UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA
MÁS ATRACTIVA Y ÁGIL DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS
NIVELES FORMATIVOS, A TRAVÉS DE
SU HISTORIA Y LA CULTURA

REPORTE DE SEMINARIO

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JORGE LUIS GONZÁLEZ ALANIS

TUTOR

Dr. ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO DANTAN

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2007

Seminario de Titulación

Historia y Enseñanza de las Matemáticas

Tutor: Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan
Depto. De Matemáticas, 016
Facultad de Ciencias, Cd. Universitaria
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 México, D. F.

Tel.: 56 22 54 14
Fax: 56 22 48 59
Correo Elec.: gardan@servidor.unam.mx

DESARROLLO DEL TRABAJO

Objetivo

La meta central de este seminario es producir material de apoyo para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al tomar en cuenta la experiencia profesional de los asistente, el material podría corresponder, indistintamente, a los ciclos de primaria, bachillerato y licenciatura. La diferencia de niveles no sugiere una diferencia de carácter cualitativo. Incluso se debe poner un mayor énfasis en la calidad de los trabajos más elementales pues son estos la base de todo el conocimiento futuro. Los trabajos pueden estar dirigidos a los estudiantes o a los profesores. No se trata de producir material que, de alguna u otra manera, ya se encuentra disponible para cualquiera de las dos posibles audiencias. Al igual que en un trabajo de tesis tradicional, al estudiante se le exige que su contribución sea original, relevante y trascendente. A diferencia del enfoque tradicional, estos ensayos deben tener la particularidad de pretender presentar los conceptos de una manera subliminal, al introducir las ideas, conceptos y métodos de una manera vedada y no técnica. Se pone énfasis en el cómo, cuándo, por qué, quién y para qué; y no en la memorización y práctica mecánica que, eventualmente, se olvidará y difícilmente se comprenderá.

Metodología

En primer lugar, se estudiaron los programas oficiales de las materias de matemáticas correspondientes a los ciclos de primaria y bachillerato con el propósito de detectar cuáles son algunos de los conceptos básicos de cada uno de los ciclos. De ninguna manera se pretende modificar estos planes. Estos son el producto del esfuerzo y dedicación de un gran número de individuos y de discusiones que se llevaron a cabo en un período de tiempo muy largo. Se prestó particular atención a aquellas ideas que denotaban continuidad y transitividad a través de los mismos programas.

En segundo lugar, se estudiaron diversas propuestas, elaboradas por investigadores que sugerían diferentes enfoques y metodologías para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es necesario enfatizar que la actitud de los asistentes fue tratar de incorporar el mayor número de elementos y no presuponer que existía una solución única.

En tercer lugar, una vez que se tuvo un consenso del tipo de material que se buscaría producir, los estudiantes procedieron de la siguiente manera: 1) Cada uno de ellos, de manera independiente, elabora un trabajo que se aboca al estudio de alguna de estas nociones; 2) el estudiante envía dicho material a través de mensajería electrónica con el propósito de que sus compañeros lo lean durante la semana previa a la sesión; 3) durante la reunión semanal, los estudiantes discuten la pertinencia, calidad técnica, trascendencia de cada uno de los ensayos; 4) para la próxima sesión, una vez más, cada uno de los estudiantes envía, a través de la misma vía, el material ya corregido y el nuevo material por revisar.

Es necesario subrayar que, para alcanzar los niveles de la calidad que se habían propuesto desde un principio, fue necesario revisar cada uno de los ensayos en repetidas ocasiones. El objetivo, en última instancia, no es producir cantidad sino calidad. Se puso igual énfasis en la calidad de la presentación final del producto. Las imágenes que ilustran los trabajos también se revisaron con esmero; en varias ocasiones fue necesario producir ilustraciones originales que reflejan de manera fehaciente el concepto que se buscaba trasmitir.

Finalmente, los trabajos se subirán a la red en una página dedicada a aquellos que se interesen por las matemáticas. La página estará dividida en, al menos, tres niveles: Elemental o básico, medio y superior. A su vez, cada uno de los estratos estará subdividido en dos: Profesores y estudiantes.

Bibliografía básica

Las referencias bibliográficas que a continuación se describen comprenden parte del material que se supuso que los participantes ya conocían con antelación. Esta lista es independiente de la que cada uno de los estudiantes se vio obligado a consultar para la elaboración de cada uno de sus ensayos.

BELL, Eric T. *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires: Losada. 1948.

__________. *La reina de las ciencias*. Buenos Aires: Losada. 1944.

BOYER, Carl B. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial. 1986. (Col. Alianza Universidad Textos 94)

CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Illinois: Open Court. 1928. 2 volúmenes.

GARCIADIEGO, Alejandro R. "Historia de las Matemáticas: Un manual introductorio de Investigación." *Mathesis* **12** (1996)3 – 113.

HOGBEN, Lancelot. *La matemática en la vida del hombre*. México. CECSA. 1956.

IBÁÑEZ TORRES, Raúl (editor). *Divulgar las matemáticas*. España: Nivola. 2005. (Col. Ciencia Abierta 11).

IGLESIAS JANEIRO, J. *La Consciencia de los números*. Buenos Aires. Editorial Kier. 1944.

KASNER, Edward y NEWMAN, James. *Matemáticas e imaginación*. México: CECSA. 1972.

LE LIONNAIS, François. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: EUDEBA. 1962.

Matemáticas en el Mundo Moderno. Selecciones del Scientific American. Madrid: Ed. Blume. 1974. (Introducciones de Morris Kline y versión española de Miguel de Guzmán).

NEWMAN, James R. 8editor). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Grijalbo. 1997. 6 volúmenes.

PELLETIER, Jean Louis. *Etapas de la matemática*. Buenos Aires: Losada. 1958.

SANTOS, Luz M.

STRUIK, Dirk J. *La matemática: Sus orígenes y su desarrollo*. Buenos Aires. Siglo XX. 1960.

VERA, Francisco. *Evolución del concepto de número*. Madrid: Cuadernos de Ciencia y Cultura. 1929.

__________. *Puntos críticos de la matemática contemporánea*. Buenos Aires: Losada. 1944.

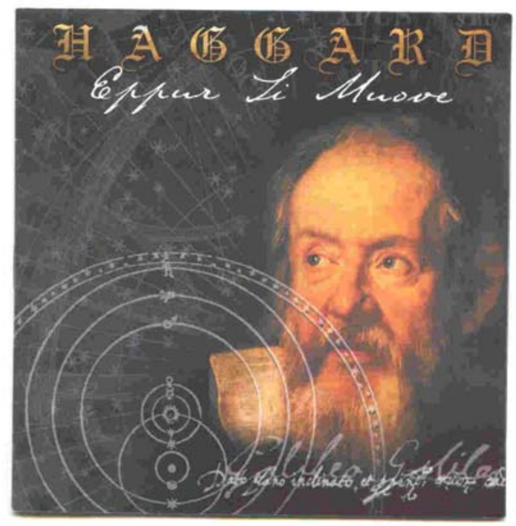
__________. *Psicogénesis del razonamiento matemático*. Buenos Aires: Poseidon. 1947.

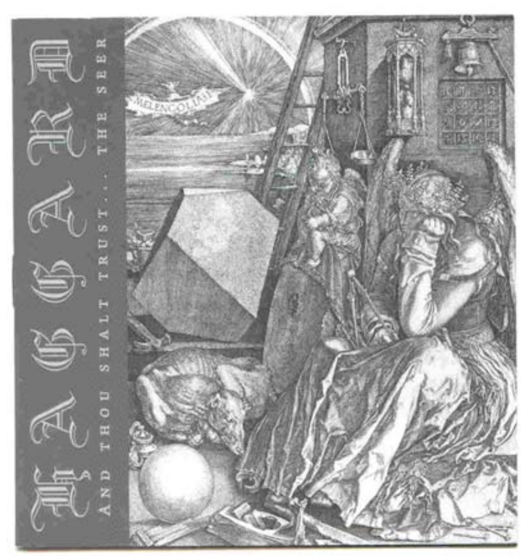
WANG, Hao. *From mathematics to philosophy*. London: Routledge. 1974.

RESUMEN

Este trabajo ofrece algunas razones por las cuales debe incluirse la historia de las matemáticas como una parte esencial de la instrucción en las aulas. Los artículos de esta sección pueden ayudar a introducir el tema a tratar y planificar su uso en tus clases. Los artículos son, así mismo, un intento por acrecentar el interés y apreciación por la historia como una herramienta en la enseñanza. El material abarca categorías como: La historia y sus conexiones con la educación; el uso de la historia en las clases de matemáticas; argumentos de por qué es útil enseñar matemáticas a través de su historia y estrategias de cómo incorporar la historia en las clases.

ÍNDICE





INTRODUCCIÓN

Una de las razones por las que los alumnos frecuentemente se muestran apáticos y faltos de dedicación en sus labores escolares es que no son conscientes de la relación que guardan sus estudios con su vida cotidiana. En matemáticas, a nivel bachillerato, una constante que se oye con frecuencia es 'y esto, ¿para qué me sirve?' Si cualquier curso, cualquier lección o clase, debe establecer con toda claridad la importancia del tema a tratar, bien sea para la adquisición de conocimientos futuros o mejor aún para la vida diaria, entonces el profesor debe aclarar que aprender matemáticas en los niveles formativos es fundamental pues esta disciplina nos enseña a pensar y, por ende, a resolver problemas.

El presente trabajo no pretende argumentar algo original, simplemente es un intento por motivar a los que nos dedicamos a enseñar esta disciplina a explicar los métodos y objetivos con la mayor claridad posible, al despojar un poco a la materia de prácticas rígidas de enseñanza y por contraste, al recurrir a técnicas que hagan nuestra clase más ágil, más amena.

Los ensayos aquí presentados son propuestas para motivar el aprendizaje de las matemáticas a través de su historia, a la vez que procuramos que el conocimiento de la materia tenga un período de permanencia a largo plazo al relacionar la disciplina con otros aspectos de la cultura en general.

ALGUNAS OPINIONES Y TENDENCIAS SOBRE LAS MATEMATICAS Y SU ENSEÑANZA, EN PARTICULAR DEL ALGEBRA, A NIVEL BACHILLERATO

Jorge Luis González Alanis

CARACTERISTICAS GENERALES DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas pueden ser cultivadas, al menos, con dos propósitos: Uno académico y otro práctico. El objetivo académico no está condicionado por el mundo externo y es más valorado por su belleza que por su utilidad. La forma de su presentación tradicional, que descansa sobre su base racional y abstracta, consiste en ofrecer argumentos fundados en principios generales y no en ejemplos extraídos de la técnica y la administración, como se hacía en los textos egipcios y mesopotámios. Además, es aplicable a una parte muy limitada de la naturaleza y, dentro de esta parte, sólo a aquella porción que ha sido escudriñada por el trabajo exploratorio de la observación y el experimento.

Al adoptar un enfoque muy general, podemos decir que la aparición de la matemática, como disciplina teórica pura e independiente, comienza en el siglo V a. C., o quizá antes, cuando los griegos crearon las bases de una matemática pura con su conexión lógica entre teoremas y demostraciones.

El conocimiento 'científico' tuvo un carácter enteramente diferente del que había tenido en las primeras civilizaciones; fue mucho más racional y abstracto y se mantuvo separado de las consideraciones técnicas. Las matemáticas —y, especialmente, la geometría— fueron el dominio intelectual que los griegos tuvieron en mayor estima, al desarrollar los métodos de deducción y demostración que todavía usamos.

En efecto, una característica de las matemáticas es que, en su forma final, aparecen como puramente deductivas y sólo contienen demostraciones. La matemática, como disciplina deductiva, llega a una verdad irrefutable mediante una cadena de pasos lógicos. El razonamiento deductivo permite *demostrar teoremas* al aplicar resultados ya conocidos. La validez general del resultado es debido a que cada uno de los pasos deductivos tiene carácter general, pues no depende de características particulares.

La idea clásica de una demostración matemática consiste en partir de una serie de axiomas o afirmaciones que pueden considerarse ciertos o que por evidencia propia lo son. Después, con una argumentación lógica y progresiva, se puede llegar a una conclusión. Si los axiomas son correctos y la lógica es impecable, la conclusión final es innegable. Esta conclusión constituye un *teorema*. Dicho de otro modo, un *teorema* es un enunciado preciso de tipo general, seguido de una demostración deductiva en la que se especifican los resultados obtenidos con anterioridad que se han utilizado.

Las demostraciones matemáticas se basan en este proceso lógico. Son absolutas, libre de dudas y ciertas hasta el fin de los tiempos. Una vez demostrado el *Teorema de Pitágoras*, por ejemplo, sabemos que es verdadero para cualquier triángulo rectángulo, con lados que tengan milímetros o kilómetros de largo. La generalización que produce la demostración permite la aplicación de un teorema dado a cualquier caso particular.

La lógica demostrativa constituye la contribución fundamental de los helenos al mundo intelectual. Este paso decisivo se debió al hecho de haber transferido a las matemáticas la argumentación utilizada en los litigios. La noción de prueba a partir de los postulados y aún el argumento por *reducción al absurdo*, parecen provenir de los tribunales. *Q. E. D.* —es decir, 'lo que había que demostrar'— es el argumento decisivo para ganar un litigio en el tribunal de la razón.

La 'ciencia' se desarrolla de manera similar al sistema judicial. Una teoría se conoce verdadera si hay evidencia para probarla 'más allá de toda duda razonable'. Las matemáticas, en cambio, no confían en la evidencia de la equivoca experimentación, sino que se construye con la infalible lógica. Un resultado matemático contiene una verdad mucho más profunda que cualquier otra por que es resultado de un razonamiento lógico progresivo. Las matemáticas aportan al intelecto un punto de partida riguroso y la noción de prueba suministra una garantía para precaverse del pensamiento deshilvanado.

Una prueba constituye el procedimiento más poderoso para *generalizar* la experiencia, puesto que transforma un determinado número de casos en un *teorema*. Al tener tanto valor en matemáticas, la prueba deductiva se ha empleado para probar palpables desatinos partiendo de principios evidentes por sí mismos. Por ejemplo, nadie aceptaría que si tenemos \$ 2 en una mano y \$ 1 en la otra, ambas cantidades son iguales. Sin embargo, al permitir que se cuele una contradicción en el argumento, podemos llegar al absurdo de que 2 = 1. Veamos de que manera.

Primero empecemos con el inocuo enunciado,

$$a = b.$$

Entonces multiplíquense ambos miembros por a, con lo que se tiene

$$a^2 = ab.$$

Súmese entonces $a^2 - 2ab$ en ambos lados:

$$a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$$

Que puede simplificarse en:

$$2(a^2 - ab) = a^2 - ab$$

Finalmente, dividiendo ambos lados por $a^2 - ab$, se tiene

$$2 = 1$$

El enunciado original parece, y es, completamente inofensivo, pero en algún paso de la manipulación se ha deslizado un error sutil, pero desastroso, que lleva a la contradicción del último enunciado. Nótese que empezamos con un enunciado simple y tras unos pocos pasos aparentemente directos y lógicos mostramos que $2 = 1$.

En realidad, el error fatal aparece en el último paso, cuando ambos lados se dividen por $a^2 - ab$. Sabemos por el enunciado inicial que $a = b$, y por tanto dividir $a^2 - ab$ es equivalente a hacerlo por cero.

No hay duda de que para la mayoría de los interesados estas matemáticas, y otras, y en especial la matemática desinteresada y no utilitaria, la que se estudia por afición y amor al saber mismo, es decir, la que nos enseña resultados abstractos, basada en la organización deductiva, donde se persigue un rigor impecable e implacable, posee una belleza suprema. Pero ¿qué puede decirse de las matemáticas cotidianas, las escolares, las del bachillerato?

Lamentablemente, la mayor parte del tiempo, en los salones de clase, tratamos las matemáticas como una disciplina que es pura, clara y lógicamente sólida, y las presentamos como ya hechas y correctas. Y no hay duda de que lo son pero, en otro sentido: ¿Son las matemáticas una disciplina carente de emociones, muerta, cerrada, totalmente desconectada del mundo, depositada exclusivamente en un libro o en la mente del maestro, lista para se expuesta y absorbida?

Desde otro punto de vista, la matemática opera con abstracciones perfectamente definidas y lo hace con independencia de los límites reales de su aplicabilidad, de ahí que muchos piensen que las matemáticas son sólo para intelectuales y opinan que no tienen nada que ver con su vida. Las consideran aburridas y, hasta las detestan. A nivel bachillerato, la mayor parte de las veces, el encuentro entre los estudiantes y las matemáticas no siempre es agradable, bien por la falta de atractivo en que les resulta, bien por su aparente falta de cerebro para la materia.

Por otra parte, la materia de las matemáticas requiere que el alumno se involucre a profundidad, lo que va a contra corriente de la vida cotidiana pues los jóvenes se encuentran en un mundo en el que la información se presenta de manera amable y llamativa. La abstracción, así como las simples mecanizaciones, hacen que las matemáticas estén aparentemente lejanas del mundo real. Pongamos por caso el curso de álgebra.

ÁLGEBRA: QUÉ ENSEÑAMOS Y CÓMO LO HACEMOS.

El álgebra se caracteriza, en primer lugar, por sus métodos, que implican el uso de letras y expresiones literales, sobre las cuales se realizan operaciones con propiedades dadas. En los cursos actuales de bachillerato, las expresiones simbólicas, al utilizar letras y operaciones los polinomios y la resolución de ecuaciones, han mantenido ocupados a millones de jóvenes durante cientos de horas. De hecho, este tipo de álgebra elemental, la mayor parte del tiempo, la presentamos como la ciencia de las operaciones y de las reglas formales para la transformación de expresiones y la solución de ecuaciones, es decir, como la disciplina de los cálculos simbólicos. A lo antes dicho hay que añadir que, si bien son las instituciones las que determinan los planes y programas de estudio, los cursos de matemáticas se imparten de acuerdo con la visión, concepción y creencias de los profesores, por lo que es necesario preguntarnos ¿qué y cómo enseñamos?

Algunos cursos combinan el contenido usual del curso de álgebra con otros tópicos tales como programación, geometría, lógica, probabilidad, estadística y otras. Estos temas adicionales se presentan de manera breve y esporádica y sólo se tratan para hacer las matemáticas más amigables a través de ejemplos más vivos y no tan lejanos del mundo real. Aquí se percibe la presión por practicar las operaciones y nociones básicas por medio de ejemplos reales, una presión que cada vez es más fuerte e insistente, pues los maestros sienten la necesidad de justificar que lo que enseñan es de gran utilidad inmediata, pero los problemas reales que se plantean muchas veces resultan tan ajenos al estudiante como las simples mecanizaciones. Veamos algunos ejemplos.

Con relación a problemas de aplicación de las ecuaciones lineales, los maestros han tratado de enseñar a sus estudiantes 'el arte de plantear ecuaciones'. Para ello recurren a 'problemas' como el siguiente:

> Juan le dijo a Pedro: dame \$ 5 y tendré tanto dinero como a ti te quede.
> Pedro le respondió: Dame tu los \$ 5 y tendré el doble de lo que te quede.
> ¿Cuánto dinero tenía Juan y Pedro?

Orgullosos explicamos que la solución se obtiene al plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sin embargo, alguien replicara y con justa razón ¿no sería más fácil preguntarle a Juan y Pedro cuánto dinero tenían?

De modo semejante: El papá de Alejandro tiene 45 años. Es quince años mayor que dos veces la edad de Alejandro. ¿Cuántos años tiene Alejandro? Tan sencillo como ir y preguntarle.

Otros cursos son aquellos en los que los jóvenes se sientan en sus bancas, ordenadamente, y toman notas de lo que el profesor dice y escribe en el pizarrón, de forma sumisa y obediente, y sin que se cuestione la legalidad ni el sentido de la explicación presentada. El paso posterior es memorizar y mecanizar la información recibida, lo cual permitirá responder de manera adecuada a las preguntas y ejercicios que se planteen. De esta manera, los alumnos se limitan a reproducir de modo impersonal lo que se ha dicho, sin darle algún sentido. Esa es la enseñanza que muchos hemos recibido en nuestros años de escolarización. En este contexto notamos que el conocimiento se presenta de manera formal después de haber sido depurado, simplificado y descontextualizado. Ello, en ocasiones, provoca conflictos y bloqueos mentales en los estudiantes al tener que convertirse en reproductores de conocimientos que no les produce la menor impresión emotiva y junto con esto, el encuentro con unas matemáticas aburridas, tediosas e incomprensibles. Esto nos lleva a otro extremo en la enseñanza, al más típico y familiar de los cursos, el que trata las matemáticas como una colección de técnicas, en la cual se debe exhibir el dominio de habilidades específicas y donde se le pide al estudiante adueñarse de cierto tipo de rituales para luego reflejarlos sobre el papel. Los tópicos en tales cursos abarcan, entre otras cosas, quitar paréntesis, agrupar términos semejantes, simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones lineales y cuadráticas y cosas semejantes. El enfoque a estos y otros tópicos en un curso como el ya descrito se presenta a los estudiantes como un ritual que debe ser practicado hasta que pueda ser ejecutado con propiedad, a la manera ortodoxa. En un curso como éste generalmente se le pide al alumno algo como esto: Simplifica el siguiente radical:

$$\sqrt{x^3}$$

Asumiendo que el estudiante comprende lo que significa simplificar una expresión, ¿cuál de las siguientes expresiones está simplificada y, por tanto, es más simple?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Estos cursos más o menos tienen la estructura siguiente. Al estudiante se le motiva a llevar a cabo alguna porción de algún ritual ya visto, convirtiéndolo así en una maquina resuelve ecuaciones. Es de esperar que el estudiante no vea cual es el propósito o meta que hay detrás de esta actividad, a menos que sea alguna de éstas: Que el resultado sea agradable al profesor o, al hablar de competencias, hacerlo mejor que el compañero de al lado. Consecuentemente, el estudiante no percibe alguna razón por la cual el ritual tenga que llevarse a cabo de cierto modo y no de otro.

En tales cursos notamos una cierta creencia: Si los estudiantes pasan bastante tiempo practicando de manera monótona, sin sentido, realizando operaciones mecánicas incomprensibles para ellos, tarde o temprano algo maravilloso ocurrirá: Encontrarán la solución al ejercicio. Por lo tanto, en una clase que pone énfasis en la adquisición de habilidades algebraicas trabajaremos con procedimientos, y como no tenemos otras metas, no seremos capaces de idear otras estrategias, lo único que lograremos es que los alumnos imiten pequeñas porciones de los métodos vistos y nada más. En este tipo de cursos tradicionales, el conocimiento se fracciona en un gran número de pequeñas recetas. No hay metas especificas. A los estudiantes se les muestra como llevar a la práctica las reglas expuestas y se espera que las sigan al pie de la letra. La atención está puesta principalmente en la notación y el sentido o significado de los símbolos y las operaciones son enormemente ignoradas.

Es de esperar que una clase, en donde se proporciona una serie de recetas, fórmulas o teoremas, donde el aprendizaje se da sólo de forma superficial, para el momento y la ocasión, normalmente tendrá vida corta, pues tiene poca conexión con el propio conocimiento personal o el intuitivo sentido común. Clases de este tipo sólo auguran el desastre de una bien planificada lección matemática.

QUÉ ES LA MATEMÁTICA.

¿Son las matemáticas un conjunto de direcciones ya preescritas, fijadas de antemano? ¿Son una serie de rituales a imitar? Hay quienes creen que las matemáticas son exactamente eso. Otros piensan que son letras extrañas, signos, flechas, garabatos. Parece chino.

Sin embargo, para quien siente pasión por la matemática, esta es una gloriosa combinación de ciencia y arte. Por un lado, es la ciencia de la certidumbre, porque sus conclusiones son lógicamente irreprochables. Por otro lado, la matemática tiene su costado estético, pues un resultado puede ser hermoso o sorprendente.

Que la matemática puede ser hermosa se convierte en una sorpresa para los que lucharon con ella como alumnos. La matemática es una disciplina mal entendida. No se reduce a los cálculos en abstracto que se enseña en las escuelas. No es la ciencia de contar.

Mejor aún, la vitalidad de la matemática se debe al hecho de que, a pesar de su abstracción, sus conceptos y resultados tienen su origen en el mundo real y encuentran muchas y diversas aplicaciones en otras disciplinas y en todos los aspectos prácticos de la vida diaria; por ejemplo, empleamos la aritmética cuando calculamos nuestros gastos, aunque las reglas a emplear sean muy sencillas. Pese a ello, algunos consideran que lo que se enseña está muy alejado de la sociedad y de la realidad cotidiana de nuestros días. Incluso muchos de los cerebros más brillantes se han enorgullecido soberbiamente de hacer matemática sin aplicación alguna. Por ejemplo, G. H. Hardy celebraba su propia inutilidad, aunque su punto de vista ha sido desmentido por los hechos. Entonces, ¿qué es matemáticamente significativo?

Imagen 1. G. H. Hardy, el gran teórico de números inglés, aborrecía la matemática aplicada: "Ninguno de mis descubrimientos ha hecho, ni es probable que haga directa o indirectamente, para bien o para mal, una mínima diferencia en la amenidad del mundo." (Cortesía de The Master and Fellows of Trinity Collage, Cambridge.) Contenido en: Paul Hoffman. *El hombre que solo amaba los números*. España: Granica. 2000. Página 177.

