrado en X, entonces $H(C)$ es cerrado en X.*
c) *Si H es cerrado en G y C es compacto de X, entonces $H(C)$ es compacto en X.*

d) *Las órbitas son compactas.*

Demostración.

a) Inmediata de la proposición 1.34, considerando $K = G$ y $S = X$.
b) Si H es cerrado en el compacto G, y C es cerrado en X, entonces $H(C)$ es la imagen cerrada de $H \times C$ bajo la función cerrada θ y por tanto, es cerrada en X.
c) Si H es cerrado en el compacto G, y por lo tanto, compacto, entonces $H(C)$, que es la imagen continua de $H \times C$ bajo θ, es compacto también.
d) Como G es cerrado y $\{x\}$ es compacto en X, tenemos, del inciso (c), que la órbita de x, $G(x)$, es compacta. (Observamos otra prueba de la proposición 1.33.)

$\square$

Proposición 1.36. *Sea G un grupo compacto, X un G-espacio y A un subconjunto de X. Entonces, si A es cerrado o compacto, también lo es su saturación, respectivamente.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición 1.35. $\square$

Proposición 1.37. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital es cerrada y propia, es decir, es perfecta.*

Demostración. Veamos que la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es cerrada con fibras compactas. Sea C un cerrado en X. Entonces $\pi^{-1}(\pi(C)) = G(C)$ es cerrado en X, por la proposición 1.35, luego $\pi(C)$ es cerrado en X/G. Igualmente, para G compacto, cada fibra de π es una órbita y por la misma proposición 1.35, se tiene que es compacta. $\square$

Definición 1.38. *Una aplicación $f : X \to Y$ tal que, restringida a su imagen $f' : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, es llamada un encaje, el, cual denotamos por $f : X \hookrightarrow Y$. Particularmente, el encaje $f : X \hookrightarrow Y$ es cerrado si y sólo si $f(X)$ es cerrado en Y. Si además X y Y son G-espacios, un encaje $f : X \hookrightarrow Y$ que es una G-aplicación, es llamada* ***encaje equivariante*** *o G-**encaje** de X en Y.*

Proposición 1.39. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio. Si V es una vecindad de un subconjunto invariante A de X, entonces existe una vecindad invariante U de A tal que $U \subset V$.*

Demostración. Supongamos que V es una vecindad de un subconjunto invariante A de X y sea $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital de X, la cual es cerrada por ser G compacto. El conjunto

$$U = (X/G) \setminus \pi(X \setminus V)$$

es abierto en X/G y contiene a $\pi(A)$. Además, $\pi^{-1}(U) \subset V$ dado que si $u \in U$ entonces $\pi^{-1}(u) \cap (X \setminus V) = \emptyset$. De donde $\pi^{-1}(U) = X \setminus (G(X \setminus V))$ es la vecindad invariante de A contenida en V. □

Proposición 1.40. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces si X es T_1, X/G también lo es.*

Demostración. Si X es T_1, entonces como cada punto x de X es cerrado se tiene que $\pi(x)$ es cerrado y entonces X/G es T_1. □

Proposición 1.41. *Sea G un grupo compacto. Sean X un G-espacio normal y A un subconjunto cerrado invariante de X. Si U es una vecidad de A en X, entonces existe un subconjunto abierto invariante V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración. Como X es normal, existe una vecindad W de A en X tal que $A \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Por la proposición 1.39, existe una vecindad invariante V de A en X tal que $A \subset V \subset W$. De aquí $\overline{V} \subset \overline{W}$ y por tanto V es la vecindad buscada y la proposición está probada. □

Proposición 1.42. *Si G es un grupo compacto y X es un G-espacio de Hausdorff, regular o normal, entonces X/G es un G-espacio de Hausdorff, regular o normal respectivamente.*

Demostración. Consideremos sólo el caso "normal"(los otros casos se tratan de igual forma). Sean C_1 y C_2 dos conjunto cerrados ajenos de X/G. Los conjuntos invariantes ajenos $\pi^{-1}(C_1)$ y $\pi^{-1}(C_2)$ son dos cerrados y como X es normal, tienen vecindades ajenas. Por la proposición 1.39, podemos suponer que son vecindades abiertas invariantes ajenas U_1 y U_2 de $\pi^{-1}(C_1)$ y $\pi^{-1}(C_2)$ respectivamente. Entonces $\pi(U_1)$ y $\pi(U_2)$ son vecindades abiertas ajenas de C_1 y C_2 respectivamente. □

Los dos teoremas siguientes son versiones equivariantes de resultados bien conocidos en la topología general. Haremos uso de ellos frecuentemente a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.43 (Teorema equivariante de Tietze - Urysohn)**.** *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio normal y C un subconjunto cerrado invariante de X. Si $f : C \to [0,1]$ es una aplicación invariante, entonces existe una extensión invariante $F : X \to [0,1]$ de f.*

Demostración. La aplicación invariante $f : C \to [0,1]$ induce, de acuerdo a la proposición 1.25, una función continua $\widetilde{f} : \pi(C) \to [0,1]$ definida por $\widetilde{f}(\pi(x)) = f(x)$, para cada $x \in C$ y donde $\pi : X \to X/G$ es la proyección orbital. Dado que G es compacto, por la proposición 1.37, $\pi(C)$ es cerrado en X/G. Como X/G es normal, aplicando el teorema clásico de extensión de Tietze-Urysohn, existe una extensión $f^* : X/G \to [0,1]$ de $\widetilde{f}$, a todo el espacio orbital X/G. Consideremos la función $F = f^*\pi : X \to [0,1]$. Afirmamos que F es la extensión deseada. En efecto, sea $\zeta \in C$, entonces

$$F(\zeta) = f^*(\pi(\zeta)) = \widetilde{f}(\pi(\zeta)) = f(\zeta).$$

Además, F es invariante. En efecto,

$$F(gx) = f^*(\pi(gx)) = f^*(\pi(x)) = F(x),$$

para cada $x \in X$ y $g \in G$. □

Teorema 1.44 (Lema equivariante de Urysohn)**.** *Si G es un grupo compacto y X es un G-espacio normal, entonces para A y B, subconjuntos cerrados disjuntos invariantes de X, existe una aplicación invariante F de X en el intervalo unitario $[0,1]$ tal que $F|_A = 0$ y $F|_B = 1$.*

Demostración. Sea $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital bajo la acción de G. Sean A y B cerrados disjuntos invariantes en X. Entonces $\pi(A)$ y $\pi(B)$ son cerrados disjuntos en el espacio orbital X/G, puesto que π es cerrada por la proposición 1.37. Como G es compacto y X es normal, entonces por la proposición 1.42, X/G es normal, y aplicando el lema de Urysohn, existe una función continua $f : X/G \to I$ tal que $f\big(\pi(A)\big) = 0$ y $f\big(\pi(B)\big) = 1$.

Entonces la función

$$F(x) = \big(f\pi\big)(x),\ x \in X,$$

es la función requerida. En efecto, dado que π es una aplicación invariante y además f es continua, entonces su composición es continua e invariante también. □

Toda la herramienta expuesta en la última parte de esta sección es básica para los temas tratados en el capítulo siguiente, particularmente en el tratamiento del tema de los G-encajes en G-espacios lineales normados.

Definición 1.45. *Diremos que un G-espacio X, es **lineal** si es un espacio lineal topológico dotado con una acción G, la cual es lineal, esto es, $g(\lambda x + \mu y) = \lambda(gx) + \mu(gy)$, donde $g \in G$, x, $y \in X$ y λ y μ son números reales.*

Definición 1.46. *Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice **isometría** si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se satisface*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Observación 1.47. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Evidentemente, cualquier isometría de X a Y es un encaje.*

Definición 1.48. *Una **métrica invariante** de un G-espacio metrizable X respecto a la acción de un grupo G es una métrica d en X compatible con su topología que satisface*

$$d(gx, gy) = d(x, y) \text{ para todo } g \in G,\ x,\ y \in X.$$

Observación 1.49. *En el caso de la definición anterior, cada transición $\theta_g : X \to X$ es una isometría y por eso decimos que la acción de G en X es isométrica (bajo la métrica d).*

Definición 1.50. *Llamaremos un G-**espacio lineal normado** (G-espacio de Banach), al espacio lineal normado (espacio de Banach) dotado con una acción lineal e isométrica del grupo G.*

Teorema 1.51. *Sea X un espacio metrizable que admite una métrica invariante respecto a la acción del grupo G. Si el espacio orbital X/G es T_1, entonces es metrizable.*

Demostración. Sea d una métrica invariante de X. Para p y q puntos del espacio orbital X/G definimos

$$d^*(p,q) = inf\{d(x,y)|x \in \pi^{-1}(p),\ y \in \pi^{-1}(q)\}.$$

Entonces $d^*(p,q) \geq 0$ y $d^*(p,q) = d^*(q,p)$. Ahora bien, debido a que la métrica d es invariante $d(g_1x, g_2y) = d(x, g_1^{-1}g_2y)$, luego para los puntos arbitrarios $x \in \pi^{-1}(p)$ y $y \in \pi^{-1}(q)$,

$$d^*(p,q) = inf\{d(x,gy)|g \in G\} = d\big(x, G(y)\big).$$

Si $p \neq q$ entonces $x \notin G(y)$, pero como la órbita $G(y)$ es cerrada porque X/G es un espacio T_1, $d^*(p,q) = d(x, G(y)) > 0$.

Mostraremos que d^* satisface la desigualdad del triángulo. En efecto, sea $r = G(z)$ un punto arbitrario de X/G. Tenemos

$$\begin{aligned} d^*(p,q) &= inf\{d(x,gy)\}_{g\in G} \leq inf\{d(x,g'z) + d(g'z,gy)|g,g' \in G\} \\ &\leq inf\{d(x,g'z)\}_{g'\in G} + inf\{d(z,g''y)\}_{g''\in G} \\ &= d^*(p,r) + d^*(r,q). \end{aligned}$$

Probaremos finalmente la compatibilidad de d^* con la topología de X/G, esto es, la topología de la métrica d^* es la topología cociente del espacio orbital. Consideremos las vecindades básicas

$$V = \{y \in X|d(x,y) < \varepsilon\}$$

de x en (X,d) y

$$V^* = \{q \in X/G|d^*(\pi(x),q) < \varepsilon\}$$

de $\pi(x)$ en $(X/G, d^*)$. Si $y \in V$, la desigualdad $d^*(\pi(x),\pi(y)) \leq d(x,y)$ implica que $\pi(y) \in V^*$, luego $\pi(V) \subset V^*$.

Ahora si $q \in V^*$, $d(x, \pi^{-1}(q)) = d^*(\pi(x), q) < \varepsilon$ por lo tanto algún $y \in \pi^{-1}(q)$ satisface $d(x,y) < \varepsilon$, luego $q = \pi(y) \in \pi(V)$. Hemos probado que $V^* \subset \pi(V)$ y de aquí se sigue la igualdad $V^* = \pi(V)$.

Por lo anterior la proyección orbital $(X,d) \to (X/G, d^*)$ entre los espacios métricos, es continua y abierta, en consecuencia la topología de la métrica d^* coincide con la topología cociente de X/G. $\square$

2. Retractos y homotopías equivariantes

Presentamos en seguida las nociones básicas de la Teoría Equivariante de Retractos.

Definición 1.52. *Sea X un G-espacio y A un subespacio cerrado invariante de X. Llamaremos al par (X,A) un G-par.*

Definición 1.53. *Para un G-par (X, A), una aplicación equivariante $r : U \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$, donde U es una vecindad invariante de A en X, es llamada retracción equivariante o G-**retracción** de U sobre A. En este caso, a A se le llama retracto de vecidad equivariante o G-**retracto de vecindad** de X. En el caso de que $U = X$, A será llamado retracto equivariante o G-**retracto** de X.*

Se observa que la definición topológica de un retracto A de X no exige que el conjunto A sea cerrado en X, pero esto es cierto cuando X es de Hausdoff.

Proposición 1.54. *Todo retracto de un espacio Hausdorff X es cerrado en X.*

Demostración. Sea A un retracto arbitrario de un espacio Hausdorff X. Veamos que el conjunto $B = X \backslash A$ es un conjunto abierto de X. Sea $r : X \to A$ una retracción y sea b un punto arbitrario de B. Entonces $r(b)$ es un punto en A. Sea $a = r(b)$. Como $a \in A$ y $b \in B$, tenemos que $a \neq b$. Como X es de Hausdorff, existen dos conjuntos abiertos U y V de X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por la continuidad de la retracción r, la imagen inversa $r^{-1}(U \cap A)$ es un conjunto abierto que contiene al punto b. Se sigue que $W = r^{-1}(U) \cap V$ es un conjunto abierto que contiene a b. Resta probar que $W \subset B$. Sea x un punto arbitrario de W. Entonces $x \in V$ y $x \in r^{-1}(U)$. Lo anterior implica que $r(x) \in U$. Ya que U y V son disjuntos, se sigue que $r(x) \neq x$. Luego $x \in B$. Por tanto, $W \subset B$. □

Mencionamos enseguida algunas propiedades de los retractos y extensores equivariantes:

(1) *Si para un G-par (X, A) existe una G-retracción $r : X \to A$, entonces cualquier G-aplicación $f : A \to Y$ en un G-espacio Y tiene una extensión equivariante la cual es $f \circ r$.*
(2) *Si para un G-par (X, A), toda G-aplicación de A en cada G-espacio tiene una extensión equivariante a todo X, entonces existe una G-retacción de X sobre A, a saber, la extensión equivariante de 1_A.*
(3) *Sean X y Y G-espacios. Una G-aplicación $f : A \to Y$ de un cerrado invariante A de X tiene una extensión equivariante a una vecindad invariante de A si y sólo si Y es un G-retracto de alguna vecindad invariante de Y en el espacio de adjunción $X \cup_f Y$.*

(4) *Sean X y Y G-espacios. La G-aplicación $f : A \to Y$ tiene una extensión equivariante a X si y sólo si Y es un G-retracto del espacio de adjunción $X \cup_f Y$*

Recordaremos aquí uno de los conceptos que son básicos de este trabajo.

Sean X y Y espacios topológicos y consideremos una familia

$$\{h_t : X \to Y | t \in I\}$$

de aplicaciones indexadas por los números reales del intervalo unitario $I = [0, 1]$. La familia $\{h_t\}_{t \in I}$ se dice que es continua si y sólo si la función

$$H : X \times I \to I,$$

definida por $H(x, t) = h_t(x)$ para cada $x \in X$ y $t \in I$, es continua.

*Una familia continua $\{h_t\}_{t \in I}$ de aplicaciones de X en Y, o equivalentemente, la aplicación $H : X \times I \to Y$, es usualmente llamada una **homotopía**. Usaremos la notación "h_t, $t \in I$ ", para representar a la homotopía $\{h_t\}_{t \in I}$.*

*Sean $f : X \to Y$ y $\varphi : X \to Y$ dos aplicaciones. Si existe una homotopía $h_t : X \to Y$, $t \in I$, tal que $h_0 = f$ y $h_1 = \varphi$, diremos que f y φ son **homotópicas**, en símbolos, $f \simeq \varphi$.*

Definición 1.55. *Sean X y Y G-espacios. Una homotopía*

$$F_t : X \to Y, \; t \in I,$$

*es llamada una homotopía equivariante o G-**homotopía**, si $F_t(gx) = gF_t(x)$ para cada $x \in X$, $g \in G$ y $t \in I$. Dos G-aplicaciones*

$$f, \varphi : X \to Y$$

son G-homotópicas, si existe una G-homotopía $F_t : X \to Y$ tal que $F_0 = f$ y $F_1 = \varphi$.

Los dos lemas siguientes son resultados muy útiles en las demostraciones de las afirmaciones principales de este trabajo.

Lema 1.56. *Sean X y Y espacios topológicos, A un subconjunto de X y B un subconjunto compacto de Y. Si V es una vecindad de $A \times B$ en $X \times Y$, entonces existe una vecindad U de A, tal $U \times B \subset V$.*

Demostración. Sea $a \in A$ fijo. Para cada $b \in B$, existen vecindades $U_b \subset X$ y $V_b \subset Y$, de a y de b respectivamente, tales que $U_b \times V_b \subset V$. Entonces la colección $\{V_b\}_{b \in B}$ es una cubierta abierta del compacto B, y por lo tanto, podemos extraer una subcubierta finita, digamos $V_{b_1}, \ldots, V_{b_n}$.

Consideremos
$$U_a = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}.$$
Entonces U_a es una vecindad de a en X. Además, para todo $b \in B$, $U_a \times \{b\} \subset V$, por lo que $U_a \times B \subset V$. Hagamos
$$U = \bigcup_{a \in A} U_a.$$
Entonces U es una vecindad de A. Además $U \times B \subset V$, como se requería. $\square$

Lema 1.57. *Sean X y Y espacios topológicos, A un subconjunto de X y $F : X \times I \to Y$ una homotopía. Si V una vecindad de $F(A \times I)$ en Y, entonces existe una vecindad U de A en X, tal que $F(U \times I) \subset V$.*

Demostración. Como V es una vecindad de $F(A \times I)$, $F^{-1}(V)$ es una vecindad de $A \times I$. Como I es compacto, por el lema 1.56, existe una vecindad de A, $U \subset X$, tal que $U \times I \subset F^{-1}(V)$. De ahí, $F(U \times I) \subset V$. $\square$

Definición 1.58. *Un subconjunto invariante A de un G-espacio X es llamado **G-contraíble en** X si la inclusión $A \hookrightarrow X$ es G-homotópica a una aplicación constante $A \to x_0$, donde $x_0 \in X$ es un punto G-fijo. Cuando $A = X$, decimos que X es G-contraíble.*

Proposición 1.59. *Todo G-retracto de un G-espacio G-contraíble es G-contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio G-contraíble y que A es un retracto equivariante de X con una retracción equivariante $r : X \to A$. Probaremos que A es G-contrable. Como X es G-contríble, existe una G-homotopía $h_t : X \to X$, $t \in I$, tal que h_0 es la G-aplicación identidad y h_1 es la G-aplicación constante $i : X \to X$, dada por $i(x) = x_0$, para cada $x \in X$ donde x_0 es un punto G-fijo. Definimos entonces una G-homotopía $k_t : A \to A$, $t \in I$, tomando
$$k_t = r \circ h_t$$
para cada t. Obviamente k_0 es la G-aplicación identidad en A y k_1 es una G-aplicación constante $j : A \to A$, dada por $j(a) = r(x_0)$. Luego, A es G-contraíble. $\square$

Definición 1.60. *Un G-espacio X se dice ser **localmente G-contraíble en un punto** $x \in X$ si, para cada vecindad G_x-invariante U del punto $x \in X$, existe una vecindad G_x-invariante $V \subset U$ de x, tal que V es G_x-contraíble en U. Un G-espacio X se dice ser **localmente G-contraíble** si éste es localmente G-contraíble en cada uno de sus puntos.*

Proposición 1.61. *Todo reracto equivariante de un G-espacio localmente G-contraíble es localmente G-contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio localmente G-contraíble y que A es un retracto equivariante de X con una G-retracción $r : X \to A$. Probaremos que A es localmente G-contraíble. Sea x un punto arbitrario de A y N cualquir vecindad G_x-invariante de x en el G-espacio A. Como r es equivariante y $r(x) = x$, la imagen inversa

$$U = r^{-1}(N)$$

es una vecindad G_x-invariante de x en el G-espacio X. Como X es localmente G-contraíble en el punto x, existe una vecindad G_x-invariante $V \subset U$ de x en el G-espacio X junto con una G_x-homotopía

$$h_t : V \to U,\ t \in I$$

tal que h_0 es la G_x-aplicación inclusión y h_1 es una G_x-aplicación constante, digamos en el punto G_x-fijo $x_0 \in U$. La intersección

$$M = V \cap A$$

es una vecindad G_x-invariante de x en el G-espacio A. Como

$$M = r(M) \subset r(V) \subset r(U) = N$$

tenemos que $M \subset N$. Definimos una G_x-homotopía

$$k_t : M \to N,\ t \in I$$

tomando $k_t(x) = r[h_t(x)]$ para cada $x \in X$ y cada $t \in [0, 1]$. Obviamente, k_0 es la G_x-aplicación inclusión $M \hookrightarrow N$ y k_1 es la G_x-aplicación constante en el punto G_x-fijo $r(x_0) \in N$. Esto prueba que A es localmente G-contraíble en el punto x. Como x es un punto arbitrario de A, se sigue que A es localmente G-contraíble. $\square$

CAPíTULO 2

Resultados preliminares

En este capítulo introducimos los conceptos de retractos equivariantes absolutos de vecindad o G-ANR's y de extensores equivariantes absolutos de vecindad o G-ANE's. Se sabe, y lo presentaremos aquí, que para espacios metrizables, los G-espacios que son G-ANR's coinciden con los G-ANE's. Así que se presentan algunos resultados relativos a los G-ANE's.

Se introducen igualmente herramientas que juegan un papel central tanto para éste como para el siguiente capítulo: el producto torcido y las rebanadas, así como un teorema de unión.

1. G-ANR's y G-ANE's

Las observaciones y resultados de esta sección corresponderán a las acciones de los ***grupos compactos de Lie*** *en* G***-espacios metrizables****.*

Definición 2.1. *Un G-espacio Y es llamado un extensor equivariante de vecindad o bien* G***-extensor de vecindad*** *para un G-espacio dado X (y escribimos que Y es un G-*ANE*(X)), si para cualquier subconjunto cerrado invariante A de X, y cualquier G-aplicación $f : A \to Y$, existe una vecindad invariante U de A en X y una G-aplicación $F : U \to Y$ tal que $F|_A = f$. Si además, se puede tomar a $U = X$, decimos que Y es un extensor equivariante o G-extensor de X (y escribimos que Y es un G-*AE*(X)). La G-aplicación F es llamada una* G***-extensión de*** f.

Definición 2.2. *Un G-espacio Y es un* G***-extensor absoluto*** *(Resp. un G-extensor absoluto de vecindad), abreviado un G-*AE *(Resp. un G-*ANE*), si Y es un G-*AE*(X) (Resp. un G-*ANE*(X)) para cada G-espacio metrizable X.*

Enseguida mencionamos propiedades de los G-AE's y los G-ANE's, algunas de las cuales nos permiten proporcionar ejemplos concretos de estos G-espacios.

Proposición 2.3. *Tenemos las siguientes propiedades:*

(a) *Si un G-espacio Y es un G-AE, entonces Y es un AE. Si un G-espacio Y es un G-ANE, entonces Y es un ANE.*
(b) *Si un G-espacio Y es un G-AE, entonces Y es un G-ANE.*
(c) *Si un G-espacio Y es un G-AE (Resp., un G-ANE) y Z es un G-espacio G-homeomorfo a Y, entonces Z es también un G-AE (Resp., un G-ANE).*

Demostración. Probaremos (a).

Supongamos que X es un espacio metrizable y A es un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Entonces $G \times X$ es un G-espacio metrizable con la acción $(h,(g,x)) \mapsto (hg,x)$. Definimos una función $\widetilde{f} : G \times A \to Y$, mediante $\widetilde{f}(g,a) = gf(a)$. Entonces $\widetilde{f}$ es equivariante, pues

$$\widetilde{f}(h(g,a)) = \widetilde{f}(hg,a) = h(gf(a)) = h\widetilde{f}(g,a).$$

Como Y es un G-ANE (Resp., es un G-AE), podemos extender $\widetilde{f}$ a una función $\widetilde{F} : G \times U \to Y$ (Resp., $U = X$). Definimos entonces la función $F : U \to Y$, por $F(u) = \widetilde{F}(e,u)$, para cada $u \in U$. Entonces F es una extensión de f, pues $F(a) = \widetilde{F}(e,a) = \widetilde{f}(e,a) = ef(a) = f(a)$. De ahí que X es un ANE (Resp., un AE).

