UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Mecánica Cuántica y Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos no-conmutativos.

REPORTE
DE INVESTIGACIÓN

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

LUIS ROMÁN JUÁREZ SANDOVAL

TUTOR:

DR. MARCOS ROSENBAUM PITLUCK

2007

El trabajo de investigación realizado en la preparación de [1] y [2] está dedicado a estudiar las implicaciones de un espacio-tiempo intrínsecamente no conmutativo, entendiendo esto como un álgebra no conmutativa de los operadores del espacio del Hilbert que representan a los observables de posición. Dos formas de abordar este problema son introducidas al nivel de mecánica cuántica.
Posteriores extensiones al caso de Teoría Cuántica de Campos [3] y [4] ofrecen resultados importantes sobre la forma en que cantidades invariantes bajo ciertas simetrías se modifican en el caso no-conmutativo, así como una método para introducir campos de partículas en tal formalismo.

Índice.

Motivación

El problema más básico de la física moderna es conjuntar la Gravitación con las otras 3 interacciones fundamentales en una Teoría de Gran Unificación.

En el contexto de la filosofía reduccionista de la Física, ésta ha sido exitosa en construir teorías de unificación que describen una vasta cantidad de fenómenos con un el menor número de conceptos. La primera Teoría de unificación fue la Mecánica Clásica de Isaac Newton, contenida en sus *Principia* de finales del siglo XVII (1687), que dio una explicación mecanicista a todos los fenómenos conocidos hasta principios el siglo XIX. La segunda gran teoría de unificación surge en la segunda mitad del siglo XIX (1864) con la descripción del electromagnetismo mediante las ecuaciones de James C. Maxwell y que a su vez corresponde a la primera teoría de campo, proporcionando a la interacción electromagnética de una velocidad finita de propagación de señales (la velocidad de la luz).

Durante las primeras décadas del siglo XX nuevos fenómenos en la física fueron descubiertos, a saber: 1) Las interacciones nucleares fuertes, asociadas con el núcleo atómico, 2) Las interacciones nucleares débiles, responsables de los procesos de decaimiento nuclear. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XX que se logró interpretar el "zoológico" de partículas subatómicas, conocidas hasta entonces, en términos del modelo de *Quarks,* basado en la invarianza del Lagrangiano de Teoría de Campos para las interacciones fuertes bajo el grupo SU(3). Igualmente la Interacción Débil, modelada por la teoría de Yang-Mills en el caso del grupo de simetría SU(2), pudo ser exitosamente unificada con la teoría electromagnética, U(1), en una teoría Electrodébil, tras la predicción y posterior descubrimiento de los 3 bosones mediadores de dicha interacción.

El producto de estos desarrollos ha sido el Modelo Estándar, basado en la descripción de la materia por medio de una teoría cuántica de campos invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Esta teoría es uno de los pilares de la Física moderna y también es un ejemplo de lo que por definición debe ser capaz una teoría de unificación.

De igual forma los trabajos sobre Relatividad Especial y General de Einstein de principios del siglo XX (1905 y ~1915 respectivamente), proporcionaron a la física de una teoría unificadora, mediante una descripción elegante en el lenguaje de la geometría, para el mundo macroscópico y el Espacio-Tiempo. Este formalismo ha permitido describir y predecir fenómenos de la astrofísica con gran precisión y que en el límite de “bajas velocidades” recobra el modelo construido por Newton varios siglos atrás.

La Relatividad especial es perfectamente adaptable tanto a la Mecánica Cuántica como a la Teoría Cuántica de Campos, pero por la naturaleza geométrica de la Gravitación, la unificación de esta con las interacciones electrodébiles y fuertes no ha sido posible hasta ahora.

Contar con una descripción microscópica del espacio-tiempo y de los fenómenos que ocurren a escalas de ℓ_p (longitud de Planck).

Aunque a escalas atómicas los efectos del campo gravitacional son despreciables por varios órdenes de magnitud en los cálculos de espectros de energías, se cree que al incrementar la escala de energía (disminuir la escala de distancia) a ordenes tales como los que tuvieron lugar en los primeros instantes del universo después del Big Bang, todas las interacciones fundamentales juegan un rol esencial y los efectos de cada una son lo suficientemente grandes como para no poder ser descartados; así es que una formulación cuántica del campo gravitacional y por lo tanto de la geometría del espacio-tiempo, será necesaria en la descripción de dichos fenómenos a esas escalas.

La existencia de una escala de longitud fundamental como una manera de corregir los problemas de cantidades con valores infinitos que plagan las teorías de campos en los regímenes UV /IR poniendo cortes para las integrales divergentes.

Es bien sabido que uno de los problemas más grandes en las teorías de campo son las divergencias que surgen en los cálculos de diagramas de Feynman en los desarrollos perturbativos. Los métodos de renormalización y teorías efectivas utilizadas en algunos casos corrigen una gran cantidad de esos problemas, proporcionando a los físicos de cantidades finitas concordes con las observadas en aceleradores. Sin embargo para el caso del campo gravitacional no ha sido posible hasta la fecha construir una teoría cuántica renormalizable. Una posibilidad para lograr esto pudiera ser el agregar cortes a las integrales de espacio fase de manera similar a lo que se hace en los métodos de renormalización, pero donde la manera natural de introducir este corte en la teoría sea a través de alguna función de ℓ_p.

Un argumento conducente a establecer la existencia de una escala de longitud fundamental del orden de la longitud de de Planck proviene del siguiente razonamiento:

Del principio de incertidumbre de Heisenberg se tiene que $\Delta x\Delta p \gtrsim \hbar$. Esto implica una incertidumbre de energía del orden $\sim \dfrac{\hbar c}{\Delta x}$, y una correspondiente masa inercial $m_a = \dfrac{\hbar}{c\Delta x}$. Ahora bien, por el principio de equivalencia tenemos que

$$m_a = m_g = \frac{\hbar}{c\Delta x}.$$

Esta masa gravitacional a su vez genera un campo gravitacional. Consideremos por simplicidad que este campo es de simetría esférica, entonces estará dado por la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = (c^2 - \frac{2km}{r})dt^2 - r^2(\sin^2\theta \cdot d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1-\dfrac{2km}{rc^2}},$$

($k = 6.67\times 10^{-8}\ \dfrac{cm^3}{gr\cdot s^2}$). En el horizonte la masa gravitacional calculada conduce a

$$r = \frac{2km}{c^2} = \frac{2k\hbar}{c^3\Delta x}$$

$$\Rightarrow \Delta x\cdot r = \frac{2k\hbar}{c^3} \approx \ell_p{}^2 = (1.6\times 10^{-33})^2 cm^2 .$$

Así, la longitud de Planck ℓ_p aparece como un límite inferior a una posible medición de precisión de la posición, y distancias más pequeñas no parecen tener significado operacional.

Consecuentemente, sencillos argumentos de la mecánica cuántica (principio de incertidumbre) y la relatividad general (principio de equivalencia) parecen sugerir que no tiene sentido seguir modelando el espacio-tiempo como una variedad diferencial para describir fenómenos a escalas de ℓ_p *y que otro tipo de teorías son necesarias.*

Diversas teorías que abordan estos problemas han dado lugar a nuevas corrientes de estudio dentro de la Física, los enfoques son variados y algunos radicalmente distintos.

De hecho uno de los fundadores de la Mecánica Cuántica, Werner Heisenberg, fue el primero en sugerir la posibilidad de usar una estructura no conmutativa para las coordenadas del espacio tiempo a escalas de longitud muy pequeñas, con la finalidad de introducir un corte ultravioleta en las teorías de campo. Posteriormente von Neumann desarrolló una teoría “geométrica”, basada en las llamadas álgebras-C* conmutativas, como resultado de su estudio de los espacios cuánticos como el del espacio fase asociado al álgebra de Heisenberg ordinaria; este fue el nacimiento de la “Geometría Noconmutativa”. A. Connes (et al, 1980’s) desarrolló la generalización para la teoría de von Neumann para el caso de álgebras-C* arbitrarias; en dicha generalización es posible construir estructuras algebraicas análogas a los operadores diferenciales e integrales en geometría y que constituye toda un área nueva de estudio de las matemáticas. La geometría no-conmutativa de Connes permite considerar álgebras no-conmutativas como la representación espectral de las “variedades” en donde las teorías físicas toman lugar y donde se tiene una noción de no-conmutatividad del espacio-tiempo ó donde por consecuencia el concepto de “puntos” sobre la variedad no existe.

Una perspectiva diferente es la que proviene de la Teoría de Cuerdas, la cual propone que los constituyentes del universo son cuerdas vibrantes (evitando así el concepto de puntos geométricos) y que cada uno de los diversos modos en los cuales estas pueden encontrarse da lugar a una partícula (fermiónica o bosónica). En la versión más moderna de esta teoría [5] se han encontrado indicadores de una no-conmutatividad de las coordenadas en el espacio de *Branas*. Del estudio de las *cuerdas* abiertas cuyos extremos yacen en una *D-brana,* con condiciones de frontera y bajo la influencia de un campo externo (que juega el mismo papel de un campo magnético), se ha mostrado que tras realizar una cuantización canónica del sistema las coordenadas que describen la D-brana de volumen de mundo son no conmutativas. Además dicha no conmutatividad toma la forma de una deformación de un álgebra de las funciones clásicas en los desarrollos a nivel árbol (en la serie perturbativa de la teoría), sustituyendo los productos ordinarios de funciones por el celebrado producto “$\star$” (estrella) no-conmutativo reanimando el interés en teorías no-conmutativas por parte de la comunidad de físicos.

Con el propósito de explicar el origen dinámico del álgebra no conmutativa arriba descrita M. Rosenbaum, J. D. Vergara y L. R. Juárez iniciaron un trabajo de investigación basado en el formalismo de Weyl-Wigner-Gröenewold-Moyal, parte del cual apareció en [1].

Formalismo de Weyl-Wigner-Gröenewold-Moyal en Mecánica Cuántica

El formalismo de Weyl-Wigner-Gröenewold-Moyal es un lenguaje que permite relacionar el álgebra de operadores de la mecánica cuántica sobre un espacio de Hilbert y un álgebra de funciones en el espacio fase de la mecánica clásica [6], [7]. Dicho formalismo puede ser utilizado para el caso de un álgebra de Heisenberg extendida con el objetivo de modelar la no-conmutatividad del espacio-tiempo a través de los operadores de posición y sus consecuencias para los equivalentes clásicos de Weyl.

Álgebra de Heisenberg.

Valores de expectación para operadores de Schröedinger

Introduciendo una distribución de cuasi-probabilidad en el espacio fase, que esencialmente es la transformada de Fourier de la matriz de densidad de von Neumann, es posible obtener un análogo mecánico cuántico al del valor de expectación en la mecánica estadística gibbsiana. Tenemos que para cualquier operador dependiente del momento y la posición, su valor de expectación esta dado por

$$\begin{aligned}\langle \Omega(\mathbf{P},\mathbf{R})\rangle &= Tr[\hat{\rho}\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R})] \\ &= \int d\vec{q}d\vec{p}\,\rho_w(\vec{q},\vec{p},t)\Omega_w(\vec{q},\vec{p}).\end{aligned}$$

En esta expresión ρ_w es la función de distribución de espacio fase originalmente introducida por Wigner y definida por:

$$\rho_w(\vec{q},\vec{p},t) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3N} \int d\vec{z}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\vec{z}\cdot\vec{p}} < \vec{q} - \frac{\vec{z}}{2} \,|\, \hat{\rho} \,|\, \vec{q} + \frac{\vec{z}}{2} > .$$

Ω_w es ahora una función clásica denominada el equivalente de Weyl del operador Ω y está relacionada con este de una manera específica a través de la correspondencia de Weyl

$$\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R}) = \iint d\vec{x}d\vec{y}\,\alpha(\vec{x},\vec{y})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\mathbf{P}+\vec{y}\cdot\mathbf{R})}$$

$$\Omega_w(\vec{p},\vec{q}) = \iint d\vec{x}d\vec{y}\alpha(\vec{x},\vec{y})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\vec{p}+\vec{y}\cdot\vec{q})} \quad .$$