La importancia de las matemáticas es muy especial, ya que representa, en la mayoría de los casos, la única oportunidad que tiene el estudiante de entrenarse en el pensamiento ordenado y sistemático. En efecto, las matemáticas nos enseñan a pensar y, como consecuencia, a confrontar y resolver nuestros problemas diarios.

Al terminar los estudios de bachillerato, una persona ha recibido doce años de educación matemática. En muchos casos, esta es toda la matemática que estudiará en su vida y probablemente debería ser suficiente para la mayor parte de las necesidades de la vida cotidiana. Pero, ¿qué sabe realmente de matemáticas? ¿Qué porción de todo el caudal de información recibida queda formando parte de su cultura general?

Aprender matemáticas es más que contar y hacer operaciones elementales con los números. En matemáticas, el aprendizaje debería consistir en entender, y no en memorizar. Sin hacer a un lado el papel formador de las matemáticas, —pues éstas deben ser vistas como un entrenamiento de la razón, como una forma de ejercicio del pensamiento y el espíritu crítico— otra meta fundamental del aprendizaje de las matemáticas debería ser que los estudiantes desarrollen una disposición de ánimo distinta y una mayor apreciación por el que hacer matemático. La razón es que tal vez dos son los problemas principales que parecen tener los cursos de matemáticas: Por un lado, resultan aburridos para la mayor parte de los estudiantes; por otro, pocos parecen entender la utilidad e importancia de lo que se les enseña. Estos dos asuntos corresponden a la mayor parte de las quejas sobre los cursos de matemáticas y se escuchan tanto en boca de alumnos como de profesores.

Lecturas sugeridas:

1. Alejandro R. Garciadiego."... y, ... las matematicas, ... ¿para qué nos sirven?" *Acta Universitaria* **7** (1997) 3-14.

2. Ana Millán Gasca. *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. España: Nivola 2004. Capítulo 4. Páginas 51 – 99.

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS PARA UN ESTUDIANTE QUE INGRESA A BACHILLERATO?

Jorge Luis González Alanis.

A Roberto no le gustan las matemáticas. Como sucede a muchas personas, no las acaba de entender.

— ... odio todo lo que tiene que ver con matemáticas

— ¿Por qué?

— Si dos panaderos hacen cuatrocientas cuarenta y cuatro trenzas en seis horas, ¿cuánto tiempo necesitarán cinco panaderos para hacer ochenta y ocho trenzas? ¡Que tontería! —siguió despotricando Roberto—. Una forma idiota de matar el tiempo.

— ¿De dónde te has sacado esa historia de las trenzas? Seguro que del colegio.

— ¡Y de dónde si no! – dijo Roberto-. El señor Hernández, ese estúpido, que nos da matemáticas.

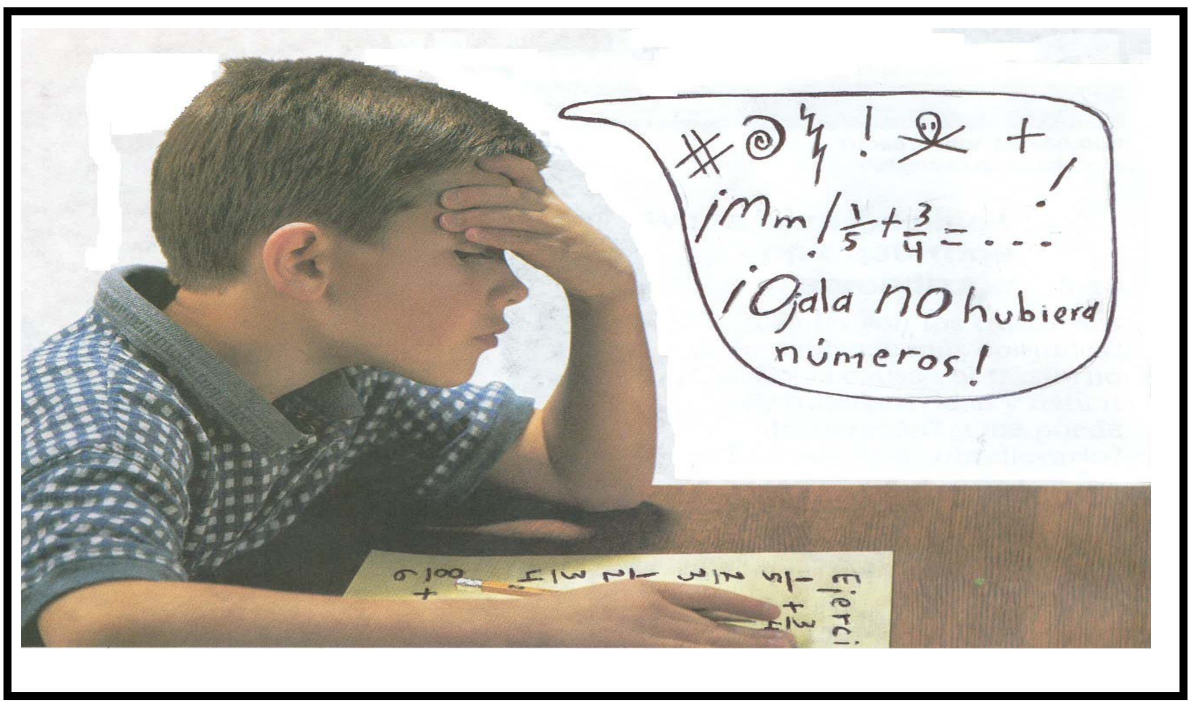


Figura 1.

Toña acaba de ingresar al bachillerato y no piensa seguir una carrera en matemáticas, así lo da a entender por sus comentarios:

— ¡Qué clase tan aburrida! Siempre haciendo cuentas.

— ¿Para qué sirven las cosas que nos enseñan?

— No entendí nada. ¡Es muy difícil!

Y la lista de comentarios y actitudes negativas hacia las matemáticas y la forma en que se enseñan, continúa.

La realidad es que, la mayor parte del tiempo, en las aulas se presentan unas matemáticas desprovistas de atractivo, cargadas de problemas mecánicos, tediosos y abstractos, y no es de extrañar que, en consecuencia, los alumnos así perciban a la matemática. Referente a un curso de álgebra y geometría a nivel bachillerato, al estudiante se le pide resolver ejercicios tan alejados de la realidad como lo son los resultados que obtienen. Observemos que en los siguientes 'problemas' el alumno debe aplicar las reglas formales expuestas en clase para obtener de igual forma, un resultado abstracto.

- Simplificar la expresión

$$\frac{x^2+2x+4xy+8y}{x^3+12x^2y+48xy^2+64y^3}$$

- Desarrollar el siguiente binomio a la quinta potencia y simplifica. Toma en cuenta que i corresponde a la unidad imaginaria y que, $i^2 = -1$

$$(2 + i)^5$$

- Calcular la ecuación del lugar geométrico dado por una circunferencia de radio 2 y centro en (1, 3).

- Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k + 1)\,y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x – 2y – 11 = 0$

Resolver ejercicios como los anteriores tiene su lugar pues, por definición, un ejercicio es el esfuerzo intelectual que sirve de práctica de las reglas establecidas en una lección, y los planteados arriba, requieren que el alumno elija una combinación adecuada, entre varias posibles, de conocimientos ya estudiados. No hay duda de que enfrentarlos requiere capacidad de cálculo y de manipulación algebraica, herramientas que hay que exhibir a grado razonable, al menos, para ser promovidos al siguiente curso. Pero esto no es más que el reflejo de una clase típica de matemáticas en la cual abunda el engorroso aparato matemático, es decir, los símbolos, esas espantosas *x*s y *y*s. Resultados acabados que quién sabe de dónde salieron y que ponen el énfasis en practicar un conjunto de procedimientos. No es sorpresa, por tanto, que este acercamiento mecánico a las matemáticas haga que los estudiantes no le encuentren sentido, y, por extensión, se sientan decepcionados y aburridos. Por otra parte, la visión generalizada que se tiene de los problemas que los alumnos tienen que resolver es más bien desde el enfoque mecanicista, y que en lugar de problemas se espera que el alumno resuelva ejercicios más o menos elaborados.

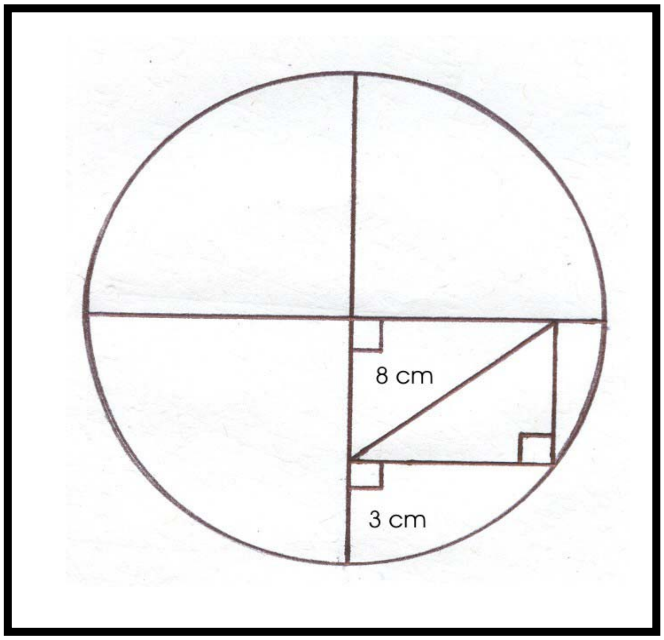
Una clase típica de matemáticas es quizás el reflejo de un esquema lineal de enseñanza el cual pone énfasis en cumplir con el programa oficial y donde los problemas reales se dan sólo para ilustrar los contenidos matemáticos enseñados. Es de esperar que las clases de este tipo propicien el rechazo y el desencanto de los estudiantes hacia las matemáticas y otros temas de corte científico. Y, si a esto añadimos que el profesor no motiva adecuadamente a sus alumnos, los resultados son peores. Puede llevar a que estos crean, erróneamente, que no entienden matemáticas, lo que afectará su desempeño posterior en la materia.

Otros factores que hay que tomar en cuenta son el miedo, el coraje, la frustración, la reincidencia de fracasos, todos muchas veces ignorados, y que conduce a muchos alumnos a pensar que no son buenos en matemáticas o a creer el mito de que esta disciplina es sólo para genios y todo porque la tarea o el examen les exige exactitud matemática y la larga cadena de pasos algebraicos rebasa sus habilidades reales. ¿Reforzamos estos sentimientos y actitudes por la forma en que enseñamos? Entonces, ¿cuál es la mejor forma de paliar la situación?

Queremos que a los alumnos les gusten las matemáticas y las observen con expectación, que desarrollen una disposición y apreciación para participar en actividades propias del quehacer matemático, que participen de la comprensión de estas ideas, y, por qué no, en la construcción de las mismas; en pocas palabras, que se involucren más con la materia. De igual modo, nos gustaría que también vieran la trascendencia e importancia de lo que se les enseña; que vieran las matemáticas como algo bello y excitante, que tiene una finalidad práctica aprenderlas. Para lograr estos objetivos, tal vez la primera meta a alcanzar sea vencer las creencias rígidas y negativas que muchos tienen con relación a la materia, procurando ser menos sofisticados en su enseñanza y mostrando que las matemáticas están relacionadas con el resto del mundo, un mundo que contiene unas matemáticas vivas, llenas de emoción y siempre interesantes.

La visión general de un alumno a nivel bachillerato es que las matemáticas son un 'mal necesario' del cual hay que salir lo más pronto posible. Su reacción ante tanta herramienta matemática es 'y esto ¿para que me sirve?'. Si la matemática debe estimular la acción de pensar y ésta no necesariamente requiere de tanto aparato matemático, entonces quizás sea recomendable discutir con los alumnos formas no sofisticadas de resolver algunos problemas o situaciones. A modo de ejemplo, ilustramos lo anterior con los siguientes ejemplos.

- Plantar diez árboles en cinco hileras de cuatro árboles cada una.
- Encontrar el producto de: $(x - a)\ (x - b)\ (x - c) \ldots (x - z)$
- Considérese el diagrama siguiente:



Hallar el radio del círculo.

La característica de tales problemas es que, si bien matemáticos en su naturaleza, y posibles de solucionar por medio de la aplicación metódica de herramientas y técnicas matemáticas, también se pueden resolver siguiendo un atajo. Es probable que el matemático formado ataque el problema como si fuera el caso especifico de un problema general para cuya resolución recibió entrenamiento. Otra persona, al carecer de las poderosas herramientas matemáticas, es más apto para encontrar la solución del atajo —si es que la hay—, ya que se ve forzado a adoptar un punto de vista fresco y creativo. Es probable que la capacidad para hallar una pronta solución se relacione con la facultad de creación.

En el primer caso, hay que plantar los árboles de la manera más compacta posible de modo que cada uno forme parte de varias hileras. Entonces hay que dedicarse a la tarea de trazar diagramas tras diagramas. Tarde o temprano surge la simple y elegante respuesta: Una estrella.

En apariencia, encontrar el producto de la serie $(x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - z)$, ni siquiera puede resolverse con ayuda de una calculadora. A medida de que se le observa, va adquiriendo el aspecto de algo que se ve en la pizarra de una facultad de ciencias exactas mientras un grupo de matemáticos se consagra a analizarlo con absoluta concentración. Pero, un momento, ¿qué significa esa elipsis (...), ese inofensivo símbolo matemático de los tres puntos que reemplaza a *etcétera*? Esos inocentes puntitos ocultan, sorprendentemente, una serie continua y ordenada. ¿Qué hay en esos tres puntos tan peculiares? Cuando empezamos a abrirnos paso a través de los elementos no expresados de la ecuación —$(x - d)$, $(x - e)$ y así sucesivamente—, se nos ocurre que a su debido tiempo llegaremos a $(x - x)$. Y como $(x - x)$ es igual a cero, el resto de la ecuación, por más intrincada y matemáticamente compleja que sea, por supuesto será igual a cero.

Con un poco de lógica y tenacidad, tal vez alguien se de cuenta de que basta con trazar la otra diagonal del rectángulo para hallar el radio del circulo. Nada de geometría analítica.

Lecturas Sugeridas.

1. Hans Magnus Enzensberger. *El diablo de los números*. Madrid: Siruela 1997.
2. James F. Fixx. *Juegos de recreación mental para los muy inteligentes*. México: Gedisa 1987.

UN PUNTO DE VISTA DE POR QUÉ RECURRIR A LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Jorge Luis González Alanis

Como una respuesta al desencanto generalizado por la enseñanza de las matemáticas, este trabajo señala algunos elementos para una enseñanza más atractiva y ágil en los niveles formativos. Y, en lo que sigue, enfatizamos que, cualquier recurso que se proponga, debe ser un medio y no un fin para lo que se pretende. Debe ser la respuesta a la pregunta: ¿Qué buscamos? ¿Qué queremos hacer? ¿Qué intentamos conseguir? Dicho recurso debe servir para explicar el concepto en ese momento, de ahí que el profesor debe estar siempre alerta y estar dispuesto a mejorar cada día para conseguir un cambio favorable en la actitud y el rendimiento de los estudiantes hacia las matemáticas. El propósito es hacer más humanas nuestras clases, alejadas un poco, tal vez, del desplante algebraico.

Muchos docentes hacen un esfuerzo por abrir su mente a cosas nuevas, a trabajos diferentes, e intentan conseguir ideas para plasmarlas posteriormente en su trabajo diario. También hay otros que forman el grupo de brazos cruzados, los que no quieren cambiar su práctica en el aula. Todos tenemos un poco de cada uno de ellos: Estamos dispuestos a escuchar aspectos novedosos y tenemos temor a introducir otros nuevos en el aula. El punto es que, cuando trabajemos, no tengamos las cosas o la mente tan sistematizada y cuadriculada. Cualquier cambio es un proceso lento, gradual y difícil. Por eso es aconsejable empezar con pequeños cambios que muestren éxitos sencillos.

Evidentemente, no hay fórmulas mágicas que recomendar, pero cursos adecuados, tanto desde el punto de vista del contenido como de la forma de ser enseñados, conseguirían un impacto importante en la formación integral del estudiante. Así mismo, ¿cuáles son los aspectos fundamentales que ayudan a promover en el salón de clases el entendimiento de las ideas matemáticas por parte de los estudiantes? ¿Qué significa que un estudiante aprenda un concepto o una idea matemática? ¿Qué tipo de contenidos y actividades de aprendizaje deben estructurar nuestros cursos? En particular quizás sea necesario reevaluar tanto el contenido del currículum, así como las estrategias de instrucción que se usan en la enseñanza del álgebra. Después de todo, un mismo conocimiento matemático se puede presentar de formas diversas, por lo que es aconsejable, si no es que necesario, conocer más de una presentación.

Este trabajo estimula a utilizar la historia en la enseñanza, aunque algunos protestan enérgicamente debido a que piensan que es añadir más carga, más tópicos, a un curso que de por sí está saturado en virtud de los temas a cubrir como parte del currículo. Sin embargo, argumento que, incorporar la historia como parte de la instrucción, es un modo muy juicioso de dar a conocer algunos temas y, mas que ser una tarea adicional, puede ser una buena herramienta para una enseñanza eficaz. La historia en las clases de matemáticas no sólo enriquece nuestros cursos; también hace la materia más accesible a nuestros alumnos.

La idea que trato de desarrollar consiste no en eliminar contenidos e incluir nuevos, o eliminar obsoletos por aquellos que sean más novedosos. Como mencionamos arriba, sencillamente se trata de humanizar más nuestras clases con un poco de historia en la enseñanza de la materia. En otro contexto, los cursos tradicionalmente se establecen como mecanismos para comunicar a los estudiantes resultados y métodos ya acabados. Las reformas se reducen a reemplazar un conjunto determinado de resultados por otro conjunto quizás más novedoso y reciente; por ejemplo, en lugar de estudiar geometría euclideana, estudiar geometría fractal; en lugar de estudiar probabilidad y estadística, análisis de datos, etc. Sin embargo lo que ahora se hace con los contenidos novedosos es exactamente lo mismo que se hace o hacía con los otros contenidos: Aprenderse las propiedades y trabajar en problemas donde se aplican las propiedades, etc. Los contextos en que se trabaja pueden ser modernos, pero los métodos que se utilizan son los mismos que se han usado desde hace más de cien años. Sin embargo, ¿qué conservan los alumnos, a largo plazo, de lo que supuestamente aprendieron en la escuela?

Deseamos que los estudiantes no sólo abarquen contenidos sino que entiendan y desarrollen nuevos conocimientos, que la materia les resulte más interesante, amena y, porque no, hasta divertida (véase: Lámina 1); que no conciban a las matemáticas como un conjunto de reglas o procedimientos que deben aprender y exhibir satisfactoriamente sólo para poder ser promovidos al siguiente año.

¿Debe ser siempre divertido aprender?

El profesor William Ayers elaboró una lista de diez mitos relativos a la enseñanza. Uno de ellos es: "Los buenos maestros hacen que aprender resulte divertido". Dice al respecto: "La diversión distrae, entretiene. Los payasos son divertidos, y algunos chistes también lo son. Aprender puede ser interesante, fascinante, increíble, desconcertante, apasionante y, a menudo, sumamente agradable. Si es divertido, estupendo; pero no tiene por qué serlo. La enseñanza exige una amplia gama de conocimientos, aptitudes y habilidades, así como discernimiento y entendimiento. Pero, sobre todo, exige una persona considerada y comprensiva" (*To Teach—The Journey of a Teacher*).

Sumio, de la ciudad de Nagoya (Japón), ha notado en sus alumnos el siguiente problema: "A muchos estudiantes de la escuela secundaria no les interesa nada salvo la diversión y lo que no requiere ningún esfuerzo".

Rosa, consejera estudiantil de Brooklyn (Nueva York), dice: "La actitud general de los alumnos es que aprender es aburrido y el profesor es aburrido. Creen que todo ha de divertirles. No se dan cuenta de que se aprende de acuerdo con el interés que se pone en aprender".

Esta obsesión que tienen los jóvenes por divertirse hace que les resulte difícil esforzarse y sacrificarse. Sumio, citado unas líneas más arriba, comenta: "En resumidas cuentas, no piensan en el mañana. Hay muy pocos estudiantes de secundaria que creen que trabajar arduamente ahora les beneficiará en el futuro".

Lámina 1. Tomada de: Revista *¡Despertad!* 8 de Marzo de 2002. Página 11.

UN ENCUENTRO MENOS FRONTAL.

¿Es necesario que el estudiante se enfrente a una lista extensa de contenidos que tradicionalmente se estudian a nivel superficial? ¿O es necesario reducir los temas y estudiar con mayor profundidad sólo algunos contenidos fundamentales de las matemáticas? ¿Es posible identificar cuáles son las ideas fundamentales de esta disciplina? ¿Podemos determinar qué es y qué no es verdaderamente primordial? Mejor aún, ¿es posible que el encuentro entre los estudiantes y las matemáticas sea menos frontal y, por contraste, más ameno e interesante?

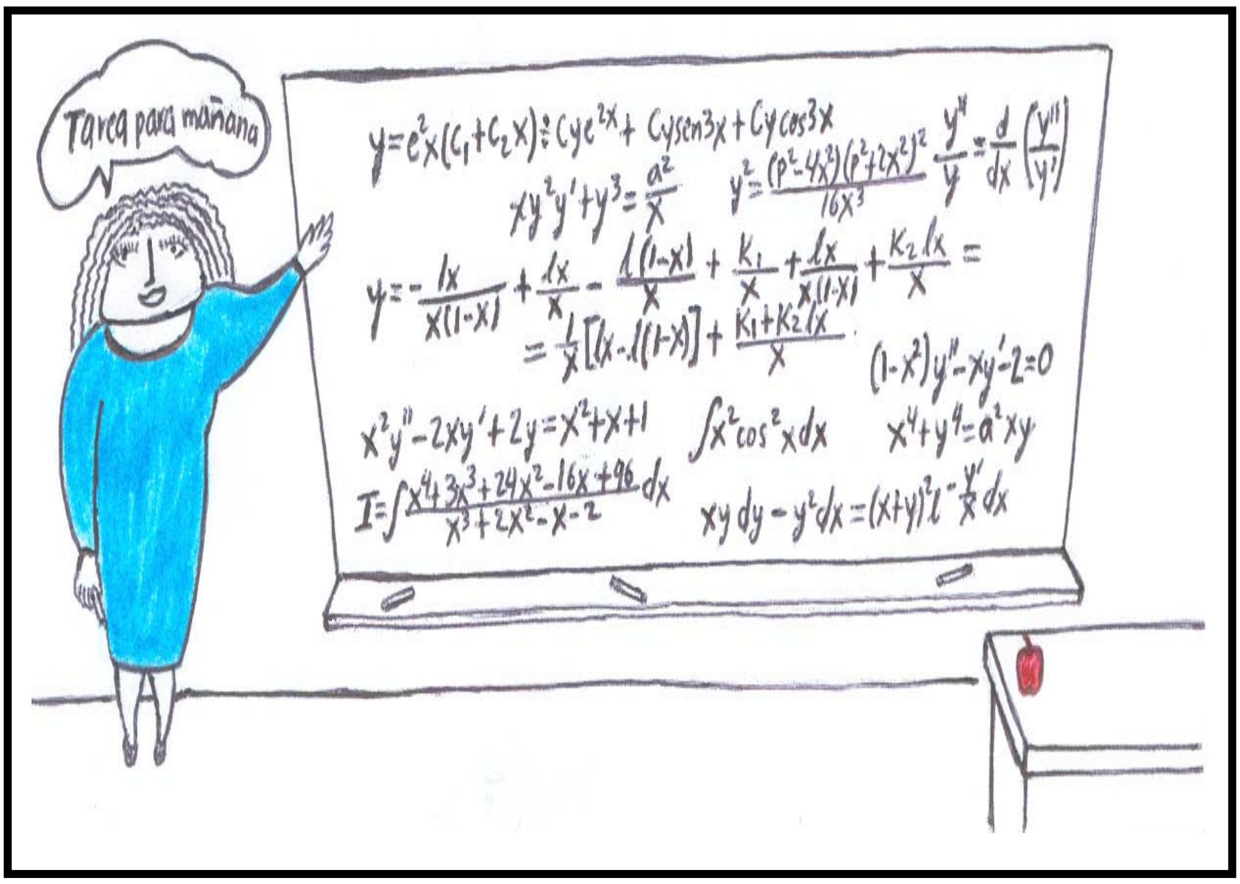


Imagen 1. Tomada de: Mariano Perero. *Historia e historias de Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana 1994. Página 73.

Existen diferentes puntos de vista de cómo se pueden realizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, algunos consideran que es a través de la solución de problemas. Sin embargo, la mayor parte de las veces, los problemas aparecen como aplicaciones de procedimientos previamente aprendidos como parte de un contenido específico, es decir, no impregnan todo el contenido del programa. El papel de la resolución de problemas no es simplemente aplicar conocimientos sino, sobre todo, que el alumno construya conocimientos nuevos, desarrolle estrategias. Resolver problemas requiere del alumno la creación de una combinación original, mucho más suelta, de conocimientos y habilidades, así como el uso de razonamientos verosímiles. Un ejercicio permite memorizar un proceso específico y tener una mayor habilidad y rapidez en su ejecución, y sólo pide la aplicación mecánica de procesos previamente aprendidos y que busca que el alumno sea capaz de repetir lo ya hecho. Esta es, en esencia, la diferencia entre resolver problemas y hacer ejercicios.