Los incisos (b) y (c) resultan evidentes. □

Observación 2.4. *Es interesante observar que nuestro teorema 3.7 muestra que la propiedad de ser un G-ANE es en realidad una propiedad local.*

Teorema 2.5. *Cualquier subconjunto abierto invariante de un G-ANE es un G-ANE.*

Demostración. Sean Y un G-ANE y V un subconjunto abierto invariante de Y. Sea (X,A) un G-par. Dada una aplicación equivariante $\varphi : A \to V$, como la inclusión $j : V \hookrightarrow Y$ es equivariante, la composición $j\varphi$ también lo es, luego tiene una extensión equivariante $\psi : U \to Y$ a una vecindad invariante U de A. La restricción de ψ a la vecindad invariante $U \cap \psi^{-1}(V)$ de A en X es una extensión equivariante de φ. □

Proposición 2.6. *Si Y es un G-retracto de vecindad de un G-ANE Z, entonces Y es un G-ANE.*

Demostración. Sean A un cerrado invariante de un G-espacio métrico X, y

$$\phi : A \to Y \subset Z$$

una aplicación equivariante. Como Z es un G-ANE, existe $\varphi : U \to Z$, una aplicación equivariante, donde U es una vecindad invariante de A en X y $\varphi|_A = \phi$. Sea $r : V \to Y$ la retracción equivariante de una vecindad invariante V de Z sobre Y. Definamos $W = \varphi^{-1}(V)$ y $F = r \circ \varphi|_W$. Es claro entonces que F es una aplicación equivariante de W en Y. Además, $F|_A = \phi$. Por lo tanto Y es un G-ANE. $\square$

Proposición 2.7. *Si Y es un G-retracto del G-AE Z, entonces Y es un G-AE.*

Demostración. Sea (X, A) un G-par y sea $f : A \to Y$ equivariante. Entonces la composición de f con la inclusión $Y \hookrightarrow Z$ tiene una extensión equivariante $F : X \to Z$. Componiendo F con una retracción equivariante $r : Z \to Y$, obtenemos la extensión equivariante $X \to Y$ de f deseada. $\square$

Proposición 2.8. *Si Y_i es un G-ANE para cada $i = 1, ..., n$, entonces $\prod_{i=1}^{n} Y_i$ es un G-ANE. Si Y_α es un G-AE para todo $\alpha \in A$, entonces $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ es un G-AE.*

Demostración. Consideremos un G-par (X, A). La composición de una aplicación equivariante dada $\varphi : A \to \prod_{i=1}^{n} Y_i$ con cada proyección coordenada $p_i : \prod_{i=1}^{n} Y_i \to Y_i$ tiene una extensión equivariante ψ_i a una vecindad invariante U_i de A en X porque Y_i es un G-ANE. Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ la función $\psi(u) = (\psi_1(u), ..., \psi_n(u)), u \in U$, es una extensión equivariante de φ a U, y es claro que U es una vecindad invariante de A en X.

Para el segundo caso, suponemos que cada Y_α es un G-AE. Dada una G-aplicación $\varphi : A \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, su composición con cada proyección coordenada p_α tiene una G-extensión $\psi_\alpha : X \to Y_\alpha$. Entonces, $\psi(x) = (\psi_\alpha(x)), x \in X$, es una G-extensión de φ a X. $\square$

Una fuente importante de ejemplos de G-ANE's que mostramos más adelante, nos son proporcionados por la versión equivariante del teorema de extensión de Dugundji, dada por S. A. Antonyan en [**4**]*:*

Teorema 2.9. *Sean G un grupo compacto de Lie, (X, A) un G-par y sea V un subconjunto convexo invariante de algún G-espacio localmente convexo Z. Entonces cada aplicación equivariante $f : A \to V$ admite una extensión equivariante $F : L \to V$ a alguna vecindad invariante L del conjunto A en X. En otras palabras, V es un G-ANE. Además, si el conjunto de puntos fijos $V^G = \{v \in V | gv = v, \forall g \in G\}$ no es vacío, entonces podemos tomar $L = X$, es decir, V es un G-AE.*

Igualmente podemos mencionar el teorema de unión demostrado en [**8**].

Teorema 2.10. *Sea X un G-espacio que tiene la topología débil* con respecto a una cubierta cerrada invariante $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Supongamos que para cada subcolección finita $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, la intersección $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ es un G-ANE. Entonces X mismo es un G-ANE.*

Hemos de mencionar que en el teorema anterior se dice que X tiene la topología débil con respecto a la cubierta cerrada $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si para cualquier $\Omega' \subset \Omega$:*

(1) *la unión $\bigcup\{A_\beta | \beta \in \Omega'\}$ es cerrada en X;*
(2) *cualquier subconjunto de $\bigcup\{A_\beta | \beta \in \Omega'\}$ cuya intersección con cada $A_\beta, \beta \in \Omega'$ es un cerrado relativo con la topología subespacio de A_β, necesariamente es cerrado en el subespacio $\bigcup\{A_\beta | \beta \in \Omega'\}$.*

Otro teorema de unión de G-ANE's, el corolario 2.55, dado por S. A. Antonyan en [**11**] *se presenta en este capítulo, resultando esencial en las pruebas de los dos capítulo siguientes.*

Ahora introducimos el concepto más importante de este trabajo, es decir, el objeto que tratamos de caracterizar en el último capítulo.

Definición 2.11. *Un G-espacio Y metrizable es un **G-retracto absoluto** (Resp. **G-retracto absoluto de vecindad**), abreviado un G-AR (Resp. G-ANR), si cada vez que Y se encaja equivariantemente como un cerrado de un G-espacio metrizable Z, entonces Y es un G-retracto (Resp. un G-retracto de vecindad) de ese espacio Z.*

Observación 2.12. *Más adelante, en el teorema 2.29, observaremos que para el caso de los G-espacios metrizables, las propiedades de ser G-AE (Resp. G-ANE) y G-AR (Resp. G-ANR), coinciden. De ahí, para este caso particular, podemos observar que las propiedades de los G-AR's (Resp. G-ANR's) coinciden con las de los G-AE (Resp., G-ANE's). De ahí, también surgen una gran cantidad de ejemplos de G-AR (Resp. G-ANR's).*

Ejemplos 2.13. *Presentamos ahora algunos ejemplos de G-ANR's, haciendo uso de las propiedades que hemos mencionado en esta sección:*

Partamos de un ejemplo concreto, y utilicemos la observación 2.12.

1. *Utilizando el teorema equivariante de Dugundji, sea $G = \mathbb{S}^1$ y $L = \mathbb{C}$, con la acción $\theta(e^{it_1}, re^{it_2}) = re^{i(t_1+t_2)}$. Entonces como G es un grupo compacto de Lie, y L es un G-espacio lineal normado, tenemos que cualquier conjunto invariante y convexo, como un disco D centrado en el origen, es un G-ANR. Observemos que como además el origen es un punto G-fijo en tal disco, tenemos que D es también un G-AR.*
2. *Los productos numerables de G-AR's son G-AR's.*
3. *Los productos finitos de G-ANR's son G-ANR's.*
4. *Los conjuntos abiertos invariantes de G-ANR's son G-ANR's.*
5. *La unión de abiertos invariantes G-ANR's, son G-ANR's.*

2. G-encajes en G-espacios lineales normados

Proposición 2.14. *Sea G un grupo compacto y sea (X, ρ) un G-espacio métrico. Entonces*

$$d(x, y) = \sup_{g \in G} \rho(gx, gy), \ \ x, y \in X,$$

es una métrica invariante para X, (esto es, d induce la topología de X). Además, la métrica d es completa (acotada), siempre cuando ρ lo es.

Demostración. Como G es compacto, la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ está bien definida. Entonces d es una métrica en X. Mostraremos que d es la métrica deseada.

En efecto, sean $h \in G$ y $x, y \in X$. Entonces

$$d(hx, hy) = \sup_{g \in G} \rho(ghx, ghy) = \sup_{t \in G} \rho(tx, ty) = d(x, y),$$

de ahí se ve que d es invariante.

Para mostrar que d y ρ definen la misma topología, primero observamos que $\rho(x,y) \leq d(x,y)$ para todos x, $y \in X$. Por tanto, sólo necesitamos probar que

$$d(x_n, x) \rightsquigarrow 0 \text{ siempre que } \rho(\mathrm{x_n}, \mathrm{x}) \rightsquigarrow 0,$$

donde $\{x_n\}$ es una sucesión en X y $x \in X$. Supongamos lo contrario. Entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset X$ y un punto $x \in X$ tal que $\rho(x_n, x) \rightsquigarrow 0$, mientras $d(x_n, x)$ no converge a 0. Entonces, para algún $\zeta > 0$ y para alguna subsucesión $\{y_k\}$ de $\{x_n\}$ tenemos que

$$d(y_k, x) \geq \zeta \text{ para todo k} = 1, 2, ...$$

Se sigue de la definición de la métrica d que debe existir una sucesión $\{g_k\}$ en el grupo G tal que

$$\rho(g_k y_k, g_k x) > \frac{\zeta}{2} \text{ para todo k} = 1, 2, ... \tag{1}$$

Como G es compacto, la sucesión $\{g_k\}$ tiene un punto de acumulación g en G. Por la continuidad de la acción de G en X, podemos seleccionar vecindades abiertas $H \subset G$ y $U \subset X$ de g y x Resp., tales que

$$\rho(hy, gx) < \frac{\zeta}{4} \tag{2}$$

siempre cuando $h \in H$ y $y \in U$.

Como $\rho(y_k, x) \rightsquigarrow 0$, existe algún entero N tal que $y_k \in U$ para todo $k \geq N$. Como el punto $g \in G$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{g_k\}$, existe un entero $k_0 \geq N$ tal que $g_{k_0} \in H$.

Se sigue de (2) que

$$\rho(g_{k_0} y_{k_0}, gx) < \tfrac{\zeta}{4} \quad \text{y} \quad \rho(g_{k_0} x, gx) < \tfrac{\zeta}{4}.$$

En consecuencia, $\rho(g_{k_0} y_{k_0}, g_{k_0} x) < \frac{\zeta}{2}$, lo cual contradice (1). Por lo tanto, la primera parte de la proposición 2.14 está probada.

Ahora supongamos que ρ es completa. Sea $\{x_n\} \subset X$ una d-sucesión de Cauchy. Como $\rho(x,y) \leq d(x,y)$, $x, y \in X$, entonces se sigue que $\{x_n\}$ es también una ρ-sucesión de Cauchy. Por la completez de ρ, la sucesión $\{x_n\}$ converge en X con respecto a ρ. Por tanto, usando la primera afimación de la proposición 2.14 podemos concluir que $\{x_n\}$ converge en X también con respecto a d. Esto significa que d es una métrica completa.

Finalmente, si ρ es una métrica acotada, entonces es inmediato de la definición de d, que d es también una métrica acotada. $\square$

Corolario 2.15. *Sea G un grupo compacto. Entonces todo G-espacio metrizable (completo) admite una métrica invariante acotada (completa).*

Teorema 2.16. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio metrizable. Entonces el espacio orbital X/G es metrizable.*

Demostración. Si G es un grupo compacto, entonces por la proposición 1.40, el espacio orbital X/G es T_1. Además por el corolario 2.15, X admite una métrica invariante respecto a la acción del grupo G. Finalmente, por la proposición 1.51, X/G es metrizable. $\square$

Definición 2.17. *Sea Z un G-conjunto. Una función $f : Z \to \mathbb{R}$ es llamada G-**uniforme** si para cada $\zeta > 0$ existe una vecindad U de la identidad de G tal que $|f(gz) - f(z)| < \zeta$ para toda $g \in U$ y $z \in Z$.*

Notación 2.18. *Sea Z un G-conjunto. Denotamos por $B(Z)$ al espacio de Banach de todas las funciones reales acotadas de Z, dotado con la norma del supremo. Por $A(Z)$ denotamos al subespacio de $B(Z)$ que consiste de todas las funciones G-uniformes.*

Proposición 2.19. *Sea G un grupo y sea Z un G-conjunto. Entonces*

(a) *$A(Z)$ es un subespacio lineal cerrado de $B(Z)$,*

(b) *la aplicación $(g, f) \mapsto gf$, de $G \times A(Z)$ en $A(Z)$ definida por*

$$(gf)(z) = f(g^{-1}z), \ z \in Z$$

es una acción continua, isométrica, lineal de G en $A(Z)$.

Demostración.

(a) Tenemos que $A(Z)$ es un subespacio lineal de $B(Z)$. Supongamos que una sucesión $\{f_n\}$ en $A(Z)$ converge a un elemento f de $B(Z)$. Debemos mostrar que f es G-uniforme. Dado $\zeta > 0$, fijamos un índice k tal que

$$|f(z) - f_k(z)| < \frac{\zeta}{3} \text{ para toda z} \in \text{Z}.$$

Como $f_k \in A(Z)$, podemos seleccionar una vecindad U de la identidad de G tal que

$$|f_k(gz) - f_k(z)| < \frac{\zeta}{3}, \text{ para todo g} \in \text{U y z} \in \text{Z}.$$

En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned}|f(gz) - f(z)| &\leq |f(gz) - f_k(gz)| + |f_k(gz) - f_k(z)| + |f_k(z) - f(z)| \\ &< \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta}{3} = \zeta,\end{aligned}$$

para todo $g \in U$ y $z \in Z$. Luego, $f \in A(Z)$.

(b) Sea $f \in A(Z)$ y $g \in G$. Veremos primeramente que $gf \in A(Z)$. Como gf es acotada, sólo necesitamos probar que gf es una función G-uniforme. Dado $\zeta > 0$, seleccionamos una vecindad V de la identidad en G tal que $|f(hx) - f(x)| < \zeta$ para todos $h \in V$, $x \in Z$.

Definimos un subconjunto U de G por

$$U = gV^{-1}g^{-1} = \{gv^{-1}g^{-1} | v \in V\}.$$

Claramente, U es tambien una vecindad de la identidad en G. Afirmamos que

$$|(gf)(tz) - (gf)(z)| < \zeta \text{ para todos t} \in \text{U}, \text{ z} \in \text{Z}.$$

En efecto, ponemos $x = g^{-1}tz$ y $h = g^{-1}t^{-1}g$. Entonces $g^{-1}z = hx$ y $h \in V$, siempre cuando $t \in U$. En consecuencia,

$$|(gf)(tz) - (gf)(z)| = |f(g^{-1}tz) - f(g^{-1}z)| = |f(x) - f(hx)| < \zeta$$

siempre cuando $t \in U$.

Luego, gf es G-uniforme, y de ahí $gf \in A(Z)$. Enseguida observamos que la aplicación $(g, f) \mapsto gf$ es una acción de G en $A(Z)$, esto es, $g(hf) = (gh)f$ y $ef = f$, donde $f \in A(Z)$, g, $h \in G$ y e es la identidad de G. Esta acción es lineal e isométrica. Resta mostrar la continuidad de la acción $(g, f) \mapsto gf$. Probaremos que la acción es continua en cada punto $(g_0, f_0) \in G \times A(Z)$. Dado $\zeta > 0$, podemos seleccionar una vecindad V de la identidad de G tal que

$$|f_0(hz) - f_0(z)| < \frac{\zeta}{2} \text{ para todo h} \in \text{V}, \text{ z} \in \text{Z}.$$

Definimos un subconjunto U de G por

$$U = g_0V^{-1} = \{g_0v^{-1} | v \in V\}.$$

Claramente, U es una vecindad de $g_0 \in G$. Afirmamos que $\|gf - g_0f_0\| < \zeta$ siempre cuando $g \in U$, $f \in A(Z)$ y

$$\|f - f_0\| < \frac{\zeta}{2}.$$

En efecto, tenemos

$$\|gf_0 - g_0f_0\| = \sup_{z \in Z} |(gf_0)(z) - (g_0f_0)(z)| = \tag{3}$$

$$= \sup_{z\in Z} |f_0(g^{-1}z) - f_0(g_0^{-1}z)|.$$

Siendo $y = g_0^{-1}z$, $z \in Z$ y $h = g^{-1}g_0$, $g \in G$ y usando el hecho de que g_0 puede ser considerado como una biyección de Z, concluimos que

$$\text{(4)} \qquad \sup_{z\in Z} |f_0(g^{-1}z) - f_0(g_0^{-1}z)| = \sup_{z\in Z} |f_0(hg_0^{-1}z) - f_0(g_0^{-1}z)| =$$
$$= \sup_{y\in Z} |f_0(hy) - f_0(y)|.$$

Como $h \in V$ siempre cuando $g \in U$, usando (3) y (4), obtenemos

$$\|gf_0 - g_0f_0\| \le \frac{\zeta}{2}$$

para toda $g \in U$. Finalmente, $\|gf - gf_0\| = \|f - f_0\|$, ya que G actúa isométricamente en $A(Z)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|gf - g_0f_0\| &\le \|gf - gf_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\| = \|f - f_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\| \\ &< \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2} = \zeta \end{aligned}$$

siempre cuando $\|f - f_0\| < \frac{\zeta}{2}$, $f \in A(Z)$ y $g \in U$. Esto establece la continuidad de la acción gf en (g_0, f_0) y completa la prueba. □

Corolario 2.20. *Sea G un grupo y sea Z un G-conjunto. Entonces $A(Z)$ es un G-espacio de Banach.*

Teorema 2.21. *Sea G un grupo topológico y sea (X, d) un G-espacio métrico con una métrica invariante acotada d. Entonces existe un G-espacio lineal normado L y una isometría equivariante $j : X \to L$ tal que*

(a) *$j(X)$ es una base de Hamel para L,*
(b) *$j(X)$ es cerrado en L.*

Demostración. Sea Z el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X. Definimos una acción de G en Z por la regla $(g, z) \mapsto gz$

$$gz = \{gp \mid p \in z\}, \;\; g \in G, \;\; z \in Z.$$

Claramente, Z es un G-conjunto.

Consideremos el G-espacio de Banach $A(Z)$. Primero encajamos X equivariantamente e isométricamente en $A(Z)$.

Para cada $x \in X$, sea $f_x : Z \to \mathbb{R}$ la función

$$f_x(z) = d(x, z) = \inf_{p\in z} d(x, p), \;\; z \in Z.$$

Verificaremos que $f_x \in A(Z)$. f_x es acotada, puesto que d lo es. Mostraremos que f_x es G-uniforme. Dado $\zeta > 0$, seleccionamos una vecindad U de la identidad de G tal que

$$d(gx, x) < \zeta,\ \ g \in U \tag{5}$$

(esto es posible, ya que la acción de G en X es continua en el punto $x \in X$). Ahora sean $g \in U$, $z \in Z$. Utilizando la invarianza de d y (5), obtenemos

$$|f_x(gz) - f_x(z)| = |d(x, gz) - d(x, z)| = |d(g^{-1}x, z) - d(x, z)| \leq$$
$$\leq d(g^{-1}x, x) = d(x, gx) < \zeta.$$

Por lo tanto f_x es G-uniforme, y de ahí $f_x \in A(Z)$. La aplicación

$$j : X \to A(Z),\ \text{dada por j(x) = f}_\text{x}$$

es un encaje equivariante isométrico, puesto que para $x, y \in X$

$$\|f_x - f_y\| = \sup_{z\in Z} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

y el supremo es alcanzado para $z = \{y\} \in Z$. Por lo tanto

$$\|j(x) - j(y)\| = d(x, y)$$

y j es una isometría. Utilizando de nuevo la invarianza de d tenemos

$$f_{gx}(z) = d(gx, z) = d(x, g^{-1}z) = f_x(g^{-1}z) = (gf_x)(z),$$

lo cual significa que j es una G-aplicación.

Sea L la envoltura lineal de $j(X)$ en $A(Z)$. Probaremos (a) y (b).

Para probar (a), consideremos elementos distintos $x_1, ..., x_{n+1}$ de X. Entonces $f_{x_{n+1}}$ no puede ser una combinación lineal de $f_{x_1}, ..., f_{x_n}$, ya que si $z = \{x_1, ..., x_n\} \in Z$, todas las $f_{x_1}, ..., f_{x_n}$ se anulan en z, mientras que $f_{x_{n+1}}$ no. De ahí, $j(X)$ es linealmente independiente en L. Como L es la envoltura lineal de $j(X)$, (a) está probado.

Podemos mostrar ahora que $j(X)$ es cerrado en L. Sea $\varphi \in L\backslash j(X)$; entonces $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_{x_i}$ para números reales λ_i y $x_i \in X$. Para mostrar que $j(X)$ es cerrado en L, es suficiente mostrar que

$$B(\varphi, \zeta) \cap j(X) = \emptyset$$

para algún $\zeta > 0$, donde $B(\varphi, \zeta)$ denota la ζ-vecindad de φ en L.

Como $\varphi \notin j(X)$, tenemos $\varphi \neq f_{x_i}$ para $i = 1, ..., n$. Sea $\zeta > 0$ más pequeño que $\frac{1}{2} \min \|\varphi - f_{x_i}\|$ y supongamos que $\|\varphi - f_x\| < \zeta$ para algún $f_x \in j(X)$. Entonces para f_x tenemos $\|f_x - f_{x_i}\| \geq \zeta$, $i = 1, ..., n$. Por lo tanto, como j es una isometría,

$$d(x, x_i) \geq \zeta, \tag{6}$$

para $i = 1, ..., n$.

Pero $\|\varphi - f_x\| \geq \|\varphi(z) - f_x(z)\|$ para cada $z \in Z$, en particular para $z = \{x_1, ..., x_n\}$ tenemos que $\varphi(z) = 0$, y de ahí que

$$\|\varphi - f_x\| \geq |f_x(z)| = d(x, z).$$

Por (6), $d(x, z) \geq \zeta$ y por lo tanto, tenemos que $\|\varphi - f_x\| \geq \zeta$, lo cual contradice nuestra suposición $\|\varphi - f_x\| < \zeta$. En consecuencia

$$B(\varphi, \zeta) \cap j(X) = \emptyset$$

y, como $\varphi \in L \setminus j(X)$ fue arbitrariamente escogida, la prueba está completa. $\square$

Observación 2.22. *Cuando G es el grupo trivial, el teorema 2.21 se reduce a su versión no equivariante, conocido como teorema de R. F. Arens y J. Eells (ver [**13**]), el cual juega un papel importante en la teoría de retractos.*

Sean X y Y dos espacios topológicos. Denotamos por $C(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. Para cada par de conjuntos $B \subset X$ y $U \subset Y$, definimos

$$M(B, U) = \{f \in C(X, Y) | f(B) \subset U\}.$$

*Dotaremos a **C(X,Y)** con la **topología compacto abierta** la cual es generada por la sub-base*

$$\{M(B, U) | B \text{ es compacto en } X \text{ y } W \text{ es abierto en } Y\}.$$

Proposición 2.23. *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio compacto y Y un espacio topológico lineal normado. Entonces $C(X, Y)$ es un G-espacio lineal normado con la acción de G definida por*

$$(g, f) \mapsto gf;\ (gf)(x) = f(g^{-1}x), \tag{7}$$

$g \in G$, $f \in C(X, Y)$, y $x \in X$.

Demostración. Primeramente, observamos que la función

$$\xi : G \times C(X, Y) \to C(X, Y),$$

dada por (7) verifica las propiedades de las acciones. En efecto,

(a) $(ef)(x) = f(e^{-1}x) = f(x)$, por tanto, $ef = f$ para cada $f \in C(X, Y)$,

(b)

$$\begin{aligned} \big((hg)f\big)(x) &= f\big((hg)^{-1}(x)\big) = f\big(g^{-1}(h^{-1}(x))\big) \\ &= gf(h^{-1}x) = h(gf(x)). \end{aligned}$$

Así, $h(gf) = (hg)f$ para cada $f \in C(X,Y)$, y $g, h \in G$.