La expresión explícita para la función $\alpha(\vec{x},\vec{y})$ puede obtenerse de la primera expresión de arriba invirtiendo la transformada de Fourier cuántica:

$$\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\mathbf{P}+\vec{y}\cdot\mathbf{R})} = \iint d\vec{x}'d\vec{y}'\alpha(\vec{x}',\vec{y}')e^{\frac{i}{\hbar}[(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\mathbf{P}+(\vec{y}'-\vec{y})\cdot\mathbf{R}]}e^{\frac{i}{2\hbar}[\vec{y}'\cdot\vec{x}-\vec{x}'\cdot\vec{y}]}.$$

Donde se ha usado el teorema de Baker-Campbell-Haussdorf para rescribir los términos en las exponenciales. Es fácil mostrar ahora que

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 Tr\left[e^{\frac{i}{\hbar}[(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\mathbf{P}+(\vec{y}'-\vec{y})\cdot\mathbf{R}]}\right] = \delta(\vec{x}'-\vec{x})\delta(\vec{y}'-\vec{y}),$$

entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 Tr\left[\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\mathbf{P}+\vec{y}\cdot\mathbf{R})}\right] &= \iint d\vec{x}'d\vec{y}'\alpha(\vec{x}',\vec{y}')e^{\frac{i}{2\hbar}[\vec{y}'\cdot\vec{x}-\vec{x}'\cdot\vec{y}]}\delta(\vec{x}'-\vec{x})\delta(\vec{y}'-\vec{y}) \\ &= \alpha(\vec{x},\vec{y}).\end{aligned}$$

Producto de Gröenewold-Moyal

Al usar la correspondencia de Weyl para calcular el valor de expectación de un producto de operadores de mecánica cuántica se encuentra que

$$\langle\Omega_1(\mathbf{P},\mathbf{R})\Omega_2(\mathbf{P},\mathbf{R})\rangle = \int d\vec{q}d\vec{p}\rho_w(\vec{q},\vec{p},t)[\Omega_1{}^w(\vec{q},\vec{p})e^{\frac{\hbar\vec{\Lambda}}{2i}}\Omega_2{}^w(\vec{q},\vec{p})].$$

Donde $\vec{\Lambda}$ es el bidiferencial $\vec{\Lambda} = \overleftarrow{\nabla}_p\cdot\vec{\nabla}_q - \overleftarrow{\nabla}_q\cdot\vec{\nabla}_p$ y el producto de funciones clásicas que aparece dentro de la integral es denominado producto de Gröenewold-Moyal.

En la literatura físico-matemática este tipo de expresiones dan lugar a lo que se conoce como *deformaciones,* dado que involucran la deformación del producto ordinario del álgebra de funciones. En general el equivalente de Weyl para un producto arbitrario de operadores de mecánica cuántica estará dado por el producto asociativo

$$(\Omega_1\Omega_2...\Omega_{n-1}\Omega_n)_w = \Omega_1{}^w \star_\hbar \Omega_2{}^w \star_\hbar ... \star_\hbar \Omega_{n-1}{}^w \star_\hbar \Omega_n{}^w,$$

donde $\star_\hbar := e^{\frac{\hbar\vec{\Lambda}}{2i}}$

Correspondencia de Weyl para operadores de Heisenberg

El operador de Heisenberg asociado al operador de Schröedinger $\Omega(\mathbf{P}, \mathbf{R})$ esta dado por

$$\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R},t) = e^{\frac{it\mathbf{H}}{\hbar}} \Omega(\mathbf{P},\mathbf{R}) e^{-\frac{it\mathbf{H}}{\hbar}} .$$

La ecuación de evolución para dicho operador es

$$\frac{d\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R},t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H},\Omega(\mathbf{P},\mathbf{R},t)\right].$$

A partir de esta última expresión se puede mostrar que el equivalente de Weyl de un operador de Heisenberg satisface la ecuación de evolución

$$\frac{d\Omega^{w}(\vec{p},\vec{q},t)}{dt} = \frac{2}{\hbar} H_w sen\left(\frac{\hbar}{2}\Lambda\right)\Omega^{w}(\vec{p},\vec{q},t) .$$

En el caso en que $\Omega_w(\vec{p},\vec{q},0)$ es igual a $\vec{p}$ ó $\vec{q}$ se encuentra, respectivamente, que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= H_w \vec{\Lambda} p_w = -\vec{\nabla}_q H_w, \\ \dot{\vec{q}} &= H_w \vec{\Lambda} q_w = \vec{\nabla}_p H_w. \end{aligned}$$

Así las variables de integración $\vec{p}$ y $\vec{q}$ satisfacen las ecuaciones de movimiento de Hamilton y pueden ser por lo tanto interpretadas como las variables clásicas dinámicas.

Álgebra de Heisenberg extendida.

La no conmutatividad del espacio-tiempo es introducida en este formalismo definiendo una generalización al álgebra ordinaria de Heisenberg, a saber:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j] &= i\theta_{ij,} \\ [\mathbf{P}_i,\mathbf{P}_j] &= 0, \\ [\mathbf{R}_i,\mathbf{P}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R_i}$, y $\mathbf{P_i}$ $i = 1,..,d$ son las componentes de los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica; es ahora claro que un conjunto como $|q_1, q_2,..., q_d\rangle$ no corresponde a una base completa del espacio de Hilbert

compatible con el álgebra anterior. Por simplicidad se analizará el caso $d = 2$ y se escoge $\theta_{ij} = \theta$, pero para el caso en que θ es constante esto puede generalizarse fácilmente para más dimensiones espaciales.
Una elección apropiada de una base completa para el álgebra de operadores con las condiciones mencionadas arriba puede corresponder a alguno de los conjuntos de eigen-kets $\{|p_1, p_2\rangle\}$, $\{|q_1, p_2\rangle\}$ ó $\{|p_1, q_2\rangle\}$, para los pares conmutantes de observables $(\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2})$, $(\mathbf{R_1}, \mathbf{P_2})$ ó $(\mathbf{P_1}, \mathbf{R_2})$, respectivamente.
Si escogemos $\{q_1, p_2\rangle\}$ como base, entonces es posible mostrar que la realización de los observables en esta base es

$$\hat{\mathbf{R}}_2 = -i\theta\partial_{q_1} + i\hbar\partial_{p_2},$$
$$\hat{\mathbf{P}}_1 = -i\hbar\partial_{q_1}.$$

Mientras que el resto de los generadores $\hat{\mathbf{R}}_1$ y $\hat{\mathbf{P}}_2$ actúan de forma multiplicativa.
También se puede calcular la función de transición $\langle q_1, p_2 | q_2, p_1\rangle$ que resulta ser necesaria en varios cálculos y cuyo valor es

$$\langle q_1, p_2 | q_2, p_1\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}[q_2 p_2 - \frac{\theta}{\hbar} p_1 p_2 - q_1 p_2]}.$$

Valores de expectación para operadores de Schröedinger

Contado con todas estas herramientas, es posible seguir un procedimiento completamente análogo al utilizado para el caso del álgebra de Heisenberg ordinaria.

Tenemos entonces que el valor de expectación de un producto de operadores de Schröedinger en este formalismo se escribirá

$$\langle \Omega_1(\mathbf{P},\mathbf{R})\Omega_2(\mathbf{P},\mathbf{R})\rangle = \int d\vec{q}d\vec{p}\rho_{wigner} e^{\frac{1}{\hbar}\theta p_1 \partial_{q_2}} [\Omega_1{}^w(\vec{q},\vec{p}) e^{\frac{\hbar\overleftrightarrow{\Lambda}}{2i}} \Omega_2{}^w(\vec{q},\vec{p})].$$

Esta expresión puede integrarse por partes para obtener, de manera alterna,

$$\langle \Omega_1(\mathbf{P},\mathbf{R})\Omega_2(\mathbf{P},\mathbf{R})\rangle = \int d\vec{q}d\vec{p}\rho_W [\Omega_1{}^w(\vec{q},\vec{p}) e^{\frac{\hbar\overleftrightarrow{\Lambda}}{2i}} \Omega_2{}^w(\vec{q},\vec{p})].$$

Donde la función de Weyl ρ_W correspondiente a $\hat{\rho}$ esta asociada a ρ_{wigner} por

$$\rho_W = e^{-\frac{1}{\hbar}\theta p_1 \partial_{q2}} \rho_{wigner} \quad ,$$

a diferencia de lo que pasa en mecánica cuántica donde son iguales.

Producto $\star_\theta$

Al evaluar ahora el equivalente de Weyl para un producto de operadores, se puede mostrar que

$$(\hat{\Omega}_1\hat{\Omega}_2)_w = \Omega_1{}^w \star_\theta \circ \star_\hbar \Omega_2{}^w$$

con $\star_\hbar := e^{\frac{\hbar\overleftrightarrow{\Lambda}}{2i}}$ y $\star_\theta := e^{\frac{i\theta}{2}(\overleftarrow{\partial}_{q_1}\overrightarrow{\partial}_{q_2} - \overleftarrow{\partial}_{q_2}\overrightarrow{\partial}_{q_1})}$

Correspondencia de Weyl para operadores de Heisenberg

Análogo a lo que ocurre en Mecánica Cuántica ordinaria el equivalente de Weyl para un operador en el esquema de Heisenberg cumplirá ahora la ecuación de evolución

$$\frac{d\Omega^w(\vec{p},\vec{q},t)}{dt} = -\frac{2}{\hbar} H_w sen\left[\frac{1}{2}\left(\hbar\overleftrightarrow{\Lambda} + \theta\overleftrightarrow{\Lambda}'\right)\right]\Omega^w(\vec{p},\vec{q},0),$$

Con $\overleftrightarrow{\Lambda} = \overleftarrow{\nabla}_q \cdot \overrightarrow{\nabla}_p - \overleftarrow{\nabla}_p \cdot \overrightarrow{\nabla}_q$ y $\overleftrightarrow{\Lambda}' = \overleftarrow{\partial}_{q_1} \cdot \overrightarrow{\partial}_{q_2} - \overleftarrow{\partial}_{q_2} \cdot \overrightarrow{\partial}_{q_1}$

Conmutadores y paréntesis de Poisson

Escogiendo $\Omega_w(\vec{p}, \vec{q}, 0)$ igual a $\vec{P}_w(\vec{q},\vec{p},0) = \vec{p}$ y a $\vec{R}_w(\vec{q},\vec{p},0) = \vec{q}$, con un operador Hamiltoniano de la forma $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{R})$ se encuentra, respectivamente, que

$$\dot{\vec{P}}_w|_{t=0} = -\frac{1}{\hbar} H_w(\hbar\overleftrightarrow{\Lambda} + \theta\overleftrightarrow{\Lambda}')p_w = -\vec{\nabla}_q V,$$

$$\dot{R}_{1w}|_{t=0} = -\frac{1}{\hbar} H_w(\hbar\overleftrightarrow{\Lambda} + \theta\overleftrightarrow{\Lambda}')q_1 = \frac{p_1}{2m} + \frac{\theta}{\hbar}\partial_{q_2}V,$$

$$\dot{R}_{2w}|_{t=0} = -\frac{1}{\hbar} H_w(\hbar\overleftrightarrow{\Lambda} + \theta\overleftrightarrow{\Lambda}')q_2 = \frac{p_2}{2m} - \frac{\theta}{\hbar}\partial_{q_1}V.$$

Si ahora introducimos los siguientes paréntesis de Poisson fundamentales como parte de la estructura del álgebra de $\vec{q}$ ’s y $\vec{p}$ ’s

$$\{p_i, p_j\} = 0,$$
$$\{q_i, q_j\} = \frac{\theta_{ij}}{\hbar},$$
$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

podemos escribir

$$\dot{P}_{iw}\,|_{t=0} = \{p_i, H\} = \dot{p}_i,$$
$$\dot{R}_{iw}\,|_{t=0} = \{q_i, H\} = \dot{q}_i.$$

Por lo tanto con esta estructura de Poisson adicional las $\vec{q}$'s y $\vec{p}$'s satisfacen las ecuaciones de Hamilton y pueden ser consideradas formalmente como las variables dinámicas canónicas clásicas en la teoría.