Otros quizás enfatizan la adquisición de habilidades por parte del alumno. Para el conocedor, el método algebraico, o lo que es lo mismo, el método de cálculo literal, cobra especial valor pues está presente en toda la matemática. No obstante, ¿cuánta de toda esta herramienta es significativa para los estudiantes en los niveles formativos? Por ejemplo, el método de completar cuadrados es 'un paso necesario' para la obtención de la fórmula cuadrática pero, en la vida real, difícilmente uno se encuentra con problemas cuyo planteo conduce a una ecuación de segundo grado, a menos que uno se tope con algo como esto: Pedro y su hijo Felipe pueden cosechar una canasta de manzanas en diez minutos. Felipe tarda cuatro minutos más que Pedro en cosechar una canasta de manzanas. ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en cosechar una canasta de manzanas? Cabe hacer mención que la solución de este problema 'real' hace uso del método de completar el cuadrado. Pero es un problema artificial, es decir, un problema armado para ilustrar 'el poder' del método descrito. ¿No sería más fácil tomarles el tiempo con un cronómetro? Por cierto, la solución de este problema es de la forma: $x = a \pm \sqrt{b}$ (en este caso, $x = 8 + \sqrt{140}$). Por tal motivo, el plan que sugerimos seguir sostiene que es pedagógicamente positivo recurrir al análisis histórico de las matemáticas para aclarar a nuestros estudiantes algunos conceptos.

El ser humano es a la vez físico, biológico, psíquico, cultural, social, histórico, etc; y, en la ciencia, las conquistas logradas por los grandes hombres, no se pueden estudiar aislándolas de su ambiente social. En ningún dominio cultural el ser humano es autosuficiente, y menos todavía en el de las matemáticas. Porque no hay descubrimiento efectivo alguno que pueda hacerse sin contar con el trabajo preparatorio de centenares de hombres y mujeres de menor talla. Se trata pues, de un esfuerzo cooperativo. La historia proporciona, entre otras cosas, datos precisos sobre fechas, nombres, lugares, y anécdotas amenas llenas de colorido. Sin embargo, ¿está la historia compuesta enteramente de nombres, fechas y títulos? La historia desarrolla una narrativa e implica un argumento. En un primer plano abarca una descripción de sucesos; en un plano superior involucra explicación y análisis.

Por otra parte, son muchos los estudiantes de bachillerato que no van a seguir una carrera en matemáticas. Su encono hacia ellas es muy marcado, hecho que se evidencia cuando eligen sus cursos o carrera tratando de evitar más clases de ellas. Tampoco van a recordar, y menos usar, esas fórmulas y teoremas que deducimos con tanto esmero y precisión en nuestras clases. Luego, no se trata de enseñar matemáticas a nuestros alumnos como si fueran a ser matemáticos profesionales. Lo que sí importa, o al menos lo que sí les puede interesar, es saber quiénes eran los personajes que habían detrás de esas fórmulas, por qué y cómo las habían inventado, en que momentos de la historia de la humanidad habían aparecido y en respuesta a que necesidades intelectuales, económicas o sociales.

Lo que cuenta es que vean las matemáticas como una de las tantas actividades humanas, producto de personajes reales, con vida propia, con angustias y problemas propios. Por ejemplo, en vez de limitarnos a decir que los números complejos son de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales ordinarios y pasar a hacer operaciones con ellos, podemos hacer uso de la historia y mencionar cosas como las siguientes.

Girolamo Cardano (1501 – 1576) era un médico, matemático y astrólogo que fue procesado por el Santo Oficio porque, entre otras cosas, hizo un horóscopo de Cristo y estaba en contra de la inmortalidad del alma. Como matemático fue el primero en operar con raíces cuadradas de números negativos; trataba de resolver el siguiente problema que se discutía entre los matemáticos de la época: 'Dividir el número diez en dos partes, de tal forma que una de las partes, multiplicada por la otra, dé cuarenta'.

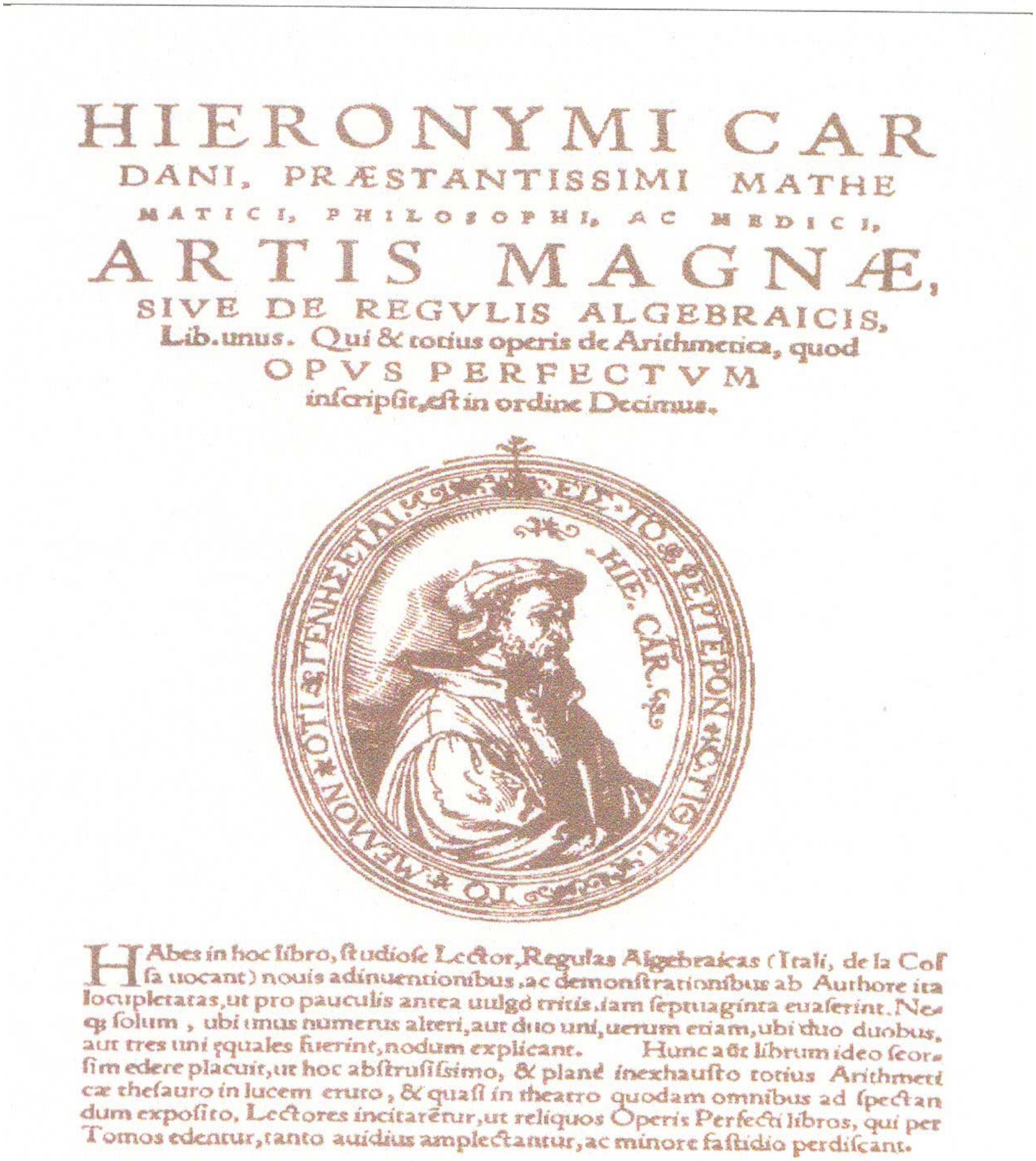
En lenguaje moderno, el problema de Cardano se puede plantear como el de encontrar x y y que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 10$$

$$x \bullet y = 40$$

Cardano encontró los dos números: $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$ cuya suma es 10 y cuyo producto es 40. Y añadió: 'Esto es verdaderamente sofisticado y como hemos dicho, tan refinado como inútil'.

Al resolver el sistema planteado notamos que las dificultades que condujeron a la creación de los números complejos surgen por primera vez al tratar de resolver las ecuaciones de segundo grado. Y, convencionalmente, los matemáticos introducen un nuevo tipo de número: $i = \sqrt{-1}$ (el número imaginario i, la raíz cuadrada de -1).



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Imagen 2. Portada de una edición del *Ars Magna* de Cardano donde explica las reglas para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado; en ella menciona las raíces negativas (las llamaba falsas) y las imaginarias (las llamaba ficticias).

Tomada de: Francisco Martín Casalderrey. *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. España: Nivola 2000. Página 138.

Por tal motivo es necesario dar mayor relieve a ciertos aspectos culturales, y no tanto al aspecto técnico de las ideas o conceptos matemáticos. Hay que motivar a los estudiantes para que conozcan e intercalen con el desarrollo de la humanidad y la creación o aparición de determinados conceptos. Después de todo, las grandes fechas y los grandes logros no invitan exclusivamente a mirar retrospectivamente al pasado, sino que dirigen nuestros pensamientos a lo inmediatamente desconocido. Así que hay que motivar al estudiante a entender el marco histórico del objeto de estudio en cuestión y tratar de infundir en él una actitud más crítica y escéptica, requiriendo para ello algún tipo de explicación o enumeración de razones.

Una actitud crítica no se consigue al resolver una extensa lista de ejercicios. Actividades de este tipo sólo requieren de la aplicación automática de una destreza o un algoritmo previamente conocido. Hacer hincapié en el trabajo de una larga lista de ejercicios puede ser una actividad matemática trivial. Luego no se trata de enseñar solamente resultados matemáticos acabados, y tratar de ponerles una chamarra real, a fin de motivar a los estudiantes, añadiéndole algo dulce a los temarios a fin de hacer menos insípidas las clases. ¿No es más viable ver que tipo de actividad cooperativa produjo esos resultados? Es obvio que esto no se ve por si sólo en una fórmula matemática. Esto sólo se puede ver entre las personas que hicieron y hacen matemáticas, que cooperaron creativa y críticamente; de este modo, si no mucha, por lo menos algo de matemáticas se puede aprender a través de sus protagonistas. Corresponde al docente elegir el concepto o tema a tratar, asesorar a los alumnos en su estudio y estimular la acción de indagar un poco más. A este respecto, el docente tiene la responsabilidad de establecer un ambiente donde se despierte el pensamiento. Luego, la presentación de la clase ocupa un lugar fundamental pues debe favorecer o propiciar el interés y la motivación.

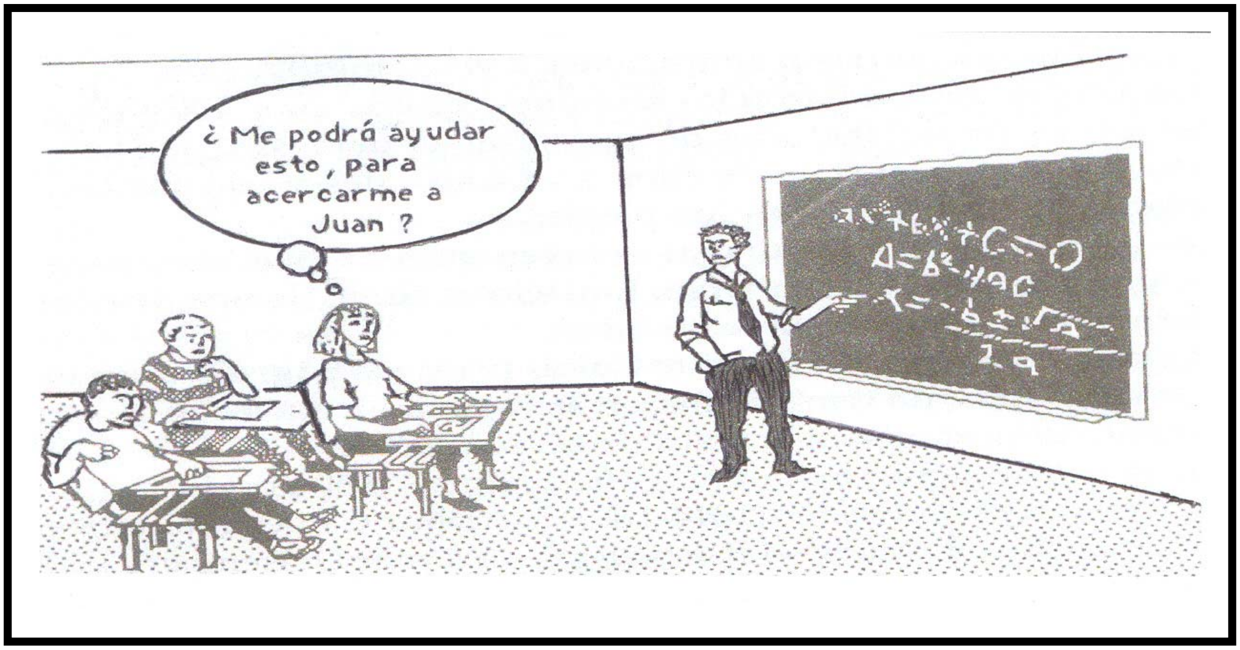


Imagen 3. Tomada de: Mariano Perero. *Historia e historias de Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamerica 1994. Página 76.

La meta que perseguimos es que el conocimiento de la materia no dure sólo hasta el día del examen, sino que tenga un período más largo de permanencia al asentarse y relacionarse con otros elementos básicos. Esto último requiere que el docente sea constantemente creativo en el aula y que tenga apertura a nuevas ideas.

Entonces, las matemáticas, y en particular el álgebra, no debe pensarse como una colección de trucos, como aparece comúnmente en los libros de texto: Un truco para esto, un truco para aquello. La instrucción matemática, y en particular su enseñanza a nivel bachillerato, debe procurar el entendimiento de cómo y por qué se hacen las cosas cómo se hacen. Si entendemos, no olvidamos. La enseñanza de las matemáticas requiere iniciativa, imaginación, reflexión y flexibilidad. No es la mera exposición de un conjunto de reglas que se aplican de manera mecánica. Enseñar es una habilidad que tiene que desarrollarse. Envuelve explicar el qué, cómo, por qué, dónde y cuándo de un asunto, y este es un trabajo que requiere pericia. Y aunque es difícil saberlo todo o conocerlo todo, siempre será de ayuda estar preparado con información que particularmente corresponda con las necesidades de los estudiantes.

Enseñar no es dictar, sino preguntar, identificar nuevas metas y justificar los hechos. Se hace necesaria cambiar la forma de presentar las matemáticas en los salones de clase ya que lo importante es enfatizar unas matemáticas reflexivas. Cualquier estrategia de trabajo puede tener su importancia y no tiene sentido buscar el método por excelencia. Es más conveniente elegir el adecuado en cada momento, y esta metodología de enseñar las matemáticas a través de su historia o de explicar ciertas ideas o conceptos a través del análisis histórico (descripción en un primer intento), sugiero utilizarla como un medio y no como un fin. Es, sencillamente, una idea para hacer más accesible el encuentro con las matemáticas. Hasta que no se realice, no sabemos ni qué puede ser ni a qué pueda llegar.

Lecturas sugeridas:

1. Alejandro Garciadiego. 'Pedagogía e historia de las ciencias, ¿Simbiosis innata?'; contenido en: Alejandro Garciadiego. Luis Vega y Francisco Rodríguez Consuegra. *El velo y la trenza*. Colombia: Editorial Universidad Nacional 1997. Capíulo 1. Páginas 17 – 34.

2. Luz Manuel Santos Trigo. 'Hacia una instrucción que promueva los procesos de pensamiento matemático'; contenido en: Eugenio Filloy (comp.) *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica 2003. Capítulo 16. Páginas 314 – 331.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO UNA HERRAMIENTA EN LA ENSEÑANZA

Jorge Luis González Alanis

Entre los matemáticos ha existido un considerable reconocimiento por la tradición; un marcado sentimiento de deuda para con los predecesores y de obligación de continuar su obra. De esta manera, los comienzos de la historia de las matemáticas se remontan probablemente a una obra dedicada a la historia de la geometría griega escrita por Eudemo de Rodas, un discípulo de Aristóteles, que vivió en el siglo IV a. C.

Efectivamente, destacados matemáticos ven claramente y resaltan conscientemente la continuidad y coherencia de la evolución de su disciplina, al combinar de un modo muy fructífero la exposición de sus propios resultados con consideraciones históricas. En este sentido, se ha llegado a decir que ninguna área intelectual perdería más que las matemáticas si este prescindiera de su historia. A este respecto, podemos destacar el énfasis que pone la revista *Mathematics Teacher* en todo su número de Noviembre de 2000, al agrupar en tres categorías los artículos ahí publicados: Pensando en historia y sus conexiones con la educación matemática; aprendiendo historia; y, el uso de la historia en las clases de matemáticas.

Las matemáticas son una forma específica de consciencia social. Son algo más que el resultado del intercambio de conocimientos, de teorías y métodos. Están conformadas, simultáneamente, por intereses materiales e ideales. Son el producto de instituciones y escuelas científicas y dependen también de la posición social del interesado y de su ideología. En otras palabras: Las matemáticas no son, en absoluto, un ámbito autónomo; sino una componente integrante de la vida social, es decir, las matemáticas han estado, ahora y siempre, en permanente correlación con la producción y reproducción de los fundamentos materiales e ideales de la vida social.

ALGUNOS ASPECTOS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

En el contexto apropiado, para poder comprender el proceso evolutivo de las matemáticas de forma objetiva y científica, la historia de éstas debe dar atención a los diversos aspectos del desarrollo de las matemáticas como son los siguientes:

- Las correlaciones con el desarrollo de las fuerzas productivas.
- Las correlaciones con el desarrollo de los medios de producción.
- La historia de sus problemas, la historia de sus conceptos y las conexiones intracientíficas.
- El desarrollo de las ideas científicas: ¿Cómo se originaron, evolucionaron e influenciaron a otras ideas?
- Las correlaciones con los aspectos culturales e ideológicos.
- La relación de los científicos con la sociedad en la que estuvieron inmersos.
- La historia e influencia de las instituciones científicas y de las formas de organización.
- Las relaciones con el desarrollo de las ciencias naturales.
- Las correlaciones con el desarrollo de la filosofía y las ideologías.
- Aspectos biográficos.
- Aspectos bibliográficos.

La conexión directa entre el desarrollo de las fuerzas productivas y el desarrollo de las ciencias naturales y las matemáticas está documentada con numerosos ejemplos históricos. Al partir de esta relación se explican las direcciones principales de la matemática europea durante el Renacimiento. Sólo sobre la base del desarrollo de las fuerzas productivas se puede explicar de manera plausible la revolución científica que tuvo lugar durante los siglos XVII y XVIII, que supuso para las matemáticas el paso a una matemática de magnitudes variables, así como el nuevo estatus social que adquirió la matemática tras la revolución industrial en los siglos XVIII y XIX. Por su parte, la formación de algunas ramas de la matemática moderna (como la teoría de juegos, la teoría de la información, la teoría de la optimización lineal) está estrechamente relacionada con la transformación de las matemáticas en una fuerza de producción directa, al afectar incluso la relación de la matemáticas con los medios de producción.

Por supuesto, no se puede caer en simplificaciones y buscar todas las causas del desarrollo de las matemáticas en el ámbito económico. Hay momentos de desarrollo intracientifico, principios ideológicos, aportaciones individuales y también están los condicionamientos psicológicos de la creatividad. Estos y otros factores actúan como causas objetivas del desarrollo. Visiones diferentes del mundo condujeron a egipcios, mesopotámios, griegos, hindúes, chinos, árabes y europeos de la Edad Media o Moderna a considerables diferencias en la esfera filosófica, pero también en los problemas matemáticos abordados y en los métodos empleados en su resolución.

En otro plano se encuentra el elemento biográfico, la narración de la búsqueda y de la investigación, de la ferviente toma de partido por el progreso de las ciencias. También los más destacados sabios eran gente de carne y hueso y vivieron bajo circunstancias concretas –fueran favorables o desfavorables–, representaron opciones políticas, aspiraron a cumplir determinados objetivos y tuvieron sus propias opiniones y concepciones ideológicas. La labor llevada acabo por Euclides, Arquímedes, Newton, Leibniz, Euler, Gauss y Cantor, por sus amplias repercusiones posteriores, coloca a estos investigadores por encima de la gran multitud de otros estudiosos –que posiblemente dedicaron igual esfuerzo y trabajo– y les asegura un permanente respeto y admiración.

Sin la historia de los conceptos –como por ejemplo, los de función, espacio, valor límite, integral, grupo, número–, sin la historia de los problemas y sin la historia de disciplinas matemáticas especiales, el cuadro del desarrollo de la matemática quedaría incompleto en su esencia.

En el desarrollo de las matemáticas la unidad de lo histórico y lo lógico se manifiesta particularmente evidente: Todo conocimiento, toda idea se gestó en una situación histórico-social concreta. El tipo de matemáticas, sus objetivos y métodos eran distintos en la temprana sociedad de clases del antiguo Egipto o de Mesopotamia, donde se trataba, casi sin excepción, de una matemática empírica y aplicada según una serie de recetas; en el período de la filosofía natural jónica, en el que la matemática nació como ciencia; en la sociedad feudal europea, en la que la matemática se entendía como sirviente de la teología; radicalmente distintos en la sociedad preburguesa del Renacimiento o en la época del capitalismo manufacturero y de la Revolución Industrial, en la que la matemática llegó a alcanzar, al menos a grandes rasgos, una función social de potencia productora, que dio lugar subsecuentemente al papel de la matemática como fuerza productiva en la época actual.

Otra cuestión importante son las estrechas relaciones o, mejor aún, interconexiones de las matemáticas con las ciencias. El desarrollo histórico real no conoce la separación entre matemáticas y ciencias, sino más bien una ligazón estrecha. Se podría hablar, incluso, de una unión personal. Por ello, la historia de las matemáticas podrá acercarse a la verdad histórica sólo si se apoya en la historia de las ciencias. Galileo ya lo había entendido así, cuando anuncio su pragmática frase de que 'el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas'. Y, ¿cómo separar al Kepler matemático del Kepler astrónomo? ¿Cómo habría de estimarse, por otra parte, el trabajo teológico o alquímico de Newton?

En definitiva, la historia de las matemáticas nos revela la estrecha relación de las matemáticas con las demás esferas del conocimiento. Cuanto más nos acercamos a la época actual, más clara nos parece la íntima conexión entre el desarrollo de las matemáticas y el de otras disciplinas sociales, como por ejemplo la economía. Piénsese en el desarrollo de disciplinas como la estadística, la optimización lineal o la teoría de juegos.

Mucho más antigua es la estrecha relación entre las matemáticas y el pensamiento filosófico. Conforme a las diversas fuentes, se pueden documentar ya desde el tiempo de la antigüedad greco-helenística. Considérese la positiva influencia tanto de la filosofía natural jónica, con su orientación materialista, como de la escuela pitagórica en la formación de la matemática como 'ciencia'; piénsese en la conexión entre las matemáticas y el sistema filosófico del idealismo objetivo de Platón, en la posición de las matemáticas en el marco de la teoría del conocimiento de Aristóteles, en el papel del pensamiento filosófico en la formación de una matemática de magnitudes variables; en las dificultades de asimilación del concepto de infinito, por ejemplo en los pasos al límite; en las relaciones entre filosofía y matemáticas en Descartes, Cantor, etc.

Las matemáticas son la disciplina más amigable, porque abraza a la mayor parte de las áreas del conocimiento, así que aquéllas no se deben trabajar exclusivamente a través de polinómios y ecuaciones. Otras áreas también necesitan medir y contar. Al incorporar la historia en las clases de matemáticas podemos ayudar a los estudiantes a hacer las conexiones ya mencionadas y muchas más.

Lecturas Sugeridas:

1. Alejandro Garciadiego. *Historia de las ideas matemáticas: un manual introductorio de investigación*. *Mathesis* 12 (1996) 3-113.

2. Hans Wussing. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. España. Editorial Siglo XXI 1998.

ALGUNAS MANERAS DE CÓMO HACER HISTORIA EN EL SALÓN DE CLASE Y SUS BENEFICIOS

Jorge Luis González Alanis

La historia desempeña un papel vital hoy día en las clases de matemáticas. Ésta permite a los estudiantes y profesores hablar y pensar acerca de las matemáticas de modos muy significativos. Desmistifica las matemáticas al mostrar que ésta es una creación de la raza humana. Enriquece el currículum y amplia el conocimiento que los estudiantes tienen que adquirir pues puede ser utilizada para vencer las dificultades que muchos de ellos encuentran cuando comienzan a estudiarlas.