Veamos que ξ es continua. Es suficiente mostrar que, para un subconjunto compacto $B \subset X$ y un abierto $U \subset Y$, la imagen inversa $\xi^{-1}\big(M(B,U)\big)$ es abierta, donde

$$M(B,U) = \{f \in C(X,Y) | f(B) \subset U\},$$

puesto que los conjuntos $M(B,U)$ forman una subbase de la topología compacto-abierta de $C(X,Y)$.

Sea (g_0, f_0) un punto arbitrario de $\xi^{-1}\big(M(B,U)\big)$. Entonces $g_0 f_0 = \xi(g_0, f_0) \in M(B,U)$. Luego $f_0(g_0^{-1}x) = (g_0 f_0)(x) \in U$ para cada $x \in B$. La continuidad de f_0 y la continuidad de la acción de G en X implican que para cada $x \in B$, existen una vecindad V_x de g_0 en G y una vecindad W_x de x en X tales que

$$f_0(g^{-1}y) \in U, \text{ para todos los } g \in V_x,\ y \in W_x. \tag{8}$$

Ya que B es compacto, su cubierta abierta $\{W_x | x \in B\}$ tiene una subcubierta finita $\{W_{x_1}, ..., W_{x_n}\}$. Ponemos

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Claramente, V es una vecindad de g_0 en G. Como G es compacto, existe una vecindad O de g_0, tal que $\overline{O} \subset V$ y $\overline{O}$ es compacto. Sea

$$K = \{g^{-1}x | g \in Q, x \in B\},$$

donde $Q = \overline{O}$. Claramente, K es un subconjunto compacto de X. Mostraremos enseguida que $f_0(K) \subset U$. En efecto, si $k = g^{-1}x \in K$ con $g \in Q$, $x \in B$, entonces existe un índice $1 \leq j \leq n$ tal que $x \in W_{x_j}$ y $g \in V_{x_j}$. Entonces (8) implica que $f_0(k) = f_0(g^{-1}x) \in U$. Así, $f_0(K) \subset U$, y por tanto, $f_0 \in M(K,U)$.

Afirmamos que $O \times M(K,U) \subset \xi^{-1}\big(M(B,U)\big)$. En efecto, sean $g \in O$, $f \in M(K,U)$ y $x \in B$. Entonces

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) \in f(K) \subset U,$$

lo cual significa que

$$\xi(g,f) = gf \in M(B,U),$$

esto es, $gf \in \xi^{-1}\big(M(B,U)\big)$. Por tanto, tenemos que

$$(g_0, f_0) \in O \times M(K,U) \subset \xi^{-1}\big(M(B,U)\big),$$

lo cual muestra que $\xi^{-1}\big(M(B,U)\big)$ es abierto y prueba la continuidad de ξ.

Además la acción $(g,f)\mapsto gf$ es lineal. En efecto, sean λ y $\mu\in\mathbb{R}$, $g\in G$ y $f_1,f_2\in C(X,Y)$; entonces

$$\begin{aligned} g(\lambda f_1+\mu f_2)(x) &= (\lambda f_1+\mu f_2)(g^{-1}x)=\lambda f_1(g^{-1}x)+\mu f_2(g^{-1}x)\\ &= \lambda(gf_1(x))+\mu(g(f_2)(x)). \end{aligned}$$

Además

$$\|gf\|=\sup_{x\in X}\|(gf)(x)\|=\sup_{x\in X}\|f(g^{-1}x)\|=\sup_{y\in X}\|f(y)\|=\|f\|,$$

para toda $g\in G$, $f\in C(X,Y)$. Esto significa que en este caso la acción (7) es también isométrica. En consecuencia, $C(X,Y)$ es un G-espacio lineal normado. $\square$

Teorema 2.24. *Sea G un grupo compacto y sea (X,d) un G-espacio metrizable con una métrica invariante d. Entonces existe un espacio lineal normado L y una isometría equivariante*

$$l: X\hookrightarrow C(G,L),$$

cuya imagen $l(X)$ es cerrada en $C(G,L)$.

Observación 2.25. *Recordemos que aquí el grupo G es un G-espacio con la acción $(g,t)\mapsto g\star t=tg^{-1}$. $C(G,L)$ es un G-espacio lineal normado con la acción*

$$(g,f)\mapsto gf;\ (gf)(t)=f(g^{-1}t), \tag{9}$$

$g\in G$, $f\in C(G,L)$ y $t\in G$.
Luego de (9) tenemos:

$$(gf)(t)=f(g^{-1}\star t)=f(tg);\ g,t\in G,\ \ f\in C(G,L), \tag{10}$$

g,$t\in G$ y $f\in C(G,L)$.

Demostración. Por el teorema de Arens-Eells (ver la observación 2.22), o por el teorema 2.21, existe un espacio lineal normado L y una isometía $\alpha: X\hookrightarrow L$ cuya imagen $\alpha(X)$ es cerrado en L. Definimos la aplicación $l: X\to C(G,L)$ por

$$l(x)(g)=\alpha(gx),\ x\in X,\ g\in G.$$

Mostraremos que l es la aplicación deseada. Sean x, $y \in X$. Como α es isometría y d es invariante, tenemos

$$\|l(x) - l(y)\| = \sup_{g\in G} \|l(x)(g) - l(y)(g)\| =$$

$$= \sup_{g\in G} \|\alpha(gx) - \alpha(gy)\| = \sup_{g\in G} d(gx, gy) = \sup_{g\in G} d(x, y) = d(x, y),$$

esto es, l es una isometría.

Sean g, $h \in G$. Usando (10) obtenemos

$$l(hx)(g) = \alpha(ghx) = l(x)(gh) = [hl(x)](g),$$

lo cual significa que $l(hx) = hl(x)$, esto es, l es una aplicación equivariante.

Resta mostrar que $l(X)$ es cerrado en $C(G, L)$. Con este propósito sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que $l(x_n)$ converge a algún punto $f \in C(G, L)$. Ponemos $y = f(e) \in L$. Claramente,

$$\alpha(x_n) = l(x_n)(e) \rightsquigarrow f(e) = y,$$

y como $\alpha(X)$ es cerrado en L, se sigue que $y \in \alpha(X)$, esto es, $y = \alpha(x)$ para algún $x \in X$. Por lo tanto, $\alpha(x_n) \rightsquigarrow \alpha(x)$. Como α es una isometría, concluimos que $x_n \rightsquigarrow x$ y usando la continuidad de l, obtenemos que $l(x_n) \rightsquigarrow l(x)$. Consecuentemente, $f = l(x)$ y por lo tanto, $f \in l(X)$. Esto completa la prueba. $\square$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del corolario 2.15 y teorema 2.24.

Corolario 2.26. *Sea G un grupo compacto. Entonces, para cada G-espacio metrizable X existe un espacio lineal normado L y un encaje equivariante*

$$l : X \hookrightarrow C(G, L)$$

cuya imagen $l(X)$ es cerrado en $C(G, L)$.

Teorema 2.27. *Sea G un grupo compacto. Si Y es un AE (Resp., un ANE), entonces el G-espacio de funciones $C(G, Y)$ con la acción señalada en (10), es un G-AE (Resp., un G-ANE).*

Demostración. Consideremos el G-par metrizable (X, A) y una aplicación equivariante $\varphi : A \to C(G, Y)$. Sea $X \times G$ el G-espacio con acción

$$h \cdot (x, g) = (hx, gh^{-1}).$$

Entonces $A \times G$ es un cerrado invariante de $X \times G$. Se deduce que la función $\varphi^* : A \times G \to Y$, definida por $\varphi^*(a,g) = \varphi(a)(g)$, donde $a \in A$ y $g \in G$, es invariante. En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi^*\big(h(a,g)\big) &= \varphi^*(ha, gh^{-1}) = \varphi(ha)(gh^{-1}) = h\varphi(a)(gh^{-1}) \\ &= \varphi(a)(gh^{-1}h) = \varphi(a)(g) = \varphi^*(a,g). \end{aligned}$$

para toda $h \in G$. En particular para $h = g$ obtenemos

$$\varphi^*(a,g) = \varphi^*(ga,e). \tag{11}$$

Dado que $(X \times \{e\}, A \times \{e\})$ es un G-par y como Y es un AE (Resp., un ANE y G es compacto), entonces $\varphi^*|_{A\times\{e\}}$ tiene una extensión continua $\varphi_0 : X \times \{e\} \to Y$ (Resp., $\varphi_0 : U \times \{e\} \to Y$ donde U es una vecindad de A en X y que por ser G compacto, podemos suponer U invariante). Definimos:

$$\Phi : X \times G \to Y, \ (\text{Resp., } \Phi : U \times G \to Y) \text{ por } \Phi(x,g) = \varphi_0(gx,e).$$

Entonces Φ es continua e invariante. En efecto,

$$\Phi(h \cdot (x,g)) = \Phi(hx, gh^{-1}) = \varphi_0((gh^{-1})hx, e) = \varphi_0(gx,e) = \Phi(x,g).$$

Además su función asociada

$$\Phi_* : X \to C(G,Y), \ (\text{Resp., } \Phi_* : U \to C(G,Y))$$

dada por $\Phi_*(x)(g) = \Phi(x,g)$ es equivariante. En efecto,

$$\begin{aligned} \Phi_*(hx)(g) &= \Phi(hx,g) = \varphi_0(ghx,e) \\ &= \Phi(x,gh) = \Phi_*(x)(gh) = (h\Phi_*(x))(g). \end{aligned}$$

Finalmente comprobamos que es una extensión de φ. Para $a \in A$ y $g \in G$, haciendo uso de (11), tenemos que

$$\Phi_*(a)(g) = \Phi(a,g) = \varphi_0(ga,e) = \varphi^*(ga,e) = \varphi^*(a,g) = \varphi(a)(g)$$

y por lo tanto, $\Phi_*(a) = \varphi(a)$. □

Proposición 2.28. *Cuando G es el grupo compacto, se tiene que si un G-espacio Y es un G-AR (Resp., un G-ANR), entonces Y es un AR (Resp., un ANR). Además, si un G-espacio metrizable Y es un G-AR, entonces Y es un G-ANR.*

Demostración. Sea G un grupo compacto. Supongamos que Y es un G-espacio metrizable el cual es un G-AR (Resp., un G-ANR). Como Y es un G-espacio metrizable, por el corolario 2.26, existe un espacio lineal normado L y un encaje equivariante $l : Y \hookrightarrow C(G,L)$ cuya imagen $l(Y)$ es cerrado en $C(G,L)$. Por el teorema de extensión de Dugundji [**27**], L es un AE y por el teorema 2.27, $C(G,L)$ es un

G-AE. Ahora, por la hipótesis Y es un G-retracto de $C(G, L)$ (Resp., un G-retracto de vecindad de $C(G, L)$). Aplicando la proposición 2.7, (Resp., la proposición 2.6), Y es un G-AE (Resp., un G-ANE). Por la proposición 2.3, Y es un AE (Resp., un ANE). Como Y es metrizable, Y es un AR (Resp., un ANR).

Es evidente, por la definición 2.11, que si un G-espacio metrizable Y es un G-AR, entonces Y es un G-ANR, también. □

Teorema 2.29. *Sea G un grupo compacto. Entonces un G-espacio métrico X es un G-*AE *(Resp., un G-*ANE*) si y sólo si X es un G-*AR *(Resp., un G-*ANR*).*

Demostración. Sea X un G-AR (Resp., un G-ANR). Como X es un G-espacio metrizable, por el corolario 2.26, existe un espacio lineal normado L y un encaje equivariante $l : X \hookrightarrow C(G, L)$ cuya imagen $l(X)$ es cerrado en $C(G, L)$. Por el teorema de extensión de Dugundji [**27**], L es un AE y por el teorema 2.27, $C(G, L)$ es un G-AE. Ahora, por la hipótesis X es un G-retracto de $C(G, L)$ (Resp., un G-retracto de vecindad de $C(G, L)$). Aplicando la proposición 2.7, (Resp., la proposición 2.6), X es un G-AE (Resp., un G-ANE).

Recíprocamente, supongamos que X es un G-AE (Resp., un G-ANE). Consideramos a X como un cerrado invariante de un G-espacio métrico Z y a $id : X \to X$, la identidad en X. Como X es un G-AE (Resp., un G-ANE), la G-aplicación id tiene una extensión equivariante $r : Z \to X$, (Resp., $r : U \to X$ con U una vecindad invariante de X en Z) la cual es una retracción equivariante. Por lo tanto, X es un G-AR (Resp., un G-ANR). □

En el último capítulo se hará uso de un caso particular del teorema 2.10, cuyo demostración, dada en [**3**]*, presentamos enseguida:*

Teorema 2.30. *Sean G un grupo compacto, $X = X_1 \cup X_2$ y $X_0 = X_1 \cap X_2$, donde X_1 y X_2 son conjuntos cerrados invariantes del G-espacio metrizable X tales que X_0, X_1 y X_2 son G-ANR's. Entonces X es un G-ANR.*

Demostración. Mostraremos que si X es un subconjunto invariante cerrado de un G-espacio metrizable Y y X_0, X_1 y X_2 son G-ANR's, entonces existe en Y una vecindad equivariante U del conjunto X tal que X es su G-retracto.

Por el corolario 2.15, podemos tomar una métrica invariante ρ en Y y consideremos los conjuntos

$$Y_0 = \{y \in Y | \rho(y, X_1) = \rho(y, X_2)\},$$

$$Y_1 = \{y \in Y | \rho(y, X_1) < \rho(y, X_2)\},$$
$$Y_2 = \{y \in Y | \rho(y, X_1) > \rho(y, X_2)\}.$$

En vista del hecho de que ρ es invariante, los conjuntos Y_0, Y_1, y Y_2 son invariantes en Y, y es claro que $Y = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2$. Obviamente, X_0 es cerrado e invariante en Y_0 y $X_i \cap Y_0 = X_0$, $i = 1, 2$.

En consecuencia, existe una vencindad invariante W_0 del conjunto X_0 en el espacio Y_0 que es cerrada en Y_0, y una G-retracción

$$r_0 : W_0 \to X_0.$$

Haciendo

$$r_i(y) = \begin{cases} r_0(y), & \text{si } y \in W_0 \\ y, & \text{si } y \in X_i. \end{cases}$$

obtenemos una G-retracción r_i del G-conjunto $X_i \cup W_0$ cerrado en $Y_0 \cup Y_i$, sobre el conjunto X_i, $i = 1, 2$. Como X_i es un G-ANR, por el teorema 2.29, tenemos que X_i es un G-ANE, y por tanto, existe una G-extensión $r_i^{'} : V_i \to X_i$ de la G-aplicación r_i a alguna vecindad invariante V_i del conjunto $X_i \cup W_0$ en $Y_0 \cup Y_i$.

Claramente, por la proposición 1.41, en V_i existe una vecindad cerrada invariante U_i del conjunto X_i en el espacio $Y_0 \cup Y_i$ tal que $U_i \cap Y_0 \subset W_0$. Como $U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap Y_0 \subset W_0$, la fórmula $r(y) = r_i^{'}(y)$ para $y \in U_i$, $i = 1, 2$, define una G-retracción r de la vecindad invariante $U = U_1 \cup U_2$ del conjunto X en el espacio Y sobre el conjunto X. Esto completa la prueba. □

3. Productos torcidos y rebanadas

Definición 2.31. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Si X es un H-espacio, entonces H actúa continuamente en $G \times X$ mediante*

$$h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx).$$

*Al espacio de órbitas respectivo $(G \times X)/H$ se le llama el **producto torcido**, y se denota $G \times_H X$. La H-órbita del punto (g, x) es denotada por $[g, x]$.*

Por definición $[g, x] = [g', x']$ si y sólo si existe un $h \in H$ tal que $g' = gh^{-1}$ y $x' = hx$, así que

$$[gh, x] = [g, hx]$$

para todo $h \in H$.

Veremos en la siguiente proposición, que el producto torcido $G\times_H X$ es, a su vez, un G-espacio.

Proposición 2.32. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo topológico G y X un H-espacio. Entonces $G\times_H X$ es un G-espacio con la G-acción dada por la fórmula:*

$$g'[g,x]=[g'g,x].$$

donde $g'\in G$ y $[g,x]\in G\times_H X$.

Demostración. Primero recordamos que $[g,x]=[g_1,x_1]$ si y sólo si $g_1=gh^{-1}$ y $x_1=hx$ para alguna $h\in H$. En este caso

$$g'[g_1,x_1]=g'[gh^{-1},hx]=[g'gh^{-1},hx]=[g'g,x]=g'[g,x],$$

por tanto, está bien definida.

Sean $f:G\times(G\times X)\to G\times X$ y $p:G\times X\to G\times_H X$ las funciones continuas dadas por

$$f(g',(g,x))=(g'g,x) \text{ y } p(g,x)=[g,x].$$

Sea $\theta:G\times(G\times_H X)\to G\times_H X$ la acción antes definida. Entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
G\times(G\times X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_G\times p"'] \arrow[dr, "pf"] & G\times X \arrow[d, "p"] \\
G\times(G\times_H X) \arrow[r, "\theta"] & G\times_H X
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como p es abierta y sobreyectiva, $Id_G\times p$ también lo es, en particular, es una identificación. Como $\theta(Id_G\times p)=pf$ es continua, aplicando la propiedad universal del cociente (ver la observación 1.19), θ es continua.

Además es claro que

(i) $e[g,x]=[g,x]$, para cada $[g,x]\in G\times_H X$.
(ii) $g_1[g_2g,x]=g_1g_2[g,x]$ para cada $g_1,g_2\in G$ y $[g,x]\in G\times_H X$.

□

Proposición 2.33. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Sea A un H-espacio. Para cualquier G-espacio Y, la correspondencia*

$$\mathbb{F}:\{A\xrightarrow{\phi}Y|\ \phi\ es\ H\text{−aplicación}\}\to\{\mathrm{G}\times_{\mathrm{H}}\mathrm{A}\xrightarrow{\psi}\mathrm{Y}|$$
$$\psi\ es\ G\text{−aplicación}\}$$

dada por

$$\mathbb{F}(\phi)=\psi$$

donde $\psi([g,a]) = g\phi(a)$, *es biyectiva con inversa* $\mathbb{F}^{-1}(\psi)(a) = \psi([e,a])$.

Demostración. Dada $\phi : A \to Y$ una aplicación H-equivariante, entonces $\psi : [g,a] \mapsto g\phi(a)$ está bien definida. En efecto, observamos primero que por la proposición 2.32, $G \times_H A$ es un G-espacio. Si

$$[g,a] = [g_1, a_1],$$

entonces para algún $h \in H$ se tiene que $g_1 = gh^{-1}$ y $a_1 = ha$, para algún $h \in H$. Luego,

$$\psi([g_1,a_1]) = g_1\phi(a_1) = gh^{-1}\phi(ha) = gh^{-1}h\phi(a) = g\phi(a) = \psi([g,a]).$$

La proyección orbital $\pi : G \times A \to G \times_H A$ seguida de ψ es igual a la composición $(g,a) \mapsto [g,a] \mapsto g\phi(a)$ que es continua, y tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} G \times A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\psi\pi"'] & & G \times_H A \arrow[dl, "\psi"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del cociente (ver la observación 1.19), ψ es continua.

Además,

$$\psi(g'[g,a]) = g'g\phi(a) = g'\psi([g,a])$$

para todo $g' \in G$, lo cual significa que $\psi : G \times_H A \to Y$ es G-equivariante.

Ahora, si $\mathbb{F}(\phi) = \mathbb{F}(\phi')$, entonces para todo $a \in A$ obviamente sus valores en $[e,a]$ coinciden, y entonces

$$\phi(a) = e\phi(a) = \mathbb{F}(\phi)[e,a] = \mathbb{F}(\phi')[e,a] = e\phi'(a) = \phi'(a),$$

por lo tanto $\mathbb{F}$ es inyectiva.

Mostraremos que es sobreyectiva. Dada una G-aplicación

$$\psi : G \times_H A \to Y,$$

la función continua $\phi_\psi : a \mapsto \psi([e,a])$ cumple que

$$\phi_\psi(ha) = \psi([e,ha]) = \psi([eh,a]) = h\psi([e,a]) = h\phi_\psi(a)$$

para todo $h \in H$, entonces $\phi_\psi : A \to Y$ es H-equivariante.

Finalmente comprobamos que $\mathbb{F}(\phi_\psi) = \psi$ calculando

$$\mathbb{F}(\phi_\psi)([g,a]) = g\phi_\psi(a) = g\psi([e,a]) = \psi([g,a]).$$

Hemos probado que $\mathbb{F}$ es biyectiva con inversa

$$\mathbb{F}^{-1}(\psi) = \phi_\psi : a \mapsto \psi([e,a]).$$

$\square$

Proposición 2.34. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y A un H-espacio. Entonces existe un G-homeomorfismo*

$$\gamma : G \times_H (A \times I) \to (G \times_H A) \times I,$$

dado por $\gamma([g,(a,t)]) = ([g,a],t)$ para cada $g \in G$, $a \in A$ y $t \in I$, donde I es el intervalo unitario $[0,1]$ en el cual H actúa trivialmente.

Demostración. Veamos primeramente que γ está bien definida. Es claro que $A \times I$ es un H-espacio con la acción diagonal determinada por $h(a,t) = (ha,t)$. Supongamos que $[g_1,(a_1,t_1)] = [g_2,(a_1,t_2)]$. Entonces existe un $h \in H$ tal que $g_2 = g_1 h^{-1}$ y $(a_2,t_2) = h(a_1,t_1) = (ha_1,t_1)$. Por tanto, $a_2 = ha_1$ y $t_2 = t_1$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \gamma([g_2,(a_2,t_2)]) &= ([g_2,a_2],t_2) = ([g_1h^{-1},ha_1],t_1) = ([g_1,a_1],t_1) \\ &= \gamma([g_1,(a_1,t_1)]). \end{aligned}$$

Además γ es continua y abierta. Para ver esto consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times (A \times I) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \times_H (A \times I) \arrow[d, "\gamma"] \\ (G \times A) \times I \arrow[r, "\pi' \times Id_I"] & (G \times_H A) \times I \end{tikzcd}$$

donde $\pi : G \times (A \times I) \to G \times_H (A \times I)$ y $\pi' : G \times A \to G \times_H A$ son las correspondientes proyecciones orbitales y

$$\alpha : G \times (A \times I) \to (G \times A) \times I$$

dada por $\alpha\big(g,(a,t)\big) = \big((g,a),t\big)$ es, claramente, un G-homeomorfismo. Observamos entonces que π, $\pi' \times Id_I$ y α son continuas y abiertas; de ahí que γ también lo sea.

Por otro lado, γ es evidentemente sobreyectiva. Veamos que es inyectiva. Supongamos que $\gamma([g_1,(a_1,t_1)]) = \gamma([g_2,(a_2,t_2)])$, por lo que $([g_1,a_1],t_1) = ([g_2,a_2],t_2)$. Entonces $[g_1,a_1] = [g_2,a_2]$ y $t_1 = t_2$. Por tanto, existe un $k \in H$ tal que $g_2 = g_1k^{-1}$ y $a_2 = ka_1$. Así pues,

$$[g_2,(a_2,t_2)] = [g_1k^{-1},(ka_1,t_1)] = [g_1k^{-1},k(a_1,t)] = [g_1,(a_1,t_1)],$$

esto es, γ es inyectiva.

