



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO
INSTITUTO DE FÍSICA

BIRREFRINGENCIA INDUCIDA POR RUIDO
PARAMÉTRICO LINEAL Y CUADRÁTICO
EN CRISTALES LÍQUIDOS NEMÁTICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN FÍSICA

PRESENTA

GUSTAVO CORTÉS MONTIEL

ASESOR: DR. ROSALÍO F. RODRÍGUEZ ZEPEDA

México D. F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Cortés Montiel Gustavo
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Física

Jurado

Dr. Rosalío Fernando
Rodríguez Zepeda.

Dra. Catherine
García
Reimbert.

Dra. María del Pilar Constanza
Ortega
Bernal.

Dr. Ivan
Santamaría
Holek.

Dr. Leonardo
Dagdug
Lima.

Birrefringencia Inducida por Ruido Paramétrico Lineal y Cuadrático en
Cristales Líquidos Nemáticos.
2007
84p.

A MIS PADRES.

A MIS HERMANOS.

A LUNA.

Agradecimientos.

A mi familia por su cariño incondicional.

A Luna: Desde que tu luz ilumina mi vida todo es maravilloso.

Al Dr. Rosalío Rodríguez Zepeda por sus sabios consejos, su paciencia, su apoyo y sus enseñanzas.

A mis sinodales Catherine García R, Pilar Ortega , Iván Santamaría y Leonardo Dagdug, por sus comentarios y correcciones.

A mis amigos: Selene, Fernando, Rut, Miguel, Jorge, Elisa, Andrea Omar, Alfredo, Adrián, Alejandro, Eric, Chucho, Aldo, Eva, Julio, Nacho, Ernesto, Tíber, Francisco, Juan Carlos, Felipe, Bart y Miztli.

A mi equipo de fútbol el matalascañas.

A la UNAM.

Índice general

1. Cristales Líquidos	1
1.1. Propiedades generales	1
1.2. Estructura química	2
1.3. Clasificación	4
1.3.1. Termotrópicos	5
1.3.2. Liotrópicos	9
1.4. Energía de distorsión elástica	9
1.5. Efectos de campos externos	11
1.5.1. Efectos de campo magnéticos estático	11
1.5.2. Efectos de campo eléctrico	12
2. Nematodinámica Estocástica	14
2.1 Ecuaciones nematodinámicas deterministas	14
2.1.1. Condición de equilibrio termodinámico	15
2.2. Formulación estocástica	20
3. Modelo	25
3.1. Ecuaciones nematodinámicas para el modelo	26
3.2. Ecuación de amplitud	29
3.3. Ruido externo	31
3.4. Ecuación estocástica de amplitud	32
3.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas	32
3.5.1. Definición	33
3.5.2. Tratamiento heurístico de ecuaciones multiplicativas .	34
3.5.3. Obtención de la función de distribución de probabilidad	37
4. Aplicación del Método de van Kampen	39
4.1. Solución aproximada de la ecuación estocástica de amplitud	39

4.2.	Ecuación para la distribución de probabilidad $P(n_{qz}, t)$. . .	40
4.3.	Momentos de la distribución $P(n_{qz}, t)$	44
4.4.	Ruido blanco	45
4.5.	Ruido de color	47
5.	Ruido Externo No Lineal	49
5.1.	Ecuación de Fokker-Planck (EFP)	49
5.2.	Efectos de ruido no lineal	55
6.	Birrefringencia Inducida	57
6.1.	Birrefringencia inducida	57
6.2.	Birrefringencia inducida por ruido lineal y flujo hidrodinámico	58
6.3.	Birrefringencia inducida por ruido cuadrático	65
7.	Conclusiones	70

Introducción

El estudio de los cristales líquidos ha aumentado en los últimos años debido al gran número de fenómenos ópticos no lineales que presentan y a las múltiples aplicaciones tecnológicas que éstos han generado. Uno de los fenómenos más importantes para la comprensión de las propiedades ópticas no lineales en cristales líquidos lo constituye la transición de Fredericksz óptica (TFO), que fue observado por primera vez en 1980 [1, 2, 3, 4]. Este fenómeno se presenta cuando un haz láser polarizado incide sobre una muestra de cristal líquido que inicialmente se encuentra en equilibrio termodinámico y con una configuración orientacional de sus moléculas conocida, impuesta por las condiciones iniciales. El láser ejercerá una torca sobre las moléculas del cristal líquido la cual tiende a orientarlas en la dirección del campo eléctrico, pero como el medio ejerce torcas elásticas sobre las moléculas, que tienden a mantenerlas en su posición original, habrá una competencia entre ambas torcas. A medida que la intensidad del láser aumenta el sistema adquiere más energía y la torca ejercida por el campo óptico también aumenta, volviéndose el sistema más inestable. Si la intensidad del campo óptico sobrepasa un cierto valor crítico, entonces las torcas eléctricas vencen a las elásticas y comienza el proceso de reorientación en la dirección del campo eléctrico. Este y otros fenómenos que se producen por la interacción entre cristales líquidos y radiación electromagnética han sido estudiados ampliamente en la literatura en gran medida debido a sus múltiples aplicaciones tecnológicas [4].

La mayoría de los estudios sobre la interacción de campos electromagnéticos con cristales líquidos se realizan de manera determinista, es decir, no consideran el ruido presente en dichos campos ni en las propiedades del medio. Algunos de los escasos estudios que se han realizado considerando fluctuaciones externas son: i) El estudio de los efectos producidos por un haz láser que interacciona con un cristal líquido y en el que existen fluctuaciones en la intensidad o en la amplitud del campo óptico [5, 6]. En este caso las fluctuaciones entran en forma aditiva en las ecuaciones dinámicas. ii) La propagación de una onda electromagnética en un cristal líquido nemático, cuyo tensor dieléctrico fluctúa [7].

Una propiedad óptica muy importante de los cristales líquidos es la birrefringencia, que consiste en la presencia de dos índices de refracción, uno en la dirección paralela al eje óptico y otro en la dirección perpendicular. La fase nemática del cristal líquido, en la que las moléculas están orientadas espontáneamente en una cierta dirección preferencial, presenta una birrefrin-

gencia intrínseca. En esta tesis estudiaremos la birrefringencia inducida en el fluido por el ruido presente en la señal. Más precisamente, estudiamos los efectos producidos por un campo eléctrico de baja frecuencia. En particular, estudiaremos la birrefringencia inducida por ruidos externos lineal y cuadrático en presencia de efectos hidrodinámicos. Como un primer caso se considera que la intensidad del campo eléctrico fluctúa, lo cual da lugar a una ecuación diferencial estocástica con ruido lineal multiplicativo para la amplitud de una de las componentes del campo director. Como un segundo consideraremos que la magnitud del campo eléctrico fluctúa, lo cual da lugar a una ecuación diferencial estocástica con ruido no lineal multiplicativo para la misma componente del campo director. En ambos casos se toman en cuenta los efectos hidrodinámicos generados por un gradiente de presión externo.

Estructura de la tesis

La tesis está dividida en 7 capítulos cuyos contenidos se describen a continuación:

Capítulo 1. De las características generales de los cristales líquidos, en este capítulo se describen sólo aquellas que utilizaremos en esta tesis. También se discuten los efectos que sobre los cristales líquidos producen campos eléctricos y magnéticos externos. Además, se obtiene la forma explícita de la energía de distorsión elástica.

Capítulo 2. Se presenta un resumen de la deducción de las ecuaciones nematodinámicas deterministas para un cristal líquido nemático. Basándose en la deducción de de Gennes [4, 8, 9]. Posteriormente se introducen fluctuaciones en éstas ecuaciones siguiendo el método desarrollado por San Miguel y Sagués [10] y se obtienen las ecuaciones hidrodinámicas fluctuantes.

Capítulo 3. Se construye el modelo que se analizará en esta tesis y se define la geometría que se estudiará. También obtenemos las ecuaciones nematodinámicas fluctuantes para el modelo. Como un primer caso, se introducen fluctuaciones en la intensidad del campo eléctrico. Esto genera una ecuación diferencial estocástica lineal con ruido multiplicativo para la amplitud de una componente del campo director. Se da una breve introducción sobre ecuaciones estocásticas y se explica uno de los métodos desarrollados por van Kampen [11] para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Capítulo 4. Como se mencionó en la introducción, una de las finalidades de esta tesis es obtener una expresión analítica para la birrefringencia inducida por el ruido y por el flujo hidrodinámico. Para este fin, es necesario obtener el primero y segundo momento de la componente del campo director que es afectada por el flujo hidrodinámico y por el ruido. Para obtener el primer momento aplicamos el método de van Kampen a la ecuación estocástica para dicha componente. Para determinar el segundo momento, primero obtenemos la ecuación para la distribución de probabilidad. A partir de ella obtendremos una ecuación de evolución determinista para el segundo momento y resolviendo esta se obtiene explícitamente para dicho momento.

Capítulo 5. Se aplica un método desarrollado por San Miguel y Sancho para tratar problemas con ruido externo cuadrático [12]. El método proporciona una ecuación de Fokker-Planck asociada a una ecuación estocástica en la que las fluctuaciones entran en forma cuadrática. También se construye la ecuación estocástica de amplitud con ruido cuadrático multiplicativo. Para esto, consideramos como un segundo caso que la amplitud del campo eléctrico fluctúa. A partir de la ecuación de Fokker Planck se obtienen las ecuaciones de evolución para el primero y segundo momento de la componente del director afectada por las fluctuaciones y por el flujo hidrodinámico.

Capítulo 6. Se da una breve introducción sobre la birrefringencia inducida en cristales líquidos nemáticos. Se obtienen expresiones analíticas para las diferentes contribuciones a la birrefringencia, a saber, la birrefringencia intrínseca, la inducida por flujo, la inducida por ruido blanco lineal, la inducida por ruido lineal de color y la inducida por ruido cuadrático. Además, realizamos una comparación entre las diferentes contribuciones a la birrefringencia con respecto a la intrínseca. De dicha comparación obtuvimos que la birrefringencia inducida por el flujo aumenta rápidamente al aumentar el gradiente de presión externo. En el caso de ruido lineal, se obtuvo que la birrefringencia inducida por el ruido es prácticamente inapreciable, tanto para ruido blanco como de color. En el caso de ruido cuadrático obtuvimos que la birrefringencia inducida por el ruido es considerable y aumenta a medida que el tiempo de correlación disminuye; es decir, la birrefringencia inducida por ruido cuadrático aumenta a medida que nos acercamos al límite de ruido blanco. La importancia del estudio de los efectos del flujo hidrodinámico y del ruido sobre la birrefringencia radica en que dichos efectos pueden dar lugar a aplicaciones tecnológicas. Es importante señalar que en este trabajo se encontraron resultados originales y que actualmente hay

muy poca literatura respecto a la consideración de ruido multiplicativo en campos externos aplicados a una muestra de cristal líquido.

Capítulo 7. En este capítulo se discuten las conclusiones de nuestro trabajo, las predicciones específicas de la tesis, así como las limitaciones del modelo.

Capítulo 1

Cristales Líquidos

En este capítulo se describen algunas características generales de los cristales líquidos, composición química, clasificación y los efectos que sobre éstos producen diversos tipos de campos externos, eléctricos y magnéticos, o flujos. Además, se obtendrá la forma explícita de la energía libre de distorsión elástica.

1.1. Propiedades generales

La diferencia entre sólidos cristalinos y líquidos, es que las moléculas en un cristal se encuentran ordenadas mientras que en un líquido no lo están. El orden en un sólido es usualmente tanto posicional como orientacional, es decir, las moléculas se encuentran condicionadas a ocupar lugares específicos de la red, alrededor de los cuales vibran y a que sus ejes moleculares apunten en ciertas direcciones específicas. Más aún, en los llamados sólidos cristalinos, los grupos moleculares se repiten periódicamente y todos están orientados en la misma dirección. En cambio, las moléculas en los líquidos se difunden de forma aleatoria y la dirección de sus ejes moleculares varían aleatoriamente. Sin embargo, existen fases con mayor orden que los líquidos ordinarios pero con menor orden que un cristal típico. Estas fases son llamadas cristales líquidos, debido a que presentan propiedades asociadas tanto a líquidos como a cristales. En resumen, lo que distingue a una fase de otra es la cantidad de orden que poseen las moléculas del material.

Las moléculas en el cristal líquido se difunden de forma muy parecida a como lo hacen en un cristal líquido isotrópico, pero al hacerlo preservan el

orden orientacional, y en algunos casos, el orden posicional en una o dos direcciones. La cantidad de orden en un cristal líquido es muy pequeño relativo al de un cristal. Sin embargo, debido a este pequeño orden, los cristales líquidos presentan propiedades mecánicas y electromagnéticas típicas de los sólidos. Un cristal líquido puede exhibir varias fases termodinámicas dependiendo del grado de orden que presente. La más sencilla es la fase nemática en la cual el cristal líquido sólo presenta orden orientacional en sus moléculas; en esta fase los ejes moleculares tienden a orientarse, en promedio, en una dirección preferencial mientras se difunden a través de la muestra. Este orden destruye la isotropía de los líquidos, lo cual se manifiesta en las propiedades elásticas, eléctricas, magnéticas y ópticas del cristal.

1.2. Estructura química

La gran mayoría de las moléculas de sustancias líquido cristalinas poseen una estructura como la mostrada en la figura 1.1, constituida por:

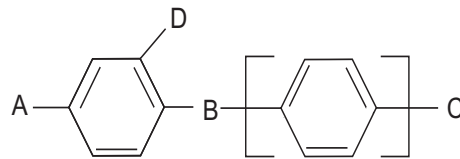


Figura 1.1: Estructura química de una molécula típica de cristal líquido, la cual consta de sistemas anillados (generalmente de benceno), grupos A y C, puente B y cadenas laterales D.

- a) uno o más sistemas anillados aromáticos (generalmente de benceno), que son altamente polarizables e intervienen en la formación de la estructura molecular;
- b) grupos terminales A y C, los cuales a medida que aumenta su longitud, refuerzan la anisotropía de la molécula, incrementando la estabilidad del cristal líquido;
- c) grupos puentes o de escalonamiento B, que de acuerdo a la manera en que se enlazan con los sistemas anillados determinan la forma de la molécula, así como la flexibilidad y la polarizabilidad de la misma; y
- d) cadenas laterales D, que generalmente ensanchan a la molécula evitando que experimente atracciones laterales con otras moléculas, y si llegan

a ser muy largas disminuyen la anisotropía de ésta, ocasionando un decremento en la estabilidad del cristal líquido.

La descripción anterior, corresponde a moléculas en la que al estar sus sistemas anillados eslabonados con los grupos terminales y cadenas laterales de la manera descrita, presentan una forma alargada, como barra, denominada calamítica; sin embargo, también puede ocurrir que los sistemas anillados al enlazarse con los grupos terminales y sobre todo con cadenas laterales desordenadas [9, 13, 14], den lugar a una estructura molecular plana, en forma de disco, llamada discótica (ver figura 1.2). Las moléculas discóticas generalmente están constituidas por cadenas laterales largas.

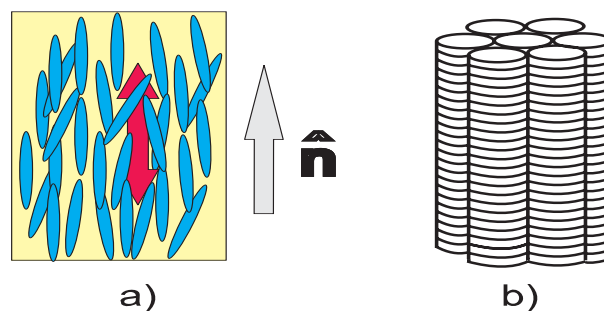


Figura 1.2: Estructura de las moléculas mesogénicas. a) Calamíticas b) Discóticas. El vector \hat{n} indica la orientación promedio de las ejes largos de las moléculas.

Estas unidades químicas pueden constituirse por moléculas orgánicas pequeñas o largas, así como por estructuras moleculares complejas. Las *moléculas orgánicas pequeñas* son calamíticas, sus dimensiones son de unos 20 Å de longitud por 5 Å de ancho. Ejemplos típicos son: el azoxianisol-p (PAA) y la butilánilina-p (MBBA). Las *moléculas largas* existen en forma natural (DNA, virus mosaico del tabaco) o se obtienen artificialmente por medio de fibras plásticas flotando en agua, así como polipéptidos sintéticos disueltos en ciertos solventes. Las dimensiones de estas moléculas que también son calamíticas pueden variar desde unos 300Å de largo 20Å de ancho para los polipéptidos sintéticos, hasta 3000Å de largo y 200Å de ancho para el virus mosaico del tabaco.

También dan lugar a mesofases las *estructuras complejas de moléculas*, como los sistemas de agua-jabón, en donde los aniones alifáticos ($CH_3 - [CH_2]_{n-2} - CO_2^-$) y iones positivos (Na^+, K^+, NH_4^+) se ordenan formando cadenas ¹. Cada cadena en solución, no constituye por si misma un cristal

¹La parte polar (CO_2^-) tiende a estar en contacto con el agua, mientras que la parte

líquido, sin embargo cuando se forman cúmulos de cadenas, entonces estos pueden adoptar la forma de una “varilla” o de “disco” constituyendo así las unidades estructurales que darán lugar al compuesto mesogénico (ver fig. 1.3).

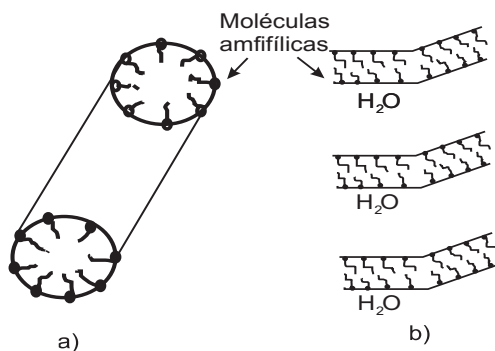


Figura 1.3: Ejemplos típicos de agregados moleculares complejos que dan lugar a compuestos mesogénicos. Estos constituyen a) columnas b) capas.

1.3. Clasificación

Dependiendo de su estructura molecular, los cristales líquidos pueden poseer una o más mesofases antes de transformarse en un líquido isotrópico o en un sólido cristalino. Las transiciones de estos estados intermedios pueden producirse, ya sea por variaciones en la temperatura, o por la influencia de solventes. Dada la dependencia que presentan con los parámetros físicos señalados con anterioridad, se clasifica a los cristales líquidos como: termotrópicos, si sus cambios de fase están gobernados por la temperatura, o en liotrópicos si dichos cambios dependen de sus concentraciones al mezclarse con algún solvente. Los cristales líquidos constituidos por moléculas calamíticas son los más comunes y los más conocidos². Sus moléculas que interactúan entre sí, dan lugar a estructuras ordenadas que de acuerdo a la nomenclatura de Friedel [16], pueden clasificarse en tres tipos; nemáticos, esmécticos y colestéricos. Las primeras sustancias líquido cristalinas con moléculas en forma de disco fueron preparadas e identificadas recientemente³, y desde entonces un gran número de compuestos discóticos

apolar la evita.

²Existen cerca de 20000 compuestos de esta clase, 15000 están compilados en tablas [21].

³En 1977 fueron obtenidas por primera vez por científicos de la India

se han sintetizado. Estructuralmente, la mayor parte de ellas pertenecen a dos categorías: columnar y nemática [9]. La fase columnar en su forma más simple consiste de discos apilados en forma no periódica, que dan lugar a columnas que constituyen una malla o red bidimensional; además, un número de variantes de esta estructura han sido identificados como: hexagonales, rectangulares, inclinadas, etc. Por otra parte, la fase nemática está determinada por el hecho de que el eje perpendicular al plano de cada molécula discótica tiende a orientarse en promedio, en una dirección específica; por lo tanto, poseen orden orientacional de largo alcance, aunque carecen de orden traslacional del mismo tipo. Finalmente, cabe mencionar que se han identificado también fases colestéricas y esmécticas de los mismos [9].

1.3.1. Termotrópicos

Son los cristales líquidos más ampliamente utilizados y extensamente estudiados. Exhiben varias fases líquido cristalinas como función de la temperatura. Si bien la forma de sus moléculas es bastante complicada, puede considerarse como calamíticas o discóticas.

Nemáticos

La fase nemática posee orden de largo alcance en la orientación de sus moléculas⁴ y al mismo tiempo desorden en la posición de los centros de masa de las mismas. Además, sus moléculas se mueven en dirección paralela a sus ejes largos, característica que le permite al nemático fluir como un líquido ordinario isotrópico⁵; pero al estar espontáneamente orientadas con sus ejes largos⁶ aproximadamente paralelos, estos fijan una dirección macroscópica preferencial. Dicha dirección se describe por un vector unitario \hat{n} que indica la orientación promedio de alineación de las moléculas (ver Fig. 1.4).

La polarización a lo largo de \hat{n} es nula, debido a que el número de moléculas con momento dipolar permanente en una dirección es igual, en promedio, al número de moléculas con momento dipolar permanente en dirección opuesta, por lo que los estados \hat{n} y $-\hat{n}$ son indistinguibles en ausencia de algún campo externo.

⁴En comparación con las otras dos mesofases, esta es la más desordenada

⁵Para un nemático típico tal como el PAA la viscosidad es del orden de 0.1 Poise, mientras que la del agua a temperatura ambiente es del orden de 10^{-2} Poise.

⁶Se considera como el eje largo de la molécula, aquel en el cual ésta presenta su menor momento de inercia al girar.

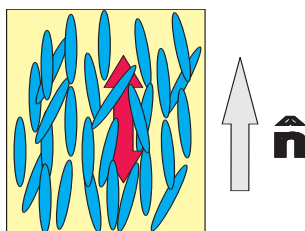


Figura 1.4: Arreglo estructural de las moléculas de un nemático. El vector \hat{n} indica la dirección preferencial de alineación espontánea de las moléculas.

