UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Opciones Pasaporte: Teoría y Aplicación."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

PARIS HURTADO PEREZ

DIRECTOR DE TESIS
M. EN C. JESUS DAVID GOMEZ TELLEZ

2007

1. Datos del alumno
   Hurtado
   Pérez
   Paris
   56 82 26 76
   Universidad Nacional Autonoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   095261911

2. Datos del tutor
   Maestro en Ciencias
   Jesús David
   Gómez
   Téllez

3. Sinodal 1
   Doctor
   Pablo
   Padilla
   Longoria

4. Sinodal 2
   Maestro en Ciencias
   Jorge Humberto
   del Castillo
   Spindola

5. Sinodal 3
   Actuario
   Ricardo Rony
   Reyes
   Pino

6. Sinodal 4
   Maestro en Ciencias
   Hugo
   Villaseñor
   Hernández

7. Tesis
   "Opciones Pasaporte: Teoría y Aplicación."
   97 páginas
   2007

Dedicada a mi hija
Alpha Zoe...

Agradecimientos

Agradezco a mis padres su apoyo absoluto e incondicional...
A mi mamá, por haberme dado su vida para que la mía fuese extraordinariamente feliz, por haberme enseñado con el ejemplo que para ser un triunfador hay que ser humilde, noble, inteligente y persistente. Gigi, Mata, Ma, mamá gracias por haber sido la MEJOR. Te amo.
A mi papá, por haber sido mi ejemplo inalcanzable, por ser mi mayor héroe, porque en mis recuerdos más felices estas tú, por tus consejos y comentarios infalibles, porque no pude haber tenido un mejor padre. Gracias por todos tus esfuerzos. Soy lo que soy gracias a ti. Te amo.

Agradezco a mi familia, por ser el motivo por el cual he hecho, hago y haré todo...
A mi esposa Cristina, por todos sus esfuerzos, paciencia y amor. Por entenderme y apoyarme siempre que lo necesito. Por ser mi inspiración y guía, por todos esos momentos que me hicieron enamorarme de ti. Gracias por ser la mejor compañera. Te amo.
A mi hija, por ser el mayor motivo de mi vida, por ser la causa de todos mis esfuerzos, porque eres la luz de mi vida, por ser mi inspiración y mi más grande alegría. Te amo, y te amaré toda mi vida.

A mi hermano por apoyarme siempre que lo necesito, por su amor y comprensión, te amo...

A mis tías y primos, por ser la mejor familia, por ser tan buenos conmigo...

A mis amigos, por su apoyo, por ser en ocasiones la fuerza que me hizo ir hacia adelante, por los momentos de alegría y desmadre que están alojados en mi corazón...

Finalmente te agradezco a ti, que te busque en el mar turbulento y no te encontre, te busque en la tormenta y no estabas ahí, te busque en los vientos del huracan y tampoco estabas, y cuando estaba por rendirme te busque en la suave y delicada brisa del amanecer y ahí te encontre. Gracias Dios.

A mis maestros...

Al Dr. Pablo Padilla Longoria, por que su clase fue un parteaguas en mis estudios, por haber sido el motivo por el cual hiciera mi tesis sobre opciones pasaporte, por sus comentarios y sugerencias. Pero sobre todo por su paciencia y humildad que me tuvo durante este largo tiempo. Por ser un ejemplo de la excelencia para mi, gracias.

Al M. en C. David Gómez Téllez, por haberme enseñado todo. Por haberme explicado, muchas veces más de una vez, los diversos conceptos realizados en esta tesis. Por haber estado a mi lado en muchas ocasiones al elaborar esta tesis, por todas las discusiones académicas, sociales, culturales, musicales, religiosas, políticas, laborales y familiares. Pero sobre todo por ser mi amigo, gracias.

Al M. en C. Jorge Humberto Del Castillo Spindola, porque sus comentarios fueron fundamentales en la realización de esta tesis, por su compromiso inigualable. Pero sobre todo por haberme dado la oportunidad y confianza de laborar en una clase junto a él como su ayudante.

Índice general

Resumen

Las opciones pasaporte son opciones sobre el balance de una cuenta de inversión, que dan la posibilidad al poseedor de cambiar de posición larga a corta ó viceversa sobre el activo subyacente. Si de la estrategia del poseedor resultan ganancias, él se queda con estas. Si en cambio, la estrategia no fue la adecuada y se obtuvieron pérdidas, el emisor de la opción las absorberá. La única condición es que la estrategia del inversionista este dentro de ciertos límites que se especifica en el contrato.

[0]Esta tesis fué editada con LaTeX 2_ε

Capítulo 1

Introducción

En el 2004 el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER) dió apertura al comercio de opciones (instrumentos financieros que dan el derecho a comprar o vender un bien subyacente). Esto es muy importante para la Bolsa Mexicana de Valores, ya que es un paso más para la consolidación de un mercado financiero fuerte, que pueda ser mucho más atractivo y competitivo para los inversionistas del país, que desde luego ya comercializaban estos instrumentos en mercados extranjeros, principalmente en Estados Unidos. El segundo objetivo es atraer inversionistas extrangeros que deseen participar en México con más alternativas de cobertura.

Habrá quienes piensen que entramos tarde a la competencia de derivados en el mundo. Habrá quien diga que el mercado mexicano no necesita este tipo de instrumentos, que no sirven para nada y que son muy complicados. Pero lo cierto es que no son complicados y si es necesario el ofrecer este tipo de alternativas a los inversionistas que desean mayores coberturas para su riesgos. Si queremos un mercado competitivo y que sea altamente atractivo para inversionistas en el mundo, tenemos que ofrecer alternativas de inversión con riesgos mínimos. Con instituciones que sean sólidas y confiables, que tengan la capacidad de vigilar y organizar cualquier tipo de necesidad de inversión en México.

Para generar confianza y seguridad, La Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el MEXDER deben dar a conocer futuras alternativas de inversión, que estén disponibles a la opinión pública para su análisis, y observar el interés que generan estos nuevos instrumentos, para que en un futuro a mediano y largo plazo puedan implementarse sólo los instrumentos que generaron una mayor expectativa.

Hoy existen en el MEXDER opciones tipo europeo y americano sobre acciones e índices, por ejemplo, sobre el índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores, así como sobre algunas acciones. Por ejemplo América Móvil, S.A. de C.V., Naftrac 02, "Nasdaq 100-Index Tracking StockSM" QQQ^{SM} entre otras. Pero se espera que la disponibilidad se vaya extendiendo a un número mayor de acciones y a otros tipos de opciones como las exóticas o las pasaporte, que son opciones que cubren necesidades particulares de inversión.

Se considera que las opciones estilo europeo y americano son opciones de primera generación, las opciones exóticas son las de segunda generación y las pasaporte de tercera generación. En esta tesis se estudia el último tipo de opciones para una posible implementación futura. Se dan las definiciones y conceptos necesarios para el entendimiento de las opciones pasaporte, se mencionan las principales teorías para su valuación, se dan las estrategias de cobertura, se da ejemplo de cuanto costarían algunos tipos de opciones pasaporte. Se hacen comparaciones con las opciones de primera generación. La implementación se hace con el método numérico de diferencias Finitas.

En el capítulo II se da una breve historia de las opciones pasaporte y algunos tipos de opciones sobre cuentas de inversión.

En el capítulo III se mencionan los conceptos de probabilidad necesarios para definir nuestro mercado financiero.

En el capítulo IV se resuelve el problema de valuación de una opción de compra estilo europeo con conceptos de probabilidad y la propiedad martingala.

En el capítulo V se dan algunas definiciones que se ocuparán en capítulos posteriores y se expone de una manera sencilla el concepto de control y control óptimo.

En el capítulo VI se obtiene la ecuación que representa el valor de una opción pasaporte mediante el método de replicar un portafolio y se obtiene una fórmula explícita relacionando el problema de valuación con un problema de valuación estándar ya conocido.

En el capítulo VII se definen otros tipos de opciones sobre cuentas de inversión: las opciones vacacionales.

En el capítulo VIII se muestra que la opción asiática se puede ver como una opción sobre una cuenta de inversión y por lo tanto cumplen con la metodología de valuación.

En el capítulo IX se explica el concepto de opción pasaporte americana.

En el capítulo X se da la razón de cobertura para opciones pasaporte y la paridad de compra venta.

En el capítulo XI se desarrolla la metodología de diferencias finitas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales y de manera de ejemplo, se implementa en la ecuación que representa el valor de la opción pasaporte.

Capítulo 2

Las Opciones Pasaporte

En este capítulo se da una breve historia sobre las opciones pasaporte. Introducimos su concepto y damos los elementos que las componen: el activo subyacente, el proceso de ganancias y la estrategia de inversión; demostramos que si se define esta última de una manera conveniente, podemos considerar a las opciones de primera generación y algunas de segunda generación como casos particulares de opciones pasaporte, y por lo tanto, se les puede aplicar la misma metodología de valuación. Finalmente se dan algunos ejemplos de las diferentes variantes que se pueden construir con una opción pasaporte.

2.1. ¿Qué son las opciones pasaporte?

Las opciones pasaporte fueron introducidas por primera vez en 1997 por Bankers Trust; Hyer, Lipton-Lifschitz y Pugachevsky fueron los primeros en publicar un artículo sobre este tipo de opciones (Ver [16]). Originalmente, las opciones pasaporte fueron opciones de compra sobre el balance de una cuenta de inversión. El concepto de opción pasaporte era el siguiente: da la posibilidad al poseedor (de la opción) de poder cambiar de posición (larga a corta o de corta a larga) durante la vida del derivado, sobre algún activo subyacente. Según la estrategia del poseedor de la opción, éste retendría las ganancias que hubiere generado su estrategia, mientras que las pérdidas serían absorbidas por el emisor (el emisor tendría una reserva para hacer frente a las pérdidas). El inversionista sigue su propia estrategia de inversión que no necesariamente tendría que ser la óptima. La función del balance durante la vida de la opción es el máximo entre cero y el proceso de ganancias resultantes, así la función de pagos de la opción a la fecha de vencimiento será el máximo entre cero y las ganancias resultantes a la fecha de expiración, es decir, el valor que tomará la cuenta de balance sería cero si el proceso de ganancias fuera negativo, en el caso contrario en donde existan ganancias, el comprador de la opción las podrá retener. Hay que tener en cuenta que el proceso de ganancias depende directamente de la estrategia del poseedor de la opción, la cual representaremos como el número de acciones largas o cortas que él negocie, sin olvidar que el valor de la opción depende directamente del activo subyacente.

Existen varios estilos de opción pasaporte u opción sobre cuentas de inversión: americanas, europeas, exóticas, vacacionales. También existen diversas formas de valuación dependiendo de los supuestos (volatilidad constante o estocástica, si existen dividendos o no, si es autofinanciable o no, etc.) y dependiendo de los supuestos se puede obtener una solución explícita o una aproximación a la solución.

2.2. Estilos de opciones pasaporte

Existen varios estilos de opciones pasaporte. Todas las opciones pasaporte pueden ser vistas como un seguro contra las pérdidas de inversión. El inversionista tendrá permitido invertir sobre un activo ó un portafolio de activos durante la vida de la opción. El número de activos que el poseerá puede ser positivo si él supone que el precio del activo se irá hacia arriba, o negativo si piensa que el precio se irá hacia abajo. Hay una limitación sobre la cantidad de activos que podrá negociar (especificada en el contrato), así la estrategia puede tomar cualquier valor entre un rango especificado previamente y es el poseedor de la opción quien decide el valor dentro de este rango. Así es como el poseedor tiene permitido cambiar de posición dentro del rango del activo a negociar. El procedimiento es el siguiente: para cada momento que se quiera cambiar de posición el emisor deberá tener conocimiento de la estrategia de inversión del poseedor para que así, y de

acuerdo a esta estrategia, el emisor pueda cubrirse. El poseedor no tiene que comprar o vender directamente, él sólo le comunica al emisor su estrategia y este se encargará de hacer la negociación.
Para el caso de la Opción Pasaporte "clásica" el rango será el equivalente de estar largo a pasar a corto ó de estar corto y pasar a largo sobre el activo subyacente, esto se puede interpretar que la estrategia esté entre el intervalo comprendido entre -1 a 1 por un argumento sencillo de escala.

Otra variante es cuando la estrategia del inversionista está dentro de otros rangos, como por ejemplo de pasar de largo a la posición cero (irse de vacaciones.[1]) Las opciones vacacionales son una generalización de las opciones estilo americano de compra y de venta, la diferencia es que la americana sólo se puede ejercer una vez; en las vacacionales se puede "ejercer más de una vez". El poseedor puede elegir entre tomar una posición larga o una posición cero (Vacacionales de compra) o entre una posición corta y una posición cero (Vacacionales de venta). En contraste con las opciones pasaporte simétricas, la probabilidad de cambiar la estrategia óptima es mínima. En las vacacionales el tomar la posición cero no implica el término del contrato, esta da la oportunidad de retroceder una posición (larga o corta) por ejemplo, si un inversionista decide comprar un activo durante la vida de la opción (en el caso de la americana de compra sería ejercer la opción) y sucede que con el transcurso del tiempo se da cuenta que erró el momento de ejercer entonces en la opción vacacional da el derecho de pasar a la posición cero (deshacer la compra) para que así pueda ejercer en el momento correcto, así sucesivamente hasta la expiración de la opción vacacional. Este tipo de opciones tienen muchas ventajas en cuanto a los costos de transacción, además las primas que se pagan son muy parecidas a las de las opciones americanas, pero las *Vacacionales* dan un beneficio de cobertura mucho mayor.

Otra variante es el momento de ejercicio de la opción pasaporte. En la opción pasaporte europea sólo se pueden tener las ganancias de la estrategia de inversión a la fecha de vencimiento. *La opción pasaporte americana*

[1]El término en Inglés *Vacation* es con que se definió a este tipo de opción introducidas por Steven E. Shreve, Jan Veĉeŝ en el año 2000. Ver [23]

puede ser ejercida en cualquier momento antes del vencimiento de la opción pasaporte. Esto le da gran flexibilidad al poseedor, pues el podría cerrar la cuenta de inversión previamente y retener las ganancias antes de la fecha de vencimiento.

Otro tipo de opción pasaporte es la *Opción Pasaporte Chooser*. Esta consiste esencialmente en que en algún momento especificado en el contrato, el poseedor tendrá la posibilidad de decidir entre dos pagos finales a la fecha de vencimiento. La primera función de pagos es el máximo entre cero y el balance de la cuenta en la fecha de vencimiento, la segunda es el máximo entre cero y el balance de inversión con signo contrario. Por ejemplo, si el inversionista cuenta con este tipo de cobertura y su estrategia le generó pérdidas; él puede convertir sus mismas pérdidas en ganancias.

La opción pasaporte de barrera. Este tipo de opción esta inspirada por las opciones barrera de segunda generación: Si la cuenta de inversión alcanza un cierto numero positivo(digamos B), el cual es previamente especificado en el contrato, la Opción Pasaporte de Barrera expira automáticamente y el poseedor se lleva a la bolsa B.

La opción pasaporte de reinicio. La opción permite al poseedor borrar digamos N periodos, todo lo que él habría realizado hasta ese momento, en otras palabras, el puede regresar N periodos hasta su cuenta de inversión inicial, la cual es cero. Si durante la vida de la opción, la cuenta de inversión es negativa y esta suficientemente alejada del cero, el poseedor podriá pensar en que podría tener una pérdida de continuar invirtiendo: ¿Pero qué sucede si piensa que pudiera obtener una ganancia en una iversión futura?. La opción pasaporte de reinicio es un remedio a este dilema: cuando él quiera podrá poner su cuenta de inversión en cero. y de esta forma esperar tener una cuenta de inversión positiva al vencimiento.

La *opción pasaporte de doble estaca.* Esta opción pasaporte permite al poseedor cambiar su posición límite de 1 a 2 durante un periodo especificado. Imagine que en algún momento durante la vida de la opción el poseedor, por alguna razón, esta bastante seguro en la dirección del activo subyacente. entonces él puede decidir en tomar el doble periodo estaca y de esta forma el podrá tomar mayores ganancias si él esta en lo correcto (pero más pérdidas si está equivocado).

La opción pasaporte posición mágica. Esta opción permite al poseedor poder desaparecer parte de la historia de su cuenta de inversión; más explíctamente, él puede decidir en cualquier momento (digamos t_1) a tomar el punto mágico, después de t_1 se puede hacer valer la posición mágica digamos en t_2 . El poseedor decidirá con que inverión se quedará, si con la cuenta de inversión en el momento t_1 o con la cuenta en t_2. Así que en el momento t_2 tenemos que el valor de la cuenta de inversión será: el máximo entre el valor de la cuenta de inversión al momento t_1 o el valor de la cuenta en t_2. Esto es con la finalidad de que si él inversionista piensa que puede obtener más ganancias en un futuro pero ya no quiere arriesgar lo que ha ganado en t_1. Así que si esta en lo correcto y obtiene mas ganancias que en t_1 él puede decidir que se quede con las ganancias en t_2 pero si por el contrario, después de t_1 la estrategia en t_2 resultó un nivel menor que en t_1, tiene el derecho de quedarse con lo que hasta en t_1 había ganado.

Las opciones pasaporte estilo *chooser, barrera, reinicio, doble estaca y posición mágica* son opciones *pasaporte exóticas* dadas a conocer por Antony Penaud, Paul Wilmott y Hyungsok Ahn[2].

Pequeñas variantes de la opción pasaporte

Aquí sólo se dan algunos ejemplos de las variantes que pueden tener, si bien sus diferencias son menores, su valuación puede ser completamente diferente. La solución analítica y explícita sólo puede ser dada para casos muy específicos. (M. Yor y F. Delbaen en [3] tratan el caso general).
Algunos ejemplos son:

[2]Para conocer los detalles y la valuación ver ([1])

1. El inversionista recibe dividendos del activo e intereses del banco al contado.

2. El inversionista no acumula los intereses pero si los dividendos.

3. El inversionista decide retener los intereses pero no los dividendos.

4. El inversionista no acumula ni dividendos ni intereses (Este ejemplo sólo se trata en teoría).

5. Los dividendos son reinvertidos en el activo subyacente.

6. El inversionista sólo puede rebalancear el portafolio un numero limitado de veces.

7. El inversionista sólo puede rebalancear su portafolio diaria/semanal/mensualmente.

8. La tasa de interés puede ser diferente cuando el portafolio es positivo o cuando es negativo.

9. La inversión inicial es diferente de cero.

Como se puede observar las opciones pasaporte dieron lugar a una gran variedad de opciones sobre cuentas de inversión. Este tipo de opciones no han tenido gran popularidad en los mercados internacionales por que son relativamente caras, aunque se han derivado opciones más baratas como las vacacionales, no han tenido a mi parecer, la suficiente promoción para que los inversionistas con la capacidad de cotizar estos instrumentos estén interesados en invertir. Aunque han pasado 8 años desde la primera publicación, no es tiempo suficiente para la maduración de estos instrumentos, si tomamos en cuenta que pasaron 30 años de la publicación de Black y Scholes para que en México se emitieran por primera vez opciones; no me sorprendería que para el año 2030 estén en la pantalla de cotizaciones del MEXDER opciones pasaporte sobre acciones de Televisa o Telmex.

Capítulo 3

El Modelo del Mercado Financiero

En este capítulo se definen los conceptos necesarios para construir una estructura matemática que modele nuestro mercado financiero, el cual se supondrá que no admite oportunidades de arbitraje; es decir que no se podrán obtener ganancias sin riesgo. Esto asegura la existencia de una medida de probabilidad equivalente en la cual el proceso de precios descontados tiene la propiedad martingala.