Finalmente observamos que γ es G-equivariante. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma(g'[g,(a,t)]) &= \gamma([g'g,(a,t)]) = ([g'g,a],t) = (g'[g,a],t) \\ &= g'([g,a],t) = g'\gamma[g,(a,t)]. \end{aligned}$$

□

Definición 2.35. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Un subconjunto $S \subset X$ es llamado una* ***H-rebanada*** *de X, si*

(1) *S es H-invariante,*
(2) *S es cerrado en $G(S)$,*
(3) *si $g \in G \setminus H$, entonces $gS \cap S = \emptyset$,*
(4) *$G(S)$ es abierto en X.*

*Si además $G(S) = X$, entonces S es llamada H**-rebanada global** de X.*

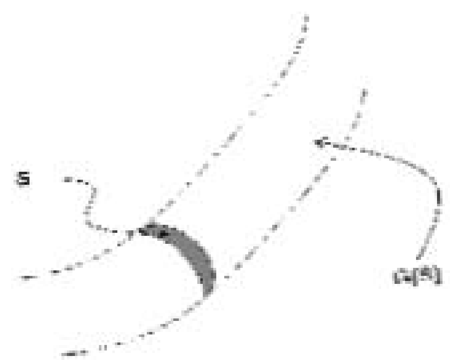


FIGURA 1. *Interpretación gráfica de la definición de la H-rebanada S.*

Lema 2.36. *Sean $\alpha : A \to B$ y $\beta : B \to C$ dos funciones continuas. Si α es sobreyectiva y la composición $\beta\alpha$ es cerrada, entonces β es cerrada.*

Demostración. Consideremos un cerrado F de B, como $\alpha^{-1}(F)$ es cerrado en A, $\beta\alpha(\alpha^{-1}(F))$ es cerrado en C. Pero por ser α sobreyectiva $\alpha\alpha^{-1}(F) = F$, por lo tanto $\beta(F)$ cerrado en C. $\square$

Proposición 2.37. *Sean G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G. Sean X un G-espacio y S una H-rebanada de X. Entonces la función*

$$\eta : G \times_H S \to G(S),$$

dada por $\eta([g, s]) = gs$, es un G-homeomorfismo.

Demostración. Sea X un G-espacio con acción θ. Veamos primeramente que η está bien definida y es G-equivariante. Debido a que S es H-invariante por la primera condición de la definición de H-rebanada, la aplicación inclusión $i : S \to G(S)$ dada por $i(s) = es$ es H-equivariante, puesto que $i(hs) = hs = hi(s)$, donde $s, h \in H$. Aplicando $\mathbb{F}$ de la proposición 2.33 a i, obtenemos la bien definida G-aplicación $\mathbb{F}(i) : G \times_H S \to G(S)$ la cual envía $[g, s]$ en $gi(s) = gs$, y por ello $\mathbb{F}(i) = \eta$.

Enseguida mostraremos que η es inyectiva. Si $\eta([g_1, s_1]) = \eta([g_2, s_2])$, entonces $g_1 s_1 = g_2 s_2$, o bien, $g_2^{-1} g_1 s_1 = s_2 \in S$. Pero como S es una H-rebanada, por la tercera condición de la definición 2.35, esto implica que $g_2^{-1} g_1 \in H$ y, por lo tanto

$$[g_1, s_1] = [g_1(g_2^{-1} g_1)^{-1}, g_2^{-1} g_1 s_1] = [g_2, s_2],$$

esto es, η es inyectiva.

Sean $\pi : G \times S \to G \times_H S$ la proyección orbital y $\theta' : G \times S \to G(S)$ la restricción de la acción θ de G en X. Entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
G \times S \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\theta'"'] & & G \times_H S \arrow[dl, "\eta"] \\
& G(S) &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que η es cerrada. Como G es compacto, por la proposición 1.34, θ' es cerrada, además π es sobreyectiva. Por la igualdad $\eta\pi = \theta'$ y por el lema 2.36, η es cerrada.

Concluimos que η es un G-homeomorfismo. $\square$

En vista de la proposición 2.37, podemos establecer que si G es un grupo compacto, H es un subgrupo cerrado de G y S es una H-rebanada de X, entonces el producto torcido $G \times_H S$ es esencialmente de la forma $G(S)$, como lo ilustra la figura 2(a).

El teorema siguiente tiene un papel central en la teoría de los grupos topológicos de transformaciones (ver, [**15**, Capítulo II, teorema 5.4]*). La figura 2(b) ilustra dicho teorema.*

Teorema 2.38 (**Teorema de la rebanada**). *Sean G un grupo de Lie, X un G-espacio, $x \in X$ y U una vecindad de x. Entonces existe una G_x-rebanada $S_x \subset X$ tal que $x \in S_x \subset U$.*

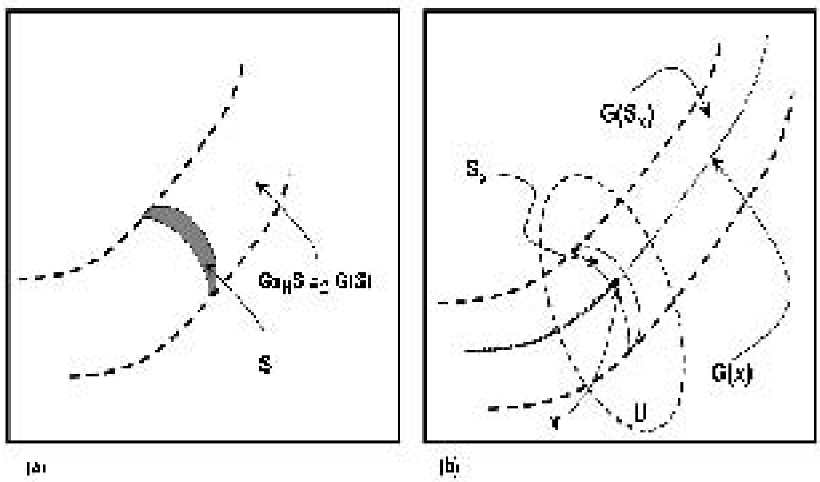


FIGURA 2. (a) El producto torcido $G \times_H S$, cuando G es compacto, H es cerrado en G y S es una H-rebanada de X. (b) Ilustración del *teorema de la rebanada*. En este caso a S_x se le designa *rebanada de x* y a $G(S_x)$ como *tubo alrededor de la órbita* $G(x)$.

*La siguiente proposición cuya demostración puede encontrarse en (*ver [**42**, Corolario 1.6.7.]*), nos proporciona una fuente abundante de espacios G-ANR.*

Proposición 2.39. *Sean G un grupo compacto de Lie y H un subgrupo cerrado de G. Entonces G/H es un G-*ANE.

Lema 2.40. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G y X un H-espacio. Entonces la función*

$$\gamma_X : X \to G \times_H X \text{ dada por } \gamma_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) = [\mathrm{e}, \mathrm{x}],$$

es un H-encaje cerrado.

Demostración. Sean la proyección orbital

$$\pi : G \times X \to G \times_H X$$

y el encaje cerrado

$$\delta_X : X \to G \times X,$$

dado por $\delta_X(x) = (e, x)$. Entonces el diagrama siguiente conmuta, por lo que $\gamma_X{=}\pi\delta_X$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\delta_X"'] \arrow[dr, "\gamma_X"] & \\ G \times X \arrow[rr, "\pi"] & & G \times_H X \end{tikzcd}$$

Por lo tanto γ_X es continua.

Como H es compacto, por la proposición 1.37, π es cerrada, y como δ_X es cerrado, la composición $\gamma_X = \pi\delta_X$, es cerrada.

Si $x \in X$ y $h \in H$, entonces

$$\gamma_X(hx) = [e, hx] = [h, x] = h[e, x] = h\gamma_X(x),$$

por lo que γ_X es H-equivariante.

Afirmamos también que γ_X es inyectiva. En efecto, supongamos que $\gamma_X(x) = \gamma_X(y)$ para $x, y \in X$, entonces $[e, x] = [e, y]$. Luego, existe un $h \in H$ tal que $(e, y) = (eh^{-1}, hx)$, y en este caso, $h = e$, por lo que $x = y$. Concluimos que γ_X es un H-encaje cerrado. $\square$

Proposición 2.41 ([**12**]). *Sean G un grupo compacto de Lie, H un subgrupo cerrado de G y S un H-espacio. Entonces S es un H-retracto de vecindad del producto torcido $G \times_H S$.*

Demostración. Consideremos la siguiente acción continua del grupo $\Gamma = H \times H$ en el espacio G:

$$(h_1, h_2) * x = h_1 x h_2^{-1} \text{ para todo } (h_1, h_2) \in \Gamma \text{ y } x \in G.$$

Claramente, H es un subconjunto Γ-invariante en el Γ-espacio G, y esta acción en H es transitiva. Luego, por la proposición 1.32, H es Γ-homeomorfa a Γ/Γ_e, donde $\Gamma_e = \{(h, h) | h \in H\}$ es el estabilizador de la identidad $e \in H$.

Como G y, por tanto Γ, es un grupo compacto de Lie, Γ/Γ_e es un Γ-ANE, por la proposición 2.39, y de ahí, H es un Γ-ANE.

Esto da lugar a la existencia de una retracción Γ-equivariante

$$r : U \to H,$$

donde U es una vecindad Γ-invariante de H en el Γ-espacio G. Entonces $U \times_H S$ es una vecindad H-invariante del conjunto S en $G \times_H S$ (recordemos que identificamos S, como un H-espacio, con el subconjunto H-invariante $\{[e, s] | s \in S\}$ de $G \times_H S$, ver el lema 2.40).

Definimos $R : U \times_H S \to S$ haciendo $R([u,s]) = r(u)s$. Entonces R está bien definida. En efecto, como $r(u) \in H$ y S es H-invariante, vemos que $r(u)s \in S$. Si $h \in H$, entonces

$$R([uh^{-1}, hs]) = r(uh^{-1})hs$$

y, como r es Γ-equivariante, $r(uh^{-1}) = r(u)h^{-1}$. En consecuencia,

$$R([uh^{-1}, hs]) = r(u)h^{-1}hs = r(u)s = R([u,s]).$$

La continuidad de R es consecuencia de la continuidad de la aplicación $f : U \times S \to S$, que envía (u,s) a $r(u)s$, y de que la H-aplicación orbital $p : U \times S \to U \times_H S$ es abierta, considerando el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} U \times S \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & U \times_H S \arrow[dl, "R"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Además, R es H-equivariante. En efecto, para cualquier $h \in H$, tenemos

$$R(h[u,s]) = R([hu,s]) = r(hu)s.$$

Además, la Γ-equivarianza de r implica que $r(hu) = hr(u)$, y de ahí,

$$R([hu,s]) = hr(u)s = hR[u,s]).$$

Finalmente, R es una retracción sobre S ya que

$$R([e,s]) = r(e)s = es = s$$

para cada $s \in S$. □

Teorema 2.42. *Sea G un grupo compacto y sean X y Y dos G-espacios de Hausdorff. Sean C cualquier subconjunto cerrado en X y $\phi : C \to Y$ cualquier aplicación tal que, siempre y cuando c y gc, ambas, pertenezcan a C (para algún $g \in G$), se tenga que $\phi(gc) = g\phi(c)$. Entonces existe una única extensión de ϕ a una G-aplicación ϕ' de $G(C)$ en Y.*

Demostración. Para $g \in G$ y $c \in C$, hacemos $\phi'(gc) = g\phi(c)$, la cual es, claramente, la única posibilidad para una G-extensión.

Veamos que ϕ' está bien definida. Sea $gc = g_1c_1$. Entonces

$$c = g^{-1}g_1c_1,$$

esto es, c y $g^{-1}g_1c_1 \in C$, por lo que

$$\phi(c) = \phi(g^{-1}g_1c_1) = g^{-1}g_1\phi(c_1)$$

haciendo uso de nuestra hipótesis. Entonces $g\phi(c) = g_1\phi(c_1)$ como se quería.

Veamos que ϕ' es continua. Sea (x_α) una red en $G(C)$ que converge a $x \in G(C)$. Ponemos $x_\alpha = g_\alpha c_\alpha$. Considerando que G es compacto, al pasar a una subred, podemos suponer que (g_α) converge a algún punto $g \in G$. Entonces $c_\alpha = g_\alpha^{-1}x_\alpha \rightsquigarrow g^{-1}x \in C$ puesto que C es cerrado. Sea $c = g^{-1}x$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi'(x_\alpha) &= \phi'(g_\alpha(c_\alpha)) = g_\alpha\phi(c_\alpha) \\ &\rightsquigarrow g\phi(c) = \phi'(gc) = \phi'(x) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.43. *Sean G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G. Sean S y S' H-rebanadas globales de los G-espacios de Hausdorff X y Y Resp. y sea f_0 una aplicación H-equivariante de S en S'. Entonces existe una única aplicación G-equivariante*

$$f : G(S) \to G(S')$$

tal que $f|_S = f_0$, a saber, $f(gs) = gf_0(s)$, $g \in G$, $s \in S$.

Demostración. S es cerrado en $G(S) = X$ por la segunda condición de la definición de H-rebanada. Además, si s y gs pertenecen a S, tenemos que $gS \cap S \neq \emptyset$, y por la tercera condición de la misma definición, tenemos que $g \in H$ y además f_0 es una aplicación H-equivariante, por lo que $f_0(gs) = gf_0(s)$. Aplicando el teorema 2.42, tenemos que existe una única extensión de f_0 a una G-aplicación f de $G(S) = X$ en $Y = G(S')$. De hecho, f está definida por la fórmula $f(gs) = gf_0(s)$ para todo $g \in G$, $s \in S$. □

Teorema 2.44. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G, X un G-espacio y S una H-rebanada global de X. Entonces el diagrama siguiente conmuta,*

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \times_H S \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & G/H \end{tikzcd}$$

donde $\alpha : G \times S \to X$ es la restricción de la acción de G en X, $\pi : G \times S \to G \times_H S$ es la proyección H-orbital y $p : G \times_H S \to G/H$ es dada por $p([g, s]) = gH$. Además,

1. *Existe un G-homeomorfismo $\widetilde{\alpha}$ del producto torcido $G \times_H S$ sobre X.*
2. *La función rebanadora*

$$f : X \to G/H$$

dada por $f(x) = gH$ si $x \in gS$ es equivariante y abierta.

Demostración. (1) Sea $\alpha : G \times S \to X$ la restricción de la acción de G en X.

Como S es un H-espacio (por la definición de H-rebanada, S es H-invariante), podemos considerar su producto torcido y la proyección H-orbital $\pi : G \times S \to G \times_H S$.

Entonces $\alpha(\pi^{-1}[g, s]) = gs$ para todo $[g, s] \in G \times_H S$, por lo que por el teorema de transgresión (ver la observación 1.19), α induce una única función continua $\widetilde{\alpha} : G \times_H S \to X$ dada por $\widetilde{\alpha}([g, s]) = gs$.

Por la proposición 2.37, tenemos que $\widetilde{\alpha}$ es un G-homeomorfismo.

(2) Veamos que f es una G-aplicación abierta. Observamos que si $x \in gS \cap g_1S$, entonces $x = gs = g_1s_1$ para algunos s, $s_1 \in S$. Luego, $s = g^{-1}g_1s_1 \in S \cap g^{-1}gS$. Por la definición de H-rebanada, $g^{-1}g_1 \in H$. Pero entonces, $gH = g_1H \in G/H$. Así que f está bien definida.

Además es claro que $f(gx) = gf(x)$ para toda $g \in G$, puesto que

$$f(gx) = f(gg_1s) = gg_1H = g(g_1H) = gf(x)$$

donde $x = g_1s$ para algunos $g_1 \in G$, $s \in S$.

Veamos que f es continua.

La función $p : G \times_H S \to G/H$ dada por $p([g, s]) = gH$ es una identificación abierta, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
G \times S \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \times_H S \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & G/H
\end{tikzcd}$$

Entonces tanto $\widetilde{\alpha}$ como p son continuas y abiertas, por lo que f es continua y abierta también.

Tenemos, por tanto, que f es una G-aplicación abierta. $\square$

El siguiente lema justifica la denominación de función rebanadora.

Lema 2.45. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Sea X un G-espacio. Entonces para cualquier G-aplicación*

$$\varphi : X \to G/H$$

se cumple que $S = \varphi^{-1}(H)$ es una H-rebanada global de X.

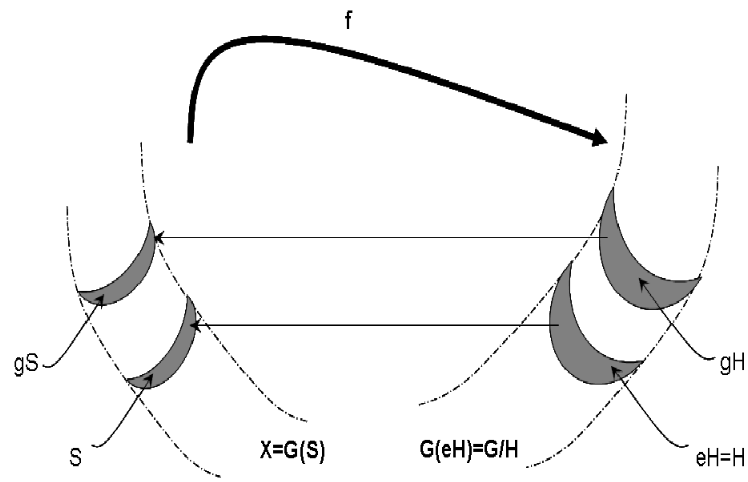


FIGURA 3. Interpretación gráfica de la *función rebanadora*.

Demostración. Primeramente, observamos que el conjunto unipuntual $\{H\}$ es una H-rebanada global de G/H. En efecto, $\{H\}$

- es H-invariante, pues $h(eH) = H$, para cada $h \in H$.
- Por hipótesis, H es cerrado en G, por lo que $\{H\}$ es cerrado en G/H.
- si $g(eH) \cap (eH) \neq \emptyset$, entonces $h \in H$.
- $G/H = G(\{H\})$.

por lo que $\{H\}$ es una H-rebanada global de G/H.

Veamos ahora que $S = \varphi^{-1}(H)$ es una H-rebanada global de X.

- H es H-invariante en G/H, luego $S = \varphi^{-1}(H)$ es H-invariante en X.
- Como φ es continua, $S = \varphi^{-1}(H)$ es cerrado en X.
- si $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existe un $x \in S$ tal que $x = gs_1$ para algún s_1 en S. Luego, $\varphi(x) \in H$, y $\varphi(x) \in gH$, por lo que $g \in H$.
- $X = \varphi^{-1}(G/H) = G\varphi^{-1}(H) = G(S)$.

Por lo anterior, S es una H-rebanada global de X. □

Corolario 2.46. *Sean G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G. Sean X y Y G-espacios y $f : X \to Y$ una G-aplicación. Si S es una H-rebanada global de Y, entonces $f^{-1}(S)$ es una H-rebanada global de X.*

Demostración. Supongamos que S es una H-rebanada global de Y. Por el teorema 2.44 la función rebanadora $F : Y \to G/H$, dada por $F(y) = gH$ si $y \in gS$, es una G-aplicación y $S = F^{-1}(H)$. Entonces la composición

$$Ff : X \to G/H$$

es una G-aplicación y $(Ff)^{-1}(H) = f^{-1}(S)$. Ahora, por el lema 2.45, $f^{-1}(S)$ es una H-rebanada global de X. □

Proposición 2.47. *Sean G un grupo compacto de Lie, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio metrizable. Si S es una H-rebanada global de un subespacio cerrado A en X, entonces existe una H-rebanada $\widetilde{S}$ en X tal que $S = \widetilde{S} \cap A$.*

Demostración. Sea f la función rebanadora de $A = G(S)$ en G/H tal que $S = f^{-1}(H)$. Por hipótesis A es un cerrado G-invariante de X. Por el teorema 2.39, G/H es un G-ANE. Por tanto, podemos extender f a una G-aplicación $\widetilde{f}$ de una vecindad abierta G-invariante O de A en X, como observamos en el diagrama conmutativo siguiente.

$$\begin{tikzcd} & O \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ A \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "f"] & & G/H \end{tikzcd}$$

Entonces por el lema 2.45, $\widetilde{S} = \widetilde{f}^{-1}(H)$ es una H-rebanada y claramente, $S = \widetilde{S} \cap A$. □

Proposición 2.48 ([**42**])**.** *Sean G un grupo compacto de Lie, H un subgrupo cerrado de G y S una H-rebanada global del G-espacio metrizable X. Si S es un H-*ANE *entonces X es un G-*ANE*.*

Demostración. Sean Y un G-espacio metrizable y $f : A \to X$ una G-aplicación de un subespacio cerrado G-invariante A de Y. Entonces, por el corolario 2.46, $S' = f^{-1}(S)$ es una H-rebanada global de A. Por la proposición 2.47 podemos encontrar una H-rebanada $\widetilde{S}$ en Y tal que $S' = \widetilde{S} \bigcap A$.

Entonces la restricción $f|_{S'} : S' \to S$ es una H-aplicación del subespacio cerrado H-invariante S' en $\tilde{S}$. Si S es un H-ANE, existe una extensión de $f|_{S'}$ a una H-aplicación $\widetilde{f}$ de una vecindad H-invariante V de S' en $\widetilde{S}$. Entonces V es una H-rebanada global de $G(V)$. Por el teorema 2.43 existe una única G-aplicación f^* de $G(V)$ en X cuya restricción a V es $\widetilde{f}$.

$$
\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, "f|_{S'}"] \arrow[d, hook] & S \arrow[r, hook, "i"] & G(S) \\
V \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[rr, hook, "i"] & & G(V) \arrow[u, dotted, "f^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
\xrightarrow{H-aplicaciones} \\[2em]
\overset{G-aplicaciones}{\dashrightarrow}
\end{array}
$$

Observamos que $G(V)$ es una vecindad de $G(S') = A$ y además $f^*|_A = f$. En efecto,

$$f^*(a) = f^*(gs') = gf^*(s') = gf|_{S'}(s') = gf(s') = f(gs') = f(a),$$

para cada $a = gs' \in A = G(S')$. Por tanto, la prueba está completa. $\square$

4. Unión de G-ANE's

En esta sección presentamos el corolario 2.55, que será muy útil en las pruebas de los capítulos siguientes, y es una consecuencia del teorema 2.50 (ver S. A. Antonyan [**11**]*) que es la versión equivariante de un teorema de unión recientemente probado por J. Dydak* [**20**]. *Comenzamos con el siguiente lema.*

Lema 2.49. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio. Si X es paracompacto, entonces X/G es paracompacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta del espacio orbital X/G. Sea $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital. Entonces

$$\mathcal{W} = \{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$$

es una cubierta abierta invariante de X. Como X es paracompacto, $\mathcal{W}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\{\mathcal{V}_\beta\}$. Afirmamos que $\{\pi(V_\beta)\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_\alpha\}$.

Claramente, $\{\pi(V_\beta)\}$ es un refinamiento abierto de $\{U_\alpha\}$. Veamos que es localmente finito. Sea $\overline{x} \in X/G$ tal que $\pi^{-1}(\overline{x}) = G(x)$ para $x \in X$. Como X es paracompacto, para cada $g \in G$, el punto gx tiene una vecindad W_g, la cual intersecta a lo más un número finito de elementos de $\{V_\beta\}$. Por continuidad de la acción de G sobre X, existen una vecindad O_g de g, y una vecindad V_g de x tales que $O_g \cdot V_g \subset W_g$.