Las características ópticas de esta mesofase corresponden a las de un medio uniaxial con eje óptico paralelo al vector director, alrededor del cual existe simetría rotacional. Esto se refleja notablemente en propiedades ópticas como la birrefringencia.

Cabe señalar que el tipo de moléculas que constituyen esta fase generalmente son ópticamente inactivas y su imagen especular se superpone en sí misma (moléculas aquirales). Es decir, si hacemos incidir un rayo de luz polarizado linealmente sobre el nemático no hay una rotación de dicha polarización. Sin embargo, el nemático puede estar constituido por un sistema de moléculas ópticamente activas y su imagen especular no es superponible en sí misma (moléculas quirales). Esto es, provocan una rotación en la polarización lineal de la luz que incide sobre ella. En este caso se tienen la misma cantidad de moléculas izquierdas que derechas, es decir con moléculas con los mismos grupos químicos, pero con diferente disposición espacial. Para aclarar esta idea, consideremos nuestras manos, derecha e izquierda, ambas tienen por decirlo de alguna forma los mismos dedos (grupos químicos), pero la disposición espacial de dedos en la mano izquierda es diferente a la de la mano derecha.

Colestéricos

Localmente, los cristales líquidos colestéricos son muy parecidos a los nemáticos. En estos, las moléculas tampoco poseen orden en la posición y al igual que en los nemáticos tienden a orientarse a lo largo de una dirección común, representada por el director \hat{n} . Sin embargo, en este caso \hat{n} no es un vector constante en el espacio, sino que de manera espontánea tiende a describir una hélice en torno a un eje, como se muestra en la figura 1.5.

Tomando el eje de la hélice a lo largo del eje z , \hat{n} se puede escribir como

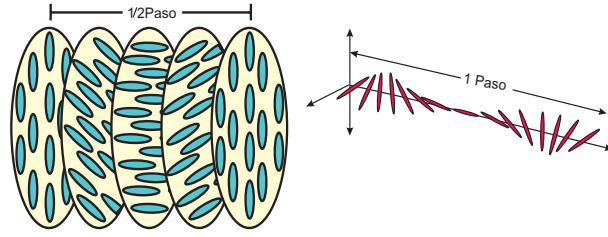


Figura 1.5: Arreglo estructural de las moléculas en la fase colestérica.

$$n_x = \cos\left(\frac{2\pi z}{L} + \phi_0\right), \quad n_y = \sin\left(\frac{2\pi z}{L} + \phi_0\right), \quad n_z = 0, \quad (1.1)$$

donde ϕ_0 es una constante y L es la distancia a lo largo del eje z en la cual \hat{n} da un giro de 2π radianes. L es el paso de la hélice y es una característica importante del coloestérico; los valores típicos de L son de 3000\AA y en consecuencia son mucho mayores que las dimensiones moleculares.

Esta estructura helicoidal da lugar a fenómenos ópticos bastante interesantes, por ejemplo, la actividad óptica que presentan los colestéricos. Fenómeno en el que el poder rotatorio es miles de veces mayor que el de las sustancias ópticas activas ordinarias como la glucosa. Además, el paso de la hélice puede variar por la acción de agentes externos como la temperatura y la presión. Esto se manifiesta a simple vista, ya que el paso es del orden de la longitud de onda en el visible, por lo que éstas variaciones producen cambios en la coloración o en la textura del cristal líquido [8].

La fase colestérica fue descubierta en materiales derivados del colesterol de ahí proviene su nombre. Sin embargo, hoy en día se conocen muchos compuestos que exhiben esta fase y que no guardan ninguna relación con el colesterol, así que el nombre utilizado para distinguirla no resulta del todo apropiado. Un nombre más satisfactorio es el de *fase nemática quiral* y en la literatura éste se utiliza con la misma frecuencia que el primero.

Esmécticos

Los cristales líquidos esmécticos se caracterizan por poseer orden orientacional y también cierta cantidad de orden posicional. En realidad, son más de una las fases esmécticas, las cuales se designan como esméctico A, B, C, etc., obedeciendo el orden cronológico en el que fueron descubiertas.

En un esméctico las moléculas se distribuyen en planos, en cada uno de los cuales tienen una orientación común, de ahí proviene su orden orienta-

cional y su orden posicional en una dimensión. Los planos están separados entre sí por ciertas distancias específicas, las cuales pueden determinarse experimentalmente por difracción de rayos x , y dentro de ellos las moléculas pueden viajar libremente, manteniendo su orientación promedio. Cada plano es entonces una especie de cristal líquido nemático bidimensional.

Las posibles orientaciones que adoptan las moléculas en los planos de un esméctico, dan lugar a las distintas variaciones de esta fase. Entre ellas mencionaremos dos, a saber, los esmécticos A y los esmécticos C.

La configuración de los esmécticos A se muestra en la figura 1.6. En ella aparece un corte de la muestra perpendicular a los planos del esméctico. En cada uno de éstos las moléculas están orientadas en promedio en la dirección perpendicular a los mismos.

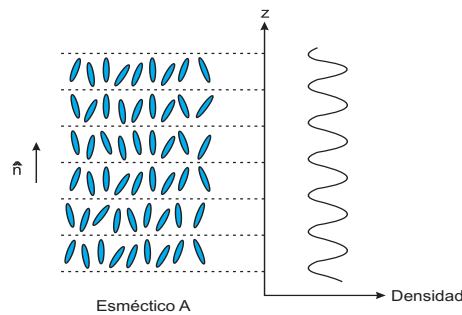


Figura 1.6: Configuración de la fase esméctica A.

El orden posicional de la fase esméctica A puede caracterizarse mediante la densidad de masa medida como función de la posición a lo largo del eje perpendicular a los planos. Tal como se muestra en la figura, esta densidad varía de manera periódica, con un periodo igual a la distancia que separa los planos del esméctico.

Mientras que el nemático es invariante ante una translación arbitraria, un esméctico es invariante sólo ante un número discreto de translaciones, determinadas por la distancia de separación entre los planos.

La figura 1.7 muestra la distribución de las moléculas en la fase esméctica C. Dicha figura también representa un corte en la dirección perpendicular a los planos y según puede apreciarse, existe una gran semejanza en la distribución molecular entre los esmécticos A y los C, sólo que en estos últimos las moléculas no se orientan en la dirección normal a los planos, sino que lo hacen en torno a un eje que forma un cierto ángulo ϕ con ella.

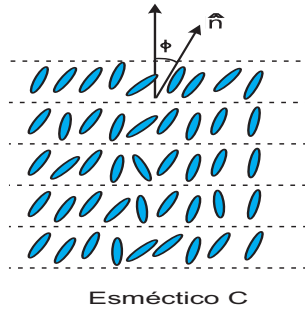


Figura 1.7: Estructura de la fase Esméctica C.

1.3.2. Liotrópicos

Son cristales líquidos producidos mediante la mezcla de concentraciones adecuadas de dos o más sustancias. Los sistemas más comunes que se utilizan en su elaboración, son aquellos formados por moléculas anfifílicas tales como el jabón o los fosfolípidos al ser mezclados con agua como solvente [4, 9, 17].

Si una pequeña cantidad de material anfifílico se mezcla con agua, sus moléculas comienzan a agruparse para formar estructuras esféricas (micelas o vesículas). Al aumentar la cantidad de dicho material (usualmente en la vecindad del 50 %), se alcanza un punto en el que las micelas o las vesículas forman estructuras más grandes y alargadas, las cuales se agrupan con sus ejes mayores de simetría prácticamente paralelos entre sí, para construir un cilindro de sección hexagonal (fenómeno al que se le denomina fase hexagonal). Otra estructura común que se forma a mayores concentraciones es la lamelar, que consiste en la agrupación de las moléculas anfifílicas en bicapas planas separadas por agua. Este tipo de cristales líquidos, son muy abundantes en la naturaleza y prácticamente ubicuos en los sistemas vivientes[17].

1.4. Energía de distorsión elástica

En esta sección se obtendrá la forma explícita de la funcional de energía libre de Helmholtz para las distorsiones elásticas que presenta el nemático. La energía libre de Helmholtz se utiliza debido a que procesos de reorientación de la muestra de cristal líquido que estudiaremos ocurren a una temperatura, volumen y número de partículas constantes.

Si se considera una muestra de cristal líquido ligeramente distorsionada, $a/l \gg 1$, a es una dimensión molecular típica y l es la dimensión de la

muestra, el estado de distorsión local está descrito por $\vec{n}(\vec{r})$ y sus gradientes. Entonces, bajo las siguientes suposiciones es posible obtener la forma explícita de la energía libre de Helmholtz asociada F_d [8]:

1. Las variaciones de \vec{n} son lentas a escala molecular, i. e. $a\nabla\vec{n} \ll 1$.

2. Las únicas fuerzas intermoleculares de importancia son de corto alcance. Con estas hipótesis se desarrolla la energía libre de distorsión F_d como una serie de potencias en los gradientes de $\vec{n}(\vec{r})$ en la cuál sólo se considerarán hasta términos de segundo orden. Para construir este desarrollo es necesario considerar que:

a) F_d debe ser par en \vec{n} , ya que los estados \vec{n} y $-\vec{n}$ son indistinguibles.

b) Los términos lineales en $\nabla\vec{n}$ no se consideran, ya que F_d debe ser invariante ante rotaciones de cuerpo rígido.

c) Los términos en F_d que tienen la forma $\nabla \cdot \vec{n}$ se descartan, ya que estos términos contribuyen a la densidad de energía superficial cuando se integran y en éste trabajo se consideran las condiciones de frontera dadas.

Por lo tanto, F_d sólo contendrá términos del orden de $(\nabla\vec{n})^2$, siendo $(\nabla \cdot \vec{n})$, $(\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{n})$, $(\vec{n} \times \text{rot}\vec{n})$ los únicos términos que satisfacen las condiciones mencionadas arriba. De esta forma la densidad de energía de distorsión elástica, también llamada energía de Frank [18], es

$$F_d = \int_V f_d d\vec{r}, \quad (1.2)$$

donde V es el volumen ocupado por el nemático y f_d está dada por [9] [8] [42]

$$f_d = \frac{1}{2}K_1(\nabla \cdot \vec{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{n})^2 + \frac{1}{2}K_3(\vec{n} \times \nabla \times \vec{n})^2. \quad (1.3)$$

K_1 , K_2 , y K_3 son las constantes elásticas asociadas con las deformaciones de despliegue (splay), torsión (twist) y encorvadura (bend), respectivamente, y $\epsilon_{\alpha\beta\mu}$ es el tensor de Levi-Civita. Comúnmente sus órdenes de magnitud son de 10^{-7} dinas, y para la mayoría de los nemáticos K_3 es la constante mayor como resultado de la forma calamítica de sus moléculas.

El aspecto físico de un cristal líquido es muy parecido al de un fluido ordinario. Por ejemplo, para un nemático típico como el PAA la viscosidad es de 0.1 poise, mientras que para el agua a temperatura ambiente es de 0.01 poise. Cabe señalar que las deformaciones splay y bend necesariamente involucran flujos del cristal líquido contrariamente a la deformación twist (ver fig. 1.8).

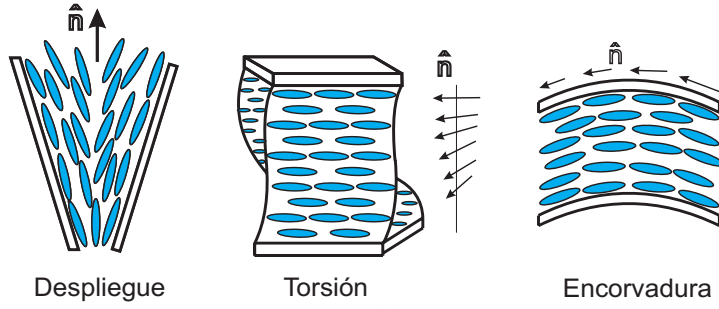


Figura 1.8: Deformaciones básicas en un nemático

1.5. Efectos de campos externos

1.5.1. Efectos de campo magnéticos estático

Las moléculas orgánicas que constituyen al nemático son diamagnéticas, siendo el diamagnetismo más intenso debido a los anillos de benceno de la molécula. Estos generan una corriente al sentir la presencia de un campo magnético \vec{H} normal a su plano, de tal forma que el flujo magnético a través de ellos se reduzca, lo que implica que la energía del sistema aumenta. Por otro lado, si \vec{H} es paralelo a los anillos, no existe flujo a través de ellos y, por tanto, no se induce ninguna corriente, por lo que la energía del sistema se mantiene inalterada.

El efecto del campo magnético sobre el cristal líquido es inducir una torca, de tal forma que la molécula tienda a alinearse en una dirección en la cual \vec{H} esté contenido en el plano de los anillos y, por tanto, la energía sea mínima.

Las moléculas típicas del nemático contienen al vector director \vec{n} en el plano de los anillos, minimizándose la energía cuando \vec{n} , que coincide con el eje óptico, es paralelo al campo \vec{H} .

La magnetización \vec{M} inducida por el campo magnético estático \vec{H} , para medios anisotrópicos está dada por

$$\vec{M} = \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{H} \quad (1.4)$$

donde $\overleftrightarrow{\chi}$ es el tensor de susceptibilidad magnética. En el caso particular de un nemático (medio uniaxial) el tensor está dado por:

$$\chi_{ij} = \chi_{\perp} \delta_{ij} + \chi_a (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}), \quad (1.5)$$

en donde $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ es la susceptibilidad magnética anisotrópica, que generalmente es positiva; χ_{\parallel} y χ_{\perp} son las susceptibilidades magnéticas paralela y perpendicular a \vec{n} , respectivamente.

Así, la magnetización inducida en el nemático está dada por:

$$\vec{M} = \chi_{\parallel} \vec{H} + \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (1.6)$$

La contribución a la densidad de energía libre de Helmholtz debido al acoplamiento entre \vec{n} y un campo magnético estático \vec{H} es entonces,

$$f_H = - \int_0^H \vec{M} \cdot d\vec{H} = -\frac{1}{2} \chi_{\perp} H^2 - \frac{1}{2} \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2. \quad (1.7)$$

El primer término es independiente de la orientación y por tanto se omitirá. Entonces la contribución a la energía libre de Helmholtz está dado por

$$F_H = -\frac{1}{2} \int_V d\vec{r} \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2. \quad (1.8)$$

Nótese que para $\chi_a > 0$ la energía se minimiza cuando \vec{n} es colineal con \vec{H} .

Finalmente la expresión para la torca magnética por cm^3 ejercida sobre el nemático es:

$$\vec{\Gamma}_H = \vec{M} \times \vec{H} = \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H}) \vec{n} \times \vec{H}. \quad (1.9)$$

1.5.2. Efectos de campo eléctrico

Si se considera el caso de nemáticos aislantes, entonces el acoplamiento del nemático con el campo eléctrico estático involucra dos procesos diferentes: uno es la anisotropía de la constante dieléctrica con consecuencias similares a las del campo magnético, y el otro corresponde a la polarización dieléctrica inducida por distorsiones elásticas. Sólo se considerará el primer caso.

En general para un campo eléctrico aplicado (dc, baja frecuencia u óptico), el desplazamiento eléctrico \vec{D} puede expresarse como

$$\vec{D} = \varepsilon_{\perp} \vec{E} + \varepsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n}, \quad (1.10)$$

en donde $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ es la anisotropía dieléctrica que puede ser positiva o negativa dependiendo de la estructura química de las moléculas [4];

ε_{\parallel} y ε_{\perp} son las susceptibilidades dieléctricas paralela y perpendicular a \vec{n} , respectivamente. Por ejemplo, si cada molécula tiene un momento dipolar permanente paralelo a su eje largo, el dipolo se orienta en la dirección de \vec{E} , cuando $\varepsilon_a > 0$. Por otro lado, si el momento dipolar es normal al eje largo de las moléculas se tiene que $\varepsilon_a < 0$ y \vec{n} se orienta perpendicular al campo \vec{E} .

La densidad de energía de interacción eléctrica es por lo tanto,

$$f_E = -\frac{1}{4\pi} \int_0^E \vec{D} \cdot d\vec{E} = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{8\pi} E^2 - \frac{\varepsilon_a}{8\pi} (\vec{n} \cdot \vec{E})^2. \quad (1.11)$$

En unidades cgs, (en unidades SI , $f_E = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{2} E^2 - \frac{\varepsilon_a}{2} (\vec{n} \cdot \vec{E})^2$). Nótese que el primer término de (1.11) no es de interés, ya que no acopla al campo con el director, el segundo muestra que \vec{n} se alinea con \vec{E} si $\varepsilon_a > 0$, ó perpendicularmente si $\varepsilon_a < 0$.

Capítulo 2

Nematodinámica Estocástica

En este capítulo se presenta un resumen de la deducción de las ecuaciones hidrodinámicas para un cristal líquido nemático. Se obtienen las ecuaciones nematodinámicas deterministas, basándose en la deducción variacional de de Gennes [8] y se introduce en éstas fluctuaciones térmicas, siguiendo el método desarrollado por San Miguel y Sagués [10].

2.1. Ecuaciones nematodinámicas deterministas

Existen diferentes niveles de descripción teórica de los cristales líquidos nemáticos [8, 9, 19, 20, 21, 22, 23]. En particular, esta descripción puede hacerse fenomenológicamente, como lo hace de Gennes [8], o a un nivel microscópico utilizando el formalismo de Maier–Saupe [22]. En este trabajo se adopta el formalismo de Gennes, en el que se considera al cristal líquido como un medio continuo, para el que se formulan ecuaciones de conservación y ecuaciones para las variables lentas que surgen del rompimiento espontáneo de simetría, como el campo director. Se proponen relaciones constitutivas y con ellas se construye un conjunto completo de ecuaciones hidrodinámicas. Otro enfoque adopta el punto de vista de la termodinámica irreversible lineal (TIL) [8]. En este se considera a los procesos dinámicos que ocurren en los cristales líquidos como procesos irreversibles y se utiliza un método variacional para deducir ecuaciones de movimiento para las variables de estado relevantes. Este punto de vista será el que se adopte a lo largo del presente capítulo.

La conformación ideal de un nemático, esto es, el estado de mínima energía, supone que todas las moléculas están alineadas a lo largo de una cierta dirección común \hat{n} , la cual no presenta variaciones espaciales. Sin

embargo, esta configuración no es compatible con las constricciones que imponen agentes externos como las fronteras, que confinan al nemático o los campos externos que interactúan con él, ya que estos producen distorsiones en el estado de alineación de las moléculas elevando la energía, por lo que \hat{n} presenta variaciones espaciales, convirtiéndose en una función de punto.

Las observaciones experimentales muestran que la magnitud de las distorsiones ($l \succ 1\mu m$) son mucho mayores que las dimensiones moleculares ($a \sim 20\text{\AA}$), por lo que es posible describir al sistema como un medio continuo en el cual se ignoran los detalles de la estructura molecular. Así las distorsiones se describen por medio de un campo vectorial $\vec{n}(\vec{r})$, de magnitud unitaria, $n^2 = 1$, que describe la orientación promedio de los ejes largos de las moléculas que constituyen al cristal líquido. Si además, se supone que las variaciones de \vec{n} son pequeñas en una escala macroscópica, pero lentas comparadas con tiempos moleculares típicos, entonces $\vec{n}(\vec{r}, t)$ será una variable hidrodinámica local.

De esta forma la deducción de las ecuaciones hidrodinámicas del cristal líquido puede realizarse a partir de la termodinámica irreversible lineal, en donde las distorsiones inducidas por las fronteras o por campos externos se visualizan como procesos irreversibles e isotérmicos lineales, de esta forma, los procesos de reorientación de las moléculas del cristal líquido ocurrirán a temperatura, volumen y número de partículas, constantes.

Con la interpretación anterior y bajo la hipótesis de equilibrio local, es posible construir un potencial termodinámico. El potencial termodinámico más adecuado es la energía libre de Helmholtz, ya que sus variables naturales son precisamente la temperatura, el volumen y el número de partículas, razón por la cual en la sección (1.4) se dedujo la energía de distorsión elástica. A partir de éste potencial se extrae la información dinámica.

Como primer paso en esta deducción será necesario establecer las condiciones bajo las cuales el cristal líquido se encuentra en equilibrio termodinámico y posteriormente se utilizará la metodología de TIL para deducir la forma explícita de las ecuaciones nematodinámicas.

2.1.1. Condición de equilibrio termodinámico

El punto de partida es la funcional de energía libre de Helmholtz F , la cual es función del campo director y de sus derivadas espaciales

$$F(n_\alpha, \partial_\beta n_\alpha) = \frac{1}{2} \int_V d\vec{r} f(n_\alpha, \partial_\beta n_\alpha) \quad (2.1)$$

en donde V es el volumen ocupado por el nemático y f la densidad de

energía libre y $\partial_\beta n_\alpha \equiv \frac{\partial n_\alpha}{\partial x_\beta}$ con $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

La condición de equilibrio se obtiene exigiendo que la variacional de F sea nula, es decir,

$$\delta F = 0. \quad (2.2)$$

Pero la funcional de F varía tanto por rotaciones de \vec{n} , como por los desplazamientos de las centros de gravedad de las moléculas que constituyen el cristal líquido. Primero se obtendrá la condición de equilibrio para las rotaciones de \vec{n} sin que excitan desplazamientos y sujeta a la condición de simetría inherente a la fase nemática la cual esta dada por

$$n^2 = 1. \quad (2.3)$$

Ya que F está sujeta a la constricción anterior, para realizar la variación indicada en (2.2) será necesario emplear el método de multiplicadores de Lagrange [24]. En este método la constricción se toma en cuenta de la siguiente forma

$$\int d\vec{r} f(n_\alpha, \partial_\beta n_\alpha) - \frac{1}{2} \int d\vec{r} \lambda(\vec{r}) n^2(\vec{r}) = \text{extremo mínimo}, \quad (2.4)$$

en donde $\lambda(\vec{r})$ es el coeficiente indeterminado de Lagrange.

