



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL EN EL  
BALANCEO Y VOLTEO DE CUERPOS RÍGIDOS ANTE  
MOVIMIENTOS DE TIPO ARMÓNICO Y SISMOS**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

**MAURICIO ZENTENO CASAS**

TUTOR:

**DR. EDUARDO REINOSO ANGULO**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DRA. SONIA ELDA RUÍZ GÓMEZ  
Secretario: DR. MARIO GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER  
Vocal: DR. EDUARDO REINOSO ANGULO  
1<sup>er</sup>. Suplente: DR. JAIME GARCÍA PÉREZ  
2<sup>do</sup>. Suplente: DR. JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

---

DR. EDUARDO REINOSO ANGULO

*A Dios, por acompañarme en este caminar*

*A Rosa María, por enseñarme que el Espíritu de Lucha nos puede llevar a dónde lo deseemos.*

*A Carlos, por mostrarme el lado humano de la vida y que siempre hay una nueva oportunidad.*

*A Carlos Francisco, por haber crecido junto a mí y por representar el arriesgar todo por un sueño.*

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Eduardo Reinoso Angulo, por su apoyo incondicional y por creer en mí para culminar esta etapa de mi preparación académica.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por darme una experiencia muy enriquecedora y por los conocimientos adquiridos durante estos dos años.

Al Dr. César A. Arredondo, por ser el artífice de este trabajo, por compartir conmigo una invaluable amistad y confianza y, en todo momento, brindarme su apoyo.

A mis sinodales: Dra. Sonia E. Ruiz, Dr. Jaime García Pérez, Dr. Juan José Pérez Gavilán y Dr. Mario Ordaz, por sus valiosos comentarios y por los conocimientos compartidos.

A los hermanos que la vida me ha dado y que nunca han dejado de hacerse sentir cerca: Ernesto y Rocío Bárcenas, Mario Lazcano, Beatriz Carvajal, Celia Lazcano, Ana María Fernández, Anaximandro León, Magalie Bouchet, Victor Cortés, Raúl Palomares, Guillermo Serdio, José Antonio Fernández, Gabriela Sánchez, Paulina Martínez, Mariana Flores, Arturo Chávez, Rafael Andrade, Emmanuel Pastrana, Gabriel Medel y José Luis Guarneros. Gracias por creer en lo que soy.

A mis hermanos en el Instituto de Ingeniería y con quienes compartí muchos momentos importantes: Luciano Fernández, Juliana Mosquera, Iván León, Daniel Bazúa, Giovanni Pinzón, Daniel Aldama, Toni Taveras, Eric Vázquez, Harrison Prada, Joel De La Rosa y Javier Ferretiz. Gracias por todo su apoyo y por sus valiosos comentarios y ayuda. Sin ustedes este trabajo no hubiera sido posible.

A mis amigos que han sabido estar ahí en todo momento: Paulina Torres Arratia y su familia, Anita Fragoso, Marisa Puig, Miguel A. Torres, Marco A. Torres, Miguel A. Jaimes, Areli Estrada, Sheila, Cinthia Osorio, Gerardo Díaz y Edgar García.

A Jessica Rivera que sin su gran ayuda al inicio de este viaje, el camino recorrido habría sido mucho más difícil.

A personas que no sólo puedo considerar como amigos, sino como si fueran parte de la familia como Toñita Cano, Dora Landell, Doraliz Ben Nazar, Mario Raúl Lazcano, Elisa Osorio, Mi Abuela Celia Reyes, Irene Pimentel y John McClure.

A los Profesores que han marcado mi formación: M.en I. Sebastián Serrano, M. en I. Oscar Méndez, Ing. Carlos González, M. en I. Gerardo Corona y Dr. José Luis Rodríguez por su dedicación e invaluable enseñanzas.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM, por brindarme la oportunidad de trabajar y conocer gente sorprendente.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por financiar mis estudios de maestría.

Esta historia comienza cuando una joven, hermosa y luchadora, a la que llamaban "Argentina" conoció a "Pueblo", un hombre con gran sentido del trabajo y la responsabilidad, que supo conquistar su corazón con esa alegría que jamás lo abandonaba, ni siquiera en los peores momentos, y vaya si vivió malos momentos.

Ellos se conocieron muy jóvenes y desde entonces han crecido juntos, enfrentaron miserias, violencia, miedos que hicieron esta unión indestructible. Ambos pagaron por los errores y festejaron la gloria.

Tanto "Argentina" como "Pueblo" señalaban como el día más feliz de su vida cuando nació su hijo, "el Diego", así lo llamaban.

"El Diego" había heredado de su padre la simpleza, las garras, la facilidad para ser feliz en cualquier circunstancia, y la voluntad.

De su madre tenía el espíritu de lucha, la vélelas que enamora, esa que va mas allá de la perfección, la que se ve con el alma "carisma" le dicen, este don que permite que te amen y acepten como sos.

"El Diego" amaba profundamente a su madre y solo quería hacerla feliz, pero como, que podía hacer él para que "Argentina" fuera feliz, era muy chico y su único capital era una humilde pelota que le había regalado "Pueblo", claro que a la pelota solo le faltaba hablar, se entendían a la perfección con "el Diego".

Daba gusto verlos correr por el potrero, parecía que danzaban al ritmo del viento, él la llevaba con sus piernas pero la guiaba con los ojos, no había rival que pudiera cortar esta comunión.

Papá "Pueblo" comenzó a acompañarlo a la cancha, es que era maravilloso ver a su hijo jugar, el rostro se le transformaba, parecía que su vida comenzaba y terminaba en ese momento, lo veía correr buscando la meta, no era un jugador común, cuando él tenía la pelota el tiempo se detenía, ya no importaba el rival, el lugar, ni siquiera el color de la camiseta que vestía, era él y su romance con la pelota.

Un día mientras esperaba que el arbitro diera la orden para comenzar el partido "el Diego" vio el rostro de "pueblo", estaba feliz, eufórico, salta y gritaba a pesar de haber trabajado durante todo el día, apenas había tenido tiempo de tomarse un café con leche antes de correr el colectivo para acompañarlo a la cancha, pero ahí estaba lleno de energía y esperanza.

Entonces "el Diego" se dio cuenta que si "Pueblo" era feliz de esta forma, también lo podía ser "Argentina", y anheló jugar un Día para ella, y que desde su mano conociera la gloria.

Y así fue que un día vestido de celeste y blanco, los colores de su madre, y con su inseparable amiga la pelota, salió al campo de juego, ya no sólo quería divertirse, ahora deseaba hacer feliz, un toque.....una gambeta.....algún caño.....ese pique en los últimos metros.....la zurda que terminaba colocando la pelota contra la red.....después la alegría.....que alegría....y en la tribuna "la Argentina" y "el Pueblo"(así le gustaba llamarlo al Diego) abrazándose.

Desde entonces, cada vez que "el Diego" pisa una cancha, siempre está "el Pueblo" acompañándolo y "la Argentina" feliz.

SOLEDAD S ERCORECA



## ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
I.1. Revisión Bibliográfica	3
I.1.1. Respuesta dinámica de cuerpos rígidos	3
I.1.2. Diversas aplicaciones del análisis dimensional	6
<b>II. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS Y DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA LA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL</b>	<b>8</b>
II.1. Modelado de cuerpos rígidos	8
II.1.1. Cuerpos rígidos de formas arbitrarias	8
II.1.2. Cuerpo rígido rectangular equivalente	9
II.2. Formulación de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos	10
II.2.1. Modos de Respuesta de Balanceo-Volteo	12
II.3. Análisis Dimensional y Teorías de Semejanza	14
II.3.1. Teorema II de Buckingham	15
II.3.2. Normalización de las ecuaciones de conservación	15
II.3.3. Teoría de Modelos y Semejanza	16
<b>III. APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL</b>	<b>18</b>
III.1. Escalamiento de cuerpos rígidos a partir de un prototipo	18
III.2. Escalamiento de señales analíticas	19
III.2.1. Método de la Diferencia central Media	22
III.2.2. Método de Runge Kutta	23
III.3. Superficies de Convergencia	28
III.3.1. Errores y Estabilidad del método de Runge-Kutta optimizando el intervalo de muestreo	29
III.4. Escalamiento de registros acelerométricos	41
<b>IV. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS</b>	<b>48</b>
IV.1. Balanceo y Posible Volteo de cuerpos rígidos ante excitaciones armónicas	51
IV.1.1. Comportamiento de los cuerpos pertenecientes al grupo A	52
IV.1.2. Comportamiento de los cuerpos pertenecientes al grupo B	58
IV.1.3. Comportamiento de los cuerpos pertenecientes al grupo C1	62
IV.1.4. Comportamiento de los cuerpos pertenecientes al grupo C2	66
IV.1.5. Comportamiento de los cuerpos pertenecientes al grupo C3	70
IV.2. Balanceo y Posible Volteo de cuerpos rígidos ante excitaciones sísmicas	75
IV.2.1. Respuesta Dinámica de los cuerpos C1-C11 ante la acción de registros sísmicos	76
IV.2.2. Comparación de las Respuestas Dinámicas de los cuerpos C1-C11	91
IV.2.3. Casos Discrepantes	93
<b>V. COMPARACIÓN DE RESULTADOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES</b>	<b>97</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>101</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>103</b>

## RESUMEN

El diseño sísmico de estructuras concede generalmente poca importancia a los elementos no-estructurales, al punto de que muchos códigos no incluyen normas de diseño al respecto. Dentro de esta clasificación se hallan cuerpos rígidos tales como mobiliario, equipo electro-mecánico, instalaciones, piezas ornamentales o patrimoniales, entre otros.

La experiencia en sismos recientes muestra un buen comportamiento de la estructura diseñada de acuerdo a los modernos criterios sismorresistentes, acompañado desafortunadamente por una deficiente respuesta de los elementos no-estructurales. De hecho, hay evidencias de que: 1) la estructura puede quedar en pie y permanecer inhabilitada por pérdida de operatividad de sus componentes, 2) en muchos casos el daño a los contenidos durante un sismo es del 100% mientras que a la estructura no le pasa nada o 3) la estructura puede dañarse o inclusive caer mientras que los contenidos se recuperan casi al 100%.

Este estudio comprende el análisis de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos rectangulares sometidos a excitaciones de tipo armónico y sismos aplicados en su base. Los especímenes se modelaron mediante la formulación del Rectángulo Equivalente y las excitaciones introducidas comprenden aceleraciones horizontales, despreciando la componente vertical. Así mismo, aplicando el Análisis Dimensional se desarrollaron las ecuaciones para el escalamiento tanto de los especímenes en estudio, como de las señales de entrada de tipo armónico y sismos. Este estudio tiene la finalidad de aplicarse en pruebas experimentales debido a que en muchos casos existen limitantes en los dispositivos para reproducir adecuadamente las condiciones del fenómeno o del cuerpo que esta sujeto a éste.

## ABSTRACT

Seismic structures design spares not much importance to non-structural elements, so the design codes and handbooks don't include these regulations generally. In this classification of bodies it finds furniture, electro-mechanic equipment, installations, museum pieces, ornaments, etc.

Experience in earthquakes occurred recently shows an appropriate structural behavior on buildings designed by seismic resistant criteria, but it has seen a deficient response on non-structural elements. In addition, There are important evidences of: 1) A structure could be straight up, while building be off service by lack of operability in its components, 2) In many cases, damages in contents by earthquake represents 100%, while structural system doesn't present any problem or 3) Structure could have severe damages or fall down and recover its contents almost to 100%.

This study presents the analysis of dynamic response of rectangular rigid bodies under harmonic and seismic excitations applied in its base. Bodies were modeled by Equivalent Rectangular Formulation and there were only considered the horizontal component of the excitations, neglecting the vertical one. In addition, applying Dimensional Analysis, it has been developed equations to scale rigid bodies and harmonic and seismic excitations. This study has the objective to apply Dimensional Analysis into experimental tests, because in some cases the laboratory equipment has limitations to reproduce some phenomena conditions or body behavior considerations.



## INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la Ingeniería Sísmica se han establecido medidas y mecanismos de control para mantener dentro de ciertos límites la resistencia y los daños en las estructuras, de hecho la filosofía de diseño actual hace gran énfasis en ello, sin embargo, se le ha dado poca importancia a todo aquello que está contenido dentro de las edificaciones, a lo cual se le conoce como elementos no estructurales. Dentro de esta clasificación se hallan cuerpos rígidos tales como mobiliario, equipo que permite el correcto funcionamiento del inmueble, instalaciones, piezas ornamentales o patrimoniales, entre otros.

A consecuencia de los eventos sísmicos que han ocurrido en los años recientes, se ha observado que las mayores pérdidas económicas debidas a los daños al inmueble se registran en los contenidos, ya que en muchos casos, estos elementos representan un valor significativamente mayor que el costo total del edificio que los contiene. En adición a lo anterior, no sólo las pérdidas las representan los daños en esos miembros no estructurales, sino que un alto porcentaje de éstas son causadas porque el inmueble detiene su operación.

Además de las pérdidas económicas, es importante pensar en el aspecto social, por lo que muchas vidas podrían ser salvaguardadas ante la ocurrencia de un sismo si los contenidos cumplieran con un comportamiento sísmico óptimo, ya que al ser colocados arbitrariamente se agudizan los daños y, con ello, las víctimas en un evento de esta naturaleza.

Si observamos la composición de los elementos no estructurales y la forma en que son colocados dentro de los inmuebles encontraremos un sinfín de variantes como pueden ser elementos empotrados, apoyados directamente sobre su base, o soportados por patitas simplemente apoyadas, con ruedas y ancladas, etc. Además podemos ver geometrías regulares, irregulares, con distribución de masa uniforme y no uniforme, combinación de materiales y variaciones de peso importantes; todas estas variables hacen que el problema sea un tanto complejo y que se requiera acotar a ciertas condiciones y propiedades que permitan su estudio de una forma adecuada.

La vulnerabilidad de estos elementos impacta directamente en la vulnerabilidad del edificio en su totalidad. Tomando en cuenta que el costo total de una edificación se compone tanto por el costo inicial del mismo, como por el costo generado por daños que sufrirá durante su vida útil, se establece como objetivo central de esta investigación estudiar la respuesta dinámica de cuerpos rígidos sujetos a excitaciones en su base. Dichas acciones son inducidas directamente por el sistema de piso de la estructura en la que se encuentren colocados al momento en que ocurre el movimiento. Sin embargo, este estudio comprende solamente aquellos cuerpos que se comportan con un modo de respuesta en balanceo y posible volteo, omitiendo el deslizamiento que éstos podrían sufrir, así como el impacto de los vértices al chocar con la interfase que los soporta al cambiar de dirección al rotar.

Debido a lo anterior, se ha optado por estudiar cuerpos rectangulares con distribución uniforme de masa a los que se aplica el análisis dimensional para posteriormente generalizar su uso. Cada cuerpo analizado está directamente apoyado sobre su base, la cual interactúa sobre una superficie portante, que llamaremos interfase. Es importante mencionar que existe fricción entre la base del cuerpo y la interfase, no obstante para fines de lograr el modo de respuesta en balanceo se han tomado valores altos de fricción de forma que se evite el deslizamiento del cuerpo.



Es necesario tener claro que los cuerpos estudiados son considerados rígidos debido a que no sufren deformaciones inducidas por las deformaciones estructurales del edificio, es decir que están lo suficientemente desligadas del sistema resistente.

Este estudio comprende la simulación del comportamiento de cuerpos rígidos sometidos a la acción de excitaciones armónicas y sísmicas para luego hacer una comparación con pruebas experimentales que nos indiquen si las consideraciones, hipótesis y formulación matemática logran reproducir adecuadamente su respuesta. Las dos limitantes principales en la formulación empleada (Shenton III, 1990) es que sólo se considera la aceleración horizontal de la excitación, despreciando la componente vertical de las señales y que la metodología de análisis es bidimensional, es decir que sólo toma una de las caras del cuerpo en estudio (altura y ancho) excluyendo la profundidad del espécimen. En las conclusiones de esta investigación se puede ver cómo influye esto al comparar las respuestas analíticas con los ensayos de laboratorio.

La intención de desarrollar una metodología de aplicación del análisis dimensional a esta clase de elementos no estructurales se refiere a que se deben analizar las respuestas de diversos cuerpos, los cuales por su funcionalidad y uso práctico, podrían estar colocados en entresijos superiores de un edificio, justo donde las amplificaciones de las excitaciones del terreno son tales que se hace imposible su reproducción en laboratorio, por lo que toma importancia la manera de escalar este fenómeno y el elemento sometido a él.

En el Capítulo II de este trabajo se muestra la formulación del Modelo Rectangular Equivalente y cada uno de los modos de respuesta del cuerpo rígido al estar sujeto a excitaciones en su base (Shenton III, 1990). En adición a lo anterior se muestra el desarrollo de las ecuaciones que permiten hacer un análisis dimensional de la respuesta dinámica de cuerpos a escala reducida (Arredondo, 2006).

En el Capítulo III se presenta el procedimiento y consideraciones fundamentales para la aplicación del análisis dimensional sobre los cuerpos rígidos en la determinación de modelos a escala reducida y las excitaciones de entrada aplicadas en sus bases (señales sintéticas y registradas). Para el escalamiento de señales se emplearon los métodos numéricos de la Diferencia Central Media y Runge-Kutta de 6<sup>o</sup> orden y se probó su estabilidad. En relación a lo anterior, se hizo un estudio paramétrico para un amplio grupo de cuerpos rígidos, en los que se calculó su respuesta dinámica al estar sujetos ante las excitaciones armónicas (senoidales de amplitud variable y constante y pulsos de tipo Ricker) y sísmicas, para un rango de aceleraciones y frecuencias; con estos resultados se construyeron superficies de convergencia que relacionan a cada excitación en particular con la geometría de los especímenes, estableciendo un intervalo de muestreo óptimo de la señal escalada que permita introducir satisfactoriamente el fenómeno al que estará sometido el modelo.

En el Capítulo IV se muestran las respuestas calculadas para los prototipos y modelos a escala reducida de interés al estar sometidos a la acción de las excitaciones mencionadas. También se presentan algunos casos discrepantes en los que las diferencias en las respuestas de cada cuerpo podrían deberse a una región de inestabilidad del método numérico empleado; en este apartado se observó que cuando se escala el espécimen y su respectiva señal de entrada y se obtienen parámetros de orden numérico muy pequeño (dimensiones del cuerpo e intervalo de muestreo óptimo) se podrían llegar a presentar discrepancias entre la respuesta calculada para el prototipo y su modelo.



En el Capítulo V se hace una comparación entre los resultados analíticos calculados con la metodología mostrada y los obtenidos para una prueba experimental en mesa vibradora. Aquí se observan diferencias significativas entre el método analítico y las pruebas experimentales, mismas que nos llevan a concluir sobre si algunas limitaciones y consideraciones del modelo matemático podrían resultar determinantes.

## I.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

A continuación se presenta un resumen del estado del arte de las investigaciones más relevantes que han sido desarrolladas recientemente sobre el análisis de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos y sobre la aplicación del análisis dimensional en distintas áreas de ingeniería.

### I.1.1. RESPUESTA DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS

En la década de 1960 iniciaron formalmente los estudios relacionados con el comportamiento sísmico de cuerpos rígidos tras la ocurrencia del macrosismo de Chile al observar que estructuras esbeltas aparentemente vulnerables presentaron una respuesta más estable que estructuras de las que no se esperaban los severos daños a los que fueron sujetas.

Housner (1963) realizó un estudio de la respuesta dinámica de cuerpos esbeltos en el que propuso un modelo de péndulo invertido que responde en balanceo al ser sometido a vibración libre y aceleración senoidal. Para el desarrollo de este modelo considera las propiedades geométricas del cuerpo (altura, base, relación de esbeltez y el tamaño del espécimen), un coeficiente de fricción lo suficientemente grande para inducir el balanceo del cuerpo sin que éste se deslice y la energía disipada causada por el impacto del vértice en rotación al momento de chocar con la superficie portante (coeficiente de restitución).

Shenton III (1990) analizó los cuatro modos de respuesta dinámica de cuerpos rígidos sujetos a excitaciones en su base. Retomando el modelo rectangular de Housner, plantea la formulación matemática y los parámetros que definen el comportamiento del espécimen, el cual puede presentar balanceo, deslizamiento, la combinación de ambos o un estado de reposo. Para el caso de cuerpos en balanceo y posible volteo considera solamente la acción de la aceleración horizontal, despreciando el efecto de la aceleración en dirección vertical.

Shao y Tung (1999) estudiaron la respuesta dinámica de cuerpos rígidos no anclados sujetos a excitaciones en su base. Usando métodos analíticos y métodos numéricos establecieron: 1) El criterio de iniciación de los diferentes modos de respuesta dinámica desde el reposo (deslizamiento, balanceo y deslizamiento-balanceo) utilizando 75 registros acelerométricos reales; 2) la desviación estándar de la distancia producto del deslizamiento relativo a la base y; 3) la probabilidad de volteo de un cuerpo durante el modo de balanceo. La modelación matemática del comportamiento de cuerpos rígidos empleada se basa en los estudios realizados por Shenton III (1996).

Andreaus y Casini (1999) con base en la formulación de la respuesta dinámica de cuerpos formados por varias piezas analizaron el comportamiento de una estructura de tres bloques de roca (trilítica) colocadas como un marco. Las excitaciones empleadas fueron un pulso de la mitad de un ciclo senoidal y un movimiento



armónico horizontal, tomando en cuenta los efectos del deslizamiento y el rebote del cuerpo contra la base de soporte. Se dio atención especial a la influencia de la intensidad pico y frecuencia de la excitación, así como a la fricción existente entre el lintel y las columnas, así como a la esbeltez del sistema. Después de analizar los resultados concluyeron que se definen tres modos de respuesta: reposo, vibración estable y colapso.

Aydin y Tung (2001) verificaron estadísticamente la validez de la ecuación del balance energético aplicando un grupo de 200 sismos simulados a un grupo de cuerpos simplemente apoyados sobre campo libre. La ecuación de movimiento que gobierna el balanceo del cuerpo rígido fue resuelta, obteniendo las probabilidades de volteo. Con esto validaron la ecuación propuesta por Housner (1963). Cabe mencionar que esta validación estadística responde a las hipótesis siguientes: 1) La excitación en la base es horizontal y unidireccional; 2) el cuerpo experimenta balanceo solamente y; 3) el coeficiente de restitución permanece constante. Si no se cumple alguna de estas condiciones la ecuación de Housner no puede ser usada o deben tomarse ciertas precauciones en su empleo.

Taniguchi (2001) analizó la respuesta no-lineal de cuerpos rígidos rectangulares simplemente apoyados sobre una superficie de soporte considerando aceleraciones del suelo tanto horizontal como vertical. En las historias de tiempo de las respuestas del cuerpo muestra que son muy sensibles a pequeños cambios en la relación de esbeltez y coeficiente de fricción. Dentro de las tendencias observadas establece lo siguiente: los cuerpos con poca fricción evitan el volteo, permitiendo un deslizamiento significativo; para sismos de periodo largo la tendencia es que el cuerpo vuelque y se deslice ampliamente; En contraste a esto, cuando inicia y termina el rebote y deslizamiento del cuerpo no corresponde necesariamente a la fase intensa del sismo y al actuar las aceleraciones verticales se presentan irregularidades importantes en la respuesta que la hacen un tanto caótica.

Makris y Konstantinidis (2003) llevaron a cabo un estudio comparativo entre la respuesta dinámica de un oscilador de un grado de libertad (péndulo invertido) y la respuesta en balanceo de un cuerpo rígido esbelto con la intención de determinar las similitudes superficiales y las diferencias fundamentales entre ambos modelos. Dentro de sus conclusiones encuentra que un cuerpo rígido sin anclaje no puede ser considerado como un oscilador de un grado de libertad, ya que existen diferencias significativas como las que se enuncian a continuación: el mecanismo de restitución del oscilador está definido por la elasticidad de la estructura, mientras que el cuerpo rígido se restituye mediante la fuerza de gravedad. Otra diferencia se refiere a la rigidez del espécimen, donde para el oscilador se trata de un valor finito, en cambio para el cuerpo rígido se considera como infinita. Otro parámetro determinante es el amortiguamiento, ya que para el oscilador se toma un amortiguamiento de tipo viscoso dependiente de la masa y frecuencia natural del sistema, mientras que para el cuerpo rígido se toma un valor dependiente de la relación de esbeltez. Al final de este estudio se concluye que el oscilador de un grado de libertad y el cuerpo rígido en balanceo (modelo rectangular) son dos sistemas dinámicamente distintos y que la respuesta mostrada por uno de ellos no puede ser inferida como respuesta del otro.

Makris y Black (2002) analizaron la influencia del rebote y volteo en la respuesta dinámica de equipo eléctrico (transformadores) anclado a la cimentación. Este estudio considera los estados límite de servicio y de colapso, propios de la filosofía de análisis estructural vigente, es decir, cuando el equipo forma un sistema global con la cimentación y cuando sufre daño y se separa de ésta. Los sismos utilizados en esta investigación son los registrados en las estaciones de Rinaldi y Takatori para el



estado de servicio; para el estado límite de colapso se empleó el registro de Cape Mendocino. Finalmente se concluyó que los esfuerzos considerados para los elementos de anclaje a la cimentación son suficientes para mantener el sistema unido durante el balanceo de la estructura. Para sistemas con una mayor esbeltez se requerirán anclajes más resistentes para evitar la fractura.

Prieto, Lourenço y Oliveira (2003) revisaron la formulación de la teoría clásica del balanceo de cuerpos rígidos. Plantearon como posible mecanismo de impacto en el modelo tradicional una delta de Dirac. Sostienen que la naturaleza discontinua de las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno y la inclusión del coeficiente de restitución complica la generalización de la formulación. Sin embargo, la delta de Dirac propuesta resultó correcta tanto al aplicar la teoría clásica, como pruebas experimentales, para cuerpos esbeltos y que presentan desplazamientos pequeños.

Arredondo (2005) estudió numéricamente la respuesta dinámica de cuerpos rígidos al estar sometidos a excitaciones analíticas moduladas en frecuencia y amplitud. Los contenidos empleados presentan geometrías arbitrarias, variaciones en la distribución de masa debida a huecos, pero manteniendo simetría respecto a la vertical tanto en masa como en forma.

Boroschek y Iruretagoyena (2005) presentaron un análisis comparativo entre dos métodos para calcular el volteo de cuerpos rígidos de forma controlada, es decir, prediciendo para cuál lado volcará al estar sujeto a un movimiento en su base dado. El primer método consiste en la solución de la ecuación de balanceo específicamente, mientras que el segundo consiste en la solución de la ecuación general del comportamiento dinámico de un cuerpo rígido. Las excitaciones empleadas corresponden a 314 registros sísmicos dando un total de 7500 casos analizados. En todos los casos consideraron impacto plástico y un coeficiente de restitución igual a cero. En el análisis de los resultados obtenidos concluyeron que para cuerpos de dimensiones grandes es más fácil controlar el volteo, ya que se necesitaron menores ángulos de inclinación del plano de soporte para controlar su respuesta.

Tung (2005) analizó las condiciones necesarias que permiten que un cuerpo rígido inicie su comportamiento dinámico al experimentar movimientos en su base. En dicha investigación establece la importancia en la variación tanto del coeficiente de fricción  $\mu$ , debido a la interacción de la superficie de contacto del cuerpo y la interfaz del plano horizontal que lo contiene, como de la aceleración  $A$  pico en la base. Realizó un estudio detallado de la probabilidad de ocurrencia de los modos de respuesta (reposo, deslizamiento, balanceo y deslizamiento-balanceo) en función de la relación de esbeltez de los cuerpos rígidos. Entre sus conclusiones enfatiza la importancia de no despreciar la aleatoriedad de los parámetros  $\mu$  y  $A$  debido principalmente a que la desviación estándar es grande para las diferentes distribuciones probabilísticas empleadas.

Arredondo, Reinoso y Miranda (2005) modelan y evalúan la respuesta dinámica de cuerpos rígidos ubicados en distintos entresijos de edificios localizados tanto en el valle de México, como en Acapulco. Las excitaciones a las que fueron sometidas las estructuras corresponden a eventos provenientes de fuentes cercanas y lejanas y corresponden a sismos de subducción y falla normal. Con este modelo estimaron escenarios de riesgo que llevara al volteo a los contenidos en función de la amplificación del movimiento de entrada en cada entresijo. Se consideró un coeficiente de fricción suficientemente alto para evitar el deslizamiento del cuerpo



rígido. Los contenidos fueron modelados como cuerpos rectangulares simplemente apoyados sobre un plano horizontal.

Konstantinidis y Makris (2005) desarrollaron una investigación numérica de la respuesta sísmica de columnas clásicas formadas por varios bloques de roca con la intención de conocer las máximas intensidades que podrían resistir con un buen comportamiento dinámico y tomar una decisión de si sería conveniente reforzarlas mediante cinturones metálicos. Se emplearon sismos con magnitudes de entre 6.0 y 7.4 grados en la escala Richter registrados en diversas partes del mundo. Se modelaron como casos más desfavorables las respuestas en deslizamiento puro y balanceo puro, ya que para estos modos podría presentarse el colapso de la estructura. La conclusión más importante de este estudio es que el deslizamiento relativo entre bloques de roca cuando las aceleraciones pico se presentan resulta menor que el coeficiente de fricción generado por las interfases.

Arredondo (2006) presenta un modelo rectangular modificado el cual se implementa en el estudio de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos con forma arbitraria, ya que para un espécimen con geometría irregular define un modelo rectangular equivalente para cada instante de tiempo en función de la variación de las condiciones iniciales de cada ciclo de vibración. Este modelo mantiene la simplificación de no tomar en cuenta la disipación de energía provocada por el impacto del vértice en rotación al chocar con la superficie portante y sólo considera la acción de la aceleración horizontal, omitiendo la aceleración en dirección vertical.

Arredondo, Reinoso y Zenteno (2006) estimaron la respuesta dinámica de cuerpos con formas arbitrarias, con o sin ejes de simetría y distribución de masa no uniforme sujetos a movimientos sísmicos registrados y simulados. En este estudio modelan analíticamente los modos de respuesta (reposo, deslizamiento, balanceo y deslizamiento-balanceo) más probables y determinan curvas de volteo para cada excitación. Finalmente calculan la respuesta dinámica de cada cuerpo localizado en diferentes entrepisos de un edificio en particular para conocer la influencia que la amplificación en el movimiento de entrada tiene sobre el modo de respuesta de los contenidos.

Arredondo y Reinoso (2006) presentaron un estudio sobre la influencia del contenido de frecuencias, las intensidades pico, las velocidades pico y la duración del evento en el balanceo de cuerpos rígidos. Para ello, utilizaron una familia de cuerpos regulares, simétricos en distribución de masa y geometría y con un coeficiente de fricción alto. La aportación de este trabajo esta basada en la ecuación propuesta para predecir el volteo del cuerpo en términos de los parámetros estudiados. Esta expresión tiene la virtud de no requerir un proceso iterativo, lo que puede proveer una estimación directa de las especificaciones y establecer los requisitos mínimos de seguridad para estos elementos no estructurales. La limitante de esta ecuación es que en ella se considera la aceleración vertical igual a cero, lo que podría influir drásticamente en la respuesta del contenido.

### **I.1.2. DIVERSAS APLICACIONES DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL**

Nigam y Bhaskar (1990) desarrollaron el modelo cualitativo de una planta nuclear usando un reactor presurizado por agua. Aplicaron el análisis dimensional enfocado fundamentalmente al control térmico de la planta determinando los efectos de la pérdida de agua con la ayuda del modelo y planteando soluciones viables.



Messina, Paoletti, Santangelo y Tucciarone (1996) aplicaron el Teorema II de Buckingham con la finalidad de definir la dispersión de un electrón en sistemas sólidos multicompuestos. Simularon con el modelo de Monte Carlo el esparcimiento y trayectoria de estos electrones a través del sistema. En este estudio se probó que el método resulta eficiente para un rango de energía de entre 5 y 150 KeV y para espesores del material sobre el que se propaga de entre 0.002 y 8 $\mu$ m.

Méndez y Eagar (2001) aplicaron el análisis dimensional durante el proceso de modelado de materiales en combinación con algunas consideraciones asintóticas. Esto es especialmente empleado en el desarrollo de modelos numéricos o físicos. Esta técnica demostró ser de gran utilidad en el estudio de soldaduras, donde se tienen geometrías relativamente simples, pero en las que el análisis se vuelve complejo debido principalmente a la interacción de diversas fuerzas y a la fusión de varios elementos. Con esto se han desarrollado mapas de distribución del material de fusión en áreas cercanas al cátodo, trayendo consigo beneficios a la industria aeronáutica.

Kowalski, Bahnfleth y Rosenberg (2003) desarrollaron mediante la aplicación del análisis dimensional, un sistema de desinfección del aire a base de irradiación ultravioleta germicida. Este sistema trabaja fundamentalmente con la reflexión de los rayos UV y los principales parámetros que rigen su diseño son las dimensiones y relación de aspecto del ducto, las propiedades físicas de la lámpara emisora, su capacidad de reflexión, la dosis de luz aplicada y el flujo de aire existente en la caja purificadora. Para determinar la capacidad del sistema se realiza una simulación asistida por computadora en la que se administran diferentes dosis de rayos UV hasta determinar la cantidad óptima.

Rangarajan y Sant (2003) emplearon el análisis dimensional fractal para investigar los cambios climáticos en India. Analizaron las historias de tiempo de los tres parámetros climáticos principales: temperatura, presión y precipitación. Los periodos de estudio comprendieron mes por mes y estación por estación, durante los que se determinó la variabilidad tanto para estaciones locales, como para toda la región en estudio. En sus conclusiones mencionan que el modelo con el que analizaron los cambios a nivel regional no podría predecir de forma confiable el clima a nivel local.

Demir, Yürdem y Degirmencioglu (2004) desarrollaron un modelo matemático para la predicción de las pérdidas de fricción en un sistema de irrigación lateral a base de emisores cilíndricos alineados. Consideraron la colocación de estos emisores espaciados desde 0.2 hasta 1m y aplicando el Teorema II de Buckingham determinaron los factores determinantes en la pérdida de fricción.

Makris y Psychogios (2006) desarrollaron una nueva forma de estimar la respuesta inelástica en estructuras con comportamiento dominado por el primer modo, el cual puede aproximarse mediante una idealización elasto-plástica. Este método depende principalmente del intervalo de muestreo y de la longitud de la escala que caracterizan la cantidad de energía introducida por la excitación del suelo.



## CAPÍTULO II

### II. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS Y DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA LA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL

#### II.1. MODELADO DE CUERPOS RÍGIDOS

Los cuerpos contenidos dentro de las edificaciones están sujetos a las acciones propias de la estructura por lo que están propensos a sufrir daños al responder dinámicamente antes estos eventos. Algunos de estos contenidos son considerados como cuerpos rígidos sin restricción en su base, es decir, que se encuentran simplemente apoyados sobre el suelo, losa de entrepiso o sobre alguna superficie fija (repisa, mesa, etc.). Por esta razón, el cuerpo rígido se asume como indeformable, sin embargo, puede sufrir severos daños al estar sujeto a modos de respuesta de balanceo-volteo, deslizamiento o a la combinación de éstos. Cabe aclarar que existen cuerpos rígidos anclados en su base que permanecen indeformables debido a que el daño se concentra en los elementos de anclaje.

Por otro lado, sabemos que los inmuebles contienen mobiliario, equipos de alta tecnología que permiten su operación eficiente, piezas de arte de gran valor y, en general, elementos que deben resguardarse para diversos fines acorde al uso de la edificación. Estos contenidos cuentan con geometrías irregulares, a lo que hemos denominado formas arbitrarias y con variaciones en la distribución del peso debido a que pueden estar hechas de diferentes materiales o presentar algunos vacíos, a lo que hemos llamado distribución de masa no uniforme.

##### II.1.1. Cuerpos Rígidos de Formas Arbitrarias

Como se mencionó en el apartado anterior, consideraremos como cuerpo rígido de forma arbitraria prácticamente a cualquier objeto móvil y que esté simplemente apoyado sobre alguna superficie dentro de una edificación. Adicionalmente, podemos observar que en casi todos los objetos, llámese equipo médico, piezas de arte, muebles de oficina, entre otros, se aprecian cambios de material, algunos vacíos o variación en la densidad de materiales a pesar de ser similares, lo cual nos da una distribución de masa no uniforme. En la figura 2.1 se presentan algunos casos que ejemplifican esto.



*Figura.2.1. Cuerpos Colocados en diversas Edificaciones*



## II.1.2. Cuerpo Rígido Rectangular Equivalente

Para analizar la respuesta dinámica de un cuerpo rígido frecuentemente se ha asumido el modelo bidimensional de cuerpo rectangular propuesto por Shenton III (1990), el cual considera un cuerpo simétrico con masa  $m$  y momento de inercia  $I$ . La distancia medida desde cualquiera de los vértices en contacto con la superficie de soporte hasta el centro de masa se denomina  $R$ , mientras que al ángulo que forma esta distancia con la vertical (en estado de reposo) se le llama  $\alpha$ . Además se toma en cuenta el efecto de la fricción generada por la interacción entre la base del cuerpo rígido y la superficie de soporte que, por física general, sabemos que resulta en una fuerza ( $f_x$ ) que es función directa de la reacción normal ( $f_y$ ) y de la velocidad relativa de estos puntos en contacto. Por tanto se tienen dos coeficientes de fricción, el estático  $\mu_s$  y el dinámico  $\mu_k$ . Para fines prácticos, de acuerdo con algunos estudios (Shenton III, 1990) se ha utilizado el mismo valor para los coeficientes de fricción estático o dinámico. En la figura 2.2 se esquematizan las propiedades geométricas del cuerpo rectangular propuesto por Shenton III.

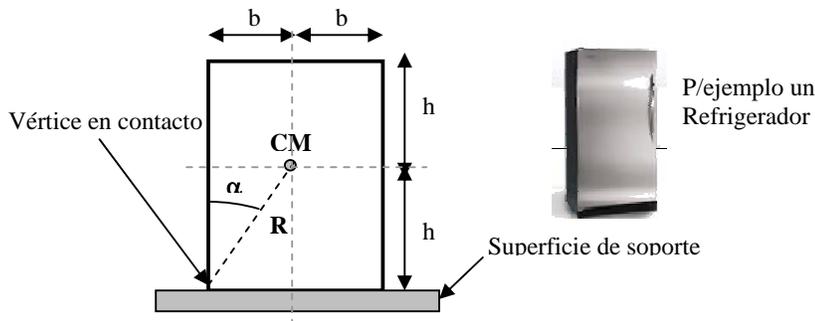


Figura.2.2. Modelo Rectangular de Shenton III

Este modelo ha sido empleado para conocer la respuesta dinámica de contenidos con geometría regular y simétrica como equipos electrónicos, electrodomésticos, entre otros tantos. Sin embargo, no se ha utilizado para cuerpos de formas arbitrarias ni con variación en la distribución de sus masas. Para este fin Arredondo (2006) propone el Modelo Rectangular Equivalente, basado en el modelo de Shenton III, pero adaptado a cuerpos irregulares en forma y masa. Este modelo consiste en la idealización de un cuerpo cualquiera de la siguiente manera (figura 2.3).

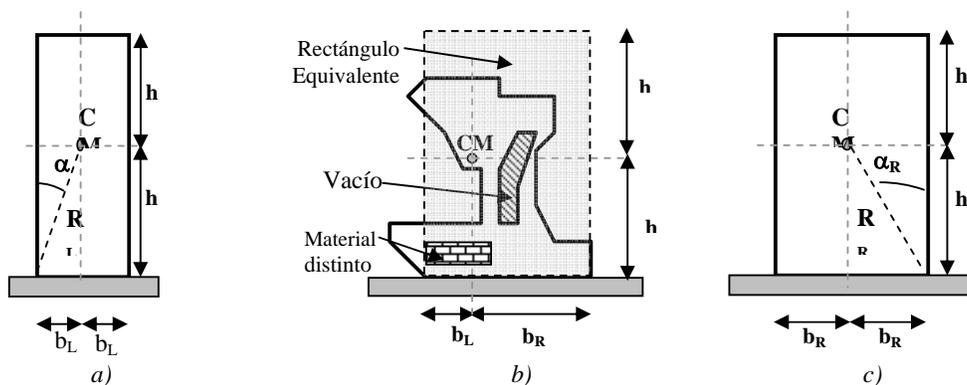


Figura.2.3. Modelo del Rectángulo Equivalente (Arredondo 2006)

Como se observa en la figura 2.3b el cuerpo de forma arbitraria cuenta con un centro de masa ubicado a una altura  $h$  y a una distancia  $b_L$  del vértice izquierdo que se encuentra en contacto con la superficie de soporte y a una distancia  $b_R$  del vértice



derecho; estas distancias ( $b_L$  y  $b_R$ ) son denominadas semibases y definen la distancia  $R$  del rectángulo de acuerdo al lado que se esté considerando, por lo que el ángulo  $\alpha$  también será diferente en cada dirección de giro.

La respuesta dinámica del cuerpo se calcula durante cada instante de tiempo, generando un modelo rectangular equivalente de acuerdo a la dirección del giro durante el balanceo del espécimen (Arredondo, 2006, figura 2.4).

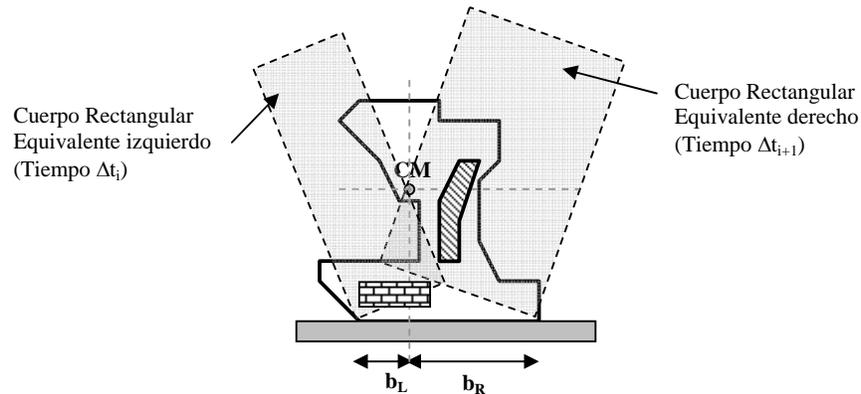


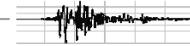
Figura.2.4. Modelo del Rectángulo Equivalente

## II.2. FORMULACIÓN DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS

Los contenidos al estar sujetos a diferentes excitaciones reaccionan dinámicamente mostrando un comportamiento de acuerdo a los diferentes modos de respuesta para un cuerpo rígido, los cuales están definidos como deslizamiento, balanceo-volteo, balanceo-deslizamiento y rebote.

La excitación de la superficie portante del cuerpo rígido es descrita mediante la historia de aceleraciones tanto en dirección horizontal  $x_g''(t)$  como vertical  $y_g''(t)$  y que son medidas a partir de fuerzas de inercia fijas como referencia. Al actuar estas aceleraciones directamente sobre la masa del contenido éste se desplaza horizontal  $x(t)$  y verticalmente  $y(t)$  respecto a la superficie que lo contiene. Las rotaciones angulares son conocidas como  $\theta(t)$ , mientras que los desplazamientos registrados en los vértices que están en contacto con la superficie de soporte son denotados como  $x_o(t)$  y  $y_o(t)$  para el vértice izquierdo y  $x_o'(t)$  y  $y_o'(t)$  para el vértice derecho.

Los modos de respuesta dinámica de los cuerpos rígidos son dependientes de los parámetros dinámicos del propio contenido (masa), de las propiedades de la excitación actuante (frecuencia, amplitud e intervalo de muestreo) y de la interacción existente entre la base del cuerpo rígido y la superficie portante (fricción). Respecto al coeficiente de fricción  $\mu$ , cada modo de respuesta presenta condiciones particulares (Shenton III, 1990), por ejemplo



- **Deslizamiento puro.**- La excitación provoca una reacción normal  $f_y > 0$ , la velocidad del centro de masa es  $x'(t)$  y la rotación  $\theta(t) = 0$  (figura 2.5).

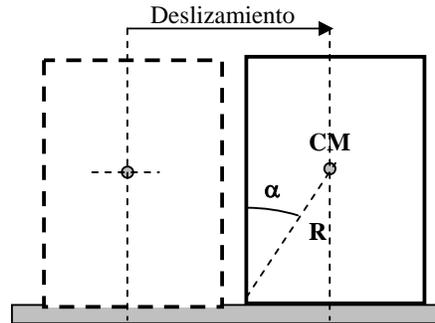


Figura.2.5. Deslizamiento puro de un cuerpo rígido

- **Balaceo puro.**- En este caso el cuerpo rota respecto a uno de sus vértices, para lo cual se requiere un valor de fricción suficiente para evitar que el cuerpo deslice  $f_x \leq \mu_s f_y$  y una reacción normal  $f_y > 0$  (figura 2.6).

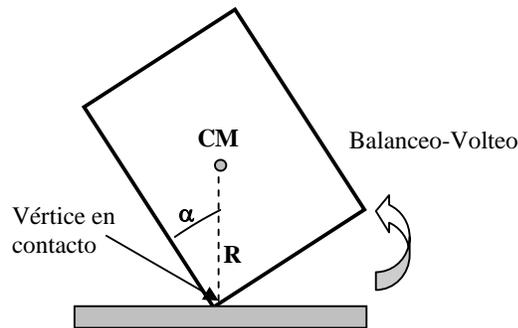


Figura.2.6. Balanceo-volteo puro de un cuerpo rígido

- **Deslizamiento-Balaceo.**- Aquí el espécimen rota respecto a uno de sus vértices (como en el caso anterior) y simultáneamente experimenta un deslizamiento relativo a la superficie portante. La reacción normal es  $f_y > 0$  y la velocidad con que se mueve el vértice en contacto es  $x_o'(t)$  (figura 2.7).

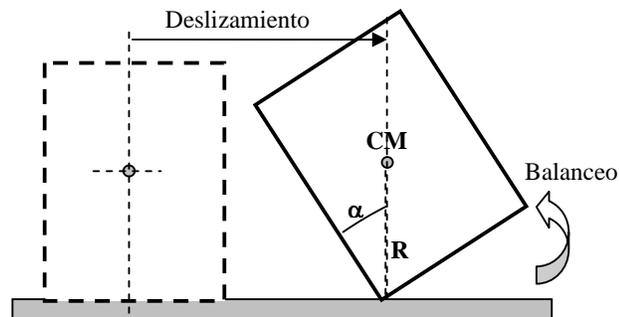


Figura.2.7. Deslizamiento-Balaceo de un cuerpo rígido



- **Rebote.**- Este modo de respuesta inicia cuando el cuerpo se separa de la superficie de soporte, mientras que la reacción normal es  $f_y=0$  (figura 2.8).

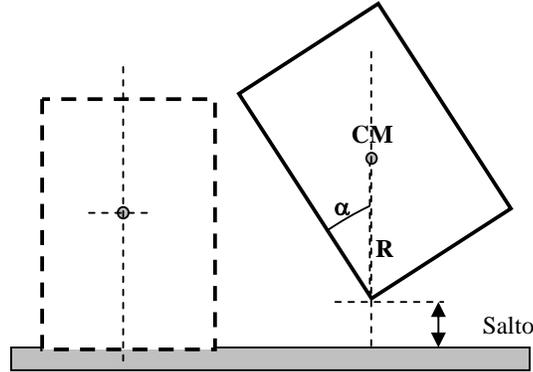


Figura.2.8. Rebote de un cuerpo rígido

Para el desarrollo de este trabajo sólo se ha considerado el modo de Balanceo considerando la aceleración horizontal de la excitación, asumiendo que la aceleración vertical  $y_g''(t)$  es igual a cero, por lo cual sólo profundizaremos en la explicación del modelo matemático que describe este comportamiento.

### II.2.1. Modos de Respuesta de Balanceo y posible Volteo

Como se observa en la figura 2.6, el balanceo de un cuerpo rígido inicia cuando la fuerza normal resultante  $f_y$  bajo el vértice en contacto con la superficie portante cumple la condición descrita por la Ec. 2.3 que se obtiene tomando momentos respecto al mismo (Ec. 2.1) y que puede simplificarse como se muestra en la Ec. 2.2.

$$|mx_g''RCos\alpha| > mRSen\alpha(y_g'' + g) \quad (2.1)$$

$$|x_g''| > Tan\alpha(y_g'' + g) \quad (2.2)$$

Cuando la aceleración vertical se desprecia ( $y_g'' = 0$ ), la Ec. 2.2 queda de la siguiente manera

$$|x_g''| > gTan\alpha \quad (2.3)$$

Para el Modelo de Rectángulo Equivalente (Arredondo, 2006) donde el cuerpo rectangular tiene una base de  $2b$  y altura  $2h$  (figura 2.2) se tiene lo siguiente

$$I = \frac{1}{3}mR^2 \quad (2.4)$$

$$R = \sqrt{h^2 + b^2} \quad (2.5)$$

$$Tan\alpha = \frac{b}{h} \quad (2.6)$$

Por lo que podemos reducir la Ec. 2.3 a la siguiente expresión



$$|x_g''| > g \frac{b}{h} \quad (2.7)$$

Una vez que el modo de balanceo ha iniciado, la ecuación de movimiento que rige este comportamiento se obtiene por medio de la suma de momentos respecto al vértice en contacto con la superficie portante

$$(I + mR^2)\theta'' = mRCos(\alpha - |\theta|)x_g'' - S(\theta)mRSen(\alpha - |\theta|)(y_g'' + g) \quad (2.8)$$

donde  $S(\theta)$  denota la función signo definida de la siguiente forma

$$S(\theta) = \begin{cases} 1; & \theta > 0; \text{ Rotación del vértice izquierdo} \\ -1; & \theta < 0; \text{ Rotación del vértice derecho} \end{cases}$$

Como se observa la Ec. 2.8 es no-lineal y cuenta con soluciones cerradas, sin embargo, puede ser linealizada, para cuerpos rígidos esbeltos  $(\frac{h}{b}) \geq 3$  y considerando ángulos de rotación pequeños. Por ejemplo, si  $(\alpha - |\theta|)$  es pequeño, se asumen las siguientes aproximaciones

$$Sen(\alpha - |\theta|) \approx (\alpha - |\theta|) \quad (2.9)$$

$$Cos(\alpha - |\theta|) \approx 1 \quad (2.10)$$

y sustituyendo en la Ec. 2.8 se tiene

$$(I + mR^2)\theta'' = mRx_g'' - S(\theta)mR(\alpha - |\theta|)(y_g'' + g) \quad (2.11)$$

lo cual nos da una ecuación lineal para  $S(\theta) = \pm 1$ . Esta ecuación es válida solamente si  $\theta \neq 0$ . Para el caso donde  $\theta = 0$ , nos indica que ocurre el impacto entre el cuerpo y la superficie de soporte. El comportamiento del cuerpo después del impacto puede mantenerse en balanceo, experimentar el volteo o posiblemente cambiar de modo de respuesta, lo que dependerá de las condiciones asumidas en la concepción matemática del fenómeno.

En trabajos previos enfocados al balanceo de esta clase de cuerpos (Housner, 1963) se asumen dos ideas importantes: primero que el único punto de contacto justo al momento del impacto corresponde al vértice (para un cuerpo que tiene patas o base cóncava) y que el impacto es perfectamente plástico considerando que no hay rebote. Estas hipótesis garantizan que el cuerpo continuará balanceándose tras el impacto, lo cual resulta en una reducción de la velocidad angular dada por la Ec. 2.11a

$$\theta^+ = \delta\theta^- \quad (2.11a)$$

donde  $\delta$  es conocida como coeficiente de restitución o factor de reducción de la velocidad angular.  $\theta^-$  representa la velocidad angular antes del impacto, mientras que  $\theta^+$  representa la velocidad angular después del impacto. La magnitud del coeficiente  $\delta$  es derivada a partir de la conservación del momento de balanceo o por una reducción prescrita en la energía cinética durante el impacto, tal y como lo



propone Housner (1963) expresando la conservación del momento angular antes y después del impacto

$$\delta = 1 - \frac{3}{2} \text{Sen}\alpha^2 \quad (2.12)$$

### II.3. ANÁLISIS DIMENSIONAL Y TEORÍAS DE SEMEJANZA

El análisis dimensional es un método que permite desarrollar pruebas experimentales de especímenes a escala reducida sometidos a fenómenos específicos. Para nuestro caso, aplicamos los conceptos descritos por esta metodología con la intención de establecer y desarrollar las relaciones adimensionales que nos permitieran reproducir adecuadamente las condiciones bajo las que se encuentran los cuerpos rígidos (con diversas características geométricas y de distribución de masas) resguardados en el interior de edificaciones o colocados en campo libre.

La importancia de la aplicación del análisis dimensional está dada por la dificultad de representar el comportamiento dinámico de estos cuerpos mediante ecuaciones que tengan implícitamente tanto las propiedades del objeto en estudio, como las características del fenómeno inducido, en este caso excitaciones en la base del espécimen.

Para aplicar consistentemente esta metodología de análisis y escalar adecuadamente el objeto en estudio y el fenómeno actuante es necesario tomar en cuenta los siguientes aspectos

- Homogeneidad dimensional
- Teorema II de BUCKINGHAM
- Normalización de las ecuaciones de conservación
- Teoría de Modelos

Antes de entrar en detalle en los aspectos enunciados arriba, debemos definir dos conceptos entorno a los cuales gira la aplicación de esta metodología:

- PROTOTIPO.- Se refiere al cuerpo rígido real, el cual cuenta con una relación de esbeltez y respecto al que se escalará el espécimen.
- MODELO.- Es propiamente el cuerpo rígido a escala reducida, es decir, el espécimen que será resultado de la aplicación del análisis dimensional.

Al escalar geoméricamente el prototipo y obtener un modelo, también se debe escalar la excitación actuante sobre el espécimen, manteniendo así las condiciones de entrada bajo las que estará sujeto dicho modelo. En otras palabras, esto significa que si se pueden determinar las escalas cinemáticas y dinámicas de la excitación, los resultados adimensionales registrados serán válidos tanto para el modelo, como para el prototipo.

Un punto a revisar dentro de la aplicabilidad de esta metodología es la Homogeneidad Dimensional, esto no es otra cosa que la correspondencia entre los términos en los que se relacionan al prototipo y al modelo, lo que nos debe dar ecuaciones adimensionales.