Variables Dinámicas y Deformación de Álgebras

Una representación para los paréntesis de Poisson anteriores puede ser construida definiendo el producto "torcido" como la deformación:

$$q_i \star_\theta q_j := q_i e^{\frac{i}{2}\sum_{l,m}\overleftarrow{\partial}_{q_l}\theta_{lm}\overrightarrow{\partial}_{q_m}} q_j,$$

donde los argumentos se han generalizado para P^d (con d $\geq$ 2), y hemos definido

$$\{q_i, q_j\} := -\frac{i}{\hbar}[q_i, q_j]_{\star_\theta} := -\frac{i}{\hbar}[q_i \star_\theta q_j - q_j \star_\theta q_i].$$

Ahora es posible extender este mapeo al álgebra de funciones de q_i y p_i, ya que esta hereda la deformación del producto por yuxtaposición de las coordenadas al producto $\star_\theta$. Tenemos consecuentemente una interpretación dinámica del origen de dicho producto, mismo que previamente aparecía en la literatura como un ansatz sin ninguna argumentación sobre la interpretación de la naturaleza de los observables.

La integral de trayectoria

Usando los resultados anteriores es ahora posible calcular la amplitud de transición $< q_1''(t_2), p_2''(t_2) | q_1'(t_1), p_2'(t_1) >$ en la base mixta escogida. Esta amplitud está dada por [4]:

$$< q_1''(t_2), p_2''(t_2) | q_1'(t_1), p_2'(t_1) >=< q_1''(t_1), p_2''(t_1) | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\mathbf{H}} | q_1'(t_1), p_2'(t_1) >$$
$$= \mathbf{Tr}[\rho e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\mathbf{H}}] = \int dp_1 dp_2 dq_1 dq_2 \rho_w e^{\frac{\theta}{\hbar} p_1 \partial_{q_2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)H_w},$$

con $\rho = | q_1'(t_1), p_2'(t_1) >< q_1''(t_1), p_2''(t_1) |$

La función de Weyl correspondiente es

$$\rho_w = (2\pi\hbar)^{-2} \int d\xi d\eta e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta q_2 - \xi p_1)} < q_1 - \frac{\xi}{2}, p_2 - \frac{\eta}{2} | \rho | q_1 + \frac{\xi}{2}, p_2 + \frac{\eta}{2} > .$$

Sustituyendo esta última expresión en la amplitud de transición se encuentra

$$< q_1''(t_2), p_2''(t_2) | q_1'(t_1), p_2'(t_1) >=$$
$$= \int dp_1 dq_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(p_2''-p_2')q_2} e^{\frac{i}{\hbar}[q_1''-q_1'+\frac{\theta}{\hbar}(p_2''-p_2')]p_1} e_{\star}^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)H_w(p_1, \frac{p_2'+p_2''}{2}, \frac{q_1'+q_1''}{2}, q_2)} \cdot$$

donde $e_{\star}^{F(\vec{q},\vec{p},t)} := 1 + F(\vec{q},\vec{p},t) + \frac{1}{2} F(\vec{q},\vec{p},t) \star_{\theta} F(\vec{q},\vec{p},t) + \ldots$

Es interesante hacer notar aquí que este resultado de nuestra extensión del formalismo de WWGM para la mecánica cuántica, permite tener una expresión exacta para el propagador de Feynman.

Si ahora se considera una transición infinitesimal con $t_1 = t$, $t_2 = t + \delta t$ y $q_1'' - q_1' = \dot{q}_1 \delta t$, $p_2'' - p_2' = \dot{p}_2'' \delta t$ entonces la amplitud de transición se puede escribir como

$$< q_1''(t+\delta t), p_2''(t+\delta t) | q_1'(t), p_2'(t) >= e^{\frac{i}{\hbar}[\dot{q}_1' p_1 - \dot{p}_2' q_2 + \frac{\theta}{\hbar}\dot{p}_2' p_1]\delta t} e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t H_{cl}(p_1, p_2', q_1', q_2)},$$

donde H_{cl} es la función hamiltoniana clásica que resulta después de reemplazar $\mathbf{Q} \to q$ y $\mathbf{P} \to p$ en el Hamlitoniano cuántico original. Al integrar este elemento infinitesimal de transición sobre un intervalo de tiempo finito siguiendo el método de Feynman se tiene

$$< q_1''(t_2), p_2''(t_2) \,|\, q_1'(t_1), p_2'(t_1) > \approx \int Dq_1 Dq_2 Dp_1 Dp_2 e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt[\dot{q}_1 p_1 - \dot{p}_2 q_2 + \frac{\theta}{\hbar}\dot{p}_2 p_1 - H_{cl}]} .$$

Con esto se define la acción clásica deformada

$$S(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt[\dot{q}_1 p_1 - \dot{p}_2 q_2 + \frac{\theta}{\hbar}\dot{p}_2 p_1 - H_{cl}] .$$

Aplicaciones

El Oscilador Armónico en 2-D

El formalismo anterior puede ahora usarse para analizar el caso particular del oscilador armónico bidimensional descrito por el Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{R}_2^2) ,$$

en donde los operadores de posición y momento satisfacen el álgebra de Heisenberg extendida discutida con anterioridad.

La acción clásica deformada será entonces

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt[\dot{q}_1 p_1 - \dot{p}_2 (q_2 - \frac{\theta}{\hbar} p_1) - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} q_1^2 - \frac{m\omega^2}{2} q_2^2]$$

y después de una serie de cambios en las variables de integración, se puede mostrar que la amplitud de transición para este caso está dada por

$$< q_1''(t_2), p_2''(t_2) \,|\, q_1'(t_1), p_2'(t_1) > \approx \int Dq_1 Dp_2 e^{\frac{i}{\hbar} S(q_1, p_2.t)} ,$$

con

$$S(q_1, p_2, t) = \int dt[\frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m\theta}{\hbar}\dot{p}_2 \dot{q}_1 + (\frac{1}{2m\omega^2} + \frac{m\theta^2}{2\hbar^2})\dot{p}_2^2 - \frac{p_2^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} q_1^2] .$$

A partir de esta acción se pueden obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para las variables dinámicas q_1 y p_2. A saber

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m^2\omega^4\theta^2}{\hbar^2} + \omega^2 & -\dfrac{\omega^2\theta}{\hbar} \\ -\dfrac{m^2\omega^4\theta}{\hbar} & \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Después de diagonalizar la matriz, estas expresiones se desacoplan en dos osciladores armónicos con frecuencias

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \omega\left[1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{2\hbar^2} \pm \frac{m\omega\theta}{2\hbar}\sqrt{4 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{\hbar^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\omega}{2}\left[\frac{m\omega\theta}{\hbar} \pm \sqrt{4 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{\hbar^2}}\right]. \end{aligned}$$

Entonces los eigen-valores de la energía para el Hamiltoniano cuántico son

$$E = \hbar\omega_1(n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_2(n_2 + \frac{1}{2}) .$$

Por otro lado, podría argumentarse que el cálculo del espectro de energía puede igualmente realizarse recurriendo al equivalente mecánico cuántico del mapeo de Seiberg-Witten, también conocido como el corrimiento de Bopp, para elegir un nuevo conjunto de operadores conmutantes. Es decir, eligiendo:

$$\tilde{\mathbf{R}}^\mu = \mathbf{R}^\mu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\mathbf{P}_\nu ,$$

con lo cual el conmutador de estos nuevos operadores es ahora

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{R}}^\mu, \tilde{\mathbf{R}}^\nu] &= [\mathbf{R}^\mu, \mathbf{R}^\nu] + [\mathbf{R}^\mu, \frac{1}{2}\theta^{\nu\rho}\mathbf{P}_\rho] + [\frac{1}{2}\theta^{\mu\rho}\mathbf{P}_\rho, \mathbf{R}^\nu] \\ &= i\hbar\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}i\hbar\theta^{\nu\mu} - \frac{1}{2}i\hbar\theta^{\mu\nu} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esta elección de observables se recobra el álgebra de Heisenberg ordinaria, y es posible usar inmediatamente el método estándar para resolver la ecuación de eigen-valores del nuevo Hamiltoniano que ahora tiene la forma:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}[(\tilde{\mathbf{R}}^1 - \frac{1}{2}\theta^{12}\mathbf{P}_2)^2 + (\tilde{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{2}\theta^{21}\mathbf{P}_1)^2].$$

Un cálculo extenso muestra que las variables dinámicas de este sistema corresponden también a las de un oscilador armónico bidimensional desacoplado, con frecuencias

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega}{2}\left[\frac{m\omega\theta}{\hbar} \pm \sqrt{4 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{\hbar^2}}\right],$$

que coinciden con las obtenidas con el Hamiltoniano original. Debe enfatizarse, sin embargo, que el conjunto completo de observables en este segundo problema, son distintos de aquellos del problema cuántico original. Esto se hace evidente si se comparan las álgebras de Heisenberg asociadas con cada uno de ellos.

En particular en el segundo caso que considera que los observables son los operadores $\tilde{\mathbf{R}}^{\mu}$ y $\mathbf{P}_{\nu}$, las $\tilde{\mathbf{R}}^{\mu}$ fueron escogidas de manera que

$$[\tilde{\mathbf{R}}^{\mu}, \tilde{\mathbf{R}}^{\nu}] = 0.$$

Consecuentemente, en este caso deja de tener sentido hablar de no-conmutatividad del espacio-tiempo, a pesar de que en el espectro de frecuencias aparecen las θ's, las cuales, contrariamente a lo que sucede en el problema cuántico con el álgebra de Heisenberg extendida.

Estas diferencias conceptuales se hacen aún mas claras al nivel de la integral funcional asociada con el cálculo del propagador. Este es distinto para los dos casos considerados, ya que las bases admisibles para el cálculo de las amplitudes de transición son distintas y no existe una transformación unitaria para pasar de una representación a la otra. En el segundo caso es posible usar una base completa para los operadores de posición. Se puede mostrar que los propagadores en este caso satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales [8]:

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left(\square^2 + \omega^2 - im\omega^2\theta\frac{d}{dt}\right)\Delta_1(\mathbf{q}-\mathbf{q}', t-t') = \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta(t-t'),$$
$$\left(\frac{1}{m} + \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left(\square^2 + \omega^2 + im\omega^2\theta\frac{d}{dt}\right)\Delta_2(\mathbf{q}-\mathbf{q}', t-t') = \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta(t-t').$$

Obsérvese que estas ecuaciones diferenciales para el propagador de Feynmann son altamente no-lineales, a diferencia del primer caso considerado en que los observables de posición correspondían a los operadores de un álgebra de Heisenberg no-conmutativa, donde los propagadores satisfacen las ecuaciones de Klein-Gordon. Aquí se observa que se pierde por completo la simetría de Lorentz además del hecho de que los operadores diferenciales son no locales.

Otra manera de abordar el caso de las álgebras no conmutativas en física se basa en el enfoque canónico de cuantización de Dirac para sistemas con constricciones desarrollado en [2] y [3] .

Cuantización de Dirac en sistemas con constricciones.

En el contexto del método de cuantización formulado por Dirac para sistemas con constricciones [9] es posible incorporar la no-conmutatividad de las coordenadas de espacio-tiempo, si a su vez un sistema clásico es equipado de una estructura simpléctica arbitraria.

Clasificación y Álgebra de constricciones

Un sistema dinámico descrito por una función hamiltoniana *H* se dice que tiene constricciones si sus estados físicos están restringidos a una subvariedad Γ' del espacio fase Γ, llamada la superficie de constricción. La superficie de constricción esta determinada por un conjunto de funciones $\Phi_i : \Gamma \to \mathrm{P}$ tales que

$$\Gamma' := \{ p \in \Gamma \mid \Phi_i(p) = 0, i = 1,...,m \} .$$

El conjunto $\{\Phi_i\}_{i=1,...,m}$ se clasifica de acuerdo a sus propiedades en constricciones de *Primera* y *Segunda* clase.

Si el espacio fase está equipado de una 2-forma cerrada y no degenerada $\mathbf{\Omega}$ con componentes $\Omega_{\alpha\beta}$ entonces para cualesquiera dos funciones $f, g : \Gamma \to \mathrm{P}$ su paréntesis de Poisson se define como

$$\{f, g\} := \Omega^{\alpha\beta} \nabla_\alpha f \nabla_\beta g ,$$

con $\Omega^{\alpha\beta}$ la inversa de $\Omega_{\alpha\beta}$. Esto añade una estructura de álgebra de Lie al álgebra de funciones sobre Γ.