¿De qué formas puede hacerse historia en las aulas? Se puede explicar una gran variedad de por qués en matemáticas. Por ejemplo, ¿por qué utilizamos palabras como 'álgebra' o 'algoritmo'? La historia de las matemáticas se refleja en varias de las palabras que utilizamos con frecuencia. La etimología, o los orígenes, de palabras matemáticas son una fuente que enriquecen los cursos y hacen que los estudiantes conecten las matemáticas con el lenguaje.

Al aplicar nuestro análisis sobre la palabra álgebra, percibimos que esta proviene del título de un trabajo escrito alrededor de 825 d.C. por el matemático árabe Muhammed ibn Musa Al-Khwarizmi (al Jwarizmi). La obra más importante de Al-Khwarizmi es el *Al-jabr wál Muqábala*. Inspeccionemos algunas de las palabras utilizadas en este título. El título completo del álgebra de Al-Khwarizmi reza: *Al- kitáb Hisab Al-jabr wa'l Muqabala*, donde 'Kitáb' significa 'libro', 'Hisab' se traduce por 'cálculo'; 'Al-jabr', aproximadamente, por 'complemento' (colocar o restaurar resulta más apropiado para jabr) y 'Muqábala' por 'reducción' o 'simplificación'. Las palabras 'jabr' y 'muqábala' fueron usadas por Al-Khwarizmi para designar las dos operaciones básicas para resolver ecuaciones. Entonces el título de su obra podría traducirse, entre líneas, como *El libro de la restauración y el balance*. Un ejemplo aclarará las cosas.

Al-Khwarizmi estudia, en notación actual, la ecuación

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

El primer paso hacia la solución consiste en el completamiento (jabr):

$$2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x$$

Se completa una vez más:

$$2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x.$$

Y luego sigue la reducción (muqábala):

$$2x^2 + 42 = 20x$$

lo que conduce a la forma normal

$$x^2 + 21 = 10$$

Un par de palabras en el título Al-jabr wa'l Muqábala nos da la palabra 'álgebra' que significa 'reunión de partes rotas'. En efecto, el sentido original de la palabra 'al-jabr' —como restauración— debió pasar como tal al español, ya que la palabra 'álgebra' tiene como acepción, hoy en desuso, la siguiente: 'Arte de restituir a su lugar los huesos dislocados'. De acuerdo con este significado, un algebrista es el 'cirujano dedicado especialmente a la curación de dislocaciones de huesos', es decir restaurador de huesos. Por ejemplo, cuando resolvemos

$$5x - 6 = 3 - 2x$$

añadiendo $2x$ a ambos lados, pensamos en una 'reunión' de términos semejantes, es decir, nuestro actual pasar al otro miembro. Ibn Khaldum, un historiador medieval árabe, comparó la solución de una ecuación algebraica a la curación de los huesos rotos: 'Los varios elementos son confrontados y las partes rotas son unidas obteniendo así la curación'.

La palabra utilizada para la primera operación, 'al-jabr', se extendió, posteriormente, a toda la teoría de ecuaciones. Tras la latinización de la palabra árabe surgió la denominación 'álgebra'. Y del nombre del autor, puesto que el libro contenía procedimientos de resolución que llevaban siempre a buen fin, surgió el término matemático 'algoritmo'. Entonces, esta última expresión, una versión latinizada del nombre Al-Khwarizmi, vino a significar un procedimiento general de cálculo.

Finalmente, el Álgebra de al-Jwarizmi (que significa el joresmiano, originario de Joresm–Jiva, situada en la actual república de Uzbekistán y cuya ubicación podemos localizar en los mapas adjuntos) se ocupa de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas con coeficientes númericos. En este escrito, el autor distingue en las ecuaciones cuadráticas seis formas normales, es decir, los tres modos simples:

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c$$

$$bx = c$$

y los tres modos compuestos:

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx$$

$$ax^2 = bx + c$$

todos los coeficientes de las formas normales son no negativos y el coeficiente de la potencia más alta es uno.

Los estudiantes pueden leer libros y hacer reportes acerca de matemáticos. Para ello quizá sea necesario llevar notas biográficas al salón de clases. Nuestros héroes y heroínas matemáticos necesitan ser observados del mismo modo que otros grandes hombres y mujeres de la historia, tales como Alejandro el Grande o María Curie. ¿Qué tanto saben de Arquímedes, Hypatia, Newton, Ramanujan? ¿Saben ellos que Sophie Germain, entre otras mujeres, fue forzada a escribir bajo un pseudónimo (un nombre de hombre) para hacer que su trabajo tuviera aceptación o que Georg Cantor tuvo colapsos mentales que lo obligaron a largas estancias en clínicas para enfermos mentales?

También se pueden escribir reportes acerca de tópicos en matemáticas y así promover el descubrimiento independiente. Estudiar la historia de cualquier tema particular en el currículo a menudo conduce a ideas pedagógicas valiosas. Tal estudio no sólo ayuda a los estudiantes a comprender el desarrollo del concepto en cuestión sino que también suministra las maneras de conectar las matemáticas con otros aspectos de la civilización. Los descubrimientos de otras culturas siguieron desarrollos intelectuales diferentes. Una aproximación etnográfica a través de la historia de las matemáticas abre la puerta para un estudio más profundo acerca de la etnomatemática. Esta aproximación suministra un gran rango de conexiones en la mente de los estudiantes.

Para tener una visión más amplia podemos echar un vistazo a las matemáticas a través de las culturas que las desarrollaron. La historia de las matemáticas comienza en la antigua Mesopotamia y Egipto, y continua a través de Grecia, India, Europa y el resto del mundo. Cada cultura tuvo sus propias matemáticas, incluyendo numerales, métodos de cálculo y algo de geometría (véase: Lamina 1).

El increíble calendario maya

La fecha resaltada en la estela es 6 Cabán 5 Pop, que corresponde al 6 de febrero de 752 e.c.

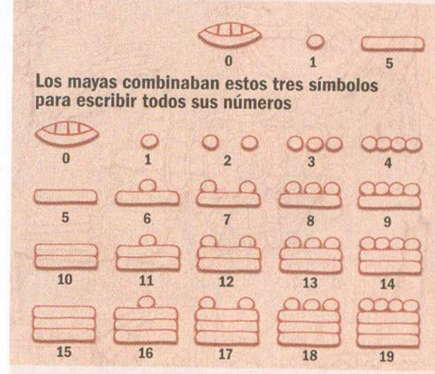
PARA los antiguos mayas,* el paso del tiempo revestía enorme significado. Creían que los sucesos se repetían en ciclos periódicos, y plasmaron tales creencias en sus calendarios.

El calendario que algunos especialistas llaman ***tzolkín*** (que significa cuenta de los días) consistía en un ciclo de doscientos sesenta días, divididos en trece grupos de veinte días cada uno, cada día con su propio nombre y número distintivo. Era la base para la vida ceremonial maya y servía además para la adivinación.

Junto al calendario ceremonial coexistía uno civil, el ***haab,*** calendario solar de trescientos sesenta y cinco días. Constaba de diecinueve meses: dieciocho de veinte días y uno de cinco. Tanto la agricultura como la vida cotidiana se regían por este calendario solar. Ahora bien, los ingeniosos mayas combinaron ambos calendarios valiéndose de lo que los investigadores llaman "la rueda calendárica", la cual integraba elementos de los dos calendarios para dar nombre a cada fecha. Para que se repitiera este colosal ciclo de nombres, tenían que pasar cincuenta y dos años.#

Hasta el día de hoy no se ha encontrado ningún objeto que contenga el sistema calendárico maya entero. Lo que los arqueólogos saben de él lo han aprendido al descifrar el puñado de libros mayas que han sobrevivido y al estudiar los glifos que aparecen en estelas y monumentos de esta cultura.

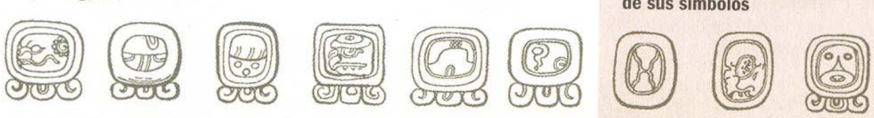
Tras siglos de investigación, el calendario maya sigue embelesando a los especialistas por sus características complejas, tales como los precisos cómputos de corrección para su año solar y la extraordinaria exactitud de las tablas que describen los ciclos lunares y planetarios. En efecto, todos esos cálculos fueron realizados por los antiguos mayas, quienes señalaron con precisión el paso del tiempo.



Los mayas combinaban estos tres símbolos para escribir todos sus números

Algunos símbolos (glifos) de los diecinueve meses que componían el calendario *haab*

Los mayas también empleaban una "cuenta larga", que básicamente era un registro continuo de los días desde una fecha base muy antigua.



El calendario *tzolkín* tenía veinte días con un nombre distinto, en lugar de siete. Abajo aparecen algunos de sus símbolos

Lamina 1. Tomada de Revista *¡Despertad!* 8 de Abril de 2005. Página 31

Las matemáticas pueden ser explicadas al proporcionar el contexto histórico. Necesitamos comunicar y obtener entendimiento matemático; y, un modo de conseguir esta meta es al suministrar el por qué, dónde y cómo de muchos de los conceptos que se estudian. Para un entendimiento completo, las matemáticas deben ser consideradas en el contexto del tiempo y el lugar en el cual se desarrollaron.

El uso de la historia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se puede motivar y facilitar al recurrir a las ventajas de la información en la Web. Claro, debemos buscar el mejor recurso en línea que nos ayude a incluir la historia en las clases de matemáticas, una página Web que contenga información en forma encapsulada así como ligas a otros sitios y que nos ayude a identificar y describir las cosas desde el punto de vista de la instrucción matemática.

Con base en lo anterior, el objetivo es descubrir las formas mediante las cuales, al usar la historia de las matemáticas, podemos hacer el aprendizaje de éstas más accesible a los estudiantes. Mediante la historia podemos proveer información sobre el desarrollo del conocimiento matemático y su procedencia, los usos de las matemáticas y los tipos de problemas que fueron importantes para nuestros antepasados. Si miramos más allá de las matemáticas mismas estaremos discerniendo los por qués y los cómos se hicieron las cosas.

En otro plano, y en virtud de nuestro sentimiento de deuda para con los forjadores de esta disciplina, quizá otro motivo por el cuál se debe recurrir a la historia de las matemáticas sea para resaltar la manera de pensar y escribir de los más destacados matemáticos de todas las épocas.

Realizar un desarrollo histórico preciso de un tópico como parte de un curso requiere conocimiento profundo de historia. Pero más que eso, se requiere buena voluntad y algo que todos podemos hacer es ofrecer tan sólo algunos cortes que proporcionen una impresión coherente y algunos de los principales elementos del desarrollo histórico de los conceptos y las ideas matemáticas. Como se mencionó ya en otro lugar, corresponde al docente elegir el concepto o tema a tratar y asesorar a los alumnos en su estudio.

BENEFICIOS DE INTEGRAR LA HISTORIA Y LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA.

Podemos destacar tres de tales beneficios:

1.- Al utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas podemos contribuir a que los estudiantes comprendan los conceptos. La historia puede hacer un tópico más accesible a los estudiantes, al hablar de los orígenes de una idea particular así como de los procedimientos que siguieron quienes dieron origen a dichas ideas. Los estudiantes necesitan saber algo más que el *Teorema de Pitágoras*. Por ejemplo, necesitan saber de dónde vino y por qué, así como con qué otras ideas se relaciona (véase: Imagen 1). Esto se resume a explicar los por qués en matemáticas y para lograrlo, el docente debe formular preguntas como: ¿Quién era? ¿Dónde y cuándo vivió? ¿Qué culturas le influyeron? ¿Qué otros descubrimientos hizo? ¿Cuáles han llegado hasta nosotros? ¿Cómo y para qué los utilizamos? (véase: Imagen 2). Investigar sobre estos interrogantes nos permite conocer o entender un poco más a los personajes que hay detrás de las fórmulas. Mejor aún, no sólo vamos a desarrollar contenidos conceptuales sino que también estaremos suministrando una perspectiva histórica del desarrollo de los conceptos y colocaremos el fundamento para una mejor comprensión de las cosas.

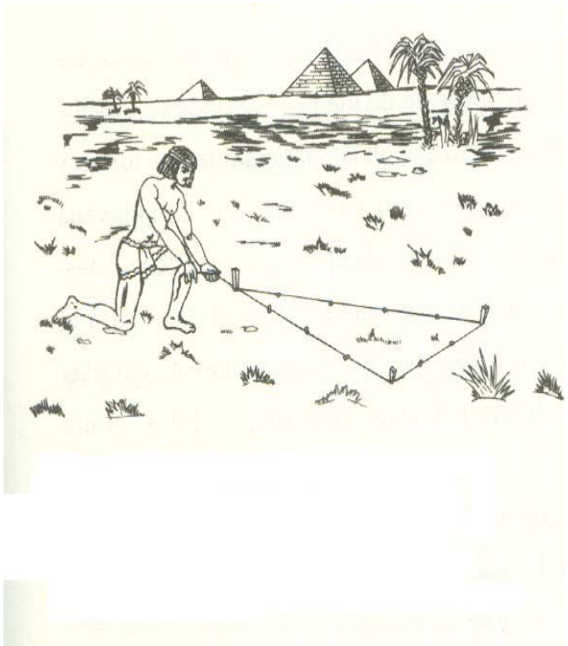


Imagen 1. La cuerda de doce nudos, usada por los antiguos egipcios, consistía en una cuerda con los extremos unidos entre sí y dividida en partes iguales mediante 12 nudos equidistantes. Basta estirar esta cuerda por los nudos apropiados para formar el triángulo *3, 4, 5* y disponer, por tanto, de una escuadra útil para dibujar ángulos rectos sobre el terreno. Los lados del *triángulo egipcio* forman una *terna pitagórica.* Aquí podemos notar que una consecuencia del llamado *Teorema de Pitágoras* es que vincula el método matemático abstracto con lo tangible.

Contenido en: Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras. El filósofo del número*. España: Nivola 2001. Página 159.

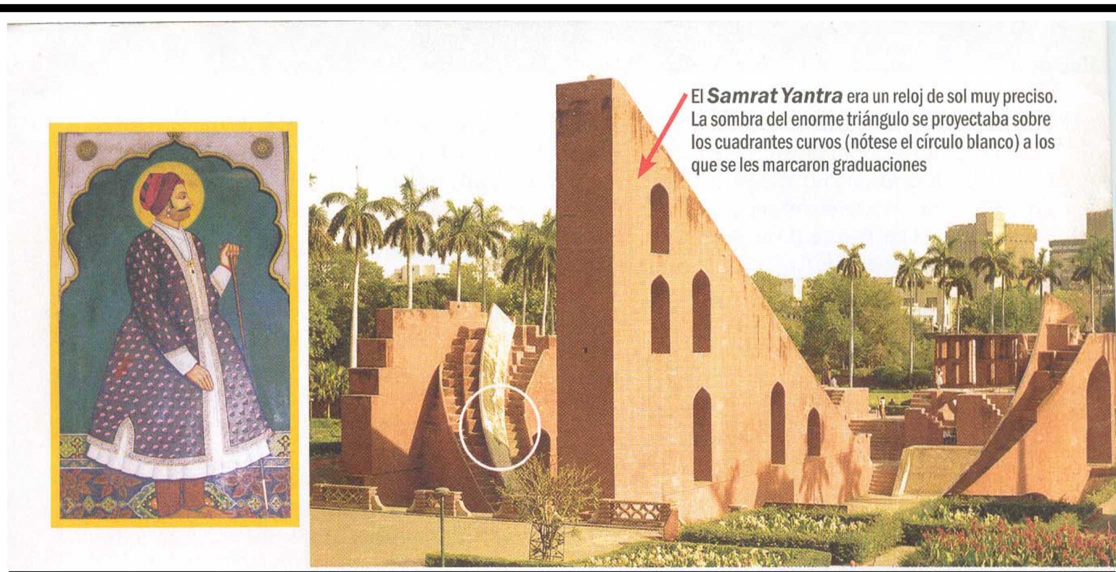


Imagen 2. Samrat Yantra. Se trata básicamente de un reloj de sol y fue la creación más importante de Jai Singh. Consiste en una construcción triangular de 3,2 metros de espesor, con una altura de 21,3 metros y una base de 34,6 metros. La hipotenusa de 39 metros es paralela al eje de la Tierra y señala hacia el polo Norte. A cada lado del triangulo, o gnomon, hay un cuadrante con graduaciones para las horas, los minutos y los segundos. Aunque los relojes del sol sencillos existían desde hacía siglos, Jai Singh convirtió ese instrumento básico para contar el tiempo en una herramienta de precisión que medía la declinación y otras coordenadas de los cuerpos celestes.

Contenida en: Revista *¡Despertad!* 8 de Julio de 2005. Páginas 19.

2.- Mediante el análisis de la historia los estudiantes pueden relacionar las matemáticas con la cultura así como con otros desarrollos intelectuales en la ciencia, la filosofía o la religión. La habilidad para hacer conexiones es una de las más importantes metas del aprendizaje de las matemáticas y la historia nos revela cómo estas están repletas de conexiones —entre tópicos matemáticos, entre matemáticas y aplicaciones y con otras disciplinas—. Así mismo, la historia nos revela como las matemáticas están conectadas, a través de los siglos, con las culturas y diversas regiones del globo. La meta es hacer ver a los estudiantes cómo las matemáticas se relacionan con todo y, al utilizar la historia, podemos hacer más natural la estrecha relación de las matemáticas con otras áreas del conocimiento si las enfocamos en cómo estas han influenciado la ciencia, la economía, los inventos, el arte y las comunicaciones.

3.- La historia destaca la interacción entre matemáticas y sociedad. Los estudiantes a menudo no perciben esta interacción, la cual se da en dos direcciones: Por un lado, las normas y prácticas de varias culturas han influenciado el desarrollo de las matemáticas; por otro, las matemáticas han influenciado el modo cómo la gente opera en y piensa acerca del mundo. Por ejemplo, en 1957 el lanzamiento del Sputnik y el entusiasmo por la carrera espacial, estimuló la investigación y la educación en matemáticas. Por contraste, a lo largo de la historia, algunas sociedades han impuesto límites sobre las matemáticas pues, por ejemplo, políticas y doctrinas religiosas interrumpieron los trabajos de Galileo. En otra dirección, las matemáticas han cambiado a la sociedad al contribuir con teorías, modelos y algoritmos, al resultar todo ello en nuevos sistemas de información, modos de comunicación y formas de explorar nuestro universo menos convencionales.

Lecturas sugeridas:

1. *Mathematics Teacher*. Noviembre de 2000.

2. Francisco Martín Casalderrey. *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. España: Nivola 2000. Capítulo 1, páginas 13 - 36.

3. Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras. El filósofo del número*. España: Nivola 2001. Capítulo 4, páginas 149 - 182.

LAS MATEMÁTICAS COMO PARTE DE LAS TAREAS COTIDIANAS

Jorge Luis González Alanis

La matemática es una disciplina sumamente extensa, extraordinariamente ramificada y en estrecha relación con todas las esferas de la vida social. Con el paso de los siglos, esta materia se ha convertido en un auténtico lenguaje universal que habla el mundo sin importar su cultura, religión o sexo. En la ciencia, en la industria, el comercio y la vida cotidiana, las matemáticas tienen la capacidad de resolver algunos de los enigmas más difíciles que afrontamos. Tanto si se quiere desentrañar los misterios del universo, como ajustar el presupuesto familiar, la clave del éxito radica en saber utilizar el lenguaje de los números.

Efectivamente, las matemáticas no son únicamente para científicos, sino para todos nosotros. Al ir de compras, decorar el hogar, oír música o hasta para hacer cine, empleamos o nos beneficiamos de principios matemáticos. Supongamos que alguien desea cambiar el suelo de su apartamento. Antes de ir a comprar, se sienta a calcular lo que necesita. Lo primero que se pregunta es cuánto material debe comprar para cubrir el piso. Para averiguarlo, ha de comprender algunos conceptos básicos de geometría.

Por lo general, el material para revestir suelos se vende en función de los metros cuadrados que hay que cubrir. Para saber cuánto comprar, debe calcular la superficie de cada habitación y del pasillo. La planta de la mayoría de los edificios está formada por cuadrados y rectángulos, de modo que dará con el resultado si utiliza la formula geométrica para el área de tales figuras.

Ahora digamos que quiere remodelar todas las habitaciones, salvo la cocina y el cuarto de baño. Tome las medidas de cada habitación y dibuje un plano como el que se muestra a continuación (véase: Fig. 1). Los cuadrados y los rectángulos muestran el tamaño y la ubicación de las habitaciones. Con la fórmula que acabamos de dar, puede calcular cuántos metros cuadrados de material le harán falta. Puede optar por calcular el área de cada habitación y sumar el resultado, o bien, si desea ir más rápido, calcular la superficie total de la vivienda y restar la superficie de la cocina y el baño.

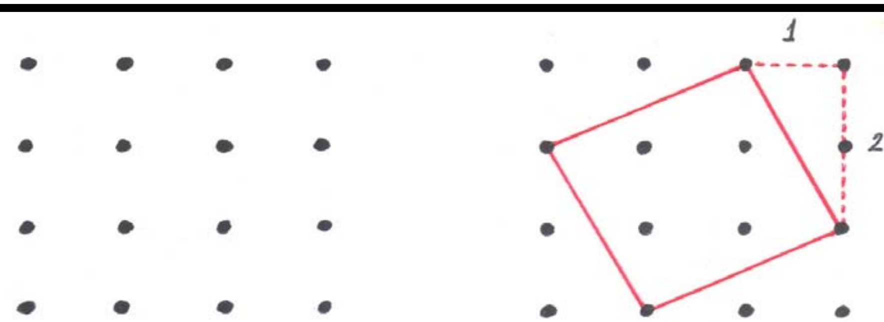
El término geometría tiene origen griego y significa literalmente medición de la tierra**.** Incluye el cálculo de la superficie, la distancia, el volumen y otras propiedades de las formas y las líneas. La matemática, y en especial la geometría, tuvo un extraordinario desarrollo en Grecia. Los problemas que hoy se abordan con ayuda del álgebra fueron tratados geométricamente por los griegos. Por ejemplo, la ecuación que hoy escribimos en la forma $x^2 + ax = b^2$, la establecieron como sigue: 'Encontrar un segmento x tal que si al cuadrado construido sobre él se le suma un rectángulo construido sobre el mismo segmento y sobre un segmento dado a, obtengamos un rectángulo de área igual a la de un cuadrado dado'. Hoy para cualquier figura imaginable, tanto en dos como en tres dimensiones, existen fórmulas prácticas que utilizan todos los días científicos, ingenieros y decoradores. Pero las matemáticas no sólo abarcan la geometría.

Figura 1.

Por otro lado, si el área a cubrir es cuadrada, alguien podría optar por medir la diagonal de dicha figura, multiplicar el resultado obtenido por sí mismo y dividir esto último entre dos. Y, aunque esta forma de calcular es poco probable que ocurra, viene a mostrar que se pueden encontrar métodos alternativos para resolver el mismo problema.

Ahora bien, en la naturaleza, nuestros ojos raramente tropiezan con, digamos, cuadrados perfectos, y es evidente que una figura como ésta sólo se logra gracias a que el hombre manufactura los objetos cada vez más regulares en su forma, llámense edificios o parcelas. Cuando el hombre le imprime forma a la materia, surgen los cuerpos geométricos y las figuras. Esto a su vez nos lleva a la noción de magnitudes geométricas, de longitud, área y volumen.

Naturalmente, calcular el área de un apartamento requiere el empleo de reglas muy sencillas. Pero no todo son motivos prácticos. Aparte de su uso en el cálculo de áreas, medir volúmenes y más, el método geométrico puramente teórico tiene como finalidad hacernos sentir el poder del pensamiento, bien sea a través de la abstracción o del puro entretenimiento. Aquí va un ejemplo que ilustra lo anterior: Pasando por los puntos de la figura, formar un cuadrado que tenga un área de cinco unidades cuadradas (véase: Fig. 2).



Si la distancia entre cada punto es la unidad, excepto en las diagonales, por el Teorema de Pitágoras, es decir $a^2 + b^2 = c^2$, en este caso el lado de este cuadrado es de $\sqrt{5}$ unidades.

Figura 2.

MEDICIÓN

Como lo muestra el ejemplo que utilizamos para cubrir el piso de un apartamento, actualmente, el concepto de medir se utiliza de un modo enteramente específico. Ahora bien, la medición es lo que conecta a la ciencia, por una parte, con las matemáticas y, por otro lado, con la práctica comercial y mecánica. A través de la medición es como los números y las formas ingresan en la ciencia y también por ella, es como resulta posible señalar con precisión lo que es necesario hacer para reproducir determinadas condiciones y obtener un resultado deseado. En este sentido, la aritmética y la geometría se aplican una a la otra. La simple medición de una línea representa una fusión de ambas ramas de la matemática. Para medir la longitud de un objeto se le aplica a éste una cierta unidad de medida y se calcula cuántas veces es posible repetir esa operación; el primer paso (aplicación) es de carácter geométrico, el segundo (cálculo), de carácter aritmético. Quien cuenta sus pasos al andar, ya une estas dos operaciones.