### II.3.1. Teorema II de BUCKINGHAM

El teorema II de BUCKINGHAM describe cualquier fenómeno físico en el que se cuente con  $n$  variables definidas por  $m$  dimensiones distintas, las cuales pueden ser agrupadas en  $n-m$  grupos adimensionales independientes.

Como se mencionó, las variables que definen un fenómeno físico  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  se relacionan entre sí a partir de una función  $f(V_1, V_2, \dots, V_n) = 0$ . Análogamente, los grupos adimensionales  $(G_1, G_2, \dots, G_{n-m})$ , empleando el Teorema II de BUCKINGHAM, están relacionados por mediante la función  $g(G_1, G_2, \dots, G_{n-m}) = 0$ .

La metodología que permite determinar los grupos adimensionales  $(G_i, i = 1, \dots, n-m)$ , también llamados parámetros adimensionales, se basa en seleccionar  $m$  de las  $n$  variables, dimensionalmente distintas, de modo que entre todas expresen las  $m$  dimensiones y participen como variables repetitivas, formando cada uno de los  $n-m$  grupos adimensionales del productorio II:

$$G_i = V_i * \prod_{j=m-n+1}^{j=n} V_j^{a_{ij}} \quad i = 1, \dots, n-m \quad (2.13)$$

donde los exponentes  $a_{ij}$  se determinan por la condición de que cada grupo resulte adimensional, luego se sustituyen las dimensiones de las variables por ellas mismas y se igualan a cero, haciendo adimensional cada parámetro.

Para nuestro caso, el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos y sus modos de respuesta (reposo, deslizamiento, balanceo y deslizamiento-balanceo), influyen siete variables principalmente  $(R, g, \alpha, \Theta, \omega, \mu, x_g)$  expresadas en dos dimensiones (Longitud y Tiempo). Basado en ello, se plantean los tres parámetros adimensionales como sigue

$$\pi_1 = \omega \sqrt{\frac{R}{g}}; \quad (2.14)$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{\theta}; \quad (2.15)$$

$$\pi_3 = \frac{x_g}{g} \quad (2.16)$$

### II.3.2. Normalización de las Ecuaciones de Conservación

Para obtener los parámetros adimensionales que controlan el fenómeno se puede emplear la normalización, lo cual consiste en rescribir las ecuaciones diferenciales de conservación, de modo que aparezcan variables adimensionales con magnitudes cercanas a la unidad. Esto se logra al normalizar todas las variables por un valor característico.

A través de la normalización se hace posible la comparación de la respuesta dinámica de los modelos para diferentes factores de escala respecto al prototipo, por lo que así se puede determinar la efectividad del uso del análisis dimensional.



### II.3.3. Teoría de Modelos y Semejanza

Las pruebas experimentales que se llevan a cabo en laboratorio buscan establecer las condiciones bajo las que trabaja un espécimen determinado lo más fielmente posible para estudiar su respuesta ante el fenómeno de interés. Sin embargo, no siempre se pueden realizar dichos ensayos debido a que el espécimen resulte de dimensiones inmanejables dentro de un laboratorio o a que quizá el equipo que aplique las acciones propias del experimento no tenga la capacidad suficiente para alcanzar las magnitudes requeridas por la prueba. Para ello, el análisis dimensional permite desarrollar modelos a escala reducida que estén sujetos a las condiciones bajo las que estaría el prototipo en condiciones normales.

A los criterios que hacen posible esta analogía entre el modelo y el prototipo se les denominan Criterios de Semejanza. La condición de semejanza que debe cumplirse va íntimamente ligada a las relaciones adimensionales descritas al principio de este capítulo, ya que los valores para los parámetros adimensionales de las leyes que rigen el fenómeno en estudio para el prototipo deberán ser iguales que para el modelo a escala reducida a probar en laboratorio.

Para cumplir cabalmente con lo anterior se debe asegurar con los criterios siguientes:

- i. Semejanza Geométrica.- El modelo está escalado respecto al prototipo manteniendo la misma relación de esbeltez.
- ii. Semejanza Cinemática.- Tanto el modelo como el prototipo cumplen con similitud en dimensiones (longitud) y duración del fenómeno dinámico (tiempo).
- iii. Semejanza Dinámica.- Además de mantener una semejanza dimensional y respecto al tiempo, son similares en las propiedades del material que los compone.

Tomando en cuenta lo mencionado hasta aquí y sabiendo que el modelo es una reducción del prototipo por un factor de escala  $n$ , donde:

$$L_p = nL_m \quad (2.17)$$

Se establece que la duración de la excitación inducida sobre la base del modelo deberá reducirse por un factor de  $n^{0.5}$ , manteniendo constantes sus intensidades.

Lo anterior está basado tanto en el Teorema II de BUCKINGHAM y la teoría de modelos como en estudios desarrollados por otros investigadores (Isaacson e Isaacson, 1975; Hernández, 1981; Sedov, 1993; Vázquez, 2005) donde se plantean relaciones y procedimientos para el cálculo de productos adimensionales en diversas aplicaciones.

De acuerdo a lo anterior se definen las siguientes relaciones adimensionales:

$$\frac{\omega_m}{\omega_p} = \sqrt{\frac{R_p}{R_m}} = \sqrt{n} \quad (2.18)$$



$$\frac{\alpha_m}{\theta_m} = \frac{\alpha_p}{\theta_p} \quad (2.19)$$

$$\frac{x_{gm}''}{g} = \frac{x_{gp}''}{g} \quad (2.20)$$

Adicionalmente, al igualar el material del que están hechos el modelo y el prototipo, se debe considerar que los esfuerzos y las densidades son idénticos. Debido a esto, la relación de masa, tanto en función al cambio de volumen del modelo respecto al prototipo, como a la inercia requerida para lograr el comportamiento esperado, se establece como sigue

$$\frac{M_m}{M_p} = \frac{1}{n^3} \quad (2.21)$$

$$\frac{M_m}{M_p} = \frac{1}{n^2} \quad (2.22)$$

En esta investigación se está estudiando la respuesta dinámica de cuerpos rígidos al estar sujetos a excitaciones en su base, la cual está en contacto con el suelo que induce dicha acción. Las excitaciones empleadas en este estudio son de dos tipos: analíticas y movimientos registrados.



## CAPÍTULO III

### III. APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional tiene una gran importancia en el desarrollo de estudios científicos porque mediante su aplicación ha sido posible la reproducción de fenómenos y condiciones bajo las que se encuentran diversos cuerpos o sistemas; esto permite modelar a escala reducida, especímenes que por su naturaleza es muy complicado y costoso construir a escala real, además de que los dispositivos encargados de reproducir las condiciones actuantes sobre el elemento no alcanzan las magnitudes inducidas por cada fenómeno en cuestión.

En esta investigación se estudia la respuesta dinámica de contenidos empleando el modelo analítico descrito en el capítulo anterior, con lo que se simula el probable comportamiento de un cuerpo rígido cualquiera ante la ocurrencia de eventos sísmicos o la inducción de movimientos armónicos en su base.

La aplicación del análisis dimensional se desarrolló en dos partes:

- Escalamiento de Cuerpos Rígidos
- Escalamiento de Señales (sismos y movimientos armónicos)

#### III.1. ESCALAMIENTO DE CUERPOS RÍGIDOS A PARTIR DE UN PROTOTIPO

Cada prototipo representa a un contenido dentro de un sistema estructural, es decir, a un cuerpo rígido de gran valor o importancia existente dentro de alguna edificación como puede ser mobiliario, equipo electromecánico o médico, piezas de arte, entre otros; este prototipo cuenta con una geometría cualquiera, la cual es idealizada de acuerdo al Modelo de Rectángulo Equivalente (Arredondo, 2006) que cuenta con una relación de esbeltez determinante en su comportamiento dinámico.

Una vez idealizado el espécimen se definen modelos a escala reducida (figura 3.1 y 3.2) que cumplan con la misma relación de esbeltez, pero con dimensiones menores que resulten manejables en pruebas experimentales de laboratorio y, que a su vez, podrían representar a otros cuerpos también contenidos dentro de una estructura.

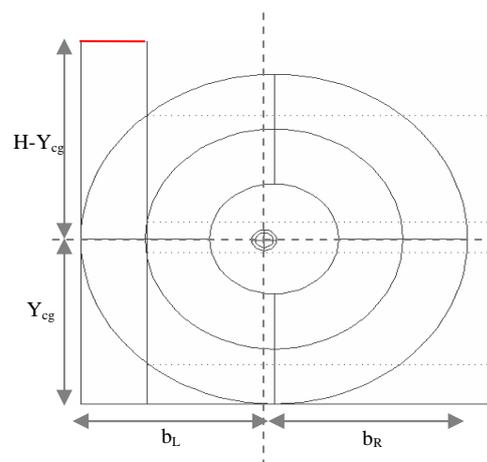
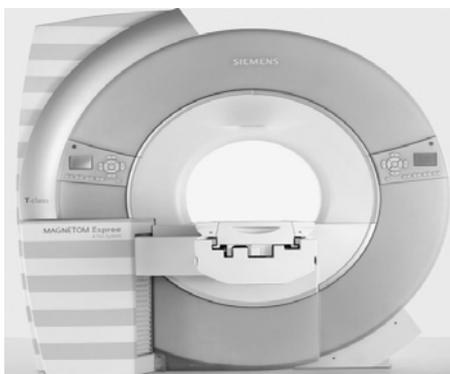


Figura.3.1. Modelación de un Resonador Magnético

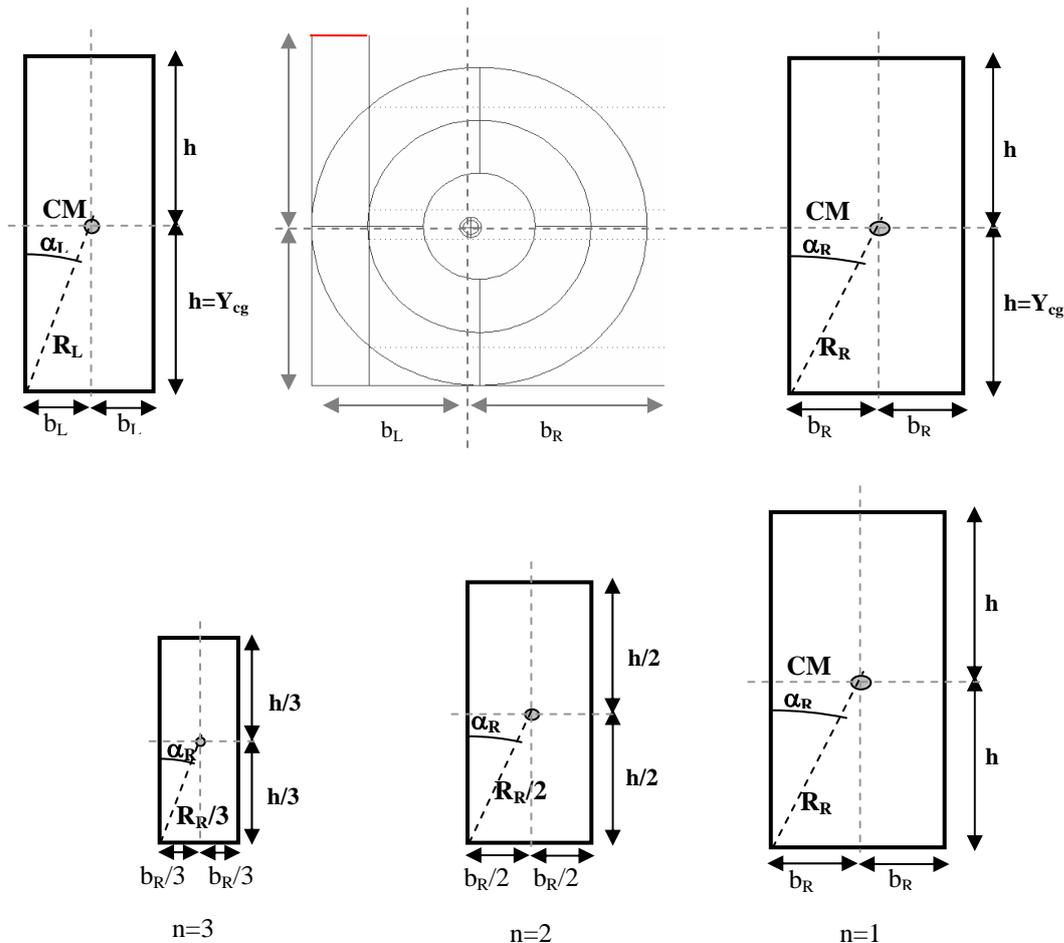


Figura.3.2. Escalamiento del Modelo Rectangular Equivalente

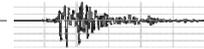
### III.2. ESCALAMIENTO DE SEÑALES ANALÍTICAS

Al igual que se escalan los cuerpos rígidos a partir de prototipos se debe también escalar la acción bajo la que estarán sujetos. En este caso trabajamos con señales analíticas armónicas (senoidales de amplitud constante, variable y pulsos tipo Ricker) y señales sísmicas registradas en diversas estaciones acelerométricas en todo el mundo.

Para lograr reproducir adecuadamente el comportamiento del espécimen ante la ocurrencia de la acción de interés se aplica el análisis dimensional a la señal de entrada, de modo que ésta introduzca la cantidad de energía necesaria al cuerpo escalado y las aceleraciones requeridas equivalentes al modificar el contenido de frecuencias de la señal original. Esto se hace por medio de una relación adimensional de los intervalos de muestreo aplicando la siguiente expresión

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{n}} \quad (3.1)$$

donde  $\Delta t_p$  - intervalo de muestreo del prototipo  
 $\Delta t_m$  - intervalo de muestreo del modelo  
 $n$  - factor de escala



El escalamiento de señales se dividió en dos casos:

- Escalamiento de señales analíticas
- Escalamiento de señales sísmicas

Para el primer caso se emplearon las señales armónicas que a continuación se muestran:

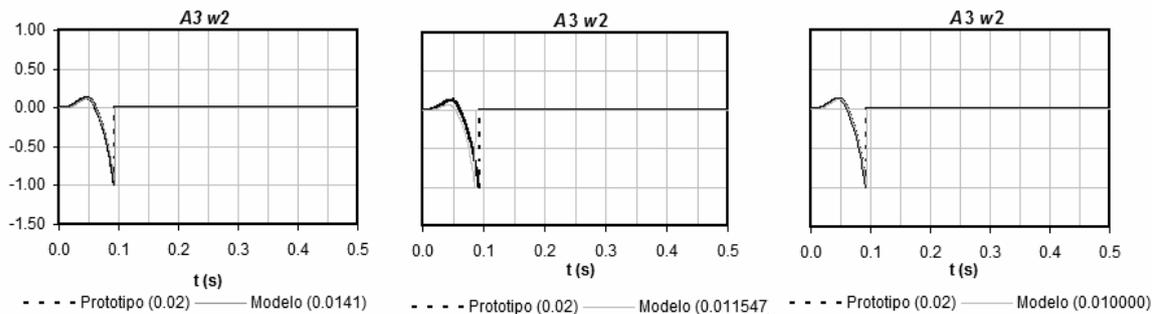


a) Seno de amplitud constante      b) Pulso Ricker      c) Seno de amplitud variable

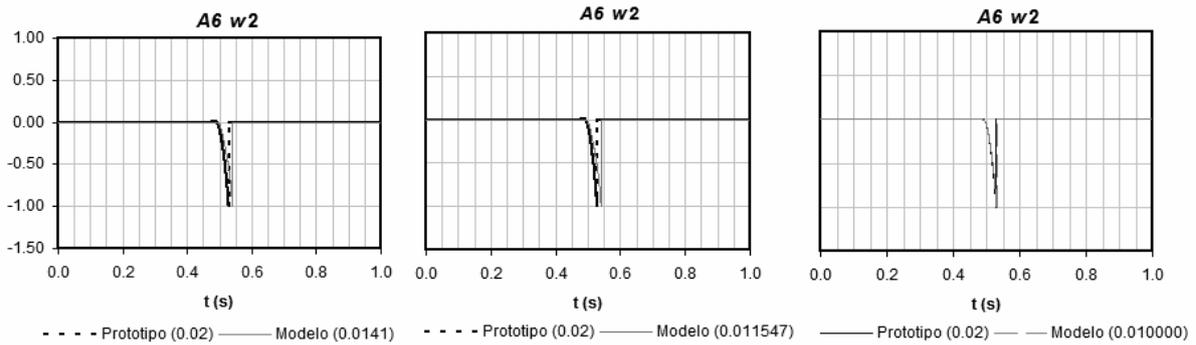
Figura. 3.3. Señales Analíticas Armónicas

Por su naturaleza, estas señales armónicas tienen una frecuencia definida que se modifica al ser escalado su intervalo de muestreo; por esta razón, son señales con las que se puede trabajar fácilmente en la búsqueda de una generalización de la aplicación del análisis dimensional, lo cual se intenta extrapolar a eventos sísmicos representados por señales no armónicas y con un rico contenido de frecuencias.

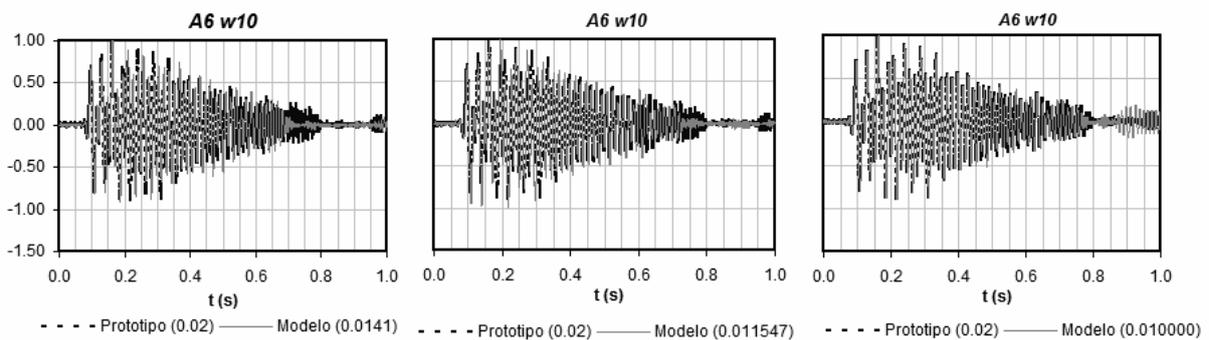
Para determinar la eficiencia de la Ec. 3.1 se realizaron simulaciones analíticas en el programa de cómputo DAC (Arredondo 2006) para prototipos con diferentes relaciones de esbeltez ( $h/b=2, 3, 4$  y  $5$ ) y sus respectivos modelos a 3 escalas distintas ( $n=2, 3$  y  $4$ ). El programa de cómputo empleado calcula la respuesta dinámica del cuerpo aplicando el Método de la Diferencia Central Media para la integración numérica, con el cual se obtuvieron resultados satisfactorios en la mayoría de los casos, mostrando comportamientos muy similares entre los prototipos y sus modelos a escala (figura 3.5)



a) Respuesta dinámica de un cuerpo con relación de esbeltez de 2 bajo la acción de un seno de amplitud constante



b) Respuesta dinámica de un cuerpo con relación de esbeltez de 2 bajo la acción de un seno de amplitud variable



c) Respuesta dinámica de un cuerpo con relación de esbeltez de 2 bajo la acción de un pulso Ricker

Figura. 3.4. Respuesta dinámica de un prototipo y sus modelos a escala reducida bajo la acción de señales armónicas (Programa DAC)

Sin embargo, al realizar un gran número de simulaciones variando tanto el tamaño de los prototipos como parámetros de las señales armónicas se encontraron discrepancias en las respuestas calculadas para algunos casos como los que se muestran a continuación

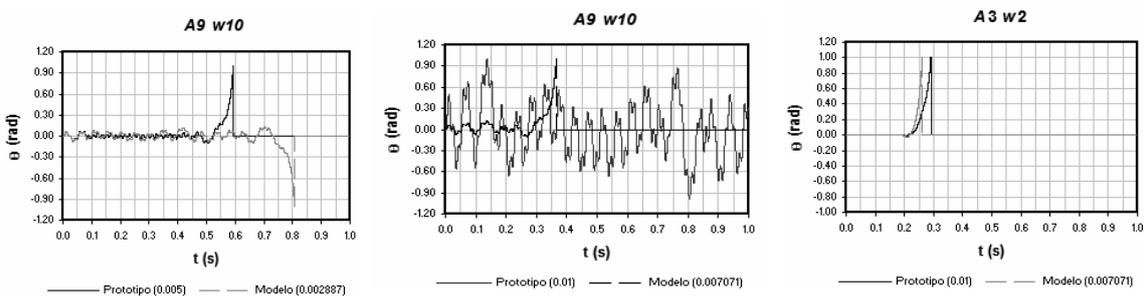


Figura. 3.5. Discrepancia en la respuesta calculada para algunos casos

En las figuras anteriores puede observarse que el intervalo de muestreo de la señal al ser escalado acarrea errores de precisión debidos quizás a alguna zona de inestabilidad numérica del propio método de integración. Es por esto, que se optó por profundizar en el desarrollo matemático del Método de la Diferencia Central Media, así como calcular la respuesta dinámica para los casos discrepantes utilizando los métodos numéricos de integración de Runge-Kutta de 4to y 6to orden que nos llevasen a concluir si se trata de inestabilidad numérica del primer método o si la



solución de la ecuación con la que se calcula la respuesta dinámica del cuerpo produce este error.

### III.2.1. Método de la Diferencia Central Media

Retomando la Ec. 2.8 y estableciendo las consideraciones siguientes

$$I + mR^2 = 4I \quad (3.1a)$$

$$3I = mR^2 \quad (3.1b)$$

$$I = \frac{1}{3}mR^2 \quad (3.1c)$$

$$y_g'' = 0 \quad (3.1d)$$

se procede a realizar las simplificaciones que nos lleven a definir las expresiones que permitan aplicar el método de la Diferencia Central Media tal y como se muestra

$$\left(\frac{1}{3}mR^2 + mR^2\right)\theta'' = mRCos(\alpha - |\theta|)x_g'' - S(\theta)mRSin(\alpha - |\theta|)g \quad (3.2)$$

$$\frac{4}{3}mR^2\theta'' = mRCos(\alpha - |\theta|)x_g'' - S(\theta)mgRSin(\alpha - |\theta|) \quad (3.3)$$

$$\frac{4}{3}R^2\theta'' = RCos(\alpha - |\theta|)x_g'' - S(\theta)gRSin(\alpha - |\theta|) \quad (3.4)$$

$$\frac{4}{3}R\theta'' = Cos(\alpha - |\theta|)x_g'' - S(\theta)gSin(\alpha - |\theta|) \quad (3.5)$$

$$\theta'' = \frac{3}{4R}(Cos(\alpha - |\theta|)x_g'' - S(\theta)gSin(\alpha - |\theta|)) \quad (3.6)$$

La Ec. 3.6 determina la aceleración angular del cuerpo rígido al estar excitado por la acción actuante en su base; con esta expresión se plantea la aceleración angular para el intervalo de muestreo  $i$

$$\theta_i'' = \frac{3}{4R}(Cos(\alpha - |\theta_i|)x_g'' - S(\theta_i)gSin(\alpha - |\theta_i|)) \quad (3.7)$$

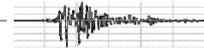
Las ecuaciones siguientes determinan tanto la velocidad angular para el punto medio del intervalo  $(i+1/2)$  como para el punto inicial  $(i)$

$$\theta_{i+1/2}' = \theta_{i-1/2}' + \Delta t \theta_i'' \quad (3.8)$$

$$\theta_i' = \frac{1}{2}(\theta_{i+1/2}' + \theta_{i-1/2}') \quad (3.9)$$

Por último, para calcular la rotación del vértice en contacto con la base se establece la expresión mostrada

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta t \theta_{i+1/2}' \quad (3.10)$$



y tomando en cuenta la pérdida de energía debida al impacto entre el cuerpo y la superficie de soporte, el coeficiente de restitución  $r$  (Makris y Roussos, 1998), que es dependiente de la relación de esbeltez, afecta la velocidad angular post-impacto

$$r = \left[ 1 - \frac{3}{2} \text{Sin}^2(\alpha) \right]^2 \quad (3.11)$$

$$\theta'_{i+1} = \bar{r}\theta'_i \quad (3.12)$$

Otra consideración es que el cuerpo inicia el balanceo después de rebasar el límite de intensidad definido por la suma de momentos respecto al vértice en contacto con la superficie

$$x_g'' > g \frac{b}{h} \quad (3.13)$$

### III.2.2. Método de Runge-Kutta

Los problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) pueden ser minimizados a un estudio de grupos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, el problema de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} = r(x) \quad (3.14)$$

Puede tratarse así:

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \quad (3.15)$$

$$\frac{dz}{dx} = r(x) - q(x)z(x) \quad (3.16)$$

donde  $z$  es una nueva variable.

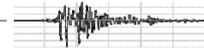
La función de introducir éstas nuevas variables es volverlas derivables respecto a las variables originales, lo cual facilita su tratamiento y permite la reducción del orden de la ecuación diferencial.

Lo anterior se hace con la finalidad de incorporar en la ecuación original algunos otros factores o influir directamente sobre las variables independientes intentando mitigar un comportamiento singular, el cual podría resultar en un sobreflujo numérico o en un incremento del error de truncamiento.

El problema genérico en EDOs es reducido al estudio de un grupo de  $N$  ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas para las funciones  $y_i$ , donde  $i=1,2,\dots,N$ , quedando de la forma general

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N) \quad (3.17)$$

Si un problema que involucra EDOs no queda completamente descrito por sus ecuaciones, aún más importante resulta el planteamiento de cómo atacar



numéricamente un problema de condiciones de frontera, las cuales no son otra cosa que condiciones algebraicas sobre los valores asignados a las funciones  $y_i$ . En general, esto puede satisfacerse al discretizar puntos específicos, pero sin mantenerse entre esos puntos, es decir, que no son conservados por la ecuación diferencial. Las condiciones de frontera pueden ser tan simples como se requiera, asignando ciertos valores a las variables de interés, o tan complejo como formar un grupo de ecuaciones algebraicas no-lineales entre éstas variables.

Usualmente es la naturaleza de las condiciones de frontera que definen qué método numérico será más viable de emplear. Por esta razón, los problemas de condiciones de frontera se clasifican en dos categorías:

- **Problema de Valor Inicial.**- Estos problemas se caracterizan porque para cada función  $y_i$  se tiene un valor inicial  $x_s$  y se desea encontrar el valor de la función  $y_i$  para un valor final  $x_f$  o para una lista de puntos discretizados (por ejemplo para intervalos tabulados).
- **Problema de Dos Valores de Frontera.**- A diferencia del anterior, en este problema se determinan las condiciones de frontera para más que una  $x_s$ . Por lo regular, algunas de las condiciones son especificadas a  $x_s$  y las restantes a  $x_f$ .

Como el problema que tenemos es del primer tipo (de valor inicial) se empleó el Método de Runge-Kutta. Esto implica reescribir las derivadas  $d_y$  y  $d_x$  en la Ec. 3.17 como pasos finitos de  $\Delta_y$  y  $\Delta_x$ , y multiplicando las ecuaciones por  $\Delta_x$ . Esto determina expresiones algebraicas por el cambio en las funciones cuando la variable independiente  $x$  es discretizada en intervalos de tamaño  $\Delta_x$ . La implementación de este procedimiento resulta tener su base en el Método de Euler, sin embargo, éste no es recomendado para fines prácticos, ya que aunque conceptualmente es importante, no es manejable numéricamente hablando.

El Método de Runge-Kutta propaga una solución sobre el intervalo combinando la información de varios pasos del Método de Euler (Ec. 3.18), y usando la respuesta obtenida en cada iteración busca la convergencia de la serie de Taylor expandiéndola a un orden superior.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (3.18)$$

La cual establece una solución desde  $x_n$  hasta  $x_{n+1} \equiv x_n + h$ . Esta expresión resulta asimétrica ya que define la solución para un intervalo  $h$ , empleando la información de las derivadas al inicio de dicho intervalo, lo que significa que el error implícito en el paso es tan sólo una parte de  $h$ , más pequeño que la corrección, por eso se añade el término  $O(h^2)$  en la Ec. 3.18.

Las razones por las que el Método de Euler no es muy recomendable son las siguientes:

- El método no es muy preciso al ser comparado con otros de orden superior y para tamaños de paso equivalentes.
- Es un método que no presenta la estabilidad requerida

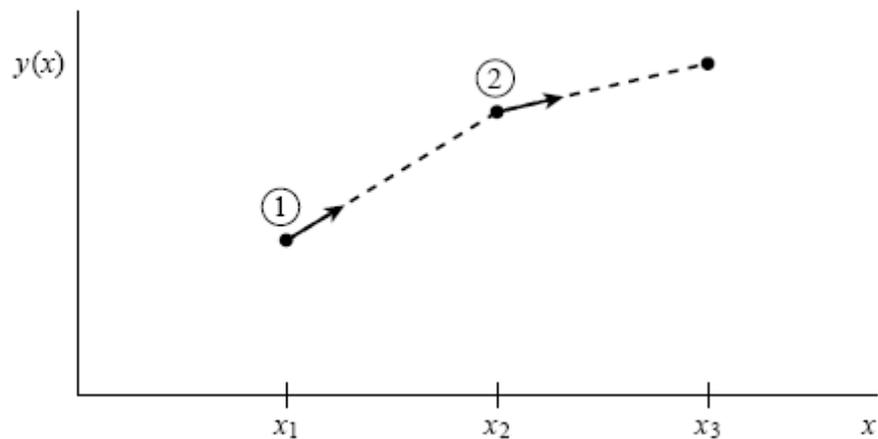


Figura. 3.6. Expresión gráfica del Método de Euler

El Método de Euler es el enfoque más simplista (y menos preciso) para la integración de una EDO, donde la derivada del punto inicial del intervalo es extrapolada para encontrar el siguiente valor de la función. El método tiene una precisión de primer orden.

A diferencia del anterior, el Método de Runge-Kutta considera el uso de un paso de prueba a la mitad del intervalo, calculando un valor tanto para  $x$  como para  $y$  en el punto medio del intervalo original. Esto se expresa matemáticamente como sigue

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (3.19)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (3.20)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3) \quad (3.21)$$

Lo anterior se expresa gráficamente como se muestra en la figura 3.8.

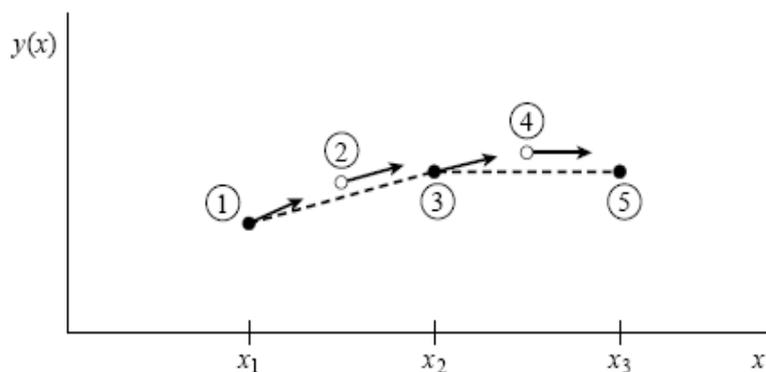
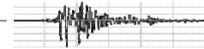


Figura. 3.7. Expresión gráfica del Método de Runge-Kutta de 2º orden

Como se puede observar en el término que ahora expresa el error, la simetrización anula el término de error de primer orden, elevando a este método a un orden superior, por ello, a este método se le conoce como Runge-Kutta de 2º orden o del Punto Medio. De hecho, cualquier método de  $n$ -ésimo orden tiene expresado el error como  $O(h^{n+1})$ .



Existen varias maneras de evaluar estas ecuaciones de acuerdo al método de primer orden, pero utilizando diferentes coeficientes y términos para evaluar el error para órdenes superiores; Además, sumando la combinación del lado derecho se puede eliminar el error orden por orden, esta es la idea básica del método de Runge-Kutta.

De acuerdo con el razonamiento explicado, se presenta el desarrollo matemático del método de *Runge-Kutta de 4to orden*, el cual resulta más depurado como se puede observar.

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (3.22)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (3.23)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (3.24)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (3.25)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5) \quad (3.26)$$

Esta metodología lo que hace es evaluar la derivada en cuatro puntos para cada intervalo de muestreo (figura 3.9). Se calcula la derivada en el punto inicial, en dos puntos intermedios y en el punto final.

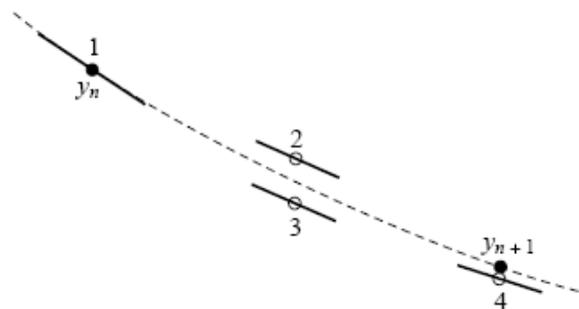


Figura. 3.8. Expresión gráfica del Método de Runge-Kutta de 4° orden

El Método de Runge-Kutta considera cada paso como una secuencia de pasos idénticos. Esto es una propiedad matemática que permite evaluar la ecuación diferencial en cualquier punto arbitrario, el cual es tomado como inicio del intervalo de muestreo. Esta propiedad logra la fácil incorporación de este método como una herramienta de cómputo eficiente.

Un buen integrador de EDOs debe ejercer un control que se adapte conforme va avanzando en su proceso numérico, redimensionando frecuentemente el intervalo de muestreo. Regularmente, esta característica de redimensionamiento se emplea con la finalidad de definir un nivel de precisión en la solución con un mínimo esfuerzo de cómputo.

La implementación de este redimensionamiento controlado del intervalo de muestreo requiere que el signo que define el algoritmo de dimensionamiento provea



información de su desempeño, tal y como estimar el error de truncamiento. La técnica más directa para determinar esto, para Runge-Kutta de 4to orden, es mediante el cálculo de un paso doble, esto significa tomar un paso dos veces: la primera vez como un paso completo y la segunda vez, e independiente a la primera, como dos pasos de la mitad de tamaño.

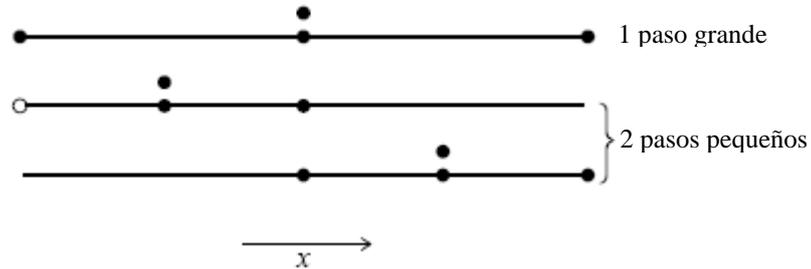


Figura. 3.9. Método de Runge-Kutta de 4° orden aplicando el “paso doble”

Es fundamental mencionar que la solución exacta para un avance de  $x$  a  $x + 2h$  es  $y(x + 2h)$ , mientras que las soluciones aproximadas para uno y dos pasos ( $y_1$  y  $y_2$ ), aplicando Runge-Kutta de 4to orden es

$$y(x + 2h) = y_1 + (2h)^5 \phi + O(h^6) + \dots \quad (3.27)$$

$$y(x + 2h) = y_2 + 2(h^5)\phi + O(h^6) + \dots$$

$$\phi = \frac{y^{(5)}(x)}{5!} \quad (3.28)$$

donde, para el orden  $h^5$ ,  $\phi$  se mantiene constante sobre cada paso. Cabe notar que la diferencia entre la aplicación del método para uno y dos pasos se basa en la estimación del error de truncamiento por medio del indicador

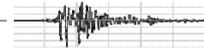
$$\Delta \equiv y_2 - y_1 \quad (3.29)$$

es así como mantenemos el grado de precisión, lo cual se logra ajustando  $h$ .

Aunque también podría ocurrir que, ignorando el término  $h^6$  o de órdenes superiores, se pueden resolver las dos ecuaciones para depurar nuestra estimación numérica de la solución exacta  $y(x + 2h)$ ,

$$y(x + 2h) = y_2 + \frac{\Delta}{15} + O(h^6) \quad (3.30)$$

Esta estimación resulta de un grado mayor, por lo que tenemos Runge-Kutta de 5° orden, sin embargo, no es posible monitorear su error de truncamiento, lo que nos lleva a la conclusión de que no por ser de un orden superior, se tiene una mejor aproximación o precisión.



La forma general del método de Runge-Kutta de 6to orden se escribe como sigue

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf(x_n + a_2h, y_n + b_{21}k_1) \\
 &\dots \\
 k_6 &= hf(x_n + a_6h, y_n + b_{61}k_1 + \dots + b_{65}k_5) \\
 y_{n+1} &= y_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 + O(h^6)
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

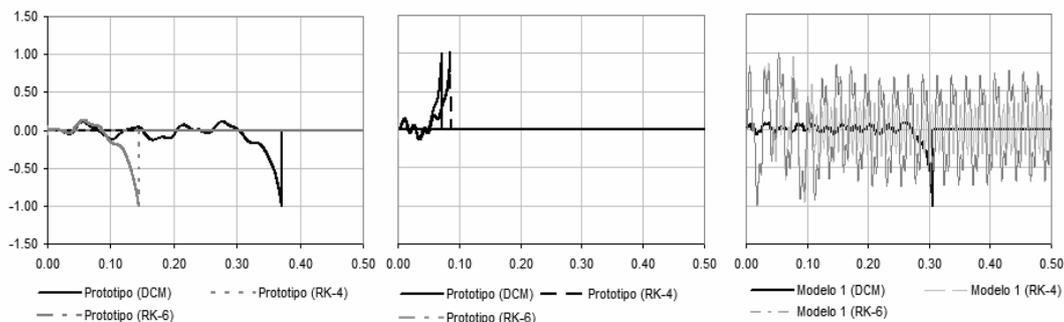
donde los coeficientes están definidos en la siguiente tabla

Cash-Karp Parameters for Embedded Runge-Kutta Method									
$i$	$a_i$	$b_{ij}$					$c_i$	$c_i^*$	
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$	
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0	
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$	
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$	
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$	
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$	
	$j =$	1	2	3	4	5			

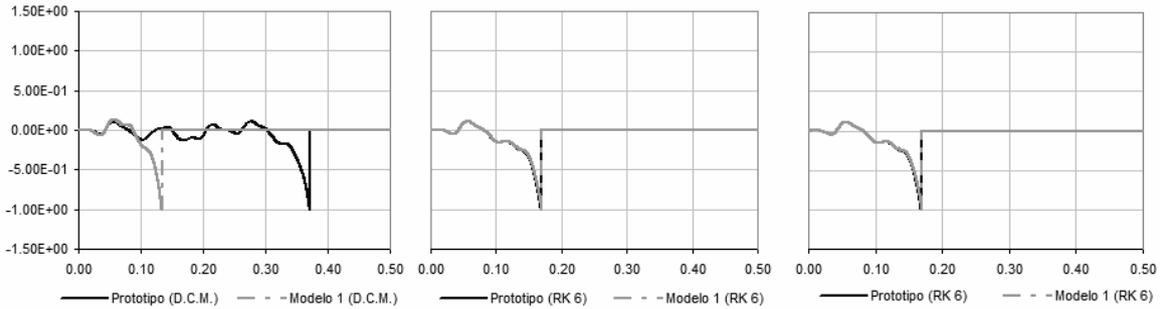
Tabla 3.1. Coeficientes para el método de Runge-Kutta del 1ro al 6to orden

### III.3. SUPERFICIES DE CONVERGENCIA

De acuerdo a los modelos de integración numérica explicados se desarrolló un programa de cómputo para calcular la respuesta dinámica de cuerpos rígidos sujetos a la acción de señales armónicas como las empleadas para el Método de la Diferencia Central Media (Programa DAC), esto con la finalidad de comprobar que para los casos satisfactorios se obtuviesen respuestas consistentes al aplicar el análisis dimensional, así como establecer si para los casos discrepantes existe un problema de inestabilidad numérica propia del método de integración. No obstante, se encontró que existe consistencia en los resultados de los casos satisfactorios, mientras que las respuestas calculadas también resultan discrepantes para los casos inconsistentes y se presentan irregularidades que no muestran ningún patrón o tendencia en su comportamiento, por lo que se decidió profundizar en el estudio de la estabilidad del método empleado (figura 3.11).



a) Discrepancia en las respuestas calculadas por medio de los métodos de la Diferencia Central Media y Runge-Kutta de 4° y 6° orden



b) Respuesta de un cuerpo rígido y su modelo a escala ( $n=2$ ) ante un seno de amplitud constante ( $A=3$ ,  $w=5$ )

Figura.3.11. Discrepancias entre los métodos de integración empleados

### III.3.1. Errores y Estabilidad del Método de Runge-Kutta Optimizando el Intervalo de Muestreo

Los métodos de integración numérica como el de Runge-Kutta están sujetos a dos clases de error, el error de truncamiento y el error debido a la inestabilidad. El primero (truncamiento) se genera por la discrepancia existente entre el desarrollo de la Serie de Taylor y el método exacto, dicho error decrece en función del orden del método, es decir, que el error del método de 6to orden es menor que el de 4º orden. El error debido a la inestabilidad es un efecto acumulado del error local, en otras palabras, esto significa que el error generado por la solución aproximada crece ilimitadamente al avanzar los intervalos de tiempo.

Para analizar la estabilidad del método de Runge-Kutta se modificó el programa de cómputo desarrollado, el cual calcula el intervalo de muestreo óptimo aplicando las excitaciones armónicas mencionadas. Este intervalo de muestreo se obtiene mediante la convergencia de las respuestas calculadas al ser comparadas. Así que lo primero que se hace es fijar el error local de tolerancia  $\epsilon$ , el cual será proporcional al grado del método empleado ( $h^n$ ) para un intervalo de prueba dado y que se expresa como sigue

$$E_h = Bh^n \quad (3.32)$$

donde  $B$  representa una constante dependiente del problema.

Aplicando el método de Runge-Kutta en dos pasos, donde el intervalo de prueba es  $h/2$ , tenemos un error proporcional a  $2(h/2)^n$ , donde el factor 2 se debe a la acumulación del error en dos etapas, ya que se ha partido por mitad el intervalo de prueba inicial. Con esto se tiene:

$$2E_{h/2} = 2B(h/2)^n = \frac{Bh^n}{2^{n-1}} \quad (3.33)$$

Restando la Ec. 3.32 de la Ec. 3.33 se obtiene

$$E_h - E_{h/2} = Bh^n - \frac{Bh^n}{2^{n-1}} \quad (3.34)$$



Una vez calculadas las respuestas del cuerpo se resuelve la Ec. 3.34

$$B = \frac{2^{n-1} h^n}{2^{n-1} - 1} \left[ (y_1)_h - (y_2)_{h/2} \right] \quad (3.35)$$

donde  $(y_1)_h$  y  $(y_2)_{h/2}$  son las respuestas calculadas para cada intervalo de prueba.

Ya definida la constante B se puede determinar el intervalo de muestreo óptimo que satisfaga el criterio de  $E_h < \varepsilon$ , sustituyendo  $E_h = \varepsilon$  en la Ec. 3.35.

$$\varepsilon = E_h = Bh^n \Rightarrow h = \left( \frac{\varepsilon}{B} \right)^{1/n} \quad (3.36)$$

Después de probar con diversos casos se concluyó que el método con mayor aproximación y menor grado de error es el de Runge-Kutta de 6to orden, por lo que se tomó la decisión de realizar un análisis paramétrico de la respuesta de cuerpos rígidos de diversas dimensiones y relaciones de esbeltez sometidos a las excitaciones armónicas ya descritas variando sus parámetros de amplitud y frecuencia en un amplio rango de valores.

La ecuación para determinar el intervalo de muestreo óptimo  $\Delta t_{opt}$  resultante para nuestro estudio es

$$B = \frac{64 \left| [y_1]_h - [y_2]_{h/2} \right|}{63 h^6} \quad (3.37)$$

Con la intención de visualizar con mayor claridad el procedimiento aplicado en la obtención de las superficies de convergencia se presenta un ejemplo. Para un cuerpo rectangular sujeto a la acción de una excitación armónica en su base se tiene

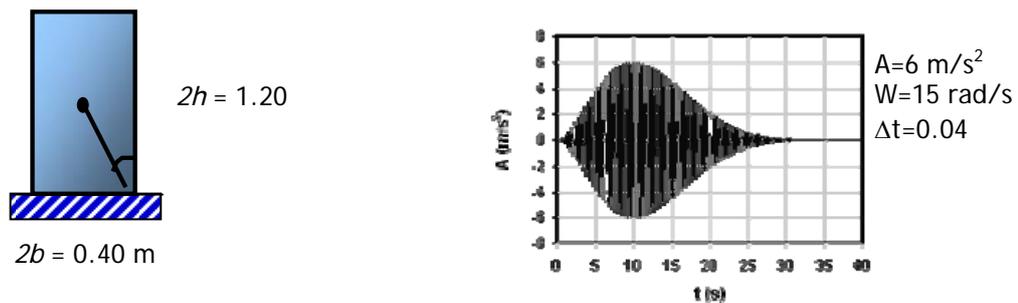


Figura. 3.12. Cuerpo sujeto a un movimiento senoidal de amplitud variable

Para aplicar a la Ec. 3.36 el procedimiento de optimización previamente descrito, se calcula la respuesta del cuerpo empleando un intervalo de muestreo inicial  $\Delta t_h$ , luego se define un nuevo intervalo de muestreo igual a la mitad del valor del intervalo inicial al que llamamos  $\Delta t_{h/2}$  y se recalcula la respuesta dinámica del cuerpo. Una vez obtenidas las respuestas para estos dos intervalos  $\theta(\Delta t_h), \theta(\Delta t_{h/2})$ , se comparan los valores calculados al final de cada paso  $h$  y, aplicando la Ec. 3.37 se determina la magnitud de la constante



$B$ , que al ser relacionada con el error de tolerancia define el intervalo de muestreo óptimo.

$$\Delta t_{opt} = h = \left[ \frac{\varepsilon}{B} \right]^{1/2} \quad (3.38)$$

### III.3.1.1. Optimización del Intervalo de Muestreo para Funciones Armónicas

Debido a la facilidad en el control de parámetros como amplitud y frecuencia en funciones armónicas se desarrolla este proceso de optimización del intervalo de muestreo con la idea de determinar qué parámetros tienen una influencia importante en el comportamiento de cuerpos rígidos y en su análisis dimensional. Con este objeto se estableció una amplia gama de cuerpos contenidos en edificaciones y se sometieron a la acción de funciones armónicas estableciendo así un estudio paramétrico de este modo de respuesta.

