



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
División de Ingeniería en Ciencias de la Tierra

*MODELACIÓN 1D Y 2D DE RADAR DE PENETRACIÓN TERRESTRE
POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL
TIEMPO.*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO GEOFÍSICO

PRESENTA:

IVÁN SIERRA JIMÉNEZ



DIRECTOR DE TESIS:
MC. OSCAR DÍAZ MOLINA

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F. 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-I-1375

SR. IVÁN SIERRA JIMÉNEZ
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M. en C. Oscar Díaz Molina y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Geofísico:

**MODELACIÓN 1D Y 2D DE RADAR DE PENETRACIÓN TERRESTRE POR EL
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO**

	RESUMEN
I	INTRODUCCIÓN
II	ANTECEDENTES
III	MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
IV	DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL
V	DISCUSIÓN Y RESULTADOS
	CONCLUSIONES
	BIBLIOGRAFÍA

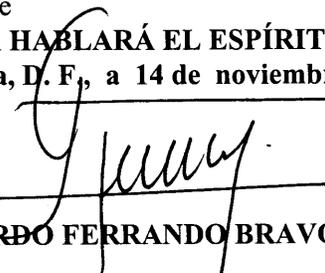
Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta. Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Cd. Universitaria, D. F., a 14 de noviembre de 2006

EL DIRECTOR


M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB*JAGC*gtg

DEDICATORIAS

A mis padres, Lupita por darme todo, apoyarme en mis estudios y el gran amor que me brindas. Salvador por tus consejos tan acertados que siempre tomare en cuenta. Gracias, los quiero mucho.

A mi hermana, Jadzia por ser parte de mi vida, hacerme reír mucho y darnos tanta felicidad. Te quiero mucho.

A mis abuelos, papá Juan[†], mamá Leonor y Hermila.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ingeniería y al departamento de Ingeniería Geofísica.

Al Laboratorio de Cartografía Digital del Departamento de Exploración y Geomagnetismo del Instituto de Geofísica de la UNAM, por las facilidades y recursos para desarrollar este trabajo.

A mi director de tesis M.C. Oscar Díaz Molina por el apoyo y consejos para la realización de éste trabajo. Gracias por tu amistad.

Al Dr. Enrique Cabral Cano por las facilidades para realizar el servicio social, el apoyo y correcciones en éste trabajo de tesis.

A mis sinodales, Dr. Andrés Tejero, Ing. Javier Urbietta y Dr. Omar Delgado por sus comentarios y correcciones tan acertadas.

A mis compadres, José Luis Salas, Omar Hernández y Cesar Correa por estos años de amistad, diversión y aprendizaje. Son mis mejores amigos.

A mis primos, Juan José “el chico” por la ayuda que me diste en diversas materias y los momentos de convivencia. Horacio y Claudia, por todos esos buenos momentos que hemos compartido. Los considero mis hermanos.

A Cintia, por los momentos tan hermosos que me has regalado, por hacerme ver que las cosas las debemos buscar y no estar esperandolas. Te llevo siempre en el corazón.

A todos mis amigos con los que he compartido gratos momentos, Cesar Ponce de León, Miguel García, Los Bros, David, Norma, Raquel y Janet.

ÍNDICE

<i>Tema</i>		<i>Página</i>
	RESUMEN	
CAPITULO I	INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO II	ANTECEDENTES	3
	II.1 ECUACIONES DE MAXWELL	4
	II.2 RELACIONES CONSTITUTIVAS	6
	II.3 PROPIEDADES DE LA MATERIA	7
	II.3.1 Conductividad eléctrica	7
	II.3.2 Permitividad eléctrica	8
	II.3.3 Permeabilidad magnética	9
	II.4 CONDICIONES DE FRONTERA	11
	II.5 ECUACIONES DE MAXWELL PARA MEDIOS HOMOGÉNEOS	12
	II.6 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS	13
	II.7 LA CONSTANTE DE PROPAGACIÓN	17
	II.8 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN BUENOS CONDUCTORES	18
	II.9 PROPAGACION DE ONDAS PLANAS EN DIELECTRICOS PERFECTOS	21
	II.10 PROPAGACION DE ONDAS PLANAS EN DIELECTRICOS DISIPATIVOS	23
CAPITULO III	MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	27
	III.1 EL ALGORITMO DE YEE	27
	III.2 DIFERENCIAS CENTRALES	30
	III.3 DIFERENCIAS FINITAS Y NOTACIÓN	32
	III.4 ANALISIS DE ESTABILIDAD	34
	III.5 EXITACIONES EN EL MÉTODO (DFDT)	41

	III.6	CONDICIONES DE FRONTERA	41
	III.6.1	Condiciones de frontera absorbentes (ABC)	42
CAPITULO IV		DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL	43
	IV.1	ECUACIONES DE MAXWELL EN 1D	43
	IV.1.1	Tamaño de la celda	46
	IV.1.2	Incremento de tiempo	47
	IV.1.3	Condiciones de frontera absorbentes en una dimensión	47
	IV.1.4	Fuente transparente	48
	IV.2	ECUACIONES DE MAXWELL EN 2D	53
	IV.2.1	Sistema de capas perfectamente adaptadas (PML)	55
	IV.2.2	Incremento de tiempo en 2D	61
	IV.2.3	Campo Total/Campo Dispersado	62
CAPITULO V		DISCUSIÓN Y RESULTADOS	66
	V.1	MODELO 1D	70
	V.2	MODELO 2D	80
	V.3	COMPARACIÓN ENTRE DATOS DE CAMPO Y DATOS SINTÉTICOS	83
CONCLUSIONES			91
BIBLIOGRAFIA			93

MODELACIÓN 1D Y 2D DE RADAR DE PENETRACIÓN TERRESTRE POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

RESUMEN

En este trabajo, se presenta la modelación de datos de Radar de Penetración Terrestre (GPR por sus siglas en inglés) en una y dos dimensiones con el objetivo de obtener radagramas sintéticos utilizando el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT). El método de DFDT es utilizado debido a su simplicidad y gran precisión. El uso de radagramas sintéticos para la caracterización del subsuelo es de gran utilidad en la identificación de interfases de interés en los estudios geofísicos someros mejorando las interpretaciones de radagrama y para descartar señales debidas a reflexiones múltiples. En este modelo, las ecuaciones de Maxwell que rigen el comportamiento de las ondas electromagnéticas se discretizan utilizando diferencias centrales de segundo orden para las derivadas temporales y espaciales. Se realiza el análisis de estabilidad utilizando el método de Von Neumann. En el modelo 1D se utiliza la fuente “transparente” ya que ésta permite que la forma del pulso se conserve y no dispersa las ondas, y las condiciones de frontera absorbentes están en función del número de incrementos de tiempo que toma a un frente de onda cruzar una celda. Para crear la fuente en 2D se utiliza la técnica de Campo Total/Campo Dispersado (TF/SF por sus siglas en inglés) y para atenuar las ondas en la frontera se utiliza el sistema de capas perfectamente adaptadas (PML por sus siglas en inglés). El software utilizado para programar el algoritmo es MATLAB 7 R14. Se usan dos modelos para la validación del algoritmo numérico, el primero de Díaz (2003) en 1D y el segundo de Bergmann *et al* (1998) en 2D. Finalmente se muestran radagramas sintéticos y radagramas levantados dentro de materiales naturales con una estructura conocida para su comparación y validación.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

El Radar de Penetración Terrestre (GPR) es un método geofísico de gran utilidad para la caracterización somera de alta resolución del subsuelo. La adquisición de los datos de GPR se puede realizar en: (i) Adquisición en superficie, en la cual las antenas de transmisión y recepción se colocan en la superficie de la tierra y el subsuelo es caracterizado de manera vertical en término de las variaciones de sus propiedades eléctricas. (ii) Adquisición en pozo, donde una o ambas antenas se colocan en pozos y las propiedades del subsuelo en dirección horizontal se estiman. En este trabajo simulamos la adquisición en superficie.

Los modelos numéricos de GPR proveen una forma de explorar el vínculo entre las propiedades del subsuelo y los datos de GPR. La modelación puede ser utilizada para simular la adquisición de datos. Los datos sintéticos resultantes pueden ser usados para avanzar en la comprensión de la forma en que dicha información vinculada a la variabilidad espacial de las propiedades del subsuelo es captada, y puede ser extraída en los datos de GPR (Irving y Knight, 2006).

El método más común para abordar modelos numéricos de GPR es el de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT), introducido por Yee en 1966. El método DFDT se desarrolló para resolver los campos eléctrico y magnético en tiempo y espacio, usando las ecuaciones de Maxwell. Las expresiones de diferencias finitas para las derivadas espaciales y temporales son diferencias centrales y de segundo orden.

El método de DFDT es muy utilizado debido a su simpleza conceptualmente y la gran precisión, aún en el caso de modelos complejos. La estabilidad del algoritmo es

importante para obtener resultados confiables; en este trabajo se utiliza el método de Von Neumann (Mitchell y Griffiths, 1980), y se aplica a la ecuación de onda del campo magnético.

Las fuentes que se utilizan en este trabajo siguen el comportamiento de una onda plana. Para modelos 1D se utiliza la fuente transparente y en 2D la onda plana. Esta última se crea por la técnica de campo total/ campo dispersado (Taflove y Hagness, 2002). Las frecuencias de los pulsos que se aplican son de 100 y 1,200 MHz.

Las condiciones de frontera que se utilizan en el modelo simulan una región abierta, esto es, las ondas que llegan a los bordes de la simulación son atenuadas a valores muy pequeños. En el caso unidimensional (1D) las condiciones de frontera absorbentes están en función del número de pasos que toma al frente de onda cruzar una celda mientras que en el modelo bidimensional la absorción de las ondas se realiza utilizando el sistema de capas perfectamente adaptadas (PML) creado por Berenger (1994).

El modelo de la región de interés, se define en términos de sus propiedades electromagnéticas (conductividad eléctrica, permitividad eléctrica y permeabilidad magnética). Para realizar los radagramas sintéticos, la fuente y el (los) receptor(es) se sitúan en la misma región.

Para la validación de este algoritmo numérico los resultados son comparados con los obtenidos por Díaz (2003) y Bergmann *et al* (1998). Finalmente, se muestran radagramas sintéticos obtenidos con el modelo aquí desarrollado y se comparan con radagramas levantados en un campo de pruebas construido con materiales naturales y tubos inmersos en un medio de dimensiones y arreglo geométrico conocido para su comparación.