Por otro lado, las propias operaciones de la edificación contribuyeron también a la fundación de la geometría. La práctica de construir con ladrillos, especialmente los grandes edificios de forma piramidal, no sólo hizo surgir la geometría, sino que también condujo a la concepción de las superficies de las figuras y de los volúmenes de los sólidos, que se pueden calcular con base en las longitudes de sus lados. Al principio, sólo se calculaba el volumen de los bloques rectangulares, pero la necesidad estructural de rematar en punta los muros, hizo que se consideraran otras formas más complicadas como la pirámide. El cálculo del volumen de una pirámide fue la operación de más altos vuelos de los matemáticos egipcios y con ella se esbozaron los métodos del cálculo integral.

La ejecución de planos a escala también proviene de la práctica de la edificación. Con estos métodos matemáticos, un administrador estaba en posibilidad de planear por anticipado la operación entera de construir un edificio de ladrillos o de piedra. Podía calcular el número necesario de trabajadores, las cantidades de materiales y de alimentos requeridos y el tiempo que tomaría la realización de la obra. Estas técnicas se extendieron fácilmente de la ciudad al campo, al servir para la disposición de terrenos, el cálculo de sus superficies y la estimación de su rendimiento para fijar los tributos. Este es el origen de la cartografía y de la topografía (véase: Imagen 1). Y fue este uso práctico el que llevó a formular después el nombre de geometría, o sea, la medición de la tierra. Las matemáticas surgieron en rigor, como un método auxiliar de la producción, que la vida urbana hizo necesario y posible.

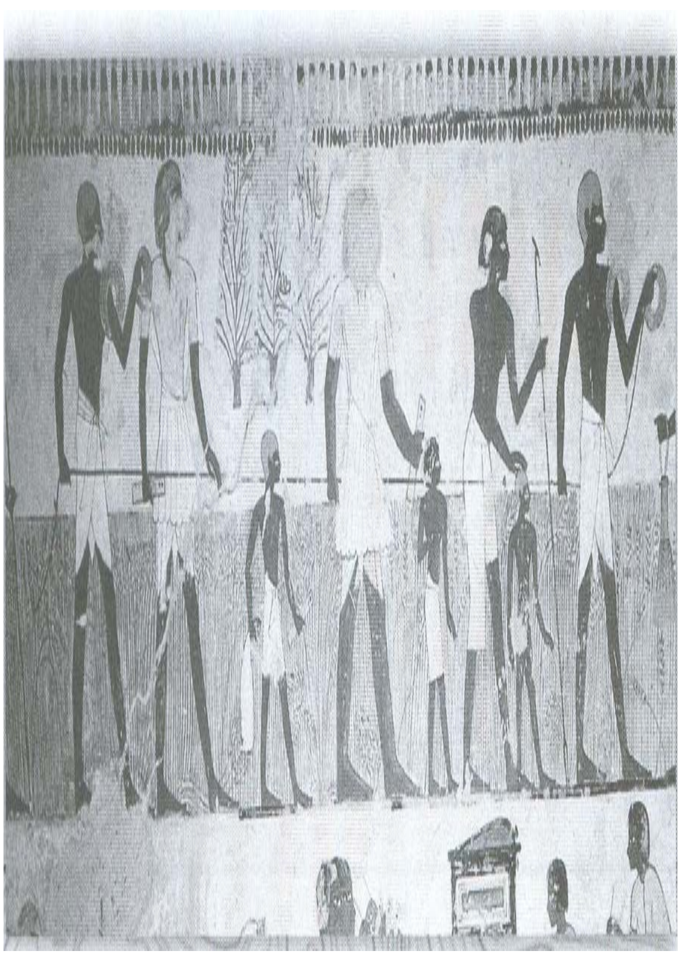
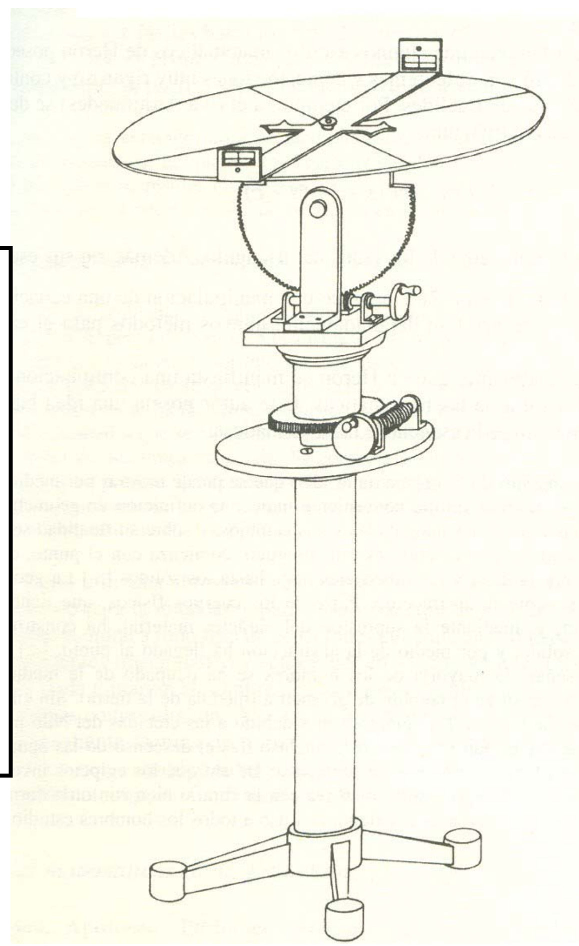


Imagen 1. Los egipcios los llamaban los 'estira-cuerdas'. Eran miembros de una antigua agrupación encargada de volver a señalar todos los años, con fines tributarios, los límites de las propiedades tras los desbordamientos del río Nilo. Aquellos hombres fueron los antecesores de los modernos especialistas en topografía y agrimensura.

Geografía Científica

Aunque la topografía moderna utiliza instrumentos de precisión como el teodolito y el taquímetro para realizar las mediciones de terrenos, los primeros topógrafos obtuvieron resultados impresionantes con escasos recursos. Alrededor del año 200 a. C., el astrónomo, matemático y geógrafo griego Eratóstenes calculó la circunferencia del globo terrestre utilizando únicamente una vara y el razonamiento geométrico. Su forma de proceder se resume en la lamina 1.

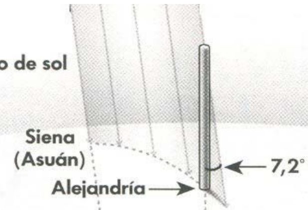
Por el año 62 d. C., Herón de Alejandria publicó la *Dioptra* (instrumentos de medida), libro en el que explicaba la aplicación de la geometría a la agrimensura. La obra de Herón se ocupa de unas matemáticas orientadas preferentemente por las aplicaciones prácticas y es como la otra cara de la moneda en relación con *Los Elementos* de Euclides. Su trabajo nos muestra que no toda la matemática griega era del tipo clásico o teórico. En la actualidad podríamos decir que la profesión de Herón era la de ingeniero.



Aparato de medida (dioptra) de Herón (reconstrucción).

Figura 3.

Midió la Tierra con una vara



¿HA OÍDO hablar de un matemático y astrónomo griego llamado Eratóstenes? Su nombre seguramente es mucho más conocido entre los que cultivan la astronomía, quienes lo tienen en alta estima. ¿Por qué razón?

Eratóstenes nació en torno al año 276 antes de nuestra era y recibió buena parte de su formación en Grecia, en plena urbe ateniense, si bien pasó muchos años en Alejandría, que para entonces era una metrópolis de Egipto bajo dominio griego. Alrededor del año 200, este sabio acometió la empresa de determinar, con tan solo una vara, las dimensiones del globo terráqueo. ¿Le parece insólito? Pues bien, veamos cómo lo hizo.

En la ciudad egipcia de Siena (la actual Asuán), notó que al mediodía del primer día de verano, el sol se hallaba en la vertical del lugar, pues su luz no proyectaba sombras cuando llegaba al fondo de pozos profundos. Sin embargo, en la misma fecha y hora, pero en Alejandría, a 5.000 estadios al norte, sí se observaba una sombra.* Dicha diferencia le dio una idea.

Colocó en Alejandría un gnomon, un simple palo vertical, y al mediodía, cuando el sol se encontraba en su cenit, midió el ángulo de la sombra que proyectaba la vara: 7,2 grados sobre la vertical.

Pues bien, dado que él creía en la esfericidad de nuestro planeta, y sabía que un círculo tiene 360 grados, dividió 360 entre 7,2 (la medida del ángulo). ¿Cuál fue el resultado? El ángulo correspondía a la cincuentava parte de un círculo completo. De ahí dedujo que los 5.000 estadios de distancia entre Siena y Alejandría tenían que corresponder a la cincuentava parte de la circunferencia terrestre. Así pues, multiplicó 50 por 5.000 y llegó a la cifra de 250.000 estadios para la longitud de la circunferencia del globo terráqueo.

¿Se aproxima dicha cifra a los cálculos actuales? Sus 250.000 estadios dan una distancia de entre 40.000 y 46.000 kilómetros. Valiéndose de las naves en órbita, los astrónomos han medido el meridiano terrestre (el círculo máximo que pasa por los dos polos), y han obtenido la cifra de 40.008 kilómetros, sorprendentemente cercana a la que ofreció Eratóstenes hace más de dos mil años. La precisión de su cálculo resulta aún más asombrosa si tenemos en cuenta que utilizó únicamente una vara y el razonamiento geométrico. En la actualidad, los astrónomos emplean este mismo método para calcular a qué distancia se encuentran puntos situados fuera del sistema solar.

Algunos tal vez encuentren sorprendente que Eratóstenes supiera que la Tierra es redonda. Después de todo, hasta hace apenas unos siglos hubo hombres de ciencia que la creían plana. Los antiguos griegos, sin embargo, ya habían deducido su auténtica forma a partir de observaciones científicas. Ahora bien, adelantándose quinientos años a Eratóstenes, el profeta hebreo Isaías señaló: "Hay Uno que mora por encima del *círculo* de la tierra" (Isaías 40:22).

* El estadio era una unidad griega de longitud que variaba de una localidad a otra. Según se cree, medía entre 160 y 185 metros.

Lámina 1. Tomada de revista *¡Despertad!* 22 de Junio de 2004. Página 13.

Finalmente, la mayoría de los hombres se ha ocupado de la medición y repartición de la tierra, de donde surge el nombre de geometría. Sin embargo, la invención de la medición fue cosa de los egipcios, pues debido a las crecidas del Nilo muchos terrenos claramente marcados se hacían irreconocibles, incluso tras el descenso de las aguas, por lo que ya no era posible al particular reconocer su propiedad. De ahí que los egipcios inventaran la medición, bien sea con la cinta de agrimensor, bien sea con la vara, o bien con otras formas de medir. Como la medición era pues necesaria, se extendió su uso a todos los hombres estudiosos.

Por otra parte, en geometría, los griegos alcanzaron el nivel que hoy denominamos matemática 'superior'. A partir del momento en que se descubrió lo irracional, los matemáticos griegos se apartaron de los números y dedicaron su atención a las líneas y superficies. El resultado fue el desarrollo de una *geometría* de las medidas que es, tal vez, la principal aportación de los griegos a la ciencia. Los más eminentes autores de esta transformación fueron Hipócrates de Quios y Eudoxo. Hipócrates se ocupo de buscar una solución geométrica a los problemas clásicos de la cuadratura del círculo y de la duplicación del cubo. Aún cuando fracasó en ambos intentos, estableció una serie de proposiciones valiosas dentro de los lineamientos con que Euclides formuló posteriormente sus *Elementos*. Estos dos problemas, junto con el de la trisección del ángulo, que nunca pudieron ser resueltos con regla y compás, condujeron a muchos geómetras —como Hipías de Elis— a construir curvas de orden superior y a establecer una nueva rama de la geometría. La espiral de Arquímedes, la concoide de Nicomedes, la cisoide de Diocles y la cuadratriz de Hipías ingresaron por completo en la geometría. La concoide se inventó para resolver el problema de la trisección, la cuadratriz para la rectificación y la cuadratura del círculo, y la cisoide para el clásico problema de insertar dos medias geométricas entre dos “magnitudes” dadas, representados por segmentos de recta. La concoide y la cisoide son curvas alegebráicas; la cuadratriz es trascendente.

Eudoxo fue quien estableció la teoría de las proporciones, que es aplicable a todas las magnitudes, y descubrió el método de exhaución —o de aproximaciones sucesivas— para medir líneas y superficies; el cual, después de haber sido ampliado por Arquímedes, sirvió de base para el calculo infinitesimal.

La palabra geometría significaba originalmente ‘medida de la Tierra’ pero lo cierto es que la geometría clásica tal como nos la encontramos en *Los Elementos* de Euclides y en *Las Cónicas* de Apolonio y en los antes mencionados está muy alejada de la agrimensura. Apolonio utilizó la geometría analítica en sus investigaciones sobre secciones cónicas: Elipse, hipérbola y parábola. Apolonio realmente da las ecuaciones de estas curvas, pero las expresa en lenguaje geométrico. Por ejemplo, la ‘ecuación’ de la parábola $y^2 = 2px$ se forma así: El cuadrado sobre el lado y es igual en área al rectángulo de lados $2p$ y x. Naturalmente, en lugar de los símbolos p, x, y utiliza los correspondientes segmentos. Su trabajo fue tan completo que Kepler y Newton pudieron tomarlo sin modificación alguna dos mil años después para obtener las propiedades de las órbitas planetarias.

Vemos, pues, que los obreros que miden las dimensiones de un edificio o interpretan un plano, un artillero que determina la distancia al blanco, un granjero que mide la superficie de su granja, un ingeniero que estima el volumen de una infraestructura, todos ellos utilizan la geometría. No es extraño por tanto que la geometría tenga un campo de aplicaciones casi tan amplio como la aritmética.

Imagen 2. En la etapa alejandrina o helenística de la cultura griega sobresalen los nombres de Euclides, Arquímedes e Hiparco. Es una época en la que algunos griegos combinan la ingeniería con la ciencia. Arquímedes fue su máximo representante: Conformó lo que en la actualidad llamaríamos un matemático teórico y un físico experimental. Algunas veces ha sido calificado de ingeniero aunque no se sabe si el término tendría entonces el mismo sentido que le damos ahora. Algunos textos recuerdan a Arquímedes sobre todo por sus inventos mecánicos (por ejemplo, el tornillo que lleva su nombre utilizado hoy para elevar materiales sólidos y líquidos). Sin embargo, hay que tener en cuenta que su interés por ellos quizá se deba a los principios físicos o matemáticos implicados, ya que, por otra parte, él mismo siempre se consideró un geómetra.

Arquímedes aplicó los métodos de Eudoxo para determinar el valor de π con cinco cifras —la cuadratura del círculo en forma práctica— y encontró las fórmulas para calcular los volúmenes y las áreas de esferas, cilindros y otros cuerpos más complejos. Estas operaciones representan el comienzo efectivo del cálculo infinitesimal, que había de producir una revolución de la física en manos de Newton.

LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA

Tomemos varios objetos cilíndricos (vasos, jarras, etc.) o dibujemos diferentes circunferencias sobre una hoja. Midamos el diámetro d de cada objeto y anotémoslo. Después, enrollando un hilo, midamos la longitud C de la circunferencia y anotémosla. Calculemos los cocientes c sobre d en cada caso y anotémoslos. Observemos que en cada caso obtuvimos, aproximadamente, el mismo número. A este número se le denota por *pi* (π) (véase: Figura 4a y 4b). Este número aparece en todas las formas circulares, bien sean éstas de uso práctico o simplemente para producir arte (véase: Imagen 3). Pero $\boldsymbol{\pi}$ aparece también en toda clase de situaciones que no tienen nada que ver con círculos y la lamina 2 menciona, aunque sea de paso algunas de ellas.

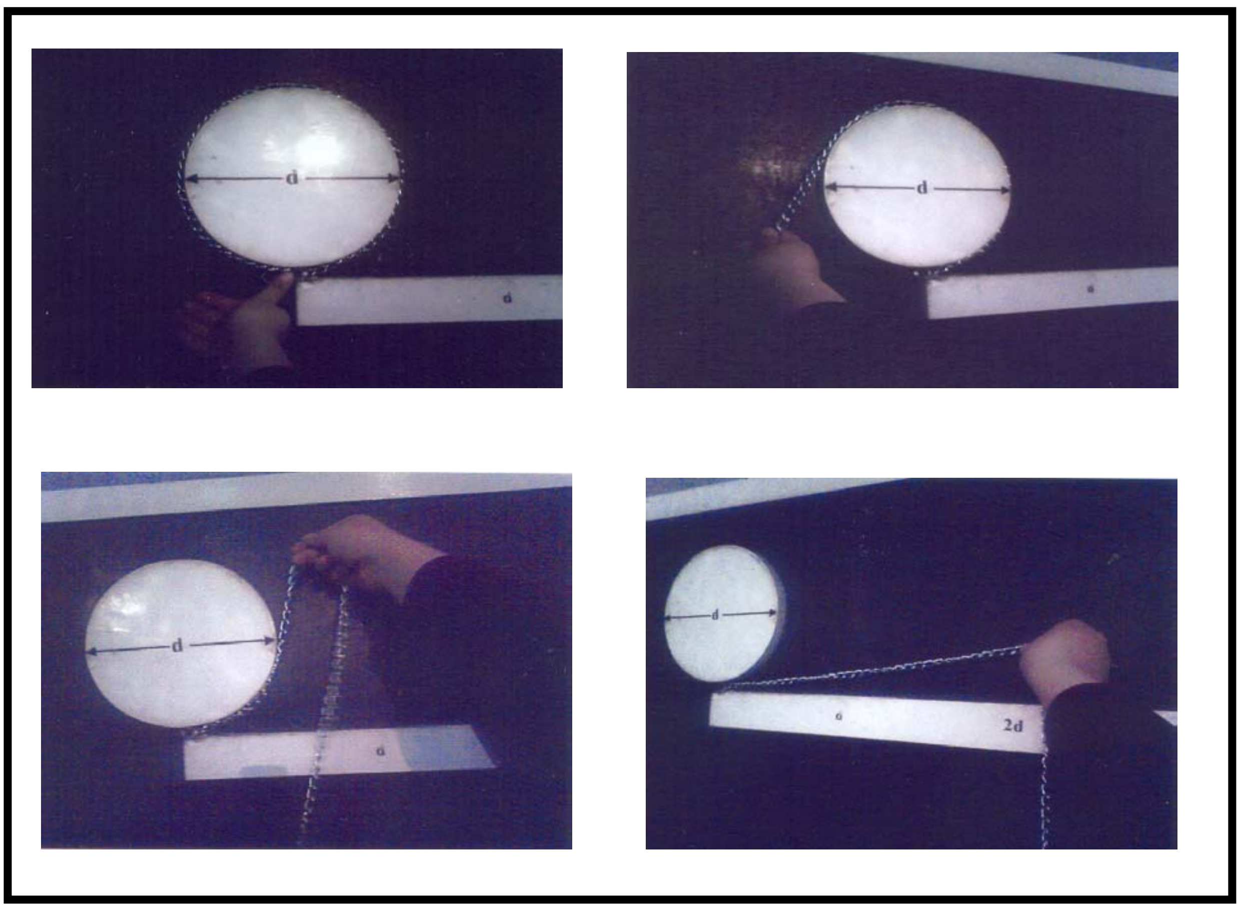


Figura 4a.
Fotografías tomadas en el Museo de las Ciencias *Universum*. Sala de matemáticas.

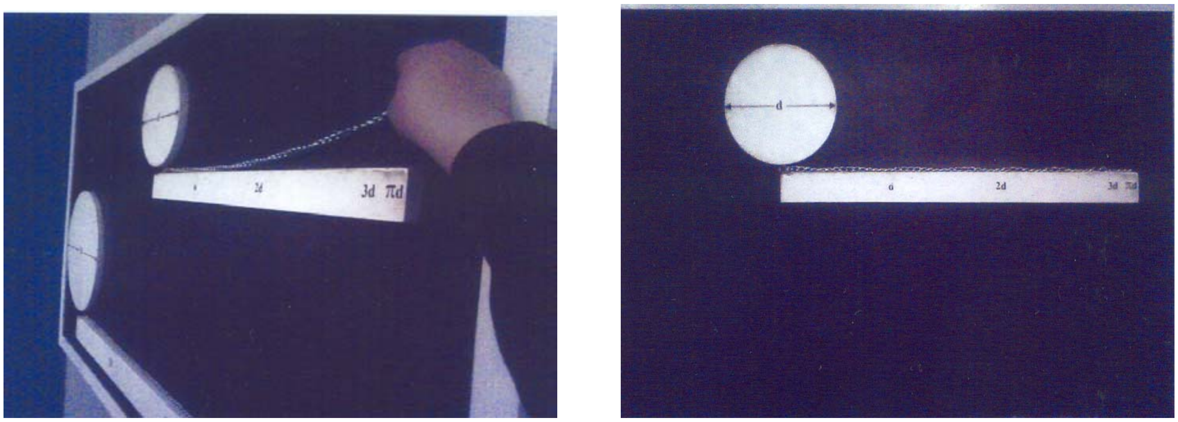


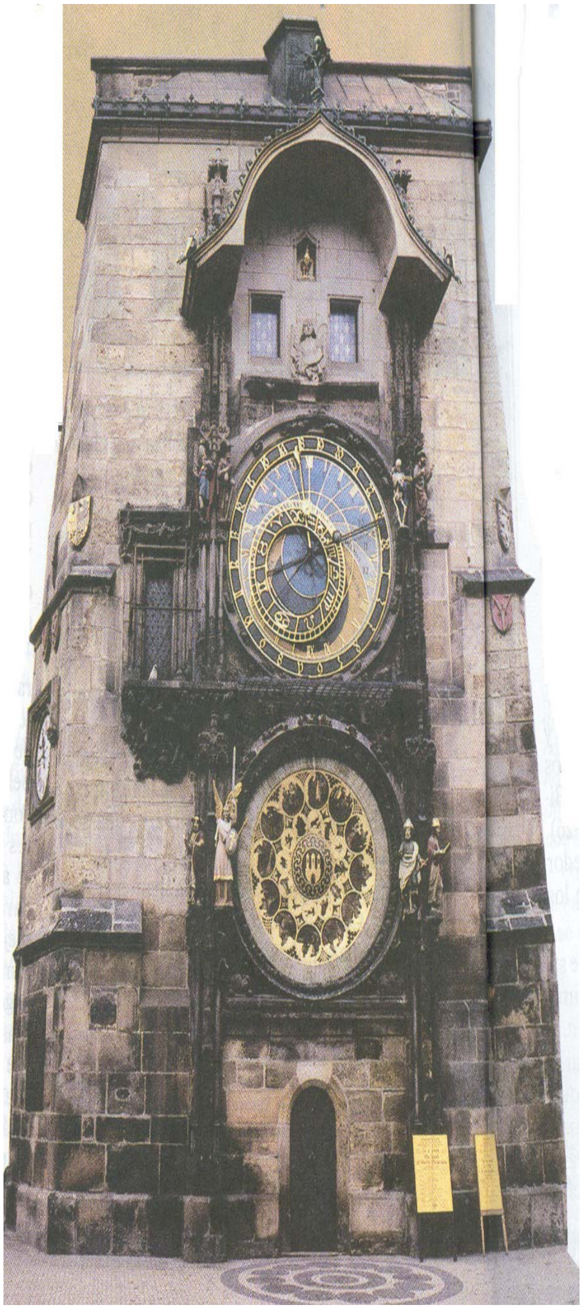
Figura 4b.
Fotografías tomadas en el Museo de las Ciencias *Universum*. Sala de matemáticas.

EL NÚMERO π.

El número **π**, uno de los más famosos en la matemática, ya era conocido por los geómetras en la antigüedad. La famosa constante **π**, de infinitas cifras decimales que no se repiten, nació con el estudio de los círculos. Los egipcios y babilonios conocían con considerable exactitud el cociente de la longitud de una circunferencia a su diámetro (véase: lamina 2). Por otro lado, encontramos una indicación bastante interesante en una cita bíblica que nos lleva a afirmar que los judíos primitivos atribuían al número **π** un valor entero igual a tres. La hallamos en el libro Primero de los Reyes que dice:

> Y procedió a hacer el mar fundido, de diez codos
> de un borde al otro borde, circular todo en derredor;
> y su altura era de cinco codos, y se requería una cuerda
> de treinta codos para rodearlo todo en derredor.
> (1 Reyes 7:23)

Teniendo tal recipiente redondo treinta codos de circunferencia, su diámetro era de diez codos. La conclusión es clara. La relación entre la circunferencia, 30, y el diámetro, 10, es exactamente 3. Ese es el valor de **π** revelado por la Biblia (véase:lámina 3).