La evolución en el tiempo de una cantidad observable esta definida por

$$\dot{f} := \{f, H\}$$

Así una constricción de *Primera* clase Φ_i es aquella para la cual se satisface

$$\{\Phi_i, \Phi_j\}\Big|_{\Gamma'} = 0 \quad \forall j$$

La notación $\{\Phi_i, \Phi_j\} \approx 0$ para la expresión anterior es la acostumbrada en la literatura para denotar que la ecuación se satisface débilmente (sólo sobre la superficie de constricción)

Esto implica que existen funciones f_{ij}^k (con *i,j,k*=1,…,m) en Γ, llamadas funciones de estructura, tales que

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = f_{ij}^k \Phi_k$$

Para el caso que f_{ij}^k sean constantes esto define una subálgebra de Lie del conjunto de funciones en Γ.

Las constricciones de segunda clase constituyen un subconjunto de $\{\Phi_i\}_{i=1,\ldots,m}$ para las cuales se satisface

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} = c_{ab}\,,\ Det[c_{ab}] \neq 0\,,$$

para algunos valores de *a* y *b*.

Nótese que ahora sobre la superficie de constricción Γ' la función hamiltoniana *H* esta definida hasta una combinación lineal de las constricciones

$$H_T = H + \lambda^i \Phi_i$$

Esta nueva función se denomina *función hamiltoniana total* y resulta ser una función hamiltoniana tan apropiada como la original.

Grados de Libertad

Un sistema dinámico inmerso en una variedad *n*-dimensional tiene en principio un número de grados de libertad (de espacio fase) igual a $Dim[\Gamma] = 2n$, sin embargo si el sistema tiene constricciones esto no es verdad ya que debido a estas el número de grados de libertad original disminuye. Es por ello que varias de las coordenadas originales del sistema son superfluas y no proporcionan información relevante al problema, lo que conduce a formular la pregunta de si es posible construir una versión “reducida” del problema donde se herede la estructura simpléctica original y pueda hacerse una correcta definición de los observables físicos.

A continuación se tiene un resumen sobre este procedimiento.

Espacio fase reducido

La manera de equipar al espacio fase reducido Γ' de una estructura simpléctica es restringiendo $\Omega_{\alpha\beta}$ mediante la inclusión $i:\Gamma'\to\Gamma$ y tomando el “pullback” $\bar{\Omega}_{\alpha\beta}:=i^{*}\Omega_{\alpha\beta}$; sin embargo puede mostrarse que esto no asegura que se trate de una 2-forma no degenerada con inversa única y por ello se le llama forma presimpléctica [10]. La causa de que esto ocurra es por las constricciones de primera clase (en caso que las haya), que hacen que los campos vectoriales hamiltonianos de las funciones clásicas estén definidos hasta la adición de un campo vectorial de dichas constricciones, a lo cual Dirac denominó una *libertad de norma*.

La ambigüedad producida por la libertad de norma puede resolverse con la finalidad de construir un espacio fase reducido $\tilde{\Gamma}$ adecuado para la teoría y donde la forma simpléctica $\bar{\Omega}_{\alpha\beta}$ sea no degenerada, aunque la manera de hacerlo no es única y puede ser un proceso muy complicado.

El procedimiento estándar consiste en *elegir una órbita de norma* ó un representante $\zeta_j=0$ por cada libertad de norma, tal que satisfaga que el conjunto $\{\Phi_i,\zeta_j\}_{i,j=1,\ldots,m}$ (es decir todas las constricciones y las elecciones de norma) sea de segunda clase. Se debe señalar que este procedimiento no siempre funciona como ocurre en el caso de la ambigüedad de Gribov.

Por otro lado, dado que ζ_j constituye un grado libertad con ningún significado físico real (no es una cantidad observable), entonces una cantidad observable *f* será aquella para la cual se satisfaga.

$$\{f,\zeta_j\}=0\,,\ \forall j$$

Paréntesis de Dirac

Cuando las constricciones son ya de segunda clase (denotadas ahora por χ_i) es posible construir muy fácilmente una estructura, exactamente equivalente a la de los paréntesis de Poisson, llamada paréntesis de Dirac. Esta nueva estructura permite describir la dinámica del sistema sobre la superficie de constricción, así como las transformaciones de simetría generadas por las mismas. Esto obviamente corresponde a redefinir los paréntesis de Poisson originales bajo la nueva estructura simpléctica $\bar{\Omega}_{\alpha\beta}$. Una construcción geométrica muy sencilla es la siguiente.

La estructura de paréntesis de Dirac en la superficie de constricción para cualesquiera dos funciones $f,g:\Gamma\rightarrow \mathrm{P}$ esta definida por:

$$\{f,g\}^{*}=\{f,g\}-\{f,\chi_i\}\omega^{ij}\{\chi_j,g\},$$

donde $\omega_{ij}\omega^{jk}=\delta_i^k$ y $\omega_{ij}=\{\chi_i,\chi_j\}$.

Se observa que esto no es más que la proyección de los paréntesis originales sobre la superficie de constricción donde se deja solo la parte tangencial tras restar la contribución normal. Estos nuevos paréntesis continúan preservando su estructura de álgebra de Lie.

Se debe recalcar ahora que todas las constricciones de segunda clase son aniquiladas por esta estructura como es de esperar, ya que se quiere recuperar la definición de observables que se había dado. Si se sustituye f en la expresión anterior por una de las χ_i's se tiene

$$\begin{aligned}\{\chi_i,g\}^{*}&=\{\chi_i,g\}-\{\chi_i,\chi_j\}\omega^{jk}\{\chi_k,g\}\\&=\{\chi_i,g\}-\omega_{ij}\omega^{jk}\{\chi_k,g\}\\&=\{\chi_i,g\}-\delta_i^k\{\chi_k,g\}=0.\end{aligned}$$

Cuantización

Un método de cuantización consiste esencialmente de un conjunto de pasos (ó axiomas) que permiten hacer la transición de una teoría clásica a una cuántica. Si es posible contar con un conjunto consistente de tales axiomas que reproduzcan el estudio realizado anteriormente para sistemas clásicos, entonces se dice que se ha construido una teoría cuántica. Puede ser sin embargo que esto no sea posible ya que al imponer las condiciones de cuantización estas den lugar a contradicciones.

Conmutadores

La primera regla de cuantización consiste en promover a las variables y estructuras que le dan el carácter dinámico a la teoría a operadores. Es decir los paréntesis de Poisson o de Dirac dependiendo el caso son promovidos a conmutadores. Así se tienen las identificaciones

$$f, g : \Gamma \to \mathrm{P}, \ \{f, g\} \to i\hbar[\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}] \, ; \ \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$f, g : \tilde{\Gamma} \to \mathrm{P}, \ \{f, g\}^* \to i\hbar[\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}] \, ; \ \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

Observables

Los estados físicos a nivel cuántico deben satisfacer la condición de ser aniquilados bajo las constricciones y las posibles elecciones de norma que se hagan. Entonces, para $\{\hat{\chi}_i\} = \{\hat{\Phi}_i, \hat{\zeta}_j\}_{i,j=1,\dots,m}$

$|\psi\rangle_F \in \mathcal{H}$ es un estado físico sí y solo si

$$\hat{\chi}_i |\psi\rangle_F = 0 \, .$$

Esta es una condición necesaria a fin de que la definición que se había dado de observable clásica pueda usarse ahora a nivel cuántico, i.e.

Si $\hat{\mathbf{F}}$ es un observable entonces $[\hat{\mathbf{F}}, \hat{\chi}_i] = 0$

$$\Rightarrow [\hat{\mathbf{F}}, \hat{\chi}_i]|\psi\rangle_F = (\hat{\mathbf{F}}\hat{\chi}_i - \hat{\chi}_i\hat{\mathbf{F}})|\psi\rangle_F = -\hat{\chi}_i\hat{\mathbf{F}}|\psi\rangle_F = 0$$

$$\therefore \hat{\mathbf{F}}|\psi\rangle_F = |\phi\rangle_F$$

Entonces los observables de la teoría cuántica son aquellos que llevan estados físicos a estados físicos.

Problema de Ordenamiento

Cuando se define un operador $\hat{\mathbf{F}}$ sobre el espacio de Hilbert, equivalente a una función clásica f del espacio fase (reducido) puede haber una arbitrariedad al hacerlo. Algunas cantidades clásicas pueden dar lugar a cantidades cuánticas que no conmutan y debe hacerse una elección de cómo colocar los factores que aparecen en tal expresión. Los factores deben arreglarse en tal forma que las relaciones para las constricciones de primera clase $\{\Phi_i, \Phi_j\} = f_{ij}^k \Phi_k$ sigan preservandose a nivel cuántico para las mismas funciones f_{ij}^k i.e.

$$[\hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_j] = f_{ij}^k \hat{\Phi}_k \, ; \quad \hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_j, \hat{\Phi}_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Reparametrización

La reparametrización de una teoría clásica consiste en incrementar el número de grados de libertad originales de la teoría haciéndola invariante bajo ciertos tipos de transformaciones. Esto implica que deben aparecer constricciones que contengan tal información. El caso bien conocido de la partícula reparametrizada conduce a una teoría donde no existe función Hamiltoniana H y donde la función hamiltoniana total H_T consiste únicamente de una constricción Φ. Cuando dicho problema es llevado a una teoría cuántica tras usar el método de Dirac ya descrito, la condición de estado físico $\hat{\Phi}|\psi\rangle = 0$ se reduce a la ecuación de Schröedinger de la mecánica cuántica.

Más específicamente, en el caso de la partícula reparametrizada en N dimensiones, la acción clásica toma la forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_0 \dot{q}^0 + p_i \dot{q}^i - \lambda\Phi),$$

con $i = 1,...,N$. De esta manera la acción corresponde a la de una partícula en un espacio N+1 dimensional y donde λ es un *multiplicador* de Lagrange.

Puede considerarse ahora una versión más general de dicha acción si se dobla el espacio fase de la teoría tras escoger las coordenadas generalizadas $z^a = (q^0, p_0, q^i, p_i)$ con $a = 1,...,2(N+1)$ y escribimos la acción de primer orden ahora como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (A_a(z)\dot{z}^a - \lambda\Phi(z)),$$

donde $A_a(z)$ es el potencial vectorial que permitirá generar una forma simpléctica general y $H_c = \lambda\Phi(z)$ es la función hamiltoniana clásica.

Constricciones

Dado que la acción anterior corresponde a la de una partícula reparametrizada en donde el espacio fase tiene el doble de dimensiones, irremediablemente deben haber constricciones que permitan obtener el número de grados de libertad correcto de la teoría.

Tras calcular los momentos conjugados a las "coordenadas" z's se obtiene

$$p_a = A_a(z) \;\Rightarrow \chi_a = p_a - A_a(z)\,.$$

Entonces las χ_a 's constituyen constricciones primarias de la teoría; la función hamiltoniana total será ahora $H_T = \lambda\Phi + \mu^a\chi_a$. Cuando se calcula la evolución de estas constricciones se encuentran las condiciones de consistencia

$$\dot{\chi}_a = \{\chi_a, H_T\} = -\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z^a} + \mu^a\omega_{ab} \approx 0\,,$$

donde $\omega_{ab} := \{\chi_a, \chi_b\} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$

Esta matriz constituye ahora la estructura simpléctica de la teoría y se considerará que es no degenerada. Entonces las χ_a 's constituyen un conjunto de constricciones de segunda clase.

Los paréntesis de Dirac proporcionan ahora de un resultado muy interesante si estos se calculan para las coordenadas z^a. Tenemos que

$$\begin{aligned}\{z^a, z^b\}^* &= \{z^a, z^b\} - \{z^a, \chi_c\}\omega^{cd}\{\chi_d, z^b\}\\ &= -\{z^a, p_c\}\omega^{cd}\{p_d, z^b\} = \delta^a_c\delta^b_d\omega^{cd}\\ &= \omega^{ab}.\end{aligned}$$

Esto implica que tras cuantizar resulta la no conmutatividad de los operadores cuánticos correspondientes a las "coordenadas" del espacio fase ampliado, i.e.

$$[\hat{z}^a, \hat{z}^b] = i\hbar\omega^{ab}$$

Estructuras simplécticas arbitrarias

Si se considera ahora por simplicidad el caso de un (1+1)-espacio-tiempo, donde $z^a = (q^0, p_0, q^1, p_1)$ con $a = 1,\ldots,4$, en que la estructura simpléctica anterior esta definida como

$$\omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0\\ -\theta & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad \omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & \theta\\ 0 & 1 & -\theta & 0\end{pmatrix}$$

Entonces la cuantización provee de los conmutadores fundamentales

$$[\hat{t},\hat{x}] = i\hbar\theta \ , \ [\hat{t},\hat{p}_t] = i\hbar \ , \ [\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar \ , \ [\hat{p}_t,\hat{p}_x] = 0 \ .$$

Así, en este formalismo la no-conmutatividad de los operadores del espacio-tiempo puede verse como resultado de una estructura simpléctica arbitraria al nivel clásico que conduce a un álgebra específica de los paréntesis de Dirac, los cuales al cuantizar generan los conmutadores básicos de la teoría.