CAPITULO II

ANTECEDENTES

En este capítulo se muestran los principios básicos de la teoría electromagnética comenzando con las ecuaciones de Maxwell ya que estas rigen el comportamiento de las ondas electromagnéticas en un medio; a estas ecuaciones se les asocian las propiedades de los materiales utilizando las relaciones constitutivas.

Las propiedades del medio que controlan la velocidad y atenuación de la onda electromagnética son la permitividad eléctrica, la conductividad eléctrica y la permeabilidad magnética.

Se presentan las condiciones de frontera las cuales muestran las componentes tangenciales y normales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en una interfase.

A partir de las ecuaciones de onda de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} para un medio conductor, se define la constante de propagación, esta constante tiene dos parámetros importantes como son la constante de fase y la constante de atenuación; la constante de fase controla la velocidad de la onda electromagnética y la constante de atenuación como su nombre lo dice la atenuación que tiene la onda electromagnética cuando viaja en un medio.

La amplitud y fase de los campos eléctrico y magnético se obtienen utilizando la propagación de una onda plana.

Por último se clasifican los medios de propagación en dieléctricos perfectos, buenos conductores y dieléctricos disipativos.

II.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones generales de Maxwell dependientes del tiempo en forma diferencial son:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.4)$$

Donde las diferentes cantidades involucradas están definidas como:

E – la intensidad del campo eléctrico, dada en Voltios /metro [V/m]

H – la intensidad del campo magnético, dada en Amperes /metro [A/m]

D – la densidad del flujo eléctrico, dada en Coulombs /m² [C/ m²]

B – la densidad de flujo magnético, dada en Tesla [T] o Webers / m² [Wb/m²]

J – la densidad de corriente, dada en Amperes / m² [A/m²]

ρ - la densidad de volumen de carga eléctrica, dada en Coulombs / m³ [C/ m³]

La ecuación 2.1 es conocida como la ley de inducción de Faraday. Esta ecuación define las leyes básicas de inducción, muestra que la variación respecto del tiempo del campo magnético genera un campo eléctrico **E** con estructura rotacional.

Geoméricamente el campo magnético y eléctrico se relacionan según se muestra en la figura 2.1. Estableciendo que **B** aumenta hacia afuera del plano de la figura, la intensidad del campo eléctrico **E** se muestra en la figura 2.1.

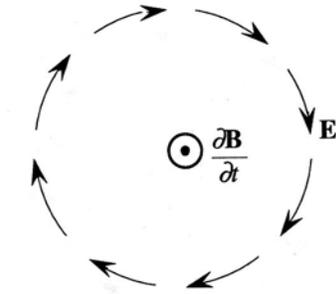


Figura 2.1 Relación entre la derivada temporal de la densidad de flujo magnético y la intensidad del campo eléctrico (Modificado de Ida y Bastos, 1997).

La ecuación 2.2 es la ley de Ampere en la forma general, incluyendo el término $\partial \mathbf{D} / \partial t$ el cual es conocido como el desplazamiento de densidad de corriente, término opuesto a la conducción de densidad de corriente \mathbf{J} . Esta ecuación expresa la manera por la cual un campo magnético puede crear una separación en corrientes de conducción (asociada con \mathbf{J}) y un campo eléctrico variable en el tiempo (asociada con $\partial \mathbf{D} / \partial t$). En la figura 2.2, se observa la primera situación donde la densidad de flujo eléctrico es constante en el tiempo.

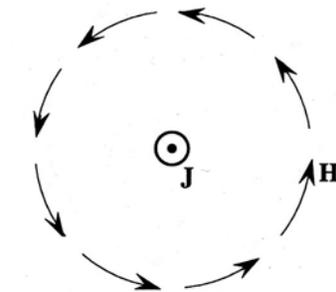


Figura 2.2 Relación entre la densidad de corriente de conducción y la intensidad del campo magnético (Modificado de Ida y Bastos, 1997).

La ecuación 2.3 es la ley de Gauss, que expresa que la divergencia de \mathbf{D} no es cero y se demuestra que el flujo del vector \mathbf{D} no es conservativo. Se puede fácilmente imaginar un volumen en el cual hay una diferencia entre el flujo del campo eléctrico que entra y sale del mismo. Esta situación es mostrada en la figura 2.3 donde una carga eléctrica esta localizada en el centro de una esfera. El flujo que atraviesa el volumen esta

orientado hacia afuera. El flujo del vector \mathbf{D} que atraviesa la superficie que encierra el volumen V de la esfera es diferente de cero.

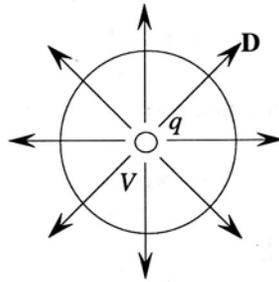


Figura 2.3 Flujo eléctrico no conservativo (Modificado de Ida y Bastos, 1997).

En la ecuación 2.4 el flujo magnético es cero. Para entender esto, podemos decir que el flujo magnético entrante en un volumen, es igual al flujo magnético que abandona el volumen.

II.2 RELACIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones de campo están escritas como ecuaciones lineales diferenciales parciales. Esta importante propiedad de las ecuaciones de campo esta definida por la interacción de campos con materiales, y por lo tanto, se asocia la linealidad y la no-linealidad de las relaciones de campo con las propiedades de la materia. Las primeras dos ecuaciones y las ultimas dos no son independientes, y en realidad, se puede mostrar que las ultimas dos ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de las primeras dos por álgebra vectorial. Así, solo se tienen 6 ecuaciones y 12 incógnitas (Ida, 1995).

Las dos relaciones adicionales que se necesitan para completar el sistema de ecuaciones son las relaciones constitutivas de la materia:

$$B = \mu H \quad (2.5)$$

$$D = \epsilon E \quad (2.6)$$

Estas dos ecuaciones vectoriales son equivalentes a seis ecuaciones escalares donde μ es la permeabilidad y ϵ la permitividad de los materiales. En general estas ecuaciones no son lineales.

Además, se define una relación constitutiva que involucra las densidades de corriente y la intensidad del campo eléctrico

$$J = \sigma E \quad (2.7)$$

El campo electromagnético experimenta cambios cuando éste pasa de un material a otro.

II. 3 PROPIEDADES DE LA MATERIA

Las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales controlan la velocidad de propagación de la onda electromagnética y su amplitud. En la mayoría de los casos, las propiedades eléctricas son mucho más dominantes que las propiedades magnéticas. A determinada frecuencia, las propiedades eléctricas son predominantemente controladas por la densidad del suelo, su composición química, así como la distribución y contenido de agua. Las propiedades eléctricas entran en dos tipos básicos, uno que describe la disipación de energía y el otro que describe el almacenamiento de energía. Las relaciones constitutivas definen la interacción entre los campos y los materiales.

II.3.1 Conductividad eléctrica

La conductividad eléctrica de un material generalmente puede ser definida como la habilidad de conducir una corriente eléctrica. Bajo la influencia de un campo eléctrico, los electrones libres se mueven en varias velocidades. La velocidad del electrón es proporcional al campo eléctrico, y por lo tanto, la densidad de corriente \mathbf{J} en un

conductor puede estar directamente relacionada con la intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} aplicado como:

$$J = \sigma E \quad (2.7)$$

donde σ es la conductividad del material.

La conductividad puede ser dependiente del campo (que no es lineal), y es además siempre dependiente de la temperatura. La relación en esta ecuación es definida para conductores pero también es usada para materiales de baja conductividad. La ecuación 2.7 se conoce como la ley de Ohm (Ida, 1995).

II.3.2 Permitividad eléctrica

Las propiedades eléctricas de materiales dieléctricos están definidas ampliamente por la polarización de cargas en el material cuando se aplica un campo eléctrico exterior. Cuando las cargas en estos materiales son limitadas, la conducción es despreciable, pero la polarización de cargas puede ser significativa. Esta polarización aumenta la densidad del flujo eléctrico en el material. Por esta razón se puede escribir la relación constitutiva de la ecuación 2.6 como:

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

donde \mathbf{P} es el vector de polarización y ε_0 es la permitividad del vacío. El vector de polarización es proporcional al campo eléctrico. Cuando el vector de polarización \mathbf{P} es proporcional a la intensidad del campo eléctrico externo \mathbf{E} , D se puede escribir como (Ida, 1995):

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi_e E = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) E$$

donde χ_e es una cantidad adimensional llamada susceptibilidad eléctrica. En resumen se define una permitividad relativa a través de la relación:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (2.8)$$

Donde $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m.

II.3.3 Permeabilidad magnética

Las propiedades magnéticas de los materiales son debidas a la interacción de campos magnéticos externos y al movimiento de cargas en los materiales. Los campos magnéticos a escala atómica dentro de los materiales son producidos por medio del spin o giro de los electrones. Con una colección de muchos momentos magnéticos, el volumen del material contiene una cierta densidad de momento magnético y un campo magnético neto es generado dentro de la materia. Si el campo interno esta alineado con el campo externo el campo total aumenta, y si el campo interno es opuesto el campo total disminuye. Si los momentos magnéticos internos están orientados de forma aleatoria, como usualmente es el caso, el campo interno neto es cero y el material se comporta como el vacío desde el punto de vista magnético. Este es el caso para los materiales no magnéticos. Sin discutir los detalles de los materiales magnéticos aquí se indica que un vector total de magnetización \mathbf{M} existe en el material, en presencia de un campo magnético exterior. Usando este vector de magnetización análogamente como al vector de polarización en el campo eléctrico, la densidad de flujo magnético \mathbf{B} puede ser escrito como (Ida, 1995):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

donde \mathbf{M} es el vector de magnetización y μ_0 es la permeabilidad del vacío. La magnetización puede ser escrita en términos de la intensidad del campo magnético como:

$$M = \mu_0 \chi_m H$$

donde χ_m es la susceptibilidad magnética del material. La permeabilidad de muchos materiales ferromagnéticos no es lineal. Por uso práctico, es común definir una permeabilidad relativa μ_r a través de la relación ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m):

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.9)$$

Los materiales magnéticos están divididos en tres grupos basados en sus permeabilidades. Estos son materiales diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos.

Los materiales diamagnéticos, son aquellos para los que su campo magnético interno es cero bajo condiciones normales. Cuando un campo magnético externo es aplicado se produce un campo interno neto oponiéndose al externo. Las permeabilidades relativas que exhiben los materiales diamagnéticos son ligeramente menores que 1.0. Este grupo de materiales incluye muchos materiales importantes como el cobre, plomo y plata. Los materiales paramagnéticos son similares a los materiales diamagnéticos pero el campo magnético interno se alinea en la misma dirección que el campo externo. La permeabilidad relativa del material es ligeramente mayor que 1.0. Ejemplos de este grupo son el aire, el aluminio así como algunos aceros inoxidables.