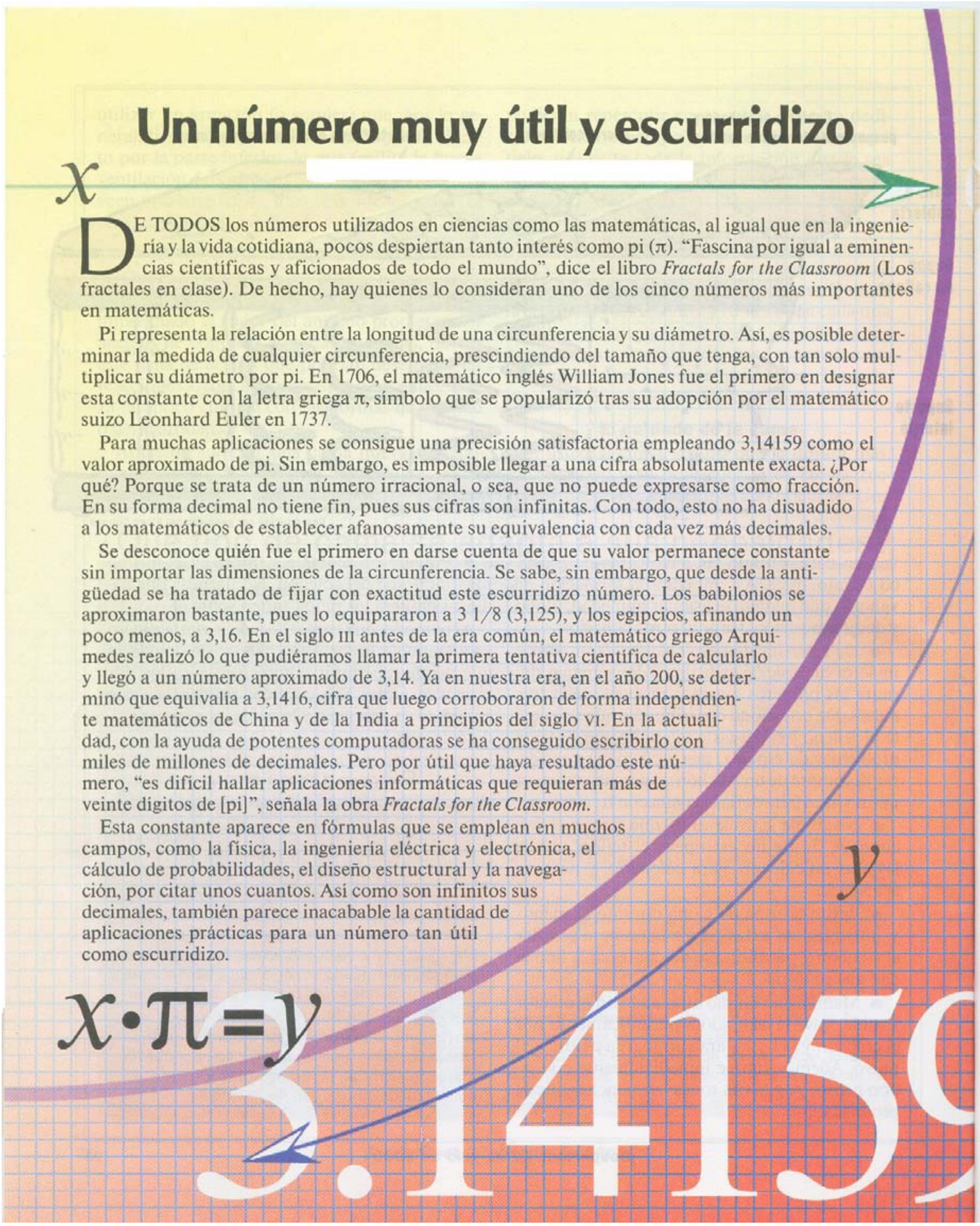
LA ESFERA ASTRONOMICA

EL RELO DE PRAGA

EL DISCO DEL CALENDARIO

Imagen 3.

π



Un número muy útil y escurridizo

DE TODOS los números utilizados en ciencias como las matemáticas, al igual que en la ingeniería y la vida cotidiana, pocos despiertan tanto interés como pi (π). "Fascina por igual a eminencias científicas y aficionados de todo el mundo", dice el libro *Fractals for the Classroom* (Los fractales en clase). De hecho, hay quienes lo consideran uno de los cinco números más importantes en matemáticas.

Pi representa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Así, es posible determinar la medida de cualquier circunferencia, prescindiendo del tamaño que tenga, con tan solo multiplicar su diámetro por pi. En 1706, el matemático inglés William Jones fue el primero en designar esta constante con la letra griega π, símbolo que se popularizó tras su adopción por el matemático suizo Leonhard Euler en 1737.

Para muchas aplicaciones se consigue una precisión satisfactoria empleando 3,14159 como el valor aproximado de pi. Sin embargo, es imposible llegar a una cifra absolutamente exacta. ¿Por qué? Porque se trata de un número irracional, o sea, que no puede expresarse como fracción. En su forma decimal no tiene fin, pues sus cifras son infinitas. Con todo, esto no ha disuadido a los matemáticos de establecer afanosamente su equivalencia con cada vez más decimales.

Se desconoce quién fue el primero en darse cuenta de que su valor permanece constante sin importar las dimensiones de la circunferencia. Se sabe, sin embargo, que desde la antigüedad se ha tratado de fijar con exactitud este escurridizo número. Los babilonios se aproximaron bastante, pues lo equipararon a 3 1/8 (3,125), y los egipcios, afinando un poco menos, a 3,16. En el siglo III antes de la era común, el matemático griego Arquímedes realizó lo que pudiéramos llamar la primera tentativa científica de calcularlo y llegó a un número aproximado de 3,14. Ya en nuestra era, en el año 200, se determinó que equivalía a 3,1416, cifra que luego corroboraron de forma independiente matemáticos de China y de la India a principios del siglo VI. En la actualidad, con la ayuda de potentes computadoras se ha conseguido escribirlo con miles de millones de decimales. Pero por útil que haya resultado este número, "es difícil hallar aplicaciones informáticas que requieran más de veinte dígitos de [pi]", señala la obra *Fractals for the Classroom.*

Esta constante aparece en fórmulas que se emplean en muchos campos, como la física, la ingeniería eléctrica y electrónica, el cálculo de probabilidades, el diseño estructural y la navegación, por citar unos cuantos. Así como son infinitos sus decimales, también parece inacabable la cantidad de aplicaciones prácticas para un número tan útil como escurridizo.

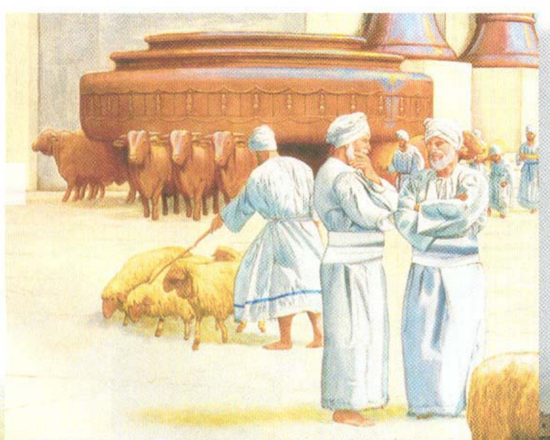
Lámina 2. Tomada de revista *¡Despertad!* 22 de Julio de 2000. Página 24**.**

"UNA DE LAS MAYORES OBRAS DE INGENIERÍA"

CUANDO en el reinado de Salomón, hace unos tres mil años, se construyó el templo de Jehová en Jerusalén, se colocó a poca distancia de la entrada un hermoso depósito de agua hecho de cobre. Con un peso de más de 30 toneladas y una capacidad superior a los 40.000 litros, este enorme recipiente recibió el nombre de mar fundido (1 Reyes 7:23-26). "Poca duda cabe de que fue una de las mayores obras de ingeniería de la nación hebrea", comenta Albert Zuidhof, ex funcionario técnico del National Research Council of Canada, en la revista *Biblical Archeologist*.

¿Cómo se construyó el mar fundido? "En el Distrito del Jordán [...] fundió el rey [los utensilios de cobre] en el molde de arcilla." (1 Reyes 7:45, 46.) "El proceso debió de ser parecido al método conocido como 'fundición a la cera perdida', todavía en uso en la fabricación de grandes campanas de bronce", señala Zuidhof, quien pasa a explicar: "En esencia, implicaría elaborar un modelo de cera sobre un molde interior colocado boca abajo y cuidadosamente secado. [...] Una vez hecho esto, los fundidores tuvieron que construir el molde exterior sobre la cera y dejarlo secar. Los pasos finales consistirían en sacar la cera derritiéndola y verter el metal fundido en la cavidad".

Dado su extraordinario tamaño y peso, la elaboración del mar fundido exigió gran destreza. La estructura interior y el molde exterior tenían que soportar la presión de unas 30 toneladas de cobre fundido, y la fundición tuvo que hacerse en una sola operación para impedir que se formaran fisuras o imperfecciones. Por ello, es probable que para verter el metal fundido en el molde se requiriera conectar varios hornos entre sí. ¡Qué tarea tan enorme!



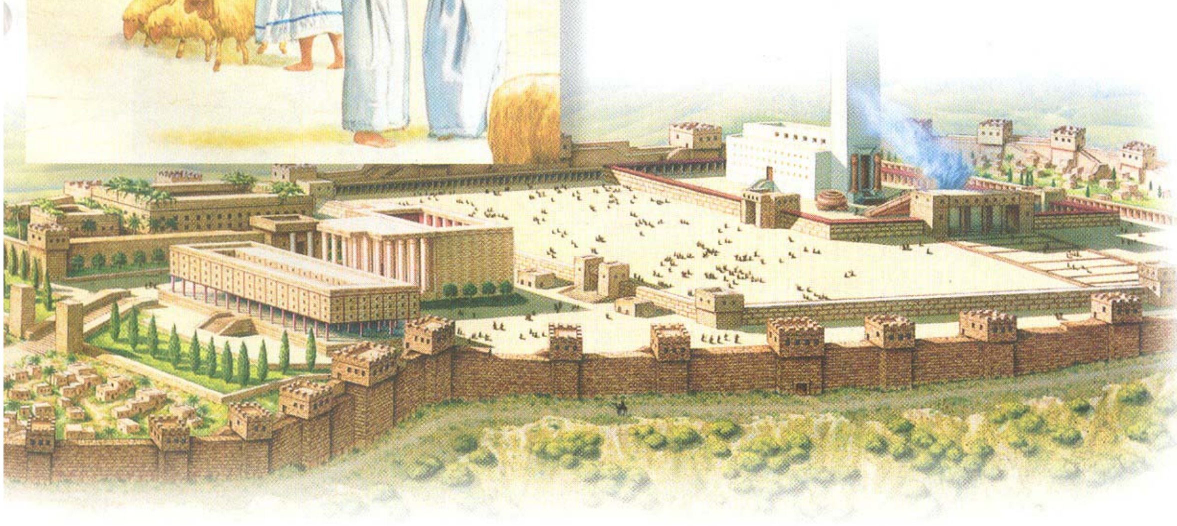


Lámina 3. Tomada de revista *Atalaya* 15 de Enero de 2004. Página 31.

mirabien
La ciencia en el cine

El cubo

No apta para claustrofóbicos

Luis Bernardo Pérez

A FUERZA de ver películas de ciencia ficción muchas personas han terminado por creer que este tipo de cine requiere, necesariamente, costosos despliegues escenográficos y elaborados efectos especiales. Es cierto que tales recursos se encuentran presentes en casi todos los ejemplos del género y contribuyen a hacerlo muy atractivo para el gran público. Cintas como la multipremiada *Matrix*, de Andy y Larry Wachowsky, o la taquillera *La amenaza fantasma*, de George Lucas, por mencionar sólo dos casos recientes, no valdrían gran cosa si les quitáramos sus deslumbrantes trucos visuales.

Sin embargo, no debemos olvidar que el verdadero mérito de una película depende, antes que nada, de su argumento, de la historia que nos cuenta. Los recursos tecnológicos, la escenografía o los alardes de maquillaje son importantes, pero sólo adquieren sentido cuando sirven para sostener el relato.

El cubo es un largometraje canadiense de ciencia ficción que demuestra hasta qué punto un guión sólido, inteligente e ingenioso hace prescindible cualquier otro elemento. Esta película contó con un presupuesto modesto, que resulta evidente desde las primeras secuencias: no hay un uso excesivo de los efectos especiales ni de los decorados. De hecho, toda la historia transcurre en un mismo espacio y la trama se desarrolla casi exclusivamente a través de los diálogos. Además, no encontramos en el reparto a ningún actor famoso. Sin embargo, nada de lo anterior impide que estemos ante un trabajo fílmico atractivo, lleno de suspenso y estimulante desde el punto de vista intelectual.

Dirigida por Vincenzo Natali, cineasta italo-estadounidense naturalizado canadiense, *El cubo* narra la historia de varios individuos —hombres y mujeres— que un día despiertan, sin saber cómo llegaron allí, en el interior de un gran cubo metálico, el cual cuenta con una puerta en cada una de sus caras. Al pasar a través de una de estas puertas llegan a otro cubo idéntico, cuyas respectivas puertas conducen a su vez a otros cubos exactamente iguales. Es una especie de laberinto tridimensional lleno de trampas mortales que obligarán a los protagonistas a hacer uso de todo su ingenio para sobrevivir.

¿Quién diseñó tan desconcertante máquina? ¿Con qué fines? ¿Como harán los héroes para escapar? No adelantaremos aquí la respuesta, baste decir que la solución tiene que ver con un problema matemático y, específicamente, con la capacidad de los personajes para distinguir los números primos de aquellos que no lo son. Tales números son, como se sabe, los que sólo son divisibles entre sí mismos y entre la unidad. En ellos está la clave del misterio.

El filme en cuestión consigue crear una sensación de angustia en los espectadores. Es además un drama con una curiosa cualidad asfixiante que resultará doblemente aterradora para aquellos que padecen claustrofobia y que, por ejemplo, no resisten estar mucho tiempo en un elevador. Si usted es una de estas personas, el filme en cuestión le producirá un impacto muy difícil de olvidar.

Título original:	*Cube*
Año:	1999
Guión:	Andre Bijelic, Vincenzo Natali y Graeme Manson
Dirección:	Vincenzo Natali
Actores:	Maurice Dean Wint, Nicole DeBoer, Nicky Guadagni, David Hewlett y Andrew Miller
Fotografía:	Derek Rogers
Música:	Mark Koven

Lecturas Sugeridas:

1. Revista *¡Despertad¡* 22 de Mayo de 2003. Páginas 21 – 23.

2. José Chamoso y William Rawson. *Matemáticas en una tarde de paseo*. España: Nivola 2003.

LA FASCINACIÓN POR LOS NÚMEROS

Jorge Luis González Alanis

En casi todos los cursos, y en prácticamente casi todos los temas, se puede introducir el contexto histórico y cultural que produjo el desarrollo de las ideas matemáticas. Referirse a la motivación que llevó a la consideración del problema tratado y su solución es, sin duda, más enriquecedor al considerar temas con un amplio contexto histórico y cultural. Como ejemplos simples podemos pensar en el desarrollo de la trigonometría y las proyecciones esféricas asociadas a la cartografía; la geometría proyectiva asociada a la perspectiva o incluso la mística numérica.

A modo de ilustración, al abarcar el bloque de números del currículum, en el curso de álgebra, podríamos hacer algo como lo siguiente. En las culturas antiguas era común atribuir un sentido místico a las cifras. Según Pitágoras, filósofo y matemático griego del siglo VI a. C., todo se reducía a patrones numéricos. Para los pitagóricos, los números suministraban un modelo conceptual del universo donde las cantidades y figuras determinaban las formas de todos los objetos. Inicialmente consideraban a los números como entidades geométricas, físicas y aritméticas compuestos de partículas o puntos unidad. Disponían tales puntos a modo de vértices de diversas figuras geométricas, refiriéndose a ellas con el nombre de números triangulares, cuadrados, etc. Así pues, para los pitagóricos, los números poseían no sólo un tamaño cuantitativo sino, además, una figura geométrica, siendo en este sentido en el que consideraban que los números eran las formas e imágenes de los objetos naturales (véase: Fig. 1). Se dice que Filolao de Tarento (*fl. ca.* 430 a. C.), entusiasmado con estas ideas y que propagó las opiniones de los pitagóricos, mantenía que: 'Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número algo pueda ser concebido o conocido'. ¿No era posible, entonces que las relaciones matemáticas constituyeran un elemento esencial de todo lo material?

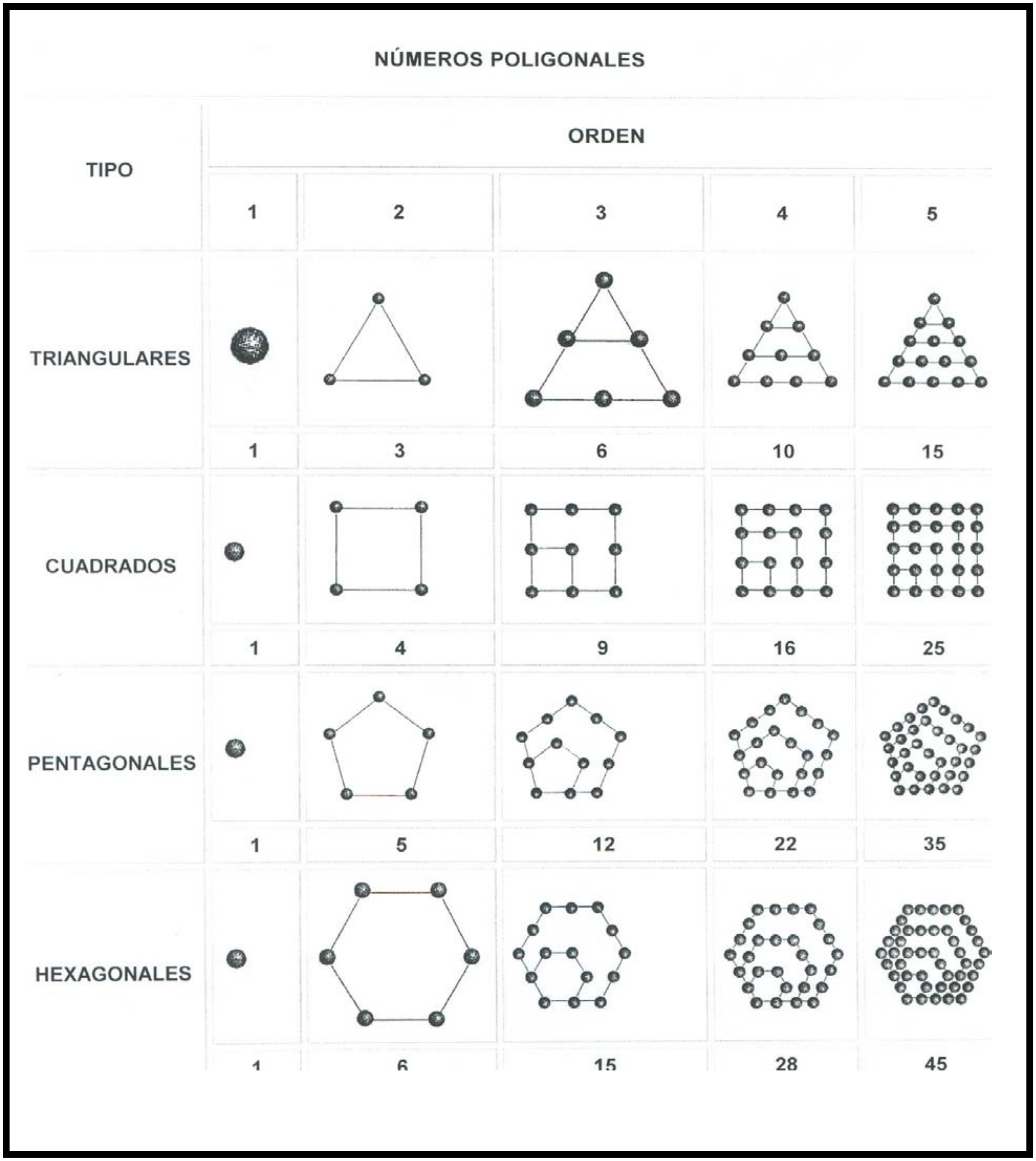


Figura 1. Contenida en: Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras, El filósofo del número.* España: Nivola 2001 página 113.

DE PITAGORAS A LA PSEUDOCIENCIA

Además de ser prácticos, los números poseen un aura de misterio en virtud de su carácter abstracto, el cual nos impide percibirlos por la vista, el tacto o algún otro sentido. A modo de ilustración, las manzanas se caracterizan por su color, textura, tamaño, forma, aroma y sabor, lo que nos permite diferenciarlas de los limones, las pelotas u otros objetos. Pero no ocurre igual con los números. Así, entre una docena de artículos y otra, tal vez no haya nada más en común que el hecho de contener doce unidades. De modo que comprender el significado de las cifras —por ejemplo, la diferencia entre 11 y 12— implica captar una idea abstracta, y es ahí donde entra en juego la mística de los números.

Pitágoras creó una especie de religión basada en los números. Creía que no sólo eran un instrumento de enumeración, sino que también eran amigables, perfectos, sagrados o malignos. Y ya desde esos tiempos se ha recurrido a los números para predecir el futuro, interpretar los sueños, etc. Hallamos adeptos a tales métodos en la cultura griega, el islam y la cristiandad. En el judaísmo, los cabalistas utilizaban un sistema numerológico denominado gematría, en el que atribuían un valor numérico a cada una de las veintidós letras de su alfabeto y decían que por este medio encontraban mensajes ocultos en las Escrituras Hebreas.

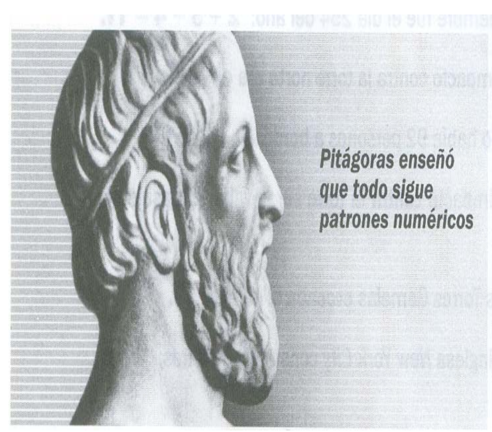


Imagen 1. Los pitagóricos vivieron imbuidos de un eferveciente entusiasmo místico hacia los números, de ahí que la doctrina pitagórica llamada *misticismo numérico,* pretendía atribuir a los números no sólo un carácter sagrado sino también una realidad sustancial descriptiva tanto de los aspectos cualitativos como de los aspectos físicos de las cosas. En este sentido, los pitagóricos bien podrían haber acuñado la frase que hizo célebre Galileo: “La naturaleza está escrita con caracteres matemáticos”

La numerología moderna es parecida. El especialista suele tomar como punto de partida el nombre y la fecha de nacimiento de una persona. Tras asignar el valor numérico correspondiente a cada letra del nombre, suma las cifras, junto con los del día y mes del nacimiento, para establecer los números clave del individuo. Luego les atribuye un sentido especial, y de este modo realiza lo que considera una descripción completa, que incluye detalles como su personalidad, deseos inconscientes y el destino que le espera.

La numerología, práctica que concede un significado especial a las cifras, así como a sus combinaciones y sumas, goza de amplia difusión en África, Asía y América. ¿A qué obedece su atractivo? La descodificación de las letras del alfabeto que componen los nombres —una característica popular de la numerología— 'ofrece información exacta sobre la personalidad, el carácter y los defectos y virtudes'.

¿Encierran las cifras un sentido oculto? '¡Seguro que sí!', exclamarían algunos, señalando tal vez a un interesante ejemplo: Los ataques terroristas del 11 de Septiembre de 2001. Cabe destacar que el número once se considera un número maestro en numerología. Diversos aspectos relacionados con aquellos ataques que apuntan a dicho número maestro se ilustran en la siguiente tabla:

- La tragedia ocurrió el día 11 del mes 9: 1 + 1 + 9 = 11
- El avión que impactó contra la torre norte era el vuelo 11
- En aquel vuelo habían 92 personas a bordo: 9 + 2 = 11
- El avión que impactó contra la torre sur llevaba 65 pasajeros: 6 + 5 = 11
- El perfil de las Torres Gemelas evoca él numero 11
- La expresión inglesa 'New York City' consta de 11 letras.