Teoría Cuántica de Campos

Los métodos descritos en las páginas anteriores pueden extenderse ahora al área de Teoría Cuántica de Campos con el objetivo de investigar las implicaciones de la no-conmutativididad del espacio tiempo como variables de campo en el álgebra de campos reparametrizados y los efectos sobre las simetrías.

En el contexto de una teoría de campos como aquella para la cual la mecánica cuántica representa un *minisuperespacio* en el que la mayoría de los grados de libertad están congelados, la formulación dentro del esquema de Weyl-Wigner-Gröenewold-Moyal abordada en la primera sección, permite introducir una no conmutatividad de los campos heredada de este minisuperespacio [4].

Modelo de Teoría de Campos

En efecto recordemos que en el caso de la mecánica cuántica se había encontrado que las variables dinámicas clásicas del oscilador armónico bidimensional no conmutativo pueden reducirse a un sistema de dos osciladores desacoplados con frecuencias

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega}{2}\left[\frac{m\omega\theta}{\hbar} \pm \sqrt{4 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{\hbar^2}}\right].$$

A partir de ese sistema dinámico no es muy difícil mostrar, a través de transformaciones canónicas, que la función Lagrangiana

$$L = \frac{1}{4}(\dot{x}_1^{\,2} + \dot{x}_2^{\,2} - \omega_1^{\,2} x_1^{\,2} - \omega_2^{\,2} x_2^{\,2})$$

representa al mismo sistema.

Considérese ahora un sistema de campos $\Phi_i(\mathbf{q},t)$, $i = 1,2$ que satisfacen las ecuaciones de campo

$$\begin{pmatrix} \square^2 + \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \square^2 + \mu_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(q_1, q_2, t) \\ \Phi_2(q_1, q_2, t) \end{pmatrix} = 0,$$

donde $\Phi_i(\mathbf{q},t) = \frac{1}{2\pi}\int d\mathbf{k}\; x_i(\mathbf{k},t) e_{\star_\theta}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}$ y $e_{\star_\theta}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} = 1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} + \frac{1}{2}(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})\star_\theta(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}) + \ldots$

El D'Alambertiano en este caso está definido por

$$\square^2 = \partial_t^{\,2} - \overline{\partial}_i^{\,\dagger}\overline{\partial}_i \ ,$$

con la derivación anti-Hermitiana $\overline{\partial}_i$

$$\overline{\partial}_i = \theta_{ij}^{-1} ad_{q_j} \ \text{ y } \ \overline{\partial}_i^{\,\dagger} = -\overline{\partial}_i \ , \ i = 1,2 \ .$$

La acción adjunta es realizada por el conmutador "twist"

$$ad_{q_i} q_j := [q_i, q_j]_{\star_\theta} := [q_i \star_\theta q_j - q_j \star_\theta q_i] \ .$$

Haciendo uso de estas definiciones las ecuaciones del campo se escriben

$$(\square^2 + \mu_i^2)\Phi_i(\mathbf{q},t) = \frac{1}{2\pi}\int d\mathbf{k}[\ddot{x}_i + (\mathbf{k}^2 + \mu_i^2)] e_{\star_\theta}^{\,i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} \ , \ i = 1,2$$

Tras usar la ortonormalidad de $e_{\star_\theta}^{\,i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}$ y la relación de dispersión $\mathbf{k}^2 + \mu_i^2 = k_0^{\,2} = \omega_i^2(\mathbf{k})$ se encuentra

$$\ddot{x}_i(\mathbf{k},t) + \omega_i^2(\mathbf{k}) x_i(\mathbf{k},t) = 0$$

Entonces la función Lagrangiana clásica puede verse (después de agregar dos términos de corriente externos), para un valor fijo del parámetro $\mathbf{k}$ como el minisuperespacio de la teoría de campos completa caracterizada por la acción

$$\begin{aligned}
S = \int dt dq_1 dq_2 L = \frac{1}{2}\int dt dq_1 dq_2 [&\dot{\Phi}_1^{\dagger} \star_\theta \dot{\Phi}_1 - (\overline{\partial}_i \Phi_1)^{\dagger} \star_\theta \overline{\partial}_i \Phi_1 - \mu_1^2 \Phi_1^{\dagger} \star_\theta \Phi_1 \\
&+ \dot{\Phi}_2^{\dagger} \star_\theta \dot{\Phi}_2 - (\overline{\partial}_i \Phi_2)^{\dagger} \star_\theta \overline{\partial}_i \Phi_2 - \mu_2^2 \Phi_2^{\dagger} \star_\theta \Phi_2 \\
&+ \frac{1}{2}(\Phi_1^{\dagger} \star_\theta J_1(\mathbf{q},t) + J_1^{\dagger}(\mathbf{q},t) \star_\theta \Phi_1) + \frac{1}{2}(\Phi_2^{\dagger} \star_\theta J_2(\mathbf{q},t) + J_2^{\dagger}(\mathbf{q},t) \star_\theta \Phi_2)].
\end{aligned}$$

Esto define la acción de teoría de campos deformada.

Integral de trayectoria y propagador de Feynman

El método para calcular el propagador de Feynman asociado con esta acción implica notar primero que productos de Moyal cuadráticos de la forma $\Phi \star_\theta \Psi$ en el integrando pueden reducirse al producto ordinario, ya que suponiendo que Φ y Ψ son funciones de Schwarz, entonces al hacer una integración por partes sus contribuciones de frontera son iguales a cero después de usar el teorema de Stokes. Así la integral toma la siguiente forma:

$$\int dx^n \Phi(\vec{x}) \star_\theta \Psi(\vec{x}) = \int dx^n [\Phi(\vec{x})\Psi(\vec{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \theta^{i_1 j_1} \ldots \theta^{i_m j_m} (\partial_{i_1 \ldots i_m} \Phi(\vec{x}))(\partial_{j_1 \ldots j_m} \Psi(\vec{x}))]$$

$$= \int dx^n [\Phi(\vec{x})\Psi(\vec{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{-1}{2}\right)^m \theta^{i_1 j_1} \ldots \theta^{i_m j_m} \Phi(\vec{x})(\partial_{i_1 \ldots i_m} \partial_{j_1 \ldots j_m} \Psi(\vec{x}))]$$

$$= \int dx^n [\Phi(\vec{x})\Psi(\vec{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{-1}{2}\right)^m \theta^{i_1 j_1} \ldots \theta^{i_m j_m} \Phi(\vec{x})(\partial_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} \Psi(\vec{x}))],$$

después de usar la propiedad $\theta^{ij} = -\theta^{ji}$ entonces todos los términos que aparecen en la serie se cancelan y por lo tanto:

$$\int dx^n \Phi(\vec{x}) \star_\theta \Psi(\vec{x}) = \int dx^n \Phi(\vec{x})\Psi(\vec{x}) .$$

El resto del procedimiento es el estándar basado en el uso de la transformada de Fourier de los campos y las corrientes que están dentro de la acción, para dejar solo los términos cuadráticos (aparecerá como una integral Gaussiana al nivel de la integral de trayectoria) en las corrientes como la contribución relevante al propagador.

Usando la definición para la amplitud de transición de vacío W[J]

$$W[J] = W[0] e^{\frac{i}{\hbar}\langle Z_0[J] \rangle} ,$$

tenemos que el término de corrientes que contribuye al propagador esta dado por

$$\langle Z_0[J] \rangle := \frac{1}{2} \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' dt dt' (J_1^\dagger(\mathbf{q},t), J_2^\dagger(\mathbf{q},t)) \begin{pmatrix} D_1(\mathbf{q}-\mathbf{q}', t-t') & 0 \\ 0 & D_2(\mathbf{q}-\mathbf{q}', t-t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(\mathbf{q}',t) \\ J_2(\mathbf{q}',t) \end{pmatrix}$$

Donde $D_i(\mathbf{q}-\mathbf{q}', t-t')$ son los propagadores de Feynman que satisfacen las ecuaciones de Klein-Gordon.

$$(\Box^2 + \mu_i^2) D_i(\mathbf{q}-\mathbf{q}', t-t') = -\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta(t-t')$$

Y los campos clásicos $\Phi_{(cl)i}^{(0)} \equiv -i \dfrac{\delta \ln W_0}{\delta J_i^\dagger(\mathbf{q},t)} = \dfrac{\delta Z_0}{\delta J_i^\dagger(\mathbf{q},t)}$ satisfacen las ecuaciones de Klein-Gordon con fuentes

$$(\Box^2 + \mu_i^2)\Phi_{(cl)i}^{(0)} = \frac{1}{2} J_i .$$

Del estudio anterior, basado en el anzatz de considerar a la mecánica cuántica como el minisuperespacio de una teoría cuántica de campos no-conmutativa, resulta inmediato que dicho minisuperespacio debe contar al menos con dos coordenadas espaciales.

Un área de investigación adicional que ha surgido recientemente es la asociada a las simetrías de teorías de campo no-conmutativas. Una indicación de la necesidad de considerar deformaciones de las simetrías del espacio tiempo puede verse de la forma que tiene nuestra definición del D'Alambertiano en la discusión previa. Es claro, que dada la nueva definición de derivaciones en términos de operadores adjuntos, la simetría usual de Poincaré deberá modificarse tomando en cuenta la no-conmutatividad de las coordenadas de estos operadores. A fin de aclarar mejor esto, consideremos el caso más simple del campo escalar reparametrizado [3].

Reparametrización del Campo Escalar

La acción para el campo escalar en un espacio-tiempo *M* de Minkowski (D+1)-dimensional de signatura (1,-1,…,-1) y con un potencial $V(\phi)$, esta dada por

$$S = \int dx^D dt \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right),$$

Reparametrizando los argumentos del campo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &t = t(\tau, \vec{\sigma}), \\ &x^i = x^i(\tau, \vec{\sigma}), \;\; i = 1, ..., D, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$S = \int d^D\sigma d\tau \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right),$$

donde la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ esta dada por $g^{\mu\nu} := \frac{\partial \sigma^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sigma^\nu}{\partial x_\alpha}$ y $g := Det(g_{\mu\nu})$, $\alpha, \mu, \nu = 0,1,..,D$. Nótese que $\sigma^0 = \tau$.

El momento canónico asociado al campo ϕ es

$$P_\phi = J \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^\alpha},$$

con $J = \sqrt{-g}$.

Esto define la densidad Hamiltoniana

$$\mathrm{H} = P_\phi \dot{\phi} - \mathrm{L}\,.$$

Se puede mostrar que H está dada por

$$\mathrm{H} = J \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} T^\mu_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}\,,$$

donde T^μ_ν es el tensor de energía-momento no reparametrizado i.e.

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \delta^\mu_\nu \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}\frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} - V(\phi) \right).$$

Usando el hecho de que J corresponde al Jacobiano del cambio de coordenadas $t = t(\tau, \vec{\sigma}),\ x^i = x^i(\tau, \vec{\sigma})$, se puede también mostrar que el término $J \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} T^\mu_\nu$, es independiente de $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \dot{x}^\mu$.
Así la acción puede escribirse como

$$S = \int d^D\sigma d\tau (P_\phi \dot{\phi} + p_\nu \dot{x}^\nu)\,,$$

donde $p_\nu := -J \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} T^\mu_\nu$.

Es evidente que $\Pi_\nu := p_\nu + J \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} T^\mu_\nu \approx 0$ constituyen D+1 constricciones resultantes de la adición de las coordenadas del espacio-tiempo de imersión en la acción. Entonces, dentro del formalismo de Dirac, una acción más general que incorpore tales constricciones es

$$S = \int d^D\sigma d\tau (P_\phi \dot{\phi} + p_\mu \dot{x}^\mu - \lambda^\nu \Pi_\nu)\,,$$

donde λ^ν son multiplicadores de Lagrange. Debe señalarse que tanto el campo escalar ϕ como las coordenadas x^μ aparecen al mismo nivel en la acción y, por lo tanto, estas últimas constituyen ahora nuevos campos para la teoría clásica.