Si ahora se calcula la variación de la ecuación anterior se obtiene

$$\delta \int d\vec{r} f(n_\alpha, \partial_\beta n_\alpha) = \int d\vec{r} \lambda(\vec{r}) n_\beta \cdot \delta n_\beta. \quad (2.5)$$

Pero la variación de F dada por el miembro izquierdo de a ecuación (2.5), se puede describir como [24]

$$\delta \int d\vec{r} f(n_\alpha, \partial_\beta n_\alpha) = \int d\vec{r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial n_\beta} \delta n_\beta + \frac{\partial f}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta(\partial_\alpha n_\beta) \right\} \quad (2.6)$$

en donde se ha definido

$$g_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha n_\beta.$$

Integrando la ecuación (2.6) por partes y despreciando los términos superficiales, ya que sólo se consideran las propiedades volumétricas del nemático, se tiene

$$\delta \int d\vec{r} f(n_\alpha, \partial_\beta n_\alpha) = \int d\vec{r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial n_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) \right\} \delta n_\beta. \quad (2.7)$$

Al sustituir ésta ecuación en la ecuación (2.5), se obtiene entonces la condición de equilibrio termodinámico, es decir,

$$h_\alpha = -\frac{\partial f}{\partial n_\beta} + \partial_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) = -\lambda(\vec{r})n_\beta. \quad (2.8)$$

A \vec{h} se le llama “campo molecular”, y la condición (2.8) asegura que en equilibrio termodinámico y en ausencia de desplazamientos moleculares, el campo molecular \vec{h} debe ser paralelo a \vec{n} .

Ahora se considerarán las variaciones de F debidas a desplazamientos de los centros de gravedad de las moléculas que mantienen fija la dirección de \vec{n} . Sea $\vec{u}(\vec{r})$ el desplazamiento del punto del punto \vec{r} al punto \vec{r}' , o sea,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}). \quad (2.9)$$

Ya que la dirección de \vec{n} no cambia, se cumple que

$$\vec{n}'(\vec{r}') = \vec{n}(\vec{r} + \vec{u}) = \vec{n}(\vec{r}). \quad (2.10)$$

Por otra parte, $\vec{n}'(\vec{r}')$ se relaciona con $\vec{n}(\vec{r})$ por medio de

$$\frac{\partial n'_\gamma}{\partial r'_\beta} = \frac{\partial n'_\gamma}{\partial r_\alpha} \frac{\partial r_\alpha}{\partial r'_\beta}, \quad (2.11)$$

con

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial r'_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial r'_\beta} \simeq \delta_{\alpha\beta} - \partial_\beta u_\alpha, \quad (2.12)$$

en donde se ha utilizado la notación $\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial r_\beta}$. Entonces, si los desplazamientos son pequeños, a primer orden de u se tiene que

$$\frac{\partial n'_\gamma}{\partial r'_\beta} - \frac{\partial n_\gamma}{\partial r_\beta} = -\partial_\alpha n_\gamma \partial_\beta u_\alpha + O(u^2). \quad (2.13)$$

Para el análisis siguiente deben considerarse explícitamente los términos de la energía libre de Helmholtz F que contribuyen a la variación producida por los desplazamientos moleculares. F contiene, en general, diferentes contribuciones como son: la energía libre de distorsión elástica $F_d = \int_V d\vec{r} f_d$ (energía de Frank [8]) con f_d dada por la ecuación (1.3); la energía debida al acoplamiento con un campo electromagnético externo $F_e = \int_V d\vec{r} f_e$, con f_e dada por la ecuación (1.11) y la contribución gravitacional. Esta última contribución no se considerará en lo sucesivo.

Ahora bien, si el campo eléctrico es espacialmente homogéneo sólo produce rotaciones del vector \vec{n} ¹ y no afectan la variación de la energía libre cuando se consideran desplazamientos moleculares. Entonces, al calcular la variación de F con respecto a traslaciones de moléculas, la contribución de la energía de acoplamiento con el campo eléctrico no contribuye y por tanto, sólo debe considerarse la contribución de la energía de distorsión F_d .

La variación de la energía de distorsión se obtiene sustituyendo en la ecuación (2.7) la densidad de energía libre f_d dada por la ecuación (1.3). Ya que \vec{n} esta fija, el primer término de la ecuación (2.7) no contribuye y por tanto la variación de la energía de distorsión sólo depende de las derivadas espaciales de \vec{n} , es decir,

$$\delta F_d = \int_V d\vec{r} \partial_\alpha \left(\frac{\partial f_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right)$$

Sustituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación anterior, se tiene

$$\delta F_d = \int_V d\vec{r} \left\{ \frac{\partial n'_\gamma}{\partial r'_\beta} - \frac{\partial n_\gamma}{\partial r_\beta} \right\} \frac{\partial f_d}{\partial g_{\alpha\beta}} = \int_V d\vec{r} \pi_{\beta\gamma} (-\partial_\alpha n_\gamma) (\partial_\beta u_\alpha), \quad (2.14)$$

en donde se ha definido

$$\pi_{\beta\gamma} \equiv \frac{\partial f_d}{\partial g_{\alpha\beta}}. \quad (2.15)$$

Más aún, si se define el tensor de esfuerzos de distorsión $\sigma_{\beta\gamma}^d$ como

$$\sigma_{\beta\gamma}^d = -\pi_{\beta\gamma} \partial_\alpha n_\gamma, \quad (2.16)$$

la ecuación (2.14) se describe como

$$\delta F_d = \int_V d\vec{r} \sigma_{\beta\gamma}^d \partial_\beta u_\alpha. \quad (2.17)$$

A partir de esta ecuación la condición de equilibrio termodinámico, $\delta F = 0$, asociada con desplazamientos moleculares, se obtiene en forma análoga a la condición dada por la ecuación (2.8), sólo que ahora la condición que debe satisfacer es la de incompresibilidad del nemátco,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.18)$$

¹Ya que las moléculas del cristal líquido son eléctricamente neutras, estas no se desplazan por la acción del campo.

Así, la variación de F debida a desplazamientos de las moléculas se obtiene únicamente de la contribución de la energía de distorsión F y resulta ser

$$\delta F = \int_V d\vec{r} \sigma_{\beta\gamma}^e \partial_\beta u_\alpha, \quad (2.19)$$

en donde se ha introducido el tensor de esfuerzos de Ericksen definido como

$$\sigma_{\beta\gamma}^e = \sigma_{\beta\gamma}^d - q(\vec{r})\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.20)$$

Aquí $q(\vec{r})$ es el multiplicador de Lagrange asociado con la constricción (2.18) y se identifica con la presión hidrostática.

La variación total de la energía libre de Helmholtz debida a ambos efectos se obtiene entonces sumando las ecuaciones (2.7) y (2.19),

$$\delta F = \int_V d\vec{r} \{ \sigma_{\beta\gamma}^e \partial_\beta u_\alpha - h_\gamma \cdot \delta n_\gamma \}. \quad (2.21)$$

Para expresar este resultado de manera más conveniente, se integra por partes el primer término y se desprecian los términos superficiales. Debe mencionarse que estos términos contribuyen a los cambios en la energía libre cuando \vec{n} cambia en la frontera debido a desplazamientos de las paredes, pero no cuando se utilizan condiciones de frontera de anclaje fuerte para \vec{n} . De esta forma se obtiene que

$$\delta F = \int_V d\vec{r} \{ -u_\alpha \partial_\beta \sigma_{\beta\gamma}^e - h_\alpha \cdot \delta n_\alpha \}. \quad (2.22)$$

Es necesario enfatizar que \vec{h} está definido en forma general por la ecuación (2.8). Sin embargo, la forma explícita de la densidad de energía libre f depende de la situación particular bajo estudio. En este caso se han considerado explícitamente las contribuciones asociadas con la energía de Frank y la energía de acoplamiento con un campo eléctrico externo, dadas. Entonces el campo molecular adquiere la forma

$$h_\gamma = \partial_\gamma \pi_{\beta\gamma} - \frac{\partial f_d}{\partial n_\gamma} + \frac{\varepsilon_a}{8\pi} (n_\alpha \cdot E_\alpha) E_\gamma \quad (2.23)$$

en donde ε_a es la anisotropía dieléctrica definida como $\varepsilon_a = \varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel$.

El primer término del miembro derecho de la ecuación (2.21) se identifica con la fuerza volumétrica de la muestra, $\phi_\alpha \equiv \partial_\beta \sigma_{\beta\alpha}^e$, y la ecuación se

interpreta entonces como el trabajo efectuado sobre el nemático por las paredes cuando estas se desplazan por \vec{u} , sin que \vec{n} cambie de orientación en la frontera.

Hasta este momento sólo se ha discutido la condición de equilibrio termodinámico sin tomar en cuenta los procesos dinámicos. En la siguiente sección se consideran dichos procesos y se deducen las ecuaciones dinámicas del nemático.

2.2. Formulación estocástica

En esta sección se describe la formulación estocástica de las ecuaciones nematodinámicas realizada por San Miguel y Sagués. Esta formulación se basa en ideas de la termodinámica fuera de equilibrio y el efecto de las fluctuaciones térmicas en la hidrodinámica de cristales líquidos puede ser introducido en las ecuaciones dinámicas a través de un modelo de Ginzburg-Landau generalizado y dependiente del tiempo (TDGL). Este tipo de modelo ha sido utilizado para estudiar la dinámica crítica así como la dinámica de transiciones de fase. El modelo proporciona ecuaciones dinámicas de Langevin las cuales incorporan los procesos básicos reversibles así como procesos disipativos.

Dado el conjunto de variables relevantes del sistema $\phi_i(\vec{r}, t)$ y la funcional de energía libre $F[\phi(\vec{r}, t)]$, las ecuaciones de Langevin tienen la siguiente forma general:

$$\partial_t \phi_i(\vec{r}, t) = V_i(\phi) - \mathcal{L}_{ij} \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_j} + \eta(\vec{r}, t) \quad (2.24)$$

los términos $V_i(\phi)$ y $-\mathcal{L}_{ij} \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_j}$ son las contribuciones disipativas y no disipativas a la dinámica de $\phi_i(\vec{r}, t)$ respectivamente. $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es la matriz de coeficientes generalizados de Onsager. El último término es la contribución de las fluctuaciones consideradas como ruido térmico gaussiano, que satisface las siguientes relaciones de fluctuación disipación,

$$\langle \eta_i(\vec{r}, t) \eta_j(\vec{r}', t') \rangle = 2k_\beta T \mathcal{L}_{ij} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \quad (2.25)$$

Esta ecuación tiene asociada la siguiente ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad,

$$\begin{aligned} \partial_t P[\phi] = & - \int d\vec{r} \frac{\delta}{\delta\phi_i} (V_i(\phi) P[\phi]) \\ & + \int d\vec{r} \frac{\delta}{\delta\phi_i} [\mathcal{L}_{ij} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi_j}] + 2k_\beta T \int d\vec{r} \frac{\delta^2}{\delta\phi_i \delta\phi_j} (\mathcal{L}_{ij} P[\phi]). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Debido al carácter no disipativo de $V_i(\phi)$ se tiene:

$$\int d\vec{r} \frac{\delta}{\delta\phi_i} (V_i(\phi) P[\phi]) = 0 \quad (2.27)$$

Las condiciones suficientes para que (2.27) se cumpla es

$$\int d\vec{r} \frac{\delta V_i(\phi)}{\delta\phi_i} = 0, \quad (2.28)$$

$$\int d\vec{r} V_i(\phi) \frac{\delta}{\delta\phi_i} P[\phi] = 0. \quad (2.29)$$

Si se satisfacen las condiciones (2.25) y (2.27), la solución estacionaria de la ecuación de Fokker Planck para P_{st} es la distribución de equilibrio

$$P_{st} = N e^{-\frac{F[\phi]}{k_\beta T}}, \quad (2.30)$$

donde k_β es la constante de Boltzmann y N es una constante de normalización.

El potencial utilizado para la condición de equilibrio, en esta formulación, fue la energía Libre de Helmholtz y está dada por la siguiente expresión

$$F = \int d^3r \left[\frac{1}{2} K_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta n_\alpha \partial_\delta n_\gamma - \frac{1}{2} \chi_a (n_\alpha H_\alpha)^2 + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 - p(\vec{r}) \partial_\alpha u_\alpha \right], \quad (2.31)$$

donde ∂_β se define como $\partial_\beta \equiv \partial/\partial x_\beta$ $\beta = 1, 2, 3$. El primer término da la energía libre de un cristal líquido nemático debida a deformaciones locales elásticas y es conocida como la energía de distorsión de Oseen-Frank con $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dado por

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_1 (\delta_{\alpha\delta} - n_\alpha n_\delta) (\delta_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma) + K_2 \epsilon_{\alpha\beta\mu} \epsilon_{\gamma\delta\nu} n_\mu n_\nu + K_3 (\delta_{\alpha\gamma} - n_\alpha n_\gamma) n_\beta n_\delta. \quad (2.32)$$

El segundo término representa la contribución del campo magnético H_α , con χ_a la parte anisotrópica de la susceptibilidad magnética. El tercer término es la contribución hidrodinámica, con $v(\vec{r})$ el campo de velocidades y ρ la densidad de masa. El último término introduce la presión $p(\vec{r})$ como un multiplicador de Lagrange para la condición de incompresibilidad y el campo $u_\alpha(\vec{r})$ representa el desplazamiento de las moléculas.

Para describir el método se considera a $\vec{n}, \vec{v}, \vec{u}$ como el conjunto de variables de estado independientes del sistema. Las ecuaciones nematodinámicas estocásticas para cada una de estas variables tienen que ser de la forma de la ecuación (2.24). Para este fin, se partirá de las ecuaciones nematodinámicas deterministas, basadas en la deducción variacional de de Gennes [8], a estas ecuaciones se incluirán fluctuaciones térmicas, lo cual constituye el método desarrollado por san Miguel y Sagués [10].

La ecuación de movimiento para el director \vec{n} es

$$d_t n_\beta = \frac{1}{\gamma_1} h_\beta + \frac{\lambda - 1}{2} n_\alpha \partial_\beta v_\alpha + \frac{\lambda + 1}{2} n_\alpha \partial_\alpha v_\beta, \quad (2.33)$$

en donde d_t se define como $d_t = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ y $h_\beta = -\frac{\delta F}{\delta n_\beta}$. El primer término de esta ecuación, describe la dinámica del director en ausencia del flujo hidrodinámico; los términos restantes acoplan el director con el campo de velocidades.

La ecuación de evolución temporal para la velocidad \vec{v} resulta ser

$$\rho d_t v_\beta = \partial_\alpha (\sigma_{\alpha\beta}^s + \sigma_{\alpha\beta}^a + \sigma_{\alpha\beta}^E), \quad (2.34)$$

donde, $\sigma_{\alpha\beta}^s$ y $\sigma_{\alpha\beta}^a$ representan la parte simétrica y asimétrica del tensor de esfuerzos, $\sigma_{\alpha\beta}^E$ es el tensor de esfuerzos de Ericksen asociado con la variación de la energía libre causada por desplazamientos de las moléculas [8] y están definidos por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^s = & 2\nu_2 A_{\alpha\beta} + 2(\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3) n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho} \\ & + 2(\nu_3 - \nu_2)(n_\alpha n_\mu A_{\mu\beta} + n_\beta n_\mu A_{\mu\alpha}) - \frac{\lambda}{2}(n_\alpha h_\beta + n_\beta h_\alpha), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^a = \frac{1}{2}(n_\alpha h_\beta - n_\beta h_\alpha), \quad (2.36)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^E = -p\delta_{\alpha\beta} - K\gamma_{\alpha\mu\delta}\partial_\delta n_\mu\partial_\beta n_\gamma. \quad (2.37)$$

Las ecuaciones (2.33) y (2.34) se describen de tal forma que tomen la forma estructural de la ecuación de Langevin (2.24) y así se pueden identificar los términos disipativos y no disipativos,

$$d_t n_\beta = -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\delta F}{\delta n_\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n}) \frac{\delta F}{\delta v_\gamma}, \quad (2.38)$$

$$d_t v_\beta = L_{\beta\gamma}(\vec{n}) \frac{\delta F}{\delta v_\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\dagger(\vec{n}) \frac{\delta F}{\delta n_\gamma} - \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta u_\beta}, \quad (2.39)$$

$$d_t u_\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta v_\beta} \quad (2.40)$$

en donde F es la funcional de energía libre de Helmholtz dada por Ec. (2.31). $L_{\beta\gamma}(\vec{n})$, $\Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n})$ y $\Gamma_{\beta\gamma}^\dagger(\vec{n})$ son dados por,

$$L_{\beta\gamma}(\vec{n}) = \partial_\alpha M_{\alpha\beta\delta\gamma}(\vec{n}) \partial_\delta, \quad (2.41)$$

$$M_{\alpha\beta\delta\gamma}(\vec{n}) = \frac{1}{\rho^2} [2(\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3) n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + \nu_2 (\delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + (\nu_3 - \nu_2) (n_\alpha n_\gamma \delta_{\delta\beta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\gamma\beta} + n_\beta n_\gamma \delta_{\delta\alpha} + n_\beta n_\delta \delta_{\gamma\alpha})] \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n}) = \frac{1}{2\rho} [(\lambda + 1) n_\alpha \partial_\alpha \delta_{\beta\gamma} + (\lambda - 1) n_\alpha \partial_\beta \delta_{\alpha\gamma}]. \quad (2.43)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\dagger(\vec{n}) = \Gamma_{\gamma\beta}^*(\vec{n}) \quad (2.44)$$

Aquí $\lambda = -\gamma_1/\gamma_2$, γ_1 , γ_2 , ν_1 , ν_2 y ν_3 denotan diferentes coeficientes de viscosidad y * el complejo conjugado.

Las ecuaciones (2.38-2.40) pueden ser expresadas en forma matricial, definiendo el vector $\vec{\phi}(\vec{r}) = [\vec{n}(\vec{r}), \vec{v}(\vec{r}), \vec{u}(\vec{r})]$:

$$d_t \phi_i = A_{ij}(\vec{\phi}) \frac{\delta F}{\delta \phi_j}, \quad i = 1, 2, \dots, 9. \quad (2.45)$$

El operador \overleftrightarrow{A} se descompone en una parte \overleftrightarrow{A}^D relacionada con la contribución de los términos disipativos y una parte \overleftrightarrow{A}^R con la contribución de los términos no disipativos:

$$A_{ij}^D = -\mathcal{L}_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma} I & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A_{ij}^D)^\dagger = A_{ij}^D \quad (2.46)$$

$$A_{ij}^R = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma & 0 \\ -\Gamma^\dagger & 0 & -\frac{1}{\rho}I \\ 0 & \frac{1}{\rho}I & 0 \end{bmatrix}, \quad (A_{ij}^R)^\dagger = -A_{ij}^R, \quad (2.47)$$

donde se ha utilizado la notación de matrices en block, cada elemento representa una matriz 3×3 , I es la matriz identidad y A_{ij}^\dagger está definido como $A_{ij}^\dagger \equiv A_{ji}^*$. La parte antisimétrica y antihermitiana de \overleftrightarrow{A} representa a las contribuciones no disipativas. Al separar \overleftrightarrow{A} en su parte disipativa y no disipativa, la ecuación (2.45) toma la forma de la ecuación de Langevin (2.24).

Ahora se incorporan las fluctuaciones térmicas en forma aditiva definidas por

$$\pi_i = (\eta_i, \partial_\alpha \Omega_\beta, 0) \quad (2.48)$$

las cuales satisfacen las relaciones de fluctuación-disipación (2.25).

Por lo tanto, las ecuaciones (2.38-2.40) se transforman en ecuaciones nematodinámicas estocásticas al incluir las fluctuaciones π_i , y toman la forma

$$d_t n_\beta = -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\delta F}{\delta n_\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n}) \frac{\delta F}{\delta v_\gamma} + \eta_\beta(\vec{r}, t), \quad (2.49)$$

$$d_t v_\beta = L_{\beta\gamma}(\vec{n}) \frac{\delta F}{\delta v_\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\dagger(\vec{n}) \frac{\delta F}{\delta n_\gamma} - \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta u_\beta} + \partial_\alpha \Omega_\beta(\vec{r}, t), \quad (2.50)$$

$$d_t u_\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\delta F}{\delta v_\beta}. \quad (2.51)$$

Estas ecuaciones forman un conjunto cerrado, son no lineales y la introducción de las fluctuaciones internas se realizó de tal forma que reproducen la distribución de probabilidades estacionaria ecuación (2.30). Sin embargo, además de este tipo de ruido, pueden incorporarse a dichas ecuaciones fluctuaciones externas impuestas al sistema a través de hacer fluctuantes algunos de los coeficientes.

Capítulo 3

Modelo

Consideramos una muestra de cristal líquido nemático, termotrópico, de espesor l , contenida entre dos placas planas paralelas, conductoras y perpendiculares al eje z , como se muestra en la figura (3.1).