Entonces $G = \bigcup\limits_{g\in G} O_g$. Como G es compacto, existen $g_1, g_2, ..., g_n$ en G tales que $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{g_i}$. Hagamos $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{g_i}$. Entonces V es una vecindad de x. Afirmamos ahora que $\overline{V} = \pi\big(G(V)\big)$ es una vecindad de

$\overline{x}$ que intersecta a lo más un número finito de elementos de $\{\pi(V_\beta)\}$. En efecto, como $G(x) \subset G(V)$ entonces $\overline{x} \in \overline{V}$, y además

$$\pi(V_\beta) \cap \overline{V} \neq \emptyset \Leftrightarrow V_\beta \cap G(V) \neq \emptyset.$$

Si $V_\beta \cap G(V) \neq \emptyset$, entonces exite un $gv \in V_\beta$ con $g \in G$ y $v \in V$. Como $G = \bigcup_{i=1}^{n} O_{g_i}$, exite un i tal que $g \in O_{g_i}$ y $v \in V_{g_i}$, por lo que $gv \in O_{g_i} \cdot V_{g_i} \subset W_{g_i}$. Entonces $gv \in V_\beta \cap W_{g_i}$, o bien, $V_\beta \cap W_{g_i} \neq \emptyset$. Pero por la elección del W_{g_i}, hay sólo un número finito de V_β's con $V_\beta \cap W_{g_i} \neq \emptyset$.

Hemos encontrado una vecindad $\overline{V}$ de $\overline{x} \in X/G$, la cual intersecta a lo más un número finito de elementos de $\{\pi(V_\beta)\}$. Entonces $\{\pi(V_\beta)\}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_\alpha\}$ y X/G es paracompacto. $\square$

Teorema 2.50. *Sea G un grupo compacto. Sea X un G-espacio metrizable y supongamos que un G-espacio Y es unión de una familia $\{Y_t\}_{t \in T}$ de sus subespacios invariantes con las siguientes propiedades:*

(a) *Cada Y_t es un G-AE(X),*
(b) *Para cualesquiera dos elementos s y t de T, existe un $u \in T$ tal que $Y_s \cup Y_t \subset Y_u$.*

Entonces cualquier G-aplicación $f : A \to Y$ de un subconjunto cerrado invariante $A \subset X$ a Y tal que $A = \bigcup_{t \in T} int(f^{-1}(Y_t))$, se extiende a una G-aplicación sobre X.

Demostración. Sea $U_t = (X \setminus A) \cup int(f^{-1}(Y_t))$ para cada $t \in T$, donde el interior es tomado con respecto a A. Entonces la familia $\{U_t\}_{t \in T}$ constituye una cubierta abierta invariante de X. Como X es metrizable y por tanto, paracompacto, por el lema 2.49, el espacio orbital X/G es paracompacto. Luego, tenemos una partición localmente finita invariante de unidad $\{\varphi_t\}_{t \in T}$ tal que $\varphi_t^{-1}(0,1] \subset U_t$ para cada $t \in T$ (ver [**19**, Sección VIII.4]). Para todo subconjunto finito S de T definimos $B_S = \bigcap_{t \in T \setminus S} \varphi_t^{-1}(0)$. Como $\{\varphi_t\}_{t \in T}$ es una partición invariante localmente finita de la unidad, concluimos que $\{B_S\}$ constituye una cubierta invariante cerrada de X.

Pretendemos crear, para todos los subconjuntos finitos S de T, elementos $\alpha(S)$ de T y G-aplicaciones $f_S : B_S \to Y_{\alpha(S)}$ tales que las condiciones siguientes son satisfechas:

(1) $Y_{\alpha(F)} \subset Y_{\alpha(S)}$ para cada $F \subset S$.
(2) $f_S|_{B_F} = f_F$ para cada $F \subset S$.

(3) $f_S|_{A\cap B_S} = f|_{A\cap B_S}$.

Con este fin, aplicamos inducción en el número de elementos de S. Para los conjuntos de un elemento $S = \{t\}$ simplificamos la notación a $S = t$. Note que $B_t = \varphi_t^{-1}(1)$ para cada $t \in T$. Entonces $\{B_t\}_{t\in T}$ es una familia discreta y $f(A \cap B_t) \subset Y_t$ para cada $t \in T$. Por lo tanto, cada aplicación parcial $f|_{A\cap B_t}$ se extiende a una G-aplicación $f_t : B_t \to Y_t$, y hacemos $\alpha(S) = t$.

Ahora, supongamos que f_S y $\alpha(S)$ existen para todo S con cardinalidad a lo mas n. Dado un subconjunto finito $S \subset T$ que contiene exactamente $n+1$ elementos, seleccionamos un elemento $\alpha(S) \in T$ tal que $Y_{\alpha(S)}$ contiene todos los de $Y_{\alpha(F)}$ siendo F un subconjunto propio de S. Sea B la unión de $A \cap B_S$ y de todos los B_F con F un subconjunto propio de S. Entonces B es un subconjunto invariante cerrado de B_S. Ahora definimos la G-aplicación $h : B \to Y_{\alpha(S)}$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} f_F(x), & \text{si } x \in B_F \\ f(x), & \text{si } x \in A \cap B_S. \end{cases}$$

Entonces h es una G-aplicación (continua) bien definida, y es fácil ver que los valores de h estan en $Y_{\alpha(S)}$. Por lo tanto, h se extiende a una G-aplicación sobre B_S y produce $f_S : B_S \to Y_{\alpha(S)}$ con las propiedades deseadas.

Como $B_S \cap B_F = B_{S\cap F}$, todas las f_S pueden ser pegadas para producir una G-aplicación $f' : X \to Y$ que es una extensión de f. Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U que intersecta sólo un número finito de las $\varphi_t^{-1}(0,1]$; esto significa que hay un conjunto finito S tal que $U \subset B_S$. Como $f'|_{B_S}$ es continua, se tiene que $f'|_U$ también, y la prueba está completa. $\square$

Para un espacio dado X, denotamos por $Con(X)$ al cono sobre X, el cual es, por definición, el conjunto cociente $[0,1] \times X/\{0\} \times X$ con la topología débil. La imagen de un punto $(t,x) \in [0,1] \times X$ bajo la aplicación identificación $p : [0,1] \times X \to Con(X)$, será denotada por tx, y escribiremos simplemente $*$ en vez de $0x$, para indicar al vértice del cono. Ahora bien, un subconjunto U de $Con(X)$ que contiene al vértice del $Con(X)$ pertenece a la topología débil si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $[0,1] \times X$ y existe un $\varepsilon > 0$ con $[0,\varepsilon) \times X \subset p^{-1}(U)$. Si U no contiene el vértice, entonces éste pertenece a la topología débil si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $[0,1] \times X$.

Proposición 2.51. *Si X es un G-espacio donde G es cualquier grupo topológico, entonces $Con(X)$ es un G-espacio con respecto a la* *acción definida como sigue:*

$$g(tx) = t(gx),$$

$g \in G$ *y* $tx \in Con(X)$.

Demostración. Sea $\theta : G \times Con(X) \to Con(X)$ dada por

$$g(tx) = t(gx),\ g \in G,\ tx \in Con(X).$$

Sean $p : I \times X \to Con(X)$ la aplicación identificación y

$$\theta' : G \times X \to X,$$

la acción de G en X. Veamos que θ es una acción de G en $Con(X)$.

Verifiquemos primeramente que es continua.

Caso 1. Sea $(g, tx) \in G \times Con(X)$ con $t \neq 0$. Sea V una vecindad de $t(gx)$ en $Con(X)$. Debemos mostrar que existe una vecindad W de (g, tx) tal que $\theta(W) \subset V$.

Sabemos por la definición de $Con(X)$ que existe un J abierto en $(0, 1]$ con $t \in J$ y un V_1 abierto en X con $gx \in V_1$, tales que $p(J \times V_1) \subset V$.

Como X es un G-espacio, existen un H abierto en G con $g \in H$ y un U abierto en X con $x \in U$, tales que

$$\theta'(H \times U) \subset V_1.$$

Proponemos $W = H \times p(J \times U)$. Como $p(J \times U)$ es una vecindad del punto tx en $Con(X)$, concluimos que W es una vecindad del par (g, tx) en $G \times Con(X)$. Entonces

$$t(gx) \in \theta(W) \subset V,$$

como se quería.

Caso 2. Sea $g \in G$ y V una vecindad del punto $g* = *$ en $Con(X)$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $[0, \epsilon) \times X \subset p^{-1}(V)$. El conjunto $U = p([0, \epsilon) \times X)$ es una vecindad del vértice $*$ en $Con(X)$. Afirmamos que $\theta(G \times U) \subset V$. En efecto, para toda $g \in G$ y $tx \in U$, tenemos $g(tx) = t(gx) \in U \subset V$.

Así, θ es una función continua.

Veamos ahora que θ verifica las propiedades de una acción.

i. $e(tx) = t(ex) = tx$ para cada $tx \in Con(X)$.
ii. $h\big(g(tx)\big) = h\big(t(gx)\big) = t\big(h(gx)\big) = t\big((hg)x\big) = (hg)(tx)$.

Concluimos que $Con(X)$ es un G-espacio con la acción propuesta. $\square$

La siguiente proposición será necesaria en las pruebas de los corolarios subsiguientes.

Proposición 2.52. *Sea G un grupo compacto. Si Y es un G-ANE, entonces $Con(Y)$ es un G-AE.*

Demostración. Sean X un G-espacio metrizable, A un subconjunto cerrado invariante de X y $f : A \to Con(Y)$ una G-aplicación. Sea f_1 la composición de f y la proyección $\pi_1 : Con(Y) \to [0,1]$. Como el conjunto $f_1^{-1}\big((0,1]\big)$ es abierto en A, existe un conjunto U abierto en X tal que $U \cap A = f_1^{-1}\big((0,1]\big)$.

Sea $f_2 = \pi_2 f|_{U\cap A}$, donde $\pi_2 : (0,1] \cdot Y \to Y$ es la proyección. Como U es un G-espacio metrizable, $U \cap A$ es un subconjunto cerrado invariante de U y Y es un G-ANE, la aplicación f_2 tiene una G-extensión $F_2 : V \to Y$ definida en alguna vecindad invariante V de $U \cap A$ en U.

Consideramos el subconjunto cerrado invariante $A \cup (X \setminus V)$ de X y definamos la aplicación invariante $\psi : A \cup (X \setminus V) \to [0,1]$ según la formula:

$$\psi(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Como $A \cap (X \setminus V) = f_1^{-1}(0)$, la aplicación ψ esta bien definida, es continua e invariante.

Como X es metrizable, por el teorema 2.16, X/G también lo es, y por tanto, es un espacio normal. Entonces, según el teorema equivariante de Tietze-Urysohn, podemos extender ψ a una aplicación invariante $\varphi : X \to [0,1]$.

Ahora, la G-extensión deseada $F : X \to Con(Y)$ es entonces definida por la regla:

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) \cdot F_2(x), & \text{si } x \in V, \\ *, & \text{si } x \in X \backslash V. \end{cases}$$

Verificaremos enseguida que F es una extensión de f. En efecto, sea $x \in A$. Entonces, si $x \in V$, tenemos:

$$F(x) = \varphi(x) \cdot F_2(x) = \psi(x) \cdot f_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = f(x).$$

Si $x \notin V$, entonces $\psi(x) = 0$. Pero, para los puntos $x \in A$ tenemos $\psi(x) = f_1(x)$. Luego $f_1(x) = 0$ lo cual significa que $f(x) = *$. De otro lado $F(x) = *$ por definición, y de ahí, $F(x) = f(x)$.

Veamos que $F : X \to Con(Y)$ es continua. Sean $x \in X$ y W una vecindad de $F(x)$ en $Con(Y)$. Debemos mostrar una vecindad S de x tal que $F(S) \subset W$.

Tenemos los siguientes dos casos. (Ver la figura 4.)

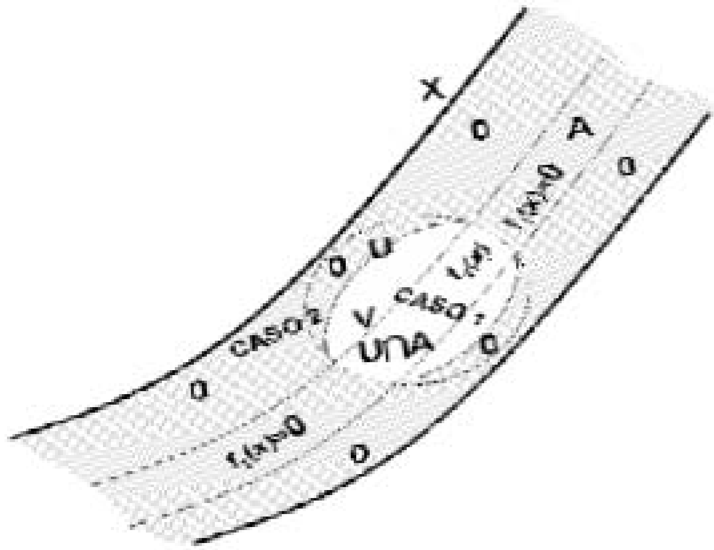


FIGURA 4. *Ilustración utilizada en la demostración de la proposición 2.52.*

Caso 1. Supongamos que $x \in V$. Sea $p : [0,1] \times Y \to Con(Y)$ la identificación. Entonces, como $F(x) = \varphi(x) \cdot F_2(x) \in W$, inferimos que el par $(\varphi(x), F_2(x))$ pertenece al conjunto $p^{-1}(W)$ abierto en el producto $[0,1] \times Y$. Por lo tanto existen W_1 abierto en $[0,1]$ y W_2 abierto en Y, tales que $\varphi(x) \in W_1$, $F_2(x) \in W_2$ y $W_1 \times W_2 \subset p^{-1}(W)$, lo cual en otra forma equivalente se puede escribir así: $W_1 \cdot W_2 \subset W$.

Como la aplicación φ es continua en x, existe un S_1 abierto en X, tal que $x \in S_1$ y $\varphi(S_1) \subset W_1$.

Por otro lado, como F_2 es continua en x, existe un abierto S_2 en V (y por tanto, en X) tal que $x \in S_2$ y $F_2(S_2) \subset W_2$.

Luego, para $x \in S = S_1 \cap S_2$ tenemos $F(x) = \varphi(x) \cdot F_2(x) \in W_1 \cdot W_2 \subset W$. Consequentemente, $F(S) \subset W$.

Caso 2. Supongamos que $x \in X \setminus V$. Entonces

$$F(x) = * \in W \text{ y } \varphi(x) = 0.$$

Por definición de la topología débil en $Con(Y)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $[0, \varepsilon) \cdot Y \subset W$. Por la continuidad de φ, existe una vecindad S de x en X tal que $\varphi(S) \subset [0, \varepsilon)$.

Afirmamos que $F(S) \subset W$. En efecto, consideremos dos casos.

(a) $s \in S$ y $s \in V$. Entonces

$$F(s) = \varphi(s) \cdot F_2(s) \in [0, \varepsilon) \cdot Y \subset W.$$

(b) $s \in S$ y $s \notin V$. Entonces $F(s) = * \in W$.

Luego, $F(S) \subset W$.

□

Corolario 2.53. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio metrizable. Supongamos que un G-espacio Y es unión de una familia $\{Y_t\}_{t \in T}$ de sus subespacios invariantes con las siguientes propiedades:*

(a) *Cada Y_t es un G-ANE(X).*

(b) *Para cualesquiera dos elementos s y t de T hay un $u \in T$ tal que $Y_s \cup Y_t \subset Y_u$.*

Entonces cualquier G-aplicación $f : A \to Y$ de un subconjunto cerrado invariante $A \subset X$ en Y tal que $A = \bigcup_{t \in T} int(f^{-1}(Y_t))$, se extiende a una G-aplicación sobre una vecindad invariante de A en X.

Demostración. Sea $Z = Con(Y)$ con el vértice $*$ y sea

$$Z_t = Con(Y_t) \text{ para cada } t \in T.$$

Entonces Z es cubierto por los conjuntos invariantes Z_t, t$\in T$. Por la proposición 2.52, cada Z_t es un G-AE(X) (ver la figura 5). Por lo tanto,

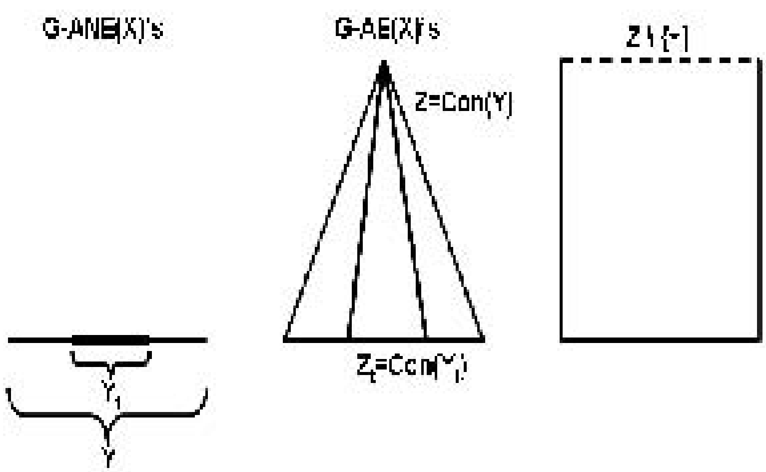


Figura 5. *Ilustración utilizada en la demostración del corolario 2.53.*

f considerada como una G-aplicación de A a Z, cumple la hipótesis del teorema 2.50, y de ahí, se extiende a una G-aplicación

$$\varphi : X \to Z.$$

Sea $U = \varphi^{-1}(Z\backslash\{*\})$. Entonces hay una evidente retracción equivariante $r : Z \setminus \{*\} \to Y$, lo cual significa que la composición de $\varphi|_U$ y r produce una G-extensión $f' : U \to Y$ de f. $\square$

Lema 2.54. *Sea G un grupo compacto. Si un G-espacio Y es unión de dos subconjuntos abiertos invariantes Y_1 y Y_2, los cuales son G-ANE's, entonces Y es un G-ANE.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio metrizable. Sea $f : A \to Y$ una G-aplicación, donde A es un subconjunto cerrado invariante de X. Los conjuntos

$$V_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X\backslash A) \text{ y } V_2 = f^{-1}(Y_2) \cup (X\backslash A)$$

constituyen una cubierta abierta invariante de X. Como X es metrizable, por el teorema 2.16, X/G lo es también y por tanto es un espacio normal. Entonces hay subconjuntos cerrados invariantes X_1 y X_2 de X tales que $X_1 \subset V_1$, $X_2 \subset V_2$ y $X = X_1 \cup X_2$. Como $Y_1 \cap Y_2$ es un subconjunto abierto invariante de Y_1 y Y_2, los cuales son G-ANE(X), por la proposición 2.5 inferimos que $Y_1 \cap Y_2$ es un G-ANE(X). Por lo tanto, por la proposición 2.52, $Con(Y_1 \cap Y_2)$ es un G-AE(X) y, de ahí, existe una G-extensión

$$f_0 : X_1 \cap X_2 \to Con(Y_1 \cap Y_2)$$

de la G-aplicación parcial $f|_{A\cap(X_1\cap X_2)}$ (ver la figura 6). Ahora peguemos f_0 y la G-aplicación parcial $f|_{A\cap X_1}$ en una G-aplicación

$$h : (A \cap X_1) \cup (X_1 \cap X_2) \to Con(Y_1).$$

Como por la proposición 2.52, $Con(Y_1)$ es un G-AE(X), existe una G-extensión de $h_1 : X_1 \to Con(Y_1)$ de h. Análogamente, existe una G-extensión $h_2 : X_2 \to Con(Y_2)$ de

$$h' : (A \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2) \to Con(Y_2).$$

Ahora h_1 y h_2 pueden ser pegadas juntas para crear una G-aplicación $H : X \to Con(Y)$. Como $H|_A = f$ y $A \cap H^{-1}(*) = \emptyset$, concluimos que el conjunto $U = X \setminus H^{-1}(*)$ es una vecindad invariante de A en X. Hay una evidente retracción equivariante $r : Con(Y) \setminus \{*\} \to Y$, lo que implica que la composición de $H|_U$ y r produce una G-extensión $f' : U \to Y$ de f. Esto completa la prueba. $\square$

Corolario 2.55. *Sea G un grupo compacto. Si un G-espacio Y es unión de sus subconjuntos abiertos invariantes Y_λ, $\lambda \in \Lambda$ los cuales son G-ANE's, entonces Y también es un G-ANE.*

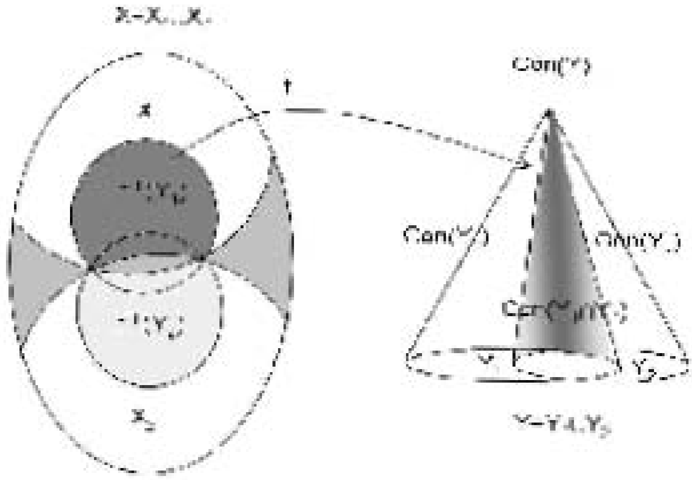


FIGURA 6. *Ilustración utilizada en la demostración del lema 2.54.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio metrizable. Ahora sea $Y = \bigcup\{Y_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, donde cada Y_λ es un subconjunto de Y abierto invariante y G-ANE(X). Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Λ. Para cada $T \in \mathcal{T}$ definimos $Z_{\mathrm{T}} = \bigcup\limits_{\lambda \in T} Y_\lambda$. Entonces se sigue del lema 2.54 que cada Z_T es un subconjunto de Y abierto el cual es un G-ANE(X). Además $Y = \bigcup\limits_{T \in \mathcal{T}} Z_T$ y $Z_T \cup Z_S = Z_{T \cup S}$ para $T, S \in \mathcal{T}$. Consecuentemente, se aplica el corolario 2.53, y la prueba está completa. $\square$

CAPíTULO 3

Una caracterización local de los G-ANR's

Una consecuencia inmediata del corolario 2.55 es la siguiente caracterización de los G-ANR's.

Teorema 3.1. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio metrizable. Entonces X es un G-ANR si y sólo si toda órbita $G(x) \subset X$ tiene una vecindad invariante U que es un G-ANR.*

Demostración. Supongamos que X es un G-ANR. Entonces para cada órbita $G(x) \subset X$, X es una vecindad invariante la cual es un G-ANR.

Supongamos ahora que cada órbita $G(x) \subset X$ tiene una vecindad invariante U_x que es un G-ANR. Por el teorema 2.29, U_x es un G-ANE. Por el corolario 2.55,

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

es un G-ANE y, por el teorema 2.29, X es un G-ANR. □

Con la idea del teorema anterior, precisamos el concepto de un G-ANR local y, posteriormente, damos una caracterización local de los G-ANR's.

Definición 3.2. *Un G-espacio X es llamado un **G-ANE local** si cada punto $x \in X$ admite una vecindad G_x-invariante U la cual es un G_x-ANE.*

Definición 3.3. *Un G-espacio X es llamado un **G-ANR local** si cada punto $x \in X$ admite una vecindad G_x-invariante U la cual es un G_x-ANR.*

Lema 3.4. *Sean G un grupo compacto metrizable, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Entonces si X es metrizable, el producto torcido $G \times_H X$ es metrizable también.*

Demostración. Dado que G es metrizable, el producto, $G \times X$ es metrizable. Finalmente, por la proposición 2.16, el producto torcido $G \times_H X$ es metrizable. $\square$

Lema 3.5. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G y $f : X \to Y$ una H-aplicación del H-espacio metrizable X en el H-espacio metrizable Y. Entonces la función*

$$\varphi_f : G \times_H X \to G \times_H Y$$

correspondiente a f, dada por $\varphi_f([g,x]) = [g, f(x)]$ es una G-aplicación.