Los materiales ferromagnéticos varían considerablemente de diamagnéticos a paramagnéticos. Sus permeabilidades son muy grandes y la estructura interna de sus momentos magnéticos es diferente. Muchos de sus momentos están alineados en cierta dirección en una región muy pequeña llamada dominio magnético. Los dominios cercanos tienen una estructura similar, con el dominio magnético neto dirigido en una otra dirección. Bajo condiciones libres de excitación, los dominios magnéticos tienden a estar alineados de forma aleatoria. El campo interno es muy pequeño o cero (con la excepción de magnetos permanentes naturales o artificiales) (Ida, 1995).

II.4 CONDICIONES DE FRONTERA

Las relaciones constitutivas para el campo eléctrico y magnético nos indican que los campos son diferentes en distintos materiales. Las condiciones de frontera son derivadas de la siguiente forma:

Se asume que dos materiales están en contacto formando una interfase. Por una interfase, nos referimos a una frontera delgada extendida de manera infinita y sin propiedades. De cada lado de ésta, los materiales tienen propiedades uniformes y son lineales. La interfase puede contener densidades de corrientes de superficie y densidades de cargas de superficie (Ida, 2004).

Las ecuaciones de Maxwell en forma integral se aplican a la interfase, determinándose las ecuaciones del campo eléctrico y magnético en ambos lados de la interfase.

Las condiciones en la interfase están dadas en términos de las componentes del campo en la interfase. Las componentes escalares, tangenciales y normales en la interfase, son las condiciones requeridas.

Las condiciones obtenidas para materiales en general se resumen en la tabla 2.1. Existen un total de ocho condiciones de interfase, aunque solo cuatro relaciones en el primer y tercer renglón de la tabla 2.1 fueron obtenidas directamente de las ecuaciones de Maxwell. Las otras cuatro se obtuvieron de las relaciones constitutivas (Ida, 2004).

	Campo eléctrico	Campo Magnético
Componentes tangenciales:	$E_{1t} = E_{2t}$	$H_{1t} - H_{2t} = J_s$
	$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$	$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = J_s$
Componentes normales:	$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$	$B_{1n} = B_{2n}$
	$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_s$	$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$

Tabla 2.1 Condiciones de interfase para materiales en general (Modificado de Ida, 2004).

II.5 ECUACIONES DE MAXWELL PARA MEDIOS HOMOGÉNEOS

Para un medio homogéneo e isótropo se pueden simplificar las ecuaciones de Maxwell 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, suponiendo que μ , ε y σ son constantes, y considerando las relaciones constitutivas 2.5, 2.6, 2.7.

Como se considera que el medio en que se propagan las ondas electromagnéticas es un conductor homogéneo e isótropo, libre de fuentes, es decir que no hay acumulación de cargas, se tiene que la densidad de volumen de carga eléctrica es cero.

$$\nabla^2 E - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 H - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

Las ecuaciones 2.10 y 2.11 son las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético respectivamente, estas ecuaciones representan la forma en la que se propagan cada uno de estos campos en función del tiempo y de las propiedades del medio. Utilizando por conveniencia el concepto de campos sinusoidales las ecuaciones antes descritas se pueden escribir como (Díaz, 2003):

$$\nabla^2 E + \gamma^2 E = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 H + \gamma^2 H = 0 \quad (2.13)$$

Donde γ se define como la constante de propagación.

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \varepsilon + i \omega \mu \sigma \quad (2.14)$$

II.6 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS

El tipo más simple de la propagación de ondas son las ondas planas uniformes. Existen dos términos importantes en el nombre: *planas* y *uniformes*. El término “planas” significa que en cualquier punto en el espacio los vectores de intensidad del campo eléctrico y magnético se encuentran en un plano y los planos en dos puntos cualesquiera son paralelos. El término “uniformes” significa que \mathbf{E} y \mathbf{H} son independientes de la posición de cada plano. Se asume que los vectores de intensidad de los campos eléctrico y magnético se encuentran contenidos en el plano xy , asignando al vector de intensidad del campo eléctrico la dirección x , como se muestra en la Figura 2.4 (Clayton, 2006)

$$E = E_x(z, t) \quad (2.15)$$

El criterio para que los vectores del campo sean uniformes sobre el plano xy , es que deben ser independientes de x e y

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

Y así los vectores pueden ser una función sólo de z , y claro, del tiempo t , como se indica en la ec. 2.15. Sustituyendo 2.15 en la ley de Faraday (2.1) y usando 2.16 se observa que el campo magnético tiene sólo una componente en y :

$$H = H_y(z, t) \quad (2.17)$$

Así, \mathbf{E} y \mathbf{H} son ortogonales y están contenidos en el plano xy . Análogamente, debido a que la onda es uniforme sobre el plano xy , se obtiene:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

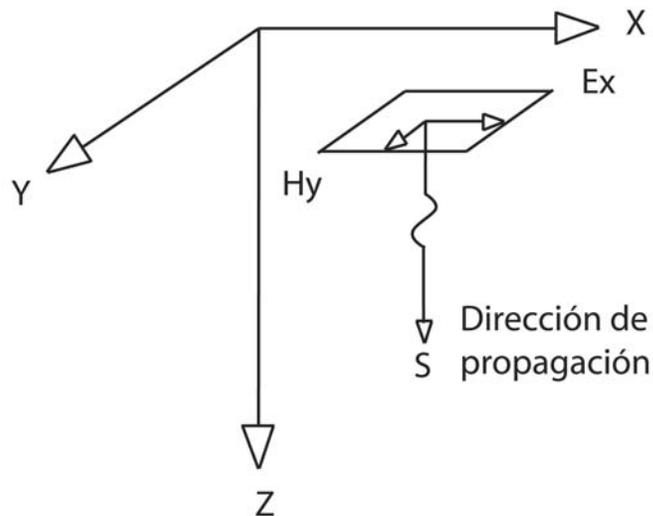


Figura 2.4. Onda plana uniforme

Sustituyendo estos resultados en la ley de Faraday y Ampere se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan los campos para un medio simple libre de fuentes:

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = -\sigma E_x(z,t) - \varepsilon \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \quad (2.20)$$

Las derivadas parciales se han remplazado por derivadas ordinarias dado que los campos son función solo de la variable z . Estas son un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que no son independientes. Estas deben reducirse a un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes, diferenciando una respecto de z y sustituyendo la otra, y viceversa, da como resultado las ecuaciones siguientes (Clayton, 2006):

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} = -\gamma^2 E_x(z) \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2 H_y(z)}{dz^2} = -\gamma^2 H_y(z) \quad (2.22)$$

La solución a este tipo de ecuaciones es de la forma:

$$E_x = C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}$$

$$H_y = C_1 e^{i\gamma z} + C_2 e^{-i\gamma z}$$

Resolviendo para el campo eléctrico y teniendo en cuenta que cuando $z \rightarrow \infty$, $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ se tiene:

$$e^{i\gamma z} = e^{i(a+ib)z} = e^{iaz} e^{-bz}$$

$$e^{-i\gamma z} = e^{-i(a+ib)z} = e^{-iaz} e^{bz}$$

donde $e^{i\gamma z}$ tiende a cero cuando z tiende a infinito, mientras que $e^{-i\gamma z}$ no tiende a cero. Para que las condiciones se cumplan la constante C_2 tiene que ser igual a cero, y la expresión queda como:

$$E_x = C_1 e^{i\gamma z}$$

$$E_x = E_{x0} e^{i\gamma z}$$

$$\Re(E_x e^{-i\omega t}) = \Re(E_{x0} e^{i\gamma z} e^{-i\omega t})$$

además, $E_{x0} = E_{0x} e^{i\varphi}$, por lo tanto se tiene:

$$\Re(E_x e^{-i\omega t}) = \Re(E_{0x} e^{i\gamma z} e^{-i\omega t} e^{i\varphi_x})$$

$$\Re(E_x e^{-i\omega t}) = E_{x0} e^{-bz} \cos(az + \varphi_x - \omega t) \quad (2.23)$$

De la ecuación anterior se obtiene la amplitud:

$$f(z) = E_{x0} e^{-bz} \quad (2.24)$$

y la fase:

$$\phi(z) = az + \varphi_x - \omega t \quad (2.25)$$

II.7 LA CONSTANTE DE PROPAGACIÓN

La magnitud definida por γ en la ecuación 2.40 recibe los nombres de constante de propagación y de número de ondas (por radián), y tiene gran importancia en la teoría de los métodos de prospección por campos variables. En los de corriente continua, tan sólo tiene interés como parámetro representativo de las características de cada roca, su resistividad ρ , mientras que en los de campo variable influyen además ϵ , μ y ω combinados en el parámetro γ , función de todos ellos (Orellana, 1974).

Debe tomarse en cuenta que, a pesar de su nombre, γ no es constante para cada medio, puesto que depende de la frecuencia. La magnitud γ es, desde el punto de vista dimensional, homogénea con la inversa de la longitud de onda. Como cantidad compleja, puede descomponerse en sus partes real e imaginaria (Orellana, 1974).

$$\gamma = a + ib$$

que, por ser:

$$\gamma^2 = (a^2 - b^2) + i2ab; \quad \gamma^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\mu\omega\sigma$$

tendrá que cumplir las condiciones:

$$a^2 - b^2 = \epsilon\mu\omega^2$$

$$2ab = \mu\omega\sigma$$

Resolviendo el sistema se obtienen las igualdades:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\mu)^{1/2} \left[(\varepsilon^2\omega^2 + \sigma^2)^{1/2} + \varepsilon\omega \right]^{1/2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\mu)^{1/2} \left[(\varepsilon^2\omega^2 + \sigma^2)^{1/2} - \varepsilon\omega \right]^{1/2}$$

Donde a y b reciben respectivamente el nombre de constante de fase y constante de atenuación. Las ecuaciones anteriores pueden transformarse en:

$$a = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left[(1+h^2)^{1/2} + 1 \right] \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

$$b = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left[(1+h^2)^{1/2} - 1 \right] \right]^{1/2} \quad (2.27)$$

Donde:

$$h = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (2.28)$$

es denominada “tangente del ángulo de pérdidas”.