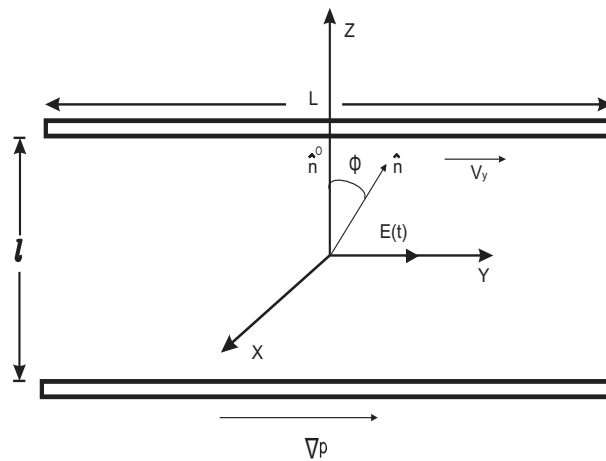


Figura 3.1:

Las dimensiones transversales $x - y$ de magnitud L , son tales que $L \gg l$, pero de tal manera que el volumen $V = L^2 l$ de la celda es finito. Las moléculas del nemático tienen una configuración inicial homeotrópica $\hat{n}^0 = (0, 0, 1)$. En la dirección y se aplica un campo eléctrico de baja frecuencia, $E_y(t)$, y un gradiente de presión externo que, en general, puede ser función de z , como se analizará más adelante.

Bajo la acción de $E_y(t)$ la orientación del director $\vec{n}(\vec{r}, t)$ variará en la posición y el tiempo, pero supondremos que la reorientación de \vec{n} sólo

ocurre en el plano $y - z$; ésta es una hipótesis razonable confirmada por observaciones experimentales. Más aún, puesto que la celda tiene una razón de aspecto grande en la dirección y comparada con la de la dirección z , también es razonable suponer homogeneidad espacial en la dirección y , de modo que $\hat{n} = (0, \text{sen}\phi(z, t), \text{cos}\phi(z, t))$. La aplicación del gradiente de presión y los efectos de reorientación del director dan lugar a un flujo hidrodinámico en la dirección y , $\vec{v}(z, t) = (0, v_y(z, t), 0)$.

3.1. Ecuaciones nematodinámicas para el modelo

Durante el proceso de reorientación, el sistema inicialmente en equilibrio termodinámico, se lleva a un estado fuera de equilibrio a través de la variación de un parámetro de control, para lo cual consideraremos dos casos, uno correspondiente a la intensidad del campo eléctrico ($\sim E^2$) y un segundo caso correspondiente a la magnitud del campo eléctrico mismo E . Así, cuando la intensidad o el campo alcanzan su valor crítico ocurre un cambio de orientación y el sistema relaja a un nuevo estado de equilibrio con una configuración orientacional diferente. Realizaremos la descripción física de dicho proceso utilizando las ecuaciones nematodinámicas desarrolladas por San Miguel y Sagués [10], las cuales se describieron en el capítulo 2. Sin embargo, en este trabajo generalizamos la teoría de San Miguel y Sagués para incorporar el caso de ruido paramétrico multiplicativo en las ecuaciones nematodinámicas; exploraremos dos casos, en el primero consideramos ruido en la intensidad del campo eléctrico con lo cual se obtendrá una ecuación estocástica, lineal e inhomogénea con ruido lineal paramétrico y multiplicativo, mientras que en el segundo se considera ruido en la amplitud del campo eléctrico, con lo que se obtiene una ecuación estocástica, lineal e inhomogénea con ruido paramétrico, cuadrático y multiplicativo.

Debido a que los estados inicial y final del sistema son estados de equilibrio, se describen utilizando un potencial termodinámico. Como el proceso mediante el cual el sistema pasa del estado inicial al final es un proceso a temperatura y volumen constantes, el potencial que usaremos será la energía libre de Helmholtz.

Ahora aplicaremos la teoría de San Miguel y Sagués sin fluctuaciones aditivas, para la geometría mostrada en la figura 3.1 y en la aproximación de mínimo acoplamiento [25], en la cual, como se mencionó anteriormente, la dependencia de \vec{n} con los operadores $L_{\beta\gamma}(\vec{n})$ y $\Gamma_{\beta\gamma}(\vec{n})$ que aparecen en dichas ecuaciones es aproximada sustituyendo \vec{n} por su valor inicial \hat{n}^0 .

Esta aproximación sólo es válida para las primeras etapas de reorientación, es decir, \vec{n} difiere poco de su valor inicial. Las ecuaciones nematodinámicas fluctuantes que resultan son

$$\frac{\partial n_y}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\delta F}{\delta n_y} + \frac{\lambda + 1}{2\rho} \partial_z \frac{\delta F}{\delta v_y}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial n_z}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\delta F}{\delta n_z}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\nu_3}{\rho^2} \partial_z^2 \frac{\delta F}{\delta v_y} + \frac{\lambda + 1}{2\rho} \partial_z \frac{\delta F}{\delta n_y}, \quad (3.3)$$

donde F es la funcional de energía libre de Helmholtz, $\frac{\delta F}{\delta n_\alpha}$ son las derivadas funcionales de F , las cual se definen de la siguiente forma

$$\frac{\delta F[n_\beta, \partial_\beta n_\alpha]}{\delta n_\beta} = \frac{\partial F}{\partial n_\beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial n_\beta}{\partial \alpha})}. \quad (3.4)$$

Para obtener la forma explícita de las ecuaciones (3.1-3.3) es necesario determinar la energía libre F y calcular su derivada funcional. Para el modelo que estamos considerando, F está dada por

$$F = \int d^3r [f_{elas} + f_E + f_{hidro}], \quad (3.5)$$

donde f_{elas} , f_E , f_{hidro} son las densidades de energía, elástica, eléctrica e hidrodinámica, respectivamente, las cuales determinaremos a continuación.

La densidad de energía elástica f_{elas} dada por (1.3), para la geometría de nuestro modelo y considerando por simplicidad la aproximación de constantes elásticas iguales $K_1 = K_2 = K_3 = K$, f_{elas} resulta ser,

$$f_{elas} = \frac{1}{2} K [(\partial_z n_z)^2 + (\partial_z n_y)^2]. \quad (3.6)$$

Ahora determinemos la contribución del campo eléctrico f_E dado por (1.11),

$$f_E = -\varepsilon_{a0} n_y^2 E_y^2. \quad (3.7)$$

El gradiente de presión externo impuesto en la dirección del eje y produce un flujo hidrodinámico de la forma

$$\vec{v} = [0, v_y(z, t), 0]. \quad (3.8)$$

La densidad de energía producida por este flujo es

$$f_{hidro} = \frac{1}{2}\rho v_y^2. \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.6-3.7) y (3.9) en (3.5) se obtiene finalmente

$$F = \int d^3r \left[\frac{1}{2}K[(\partial_z n_z)^2 + (\partial_z n_y)^2] - \varepsilon_{a0}n_y^2|E_y|^2 + \frac{1}{2}\rho v_y^2 \right]. \quad (3.10)$$

Ahora determinaremos las derivadas funcionales de F definidas por (3.4) donde ∂_β se define como $\partial_\beta \equiv \partial/\partial x_\beta$, $\beta = 1, 2, 3$.

$$\frac{\delta F}{\delta n_y} = -K \frac{\partial^2 n_y}{\partial z^2} - 2\varepsilon_{a0}n_y E_y^2 \quad (3.11)$$

$$\frac{\delta F}{\delta n_z} = -K \frac{\partial^2 n_z}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{\delta F}{\delta v_y} = \rho v_y. \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.11-3.13) en (3.1-3.3), obtenemos las ecuaciones de evolución acopladas para las componentes del director y el campo de velocidades,

$$\frac{\partial n_y}{\partial t} = \frac{K}{\gamma_1} \frac{\partial^2 n_y}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{a0}}{\gamma_1} n_y E_y^2 + \frac{1}{2}(\lambda + 1) \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial n_z}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n_z}{\partial z^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{(\lambda + 1)}{2\rho} K \frac{\partial^3 n_y}{\partial z^3} + \frac{\nu_3}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{(\lambda + 1)}{\rho} \varepsilon_{a0} E_y^2 \frac{\partial n_y}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}. \quad (3.16)$$

Ahora consideraremos las ecuaciones (3.14-3.16) en una escala de tiempo en la cual, la velocidad $v_y(z, t)$ ya alcanzó un valor estacionario, mientras que el director sigue reorientándose, es decir, un tiempo para el cual $\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$. Esto equivale a suponer que la velocidad es una variable rápida y el director es lenta. Como un primer caso consideremos un gradiente de presión constante, de la forma $\frac{dp}{dy} = \frac{|\nabla p|}{L}$, de aquí que las unidades de $|\nabla p|$ son de $\frac{N}{m^2}$. Bajo estas hipótesis, de (3.14-3.16) se obtienen las siguientes ecuaciones para las componentes del director,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\partial_z^2 + BE_y^2 & 0 \\ 0 & \frac{K}{\gamma_1}\partial_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Cz \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

donde

$$A = \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{(\lambda+1)^2}{4\nu_3} \right) K, \quad B = \left(\frac{2}{\gamma_1} - \frac{(\lambda+1)^2}{4\nu_3} \right) \varepsilon_{a0} \quad y \quad C = \frac{(\lambda+1)|\nabla p|}{2\nu_3 L}. \quad (3.18)$$

Ya que estamos interesados en estudiar los efectos del ruido en la reorientación del director, observemos de (3.17) que el campo eléctrico sólo aparece en la ecuación de evolución para la componente n_y del director, es decir, sólo la ecuación para n_y es estocástica, por lo que ahora solo nos enfocaremos a estudiar la ecuación para dicha componente.

$$\frac{\partial n_y(z, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 n_y(z, t)}{\partial z^2} + BE_y^2(t) n_y(z, t) + Cz. \quad (3.19)$$

Al considerar ruido en la intensidad y en la magnitud del campo eléctrico, ésta ecuación será una ecuación estocástica con ruido lineal y cuadrático multiplicativo, respectivamente. Esta situación es completamente diferente a la considerada en las referencias [5] y [6] en donde el ruido es aditivo. La geometría de nuestro modelo es homeotrópica, por lo que las condiciones inicial y de frontera que debe satisfacer esta ecuación son,

$$n_y(z, t = 0) = 0, \quad (3.20)$$

$$n_y(z = 0, t) = 0, \quad (3.21)$$

$$n_y(z = l, t) = 0. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.19) no es fácil de resolver para las condiciones de frontera (3.20-3.22). Para simplificar el problema matemático, emplearemos una técnica que consiste, básicamente, en sustituir la ecuación diferencial parcial por una ecuación ordinaria, la ecuación de amplitud [26].

3.2. Ecuación de amplitud

Para obtener la ecuación de amplitud proponemos como solución un desarrollo de Fourier compatible con las condiciones de frontera (3.21-3.22),

lo cual nos permitirá eliminar la variable z y obtener una ecuación diferencial ordinaria para la amplitud de n_y . Para estas condiciones de frontera se propone el siguiente desarrollo de Fourier

$$n_y(z, t) = \sum_m \sum_{q_z} n_{q_z}(t) \text{sen}\left[\frac{(2m+1)\pi z}{l}\right]. \quad (3.23)$$

Sustituyendo en (3.17) e integrando sobre z para $z < 0 < l$, se obtiene la siguiente ecuación de amplitud para cada uno de los modos $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{dn_{q_z}}{dt} = \left[-A \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{l^2} + BE_y^2(t)\right] n_{q_z} + \frac{Cl}{2} (2m+1)\pi. \quad (3.24)$$

La solución de esta ecuación para la condición inicial $n_{q_z}(0) = 0$ y para un campo eléctrico de la forma $E_y = E_0 e^{i\omega t}$ es la siguiente,

$$n_{q_z} = \frac{Cl}{2g} (2m+1)\pi (e^{-gt} - 1), \quad (3.25)$$

donde $g = A \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{l^2} - BE_0^2$. Nótese que el tiempo de relajación de cada uno de los modos en el sistema es dado por

$$\tau_m = \frac{1}{g} = \frac{1}{\frac{(2m+1)^2 A \pi^2}{l^2} - BE_0^2}, \quad (3.26)$$

el cual es máximo para $m = 0$, es decir, el modo que predomina en el sistema es el de orden más bajo.

Ahora bien, como sólo estamos describiendo las primeras etapas del proceso de reorientación, es razonable suponer que durante el tiempo que ocurren las etapas tempranas de reorientación, el modo que sobrevive es el modo $m = 0$. Por esta razón sólo se considerará el primer término de esta serie, es decir, el modo $m = 0$ es el dominante, por lo que la ecuación (3.23) se reduce a

$$n_y(z, t) = n_{q_z}(t) \text{sen}\left[\frac{\pi z}{l}\right]. \quad (3.27)$$

Por último, como sólo se considerarán propiedades volumétricas, sustituyendo (3.27) en (3.19) e integrando respecto a z para $0 < z < l$ eliminamos la dependencia en z , haciendo esto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dn_{q_z}(t)}{dt} = \left[-\frac{\pi^2}{l^2} A + BE_y^2(t)\right] n_{q_z}(t) + f_0, \quad (3.28)$$

donde

$$f_0 = \frac{C\pi l}{4}. \quad (3.29)$$

Cabe señalar que en el caso en el que el gradiente de presión aplicado sea lineal en z , $\frac{dp}{dy} = \frac{|\nabla p|}{L}z$ ó cuadrático $\frac{dp}{dy} = \frac{|\nabla p|}{L}z^2$ el único cambio en la ecuación (3.28) es que el término inhomogéneo va como $\frac{2}{3}f_0$ para el caso lineal y $\frac{1}{2}f_0$ para el caso cuadrático.

3.3. Ruido externo

Las fluctuaciones juegan un papel fundamental en la dinámica de reorientación de un nemático. Esta situación es una manifestación de un comportamiento más general que ocurre en todos los sistemas físicos cuando estos pasan de un estado de equilibrio estable a otro inestable, relajando a un nuevo estado de equilibrio [11, 27]. En este tipo de procesos la evidencia experimental muestra que en la vecindad de un punto inestable las fluctuaciones son tan grandes comparadas con aquellas en equilibrio que hacen necesaria su inclusión en la dinámica del sistema para poder describir la transición de un estado de equilibrio a otro [28]. Dichas fluctuaciones pueden ser de dos tipos: internas y externas. Las fluctuaciones internas son aquellas que tienen su origen en la naturaleza molecular de la materia. El efecto colectivo de éstas se considera cuando se está describiendo la dinámica de un sistema a un nivel mesoscópico, a través de un término aleatorio aditivo que depende principalmente de la temperatura.

Por otro lado, las fluctuaciones externas se originan fuera del sistema y pueden concebirse como un campo externo actuando sobre él. Este tipo de ruido se impone al sistema a través de alguno de los parámetros, pudiéndose controlar de manera independiente a la evolución del mismo. Una diferencia entre las fluctuaciones externas y las internas, es que las primeras no escalan con el tamaño del sistema.

En algunos fenómenos físicos las fluctuaciones externas intervienen de manera lineal en las ecuaciones dinámicas del sistema. Su descripción es, en este caso, un problema bien entendido existiendo métodos bien establecidos para este propósito [28]. Sin embargo, una gran variedad de sistemas físicos, fisicoquímicos e hidrodinámicos como son reacciones fotoquímicas [29], cristales líquidos [30], circuitos eléctricos [31], o sistemas de Rayleigh-Benard [32] que se caracterizan por introducir al ruido externo en forma no lineal dentro de las ecuaciones que gobiernan su dinámica. Para estos

casos el tratamiento y descripción de los efectos de ruido es poco conocido y está menos desarrollado que el del ruido externo lineal.

En ambos casos, las fluctuaciones lineales o no, se pueden modelar por dos procesos diferentes: ruido blanco y ruido de color. El ruido blanco es un proceso markofiano donde el tiempo de correlación entre las fluctuaciones es instantáneo. Por el contrario, el ruido de color es un proceso no markofiano, por lo que el tiempo de correlación es finito. Este último proceso describe situaciones más reales, ya que la mayoría de los fenómenos presentan tiempos de correlación finitos y diferentes de cero.

En este trabajo se trata solamente el caso de ruido externo, despreciando las fluctuaciones térmicas aditivas.

3.4. Ecuación estocástica de amplitud

En esta sección construimos el modelo fluctuante, considerando como un primer caso que la intensidad del campo eléctrico fluctúa, con lo cual obtendremos una ecuación estocástica con ruido lineal multiplicativo para la amplitud de la componente y del campo director.

Partiendo de la ecuación de amplitud (3.28), supondremos como un primer caso que sólo la intensidad del campo eléctrico fluctúa, es decir, expresamos E_y^2 como

$$E_y^2 = I_0 + \alpha\zeta(t), \quad (3.30)$$

en donde $\zeta(t)$ es un proceso estocástico que representa ruido paramétrico y α es un parámetro que mide la magnitud de las fluctuaciones. Por simplicidad tomaremos un ruido con promedio nulo. Con las suposiciones anteriores la ecuación de amplitud se convierte en una ecuación diferencial ordinaria, estocástica, lineal e inhomogénea con ruido paramétrico multiplicativo para la amplitud $n_{q_z}(t)$, dada por la siguiente expresión

$$\frac{dn_{q_z}(t)}{dt} = \left[-\frac{\pi^2}{l^2}A + \alpha B\zeta(t)\right]n_{q_z}(t) + f_0. \quad (3.31)$$

3.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta sección daremos una breve introducción sobre ecuaciones diferenciales estocásticas y explicaremos un método desarrollado por van Kam

pen [11] para resolver en forma aproximada dichas ecuaciones. Emplearemos este método para resolver la ecuación (3.31), lo cual nos permitirá obtener el primero y segundo momento de la componente y del campo director. Después usaremos éstas cantidades para obtener expresiones para la birrefringencia inducida tanto para el caso de ruido blanco como de color.

Cuando sobre un sistema actúan fuerzas fluctuantes externas, sus ecuaciones de movimiento se convierten en ecuaciones diferenciales con coeficientes aleatorios, es decir, en “ecuaciones estocásticas”. Resolver una ecuación diferencial estocástica consiste en encontrar la función de distribución de probabilidad para las variables aleatorias que definen el problema en particular. Algunas veces estas ecuaciones pueden ser resueltas en forma exacta, aunque en la mayoría de los casos sólo en forma aproximada.

3.5.1. Definición

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación diferencial en la que uno o más de los coeficientes son números aleatorios o funciones aleatorias de las variables independientes. De la misma forma que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, los coeficientes se suponen conocidos. Es decir, en una ecuación diferencial estocástica las propiedades aleatorias de los coeficientes se suponen dadas.

La forma general de una ecuación diferencial estocástica es

$$\dot{u} = F(u, t; Y(t)), \quad (3.32)$$

donde u y F pueden ser vectores, y $Y(t)$ indica una o más funciones aleatorias, cuyas propiedades estadísticas son conocidas. Esta ecuación, junto con una condición inicial $u(t_0) = a$, determinan para cada realización inicial particular $y(t)$ de $Y(t)$, una función $U(t; [y], a)$, la cual es una funcional de $y(t)$; es decir, depende de todos los valores $y(t')$ para $0 \leq t' \leq t$. El ensamble de soluciones $U(t; [y], a)$ para todos los posibles $y(t')$ constituyen un proceso estocástico. La ecuación (3.32) es resuelta, cuando todas las propiedades estadísticas de este proceso se determinan.

Algunas veces el valor inicial a es también una cantidad o vector aleatorio. Entonces, el resultado del proceso $U(t; [y], a)$ es una función de la variable aleatoria a , como también una funcional de y .

Las ecuaciones diferenciales estocásticas pueden ser clasificadas de la siguiente forma:

I. Ecuaciones diferenciales lineales, en las que solo el término inhomogéneo es una función aleatoria, como por ejemplo la ecuación de Langevin para la velocidad de una partícula Browniana. A este tipo de ecuaciones se les llama *aditivas* y en principio pueden resolverse.

II. Ecuaciones diferenciales lineales en las que uno o más de los coeficientes que multiplican a u son funciones aleatorias. A estas ecuaciones se les llama *multiplicativas* y pueden resolverse solo en casos especiales, aunque existen métodos para encontrar soluciones aproximadas.

III. Ecuaciones diferenciales no lineales, es decir, ecuaciones que no son lineales en u , las cuales pueden ser *aditivas* o *multiplicativas*.

3.5.2. Tratamiento heurístico de ecuaciones multiplicativas

Considérese una ecuación estocástica lineal homogénea

$$\dot{u} = \mathbf{A}(t)u = \{\mathbf{A}^{(0)} + \alpha\mathbf{A}^{(1)}\}u, \quad (3.33)$$

donde u es un vector, $\mathbf{A}^{(0)}$ es una matriz constante, $\mathbf{A}^{(1)}(t)$ una matriz aleatoria y α es un parámetro que mide la magnitud de la fluctuación. Además, se supone que $\mathbf{A}^{(1)}(t)$ tiene un tiempo de correlación finito τ_c , en el sentido de que para dos tiempos t_1, t_2 tales $|t_1 - t_2| \gtrsim \tau_c$, sea posible tratar todos los elementos de la matriz $\mathbf{A}^{(1)}(t_1)$ como estadísticamente independientes de los elementos $\mathbf{A}^{(1)}(t_2)$. El método que se describirá dará una solución aproximada de la ecuación (3.33) en la forma de un desarrollo en serie de potencias de $\alpha\tau_c$.

Es conveniente suponer que $\mathbf{A}^{(1)}(t)$ es un proceso estocástico estacionario. Entonces, $\langle \mathbf{A}^{(1)}(t) \rangle$ es independiente del tiempo y puede ser incorporado en $\mathbf{A}^{(0)}$ mediante el siguiente cambio de variable.

$$\mathbf{A}^{(0)'} = \mathbf{A}^{(0)} + \alpha\langle \mathbf{A}^{(1)}(t) \rangle, \quad \mathbf{A}^{(1)'}(t) = \mathbf{A}^{(1)}(t) - \langle \mathbf{A}^{(1)}(t) \rangle \quad (3.34)$$

de esta forma si sustituimos $\mathbf{A}^{(0)'}$ en (3.33) y tomando en cuenta la definición de $\mathbf{A}^{(1)'}(t)$ se obtiene

$$\dot{u} = \{\mathbf{A}^{(0)'} + \alpha\mathbf{A}^{(1)'}\}u, \quad (3.35)$$

de tal manera que $\langle \mathbf{A}^{(1)'}(t) \rangle = 0$. De aquí en adelante se supondrá que esto ya se ha hecho y se omitirán las primas en la notación subsecuente.