Además, si f es un encaje topológico cerrado, entonces φ_f es un encaje topológico cerrado.

Demostración. Veamos primeramente que φ_f está bien definida. Por la proposición 2.32, $G \times_H X$ y $G \times_H Y$ son G-espacios. Sean g, $g' \in G$ y x, $x' \in X$. Supongamos que $[g,x] = [g',x']$. Entonces existe un $h \in H$ tal que $g' = gh^{-1}$ y $x' = hx$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_f([g',x']) &= [g', f(x')] = [gh^{-1}, f(hx)] = [gh^{-1}, hf(x)] \\ &= [g, f(x)] = \varphi_f([g,x]). \end{aligned}$$

Veamos ahora que φ_f es continua. Consideremos las proyecciones orbitales $\pi : G \times X \to G \times_H X$ y $\pi' : G \times Y \to G \times_H Y$, así como la función continua $Id_G \times f$. De acuerdo al siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "Id_G \times f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'(Id_G \times f)", "\varphi_f \pi"'] & G \times Y \arrow[d, "\pi'"] \\ G \times_H X \arrow[r, "\varphi_f"] & G \times_H Y \end{tikzcd}$$

podemos observar que, como $Id_G \times f$ y π' son continuas, $\varphi_f \pi$ lo es. Por la propiedad universal del cociente (ver la observación 1.19), considerando que π es una identificación, se sigue que φ_f es continua.

Es fácil ver que es G-equivariante. En efecto,

$$\varphi_f(g'[g,x]) = \varphi_f([g'g, x]) = [g'g, f(x)] = g'[g, f(x)] = g'\varphi_f([g,x]).$$

Hemos probado que φ_f es una G-aplicación.

Resta probar que si f es encaje cerrado, entonces φ_f también lo es.

Verifiquemos primeramente que φ_f es inyectiva. Supongamos que $\varphi_f([g,x]) = \varphi_f([g',x'])$. Entonces $[g, f(x)] = [g', f(x')]$. Esto significa que existe un $h \in H$, tal que $g' = gh^{-1}$ y $f(x') = hf(x)$. Luego,

$f(x') = f(hx)$ y, como f es inyectiva, $x' = hx$. Por tanto, $[g, x] = [g', x']$, es decir, φ_f es inyectiva.

Como f es un encaje topológico cerrado, $Id_G \times f$ es un encaje topológico cerrado también. Como G es compacto, por la proposición 1.37, las proyecciones orbitales son cerradas. De ahí que φ_f sea un encaje topológico cerrado. $\square$

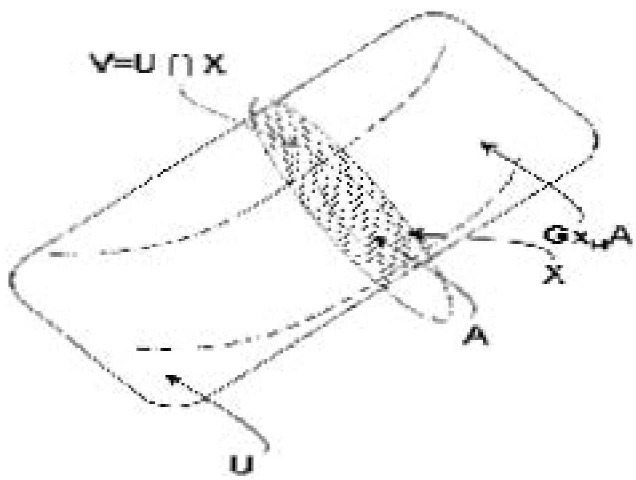


Figura 1. *Interpretación gráfica utilizada en la demostración del teorema 3.6.*

En [**45**], *J. de Vries nos proporciona las bases de la demostración del teorema siguiente.*

Teorema 3.6. *Sea G un grupo compacto metrizable, y supongamos que el G-espacio metrizable Y es un G-*ANE*. Entonces para todo subgrupo cerrado $H \subset G$, el H-espacio Y es un H-*ANE*.*

Demostración. Sean X un H-espacio metrizable, A un subconjunto cerrado H-invariante de X y $f : A \to Y$ una H-aplicación. Por la proposición 2.33, f induce una G-aplicación $\widetilde{f} : G \times_H A \to Y$, dada por $\widetilde{f}([g, x]) = gf(x)$. Por el lema 3.4, el producto torcido $G \times_H X$ es un G-espacio metrizable. Además, por el lema 3.5, $G \times_H A$ es un subconjunto cerrado G-invariante de $G \times_H X$, debido a que si la H-aplicación inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es un H-encaje cerrado, $\varphi_i : G \times_H A \hookrightarrow G \times_H X$ es un G-encaje cerrado.

Ahora, como Y es un G-ANE, existe una vecindad U, G-invariante de $G \times_H A$ tal que $\widetilde{f}$ se extiende a una G-aplicación $\widetilde{F} : U \to Y$, como se observa en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, dotted, "\widetilde{F}"] & \\
G \times_H A \arrow[u, hook, dotted] \arrow[r, dotted, "\widetilde{f}"] & Y \\
A \arrow[u, hook, "\gamma_A"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook', "Id_Y"']
\end{tikzcd}$$

en donde, las flechas punteadas y continuas

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, dotted, "G-aplicaciones"] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "H-aplicaciones"] & {} \end{tikzcd}$$

representan, respectivamente, las aplicaciones G-equivariantes y H-equivariantes.

Resulta claro, por la proposición 2.40, que A es un cerrado H-invariante de $G \times_H A$, y que X es un cerrado H-invariante de $G \times_H X$. Hagamos $V = U \cap X$ (tal como se observa en la figura 1). Así V es una vecindad H-invariante de A. Entonces la restricción $F = \widetilde{F}|_V$ es la extensión buscada de f y que hace a Y un H-ANE.
El diagrama siguiente presenta los puntos esenciales de esta demostración.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr, hook, "Id_Y"] \arrow[dl, hook, "Id_Y"'] & & Y \arrow[dl, hook, "Id_Y"'] & & \\
Y \arrow[rr, hook, dotted, "Id_Y"] & & Y & & & \\
 & A \arrow[uu, "f"] \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] & & V \arrow[uu, "\tilde{F}|_V"'] \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] & & X \arrow[dl, hook] \\
G \times_H A \arrow[uu, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[rr, hook, dotted] & & U \arrow[uu, dotted, "\tilde{F}"] \arrow[rr, hook, dotted] & & G \times_H X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, dotted, "G-aplicaciones"] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "H-aplicaciones"] & {} \end{tikzcd}$$

$\square$

La siguiente caracterización local de los G-ANE's tiene un papel importante en este documento.

Teorema 3.7. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio metrizable. Entonces X es un G-*ANE *si y sólo si X es un G-*ANE local.

Demostración. Si el G-espacio X es un G-ANE entonces X es también un H-ANE para cualquier subgrupo cerrado $H \subset G$, por el teorema 3.6. En particular, X es un G_x-ANE para cualquier $x \in X$.

Supongamos que X es un G-ANE local. Para cualquier $x \in X$, sea U una vecindad G_x-invariante de x la cual es un G_x-ANE. Por el teorema 2.38 podemos seleccionar una G_x-rebanada S_x tal que $x \in S_x \subset U$. Por la proposición 2.37 la G-saturación $G(S_x)$ es G-homeomorfa al producto torcido $G \times_{G_x} S_x$. Se sigue de la proposición 2.41 que S_x es un G_x-retracto de alguna vecindad G_x-invariante W de S_x en $G(S_x)$. Como U es G_x-invariante podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $W \subset U$ (esta situación es ilustrada en la figura 2).

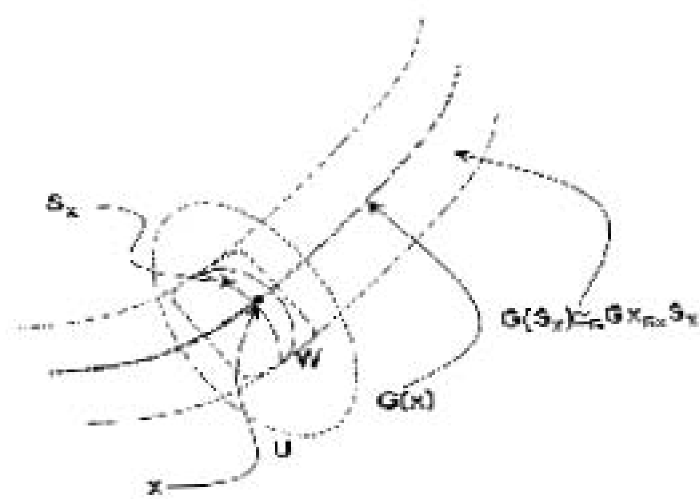


FIGURA 2. *Interpretación gráfica utilizada en la demostración del teorema 3.7.*

Entonces, como W un subconjunto abierto G_x-invariante de un G_x-espacio U el cual es un G_x-ANE, por la proposición 2.5, el conjunto W mismo es un G_x-ANE. Por la proposición 2.6, S_x, al ser un G_x-retracto de W, es un G_x-ANE también. Luego, por la proposición 2.48, la G-saturación $G(S_x)$ es un G-ANE.

Ahora, como X es la unión de sus subconjuntos G-ANE abiertos invariantes $G(S_x)$, $x \in X$, se sigue del corolario 2.55 que X es un G-ANE. $\square$

Resulta ahora clara nuestra caracterización local de los G-ANR's, la cual se presenta en el teorema siguiente.

Teorema 3.8. *Sea G un grupo compacto de Lie. Si X es un G-espacio metrizable, entonces X es un G-ANR si y sólo si X es un G-ANR local.*

Demostración. Por la teorema 2.29, X es un G-ANR si y sólo si X es un G-ANE. Por el teorema 3.7, X es un G-ANE si y sólo si X es un G-ANE local. Pero, por definición, X es un G-ANE local si y sólo si cada punto de x admite una vecindad G_x-invariante U la cual es un G_x-ANE. Por la teorema 2.29, X es un G-ANE local si y sólo si cada punto de x admite una vecindad G_x-invariante U la cual es un G_x-ANR, esto es, si y sólo si X es un G-ANR local. Concluimos que X es un G-ANR si y sólo si X es un G-ANR local. $\square$

Una consecuencia interesante, que enunciamos en el siguiente corolario, nos enlaza conceptos de las teorías equvariante y no equivariante

Corolario 3.9. *Sea G un grupo compacto de Lie. Sea X un G-espacio libre metrizable. Entonces X es un G-ANR si y sólo si X es un ANR.*

Demostración. Por la proposición 2.28, tenemos que si X es un G-ANR, entonces X es un ANR.

Supongamos ahora que X es un ANR. Entonces para cada $x \in X$ existe una vecindad G_x-invariante U tal que U es G_x-ANR, a saber, $U = X$ puesto que X es un ANR y X es un G-espacio libre donde $G_x = \{e\}$. Luego X es un G-ANR local y, por el teorema 3.8, X es un G-ANR. $\square$

Observación 3.10. *Es fácil ver que las partes "sólo si" de los teoremas 3.7 y 3.8 son válidos para cualquier grupo compacto (no necesariamente de Lie) G. De otro lado, las partes "si" de estos teoremas están basados esencialmente en el teorema de la rebanada, el cual no es válido para acciones de grupos compactos que no son de Lie (ver* [**6**]*). Más aún, el teorema 3.8 mismo, o bien, el teorema 3.7, tampoco es cierto para acciones de grupos compactos que no son de Lie. En efecto, según los teoremas 2 y 6 del artículo* [**5**]*, para cada grupo compacto metrizable G que no es de Lie, existe un G-espacio lineal normado L, tal que todos los estabilizadores G_x, con $x \in L$, son grupos finitos y L no es un G-ANR. En este caso, como G_x es finito, $L \in G_x$-ANR (ver* [**4**]*). Así, L es un G-ANR local pero no es un G-ANR global.*

CAPíTULO 4

Caracterizaciones homotópicas de los G-ANR's

En este capítulo se presentan dos caracterizaciones homotópicas de los G-ANR's. En cada una de ellas es necesario utilizar un nuevo resultado cuya importancia en la Teoría Equivariante de Retractos va más allá de la justificación de tales caracterizaciones. Éste es el teorema 3.7, del cual se desprende una caracterización local de los G-ANR's.

En cada una de las demostraciones de las caracterizaciones homotópicas se deberá probar previamente, que si determinada propiedad homotópica está presente cuando se trabaja con un grupo dado, también estará presente cuando se trabaja con los subgrupos cerrados que son estabilizadores de este grupo, ya que éstos juegan un papel relevante cuando se deben demostrar propiedades locales.

Se concluye con una caracterización de los subespacios cerrados invariantes de los G-ANR's que también tienen la propiedad de ser G-ANR's.

*Hacemos la observación de que a lo largo de este capítulo se trabajará sólo con **acciones de grupos compactos de Lie en espacios metrizables**.*

1. La propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$

Definición 4.1. *Una cubierta $\mathcal{U}$ de un G-espacio Y es llamada una G-**cubierta**, si $gU \in \mathcal{U}$ para cada $U \in \mathcal{U}$ y $g \in G$.*

Definición 4.2. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de un G-espacio Y. Dos G-aplicaciones $\phi, \varphi : X \to Y$ definidas en el G-espacio metrizable X se dice que son $\mathcal{U}$-**cercanas** si para cada $x \in X$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\phi(x) \in U$ y $\varphi(x) \in U$.*

Definición 4.3. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de un G-espacio Y. Una homotopía equivariante $h_t : X \to Y$, $t \in I$, se dice que es $\mathcal{U}$-**limitada** o bien una $\mathcal{U}$-**homotopía equivariante** (abreviado $\mathcal{U}$-G-homotopía) si para cada $x \in X$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $h_t(x) \in U$ para todo $t \in I$. Dos G-aplicaciones $\phi, \varphi : X \to Y$ se que son $\mathcal{U}$-**homotópicas***

equivariantamente *(abreviado $\mathcal{U}$-G-homotópicas) si y sólo si existe una $\mathcal{U}$-G-homotopía $h_t : X \to Y$, $t \in I$, tal que $h_0 = \phi$ y $h_1 = \varphi$.*

Definición 4.4. *Sea Y un G-espacio y sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos G-cubiertas abiertas de Y tales que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Diremos que Y satisface la* ***propiedad*** *$\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$ si para cualesquiera dos G-aplicaciones $\mathcal{V}$-cercanas $f, \varphi : X \to Y$ definidas en el G-espacio metrizable X y cualquier $\mathcal{V}$-G-homotopía $j_t : A \to Y$, $t \in I$, definida en un subconjunto invariante cerrado A de X con $j_0 = f|_A$ y $j_1 = \varphi|_A$, existe una $\mathcal{U}$-G-homotopía $J_t : X \to Y$, $t \in I$, con $J_0 = f$, $J_1 = \varphi$ y $J_t|_A = j_t$ para cada $t \in I$.*

Si $\mathcal{U} = \{Y\}$, escribiremos $\mathcal{P}(G,\mathcal{V})$ en vez de $\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$.

En la figura 1 ilustramos los puntos esenciales de la definición 4.4.

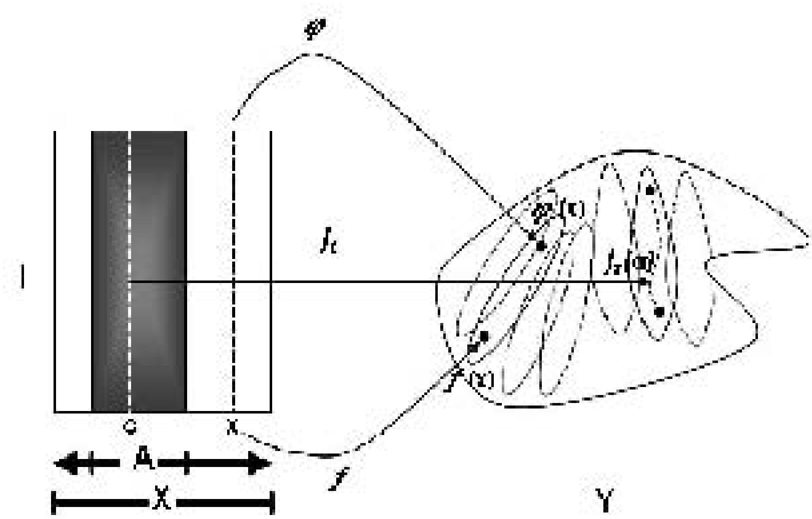


FIGURA 1. *Propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$.*

Los siguientes teorema 4.5 y proposición 4.6 son válidos también para acciones de grupos compactos (no necesariamente de Lie).

Teorema 4.5. *Si Y es un G-ANR y $\mathcal{U}$ una G-cubierta abierta de Y, entonces existe una G-cubierta abierta $\mathcal{V}$ de Y, la cual es un refinamiento de $\mathcal{U}$, tal que Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G,\mathcal{U},\mathcal{V})$ de la definición 4.4.*

Demostración. Por el corolario 2.26, podemos considerar que Y es un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio lineal normado L. Como Y es un G-ANR, existe una vecindad invariante M de Y en

L y una G-retracción $r : M \to Y$. Consideremos la cubierta abierta $r^{-1}(\mathcal{U}) = \{r^{-1}(U) | U \in \mathcal{U}\}$ de M. Sea $\mathcal{W}$ conformada por todas las bolas abiertas de L cada una de las cuales está contenida en un elemento de $r^{-1}(\mathcal{U})$. Claramente $\mathcal{W}$ es una G-cubierta abierta de M la cual refina a $r^{-1}(\mathcal{U})$. Hagamos $\mathcal{V} = \{W \cap Y | W \in \mathcal{W}\}$. Afirmamos que $\mathcal{V}$ es la G-cubierta de Y requerida.

En efecto, sea X un G-espacio metrizable y A un subconjunto invariante cerrado de X. Supongamos también que $f, \ \varphi : X \to Y$ son cualesquiera dos G-aplicaciones $\mathcal{V}$-cercanas definidas en X y sea $j_t : A \to Y$, $t \in I$, una $\mathcal{V}$-G-homotopía definida en A con $j_0 = f|_A$ y $j_1 = \varphi|_A$.

Construímos una $\mathcal{W}$-G-homotopía $\kappa_t : X \to M$, $t \in I$, tomando

$$\kappa_t(x) = (1 - t)f(x) + t\varphi(x)$$

para cada $x \in X$ y cada $t \in I$.

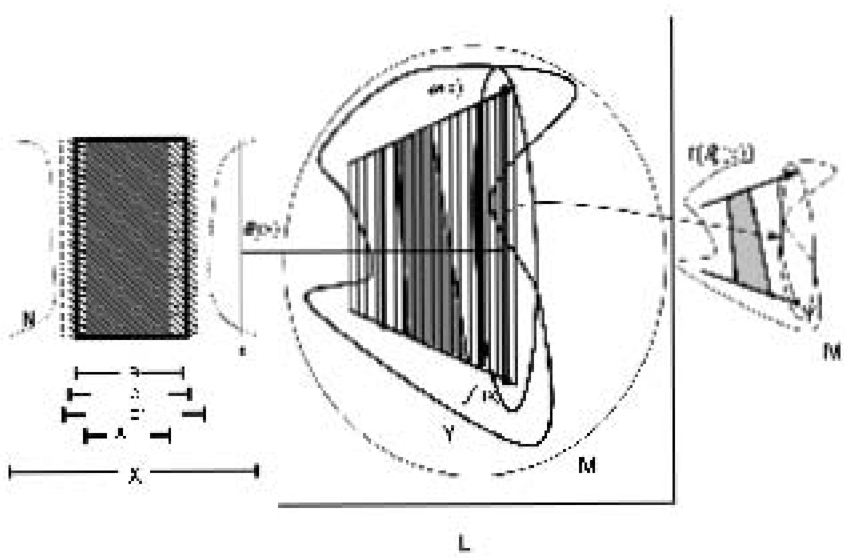


FIGURA 2. *Ilustración del CASO I de la demostración del teorema 4.5*

Consideremos el subconjunto invariante cerrado

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (X \times \{1\})$$

en el producto topológico $P = X \times I$, dotado con la G-acción:

$$g(x,t) = (gx,t).$$

Definimos una aplicación $\Phi : T \to Y$ tomando:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X \text{ y } t = 0 \\ j_t(x), & \text{si } x \in A \text{ y } t \in I \\ \varphi(x), & \text{si } x \in X \text{ y } t = 1. \end{cases}$$

Como Y es un G-ANR, se sigue del teorema 2.29 que Φ tiene una G-extensión $\psi : N \to Y$ sobre la vecindad invariante N de T en P.

Por el lema 1.56 y la compacidad del intervalo unitario I, existe de una vencindad abierta C' de A en X, tal que $C' \times I$ está contenida en N y que la homotopía $\xi_t : C' \to Y$, $t \in I$, definida por

$$\xi_t(x) = \psi(x,t),\ x \in C',\ t \in I$$

es una $\mathcal{V}$-homotopía. Como G es compacto, por la proposición 1.39, podemos seleccionar una vecindad invariante C de A en X tal que $C \subset C'$. Entonces la restricción $\xi_t = \xi_t|_C$, $t \in I$, es una $\mathcal{V}$-G-homotopía.

Como X es un G-espacio metrizable, es normal. Luego, existe un conjunto abierto invariante B en X tal que

$$A \subset B \subset \overline{B} \subset C.$$

Por el lema de Urysohn (ver el teorema 1.44), existe una aplicación invariante $s : X \to I$ tal que

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X \backslash B \\ 1, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Definamos una homotopía $\theta_t : X \to M$, $t \in I$, tomando

$$\theta_t(x) = \begin{cases} [1 - s(x)]\kappa_t(x) + [s(x)]\xi_t(x), & \text{si } x \in C \\ \kappa_t(x), & \text{si } x \in X \backslash B. \end{cases}$$

Cada θ_t es una G-aplicación ya que κ_t y ξ_t lo son y G actúa linealmente en L.

Probaremos que $\theta_t(x)$ es una $\mathcal{W}$-homotopía. Con este propósito, sea x un punto arbitrario de X. Probaremos la existencia de un $\mathcal{W}_\mu \in \mathcal{W}$ tal que

$$\theta_t(x) \in W_\mu \text{ para cada } t \in I.$$

Estableceremos esto en dos casos.

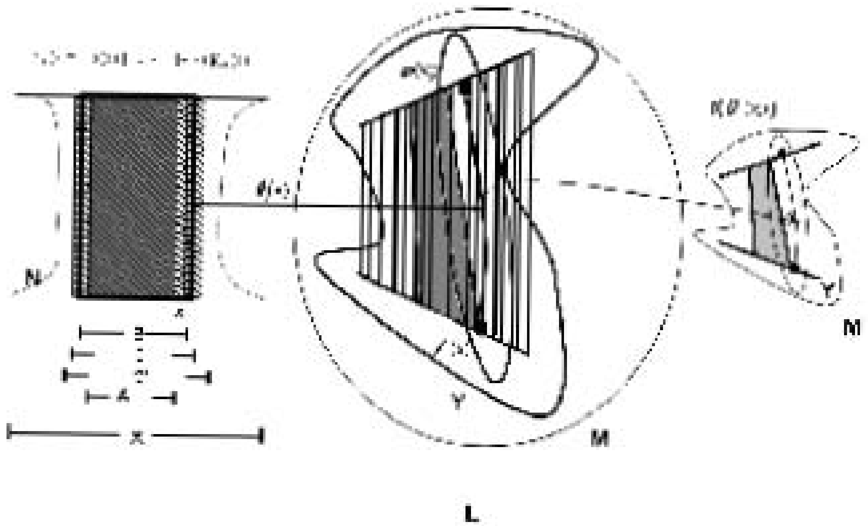


Figura 3. *Ilustración del CASO II de la demostración del teorema 4.5*

CASO I: $s(x) = 0$. En este caso, tenemos $\theta_t(x) = \kappa_t(x)$ para cada $t \in I$. Como κ_t es una $\mathcal{W}$-homotopía, existe una $W_\mu \in \mathcal{W}$ tal que $\theta_t(x) = \kappa_t(x) \in W_\mu$ para cada $t \in I$. (Ver la figura 2.)