II.8 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN BUENOS CONDUCTORES

En materiales altamente conductivos las pérdidas son elevadas y se puede asumir que $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Esto es equivalente a ignorar las corrientes de desplazamiento. La conductividad alta no significa conductividad perfecta. Los conductores perfectos no tienen pérdidas debidas a la exclusión de los campos por los materiales. En el caso de los materiales con alta conductividad, la constante de propagación puede ser aproximada como (Ida y Bastos, 1997):

$$\gamma \cong \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\frac{i \sigma}{\omega \varepsilon}} \quad (2.29)$$

La ecuación anterior se puede simplificar

$$\gamma \cong \sqrt{i} \sqrt{\omega \mu \sigma}$$

Donde $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$. De esta, se obtiene:

$$\gamma \cong (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (2.30)$$

Donde las constantes de fase y atenuación son iguales

$$a = b = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (2.31)$$

Las constantes de fase y atenuación son iguales y muy grandes. La onda se atenúa rápidamente al punto donde la propagación en un medio conductor solo puede existir en distancias cortas (Ida y Bastos, 1997).

La profundidad de penetración es:

$$\delta = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (2.32)$$

La profundidad de penetración en los buenos conductores es pequeña. En el rango de las microondas ésta puede ser del orden de algunos micrones (dependiendo del material y la frecuencia) (Ida y Bastos, 1997).

La velocidad de fase en buenos conductores es:

$$v = \frac{\omega}{a} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (2.33)$$

Y es obviamente pequeña comparada con la velocidad de fase en los dieléctricos o en el vacío.

La impedancia intrínseca es:

$$Z_{xy} = \frac{\omega\mu}{\gamma} \cong \frac{\omega\mu}{\sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\sigma}}$$

$$Z_{xy} = \sqrt{\omega\mu\rho} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad (2.34)$$

El ángulo de fase de la impedancia intrínseca es, por lo tanto, 45°. Esto es característico de los buenos conductores para el cual la intensidad del campo magnético se atrasa 45° de la intensidad del campo eléctrico. La longitud de onda también cambia drásticamente comparada con el vacío o con los dieléctricos disipativos. Esta es muy corta y esta dada por (Ida y Bastos, 1997):

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} \cong 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \cong 2\pi\delta \quad (2.35)$$

II.9 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN DIELECTRICOS PERFECTOS

En los dieléctricos perfectos la conductividad es igual a cero $\sigma = 0$, por lo que la constante de propagación se simplifica y queda como:

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (2.36)$$

de donde se observa que la constante de atenuación es cero, esto implica que no hay pérdidas de energía y la onda electromagnética se propaga infinitamente.

$$a = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (2.37)$$

$$b = 0 \quad (2.38)$$

La profundidad de penetración queda como:

$$\delta = \frac{1}{b} = \infty \quad (2.39)$$

Para el caso del vacío, en la constante de fase se sustituye la permeabilidad eléctrica y magnética

$$a_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (2.40)$$

Se tiene que la velocidad es:

$$v = \frac{\omega}{a} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (2.41)$$

Tomando las constantes para el vacío se tiene que la velocidad de la onda electromagnética está dada por la velocidad de la luz ($c \approx 299795637.69$ m/s).

$$v_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (2.42)$$

Para encontrar la longitud de onda se utiliza la ecuación 2.37

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.43)$$

En el vacío la longitud de onda está dada por:

$$\lambda_0 = \frac{1}{f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{f} \quad (2.44)$$

La impedancia de onda para dieléctricos perfectos es:

$$\begin{aligned} Z_{xy} &= \frac{\mu\omega}{\gamma} \\ Z_{xy} &= \frac{\mu\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\ Z_{xy} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

La impedancia de onda para el vacío tiene la siguiente forma:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \quad (2.46)$$

II.10 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN DIELECTRICOS DISIPATIVOS

Un dieléctrico disipativo es un material para el cual la tangente de pérdida $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$. Las corrientes de desplazamiento son mucho más grandes que las de conducción, pero estas últimas no pueden despreciarse. La constante de propagación se puede aproximar usando la expansión binomial.

La constante de propagación puede escribirse en términos de la tangente de pérdida como:

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (2.47)$$

Por medio de la expansión binomial determinamos las constantes de propagación y fase:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Donde $|x| \ll 1$ y $x = i\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)$ y $n = 1/2$

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

Tomando hasta el segundo término de la expansión se obtiene la aproximación de la constante de propagación

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 + i\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right] \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon} + i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (2.48)$$

Se puede ver claramente que las constantes de fase y atenuación son:

$$a \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (2.49)$$

$$b \cong \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (2.50)$$

La velocidad es igual a:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Esta velocidad es similar a la de la ec. 2.41, solo que ésta velocidad es una aproximación para un rango de frecuencias muy grandes. Utilizando la permeabilidad y permitividad relativa se tiene:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

Debido a que las permeabilidades de las rocas son aproximadamente igual a la del vacío se tiene:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

Además

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.51)$$

La longitud de onda es $\lambda = v/f$, sustituyendo 2.51 se tiene:

$$\lambda = \frac{\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}} ; \lambda_0 = \frac{c}{f}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.52)$$

La profundidad de penetración queda como:

$$\delta = \frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (2.53)$$

Utilizando la permitividad y permeabilidad relativa además del uso de la definición de impedancia intrínseca se tiene:

$$\delta = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \cong \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}}$$

$$\delta = \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{\sigma Z_0} \quad (2.54)$$

Para el caso de la impedancia de onda se tiene:

$$Z_{xy} = \frac{\mu\omega}{\gamma} \cong \frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon} \left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right]} \cong \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} \left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right]} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right]}$$
$$Z_{xy} \cong Z_0 \frac{1}{\left[1 + i \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right]} \quad (2.55)$$

CAPITULO III

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

En este capítulo se presentan las bases del método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT). Este método fue introducido por Yee (1966) y presenta gran aceptación debido a su simplicidad y versatilidad. Éste método se desarrolló para resolver las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, y hoy es uno de los métodos más usados para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Las diferencias centrales se obtienen a partir de la expansión de Taylor, y posteriormente éstas se utilizan para deducir las expresiones de diferencias finitas que sirven para discretizar las ecuaciones de Maxwell. En el presente trabajo se utilizan diferencias finitas centrales de segundo orden.

El análisis de estabilidad es importante en el método de DFDT pues sirve para asegurar una solución estable y confiable; este análisis se aplica a la ecuación de onda del campo magnético utilizando el método de Von Neumann (Mitchell y Griffiths, 1980). Se mencionan diferentes tipos de fuentes de excitación de los cuales se debe escoger la más adecuada para el propósito requerido. Existen diferentes condiciones de frontera y en el caso de este trabajo las que presentan mayor importancia son las condiciones de frontera absorbentes ya que se requiere simular una región abierta.

III.1 EL ALGORITMO DE YEE

1. El algoritmo de Yee (Yee, 1966) resuelve para ambos campos, eléctrico y magnético, en tiempo y espacio, usando las ecuaciones de Maxwell en lugar de

resolver sólo para el campo eléctrico (o solo para el campo magnético) con una ecuación de onda.

- Al utilizar la información de \mathbf{E} y \mathbf{H} la solución es mas completa, que utilizando a cada uno por separado. Las propiedades eléctricas y magnéticas del material pueden ser modeladas de manera simple.
 - Se pueden modelar las características únicas de cada campo, como singularidades tangenciales de \mathbf{H} cerca de las orillas y esquinas, singularidades azimutales de \mathbf{H} cerca de cables, y singularidades radiales de \mathbf{E} cerca de puntos, orillas y cables delgados, si se dispone de ambos campos.
2. Como se aprecia en la figura (3.1), el algoritmo de Yee centra los componentes de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el espacio de tres dimensiones de tal manera que cada componente de \mathbf{E} está rodeado por cuatro componentes de \mathbf{H} , y viceversa.

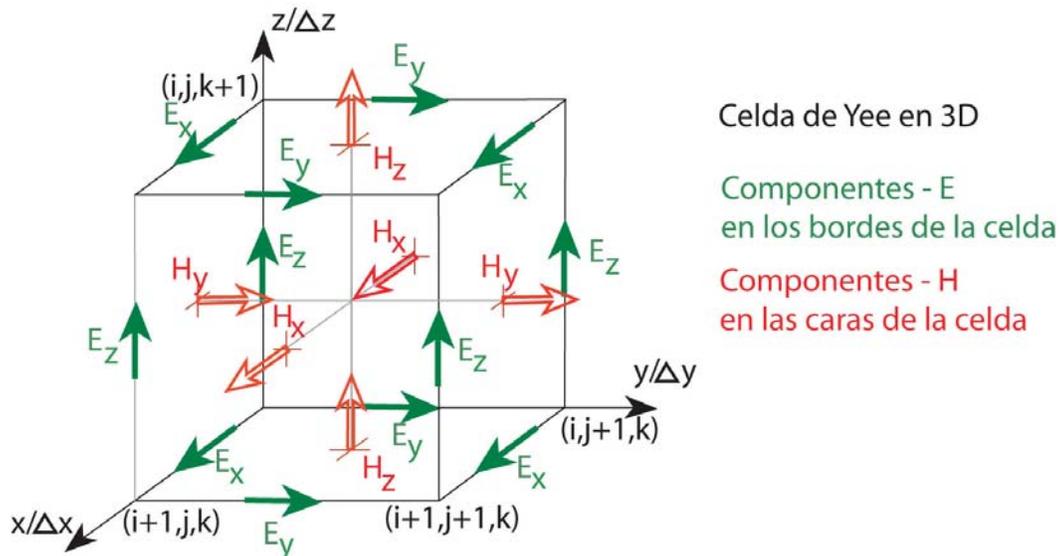


Figura 3.1 Celda de Yee en 3D (Modificado de Swanson y Hoefler, 2003).

- Las expresiones de diferencias finitas para las derivadas espaciales utilizadas en los rotacionales son diferencias centrales y de segundo orden.
 - La continuidad tangencial de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} se mantiene a través de una interfase de materiales diferentes si la interfase es paralela a uno de los planos de los ejes coordenados. En este caso, no se necesita reforzar las condiciones de frontera del campo en la interfase. Al principio del problema, se especifican simplemente la permitividad y permeabilidad del material en cada lugar del componente del campo. Esto proporciona una aproximación de la superficie y de la geometría interna de la estructura, con una resolución espacial determinada por el tamaño de la celda.
 - La ubicación de los componentes \mathbf{E} y \mathbf{H} en la malla de Yee y las operaciones de diferencias centrales en esos componentes implícitamente refuerzan las dos leyes de Gauss. Así, la malla de Yee es libre de divergencia respecto a sus campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en ausencia de carga eléctrica y magnética libre.
3. Como se ve en la figura (3.2), el algoritmo de Yee también centra sus componentes \mathbf{E} y \mathbf{H} en el tiempo a lo que se le llama un arreglo “*leapfrog*”. Todos los cálculos de \mathbf{E} en el espacio modelado son completados y almacenados en memoria para un tiempo en particular utilizando los datos de \mathbf{H} previamente almacenados. Después todos los cálculos espaciales de \mathbf{H} son completados y almacenados en la memoria utilizando los datos de \mathbf{E} que se han calculado. El ciclo comienza nuevamente respecto a los cálculos de los componentes de \mathbf{E} basados en los nuevos de \mathbf{H} .
- El escalonamiento de tiempo “*leapfrog*” es explícito, por lo tanto se eliminan los problemas involucrados con las ecuaciones simultáneas y la inversión de matrices.
 - Las expresiones de diferencias finitas para las derivadas de tiempo son diferencias centrales y de segundo orden.