Las dimensiones de los contenidos para los que se calculó la respuesta dinámica variaron desde:

- $0.01\text{m} < b < 1.5\text{m}$  (siendo  $b$  el semiancho del cuerpo)
- $0.01\text{m} < h < 1.5\text{m}$  (siendo  $h$  la semialtura del cuerpo)

Los parámetros de amplitud y frecuencia de las señales analíticas actuantes variaron en los intervalos siguientes:

- $0.10\text{m/s}^2 < A < 10.00\text{ m/s}^2$  (siendo  $A$  la máxima aceleración)
- $1.00\text{rad/s} < \omega < 20.00\text{rad/s}$  (siendo  $\omega$  la frecuencia angular del movimiento)

Con los resultados arrojados por el análisis paramétrico se generaron gráficas en las que se establecen los valores del intervalo de muestreo óptimo  $\Delta t_{opt}$  respecto a las semidimensiones  $b$  y  $h$  del cuerpo en función del tipo de señal armónica (senoidal o pulso Ricker) y los parámetros que la definen ( $A$  y  $\omega$ ). Además se generaron superficies para los modos de respuesta de cada espécimen al estar sujeto a la excitación. Algunas de estas gráficas se presentan a continuación

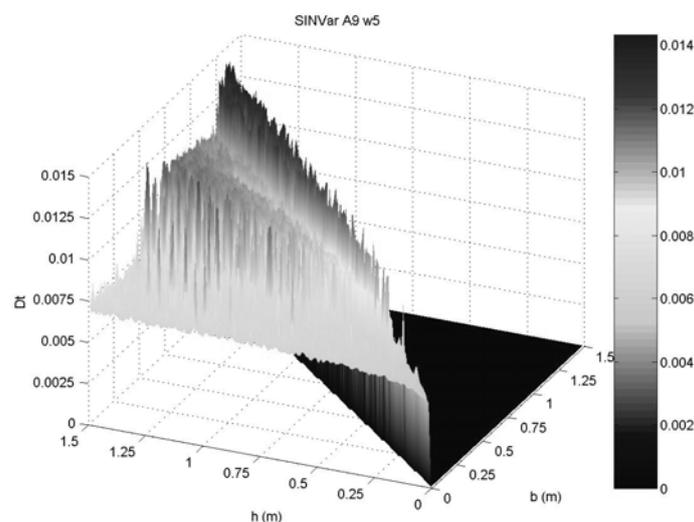
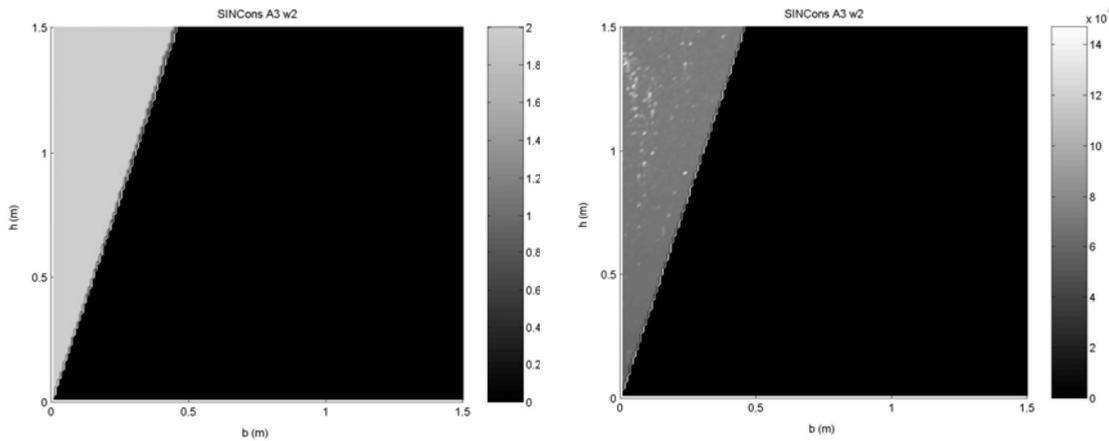
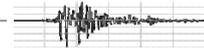


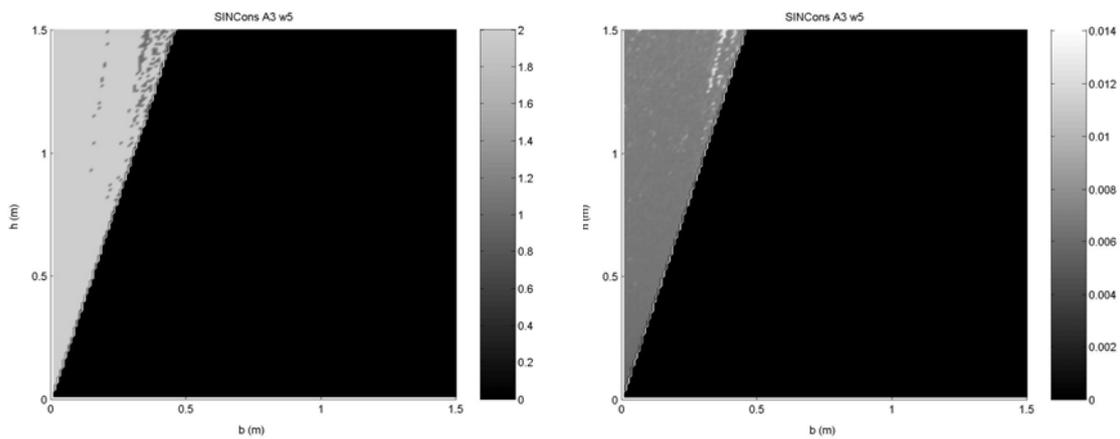
Figura. 3.13. Superficie de Convergencia



a)

b)

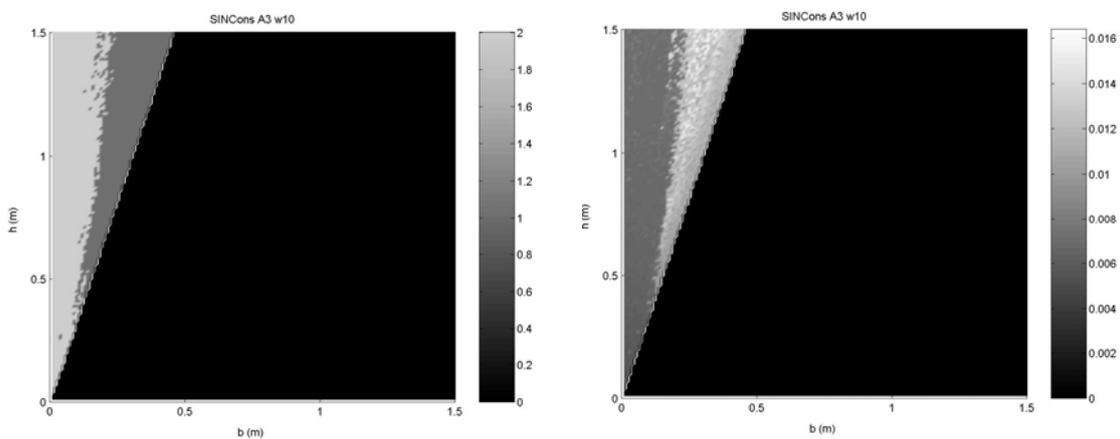
Figura.3.14A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=3$ ,  $w=2$ )



a)

b)

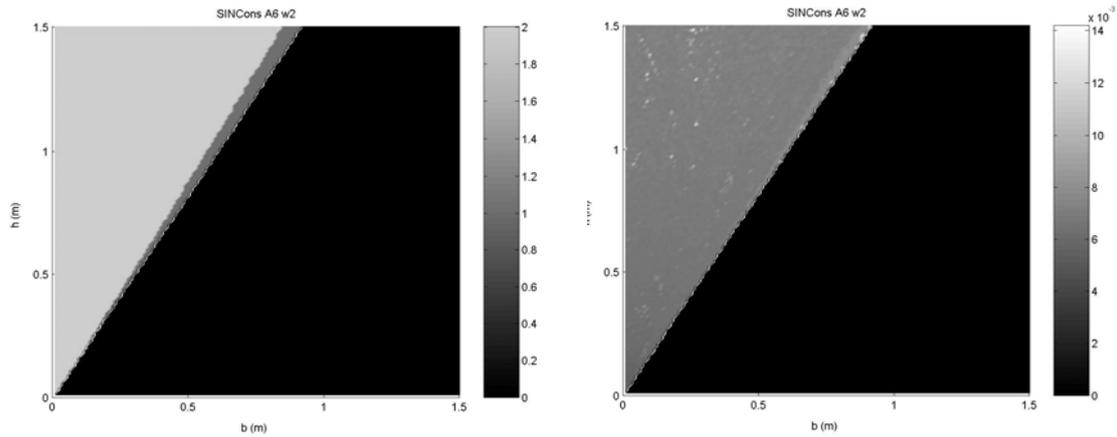
Figura.3.14B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=3$ ,  $w=5$ )



a)

b)

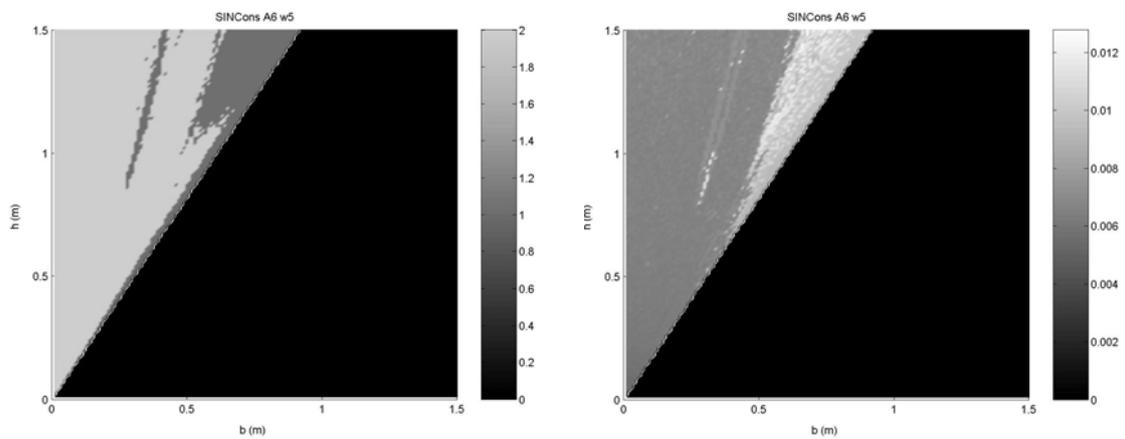
Figura.3.14C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=3$ ,  $w=10$ )



a)

b)

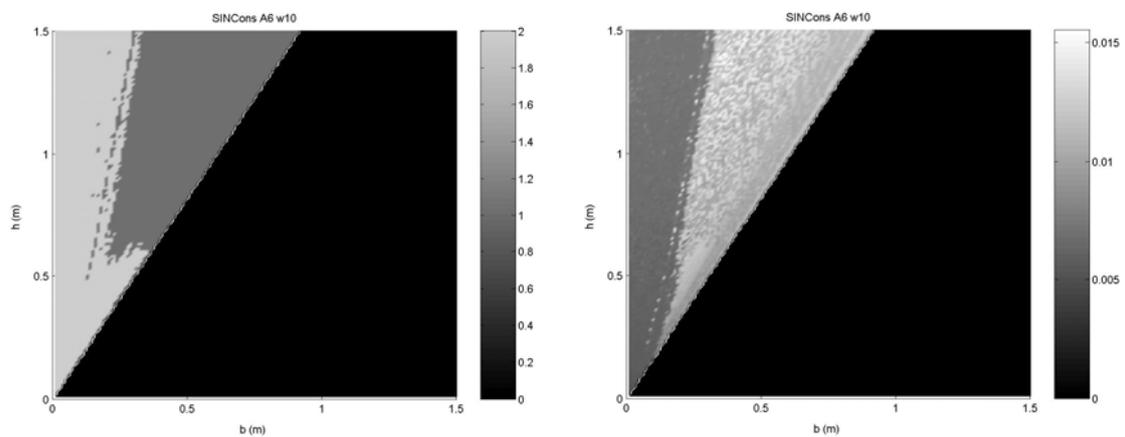
Figura.3.15A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=6$ ,  $w=2$ )



a)

b)

Figura.3.15B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=6$ ,  $w=5$ )



a)

b)

Figura.3.15C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=6$ ,  $w=10$ )

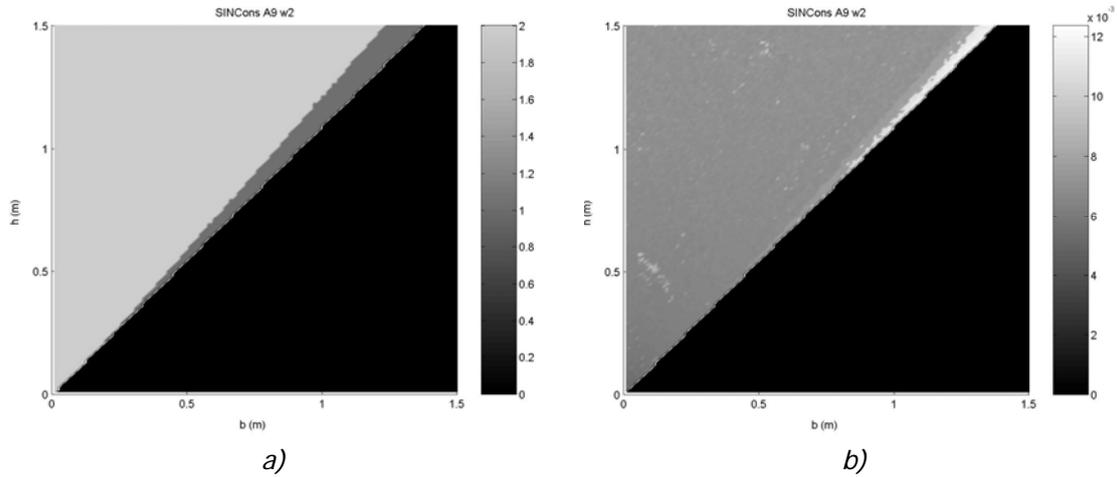
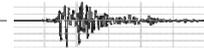


Figura.3.16A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=9$ ,  $w=2$ )

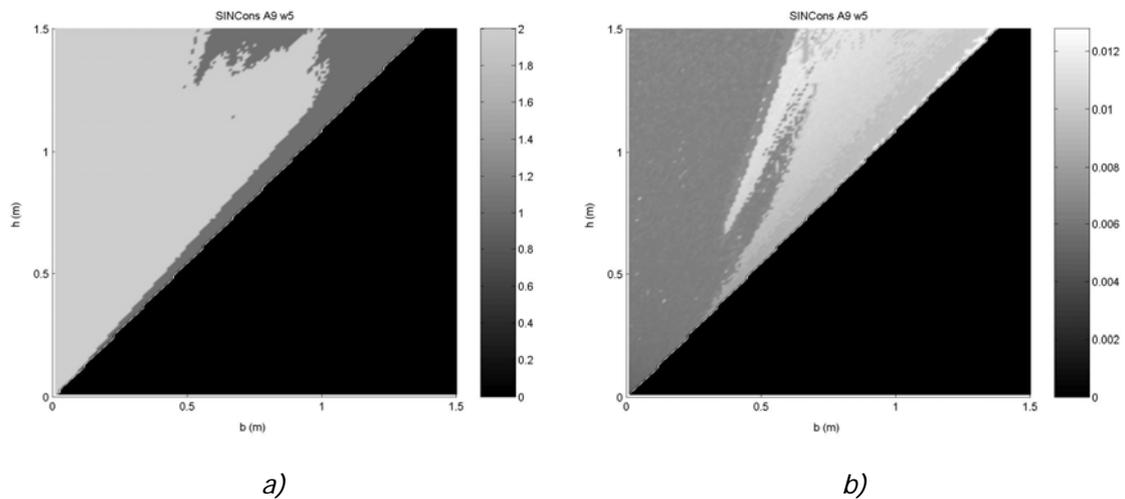


Figura.3.16B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=9$ ,  $w=5$ )

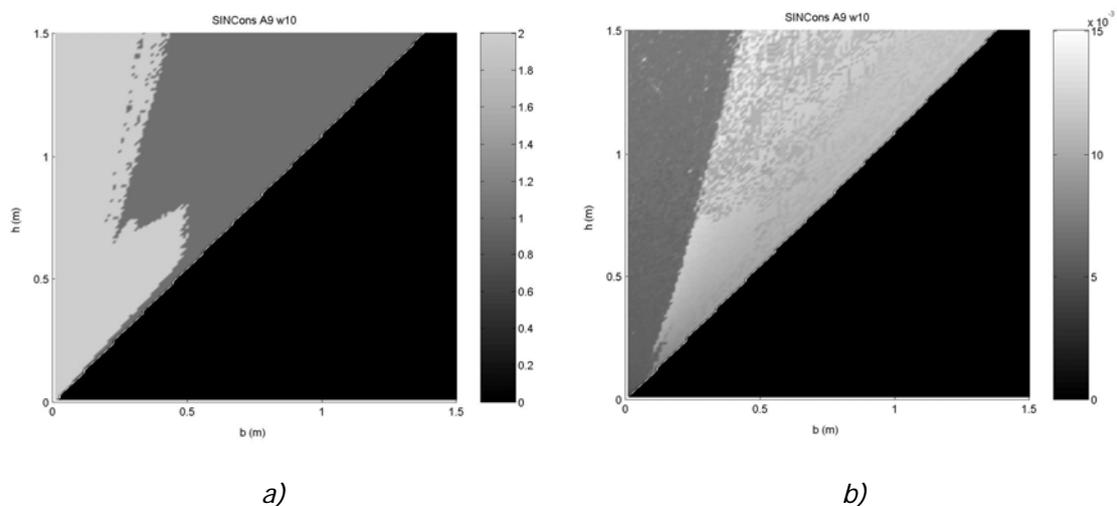


Figura.3.16C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud constante ( $A=9$ ,  $w=10$ )

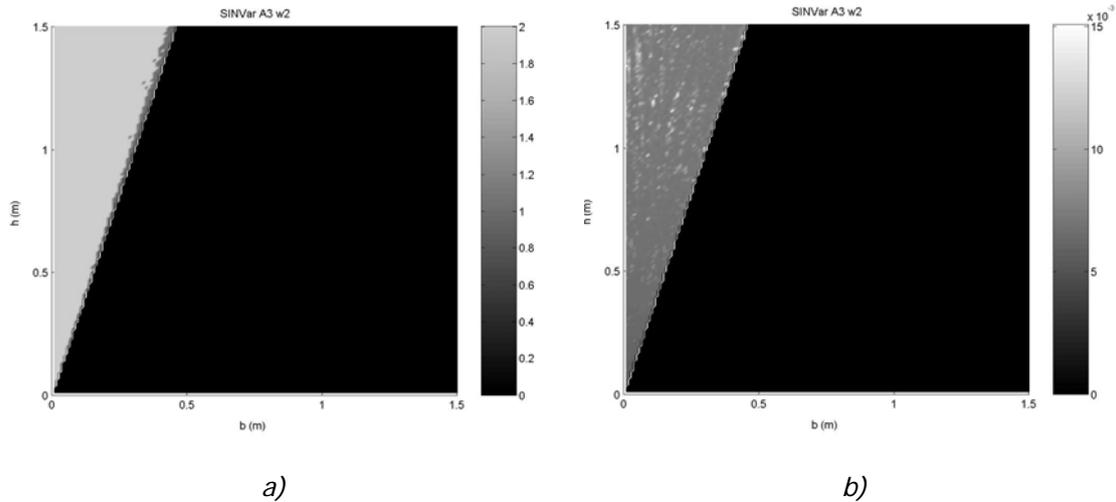
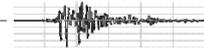


Figura.3.17A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=3$ ,  $w=2$ )

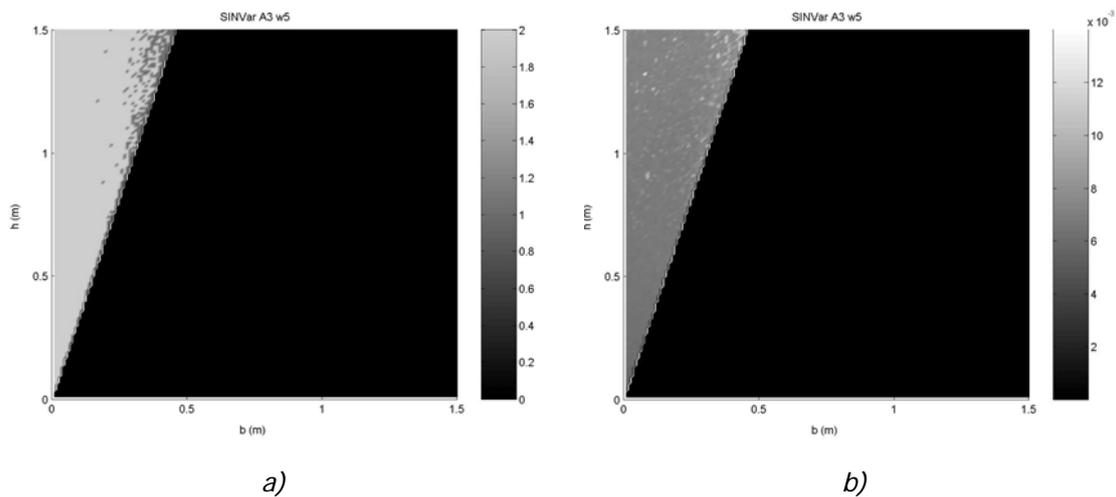


Figura.3.17B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=3$ ,  $w=5$ )

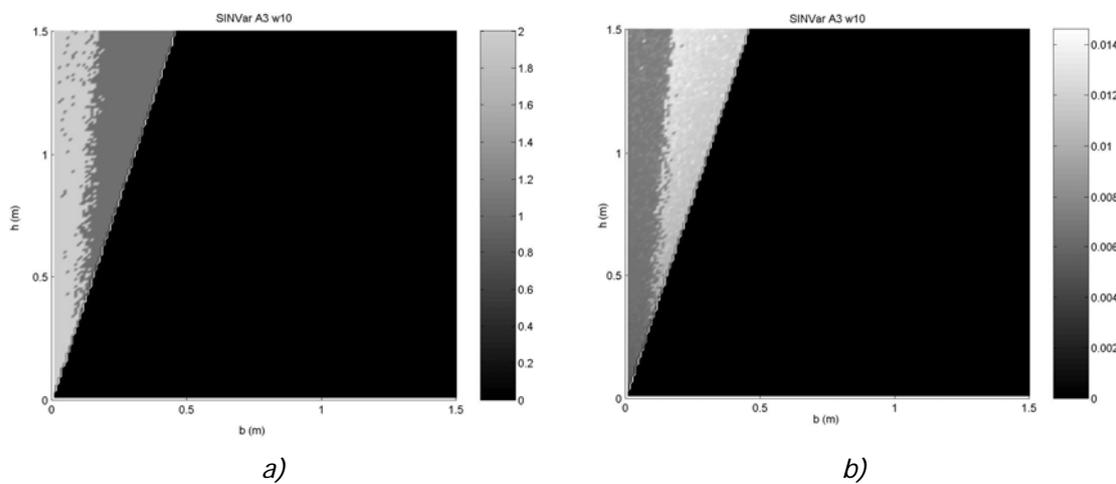


Figura.3.17C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=3$ ,  $w=10$ )

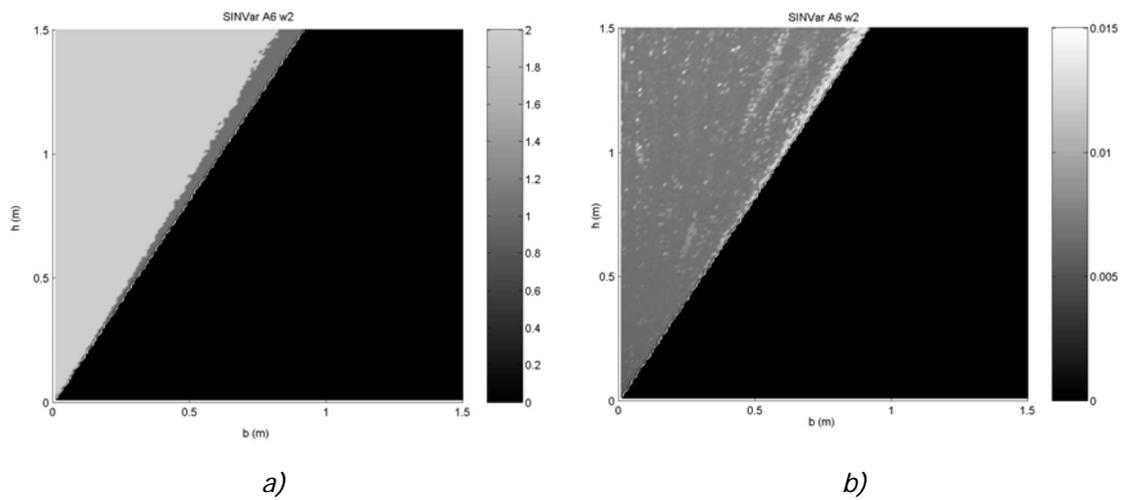
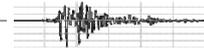


Figura.3.18A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=6$ ,  $w=2$ )

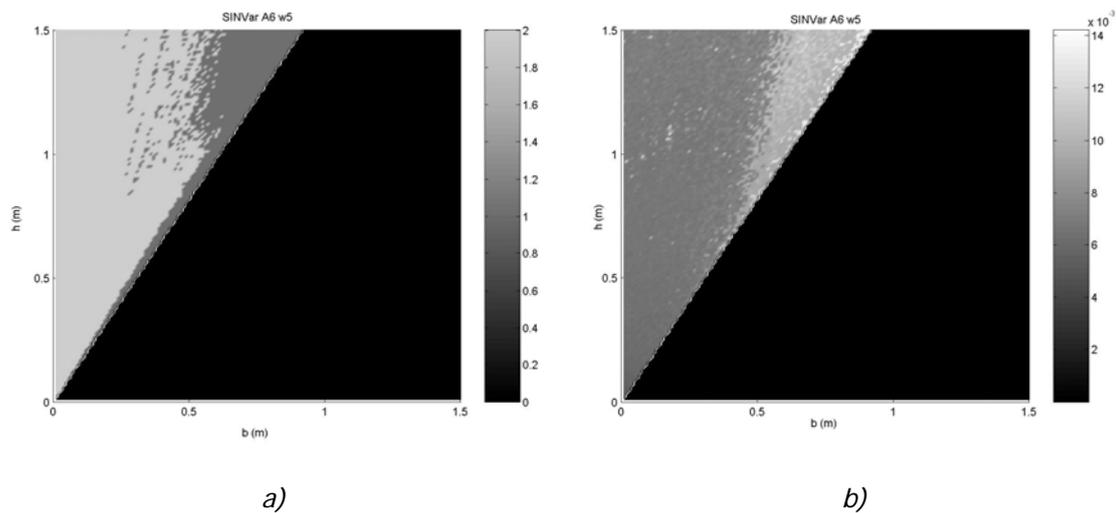


Figura.3.18B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=6$ ,  $w=5$ )

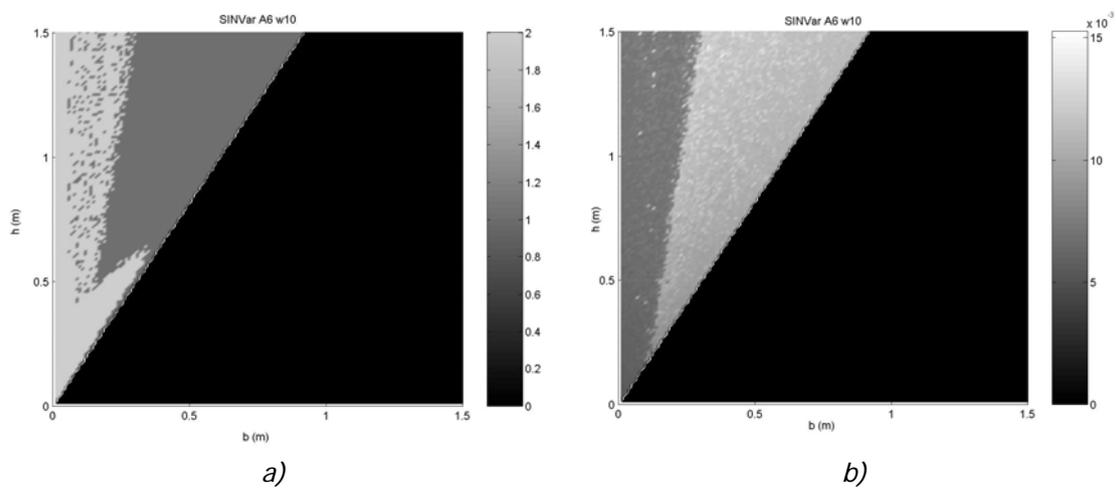


Figura.3.18C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=6$ ,  $w=10$ )

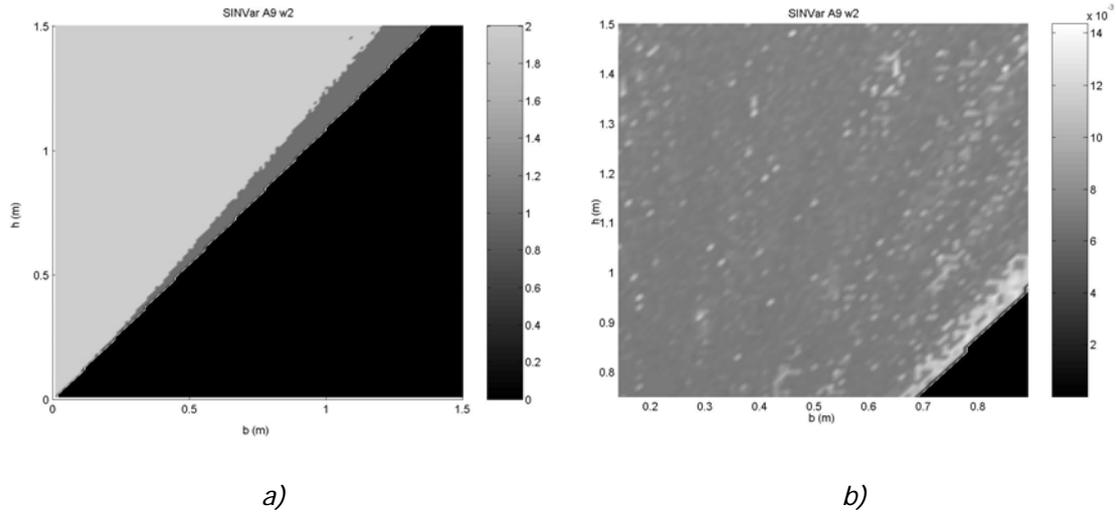
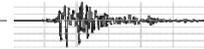


Figura. 3.19A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=9$ ,  $w=2$ )

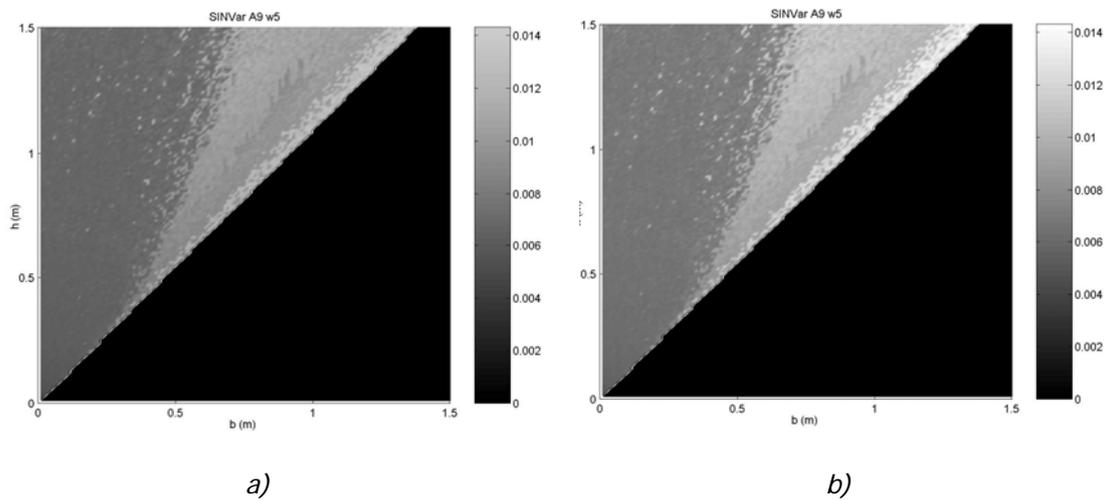


Figura. 3.19B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=9$ ,  $w=5$ )

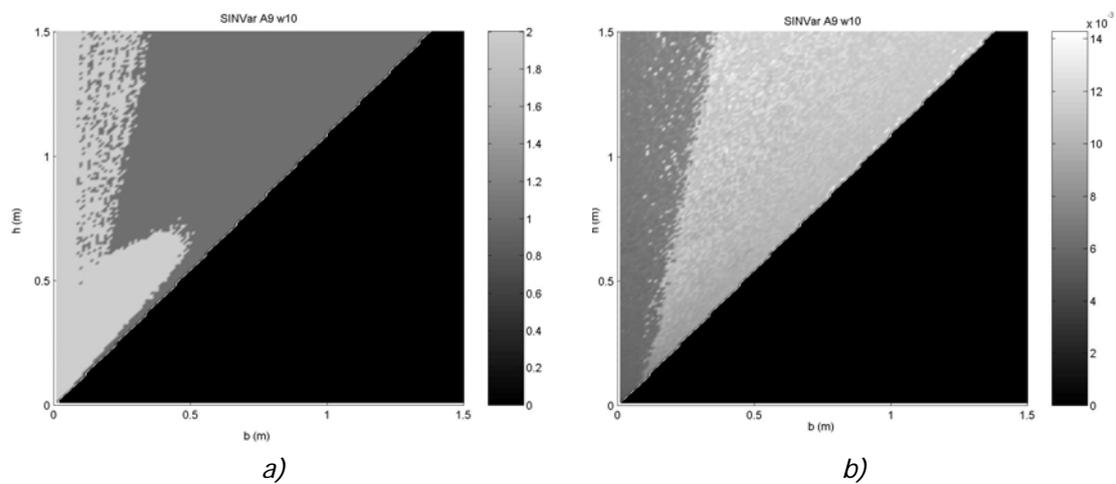


Figura. 3.19C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un seno de amplitud variable ( $A_{max}=9$ ,  $w=10$ )

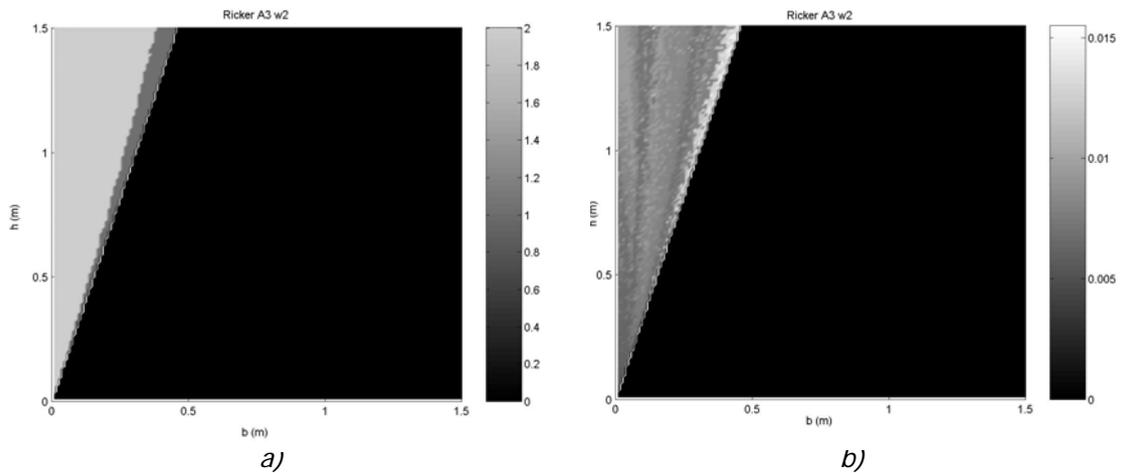
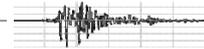


Figura.3.20A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=3$ ,  $w=2$ )

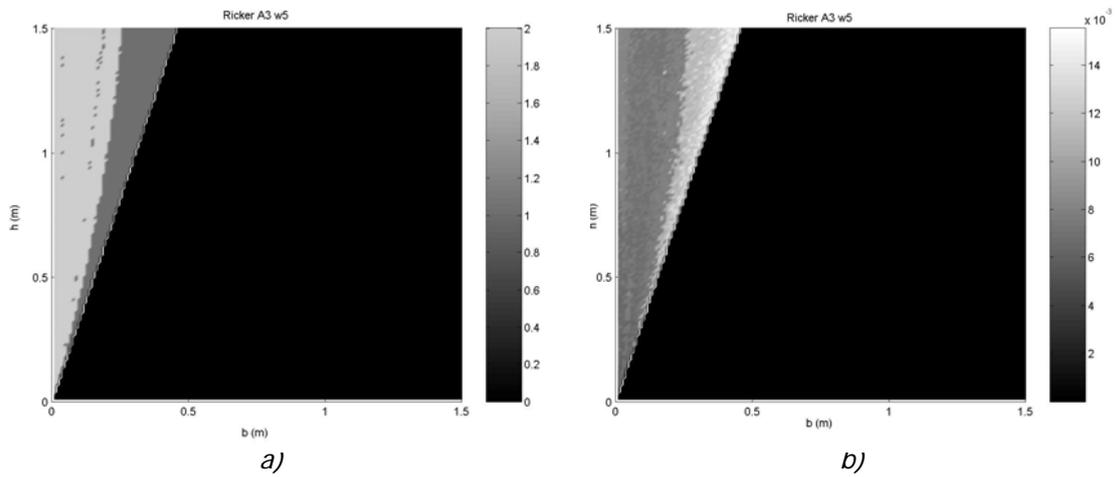


Figura.3.20B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=3$ ,  $w=5$ )

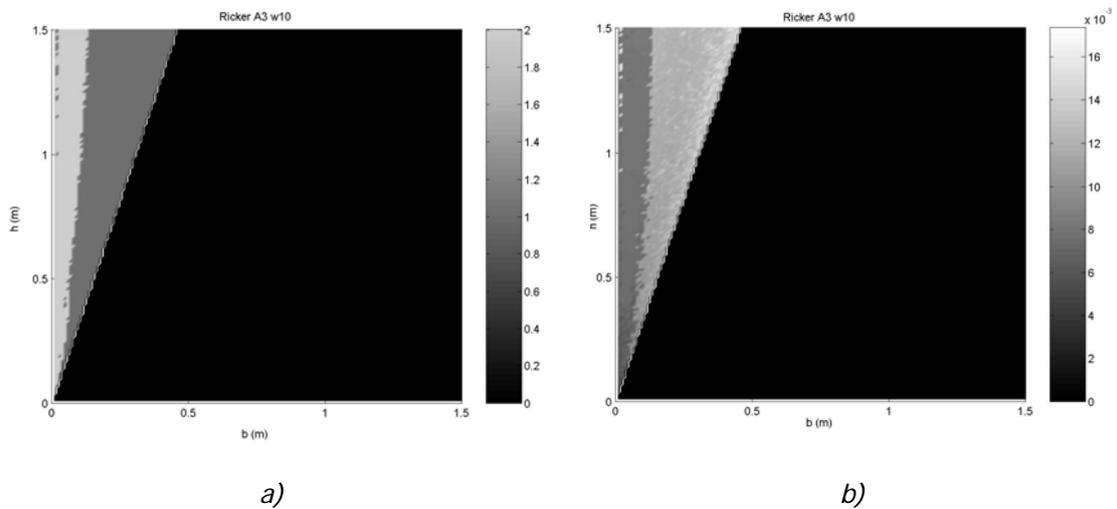


Figura.3.20C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=3$ ,  $w=10$ )

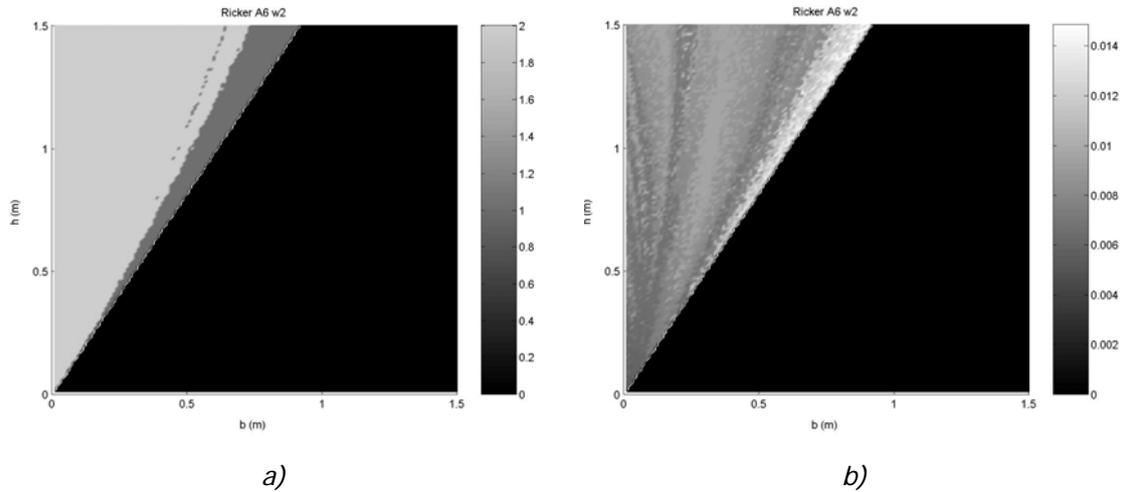
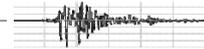


Figura.3.21A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=6$ ,  $w=2$ )

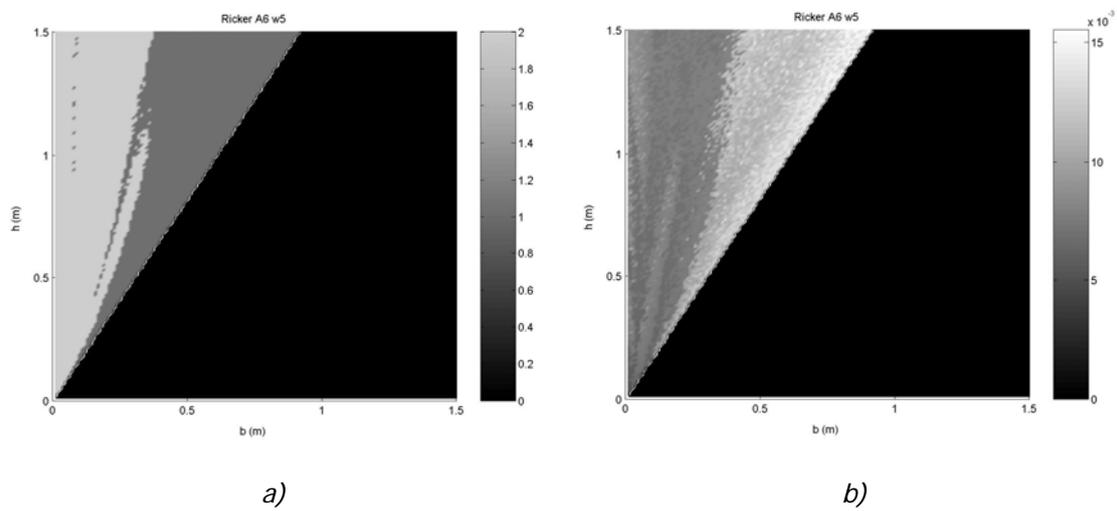


Figura.3.21B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=6$ ,  $w=5$ )

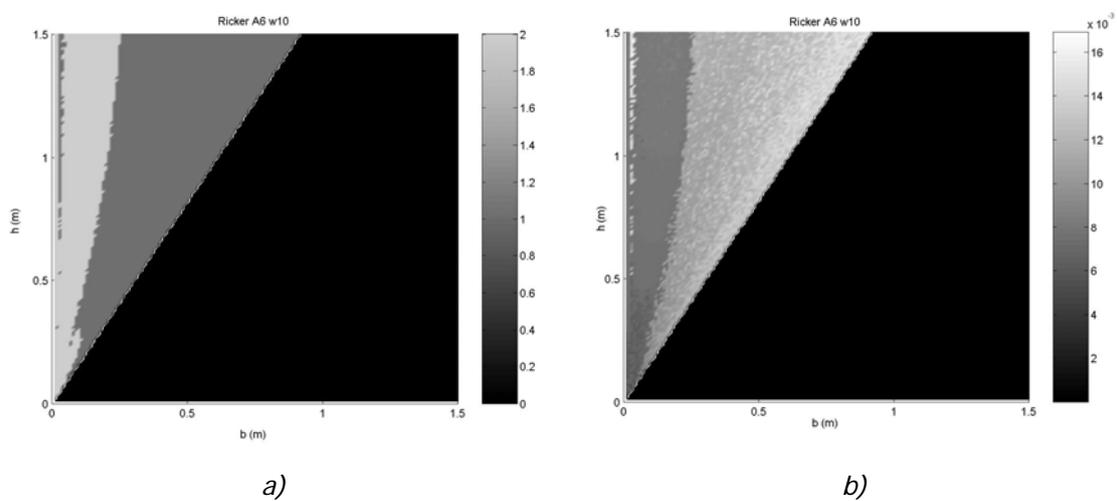


Figura.3.21C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=6$ ,  $w=10$ )

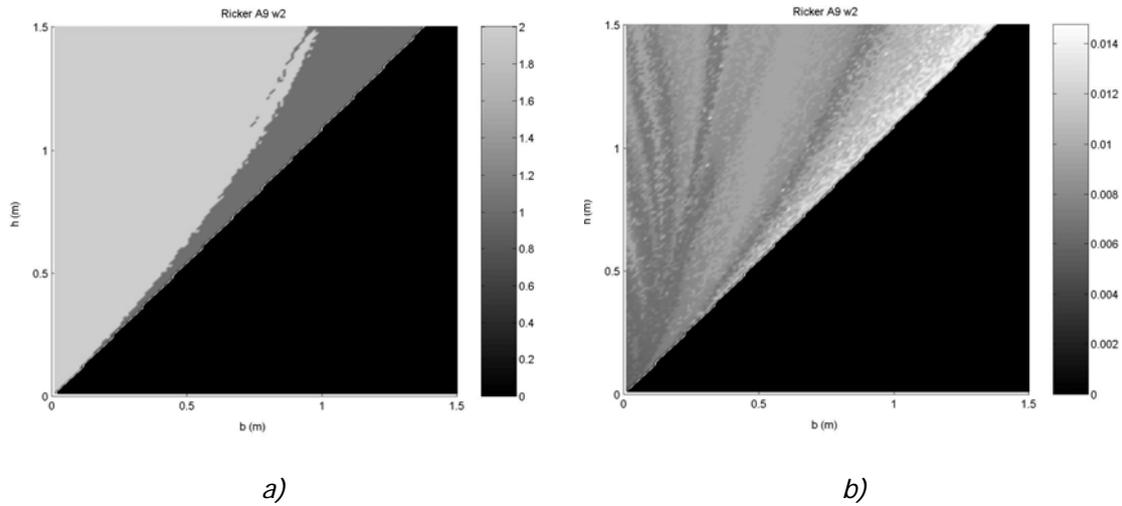
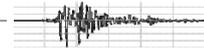


Figura. 3.22A. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=9$ ,  $w=2$ )

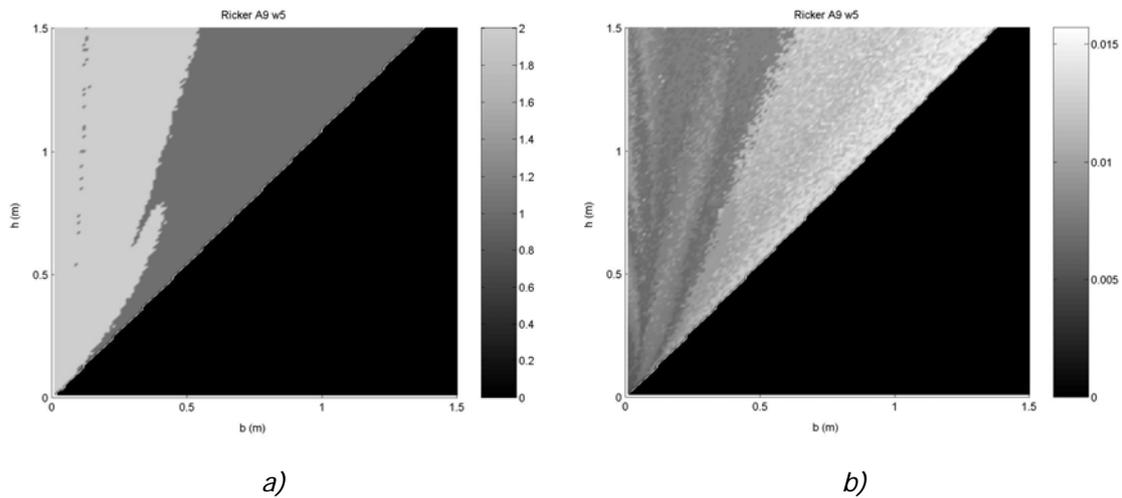


Figura. 3.22B. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=9$ ,  $w=5$ )

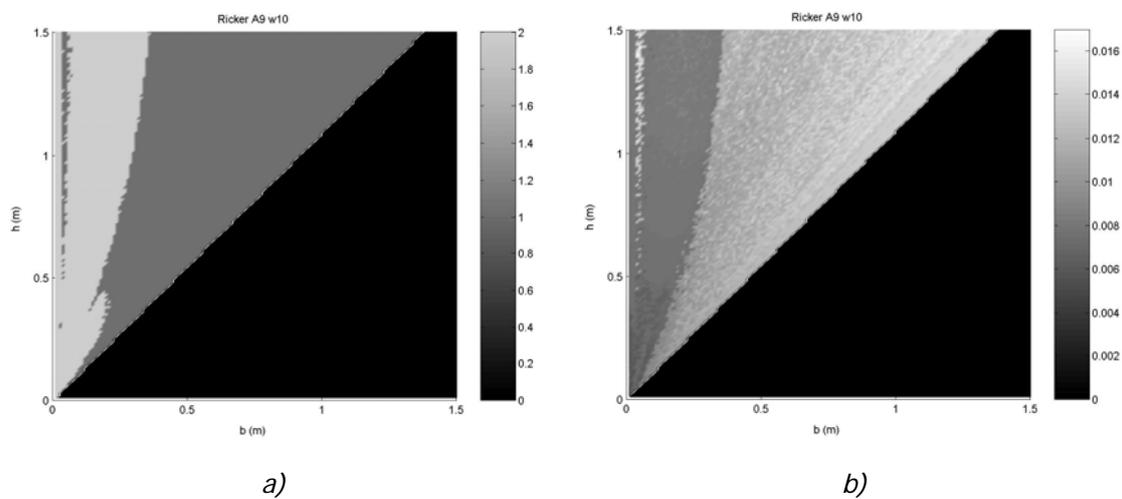


Figura. 3.22C. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para un pulso Ricker ( $A=9$ ,  $w=10$ )



Las superficies que muestran el modo de respuesta para cada cuerpo en función de su geometría y esbeltez funcionan de la siguiente forma: cuando el valor es cero permanecerán en reposo, si es igual a uno se comportará en balanceo y si alcanza un valor de dos es muy probable la ocurrencia del volteo.

Tanto las superficies en las que se determinan los intervalos de muestreo óptimos, como en las que muestran los modos de respuesta fueron calculadas partiendo de un intervalo de muestreo inicial  $\Delta t=0.04$ . Para generalizar estos resultados para cualquier valor inicial de  $\Delta t$  se establece la siguiente expresión

$$\frac{\Delta t_{inicial}}{\Delta t_{opt}} = \varphi \quad (3.39)$$

Donde  $\varphi$  está determinado por la relación entre el intervalo de muestreo óptimo y el inicial utilizado ( $\Delta t = 0.04$ ).

### III.4. ESCALAMIENTO DE REGISTROS ACCELEROMÉTRICOS

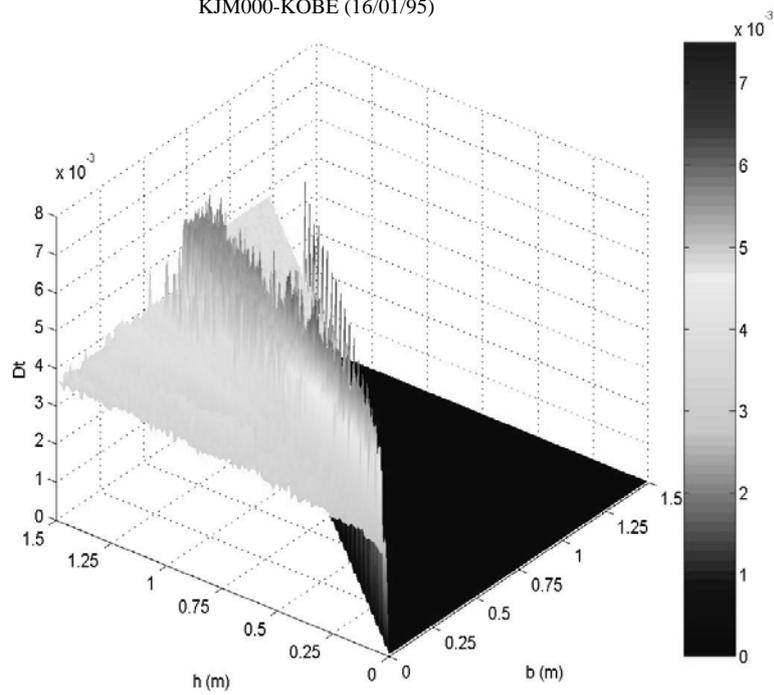
Para el caso de registros acelerométricos el escalamiento se torna más complejo debido principalmente al rico contenido de frecuencias y grandes variaciones en las aceleraciones máximas que los caracterizan. Por esta razón, para escalar la señal acelerométrica en la simulación de la respuesta dinámica de un contenido se propone el uso del intervalo de muestreo óptimo encontrado de la misma manera que para las señales armónicas, con lo que se está asumiendo que se modificará el contenido de frecuencias en una proporción adecuada, introduciendo la cantidad de energía necesaria para producir el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en el que actuará. La consistencia de lo anterior se comprueba comparando la respuesta dinámica de prototipos y sus respectivos modelos a escala (Capítulo V), sujetos a la acción de los sismos descritos en la tabla 3.2

SISMO	ESTACIÓN	FECHA	LUGAR	A (m/s <sup>2</sup> )	V (m/s)	D (m)	$\omega$ (rad/s)
Imperial Valley	El Centro	1979	California, EU	3.3	0.89	0.66	2.15
Sn Fernando	Pacoima	1971	California, EU	9.53	1.16	0.36	4.37
Parkfield	Shandon	1966	California, EU	4.76	0.76	0.31	9.11
Michoacán	SCT19	1985	Michoacán, México	1.68	0.61	0.28	3.07
Northridge	Sylmar	1994	California, EU	8.27	1.29	0.34	4.3
Northridge	Rinaldi	1994	California, EU	8.26	1.75	0.48	4.6
Irpinia	ASTU270	1980	Italia	3.51	0.53	0.33	2.51
Loma Prieta	CAP090	1989	California, EU	4.35	0.29	0.06	9.49
Chi Chi	CHY006	1999	Chi Chi, Taiwan	3.57	0.55	0.26	3.13
Kocaeli	DZC270	1999	Turquía	3.51	0.46	0.18	3.37
Big Bear	HOS180	1992	California, EU	0.99	0.12	0.03	3.61
Landers	JOS090	1992	California, EU	2.79	0.43	0.14	8.61
Kobe	KJM000	1995	Kobe, Japón	8.06	0.81	0.18	9.05
Landers	NPS090	1992	California, EU	1.31	0.15	0.06	3.22

Tabla 3.2. Registros acelerométricos de prueba



KJM000-KOBE (16/01/95)



SYLMAR-NORTHRIDGE (17/01/94)

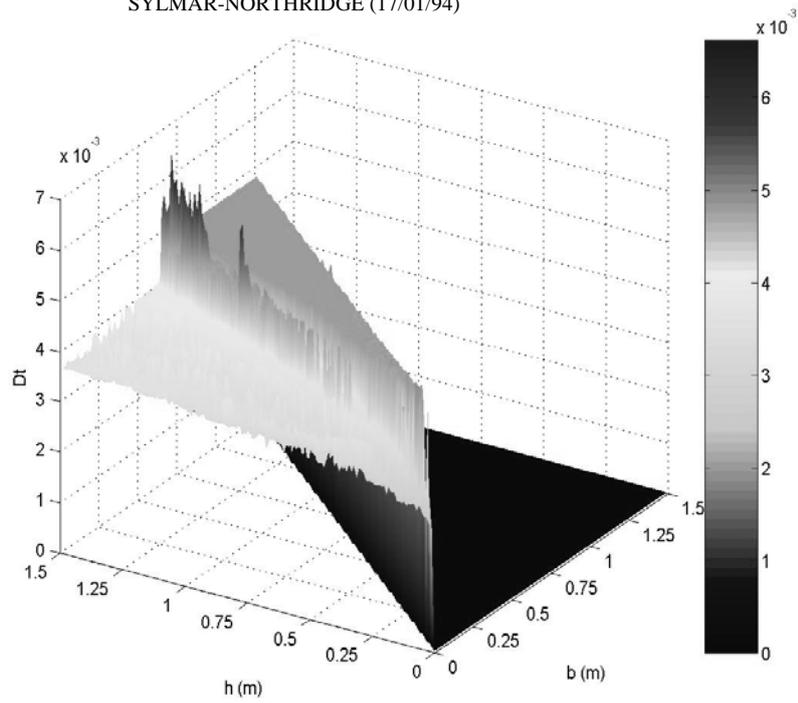


Figura.3.23. Superficies de Convergencia (Intervalo de muestreo óptimo)

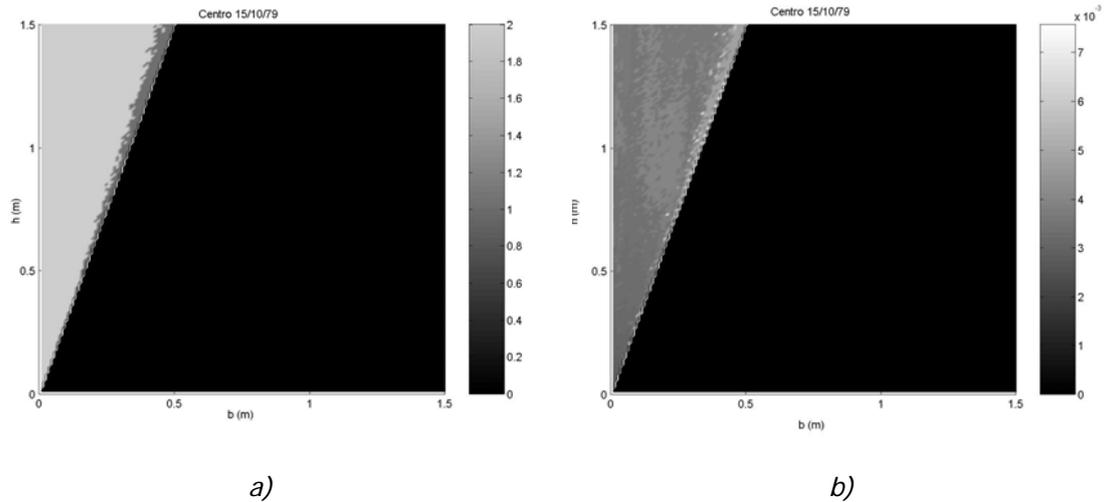
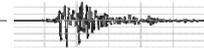