En 1900 el matemático Louis Bachelier propuso en su disertación "Théorie de la Spéculation" un modelo para la dinámica de los precios de las acciones como un movimiento browniano y proveyó por primera vez la definición exacta de una opción como un instrumento financiero definido totalmente por su valor final. En su publicación en 1965 "Theory of Rational Warrant Pricing" el economista y ganador del premio Nóbel Paul Samuelson, da reconocimiento a la contribución fundamental de Bachelier, transformando el movimiento browniano en un movimiento browniano geométrico dado que los precios de las acciones no pueden tomar valores negativos. Comenzaremos recordando definiciones que necesitaremos en este capítulo y capítulos subsecuentes.
Un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ esta dado por un conjunto no trivial Ω y una σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre Ω, a cada conjunto de $\mathcal{F}$ se le llama conjunto medible. Una función $Q : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty)$ sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ es llamada

una medida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ si Q es numerablemente aditiva, i.e. que para toda sucesión de conjunto medibles disjuntos $(A_n)_{n\in\aleph}$ tenemos $Q(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n)$. La terna $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ es llamada un espacio de medida. Q es llamada una medida de probabilidad si $Q(\Omega) = 1$ en este caso el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ es llamado espacio de probabilidad.

Sean Q, Q^* dos medidas sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Una medida Q se dice que es equivalente a Q^* si $Q(A) = 0$ si y sólo si $Q^*(A) = 0$ $A \in \mathcal{F}$, es decir, que Q y Q^* tienen los mismos conjuntos nulos ó tienen los mismos conjuntos de probabilidad uno.

Sea $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ un proceso con valores reales definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, adaptado a una filtración dada $\{\mathcal{F}_t\}$ y tal que $E \mid X_t \mid < \infty$ se cumple que para cada $t \geq 0$ (el proceso es integrable). Se dice que el proceso X es una *submartingala* (respectivamente, *supermartingala*) si para $0 \leq s < t < \infty$, se tiene, Q casi seguramente:

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s, \qquad (\textit{respectivamente}, \quad E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s).$$

Cuando el proceso X es simultaneamente *submartingala* y *supermartingala,* éste recibe el nombre de *martingala.* Entonces en el caso de una martingala para cada $0 \leq s < t < \infty$,

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s. \qquad Q - c.s.$$

Tenemos un mercado gobernado por un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, Q)$ en donde se define un movimiento browniano $W = (W_t, t \geq 0)$ en algún intervalo finito $t \in [0, T]$ como un proceso estocástico que cumpla con:

1. $W_0 = 0$.
2. $W(t) - W(s)$ se distribuye $N(0, t-s)$ con $0 < t < s < T$ (Incrementos Normales).
3. para toda sucesión finita de tiempos $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, se cumple que los incrementos $W(t_1) - W(t_0)$, $W(t_2) - W(t_1), \cdots$, $W(t_k) - W(t_{k-1})$ son independientes, (incrementos independientes).

Q es la medida de probabilidad física, supondremos que el espacio de probabilidad es filtrado, la filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ representa el flujo de información inducido por W_t, resultado de todos los agentes de la economía. Existen dos tipos de activos: Un bono libre de riesgo y activos con riesgo tales como acciones. El precio del bono esta dado por

$$dB_t = r_t B_t dt, \ B_0 = b. \tag{3.1}$$

Donde b es una constante positiva, r_t es la tasa de interés compuesta continuamente, entonces

$$B_t = b \exp\Big[\int_0^t r_s ds\Big], \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Para simplificar los cálculos supondremos que $b = 1$.

La dinámica de los precios de los activos con riesgo están dadas por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t, \tag{3.3}$$

donde μ y σ son constantes tales que $-\infty < \mu < \infty$ y $0 < \sigma < \infty$. W es el movimiento browniano.

Para el interés de esta tesis se supondrá de aquí en adelante que μ y σ^2 son funciones constantes.

Supongamos que existe un proceso $\{X_t\}$ tal que para toda $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^T |X_t| dt < \infty, \tag{3.4}$$

$$\sigma X_t = \mu - r S_t, \qquad Q - c.s. \tag{3.5}$$

$$\mathrm{E}_Q\big[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T X_t^2 dt)\big] < \infty, \qquad \text{condición de Novikov.} \tag{3.6}$$

Bajo las condiciones (3.4), (3.5) el proceso de precios (S_t, B_t) no admite oportunidades de arbitraje. La ausencia de arbitraje implica la existencia de una medida de probabilidad Q^* sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalente a Q tal que el proceso de precios descontados es una $\mathcal{F}_t$-martingala bajo Q^* (ver Harrison y Kreps [9]). El mercado contiene el mismo número de activos que de movimientos brownianos independientes (la matriz de correlación de los procesos es la matriz identidad) , esto implica, que el mercado es completo y la medida de probabilidad neutral al riesgo es única, es decir, la medida martingala Q^* es única si y sólo si el mercado es completo bajo la condición (3.6) (ver Harrison y Pliska 1981 [10]).

Capítulo 4

Black-Scholes y Teoría de Martingalas

En este capítulo estudiaremos un método probabilístico con el cual valuaremos opciones europeas desde una perspectiva diferente. El método clásico consiste en resolver una ecuación diferencial parcial conocida como ecuación de Black y Scholes. *Una manera distinta de resolver el problema de valuación de opciones es el método de* martingala equivalente*; esta herramienta da una solución exactamente igual a la dada por Black y Scholes, pero nos evitamos el problema de resolver la ecuación diferencial parcial. La estrategia será buscar una medida "sintética" bajo la cual el proceso de precios descontados sea una martingala. La referencia para este capítulo es el texto de* Salih N. Neftci *[20].*

4.1. El teorema de Girsanov

El concepto de cambio de medida ó encontrar una medida equivalente es muy práctico y bajo ciertas condiciones se puede obtener. El otro concepto importante es que si existe una medida "sintética" no necesariamente tendría que ser única, pero también bajo ciertas condiciones se puede demostrar la unicidad. El teorema de Girsanov es una herramienta matemática muy importante en la teoría financiera moderna. A grandes rasgos es el puente entre dos mundos: el mundo de precios reales y el mundo donde los precios descontados son martingala.

El cambiar de medida de probabilidad para hacer los cálculos más sencillos es muy común, como ejemplo considere que la estatura de los hombres mexicanos en promedio es de 1.70 m. con una varianza de 0.20 m. y quisiéramos calcular la probabilidad de que la altura de mi hijo no sea mayor a 1.90 m. o P[X $\leq$ 0.90], para resolver este problema tendríamos qu buscar una tabla Normal con media 1.70 m. y varianza 0.20 m. o resolver el problema por métodos numéricos lo cual es muy tedioso. Lo que comúnmente se hace es estandarizar el problema con un cambio de variable $Z = (X - 1{,}70)/0{,}4472$ y así encontrar la probabilidad en una tabla normal con media cero y varianza 1. Lo que hay en el fondo es que estamos cambiando de medida de probabilidad de una N(1.70, 0.20) a N(0,1).

Ahora considere una t fija y una variable aleatoria distribuida normal z_t.

$$z_t \sim N(0,1), \tag{4.1}$$

sea $f(z_t)$ la función de densidad de z_t y sea Q la medida de probabilidad implícita dada por

$$dQ(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t)^2} dz_t. \tag{4.2}$$

Ahora definamos la función

$$\xi(z_t) = e^{z_t \mu - \frac{1}{2}\mu^2}, \tag{4.3}$$

cuando multiplicamos $\xi(z_t)$ por $dQ(z_t)$ obtenemos una nueva medida de probabilidad. Esta puede ser vista de la forma siguiente:

$$[dQ(z_t)]\,[\xi(z_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t)^2 + \mu z_t - \frac{1}{2}\mu^2} dz_t. \tag{4.4}$$

Agrupando términos en el exponente, obtenemos la expresión

$$dQ^*(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[z_t - \mu]^2} dz_t. \tag{4.5}$$

Claramente Q^* es una nueva medida de probabilidad, definida por

$$dQ^*(z_t) = dQ(z_t)\xi(z_t). \tag{4.6}$$

A simple vista se puede ver que la variable aleatoria bajo la medida Q^* es una normal con media μ y varianza 1.
Los ejemplos anteriores sólo son ilustrativos de como es que se puede definir una nueva medida de probabilidad. El concepto de cambio de medida tiene bases matemáticas sólidas, basadas en la derivada de *Radon-Nikodym.*
La expresión (4.6) puede verse también como:

$$\frac{dQ^*(z_t)}{dQ(z_t)} = \xi(z_t). \tag{4.7}$$

Esta ecuación puede interpretarse como la derivada de la medida Q^* con respecto a la medida Q y esta dada por $\xi(z_t)$. A esta última expresión se le conoce como la derivada de Radon-Nikodym. La condición de que exista la derivada es que dado un intervalo dz_t, las probabilidades Q^* y Q satisfacen $Q^*(z_t) > 0$ si y sólo si $Q(z_t) > 0$. Esta representación de la derivada de Radon-Nikodym es un abuso de notación, la expresión matemática es de forma integral

$$Q^*(A) = \int_A \xi \; dQ, \quad \forall A \in \mathcal{F}. \tag{4.8}$$

El teorema de Girsanov provee las condiciones necesarias bajo las cuales la derivada de Radon-Nikodym $\xi(z_t)$ existe para casos donde z_t es un proceso estocástico continuo. Tenemos una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ además un intervalo de tiempo [0,T] $T < \infty$. Definamos un proceso aleatorio ξ_t:

$$\xi_t = e^{\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t X_u^2 du}, \qquad t \in [0, T]. \tag{4.9}$$

donde X_t es un proceso $\mathcal{F}_t$-medible (Esto es, dada la información conjunta $\mathcal{F}_t$, el valor de X_t es conocido exactamente). W_t es un movimiento browniano con medida de probabilidad Q. Una condición necesaria que supondremos es que X_t no debería variar mucho, es decir, X_t no debe crecer mucho ó que el proceso cumpla com la condición de Novikov.

$$E\left[e^{\int_0^t X_u^2 du}\right] < \infty, \quad t \in [0, T]. \tag{4.10}$$

Si la ecuación anterior se cumple entonces ξ_t será una martingala cuadrado-integrable.

Enunciamos el siguiente teorema y omitimos su demostración por su complejidad.

Teorema de Girsanov 4.1.1 *Si el proceso ξ_t definido por (4.9) es una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$ y la probabilidad Q entonces W^* definido por*

$$W_t^* = W_t - \int_0^t X_u du, \quad t \in [0, T], \tag{4.11}$$

es un movimiento browniano con respecto a $\mathcal{F}_t$ y a la probabilidad Q^* dada por

$$Q^*(A) = E^Q \left[\mathbf{I}_A \xi \right] = \int_A \xi \mathrm{d}Q, \tag{4.12}$$

con A un evento determinado por $\mathcal{F}_t$ y $\mathbf{I}_A$ representa la función indicadora del evento.

En téminos heurísticos, éste teorema nos dice que si tenemos un movimiento browniano W_t dado, entonces multiplicando la distribución de probabilidad de este proceso por ξ_t, podemos obtener un nuevo movimiento browniano W_t^* con distribución de probabilidad Q^*. Los procesos están relacionados por

$$\mathrm{d}W_t^* = \mathrm{d}W_t - X_t \mathrm{d}t. \tag{4.13}$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en (Liptser y Shiryayev 1997 [19]). Cabe hacer mención que la interpretación en el mundo financiero de la función X_t usado en el teorema de Girsanov es la tendencia de los precios μ, así que el proceso W^* esta íntimamente relacionado según (4.13) con la media original y esto quiere decir que la tendencia será cambiada de tal modo que el proceso de precios sea $(\mathcal{F}_t, Q^*)$-martingala.

4.2. Solución de la ecuación de Black-Scholes

Las dos estrategias para valuar opciones europeas son:

1. La aproximación original de Black-Scholes. Primero es formado un portafolio libre de riesgo, luego se obtiene una ecuación diferencial parcial que se resuelve directamente o numéricamente.

2. El método de martingala, primero encontramos una probabilidad “Sintética” Q^* bajo la cual S_t es una martingala. Entonces se calcula

$$C_t = \mathbb{E}^{Q^*}\Big\{e^{-r(T-t)}\,\text{máx}\left\{S_T - K, 0\right\}\big|\mathcal{F}_t\Big\}. \tag{4.14}$$

La ecuación (3.3) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} = \mu + \sigma dW \quad &\Leftrightarrow \quad d(\ln(S_t)) = \mu + \sigma dW \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^T d(\ln(S_t)) = \int_0^T \mu + \sigma dW_u \\
&\Leftrightarrow \quad S_T = S_0 e^{Y_T},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

donde $Y_t = \int_0^t \mu + \sigma dW_u$.
Bajo la medida de probabilidad implícita Q

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \qquad t \in [0, T], \tag{4.16}$$

la ecuación diferencial estocástica S_t es una función de Y_t así que aplicando el lema de Itô obtenemos:

$$dS_t = S_0 e^{Y_t}\left[\mu dt + \sigma dW_t\right] + \left[S_0 e^{Y_t}\right]\frac{1}{2}\sigma^2 dt. \tag{4.17}$$

Después de agrupar términos y sustituyendo

$$dS_t = \left[\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t\right] dt + \sigma S_t dW_t. \tag{4.18}$$

La ecuación diferencial estocástica bajo la medida martingala Q^* es calculada de manera similar, pero el coeficiente de difusión será diferente y cambiaremos μ por ρ y W_t por W_t^* y obteniendo:

$$dS_t = \left[\rho S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t\right] dt + \sigma S_t dW_t^*. \tag{4.19}$$

Al cambiar W_t por W_t^* estamos cambiando también la medida de probabilidad Q por Q^*. De la ecuación anterior definamos a ρ por el valor:

$$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \tag{4.20}$$

sustituyendo tenemos:

$$dS_t = \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t\right] dt + \sigma S_t dW_t^* = rS_t dt + \sigma S_\tau dW_t^*, \quad (4.21)$$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*. \quad (4.22)$$

De aquí se deduce que la probabilidad bajo la cual S_t es una martingala, resulta de cambiar el parámetro de difusión de la **EDE** original por la tasa libre de riesgo r. Esto es interesante pues μ contiene una prima de riesgo que en general no es conocida antes de evaluar S_t, pero r es la tasa libre de riesgo que se supone conocida. La condición necesaria para que el proceso de precios descontados sea una martingala, es la ausencia de arbitraje.

Las hipótesis del modelo son:

1. La tasa libre de riesgo es constante durante toda la vida de la opción.
2. Los subyacentes no pagan dividendos antes del vencimiento de la opción.
3. La opción de compra es de tipo europeo y no podría ser ejercida antes de la fecha de vencimiento de la opción.
4. Los precios S_t del activo subyacente siguen un movimiento browniano geométrico con coeficientes de tendencia y difusión proporcional a S_t.
5. No existen costos de transacción y el activo es infinitamente divisible.

La relación básica es la propiedad martingala que $e^{-rt}C_t$ debería satisfacer bajo la probabilidad Q^*:

$$C_0 = \mathbb{E}^{Q^*}\left[e^{-r(T)}C_T \middle| \mathcal{F}_0\right], \quad (4.23)$$

donde T es la fecha de vencimiento de la opción de compra. Conocemos que a la fecha de vencimiento la función de pagos de la opción será $S_T - K$ si $S_T > K$ o cero si $S_T \leq K$. Esto nos permite definir la condición final

$$C_T = \text{máx}\left[S_T - k, 0\right]. \quad (4.24)$$

Y la propiedad martingala para $e^{-rT}C_T$ implica

$$C_0 = \mathbb{E}^{Q^*}\left[e^{-r(T)}\max\left\{S_T - K, 0\right\}\big|\mathcal{F}_0\right]. \tag{4.25}$$

Procedemos a derivar la fórmula de Black-Scholes evaluando directamente la ecuación (4.25) usando la medida de probabilidad Q^*.
La probabilidad Q^* es la medida martingala equivalente

$$dQ^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T)}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T)}(Y_T-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}, \tag{4.26}$$

con

$$S_T = S_0e^{Y_T}. \tag{4.27}$$

Usando esta densidad, podemos evaluar directamente la expresión (4.25) la cual puede ser escrita como

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\max\left[S_T - K, 0\right]dQ^*, \tag{4.28}$$

substituyendo en la ecuación (4.28) la medida dada por (4.26)

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\max\left[S_0e^{Y_T} - K, 0\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(Y_T-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}dY_T. \tag{4.29}$$

Al eliminar la función máximo, cambiamos los límites de integración. Notamos que después de tomar logaritmos, la condición

$$S_0e^{Y_T} \geq K, \tag{4.30}$$

es equivalente a

$$Y_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), \tag{4.31}$$

entonces

$$C_0 = \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-rt}(S_0e^{Y_T} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(Y_T-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}dY_T. \tag{4.32}$$

La integral anterior puede ser tratada en dos integrales separadas, así

$$C_0 = \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{\infty} S_0 e^{-rT} e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T}$$

$$-Ke^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T. \tag{4.33}$$

Definamos una nueva variable Z

$$Z = \frac{Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{4.34}$$

esto requiere un ajuste a los limites de integración, y en la segunda parte de la integral de la ecuación (4.33) tenemos

$$Ke^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_\tau - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T$$

$$= Ke^{-rT} \int_{C}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \mathrm{dZ}, \tag{4.35}$$

donde

$$C = \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{S_0}}\right) - (\mathrm{r} - \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}.$$

Nótese que el límite inferior de la integral, está estrechamente relacionado con el parámetro d_2 en la fórmula de Black-Scholes. Sabiendo que

$$-\ln(K/S_0) = \ln(S_0/K), \tag{4.36}$$

obtenemos el parámetro d_2 de la fórmula de Black-Scholes

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \Leftrightarrow -d_2 = \frac{-\left(\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{4.37}$$

Recordamos que la distribución normal tiene varias propiedades de simetría. Una de estas es que con una distribución normal estándar $f(x)$, podemos escribir

$$\int_{L}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-L} f(x)dx. \tag{4.38}$$

Usando la propiedad anterior, escribimos

$$Ke^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \mathrm{dZ} = Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \mathrm{dZ}$$

$$= Ke^{-rT} N(d_2). \tag{4.39}$$

Ahora derivaremos la segunda parte de la fórmula de Black-Scholes. Del primer sumando de la ecuación (4.33) del lado derecho de la igualdad

$$S_0 \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-rT} e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T$$
$$= e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau} e^{-r\tau} S_0 \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma Z\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \mathrm{dZ}. \tag{4.40}$$

Usando la propiedad de la densidad normal

$$e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} e^{-rT} S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z^2+2\sigma Z\sqrt{T})} \mathrm{dZ}, \tag{4.41}$$

completando el cuadrado en el exponente, tenemos

$$e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} e^{-rT} S_t e^{\frac{T\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z+\sigma\sqrt{T})} \mathrm{dZ}. \tag{4.42}$$

Finalmente tomamos la substitución $H = Z + \sigma\sqrt{T}$

$$= S_0 \int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}H^2} dH = S_0 N(d_1), \tag{4.43}$$

donde

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}. \tag{4.44}$$

Por lo tanto el valor de la opción de compra es

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \tag{4.45}$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{4.46}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{4.47}$$

donde $N(\cdot)$ es la distribución normal estándar.

Finalmente obtuvimos el precio de la opción sin resolver la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Esto es muy importante, por que la teoría de martingala equivalente es la base del estudio de las finanzas modernas, la mayor parte de los investigadores en el mundo académico hacen sus publicaciones basándose en la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo, por lo que considero indispensable que los estudiantes de licenciatura tengan los conocimientos suficientes sobre esta importante teoría.