También es posible eliminar $\mathbf{A}^{(0)}$ haciendo otro cambio de variable, que equivale a pasar a la representación de interacción,

$$u(t) = e^{t\mathbf{A}^{(0)}} v(t) \quad (3.36)$$

Usando (3.36) en (3.35) y simplificando se obtiene

$$\dot{v} = \alpha e^{-t\mathbf{A}^{(0)}} \mathbf{A}^{(1)}(t) e^{t\mathbf{A}^{(0)}} v \equiv \alpha V(t)v, \quad (3.37)$$

que es la ecuación a resolver para la condición inicial $v(0) = u(0) = a$. La solución de esta ecuación se puede expresar como

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t dt V(t)v. \quad (3.38)$$

Esta ecuación puede ser resuelta de manera aproximada en forma de una serie de potencias en α mediante iteraciones, es decir,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(t) &= a + \alpha \int_0^t dt V(t)a \\ v^{(2)}(t) &= a + \alpha \int_0^t dt V(t)v^{(1)}(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde el superíndice indica el orden de la solución en α . De esta manera, a segundo orden en α la solución es

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t dt_1 V(t_1)a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)a + \dots, \quad (3.40)$$

tomando el promedio respecto de las posibles realizaciones de $V(t)$ condicionado a un valor fijo de a ,

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1)V(t_2) \rangle a + \vartheta((\alpha\tau_c)^3). \quad (3.41)$$

Debido a que es sobre las realizaciones de $V(t)$ y las integrales son sobre t , se puede cambiar las integrales con el promedio. Esta aproximación a segundo orden puede ser usada siempre y cuando los términos de orden mayor sean pequeños. Como cada término sucesivo involucra una integración adicional

sobre el tiempo, la restricción de que los términos superiores sean pequeños se cumple si $\alpha t \ll 1$. Por otro lado si se quiere utilizar esta ecuación para periodos largos comparados con τ_c , entonces se debe suponer que $\alpha\tau_c \ll 1$. De esta forma podemos rescribir (3.41) como

$$\langle v(t) \rangle \simeq a + \alpha^2 \int_0^t dt \int_0^{t_1} d\tau \langle V(t_1)V(t_1 - \tau) \rangle a. \quad (3.42)$$

Cuando $t_1 > \tau_c$, el límite superior t_1 de la integración en τ puede ser remplazado por ∞ , ya que el integrando se anula de cualquier modo. Aún cuando t_1 varíe de 0 a t , es mayor a τ_c en la mayor parte del intervalo. De aquí que para $\tau_c \ll t \ll \alpha^{-1}$ se tiene de forma aproximada

$$\langle v(t) \rangle \simeq a + \alpha^2 \int_0^t dt \int_0^\infty d\tau \langle V(t_1)V(t_1 - \tau) \rangle a. \quad (3.43)$$

Por otro lado, (3.41) es también solución a orden α^2 de la ecuación diferencial lineal

$$\partial_t \langle v(t) \rangle = \alpha^2 \left[\int_0^\infty \langle V(t)V(t - \tau) \rangle d\tau \right] \langle v(t) \rangle. \quad (3.44)$$

De lo anterior, podemos concluir que la evolución de $\langle v(t) \rangle$ puede ser descrita por esta ecuación, la cual en la representación original se escribe como

$$\partial_t \langle v(t) \rangle = [\mathbf{A}^{(0)} + \alpha^2 \int_0^\infty \langle \mathbf{A}^{(1)}(t) e^{\tau \mathbf{A}^{(0)}} \mathbf{A}^{(1)}(t - \tau) \rangle e^{-\tau \mathbf{A}^{(0)}} d\tau] \langle v(t) \rangle. \quad (3.45)$$

Ahora se considerará una extensión del caso anterior, el de una ecuación estocástica lineal inhomogénea

$$\dot{u} = \mathbf{A}(t)u + f(t). \quad (3.46)$$

$\mathbf{A}(t)$ es una matriz aleatoria $n \times n$ y $f(t)$ es un vector aleatorio de n componentes. Este caso puede reducirse al caso previo extendiendo el vector u a un vector de $n + 1$ componentes en el que la componente $u_{n+1} = 1$. Entonces (3.46) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Para encontrar la solución aproximada, se supone de la misma forma que en (3.33) que

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}^{(0)} + \alpha \mathbf{A}^{(1)}(t), \quad f(t) = f^{(0)} + \alpha f^{(1)}(t), \quad (3.48)$$

con $\mathbf{A}^{(0)}$ y $f^{(0)}$ no aleatorios y $\langle \mathbf{A}^{(1)}(t) \rangle = 0$ y $\langle f^{(1)}(t) \rangle = 0$. Para extender el resultado del caso homogéneo (3.45) al inhomogéneo se tiene

$$\exp\left[\tau \begin{pmatrix} \mathbf{A} & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^{\tau \mathbf{A}^{(0)}} & \frac{e^{\tau \mathbf{A}^{(0)}} - 1}{\mathbf{A}^{(0)}} f^{(0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.49) en (3.45) se obtiene la ecuación para el promedio del vector de $n + 1$ componentes, en la cual, para la última componente la ecuación es trivial. Para las otras n componentes se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t \langle v(t) \rangle &= [\mathbf{A}^{(0)} + \alpha^2 \int_0^\infty \langle \mathbf{A}^{(1)}(t) e^{\tau \mathbf{A}^{(0)}} \mathbf{A}^{(1)}(t - \tau) \rangle e^{-\tau \mathbf{A}^{(0)}} d\tau] \langle v(t) \rangle \\ &+ f_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle \mathbf{A}^{(1)}(t) e^{\tau \mathbf{A}^{(0)}} \mathbf{A}^{(1)}(t - \tau) \rangle \frac{e^{-\tau \mathbf{A}^{(0)}} - 1}{\mathbf{A}^{(0)}} d\tau \cdot f^{(0)} \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle \mathbf{A}^{(1)}(t) e^{\tau \mathbf{A}^{(0)}} f^{(1)}(t - \tau) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.5.3. Obtención de la función de distribución de probabilidad

Considérese nuevamente el caso general de una ecuación diferencial estocástica no lineal (3.32). Esta ecuación puede convertirse en una ecuación estocástica lineal considerando la ecuación asociada de Liouville. Para lograr esto, considérese por ahora, una sola realización $y(t)$ de $Y(t)$ y la ecuación no estocástica determinista

$$\dot{u}_\nu = F_\nu(u, t; y(t)), \quad (3.51)$$

donde el subíndice ν indica las componentes del vector u . La ecuación (3.51) describe un flujo en el espacio u . La densidad de este flujo varía de acuerdo con

$$\frac{\partial \varrho(u, t)}{\partial t} = - \sum_\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \{F_\nu(u, t; y(t)) \varrho\}, \quad (3.52)$$

que es la ecuación de continuidad, $\dot{\varrho} = -\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v})$, escrita para un número arbitrario de dimensiones. Si ahora se permite a $y(t)$ tomar todas las rea

lizaciones $Y(t)$, con sus probabilidades correspondientes, la ecuación (3.52) se convierte en una ecuación diferencial lineal estocástica para $\varrho(u, t)$.

La ecuación (3.52) tiene la misma forma general que (3.33) si se toma a ϱ como la cantidad análoga a u en (3.33). El operador $\sum(\partial/\partial u_\nu)F_\nu$ es el análogo de la matriz \mathbf{A} . Formalmente, esta es la razón por la que se puede aplicar el método anterior para obtener una ecuación aproximada de $\langle\varrho(u, t)\rangle$ dado $\varrho(u, 0)$.

Para una realización determinada de $y(t)$, $\varrho(u, t) = \delta(u - a^t)$, donde a^t es la solución para esa realización. Además, recordando la transformación de variables,

$$P_Y(y) = \int \delta[f(x) - y]P_X(x) \equiv \langle\delta[f(x) - y]\rangle \quad (3.53)$$

se obtiene que

$$\langle\varrho(u, t)\rangle = \langle\delta(u - a^t)\rangle = P(u, t), \quad (3.54)$$

donde $P(u, t)$ es la función de distribución de u . Así, al obtener una ecuación para $\langle\varrho(u, t)\rangle$ se obtiene la ecuación diferencial para la función de distribución.

En conclusión, para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma (3.51), se debe convertir ésta en una ecuación lineal equivalente de la forma (3.52). Después, puede emplearse el método descrito anteriormente para ecuaciones lineales y así obtener una ecuación diferencial aproximada para $\langle\varrho(u, t)\rangle = P(u, t)$.

Capítulo 4

Aplicación del Método de van Kampen

En este capítulo aplicaremos el método de van Kampen para obtener una solución aproximada de la ecuación estocástica de amplitud (3.31) con lo cual obtendremos una ecuación de evolución determinista para el primer momento de la componente y del campo director, también obtendremos la ecuación para la distribución de probabilidad a partir de la cual obtendremos la ecuación de evolución determinista para el segundo momento.

4.1. Solución aproximada de la ecuación estocástica de amplitud

Para resolver la ecuación (3.31) utilizaremos el método descrito en la sección (3.5.2). Así obtendremos la ecuación de evolución para el primer momento de la distribución asociada con n_{qz} .

Para aplicar dicho método, expresamos (3.31) de la siguiente forma,

$$\frac{dn_{qz}(t)}{dt} = \{Q^{(0)} + \alpha Q^{(1)}(t)\}n_{qz}(t) + f_0 \quad (4.1)$$

donde

$$Q^{(0)} = -\frac{\pi^2}{\ell^2}A \equiv T, \quad (4.2)$$

$$Q^{(1)}(t) = B\zeta(t). \quad (4.3)$$

van Kampen muestra que la ecuación para $\langle n_{q_z}(t) \rangle$ esta dada por la ecuación (3.50). Tomando en cuenta que para este caso $Q^{(0)}$ conmuta con $Q^{(1)}(t)$ y que $f_1(t) = 0$, dicha ecuación se reduce a,

$$\begin{aligned} \frac{d \langle n_{q_z}(t) \rangle}{dt} = & \left[Q^{(0)} + \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle Q^{(1)}(t) Q^{(1)}(t - \tau) \rangle \right] \langle n_{q_z}(t) \rangle \\ & + \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle Q^{(1)}(t) Q^{(1)}(t - \tau) \rangle \frac{1 - e^{\tau Q^{(0)}}}{Q^{(0)}} f_0 + f_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A continuación evaluaremos explícitamente la expresión anterior. Usando (4.2-4.3) y (3.29) se tiene

$$\langle Q^{(1)}(t) Q^{(1)}(t - \tau) \rangle = B^2 \langle \zeta(t) \zeta(t - \tau) \rangle, \quad (4.5)$$

$$\frac{1 - e^{\tau Q^{(0)}}}{Q^{(0)}} f_0 = \frac{\alpha^2 B^2 f_0}{T} \langle \zeta(t) \zeta(t - \tau) \rangle (1 - e^{\tau T}). \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.5-4.6) y (4.2) en (4.4) se obtiene la siguiente ecuación de evolución para el primer momento de la amplitud $n_{q_z}(t)$,

$$\frac{d}{dt} \langle n_{q_z}(t) \rangle = [T + \alpha^2 B^2 C_0(t)] \langle n_{q_z}(t) \rangle + \frac{\alpha^2 B^2 f_0}{T} C_1(t) + f_0, \quad (4.7)$$

donde

$$C_0(t) = \int_0^\infty d\tau \langle \zeta(t) \zeta(t - \tau) \rangle, \quad (4.8)$$

$$C_1(t) = \int_0^\infty d\tau \langle \zeta(t) \zeta(t - \tau) \rangle (1 - e^{\tau T}). \quad (4.9)$$

Cabe mencionar que la expresión (4.7) es válida para un ruido arbitrario y la única propiedad que se requiere de este es su función de correlación a través de C_0 y C_1 .

4.2. Ecuación para la distribución de probabilidad $P(n_{q_z}, t)$

El problema de obtener la ecuación de evolución para el segundo momento de n_{q_z} aplicando directamente el método de van Kampen es complicado.

Para resolver este problema es más conveniente obtener la ecuación para la función de distribución $P(n_{q_z}, t)$ y a partir de esta obtener la ecuación para $\langle n_{q_z}^2 \rangle$.

Para todas las realizaciones del ruido en la intensidad del campo eléctrico, $\zeta(t)$, la ecuación estocástica (4.1), describe un flujo de trayectorias en el espacio n_{q_z} cuya densidad, $Q(n_{q_z}, t)$, satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial Q(n_{q_z}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}(\dot{n}_{q_z} Q(n_{q_z}, t)). \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.1) en (4.10) se obtiene,

$$\frac{\partial Q(n_{q_z}, t)}{\partial t} = \{A^{(0)} + \alpha A^{(1)}(t)\}Q(n_{q_z}, t), \quad (4.11)$$

donde identificamos los operadores

$$A^{(0)} = -T - (Tn_{q_z} + f_0)\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}, \quad (4.12)$$

$$A^{(1)}(t) = -B\zeta(t)(1 + n_{q_z}\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}). \quad (4.13)$$

Ahora aplicaremos el método de van Kampen a la ecuación (4.11). Utilizando (3.45) se obtiene la siguiente ecuación para $\langle Q(n_{q_z}, t) \rangle$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Q(n_{q_z}, t) \rangle = \{A^{(0)} + \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle A^{(1)}(t)e^{\tau A^{(0)}} A^{(1)}(t-\tau) \rangle e^{-\tau A^{(0)}}\} \langle Q(n_{q_z}, t) \rangle. \quad (4.14)$$

Usando el lema (3.54), se puede identificar

$$\langle Q(n_{q_z}, t) \rangle = P(n_{q_z}, t), \quad (4.15)$$

en donde $P(n_{q_z}, t)$ es la distribución de probabilidad de n_{q_z} . Con la identificación anterior en (4.14), la ecuación de evolución para $P(n_{q_z}, t)$ es la siguiente,

$$\frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial t} = \{A^{(0)} + \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle A^{(1)}(t)e^{\tau A^{(0)}} A^{(1)}(t-\tau) \rangle e^{-\tau A^{(0)}}\} P(n_{q_z}, t). \quad (4.16)$$

Ahora es necesario evaluar la acción del operador $e^{-\tau A^{(0)}}$ sobre $P(n_{q_z}, t)$,

$$e^{-\tau A^{(0)}} P(n_{q_z}, t) = e^{\tau T} e^{\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}} P(n_{q_z}, t) \quad (4.17)$$

donde $\Lambda(n_{q_z}) = \tau(Tn_{q_z} + f_0)$. Desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto (n_{q_z}, t) la exponencial del lado derecho de la ecuación anterior, se tiene

$$e^{\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}P(n_{q_z}, t) = P(n_{q_z}, t) + \Lambda(n_{q_z})\frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} + \frac{1}{2!}\Lambda^2(n_{q_z})\frac{\partial^2 P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}^2} + \dots \quad (4.18)$$

Nótese que la expresión anterior es el desarrollo en serie de Taylor de $P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t)$ alrededor de (n_{q_z}, t) , es decir

$$e^{\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}P(n_{q_z}, t) = P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t). \quad (4.19)$$

Sustituyendo (4.19) en (4.17) se obtiene,

$$e^{-\tau A^{(0)}}P(n_{q_z}, t) = e^{\tau T}P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t), \quad (4.20)$$

por lo tanto, la acción del operador $e^{-\tau A^{(0)}}$ sobre $P(n_{q_z}, t)$, es un corrimiento en el argumento n_{q_z} de P por la cantidad $\Lambda(n_{q_z})$, multiplicada por el factor de escalamiento $e^{\tau T}$.

Ahora aplicaremos $A^{(1)}(t - \tau)$ sobre el resultado anterior,

$$A^{(1)}(t - \tau)e^{-\tau A^{(0)}}P(n_{q_z}, t) = -B\zeta(t - \tau)e^{\tau T}\left(1 + n_{q_z}\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}\right)P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t). \quad (4.21)$$

Al aplicar $e^{\tau A^{(0)}}$ sobre (4.21) se obtiene

$$e^{\tau A^{(0)}}A^{(1)}(t - \tau)e^{-\tau A^{(0)}}P(n_{q_z}, t) = -B\zeta(t - \tau)\left[e^{-\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t) + e^{-\tau\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}n_{q_z}\frac{\partial P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t)}{\partial n_{q_z}}\right]. \quad (4.22)$$

Para calcular el efecto del operador $e^{-\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}$ sobre $P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t)$, se realiza un desarrollo en serie de Taylor del operador, de manera análoga al desarrollo anterior, ecuación (4.18). Es decir,

$$e^{-\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t) = P(n_{q_z}, t). \quad (4.23)$$

la acción del operador $e^{-\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}}$ regresa el corrimiento en el argumento n_{q_z} de P .

Análogamente, para el segundo término del lado derecho de (4.22), se tiene

$$e^{-\tau\Lambda(n_{q_z})\frac{\partial}{\partial n_{q_z}}} n_{q_z} \frac{\partial P(n_{q_z} + \Lambda(n_{q_z}), t)}{\partial n_{q_z}} = e^{-\tau f_0 \frac{\partial}{\partial n_{q_z}}} n_{q_z} \frac{\partial P(n_{q_z} + \tau f_0, t)}{\partial n_{q_z}}, \quad (4.24)$$

y

$$e^{-\tau f_0 \frac{\partial}{\partial n_{q_z}}} n_{q_z} \frac{\partial P(n_{q_z} + \tau f_0, t)}{\partial n_{q_z}} = (n_{q_z} - \tau f_0) \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}}. \quad (4.25)$$

Sustituyendo (4.25) y (4.23) en (4.22) se obtiene,

$$e^{\tau A^{(0)}} A^{(1)}(t - \tau) e^{-\tau A^{(0)}} P(n_{q_z}, t) = -B\zeta(t - \tau) \left[P(n_{q_z}, t) \right. \\ \left. + n_{q_z} \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} - \tau f_0 \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} \right]. \quad (4.26)$$

Ahora, la acción de $A^{(1)}(t)$ sobre (4.26), es

$$A^{(1)}(t) e^{\tau A^{(0)}} A^{(1)}(t - \tau) e^{-\tau A^{(0)}} P(n_{q_z}, t) = B^2 \zeta(t) \zeta(t - \tau) \left[P(n_{q_z}, t) \right. \\ \left. + 3n_{q_z} \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} - \tau f_0 \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} \right. \\ \left. - \tau f_0 n_{q_z} \frac{\partial^2 P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}^2} + n_{q_z}^2 \frac{\partial^2 P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}^2} \right]. \quad (4.27)$$

Si ahora se sustituyen (4.12) y (4.27) en (4.16) se obtiene, finalmente, la ecuación de evolución para la función de distribución de probabilidad $P(n_{q_z}, t)$,

$$\frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial t} = -TP(n_{q_z}, t) - (Tn_{q_z} + f_0) \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} \\ + \alpha^2 B^2 \left[c_0(t) \left(P(n_{q_z}, t) + 3n_{q_z} \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} + n_{q_z}^2 \frac{\partial^2 P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}^2} \right) \right. \\ \left. - f_0 C_3(t) \left(\frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}} + n_{q_z} \frac{\partial^2 P(n_{q_z}, t)}{\partial n_{q_z}^2} \right) \right], \quad (4.28)$$

donde

$$C_3 = \int_0^\infty d\tau \tau < \zeta(t)\zeta(t-\tau) >. \quad (4.29)$$

La ecuación (4.28) expresada en la forma canónica de la ecuación de Fokker-Planck resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n_{q_z}, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial n_{q_z}} \left[(T + \alpha^2 B^2 C_0(t))n_{q_z} + (1 - \alpha^2 B^2 C_3(t))f_0 \right] P(n_{q_z}, t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n_{q_z}^2} \left[2\alpha^2 B^2 (C_0(t)n_{q_z}^2 - f_0 C_3(t)n_{q_z}) \right] P(n_{q_z}, t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La ecuación anterior es una ecuación de Fokker-Planck no lineal con coeficientes dependientes del tiempo.

4.3. Momentos de la distribución $P(n_{q_z}, t)$

Como una primera aproximación, en vez de resolver (4.30) en forma exacta, calcularemos los momentos de n_{q_z} . Para obtener la ecuación para el primer momento, se multiplica (4.28) por n_{q_z} y se integra sobre todos los valores de n_{q_z} , lo cual da como resultado la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt} < n_{q_z}(t) > = [T + \alpha^2 B^2 C_0(t)] < n_{q_z}(t) > - \alpha^2 B^2 f_0 C_3(t) + f_0. \quad (4.31)$$

Comparando la ecuación (4.7) para $< n_{q_z}(t) >$, que se obtuvo aplicando directamente el método de van Kampen a la ecuación estocástica para la amplitud (4.1), con la ecuación (4.31) para $< n_{q_z}(t) >$ obtenida a partir de la ecuación de Fokker-Planck (4.28), observamos una diferencia: el tercer término de (4.31) es diferente al tercer término de (4.7), pero estos términos coincidirán si se muestra que

$$\frac{C_1(t)}{T} = \frac{1}{T} \int_0^\infty d\tau < \zeta(t)\zeta(t-\tau) > (1 - e^{-\tau T}) \quad (4.32)$$

Para mostrar esto, recuérdese que en el método de van Kampen, la condición para que la integración anterior sobre τ se extienda a ∞ es que $\tau > \tau_c$, donde τ_c es el tiempo de correlación $\tau_c \ll 1$. Si consideramos

$\tau_c < \tau \ll 1$, es decir, si consideramos τ mayor que τ_c , pero lo suficientemente pequeño para poder considerar sólo términos de primer orden en τ , de la exponencial que aparece en la ecuación (4.32), se tiene

$$\frac{C_1(t)}{T} = - \int_0^\infty d\tau \tau \langle \zeta(t)\zeta(t-\tau) \rangle = -C_3(t). \quad (4.33)$$

De esta forma, se obtiene que las ecuaciones (4.7) y (4.31) coinciden. Esto muestra la consistencia de ambos métodos bajo la hipótesis anterior.