- El algoritmo de escalonamiento de tiempo no es disipativo. Esto es, los modos de onda numéricos propagándose en la malla no decaen erróneamente debido al artefacto no físico del algoritmo de incremento de tiempo (Taflove y Hagness, 2002).

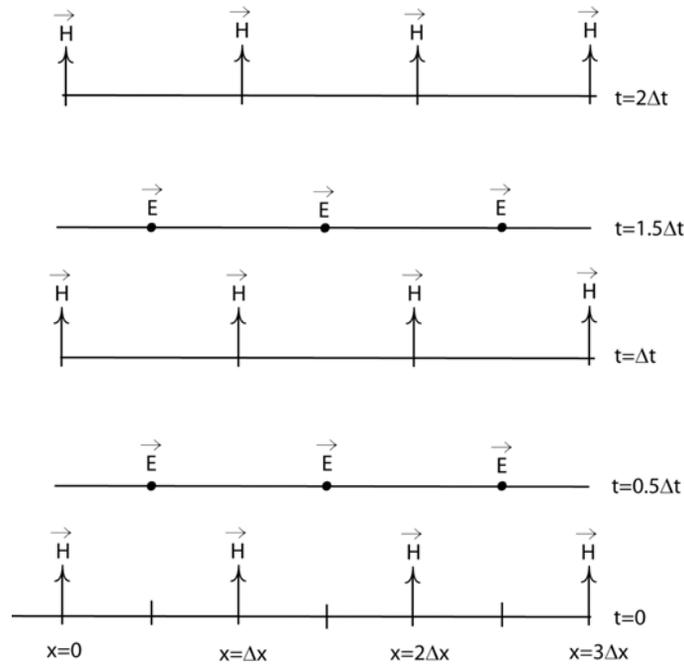


Figura 3.2. Gráfica de espacio-tiempo del algoritmo de Yee para la propagación de onda en una dimensión, Se muestra el uso de diferencias centrales para las derivadas espaciales y el leapfrog para las derivadas temporales. Las condiciones iniciales tanto para el campo eléctrico como para el magnético son cero en cualquier lugar de la malla (Modificado de Taflove y Hagness, 2002).

III.2 DIFERENCIAS CENTRALES

Considerando la expansión de Taylor de $u(x, t_n)$ en el punto en el espacio x_i al punto $x_i + \Delta x$, manteniendo el tiempo en t_n :

$$\begin{aligned}
 u(x_i + \Delta x)\Big|_{t_n} &= u\Big|_{x_i, t_n} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x_i, t_n} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{\xi_1, t_n}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

El último término es el error. ξ_1 es un punto en el espacio que se encuentra en algún lugar en el intervalo $(x_i, x_i + \Delta x)$. Similarmente, considerando la expansión de Taylor al punto en el espacio $x_i - \Delta x$, y nuevamente en el tiempo t_n :

$$\begin{aligned}
 u(x_i - \Delta x)\Big|_{t_n} &= u\Big|_{x_i, t_n} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x_i, t_n} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{\xi_2, t_n}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ξ_2 es un punto en el espacio en algún lugar en el intervalo $(x_i, x_i - \Delta x)$. Si se suman las ecuaciones 3.1 y 3.2, se obtiene:

$$u(x_i + \Delta x)\Big|_{t_n} + u(x_i - \Delta x)\Big|_{t_n} = 2u\Big|_{x_i, t_n} + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{\xi_3, t_n} \tag{3.3}$$

Por el teorema del valor medio, ξ_3 es un punto en el espacio en algún lugar del intervalo $(x_i - \Delta x, x_i + \Delta x)$. Reordenando los términos, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} = \left[\frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right] + 0 \left[(\Delta x)^2 \right] \tag{3.4}$$

Donde $O[(\Delta x)^2]$ es la notación simplificada del término del error, el cual tiende a cero. La ecuación 3.4 tiene una exactitud de segundo orden, es una aproximación de diferencias centrales de la segunda derivada parcial espacial de u . Por conveniencia se adopta el subíndice i para la posición en el espacio y el superíndice n para la observación del punto en el tiempo. La ecuación 3.4 se escribe como:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.5)$$

Similarmente se hace para obtener la derivada temporal, solo que ahora se deja fijo a x_i (Taflove y Hagness, 2002).

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] \quad (3.6)$$

III.3 DIFERENCIAS FINITAS Y NOTACIÓN

Se denota un punto en el espacio en una malla uniforme rectangular como:

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

Donde Δx , Δy , y Δz son, respectivamente, los incrementos de espacio de la malla en las direcciones x , y , y z , e i , j , y k son los integradores. Además, se denota cualquier función u de espacio y tiempo evaluada en un punto discreto en la malla y un punto discreto en el tiempo como:

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n \quad (3.7)$$

Donde Δt es el incremento de tiempo, asumiéndolo como uniforme sobre el intervalo de observación, y n es un integrador.

Yee usó diferencias finitas centrales (diferencias centrales de segundo orden) para las derivadas espaciales y temporales, las cuales se programan de manera simple. Considerando la primera derivada parcial espacial de u en la dirección x , evaluada en el tiempo fijo $t_n = n\Delta t$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.8)$$

Se nota el incremento $\pm 1/2$ en el subíndice i (coordenada x) de u , denotando una diferencia finita espacial sobre $\pm 1/2$ de Δx . Yee derivó la ecuación 3.8 restando la ec. 3.2 de la ec. 3.1 (pero substituyendo $\Delta x/2$ por Δx), y después resolvió para $\partial u / \partial x$. El objetivo de Yee fue diferencias centrales de segundo orden, pero parece que deseó tomar los datos de sus diferencias centrales a la derecha e izquierda de su punto de observación pero solo $\Delta x/2$, en vez de Δx .

Yee escogió esta notación ya que intercaló los componentes de **E** y **H** en la malla en intervalos de $\Delta x/2$.

La primera derivada parcial temporal de u , evaluada para el punto fijo (i,j,k) , será:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i,j,k}^{n+1/2} - u_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (3.9)$$

Ahora el incremento $\pm 1/2$ esta en el superíndice n (coordenada de tiempo) de u , denotando una diferencia finita temporal sobre $\pm 1/2 \Delta t$. Yee escogió esta notación para

intercalar los componentes de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el tiempo en intervalos de $1/2 \Delta t$ para introducir el algoritmo “*leapfrog*” (Taflove y Hagness, 2002).

III.4 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

El siguiente análisis de estabilidad es para dieléctricos disipativos caracterizados por una conductividad. El término de conductividad se discretiza con la técnica de tiempo promedio (*time-average*).

Si no se toma una buena decisión en el incremento del tiempo Δt para los intervalos en el espacio Δx , Δy , y Δz , se corre el riesgo de obtener una solución inestable. La inestabilidad no se debe a una acumulación de errores. El análisis de estabilidad se basa en el método de Von Neumann (Mitchell y Griffiths, 1980). En lugar de trabajar directamente con las ecuaciones de Maxwell, se considera la ecuación de onda para el campo magnético en un medio disipativo homogéneo y libre de cargas (ecuación 2.11):

$$\nabla^2 H - \mu\epsilon \frac{\partial H^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Se cambia de notación utilizando ∂_β para las derivadas espaciales y ∂_t para las derivadas temporales.

$$\left(\sum_{\beta=x,y,z} \partial_\beta^2 - \mu\epsilon \partial_t^2 - \mu\sigma \partial_t \right) H_\alpha(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.10)$$

Se multiplica la ecuación 3.10 por $1/\mu\epsilon$, y se aplica el esquema de diferencias finitas en el dominio del tiempo:

$$\left(\frac{1}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\delta_\beta^2}{\Delta\beta^2} - \frac{\delta_t^2}{\Delta t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\delta_t}{\Delta t} \right) H_\alpha(\vec{r}_{E_\alpha}, n\Delta t) = 0 \quad (3.11)$$

donde δ_β y δ_t denotan el operador de diferencias centrales respecto a la coordenada espacial β y al tiempo, respectivamente. Análogamente, $\Delta\beta$ y Δt denotan los incrementos espacial y temporal. El operador de diferencias centrales respecto al tiempo se define como (Pareda *et al*, 1998):

$$\delta_t f(n\Delta t) = \delta_t f^n \equiv f^{n+1/2} - f^{n-1/2}$$

y así

$$\delta_t^2 f^n \equiv \delta_t [\delta_t f^n] = f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}$$

Éste operador se define análogamente para las coordenadas espaciales. Hay que notar que la discretización presentada previamente no se utiliza debido a que el término de pérdida debe ser evaluado en incrementos medios de tiempo, donde los valores no están disponibles. Utilizando el método de tiempo promedio, el término de pérdida de la ecuación 3.11 se discretiza como se presenta a continuación (Pareda *et al*, 1998):

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \partial_t H_\alpha(\vec{r}_{E_\alpha}, n\Delta t) \approx \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\delta_t}{\Delta t} \left(\frac{H_\alpha^{n+1/2}(\vec{r}_{H_\alpha}) + H_\alpha^{n-1/2}(\vec{r}_{H_\alpha})}{2} + 0(\Delta t^2) \right)$$

Utilizando las definiciones anteriores, la ecuación 3.11 queda como:

$$\frac{1}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} (H_{m+1}^n - 2H_m^n + H_{m-1}^n) - \frac{H_m^{n+1} - 2H_m^n + H_m^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\delta_t}{\Delta t} \left(\frac{H_m^{n+1/2} + H_m^{n-1/2}}{2} \right) = 0$$

Se desarrolla el término de pérdida:

$$\frac{1}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} (H_{m+1}^n - 2H_m^n + H_{m-1}^n) - \frac{H_m^{n+1} - 2H_m^n + H_m^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon\Delta t} (H_m^{n+1} - H_m^n + H_m^n - H_m^{n-1}) = 0$$

eliminando términos iguales y multiplicando la ecuación por Δt^2 :

$$\frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} (H_{m+1}^n - 2H_m^n + H_{m-1}^n) - (H_m^{n+1} - 2H_m^n + H_m^{n-1}) - \frac{\sigma\Delta t}{2\epsilon} (H_m^{n+1} - H_m^{n-1}) = 0$$