Capítulo 5

Conceptos Previos a la Valuación

Existen dos maneras de resolver el problema de valuación de las opciones pasaporte. La primera es interpretarlo como un problema de optimización, el cual puede ser resuelto con la teoría de control óptimo; la teoría de control óptimo tiene varias aplicaciones a la Robótica, Química, Física, Finanzas e Ingeniería. Existe una amplia gama de referencias sobre la teoría de control, tales como Fleming y Rishel [7] o Fleming y Soner [6], entre otros. Para esta sección se usaron las siguientes referencias: ***Control Óptimo Determisinta vía Programación Dinámica****, de G. Ferreyra y J. Pascal;* ***Stochastic Optimal Control in Finance****, de H Mete Soner [26]. En la primera parte de este capítulo se explica a grandes rasgos el concepto de control óptimo y damos la idea general de la ecuación de programación dinámica y soluciones de viscosidad.*

El segundo enfoque que estudiaremos para resolver el problema de valuación de las opciones pasaporte hace uso de la teoría de tiempos locales de un proceso estocástico. En la segunda parte de este capítulo se explica el concepto de tiempo local del movimiento browniano. En el capítulo 6 se empleará la fórmula de Tanaka para el movimiento browniano, la cual introducimos en el capitulo presente. Para un análisis más profundo sobre el tiempo local browniano se puede consultar I. Karatzas y S. Shrev [18], M. Yor y D. Revuz [22].

5.1. Control óptimo estocástico

La idea de control puede ser expresada como el proceso mediante el cual se ejerce una influencia sobre el comportamiento de un sistema dinámico (que varia con el tiempo) para alcanzar un propósito previamente fijado. En términos generales un problema de control óptimo contiene los siguientes elementos:

- *Proceso de estados* $x(\cdot)$. Este proceso debe disponer de la información mínima necesaria para describir el problema. Normalmente $x(t) \in \Re^d$ es influenciada por el control y dado el proceso de control éste tiene una estructura Markoviana. Usualmente se puede describir la dinámica del proceso como una ecuación diferencial ordinaria o estocástica.

- *Proceso de Control* $u(t)$. Necesitamos definir el conjunto de controles o decisiones, U en el cual $u(t)$ toma valores en cualquier t. En el escenario estocástico necesitaremos que $u()$ sea adaptada a una cierta filtración que modele el flujo de información.

- *Funcional Objetivo.* $J(x(\cdot), u(\cdot))$. Esta es la funcional que deberá ser maximizada (o minimizada). En el caso del problema de valuación de las opciones pasaporte, el funcional será la esperanza condicional.

La teoría de control, hace énfasis en el análisis sobre las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y cálculo de los controles o decisiones, así como también de la unicidad. Ahora bien, si además se desea lograr tal propósito en un mínimo, o un máximo, este es un problema de control óptimo. En tal caso, se quiere minimizar una funcional que depende del estado del sistema y del control. Por ejemplo, si se desea controlar la trayectoria de un avion, para lograr una condicion final, el estado del sistema podría representar la posición y velocidad del avión y el control representaría la fuerza o aceleración necesaria para lograr tal objetivo, este ejemplo representa un problema para la Teoría de Control. Ahora bién, si además se desea lograr tal proposito en un mínimo de tiempo o con un uso mínimo de combustible, entonces este es un problema de control óptimo. El valor máximo juega un rol importante en nuestro análisis de las opciones pasaporte:

$$V_t = \sup_{u\in[-1,1]} E^{Q^*}\left[e^{-r(T-t)}X_u^+|\mathcal{F}_t\right],$$

pues definiremos a X_u^+ como el proceso de ganancias que depende directamente del control u que es la decisión del inversionista de comprar o vender u acciones, y de acuerdo con la teoría de valuación de opciones, el precio de la opción será el valor esperado de los flujos futuros traídos a valor presente bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q^*.

5.2. Principio de programación dinámica y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

En 1957, Richard Bellman presentó el método de Programación Dinańica para resolver problemas de control óptimo. Este método consiste en reemplazar el problema de optimización, por una ecuación diferencial parcial no lineal, llamada *Ecuación de Programación Dinámica* (EPD) o también *ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)*

$$0 = V_t(t,x) + \mathbf{H}(x, V_x(t,x)), \quad (t,x) \in [t_0, T] \times \Re^n, \tag{5.1}$$

donde

$$\mathbf{H}(x,p) = \max_{u\in U}\left\{f(x,u)p + L(x,u)\right\},$$

$$\frac{d}{dt}x = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

a la función f se le llama la dinámica del sistma de control y a la función L se le conoce como el Lagrangiano y se define como:
dada una función $L : \Re^n \times U \longrightarrow \Re$ continua, se define la funcional de la siguiente manera:

$$u(\cdot) \in U \to J^{u(\cdot)}(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{T} L(x(s), u(s))ds.$$

donde $x(\cdot)$ es la solución de $\frac{dx}{dt} = f$ asociada al control $u(\cdot)$. Para que V satisfaga (5.1) en el sentido clásico de ecuaciones en derivadas parciales se necesita que esta sea continuamente diferenciable, pero para muchos problemas incluyendo el de valuación de opciones pasaporte la funcioń de valor no es diferenciable. Crandall y Lions presentaron una noción más débil de solución de la ecuación de programación (5.1). Esta noción se conoce como la *soluciónes de viscosidad* de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Para entender la noción de solución de viscosidad considere la forma general de una **EDP** parabólica de segundo orden

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F(x, V, V_x, V_{xx}) = 0. \tag{5.2}$$

Supondremos que F satisface la condición de elipticidad

$$F(x, V, V_x, V_{xx} + \epsilon) \leq F(x, V, V_x, V_{xx}) \ si \ \epsilon \geq 0. \tag{5.3}$$

La propiedad de elipticidad es crucial para la definición de soluciones de viscosidad.

Para motivar la definición, considere la función $v(t, x) \in \mathbf{C}^2$ y $V(t, x) \in \mathrm{C}^2$. Sea (t_0, x_0) un máximo local de $V - v$. Sabemos que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$V_x = v_x \quad y \quad V_{xx} \geq v_{xx},$$

cerca a (t_0, x_0).

Usando estas relaciones y la propiedad elíptica, tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) + F\left(x_0, V(t_0, x_0), v_x(t_0, x_0), v_{xx}(t_0, x_0)\right) \leq 0, \tag{5.4}$$

si (5.4) se cumple $\forall v \in \mathrm{C}^2$ para el cual (t_0, x_0) es un máximo local de $V - v$ entonces a V se dirá que es una subsolucion de viscosidad de (5.2).

En cierto sentido, la función v, podría ser considerada como una cota superior de las posibles soluciones.

Similarmente, V es una supersolución de viscosidad si $\forall v \in \mathrm{C}^2$ y (t_0, x_0) es un mínimo local de $V - v$, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) + F\left(x_0, V(t_0, x_0), v_x(t_0, x_0), v_{xx}(t_0, x_0)\right) \geq 0. \tag{5.5}$$

Una solución que es una subsolución de viscosidad y una supersolución de viscosidad se le dirá que es una *solución de viscosidad* de (5.2).

Las definiciones (5.4) y (5.5) pueden ser usadas cuando V no es suave, en el sentido de que la primera y segunda derivada de V no son requeridas. Por esto mismo soluciones no suaves a (5.2) pueden ser definidas. La existencia y unicidad de soluciones de viscosidad son establecidas en [6].

5.3. Tiempo local para el movimiento browniano

El concepto de tiempo local del movimiento browniano es una herramienta estocástica muy útil, pues entre otras cosas se puede generalizar el lema de Itô. Recordemos que para aplicar el lema de Itô a una función ésta debe de ser diferenciable de clase C^2. Tendremos problemas, como por ejemplo, el tratar de aplicar el lema de Itô en la función de pagos de una opción europea $\max(S_T - X, 0)$ justo donde la función no es diferenciable y en principio no podría aplicarse el lema de Itô en este punto, pero con la generalización del lema de Itô para funciones continuas y convexas si se puede, dado que esto no es tema de esta tesis no aundamos en el tema, para obtener detalles se puede consultar ([18] sección 3.6 en el capítulo III).
Comenzaremos dando la idea general de tiempo local para el movimiento browniano, para luego definir la fórmula de Tanaka.
Definamos el tiempo de ocupación como la medida en el cual un proceso cruza una cierta región; lo podemos pensar de la siguiente manera, grafiquemos una banda paralela al eje del tiempo, ahora nos fijaremos en la medida de los fragmentos del movimento browniano que quedan dentro de la banda.

Definición 5.3.1 *Para cada conjunto fijo de Borel B se define el tiempo de ocupación de B por el movimiento browniano como:*

$$\Gamma_t(B) = \int_0^t \mathrm{I}_B(W_s)ds = \lambda\{0 \leq s \leq t; W_s \in B\}; \ 0 \leq t < \infty, \qquad (5.6)$$

donde λ denota la medida de Lebesgue.

Ahora, si contraemos el radio de la banda a cero, obtenemos sólo un punto y el tiempo de ocupación del movimiento browniano en el que cruza

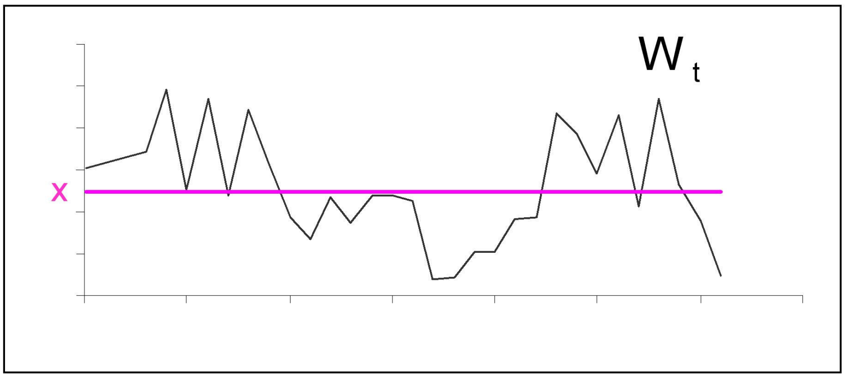

Figura 5.1: Una sola trayectoria del movimiento browniano intersectando en un punto

un punto, es de medida cero según la medida de Lebesgue, es decir:

$$\lambda\left(\ell_\omega(x)\right) = 0, \qquad Q - c.s.$$

en donde

$$\ell_\omega(x) = \{0 \leq t < \infty; W_t(\omega) = x\},$$

y W_t es el movimiento browniano, λ es la medida de Lebesgue y $\omega \in \Omega$ (Fig. 5.1).

Ahora, si en lugar de fijar un sólo punto observamos la cantidad de tiempo de ocupación dentro de una vecindad de radio ϵ alrededor de x y nos fijamos en el límite cuando ϵ tiende a cero; resulta que éste límite si existe y además es distinto de cero, P. Lévy fué quien demostró que el límite anterior existe y definió el tiempo local de la siguiente manera:

Definición 5.3.1

$$L_t(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{4\epsilon} \lambda\left\{0 \leq s \leq t; |W_s - x| \leq \epsilon\right\}; \; t \in [0, \infty] \quad x \in \Re. \tag{5.7}$$

A éste se le conoce como el tiempo local del movimiento browniano al rededor de x (Fig:5.2). También se puede generalizar la regla de cambio de variable según Itô para funciones convexas pero no necesariamente diferenciables.

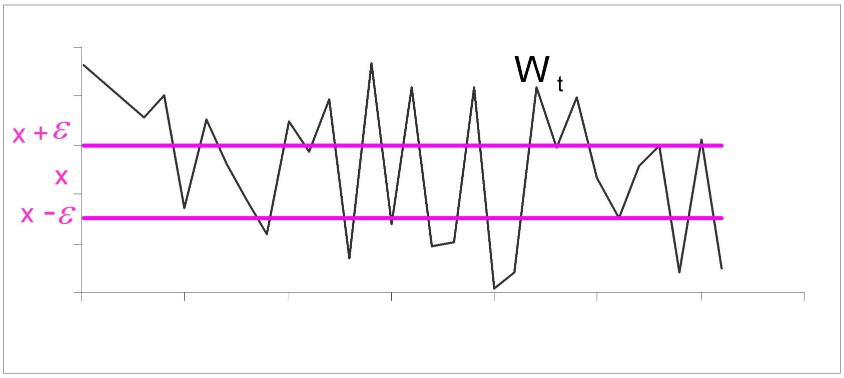

Figura 5.2: Tiempo Local

Como parte de la definición de tiempo local tomamos la siguiente relación entre el tiempo local y el tiempo de ocupación:

$$\Gamma_t(B,\omega) = \int_B 2L_t(x,\omega)\mathrm{dx};\ 0 \le t < \infty,\ B \in \mathfrak{B}(\Re). \tag{5.8}$$

5.3.1. Fórmula de Tanaka

La fórmula de Tanaka será utilizada en el capítulo siguiente, así que aquí sólo damos la fórmula, para ver su demostración (ver Revuz-Yor [22]).

Fórmula de Tanaka 5.3.1 *Para todo numero real* a*, existe un proceso continuo creciente L^a llamado el tiempo local de X en* a *tal que*

$$\begin{aligned}
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a. \\
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathrm{I}_{(X_s > a)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a. \\
(X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathrm{I}_{(X_s \le a)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a.
\end{aligned}$$

donde $(X-a)^+$ representa la función máximo de $X-a$ y $(X-a)^-$ representa la función mínimo de $X-a$.

En particular, $|X_t - a|, (X_t - a)^-, (X_t - a)^+$ son semimartingalas. Para nuestras necesidades ocuparemos la forma $(X_t - a)^+$ como representación del tiempo local del movimiento browniano.

5.3.2. Lema de Skorokhod

Lema de Skorokhod 5.3.1 *Sea y una función de valores reales y continua sobre $[0,\infty)$ tal que $y(0) = 0$ y $z \geq 0$ constante. Entonces existe una única pareja de funciones (x,l) sobre $[0,\infty)$ tal que*

1. $x = z + y + l$.
2. x *es positivo.*
3. l *es creciente, continua y monótona fuera de* $x = 0$.
4. $l_0 = 0$.

más aún, l esta dada por:

$$l_u = \text{máx}\left[\sup_{s\leq u}[-(z+y_s)], 0\right] = \left\{\sup_{s\leq u}[-(z+y_s)]\right\}^+. \tag{5.9}$$

Los resultados que se han visto en este capítulo serán utilizados en capítulos subsecuentes.

Dado que la teoría de control, el concepto de tiempo local del movimiento browniano y el lema de Skorohod son temas que requieren un mayor nivel al de licenciatura, sólo se han dado las ideas generales, así como las definiciones sin aundar mucho en los temas. Para mayor detalle se puede consultar la bibliografía ya mencionada.

Capítulo 6

Opciones Pasaporte Europeas

En la primer sección abordaremos el problema de valuación de una opción pasaporte a la manera de Black y Scholes; es decir, replicaremos la opción mediante un portafolio donde, por hipótesis, el mercado es libre de riesgo, y así obtendremos una ecuación diferencial parcial. La referencia de donde se toma esta parte del capítulo es T. Jurgen [17] y L. Andersen, J. Andreasen, R. Brotherton-Ratcliffe en [2].
La idea central de la segunda sección consiste en interpretar el problema de valuación desde el punto de vista probabilístico, usando la propiedad de martingala. Esta forma de valuación, tiene una expresión particular para el caso de las opciones pasaporte; el objetivo será llevar esta expresión a una forma ya conocida y así obtener una fórmula para el precio de la opción pasaporte. La estrategia consiste en relacionar el problema de las opciones pasaporte con el de las opciones look back. Esta sección se basa en el trabajo realizado por V. Henderson y D. Hobson en [13].

6.1. Valuación de opciones pasaporte

6.1.1. Por construcción de un portafolio libre de riesgo

En esta sección comenzaremos con una valuación de las opciones pasaporte siguiendo la idea de Black-Scholes. El punto de inicio es la publicación de Black-Scholes (1973), en el cual el activo S sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - f)dt + \sigma dW_t. \tag{6.1}$$

en donde r es la tasa libre de riesgo, f la tasa de dividendo, σ la volatilidad del activo subyacente, las cuales las consideraremos constantes. Considere a un inversionista que a la fecha t_i posee la cantidad de $u(t_i) \in [-1, 1]$ en el activo subyacente. En el tiempo t_i a t_{i+1} el inversionista obtiene ganancias de $u(t_i)[S(t_{i+1}) - S(t_i)]$. Sumando todos los periodos, las ganancias totales del inversionista son

$$X = \sum_{i=0}^{T-1} u(t_i)[S(t_{i+1}) - S(t_i)]. \tag{6.2}$$

Ahora si consideramos inversión continua, las ganancias pueden ser expresadas como:

$$X(t) = \int_0^t u(s)dS(s), \tag{6.3}$$

ó equivalentemente

$$dX(t) = u(t)dS(t), \qquad con \qquad X(0) = 0, \tag{6.4}$$

al proceso $X(t)$ le llamaremos el proceso de ganancias. Cabe hacer mención que la variable $u(t)$ es una variable de decisión del inversionista, por ejemplo, si $u(t) = 1$ quiere decir que el inversionista decidió comprar una acción; si $u(t) = -1$ entonces el inversionista vendió una acción. Ejemplos más concretos se verán en los capítulos siguientes.

La opción pasaporte da al poseedor el derecho pero no la obligación de recibir X en T. En el caso de que $X < 0$ el inversionista racional no estaría interesado. Así que la función de pagos es igual a

$$V(T, S(T), X(T)) = [X(T)]^+ \equiv \text{máx}[0, X(T)],$$

donde $X(t)$ es el proceso de ganancias definido en (6.4) y $S(t) \equiv S_t$ es el activo subyacente con una dinámica definida por (6.1).
Ahora construimos un portafolio libre de riesgo Π que consiste de una opción pasaporte V y $-k$ unidades de el activo subyacente:

$$\Pi = V - kS. \tag{6.5}$$

Dentro de los límites de tiempo $(t, t+dt)$ el cambio de valor del portafolio es

$$d\Pi = dV - k(dS + fSdt). \tag{6.6}$$

Por ahora supondremos la existencia de una estrategia óptima u^* y de las derivadas parciales V_{SS},V_{XX} y V_{SX}. La expanción en Taylor hasta los términos de segundo orden es:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial X}dX + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial X}(dSdX) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(dX)^2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Recordando la regla del producto para funciones estocásticas tenemos que

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt, \tag{6.8}$$

y la ganancia máxima que el poseedor puede obtener esta dada por

$$dX = u^* dS, \tag{6.9}$$

sustituyendo (6.8) y (6.9) en (6.7) obtenemos

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial X}(u^* dS) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\sigma^2 S^2 dt) + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial X}(dSu^* dS) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(u^* dS)^2. \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} + u^* \frac{\partial V}{\partial X}\right) dS + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2u^* \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial X} + (u^*)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right) \sigma^2 S^2 dt, \end{aligned} \tag{6.10}$$

El parámetro k debe de ser tal que el cambio instantáneo del portafolio sea libre de riesgo así la ausencia de arbitraje implica que gane dinero a la tasa constante libre de riesgo, de tal modo que

$$k = \frac{\partial V}{\partial S} + u^* \frac{\partial V}{\partial X}, \tag{6.11}$$

y

$$d\Pi = r\Pi dt. \tag{6.12}$$

Combinando ambos resultados:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2u^* \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial X} + (u^*)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right) + (r-f)S\left(\frac{\partial V}{\partial S} + u^* \frac{\partial V}{\partial X}\right) = rV,$$

con condición final

$$V(T, S, X) = X^+. \tag{6.13}$$

El cambio de variable $w \equiv X/S$ reduce la dimensión del problema. Usando esta sustitución genera la siguiente **EDP**:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (u^* - w)(r-f)\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{1}{2}(u^* - w)^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} = fv, \tag{6.14}$$

con

$$u^* = \operatorname{sgn}\left((r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - w\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\right).$$

en donde $V(t, S_t, X_t) = S_t v(t, w)$ y la función de pagos $v(T, w) = \text{máx}(w(T), 0)$ es monótonamente creciente y convexa en w.
Formulaciones equivalentes a (6.14) son:

$$\begin{aligned} fv &= \frac{\partial v}{\partial t} - w(r-f)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+w^2)\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \\ &+ u^*\left((r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - w\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\right), \end{aligned} \tag{6.15}$$

y

$$fv = \frac{\partial v}{\partial t} - w(r-f)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+w^2)\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + \left|(r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - w\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\right|, \tag{6.16}$$

con

$$v(T,w) = v_T(w) = \text{máx}(w,0). \tag{6.17}$$

Para el caso en que la función de pagos convexa y cóncava.