CASO II: $s(x) > 0$. En este caso, tenemos $x \in B \subset C$. Como ξ_t es una $\mathcal{W}$-homotopía, existe una $W_\mu \in M$ tal que $\xi_t(x) \in W_\mu$ para cada $t \in I$. En particular, W_μ contiene los dos puntos

$$\xi_0(x) = f(x) \text{ y } \xi_1(x) = \varphi(x).$$

Como W_μ es un conjunto convexo, se sigue que $\kappa_t(x) \in W_\mu$ para cada $t \in I$. Ahora, como el conjunto convexo W_μ contiene tanto a $\kappa_t(x)$ como a $\xi_t(x)$, debe también contener a $\theta_t(x)$ para cada $t \in I$. (Ver la figura 3.)

Por lo tanto, hemos probado que la G-homotopía

$$\theta_t : X \to M, \; t \in I$$

es una $\mathcal{W}$-homotopía.

Finalmente, definimos una G-homotopía $J_t : X \to Y$, $t \in I$, tomando

$$J_t(x) = r\big(\theta_t(x)\big), \; x \in X \text{ y } t \in I.$$

Como θ_t es una $\mathcal{W}$-homotopía y $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $r^{-1}(\mathcal{U})$, se sigue que J_t es una $\mathcal{U}$-homotopía. Por otro lado, como r es una retracción, es fácil verificar que $J_0 = f$, $J_1 = \varphi$ y $J_t|_A = j_t$ para cada $t \in I$. $\square$

Proposición 4.6. *Sea Y un G-espacio y $\mathcal{V}$ una G-cubierta abierta de Y. Si Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$ entonces ésta satisface también la propiedad $\mathcal{P}(K, \mathcal{V})$ para cada subgrupo cerrado $K \subset G$.*

Demostración. Sean X un K-espacio metrizable y A un subconjunto de X cerrado K-invariante. Supongamos que $f, \varphi : X \to Y$ son dos K-aplicaciones $\mathcal{V}$-cercanas y $j_t : A \to Y$, $t \in I$, es una $\mathcal{V}$-K-homotopía con $j_0 = f|_A$ y $j_1 = \varphi|_A$. Entonces, por el lema 3.4 y la proposición 2.32, el producto torcido $X' = G \times_K X$ es un G-espacio metrizable; por el lema 3.5, $A' = G \times_K A$ es un subconjunto cerrado G-invariante de X'.

Entonces, por la proposición 2.33, las K-aplicaciones f, φ y la K-homotopía j_t inducen las G-aplicaciones $f', \varphi' : X' \to Y$ y la G-homotopía $j'_t : A' \to Y$, $t \in I$, respectivamente, definidas por las fórmulas:

$$f'([g, x]) = gf(x),$$
$$\varphi'([g, x]) = g\varphi(x),$$
$$j'_t([g, x]) = gj_t(x),\ t \in I,$$

donde $[g, x] \in X'$ y $g \in G$.

Revisaremos primero que f' y φ' son $\mathcal{V}$-cercanas. Como f y φ son $\mathcal{V}$-cercanas, entonces existe un elemento $V \in \mathcal{V}$ que contiene los puntos $f(x)$ y $\varphi(x)$. En consecuencia,

$$f'([g, x]) = gf(x),\ \varphi'([g, x]) = g\varphi(x) \in gV$$

y como $gV \in \mathcal{V}$, concluímos que las G-aplicaciones f' y φ' son $\mathcal{V}$-cercanas.

Enseguida, revisamos que $j'_t : A' \to Y$, $t \in I$ es una $\mathcal{V}$-homotopía. Como $j_t : A \to Y$, $t \in I$ es una $\mathcal{V}$-homotopía, existe un elemento $W \in \mathcal{V}$ tal que $j_t(a) \in W$ para todo $t \in I$. Consecuentemente,

$$j'_t([g, a]) = gj_t(a) \in gW$$

para todo $t \in I$, y como $gW \in \mathcal{V}$, inferimos que

$$j'_t : A' \to Y,\ t \in I,$$

es una $\mathcal{V}$-homotopía.

Ahora, como el G-espacio Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$, debe existir una G-homotopía $J'_t : X' \to Y,\ t \in I$, con $J'_0 = f'$, $J'_1 = \varphi'$ y $J'_t|_{A'} = j'_t$ para cada $t \in I$.

Evidentemente, la restricción $J_t = J'_t|_X : X \to Y$ es una homotopía K-equivariante con $J_0 = f$, $J_1 = \varphi$ y $J_t|_A = j_t$ para cada $t \in I$. Esto completa la demostración. □

La propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$ de un G-espacio metrizable caracteriza los G-ANR's. En efecto, tenemos el siguiente resultado fundamental:

Teorema 4.7. *Para que un G-espacio metrizable Y sea un G-*ANR *es necesario y suficiente la existencia de una G-cubierta abierta $\mathcal{V}$ de Y tal que Y satisface la propiedad $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$.*

Demostración. La condición de necesidad se sigue del teorema 4.5 tomando $\mathcal{U}$ como la cubierta abierta de Y la cual consiste del conjunto abierto singular, a saber, Y mismo.

Para probar la suficiencia de la condición $\mathcal{P}(G, \mathcal{V})$, por los teoremas 2.29 y 3.7 es suficiente mostrar que Y es un G-ANE local.

Para ello, sean $y \in Y$ y $V \in \mathcal{V}$ tal que V contiene a y. Por la compacidad del estabilizador G_y y la proposición 1.39, podemos seleccionar una vecindad G_y-invariante S de y tal que $S \subset V$. Definimos dos G_y-aplicaciones $\phi, \psi : S \to Y$ y una G_y-homotopía $\theta_t : \{y\} \to Y$, $t \in I$, tomando

$$\begin{cases} \phi(s) = y, & \text{si } s \in S \\ \psi(s) = s, & \text{si } s \in S \\ \theta_t(y) = y, & \text{si } t \in I. \end{cases}$$

(Ver la figura 4(1)).

Obviamente, ϕ y ψ son G_y-aplicaciones $\mathcal{V}$-cercanas y θ_t, $t \in I$, es una $\mathcal{V}$-G_y-homotopía, tal que $\theta_0(y) = \phi(y)$ y $\theta_1(y) = \psi(y)$. De acuerdo la proposición 4.6, Y considerado como un G_y-espacio, satisface la condición $\mathcal{P}(G_y, \mathcal{V})$.

Ahora, como S es un G_y-espacio metrizable y $\{y\}$ es un G_y-subconjunto cerrado de S, se sigue de la condición $\mathcal{P}(G_y, \mathcal{V})$ que hay una G_y-homotopía $j_t : S \to Y$, $t \in I$, con $j_0 = \phi$, $j_1 = \psi$, y $j_t(y) = y$ para cada $t \in I$. (Ver la figura 4(2).)

Como el intervalo unitario I es compacto y como $j_t(y) = y \in V$ para cada $t \in I$, por el lema 1.57 y la proposición 1.39, existe una vecindad abierta G_y-invariante U de y tal que $U \subset S$ y $j_t(U) \subset V$ para todo $t \in I$. Probaremos que U es un G_y-ANE.

Con este fin, sea $f : A \to U$ cualquier G_y-aplicación definida en un G_y-subespacio cerrado A de un G_y-espacio metrizable X. Definimos

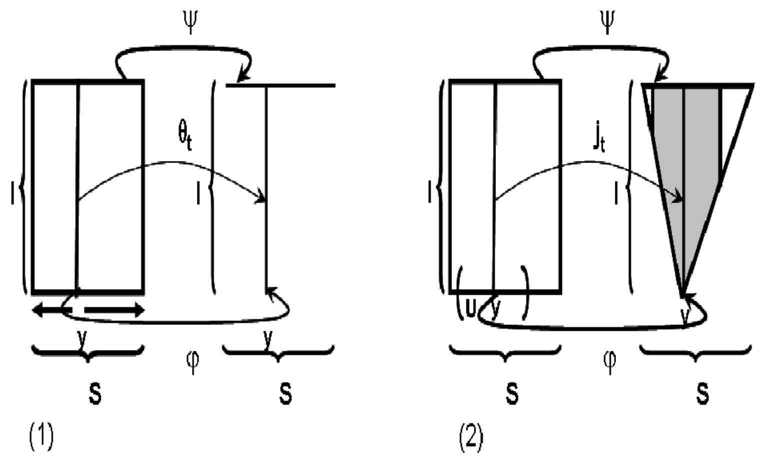


Figura 4. *Ilustración utilizada en la demostración del teorema 4.7*

dos G_y-aplicaciones $\xi, \eta : X \to Y$ y una G_y-homotopía $J_t : A \to Y$, $t \in I$, tomando

$$\xi(x) = y = \eta(x),\ x \in X$$

$$J_t(x) = \begin{cases} j_{2t}(f(x)), & \text{si } x \in A \text{ y } 0 \leq \mathrm{t} \leq \frac{1}{2} \\ j_{2-2t}(f(x)), & \text{si } x \in A \text{ y } \frac{1}{2} \leq \mathrm{t} \leq 1. \end{cases}$$

Obviamente, ξ y η son G_y-aplicaciones $\mathcal{V}$-cercanas y J_t es una $\mathcal{V}$-G_y-homotopía, tal que $J_0 = \xi|_A$, $J_1 = \eta|_A$. Luego, por la condición $\mathcal{P}(G_y, \mathcal{V})$, existe una G_y-homotopía $R_t : X \to Y$, $t \in I$, con $R_0 = \xi$, $R_1 = \eta$, y $R_t|_A = J_t$ para cada $t \in I$. (Ver la figura 5.)

Consideremos la G_y-aplicación $r = R_{\frac{1}{2}} : X \to Y$. Por la construcción de r, uno puede ver claramente que $r|_A = f$.

En efecto, si $x \in A$, entonces

$$r(x) = R_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = j_1(f(x)) = f(x).$$

Sea $W = r^{-1}(U)$. Entonces, W es una vecindad G_y-invariante abierta de A en X y la restricción $r|_W : W \to U$ es una G_y-extensión de f sobre W.

Esto prueba que U es un G_y-ANE. Por lo tanto, hemos probado que Y es G-ANE local. $\square$

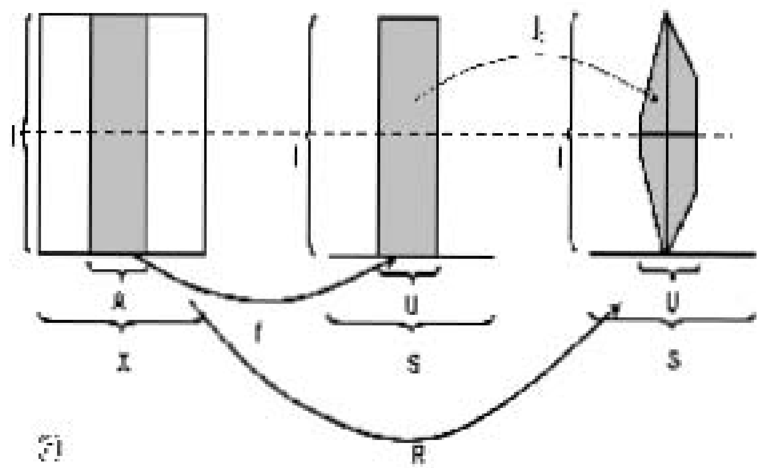


FIGURA 5. *Ilustración utilizada en la demostración del teorema 4.7*

2. G-contraibilidad local y G-PEH

Definición 4.8. *Un G-par (X,A) tiene la* ***propiedad de extensión de homotopía equivariante*** *(abreviada* G-PEH *) con respecto a un G-espacio Y si y sólo si cada G-homotopía parcial*

$$h_t : A \to Y,\ t \in I$$

de una G-aplicación arbitraria $f : X \to Y$ *posee una G-extensión*

$$f_t : X \to Y,\ t \in I \text{ tal que } f_0 = f.$$

El G-par (X, A) *tiene la* ***propiedad de extensión de homotopía equivariante absoluta*** *(abreviada* G-PEHA*) si y sólo si éste posee la* G-PEH *con respecto a todo G-espacio* Y*.*

En la figura 6 ilustramos los puntos esenciales de la definición 4.8.

En otra terminología, en este caso, la inclusión $A \hookrightarrow X$*, suele llamarse una* ***cofibración equivariante*** *(ver* [**18**]*, p. 96). La version no equivariante de esta noción también juega un papel muy importante en la topología algebraica (Ver, por ejemplo,* [**2**]*).*

Una consecuencia inmediata de la G-PEH del G-par (X, A) *con respecto a* Y *es que el problema de extensión equivariante de una G-aplicación* $f : A \to Y$ *sobre* X *depende sólo de la clase de G-homotopías de la aplicación* f*. En otras palabras, si* $f, \phi : A \to Y$ *son G-aplicaciones*

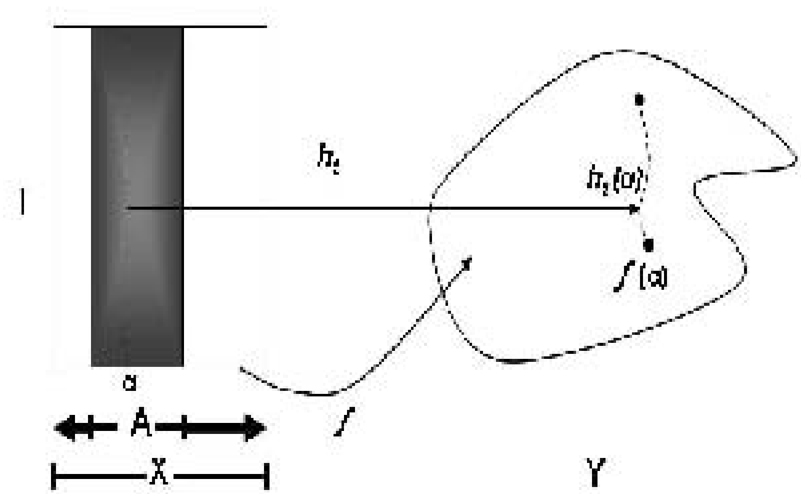


Figura 6. *Propiedad de extensión de homotopía equivariante.*

G-homotópicas y si f es G-extendible sobre X, entonces también lo es ϕ.

*La versión equivariante del teorema de Borsuk establece que si Y es un G-ANR, entonces todo G-par (X, A) tiene la G-PEH con respecto a Y (ver [**3**, teorema 5]). En el caso no equivariante este es el bien conocido teorema de Borsuk (ver [**14**], theorem 8.1).*

Nuesto siguiente teorema, el cual es válido aún para acciones de grupos sólo compactos, establece una versión "controlada" de este resultado:

Teorema 4.9. *Sea Y un G-ANR y $\mathcal{U}$ una G-cubierta de Y. Supongamos que A es un subconjunto invariante cerrado de un G-espacio metrizable X y $j_t : A \to Y$, $t \in I$, una $\mathcal{U}$-G-homotopía parcial. Si j_0 puede ser extendida a una G-aplicación $f : X \to Y$, entonces existe una $\mathcal{U}$-G-homotopía $J_t : X \to Y$ tal que $J_0 = f$ y $J_t|_A = j_t$ para toda $t \in I$.*

Demostración. Por la versión equivariante del teorema de extensión de homotopía de Borsuk (ver [**3**, teorema 5]), existe una G-homotopía $F_t : X \to Y$, $t \in I$ tal que $F_0 = f$ y $F_t|_A = j_t$. Para cada $a \in A$, existe $U_a \in \mathcal{U}$ que contiene $F_t(a)$ para toda $t \in I$. Por el lema 1.57 y la compacidad del intervalo unitario I, existe una vecindad W_a de a en X tal que

$$F_t(W_a) \subset U_a, \text{ para toda } t \in I. \tag{12}$$

Pongamos $W = \bigcup_{a\in A} W_a$. Entonces W es una vecindad de A en X. Dada

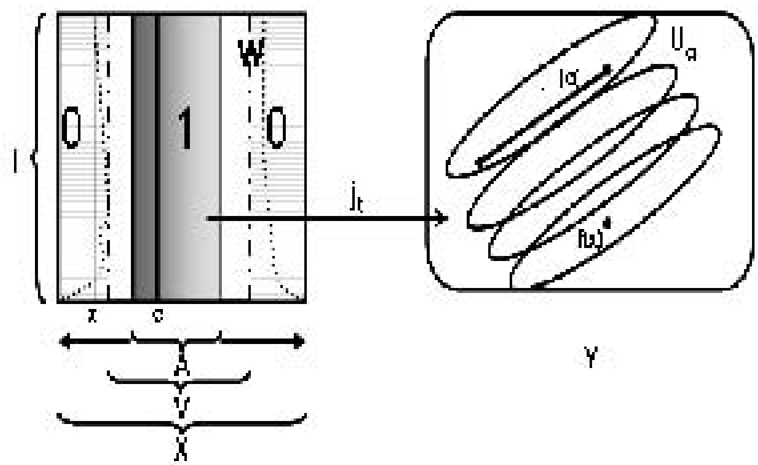


FIGURA 7. *Ilustración utilizada en la demostración del teorema 4.9.*

la compacidad del grupo actuante G, existe una vecindad G-invariante V de A tal que $V \subset W$.
Enseguida seleccionamos una aplicación invariante de Urysohn $\lambda : X \to I$ tal que $\lambda|_A = 1$ y $\lambda|_{X\setminus V} = 0$. Definimos $J_t : X \to Y, \quad t \in I$, como sigue:

$$J_t(x) = F_{\lambda(x)\cdot t}(x),\ x \in X.$$

Entonces es claro que $J_t(x)$ depende continuamente del par

$$(x,t) \in X \times I,$$

J_t es equivariante y $J_t|_A = j_t$ para toda $t \in I$. Además

$$J_0(x) = F_0(x) = f(x)$$

para cada $x \in X$, luego $J_0 = f$. Resta probar que la G-homotopía J_t, $t \in I$, es limitada por $\mathcal{U}$. En efecto, tomemos un $x \in X$ arbitrario. Si $x \in V$ entonces existe un $a \in A$ tal que $x \in W_a$. En consecuencia, por (12), para cada $t \in I$, se tiene:

$$J_t(x) = F_{\lambda(x)\cdot t}(x) \in U_a.$$

Si $x \notin V$, entonces $\lambda(x) = 0$, de lo cual se sigue que

$$J_t(x) = F_0(x) = f(x),\ t \in I.$$

Como $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y, existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ que contiene a $f(x)$, y por lo tanto, $J_t(x)$ está contenida en U para todo $t \in I$, como se requería. (Ver la figura 7.) $\square$

La proposición siguiente es válida aún para acciones de grupos sólo compactos.

Proposición 4.10. *Sea Y un G-espacio tal que cada G-par tiene la G-PEH con respecto a Y. Entonces para cada subgrupo cerrado $K \subset G$, todo K-par (X, A) tiene la K-PEH con respecto a Y considerado como un K-espacio.*

Demostración. Sean X un K-espacio metrizable y A un subconjunto de X cerrado K-invariante. Supongamos que $f : X \to Y$ es una K-aplicación y $h_t : A \to Y$, $t \in I$, es una homotopía parcial K-equivariante, con $h_0 = f|_A$.

Por la proposición 2.32 y el lema 3.4, el producto torcido

$$X' = G \times_K X$$

es un G-espacio metrizable y por el lema 3.5, $A' = G \times_K A$ es un subconjunto cerrado G-invariante de X'.

Entonces, por la proposición 2.33, la K-aplicación f, y la K-homotopía h_t inducen la G-aplicación $f' : X' \to Y$ y la G-homotopía

$$h'_t : A' \to Y, \; t \in I,$$

respectivamente, definidas por las fórmulas:

$$f'([g, x]) = gf(x),$$
$$h'_t([g, x]) = gh_t(x), \; t \in I,$$

donde $[g, x] \in X'$ y $g \in G$.

Por hipótesis, todo G-par tiene la G-PEH con respecto a Y. En particular el G-par (X', A') tiene la G-PEH con respecto a Y. De ahí que existe una G-homotopía $H'_t : X' \to Y$, $t \in I$, con $H'_0 = f'$ y $H'_t|_A = h'_t$ para cada $t \in I$.

Entonces la restricción $H_t = H'_t|_X : X \to Y$ es una homotopía K-equivariante con $H_0 = f$, y $H_t|_A = h_t$ para cada $t \in I$. Por tanto, el K-par (X, A) tiene la K-PEH con respecto a Y.

El diagrama siguiente presenta los puntos básicos de esta demostración, recordando que, por la proposición 2.34,

$$G \times_K (X \times I) \cong (G \times_K X) \times I = X' \times I,$$

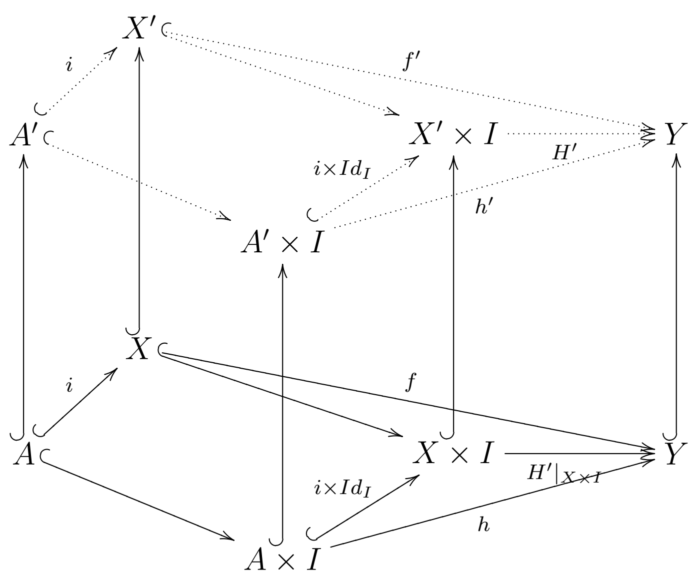
al igual que

$$G \times_K (A \times I) \cong (G \times_K A) \times I = A' \times I,$$

y que las flechas punteadas y continuas,

$$\xrightarrow{G-aplicaciones} \qquad \xrightarrow{K-aplicaciones}$$

representan, respectivamente, las aplicaciones G-equivariantes y K-equivariantes.



□

La G-contraibilidad local como la G-PEH son propiedades necesarias para un espacio G-ANR (ver la implicación (a) $\Rightarrow$ (b) en el teorema 4.11 abajo). Pero estas propiedades no pueden, por separado, caracterizar a los G-ANR's aún en el caso de que el grupo G actuante es trivial. Ejemplos correspondientes pueden encontrarse en Borsuk [**14**, Cap. V, §11] *y Hanner* [**25**].