Para aplicar el método de Von Neumann se utilizan las siguientes transformaciones:

$$Z_m^n = e^{\alpha n r} e^{i\Delta\beta m k_\beta} = \xi^n e^{i\Delta\beta m k_\beta}$$

$$\xi = e^{\alpha r}$$

Se sustituye el campo magnético \mathbf{H} por Z :

$$-\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\epsilon}\right) Z_m^{n+1} - \left(\frac{2\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} - 2\right) Z_m^n + \frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} (Z_{m+1}^n + Z_{m-1}^n) - \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\epsilon}\right) Z_m^{n-1} = 0$$

sustituyendo $Z_m^n = \xi^n e^{i\Delta\beta m k_\beta}$ se obtiene:

$$\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\epsilon}\right) \xi^{n+1} e^{i\Delta\beta m k_\beta} + \left[\left(\frac{2\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} - 2\right) e^{i\Delta\beta m k_\beta} - \frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} (e^{i\Delta\beta(m+1)k_\beta} + e^{i\Delta\beta(m-1)k_\beta})\right] \xi^n + \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\epsilon}\right) \xi^{n-1} e^{i\Delta\beta m k_\beta} = 0$$

La ecuación anterior se divide entre $\xi^n e^{i\Delta\beta k_\beta}$:

$$\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi + \frac{2\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} - 2 - \frac{\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} \left(e^{i\Delta\beta k_\beta} + e^{-i\Delta\beta k_\beta}\right) + \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi^{-1} = 0$$

Desarrollando el término de exponenciales, se tiene:

$$\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi + \frac{2\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} - \frac{2\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} \cos(\Delta\beta k_\beta) - 2 + \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi^{-1} = 0$$

Factorizando:

$$\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi + \frac{2\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} [1 - \cos(\Delta\beta k_\beta)] - 2 + \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi^{-1} = 0$$

Por trigonometría se tiene:

$$\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi + \frac{2\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} [2\text{sen}^2(\Delta\beta k_\beta / 2)] - 2 + \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi^{-1} = 0$$

Multiplicando la ecuación por ξ se obtiene el polinomio de estabilidad para el esquema de tiempo promedio, además hacemos $\theta_\beta = \Delta\beta k_\beta / 2$:

$$\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\xi^2 + \left[\frac{4\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\text{sen}^2(\theta_\beta)}{\Delta\beta^2} - 2 \right] \xi + \left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right) = 0 \quad (3.12)$$

Utilizando la ecuación cuadrática, resolvemos el polinomio de segundo grado:

$$\xi = \frac{-\frac{4\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\text{sen}^2(\theta_\beta)}{\Delta\beta^2} + 2}{2\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)} \mp \frac{\sqrt{\left(\frac{4\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\text{sen}^2(\theta_\beta)}{\Delta\beta^2} - 2\right)^2 - 4\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)}}{2\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)}$$

Simplificando

$$\xi = \frac{-\frac{2\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\text{sen}^2(\theta_\beta)}{\Delta\beta^2} + 1}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}} \mp \frac{\sqrt{\frac{4\Delta t^4}{\mu^2\varepsilon^2} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\text{sen}^4(\theta_\beta)}{\Delta\beta^4} - \frac{4\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\text{sen}^2(\theta_\beta)}{\Delta\beta^2} + \left(\frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)^2}}{1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}}$$

Se aplica el módulo al cuadrado a la ecuación, y se nota que $|\text{sen}(\cdot)| \leq 1$:

$$|\xi|^2 = \frac{\frac{4\Delta t^4}{\mu^2\varepsilon^2} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^4} - \frac{4\Delta t^2}{\mu\varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} + 1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right)^2}$$

$$\mp \frac{\frac{4\Delta t^4}{\mu^2 \varepsilon^2} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta \beta^4} - \frac{4\Delta t^2}{\mu \varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta \beta^2} + \left(\frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^2}$$

Se obtiene la primera raíz restando el segundo término del primero:

$$|\xi_1|^2 = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}$$

Se nota que esta solución es estable ($|\xi| \leq 1$) para todo $\sigma \Delta t / 2\varepsilon \geq 0$. La siguiente raíz se encuentra con la suma de los términos:

$$|\xi_2|^2 = \frac{\frac{8\Delta t^2}{\mu \varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta \beta^2} \left(\frac{\Delta t^2}{\mu \varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta \beta^2} - 1 \right) + 1 + \left(\frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)^2}$$

Esta raíz es estable si:

$$-2 \leq \frac{8\Delta t^2}{\mu \varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta \beta^2} \left(\frac{\Delta t^2}{\mu \varepsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta \beta^2} - 1 \right) \leq 0$$

por facilidad se resuelve la desigualdad con cero:

$$\frac{8\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} \left(\frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} - 1 \right) \leq 0$$

se tiene que:

$$\frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon} \sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} - 1 \leq 0$$

resolviendo para Δt se obtiene la condición de estabilidad, para el esquema de tiempo promedio:

$$\Delta t \leq \sqrt{\mu\epsilon} \left(\sum_{\beta=x,y,z} \frac{1}{\Delta\beta^2} \right)^{-1/2} \quad (3.13)$$

con $\sigma \geq 0$. Esta condición de estabilidad tiene el mismo límite que para un dieléctrico perfecto.

Para tres dimensiones la condición de estabilidad es:

$$\Delta t \leq \frac{1}{v\sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}}$$

Si $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta l$, la condición anterior se reduce a:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l}{v\sqrt{3}}$$

Para dos dimensiones, si $\Delta x = \Delta y = \Delta l$, entonces:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l}{v\sqrt{2}} \quad (3.14)$$

y para una dimensión:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v} \quad (3.15)$$

III.5 EXITACIONES EN EL MÉTODO (DFDT)

Las excitaciones están divididas básicamente en dos subcasos: Fuentes externas al dominio de la simulación y fuentes internas al dominio de la simulación.

El primer caso es bastante utilizado cuando se simula el efecto de un cierto campo incidiendo sobre la región simulada. El campo incidente puede ser modelado con el llamado Campo Total/Campo Dispersado donde el dominio de la simulación es dividido en una región de campo total (parte principal de la región, incluyendo el dispersor) y la región exterior (campo dispersado). El campo incidente es superpuesto al campo disperso en la región principal, mientras que éste no se considera en el exterior de la región (Tarricone y Esposito, 2004).

En el segundo caso las fuentes internas al dominio de la simulación se pueden modelar por lo menos con tres diferentes estrategias: “fuentes duras” (Sullivan, 2000), “suaves” (Sullivan, 2000), y “transparentes” (Pareda et al, 1998). En las fuentes de excitación duras, se coloca una fuente en el código especificando el valor del campo **E** o **H** en un lugar específico por una función del tiempo. Esta es la fuente de excitación más intuitiva y trivial, pero tiene como inconveniente la reflexión de los campos que llegan al lugar de la fuente. Las fuentes de excitación suaves, por el contrario, suman la función al campo calculado, esto es físicamente similar a una corriente que es localmente inyectada. Estas fuentes no producen reflexiones cuando un campo incide sobre estas, sin embargo el pulso que se produce no es igual al de la función que se simula. Las fuentes transparentes conservan la forma del pulso y además no dispersan las ondas.

III.6 CONDICIONES DE FRONTERA

En una simulación numérica, es imposible e innecesario simular todo el medio. Generalmente se escoge la región de interés en la cual se hace la simulación. La región de interés tiene con seguridad una frontera en el entorno. Las simulaciones numéricas además tienen que considerar los procesos físicos en la región de la frontera. En la mayoría de los casos, las condiciones de frontera son muy importantes para la simulación de los procesos físicos de la región. Cuando se aplican condiciones de frontera incorrectas se introducen influencias no físicas en la simulación.

De la gran variedad de condiciones de frontera, las que son de interés para nuestro caso son las condiciones de frontera absorbentes (ABC por sus siglas en inglés).

III.6.1 Condiciones de frontera absorbentes (ABC)

Al modelar problemas en regiones abiertas, usualmente se utiliza una condición de frontera absorbente (ABC) para truncar el dominio computacional dado que los componentes tangenciales del campo eléctrico a lo largo de la frontera exterior del dominio computacional no se pueden actualizar usando el algoritmo de Yee. La mayoría de las condiciones de frontera absorbentes se pueden agrupar en aquellas que se derivan de ecuaciones diferenciales o aquellas que emplean un material absorbente. Las primeras generalmente se obtienen factorizando la ecuación de onda, permitiendo que solo existan ondas hacia el exterior. Las basadas en materiales absorbentes, por otro lado, son construidas para que los campos sean amortiguados cuando se propagan en el medio absorbente.

CAPITULO IV

DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

En el presente capítulo se discretizan las ecuaciones de Maxwell utilizando diferencias finitas de segundo orden definidas en el capítulo III, así como los criterios para calcular el tamaño de la celda y el incremento de tiempo.

Las ecuaciones en 2D están desarrolladas en el modo transversal eléctrico TE_z con componentes \bar{E}_x , \bar{E}_y y H_z . También se explican las condiciones de frontera absorbentes y las fuentes empleadas. Para absorber las ondas en 1D se almacena el valor de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} de la primera y última celda el número de incrementos de tiempo en que un frente de onda cruza una celda y se explica el uso de la fuente transparente. Para 2D las ondas se absorben utilizando el sistema de capas perfectamente adaptadas (PML) y para la fuente se emplea la técnica de Campo Total/ Campo Dispersado (TF/ SF).

IV.1 Ecuaciones de Maxwell en 1D.