Figura.3.24. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Imperial Valley

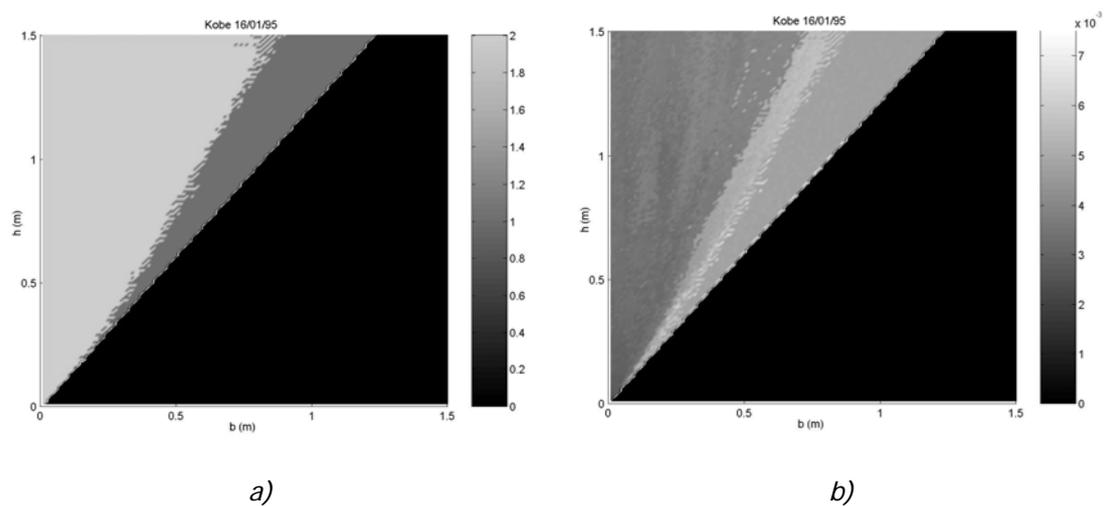


Figura.3.25. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Kobe

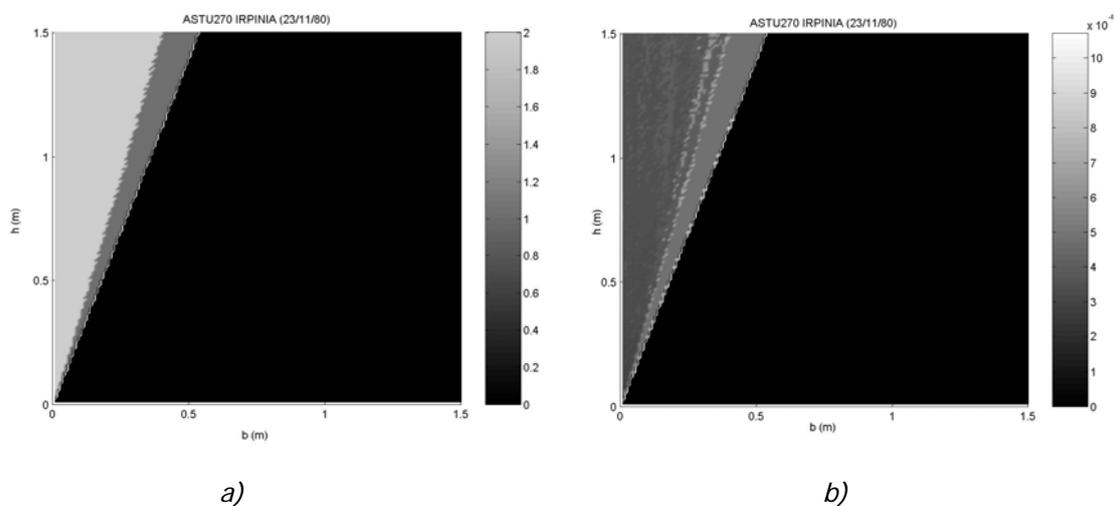


Figura.3.26. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Irpinia

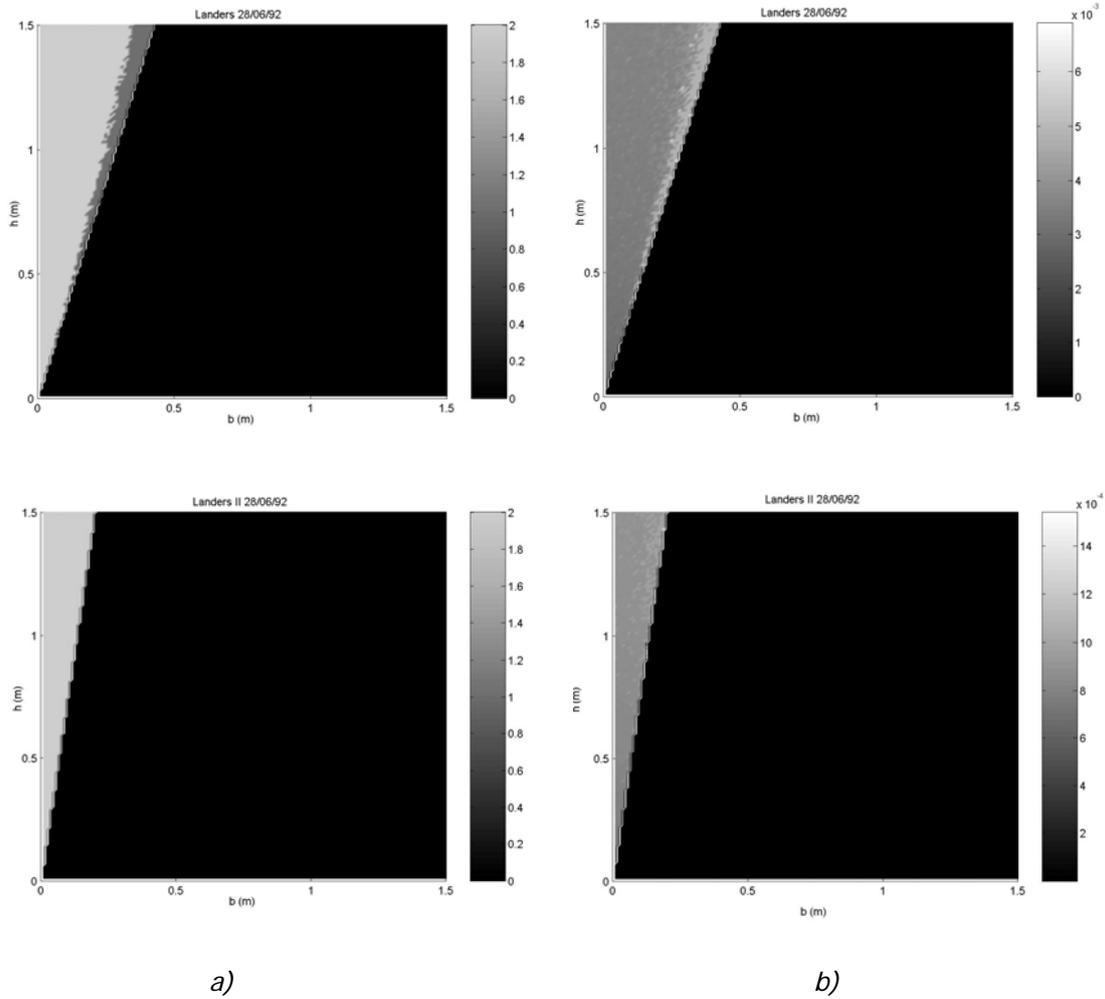
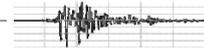


Figura.3.27. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Landers registrado en las estaciones JOS090 (arriba) y NPS090 (abajo)

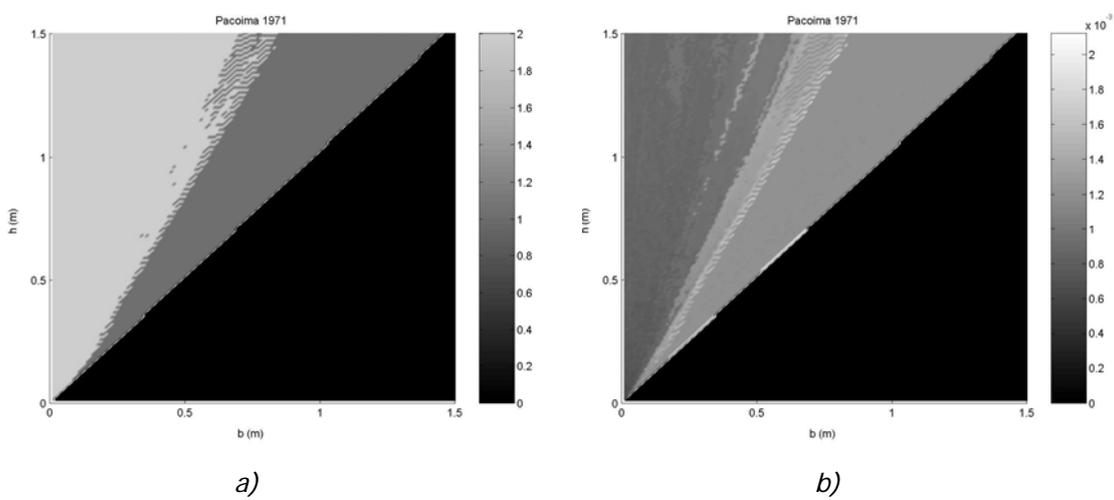


Figura.3.28. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de San Fernando

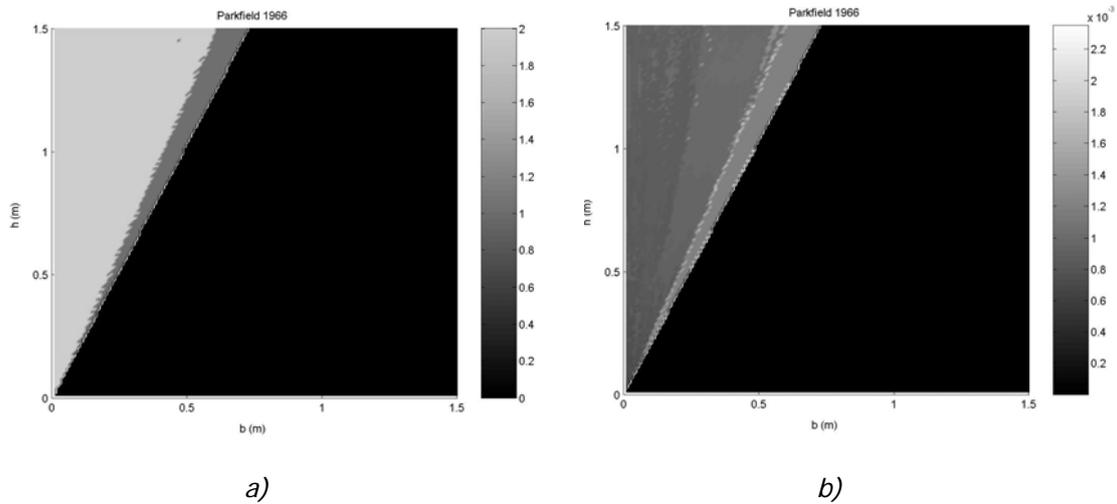


Figura.2.29. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Shendon

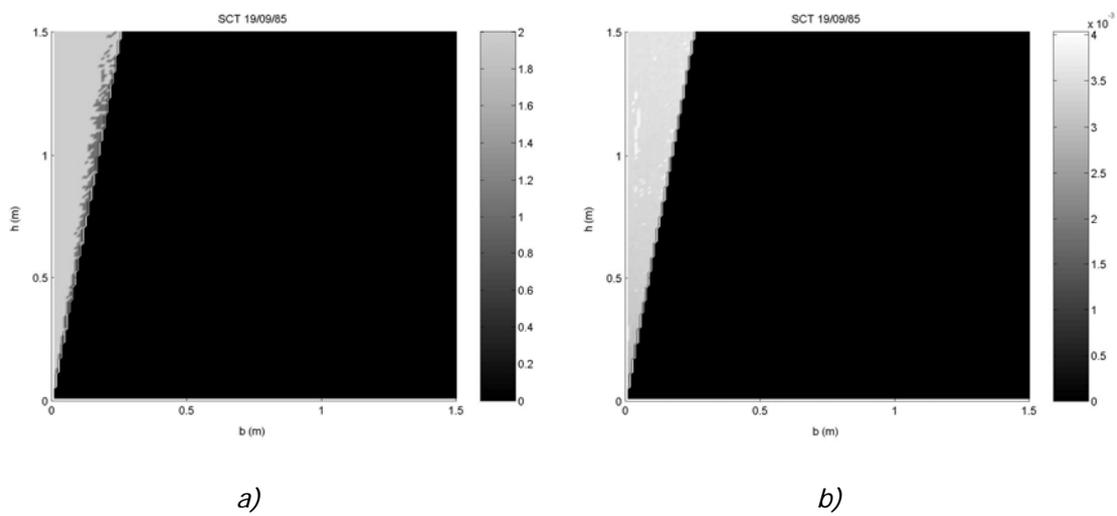


Figura.3.30. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de la Ciudad de México

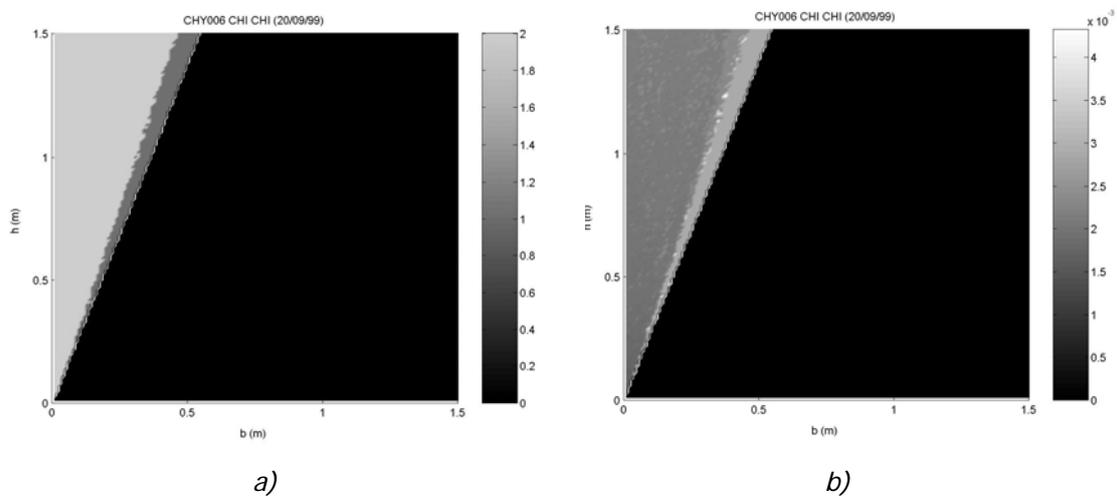


Figura.3.31. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Chi Chi Taiwan

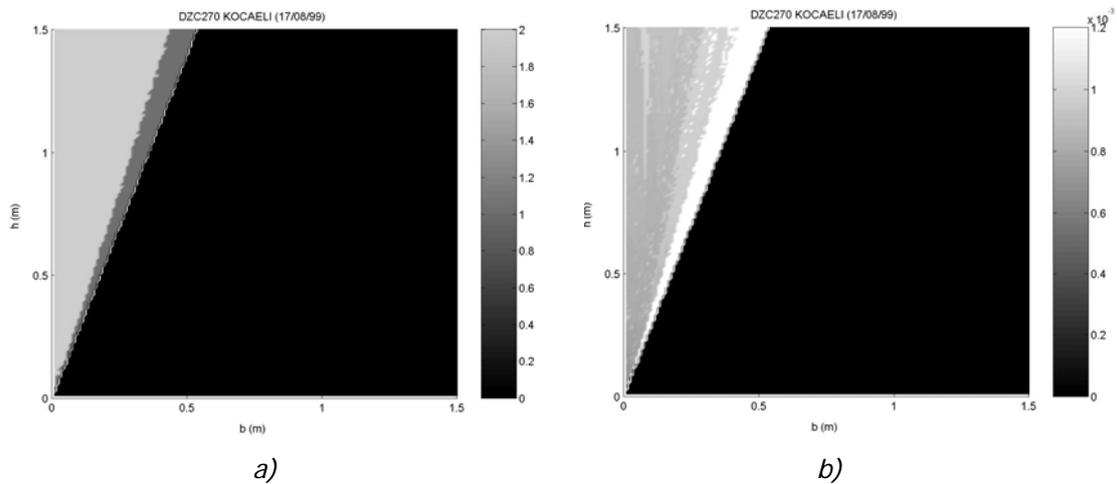
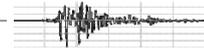


Figura.3.32. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Kocaeli

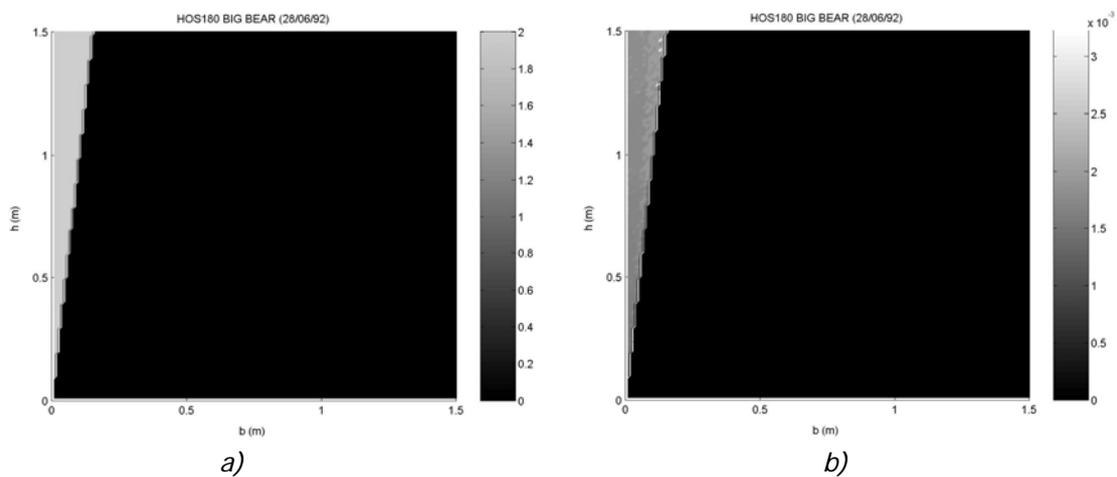


Figura.3.33. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Big Bear

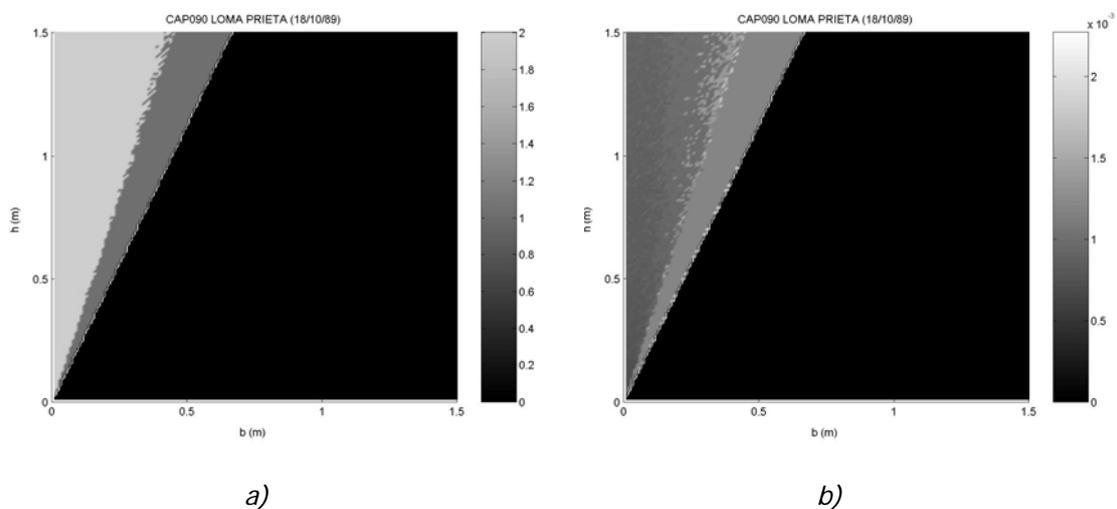
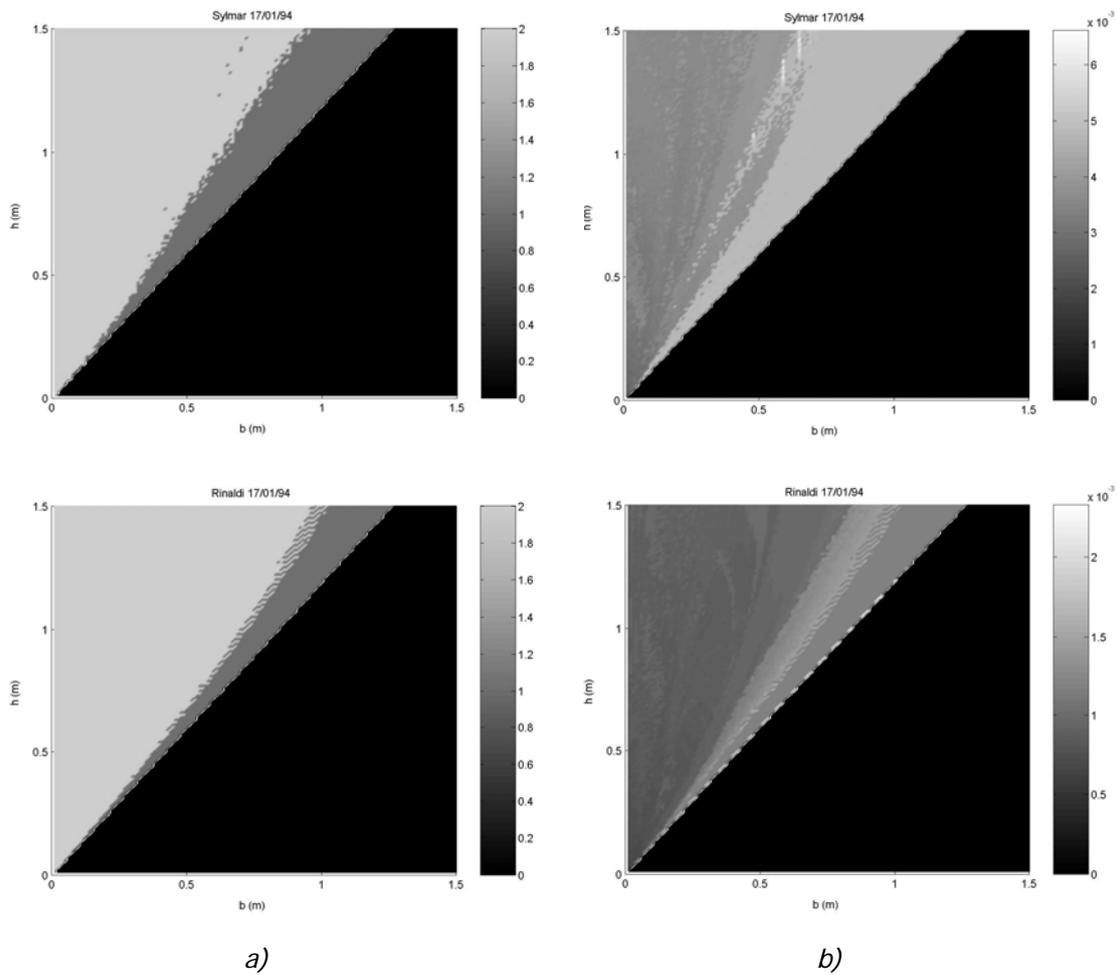
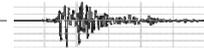


Figura.3.34. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Loma Prieta



*Figura. 3.35. a) Modo de respuesta y b) Superficie de convergencia del intervalo de muestreo óptimo para el sismo de Northridge registrado en las estaciones Sylmar (arriba) y Rinaldi (abajo)*

Con la ayuda de éstas gráficas se pueden seleccionar cuerpos rígidos que presenten modos de respuesta de interés (balanceo o volteo), así como definir el intervalo de muestreo óptimo de la señal de entrada que lo lleve al comportamiento previsto.



## CAPÍTULO IV

### IV. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS

En este capítulo se presenta el cálculo analítico de la respuesta dinámica de diversos contenidos, a los que consideraremos como prototipos, y sus respectivos modelos a escala. Los prototipos corresponden a cuerpos localizados aleatoriamente en distintas edificaciones, tales como equipo médico, piezas de arte, mobiliario, electrodomésticos, entre otros.

De acuerdo a lo anterior, se tienen diversas relaciones de esbeltez y se han escalado para factores de  $n=2$  y  $3$ . Las excitaciones bajo las que se probaron estos cuerpos rígidos corresponden a las acciones armónicas estudiadas y a un grupo de 14 sismos registrados en diferentes partes del mundo (tabla 3.2).

Las características geométricas y relaciones de esbeltez de todos los prototipos y sus respectivos modelos a escala se presentan en la tabla 4.1.

ID	Prototipos n=1					Modelos n=2		Modelos n=3	
	b (m)	h (m)	h/b	$\alpha^\circ$	R	b (m)	h (m)	B (m)	h (m)
C1	0.250	0.500	2.00	27.5	0.56	0.125	0.250	0.083	0.167
C2	0.250	0.700	2.80	20.0	0.74	0.125	0.350	0.083	0.233
C3	0.250	1.000	4.00	14.0	1.03	0.125	0.500	0.083	0.333
C4	0.250	1.500	6.00	10.0	1.52	0.125	0.750	0.083	0.500
C5	0.350	0.950	2.71	30.0	1.01	0.175	0.475	0.117	0.317
C6	0.375	0.650	1.73	20.0	0.75	0.188	0.325	0.125	0.217
C7	0.500	0.825	1.65	30.0	0.96	0.250	0.413	0.167	0.275
C8	0.500	1.000	2.00	27.5	1.12	0.250	0.500	0.167	0.333
C9	0.500	1.400	2.80	20.0	1.49	0.250	0.700	0.167	0.467
C10	0.750	1.300	1.73	30.0	1.50	0.375	0.650	0.250	0.433
C11	0.750	1.500	2.00	26.5	1.68	0.375	0.750	0.250	0.500

Tabla 4.1. Dimensiones de los prototipos y modelos a escala reducida

Los resultados se presentan en dos bloques separados, primero se muestran las respuestas de los prototipos y sus respectivos modelos sujetos a excitaciones armónicas y, posteriormente, bajo sismos registrados.

Para la selección de los cuerpos en los que se aplicará el análisis dimensional se determinaron curvas de volteo en función de cada tipo de excitación y, analizando las zonas de reposo, balanceo y posible volteo de cada cuerpo respecto a su relación de esbeltez y geometría, así como bajo el criterio de cuerpos que caracterizan contenidos localizados comúnmente en edificios, se eligieron los 11 prototipos mostrados en las figuras 4.1-4.4.

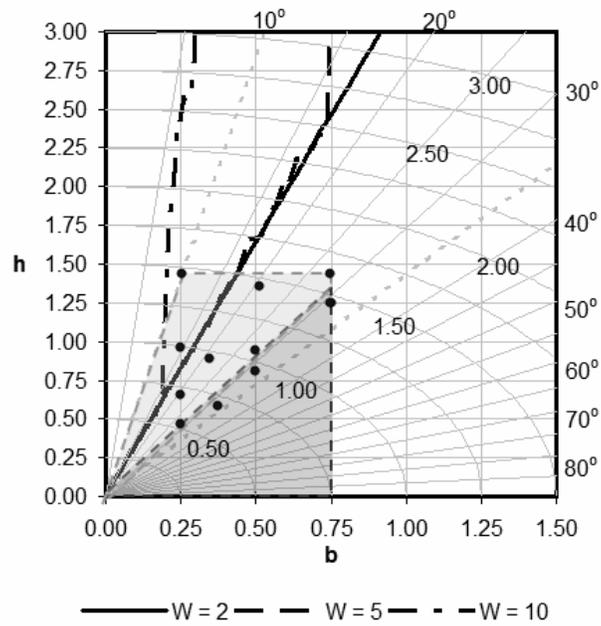


Figura. 4.1. Curvas de volteo para funciones senoidales de amplitud variable

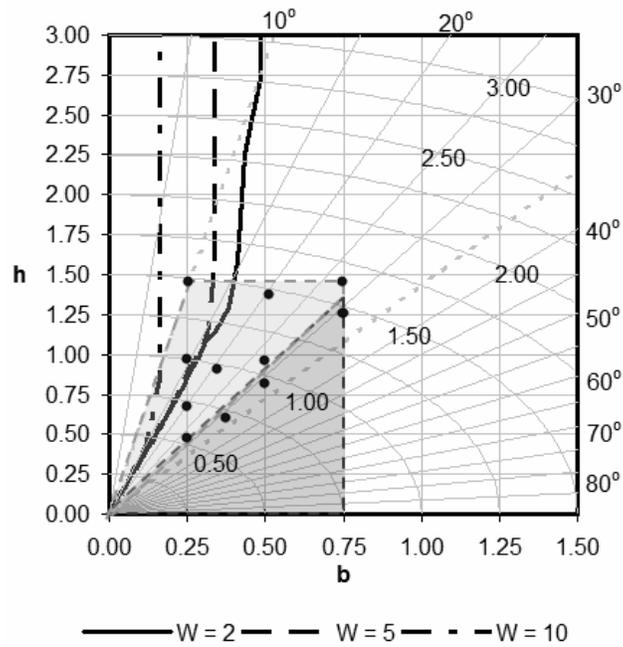


Figura.4.2. Curvas de volteo para funciones senoidales de amplitud constante

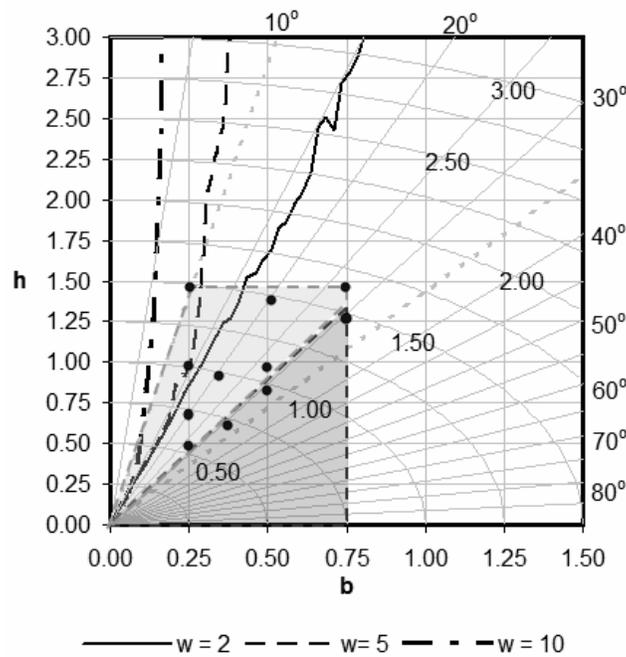


Figura.4.3. Curvas de volteo para pulso Ricker

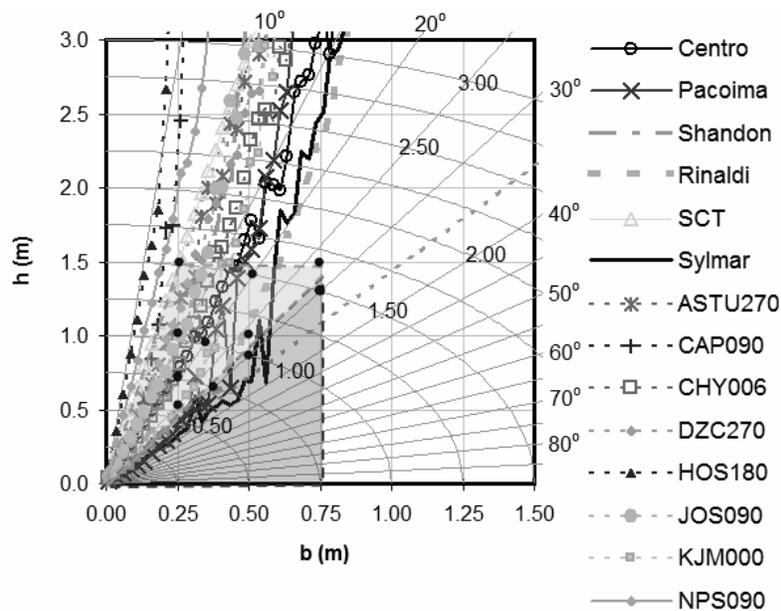
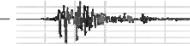


Figura.4.4. Curvas de volteo para sismos registrados en diferentes partes del mundo

Los cuerpos seleccionados para este estudio se agruparon en función de su igualdad en dimensiones  $b$  y  $h$  y relación de esbeltez  $h/b$  con la finalidad de obtener resultados comparables al estar sujetos a las mismas excitaciones en su base.



Los grupos se conformaron como se muestra

- GRUPO A.- Cuerpos con la misma dimensión  $b$  (base)

ID	$b$ (m)	$h$ (m)	$h/b$	$\alpha^\circ$	R
C1	<b>0.250</b>	0.500	2.00	27.5	0.56
C2	<b>0.250</b>	0.700	2.80	20.0	0.74
C3	<b>0.250</b>	1.000	4.00	14.0	1.03
C4	<b>0.250</b>	1.500	6.00	10.0	1.52

Tabla 4.2. Grupo A

- GRUPO B.- Cuerpos con la misma dimensión  $h$  (altura)

ID	$b$ (m)	$h$ (m)	$h/b$	$\alpha^\circ$	R
C3	0.250	<b>1.000</b>	4.00	14.0	1.03
C8	0.500	<b>1.000</b>	2.00	27.5	1.12

Tabla 4.3. Grupo B

- GRUPO C.- Cuerpos con la misma relación de esbeltez  $h/b$

ID	$b$ (m)	$h$ (m)	$h/b$	$\alpha^\circ$	R
C1	0.250	0.500	<b>2.00</b>	27.5	0.56
C8	0.500	1.000	<b>2.00</b>	27.5	1.12
C11	0.750	1.500	<b>2.00</b>	26.5	1.68

Tabla 4.4. Grupo C1

ID	$b$ (m)	$h$ (m)	$h/b$	$\alpha^\circ$	R
C2	0.250	0.700	<b>2.80</b>	20.0	0.75
C9	0.500	1.400	<b>2.80</b>	20.0	1.50

Tabla 4.5. Grupo C2

ID	$b$ (m)	$h$ (m)	$h/b$	$\alpha^\circ$	R
C6	0.375	0.650	<b>1.73</b>	20.0	0.75
C10	0.750	1.300	<b>1.73</b>	30.0	1.50

Tabla 4.6. Grupo C3

#### IV.1. BALANCEO Y POSIBLE VOLTEO DE CUERPOS RÍGIDOS ANTE EXCITACIONES ARMÓNICAS

En este apartado se presenta la respuesta dinámica de los cuerpos rígidos seleccionados sujetos a la acción de las excitaciones analíticas descritas anteriormente. El orden en que se muestran estos resultados corresponde primero a los cuerpos que experimentan balanceo, luego aquellos cuerpos que se volcaron y, por último se comparan las respuestas de los cuerpos pertenecientes a cada grupo, esto con la intención de observar si alguno de los parámetros geométricos considerados resultan determinantes en el comportamiento dinámico.



#### IV.1.1. Comportamiento de los Cuerpos pertenecientes al Grupo A

- Balanceo

Dentro del grupo A sólo experimentaron balanceo los cuerpos C3 y C4.

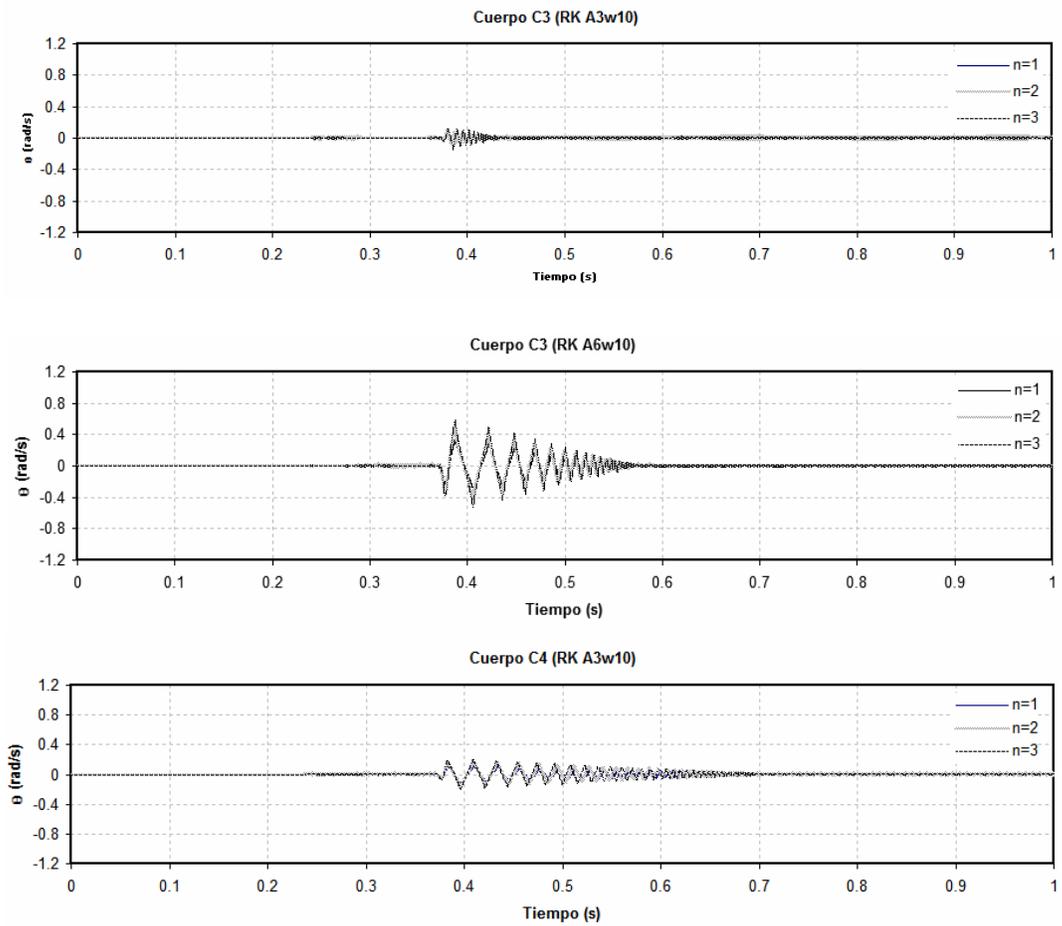
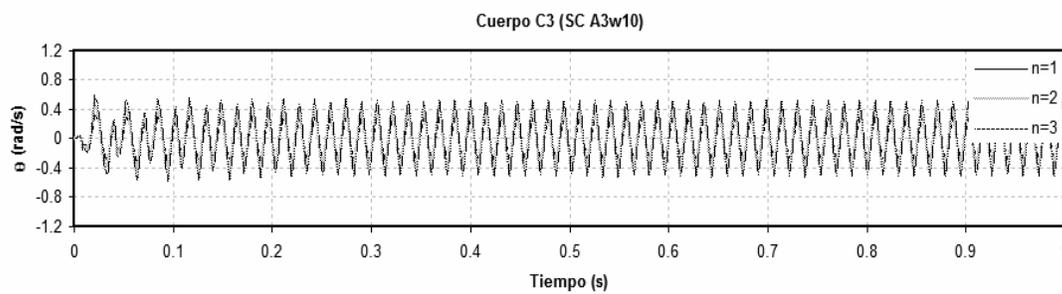


Figura.4.5. Balanceo de los cuerpos C3 y C4 ante pulsos Ricker



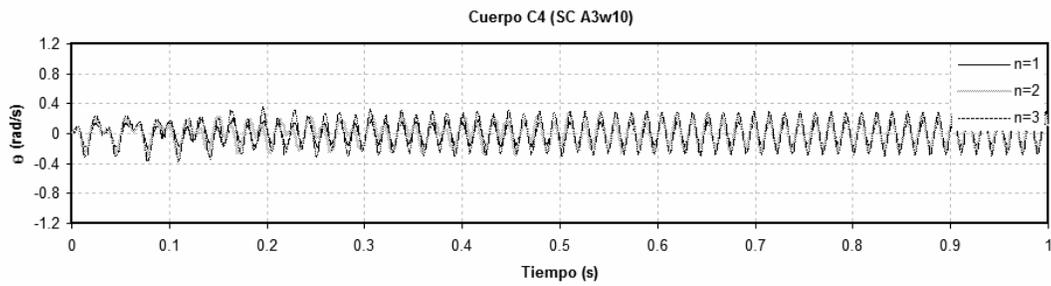


Figura.4.6. Balanceo de los cuerpos C3 y C4 ante senoidales de amplitud constante

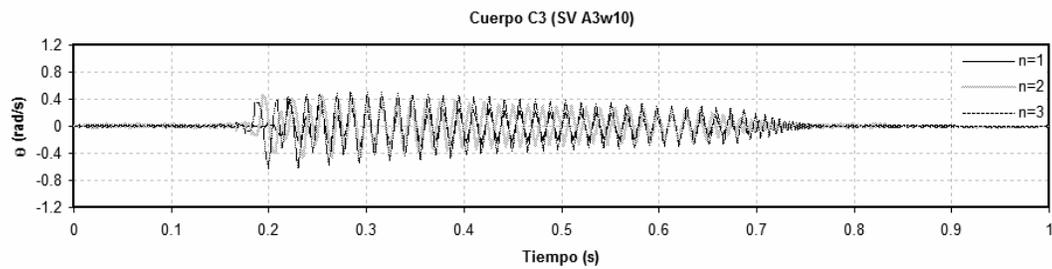
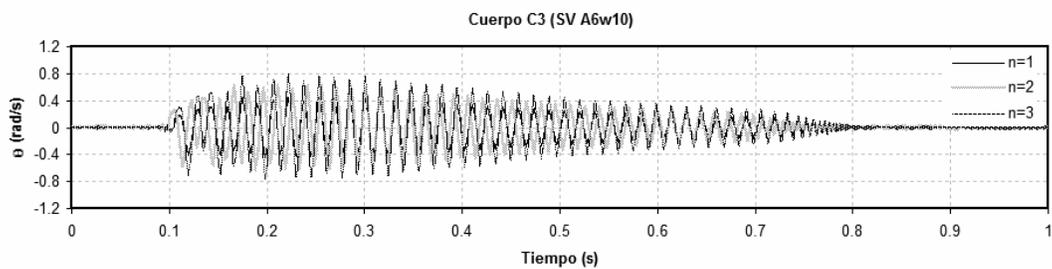
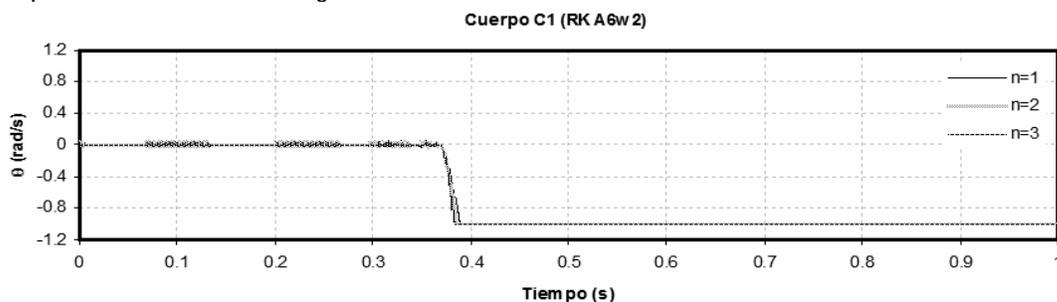


Figura.4.7. Balanceo de los cuerpos C3 y C4 ante senoidales de amplitud variable

En estas figuras se observa un comportamiento muy similar entre el prototipo y sus modelos, lo cual indica que el escalamiento de la frecuencia de la señal es consistente para estos cuerpos específicamente.

- **Volteo**

Este modo de respuesta se presentó en los cuatro prototipos del grupo de cuerpos para las excitaciones siguientes.



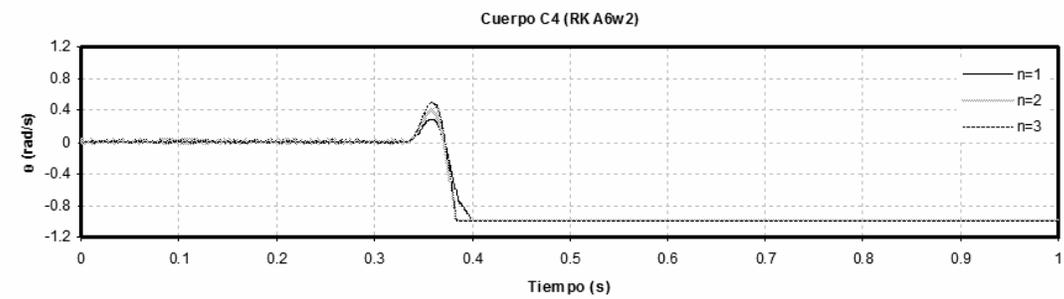
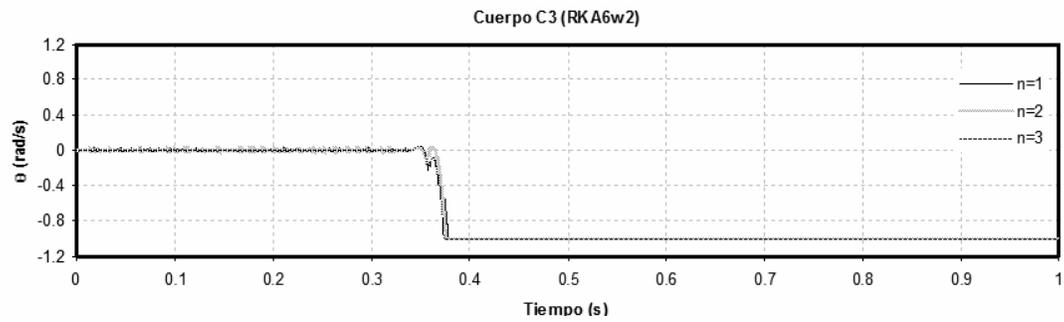
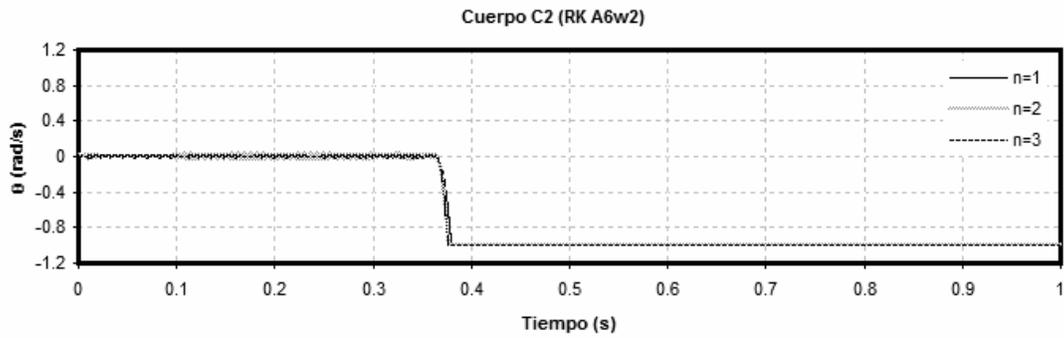


Figura. 4. 8. Volteo de cuerpos ante pulsos Ricker

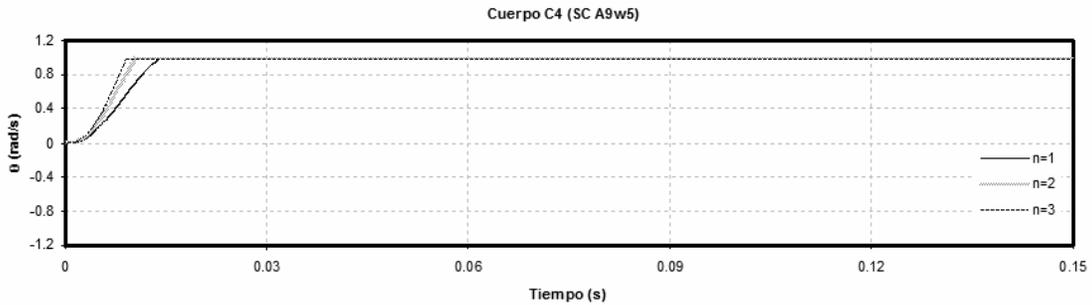
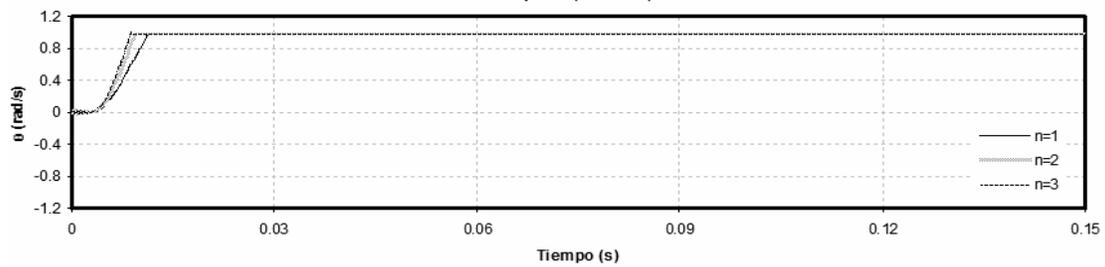


Figura. 4. 9. Volteo de cuerpos ante senoidales de amplitud constante

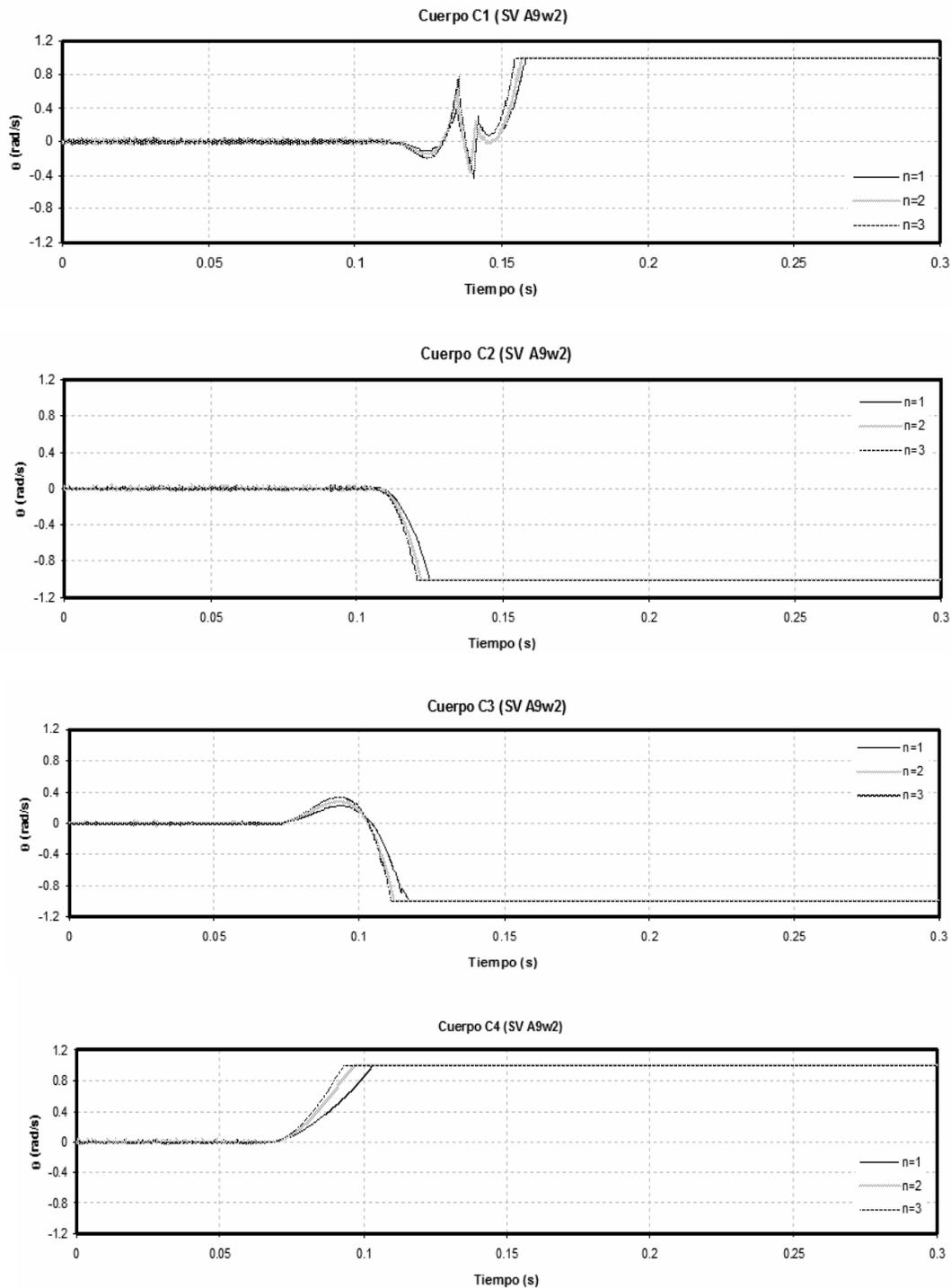


Figura. 4. 10. Volteo de cuerpos ante senoidales de amplitud variable

En las gráficas de volteo se muestra que cuanto más pequeño es el cuerpo, es decir mayor el factor de escalamiento, el volteo se anticipa en una mínima proporción, lo cual podría deberse a la interacción de los valores numéricos de un orden suficientemente pequeño para que las dimensiones reducidas y el intervalo de muestreo  $\Delta t$  de la señal alcancen el criterio de volteo antes.