De igual manera, la ecuación para el segundo momento se obtiene multiplicando (4.28) por $n_{q_z}^2$ e integrando sobre toda la distribución n_{q_z} , haciendo esto se obtiene la siguiente ecuación para $\langle n_{q_z}^2 \rangle$

$$\frac{d \langle n_{q_z}^2 \rangle}{dt} = 2[T + 2\alpha^2 B^2 C_0(t)] \langle n_{q_z}^2 \rangle + 2[1 - 2\alpha^2 B^2 C_3(t)] f_0 \langle n_{q_z} \rangle, \quad (4.34)$$

la cual queda expresada en términos del primer momento. En la siguiente sección resolveremos las ecuaciones (4.31) y (4.34) para los casos en que las fluctuaciones se modelan con ruido blanco y ruido de color.

4.4. Ruido blanco

Nótese que nuestro análisis anterior es válido para un ruido arbitrario. De hecho, la única propiedad del ruido que aparece explícitamente es su función de correlación $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle$. Consideraremos primero el caso de ruido blanco, que puede modelar como un proceso markofiano con promedio cero $\langle \zeta(t) \rangle = 0$, tiempo de correlación nulo y función de correlación dada por

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = D\delta(t-t'), \quad (4.35)$$

donde D es la intensidad del ruido.

Usando (4.35), se tiene

$$C_0(t) = D, \quad C_3(t) = 0. \quad (4.36)$$

Con lo que la ecuación (4.31) se reduce a

$$\frac{d \langle n_{q_z}(t) \rangle}{dt} = g_1 \langle n_{q_z}(t) \rangle + f_0, \quad (4.37)$$

donde

$$g_1 = T + x \quad (4.38)$$

con $x = \alpha^2 B^2 D$. Resolviendo (4.37) para la condición inicial, $\langle n_{q_z}(t=0) \rangle = 0$, obtenemos la siguiente expresión para el primer momento de la componente y del campo director

$$\langle n_{q_z}(t) \rangle = \frac{f_0}{g_1} [e^{g_1 t} - 1]. \quad (4.39)$$

Nótese que los efectos hidrodinámicos generados por el gradiente de presión en la reorientación, aparecen a través de la f_0 definida por

$$f_0 = \frac{(\lambda + 1)\pi l}{8\nu_3 L} |\nabla p|. \quad (4.40)$$

A través de esta ecuación observamos que si no se aplica el gradiente de presión, f_0 se anula y por tanto también el primer momento de $\langle n_{q_0} \rangle$, de manera que la contribución del gradiente de presión aplicado es determinante para la reorientación del director.

Para obtener el segundo momento, sustituimos (4.39) y (4.36) en (4.34), haciendo esto, se obtiene la siguiente ecuación para $\langle n_{q_z}^2(t) \rangle$

$$\frac{d \langle n_{q_z}^2(t) \rangle}{dt} = g_2 \langle n_{q_z}^2 \rangle + \frac{2f_0^2}{g_1} [e^{g_1 t} - 1]. \quad (4.41)$$

donde f_0 y g_1 se definieron anteriormente y g_2 se define de la siguiente forma

$$g_2 = T + 2x. \quad (4.42)$$

Resolviendo (4.41) para la condición inicial $\langle n_{q_z}^2(t=0) \rangle = \langle n_{q_0}^2 \rangle$, obtenemos la siguiente expresión para el segundo momento

$$\langle n_{q_z}^2(t) \rangle = \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2g_2 t} + 2f_0^2 \left[\frac{1}{2g_1 g_2} + \frac{e^{g_1 t}}{g_1(g_1 - 2g_2)} - \frac{e^{2g_2 t}}{2g_2(g_1 - 2g_2)} \right]. \quad (4.43)$$

Sustituyendo g_1 y g_2 en (4.43) obtenemos la siguiente expresión para el segundo momento en términos de x

$$\begin{aligned} \langle n_{q_z}^2(t) \rangle = & \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2(T+2x)t} + 2f_0^2 \left[\frac{1}{2(T+x)(T+2x)} \right. \\ & \left. - \frac{e^{(T+x)t}}{(T+x)(T+3x)} + \frac{e^{2(T+2x)t}}{2(T+2x)(T+3x)} \right]. \quad (4.44) \end{aligned}$$

4.5. Ruido de color

Ahora resolveremos las ecuaciones (4.31) y (4.34) para el caso de ruido de Ornstein-Uhlenbeck con promedio cero $\langle \zeta(t) \rangle = 0$ y correlación

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = He^{-\gamma(t-t')}, \quad (4.45)$$

donde H es la intensidad del ruido y γ el inverso del tiempo de correlación.

Usando (4.45), se tiene

$$C_0(t) = \frac{H}{\gamma}, \quad C_3(t) = \frac{H}{\gamma^2}, \quad (4.46)$$

con lo que la ecuación para el primer momento (4.31) toma la siguiente forma

$$\frac{d\langle n_{q_z}(t) \rangle}{dt} = h_1 \langle n_{q_z}(t) \rangle + \left(1 - \frac{\alpha^2 B^2 H}{\gamma^2}\right) f_0. \quad (4.47)$$

Resolviendo (4.47) para la condición inicial, $\langle n_{q_z}(t=0) \rangle = 0$, se obtiene el primer momento de la componente y del campo director en el caso de ruido de color

$$\langle n_{q_z}(t) \rangle = f_0 h_2 [e^{h_1 t} - 1], \quad (4.48)$$

donde

$$h_1 = T + \frac{\alpha^2 B^2 H}{\gamma}, \quad (4.49)$$

$$h_2 = \frac{(\gamma^2 - \alpha^2 B^2 H)}{\gamma(\gamma T - \alpha^2 B^2 H)}. \quad (4.50)$$

Análogamente para obtener la ecuación de evolución para el segundo momento sustituimos (4.48) y (4.46) en (4.34), se tiene

$$\frac{d}{dt} \langle n_{q_z}^2(t) \rangle = h_3 \langle n_{q_z}^2(t) \rangle + h_4 [e^{h_1 t} - 1], \quad (4.51)$$

donde

$$h_3 = 2\left[T + 2\frac{\alpha^2 B^2 H}{\gamma}\right], \quad (4.52)$$

$$h_4 = 2\left[1 - 2\frac{\alpha^2 B^2 H}{\gamma^2}\right] f_0^2 h_2. \quad (4.53)$$

Resolviendo (4.51) para la condición inicial, $\langle n_{q_z}^2(0) \rangle = \langle n_{q_0}^2 \rangle$, obtenemos el segundo momento de la componente y del campo director, en el caso de ruido de color

$$\langle n_{q_z}^2(t) \rangle = h_4 \left(\frac{e^{h_1 t}}{h_1 - h_3} - \frac{h_1 e^{h_3 t}}{h_3(h_1 - h_3)} + \frac{1}{h_3} \right) + \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{h_3 t}. \quad (4.54)$$

Sustituyendo (4.49-4.50) y (4.52-4.53) en (4.54), obtenemos la siguiente expresión para el egundo momento

$$\begin{aligned} \langle n_{q_z}^2(t) \rangle = & \frac{2f_0^2 (\gamma^2 - 2\alpha^2 B^2 H)(\gamma^2 - \alpha^2 B^2 H)}{\gamma^2 (\gamma T - \alpha^2 B^2 H)(T + 3\alpha^2 B^2 H)} \left[\frac{\gamma T + 3\alpha^2 B^2 H}{2(\gamma T + 2\alpha^2 B^2 H)} \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma T + \alpha^2 B^2 H)e^{(T + \frac{2\alpha^2 B^2 H}{\gamma})t}}{2(\gamma T + 2\alpha^2 B^2 H)} - e^{(T + \frac{\alpha^2 B^2 H}{\gamma})t} \right] + \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2(T + 2\frac{\alpha^2 B^2 H}{\gamma})t}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Capítulo 5

Ruido Externo No Lineal

En este capítulo describiremos un método desarrollado por San Miguel M. y Sancho J. M. para tratar problemas con ruido externo cuadrático [12]. El método proporciona una ecuación de Fokker-Planck asociada a cierta ecuación diferencial estocástica no lineal (cuadrática) en donde las fluctuaciones entran en forma cuadrática.

Así se construye una EFP asociada a las ecuaciones nematodinámicas, a partir de la cual, se obtienen los momentos de distribución necesarios para el cálculo de la birrefringencia inducida en cristales líquidos.

5.1. Ecuación de Fokker-Planck (EFP)

El método tiene la finalidad de obtener una ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad $P(q, t)$ de un proceso estocástico $q(t)$ definido por la siguiente ecuación

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q) + \nu^2 g(q), \quad (5.1)$$

en donde $f(q)$ y $g(q)$ son funciones arbitrarias de q y ν es un parametro de control que fluctúa con estadística gaussiana y valor medio $\bar{\nu}$:

$$\nu = \bar{\nu} + \zeta(t). \quad (5.2)$$

Asumiendo también que $\zeta(t)$ es un proceso de Markov estacionario. El teorema de Doob [33] asegura que bajo las condiciones anteriores $\zeta(t)$ es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con promedio cero y correlación

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \frac{D_c}{\tau} \exp\left\{-\frac{|t-t'|}{\tau}\right\}. \quad (5.3)$$

Sustituyendo (5.2) en (5.1) se obtiene una ecuación diferencial estocástica en la cual el ruido $\zeta(t)$ entra en forma no lineal

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q) + \bar{\nu}^2 g(q) + 2\bar{\nu}g(q)\zeta(t) + g(q)\zeta^2(t). \quad (5.4)$$

Una vez que ha sido planteada esta ecuación y realizadas las suposiciones sobre $\zeta(t)$ se procede a asociarle una ecuación para la densidad de probabilidad $P(q, t)$ (EFP). Esta ecuación se obtiene para el caso no lineal haciendo aproximaciones y suposiciones concretas sobre los parámetros del ruido D_c y τ , como se verá a continuación.

Como primera aproximación a la EFP se reescribe la ecuación (5.4) de tal forma que el ruido $\zeta(t)$ que aparece en esta ecuación se sustituya por otro ruido $\eta(t)$ el cual entra en forma lineal en dicha ecuación. Para este efecto se reescribe el valor de ν^2 ;

$$\nu^2 = \bar{\nu}^2 + 2\bar{\nu}\zeta(t) + \zeta^2(t), \quad (5.5)$$

como un valor medio que se calcula con la ecuación (5.2) y la correlación de $\zeta(t)$, ecuación (5.3),

$$\langle \nu^2 \rangle = \bar{\nu} + \frac{D_c}{\gamma}, \quad (5.6)$$

más una fluctuación $\eta(t)$, esto es,

$$\nu^2 = \langle \nu^2 \rangle + \eta(t). \quad (5.7)$$

La fluctuación $\eta(t)$, es una transformación no lineal del proceso gaussiano $\zeta(t)$,

$$\eta(t) = \zeta^2(t) + 2\bar{\nu}\zeta(t) - \frac{D_c}{\tau}. \quad (5.8)$$

Este proceso deja de ser Gaussiano, su valor medio es cero y la función de correlación se obtiene utilizando la ecuación (5.3) y las propiedades estadísticas de $\zeta(t)$

$$\langle \zeta^2(t)\zeta^2(t') \rangle = \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle^2 + 2 \langle \zeta^2(t) \rangle \langle \zeta^2(t') \rangle, \quad (5.9)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta^2(t') \rangle = 0, \quad (5.10)$$

y así se obtiene

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{4\bar{\nu}^2 D_c}{\tau} \exp\left\{-\frac{|t-t'|}{\tau}\right\} + 2\left(\frac{D_c}{\tau}\right)^2 \exp\{-2|t-t'|\}. \quad (5.11)$$

Si el ruido externo fuera modelado por un ruido blanco, entonces en la ecuación anterior aparecería el cuadrado de la delta de Dirac y en la ecuación (5.7) $\langle \nu^2 \rangle$ tendería a infinito.

Hasta el momento solamente se ha reescrito el valor de ν^2 como un valor medio $\langle \nu^2 \rangle$ más una fluctuación, sin embargo, aunque esta separación es siempre posible como una primera aproximación, el valor medio de $\langle \nu^2 \rangle$ como se ve en (5.6) depende de las características del ruido, por lo que al analizar los resultados en términos de los parámetros del ruido, no puede tomarse a $\langle \nu^2 \rangle$ como una cantidad fija si ν está controlada por los parámetros fluctuantes.

Considerando lo anterior, se pueden efectuar algunas aproximaciones sobre $\eta(t)$. La primera consiste en despreciar los momentos de distribución de esta cantidad mayores que dos, de tal forma que η se aproxime a un proceso Gaussiano. La segunda consiste en considerar al tiempo de correlación τ muy pequeño, por lo que η se aproxima a un proceso de ruido blanco. Con estas aproximaciones la función de correlación de η se reduce a

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle \cong 2(4\bar{\nu}^2 D_c + \frac{D_c^2}{\tau})\delta(t-t'). \quad (5.12)$$

Esta expresión se obtiene después de tomar el límite cuando $\tau \rightarrow 0$ por lo que las exponenciales que aparecen en (5.11) se reducen a deltas de Dirac. El coeficiente que multiplica a la delta es la intensidad efectiva, que está dada por:

$$D'_c = \int_0^\infty dt' \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 4\bar{\nu}^2 D_c + \frac{D_c^2}{\tau}. \quad (5.13)$$

Una vez que se han hecho estas aproximaciones, el proceso queda completamente definido cuando se sustituye la ecuación (5.7) en (5.1), obteniéndose la siguiente ecuación diferencial estocástica, en donde el ruido aparece en forma lineal,

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q) + (\bar{\nu}^2 + \frac{D_c}{\tau})g(q) + g(q)\eta(t). \quad (5.14)$$

Por lo tanto, si aceptamos la suposición de que $\eta(t)$ puede modelarse en forma aproximada como ruido blanco Gaussiano, la EFP asociada a (5.14) en la interpretación de Stratonovich [11] es la siguiente

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} \left(f(q) + \bar{v}^2 + \frac{D_c}{\tau} \right) g(q) P(q, t) + D'_c \frac{\partial}{\partial q} g(q) \frac{\partial}{\partial q} g(q) P(q, t). \quad (5.15)$$

Ahora realizaremos una deducción más sistemática de (5.15) en la cual obtendremos la magnitud de las primeras correcciones de la deducción anterior.

Para derivar la ecuación para $P(q, t)$ partimos de la ecuación de Liouville [34, 35] asociada con (5.4). Esto es, si se considera que cada realización de $\zeta(t)$ genera un sistema y, por lo tanto, todo el conjunto de realizaciones constituye un ensamble de sistemas; o bien, una infinidad de trayectorias posibles $q(t)$ en el espacio q , que se distinguen solamente por las condiciones iniciales, entonces es posible caracterizar dicho ensamble por una densidad de probabilidad $\rho(q, t) = \delta(q(t) - q)$, que obedece la siguiente ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}(t) \rho(q, t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial q} \left[(f(q) + \bar{v}^2 g(q) + 2\bar{v}g(q)\zeta(t) + g(q)\zeta^2(t)) P(q, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

La densidad de probabilidad $P(q, t)$ es el promedio sobre todas las realizaciones de $\zeta(t)$ de la densidad $\rho(t)$ [34]. Tomando dicho promedio sobre la ecuación (5.17) tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(q, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q} (f(q) + \bar{v}^2 g(q)) P(q, t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial q} 2\bar{v}g(q) \langle \zeta(t) \delta(q(t) - q) \rangle - \frac{\partial}{\partial q} g(q) \langle \zeta^2 \delta(q(t) - q) \rangle, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde se ha usado el hecho de que $\rho(q, t)$ es el promedio sobre la distribución inicial $\delta(q(t) - q)$. Aquí q es un punto en el q -espacio y $q(t)$ es una solución formal de (5.4).

La ecuación (5.17) es una ecuación exacta pero no cerrada para $P(q, t)$. Para proseguir necesitamos saber las propiedades estadísticas de $\zeta(t)$. Las funcionales del ruido que aparecen en (5.17), se evalúan utilizando el teorema de Novikov [36]. Dicho teorema establece que el promedio de una funcional $\Phi[\zeta]$ de ζ esta dado por

$$\langle \zeta(t)\Phi[\zeta] \rangle = \int dt' \gamma(t, t') \left\langle \frac{\delta\Phi[\zeta]}{\delta(t')} \right\rangle \quad (5.18)$$

donde $\gamma(t, t')$ es la función de correlación de $\zeta(t)$. Considerando a $\delta(q(t) - q)$ como una funcional de $\zeta(t)$, para el segundo término del lado derecho de (5.17) se tiene

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t)\delta(q(t) - q) \rangle &= \int dt' \gamma(t, t') \left\langle \frac{\delta[\delta(q(t) - q)]}{\delta\zeta(t')} \right\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial q} \int dt' \gamma(t, t') \langle \delta(q(t) - q) \frac{\delta q(t)}{\delta\zeta(t')} \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

De forma análoga para el tercer término, se utiliza el teorema de Novikov ecuación (5.18) y su generalización

$$\langle \zeta^2(t)\Phi[\zeta] \rangle = \langle \zeta^2 \rangle \langle \Phi[\zeta] \rangle + \int ds \int ds' \gamma(t, s)\gamma(t, s') \left\langle \frac{\partial^2 \Phi[\zeta]}{\partial\zeta(t)\partial\zeta(s')} \right\rangle. \quad (5.20)$$

La funcional $\Phi[\zeta]$ de $\zeta(t)$ se toma como: $\delta(q(t) - q)$,

$$\left\langle \zeta^2(t)\delta(q(t) - q) \right\rangle = \frac{D_c}{\tau} P(q, t) + \int ds ds' \left\langle \frac{\delta^2}{\delta\zeta(s')\delta\zeta(s)} \delta(q(t, [\zeta]) - q) \right\rangle, \quad (5.21)$$

en donde

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta^2}{\delta\zeta(s')\delta\zeta(s)} \delta(q(t, [\zeta]) - q) \right\rangle &= -\frac{\partial}{\partial q} \left\langle \frac{\delta^2 q(t)}{\delta\zeta(s)\zeta(s')} \delta(q(t) - q) \right\rangle \\ &+ \frac{\partial}{\partial q} \left\langle \frac{\delta q(t)}{\delta\zeta(s')} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\delta q(t)}{\delta\zeta(s)} \delta(q(t) - q) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Sustituyendo (5.19) y (5.21) en (5.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(q, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q} (f(q) + (\bar{\nu}^2 + \frac{D_c}{\tau})g(q))P(q, t) \\ &+ 2\bar{\nu} \frac{\partial}{\partial q} g(q) \frac{\partial}{\partial q} \int ds \gamma(t, s) \langle \delta(q(t) - q) \frac{\delta q(t)}{\delta\zeta(s)} \rangle \\ &+ \frac{\partial}{\partial q} g(q) \frac{\partial}{\partial q} \int ds \int ds' \gamma(t, s)\gamma(t, s') \left\langle \frac{\delta^2 q(t)}{\delta\zeta(s)\zeta(s')} \delta(q(t) - q) \right\rangle \\ &- \frac{\partial}{\partial q} g(q) \int ds \int ds' \gamma(t, s)\gamma(t, s') \frac{\partial}{\partial q} \left\langle \frac{\delta q(t)}{\delta\zeta(s')} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\delta q(t)}{\delta\zeta(s)} \delta(q(t) - q) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nótese que el último término de esta ecuación contiene una derivada de tercer orden para $P(q, t)$, por lo que se deben efectuar aproximaciones si se quiere obtener una ecuación de Fokker-Planck. Esta aproximación considera a τ como un parámetro muy pequeño, de tal forma que la función de correlación $\gamma(t, s')$ se expande en una serie de potencias de τ . Ahora se deben evaluar las derivadas funcionales de $q(t)$ a tiempos iguales, ya que bajo esta aproximación estos términos, también conocidos como funciones de respuesta al ruido externo, aportan la mayor contribución a las integrales de la ecuación (5.23). Estas funciones de respuesta se calculan en el apéndice de la referencia [12], su cálculo se basa en la solución formal de la ecuación (5.4) y resulta ser

$$\frac{\delta q(t)}{\delta \zeta(t)} \Big|_{s \approx t} = 2\bar{\nu}g(q(t)) + 2g(q(t))\zeta(t), \quad (5.24)$$

$$\frac{\delta^2 q(t)}{\delta \zeta(s)\delta \zeta(s')} \Big|_{s, s' \approx t} = 2g(q(t))\delta(s-s') + 4g(q(t))\frac{\partial g(q(t))}{\partial q(t)}(\bar{\nu}^2 + 2\bar{\nu}\zeta(t) + \zeta^2(t)). \quad (5.25)$$

Estas cantidades dependen explícitamente de $\zeta(t)$, este hecho implica que al efectuar la sustitución de (5.24) y (5.25) en (5.23), se debe aplicar sucesivamente el teorema de Novikov y su generalización (ecuaciones (5.18) y (5.20)), obteniéndose una serie infinita de términos que contiene derivadas de todos los órdenes con respecto a q . Esto implica la aparición de una cantidad infinita de términos de orden cero en τ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(q, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q}(f(q) + (\bar{\nu}^2 + \frac{D_c}{\tau})g(q))P(q, t) \\ &+ 4\bar{\nu}^2 \frac{\partial}{\partial q}g(q)\frac{\partial}{\partial q}g(q) \int_0^t ds \gamma(t, s)P(q, t) \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial q}g(q)\frac{\partial}{\partial q} \int_0^t ds \int_0^t ds' \gamma(t, s)\gamma(t, s')\delta(s-s')P(q, t) + O(D_c\tau, \frac{D_c^3}{\tau}, D_c^2). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para poder truncar esta serie se debe considerar que el otro parámetro D_c sea pequeño, de manera que la razón $\frac{D_c}{\tau}$ sea finita. Bajo estas condiciones el término de orden $\frac{D_c}{\tau}$ en la ecuación (5.23) será el que aporte la mayor contribución a los efectos del ruido. Las correcciones a éste término son del orden de $\frac{D_c}{\tau} \times \tau = D_c$ y $\frac{D_c}{\tau} \times D_c = \frac{D_c^2}{\tau}$. Estas contribuciones son aportadas

por los primeros términos de las ecuaciones (5.24) y (5.25), respectivamente, cuando se sustituyen en (5.23). Los términos restantes aportan correcciones de los siguientes ordenes

$$\left(\frac{D_c}{\tau}\right) \times \tau^n \quad n > 1, \quad (5.27)$$

$$\left(\frac{D_c}{\tau}\right) \times D^n \quad n > 1, \quad (5.28)$$

$$\left(\frac{D_c}{\tau}\right) \times D^n \tau^m \quad n, m > 1. \quad (5.29)$$

Extendiendo las integrales de t hasta infinito en (5.26) y despreciando los términos transitorios de orden $e^{-\frac{t}{\tau}}$, ésta ecuación se reduce a la ecuación (5.15).