La ley de Ampere (2.2) y la ley inducción de Faraday (2.1) se describen de la siguiente forma:

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times H - J \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E \quad (4.2)$$

En general, éstas representan tres ecuaciones cada una. Tomamos el caso de una dimensión utilizando solo E_x y H_y . Dividiendo la ecuación 4.1 entre la permitividad eléctrica y haciendo uso de la ecuación 2.7 y de la relación $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, se obtiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \nabla \times H_y - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} E_x \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E_x \quad (4.3b)$$

Se debe normalizar estas ecuaciones ya que ε y μ difieren mucho en magnitud, y por lo tanto \mathbf{E} y \mathbf{H} también, para esto utilizamos (Sullivan, 2000):

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E \quad (4.4)$$

Sustituyendo la ecuación 4.4 en las ecuaciones 4.3, y desarrollando los rotacionales, se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{E}_x(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial H_y(t)}{\partial z} - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \bar{E}_x(t) \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial H_y(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial \bar{E}_x(t)}{\partial z} \quad (4.5b)$$

Se realiza la aproximación por diferencias finitas para las derivadas espaciales y temporales:

$$\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(k) - \bar{E}_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left[\frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x} \right] - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \left[\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(k) + \bar{E}_x^{n-1/2}(k)}{2} \right] \quad (4.6a)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left[\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \bar{E}_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x} \right] \quad (4.6b)$$

El último término de la ecuación 4.5a se aproxima como el promedio de los incrementos de tiempo (Esquema de tiempo promedio). Factorizando la ecuación 4.6a se tiene:

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(k) \left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \right) = \bar{E}_x^{n-1/2}(k) \left(1 - \frac{\sigma \Delta t}{2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \right) - \frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2) \right] \quad (4.7)$$

Despejando el campo eléctrico de la ecuación 4.7 y el magnético de la ecuación 4.6b se obtiene finalmente:

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(k) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{c}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2) \right] \quad (4.8a)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \bar{E}_x^{n+1/2}(k) \right] \quad (4.8b)$$

IV.1.1 Tamaño de la celda

Para asegurar una representación adecuada se necesita un buen muestreo. El número de muestras por longitud de onda depende de muchos factores. Generalmente se utilizan 10 o más puntos por longitud de onda.

En general, con las frecuencias más altas simuladas, se determina la longitud de onda correspondiente (ec.2.52).

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_0}{10\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (4.9)$$

IV.1.2 Incremento de tiempo.

Una vez determinado el tamaño de la celda, es posible encontrar el incremento de tiempo Δt . Una onda electromagnética que se propaga en un medio no puede desplazarse más rápido que la velocidad del mismo. Para que se propague la distancia de una celda requiere un tiempo mínimo $\Delta t = \Delta x / v$.

Para una dimensión se utiliza la ecuación de estabilidad (ec. 3.15), y se agrega el término PC (Porcentaje de confianza), el cual debe ser mayor o igual a 1, para que se cumpla la ecuación 3.15, por lo que la ecuación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{PC * v} \quad (4.10)$$

Donde Δx es el tamaño de la celda y v la velocidad del medio.

IV.1.3 Condiciones de frontera absorbentes en una dimensión.

Es necesario establecer las condiciones de frontera para que cuando los campos $\bar{\mathbf{E}}$ y \mathbf{H} lleguen a la frontera exterior se atenúen y no sean reflejados. Si se calcula el campo $\bar{\mathbf{E}}$, se deben conocer los valores de \mathbf{H} que lo rodean. En la parte externa de la malla no se tienen los valores de $\bar{\mathbf{E}}$ y \mathbf{H} . Sin embargo, se tiene la ventaja de que no existen fuentes externas al problema. Así, los campos en la frontera externa deben propagarse hacia afuera. Con estos dos hechos se puede obtener por ejemplo el valor $\bar{\mathbf{E}}$ en la frontera, utilizando el valor \mathbf{H} que se encuentra junto a éste.

Para encontrar las condiciones de frontera se requiere conocer la velocidad del medio y saber que distancia viaja en un intervalo de tiempo, así:

$$dist = v \cdot \Delta t \quad (4.11)$$

Suponiendo que $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot v}$, se obtiene:

$$dist = \frac{\Delta x}{2}.$$

Esta ecuación significa que toma dos intervalos de tiempo para que un frente de onda cruce una celda. Así una condición de frontera aceptable sería:

$$\bar{E}_x^n(0) = \bar{E}_x^{n-2}(1) \text{ para la frontera inicial y } \bar{E}_x^n(k+1) = \bar{E}_x^{n-2}(k) \text{ para la frontera final.}$$

IV.1.4 Fuente transparente

Considerando las ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas en 1D, en donde la fuente es un nodo del campo eléctrico en k_{src} . Una fuente dura se puede realizar igualando el nodo de la fuente, a la función $f(n\Delta t) = f^n$. El campo eléctrico en el nodo de la fuente es entonces $\bar{E}_x^{n-1/2}(k_{src}) = f^{n-1/2}$, pero todos los demás nodos los gobiernan las ecuaciones 4.8a y 4.8b. Se da por hecho que la función vale cero para tiempos menores a $n=0$, En la figura 4.1 se muestran los valores de \bar{E}_x y H_y en la vecindad de la fuente para los primeros dos tiempos, considerando $\sigma = 0$ y $\epsilon_r = 1$. Con un PC = 1, el campo eléctrico en el nodo k y tiempo n esta dado por (Schneider *et al*, 1998):

$$\bar{E}_x^{n-1/2}(k) = f^{n-|k-k_{src}|-1/2}$$

Debido a que una fuente dura solo depende de la función y es independiente de otros campos que se propagan, esta es perfectamente reflejante. Por lo tanto, si un espacio no es homogéneo y un campo esta siendo reflejado hacia la fuente, la fuente reflejara nuevamente ese campo.

	$\bar{E}_x(k_{src}-2)$	$H_y(k_{src}-1)$	$\bar{E}_x(k_{src}-1)$	$H_y(k_{src})$	$\bar{E}_x(k_{src})$	$H_y(k_{src}+1)$	$\bar{E}_x(k_{src}+1)$
n=0					$f^{-1/2}$		
n=1/2				$-f^{-1/2}$		$f^{-1/2}$	
n=1			$f^{-1/2}$		$f^{1/2}$		$f^{-1/2}$
n=3/2		$-f^{-1/2}$		$-f^{1/2}$		$f^{1/2}$	
n=2	$f^{-1/2}$		$f^{1/2}$		$f^{3/2}$		$f^{1/2}$

Figura 4.1 Valores de \bar{E}_x y H_y en 1-D cuando se implementa a $\bar{E}_x(k_{src})$ como una fuente dura, $c\Delta t/\Delta x=1$ (Modificado de Schneider et al, 1998).

Para crear una fuente transparente, se maneja la fuente como la suma de la función y la ecuación de actualización que pertenece a ese nodo. El valor del nodo de la fuente esta dado por:

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(k_{src}) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(k_{src}) - \frac{c}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k_{src} + 1/2) - H_y^n(k_{src} - 1/2) \right] + f^{n+1/2} \quad (4.12)$$

La figura 4.2 muestra los valores de \bar{E}_x y H_y en la vecindad de la fuente para los primeros dos tiempos al implementar esta fuente ($\sigma = 0$ y $\varepsilon_r = 1$). Donde el campo en un nodo arbitrario esta dado por:

$$\bar{E}_x^{n-1/2}(k) = \sum_{m=0}^{n-|k-k_{src}|} (-1)^{m+n-|k-k_{src}|} f^{m-1/2}$$

	$\bar{E}_x(k_{src}-2)$	$H_y(k_{src}-1)$	$\bar{E}_x(k_{src}-1)$	$H_y(k_{src})$	$\bar{E}_x(k_{src})$	$H_y(k_{src}+1)$	$\bar{E}_x(k_{src}+1)$
$n=0$					$f^{-1/2}$		
$n=1/2$				$-f^{-1/2}$		$f^{-1/2}$	
$n=1$			$f^{-1/2}$		$-f^{-1/2} + f^{1/2}$		$f^{-1/2}$
$n=3/2$		$-f^{-1/2}$		$f^{-1/2} - f^{1/2}$		$-f^{-1/2} + f^{1/2}$	
$n=2$	$f^{-1/2}$		$-f^{-1/2} + f^{1/2}$		$f^{-1/2} - f^{1/2} + f^{3/2}$		$-f^{-1/2} + f^{1/2}$

Figura 4.2 Valores de \bar{E}_x y H_y en 1-D cuando se implementa a $\bar{E}_x(k_{src})$ como la suma de la ecuación de actualización y la función $f^{n-1/2}$, $c\Delta t / \Delta x = 1$ (Modificado de Schneider et al, 1998).

En contraste con la fuente dura, cualquier campo que esta de regreso al nodo de la fuente pasara a través de éste. En este sentido la fuente es “transparente.” Sin embargo, el campo que se genera no es igual al generado por la fuente dura debido a que físicamente la fuente corresponde a una fuente de corriente. Para demostrar esta diferencia, se considera la función $f^{n-1/2} = \delta(n)$ (la función delta de Kronecker) para la cual $f^{-1/2}$ es la unidad y los demás valores de $f^{n-1/2}$ son cero. En este caso el campo que se propaga de la fuente es una serie de unos con signos alternados. Al utilizar $PC=1$, el campo se propaga sin error, y esto resulta directamente atribuible a la implementación de la fuente y no es indicativo de algún error inherente en la simulación.

Si se observa la figura 4.2, el campo que se tiene se puede hacer idéntico al producido por la fuente dura, sumando una muestra anterior de la función. Este término anterior ($f^{n-1/2}$), sumado a la ecuación 4.12, cancela el “eco” del término previo de la fuente causado al utilizar la ecuación de actualización en el nodo de la fuente. Así, una fuente realmente transparente que es igual al producido por una fuente dura se obtiene utilizando:

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(k_{src}) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(k_{src}) - \frac{c}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k_{src} + 1/2) - H_y^n(k_{src} - 1/2) \right] + f^{n+1/2} + f^{n-1/2} \quad (4.13)$$

Este tipo de fuente produce los campos que se muestran en la figura 4.1, pero si un campo incide sobre el nodo de la fuente, éste no es reflejado.

Si en la simulación se utiliza el $PC > 1$, entonces el uso de la fuente transparente no es tan simple como sumar el término anterior de la función. Cuando el PC es mayor a uno, el algoritmo de DFDT no es equivalente a una serie de operaciones simples ni proporciona una solución exacta debido a la dispersión numérica inherente.