El control general es

$$u^* = \begin{cases} \psi & \text{si } \psi(x,y) \in [-1,1] \text{ y } \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} < 0, \\ \text{sgn}(-\psi \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$\psi(x,t) = w - \frac{r-f}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial v}{\partial w}}{\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}}, \tag{6.18}$$

para funciones de pagos cóncavas ($\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} < 0$) se simplifica (6.18) a:

$$u^* = \begin{cases} \psi & \text{si } \psi(x,y) \in [-1,1], \\ \text{sgn}(\psi) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para fución de pago convexa[1]:

$$\begin{aligned} u^* &= \text{sgn}(-\psi \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}) \\ &= \text{sgn}\Bigg(- \Bigg[w - \frac{r-f}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial v}{\partial w}}{\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}} \Bigg] \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \Bigg) \\ &= \text{sgn}\Bigg(\frac{1}{\sigma^2} \Bigg[(r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - \sigma^2 w \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \Bigg] \Bigg) \\ &= \text{sgn}\Bigg((r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - \sigma^2 w \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \Bigg), \end{aligned}$$

con $\sigma^2 \geq 0$ y sgn(x) denota a la función signo de x.

La ecuación diferencial parcial (6.15) es la que define el valor de la opción pasaporte dado que tenemos la estrategia u^*.

[1] Cabe hacer mención que la historia de este control es algo turbia. En 1998 se publicó un artículo en Journal of Computational Finance [2], proposición 5; donde fué publicado mal la función del control, la corrección se hizo en [17] proposición 2.5, en el año de 2003, pero resulta que también se publica con otro error diferente. No he encontrado una corrección formal a la tesis de J. Topper.

Si vemos el problema desde una perspectiva diferente, podremos resolver el problema con una herramienta matemática llamada control óptimo estocástico. Esta consiste en buscar una ecuación que defina la estrategia óptima μ via el principio de programación dinámica. Una **EDP** llamada ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman* puede ser obtenida y esta define la siguiente estrategia óptima:

$$(r-f)SV_S+rXV_X-rV-\frac{\sigma^2S^2}{2}\max_{-1\leq\mu\leq 1}[V_{SS}+2\mu V_{SX}+\mu^2V_{XX}]=V_t. \quad (6.19)$$

Para contratos donde no involucran barreras sobre S ó X ó ambos, la transformación $W=\frac{X}{S}$ es posible. Las ecuaciones (6.16) y (6.17) pueden ser usadas para cálculos númericos donde u^* y μ no son conocidas.

6.1.2. Usando tiempo local

Bajo la hipótesis de ausencia arbitraje, el proceso de precios es una difusión y el mercado es completo con una única medida martingala Q^*, como en el capítulo 4 sobre la valuación de una opción europea de compra, la medida de probabilidad bajo la cual el proceso de los precios descontados son una martingala. En el modelo de Henderson y Hobson [13] se define

$$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma_S(S_t,t)dW_t. \quad (6.20)$$

Suponer que σ_S tiene suficientes propiedades de continuidad garantiza que la solución de la **EDE** (Ecuación Diferencial Estocástica) es única en distribución (por ejemplo la condición de Lipschitz sobre $x\sigma_S(x,t)$).

Definamos el proceso de precios descontados

$$P_t=e^{-rt}S_t, \quad (6.21)$$

$$
\begin{aligned}
dP_t &= e^{-rt}(rS_t\mathrm{dt} + S_t\sigma_S(S_t,t)\mathrm{dW}) - re^{-rt}S_t\mathrm{dt} \\
&= e^{-rt}rS_t\mathrm{dt} - e^{-rt}rS_t\mathrm{dt} + e^{-rt}S_t\sigma_S(S_t,t)\mathrm{dW} \\
&= e^{-rt}S_t\sigma_S(S_t,t)\mathrm{dW} \\
&= P_t\sigma(P_t,t)\mathrm{dW}.
\end{aligned}
$$

el cual resuelve la **EDE**

$$dP_t = P_t\sigma(P_t,t)dW_t. \tag{6.22}$$

donde

$$\sigma(P_t,t) = \sigma_S(P_te^{rt},t), \tag{6.23}$$

P_t es una martingala pues es el proceso de precios descontados bajo la medida martingala y además supondremos que P_t es un elemento del espacio de Hardy $P_t \in \mathbf{H}^1$ es decir $\mathrm{E}\Big[(\int_0^T P_t^2\sigma(P_t,t)^2dt)^{\frac{1}{2}}\Big] < \infty$.
En este modelo el proceso de ganancias al tiempo t, con valor $\int_0^t u_s dS_s ds$ donde u_t es la estrategia del inversionista, también recibe intereses sobre los fondos. Así el proceso de ganancias $X_t(u)$ esta dado por la ecuación

$$dX_t(u) = r(X_t(u) - u_tS_t)dt + u_tdS_t, \tag{6.24}$$

la cual se simplifica a

$$
\begin{aligned}
dX_t(u) &= r(X_t(u) - u_tS_t)dt + u_t(S_tdt + S_t\sigma_S(S_t,t)dW_t) \\
&= rX_t(u)dt - u_trS_tdt + u_trS_tdt + S_tu_t\sigma_S(S_t,t)dW_t \\
&= rX_t(u)dt + u_t\sigma_S(S_t,t)S_tdW_t. \qquad (6.25)
\end{aligned}
$$

Se define el valor descontado de la cuenta de inversión

$$G_t = e^{-rt} X_t(u). \tag{6.26}$$

La cual es una martingala bajo la medida Q^* (una martingala local para cada u) y según la regla del producto

$$\begin{aligned}
dG_t(u) &= e^{-rt}\mathrm{dX_t} - re^{-rt}X_t\mathrm{dt} \\
&= e^{-rt}(rX_t\mathrm{dt} + u_t\sigma_S(S_t,t)S_t\mathrm{dW}) - re^{-rt}X_t\mathrm{dt} \\
&= re^{-rt}X_t\mathrm{dt} - re^{-rt}X_t\mathrm{dt} + e^{-rt}u_t\sigma_S(S_t,t)S_t\mathrm{dW} \\
&= u_t\sigma(P_t,t)P_t\mathrm{dW} \\
&= u_t dP_t,
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos

$$dG_t(u) = u_t dP_t. \tag{6.27}$$

donde la función de pagos para una opción pasaporte estilo europeo esta dada por

$$X_T^+(u) \equiv \text{máx}(X_T(u), 0), \tag{6.28}$$

y la estrategia del inversionista, sólo puede tener un número de acciones entre $-k$ y k, es decir, $u_t \in [-k, k]$

Bajo la medida Q^* y suponiendo que el inversionista sigue la estrategia óptima, el valor de la opción pasaporte al tiempo t esta dado por la esperanza de la función de pagos traidos a valor presente.

$$\underset{|u_t|\leq K}{\text{máx}}\, e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t\left[X_T^+(u)\right]. \tag{6.29}$$

Por un argumento sencillo de escala le daremos el valor de K=1; definamos $\theta = \frac{u}{K}$ entonces $\theta \leq 1$, así la cuenta de inversión queda como

$$G_t = \int_0^t u_s dP_s = K \int_0^t \theta_s dP_s = KG_t(\theta). \tag{6.30}$$

Consideremos que en el momento inicial $t = 0$, las ganancias iniciales de inversión son un valor diferente de cero. Esto cambia la función de pagos de la opción pasaporte a $(X_T(u) - k)^+$ con $k \in \Re$.

De la fórmula de Tanaka para semimartingalas continuas, sección 5.3.1 ó para un mayor detalle (ver: Revuz y Yor [22] 13,Teorema VI.1.2)

$$G_T^+(u) = G_0^+(u) + \int_0^T I_{(G(u)>0)} dG(u) + \frac{1}{2} L_T^{G(u)}(0), \tag{6.31}$$

donde $L_T^{G(u)}(0)$ es el tiempo local del proceso $G(u)$ al nivel 0 entre el tiempo inicial 0 y la fecha de expiración T. De aquí se deduce que el precio de la opción pasaporte al momento inicial esta dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big[e^{-rT} X_T^+(u)\Big] &= \mathrm{E}\Big[G_T^+(u)\Big] \\ &= \mathrm{E}\Big[\frac{1}{2} L_T^{G(u)}(0) + \int_0^T I_{(G(u)>0)} u_s dP_s + G_0^+(u)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{E}\Big[L_T^{G(u)}(0)\Big] + G_0^+(u). \end{aligned} \tag{6.32}$$

Usamos el hecho de que $P_t \in \mathbf{H}^1$ y $\left|I_{(G(u)>0)} u_s\right| \leq 1$,
además $\int_0^t I_{(G(u)>0)} u_s dP_s$ es una martingala para toda estrategia.

Resultado 6.1.1 *Sea* $M_s(u) = \int_0^s -u_r sgn(G_r(u)) dS_r$ *y defina* $M_r^*(u) = \sup_{0 \leq s \leq r} M_s(u)$. *Aplicando el lema de Skorokhod de la sección 5.3.2, se puede rescribir el tiempo local al nivel cero en términos de la martingala* M.

$$L_T^{G(u)}(0) = \left(M_T^*(u) - |G_0(u)|\right)^+. \tag{6.33}$$

Prueba :
Aplicando la fórmula de Tanaka de la sección 5.3.1, tenemos

$$|G_s(u)| = |G_0(u)| + \int_0^s \mathrm{sgn}(G_r)) dG_r(u) + L_s^{G(u)}(0). \tag{6.34}$$

Donde

$$\mathbf{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

De la definición de M encontramos

$$\int_0^s \mathrm{sgn}(G_r(u))dG_r(u) = \int_0^s u_r \mathrm{sgn}(G_r(u))dP_r(u) = -M_s(u) \qquad (6.35)$$

entonces de (6.34)

$$|G_s(u)| = |G_0(u)| - M_s + L_s^{G(u)}(0). \qquad (6.36)$$

Y la pareja $(|G_s(u)|, L_s^{G(u)}(0))$ es una solución al problema de Skorokhod para $-M$ dada por

$$\begin{aligned} L_T^{G(u)}(0) &= \max\left(\sup_{0\leq s\leq T} \left[M_s(u) - |G_0(u)| \right],\ 0 \right) \\ &= (M_T^*(u) - |G_0(u)|)^+. \qquad \blacksquare \end{aligned} \qquad (6.37)$$

Relacionando con la ecuación (6.37) y (6.32)

$$\mathrm{E}\left[G_T^+(u)\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left(M_T^*(u) - |G_0(u)|\right)^+ + G_0^+(u)\right]. \qquad (6.38)$$

Sea $v = -u \cdot \mathrm{sgn}(G(u))$

Finalmente el problema de valuación de la opción pasaporte se reduce a:
(a) Encontrar la estrategia v, con $|v| \leq 1$, tal que $E\left[(M_T^* - g)^+\right]$ sea maximizada, donde $M_r^*(v) = sup_{0\leq s\leq r} M_s(v)$ y $M_s(v) = \int_0^s v_u dP_u$.
(b) Encontrar el valor asociado para la opción pasaporte que esta dada por la fórmula $\frac{1}{2}E[(M_T^*(v^*) - G_0(u))^+ + G_0^+(u)]$, donde v^* es la estrategia óptima.

El problema (b) es un problema de valuación estándar.

Si $x\sigma(x,t)$ es no decreciente en x entonces la estrategia óptima es $v = 1$ y al tiempo cero el precio de la opción pasaporte esta dada por

$$\frac{1}{2}\mathrm{E}\big[(\sup_{0\leq r\leq T} P_r - P_0 - |G_0(u)|)^+ + G_0(u)^+\big]. \qquad (6.39)$$

Esta estrategia corresponde a tomar $u = -\text{sgn}(G(u))$ lo que nos dice es que se estará largo en el activo si el valor del portafolio es menor a cero, y vender en corto cuando el valor es positivo. Más aún, con esta estrategia el precio asociado esta directamente relacionado al precio de una opción de compra lookback, con precio de ejercicio $(P_0 + |G_0(u)|)$.
El precio de la opción en el caso especifico del movimiento browniano exponencial es directamente calculado por la fórmula para opciones lookback. Tomando la volatilidad constante $\sigma(x,t) = \sigma$ el precio de la opción pasaporte al tiempo t con $0 \leq t \leq T$ esta dado por

$$\begin{aligned} X_t^+(u)^+ + \frac{1}{2}\Bigg\{ S_t \Bigg(\mathrm{N}(d) &- \mathrm{N}(d - \sigma\sqrt{\tau}) + \sigma\sqrt{\tau}\Big(N'(d) + d\mathrm{N}(d)\Big)\Bigg) \\ &- |X_t(u)|\,\mathrm{N}(d - \sigma\sqrt{\tau})\Bigg\}, \end{aligned} \tag{6.40}$$

donde $\tau = T - t$.

$$d = \frac{-\ln(1 + |X_t(u)|/S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \tag{6.41}$$

y N es la función de distribución normal acumulada.
Para la valuación de opciones lookback (ver [8]).

Capítulo 7

Opciones Vacacionales

En este capítulo se definen las opciones vacacionales, que son casos particulares de las opciones pasaporte. Damos una descripción general de este tipo de opciones y la metodología de valuación, la cual se debe a S. Shreve, J. Vecer en [23]. Con las opciones pasaporte es posible comprar y vender un bien subyacente durante un periodo determinado: esto hace que sean opciones muy caras. Las vacacionales son una alternativa más barata, pues son casi del mismo precio que las opciones americanas. El capítulo se desarrolla de la siguiente manera: primero, comenzamos con una descripción de las opciones vacacionales; luego, se dan las fórmulas para las opciones pasaporte, se analiza los argumentos de S. Shreve y J. Večeř para la valuación de este tipo de opciones; finalmente, se dan las fórmulas para las opciones vacacionales.

La opción pasaporte, como se dijo en capítulos anteriores, se define en función de la estrategia óptima de inversión, de ésta se dijo que debería estar acotada dentro de un intervalo cerrado entre -1 y 1 y seguir la estrategia: corto cuando el valor de la cuenta de inversión sea positivo y pasar a largo en la acción si el valor de la cuenta es negativo, esto suponiendo que no existe el costo de acarreo y que el instrumento es autofinanciable. Si consideramos los costos de transacción y si queremos que el inversionista siga la estrategia óptima, entonces el valor de la opción se hace muy cara, tomando en cuenta que en un intervalo pequeño de tiempo, la estrategia del inversionista cruza el cero muchas veces, si desea seguir la estrategia óptima. Una variación de la opción pasaporte es que la estrategia del inversionista puede estar acotado por un intervalo diferente al de $u \in [-1, 1]$ por ejemplo, que estuviera acotado dentro un rango de inversión mas general $u \in [a, b]$. Esto da una gran variedad de oprotunidades. Analicemos el caso en que $a = b = 1$. En este caso, el inversionista sólo tiene una posibilidad: Comprar, porque la estrategia de inversión sólo puede tomar el valor de uno, es decir, $u(t) = 1$ para toda t. Y la opción se puede ver como una europea de compra. Si $a = b = -1$ la única alternativa es vender, en este caso entonces se puede ver como una europea de venta.

La opción vacacional de compra corresponde a $u \in [0, 1]$ y la opción vacacional de venta se define cuando la estrategia se encuentra en $u \in [-1,0]$. Esto puede verse como una generalización de las opciones americanas de compra y venta, respectivamente, ¿Por qué? por que en el caso de las americanas sólo se puede comprar una vez, que es cuando se ejerce la opción, pero en el caso de las vacacionales se puede ejercer "muchas veces"esto es un decir, lo que realmente sucede es que da la oportunidad de pasar a la posición cero cuantas veces se quiera, es decir, que si se erró el momento de comprar y lo quisierá hacer en un momento futuro, sólo se pasa a la posición cero para despues comprar "ya no quiero nada hasta que me vuelva a interesar". La ventaja de las vacacionales es que el precio de éstas es casi el mismo que el de las opciones americanas (Primera generación), pero con mayores beneficios las vacacionales. Steven E. Shreve y Jan Veĉeî [23] usan argumentos de probabilidad, específicamente, el teorema de comparación de medias de Hajek para obtener el precio de las opciones vacacionales. Por lo tanto, el valor de la opción debe de ser el máximo, sobre todas las estrategias u entre a y b del valor esperado descontado bajo la probabilidad de riesgo neutral Q^* de la función de pagos de la opción:

$$V^{[a,b]}(t, S_t, X_t) = \max_{u_t \in [a,b]} e^{-r(T-t)} \mathrm{E}\big[[X_T^u]^+ | \mathcal{F}_t\big], \quad t \in [0, T]. \tag{7.1}$$

con condición de frontera

$$V(T, S, X) = X^+.$$

Esta ecuación cubre un rango amplio de opciones sobre cuentas de inversión y el lado derecho de la ecuación es un problema de control óptimo estocástico, y la función de valor $V^{[a,b]}(t,S,X)$ se caracteriza por la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$-rV+V_t+rSV_s+rXV_X+\max_{u\in[a,b]}\frac{1}{2}\sigma^2S^2(V_{SS}+2uV_{SX}+u^2V_{XX})=0, \quad (7.2)$$

con condición de frontera

$$V(T,S,X)=X^+. \quad (7.3)$$

Damos la fórmula de la opción pasaporte clásica para luego dar la idea de la construcción que llevó a este resultado Cuando $a=-1$ y $b=1$ tenemos la opción pasaporte clásica y la fórmula es:

$$\begin{aligned} V^{[-1,1]}(t,S_t,X_t) &= \frac{1}{2}\Big\{X_t+(S_t+X_t)N(d_+)-S_tN(d_-) \\ &- S_t\sigma^*d_-N(-d_-)+\frac{S_t\sigma^*}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_-^2}{2}}\Big\}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

con $X_t\geq 0$, donde

$$d_\pm=\frac{1}{\sigma^*}\log(1+\frac{X_t}{S_t})\pm\frac{\sigma^*}{2}, \qquad \sigma^*=\sigma\sqrt{T-t}.$$

Y para $X_t\leq 0$

$$\begin{aligned} V^{[-1,1]}(t,S_t,X_t)=\frac{1}{2}\Big\{X_t &+ (S_t-X_t)N(f_+)-S_tN(f_-) \\ &- S_t\sigma^*f_-N(-f_-)+\frac{S_t\sigma^*}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{f_-^2}{2}}\Big\}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

en donde

$$f\pm=\frac{1}{\sigma^*}\log(1-\frac{X_t}{S_t})\pm\frac{\sigma^*}{2}.$$

Aquí $N(x)$ denota la función de distribución normal estándar. La estrategia óptima esta dada por

$$u_t^*=-\mathrm{sgn}(X_t^{u^*}). \quad (7.6)$$

Para empezar el argumento supondremos $a\leq b$ y definimos un argumento que permite reducir la dimensión del problema. Sea

$$Z_t^u=\frac{X_t^u}{S_t}-\frac{a+b}{2}. \quad (7.7)$$

Al aplicar la fórmula de Itô al proceso Z_t^u se obtiene

$$dZ_t^u = \big(Z_t^u + \frac{a+b}{2} - u_t\big)\sigma^2 \mathrm{dt} - \Big(Z_t^u + \frac{a+b}{2} - u_t\Big)\sigma \mathrm{dW_t}. \tag{7.8}$$