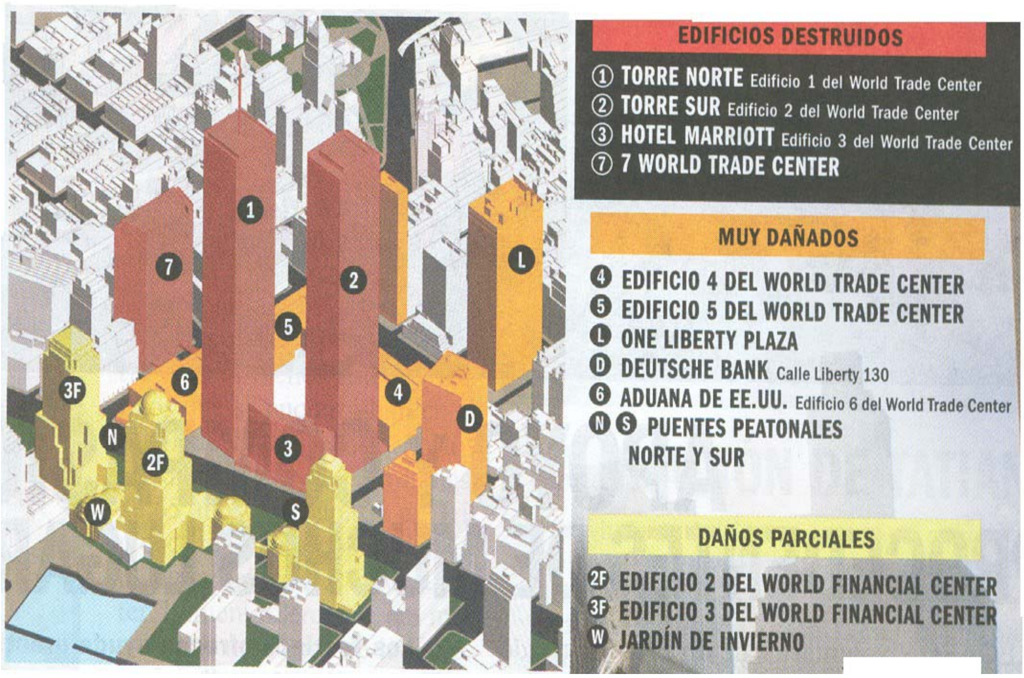

EDIFICIOS DESTRUIDOS
① TORRE NORTE Edificio 1 del World Trade Center
② TORRE SUR Edificio 2 del World Trade Center
③ HOTEL MARRIOTT Edificio 3 del World Trade Center
⑦ 7 WORLD TRADE CENTER
MUY DAÑADOS
4 EDIFICIO 4 DEL WORLD TRADE CENTER
5 EDIFICIO 5 DEL WORLD TRADE CENTER
L ONE LIBERTY PLAZA
D DEUTSCHE BANK Calle Liberty 130
6 ADUANA DE EE.UU. Edificio 6 del World Trade Center
N S PUENTES PEATONALES NORTE Y SUR
DAÑOS PARCIALES
2F EDIFICIO 2 DEL WORLD FINANCIAL CENTER
3F EDIFICIO 3 DEL WORLD FINANCIAL CENTER
W JARDÍN DE INVIERNO

Imagen 2.

En vista de lo anterior, y a pesar de ser la numerología una pseudociencia, muchos dirán que los números sí influyen en su vida. El atractivo de esta técnica tal vez resida en la aparente exactitud de su análisis. Pero, ¿habrá motivos para poner en duda sus afirmaciones? ¿Resiste la numerología el examen de la ciencia y la razón?

Un obstáculo que no logran vencer los numerólgos es la existencia de distintos calendarios en diversas culturas. Por ejemplo, ¿qué sucede si alguien vive en una región donde se usa un calendario diferente, como el chino? Tomemos como muestra la fecha: 11 de Septiembre de 2001. En el calendario chino corresponde al día 24 del mes séptimo del año 18 del ciclo 78; en el juliano, al 29 de Agosto de 2001; en el musulmán, al 22 de yumada segundo de 1422, y en el hebreo, al 23 de Elul de 5761. ¿Cómo va a tener importancia numérica una fecha que adopta formas tan diferentes? Otro factor a considerar es que cada idioma suele escribir los nombres de una manera particular. Así, el valor numerológico de las letras del nombre inglés John es 2, mientras que el de su correspondencia en español, Juan, es 1.

LA DIVERSIDAD DE CALENDARIOS ES UN GRAVE OBSTÁCULO PARA LA NUMEROLOGÍA

GREGORIANO	11 de septiembre de 2001
CHINO	24 del mes séptimo del año 18 del ciclo 78
JULIANO	29 de agosto de 2001
MUSULMÁN	22 de yumada segundo de 1422
HEBREO	23 de Elul de 5761

Una cosa es admitir que muchos aspectos del cosmos se explican con fórmulas matemáticas, verificables y demostrables, y otra muy distinta afirmar que se predestinó el nombre de cada persona para hacerlo coincidir con la fecha de nacimiento y ligarlo a ciertos números con el fin de determinar su destino.

La conclusión es evidente: Creer que las interpretaciones numerológicas son exactas, cuando en realidad se basan en factores tan variables como el calendario y el idioma, es llevar la credibilidad a los limites de lo absurdo.

Pero, ¿no aciertan los numerólogos a veces en sus predicciones? ¿A qué obedece este hecho? En algunos casos tal vez sea por pura coincidencia, y en otros, porque se emplea un lenguaje ambiguo aplicable a varios sucesos. Con todo, conviene plantearse una posibilidad más peligrosa. ¿Es la numerología un arte adivinatoria?

Aunque la Biblia no mencione el término numerología, refiere lo que hizo Hamán (Amán) el amelaquita cuando conspiró para exterminar a los judíos de Persia del siglo V a. C.: "Se echaron suertes en presencia de Amán *para fijar el dia y el mes* en que convenía llevar a cabo su plan, y salió el día trece del mes doce, o sea el mes de Adar" (Ester 3:7, 13).

Imagen 3.

En la antigüedad echar suertes era un modo legítimo de zanjar disputas. El método de echar suertes consistía en poner objetos pequeños (como guijarros o trocitos de madera) en los pliegues de la ropa o en un recipiente, agitarlos y sacar uno para saber quién era elegido. Pero Hamán utilizó este método para la adivinación, práctica que *La Biblia* relaciona con el espiritismo (Deuteronomio 18: 10-12).

La numerología carece de base científica, no resiste el examen a la luz de la razón. Sin embargo, esto no impidió que las matemáticas y esta pseudociencia se mezclaran para dar forma a una película que tiene al espectador al borde la locura: π. *El orden del caos.*

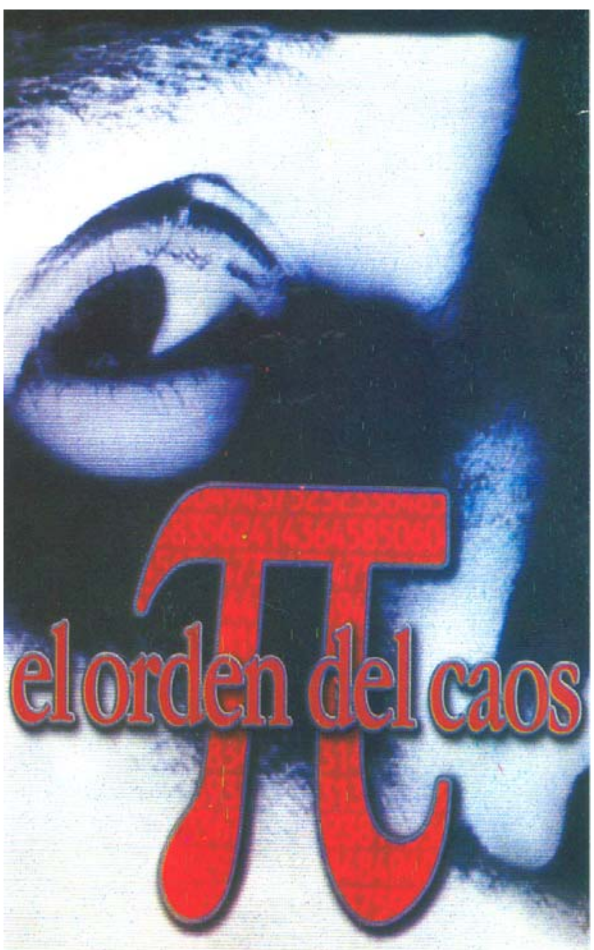


Imagen 4. En esta película hallamos a Max Cohen, genio matemático, que cree que: 1) Las matemáticas son el lenguaje del universo; 2) la naturaleza puede ser expresada por números; y, 3) hay patrones en cualquier parte de dicha naturaleza. Diseña programas, los prueba, busca patrones, encuentra una clave de doscientos dieciséis dígitos y luego comienza a cuestionarse sobre él. Sol, su antiguo maestro, le advierte que está dejando atrás la ciencia para acercarse más bien a la numerología. Llevado al límite de la locura por su descubrimiento, Max es perseguido por una ambiciosa firma de Wall Street y una secta ultra-religiosa de cabalistas. Ambas partes esperan usar el descubrimiento para resolver grandes misterios y están dispuestos a matar por el patrón numérico que revelará todos los secretos del universo.

Lecturas sugeridas:

1. Revista *¡Despertad!* 8 de septiembre de 2002.

2. Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras. El filósofo del número*. España: Nivola 2001.

DESCUBRIENDO EL DISEÑO EN LA NATURALEZA

Jorge Luis González Alanis

DISEÑOS ENIGMÁTICOS EN LAS PLANTAS.

¿Has notado que muchas plantas forman espirales al crecer? La piña por ejemplo, puede presentar ocho espirales de escamas en una dirección y cinco o trece en la dirección opuesta. Si te fijas en las semillas del girasol, tal vez veas cómo se hallan siempre dispuestas en dos conjuntos de espirales entretejidos, uno de los conjuntos en la dirección de las agujas del reloj, y el otro en la dirección inversa. El número de espirales en cada conjunto no es el mismo; se entrecruzan al menos cincuenta y cinco y ochenta y nueve espirales, o bien ochenta y nueve y ciento cuarenta y cuatro (figura 1a y 1b). Puedes encontrar espirales hasta en la coliflor. Una vez que empieces a distinguir este diseño en frutas y verduras, tu visita a la tienda de comestibles te resultará más interesante. ¿Por qué presentan la las plantas esta distribución? ¿Tiene alguna importancia la cantidad de espirales?

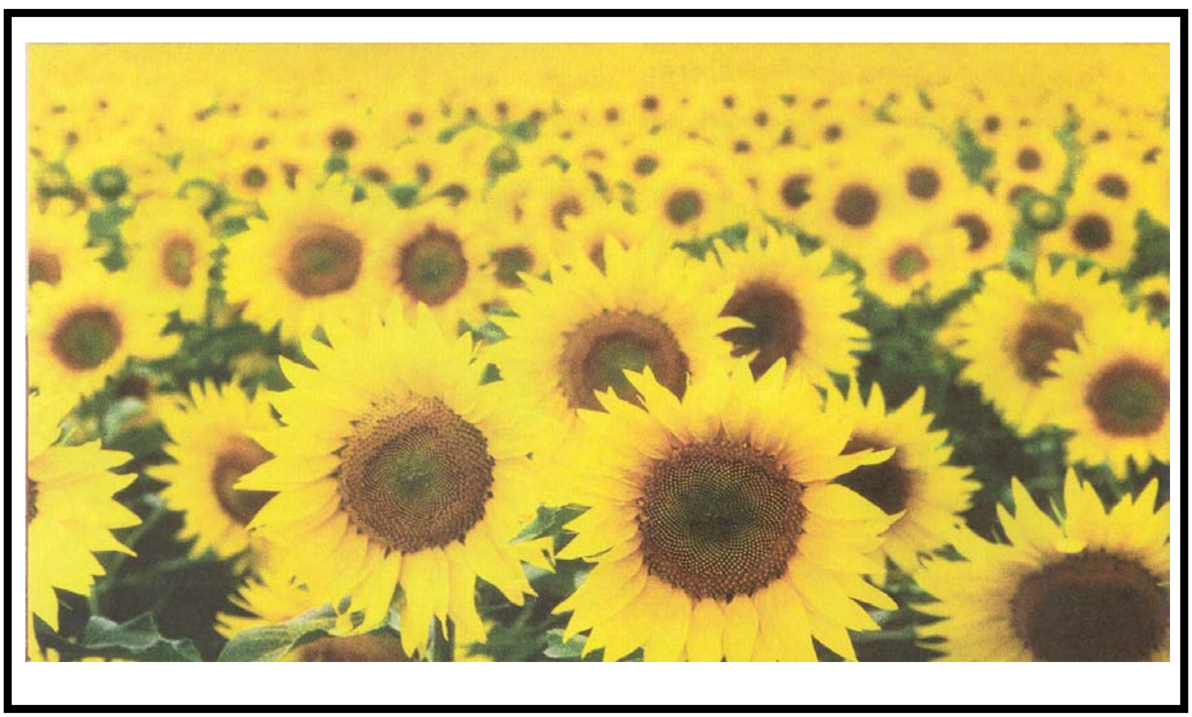


Figura 1a.

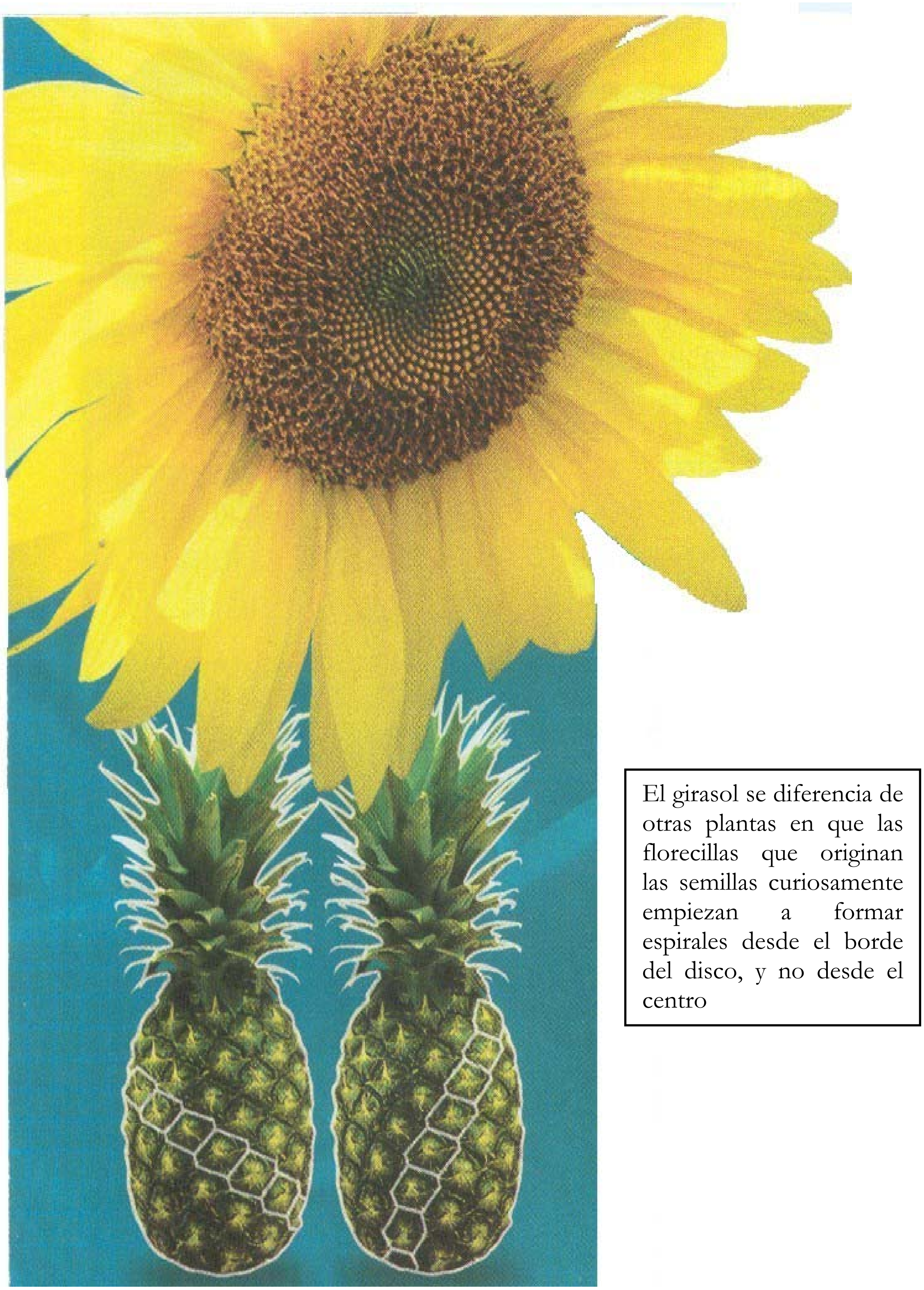

El girasol se diferencia de otras plantas en que las florecillas que originan las semillas curiosamente empiezan a formar espirales desde el borde del disco, y no desde el centro

Figura 1b.

¿CÓMO CRECEN LAS PLANTAS?

La filotaxia (que es la disposición de las hojas sobre el tallo de las plantas) nos enseña que las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen al buscar siempre recibir el máximo de la luz para cada una de ellas. Por eso, ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce al seguir secuencias basadas en ciertos números que muestran como la naturaleza y las matemáticas están conectadas.

En la mayor parte de las plantas, los nuevos tejidos u órganos —como los tallos, las hojas y las flores— se forman a partir de diminutos puntos de crecimiento llamados ‘meristemas’. Cada nuevo ‘primordio’ (el conjunto de células que da lugar a los órganos) surge del centro del meristema en una dirección distinta al formar un ángulo con el primordio anterior (figura 2). En casi todas las plantas, los nuevos tejidos crecen en un ángulo singular que produce espirales. ¿Cuántos grados mide dicho ángulo?

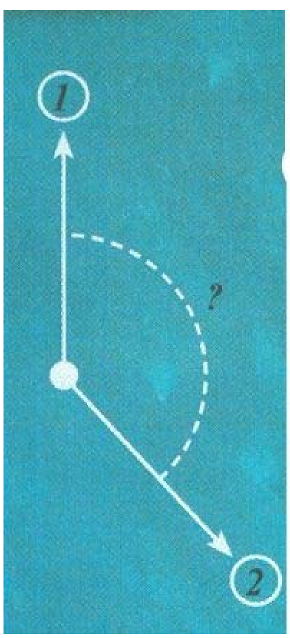


Figura 2

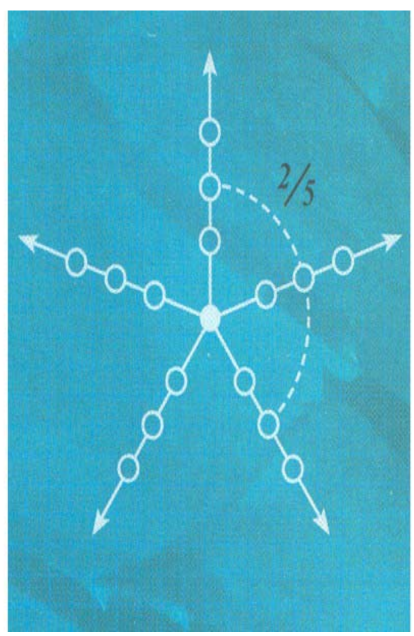


Figura 3

Ahora imagínate que quieres diseñar una planta en la que los primordios estén distribuidos alrededor del punto de crecimiento sin desperdiciar espacio, formando un conjunto compacto. Supongamos que decides que cada nuevo primordio crezca en un ángulo de dos quintos de una vuelta completa con respecto al primordio anterior. Tropezarías con el inconveniente de que, cada cinco primordios, se repetirían el punto y la dirección del crecimiento. De este modo se formarían hileras radiales, con lo cual se desperdiciaría espacio (figura 3). Lo cierto es que con cualquier fracción simple de una vuelta completa se obtendría el mismo resultado. Solo el llamado 'ángulo áureo', de algo más de 137,5º, lleva a una distribución de los primordios lo más compacta posible (figura 4). ¿Qué tiene de especial este ángulo?

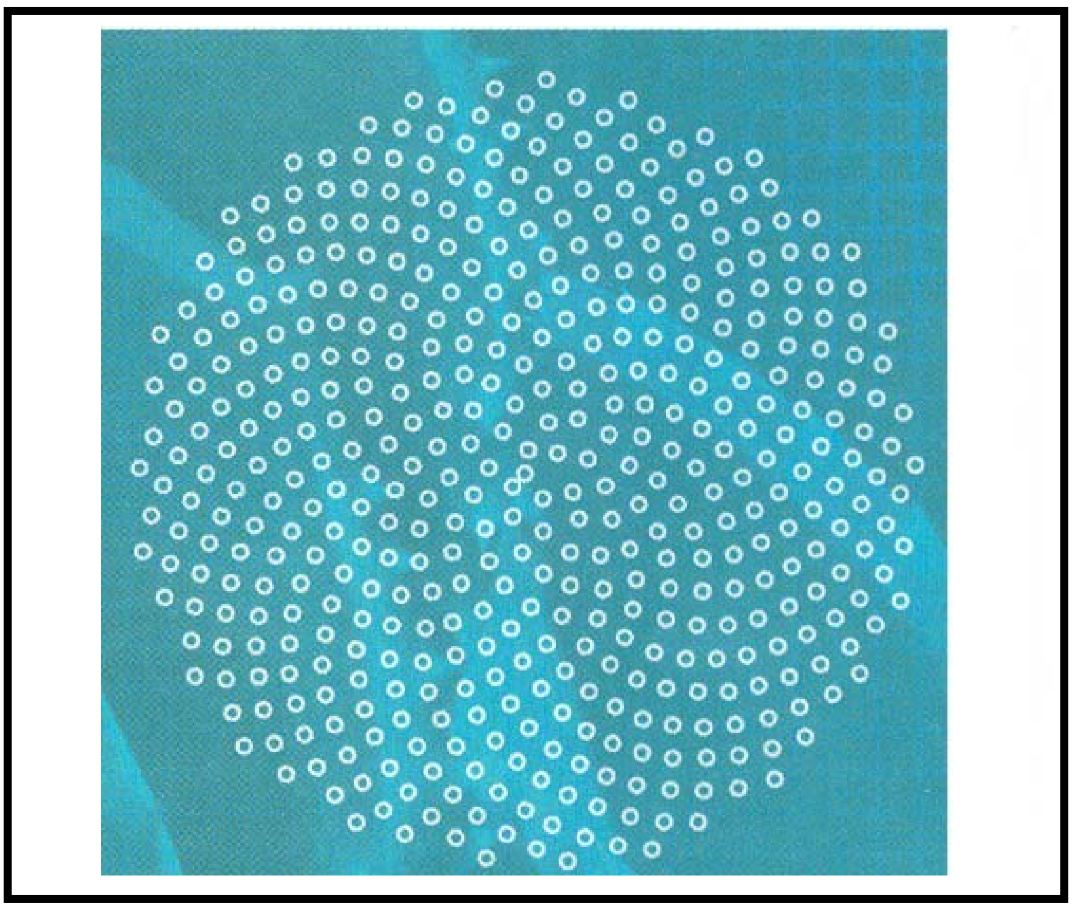


Figura 4.

El ángulo áureo es el ideal porque no se puede expresar en forma de fracción simple de una vuelta. La fracción 5/8 = .625 se acerca a dicho ángulo, la fracción 8/13 = .615 se acerca más, y la fracción 13/21 = .619 más aún; pero no hay alguna que exprese con exactitud la proporción áurea de una vuelta completa. Por esto, si cada nuevo primordio nace en el mencionado ángulo fijo con respecto al anterior, nunca crecerá alguno exactamente en la misma dirección (figura 5). Eso explica que los primordios formen espirales, en lugar de hileras radiales.

Resulta interesante que al hacer una simulación por computadora de una serie de primordios que parten de un punto central, sólo se generan espirales perfectas si la medida del ángulo entre los primordios es exacta. Basta desviarse del ángulo áureo una décima parte de un grado para que se pierda el efecto.

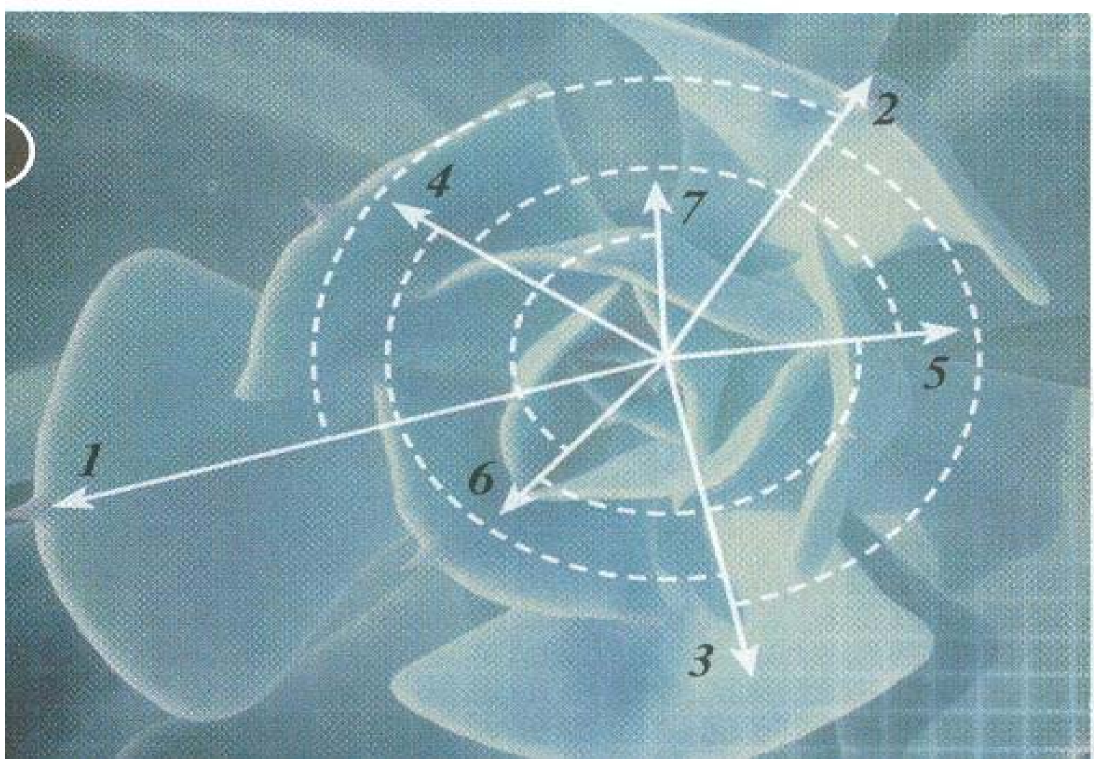
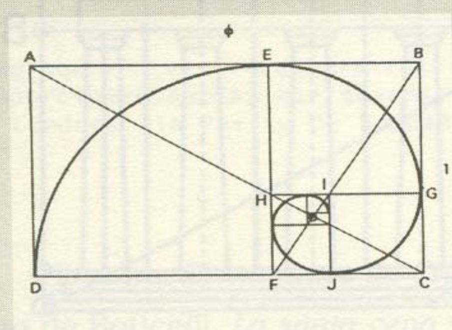


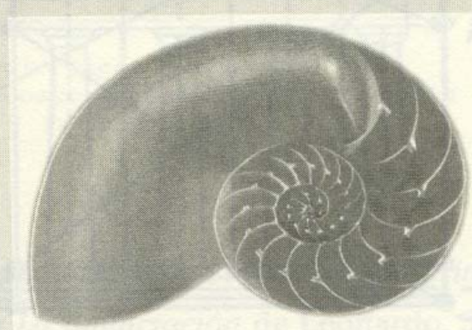
Figura 5.