Sin embargo, la G-contraibilidad local y la G-PEH juntas son equivalentes a la propiedad de ser G-ANR. Más precisamente tenemos:

Teorema 4.11. *Para un G-espacio metrizable Y, las tres proposiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *Y es un G-ANR.*

(b) *Y es localmente G-contraíble y todo G-par (X,A) tiene la G-*PEH *con respecto a Y.*

(c) *Todo punto $y \in Y$ tiene una vecindad G_y-invariante V tal que cualquier G_y-aplicación $f : A \to V$ definida en un G_y-subconjunto cerrado A de un G_y-espacio metrizable X tiene una G_y-extensión $\phi : X \to Y$.*

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b). La G-PEH se sigue del teorema 4.9 si tomamos a $\mathcal{U} = \{Y\}$, la cubierta con un único elemento.

Probaremos que Y es localmente G-contraíble. De acuerdo al corolario 2.26, podemos suponer que Y es un subconjunto invariante cerrado de un G-espacio lineal normado Z.

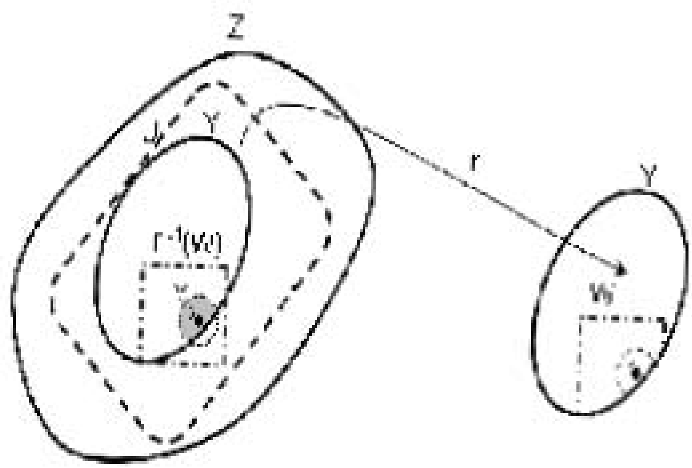


Figura 8. *Ilustración utilizada en la demostración de (a) $\Rightarrow$ (b) del teorema 4.11.*

Como Y es un G-ANR debe existir un subconjunto invariante abierto $U \subset Z$ y una G-retracción $r : U \to Y$. Ahora, tomamos un punto $y \in Y$ y una vecindad G_y-invariante W de y en Y. Como $r^{-1}(W)$ es un subconjunto abierto de Z, podemos seleccionar una bola abierta $B(y, \varepsilon)$ centrada en y con radio $\varepsilon > 0$, tal que $B(y, \varepsilon) \subset r^{-1}(W)$. Ahora hacemos $V = B(y, \varepsilon) \cap Y$. Como G actúa por medio de isometrías lineales en Z, inferimos que la bola $B(y, \varepsilon)$, y por lo tanto el conjunto V, es G_y-invariante. (Ver la figura 8.)

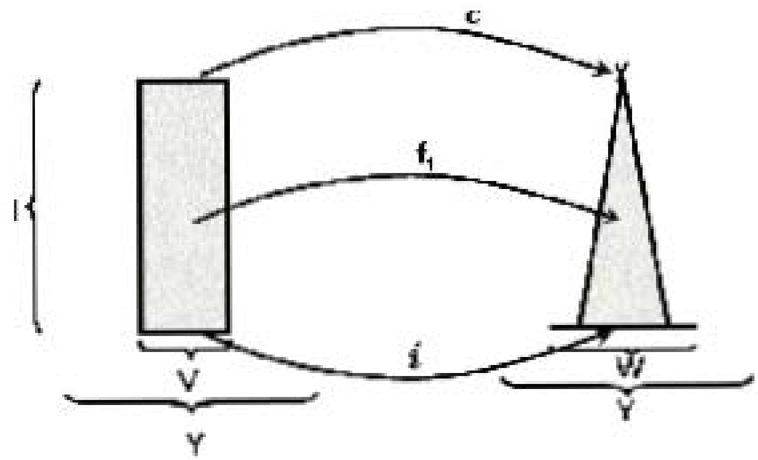


FIGURA 9. *Ilustración utilizada en la demostración de (a) ⇒ (b) del teorema 4.11.*

Definimos una G_y-homotopía $f_t : V \to W$, $t \in I$, por la fórmula:

$$f_t(v) = r\big(ty + (1-t)v\big), \ v \in V.$$

Claramente f_t, $t \in I$, es una G_y-contracción de V en W al punto G_y-fijo y. (Ver la figura 9.)

(b) ⇒ (c). Sea y un punto arbitrario en Y. Como Y es localmente G-contraíble, existe una vecindad G_y-invariante V de y la cual es G_y-contraíble en Y a un punto G_y-fijo $z \in Y$ (en general, z puede ser diferente de y). Para probar que V satisface (c), sea $f : A \to V$ una G_y-aplicación definida en un G_y-subconjunto cerrado A de un G_y-espacio metrizable X. Como V es G_y-contraíble al punto G_y-fijo z, se sigue que f, considerada como una G_y-aplicación en Y, es G_y-homotópica a la G_y-aplicación constante $c : A \to Y$ la cual lleva todo A en el punto $z \in Y$. Ahora, observe que por la proposición 4.10, (X, A) satisface la G_y-PEH con respecto a Y. Por tanto, como c puede ser G_y-extendida sobre X, se sigue que f también tiene una G_y-extensión $\phi : X \to Y$, como se requería. (Ver la figura 10.)

(c) ⇒ (a). Por el teorema 2.29 y el teorema 3.7, es suficiente mostrar que Y es un G-ANE local. Sea $y \in Y$ un punto arbitrario y sea V una vecindad G_y-invariante de y la cual satisface (c).

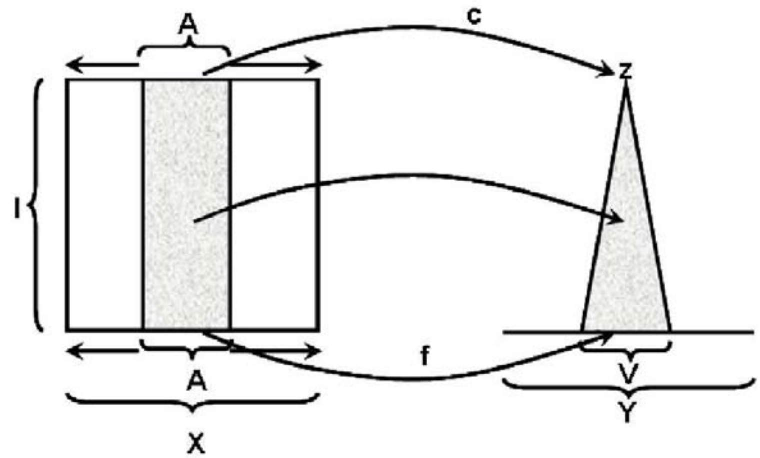


Figura 10. *Ilustración utilizada en la demostración de (b) ⇒ (c) del teorema 4.11.*

Probaremos que V es un G_y-ANE. Con este propósito, sea

$$f : A \to V$$

cualquier G_y-aplicación definida en un G_y-subconjunto cerrado A de un G_y-espacio metrizable X. Por (c), f tiene una G_y-extensión $\phi : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] & Y \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & V \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

La imagen inversa

$$U = \phi^{-1}(V)$$

es un conjunto abierto G_y-invariante en X que contiene a A, y la restricción

$$\phi|_U : U \to V$$

es una G_y-extensión de $f : A \to V$ sobre U.

$\square$

3. Cerrados invariantes G-ANR's de los espacios G-ANR's

Nuestro último resultado caracteriza los subconjuntos G-ANR cerrados invariantes en un espacio G-ANR. En esta sección los resultados corresponden a las acciones de grupos compactos. Más precisamente tenemos el siguiente:

Teorema 4.12. *Sea G un grupo compacto y sea X un G-*ANR*. Entonces un subconjunto cerrado invariante A de X es un G-*ANR *si y sólo si el G-par (X, A) tiene la G-*PEHA.

Para la demostración necesitaremos los siguientes dos lemas.

Lema 4.13. *Un G-par (X, A) tiene la G-*PEHA *si y sólo si el subconjunto cerrado invariante*

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$$

del G-espacio $P = X \times I$, es un G-retracto de P.

Demostración.

La parte "sólo si".

Sea $f : X \to T$ la G-aplicación definida por

$$f(x) = (x, 0),\ x \in X.$$

Definamos una G-homotopía parcial $h_t : A \to T,\ t \in I$, de f tomando

$$h_t(a) = (a, t),\ a \in A,\ t \in I.$$

Como (X, A) tiene la G-PEHA y $h_0 = f|_A$, inferimos que h_t tiene una G-extensión $f_t : X \to T,\ t \in I$, tal que $f_0 = f$. (Ver la figura 11.)

Sea $r : P \to T$ la G-aplicación definida por

$$r(x, t) = f_t(x),\ x \in X,\ t \in I.$$

Entonces r es una G-retracción de P sobre T. Esto prueba que T es un G-retracto de P.

La parte "si".

Suponga que T es un G-retracto de P con una G-retracción $r : P \to T$. Para probar la G-PEHA del G-par (X,A), sea

$$f : X \to Y$$

cualquier G-aplicación de X a un G-espacio Y y $h_t : A \to Y$, $t \in I$, una G-homotopía parcial de f. Definamos una G-aplicación

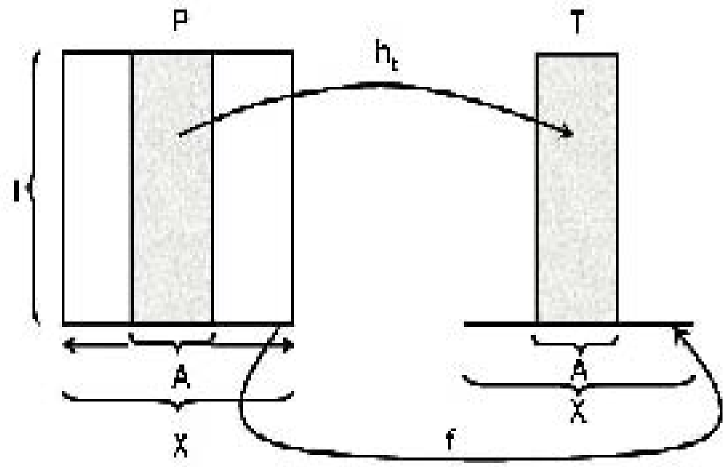


FIGURA 11. *Ilustración utilizada en la demostración de la parte "sólo si" del lema 4.13.*

$H : T \to Y$ tomando

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X \text{ y } \ t = 0 \\ h_t(x), & \text{si } x \in A \text{ y } \ t \in I. \end{cases}$$

Entonces h_t tiene una G-extensión $f_t : X \to Y,\ t \in I$, definida por

$$f_t(x) = H\big(r(x,t)\big)$$

para cada $x \in X$ y cada $t \in I$. Claramente, tenemos $f_0 = f$. Luego, (X, A) tiene la G-PEHA. (Ver la figura 12.)

$\square$

Lema 4.14. *Si X es un G-ANR y A es un subconjunto cerrado invariante G-ANR de X, entonces el subconjunto cerrado invariante*

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$$

del G-espacio $P = X \times I$ es un G-retracto de P.

Demostración. Como $X \times \{0\}$ y $A \times I$ son subconjuntos cerrados invariantes G-ANR de T y su intersección $A \times \{0\}$ es también un G-ANR, se sigue del teorema 2.30, que T es un G-ANR. Por el teorema 2.29, T es un G-ANE también. Luego, la G-aplicación identidad

$$i : T \to T$$

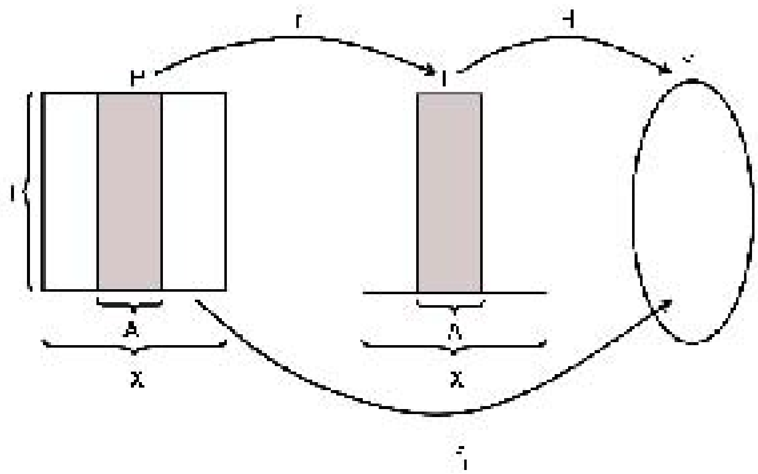


FIGURA 12. *Ilustración utilizada en la demostración de la parte "si"del lema 4.13.*

tiene una G-extensión $j : U \to T$ sobre una vecindad invariante U de T en P.

Mostraremos que entonces existe una G-retacción $r : P \to T$. Del

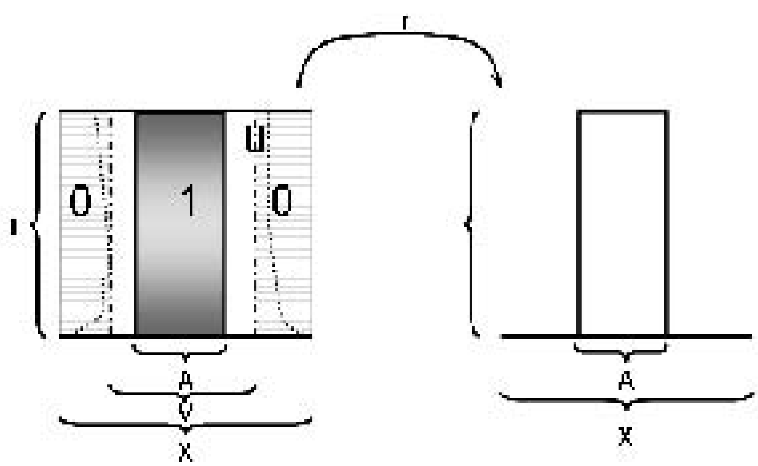


FIGURA 13. *Ilustración utilizada en la demostración del lema 4.14.*

lema 1.56 y la compacidad del intervalo I, uno puede encontrar una vecindad V de A en X tal que $V \times I \subset U$. Por la compacidad del grupo actuante G uno puede suponer que V es invariante (ver proposición 1.39). Enseguida, como A y $X \backslash V$ son subconjuntos cerrados invariantes disjuntos de un G-espacio normal X, por el lema de Urysohn (ver teorema 1.44), existe una aplicación invariante $\lambda : X \to I$ tal que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \in X \backslash V. \end{cases}$$

Definimos una G-aplicación $r : P \to T$ poniendo

$$r(x,t) = j\big(x, \lambda(x)t\big)$$

para cada $x \in X$ y cada $t \in I$. Entonces r es una G-retracción de P sobre T. (Ver la figura 13.) □

Demostración del teorema 4.12.

La parte "sólo si".

Sea X un G-ANR. Sea A un subconjunto cerrado invariante de X el cual es un G-ANR. Por el lema 4.14, el subconjunto cerrado invariante

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$$

del G-espacio $P = X \times I$ es un G-retracto de P. Finalmente, por el lema 4.13, el G-par (X, A) tiene la G-PEHA.

La parte "si".

Supongamos que el G-par (X, A) tiene la G-PEHA. Entonces, por el lema 4.13, T es un G-retacto de P. Como $P = X \times I$ es un G-ANR y por el teorema 2.29, P es un G-ANE, se sigue que T es también un G-ANR, por la proposición 2.6 y por el teorema 2.29. Enseguida, A puede ser identificada, como un G-espacio, con el subespacio cerrado invariante $A \times \{1\}$ de T. Evidentemente, el conjunto

$$V = \{(a,t) \in T | a \in A,\ t > 0\}$$

es una vecindad abierta invariante de A en T. Sea $s : V \to A$ la G-aplicación definida por

$$s(a,t) = (a,1),\ a \in A,\ t \in I.$$

Como s es claramente una G-retracción de V sobre A, inferimos que A es un G-retracto de vecindad de T. Como T es un G-ANR, se sigue de la proposición 2.6 y del teorema 2.29, que A es un G-ANR. Esto completa la demostración. (Ver la figura 14.)

□

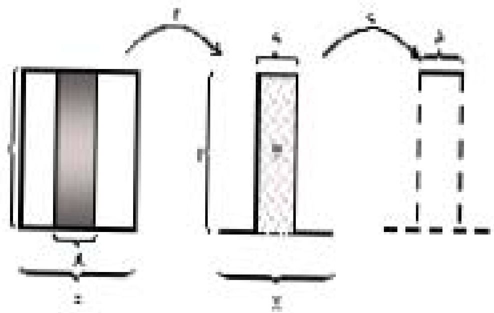


FIGURA 14. *Ilustración utilizada en la demostración de la parte "si"del teorema 4.12.*

Corolario 4.15. *Sea X un G-*ANR*. Entonces un subconjunto cerrado invariante A de X es un G-*ANR *si y sólo si el subconjunto cerrado invariante*

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$$

del G-espacio $P = X \times I$, es un G-retracto de P.

Conclusiones

Reiteramos que hemos obtenido en este capítulo dos nuevas caracterizaciones de los G-ANR's basadas en el concepto de G-homotopía. Tales caracterizaciones representan dos de los ***resultados principales*** *de este trabajo y son dadas por los* ***teoremas 4.7*** *y* ***4.11****. Ambos teoremas se deducen elegantemente a partir de nuestra caracterización local de los G-ANR's, determinada en el capítulo previo por el* ***teorema 3.7****. Es de observar que esta caracterización local está necesariamente restringida a las acciones de grupos compactos de Lie (ver la observación 3.10), por lo que surge la pregunta de si las caracterizaciones homotópicas dadas en los teoremas 4.7 y 4.11 serán a su vez válidas o no para grupos más amplios, particularmente, para grupos compactos no de Lie. Notemos que sólo en la parte de "suficiencia" del teorema 4.7, así como sólo en la implicación (c) $\Rightarrow$ (a) del teorema 4.11 hemos usado la hipótesis que G es un grupo compacto de Lie. En contraste, nuestro* ***último resultado principal*** *dado por el* ***teorema 4.12*** *es válido para acciones de grupos compactos no necesariamente de Lie.*

Bibliografía

1. H. Abels, *Universal Proper G-spaces*, Math. Z. **159** (1978), 143-158.
2. M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Topología Algebraica, Un enfoque homotópico*, McGraw-Hill, México, 1998.
3. S. A. Antonyan, *Retracts in categories of G-spaces*, Izvestiya Akad. Nauk Arm. SSR. Ser. Matem. **15** (1980), 365–378; English transl. in: Soviet J. Contemp. Math. Anal. **15** (1980), 30–43.
4. S. A. Antonyan, *Equivariant generalization of Dugundji's theorem*, Math Notes, **38 No. 3** (1985), 844-849.
5. S. A. Antonyan, *Equivariant embeddings into G-$AR's$*, Glasnik Matematički **22 (42)** (1987), 503–533.
6. S. A. Antonyan, *The existence of a slice for an arbitrary compact transformation groups*, Math. Notes 56 (5-6)(1994) 1101-1105.
7. S. A. Antonyan, *The topology of the Banach-Mazur compactum*, Fund. Math. 166 (2000), No. 3, 209-232.
8. S. A. Antonyan, E. Elfving, and A. Mata-Romero, *Adjunction spaces and unions of G-ANE's*, Topology Proc. **26, No. 1** (2001-2002), 1-28.
9. S. A. Antonyan, *Universal proper G-spaces*, Topology Appl. **117** (2002) 23-43.
10. S. A. Antonyan, *West's problem on equivariant hyperspaces and Banach-Mazur compacta*, Trans. Amer. Math. Soc. 355, No. 8 (2003), 3379-3404.
11. S. A. Antonyan, *Orbit spaces and unions of equivariant absolute neighborhood extensors*, Topology Appl. **146-147** (2005) 289-315.
12. S. A. Antonyan, *Orbit spaces of proper equivariant absolute neighborhood extensors*, Topology Appl. **153** (2005) 698-709.
13. R. F. Arens and J. Eells, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math, **6** (1956), 397-403.
14. K. Borsuk, *Theory of retracts*, Polish Sci. Publ., Warszawa, 1967.
15. G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York-London, 1972.
16. A. Bykov and M. Texis, *Equivariant fibrant spaces*, Glasnik Matematički, Ser. III, **40(60)** (2005), no. 2, 323-331.
17. A. Bykov and M. Texis, *Equivariant strong shape*, Topology and Appl. **154** (2007), no. 10, 2026-2039.
18. T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.
19. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
20. J. Dydak, *Extension dimension for paracompact spaces*, Topol. Appli. **140** (2004), no. 2-3, 227-243.

21. E. Elfving, *The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. Dissertationes **108** (1996).
22. E. Elfving, *The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds II*, Manuscripta Math. **105** (2001), 235-251.
23. R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.
24. A. Feragen, *Equivariant embedding of metrizable G-spaces in linear G-spaces*, Preprint, 2006.
25. O. Hanner, *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, Arkiv Mat., **1** (1951) 389-408.
26. S. T. Hu, *Elements of General Topology*, Holden Day, 1964.
27. S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
28. S. Illman, *Equivariant triangulation theorem for actions of compact Lie groups*, Math. Ann. **262 (4)** (1983), 487-501.
29. S. Illman, *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fifth problem*, in: *Prospects in Topology* (ed. by Frank Quinn), pp. 189-220, Proceedings of a Conference in honor of William Browder, Ann. of Math. Stud. **138** (1995).
30. I. M. James, *General Topology and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1984.
31. I. M. James and G. B. Segal, *On equivariant homotopy theory*, Lect. Notes Math. **788** (1980), 316-330.
32. J. Jaworowski, *Extension of G-maps and Euclidean G-retracts*, Math. Z. **146** (1976), 143-148.
33. J. Jaworowski, *Extension properties of G-maps*, in: Proc. Intern. Conf. Geom. Topology, pp. 209- 213, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa, 1980.
34. R. Lashof, *The equivariant extension theorem*, Proc. AMS, 83, No. 1 (1981), 138-140.
35. M. Kankaanrinta, *On embeddings of proper smooth G-manifolds*, Math. Scand. **74** (1994) 208-214.
36. M. Kankaanrinta, *Proper smooth G-manifolds have G-invariant Riemannian metrics*, Topology Appl. **153** (2005) 610-619.
37. A. Kushkuley and Z. Balanov, *Geometric Methods in Degree Theory for Equivariant maps* , Springer, Berlin-Heidelberg, 1996.
38. M. Madirimov, *On extension of equivariant maps*, Math. Sbornik USSR, V. 75, no. 1 (1975), 84-92.
39. M. Madirimov, *On a theorem of Jaworowski on extension of equivariant maps*, Russian Math. Surv., V. 39, no. 3 (1984), 209-210.
40. J. van Mill, *Infinite-dimensional topology, Prerequisites and Introduction*, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokio, 1989
41. S. de Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Aportaciones Matemáticas, **23** SMM (2005).
42. R. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of the AMS, **36**, Providence, RI, 1960.
43. Yu. M. Smirnov, *Sets of H-fixed points are absolute extensors*, Math. USSR Sbornik **98** (1971), 85-92.
44. Yu. M. Smirnov, *Theory of shape for G-pairs*, Russian Math. Surv. **40** (1985), no. 2, 185-203.

45. J. de Vries, *Topics in the theory of topological transformation gruops, in: Topological Structures II. Math. Centre tracts*, Vol. 116, pp. 291-304. Math. Centrum, Amsterdam, 1979.
46. J. de Vries, *The equicontinuous structure relation and extension of continuous equivariant functions*, Rocky Mountain J. Math., **16**, (1986), No. 4, 837-853.

Índice alfabético