Defínase la nueva medida de probabilidad Q^* por

$$Q^*(a) = \int_A D_T \mathrm{dQ}, \qquad A \in \mathcal{F}. \tag{7.9}$$

donde

$$D_T = e^{-rT}\frac{S_T}{S_0} = e^{\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T}. \tag{7.10}$$

Bajo Q^*, $W_t^* = -\sigma t + W_t$ es un movimiento browniano, de acuerdo al teorema de Girsanov (teorema 4.1.1). Sustituyendo el nuevo movimiento browniano W_t^* en la ecuación (7.8), la EDE se reduce a

$$\mathrm{dZ}_t^u = -\Big(Z_t^u + \frac{a+b}{2} - u_t\Big)\sigma \mathrm{dW}_t^*. \tag{7.11}$$

Por otro lado, para obtener la definición de la función $V^{[a,b]}$ dada por la Ec. (7.1), pero ahora respecto a la medida Q^*, se aplica la regla de Bayes [18]

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[[X_T^u]^+ \big| \mathcal{F}_t\Big] &= e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^Q\Big[[X_T^u]^+ \frac{D_T}{D_T}\big|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= e^{-r(T-t)} D_t \mathrm{E}^{Q^*}\Big[\frac{[X_T^u]^+}{D_T}\big| \ \mathcal{F}_t\Big] \\ &= S_t \mathrm{E}^{Q^*}\left[\Big[\frac{X_T^u}{S_T}\Big]^+ \big|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo D_s con $s = t$ y considerando $S_T > 0$ se obtiene

$$e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^{Q^*}\big[[X_T^u]^+ |\mathcal{F}_t\big] = S_t \mathrm{E}^{Q^*}\left[\Big[Z_T^u + \frac{a+b}{2}\Big]^+ \Big|\mathcal{F}_t\right]. \tag{7.12}$$

Así, con el cambio de medida la ecuación (7.1) se puede escribir como

$$V^{[a,b]}(t, S_t, X_t^u) = S_t v^{[a,b]}(t, Z_t^u), \tag{7.13}$$

donde

$$v^{[a,b]}(t,z) = \max_u \mathrm{E}^{Q^*}\left[\Big[Z_T^u + \frac{a+b}{2}\Big]^+ \Big| Z_t = z\right]. \tag{7.14}$$

El problema se reduce a encontrar u^* tal que maximice la función del lado derecho de la igualdad anterior.
Usando el teorema de Hajek[1] se demuestra que el valor es maximizado por el valor absoluto en términos de la volatilidad $-(Z_t + \frac{a+b}{2} - u_t)\sigma$ para toda z y toda t. En otras palabras el óptimo esta dado por

$$u^* = aI_{\{(Z_t^{u^*})\geq 0\}} + bI_{\{(Z_t^{u^*})<0\}}, \tag{7.15}$$

ó en términos de la cuenta de dinero y del precio de la acción

$$u^* = aI_{\{(X_t^{u^*})\geq \frac{a+b}{2}S_t\}} + bI_{\{(X_t^{u^*})< \frac{a+b}{2}S_t\}}. \tag{7.16}$$

Para ver la solución de las opciones sobre cuentas de inversión en donde la estrategia se encuentra en el intervalo entre a y b puede consultarse en ([23]). Aquí ponemos las fórmulas para el caso donde $u_t \in [0,1]$ y $u_t \in [-1,0]$ que son las opciones Vacacionales de compra y venta respectivamente.
La estrategia óptima para una opción vacacional de compra $a = 0$ y $b = 1$ es

$$u^* = I_{\{X_t^{u^*} < \frac{1}{2}S_t\}}. \tag{7.17}$$

Y el valor de la opción esta dado por

$$V^{[0,1]} = \frac{1}{4}(1-\sigma^* d_-)S_t N(-d_-) + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\sigma^* S_t e^{(-\frac{1}{2}d_-^2)} + X_t N(d_+), \tag{7.18}$$

para $X_t \geq \frac{1}{2}S_t$, donde

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma^*}\log(\frac{4X_t}{S_t}) \pm \frac{\sigma^*}{2}.$$

Y para $X_t \leq \frac{1}{2}S_t$, el valor de la opción es:

$$\begin{aligned} V^{[0,1]}(t, S_t, X_t) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\sigma^* s_t e^{(-\frac{1}{2}f_{+-}^2)} - (X_t - S_t)N(-f_{++}) \\ -\frac{1}{4}(\sigma^* f_{+-} + 1)S_t N(-f_{+-}) &+ (X_t - S_t)N(-f_{-+}) + S_t N(-f_{--}) \end{aligned} \tag{7.19}$$

[1] El Teorema de Hajek para comparación de medias nos dice que para una martingala con representación $M_t = M_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s$ y $\sigma_s^2 \leq \rho^2$ para alguna función $\rho \in R$ y si existe una solución única en distribución para $N_t = M_0 + \int_0^t \rho(N_s)dW_s$ entonces para cualquier función convexa Φ y cualquier $t \geq 0$ $E\Phi(M_t) \leq E\Phi(N_t)$.

donde

$$f_{\pm\pm} = \frac{1}{\sigma^*}\log(2 - \frac{2X_t}{S_t}) \pm \frac{1}{\sigma^*}\log 2 \pm \frac{\sigma^*}{2}.$$

En otras palabras, la estrategia óptima para el poseedor de una vacacional de compra consiste en mantener una posición larga, es decir, poseer o comprar un lote de acciones, mientras el valor del portafolio sea estrictamente menor que la mitad del valor del bien subyacente. Pero en cuanto el valor del portafolio alcance dicha cantidad, se recomienda vender. Por lo anterior, obtener la probabilidad de un cambio en la estrategia optima (ir de largo a la posición cero) se convierte en un problema en donde se involucra el primer tiempo de llegada.

En el caso de una vacacional de venta se obtiene que la estrategia óptima esta dada por

$$u_t^* = -I_{\left\{x_t^{u^*} \leq -\frac{1}{2}S_t\right\}}, \tag{7.20}$$

y el valor de la opción esta dado por

$$\begin{aligned} V^{[-1,0]}(t, S_t, X_t) = {} & \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\sigma^* d_- S_t e^{-\frac{1}{2}d_{+-}^2} + (X_t + S_t)[N(-d_{++}) + N(d_{-+})] \\ & -\frac{1}{4}(\sigma^* d_{+-} + 1)S_t N(-d_{+-}) - S_t N(d_{--}), \end{aligned}$$

para $X_t \geq \frac{1}{2}S_t$, donde

$$d_{\pm\pm} = \frac{1}{\sigma^*}\log\left(\frac{2X_t}{S_t} + 2\right) \pm \frac{1}{\sigma^*}\log 2 \pm \frac{\sigma^*}{2}.$$

Y para $X_t \leq \frac{1}{2}S_t$, el valor de la opción es:

$$\begin{aligned} V^{[-1,0]}(t, S_t, X_t) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\sigma^* S_t \exp(-\frac{1}{2}f_-^2) \quad & + \quad \frac{1}{4}(1 - \sigma^* f_-)S_t N(-f_-) \\ & + \quad X_t N(-f_+), \end{aligned} \tag{7.21}$$

donde

$$f_{\pm} = \frac{1}{\sigma^*}\log(-\frac{4X_t}{S_t}) \pm \frac{\sigma^*}{2}.$$

Capítulo 8

Opciones Asiáticas

En este capítulo se demuestra que las opciones asiáticas son un caso particular de las opciones pasaporte y, por lo tanto, se les puede aplicar la metodología de valuación de estas últimas. En [28], J. Večeř da la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para las opciones asiáticas.

Las opciones asiáticas son derivados financieros cuya función de pagos depende de la media aritmética de algún activo subyacente sobre un cierto intervalo de tiempo, es decir, la función de pagos esta dada por la ecuación $(A_t - k)^+$ para una opción asiática de compra con precio de ejercicio fijo. Y $(k - A_t)^+$ para una opción asiática de venta.
Existen dos grupos de opciones asiáticas sobre la media aritmética:

- muestreo discreto

$$A_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_{T_i},$$

  donde T_1, T_2,...,T_n son fechas predeterminadas.

- muestreo continuo

$$A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t \mathrm{dt}.$$

En general, el precio de una opción asiática puede ser encontrada al resolver una **EDP** en un espacio de dos dimensiones. Una variedad de técnicas se han utilizado para resolver el problema de valuación y así obtener el precio de la opción:
El enfoque de Geman y Yor, consistente en calcular una fórmula exacta en la que interviene una transformada de Laplace, que es preciso calcular numéricamente; simulación montecarlo y otros métodos numéricos se han utilizado.
En este capítulo se muestra que la opción asiática sobre la media aritmética es un caso particular de las opciones sobre cuentas de inversión. Para relacionar opciones sobre cuentas de inversión con otro tipo de opciones hay que adecuar, entre otras cosas, la estrategia de inversión ó control u_t, por ejemplo, si quisieramos una opción europea de compra fijamos $u_t = 1$, una americana de venta sería mantener el control en -1 y pasarse a la posición 0 en el momento de ejercicio de la opción, así como las ya mencionadas vacacionales y pasaporte clásica.
Jan Večeř [28] demuestra que la opción asiática también es un caso particular de opciones sobre cuentas de inversión.
Notese que $d(tS_t) = tdS_t + S_t dt$ o equivalentemente,

$$TS_T = \int_0^T t dS_t + \int_0^T S_t dt, \tag{8.1}$$

después de dividir entre la fecha de vencimiento y reordenando términos obtenemos

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt = \int_0^T (1 - \frac{t}{T}) dS_t + S_0. \tag{8.2}$$

La opción asiática de compra con precio de ejercicio fijo $(A_T - K)^+$ se obtendrá al tomar $u_t = 1 - \frac{t}{T}$ y $X_0 = S_0 - K$, de acuerdo a esto, la dinámica de la cuenta de inversión es

$$dX_t = (1 - \frac{t}{T}) dS_t, \tag{8.3}$$

entonces

$$X_T = \int_0^T (1 - \frac{t}{T}) dS_t + S_0 - K = A_T - K. \tag{8.4}$$

Luego, la media de los precios de la acción debería ser la estrategia inversión que vende una parte de la acción a una tasa constante $\frac{1}{T}$ de partes por

unidad de tiempo.
Así mismo, la Asiática de venta con precio de ejercicio fijo y función de pagos $(K - A_T)^+$ será cuando $u = \frac{t}{T} - 1$ y $X_0 = K - S_0$. Para la Asiática de compra con precio de ejercicio flotante y función de pago $(KS_T - A_T)^+$ se toma $u_t = \frac{t}{T} - 1 + K$ y $X_0 = S_0(K - 1)$, para la asiática de venta con precio de ejercicio flotante y función de pagos $(A_t - KS_T)^+$ tomamos$u_t = -\frac{t}{T} + 1 - K$ y $X_0 = S_0(1 - K)$

La opción asiática con media aritmética discreta debería llevarse a cabo por una función discreta que aproxime la posición sobre la acción u_t a la opción de media continua. Por ejemplo el caso de la opción asiática de compra con precio de ejercicio fijo con estrategia $u_t = 1 - \frac{t}{T}$ y $X_0 = S_0 - K$. Una aproximación de una función discreta a la estrategia es

$$u_t = 1 - \frac{1}{n}[n\frac{t}{T}], \tag{8.5}$$

donde $[\cdot]$ denota la función parte entera. Si vemos la cuenta de inversión de esta opción asiática.

$$dX_t = u_t dS_t, \tag{8.6}$$

con posición en la acción dada por (8.5)

$$X_T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_{(\frac{k}{n})T} - S_0 + X_0. \tag{8.7}$$

Entonces obtenemos la asiática de compra con media aritmética discreta con precio de ejercicio fijo y función de pagos

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_{(\frac{k}{n})T} - K\right)^+, \tag{8.8}$$

tomando $X_0 = S_0 - K$ y $u_t = 1 - \frac{1}{n}[n\frac{t}{T}]$. Mostramos que la opciones asiáticas son opciones sobre una cuenta de inversión, entonces podemos aplicar las mismas técnicas de valuación para determinar el precio de la opción asiática. En particular podemos usar la ecuación **HJB** que en el caso de opciones asiáticas están dadas por

$$v_t + r(u_t - z)u_z + \frac{1}{2}(u_t - z)^2\sigma^2 v_{zz} = 0, \tag{8.9}$$

σ	K	Veĉeȓ	Zvan	Monte Carlo
0.05	95	11.112	11.094	11.094
	100	6.810	6.793	6.795
	105	2.750	2.744	2.745
0.10	90	15.41	15.399	15.399
	100	7.036	7.030	7.028
	110	1.421	1.410	1.418
0.20	90	15.659	15.643	15.642
	100	8.424	8.409	8.409
	110	3.568	3.554	3.556
0.30	90	16.533	16.514	16.516
	100	10.230	10.210	10.210
	110	5.748	5.729	5.731

Cuadro 8.1: *Comparación de los diferentes métodos para una asiática de compra con precio de ejercicio fijo en donde* $r = 0{,}15$, $S_0 = 100$ *y T=1. Este cuadro es tomado de [28].*

con condición final

$$v(T, z) = z^+. \tag{8.10}$$

J. Veĉeř da la versión de la ecuación de **HJB** para una opción asiática, la cual fue resuelta por su autor con el método de Crank-Nicolson utilizando diferencias finitas (Cómo construir este método se verá en el capítulo 11).

La tabla 8.1 compara los resultados de los diferentes métodos descritos por Zvan, Forsyth y Vetzal [29] y con el método montecarlo. La implementación, declara Veĉeř, fue implantada en MATLAB.

Capítulo 9

Las Opciones Pasaporte Americanas

Al construir instrumentos que sean más atractivos a los inversionistas se incrementa la gama de posibilidades para cubrir necesidades particulares de inversión. Así se diseñaron opciones con diversas funciones de pago, pero con el inconveniente de que las ganancias sólo pueden obtenerse en la fecha de vencimiento (el llamado estilo europeo). Por ello se ofrecieron opciones que se pudieran ejercer en el momento más conveniente para el inversionista, y no tener que esperar a la fecha de ejercicio; así surgieron las opciones estilo americano. Con las opciones pasaporte sucede algo similar: siguiendo la evolución natural histórica, surgen las opciones pasaporte estilo americano. Siu-Shing Chan en [25] plantea el problema de valuación de una opcion pasaporte estilo americano mediante desigualdadades variacionales y las combina con la ecuación de HJB.

Hasta el momento sólamente hemos hablado de opciones de tipo europeo, es decir, que son ejercidas a la fecha de expiración de la opción. Recordando que un inversionista compra y vende un determinado número de lotes de alguna acción en el mercado financiero durante un tiempo determinado, al final el inversionista obtendrá un resultado de ganancias o pérdidas. En la opción pasaporte estilo europeo, si es el caso, las ganancias sólo se le

darán al inversionista a la fecha de vencimiento de la opción pasaporte, si el inversionista quisiera salir del mercado antes, lo puede hacer, sólo que sus ganancias se le entrgarán hasta el final del contrato.
Las opciones pasaporte estilo americano puede ser ejercida en cualquier momento durante la vida de la opción. Esto le da ventaja al inversionista de poder cerrar su cuenta y retener las ganancias antes del vencimiento de la opción.
Sea $\tau : \Omega \longrightarrow [0,T]$ el tiempo de paro tal que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall 0 \leq t < T$. Considere que la función de pagos de la opción al tiempo t esta dado por $(X_t^u)^+$, para una estrategia dada u. Supondremos que el inversionista adopta una estrategia de ejercicio fija en τ entonces el precio de mercado de la opción en t es el precio de la opción pasaporte europea cuyo valor esta dado por

$$V(x,t,\tau) = \sup_{u\in[-1,1]} \mathrm{E}^{Q^*}\left[e^{-r(\tau-t)}(X_\tau^u)^+|\mathcal{F}_t\right]. \tag{9.1}$$

ahora si consideramos al conjunto de todos los tiempos de paro en el intervalo $s \leq \tau \leq t$ y lo denotamos por Γ_s^t entonces

$$v(x,t) = \sup_{\tau\in\Gamma_t^T} V(x,t,\tau) = \sup_{\tau\in\Gamma_t^T} \sup_{u\in[-1,1]} \mathrm{E}^{Q^*}\left[e^{-r(\tau-t)}(X_\tau^u)^+|\Im_t\right]. \tag{9.2}$$

Si existe un paro τ^* tal que resuelva el problema (9.2), entonces la solución $v(x,0)$ es el precio de mercado de la opción pasaporte americana.
(Siu-Shing Chan en [25]), da una aproximación a una **EDP** para obtener una representación de la opción pasaporte americana mediante un problema de complementariedad lineal, y cuyo precio puede ser encontrado al resolver un sistema de desigualdades lineales.
Se disminuye la dimensión del problema haciendo el cambio de variable $x_t = X_t/S_t$, y $v(x,t) = V(S,X,t)/S_t$ para toda $t \in [0,T]$ y la estrategia de ejercicio óptimo en τ^* dada por

$$\tau^* = \inf\left\{s \in [t,T] : v(x,s) = (x_\tau^{u^*})^+\right\}, \tag{9.3}$$

en la que el precio de la opción pasaporte americana es

$$v(x,t) = \sup_{\tau\in\Gamma_t^T} \mathrm{E}^{Q^*}\left[e^{-r(\tau-t)}(x_\tau^{u^*})^+|\Im_t\right] = \mathrm{E}^{Q^*}\left[e^{-r(t-\tau^*)}(x_{\tau^*}^{u^*})^+|\Im_t\right]. \tag{9.4}$$

La idea es dar la representación del problema del paro óptimo mediante desigualdad variacional. Siguiendo los argumentos de ausencia de arbitraje se muestra que el problema en (9.2) puede ser representado por la solución a un problema de desigualdad variacional y combinando los resultados de el principio de programación dinámica y la noción de soluciones de viscosidad.

Se define un operador diferencial parcial igual a la ecuación (6.15) y así se puede simplificar la notación del valor de la opción pasaporte europeo como:

$$\begin{cases} Lv(w,t) = fv(w,t), & (w,t) \in \Omega \times [0,T]. \\ \\ v(w,T) = w_T^+, & (w,T) \in \Omega \times \{T\}. \end{cases}$$

Entonces el tiempo de ejercicio óptimo es el primer momento donde $v(w,\tau^*) = w_{\tau^*}^+$ en donde $\tau^* = \inf\{s \in [0,T] : v(w,t) = w_t^+\}$. Para $t < \tau^*$ tenemos que $v(w,t) > w_t^+$.

Definamos dos conjuntos

$$C = \{(w,t) \in \Omega \times [0,T) : v(w,t) > w_t^+\},$$

$$E = \{(w,t) \in \Omega \times [0,T) : v(w,t) = w_t^+\},$$

a C se le llama región de continuación y E es la región de ejercicio. La estrategia será esperarse en C y ejercer en E, es decir, ejercer la primera vez que el proceso w_t toque la región E.