- Comparación de la Respuesta Dinámica entre los Cuerpos del Grupo A

Aquí se presentan las respuestas en balanceo de los prototipos y modelos a escala sujetos a una excitación senoidal de amplitud constante

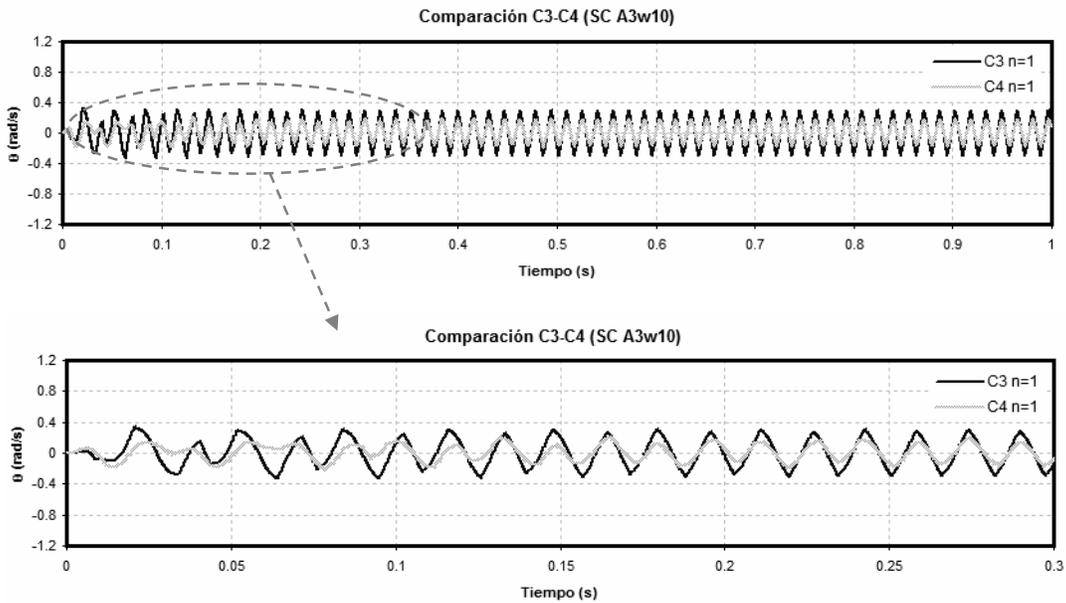


Figura. 4.11. Balanceo de los prototipos (cuerpos C3 y C4) ante una senoidal de amplitud constante

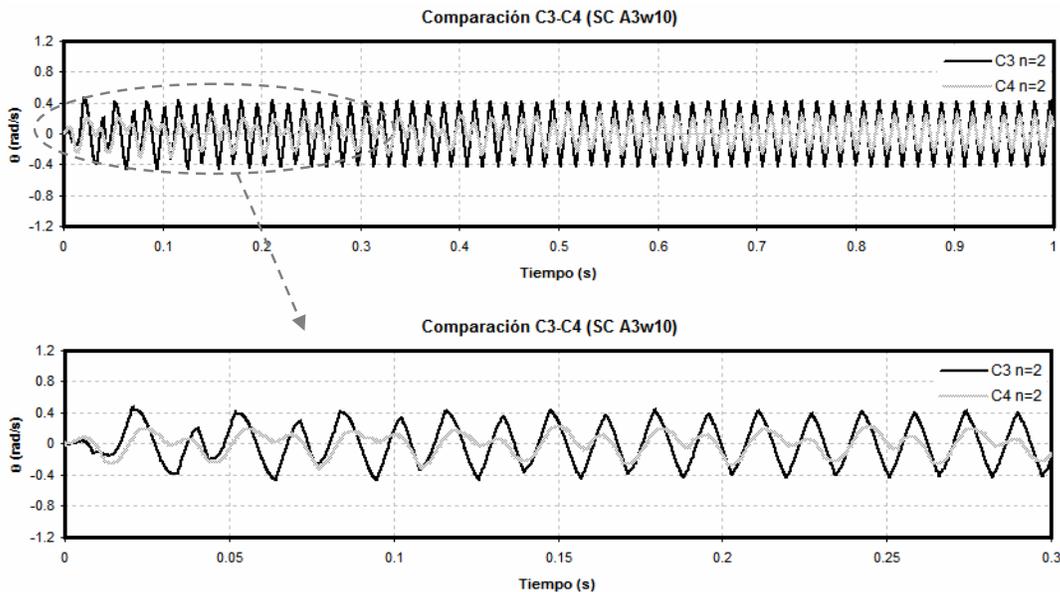


Figura. 4.12. Balanceo de los modelos escalados a  $n=2$  (de los cuerpos C3 y C4) ante una senoidal de amplitud constante

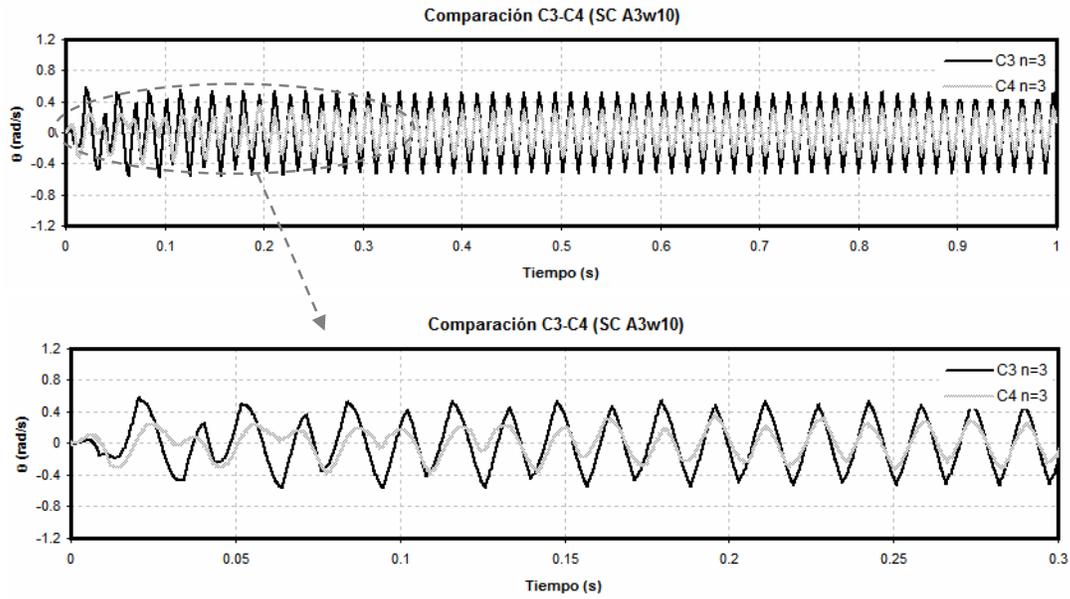


Figura. 4.13. Balanceo de los modelos escalados a  $n=3$  (de los cuerpos C3 y C4) ante una senoidal de amplitud constante

A continuación se presentan las respuestas en volteo de los cuatro prototipos ante los tres tipos de excitación analítica estudiadas

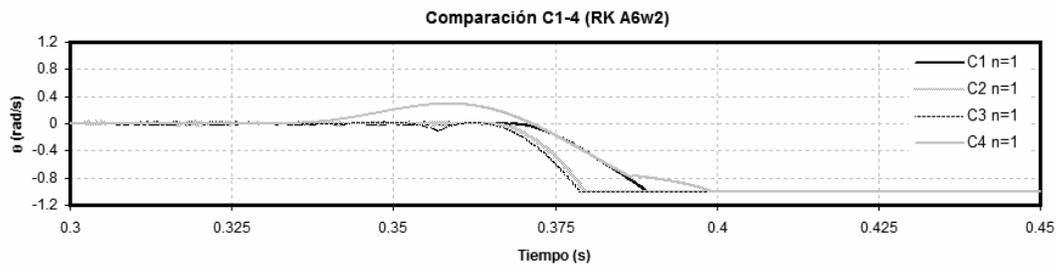


Figura.4.14. Volteo de los prototipos ante un pulso Ricker

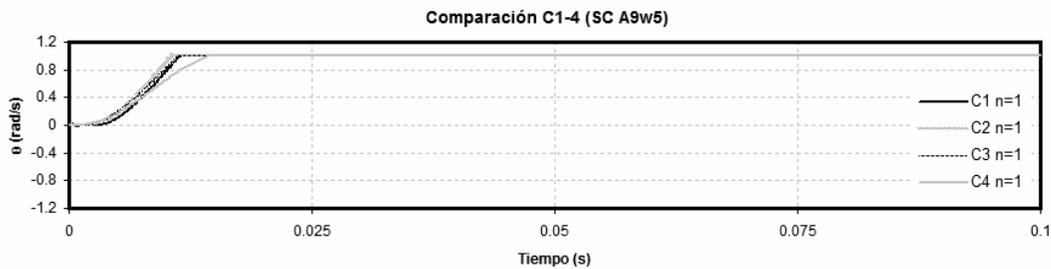


Figura. 4.15. Volteo de los prototipos ante una senoidal de amplitud constante

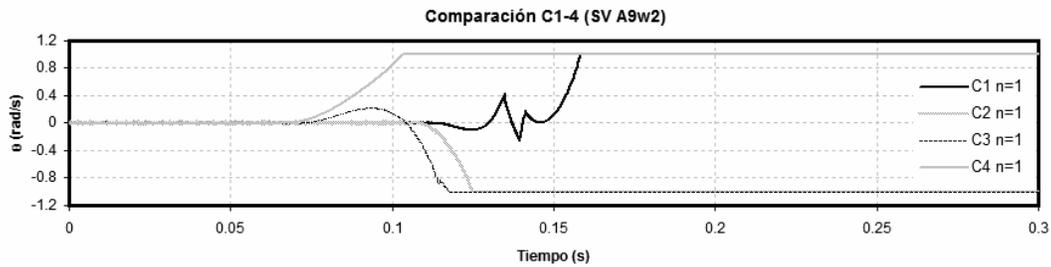


Figura.4.16. Volteo de los prototipos ante una senoidal de amplitud variable

Esta comparación de respuestas tanto para prototipos como modelos muestra que el parámetro geométrico  $b$  no tiene una influencia importante en el comportamiento de cuerpos rígidos al variar su altura o relación de esbeltez, sino que constituyen cuerpos con propiedades particulares.

#### IV.1.2. Comportamiento de los Cuerpos pertenecientes al Grupo B

- Balanceo

Dentro del grupo B los cuerpos C3 y C8 experimentaron balanceo y volteo.

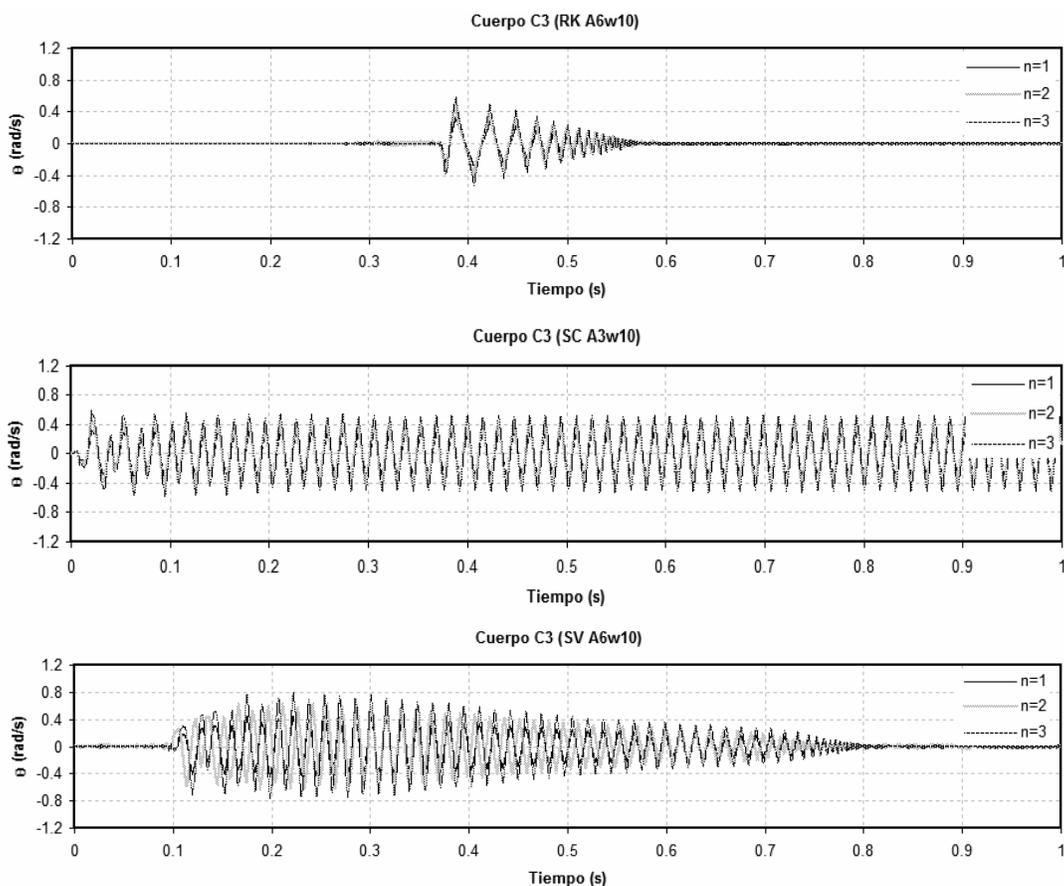


Figura. 4.17. Balanceo del prototipo C3 y sus modelos ante las señales analíticas

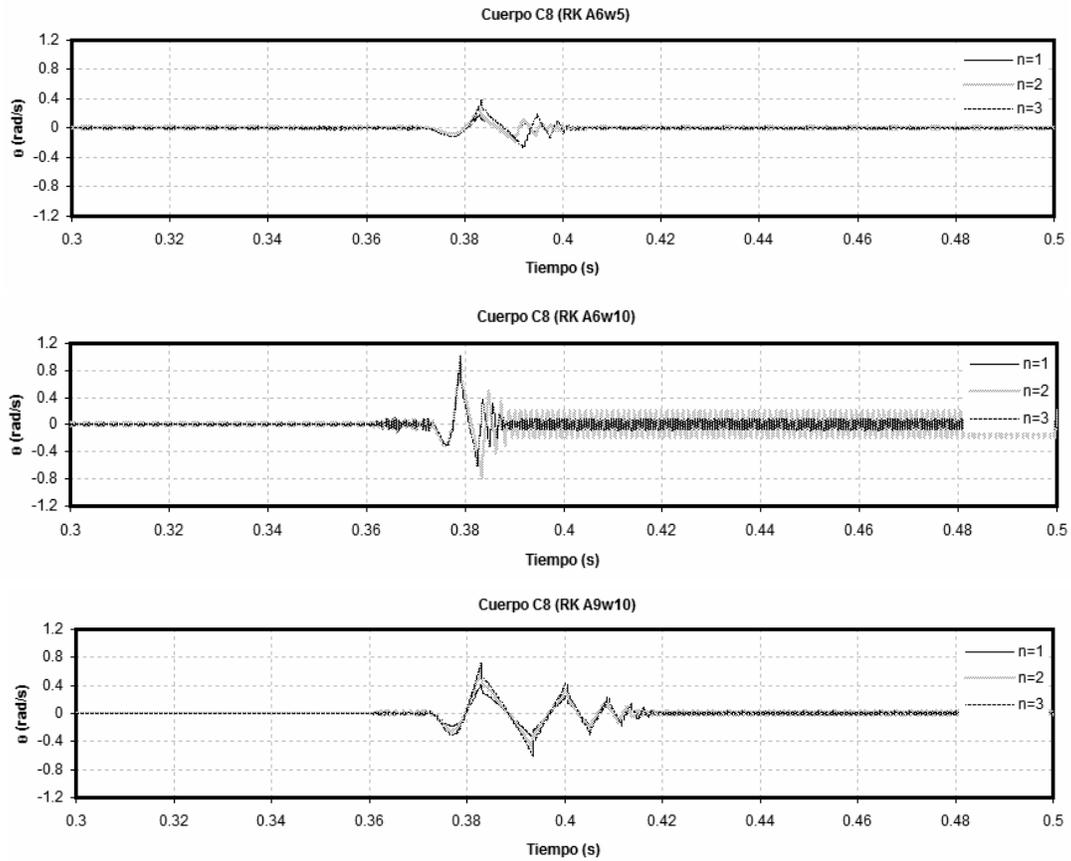
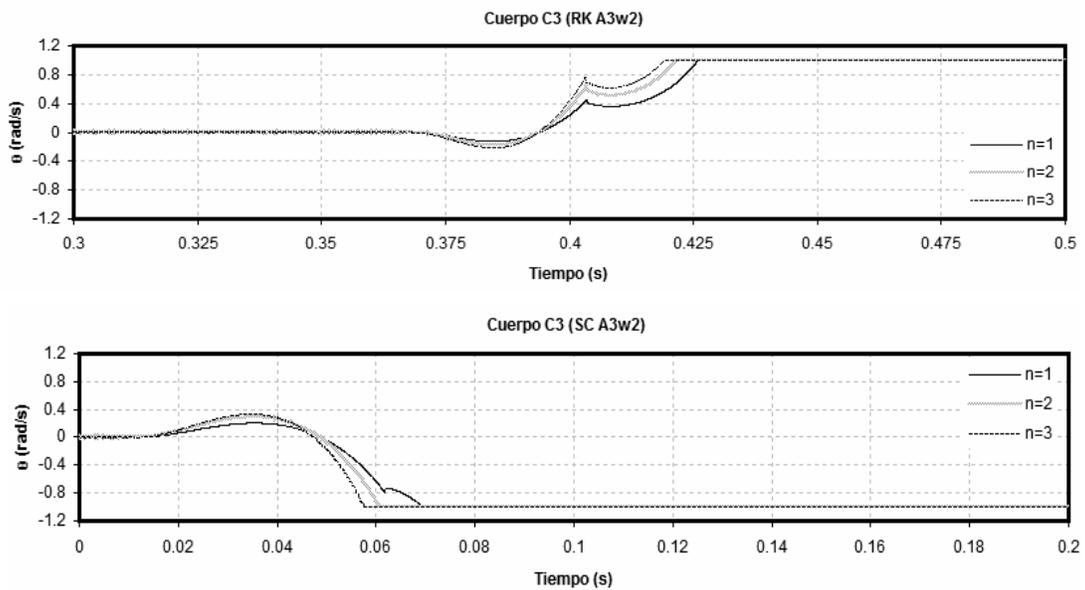


Figura.4.18. Balanceo del prototipo C8 y sus modelos ante las señales analíticas

#### ▪ Volteo

El volteo se presentó en los dos prototipos de este grupo para los tres tipos de excitación.



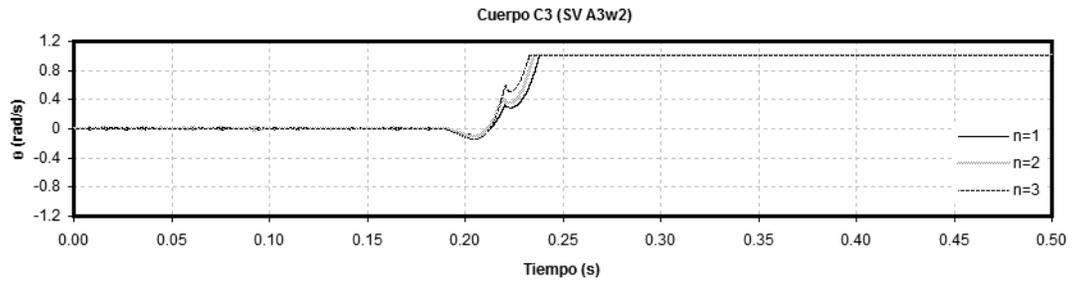


Figura.4.19. Volteo del prototipo C3 y sus modelos ante las señales analíticas

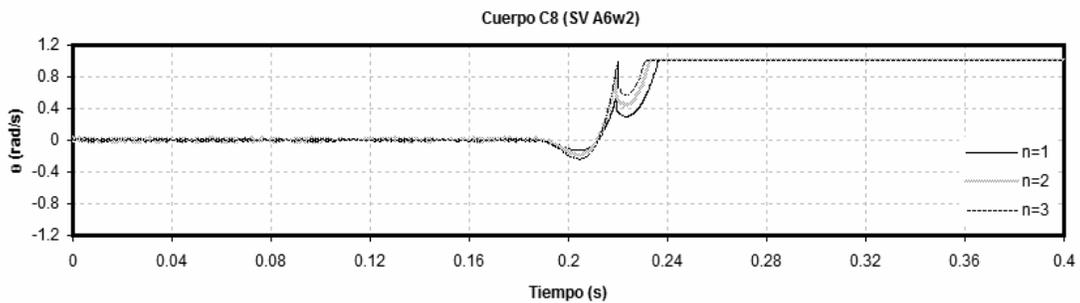
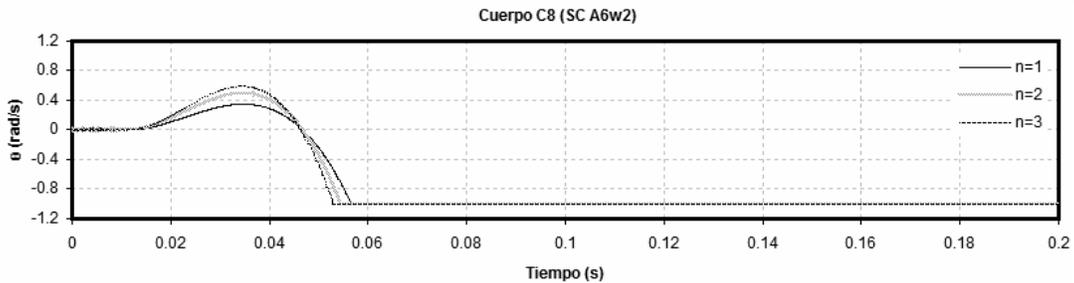
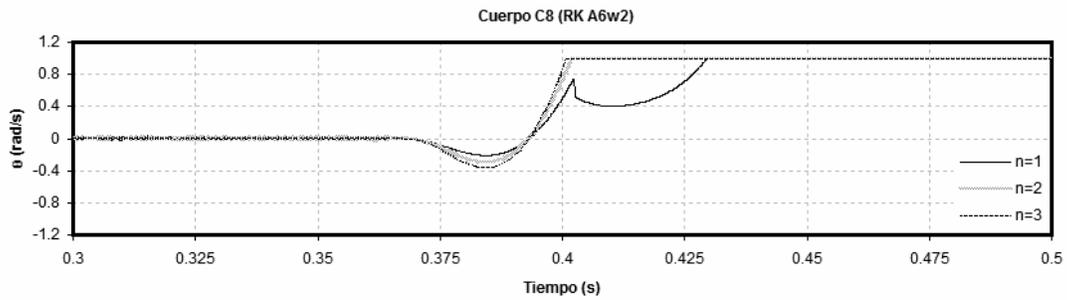


Figura.4.20. Volteo del prototipo C8 y sus modelos ante las señales analíticas

En las gráficas se vuelve a presentar el volteo ligeramente anticipado, lo cual refuerza la idea de que la interacción de los valores numéricos de orden suficientemente pequeño en las dimensiones reducidas y un intervalo de muestreo  $\Delta t$  de la señal muy pequeño llevan a que la respuesta dinámica del cuerpo alcance el criterio de volteo antes.



▪ Comparación de la Respuesta Dinámica entre los Cuerpos del Grupo B

Aquí se presentan las respuestas en balanceo y volteo de los prototipos C3 y C8 sujetos a las tres excitaciones analíticas estudiadas para conocer si existe una influencia importante del parámetro  $h$  (altura) al mantenerse constante para cuerpos con diferente base

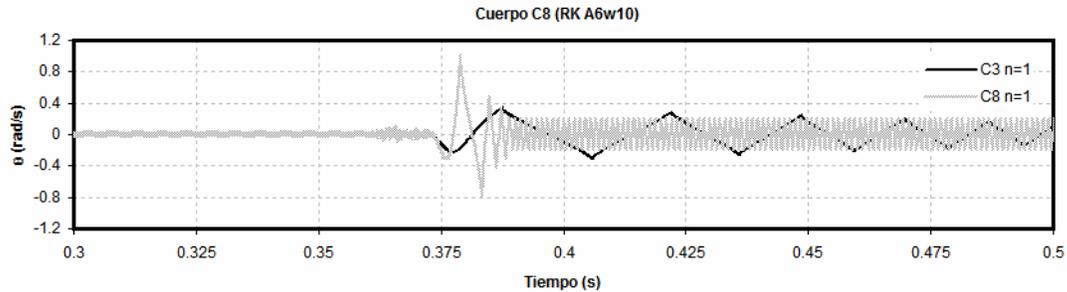


Figura.4.21. Comparación en la respuesta de Balanceo de los prototipos C8 y C3

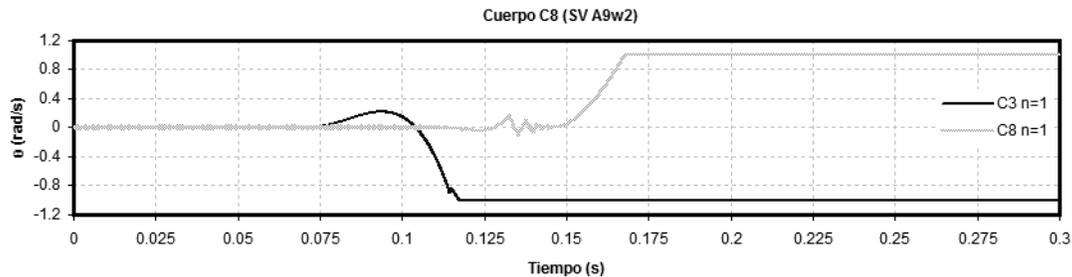
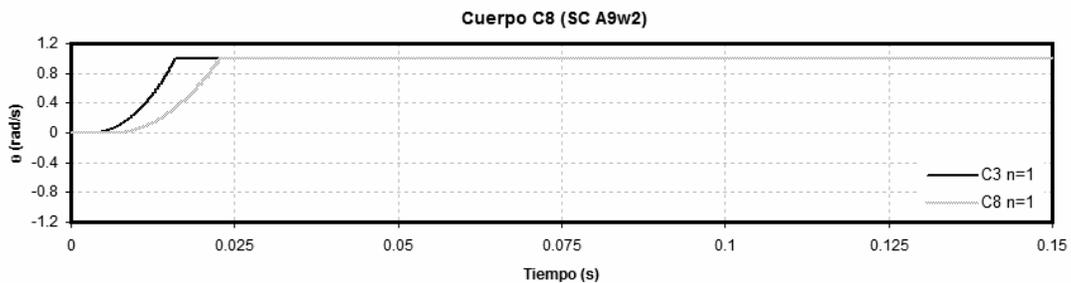
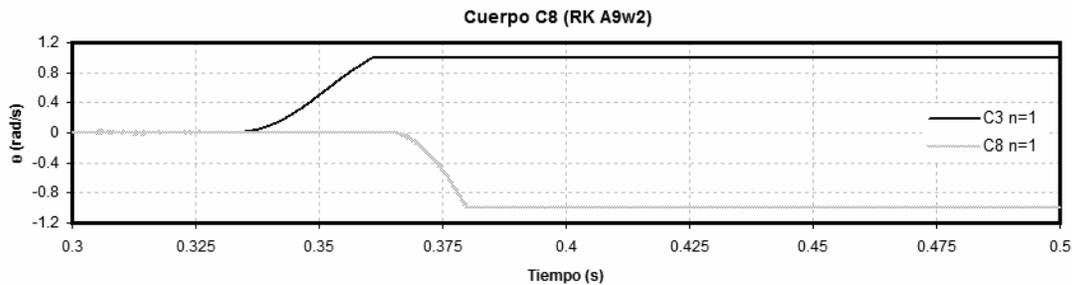


Figura.4.22. Comparación en la respuesta de Volteo de los prototipos C8 y C3

Estas gráficas comparativas entre las respuestas de los cuerpos C3 y C8 indican, al igual que para los cuerpos del grupo A, que el parámetro geométrico  $h$  no tiene una influencia importante en el comportamiento de estos cuerpos rígidos, pues al



mantener constante la altura y variar la base, la relación de esbeltez cambia lo que constituye que cada cuerpo tiene propiedades distintas.

#### IV.1.3. Comportamiento de los Cuerpos pertenecientes al Grupo C1

- Balanceo

Los gráficos que contienen la respuesta en balanceo de los prototipos C1 y C8 y sus respectivos modelos a escala han sido mostradas en los apartados anteriores, por lo que a continuación se presenta la respuesta del prototipo C11.

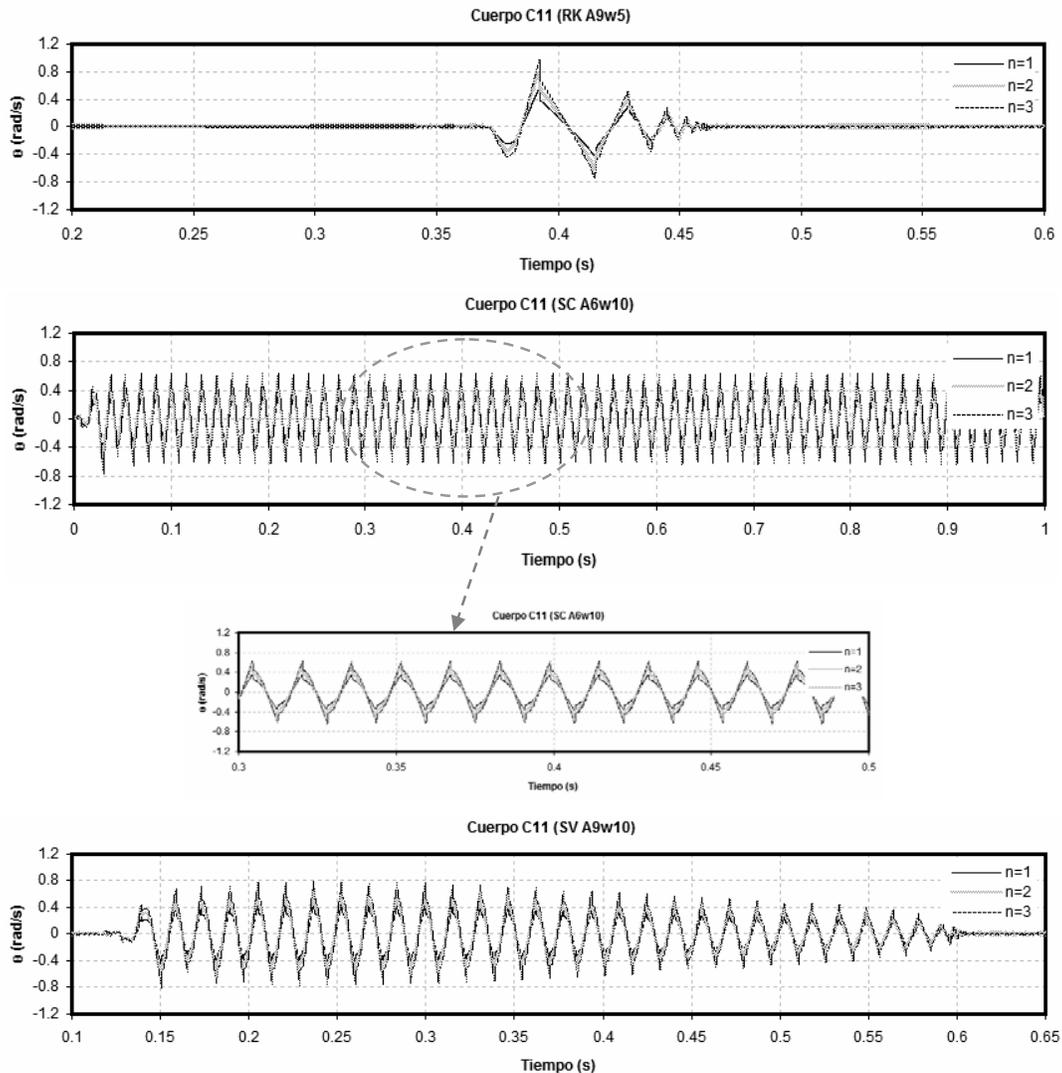


Figura. 4.23. Balanceo del prototipo C11 y sus modelos a escala ante excitaciones analíticas

- Volteo

Para el caso de volteo sí se presentan las respuestas de los tres cuerpos pertenecientes al grupo, ya que no habían sido mostradas todas las gráficas con este comportamiento ante acciones analíticas

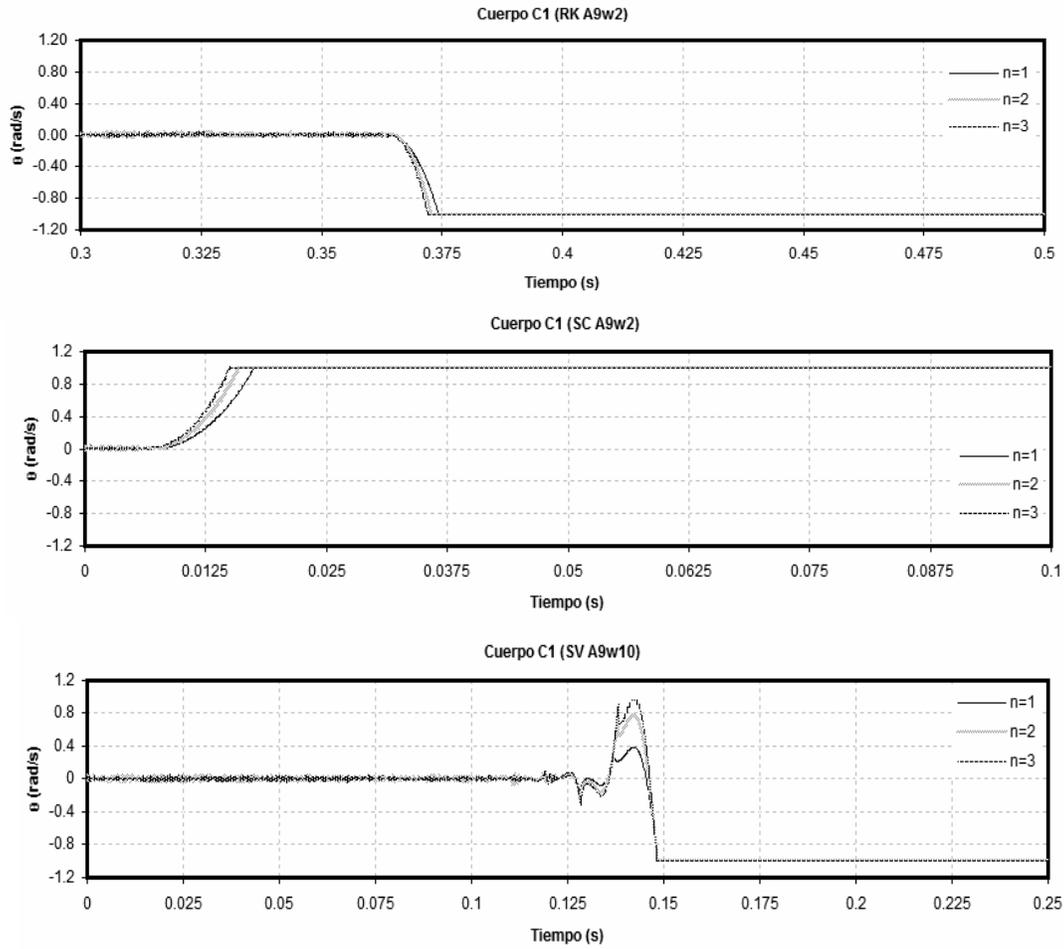
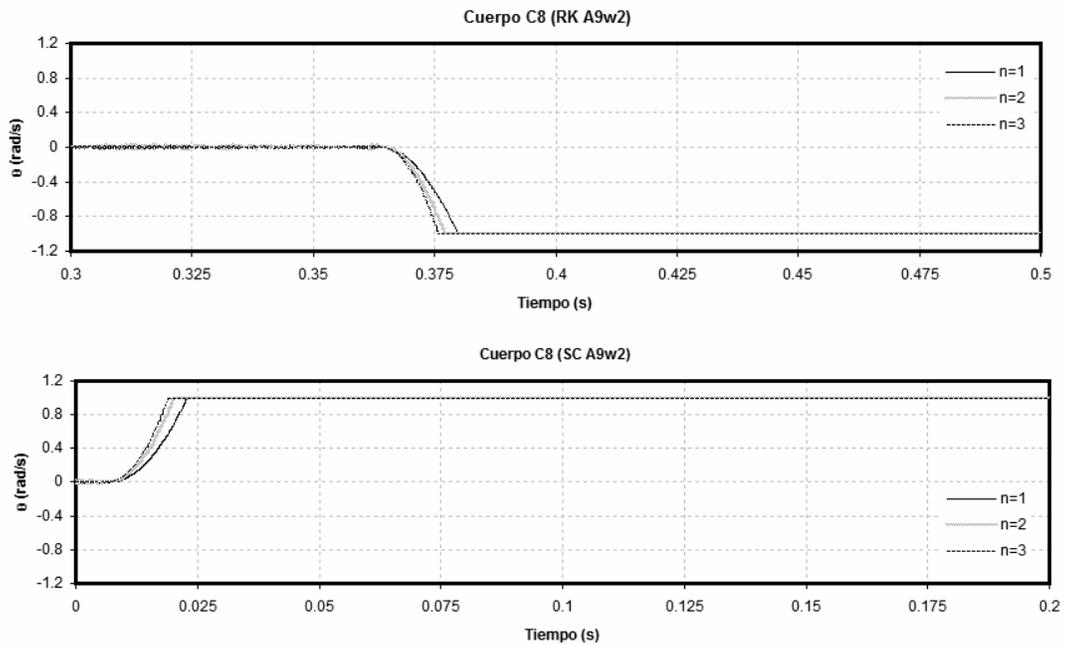


Figura.4.24. Volteo del prototipo C1 y sus respectivos modelos ante excitaciones armónicas



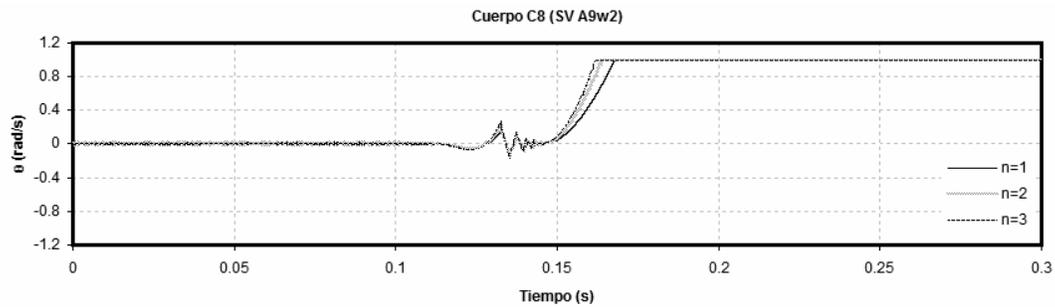


Figura.4.25. Volteo del prototipo C8 y sus respectivos modelos ante excitaciones armónicas

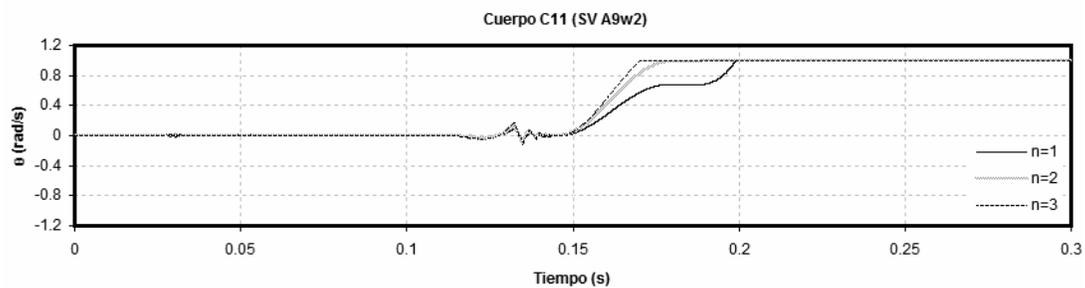
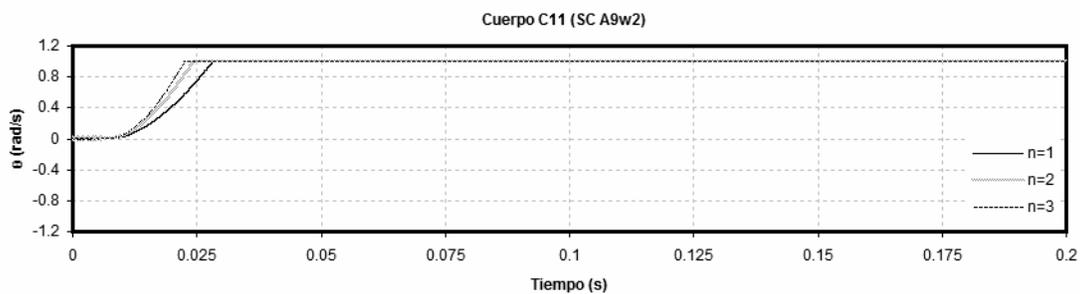
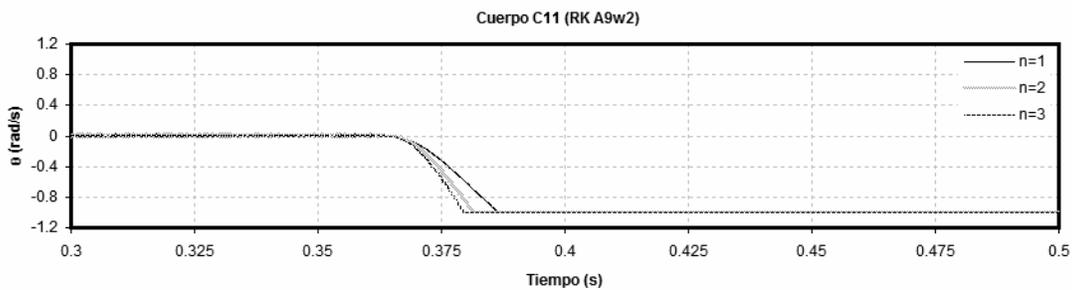


Figura.4.26. Volteo del prototipo C11 y sus respectivos modelos ante excitaciones armónicas

En las figuras se sigue observando la tendencia en que el volteo del cuerpo se anticipa en una mínima proporción conforme se incrementa el factor de escala. Además de ello, cabe destacar que en la figura 4.24 se presenta el volteo en el mismo instante, sin embargo se da un incremento en la amplitud de la oscilación del cuerpo con menores dimensiones, lo cual podría deberse al orden de valores numéricos al interactuar en la ecuación que define la respuesta dinámica del cuerpo.



▪ Comparación de la Respuesta Dinámica entre los Cuerpos del Grupo C1

Aquí se presentan las respuestas en balanceo y volteo de los prototipos C1, C8 y C11 sujetos a las tres excitaciones analíticas estudiadas para conocer si existe una influencia importante de la relación de esbeltez ( $h/b$ ) al mantenerse constante para cuerpos con diferentes dimensiones:

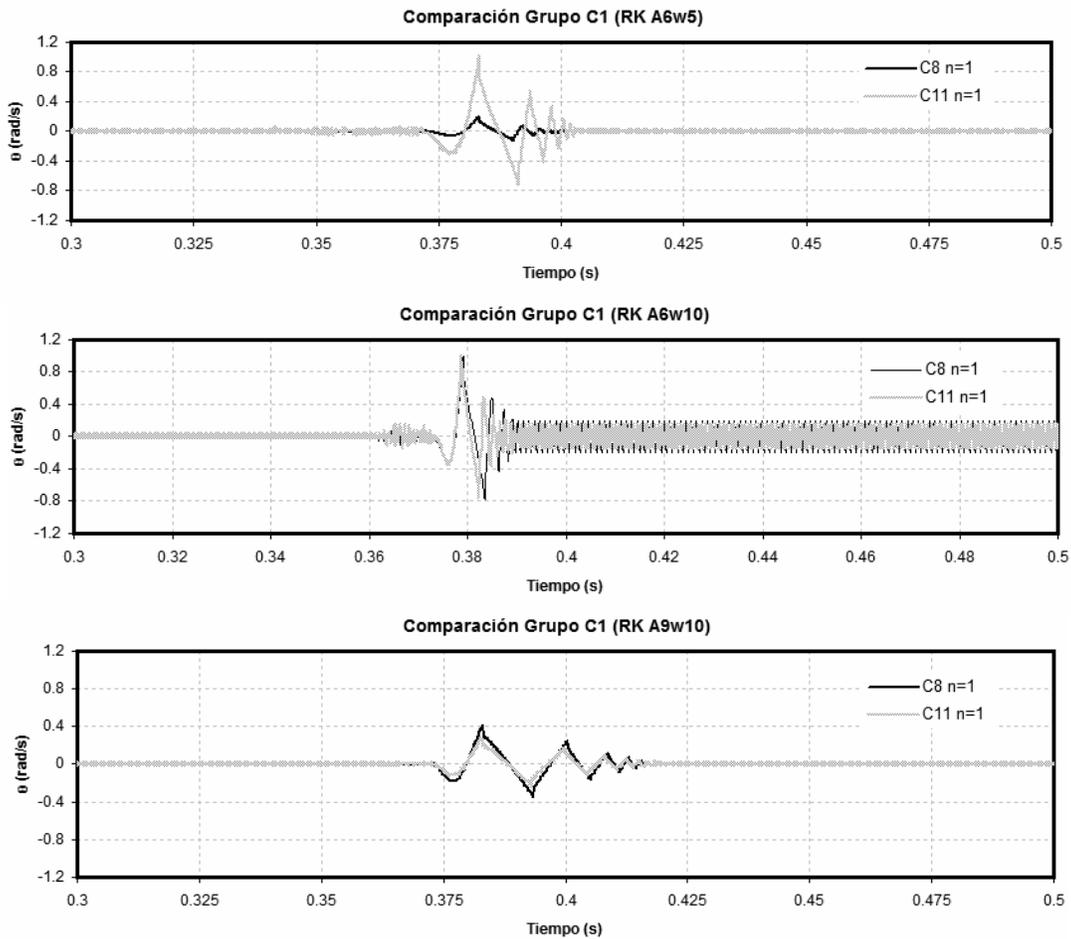
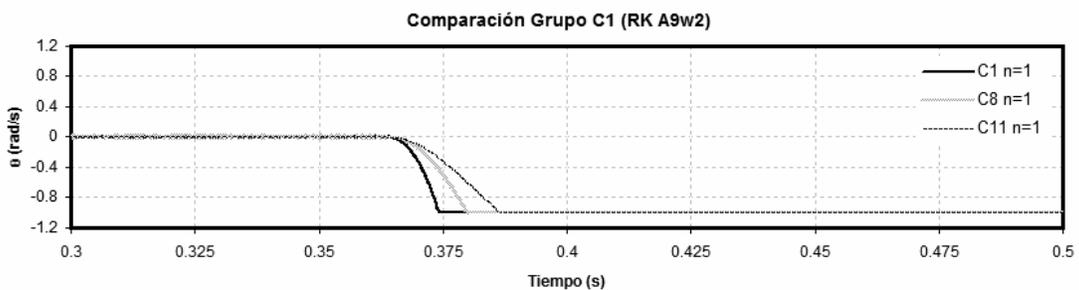


Figura.4.27. Comparación del modo de respuesta de balanceo entre los prototipos del grupo C1



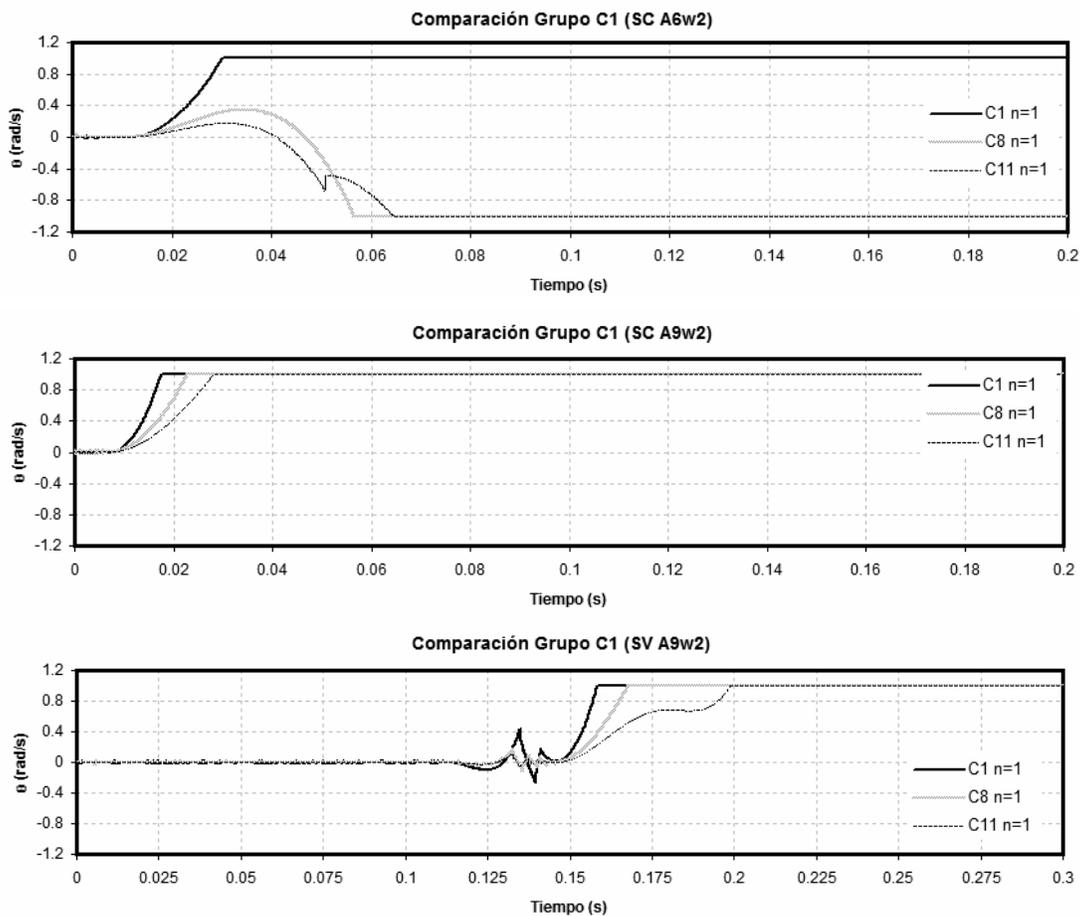


Figura.4.28. Comparación del modo de respuesta de volteo entre los prototipos del grupo C1

Esta comparación en las respuestas de los cuerpos del grupo C1 nos indica claramente que la relación de esbeltez sí constituye un parámetro que influye en el comportamiento de cuerpos rígidos. En el caso de balanceo las máximas rotaciones que los cuerpos experimentan en cada ciclo corresponden al mismo instante de tiempo y, aunque la amplitud no es necesariamente la misma, se observa que los cuerpos experimentan una restitución suficiente para rotar en búsqueda de la posición de equilibrio. Por otro lado, en lo que se refiere a volteo se observa una tendencia similar a la mencionada en los grupos anteriores, donde al escalar un cuerpo y, por consiguiente la frecuencia de la señal, se anticipa en una proporción mínima el volteo del espécimen.

#### IV.1.4. Comportamiento de los Cuerpos pertenecientes al Grupo C2

- Balanceo

A continuación se muestra la respuesta en balanceo del prototipo C9 y sus modelos a escala. El prototipo C2 no experimentó balanceo para las señales analíticas seleccionadas.

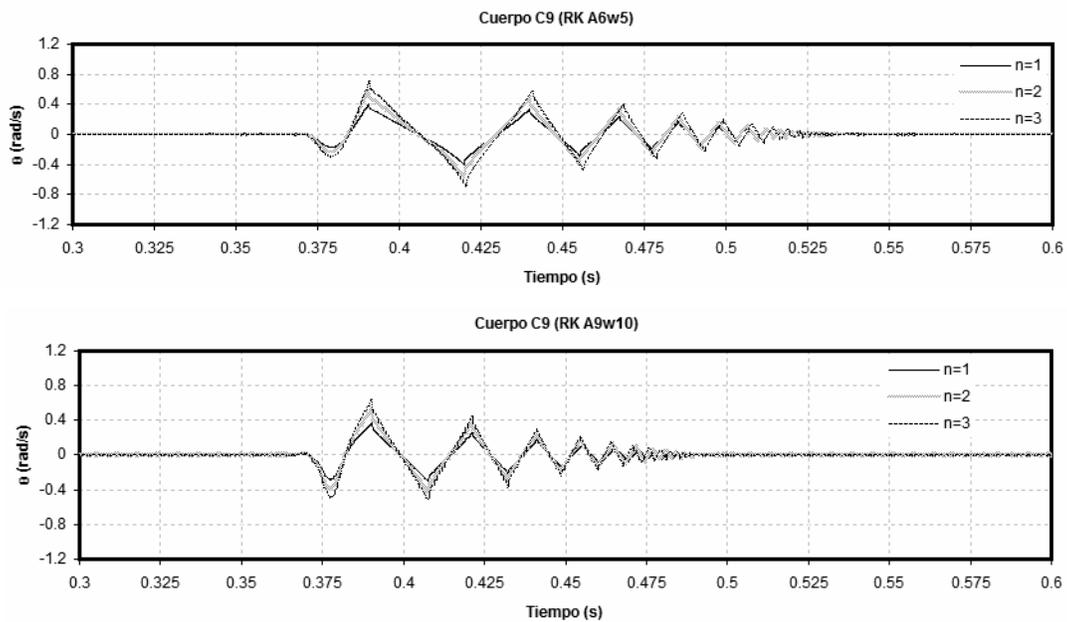


Figura. 4.29. Balanceo del prototipo C9 y sus modelos a escala ante pulsos Ricker

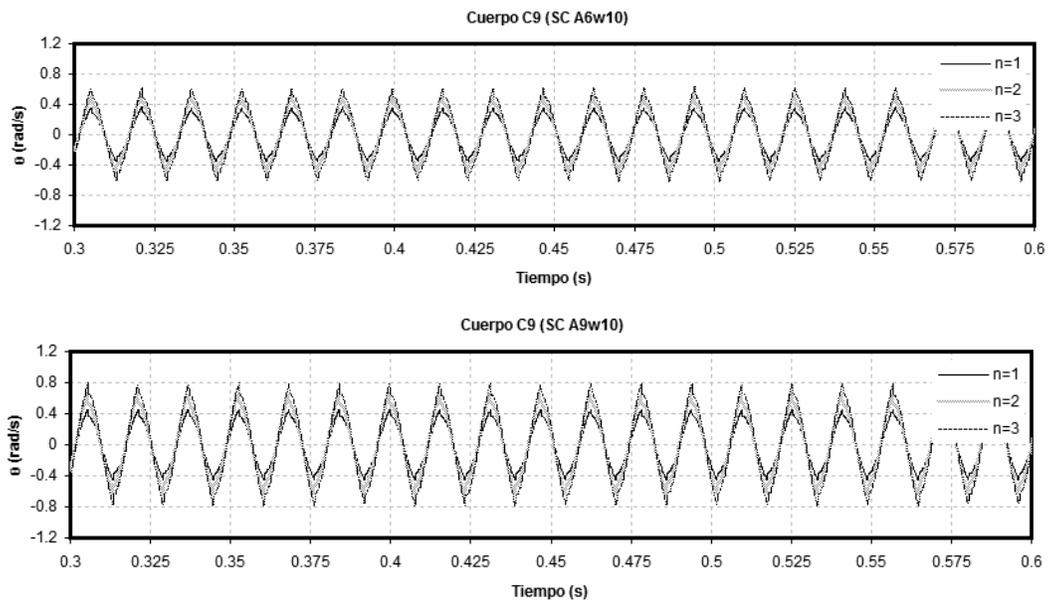
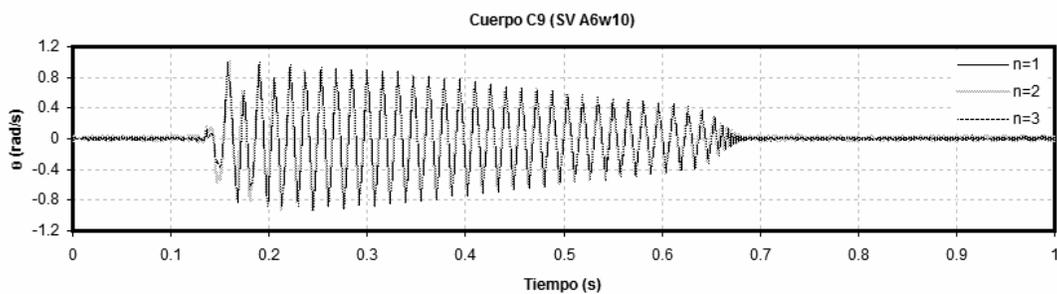


Figura. 4.30. Balanceo del prototipo C9 y sus modelos a escala ante senoidales de amplitud constante



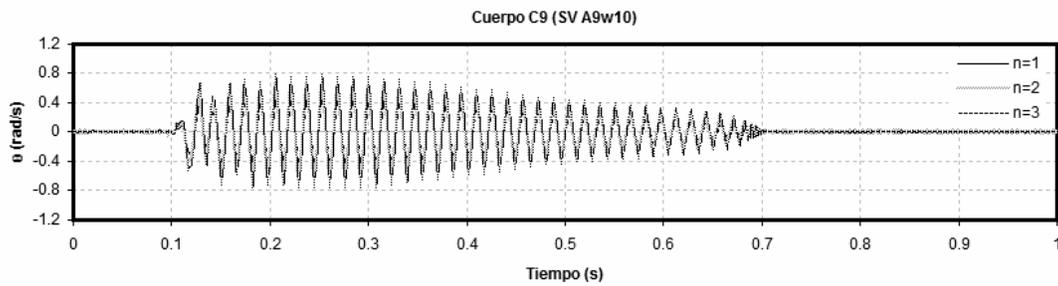


Figura.4.31. Balanceo del prototipo C9 y sus modelos a escala ante senoidales de amplitud variable

Para este caso se puede ver claramente la tendencia que se explicó en el apartado anterior, donde los cuerpos presentan una historia de rotaciones muy similar, obteniendo los máximos giros en los mismos instantes de tiempo, pero con variaciones en las amplitudes de dichos giros. Esto refuerza la idea de que el factor de restitución aunque es distinto para cada cuerpo, al ser escalada la geometría del espécimen y el intervalo de muestreo de la señal, indirectamente también se escalado.