5.2. Efectos de ruido no lineal

En esta sección aplicaremos el método de M. San Miguel y J. M. Sancho discutido en la sección anterior al modelo estudiado en esta tesis. Partiendo de la ecuación de amplitud (3.28) y considerando como un segundo caso que la magnitud del eléctrico fluctúa, se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria, estocástica lineal e inhomogénea con ruido cuadrático multiplicativo para la amplitud de la componente y del campo director,

$$\frac{dn_{qz}(t)}{dt} = -\frac{\pi^2}{\bar{\rho}^2} A n_{qz}(t) + f_0 + B(\bar{E} + \zeta(t))^2 n_{qz}(t). \quad (5.30)$$

Comparando (5.30) con (5.1), identificamos

$$q = n_{qz}, \quad f(n_{qz}) = -\frac{\pi^2}{\bar{\rho}^2} A n_{qz}(t) = T n_{qz}(t), \quad \nu = E_y(t) \quad y \quad g(n_{qz}) = B n_{qz}. \quad (5.31)$$

Con el fin de obtener una expresión explícita y analítica de la birrefringencia inducida, ahora obtendremos la ecuación de Fokker-Planck asociada a la ecuación (5.30) y a partir de esta obtendremos las ecuaciones para el primero y segundo momento de n_{qz} . Usando (5.15), (5.30-5.31) se tiene la siguiente ecuación para la distribución de probabilidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = & \left[-\left(T + \frac{BD_c}{\tau}\right) + B^2 D'_c \right] P(q, t) - f_0 \frac{\partial P(q, t)}{\partial n_{q_z}} \\ & + \left[3B^2 D'_c - \left(T + \frac{BD_c}{\tau}\right) \right] n_{q_z} \frac{\partial P(q, t)}{\partial n_{q_z}} + B^2 D'_c n_q^2 \frac{\partial^2 P(q, t)}{\partial n_{q_z}^2}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para obtener la ecuación para el primer momento, se multiplica (5.32) por n_{q_z} por la izquierda y se integra sobre todos los valores de n_{q_z} , haciendo esto se obtiene

$$\frac{d\langle n_{q_z} \rangle}{dt} = L_1 \langle n_{q_z} \rangle + f_0, \quad (5.33)$$

donde L_1 se define como

$$L_1 = T + \frac{BD_c}{\tau} + B^2 D'_c \quad (5.34)$$

con D'_c dada por la ecuación (5.13).

La solución de (5.33) para la condición inicial $\langle n_{q_0} \rangle = 0$ es

$$\langle n_{q_z} \rangle = \frac{f_0}{L_1} (e^{L_1 t} - 1). \quad (5.35)$$

De forma análoga, para obtener la ecuación para el segundo momento, se multiplica (5.32) por $n_{q_z}^2$ por la izquierda y se integra sobre todos los valores de n_{q_z} , con lo que se obtiene

$$\frac{d\langle n_{q_z}^2 \rangle}{dt} = 2L_2 \langle n_{q_z}^2 \rangle + 2f_0 \langle n_{q_z} \rangle \quad (5.36)$$

Sustituyendo (5.35) en (5.36)

$$\frac{d\langle n_{q_z}^2 \rangle}{dt} = 2L_2 \langle n_{q_z}^2 \rangle + \frac{2f_0^2}{L_1} [e^{L_1 t} - 1] \quad (5.37)$$

con

$$L_2 = T + \frac{D_c B}{\tau} + 2B^2 D'_c. \quad (5.38)$$

La solución de (5.37) para la condición inicial $\langle n_{q_z}^2 \rangle = \langle n_{q_0}^2 \rangle$ es la siguiente

$$\langle n_{q_z}^2 \rangle = \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2L_2 t} + 2f_0^2 \left(\frac{1}{2L_1 L_2} + \frac{e^{L_1 t}}{L_1 (L_1 - 2L_2)} - \frac{e^{2L_2 t}}{2L_2 (L_1 - 2L_2)} \right). \quad (5.39)$$

Capítulo 6

Birrefringencia Inducida

Este capítulo se divide en tres partes, en la primera se da una breve introducción sobre la birrefringencia inducida. En la segunda parte se obtienen expresiones para la birrefringencia en el caso de ruido lineal, tanto para ruido blanco como para el ruido de color. En la tercera parte se obtiene la birrefringencia para el caso de ruido cuadrático, considerando ruido de color con tiempo de correlación muy pequeño. Es decir, tomando el límite de ruido blanco.

6.1. Birrefringencia inducida

Este fenómeno es altamente no lineal, se presenta en muchas sustancias cristalinas compuestas por moléculas anisotrópicas y en algunos líquidos no cristalinos cuando sobre ellos actúan campos eléctricos. Básicamente se produce por la alineación de las moléculas en la dirección del campo aplicado, regresando a su configuración inicial cuando el campo aplicado desaparece. Debido a la reorientación de las moléculas de una sustancia cristalina por la aplicación de campos externos, sus propiedades eléctricas y magnéticas cambian, también lo hace la birrefringencia. Este efecto ha sido estudiado desde el punto de vista teórico y experimental en cristales líquidos [37, 38, 39].

Cuando la luz se propaga a través de éstas sustancias, los electrones son impulsados por el campo eléctrico reirradiando ondas secundarias que se combinan en una onda refractada, la cual se desplaza a través del material. La velocidad con que está onda se propaga está determinada entre otras causas, por la diferencia entre la frecuencia del campo y la frecuencia

característica del material. La anisotropía de las fuerzas de enlace entre los electrones se manifiesta en la anisotropía del índice de refracción.

Si la estructura de los cristales es tal que las moléculas anisotrópicas están ordenadas a lo largo de una dirección preferencial (material uniaxial), entonces al incidir una onda electromagnética sobre este medio, ésta se propagará con dos velocidades diferentes; una paralela al eje óptico v_{\parallel} y la otra perpendicular a él, v_{\perp} . Esto da lugar a dos tipos de ondas: ondas ordinarias *o* “esféricas” y ondas extraordinarias *e* o “elipsoidales”. La orientación del campo óptico con respecto al eje óptico determina las velocidades con las que estas ondas se expanden. Para las ondas *o* la velocidad de propagación será v_{\parallel} y el campo electromagnético asociado a estas será normal al eje óptico. En el caso de ondas elipsoidales, *e*, se propagan con una velocidad v_{\perp} y su campo será paralelo al eje óptico. Finalmente, estas ondas se recombinan emergiendo una onda formada por dos ondas con estados de polarización mutuamente ortogonales. Así, los materiales uniaxiales presentan dos índices de refracción: $n_o \equiv c/v_{\perp}$ y $n_e \equiv c/v_{\parallel}$, diferentes. La diferencia entre estos dos índices, $\Delta N = n_o - n_e$, es una medida de su birrefringencia.

En el caso de cristales líquidos este efecto también se observa. Así, en la fase nemática del cristal en la que las moléculas de entrada están orientadas a lo largo de una cierta dirección preferencial presenta una birrefringencia intrínseca igual a $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$, en donde n_{\parallel} y n_{\perp} son los índices de refracción paralelo y perpendicular al vector director \vec{n} .

Cuando la reorientación de las moléculas de un medio anisotrópico es tal que no difiere mucho de la configuración inicial, entonces la mayor contribución a la birrefringencia inducida esta dada por la siguiente expresión [40],

$$\Delta n = \langle n_z^2 \rangle - \langle n_y^2 \rangle . \quad (6.1)$$

6.2. Birrefringencia inducida por ruido lineal y flujo hidrodinámico

Como se dijo anteriormente, uno de los objetivos de este trabajo es el de calcular la birrefringencia inducida por el campo eléctrico alterno aplicado, tomando en cuenta los efectos hidrodinámicos que inevitablemente se producen por efecto de la reorientación, y comparar su valor con la obtenida en ausencia del campo eléctrico aplicado. Es decir, nos interesa comparar cuantitativamente la birrefringencia inducida por el campo externo y el flujo hidrodinámico con la birrefringencia intrínseca. En la aproximación de

ángulos pequeños (6.1) toma la siguiente forma

$$\Delta n = 1 - \langle n_y^2 \rangle \quad (6.2)$$

En el capítulo 4 obtuvimos expresiones analíticas para $\langle n_y^2 \rangle$, tanto para ruido blanco como de color. Dichas expresiones las usaremos para determinar la birrefringencia.

Sustituyendo (4.43) en (6.2) obtenemos una expresión para la birrefringencia inducida por ruido blanco en la intensidad del campo eléctrico y el flujo hidrodinámico

$$\Delta n = 1 - 2f_0^2 \left[\frac{1}{2(T+x)(T+2x)} - \frac{e^{(T+x)t}}{(T+x)(T+3x)} + \frac{e^{2(T+2x)t}}{2(T+2x)(T+3x)} \right] - \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2(T+2x)t}. \quad (6.3)$$

Recordemos que el valor de $T = -\frac{\pi^2}{\rho} A$ con A , dada por (3.18), que depende de los parámetros materiales del nemático y de las dimensiones de la muestra; mientras que $x = \alpha^2 B^2 D$ con B dada por (3.18), depende de los parámetros del ruido y de los parámetros materiales del nemático.

Para poder graficar (6.3) consideraremos un nemático específico, a saber, el PAA (P-Azoxianisol). Los parámetros materiales de este nemático se han tomado de las referencias [4, 8, 41, 42] y se resumen en la siguiente tabla.

Parámetros Materiales del P-azoxianisol (PAA)

coeficiente de viscosidad de Leslie $\gamma_1 = 6.8 \times 10^{-3} \frac{Kg}{ms}$

coeficiente de viscosidades relativas $\lambda = \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} = 1.05$

coeficiente de viscosidad de Harvard $\nu_3 = 5 \times 10^{-2} \frac{Kg}{ms}$

constante elástica (se ha elegido K_2) $K_2 = 3.8 \times 10^{-12} N$

anisotropía dieléctrica: $\epsilon_a = n_e^2 - n_0^2 = 1.547^2 - 1.479^2 = 0.2057$

polarizabilidad paralela $\alpha_{\parallel} = 5.90588 \times 10^{-40} Fm^2$

polarizabilidad perpendicular $\alpha_{\perp} = 1.99224 \times 10^{-40} Fm^2$

permitividad paralela $\epsilon_{\parallel} = 4.9036 \times 10^{-11} \frac{C^2}{Nm^2}$

permitividad perpendicular $\epsilon_{\perp} = 5.0488 \times 10^{-11} \frac{C^2}{Nm^2}$

Las dimensiones de la muestra que consideramos son las siguientes

separación entre las placas $\ell = 10^{-4} m$

volumen de la muestra $V = 10^{-8} m^3$

Para el caso de ruido blanco lineal, las dimensiones de la intensidad del ruido D son $\frac{N^4 s}{C^4}$, como puede apreciarse directamente de la ecuación (4.35). Las dimensiones de T , f_0 y x son de $\frac{1}{s}$.

De acuerdo a los valores de los parámetros del nemático y de las dimensiones de la muestra, el orden de magnitud de T es de 10^{-1} , mientras que x es del orden de $10^{-20}\alpha^2 D$, de manera que para valores razonables de los parámetros del ruido, $x \ll T$. Aprovechando esto, realizamos una expansión de la ecuación (6.3) en serie de Taylor en x alrededor de $x = 0$, expresando el resultado en términos de las variables adimensionales $\tau_1 = Tt$, $x_1 = \frac{x}{T}$, $x_2 = xt$ y $f_1 = \frac{f_0}{T}$. Así, se obtiene

$$\Delta n = 1 - \left[\langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2\tau_1} - f_1^2 (2e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1) - 2f_1^2 \left(\frac{3}{2} + \tau_1 e^{\tau_1} - 2\tau_1 e^{2\tau_1} - 4e^{\tau_1} + \frac{5}{2} e^{2\tau_1} \right) x_1 + 4 \langle n_{q_0}^2 \rangle x_2 e^{2\tau_1} \right]. \quad (6.4)$$

De (6.4) podemos identificar las diferentes contribuciones a la birrefringencia inducida

$$\Delta n^I = 1 - \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2\tau_1}, \quad (6.5)$$

$$\Delta n^F = f_1^2 (2e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1), \quad (6.6)$$

$$\Delta n^{RYF} = 2f_1^2 \left(\frac{3}{2} + \tau_1 e^{\tau_1} - 2\tau_1 e^{2\tau_1} - 4e^{\tau_1} + \frac{5}{2} e^{2\tau_1} \right) x_1, \quad (6.7)$$

$$\Delta n^R = -4 \langle n_{q_0}^2 \rangle x_2 e^{2\tau_1}. \quad (6.8)$$

donde Δn^I , Δn^R , Δn^F y Δn^{RYF} denotan, respectivamente, las birrefringencias intrínseca, inducida por el ruido, inducida por el flujo y un término acoplado debido al flujo y al ruido.

La condición inicial $\langle n_{q_z}^2(t=0) \rangle = \langle n_{q_0}^2 \rangle$ puede determinarse de varias formas. Una es considerar al nemático formado por un conjunto de momentos dipolares permanentes en equilibrio. Para determinar dicha condición inicial, calculamos la función de partición del sistema y a partir de esta obtenemos la siguiente expresión para el segundo momento de la componente y del campo director a $t = 0$

$$\langle n_{q_0}^2 \rangle = \frac{4 k_B T I}{3 \hbar^2} e^{-\frac{\mu E}{k_B T}}, \quad (6.9)$$

donde k_B , T , I , \hbar , μ , E son la constante de Boltzmann, la temperatura, el momento de inercia, la constante de Planck, el momento dipolar permanente de una molécula y el campo eléctrico, respectivamente. Otra forma consiste en igualar la birrefringencia intrínseca Ec. (6.5), con $\Delta N = n_o - n_e$ y despejar $\langle n_{q_0}^2 \rangle$.

Uno de nuestros objetivos es determinar, de acuerdo al modelo, si las birrefringencias inducidas por el ruido y el flujo hidrodinámico son significativas comparadas con la birrefringencia intrínseca y de esta forma ver si son físicamente significativas y medibles.

Las graficas que se muestran a continuación muestran el cociente entre diferentes contribuciones a la birrefringencia inducida respecto a la intrínseca. Para dichas contribuciones se dan expresiones analíticas en términos de variables adimensionales que dependen de parámetros fijos y parámetros libres. Los parámetros fijos son: los parámetros materiales del nemático y las dimensiones de la muestra; los parámetros libres son, los parámetros del ruido y el gradiente de presión externo. En el eje de las ordenadas representa el cociente entre diferentes contribuciones, mientras que el eje de las abcisas representa alguno de los parámetros libres según sea el caso. El tiempo al cual se realizarán las gráficas de la birrefringencia corresponden al tiempo de relajación del modo $m = 0$ que esta dado por la Ec. (3.26) con $E_0 = 0$.

En seguida mostramos la gráfica de la razón entre la birrefringencia inducida por el flujo hidrodinámico y la intrínseca como función del gradiente de presión:

Como puede apreciarse de la figura (6.1), la razón entre la birrefringencia inducida por el flujo y la birrefringencia intrínseca es muy sensible al gradiente de presión, al aumentar el gradiente de presión dicha razón aumenta y lo hace rápidamente. De aquí concluimos que una predicción importante de nuestro modelo es que los efectos hidrodinámicos a la birrefringencia son considerables y por lo tanto pueden ser medibles. Cabe señalar que en la literatura es muy común despreciar dichos efectos.

La figura (6.2) muestra la razón entre la birrefringencia inducida por el ruido en la intensidad del campo eléctrico y la intrínseca. También muestra la razón entre la birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el flujo con el ruido y la intrínseca. Como podemos apreciar, los efectos del ruido en la intensidad del campo eléctrico sobre la birrefringencia son prácticamente inapreciables. En esta gráfica se considera un gradiente de presión fijo en $|\nabla P| = 10 \frac{N}{m^2}$. Cabe señalar que al aumentar o disminuir el gradiente de presión, los efectos del ruido y del término acoplado siguen siendo despreciables.

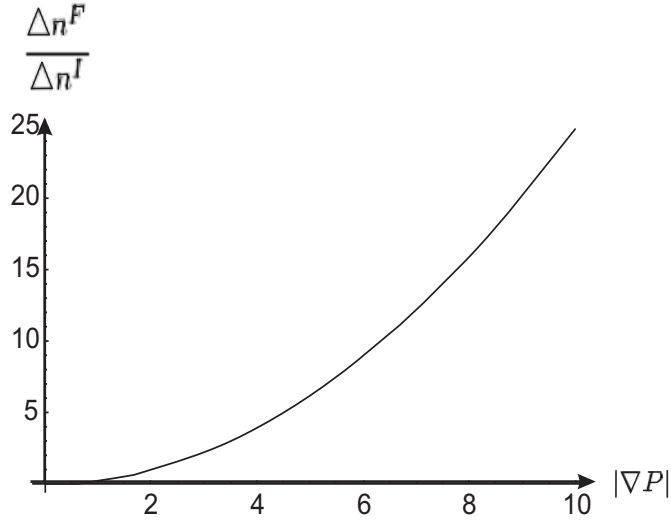


Figura 6.1: Razón entre la birrefringencia inducida por el flujo hidrodinámico y la intrínseca como función del gradiente de presión.

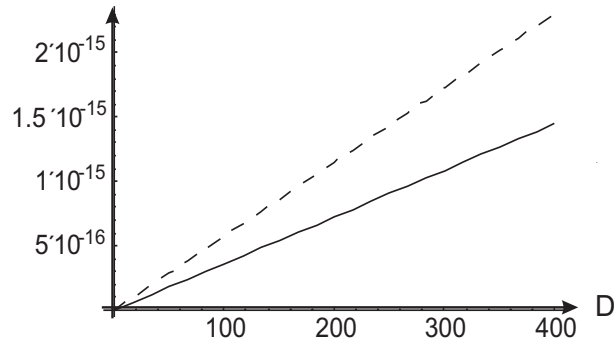


Figura 6.2: (- - -) Razón entre la birrefringencia inducida por el ruido y la intrínseca como función de la intensidad del ruido. (—) Razón entre la birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el flujo con el ruido y la intrínseca.

Para obtener la birrefringencia inducida por ruido de color en la intensidad del campo eléctrico y el flujo hidrodinámico sustituimos (4.54) en (6.2)

$$\Delta n = 1 - \left[h_4 \left(\frac{e^{h_1 t}}{h_1 - h_3} - \frac{h_1 e^{h_3 t}}{h_3(h_1 - h_3)} + \frac{1}{h_3} \right) + \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{h_3 t} \right] \quad (6.10)$$

donde denotamos

$$h_1 = T + z_1, \quad h_3 = 2(T + 2z_1) \quad \text{y} \quad h_4 = 2f_0^2 \frac{(\frac{1}{\gamma} - \frac{2z_1}{\gamma^2})(\gamma - z_1)}{T - z_1}. \quad (6.11)$$

Sustituyendo (6.11) en (6.10), Δn expresada en términos de z_1 toma la siguiente forma

$$\Delta n = 1 - 2f_0^2 \frac{(\frac{1}{\gamma} - \frac{2z_1}{\gamma^2})(\gamma - z_1)}{(T - z_1)(T + 3z_1)} \left[\frac{(T + 3z_1)}{2(T + 2z_1)} + \frac{(T + z_1)e^{2(T+2z_1)t}}{2(T + 2z_1)} - e^{(T+z_1)t} \right]. \quad (6.12)$$

Para el caso de ruido de color lineal las dimensiones de la intensidad del ruido H son $\frac{N^4}{C^4}$, esto puede apreciarse directamente de la Ec. (4.45), mientras que las dimensiones de T , f_0 , γ , h_1 , h_3 , h_4 y z_1 son de $\frac{1}{s}$.