En la región de ejercicio es claro que para todo punto en E tenemos $v(w,t) = w_t^+$. Supongamos que $w_t > 0$, entonces $v(w,t) = w_t$. Además en la region de ejercicio el proceso de ganancias por tasa libre de riesgo debe de ser mayor el rendimiento de la acción. De aqui $Lv(w,t) - fv(w,t) \leq 0$ y por otro lado, cuando $w_t \leq 0$, $v(w,t) = 0$. Y $Lv(w,t) = fv(w,t)$. Entonces

$$v(w,t) = w_t^+, \qquad \text{y } fv(w,t) \geq v(w,t) \qquad (w,t) \in E. \tag{9.5}$$

Y en la region de continuación tenemos que $v(w,t) > w_t^+$ para todo punto en C y se considera como una europea, es decir que cumple con

$Lv(w,t) = fv(w,t)$. Entonces obtenemos

$$v(w,t) > w_t^+ \qquad y \qquad fv(w,t) = Lv(w,t), \quad (w,t) \in C. \tag{9.6}$$

combinando ambos resultados obtenemos una representación de desigualdad variacional. Ahora hay que tener en cuenta que el operador diferencial es no lineal.
La representación del problema complementario lineal de la función v se resuelve con la proposición siguiente.
Sea z^*, $z(w,t) : \Re \times [0,T] \longrightarrow \Re_+$ es alguna función de valores reales. Defina el siguiente operador diferencial.

$$\begin{cases} D(v,z)(w,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + (r-f)(1-w)\frac{\partial v}{\partial w} + (\frac{1}{2}(1+w^2)-w)\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + 2z \\ G(v,z)(w,t) = (r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - w\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + z. \end{cases}$$

El valor de la función v definida en (9.2) satisface el siguiente sistema de desigualdad varacional lineal:

$$\begin{cases} Para\ toda\ (w,t) \in \Re \times [0,T], \\ fv(w,t) \geq D(v,z)(w,t) \quad y \quad v(w,t) \geq w_t^+(u^*) \\ G(v,z)(w,t) \geq 0 \quad y \quad z(w,t) \geq 0 \\ (fv - D(v,z)(w,t)) \cdot \big(v(w,t) - x_t^+(u^*)\big) = 0 \\ G(v,z)(w,t) \cdot z(w,t) = 0 \\ v(w,T) = w_T^+(u^*), \quad para\ toda\ w \in \Re. \end{cases}$$

Y la estrategia de inversión optima es

$$u^* = \operatorname{sgn}(z^* - z). \tag{9.7}$$

En la demostracion[1] se define la descomposición

$$\left|(r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - x\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial w^2}\right| = z^* + z,$$

tal que

$$(r-f)\frac{\partial v}{\partial w} - w\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial w^2} = z^* - z,$$

[1] De la descomposición se obtiene la desigualdad variacional para $G(v,z)$ y de la desigualdad variacional de (9.5) y (9.6) se obtiene $D(v,z)(w,t)$ para detalles de la prueba puedes consultar [25]

$$(z^*, z) \geq 0 \quad y \quad z^* \cdot z = 0.$$

En donde se trasforma una ecuación no lineal Hamilton-Jacobi-Bellman en un sistema de desigualdad varacional.

Para obtener una solución numérica se necesitan métodos numéricos para la solución del sistema de desigualdades lineales, tales como PATH que es un sistema para una clase conocida como Mixed Complementary Problems (MCP)

Capítulo 10

La Razón De Cobertura y Paridad de Put-Call

Encontrar una estrategia que permita estar preparado ante el posible ejercicio por parte del poseedor de una opción, es siempre importante. El vendedor de una opción pasaporte debe asegurar el pago en caso de ejercicio, sin importar cuál haya sido la estrategia del comprador de la opción. En este capítulo se analizan las condiciones necesarias para que el emisor de una opción pasaporte pueda cubrirse de su posible ejercicio. Se encuentra la paridad de put-call. Este material es tomado de Shreve y Večeř en [23], secciones 5 y 8.

En la publicación de Black y Scholes (1973) se da una relación que permite al vendedor de la opción estar preparado para una posible reclamación del comprador de la opción, con el fin de cumplir su obligación. Recordando que una opción es el derecho que tiene el poseedor de comprar (Call) o vender (Put) un activo subyacente a una fecha determinada, de alguna manera el emisor debe de prepararse para alguna posible reclamación del poseedor de la opción. La idea básica es construir un portafolio Π que consista de comprar una opción de compra C y vender k partes del activo S para que así Π sea libre de riesgo para una cantidad infinitesimal de tiempo[1].

$$\Pi = C - kS. \tag{10.1}$$

El parámetro de cobertura en el modelo de Black-Scholes es

$$k = \frac{\partial C}{\partial S} = \Delta. \tag{10.2}$$

Así que siguiendo la misma idea, se puede dar una "Delta" para opciones pasaporte, aunque la dificultad de los cálculos numéricos es mayor[2]

10.1. La estrategia óptima

Portafolios que contengan opciones pasaporte pueden ser inmunizadas a cambios infinitesimales en las ganancias en acciones por

$$k = v + (u^* - w)\frac{\partial v}{\partial w}. \tag{10.3}$$

Cuando $u^*(S)$ cambia en el signo, k(w) muestra un salto. Esto implica que el emisor de la opción necesita conocer la estrategia del poseedor de la opción, para así ser capaz de cubrirse y estar preparado, es decir, el inversionista no tiene que realizar la operación por él mismo sino que tiene que comunicarselo al emisor de la opción para que este realice la operación y además haga las acciones necesarias para cubrirse.

10.1.1. La estrategia de cobertura para el emisor

A continuación se enuncia un resultado que muestra en caso de que el poseedor de la opción decida seguir la estrategia óptima u^* dada por la ecuación (7.16), el emisor puede cubrirse perfectamente. En la situación de que el poseedor halla elegido cualquier otra estrategia distinta a la óptima, es posible para el emisor estar cubierto y además consumir parte de ese capital. Sea p_t el numero de lotes del bien subyacente que el emisor de la opción posee

[1]Para ser más precisios en el lenguaje financiero, Black y Scholes consideran un portafolio corto en la opción y largo en el activo.

[2]Jürgen T. en [17] y Pooley D. [21] dan aproximaciones del problema numérico mediante Elemento Finito

al tiempo t y c_t la tasa no negativa a la cual el vendedor consume el activo al tiempo t. El valor de su portafolio inicial es

$$X_0^p = V^{[a,b]}(0, S_0, X_0) = X_0, \tag{10.4}$$

y su dinámica de comportamiento satisface la **EDE**

$$dX_t^p = rX_t^p dt + p_t\sigma_t dW_t^* - c_t dt. \tag{10.5}$$

La estrategia de cobertura debe garantizar que $X_T^p \geq [X_T^u]^+$ casi seguramente. El siguiente teorema muestra en que condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad anterior.
Sea el proceso $\{X_t^p\}$ con $t \in [0, T]$ definido por (10.4) y (10.5) y p_t, c_t definidos como

$$p_t = V_s^{[a,b]}(t, S_t, X_t^u) + u_t V_x^{[a,b]}(t, S_t, X_t^u) \tag{10.6}$$

$$c_t = \frac{1}{2}\sigma S_t^2 \left(2(u_t^* - u_t)V_{sx}^{[a,b]} + ((u_t^*)^2 - u_t^2)V_{xx}^{[a,b]}\right) \geq 0, \tag{10.7}$$

entonces

$$X_T^p = [X_T^u]^+, \qquad c.s. \tag{10.8}$$

Prueba:
Se tiene que la ecuación de HJB es

$$-rV + V_t + rS_tV_s + rX_t^uV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \max_{u\in[a.b]}(V_{ss} + 2uV_{sx} + u^2V_{xx}) = 0, \tag{10.9}$$

o equivalentemente

$$-rV + V_t + rS_tV_s + rX_t^uV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2(V_{ss} + 2u^*V_{sx} + (u^*)^2V_{xx}) = 0. \tag{10.10}$$

Aplicando la fórmula de Ito se obtiene

$$\begin{aligned} d\left(e^{-rt}V(t, S_t, X_t^u)\right) &= e^{-rt}\sigma S_t[V_s + u_tV_x]dW_t^* + \\ e^{-rt}\left[-rV + V_t + rS_tV_s + rX_t^uV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2(V_{ss} + 2u_tV_{sx} + u_t^2V_{xx})\right]dt &= \\ e^{-rt}p_t\sigma S_t dW_t^* - e^{-rt}c_t dt &= \\ d\left(e^{-rt}dX_t^p\right). \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de t=0 a t=T se obtiene finalmente

$$e^{-rT}[X_T^u]^+ = e^{-rT}V(T, S_T, X_T^u) = e^{-rT}X_T^p.$$

10.1.2. La estrategia óptima del comprador

Ya se ha visto en capítulos anteriores que la estrategia óptima del poseedor de la opción esta dada por las ecuaciones (7.7), (7.15) y (7.16) para opciones sobre cuentas de inversión cuyo activo subyacente tiene una dinámica del tipo $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, además, la cuenta de inversión satisface $dX_t^u = rX_t dt + u_t \sigma S_t dW_t$ y $X_0^u = X_0$. En el caso de la opción pasaporte clásica la estrategia óptima $u_t^* = -\text{sgn}(X_t^{u^*})$ y las estrategias relacionadas con las ecuaciones (6.18) para funciones cuya función de pagos no son convexas[3].

10.2. Paridad de compra y venta

La Paridad compra-venta es la propiedad que permite obtener una relación entre una opción de venta dado que conocemos el valor de una opción de compra y viceversa. En términos generales la paridad de compra y venta consiste en comprar un portafolio que garantiza la cobertura al momento del vencimiento de las opciones involucradas. Lo anterior se logra a través de una opción de venta europeo y la conservación de la acción. Esta estrategia es equivalente a vender la acción, comprar una opción de compra europeo e invertir la diferencia en renta fija.
La ecuación que representa la estrategia anterior es

$$C + VP(X) = P + A, \tag{10.11}$$

donde C=Valor de la opción de compra europeo; VP(X) = valor presente del precio de ejercicio; P=valor de la opción de venta; y, A=valor de la acción. Ahora la paridad generalizada para opciones pasaporte es:

$$V(t, S_t, X_t) - V(t, S_t, -X_t) = X_t, \tag{10.12}$$

y la relación generalizada para opciones sobre una cuenta de inversión general es

$$V^{[a,b]}(t, S_t, X_t) - V^{[-b,-a]}(t, S_t, -X_t) = X_t. \tag{10.13}$$

[3]Cabe mencionar que estas fórmulas se publicaron mal en [2] y se corrigieron en [17].

Prueba

El cambio de variable

$$Z_t^{[a,b]} = \frac{X_t}{S_t} - \frac{a+b}{2}, \tag{10.14}$$

correspondientes a las estrategias de inversión admisibles en el intervalo [a, b]. Ahora, el cambio de variable que corresponde a la opción con restriccion $u_t \in [a,b]$ es

$$Z_t^{[-b,-a]} = \frac{X_t}{S_t} + \frac{a+b}{2}, \tag{10.15}$$

las ecuaciones (10.14) y (10.15) satisfacen la **EDE** :

$$dZ_v = -\left(Z_v + \frac{b-a}{2}\mathrm{sgn}(Z_v)\right)\sigma dW_v^*. \tag{10.16}$$

Según (7.13) y (7.14).

$$V^{[a,b]}(t, S-t, X_t) = S_t \mathrm{E}^{Q^*}\left[\left(Z_T^{[a,b]} + \frac{a+b}{2}\right)^+ \Big| Z_t^{[a,b]} = \frac{X_t}{S_t} - \frac{a+b}{2}\right], \tag{10.17}$$

y

$$V^{[-b,-a]}(t, S_t, X_t) = S_t \mathrm{E}^{Q^*}\left[\left(Z_T^{[-b,-a]} - \frac{a+b}{2}\right)^+ \Big| Z_t^{[-b,-a]} = \frac{X_t}{S_t} + \frac{a+b}{2}\right]. \tag{10.18}$$

En el caso de la restricción [a,b], se toma la condición inicial $S_t = s, X_t = x$. En el caso de la restricción [-b,-a], se toma la condición inicial $S_t = s, X_t = -x$. Esto lleva a

$$-Z_t^{[-b,-a]} = \frac{x}{s} - \frac{a+b}{2} = Z_t^{[a,b]}. \tag{10.19}$$

$$\mathrm{d}\left(-Z_v^{[-b,-a]}\right) = -\left((-Z_v^{[-b,-a]}) + \frac{b-a}{2}\right)\mathrm{sgn}(-Z_v^{[-b,-a]})\sigma \mathrm{d}W_v^{Q^*}. \tag{10.20}$$

Usando el teorema de comparación de medias de Hayek se demuestra en [27] que $-Z^{[-b,-a]}$ y $Z^{[a,b]}$ tienen la misma distribución y además se demuestra que

$$V^{[-b,-a]}(t, S-t, X_t) = S_t \mathrm{E}^{Q^*}\left[\left(Z_T^{[a,b]} + \frac{a+b}{2}\right)^- \Big| Z_t^{[a,b]} = \frac{X_t}{S_t} - \frac{a+b}{2}\right]. \tag{10.21}$$

A partir de la relación $x = x^+ - x^-$, las ecuaciones (10.14) y (10.15), y usando el factor de que$Z^{[a,b]}$ es martingala

$$\begin{aligned} V^{[a,b]}(t, S_t, X_t) - V^{[-b,-a]}(t, S_t, -X_t) &= S_t \mathrm{E}^{Q^*}\left[Z_T^{[a,b]} + \frac{a+b}{2}\Big| Z_t^{[a,b]} = \frac{X_t}{S_t} - \frac{a+b}{2}\right] \\ &= X_t. \end{aligned} \tag{10.22}$$

La paridad de compra-veta usual para opciones de primera generación entonces es

$$V^{[1]}(t, S_t, X_t) - V^{[-1]}(t, S_t, -X_t) = X_t,$$

donde

$$X_t = S_t - e^{-r(T-t)}K.$$

Capítulo 11

Diferencias Finitas

Como hemos mencionado reiteradamente en capítulos anteriores, una forma de valuar derivados es encontrar una ecuación diferencial parcial que represente su dinámica. Un problema mayor es casi siempre encontrar la solución a esa ecuación diferencial parcial, y la dificultad aumenta con la complejidad del derivado. El método de diferencias finitas se utiliza para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, y se puede aplicar a diversas ramas de la Ingeniería y las Ciencias; en particular, es muy popular en las finanzas modernas y valuación de derivados. Por ello, me parece importante dedicar un capítulo a la teoría básica, aplicándola a su vez a la valuación de las opciones pasaporte. La teoría de este capítulo esta basada en Dewynne, Howison y Wilmott [4] y [5]. La aplicación a las opciones pasaporte esta basada en Pooley [21].

Existen dos formas de valuar derivados financieros, una es expresar el instrumento derivado como el valor esperado (bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo) de la función de pagos traída a valor presente. En ocasiones, como se vio en el capítulo 4, es posible encontrar el precio mediante una forma explícita, pero como sucede con la mayoría de los problemas más complejos, no siempre es posible encontrar una fórmula como en Black y Sholes . Es por eso que existen los llamados métodos numéricos como la integración numérica, simulación montecarlo y árboles de probabilidad.

La otra alternativa de valuación es expresar el precio como la solución de una Ecuación Diferencial Parcial **EDP** con condiciones de contorno, la cual puede obtenerse directamente aplicando los criterios de ausencia de oportunidades de arbitraje. En la mayoría de los casos la solución de dichas ecuaciones diferenciales exige el uso de un método numérico. El método de Diferencias Finitas se presenta como una alternativa altamente eficaz y sencilla para resolver la ecuación.
La **EDP** que represente matemáticamente el comportamiento de los factores que lo integra queda bien definido por sus condiciones de frontera, condiciones finales y ciertas hipótesis (como por ejemplo: la ausencia de arbitraje, no existen costos de transacción, divisibilidad del activo, etc.) es decir, la unicidad de la solución viene marcada por la imposición de condiciones de contorno que se dividen en las condiciones finales y las condiciones de frontera. Las condiciones de frontera definen el valor de la solución o de sus derivadas en los extremos de la dimensión S del dominio de la solución y las condiciones finales define la solución para un instante final T. Típicamente, esta será el pago del derivado a vencimiento T.

En general una ecuación que representa el comportamiento de un fenómeno, depende del número de factores que lo integran. En el caso de las opciones pasaporte los factores más significativos son el activo subyacente, el tiempo y la cuenta de inversión.[1] Por lo que tenemos en el dominio de la función tres dimensiones.

$$V^u(t, S, X).$$

Al aplicar el método numérico de Diferencias Finitas tenemos que considerar un grid o mallado del espacio donde se encuentra la solución de la ecuación. Por lo que respecta a las opciones pasaporte, el dominio de definición es de dimensión tres, lo que implica que el mallado es un hipermallado de tres dimensiones. A éste se le conoce como discretización del volumen finito. En general a problemas que incluyen dos factores de riesgo (como pueden

[1]Se pueden agregar factores como dividendos, costo de acarreo, rendimientos de la cuenta; Como lo presenta M. Yor, Delbaen en [3], pero estos factores no afectan la dimensión de problema si son considerados determinísticos

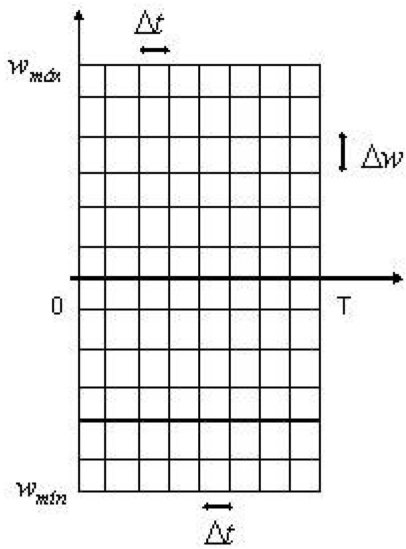

Figura 11.1: Discretización del dominio constituido por las variable w y t

ser las opciones asiáticas o donde se incluye volatilidad estocástica) son abordados mediante éste método numérico. Por lo que respecta a ésta tesis no abordaremos mucho en este problema que es algo complicado, en [21] se hace un análisis de la potencia numérica del método de diferencias finitas y elemento finito aplicado a las opciones pasaporte.
Para el caso de la opción pasaporte clásica en donde la función de pagos es convexa el cambio de variable $w = X/S$ reduce la dimensión de la ecuación

$$V(t, S, X) = Sv(t, w),$$

así volvemos a un mallado en el espacio del domino (Ver Fig(11.1)).

Los puntos del mallado pueden representarse

$$(n\Delta t, m\Delta w) \qquad n = 0, ..., T. \quad m = m_{\text{mín}}, ..., m_{\text{máx}}.$$

denotaremos los valores de la función en el punto (n, m) del dominio como

$$v_n^m = v(n\Delta t, m\Delta w).$$

La idea básica sobre el método de Diferencias Finitas es recorrer los puntos de la malla de una manera conveniente y así poder aproximarnos a la solución real tanto como sea posible dadas las condiciones de contorno. El otro argumento importante es la discretización de la ecuación diferencial parcial. Considere por ejemplo, la derivada parcial $\partial v/\partial t$ que se define como el límite de la diferencia

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,w) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t,w)-v(t,w)}{\Delta t},$$

Si en lugar de llevar a Δt al límite lo interpretamos como un número suficientemente pequeño pero distinto de cero, obtendremos una aproximación a la derivada

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,w) \approx \frac{v(t+\Delta t,w)-v(t,w)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ pequeño},$$

a la ecuación anterior se le conoce como la aproximación por diferencia finita de $\partial v/\partial t$ porque involucra una diferencia pequeña, pero no infinitesimal de la variable dependiente v. A esta aproximación en particular, se le conoce como diferencia por la derecha[2] pues en la aproximación, solamente se toman los valores valuados de $v()$ en el tiempo t y el tiempo $t+\Delta t$. También nos podemos aproximar a la misma parcial por la izquierda[3]

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,w) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v(t,w)-v(t-\Delta t,w)}{\Delta t}.$$

de la siguiente manera

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,w) \approx \frac{v(t,w)-v(t-\Delta t,w)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ pequeño},$$

a la aproximación anterior se le conoce como diferencia por la izquierda. y finalmente tenemos la diferencia central

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,w) \approx \frac{v(t+\Delta t,w)-v(t-\Delta t,w)}{2\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ pequeño},$$

[2]El término en inglés es el de Forward Difference ver [4]. En lo que refiere a esta tesis, se utilizará la expresión que se usa más comúnmente en Cálculo, aproximación por la derecha, por la izquierda y central.