- Volteo

Para el caso de volteo sí se presenta este modo de respuesta en los dos cuerpos pertenecientes al grupo, mismas que se presentan a continuación

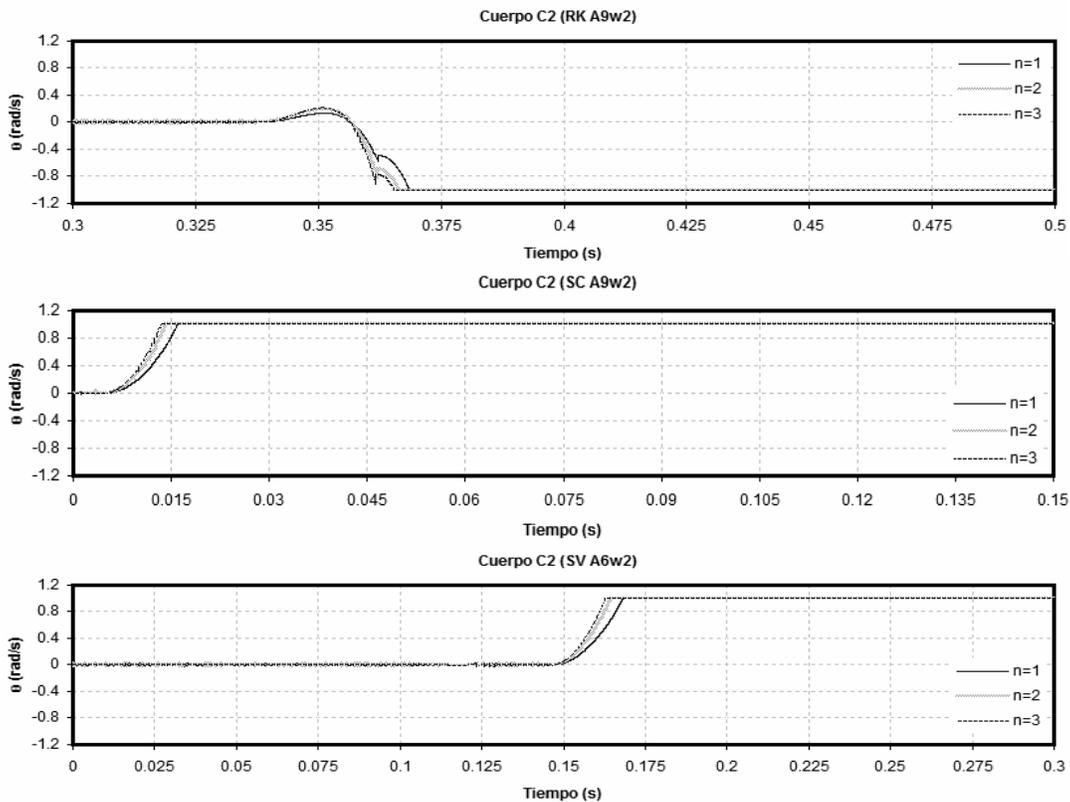


Figura.4.32. Volteo del prototipo C2 y sus modelos a escala ante señales analíticas

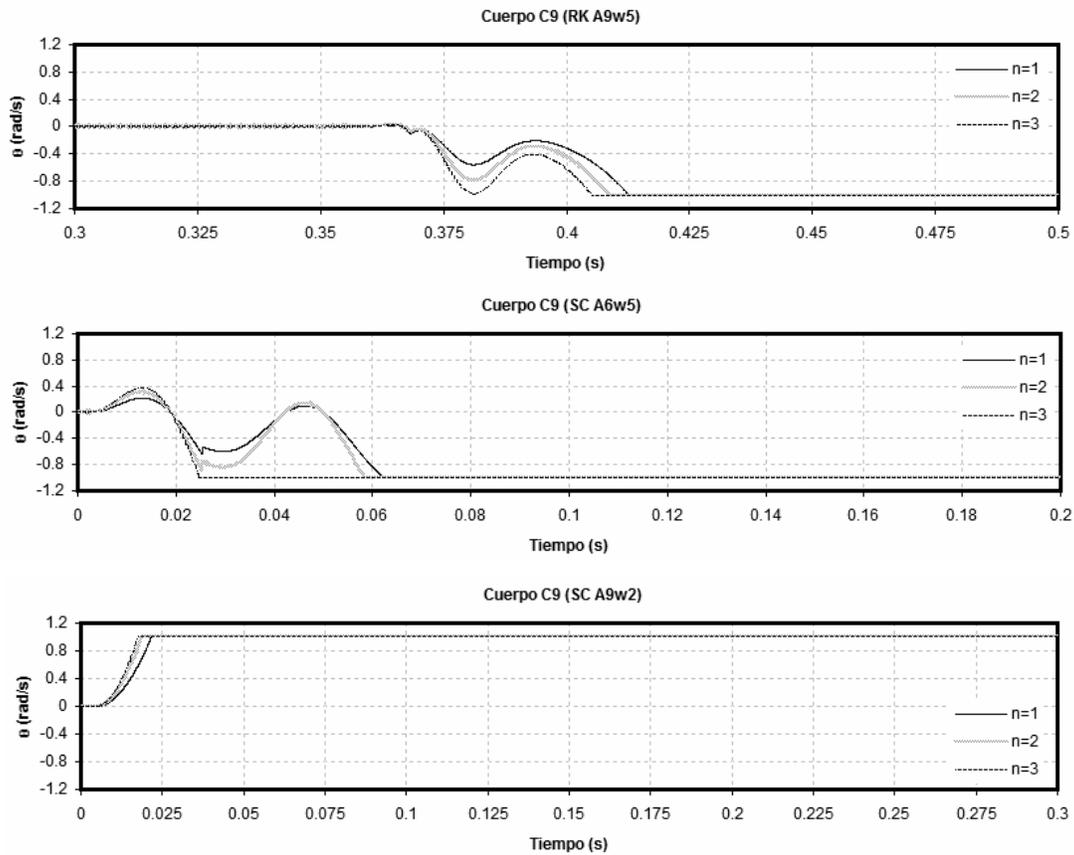
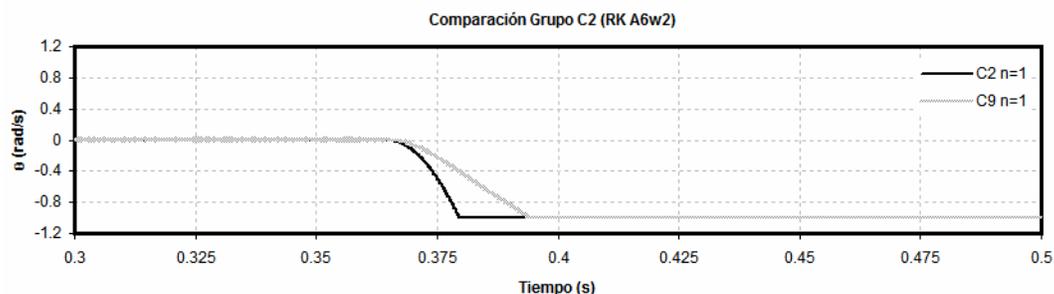


Figura.4.33. Volteo del prototipo C9 y sus modelos a escala ante señales analíticas

En la segunda gráfica de la figura 4.34 se muestra claramente cómo el modelo más pequeño alcanza el criterio de volteo sensiblemente antes de lo esperado, lo cual quizá se deba a que el método numérico podría contar con algunas regiones de inestabilidad numérica para valores de un orden muy pequeño.

▪ Comparación de la Respuesta Dinámica entre los Cuerpos del Grupo C2

Aquí se presentan las respuestas en volteo de los prototipos C2 y C9 sujetos a tres excitaciones analíticas con la intención de confirmar si existe una influencia importante de la relación de esbeltez ( $h/b$ ) al mantenerse constante para cuerpos con diferentes dimensiones



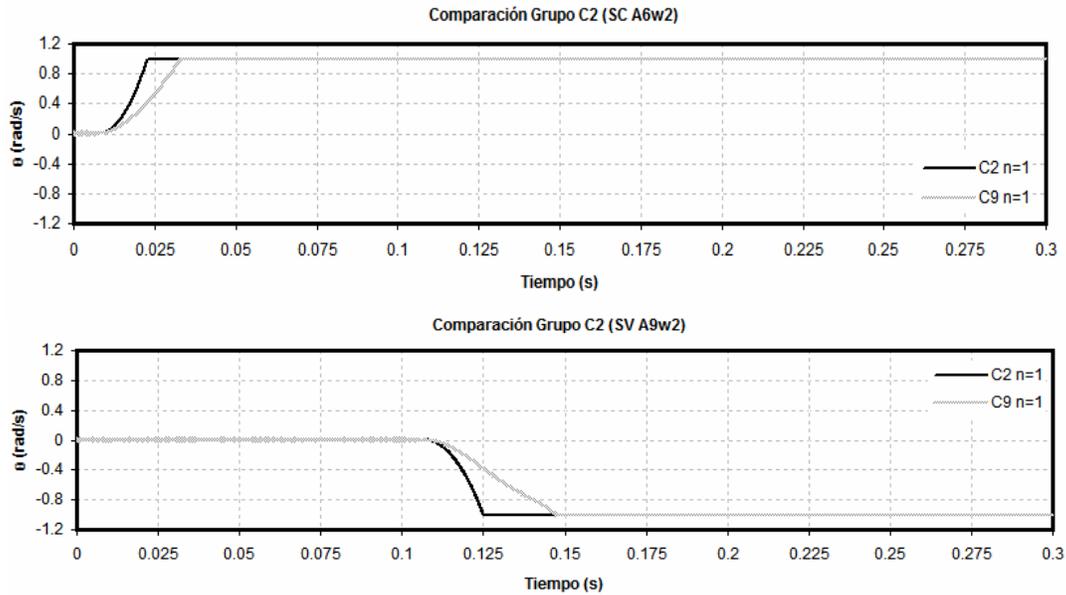


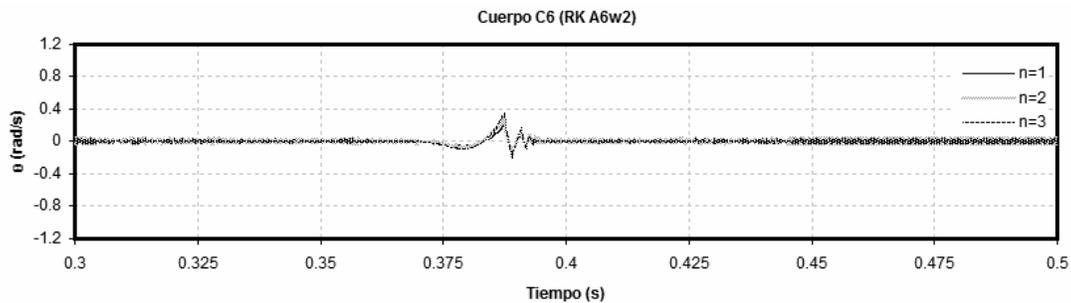
Figura. 4.34. Comparación de las respuestas en volteo entre los prototipos del grupo C2 sujetos a excitaciones analíticas

Con estos resultados se confirma que la relación de esbeltez influye de forma importante en el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos, ya que las diferencias en el instante de volteo de cada cuerpo son prácticamente despreciables. Al tener cuerpos con diferentes dimensiones, pero que cumplen con una misma relación de esbeltez, estamos hablando de un escalamiento, por lo tanto, el análisis dimensional plantea una solución más directa para lograr reproducir la respuesta en cuerpos a escala reducida como una solución.

#### IV.1.5. Comportamiento de los Cuerpos pertenecientes al Grupo C3

- Balanceo

A continuación se presentan las respuestas calculadas para los cuerpos C6 y C10 sujetos a excitaciones analíticas. Ambos cuerpos experimentaron balanceo.



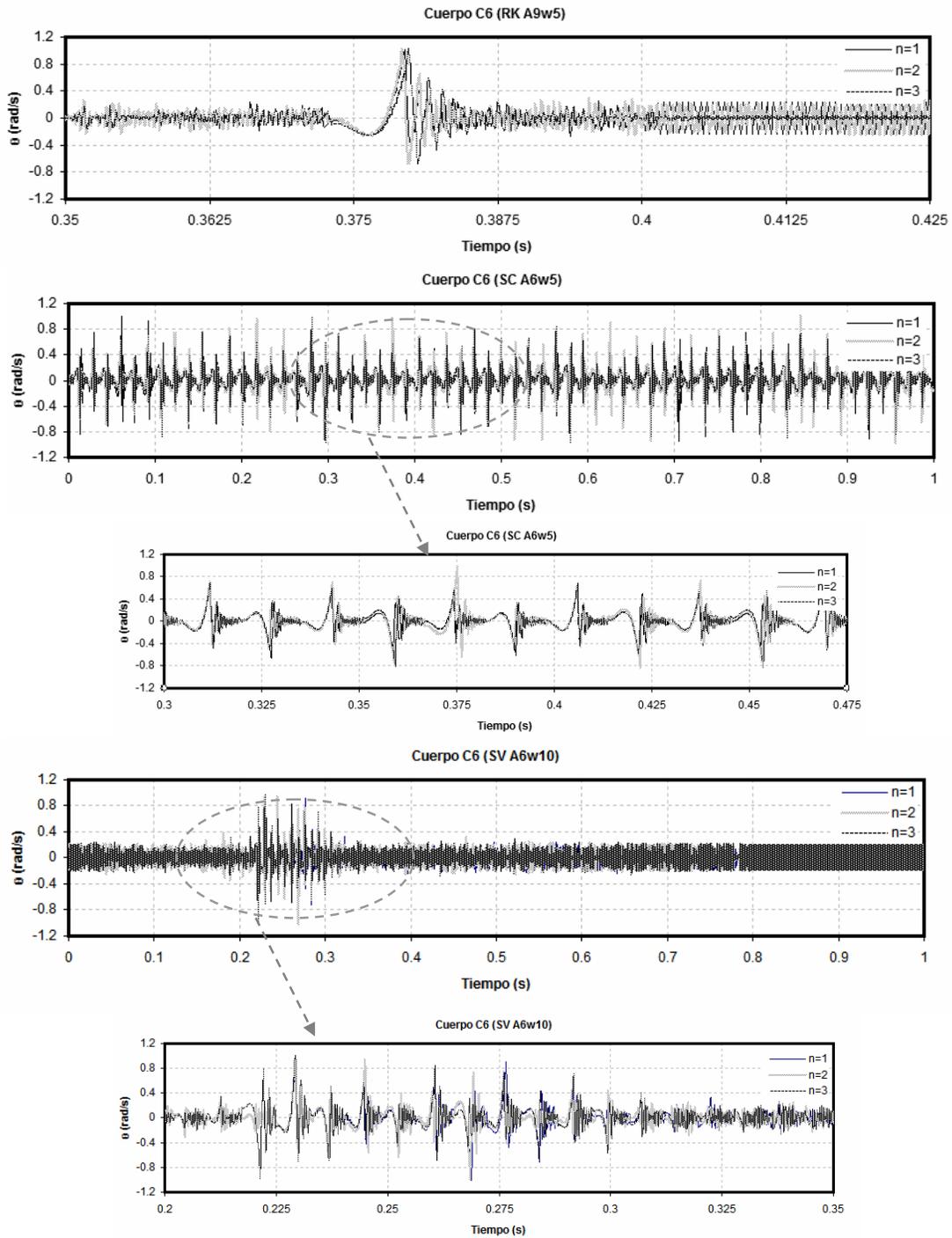


Figura.4.35. Balanceo del prototipo C6 al estar sujeto a excitaciones analíticas

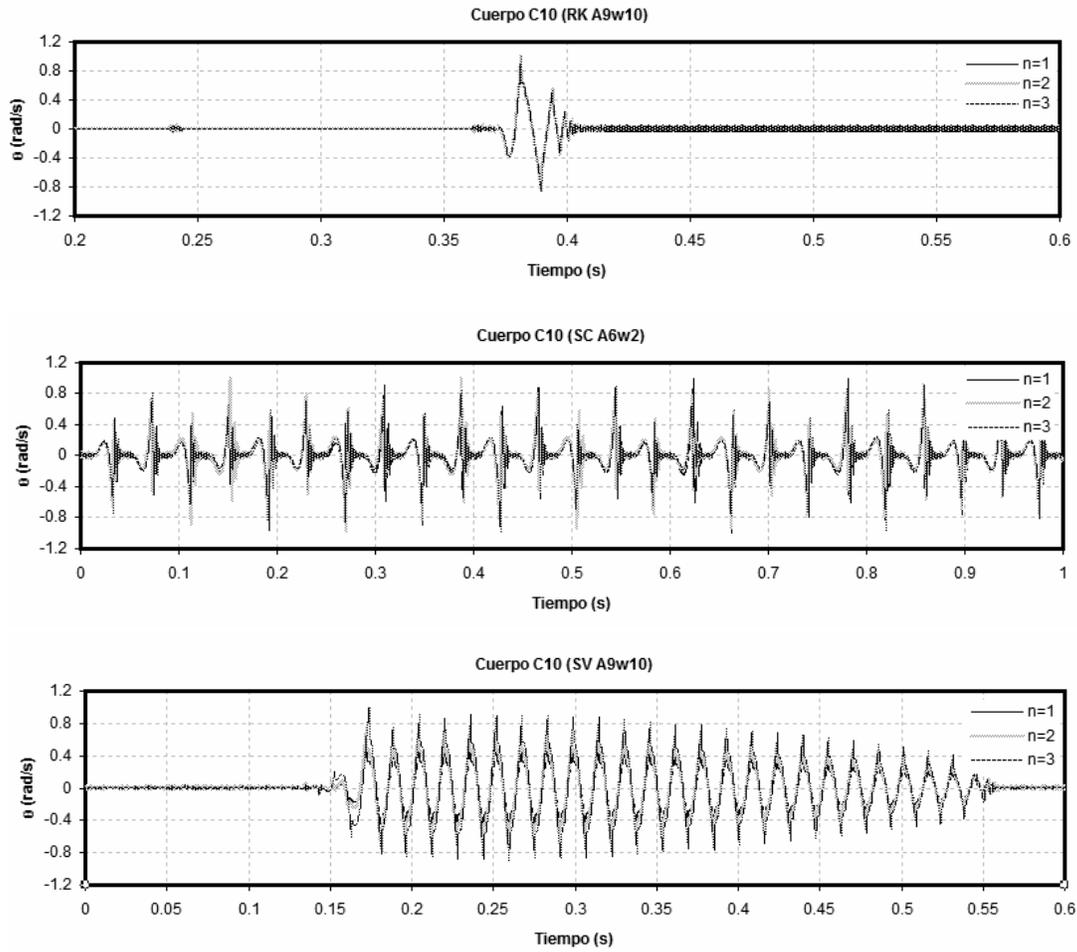
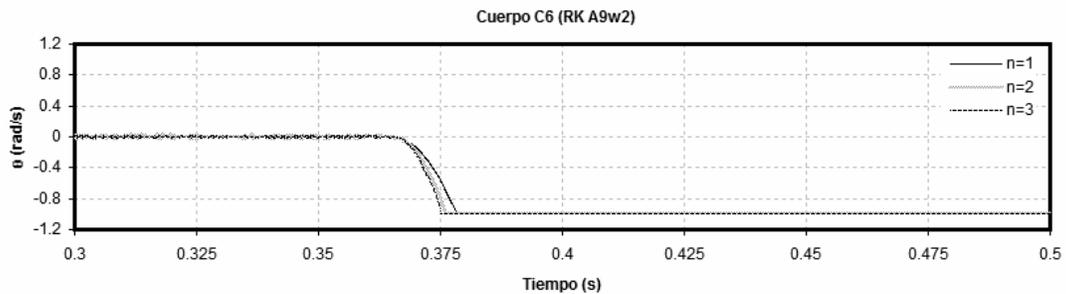


Figura.4.36. Balanceo del prototipo C10 al estar sujeto a excitaciones analíticas

Los resultados que se muestran en las figuras 4.36 y 4.37 dan consistencia a las tendencias descritas en los apartados anteriores.

#### ▪ Volteo

Para el caso de volteo ambos cuerpos experimentaron este modo de respuesta dinámica



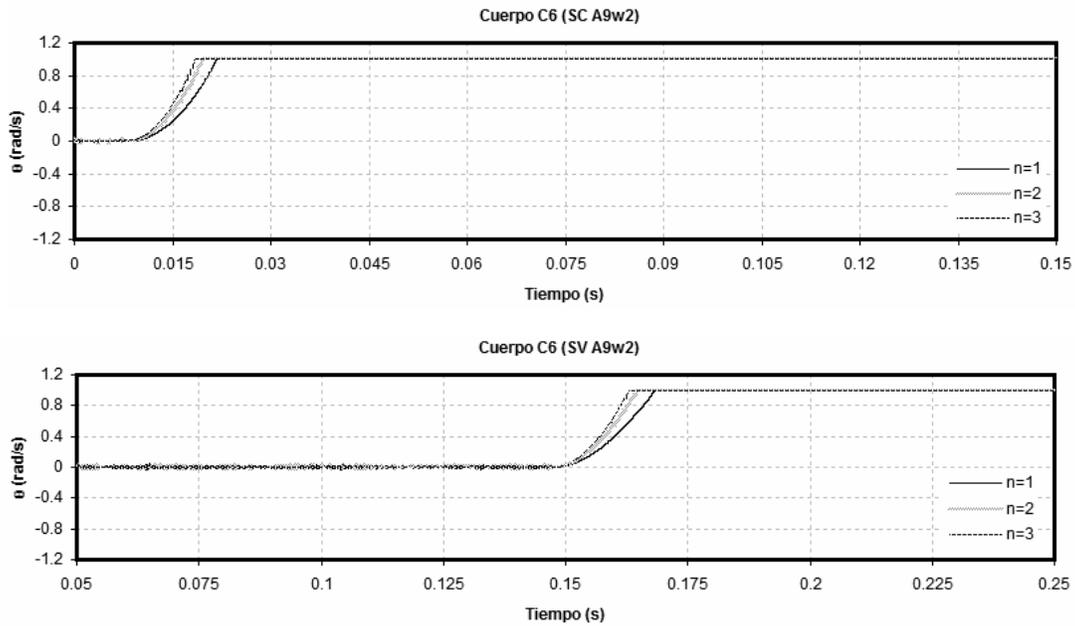


Figura. 4. 37. Volteo del prototipo C6 al estar sujeto a excitaciones analíticas

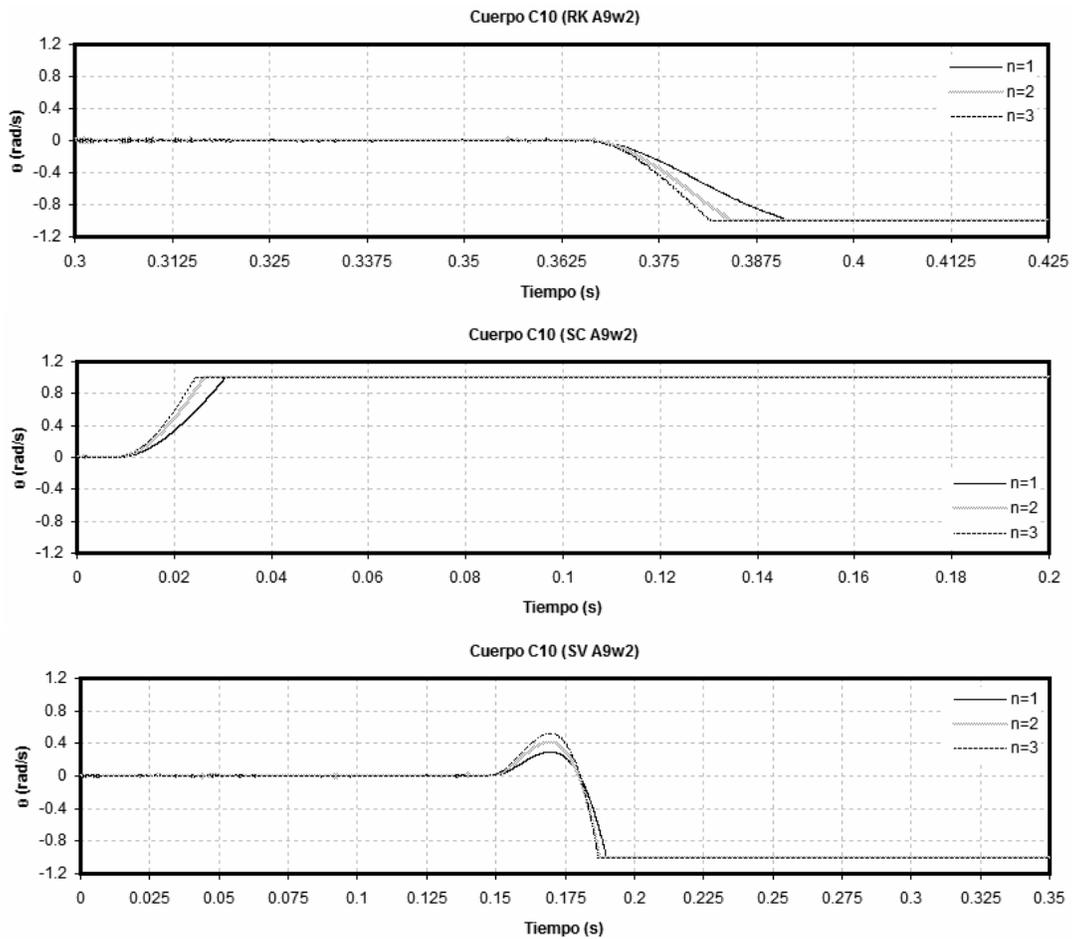
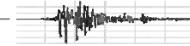


Figura. 4. 38. Volteo del prototipo C10 al estar sujeto a excitaciones analíticas



Cabe mencionar que conforme es más grande el prototipo y sus modelos, para los mismos factores de escalamiento, las respuestas simuladas son más consistentes y las discrepancias en el instante de volteo se reducen.

- Comparación de la Respuesta Dinámica entre los Cuerpos del Grupo C3

Aquí se presentan las respuestas en balanceo y volteo de los prototipos C6 y C10 sujetos a tres excitaciones analíticas con la intención de confirmar la influencia de la relación de esbeltez ( $h/b$ ) como parámetro en el cálculo de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos.

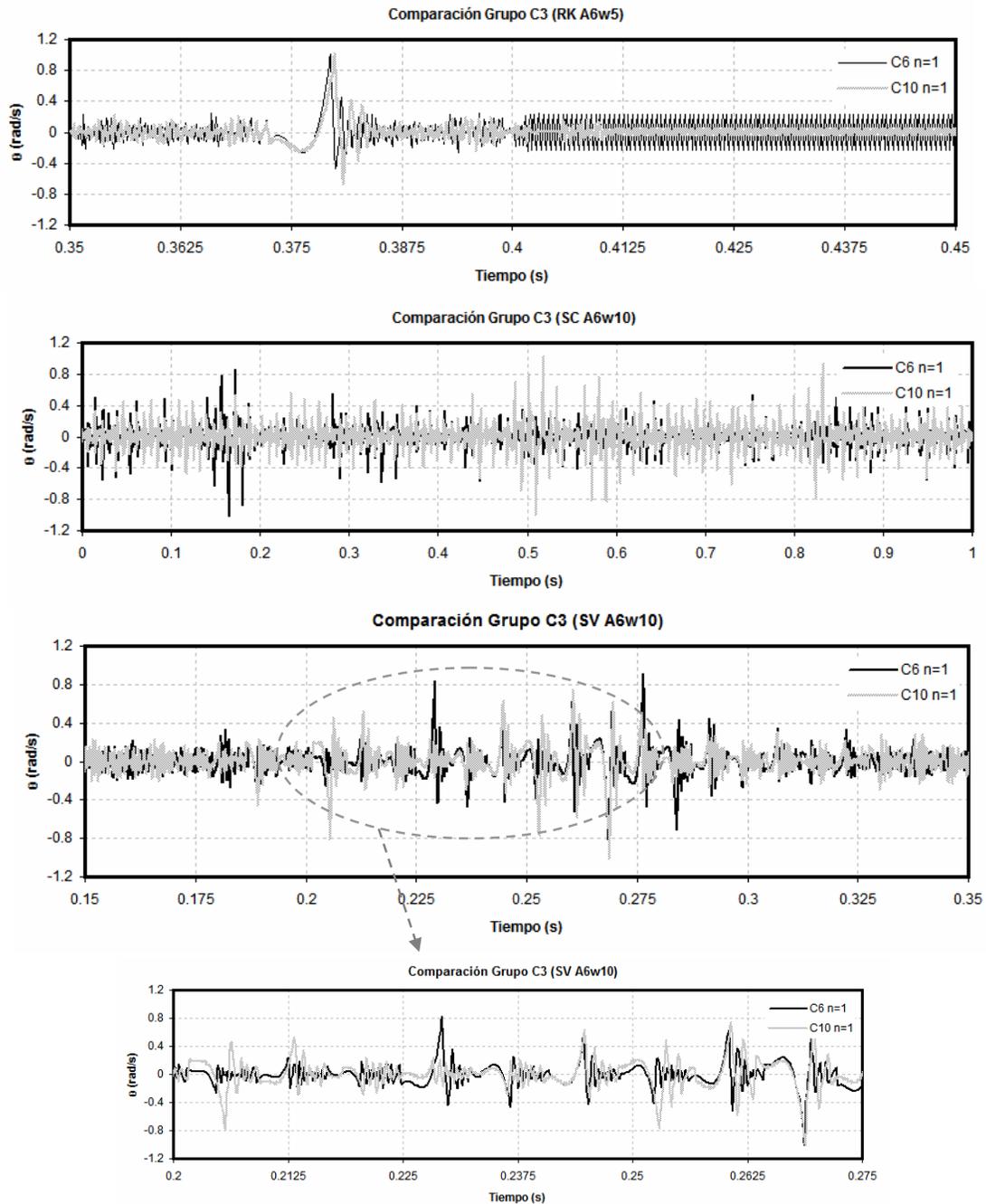




Figura.4.39. Comparación del balanceo de los prototipos C6 y C10 ante excitaciones analíticas

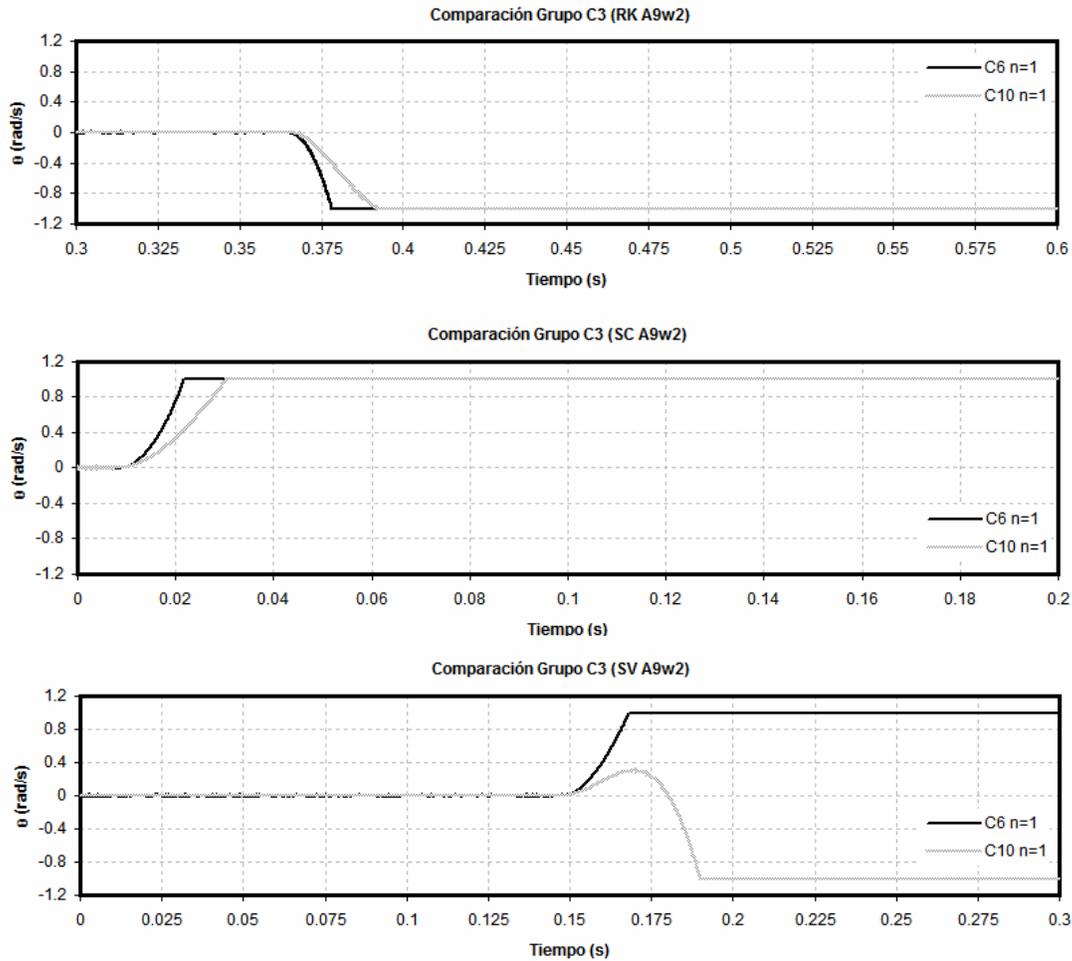


Figura.4.40. Comparación del volteo de los prototipos C6 y C10 ante excitaciones analíticas

En esta comparación se confirma que entre más grandes son los especímenes, es más consistente el cálculo de su respuesta dinámica, pues en los casos de balanceo se ve una gran similitud entre el comportamiento del cuerpo C6 y C10. Para el caso de volteo existen algunas discrepancias en el instante de vuelco, sin embargo la magnitud de dicha diferencia es prácticamente imperceptible. Hay que mencionar que en la última gráfica de la figura 4.41 se presenta una gran discrepancia, pero si es observada cuidadosamente puede confirmarse lo que se comentó sobre los primeros resultados de este capítulo, pues el cuerpo más pequeño que corresponde al cuerpo grande afectado por un factor de escalamiento, al igual que la excitación de entrada, donde el método numérico al introducir valores de orden menor, podría haber influido al alcanzar el criterio de volteo antes de tiempo, ya que la dirección de rotación es la misma para ambos especímenes.

#### IV.2. BALANCEO Y POSIBLE VOLTEO DE CUERPOS RÍGIDOS ANTE SISMOS REGISTRADOS

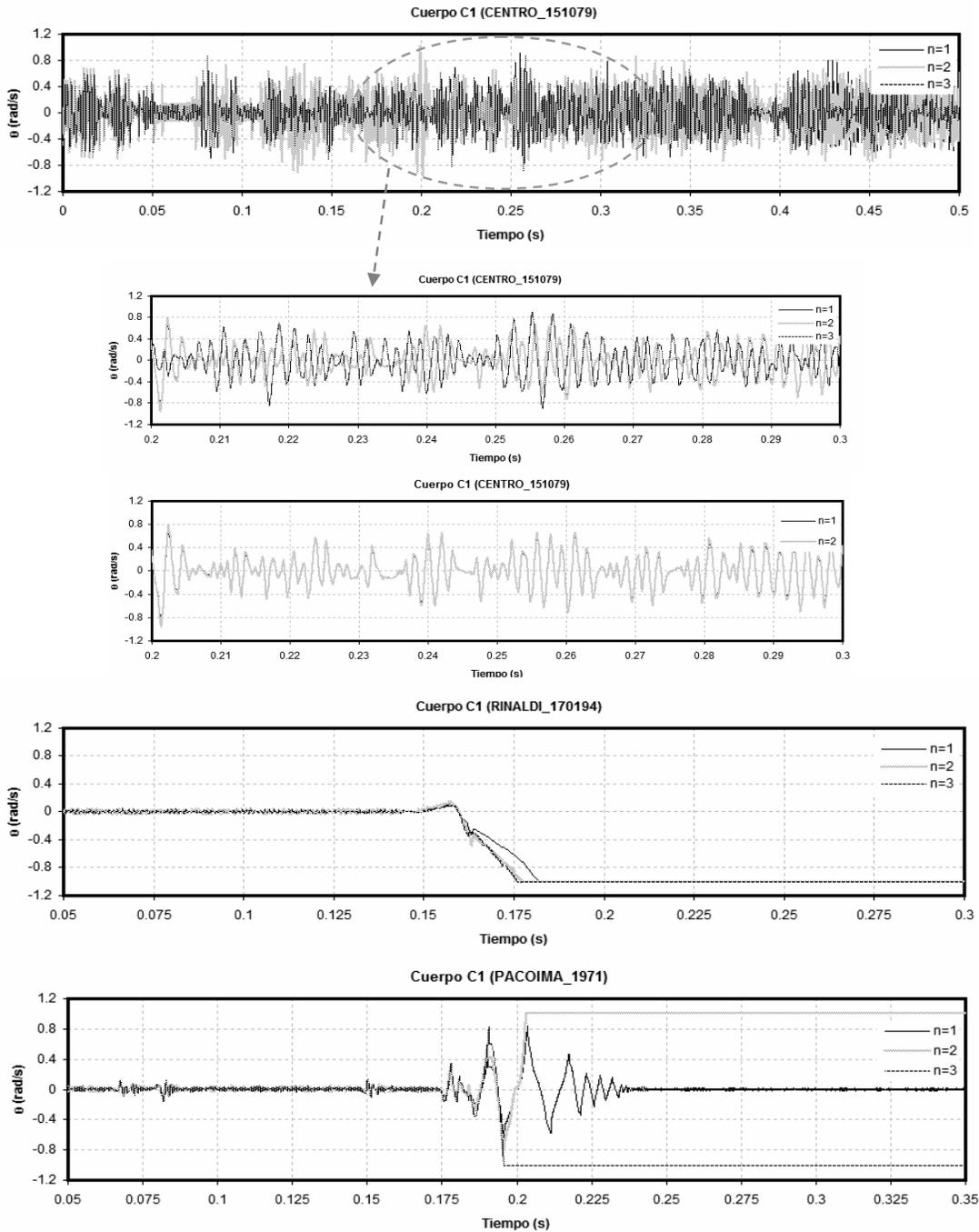
En este apartado se han puesto gráficos con la respuesta dinámica de los cuerpos rígidos seleccionados sujetos a la acción de sismos registrados en diversas partes del



mundo. Primero se muestran las respuestas de cada cuerpo ante algunos sismos para posteriormente realizar gráficas comparativas en las que pueda observarse con mayor claridad la influencia de los diversos parámetros implícitos, así como el impacto que el escalamiento tiene en éstos.

#### IV.2.1. Respuesta Dinámica de los Cuerpos C1-C11 ante la Acción de Registros Sísmicos

Enseguida se muestra la respuesta de los prototipos C1-C4 y sus respectivos modelos a escala ante registros sísmicos.



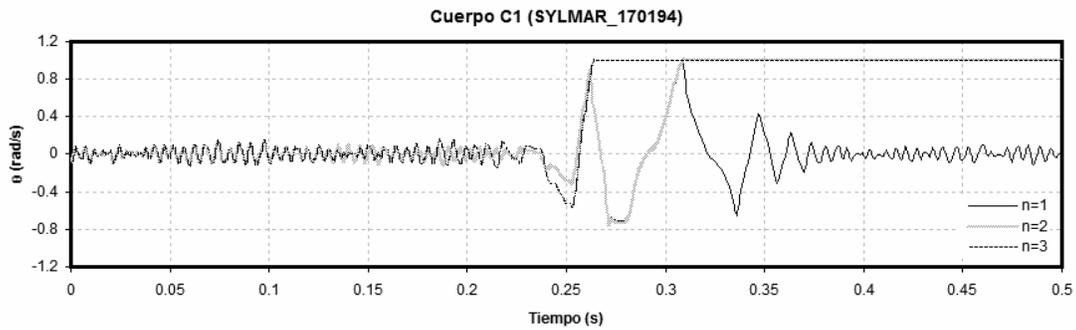
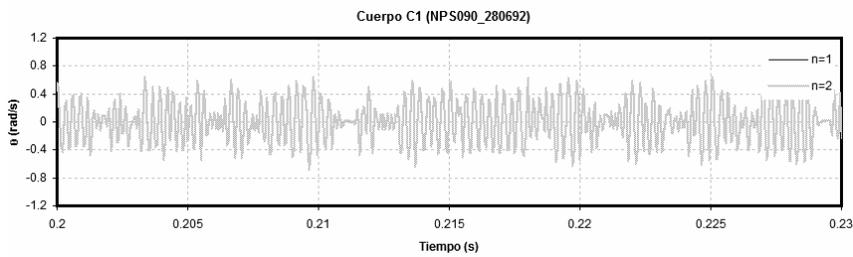
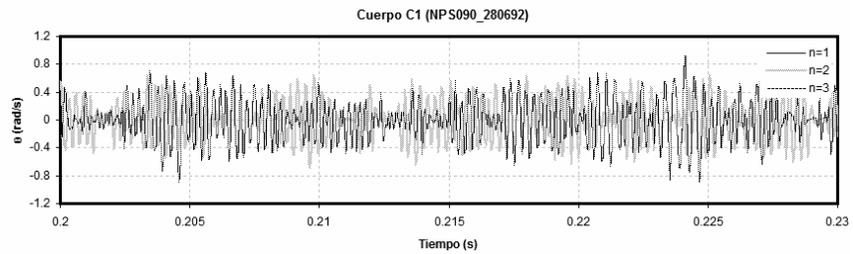
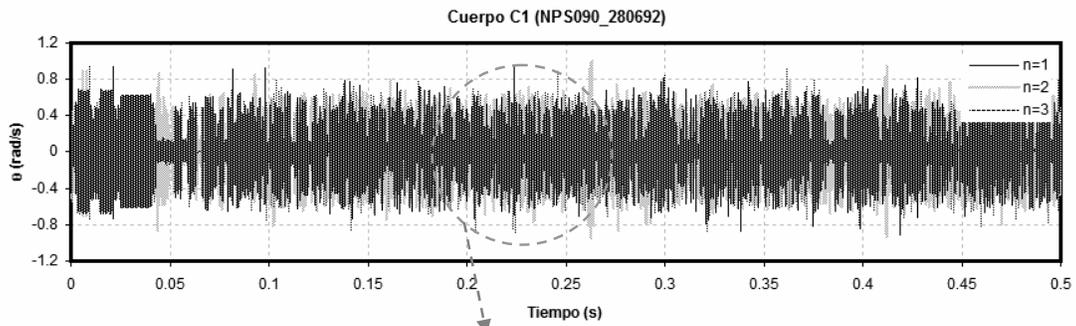
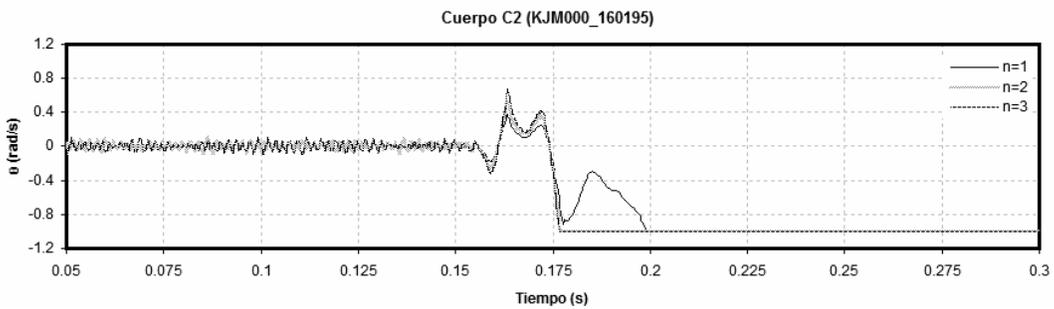
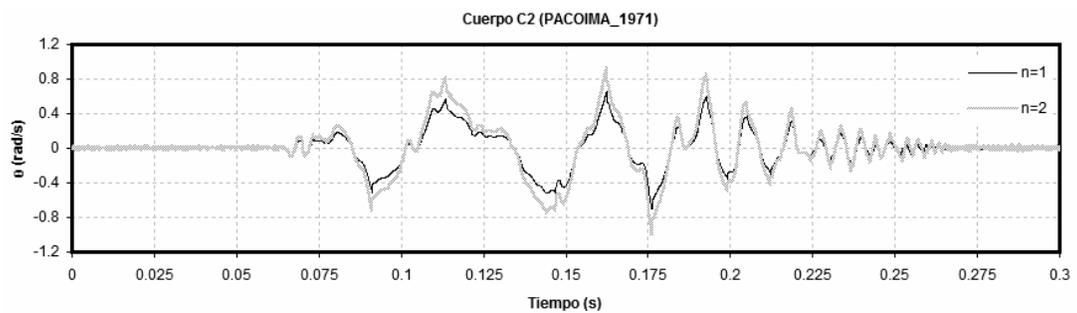
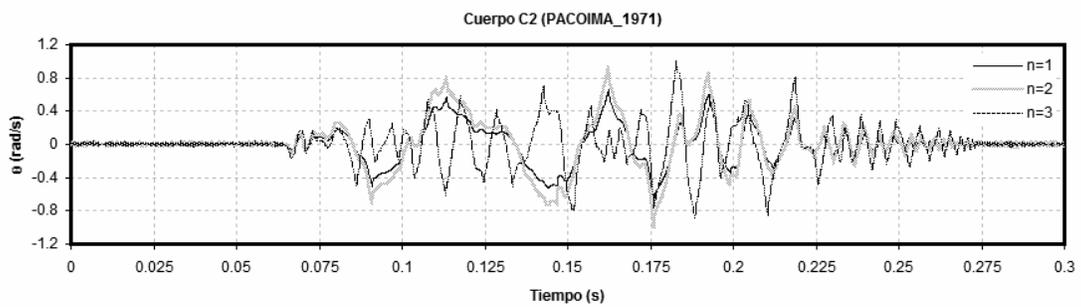
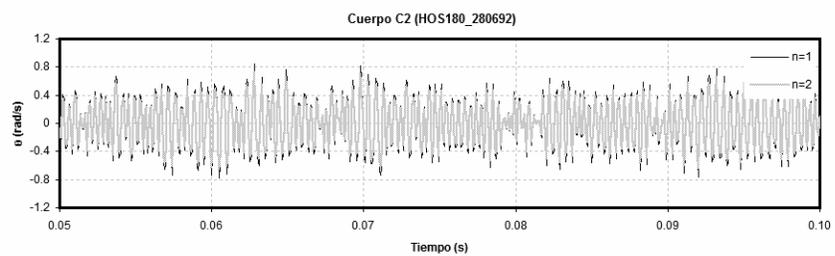
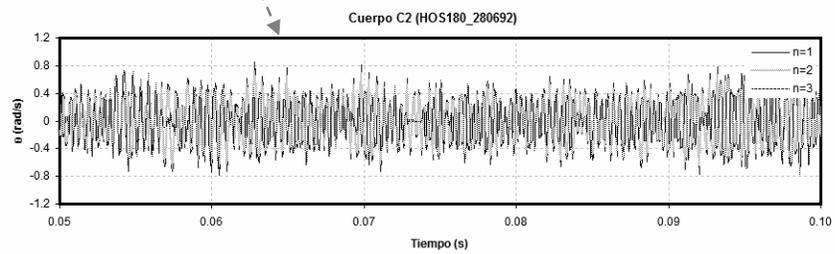
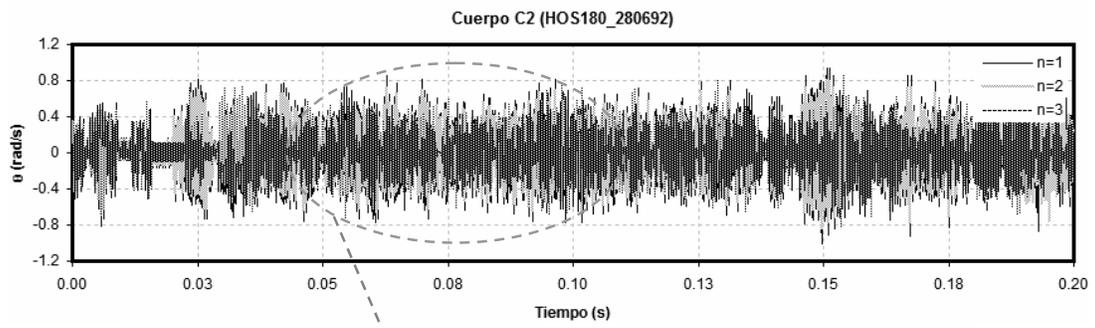


Figura.4.41. Respuesta dinámica del prototipo C1 al estar sujeto a excitaciones sísmicas





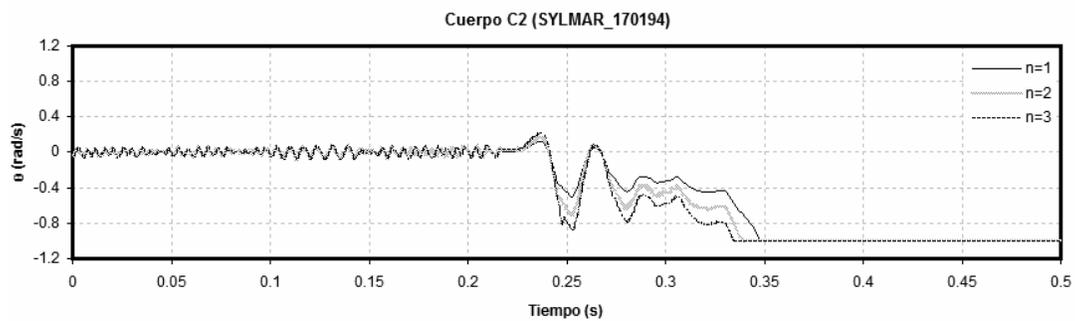
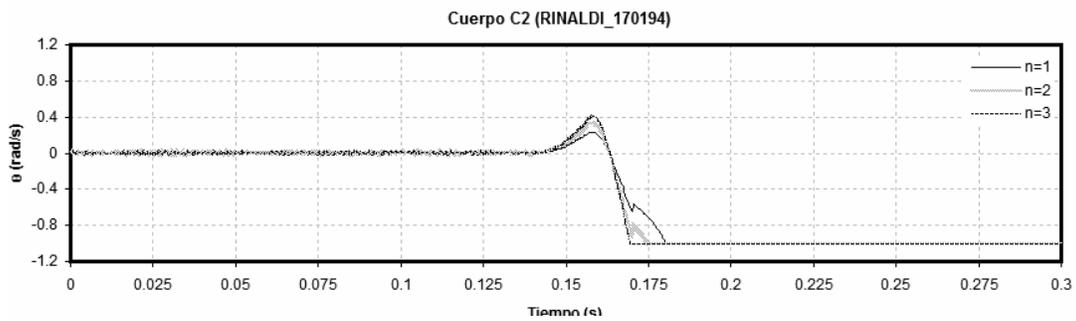
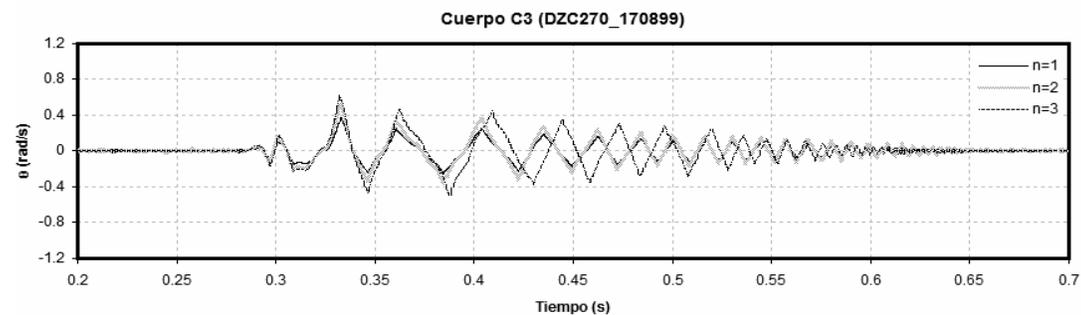
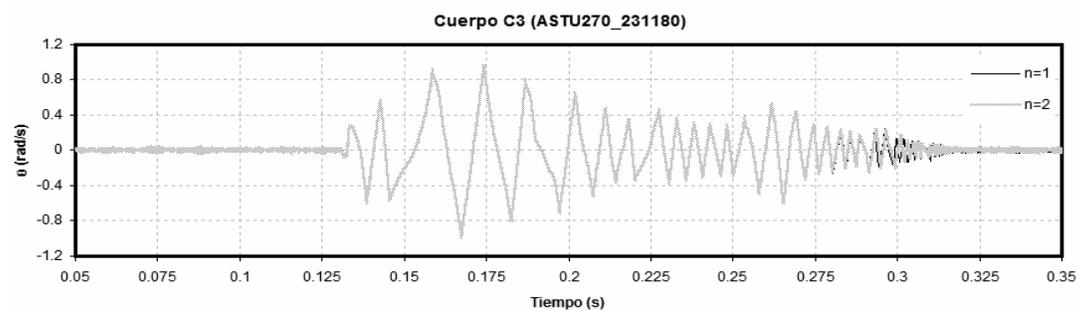
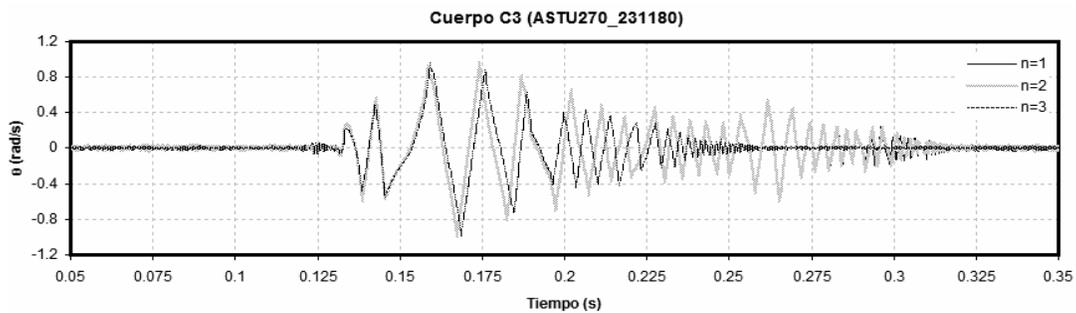