Aunque esta acción ya tiene la forma adecuada para utilizar el formalismo, desarrollado en las páginas anteriores, que incorpora una forma simpléctica arbitraria, es posible obtener mayor información del álgebra de las constricciones si antes se recurre a hacer una *foliación* $\Sigma \times \mathbb{R}$ del espacio de parámetros [11].

Álgebra de Constricciones.

Una foliación consiste esencialmente en hacer proyecciones de las cantidades que aparecen dentro de la acción, escogiendo direcciones privilegiadas en el espacio de parámetros $(\tau, \vec{\sigma})$, permitiendo así identificar una dirección de evolución del sistema en un contexto que rompe la apariencia covariante de la teoría. Este método es conocido como el método de ADM (Arnowitt-Deser-Misner), diseñado para proveer a la Relatividad General de una función Hamiltoniana cuando antes no la tenía.

Las direcciones privilegiadas que se escogerán son aquellas definidas por los vectores $\mathbf{s}_i$, que generan una hipersuperficie Σ a la cual son tangentes, y cuyas componentes son $s_i^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^i}$. Una condición que se exige sobre estos vectores es que la hipersuperficie Σ que definen sea *espacialoide* bajo la métrica $\eta_{\mu\nu}$ i.e.

$$\eta_{\mu\nu} s_i^\mu s_i^\nu < 0, \; i = 1, ..., D.$$

Nótese que la elección hecha para $\mathbf{s}_i$ inmediatamente satisface esta condición.

La otra dirección es obviamente la definida por el vector unitario **n** *temporaloide*, normal a la hipersuperficie Σ, con componentes

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}} \left(g^{0\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \right) = \sqrt{g^{00}}\, \dot{x}^\mu + \frac{g^{0i}}{\sqrt{g^{00}}} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^i}.$$

De esta manera, las proyecciones $n^\mu \Pi_\mu$ y $s_i^\mu \Pi_\mu$ definen las nuevas constricciones normales y tangentes a Σ, es decir, el super-Hamiltoniano y el super-momento,

$$H_\perp := n^\mu \Pi_\mu = \frac{1}{2\sqrt{-\gamma}} \left(P_\phi^2 + \gamma \gamma^{ij} \partial_{\sigma^i} \phi \partial_{\sigma^j} \phi \right) + n^\mu p_\mu + \sqrt{-\gamma}\, V(\phi),$$
$$H_j := s_j^\mu \Pi_\mu = P_\phi \partial_{\sigma^j} \phi + p_\mu \partial_{\sigma^j} x^\mu,$$

respectivamente, donde se ha hecho uso de la notación $\partial_{\sigma^i} := \frac{\partial}{\partial \sigma^i}$, $\gamma_{ij} \equiv g_{ij}$, $\gamma_{ik}\gamma^{kj} = \delta_i^j$ y $\gamma = Det[\gamma_{ij}]$.

La acción para el campo escalar reparametrizado puede ahora escribirse como

$$S = \int d^D\sigma d\tau (P_\phi \dot{\phi} + p_\mu \dot{x}^\mu - NH_\perp - N^i H_i),$$

después de identificar las proyecciones $n_\mu \lambda^\mu$ y $s^i_\mu \lambda^\mu$ con las funciones de lapso y corrimiento N y N^i, y donde $s^i_\mu s^\mu_j = \delta^i_j$.
Las constricciones $H_\perp(\tau,\vec{\sigma})$ y $H_i(\tau,\vec{\sigma})$ satisfacen los siguientes paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned}
&\{H_\perp(\tau,\vec{\sigma}), H_\perp(\tau,\vec{\sigma}\,')\} = \sum_{i=1}^{D} (H_i(\tau,\vec{\sigma}) + H_i(\tau,\vec{\sigma}\,'))\partial_{\sigma^i}\delta(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,'),\\
&\{H_i(\tau,\vec{\sigma}), H_j(\tau,\vec{\sigma}\,')\} = H_j(\tau,\vec{\sigma})\partial_{\sigma^i}\delta(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,') + H_i(\tau,\vec{\sigma})\partial_{\sigma^j}\delta(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,'),\\
&\{H_i(\tau,\vec{\sigma}), H_\perp(\tau,\vec{\sigma}\,')\} = H_\perp(\tau,\vec{\sigma})\partial_{\sigma^i}\delta(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,'),
\end{aligned}$$

y, puesto que la función Hamiltoniana total está dada por $H_T = \int d^D\sigma (NH_\perp + N^i H_i)$, entonces la evolución de las constricciones satisface :

$$\begin{aligned}
\dot{H}_\perp &= \{H_\perp, H_T\} \approx 0,\\
\dot{H}_i &= \{H_i, H_T\} \approx 0.
\end{aligned}$$

Esto convierte al conjunto de constricciones $H_\perp(\tau,\vec{\sigma})$ y $H_i(\tau,\vec{\sigma})$ en un conjunto completo de constricciones primera clase.

En la literatura este tipo de álgebra es conocida como el álgebra de Virasoro ς sin carga central, que aparece en las formulaciones de Teoría de Cuerdas y que aquí tiene la misma interpretación. Por construcción, el proceso de reparametrización que se ha presentado permite tener cualquier forma para las funciones $t = t(\tau,\vec{\sigma})$, $x^i = x^i(\tau,\vec{\sigma})$, es decir que la teoría debe ser invariante bajo *difeomorfismos* arbitrarios. Así pues, las constricciones deben portar dicha información como ya se ha discutido en páginas anteriores. Mostraremos a continuación que justamente las constricciones $H_\perp(\tau,\vec{\sigma})$ y $H_i(\tau,\vec{\sigma})$ generan esta simetría.

Para simplificar las expresiones siguientes, se restringirá el análisis anterior al caso de una dimensión espacial y una temporal (*D*=1), pero los resultados son completamente generalizables a *D*>1.

Las constricciones $H_\perp(\tau,\sigma)$ y $H_1(\tau,\sigma)$ en este caso se escriben explícitamente como

$$H_\perp(\tau,\sigma)=(-\gamma)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(P_\phi^2+\phi'^2)+p_t x'+p_x t'+(x'^2-t'^2)V(\phi)\right]\approx 0,$$

$$H_1(\tau,\sigma)=p_x x'+p_t t'+P_\phi\phi'\approx 0.$$

Aquí se ha usado la notación $\dfrac{\partial f(\tau,\sigma)}{\partial\sigma}=f'(\tau,\sigma)$.

Estas constricciones son generatrices de transformaciones de contacto infinitesimales que no afectan el estado físico del sistema y que son de la forma:

$$\{\phi,H_\perp\}=(-\gamma)^{-\frac{1}{2}}P_\phi=(-\gamma)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(x'^2-t'^2)}{\sqrt{-g}}\dot{\phi}+\frac{(t'\dot{t}-x'\dot{x})}{\sqrt{-g}}\phi'\right],$$

$$\{\phi,H_1\}=\phi'.$$

Esto muestra que las constricciones $H_\perp(\tau,\sigma)$ y $H_1(\tau,\sigma)$ pueden verse como derivaciones actuando sobre los elementos ϕ de un álgebra conmutativa de funciones A del espacio fase con producto μ, i.e

$$\hat{H}_\perp,\hat{H}_1\in\hat{\mathrm{V}},\quad \hat{H}_\perp,\hat{H}_1:\mathrm{A}\to\mathrm{A}\text{ , tales que }\forall\phi\in\mathrm{A}$$

$$\{\phi,H_\perp\}\cong\hat{H}_\perp\triangleright\phi=(-\gamma)^{-\frac{1}{2}}P_\phi=(-\gamma)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(x'^2-t'^2)}{\sqrt{-g}}\partial_\tau+\frac{(t'\dot{t}-x'\dot{x})}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\right]\phi,$$

$$\{\phi,H_1\}\cong\hat{H}_1\triangleright\phi=\partial_\sigma\phi.$$

Si se considera un caso más general de derivación, como la siguiente combinación lineal:

$$\begin{aligned}H_\tau[\xi]&=\int d\vec{\sigma}(\xi^\perp(\tau,\vec{\sigma})H_\perp(\tau,\vec{\sigma})+\xi^1(\tau,\vec{\sigma})H_1(\tau,\vec{\sigma}))\\&=\int d\vec{\sigma}(\xi^\perp(\tau,\vec{\sigma})n^\mu(\tau,\vec{\sigma})\Pi_\mu(\tau,\vec{\sigma})+\xi^1(\tau,\vec{\sigma})s_1^\mu(\tau,\vec{\sigma})\Pi_\mu(\tau,\vec{\sigma}))\\&=\int d\vec{\sigma}\xi^\alpha(\tau,\vec{\sigma})\Pi_\alpha(\tau,\vec{\sigma}),\end{aligned}$$

donde $\xi^\perp(\tau,\vec{\sigma})n^\mu(\tau,\vec{\sigma})+\xi^1(\tau,\vec{\sigma})s_1^\mu(\tau,\vec{\sigma}):=\xi^\mu(\tau,\vec{\sigma})$,

entonces, usando las formas explícitas de las constricciones $H_\perp(\tau,\sigma)$ y $H_1(\tau,\sigma)$, se obtienen los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\{\phi(\tau,\vec{\sigma}),H_\tau[\xi]\} = \xi^\alpha(\tau,\vec{\sigma})\frac{\partial\phi(x(\tau,\vec{\sigma}))}{\partial x^\alpha} \cong \hat{H}_\tau[\xi] \triangleright \phi(x(\tau,\vec{\sigma})),$$
$$\{x^\mu(\tau,\vec{\sigma}),H_\tau[\xi]\} = \xi^\alpha(\tau,\vec{\sigma})\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \cong \hat{H}_\tau[\xi] \triangleright x^\mu.$$

Por ende, las derivaciones $\hat{H}_\tau[\xi] \equiv \delta_\xi = \xi^\alpha(\tau,\vec{\sigma})\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=x(\tau,\vec{\sigma})}$ pueden verse como campos vectoriales del álgebra de Lie de diffeomorfismos de espacio-tiempo (*Ldiff M*) actuando sobre el espacio de funciones conmutativas A. La demostración estaría completa si se tuviera el mapeo

$$[\eta,\rho] \mapsto [\hat{H}_\tau[\eta],\hat{H}_\tau[\rho]] \quad \forall\,\eta,\rho \in LdiffM$$

Para mostrar lo anterior se recurre al hecho de que $\{\Pi_\alpha(\tau,\vec{\sigma}),\Pi_\beta(\tau,\vec{\sigma}\,')\} = 0$ [9], entonces

$$\begin{aligned}
\{H_\tau[\eta],H_\tau[\rho]\} &= \int d\vec{\sigma}d\vec{\sigma}\,'\{\eta^\mu(x(\tau,\vec{\sigma}))\Pi_\mu,\rho^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}\,'))\Pi_\nu\} \\
&= \int d\vec{\sigma}d\vec{\sigma}\,'[\{\eta^\mu(x(\tau,\vec{\sigma})),\Pi_\nu\}\Pi_\mu\rho^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}\,')) + \{\Pi_\mu,\rho^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}\,'))\}\Pi_\nu\eta^\mu(x(\tau,\vec{\sigma}))] \\
&= \int d\vec{\sigma}d\vec{\sigma}\,'[\{\eta^\mu(x(\tau,\vec{\sigma})),p_\nu\}\Pi_\mu\rho^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}\,')) + \{p_\mu,\rho^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}\,'))\}\Pi_\nu\eta^\mu(x(\tau,\vec{\sigma}))] \\
&= \int d\vec{\sigma}[\rho^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}))\partial_\nu\eta^\mu(x(\tau,\vec{\sigma})) - \eta^\nu(x(\tau,\vec{\sigma}))\partial_\nu\rho^\mu(x(\tau,\vec{\sigma}))]\Pi_\mu \\
&= \int d\vec{\sigma}[\rho,\eta]^\mu\Pi_\mu = -\int d\vec{\sigma}[\eta,\rho]^\mu\Pi_\mu \\
&= -H_\tau[[\eta,\rho]].
\end{aligned}$$

Ahora, la acción $[\hat{H}_\tau[\eta],\hat{H}_\tau[\rho]] \triangleright \phi$ está dada por

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_\tau[\eta],\hat{H}_\tau[\rho]] \triangleright \phi &= \hat{H}_\tau[\eta] \triangleright \hat{H}_\tau[\rho] \triangleright \phi - \hat{H}_\tau[\rho] \triangleright \hat{H}_\tau[\eta] \triangleright \phi \\
&\cong \{\{\phi,H_\tau[\rho]\},H_\tau[\eta]\} - \{\{\phi,H_\tau[\eta]\},H_\tau[\rho]\} \\
&= -\{\phi,\{H_\tau[\eta],H_\tau[\rho]\}\} \equiv \{\phi,H_\tau[[\eta,\rho]]\} \\
&\cong \hat{H}_\tau[[\eta,\rho]] \triangleright \phi.
\end{aligned}$$

Para obtener la expresión anterior se ha hecho uso de la identidad de Jacobi.