[3]El término en inglés con el que se definió en [4] fué Backward Difference

al sustituir en la ecuación diferencial la aproximación por la derecha se obtiene un esquema que se le conoce como **Método Implícito**, cuando se utiliza la aproximación por la izquierda se dice que es un esquema **Explícito**, la diferencia central se utiliza particularmente en el esquema de *Crank-Nicolson*.
Análogamente se definen las aproximaciones de la parcial de v con respecto a w.

$$\frac{\partial v}{\partial w}(t,w) \approx \frac{v(t,w+\Delta w)-v(t,w)}{\Delta w}, \qquad \Delta w \text{ pequeño}, \quad \text{Aprox. por la derecha;}$$
$$\frac{\partial v}{\partial w}(t,w) \approx \frac{v(t,w)-v(t,w-\Delta w)}{\Delta w}, \qquad \Delta w \text{ pequeño}, \quad \text{Aprox. por la izquierda;}$$
$$\frac{\partial v}{\partial w}(t,w) \approx \frac{v(t,w+\Delta w)-v(t,w-\Delta w)}{2\Delta w}, \qquad \Delta w \text{ pequeño}, \quad \text{Aprox. central;}$$

Para las segundas derivadas parciales, tales como $\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}$, podemos definir aproximaciones por diferencias finitas por la regla:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}(t,w) = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\Delta w}\left(\frac{\partial v}{\partial w}(t,w+\Delta w)-\frac{\partial v}{\partial w}(t,w)\right) \quad \text{Diferencia por la derecha;}$$

Análogamente para las aproximaciones por la izquierda y la central de la parcial de segundo orden;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}(t,w) = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\Delta w}\left(\frac{\partial v}{\partial w}(t,w)-\frac{\partial v}{\partial w}(t,w-\Delta w)\right) \quad \text{Diferencia por la izquierda;}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}(t,w) = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\Delta w}\left(\frac{\partial v}{\partial w}(t,w+\Delta w/2)-\frac{\partial v}{\partial w}(t,w-\Delta w/2)\right) \quad \text{Diferencia central;}$$

La **EDP** que representa el precio de una opción pasaporte dada por [16] es:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial V^u}{\partial t} &= -rV^u + (r-f)S\frac{\partial V^u}{\partial S} - ((f-r+c)uS - r_t X)\frac{\partial V^u}{\partial X} \\ &+ \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V^u}{\partial S^2} + 2u\frac{\partial^2 V^u}{\partial S\partial X} + u^2\frac{\partial^2 V^u}{\partial X^2}\right),\end{aligned} \tag{11.1}$$

Con condición final:

$$V(t = T, S, X) = \text{máx}(X_T, 0). \tag{11.2}$$

donde

- X es la ganancia acumulada de la cuenta de inversión del activo, y $-\infty \leq X \leq \infty$.
- r es la tasa de interés libre de riesgo.
- f es una tasa de dividendo sobre el activo subyacente S.
- c es la tasa del costo de acarreo.
- t es el tiempo.
- $r_(t)$ es la tasa a la cual esta invertida las ganancias $X(t)$.
- u(t) representa una estrategia de inversión, el inversionista tiene u unidades al precio S(t) al tiempo t.

El valor de la opción esta denotada como V^u para representar la dependencia explicita sobre la no especificada estrategia de inversión $u(t)$.

Las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} V^u(t, X, 0) &= \text{máx}(0, X). \\ \frac{\partial^2 V^u(t, X, \infty)}{\partial S^2} &= 0. \\ V^u(t, -\infty, S) &= 0. \\ V^u(t, \infty, S) &= X. \end{aligned}$$

y La estrategia u esta limitada a $|u(t)| \leq 1 \; \forall t$. Aplicando el principio de programación dinámica, la ecuación de **HJB** dada por la ecuación (7.2) con a=-1 y b=1 da

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t} &= -rV + (r - f)S\frac{\partial V}{\partial S} + \\ &+ \max_{|u| \leq 1}\left\{-((f - r + c)uS - r_t X)\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2u\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial X} + u^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Resolviendo esta ecuación maximizamos el valor de la opción al determinar la estrategia de inversión optima u^*.
La reducción $V(t,X,S) = Sv(t,X/S) = Sv(t,w)$ reduce la ecuación anterior a

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial v}{\partial t} &= -fv+ \\
&+\max_{|u|\leq 1}\left\{((r-f-c)u-(r-f-r_t)w\frac{\partial v}{\partial w}+\frac{\sigma^2}{2}(w-u)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\},
\end{aligned}
\tag{11.4}
$$

donde $w = X/S$, $-\infty \leq w \leq \infty$.Con función de pagos definida por

$$v(t=T,w) = \max(0,w), \tag{11.5}$$

con condición de frontera para ésta función de pagos

$$
\begin{aligned}
v(t,w \longrightarrow -\infty) &= 0. \\
v(t,w \longrightarrow \infty) &= w.
\end{aligned}
$$

La ecuación (11.4) puede escribirse como las ganancias máximas de la estratagia optima

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = -fv+((r-f-c)u^*-(r-f-r_t)w)\frac{\partial v}{\partial w}+\frac{\sigma^2}{2}(w-u^*)^2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}, \tag{11.6}$$

donde

$$u^* = \operatorname{sgn}\left((r-f-c)\frac{\partial v}{\partial w}-\sigma^2 w\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\right). \tag{11.7}$$

La ecuación anterior también puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial v}{\partial t} = -fv + (-r-f-c)w)\frac{\partial v}{\partial w}+\frac{\sigma^2}{2}(w^2+1)\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}+ \\
+\left|(r-f-c)\frac{\partial v}{\partial w}-\sigma^2 w\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\right|.
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

Para funciones de pagos generales, la ecuación (11.6) queda igual, pero el control especificado por (11.7) se convierte en

$$
u^* = \begin{cases}
\Psi & \text{si } \Psi(t,w) \in [-1,1] \text{ y } \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} < 0 \\
\operatorname{sgn}(-\Psi\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}) & \text{otro caso,}
\end{cases}
$$

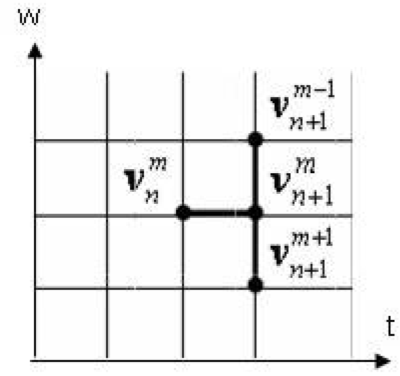

Figura 11.2: Método Explícito

donde

$$\Psi(w,t) = w - \frac{r-f-c}{\sigma^2}\frac{\frac{\partial v}{\partial w}}{\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}}. \tag{11.9}$$

Para el interés de esta tesis sólo abordaremos el caso donde la función de pagos es convexa, es decir, cuando u_{ww} es positiva. Para el caso general donde la función de pagos no es convexa (ver [21]).
Una aproximación a la **EDP** con Diferencias finitas es el llamado **Método Explícito**, se dice que es un método Explícito porque se usan tres puntos conocidos para obtener uno no conocido (Ver Fig. 11.2). Es muy importante hacer la aclaración que a diferencia de la conocida ecuación de calor (que es el ejemplo clásico de discretización de una ecuación diferencial parcial, ver [4] y [5]) en una opción, digamos una europea de compra o una pasaporte, el tiempo tiene que ir en decremento, por que tenemos condición final, es decir, que tenemos que iniciar desde el instante T en donde tenemos que la opción vale $\max(S_T - K, 0)$ en la opción de compra europeo con precio de ejercicio K y $\max(X, 0)$ en la pasaporte europeo y en la discretización nos tomamos tres puntos del eje espacial al instante N para encontrar uno en el instante $N-1$ y así hasta llegar al instante 0 y la diferencia con la ecuación de calor es que el tiempo se considera de una manera creciente (lo que es obvio).

Así que utilizando la aproximación por la derecha del tiempo y usando la notación descrita anteriormente para el valor de la función en un punto

(n+1,m)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t+\Delta t, w) \approx \frac{v(t+\Delta t, w) - v(t,w)}{\Delta t} = \frac{v_{n+1}^{m} - v_{n}^{m}}{\Delta t}.$$

si aproximamos la parcial de v con respecto a w con una diferencia central

$$\frac{\partial v}{\partial w}(t, w) \approx \frac{v(t+\Delta t, w+\Delta w) - v(t+\Delta t, w-\Delta w)}{2\Delta w} = \frac{v_{n+1}^{m+1} - v_{n+1}^{m-1}}{2\Delta w}.$$

y la diferencia central para la segunda parcial con respecto a w dada por

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}(t, w) \approx \frac{v_{n+1}^{m+1} - 2v_{n+1}^{m} + v_{n+1}^{m-1}}{(\Delta w)^2},$$

y substituyendo en la ecuación (11.6)

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{v_{n+1}^{m} - v_{n}^{m}}{\Delta t}\right) = \\ &- f v_{n+1}^{m} + \Big((r-f-c)u_{n+1}^{*} - (r-f-r_t)w_{n+1}^{m}\Big)\left(\frac{v_{n+1}^{m+1} - v_{n+1}^{m-1}}{2\Delta w}\right) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2}(w-u^*)^2\left(\frac{v_{n+1}^{m+1} - 2v_{n+1}^{m} + v_{n+1}^{m-1}}{(\Delta w)^2}\right). \end{aligned} \tag{11.10}$$

reordenando términos y simplificando la notación

$$v_{n}^{m} = A v_{n+1}^{m} + B v_{n+1}^{m+1} + C v_{n+1}^{m-1}, \tag{11.11}$$

donde

$$A_{\text{Explícito}} = 1 - \Delta t\Big(f + \frac{\sigma^2 (w_{n+1} - u^*)^2}{(\Delta w)^2}\Big).$$

$$B_{\text{Explícito}} = \Big(\frac{R}{\Delta w} + \frac{\sigma^2}{(\Delta w)^2}(w_m - u^*)^2\Big)\frac{\Delta t}{2}.$$

$$C_{\text{Explícito}} = \frac{\sigma^2}{(\Delta w)^2}(w_m - u^*)^2\frac{\Delta t}{2} - \frac{R}{2\Delta w}\Delta t.$$

$$R = (r - f - c)u^* - (r - f - r_t)w_m.$$

El control óptimo es una variable que depende directamente de las derivadas parciales de v con respecto a w, por lo que también se tiene que discretizar usando la misma idea de aproximar las derivadas parciales con la diferencia finita central, representamos a la ecuación (11.7) como

$$(u_n^m)^* = \operatorname{sgn}\left((r - f - c)\left(\frac{v_{n+1}^{m+1} - v_{n+1}^{m-1}}{2\Delta w}\right) - \sigma^2 w_{n+1}^m \left(\frac{v_{n+1}^{m+1} - 2v_{n+1}^m + v_{n+1}^{m-1}}{(\Delta w)^2}\right)\right)$$

y finalmente tendremos que reagrupar los términos de esta discretización con los de la ecuación (11.10). Con esto tenemos un sistema explícito que depende de valores ya conocidos para obtener uno desconocido y así recursivamente. En este momento ya terminamos de construir el proceso que resuelve la ecuación diferencial parcial, por lo que ya es posible implantarse en un lenguaje de programación.

Método Implícito

Ahora considere que utilizamos la ecuación (11.6) con una aproximación del tiempo por la izquierda, con la diferencia finita

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, w) \approx \frac{v(t + \Delta t, w) - v(t, w)}{\Delta t}.$$

Además de la primera y segunda parcial con respecto a w

$$\frac{\partial v}{\partial w}(t, w) \approx \frac{v_n^{m+1} - v_n^{m-1}}{2\Delta w} = \frac{v_n^{m+1} - v_n^{m-1}}{\Delta w}.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}(t, w) \approx \frac{v_n^{m+1} - 2v_n^m + v_n^{m-1}}{(\Delta w)^2}.$$

y substituiremos las diferencias finitas en la ecuación (11.6)

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{v_{n+1}^m - v_n^m}{\Delta t}\right) = \\
&- f v_n^m + \Big((r-f-c)u_m^* - (r-f-r_t)w_m\Big)\left(\frac{v_n^{m+1} - v_n^{m-1}}{2\Delta w}\right) + \\
&+ \frac{\sigma^2}{2}(w_m - u_m^*)^2\left(\frac{v_n^{m+1} - 2v_n^m + v_n^{m-1}}{(\Delta w)^2}\right),
\end{aligned} \tag{11.12}
$$

o reagrupando términos

$$
v_{n+1}^m = A v_n^{m-1} + B v_n^m + C v_n^{m+1}, \tag{11.13}
$$

donde

$$
A_{\text{Implícito}}^m = \Delta t\Big(\frac{R}{2\Delta w} - \frac{\sigma^2}{2(\Delta w)^2}(w_m - u^*)^2\Big).
$$

$$
B_{\text{Implícito}}^m = \Delta t f + \frac{\sigma^2 \Delta t}{(\Delta w)^2}(w_m - u^*)^2 + 1.
$$

$$
C_{\text{Implícito}}^m = -\frac{\Delta t}{2}\Big(\frac{R}{\Delta w} + \frac{\sigma^2}{(\Delta w)^2}(w_m - u^*)^2\Big).
$$

$$
R^m = (r-f-c)u_m^* - (r-f-r_t)w_m.
$$

Para reducir la notación definimos el término R, observe es una variable que depende directamente de u^* y w por lo que hay que considerar que también se tiene que discretizar de acuerdo a la ecuación

$$
u_m^* = \operatorname{sgn}\left((r-f-c)\Big(\frac{v^{m+1} - v^{m-1}}{2\Delta w}\Big) - \sigma^2 w_m\Big(\frac{v^{m+1} - 2v^m + v^{m-1}}{(\Delta w)^2}\Big)\right).
$$

En esta discretización de la ecuación (11.12) se expresan tres puntos desconocidos que se encuentran en un instante inmediato anterior con un punto conocido del instante final, ver Fig. 11.3.

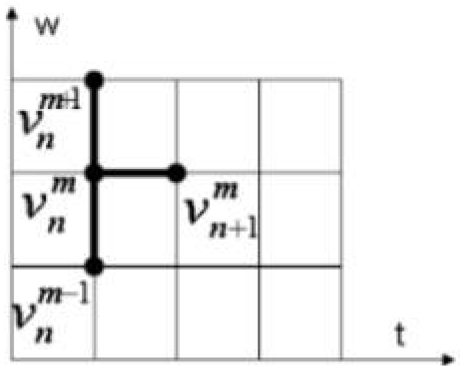

Figura 11.3: Método Implícito

Comenzamos en el tiempo $t = T$ donde conocemos los $w_{max} - w_{min}$ puntos de la condición final, por cada punto en el instante T, tomamos tres puntos del instante $T - 1$, por ejemplo:

$$A^{w_{min+1}} v_{T-1}^{w_{min}} + B^{w_{min+1}} v_{T-1}^{w_{min+1}} + C^{w_{min-1}} v_{T-1}^{w_{min+2}} = v_T^{w_{min+1}},$$

ahora, utilizando las condiciones de frontera, sabemos que $v^{w_{min}} = 0$ y $v^{w_{max}} = w_{max}$ y utilizando todos los puntos del instante $N - 1$ y N obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} B^{w_{min+1}} & C^{w_{min+1}} & 0 & \dots & 0 \\ A^{w_{min+2}} & B^{w_{min+2}} & C^{w_{min+2}} & \dots & 0 \\ 0 & A^{w_{min+3}} & B^{w_{min+3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & A^{w_{max-2}} & B^{w_{max-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n^{w_{min}+1} \\ \vdots \\ v_n^0 \\ \vdots \\ v_n^{w_{max}-1} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} v_{n+1}^{w_{min}+1} \\ \vdots \\ v_{n+1}^{0} \\ \vdots \\ v_{n+1}^{w_{max}-1} \end{pmatrix} - C^{w_{max}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ v_n^{w_{max}}. \end{pmatrix}
$$

podemos representar matricialmente

$$\mathbf{M}\mathbf{v_n} = \mathbf{b_{n+1}},$$

si $B \geq 0$ entonces existe la inversa de $\mathbf{M}$ y así finalmente obtenemos

$$\mathbf{v_n} = \mathbf{M^{-1}}\mathbf{b_{n+1}},$$

donde $\mathbf{M^{-1}}$ es la inversa de la matriz $\mathbf{M}$

de esta manera podremos encontrar v_n de v_{n+1}. Repitiendo los pasos anteriores encontramos v_{n-1} y así sucesivamente hasta llegar a v_0

En general podemos construir un modelo en el cual se relacionen los métodos explícito e implícito.

Método Theta

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{v_{n+1}^m - v_n^m}{\Delta t}\right) = \\
&(1-\theta)\Bigg[-fv_n^m + \Big((r-f-c)u_n^* - (r-f-r_t)w_n\Big)\left(\frac{v_n^{m+1} - v_n^{m-1}}{2\Delta w}\right) + \\
&\qquad + \frac{\sigma^2}{2}(w-u^*)^2\left(\frac{v_n^{m+1} - 2v_n^m + v_n^{m-1}}{(\Delta w)^2}\right)\Bigg] \\
&+\theta\Bigg[-fv_{n+1}^m + \Big((r-f-c)u_{n+1}^* - (r-f-r_t)w_{n+1}\Big)\left(\frac{v_{n+1}^{m+1} - v_{n+1}^{m-1}}{2\Delta w}\right) + \\
&\qquad + \frac{\sigma^2}{2}(w-u^*)^2\left(\frac{v_{n+1}^{m+1} - 2v_{n+1}^m + v_{n+1}^{m-1}}{(\Delta w)^2}\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{11.14}
$$

cuando $\theta = 0$ tenemos el método implícito, con $\theta = 1$ el método explícito y un caso especial es cuando $\theta = 1/2$ pues es el promedio de los dos con el mismo peso de ponderación; se le llama método de discretización por Crank-Nicolson.

Crank-Nicolson

Este método de discretización es una combinación de los métodos explícito e implícito; como tal, se necesitarán de ambos procesos para la solución. Primero reordenaremos los términos en (11.14) de tal manera que de un lado de la igualdad queden todos los valores de la función al momento n y del otro lado de la igualdad al momento $n-1$,

$$\chi^m v_{n-1}^{m-1} + \lambda^m v_{n-1}^m + \rho^m v_{n-1}^{m+1} = Z_n^m = \alpha^m v_n^{m-1} + \beta^m v_n^m + \gamma^m v_n^{m+1}, \tag{11.15}$$

de esta forma podremos resolver explicitamente a Z_n^m iniciando en $n = T$

$$Z_n^m = \alpha^m v_n^{m-1} + \beta^m v_n^m + \gamma^m v_n^{m+1},$$

ya que obtenemos el valor de Z_n^m obtendremos el instante anterior utilizando el otro lado de la igualdad en (11.15) de la misma manera en que resolvimos el problema implícito

$$\chi^m v_{n-1}^{m-1} + \lambda^m v_{n-1}^m \rho^m v_{n-1}^{m+1} = Z_n^m.$$

Un tema importante que no hemos mencionado es el de la convergencia y el de eficiencia de los métodos a la solución. Es trabajo del Análisis Numérico el estudiar si algún método utilizado tiene perturbaciones que afecten a la convergencia. Es apropiado mencionar en este momento que los métodos explicito, implícito y Crank-Nicolson son sólo aproximaciones a la solución real y que como tales los resultados pueden variar según el problema, la metodología y el orden de convergencia, por ejemplo, en la ecuación de Black-Sholes aparece el término delta $\partial V/\partial S$ que al discretizarla lleva a perturbaciones e inestabilidad numérica. Lo que comúnmente se hace es transformarla a la ecuación de calor, que carece del término delta y es mucho más sencilla la discretizacion en diferencias finitas.