La espiral logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo ABCD y le sustraemos el cuadrado AEFD cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una espiral logarítmica.

Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se la llama también espiral equiangular *(el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante, según Descartes)* o espiral geométrica *(el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética, según Halley). J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó* spira mirabilis, *rogando que fuera grabada en su tumba.*





La *espiral logarítmica* vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. Se trata de un crecimiento gnomónico cuyo ejemplo más visualmente representativo es la concha del *nautilus*.

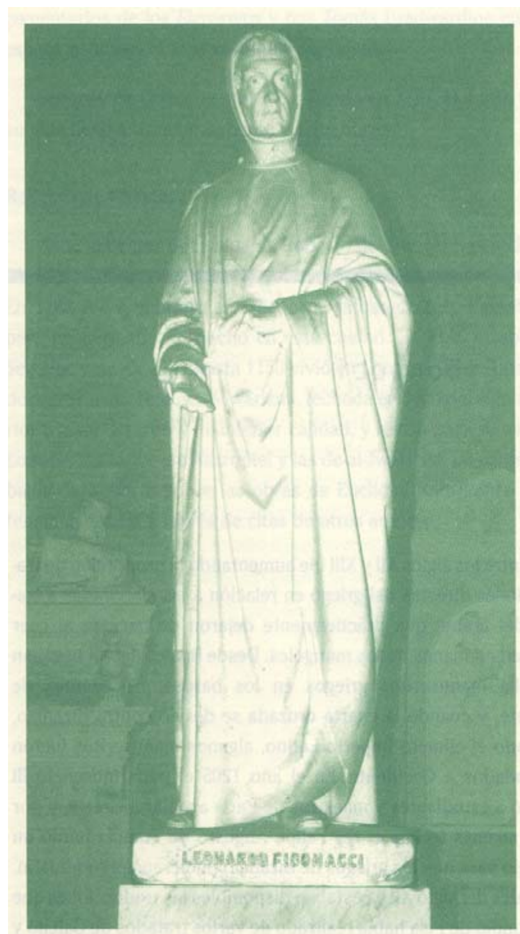
Contenido en: Pedro Miguel González Urbajena. *Pitágoras. El filosofo del número.* España: Nivola 2001. Página 189.

¿CUÁNTOS PETALOS TIENEN LAS FLORES?

Curiosamente, la cantidad de espirales que resultan del crecimiento basado en el ángulo áureo coincide por lo general con uno de los números de la serie conocida como secuencia de Fibonacci. El primero en describir dicha serie fue el matemático italiano del siglo XIII, Leonardo Fibonacci. En esta secuencia, cada número después del *1* es igual a la suma de los dos que lo preceden

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Imagen 1. Leonardo de Pisa, Fibonacci (hijo de Bonaccio), publicó, en 1202, el *Liber abaci,* la primera suma matemática de la Edad Media. En él aparecen por primera vez en Occidente, las nueve cifras hindúes y el signo del cero. Leonardo de Pisa brinda en su obra reglas para realizar operaciones con estas cifras, normas para calcular la raíz cuadrada de un número, así como instrucciones para resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado.



Escultura dedicada a *Fibonacci* en el Camposanto del Duomo de Pisa. Fotografía de Francisco Martín Casalderrey extraída de su libro *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. España: Nivola 2000. Página 32.

En muchas flores con crecimiento en espiral, la cantidad de pétalos corresponde a un número de la secuencia de Fibonacci. Según algunos observadores, el *Ranunculus septentrionales* tiene cinco pétalos, la sanguinaria del Canadá ocho, el senecio amarillo, trece, el *Aster subulatus* veintiuno, algunas especies de margaritas treinta y cuatro y la septembrina cincuenta y cinco u ochenta y nueve/ figura 6). Numerosas frutas y hortalizas tienen características en las que se presentan números de la serie de Fibonacci. Por ejemplo, cuando se corta transversalmente un plátano, se ve con facilidad que cuenta con cinco lados.

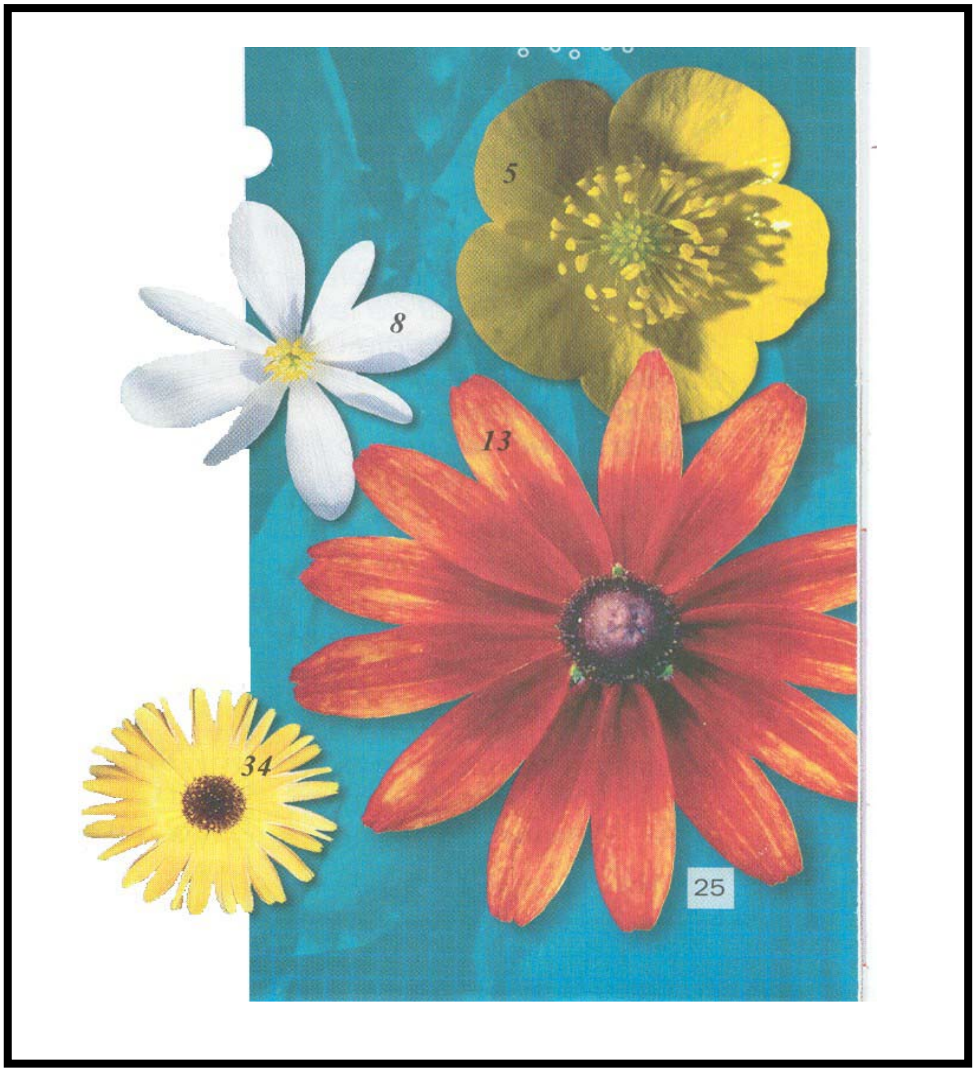


Figura 6.

U S T E D   P U E D E   D E S C U B R I R

diseño en la naturaleza

Usted tal vez crea que solo un científico es capaz de descubrir los intrincados diseños de la naturaleza. Sin embargo, no hace falta tener sofisticados instrumentos científicos para descubrir los diseños naturales. Todo lo que usted necesita es ser observador, tener un poco de imaginación y saber apreciar la belleza y la forma. Y quizás también tenga que poner más atención a objetos conocidos que generalmente haya dado por sentados.

Uno de los diseños más simples es la espiral, presente en objetos de creación humana tan comunes como una cuerda enrollada o un sacacorchos. Por otro lado, encontrará ejemplos mucho más elegantes en las conchas marinas y las piñas de los pinos. Y si mira con detenimiento el centro de un girasol, de nuevo aparecerá ante usted la espiral. Menos obvia es la espiral que adorna tanto la corola de las rosas como las telarañas.

Fíjese de cerca en la tela de una araña. Primero, esta pone en su lugar los puntales principales de la red que, en cierto modo, se parecen a los rayos de una rueda. Luego empieza a conectarlos desde el centro con un hilo de seda pegajoso, tejiendo un círculo tras otro hasta terminar la red. Estos círculos cada vez más grandes forman la espiral.

Otro interesante diseño en la naturaleza es el ocelo, una mancha coloreada en forma de ojo que puede encontrarse en los sitios más raros: en las plumas de un ave, en las alas de una mariposa y hasta en las escamas de un pez. Los científicos creen que los ocelos pueden atraer en el cortejo, engañar a un atacante o servir de camuflaje. El pavo real quizás sea el ejemplo más conocido en lo que a ocelos se refiere, y el despliegue de su cola durante el cortejo constituye una de las maravillas de la naturaleza. Alejandro Magno quedó tan impresionado por la belleza del pavo real, que exigió que el ave fuera protegida en todo rincón de su imperio.

Otros diseños conocidos son el círculo y la esfera. Una dorada esfera solar al atardecer y una plateada luna llena despiertan invariablemente nuestra admiración. Muchas flores como la margarita tienen forma de Sol: el centro amarillo y pétalos radiales de diversos colores. El banquete de néctar que anuncia el núcleo dorado de estas omnipresentes flores atrae a las mariposas casi tanto como las doradas playas a los turistas.

Puesto que la esfera es la figura con mayor capacidad, las frutas y las bayas a menudo se presentan en esferas de distintos tamaños y colores. Sus tonos vivos atraen a los pájaros que, a cambio de una deliciosa comida, dispersan las semillas.

Por supuesto, la espiral, el ocelo, el círculo y la esfera son solo unos cuantos ejemplos de los muchos diseños presentes en la naturaleza. Algunos tienen propósitos específicos, mientras que otros sirven tal vez de decoración o camuflaje. Como quiera que sea, búsquelos, y disfrútelos.

Tomada de : Revista *¡Despertad!* 8 de Diciembre de 2002. Página 27.

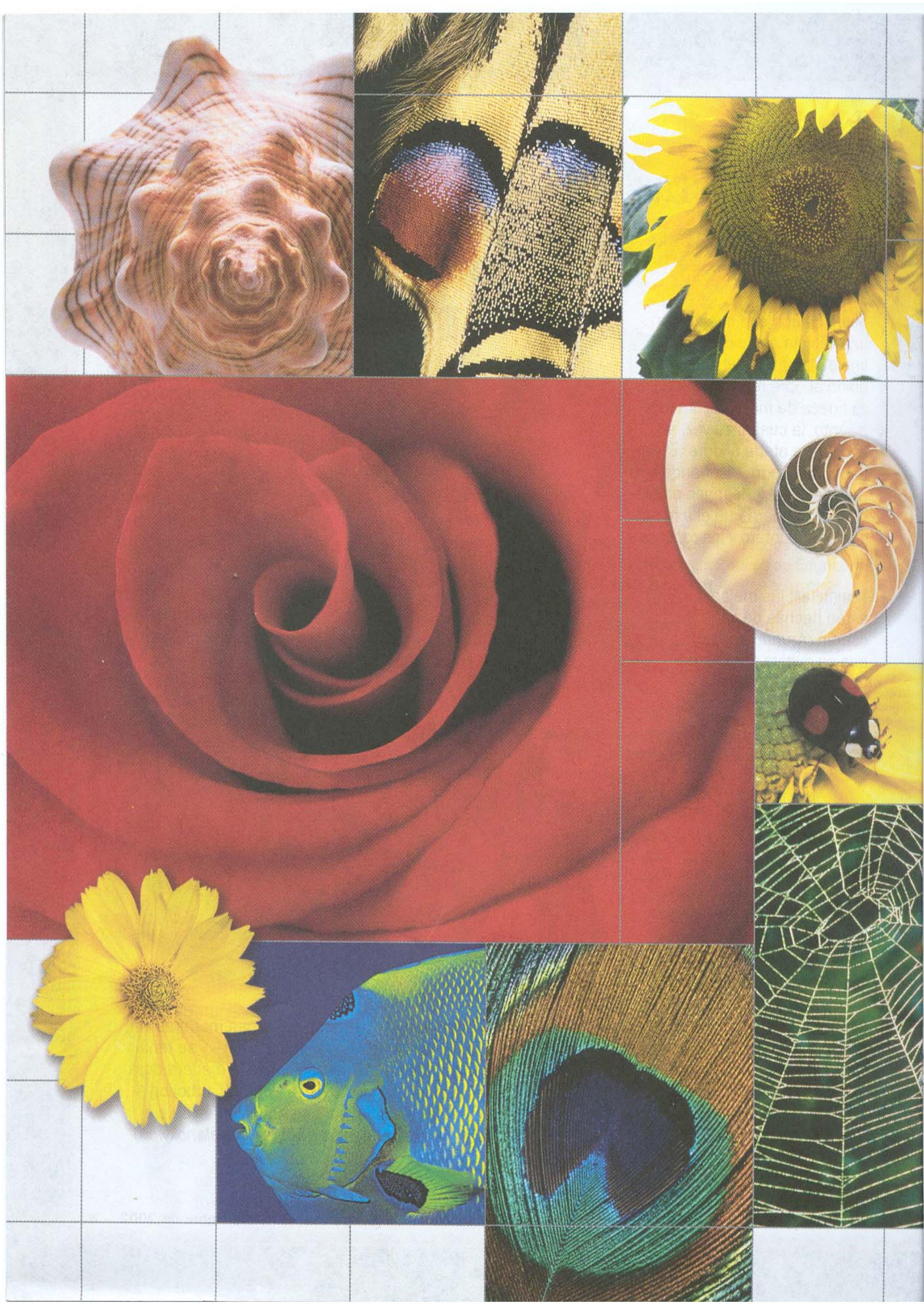


Figura 7.

CONSTRUYAMOS UNA ESPIRAL.

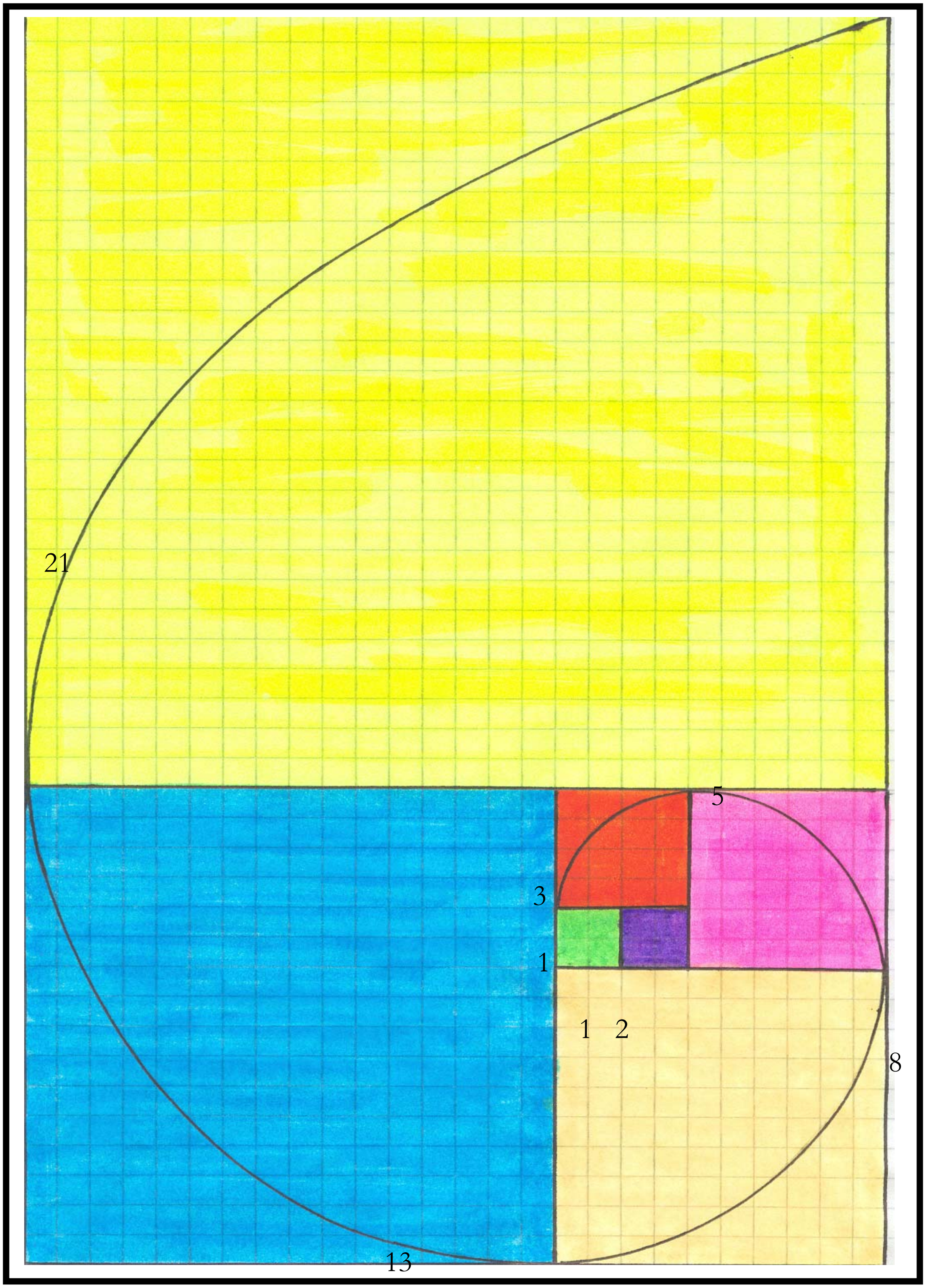
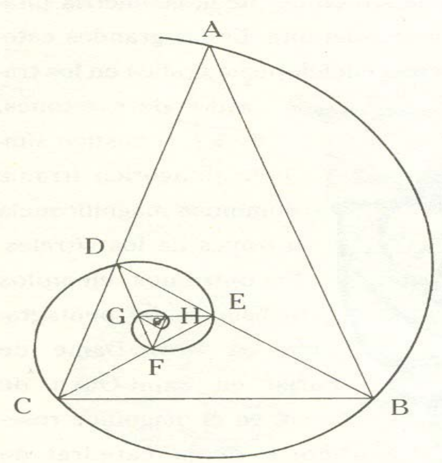


Figura 8.

Podemos construir una serie de rectángulos al utilizar los números de esta sucesión. Empezaremos con un cuadrado de lado 1, los dos primeros términos de la sucesión. Construimos otro igual sobre él. Tenemos ya un primer rectángulo Fibonacci de dimensiones 2 • 1. Sobre el lado de dos unidades construimos un cuadrado y tenemos un nuevo rectángulo de 3 • 2. Sobre el lado mayor construimos otro cuadrado, tenemos ahora un rectángulo 5 • 3, luego uno 5 • 8, 8 • 13, 13 • 21, ...

Hemos construido así una sucesión de rectángulos, cuyas dimensiones partiendo del cuadrado (1 • 1), pasan al rectángulo de dimensiones 2 • 1, al de 3 • 2, y avanzan de forma inexorable hacia el rectángulo áureo (véase: Fig. 8). Si unimos los vértices de estos rectángulos se forma una curva: Es la espiral de Durero. Una espiral, que, de forma bastante ajustada, está presente en el crecimiento de las conchas de los moluscos, en los cuernos de los rumiantes. Es decir, la espiral del crecimiento y la forma del reino animal. Fibonacci, sin pretenderlo, había hallado la llave del crecimiento en la Naturaleza.



En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo B corta a AC en D de forma áurea. El triángulo BCD, siendo semejante al original ABC, es también *áureo*. La bisectriz del ángulo C corta a BD en el punto E de forma áurea, y el triángulo CDE es igualmente áureo. Este proceso es indefinido, obteniéndose una sucesión de triángulos áureos que convergen hacia el vértice de una espiral logarítmica que pasa por todos los vértices de los triángulos.

Figura 9.

Finalmente, el profesor guiará y orientará esta búsqueda de información, proporcionando materiales fotocopiados, seleccionando textos e ilustraciones y, una vez explorados y contextualizados los conocimientos matemáticos característicos se seleccionan aquellos que contribuyan al desarrollo integral del alumno.

Lecturas sugeridas:

1. Revista *¡Despertad!* Septiembre de 2006.
2. Ricardo Moreno Castillo. *Fibonacci. El primer matemático medieval*. España: Nivola 2004.
3. Steven Rose. *Trayectorias de Vida. Biología, Libertad, determinismo*. España: Granica 2001 Páginas 273 – 280.
4. Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras. El filosofo del número*. España: Nivola 2001. Capítulo 5, páginas 183 -203.

BIBLIOGRAFIA

1. Alejandro R. Garciadiego."... y, ... las matematicas, ... ¿para qué nos sirven?" *Acta Universitaria* **7** (1997) 3-14.

2. Ana Millán Gasca. *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. España: Nivola 2004. Capítulo 4. Páginas 51 – 99.

3. Hans Magnus Enzensberger. *El diablo de los números*. Madrid: Siruela 1997.

4. James F. Fixx. *Juegos de recreación mental para los muy inteligentes*. México: Gedisa 1987

5. Alejandro Garciadiego. 'Pedagogía e historia de las ciencias, ¿Simbiosis innata?'; contenido en: Alejandro Garciadiego. Luis Vega y Francisco Rodríguez Consuegra. *El velo y la trenza*. Colombia: Editorial Universidad Nacional 1997. Capíulo 1. Páginas 17 – 34.

6. Luz Manuel Santos Trigo. 'Hacia una instrucción que promueva los procesos de pensamiento matemático'; contenido en: Eugenio Filloy (comp.) *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual.* México: Fondo de Cultura Económica 2003. Capítulo 16. Páginas 314 – 331.

7. Alejandro Garciadiego. *Historia de las ideas matemáticas: un manual introductorio de investigación*. *Mathesis* 12 (1996) 3-113.

8. Hans Wussing. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. España. Editorial Siglo XXI 1998.

9. *Mathematics Teacher*. Septiembre de 1993.

10. *Mathematics Teacher*. Noviembre de 2000.

11. *Mathematics Teacher*. Diciembre de 1983.

12. *Mathematics Teacher*. Noviembre de 1988.

13. *Mathematics Teacher*. Abril de 2001.

14. *Mathematics Teacher*. Mayo de 1975.

15. Francisco Martín Casalderrey. *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. España: Nivola 2000. Capítulo 1, páginas 13 - 36.

16. Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras. El filósofo del número*. España: Nivola 2001. Capítulo 4, páginas 149 - 182.

17. Revista *¡Despertad¡* 22 de Mayo de 2003. Páginas 21 – 23.

18. José Chamoso y William Rawson. *Matemáticas en una tarde de paseo*. España: Nivola 2003.

19. Revista *¡Despertad!* 8 de Septiembre de 2002.

20. Revista *¡Despertad!* Septiembre de 2006.

21. Ricardo Moreno Castillo. *Fibonacci. El primer matemático medieval*. España: Nivola 2004.

22. Steven Rose. *Trayectorias de Vida. Biología, Libertad, determinismo*. España: Granica 2001. Páginas 273 – 280.

23. Pedro Miguel González Urbaneja. *Pitágoras. El filosofo del número*. España: Nivola 2001. Capítulo 5, páginas 183 -203.

24. Nacional Council of Teachers of Mathematics (1989), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. NCTM; Reston, Virginia.

25. John D. Bernal, *La Ciencia en la Historia*. México: Nueva Imagen 1989.