Figura.4.42. Respuesta dinámica del prototipo C2 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



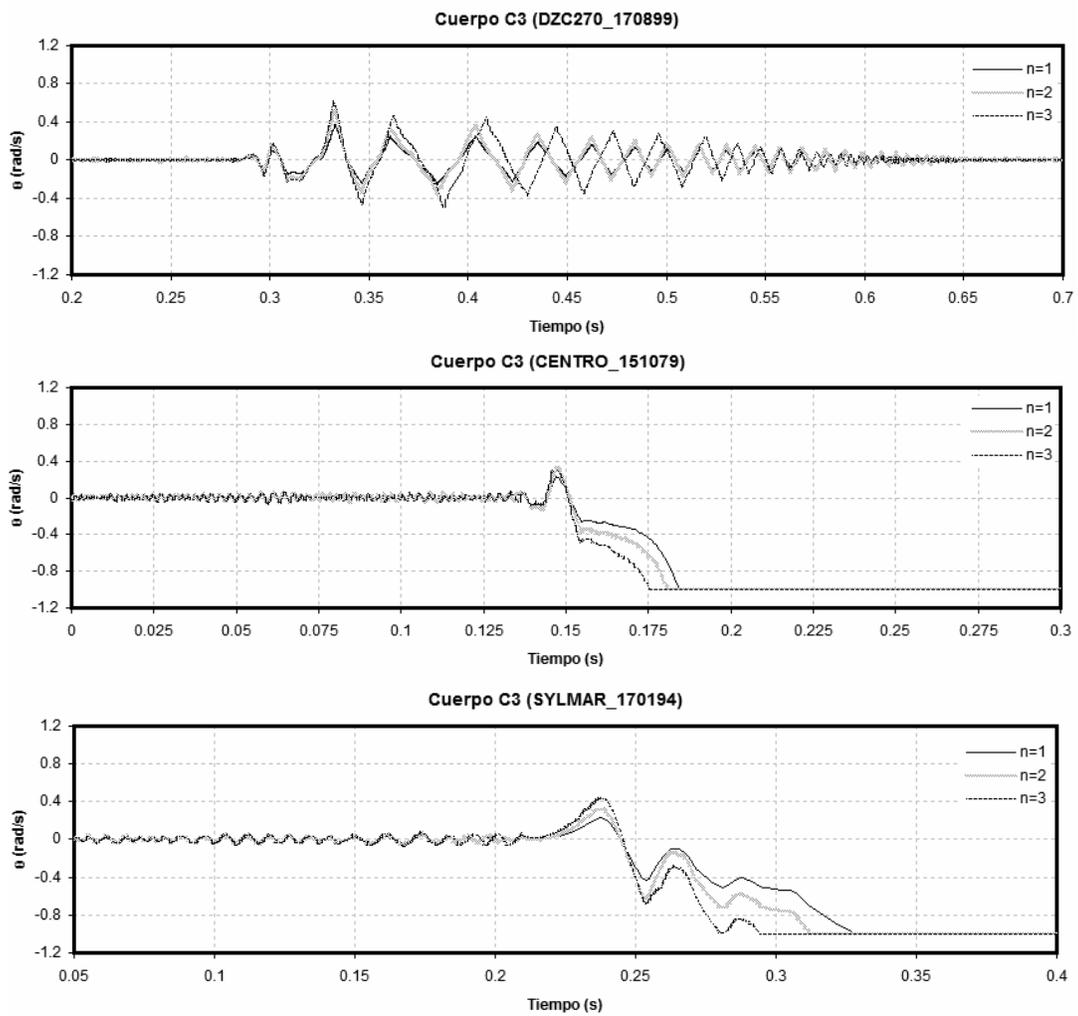
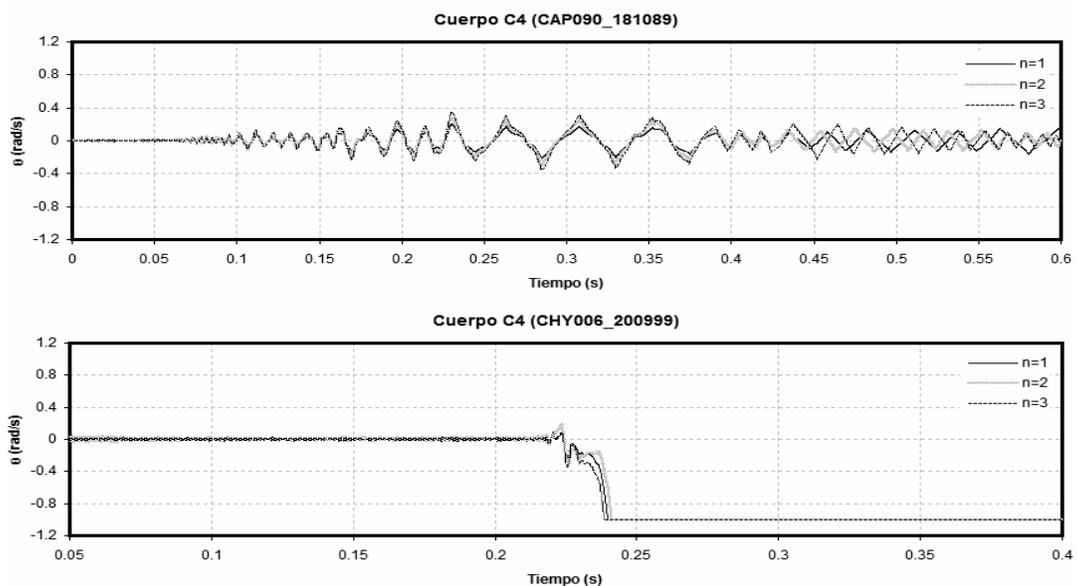


Figura.4.43. Respuesta dinámica del prototipo C3 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



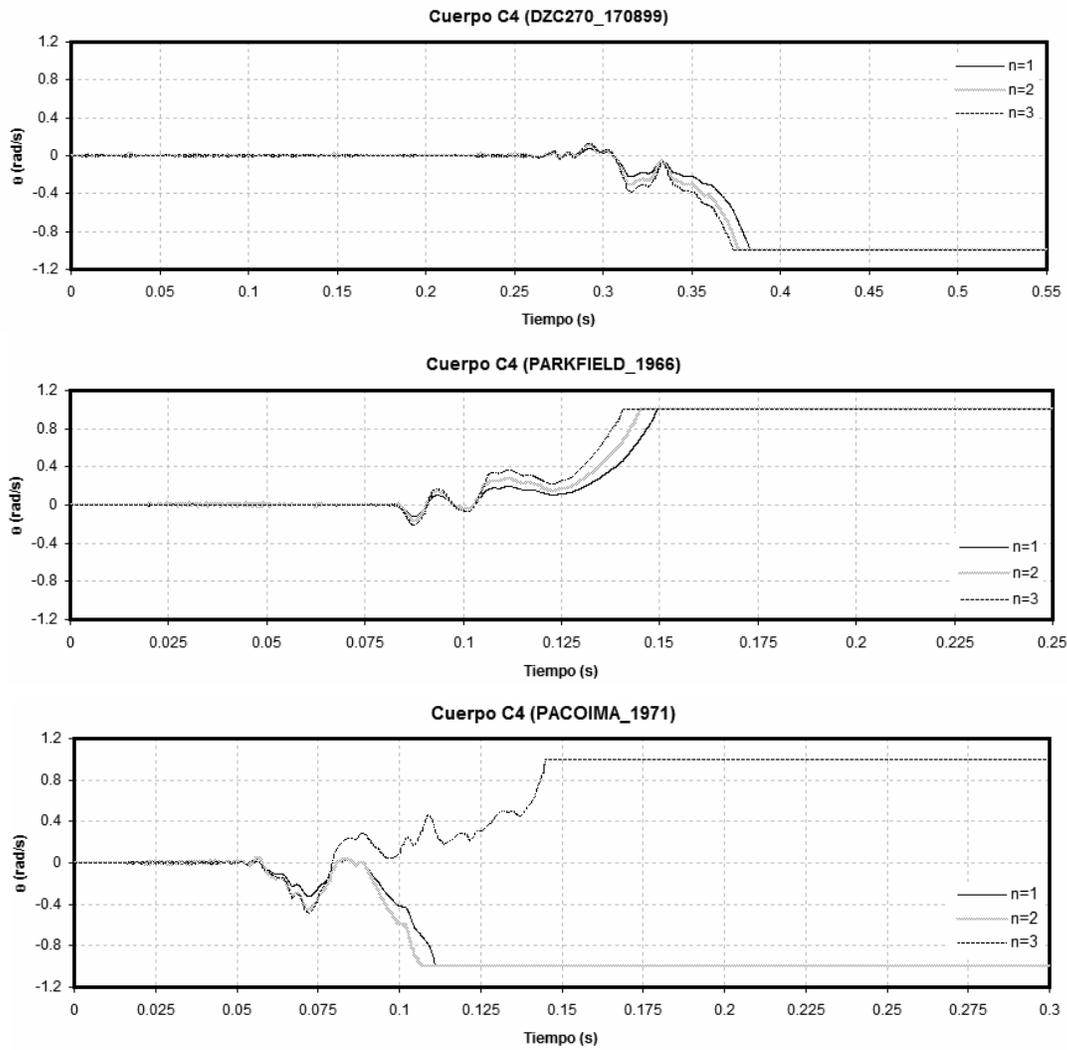
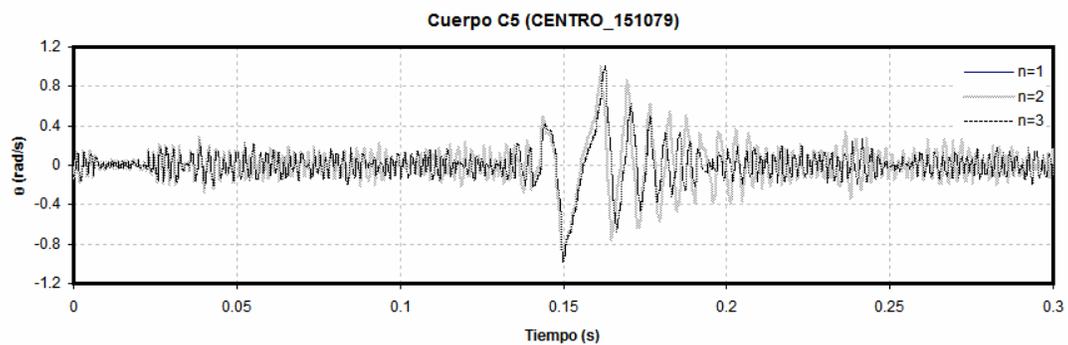


Figura. 4. 44. Respuesta dinámica del prototipo C4 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



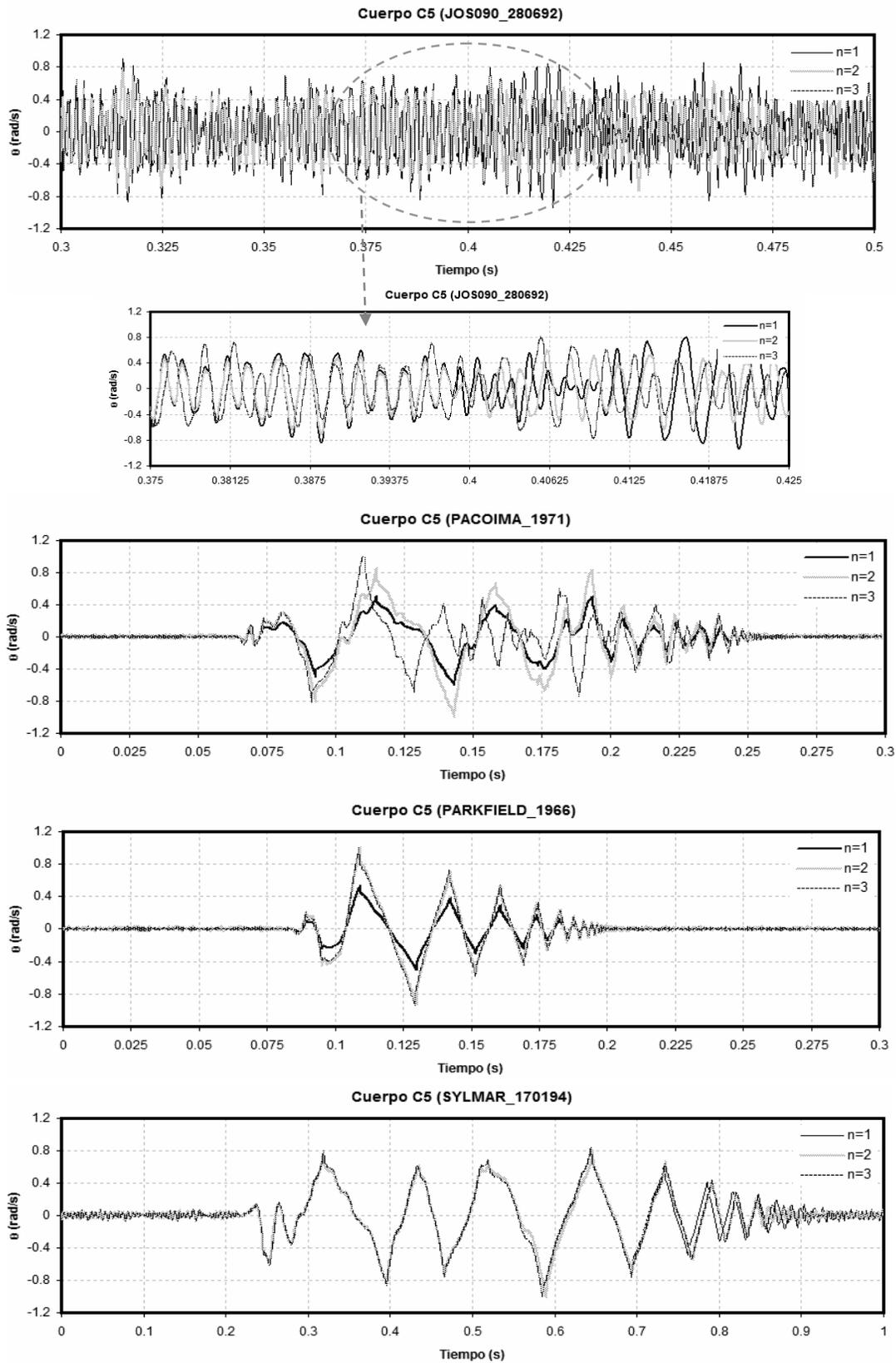
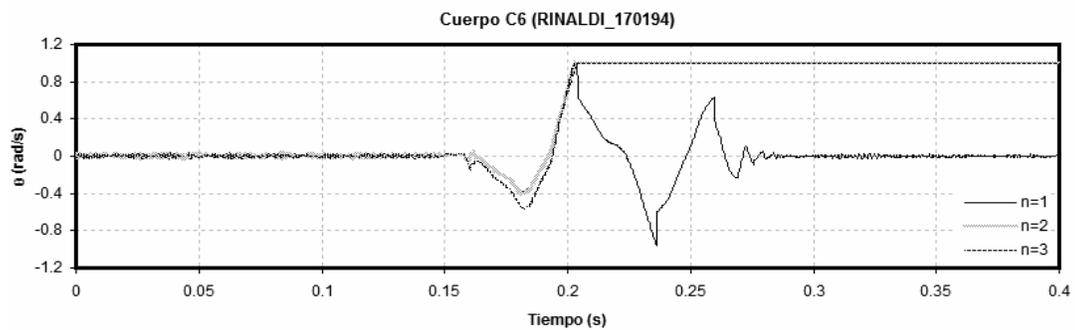
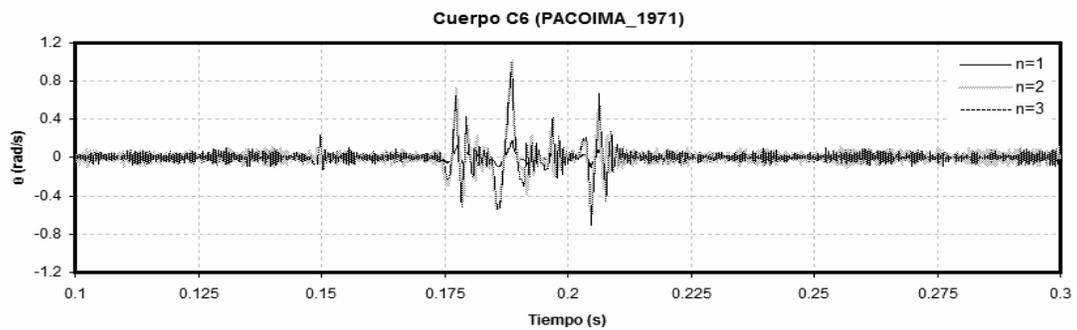
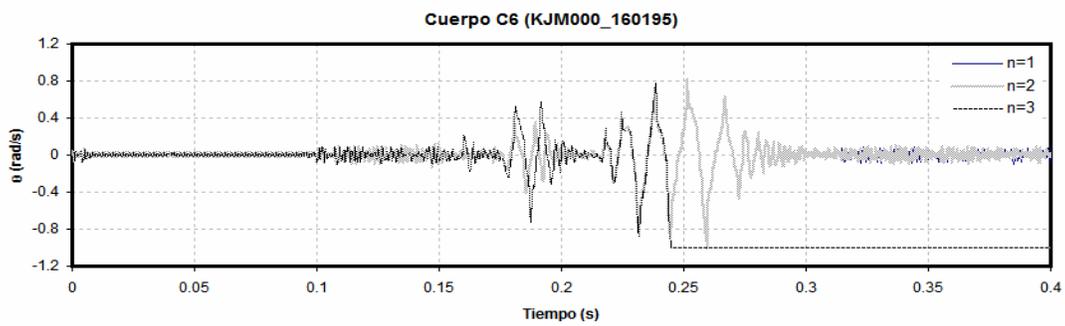
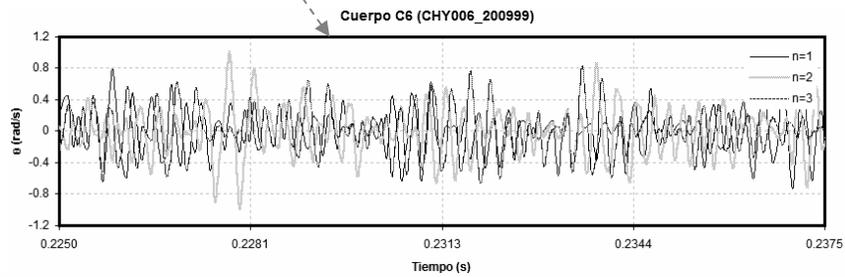
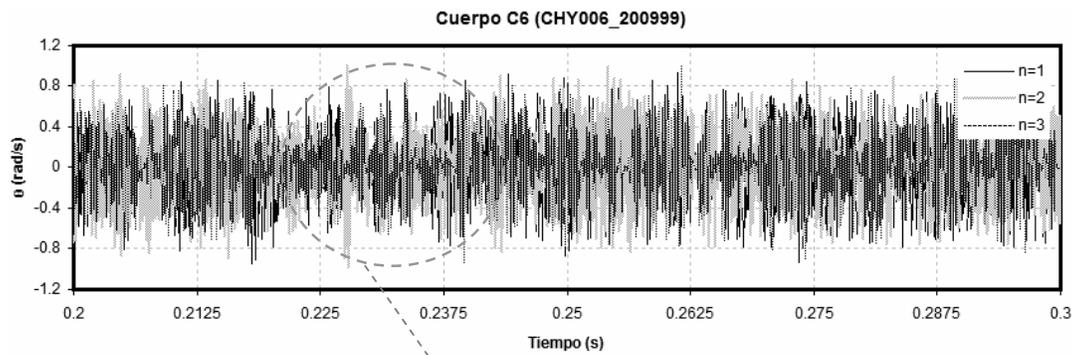


Figura. 4.45. Respuesta dinámica del prototipo C5 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



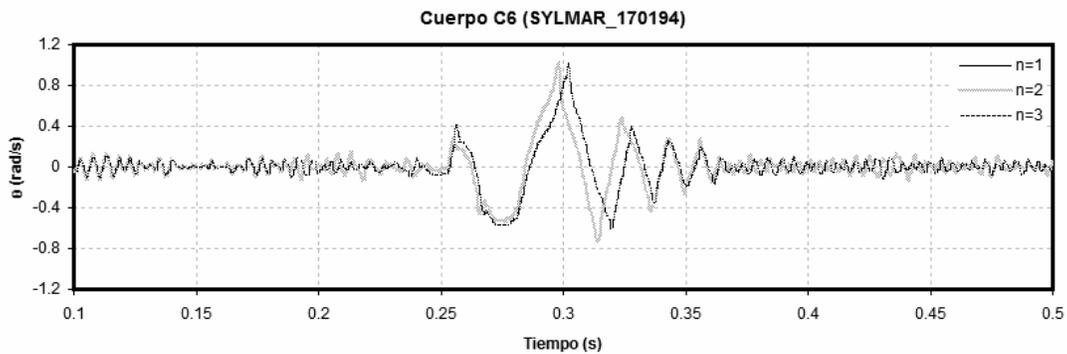
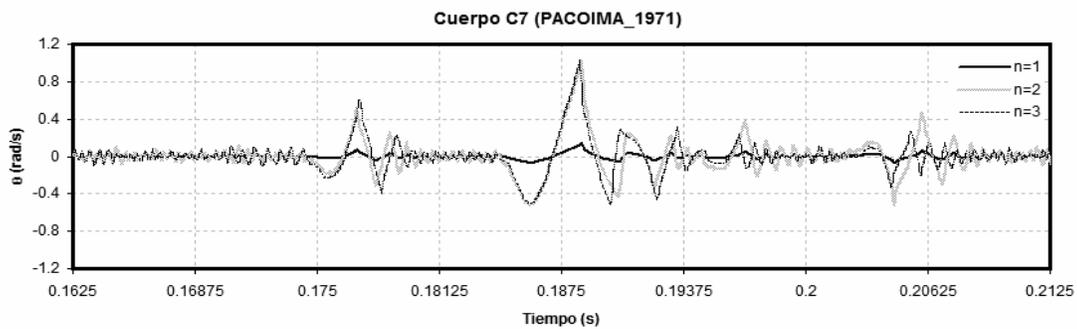
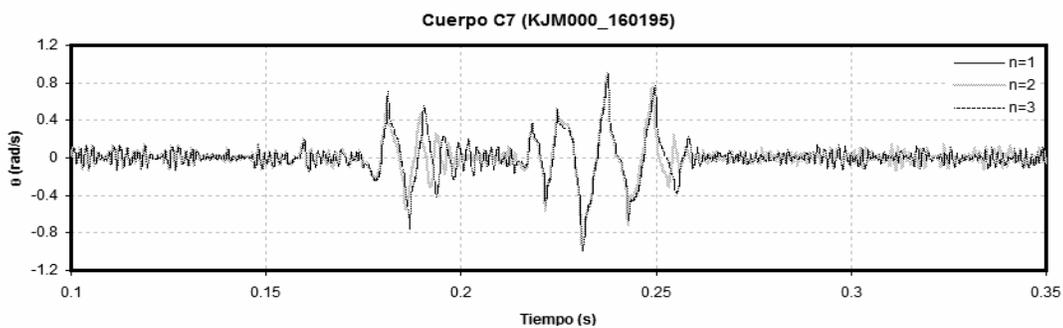
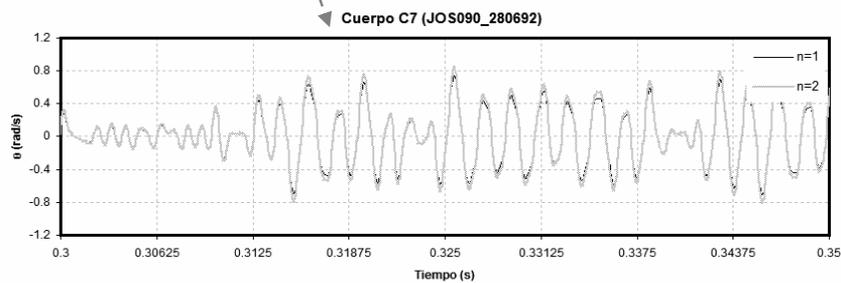
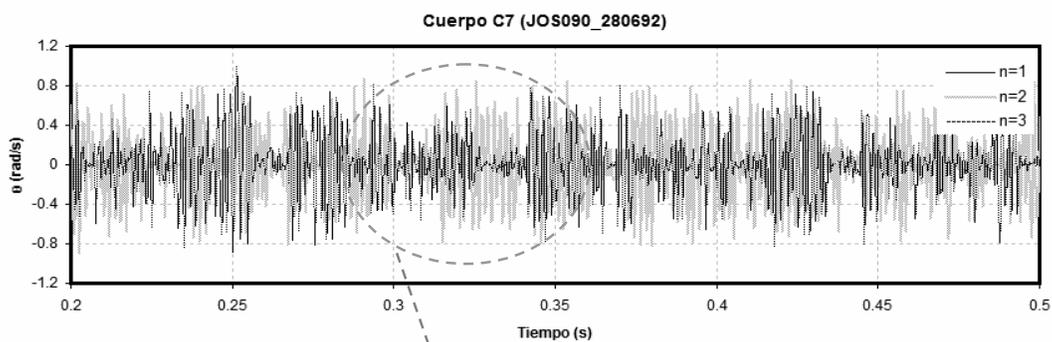


Figura.4.46. Respuesta dinámica del prototipo C6 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



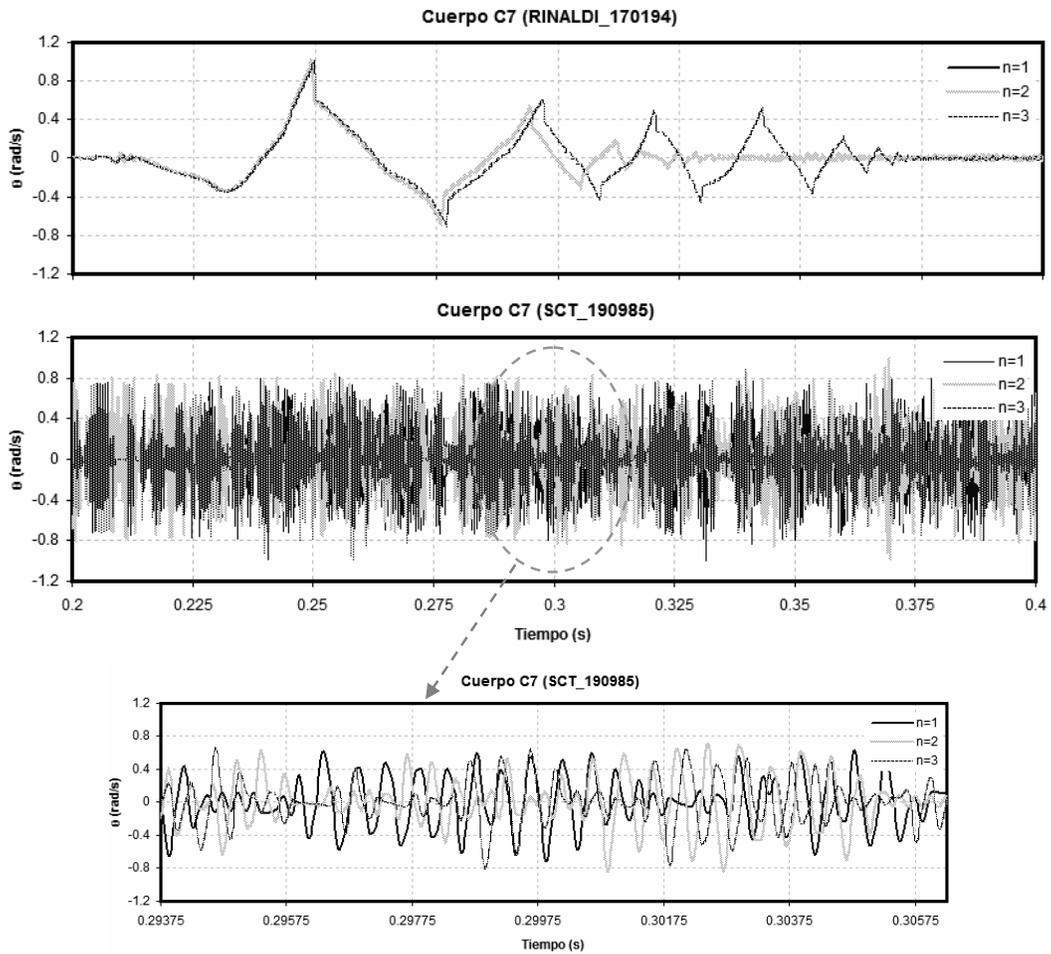
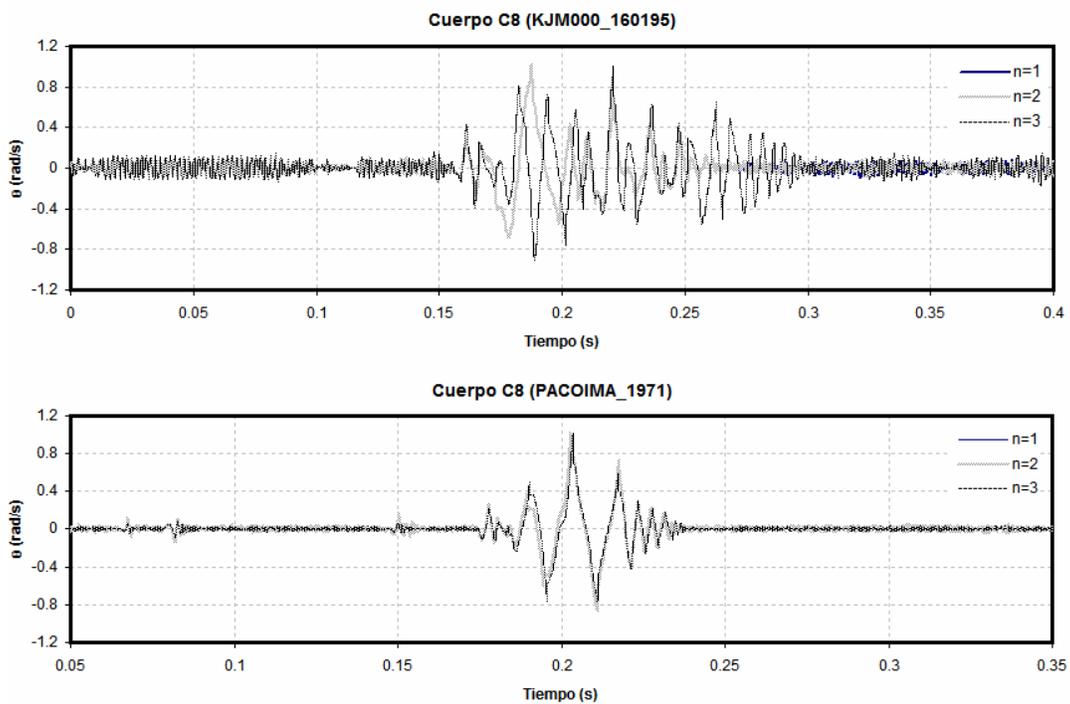


Figura.4.47. Respuesta dinámica del prototipo C7 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



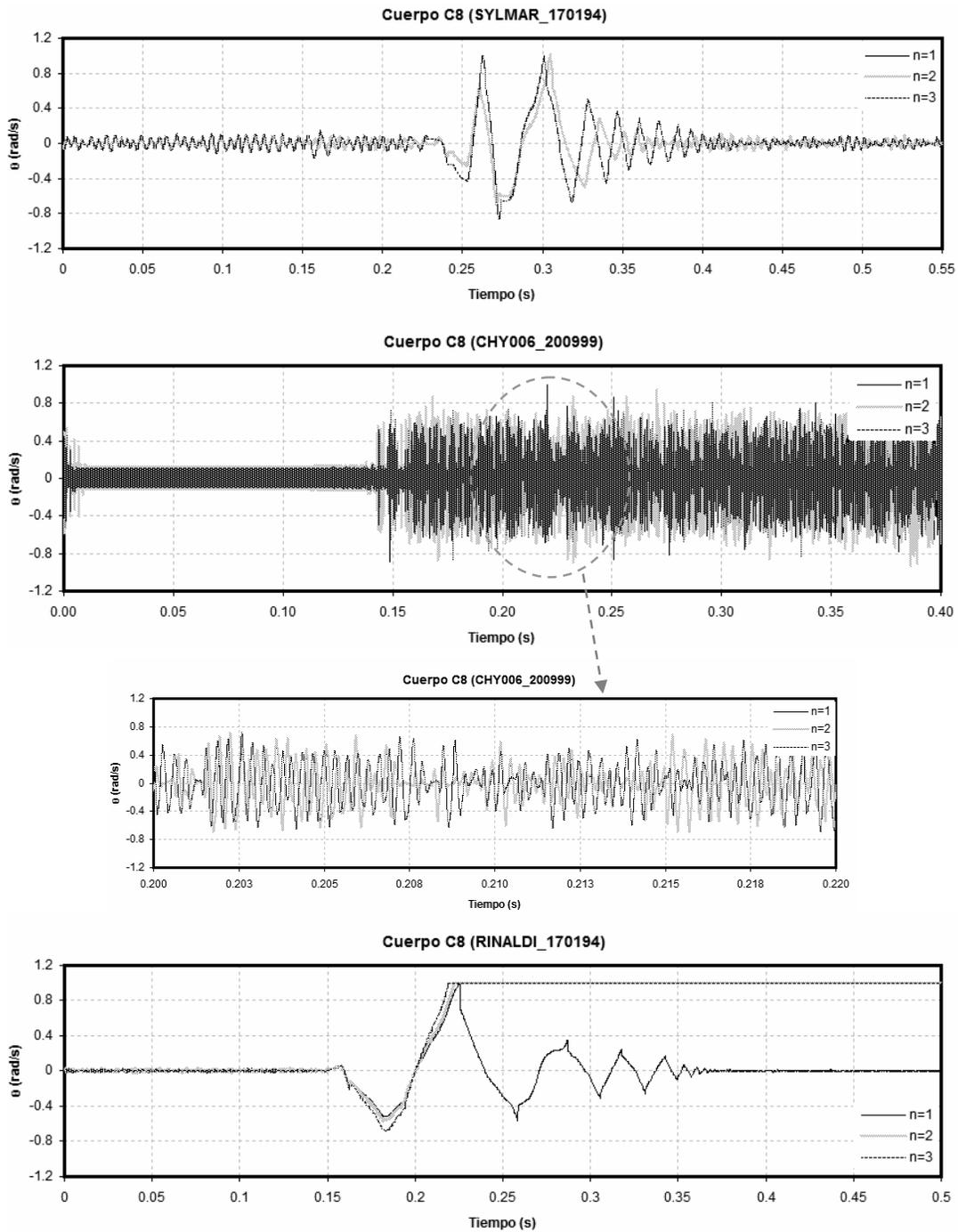
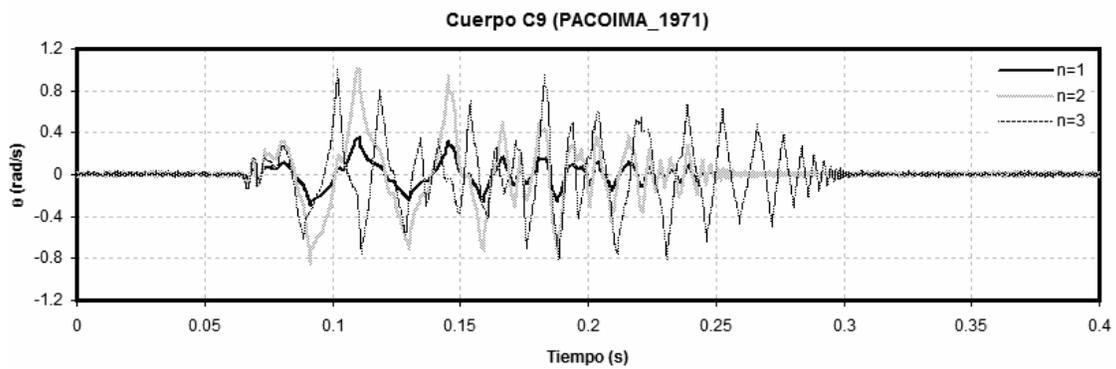
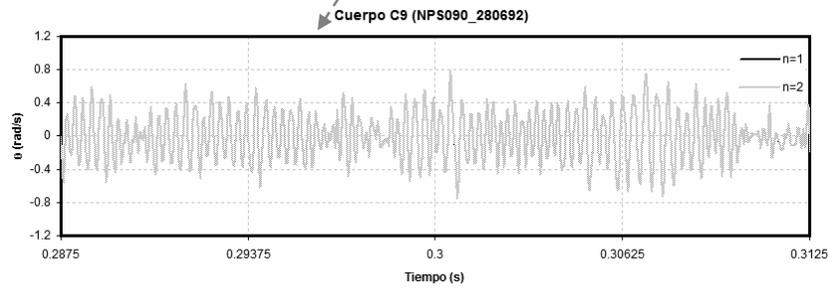
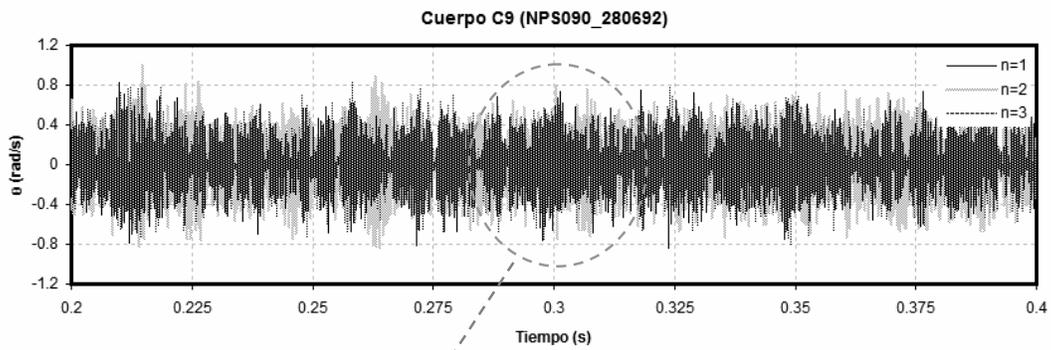
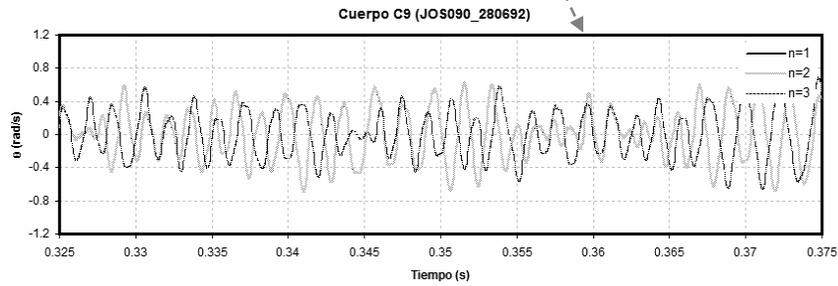
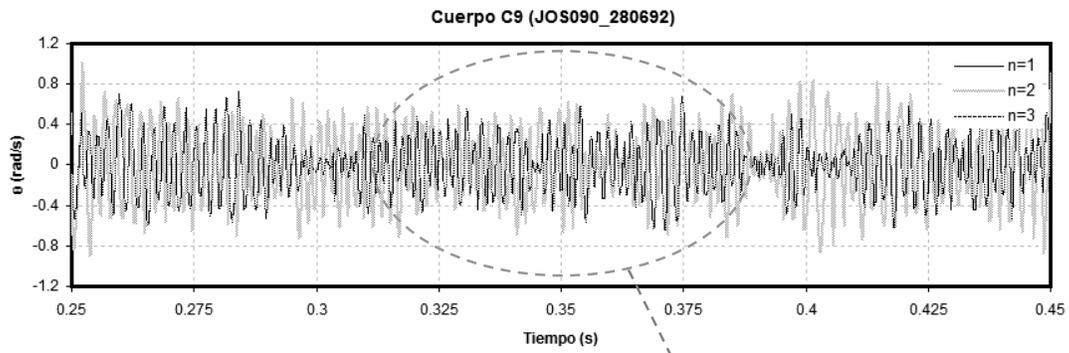


Figura. 4. 48. Respuesta dinámica del prototipo C8 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



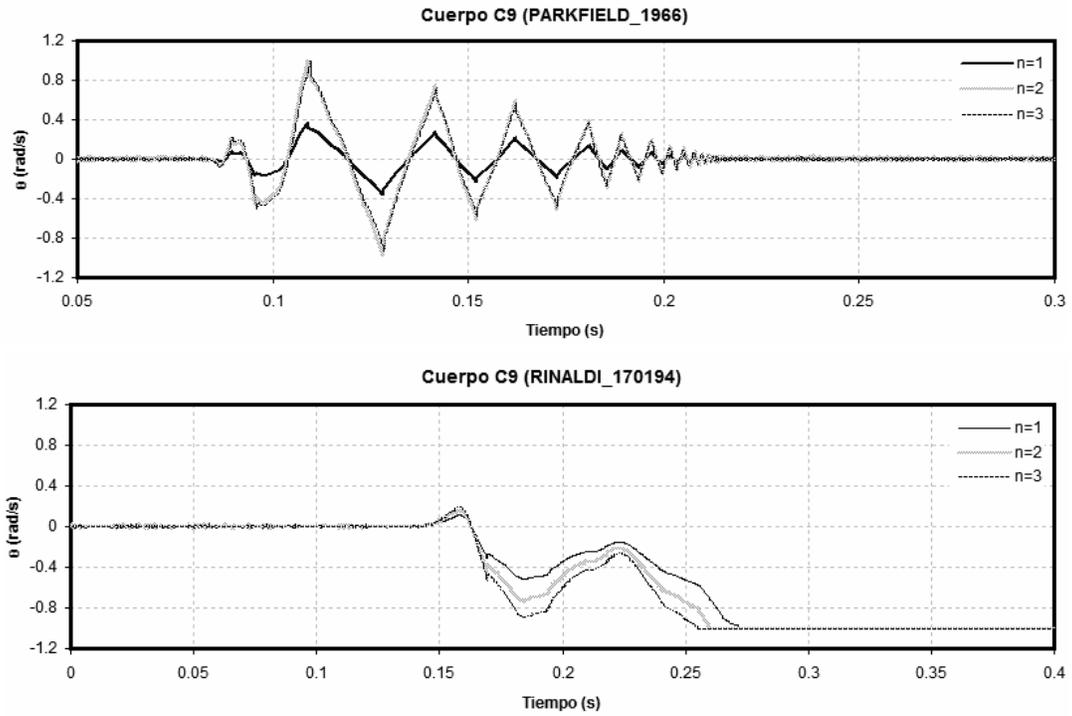
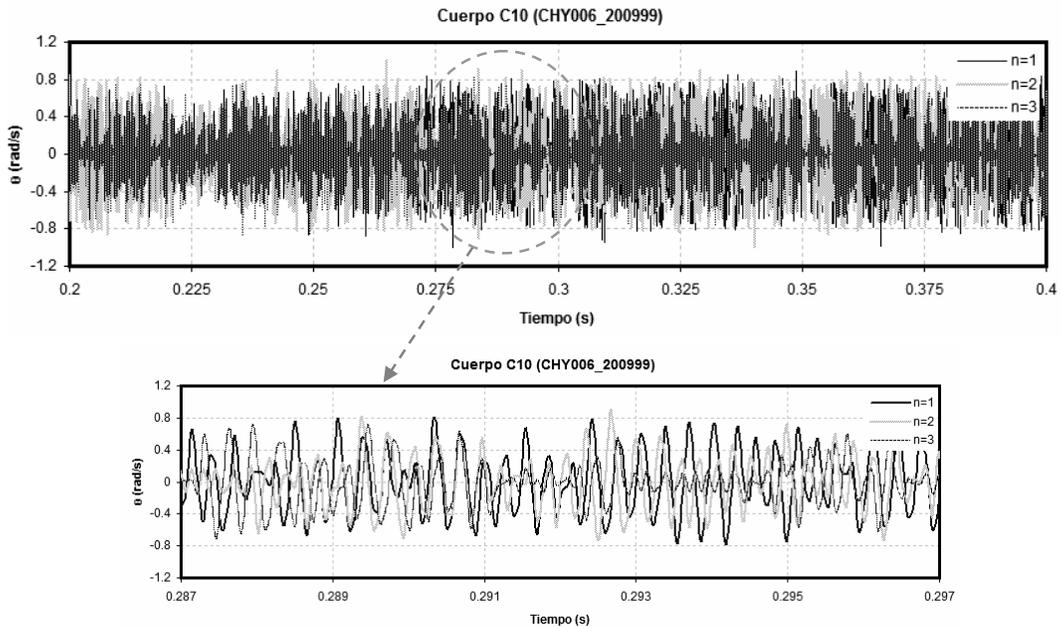


Figura.4.49. Respuesta dinámica del prototipo C9 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



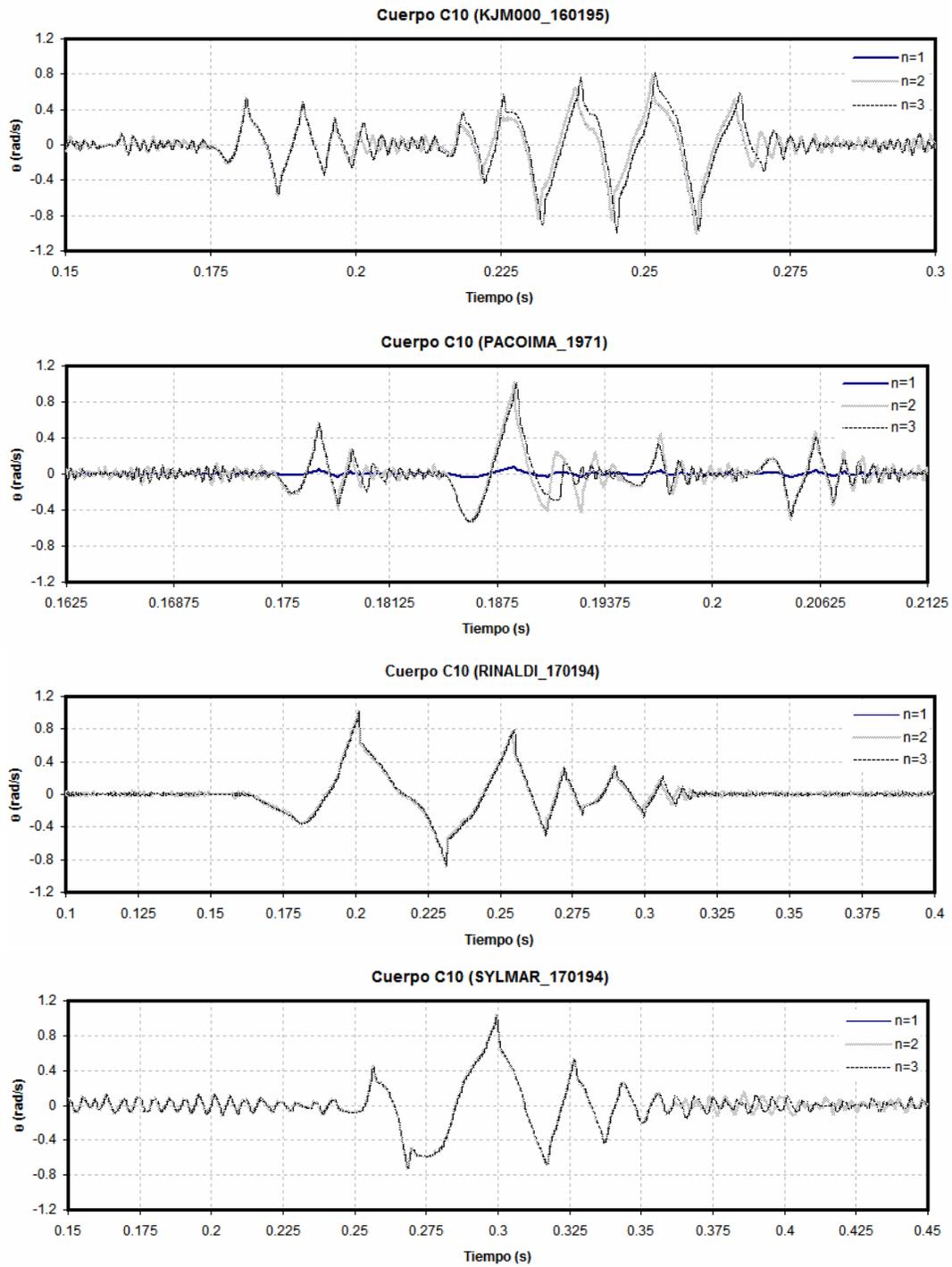


Figura 4.50. Respuesta dinámica del prototipo C10 al estar sujeto a excitaciones sísmicas

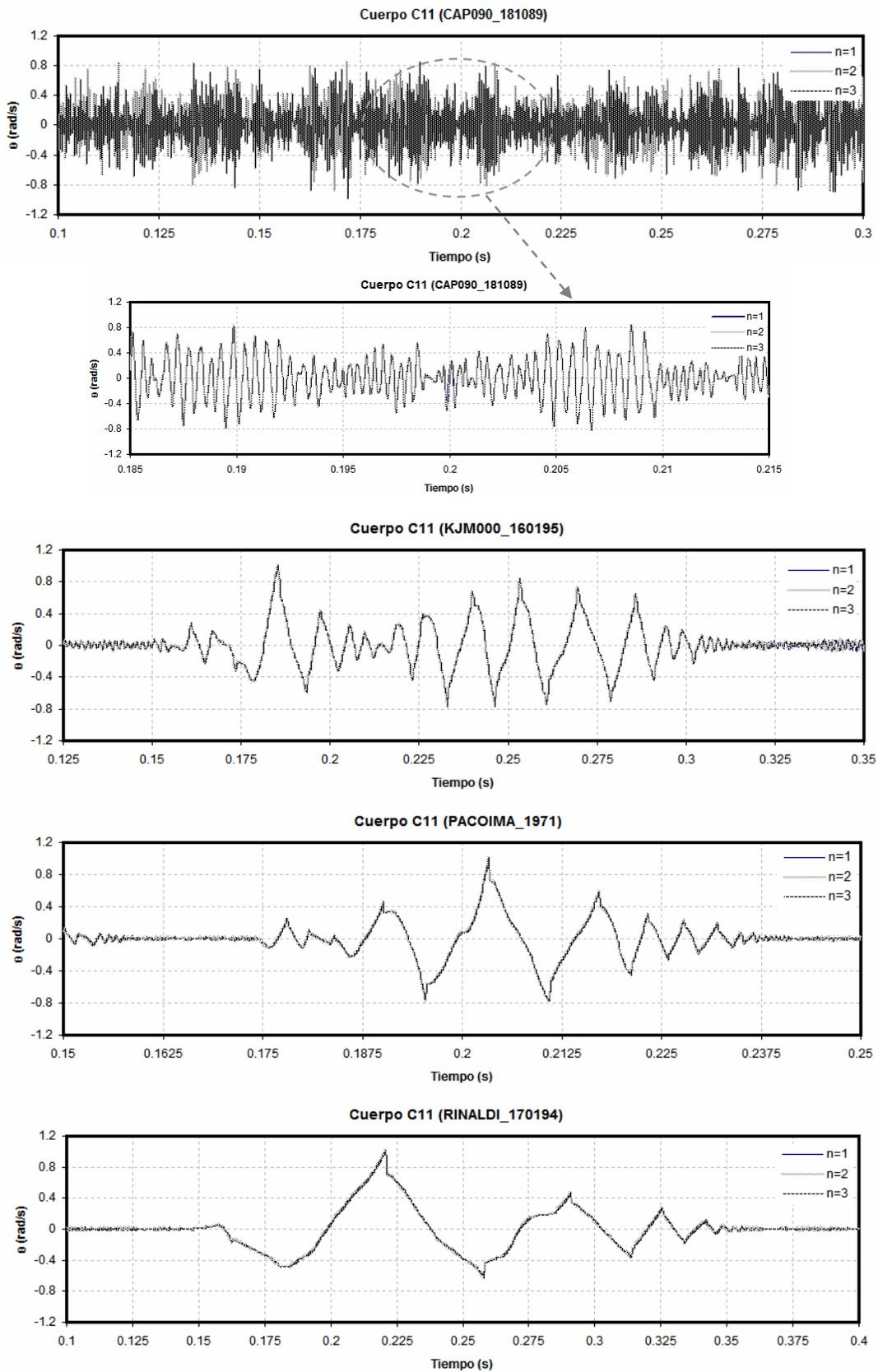
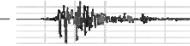
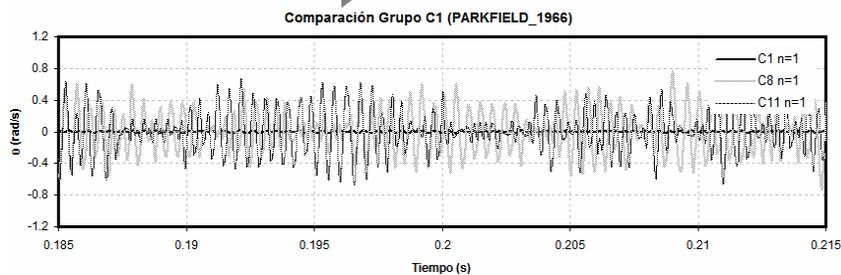
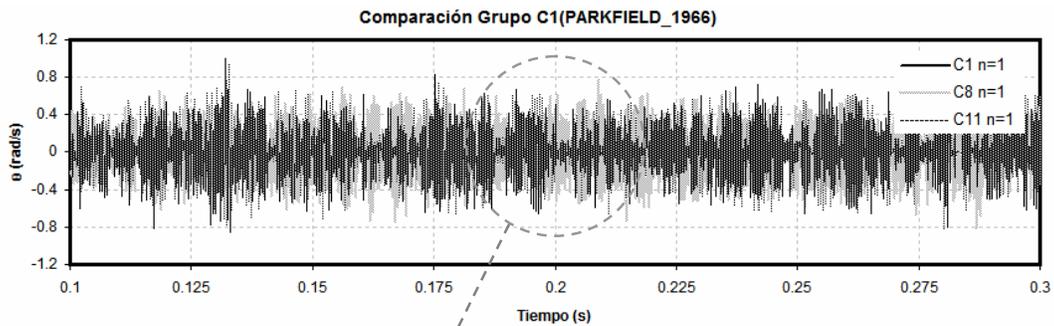
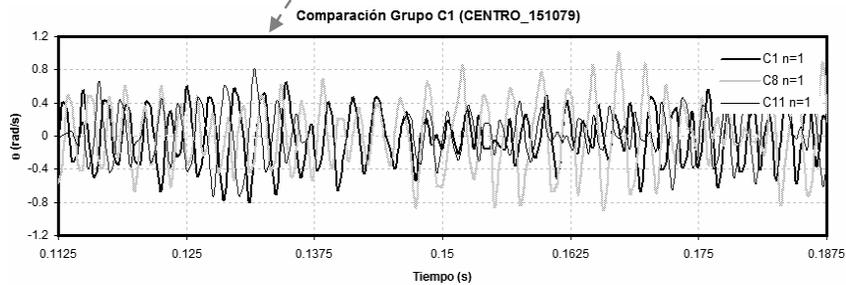
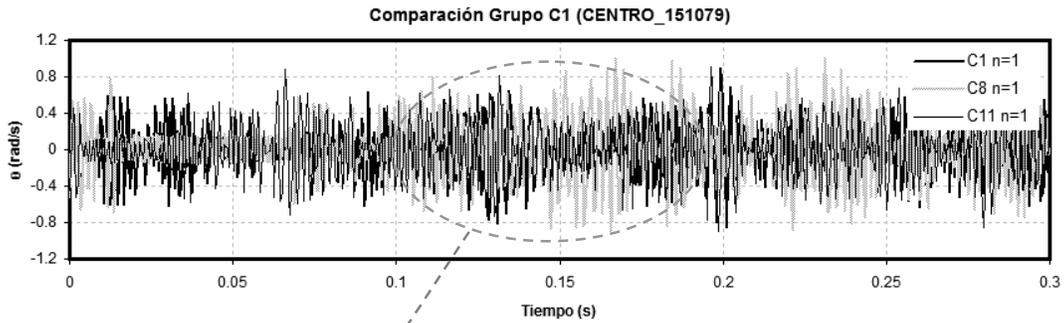


Figura.4.51. Respuesta dinámica del prototipo C11 al estar sujeto a excitaciones sísmicas



#### IV.2.2. Comparación de las Respuestas Dinámicas de los Cuerpos C1-C11 ante Registros Sísmicos

Aquí se presentan las respuestas en balanceo y volteo de los prototipos pertenecientes a los grupos C1, C2 y C3 sujetos a excitaciones sísmicas registradas en diversas partes del mundo con la intención de verificar la influencia de la relación de esbeltez ( $h/b$ ) como parámetro que define una tendencia en el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos.