Esto completa la demostración y con ello se tiene un anti-homomorfismo entre el álgebra de Poisson V y el álgebra de difeomorfsimos *Ldiff M* de espacio tiempo; así como el homomorfismo que se buscaba entre el álgebra de derivaciones $\hat{\mathrm{V}}$ y *Ldiff M*.

No-conmutatividad del espacio-tiempo.

Siguiendo ahora el procedimiento de cuantización canónica de Dirac para sistemas con constricciones con una estructura simpléctica arbitraria, desarrollado en páginas anteriores, la acción del campo escalar reparametrizado puede escribirse como

$$S = \int d^D\sigma d\tau (A_a(z)\dot{z}^a - N\tilde{H}_\perp - N^1\tilde{H}_1),$$

donde las z^a corresponden a las variables generalizadas de espacio-fase $z^a = (x^\mu, p_\mu, \phi, P_\phi)$. Se debe señalar que las cantidades $\tilde{H}_\perp(\tau,\sigma)$ y $\tilde{H}_1(\tau,\sigma)$ no corresponden exactamente a las constricciones $H_\perp(\tau,\sigma)$ y $H_1(\tau,\sigma)$, sino a una versión modificada por razones que se explicarán mas adelante.

De manera análoga al caso de la partícula reparametrizada, al calcular los momentos canónicos asociados a las z's se obtienen las constricciones de segunda clase:

$$\chi_a = \pi_a - A_a(z) \approx 0.$$

Con lo que se define la nueva densidad Hamiltoniana total

$$\mathrm{H}_T = N\tilde{H}_\perp + N^1\tilde{H}_1 + \mu^a \chi_a.$$

Con la finalidad de eliminar a las constricciones de segunda clase se introducen los paréntesis de Dirac:

$$\{\xi,\rho\}^* = \{\xi,\rho\} - \{\xi,\chi_a\}\omega^{ab}\{\chi_b,\rho\},$$

donde, como ya se sabe, $\omega_{ab} := \{\chi_a,\chi_b\} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ y $\omega_{ab}\omega^{bc} = \delta_a^c$.

Los paréntesis de Dirac evaluados para las coordenadas generalizadas de espacio fase proveen la siguiente álgebra:

$$\{z^a, z^b\}^* = \omega^{ab}.$$

Entonces, al elegir la forma simpléctica ω_{ab} como

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene el siguiente conjunto de conmutadores:

$$\begin{aligned} &[\hat{t}(\tau,\sigma), \hat{x}(\tau,\sigma')] = i\theta\delta(\sigma-\sigma'), \\ &[\hat{t}(\tau,\sigma), \hat{p}_t(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma-\sigma'), \\ &[\hat{x}(\tau,\sigma), \hat{p}_x(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma-\sigma'), \\ &[\hat{\phi}(\tau,\sigma), \hat{P}_\phi(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma-\sigma'), \end{aligned}$$

al cuantizar los paréntesis de Dirac fundamentales de la teoría. Incorporando de esta forma la no-conmutatividad de los campos de espacio-tiempo en la acción.

Regresando al álgebra de Dirac clásica $\{z^a, z^b\}^* = \omega^{ab}$, es ahora directo ver que las cantidades $H_\perp(\tau,\sigma)$ y $H_1(\tau,\sigma)$ ya no satisfacen el álgebra de Virasoro descrita con anterioridad. La manera más sencilla de recobrar tal álgebra para estas cantidades es notando que bajo el siguiente cambio de variables

$$\tilde{t} = t + \frac{\theta}{2} p_x, \; \tilde{x} = x - \frac{\theta}{2} p_t,$$

se tiene

$$\{\tilde{t}, \tilde{x}\}^* = 0.$$

Lo anterior hace que el álgebra de Dirac de las variables $(\tilde{t}, \tilde{x}, \phi, p_t, p_x, P_\phi)$ sea la misma que el álgebra de Poisson para $(t, x, \phi, p_t, p_x, P_\phi)$, con lo que al definir $\tilde{H}_\perp(z^a) := H_\perp(\tilde{z}^a)$ y $\tilde{H}_1(z^a) := H_1(\tilde{z}^a)$ se tienen inmediatamente los siguientes paréntesis de Dirac:

$$\begin{aligned} &\{\tilde{H}_\perp(\tau,\vec{\sigma}), \tilde{H}_\perp(\tau,\vec{\sigma}')\}^* = (\tilde{H}_1(\tau,\vec{\sigma}) + \tilde{H}_1(\tau,\vec{\sigma}'))\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}'), \\ &\{\tilde{H}_1(\tau,\vec{\sigma}), \tilde{H}_1(\tau,\vec{\sigma}')\}^* = (\tilde{H}_1(\tau,\vec{\sigma}) + \tilde{H}_1(\tau,\vec{\sigma}'))\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}'), \\ &\{H_1(\tau,\vec{\sigma}), H_\perp(\tau,\vec{\sigma}')\}^* = \tilde{H}_\perp(\tau,\vec{\sigma})\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}'), \end{aligned}$$

Obteniendo entonces el álgebra de Virasoro Ṽ con estas nuevas constricciones *deformadas*.

Nótese que hay un número infinito de posibles elecciónes de variables $\tilde{t},\tilde{x}$ que permiten recobrar el álgebra de Poisson, y que todas ellas estan relacionadas entre si por una transformación canónica.

Las constricciones $\tilde{H}_{\perp}(\tau,\sigma)$ y $\tilde{H}_1(\tau,\sigma)$ se escriben explícitamente como

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\perp}(\tau,\sigma) = (-\tilde{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\Bigg[\frac{1}{2}(P_{\phi}^2+\phi'^2)+p_t(x-\frac{\theta}{2}p_t)'+p_x(t+\frac{\theta}{2}p_x)'\\ +\left((x-\frac{\theta}{2}p_t)'^2-(t+\frac{\theta}{2}p_x)'^2\right)V(\phi)\Bigg],\\ \tilde{H}_1(\tau,\sigma) = p_x(x-\frac{\theta}{2}p_t)'+p_t(t+\frac{\theta}{2}p_x)'+P_{\phi}\phi'.\end{aligned}$$

y es posible mostrar que después de asignar el siguiente ordenamiento para los operadores $\hat{\tilde{H}}_{\perp}(\tau,\sigma)$ y $\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\sigma)$:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{H}}_{\perp}(\tau,\sigma) = (-\tilde{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\Bigg[\frac{1}{2}(\hat{P}_{\phi}^2+\hat{\phi}'^2)+\hat{p}_t(\hat{x}-\frac{\theta}{2}\hat{p}_t)'+\hat{p}_x(\hat{t}+\frac{\theta}{2}\hat{p}_x)'\\ +\left((\hat{x}-\frac{\theta}{2}\hat{p}_t)'^2-(\hat{t}+\frac{\theta}{2}\hat{p}_x)'^2\right)V(\phi)\Bigg],\\ \hat{\tilde{H}}_1(\tau,\sigma) = \hat{p}_x(\hat{x}-\frac{\theta}{2}\hat{p}_t)'+\hat{p}_t(\hat{t}+\frac{\theta}{2}\hat{p}_x)'+\hat{P}_{\phi}\hat{\phi}',\end{aligned}$$

sus conmutadores satisfacen ahora el álgebra:

$$\begin{aligned}&[\hat{\tilde{H}}_{\perp}(\tau,\vec{\sigma}),\hat{\tilde{H}}_{\perp}(\tau,\vec{\sigma}')] = i(\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\vec{\sigma})+\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\vec{\sigma}'))\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}'),\\ &[\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\vec{\sigma}),\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\vec{\sigma}')] = i(\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\vec{\sigma})+\hat{\tilde{H}}_1(\tau,\vec{\sigma}'))\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}'),\\ &[\hat{H}_1(\tau,\vec{\sigma}),\hat{H}_{\perp}(\tau,\vec{\sigma}')] = i\hat{\tilde{H}}_{\perp}(\tau,\vec{\sigma})\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}'),\end{aligned}$$

dando de esta manera consistencia a la teoría cuántica.

Deformación de las simetrías.

En el contexto de la Teoría Algebraica, la deformación en el producto conmutativo μ de un álgebra de funciones A definidas sobre un espacio con un grupo de simetría **g**, está asociado con la deformación de un álgebra de Hopf del álgebra universal envolvente del álgebra de Lie de **g**, a través de lo que se denomina una torcedura de Drinfeld [12]. Para explicar esto se harán algunas definiciones a continuación [13], [14]:

Álgebras de Hopf.

Un álgebra de Hopf corresponde a una biálgebra B definida sobre un campo K , equipada con las operaciones de producto $\Pi:\mathrm{B}\otimes\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}$, coproducto $\Delta:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}\otimes\mathrm{B}$, unidad $u:\mathrm{K}\rightarrow\mathrm{B}$, counidad $\varepsilon:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{K}$ y antípoda $\mathrm{S}:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}$, y donde se satisfacen los diagramas conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{B}\otimes\mathrm{B}\otimes\mathrm{B} \arrow[r, "\mathrm{I}\otimes\Pi"] \arrow[d, "\Pi\otimes\mathrm{I}"'] & \mathrm{B}\otimes\mathrm{B} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathrm{B}\otimes\mathrm{B} \arrow[r, "\Pi"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{B}\otimes\mathrm{B}\otimes\mathrm{B} & \mathrm{B}\otimes\mathrm{B} \arrow[l, "\mathrm{I}\otimes\Delta"'] \\
\mathrm{B}\otimes\mathrm{B} \arrow[u, "\Delta\otimes\mathrm{I}"] & \mathrm{B} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
,
$$

entre otros varios axiomas. El mapeo $\mathrm{I}:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}$ corresponde a la acción de la identidad en el álgebra. La antípoda S es única bajo el coproducto Δ y satisface $\Pi[(\mathrm{S}\otimes\mathrm{I})(\Delta a)]\equiv\Pi[(\mathrm{I}\otimes\mathrm{S})(\Delta a)],\ \ \forall a\in\mathrm{B}$.

Torcedura (twist) de Drinfeld.

Sea F un elemento invertible de $\mathrm{B}\otimes\mathrm{B}$, entonces $\Delta^{\mathrm{F}}:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}\otimes\mathrm{B}$ y $\mathrm{S}^{\mathrm{F}}:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}$, definidos por:

$$
\begin{aligned}
&\Delta^{\mathrm{F}}(a)=\mathrm{F}\,\Delta(a)\mathrm{F}^{-1},\\
&\mathrm{S}^{\mathrm{F}}(a)=\Pi[\mathrm{S}\otimes\mathrm{I}(\mathrm{F}\ )]\mathrm{S}(a)\Pi[\mathrm{S}\otimes\mathrm{I}(\mathrm{F}^{-1})],\ \ \forall a\in\mathrm{B}
\end{aligned}
$$

corresponden a una nueva operación de coproducto y antípoda respectivamente. Así, es posible mostrar que el *n-tuplete* $(\mathrm{B},\Pi,u,\Delta^{\mathrm{F}},\varepsilon,\mathrm{S}^{\mathrm{F}})$ es también un álgebra de Hopf, denotada por B^{F} y llamada la torcedura de B por F .

Cuando F se puede escribir como $\mathrm{F}=1\otimes1+\mathrm{O}(\theta)$, donde $\theta\in\mathrm{K}$, entonces se sigue directamente que para el caso $\lim\limits_{\theta\to0}$ ocurre $\mathrm{B}^{\mathrm{F}}\xrightarrow[\theta\to0]{}\mathrm{B}$. Este tipo de torcedura es denominada de Drinfeld.

Deformaciones.