De manera análoga al caso de ruido blanco, de acuerdo a los parámetros materiales del nemático y a las características físicas de la muestra, $z_1 \ll T$. Realizando un desarrollo en potencias de z_1 se obtiene la siguiente expresión a primer orden en z_1 para la birrefringencia

$$\Delta n = 1 - \left[\langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2\tau_1} + 4\langle n_{q_0}^2 \rangle z_2 e^{2\tau_1} - f_1^2 (2e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1) + 2f_1^2 \left((2e^{2\tau_1} - e^{\tau_1})z_2 + (2e^{\tau_1} - \frac{3}{2}e^{2\tau_1} - \frac{1}{2})z_3 + \frac{3}{2}(e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1)z_4 \right) \right], \quad (6.13)$$

donde hemos expresado el resultado en términos de las variables adimensionales $\tau_1 = Tt$, $z_2 = z_1 t$, $z_3 = \frac{z_1}{T}$, $z_4 = \frac{z_1}{\gamma}$ y $f_1 = \frac{f_0}{T}$.

Identificando las diferentes contribuciones a la birrefringencia inducida, se tiene

$$\Delta n^I = 1 - \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2\tau_1}, \quad (6.14)$$

$$\Delta n^F = f_1^2 (2e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1), \quad (6.15)$$

$$\Delta n^{RYF} = -2f_1^2 \left[(2e^{2\tau_1} - e^{\tau_1})z_2 + (2e^{\tau_1} - \frac{3}{2}e^{2\tau_1} - \frac{1}{2})z_3 + \frac{3}{2}(e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1)z_4 \right], \quad (6.16)$$

$$\Delta n^R = -4\langle n_{q_0}^2 \rangle z_2 e^{2\tau_1}. \quad (6.17)$$

Nótese que las expresiones para la birrefringencia intrínseca y la birrefringencia inducida por el flujo coinciden para el caso de ruido blanco y ruido de color, mientras que la birrefringencia inducida por el ruido cambia, como era de esperarse. En el caso de ruido blanco sólo tenemos un parámetro que lo caracteriza, su intensidad, en el ruido de color tenemos dos parámetros, su intensidad y su tiempo de correlación.

Las graficas que enseguida se muestran, representan la razón entre la birrefringencia inducida por ruido de color y la intrínseca, considerando al tiempo de correlación τ fijo y variando la intensidad del ruido y viceversa.

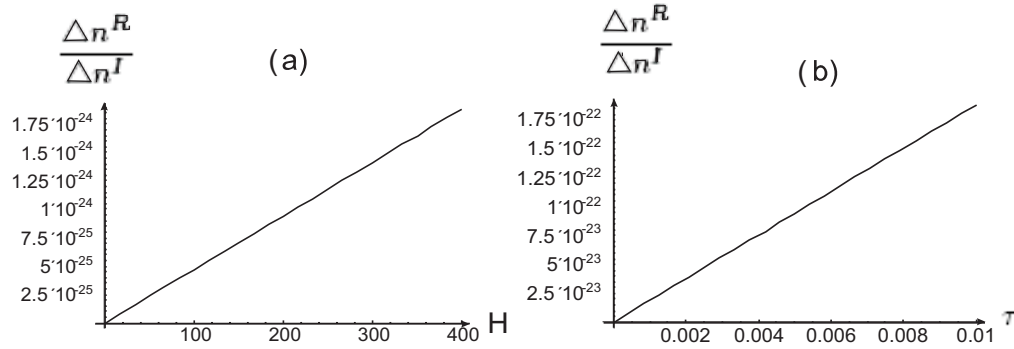


Figura 6.3: Razón entre la birrefringencia inducida por el ruido y la intrínseca. (a) Fijando el tiempo de correlación τ y variando la intensidad del ruido H . (b) Fijando la intensidad del ruido H y variando el tiempo de correlación.

De la figura (6.3) se tiene que la birrefringencia inducida por el ruido de color es totalmente despreciable comparada con la intrínseca. Por lo tanto, considerando ruido lineal, la birrefringencia inducida por el ruido de color, al igual que el ruido blanco, es despreciable.

En la expresión para la birrefringencia total, Ec. (6.13), aparece un término que acopla al ruido y al flujo hidrodinámico. En seguida mostramos una gráfica que muestra la razón entre la birrefringencia intrínseca y la de acoplamiento entre el flujo y el ruido. De la gráfica (6.4) observamos que la birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el flujo y el ruido de color es inapreciable.

En resumen, de acuerdo a los resultados anteriores, la birrefringencia inducida por ruido lineal, tanto para el caso de ruido de color como el de ruido blanco es despreciable; sin embargo, la birrefringencia inducida por el flujo hidrodinámico puede ser mucho mayor que la intrínseca a medida que el gradiente de presión aumenta.

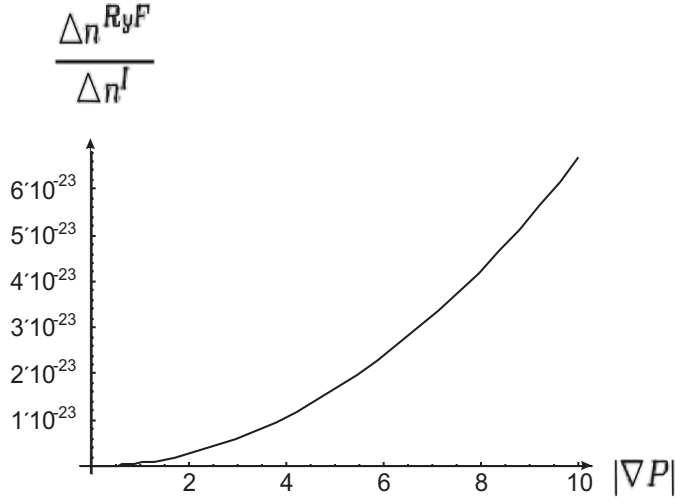


Figura 6.4: Razón entre la birrefringencia intrínseca y la inducida por el acoplamiento entre el ruido y el flujo

6.3. Birrefringencia inducida por ruido cuadrático

En la sección (5.2) aplicamos el método de San Miguel y Sancho para tratar el caso de ruido no lineal, dicho método nos permitió determinar el primero y segundo momento de la componente y del campo director. A continuación usaremos éstas expresiones para determinar la birrefringencia inducida por las fluctuaciones en el campo eléctrico y por el flujo hidrodinámico. Sustituyendo (5.39) en (6.2), se tiene

$$\begin{aligned} \Delta n^T &= 1 - \langle n_y^2 \rangle = 1 - \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2L_2 t} \\ &- 2f_0^2 \left[\frac{1}{2L_1 L_2} + \frac{e^{L_1 t}}{L_1(L_1 - 2L_2)} - \frac{e^{2L_2 t}}{2L_2(L_1 - 2L_2)} \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Para el caso de ruido cuadrático las unidades de D_c son de $\frac{N^2}{C^2} s$, como puede verse directamente de la ecuación (5.3). Las unidades de L_1, L_2 son de $\frac{1}{s}$.

Sustituyendo los valores de los parámetros materiales del nemático PAA en las ecuaciones (5.34) y (5.38) se obtiene

$$L_1 \approx L_2 = T + y_1 \quad \text{con} \quad y_1 = \frac{D_c B}{\tau}. \quad (6.19)$$

De forma análoga al caso de ruido lineal, consideramos el hecho que T es del orden de 10^{-1} y y_1 va como $10^{-10} \frac{D_c}{\tau}$, de modo que considerando valores de D_c y τ tales que $T \ll y_1$ y realizando un desarrollo en serie de Taylor de la Ec. (6.18) alrededor de $y_1 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta n^T = 1 - & \left[\langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2\tau_1} + 2\langle n_{q_0}^2 \rangle y_2 e^{2\tau_1} - f_1^2 (2e^{\tau_1} + e^{2\tau_1} - 1) \right. \\ & \left. + 2f_1^2 (\tau_1 e^{2\tau_1} - y_2 e^{\tau_1} + 2e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1) y_3 \right], \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde hemos expresado (6.20) en términos de las siguientes variables adimensionales

$$\tau_1 = Tt, \quad y_2 = y_1 t, \quad y_3 = \frac{y_1}{T} \quad y \quad f_1 = \frac{f_0}{T}. \quad (6.21)$$

De (6.20) podemos identificar las diferentes contribuciones a la birrefringencia inducida

$$\Delta n^I = 1 - \langle n_{q_0}^2 \rangle e^{2t_1}, \quad (6.22)$$

$$\Delta n^R = -2\langle n_{q_0}^2 \rangle y_2 e^{2\tau_1}, \quad (6.23)$$

$$\Delta n^F = f_1^2 (2e^{\tau_1} + e^{2\tau_1} - 1), \quad (6.24)$$

$$\Delta n^{RyF} = -[2f_1^2 (\tau_1 e^{2\tau_1} - y_2 e^{\tau_1} + 2e^{\tau_1} - e^{2\tau_1} - 1) y_3]. \quad (6.25)$$

En seguida mostramos la gráfica de la razón entre la birrefringencia inducida por ruido cuadrático y la intrínseca, considerando las restricciones sobre los parámetros del ruido mencionadas en la sección (5.1), en donde, se considero al tiempo de correlación τ y a la intensidad del ruido D_c como parámetros pequeños tales que el cociente $\frac{D_c}{\tau}$ sea finito. Además, consideramos la restricción $T \ll y_1$, la cual se utilizó con el fin de poder realizar el desarrollo de Taylor de la Ec. (6.20) y así poder separar las diferentes contribuciones a la birrefringencia.

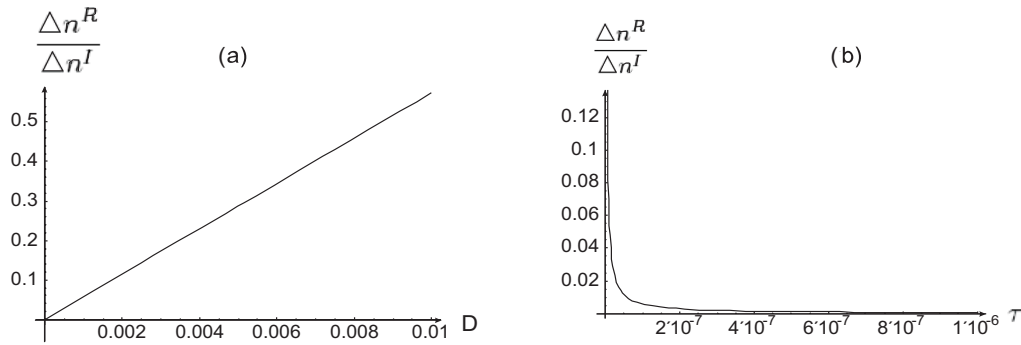


Figura 6.5: Razón entre la birrefringencia inducida por ruido cuadrático y la intrínseca. (a) Fijando el tiempo de correlación en $\tau = 1 \times 10^{-9}$ y variando la intensidad del ruido D . (b) Fijando la intensidad del ruido en $D = 0,01 \frac{N^2}{C^2} s$ y variando el tiempo de correlación τ .

Las gráficas de la figura (6.5) muestran que para el caso de ruido cuadrático, la birrefringencia inducida por el ruido puede ser hasta un 50% de la intrínseca. A medida que aumentamos la intensidad del ruido y disminuimos el tiempo de correlación ésta razón aumenta, sin embargo, esto no lo podemos hacer de manera arbitraria, ya que se tienen restricciones sobre los parámetros del ruido. Los valores fijos que se tomaron en dicha gráfica, para D_c y τ_c , son tales que satisfacen las restricciones ya mencionadas y que hacen que los efectos del ruido sean considerables.

Ahora mostraremos la gráfica de la razón entre la birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el flujo hidrodinámico y el ruido cuadrático.

De la figura (6.6) observamos que la birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el flujo y el ruido puede ser hasta un 35% de la intrínseca y aumenta si se aumenta el gradiente de presión.

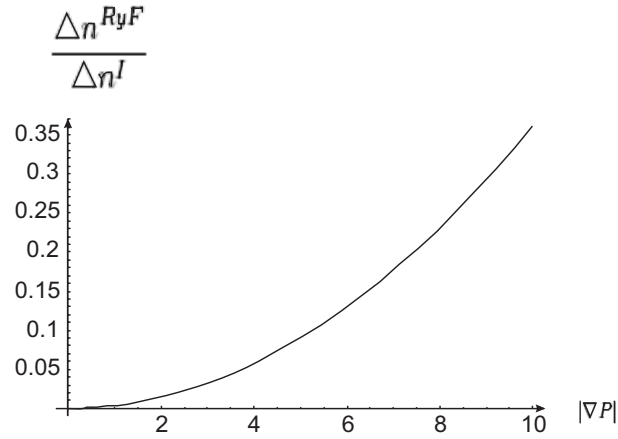


Figura 6.6: Razón entre la birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el ruido con el flujo y la intrínseca, para $D = 0,01 \frac{N^2}{C^2} s$, $\tau = 1 \times 10^{-9} s$ y variando el gradiente de presión.

Por último mostramos la gráfica de la razón entre la birrefringencia inducida por el ruido y la inducida por el flujo.

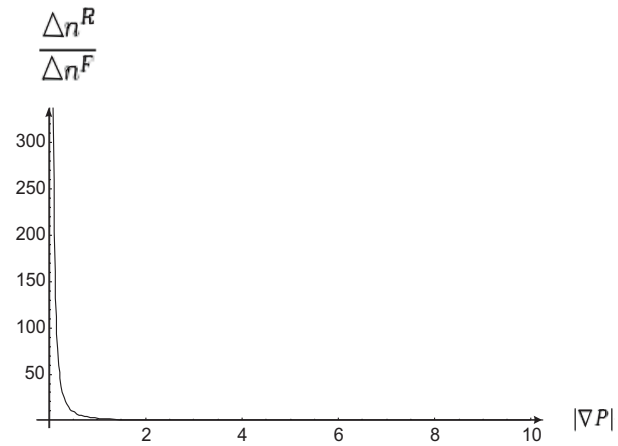


Figura 6.7: Razón entre la birrefringencia inducida por el flujo y la inducida por el ruido, para $D = 0,01 \frac{N^2}{C^2} s$, $\tau = 1 \times 10^{-9} s$ y variando el gradiente de presión.

La gráfica de la figura (6.7) muestra que si el gradiente de presión disminuye, la birrefringencia inducida por el ruido es mayor que la inducida por el flujo. Sin embargo, si el gradiente de presión aumenta, dicha razón

tiende a cero. En ese caso la inducida por el flujo es mucho mayor que la inducida por el ruido.

Capítulo 7

Conclusiones

Se propuso un modelo para estudiar la birrefringencia inducida por ruido externo y flujo hidrodinámico en cristales líquidos nemáticos. En este modelo se consideró como un primer caso, que la intensidad del campo eléctrico fluctúa, a partir de lo cual se obtiene una ecuación diferencial estocástica inhomogénea con ruido lineal multiplicativo para el campo director. Para resolver dicha ecuación se utilizó un método desarrollado por van Kampen, a partir del cual se obtuvo una ecuación de Fokker-Planck para la distribución de probabilidad del campo director. De esta ecuación se obtuvo su primero y segundo momento, necesarios para obtener una expresión analítica para la birrefringencia. Como un segundo caso se consideró que las fluctuaciones ocurren en la magnitud del campo eléctrico; en este caso se obtiene una ecuación diferencial estocástica inhomogénea con ruido cuadrático multiplicativo para el campo director. Para resolver esta ecuación se utilizó un método desarrollado por San Miguel y Sancho, el cual proporciona una ecuación de Fokker-Planck para la distribución de probabilidad del campo director. A partir de esta ecuación se obtuvo su primero y segundo momento y a partir de estos se obtiene la birrefringencia inducida.

La aportación principal de este trabajo fue deducir expresiones analíticas para la birrefringencia inducida por el ruido y por el flujo usando como parámetro de control el campo eléctrico A.C. Para ambos tipos de ruido se consideran los efectos del flujo hidrodinámico. En la literatura es muy común considerar solamente fluctuaciones térmicas aditivas; en este sentido, en este trabajo se generalizó esta situación al considerar ruido externo multiplicativo, lo cual se obtiene directamente en las ecuaciones nematodinámicas estocásticas. La introducción de fluctuaciones lleva el problema a un área poco estudiada como son los procesos estocásticos multiplicativos.

Cabe señalar que, como se ha indicado de manera explícita a lo largo

del trabajo, el modelo tiene limitaciones, como la de acoplamiento mínimo. Por tanto nuestra descripción es válida solo para las etapas tempranas del proceso de reorientación.

Al comparar las diferentes contribuciones a la birrefringencia, se obtuvo como resultado que en el caso de ruido lineal, la birrefringencia inducida por el ruido es prácticamente inapreciable, mientras que la inducida por el flujo puede ser mucho mayor que la birrefringencia intrínseca. Esto tanto para el caso en que el ruido blanco como el de ruido de color. Para el caso de ruido cuadrático, se obtuvo que la birrefringencia inducida por el ruido es considerable, llega a ser hasta el 50 % de la intrínseca y aumenta a medida que el tiempo de correlación disminuye, es decir, la birrefringencia aumenta a medida que nos acercamos más al límite de ruido blanco.

La birrefringencia inducida por el acoplamiento entre el ruido y el flujo es despreciable para el caso de ruido lineal, de color y blanco. Para el caso de ruido cuadrático dicha birrefringencia es considerable y aumenta al aumentar el gradiente de presión y disminuir el tiempo de correlación. Éstas son predicciones nuevas y susceptibles de comprobarse experimentalmente.

Bibliografía

- [1] B. Ya. Zelldovic, N. F. Piliotskii, A. V. Sulchov and N. V. Tabirdyan, JETP Lett. **31**, 363 (1980)
- [2] N. V. Tabiryan, A. V. Sukkov and Ya. Zelldovic, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **13b**, 1 (1986)
- [3] V. K. Freedericksz, and Zolina, V. J. R. F.,(Kharkov) Phys. **62**, 457 (1969)
- [4] I. C. Khoo, *Liquid Crystal, Physical Properties and Nonlinear Optical Phenomena* (John Wiley and Sons, United States of America, 1995)
- [5] J. A. Olivares, Tesis de Licenciatura, *Efectos de ruido externo no lineal sobre la birrefringencia inducida en cristales líquidos nemáticos* UNAM (1995)
- [6] R. F. Rodríguez, J. A. Olivares, and R. Díaz Uribe, Rev. Mex. Fís. **43**, 93-107 (1997)
- [7] V. C. Jorge, Tesis de Maestria, *Propagación de una onda electromagnética en un cristal líquido fluctuante* UNAM (2006)
- [8] P. G. de Gennes, *Physics of Liquid Crystals*, (Clarendon, Oxford 1974), 1st edition
- [9] S. Chandrasekhar *Liquid Crystals* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)2nd edition
- [10] M. San Miguel and F. Sagués, Phys. Rev. **A**, **36** , 1883 (1987)
- [11] N. G. van Kampen *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992) Revised and enlarged edition, Cap. XVI

- [12] M. San Miguel and J. M. Sancho, *Z. Phys.***B**, **43**, 361 (1981)
- [13] B. Bahadur *editor*, *Liquid Crystals: Applications and Uses* (World Scientific, Singapore, 1990) Vol. I
- [14] G. W. Gray, *editor*, *Thermotropic Liquid Crystals* (John Wiley and Sons, Great Britain, 1987)
- [15] H. L. Ong. ,*Phys. Rev. A*, **47**, 1411, (1981)
- [16] G. Friedel, *Ann.Phisique* 18. 273 (1922)
- [17] P. J. Collings *Liquid Crystals* (Princeton University Press, Princeton, 1990)
- [18] F. C. Frank., *Discuss. Faraday Soc.* **25**, 19, (1980)
- [19] F. M. Leslie, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **19**, 357 (1966)
- [20] O. J. Parodi., *Phys (Fr.)* **31**, 581 (1970)
- [21] J. L. Ericksen, *Phys. Fluids* **9**, 1205 (1966)
- [22] Maier, W. Saupe, *A. Z., Z. Nater.* **A13**, 564 (1958)
- [23] H. Brand and H. Pleiner, *J. Physique* **41**, 553 (1980)
- [24] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 1985)
- [25] R. F. Rodríguez and J. A. Reyes, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **282**,287-296(1996)
- [26] M. Aguado, R. F. Rodríguez and M. San Miguel, *Dynamics of pattern formation in the Turing optical instability*, *Phys. Rev. A* 39, 5686 - 5696 (1989)
- [27] H. Haken, *Sinenergetics* (Springers-Verlag), New York, (1983)
- [28] J. M. Sancho and M. San Miguel, *Z. Physik* **B**, **36**, 357 (1980)
- [29] P. De Kepper, and Horsthemke, W.,*C. R. Acad. Sci Paris Ser. C*287, **251**, (1978)
- [30] S. Kai., T. Kai., M. Takata and K. J. Hirakawa, *Phys. Soc. Jpn.* **47** 1379 (1979)

- [31] S. Kabashima, S. Kogure, T. Kawakubo, and T. Okada, *J. Appl. Phys.*, **50**, 6296 (1979)
- [32] J. P. Gollub and J. F. Steniman, *Phys. Rev. Lett.* **45** 551 (1980)
- [33] Doob, J. L. *Ann. Math.* **43**, 351 (1942)
- [34] N. G. van Kampen, *Phys. Rep.* **24** 171 (1976)
- [35] R. Kubo, *Math. Phys.* **4** 174 (1963)
- [36] Novikov, E. A., *Sov. Phys. JETP* **20** 1290 (1965)
- [37] T. Kawakubo, A. Yanagita, and S. Kabahima, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 1451 (1981)
- [38] R. Yamamoto, S. Ishihara, y S. Hayakawa, *Phys. Lett.* **60A** (1977)
- [39] M. Schadt, *J. Chem. Phys.* **1**, 210 (1977)
- [40] M. Doi and S. F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, (Oxford University Press, New York, 1986)
- [41] C. J. F. Böttcher and P. Bordewijk *Theory of Electric Polarization*(Elsevier, Amsterdam, 1978), Vol II
- [42] W. H. de Jeu, *Physical Properties of Liquid Crystalline Materials* (Gordon and Breach, New York, 1980)