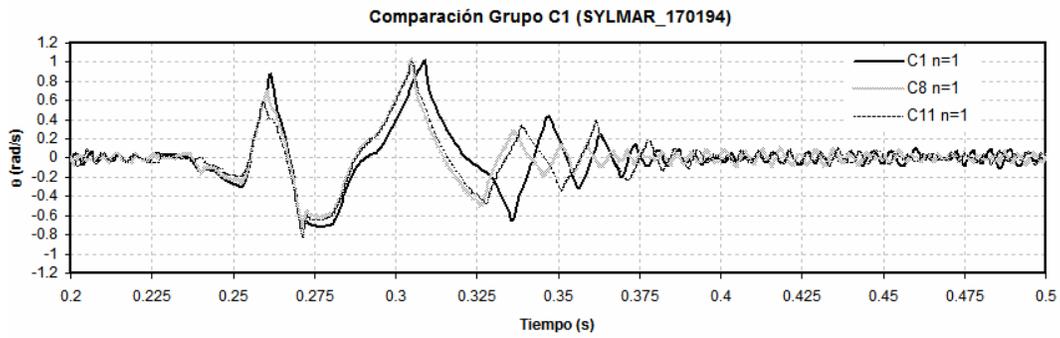


Figura.4.52. Comparación de las respuestas ante sismo de los prototipos del grupo C1 (cuerpos C1, C8 y C11)

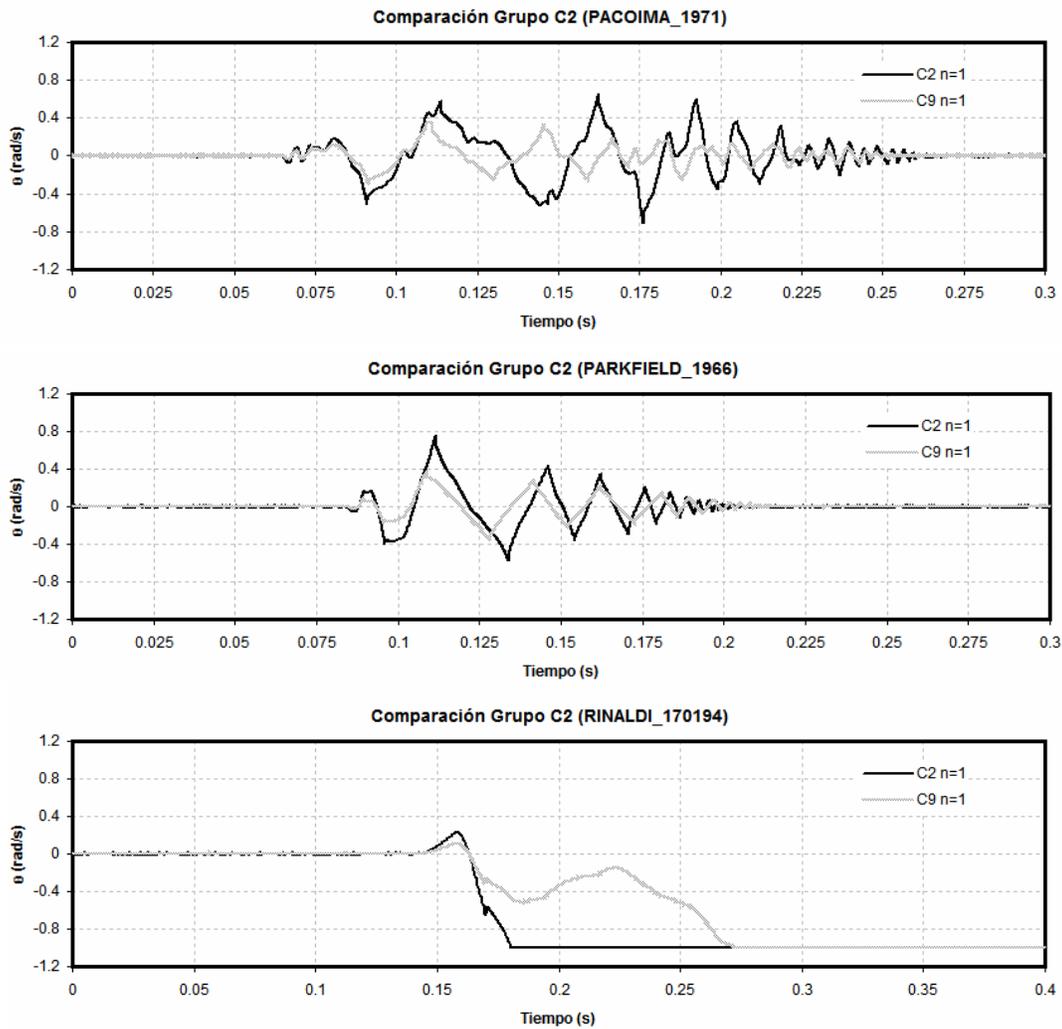


Figura.4.53. Comparación de las respuestas ante sismo de los prototipos del grupo C2 (cuerpos C2 y C9)

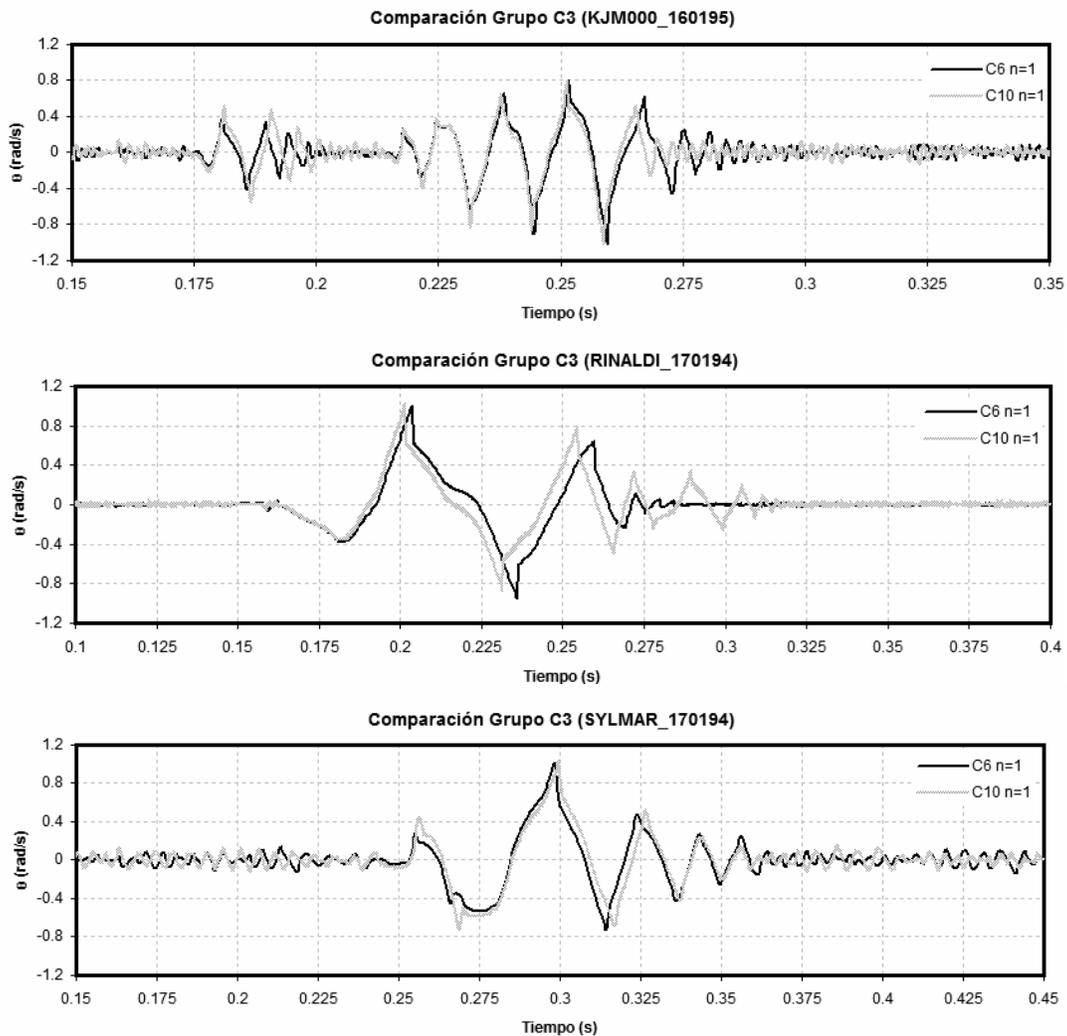


Figura.4.54. Comparación de las respuestas ante sismo de los prototipos del grupo C3 (cuerpos C6 y C10)

Con los gráficos mostrados en esta sección vemos que el cálculo de la respuesta dinámica de cuerpos rígidos sometidos a la acción de sismos en su base arroja resultados muy consistentes tanto para prototipos como para modelos a escala reducida, ya que en la gran mayoría de los casos se predice de forma satisfactoria el modo de respuesta, la amplitud de las rotaciones y los instantes y dirección de volteo de los cuerpos.

Sin embargo, en algunos casos muy particulares se encontraron respuestas discrepantes

#### IV.2.3. Casos Discrepantes

En esta sección se presentan algunos casos para los cuales las respuestas dinámicas calculadas resultaron fuera de lo esperado para ciertas excitaciones tanto analíticas como registros sísmicos.

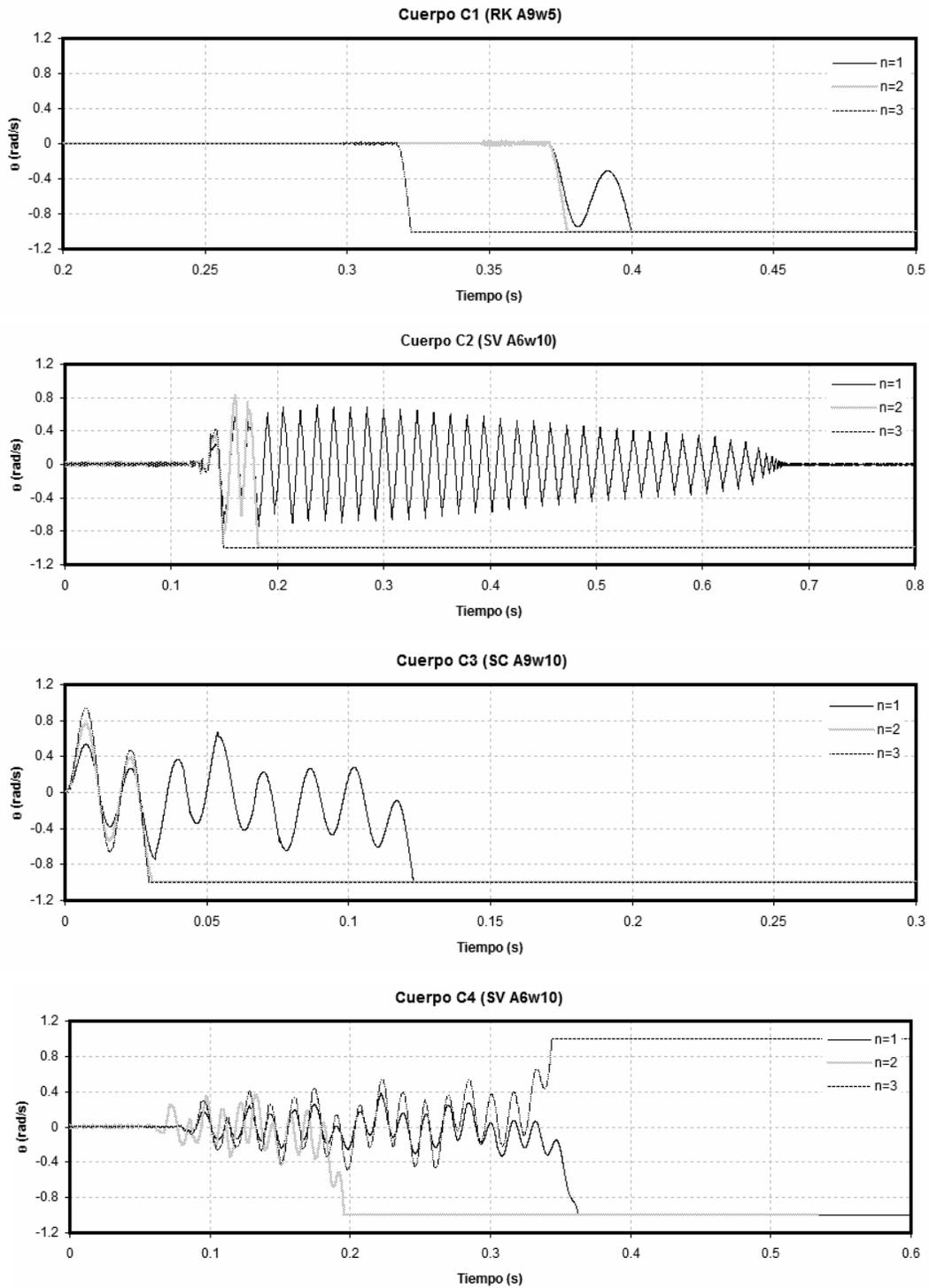


Figura.4.55. Discrepancia en la respuesta de los prototipos C1, C2, C3 y C4 y sus modelos a escala reducida sujetos a excitaciones analíticas y sísmicas

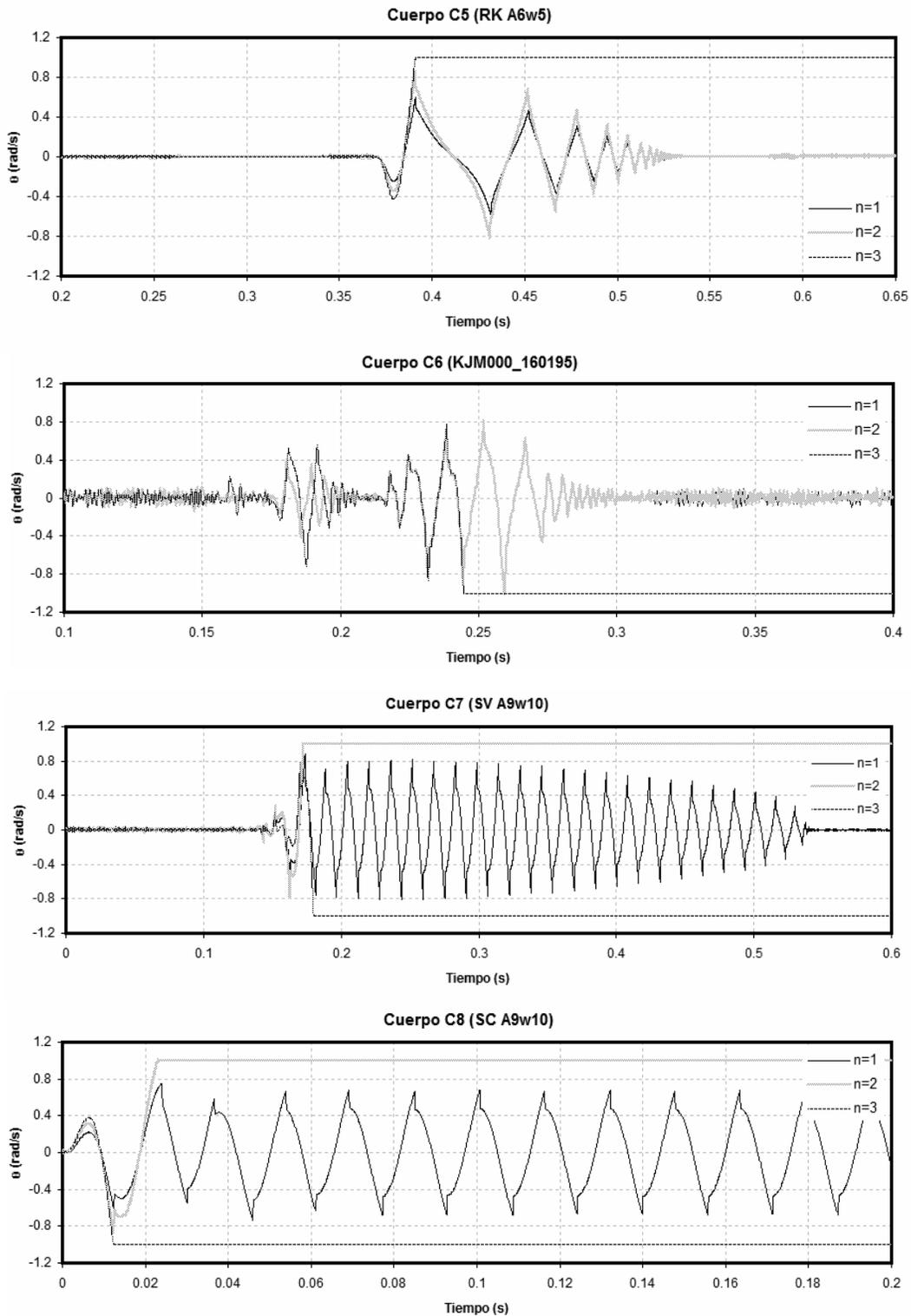


Figura.4.56. Discrepancia en la respuesta de los prototipos C5, C6, C7 y C8 y sus modelos a escala reducida sujetos a excitaciones analíticas y sísmicas

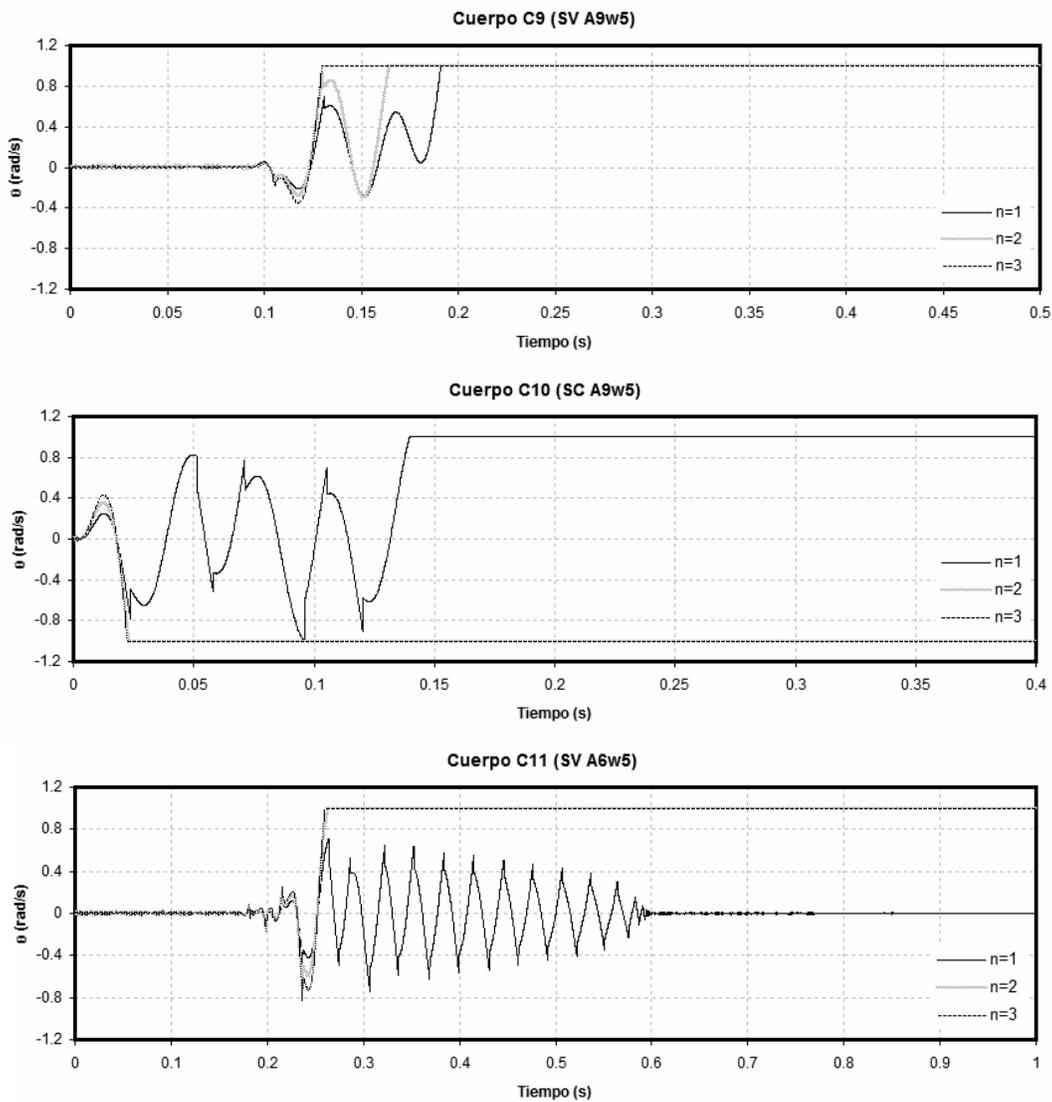


Figura.4.57. Discrepancia en la respuesta de los prototipos C9, C10 y C11 y sus modelos a escala reducida sujetos a excitaciones analíticas y sísmicas

Con estos casos discrepantes se puede suponer que los métodos de integración numérica empleados (Diferencia Central Media y Runge-Kutta de 6<sup>o</sup> orden) por ser aproximados podrían contar con regiones de inestabilidad numérica para ciertos intervalos de valores empleados, ya sean provocados por el escalamiento de las propiedades geométricas del cuerpo o por el escalamiento del intervalo de muestreo, y con ello de la frecuencia, de la excitación de entrada.



## CAPÍTULO V

### V. COMPARACIÓN DE RESULTADOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES

En este capítulo se presenta un caso en el que se simula la respuesta dinámica de un cuerpo rígido (prototipo) y sus modelos a escala reducida, mediante la aplicación del análisis dimensional, al estar sujetos a la acción de una excitación sísmica. De manera análoga, se realizaron ensayos de laboratorio (Arredondo 2006) en los que cuerpos con las propiedades geométricas de los especímenes analizados fueron sometidos a la misma excitación la cual fue reproducida por la mesa vibradora del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Finalmente, se muestran gráficas en las que se comparan los resultados determinados analíticamente y experimentalmente.

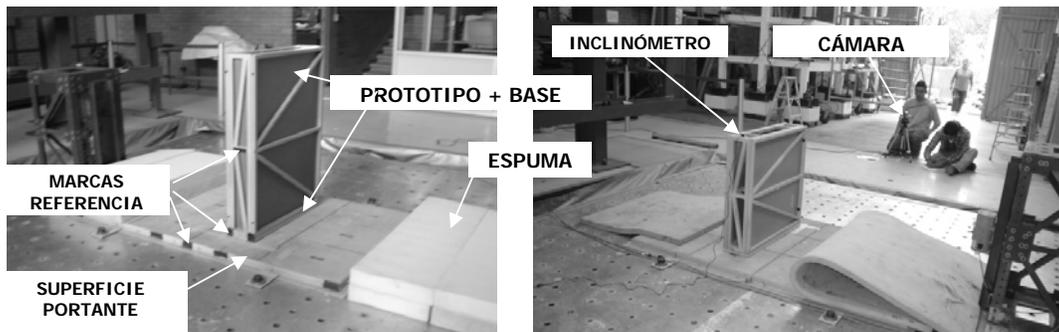


Figura 5.1. Instrumentación y colocación del cuerpo en la mesa vibradora (IIUNAM)

Los cuerpos empleados para esta comparación son los siguientes:

CUERPO	b (m)	h (m)	h/b	n
P1	0.3	0.6	2.0	1.0
M2	0.2	0.4	2.0	1.5
M3	0.1	0.2	2.0	3.0

Tabla 5.1. Dimensiones de los cuerpos rígidos estudiados

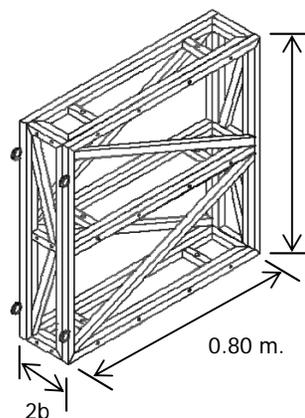


Figura 5.2. Configuración de los especímenes de laboratorio



La excitación empleada en este ejemplo corresponde al sismo de Kobe registrado en la estación KJM000 el día 16 de mayo de 1995.

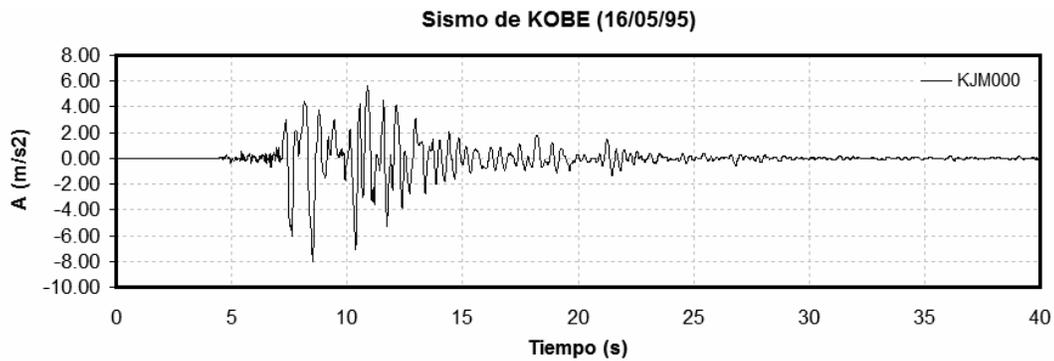


Figura.5.3. Acelerograma registrado en la estación KJM000 durante el sismo de Kobe

A continuación se presentan las respuestas calculadas analíticamente del prototipo y sus respectivos modelos a escala reducida sujetos a la excitación mencionada (figura 5.4).

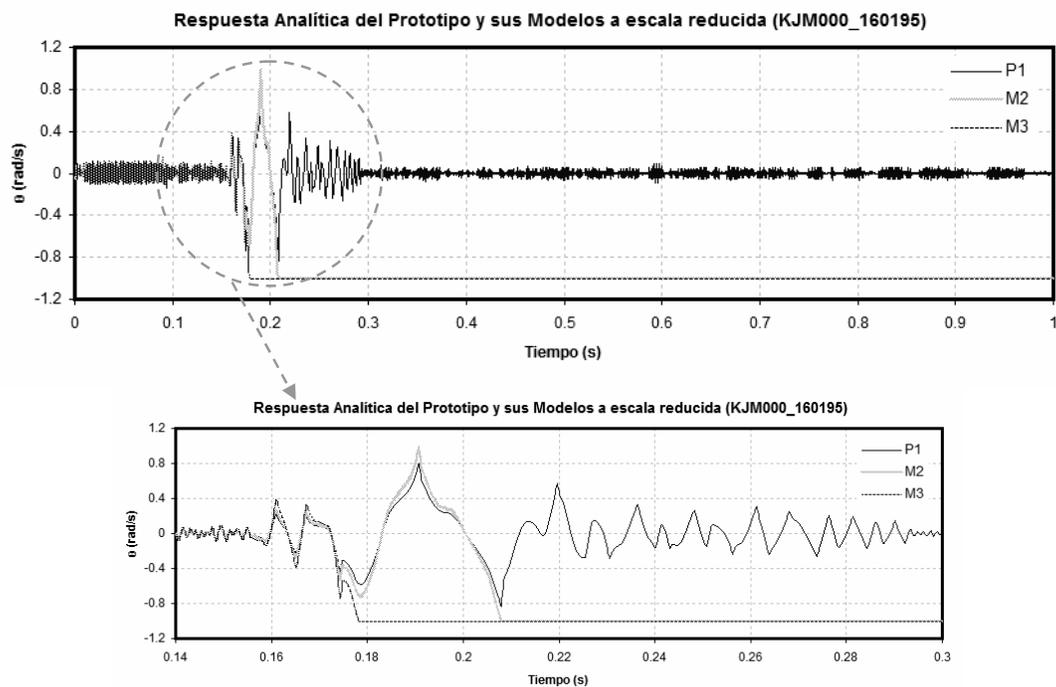


Figura.5.4. Comportamiento del prototipo P1 y sus modelos M2 y M3 determinada analíticamente al aplicar el análisis dimensional

Ahora se muestran los resultados arrojados por las pruebas experimentales realizadas en la mesa vibradora introduciendo la excitación sísmica de interés (figura 5.5).

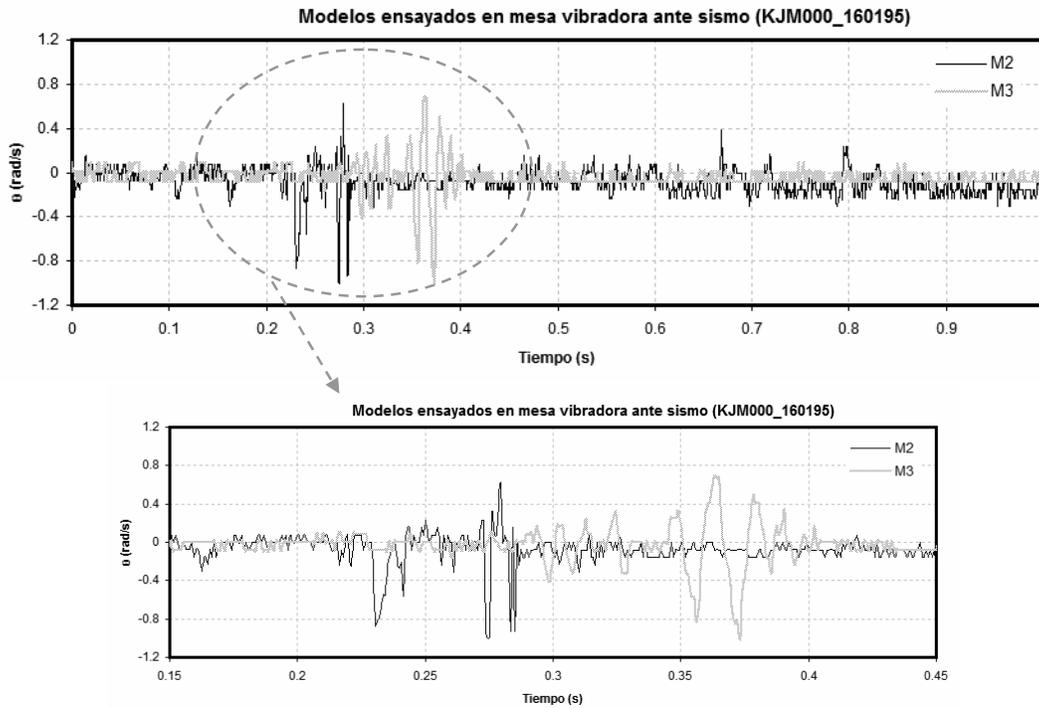


Figura.5.5. Comportamiento de los modelos M2 y M3 al ser sometidos experimentalmente a una excitación en mesa vibradora

En las siguientes gráficas se comparan las respuestas determinadas analíticamente y las observadas en las pruebas experimentales (figuras 5.6 y 5.7).

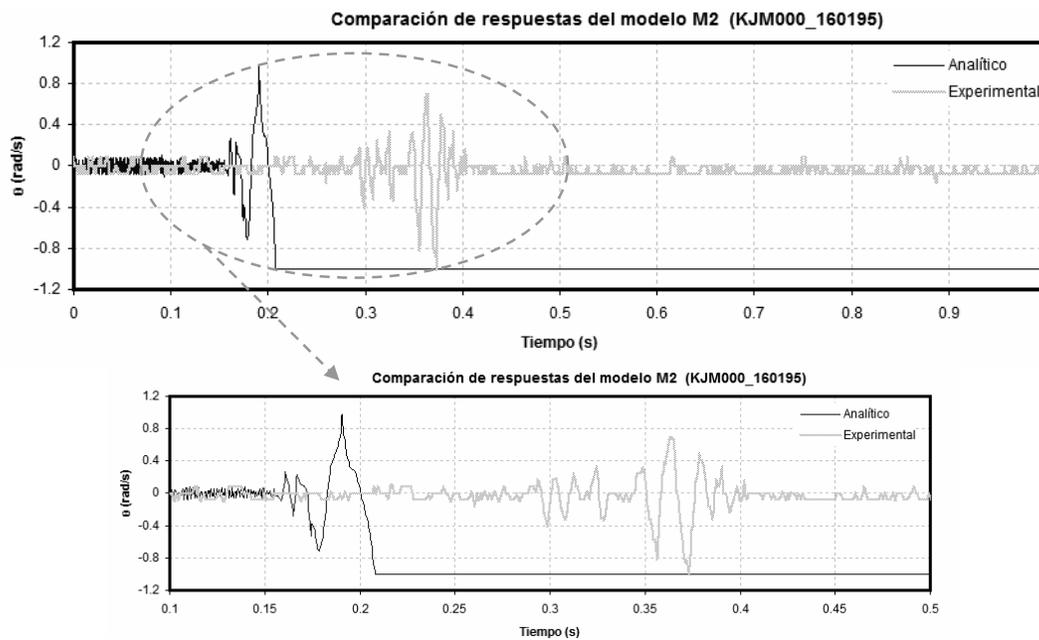


Figura.5.6. Comparación de la respuesta del modelo M2

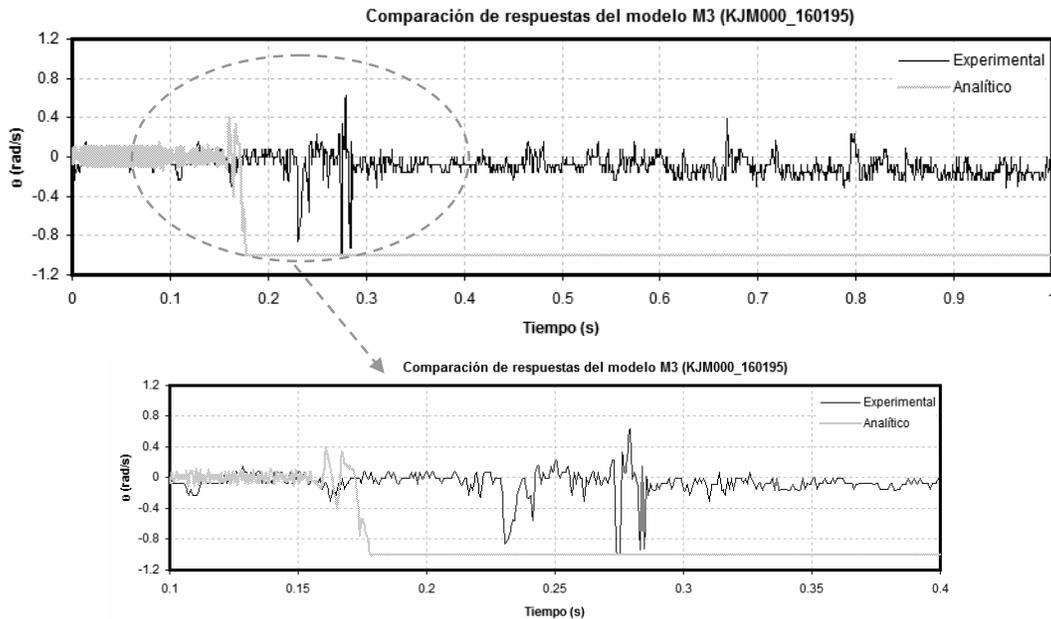


Figura.5.7. Comparación de la respuesta del modelo M3

Aunque la muestra de cuerpos probados experimentalmente en mesa vibradora se reduce a un caso, al ser comparada ésta con la calculada analíticamente se observa una discrepancia importante. Esto nos podría llevar a poner en tela de juicio la utilidad de la metodología empleada, sin embargo debemos tener claras algunas limitaciones.

- La primera gran diferencia entre la respuesta analítica y la experimental es que en la expresión propuesta en la formulación matemática del problema (Ec. 2.11, Shenton III, 1990) las masas se eliminan, parámetro que deja de ser importante en el cálculo analítico; sin embargo, en las pruebas de laboratorio (Arredondo 2006) al realizar ensayos sobre modelos escalados a partir del prototipo se fue necesario considerar una variación en la masa, la cual puede llevarse a cabo mediante la inclusión de pesas o elementos que modifiquen la masa del modelo, de acuerdo a las Ec. 2.21 y 2.22 deducidas a partir del análisis dimensional.
- Otro parámetro que podría tener gran influencia en estas discrepancias se debe a que todos los cuerpos ensayados sobre la mesa vibradora, a pesar de tener diferente geometría ( $b$  y  $h$ ), tienen la misma profundidad (0.80m, figura 5.2) y, aunque el método analítico es bidimensional, al momento de interactuar la profundidad en la prueba experimental podría estar influyendo directamente sobre el comportamiento del cuerpo rígido.
- Al contar con un caso experimental contra el cual comparar el método analítico se hace necesario planear una serie de ensayos que ayuden a aclarar qué parámetros están influyendo en dichas discrepancias y que ajustes deberían realizarse en la formulación para obtener los resultados esperados y que den consistencia a su aplicación.



## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Del trabajo de investigación desarrollado se desprenden las siguientes conclusiones:

La formulación matemática que define el comportamiento dinámico de cuerpos rígidos (Arredondo, 2006) resulta muy estable, ya que las simulaciones realizadas considerando tanto excitaciones armónicas como sísmicas arrojan respuestas lo suficientemente consistentes para considerarlas como satisfactorias en la gran mayoría de los casos en estudio. Sin embargo, aún queda pendiente por determinar las causas que producen aquellos casos discrepantes presentados, pues aunque podríamos pensar que se debe a regiones de inestabilidad de los métodos numéricos empleados, podría también tener una influencia importante la naturaleza de la ecuación diferencial que resuelve el problema de comportamiento dinámico. Es claro que en cuánto más pequeño es el orden de valores del intervalo de muestreo óptimo de la señal ( $\Delta t_{opt}$ ) y las dimensiones geométricas del cuerpo en estudio como resultado del escalamiento, se está más propenso a obtener discrepancias en el comportamiento predicho, lo cual se observó en algunos casos y para lo cual no se tiene una causa totalmente definida, ya que este problema se encuentra fuera del alcance de esta investigación.

Respecto al desarrollo de las expresiones para la aplicación del análisis dimensional y teorías de semejanza al comportamiento dinámico de cuerpos rígidos se llevó a cabo verificando que se cumplieran las disposiciones del modelo matemático tales como homogeneidad dimensional, teorema II de Buckingham, normalización de las ecuaciones de conservación y teoría de modelos. Además, se obtuvieron resultados que reproducen satisfactoriamente el comportamiento de los modelos escalados en relación a los prototipos originales, lo cual indica que el escalamiento de la excitación de entrada al afectar su contenido de frecuencias está introduciendo una cantidad de energía adecuada al espécimen en estudio. Al comparar las respuestas analíticas con los ensayos de laboratorio se encontraron diferencias considerables debido a la formulación matemática con la que se realiza la simulación, ya que en ésta se elimina la relación de masas entre prototipo y modelo pero en las pruebas experimentales al escalar un cuerpo fue necesario incluir una masa adicional.

Otro parámetro que sin duda resultó determinante en la discrepancia entre resultados analíticos y experimentales es que los especímenes probados sobre la mesa vibradora, aunque cumplen con la geometría en el plano de interés ( $X - Y$ ), cuentan con una tercera dimensión (profundidad) de 0.80m, lo cual influye en el comportamiento tridimensional del cuerpo rígido.

Para realizar el cálculo que da solución a la ecuación de movimiento para un cuerpo rígido se emplearon dos métodos numéricos de integración: la Diferencia Central Media y el Método de Runge-Kutta de 6º orden. El primer método fue empleado inicialmente, sin embargo al obtener algunos casos discrepantes como los ya presentados, se tomó la decisión de introducir el segundo método con la intención de verificar si la Diferencia Central Media tenía limitantes o algún problema de inestabilidad numérica. Una vez recalculadas las respuestas de los mismos casos con el método de Runge-Kutta se vio que también se presentan algunas discrepancias llevándonos a la conclusión de que no es el método propiamente el que resulte inestable para cierta combinación de parámetros sino que quizá sea un problema complejo, ya que la ecuación diferencial de movimiento es no homogénea. Se decidió determinar los intervalos de muestreo óptimos para cada señal de interés que nos aseguraran una consistencia en las respuestas calculadas para una tolerancia dada,



por lo que se construyeron las superficies de convergencia presentadas en el Capítulo III; con la aplicación de dichas superficies se obtuvieron resultados satisfactorios en la gran mayoría de los casos.

En lo referente a la simulación del comportamiento de cuerpos rígidos sujetos a la acción de excitaciones sintéticas y registradas se encontró que el método del rectángulo equivalente en combinación con el análisis dimensional y el procesamiento numérico basado en el método de Runge-Kutta arroja resultados confiables dentro de las limitaciones descritas anteriormente. Es decir, matemáticamente se está interpretando adecuadamente la interacción de los parámetros considerados y se pueden estimar las respuestas de cuerpos con geometría arbitraria si se modelan tomando las disposiciones que esta metodología establece.

Las recomendaciones para el desarrollo de trabajos a futuro se enumeran a continuación:

- Realizar ensayos experimentales en mesa vibradora donde se definan diferentes grupos de prototipos en función de parámetros de interés, tal y como se eligieron para este estudio, donde se seleccionaron especímenes que cumplieran con una misma base, altura y relación de esbeltez.
- Además, se propone llevar a cabo pruebas experimentales en prototipos y modelos a escala que permitan ajustar la formulación bidimensional existente a un nuevo modelo matemático tridimensional que se asemeje más a las condiciones reales del comportamiento dinámico de esta clase de cuerpos.
- Introducir tres parámetros fundamentales en la formulación del comportamiento dinámico de cuerpos rígidos como lo son (1) la aceleración vertical del terreno, (2) el rebote que sufre el cuerpo rígido al chocar contra la interfaz que lo contiene y (3) la interacción de los modos de respuesta de deslizamiento y balanceo debido a que en las pruebas de laboratorio se observó que los cuerpos experimentan ambas respuestas para ciertos valores de fricción y contenidos de frecuencias.
- Obtener mediante pruebas de fricción y de rotación los coeficientes de fricción y restitución que presentan los diferentes cuerpos al estar apoyados sobre interfases hechas de distintos materiales y texturas.
- Por último, para estudiar cuerpos con formas arbitrarias y con distribuciones de masa no necesariamente uniforme, deberán realizarse simulaciones que incluyan los coeficientes de fricción y restitución definidos experimentalmente, para luego compararlos con algunos ensayos de laboratorio y con ello verificar si la formulación del Modelo Rectangular Equivalente da resultados satisfactorios al ser aplicada en casos reales.



## REFERENCIAS

- Andreas, U. y Casini, P. *Dynamics of three-block assemblies with unilateral deformable contacts. Part II: Actual Application*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 28, 1999: pp. 1637-1649.
- Arredondo, C. *Influencia de la frecuencia e intensidades pico de un movimiento en la respuesta no lineal de cuerpos rígidos*. XV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, México, D.F., septiembre de 2005.
- Arredondo, C. y Reinoso, E. *Influence of frequency content and peak intensities in the rocking seismic response of rigid bodies*. En revision por parte de Journal of Earthquake Engineering, 2007.
- Arredondo, C., Jaimes, M., Reinoso, E. y Miranda, E. *Rocking behavior contents in buildings in Mexico City subjected to subduction or intermediate depth earthquakes*. Enviado a Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006.
- Aslam, M., Gooden, W. y Scalise, T. *Earthquake rocking response of rigid bodies*. Journal of the Structural Division, February, 1980, No. ST2: 377-392.
- Augusti, G., Ciampoli, M. y Airoidi, L. *Mitigation of seismic risk for museum contents: an introductory investigation*. Earthquake Engineering, Tenth World Conference, Balkema, Rotterdam 1992; 5995-6000.
- Aydin, K. y Tung, C. *Energy balance equation for estimating overturning potential of an unanchored rocking body subjected to earthquake excitation*. Earthquake Spectra, No. 17 (2), Mayo 2001; 209-220.
- Aydin, K. *Probabilities of initiation of response modes of rigid bodies subjected to base excitations*. Proceedings of the 8<sup>th</sup> National Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, Abril 18-22, 2006: paper No. 209.
- Boroschek, R y Iruretagoyena, A. *Controlled overturning of unanchored rigid bodies*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 35, 2006: pp. 695-711.
- Griffin, M.J. *Earthquake performance of nonstructural components and systems difficulties in achieving enhanced earthquake performance*. Proceedings of the 8<sup>th</sup> National Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, Abril 18-22, 2006: paper No. 1798.
- Housner, G.W. *The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes*. Bulletin of the Seismological Society of America, 1963; No. 53(2): pp. 403-417.
- Isaacson, E. e Isaacson, M. *Dimensional methods in engineering and physics*. Edward Arnold, 1975.
- Ishiyama, Y. *Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1982, No. 10, pp. 635-652.



Jones, N.P. y Shenton, H. *Generalized slide-rock response of rigid blocks during earthquakes*. Proceedings of 4<sup>th</sup> U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Palm Springs, California, Vol. 3, Mayo 20-24, 1990.

Konstantinidis, D. y Makris, N. *Experimental and analytical studies on the seismic response of slender laboratory equipment*. Proceedings of Seminar on seismic design, performance and retrofit of nonstructural components in critical facilities, ATC-29-2, 2003: pp. 399-411.

Konstantinidis, D. y Makris, N. *Experimental and analytical studies on the seismic response of freestanding and restrained laboratory equipment*. Proceedings of the 8<sup>th</sup> National Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, Abril 18-22, 2006: paper No. 1619.

Konstantinidis, D. y Makris, N. *Seismic response analysis of multidrum classical columns* Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 34, 2005: pp. 1243-1270.

López, D. y Soong, T. *Sliding fragility of block-type non-structural components Part I: Inrestrained components*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 32, 2002: pp. 111-129.

Makris, N. y Black, C. *Uplifting and overturning of equipment anchored to a base foundation*. Earthquake Spectra, Vol. 18, noviembre, 2002: pp. 631-661.

Makris, N. y Roussos, Y. *Rocking response and overturning of equipment under horizontal pulse-type motions*. Report PEER-1998/05, Pacific Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, Octubre, 1998.

Makris, N. y Konstantinidis, D. *The rocking spectrum, existing design guidelines and scale invariance*. Proceedings of the Federation Internationale du Beton, FIB 2003 Symposium, Atenas, Grecia, Mayo 06-09, 2003.

Makris, N. y Konstantinidis, D. *The rocking spectrum and the limitations of practical design methodologies*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 32, 2002: pp. 265-289.

Makris, N. y Psychogios, T. *Dimensional response analysis of yielding structures with first-mode dominated response*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 35, 2006: pp. 1203-1224.

Press, W. y Teukolsky, S. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition, U.S., 1988.

Prieto, F., Lourenço, P.B. y Oliveira, C.S. *Impulsive Dirac-delta forces in the rocking motion*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 33, 2004: pp. 839-857.

Psycharis, N., Syngros, C., Mimoglou, P. y Taflambas, I. *Parametric investigation of the overturning of rigid blocks under dynamic loading*. 12<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering, London, U.K., septiembre, 2002.



- Reinoso, E. y Miranda, E. *Estimation of floor acceleration demands in high rise buildings during earthquakes*. Journal of the Structural Design of Tall and Special Buildings, 2005, No. 14, pp. 107-130.
- Reinoso, E., Arredondo, C., Mosquera, J. y Miranda, E. *Comparison of recorded strong motion data and estimated lateral acceleration demands in buildings located in the soft soil region of Mexico City*. Proceedings of 8<sup>th</sup> U.S. National Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, abril, 2005.
- Serway, R.A. *Física*. Ed. Mc Graw Hill, 1992.
- Santa Cruz, S., Ordaz, M. y Guerrero del Ángel, R. *Estimación de pérdidas en contenidos dentro de las naves industriales debido a sismos*. XII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, León, Gto., México, noviembre, 2000.
- Sedov, L.I., *Similarity and dimensional methods in mechanics*. CRC, 10<sup>th</sup> edition, 1993.
- Shao, Y. and Tung, C. *Seismic response of unanchored bodies*. Earthquake Spectra, agosto, 1999, No. 15(2): pp. 523-536.
- Shenton III, H. *Response of rigid blocks to base excitation*. Thesis presented to the Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1990.
- Shenton III, H. *Base excitation of rigid bodies I: formulation*. Journal of Engineering Mechanics, No. 117(10), octubre, 1991a: pp.2286-2306.
- Shenton III, H. *Base excitation of rigid bodies II: periodic slide-rock response*. Journal of Engineering Mechanics, No. 117(10), octubre, 1991b: pp.2307-2328.
- Shenton III, H. *Criteria for initiation of slide, rock and slide-rock rigid-body modes*. Journal of Engineering Mechanics, No. 122(7), julio, 1996: pp.690-693.
- Taniguchi, T. *Non-linear response analysis of rectangular rigid bodies subjected to horizontal and vertical ground motion*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, No. 31, 2002: pp. 1481-1500.
- Taniguchi, T. y Miwa, T. *A simple procedure to approximate slip displacement of freestanding rigid body subjected to earthquake motions*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006.
- Taylor, E.S. *Dimensional analysis for engineers*. Clarendon, Oxford, 1974.
- Tomazevic, M. y Velenchovsky, T. *Some aspects of testing small-scale masonry building models on simple earthquakes simulators*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, 1992.
- Vásquez, A. *Ensayo experimental de viviendas de mampostería confinada de un piso mediante el ensayo en mesa vibradora*. Tesis de Maestría, febrero, 2005.
- Zhu, Z.Y. y Soong, T.T. *Toppling fragility of unrestrained equipment*. Earthquake Spectra, Vol. 14, No. 4, noviembre 1998: pp: 695-711.