Para un álgebra asociativa A con una multiplicación μ , una deformación formal corresponde a una ley de multiplicación bilinear $\mu_\theta:\mathrm{A}\otimes\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}$, escrita como una serie formal de potencias para algúna $\theta\in\mathrm{K}$ y con coeficientes en A que satisface:

$$\mu_\theta(a\otimes b)=\mu(a\otimes b)+m_1(a,b)\theta+m_2(a,b)\theta^2+\ldots,\ \ \forall a,b\in\mathrm{A}$$

donde las $m_i(a,b)$ dependen únicamente de a y b .

Además esta multiplicación es asociativa

$$\mu_\theta(\mu_\theta(a\otimes b)\otimes c) = \mu_\theta(a\otimes\mu_\theta(b\otimes c)),\ \ \forall a,b,c\in \mathcal{A}\ .$$

Producto $\star_\theta$ *y deformación de Difeomorfismos.*

Después de las definiciones anteriores, el álgebra de Dirac de los campos $(t,x,\phi,p_t,p_x,P_\phi)$ puede entenderse ahora como una deformación μ_θ del álgebra conmutativa $\mathcal{A}$, notando que para potencias arbitrarias de los campos $t(\tau,\sigma)$ y $x(\tau,\sigma)$, el paréntesis de Dirac esta dado por:

$$\{t^m(\tau,\sigma),x^n(\tau,\sigma')\}^* = mn\theta t^{m-1}(\tau,\sigma)x^{n-1}(\tau,\sigma')\delta(\sigma-\sigma').$$

Entonces para cualesquiera dos funcionales $A(\tau,\sigma),B(\tau,\sigma)$ del espacio de campos $\mathcal{A}$ se puede escribir la siguiente identificación:

$$\{A(\tau,\sigma),B(\tau,\sigma)\}^* \cong [A(\tau,\sigma),B(\tau,\sigma)]_{\star_\theta} := A(\tau,\sigma)\star_\theta B(\tau,\sigma) - B(\tau,\sigma)\star_\theta A(\tau,\sigma)\,,$$

donde $\star_\theta := e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma'' \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta x^\mu(\tau,\sigma'')}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta x^\nu(\tau,\sigma'')}}$. Aquí el producto $\star_\theta$ constituye una deformación del álgebra de los campos $(t,x,\phi,p_t,p_x,P_\phi)$.

Por otra parte, como ya se vio en páginas anteriores el álgebra de derivaciones $\hat{\mathcal{V}}$, con generadores $\hat{H}_\perp(\tau,\sigma)$ y $\hat{H}_i(\tau,\sigma)$ constituye un álgebra de Lie que es homomorfa al álgebra de derivaciones de espacio-tiempo (*Ldiff M),* siendo esta última el álgebra de Lie asociada al grupo de difeomorfismos.

Entonces a la cubierta universal envolvente $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{V}})$ de $\hat{\mathcal{V}}$ puede asignársele una estructura de álgebra de Hopf, haciendo las siguientes definiciones:

$$\Delta(\hat{H}_\perp) = \hat{H}_\perp\otimes 1 + 1\otimes\hat{H}_\perp,$$
$$\Delta(\hat{H}_i) = \hat{H}_i\otimes 1 + 1\otimes\hat{H}_i,\ \forall i,$$

con la counidad

$$\varepsilon(\hat{G}) = 0,\ \forall\hat{G}\in\hat{\mathcal{V}},\ \ \hat{G}\neq 1$$

y la antípoda

$$S(\hat{G}) = -\hat{G},\ \forall\hat{G}\in\hat{\mathcal{V}}$$

La acción de una derivación $\hat{H}_\tau[\xi]$ sobre un producto de campos $\phi\cdot\psi$ satisface:

$$\hat{H}_\tau[\xi] \triangleright (\phi\cdot\psi) = (\hat{H}_\tau[\xi] \triangleright \phi)\cdot\psi + \phi\cdot(\hat{H}_\tau[\xi] \triangleright \psi)\,,$$

que ahora, usando el coproducto, puede escribirse como

$$\begin{aligned}\hat{H}_\tau[\xi] \triangleright (\phi\cdot\psi) &= \mu(\Delta(\hat{H}_\tau[\xi]) \triangleright (\phi\otimes\psi)) = \mu((\hat{H}_\tau[\xi]\otimes 1 + 1\otimes \hat{H}_\tau[\xi]) \triangleright (\phi\otimes\psi)) \\ &= (\hat{H}_\tau[\xi] \triangleright \phi)\cdot\psi + \phi\cdot(\hat{H}_\tau[\xi] \triangleright \psi),\end{aligned}$$

mostrando que la definición del coproducto es compatible con la covariancia en el álgebra de campos $\mathcal{A}$.

Dada la deformación μ_θ, con la cual hay asociada una deformación de la subálgebra de Poisson $\tilde{\mathcal{V}}$, es posible también encontrar un álgebra de derivaciones $\hat{\mathcal{V}}^\star$ bajo la cual aún se preserve la covariancia.

En efecto, definiendo la acción de cualquier elemento $\hat{\hat{H}}^\star_\tau[\xi] = \delta^\star_\xi \in \hat{\mathcal{V}}^\star$ sobre un elemento del álgebra de campos deformada $\mathcal{A}_\theta$ por:

$$\hat{\hat{H}}^\star_\tau[\xi] \star_\theta \phi = \hat{H}_\tau[\xi] \triangleright \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_\theta\,,$$

es sencillo mostrar que si:

$$\begin{aligned}\hat{\hat{H}}^\star_\perp(\tau,\sigma) &:= \hat{H}_\perp(\tau,\sigma)e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma'' \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta x^\mu(\tau,\sigma'')}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta x^\nu(\tau,\sigma'')}}, \\ \hat{\hat{H}}^\star_i(\tau,\sigma) &:= \hat{H}_i(\tau,\sigma)e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma'' \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta x^\mu(\tau,\sigma'')}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta x^\nu(\tau,\sigma'')}},\end{aligned}$$

y $\hat{\hat{H}}^\star_\tau[\xi] := \int d\vec{\sigma}(\xi^\perp(\tau,\vec{\sigma})\hat{\hat{H}}^\star_\perp(\tau,\vec{\sigma}) + \xi^i(\tau,\vec{\sigma})\hat{\hat{H}}^\star_i(\tau,\vec{\sigma})),$ entonces inmediatamente se satisface la condición anterior.

Se sigue directamente también que el álgebra $\hat{\mathcal{V}}^\star$ corresponde al álgebra de Virasoro, y satisface los siguientes conmutadores :

$$\begin{aligned}&[\hat{\hat{H}}^\star_\perp(\tau,\vec{\sigma}), \hat{\hat{H}}^\star_\perp(\tau,\vec{\sigma}\,')]_{\star_\theta} = (\hat{\hat{H}}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}) + \hat{\hat{H}}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}\,'))\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,'), \\ &[\hat{\hat{H}}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}), \hat{\hat{H}}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}\,')]_{\star_\theta} = (\hat{\hat{H}}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}) + \hat{\hat{H}}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}\,'))\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,'), \\ &[\hat{H}^\star_1(\tau,\vec{\sigma}), \hat{H}^\star_\perp(\tau,\vec{\sigma}\,')]_{\star_\theta} = \hat{\hat{H}}^\star_\perp(\tau,\vec{\sigma})\delta'(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}\,'),\end{aligned}$$

que resultan de usar la propiedad

$$[\hat{\tilde{A}}^{\mathrm{i}}\ (\tau,\sigma),\hat{\tilde{B}}^{\mathrm{i}}\ (\tau,\sigma)]_{\mathrm{i}\ \theta}=[\hat{A}(\tau,\sigma),\hat{B}(\tau,\sigma)]e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\bar{\delta}}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\frac{\bar{\delta}}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}.$$

La acción de un generador de diffeomorfismos $\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}$ sobre un producto de campos $\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi$ corresponde entonces a:

$$\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{i}\ _{\theta}(\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi)\equiv\delta_{\xi}\triangleright(\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi).$$

nótese que el término de la derecha en la identidad anterior puede escribirse como:

$$\delta_{\xi}\triangleright(\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi)=\mu[\Delta\delta_{\xi}(e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}(\phi\otimes\psi))],$$

que al usar la identidad

$$\begin{aligned}\mu(f\otimes g)&=\mu[e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}(f\otimes g)]\\&=\mu_{\theta}[e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}(f\otimes g)],\end{aligned}$$

se escribe ahora como

$$\delta_{\xi}\triangleright(\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi)=\mu_{\theta}[e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}\Delta\delta_{\xi}(e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}(\phi\otimes\psi))].$$

Por lo tanto, si se define el coproducto para $\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}\ )$ como:

$$\Delta_{\theta}\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}\ :=e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}}\Delta\delta_{\xi}e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma"\frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma")}\otimes\frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma")}},$$

entonces la acción $\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{i}\ _{\theta}(\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi)$ en términos de este coproducto corresponde a:

$$\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{i}\ _{\theta}(\phi\mathrm{i}\ _{\theta}\psi)=\mu_{\theta}[\Delta_{\theta}(\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}\ )(\phi\otimes\psi)],$$

recobrandose así la estructura requerida para preservar la covariancia.

Determinar ahora si la definición dada para el coproducto Δ_{θ} es compatible con el álgebra de $\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}\ )$, que permita convertirla en un álgebra de Hopf es tarea sencilla, ya que de la misma definición se tiene que Δ_{θ} constituye una torcedura de Drinfeld para el coproducto Δ en $\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}})$, i.e.:

$$\Delta_{\theta}\delta_{\xi}^{\mathrm{i}}\ \equiv\Delta^{\mathrm{F}}\delta_{\xi}=\mathrm{F}\,\Delta\delta_{\xi}\mathrm{F}^{-1},\ \ \forall\delta_{\xi}\in\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}}),$$

donde $\mathrm{F} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\int d\sigma'' \frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\tau,\sigma'')} \otimes \frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\tau,\sigma'')}} \in \mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}}) \otimes \mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}})$.

Con esto se demuestra que el álgebra universal envolvente $\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}})$ de $\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}$, con los generadores de simetrías deformadas $\hat{\tilde{H}}^{\mathrm{i}}_{\perp}(\tau,\sigma), \hat{\tilde{H}}^{\mathrm{i}}_{i}(\tau,\sigma)$ y que actua sobre el álgebra de campos deformada A_{θ} constituye un álgebra de Hopf $(\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}), \Pi, u, \Delta_{\theta}, \varepsilon, S_{\theta})$ isomorfa a la torcedura $(\mathrm{U}(\hat{\mathrm{V}})^{\mathrm{F}}, \Pi, u, \Delta^{\mathrm{F}}, \varepsilon, S^{\mathrm{F}})$.

Bibliografía

[1] M. Rosenbaum, J. D. Vergara, L. R. Juárez, Phys. Lett. A 354 (2006) 389.
[2] M. Rosenbaum, J. D. Vergara, L. R. Juárez, **hep-th/0610150,** por aparecer en Contemporary Mathematics.
[3] M. Rosenbaum, J. D. Vergara, L. R. Juárez, **hep-th/0611160,** sometido a publicación a J. of Phys A.
[4] M. Rosenbaum, J. D. Vergara, L. R. Juárez, "Noncommutative field theory form quantum mecánical space-space noncommutativity" por aparecer en Physics Letters A.
[5] Nathan Seiberg, Edward Witten, JHEP 9909:032, 1999.
[6] G.S. Agarwal, E. Wolf, Phys. Rev. D 2 (1970) 2161
[7] M. Rosenbaum, Applications of the Wigner Representation to the Theory of Slow Neutron Scattering, Technical Report 03712-4-T. U:S Atomic Energy Commission Contract No. AT(11-1)-917. Argonne, Ill. March 1963.
[8] J. M. Carmona, J. L. Cortés, J. Gamboa, F. Méndez, JHEP (2003) 058.
[9] P. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Ed. Dover.
[10] A. Ashtekar, Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity, World Scientific Singapore 1991, 334 pp.
[11] K. Kuchar, Relativity, Astrophysics and Cosmology, p. 237-288, W. Israel (Ed.).
[12] C. Blohmann, **arXiv:math.QA/0402199 v1**, publicado en Physical and Mathematical aspects of symmetries, Paris 2002.
[13] M. Sweedler, Hopf Algebras, Ed. W.A. Benjamin, 1969.
[14] V. Chari, A. Presley, A Guide to Quantum Groups, Ed. Cambridge, 1994.