Coeficientes Positivos

Pooly (Ver [21]) hizo un estudio acerca de las condiciones que se deben satisfacer en las ecuaciones para valuar opciones pasaporte para obtener una mayor estabilidad. Introducimos algunas definiciones necesarias.

Reescribimos la ecuación (11.14)

$$\begin{aligned} v_{n+1}^m - v_n^m &= (1-\theta)\left[(-\alpha_{n+1}^m - \beta_{n+1}^m - r\Delta\tau)v_{n+1}^m + \alpha_{n+1}^m v_{n+1}^{m-1} + \beta_{n+1}^m v_{n+1}^{m+1}\right] \\ &+ \theta\left[(-\alpha_n^m - \beta_n^m - r\Delta\tau)v_n^m + \alpha_n^m v_n^{m-1} + \beta_n^m v_n^{m+1}\right], \end{aligned} \tag{11.16}$$

ó

$$v_{n+1}^m = c_n^m v_n^m + \sum_{j\in m-1,m+1} c_n^j v_n^j + \sum_{j\in m-1,m+1} c_{n+1}^j v_{n+1}^j \tag{11.17}$$

Definición 11.0.1 *La ecuación (11.16) es una discretización de coeficiente positivos si* $\alpha^m \geq 0$ *y* $\beta^m \geq 0$.

Sea $\Delta w_m^+ = w_{m+1} - w_m$ y $\Delta w_m^- = w_m - w_{m-1}$. Las diferentes aproximaciones a la primera derivada usando notación de subíndice para la parcial de v con respecto a w

$$(v_w)^m_{n,central} = \frac{v_n^{m+1} - v_n^{m-1}}{\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-}.$$

$$(v_w)^m_{n,derecha} = \frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\Delta w_m^+}.$$

$$(v_w)^m_{n,izquierda} = \frac{v_n^m - v_n^{m-1}}{\Delta w_m^-}.$$

Para el término de la segunda derivada, siempre se utilizará la aproximación central.

$$(v_{ww})^m_n = \Gamma^m_n = \sum_{j\in m-1,m+1} \frac{2(v_n^j - v_n^m)}{(w_{m+1} - w_{m-1})\,|w_j - w_m|}.$$

Si utilizamos aproximaciones de diferencias centrales para los términos de la primera derivada en la ecuación (11.14)

$$\alpha^m_{n,central} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u_m^*)^2}{\Delta w_m^-(\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-)} - \frac{r_1 u^* - r_2 w_m}{\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-}\right]\Delta\tau$$

$$\beta^m_{n,central} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u_m^*)^2}{\Delta w_m^-(\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-)} + \frac{r_1 u^* - r_2 w_m}{\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-}\right]\Delta\tau \qquad (11.18)$$

$$\Psi_{m,central} = w_m - \frac{r_1}{2\sigma^2}\frac{(v_{m+1} - v_{m-1})(\Delta w_m^+)(\Delta w_m^-)}{\Delta w_m^-(v_{m+1} - v_m) + \Delta w_m^+(v_{m-1} - v_m)}.$$

donde

$$r_1 = r - f - c.$$

$$r_2 = r - f - r_t.$$

Si $\alpha_{m,central}$ o $\beta_{m,central}$ son negativos (note que w_m, r_1 o r_2 pueden ser negativos) podemos cambiar la aproximación central a una aproximación por la derecha o por la izquierda.

Por ejemplo la aproximación por la derecha

$$\alpha^m_{n,derecha} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_m)^2}{\Delta w^-_m(\Delta w^+_m + \Delta w^-_m)}\right]\Delta\tau$$

$$\beta^m_{n,derecha} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_m)^2}{\Delta w^-_m(\Delta w^+_m + \Delta w^-_m)} + \frac{r_1 u^*_m - r_2 w_m}{\Delta w^+_m}\right]\Delta\tau \qquad (11.19)$$

$$\Psi_{m,derecha} = w_m - \frac{r_1}{2\sigma^2}\frac{(v_{m+1} - v_m)(\Delta w^+_m + \Delta w^-_m)(\Delta w^-_m)}{\Delta w^-_m(v_{m+1} - v_m) + \Delta w^+_m(v_{m-1} - v_m)}.$$

similarmente la aproximación por la izquierda

$$\alpha^m_{n,izquierda} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_m)^2}{\Delta w^-_m(\Delta w^+_m + \Delta w^-_m)} - \frac{r_1 u^* - r_2 w_m}{\Delta w^-_m}\right]\Delta\tau$$

$$\beta^m_{n,izquierda} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_m)^2}{\Delta w^-_m(\Delta w^+_m + \Delta w^-_m)}\right]\Delta\tau \qquad (11.20)$$

$$\Psi_{m,izquierda} = w_m - \frac{r_1}{2\sigma^2}\frac{(v_m - v_{m-1})(\Delta w^+_m)(\Delta w^-_m + \Delta w^+_m)}{\Delta w^-_m(v_{m+1} - v_m) + \Delta w^+_m(v_{m-1} - v_m)}.$$

El tipo de aproximación se puede decidir por medio del algoritmo siguiente:

Algoritmo de desición para obtener un sistema de coeficientes positivos 11.0.1
$u^*_{m,cen}$ = *Ecuación (11.9) usando* $\psi_{m,central}$.

$u^*_{m,der}$ = *Ecuación (11.9) usando* $\psi_{m,derecha}$.

$u^*_{m,izq} =$ *Ecuación (11.9) usando* $\psi_{m,izquierda}$.

Si

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_{m,cen})^2}{\Delta w_m^-(\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-)} - \frac{r_1 u^*_{m,cen} - r_2 w_m}{\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-} \geq 0,$$

y

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_{m,central})^2}{\Delta w_m^-(\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-)} + \frac{r_1 u^*_{m,central} - r_2 w_m}{\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-} \geq 0.$$

Entonces

$$\alpha_m = \alpha_{m,cen}.$$

$$\beta_m = \beta_{m,cen}.$$

Si no se cumple la condición anterior; pero si

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{2(w_m - u^*_{m,der})^2}{\Delta w_m^-(\Delta w_m^+ + \Delta w_m^-)} + \frac{r_1 u^*_{m,der} - r_2 w_m}{\Delta w_m^+} \geq 0,$$

entonces

$$\alpha_m = \alpha_{m,der}. \qquad y \qquad \beta_m = \beta_{m,der}.$$

Y si no

$\alpha_m = \alpha_{m,izq}.$ *y* $\beta_m = \beta_{m,izq}.$

En realidad el algoritmo (11.0.1) no garantiza que los coeficientes α_m y β_m sean positivos por que el tener que cambiar de discretización central a una por la derecha o izquierda en un nodo conflictivo afecta directamente al control, es decir, puede ser que al intercambiar de discretización, el control cambie de valor y de ésta forma el signo del segundo término (término de convección) en α_m o β_m puede ser negativo para cualquier discretización (si u^* no cambia entonces alguna discretización debe dar un coeficiente positivo).

Ahora si estamos en el caso donde tenemos una función de pagos convexa entonces existe un refinamiento $\{w_m\}$ tal que garantiza una discretización

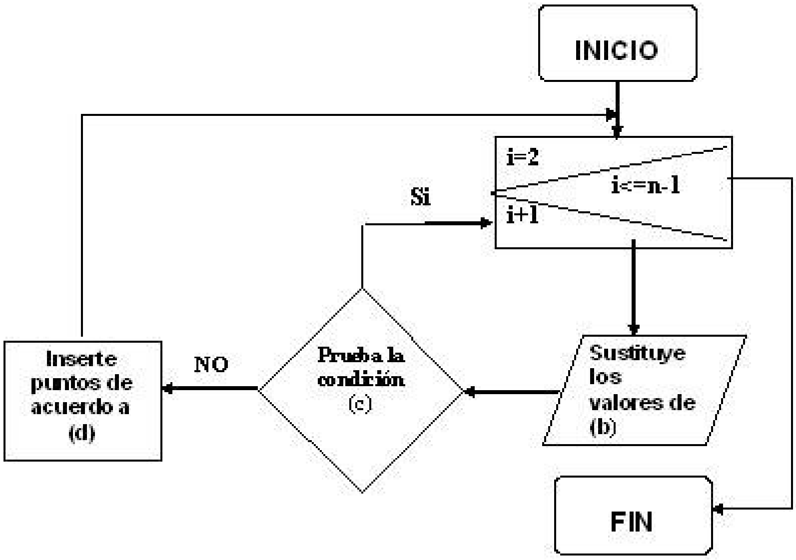

Figura 11.4: Algoritmo del refinamiento del mallado para obtener un coeficiente positivo

de coeficiente positivo para opciones pasaporte.

A grandes rasgos el algoritmo de refinamiento consiste en hacer la prueba de Pooley la cual consiste en comparar el tamaño del segmento de la discretización del espacio Δw_i con los valores que podrían generar una discretización con coeficientes no positivos. Si la prueba falla se debe escoger el segmento crítico e insertar puntos y volver a realizar la prueba con los nuevos valores para w_i insertados y así sucesivamente hasta lograr que en todos los intervalos pasen la prueba y lograr un esquema de coeficientes positivos. En la figura 11.4 se muestra el diagramade flujo de este algoritmo.

Consideremos una situación importante; este tipo de construcción para obtener el refinamiento y conseguir la discretización de coeficientes positivos, es para funciones monótonas, no para funciones convexas. La convexidad de la función es una propiedad más débil que la de monotocidad, por lo que el autor no garantiza que la convergencia sea a la solución de viscosidad,

Nodo	Implícito	Crank-Nicolson	Rannacher
41	13.05083	13.06564	13.06505
81	13.11237	13.11977	13.11963
161	13.12980	13.13353	13.13347
321	13.13510	13.13701	13.13690
641	13.13689	13.13787	13.13781

Cuadro 11.1: *Comparación de los diferentes métodos utilizando el algoritmo de coeficientes positivos. Resultados de convergencia para $w = 0$, utilizando la ecuación (11.7) en la discretización del control u, con un refinamiento de 0.01 en cada paso de tiempo y datos iniciales $r = 0{,}05$, $S_0 = 100$ y $T = 2$. La soluciòn analìtica es de 13.13810. El método de Rannacher es construido utilizando elemento finito. Fuente (Pooly [21].)*

además que conjetura que una construcción de diferencias finitas con discretizaciones por la derecha, izquierda y centrales sería extremadamente difícil de construir.(Ver Pag.106 [21]).

El siguiente algoritmo nos permite crear un refinamiento del la discretización del dominio probando la condición (a), para que se redusca el factor de falla.

Condición de Prueba (a)

$$\boxed{w_{m+1} - w_{m-1} < \max\left(\frac{\sigma^2(w_m - u_{m,izquierda})^2}{r_1 u_{m,izquierda} - r_2 w_m}, \frac{\sigma^2(w_m - u_{m,derecha})^2}{-(r_1 u_{mderecha} - r_2 w_m)}\right)}$$

Desde *i=2 hasta M-1* **Hacer**

Probar la condición a en el nodo w_i definiendo $u_{m,derecha} = -1$, $u_{m,izquierda} = 1$ y también $u_{m,derecha} = 1$, $u_{m,izquierda} = -1$.

Si la prueba falla **entonces**

Inserte puntos entre $(w_i + w_{i-1})/2$ y $(w_i + w_{i+1})/2$

$M \longrightarrow M + 2$

$i \longrightarrow i - 1$

termina la condición si.

termina el ciclo desde.

Por último recalcamos que el concepto de coeficientes positivos es un mecanismo para la minimización de fallas numéricas debido a que la iteración puede llevar a soluciones que no son las reales. Para mayor detalle sobre la teoría de coeficientes positivos para ecuaciones diferenciales parciales estocástica ver Pooly [21], para el detalle sobre el análisis en opciones pasaporte y opciones con volatilidad estocástica.

Hemos visto la construcción del método de diferencias finitas definiendo una notación diferente a la conocida, así como se definieron los conceptos de discretización haciendo referencia a los conceptos de límite vistos en diversas materias de cálculo. También realizamos la discretización sin hacer los cambios de variable conocidos en la literatura sobre la variable del tiempo, lo que atrajo diversos problemas en la disscretización pero por otro lado, dimos una alternativa diferente a lo ya conocido en la literatura. Por último les aconsejo ver los porgramas hechos en Matlab anexos a esta tésis de lo visto en este capítulo.

Capítulo 12

Conclusiones

Las opciones pasaporte han sido tema de estudio de grandes personalidades de las ciencias financieras (Delbaen, Yor, Shreve, Vêcêr, Henderson, Hobson, etc.), en este trabajo hemos tratado de dar solamente un pequeño vistazo a algunas de las técnicas utilizadas en este tema para su valuación. Personalmente me parece de suma importancia que en la Licenciatura de Actuaría se planteen los conceptos básicos de la teoría financiera moderna, ya que hay conceptos elementales que difícilmente se ven en la carrera, como son la estructura del mercado financiero definido desde el punto de vista probabilistico, las definiciones de martingala, teorema de cambio de medida de probabilidad, el cual tiene aplicación básica en todas las teorías modernas de la investigación de los mercados financieros, la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales cuya importancia a veces se deja en un segundo plano y a mi parecer es de las cosas que un estudiante o egresado de la carrera debe tener en cuenta, ya que en el mercado laboral no basta con saber la forma que tiene determinado instrumento financiero, lo fundamental es obtener el precio lo más rápidamente posible para así tomar decisiones confiables en el momento oportuno, y esto sólo se obtiene resolviendo la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno en estudio.
Es por ello que introducimos el tema de Diferencias Finitas, esperando que con un poco de suerte, poder inducir al lector de esta tesis la duda y las ganas de aprender verdaderamente no sólo diferencias finitas sino también otros métodos numéricos.

Para lograr todo lo anterior, se aplican diversos métodos al clásico problema de valuar una opción de compra tipo vainilla. Se encontró el precio por medio de la teoría de martingalas; además se menciona que este tipo de opción es un caso particular de las opciones pasaporte y por lo tanto también cumplen la metodología de valuación de las opciones pasaporte.
En este trabajo también se revisan conceptos que a mi me parecieron muy interesantes; el concepto de tiempo local del movimiento browniano se explica de una manera que sea ilustrativa para que al lector universitario le sea de ayuda como introducción a este importante concepto para finalmente mencionar el lema de Skorokhod, que es un resultado muy utilizado en el estudio moderno de los mercados financieros.
Previamente mencionamos el concepto de control y control óptimo, aquí hay que aclarar que de este tema existe una grande, variada y compleja teoría, existen varios libros especializados de este tema y es un campo de estudio muy grande, por lo que realmente lo presentado en esta tesis es pequeño en comparación a la gran cantidad de información que existe, y nuevamente sólo pretendí inculcarle la duda al lector de este tema para que así investigue al respecto en la literatura especializada en control óptimo.
Finalmente quiero decir que se mencionaron estos conceptos porque quienes han investigado las opciones pasaporte los han aplicado para obtener la valuación de las opciones pasaporte. En este trabajo se valuan las opciones pasaporte por la vía de replicar un portafolio libre de riesgo y así encontrar la ecuación diferencial parcial correspondiente, también se valuan por el método probabilistico utilizando la definición de martingala, el cambio de medida de probabilidad y el lema de Skorokhod.
Vemos casos particulares de opciones pasaporte, como las opciones vacacionales, las opciones pasaporte americanas y las opciones asiáticas vistas como una opción pasaporte. Se generalizó la paridad put-call para las diferentes posiciones en las opciones pasaporte.
Finalmente se introduce el método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales parciales, se aplica este método para resolver la ecuación que representa la dinámica de las opciones pasaporte de manera de ejemplo para una mejor comprensión de parte del lector de este método.

Bibliografía

[1] Ahn, H. Penaud, A. Wilmott, P.; *Various Passport and Their Valuation.*,Preprint,*Mathematical Finance Group*, Oxford University,1999.

[2] Andersen, L. Andreasen, J. Brotherton-Ratcliffe, R.; *The passport Option.* Journal of Computational Finance. 1/3 (1998) p15-36.

[3] Delbaen, F. Yor, M.; *Passport Options* Preprint, ETH, 1999.

[4] Dewynne J. Howison S. Wilmott P.*Option Pricing*, Oxford Financial Press, 1997.

[5] Dewynne J. Howison S. Wilmott P.*The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, 1999.

[6] Fleming, W. H. y Soner, H., M..; *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag. New York.1992.

[7] Fleming, W. H. y Rishel, R. W.,*Deterministic and Stochastic Optimal Control,* Springer-Verlang, New York, 1975.

[8] Goldman M., Sozin H., y Gatto M., *Path dependent options: buy at the low, sell at the high*, Journal of Finance, 34 (1979), pp. 1111-28.

[9] Harrison, J. M. y Kreps D.; *Martingales and arbitrage in multi-period security markets.* Journal of economic Theory 20. 1979. 381-408.

[10] Harrison J. M. y Pliska S. R.; *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous traiding.* Stochastic processes and their applications 11. 1981.215-260.

[11] Hajek, J. C. (1993): *Mean Stochastic Comparison of Diffusions.* Z.Wahrscheinlichkeitstheoie verw. Gebiete 68, pp315-329.

[12] Henderson V.; *A Probabilistic Approach to Passport Options.* PhD thesis, University of Bath, 1999.

[13] Henderson V. y Hobson D. *Local Time, Coupling and the Passport Option.* Finance and Stochastics, Vol 4, 1, 2000.

[14] Henderson V. Hobson D. *Passport Options with Stochastic Volatility.* Preprint. 2000.

[15] Henderson V. Hobson D. Kentwell G. *A New Class of Commodity Hedging Strategies: A Passport Options Approach.* FORC preprint 2001/13, Warwick Busines School.2001.

[16] Hyer T. Lipton-Lifschitz A. and D. Pugachevsky; *Passport to Success*, Risk, 10, No.9, p127-131, 1997.

[17] Jürgen T. *A Finite Element Implementation of Passport Options.* MSc thesis, University of Oxford, 2003.

[18] Karatzas I. Shreve S.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlang, New York, Inc.1991.

[19] Liptser, R. y Shiryayev,A. *Statistics of random processes I: Generañ theory.*Springer-Verlang,New York.1977.

[20] Neftci N. Salih. *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* Academic Press.2000.

[21] Pooley D. *Numerical Methods for Nonlinear Equations in Options Pricing* PhD thesis,University of Warterloo,2003.

[22] Revuz D. y M. Yor;*Continuos Martingales and Brownian Motion*, Springer, Third Edition, 1999.

[23] Shreve S. Večeř J.: *Options on a trade account: Vacation Calls, Vacation Puts and Passport Options.* Finance and Stochastics,4,pp 255-274. 2000.

[24] Shreve S. Večeř J.: *Upgrading Your Passport.* Risk Magazine.13/7(2000)pp 81-83.

[25] Siu-Shing Chan, *The Valuation of American Passport Options*, preprint, School of Business, GH, University of Wisconsin-Madison, 1999.

[26] Soner, H. M. *Stochastic Optimal Control in Finance*, preprint, Koç Univrsity. Istambul, Turkey.2004

[27] Vázquez Montes Ma. de los A. *Valuación de Opciones Pasaporte con Volatilidad Estocástica*, ME, tesis. Universidad de Guanajuato,2001.

[28] Večeř J. *A new PDE approach for Pricing Arithmetic Average Asian Options*, Journal of Computational Finance. Vol. 4,2001,p105-113.

[29] Zvan R. Forsyth P. Vetzal K. *Robust numerical methos for PDE models of Asian options*, Journal of Computational Finance, Vol. 1, No. 2, winter 1997/98, pp. 39-78.