Para facilitar la construcción de una fuente transparente que sirva para cualquier porcentaje de confianza, se define una malla de respuesta al impulso. Primero, se considera una malla en el que el nodo de la fuente se implementa como fuente dura y la función es un delta de Kronecker. La malla de respuesta al impulso se define como los valores que son obtenidos utilizando la ecuación de actualización en el nodo de la fuente. (La ecuación de actualización es calculada en el nodo de la fuente y el valor que retorna es grabado como parte de la respuesta al impulso. Sin embargo, el valor del nodo de la fuente no es asignado a este valor – como es impuesto por la función, el nodo de la fuente es uno y después cero.) Así, la respuesta al impulso es calculada de los valores previos del nodo de la fuente y los nodos magnéticos que lo rodean, pero la respuesta al impulso no regresa al nodo de la fuente debido a que es “dura” y sus valores son fijados por la función delta de Kronecker. Por lo tanto, el nodo de la fuente esta dado por $\bar{E}_x^{n-1/2}(k_{src}) = \delta(n)$ mientras la respuesta al impulso es:

$$I^{n-1/2}(k_{src}) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-3/2}(k_{src}) - \frac{c}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^{n-1}(k_{src} + 1/2) - H_y^{n-1}(k_{src} - 1/2) \right] \quad (4.14)$$

Se puede obtener la respuesta al impulso analíticamente, ya que es un polinomio cuyo orden aumenta con cada incremento de tiempo pero rápidamente se vuelve difícil de manejar. Los primeros términos de $I^{n-1/2}$ son:

$$I^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$I^{\frac{3}{2}} = 1 - 2s^2$$

$$I^{\frac{5}{2}} = -2s^2 + 2s^4$$

$$I^{\frac{7}{2}} = -2s^2 + 6s^4 - 4s^6$$

$$I^{\frac{9}{2}} = -2s^2 + 12s^4 - 20s^6 + 10s^8$$

$$I^{\frac{11}{2}} = -2s^2 + 20s^4 - 60s^6 + 70s^8 - 28s^{10}$$

donde:

$$s = \frac{1}{PC} = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

La respuesta al impulso se puede obtener numéricamente mediante DFDT, utilizando una malla homogénea que tenga las mismas propiedades del material como las del nodo de la fuente en el problema de interés. La respuesta al impulso se obtiene con la ecuación 4.14.

Para implementar una fuente transparente, se debe restar la convolución de la respuesta al impulso y la función del pulso en el nodo de la fuente. Una fuente transparente para un $PC > 1$, se obtiene utilizando:

$$\begin{aligned} \bar{E}_x^{n+1/2}(k_{src}) = & \frac{\left(1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(k_{src}) - \frac{c}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k_{src} + 1/2) - H_y^n(k_{src} - 1/2) \right] \\ & + f^{n+1/2} - \sum_{m=0}^n I^{n-m+1/2} f^{m-1/2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En una dimensión, la respuesta al impulso para un nodo del campo magnético es el mismo que para un nodo del campo eléctrico.

IV.2 Ecuaciones de Maxwell en 2D

Se utiliza el modo transversal eléctrico TE_z , que tiene como componentes \bar{E}_x , \bar{E}_y y H_z . Se desarrollan los rotacionales y se normalizan con la ec. 4.4.:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} \right) \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \bar{E}_x \quad (4.16b)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \bar{E}_y \quad (4.16c)$$

Las ecuaciones 4.16, expresadas como diferencias finitas se pueden presentar como:

$$\begin{aligned} \frac{H_z^{n+1}(i, j) - H_z^n(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left[\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) - \bar{E}_x^{n+1/2}(i, j-1/2)}{\Delta y} \right. \\ \left. - \frac{E_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - E_y^{n+1/2}(i-1/2, j)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (4.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) - \bar{E}_x^{n-1/2}(i, j+1/2)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left[\frac{H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \\ - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \left[\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) + \bar{E}_x^{n-1/2}(i, j+1/2)}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - \bar{E}_y^{n-1/2}(i+1/2, j)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left[\frac{H_z^n(i+1, j) - H_z^n(i, j)}{\Delta x} \right] \\ - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \left[\frac{\bar{E}_y^{n+1/2}(i+1/2, j) + \bar{E}_y^{n-1/2}(i+1/2, j)}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.17c)$$

Finalmente factorizando y despejando H_z , \bar{E}_x y \bar{E}_y en las ecuaciones 4.17, se tiene:

$$H_z^{n+1}(i, j) = H_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left[\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) - \bar{E}_x^{n+1/2}(i, j-1/2)}{\Delta y} - \frac{\bar{E}_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - \bar{E}_y^{n+1/2}(i-1/2, j)}{\Delta x} \right] \quad (4.18a)$$

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) = \left(\frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_r \epsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_r \epsilon_0}} \right) \bar{E}_x^{n-1/2}(i, j+1/2) + \frac{c \Delta t}{\epsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_r \epsilon_0} \right)} \left[\frac{H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad (4.18b)$$

$$\bar{E}_y^{n+1/2}(i+1/2, j) = \left(\frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_r \epsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_r \epsilon_0}} \right) \bar{E}_y^{n-1/2}(i+1/2, j) + \frac{c \Delta t}{\epsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_r \epsilon_0} \right)} \left[\frac{H_z^n(i, j) - H_z^n(i+1, j)}{\Delta x} \right] \quad (4.18c)$$

IV.2.1 Sistema de capas perfectamente adaptadas (PML)

El sistema de capas perfectamente adaptadas creado por Berenger en 1994, ha sido una condición de frontera absorbente muy utilizada por su eficiencia para absorber ondas electromagnéticas en un rango muy amplio de frecuencias y ángulos de incidencia.

Para determinar de manera general las ecuaciones de un medio de capas perfectamente adaptadas se toma el modo transversal eléctrico, en el cual se define una conductividad eléctrica σ y además un término de pérdida llamado conductividad magnética σ^* , siendo las ecuaciones siguientes:

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4.19a)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.19b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.19c)$$

Además, si la condición

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (4.20)$$

se satisface, la impedancia del medio PML será igual a la del medio en el que se realiza la simulación y no existirá reflexión cuando la onda se propague normalmente a través de la interfase. Ahora se define el medio PML en el modo TE, pero el campo magnético H_z se divide en dos subcomponentes que se denotan como H_{zx} y H_{zy} . Así, el campo electromagnético tiene cuatro componentes, E_x , E_y , H_{zx} y H_{zy} , conectadas por las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (4.21a)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (4.21b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.21c)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (4.21d)$$

Donde los parámetros $(\sigma_x, \sigma_x^*, \sigma_y, \sigma_y^*)$ son homogéneos a las conductividades eléctrica y magnética.

Si $\sigma_x^* = \sigma_y^*$ las ultimas dos ecuaciones pueden reducirse a solo una, involucrando tres componentes E_x, E_y , y $H_z = H_{zx} + H_{zy}$. Como resultado, el medio PML toma como casos particulares todos los medios usuales.

Si $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, las ecuaciones se reducen a las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Si $\sigma_x = \sigma_y$ y $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, éstas se reducen a las ecuaciones de un medio conductivo, y finalmente, si $\sigma_x = \sigma_y$ y $\sigma_x^* = \sigma_y^*$, las ecuaciones se reducen a un medio absorbente.

Si $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$, el medio PML puede absorber una onda plana (E_y, H_{zx}) propagándose a lo largo de x , pero no absorbe una onda (E_x, H_{zy}) propagándose a lo largo de y . En el primer caso, la propagación está regida por 4.21b y 4.21c, y en el segundo caso por 4.21a y 4.21d y viceversa para ondas (E_y, H_{zx}) y (E_x, H_{zy}) si $\sigma_x = \sigma_x^* = 0$ (Berenger, 1994).

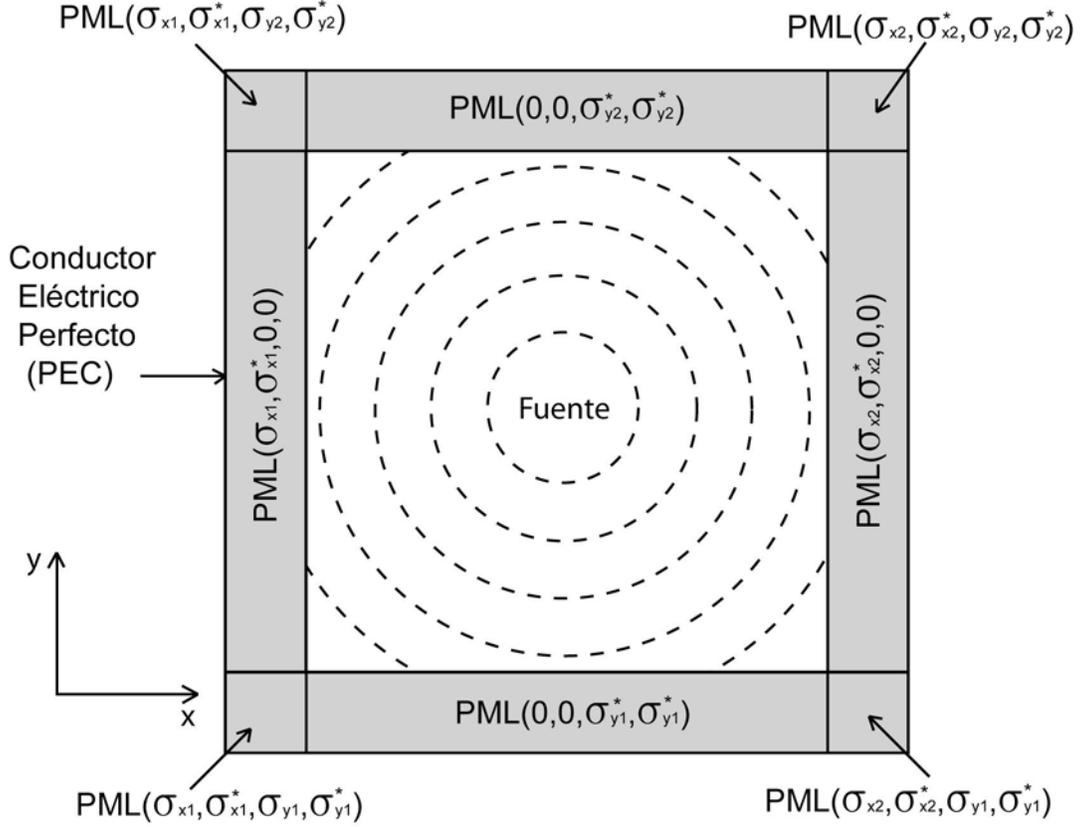


Figura 4.3 Diagrama de las condiciones de frontera (Modificado de Berenger, 1994).

El sistema de capas perfectamente adaptadas tiene un espesor d y termina en la parte externa de la malla. Si se asume que la parte externa es un conductor eléctrico perfecto, la onda se refleja nuevamente al dominio computacional.

Para obtener las ecuaciones 4.21 en diferencias finitas se utiliza la ecuación 4.4 y la relación $H_z = H_{zx} + H_{zy}$. Así, las ecuaciones quedan como:

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(i, j+1/2) + \frac{c\Delta t}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)} \left[\frac{H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad (4.22a)$$

$$\bar{E}_y^{n+1/2}(i+1/2, j) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_x \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)} \bar{E}_y^{n-1/2}(i+1/2, j) + \frac{c\Delta t}{\varepsilon_r} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)} \left[\frac{H_z^n(i, j) - H_z^n(i+1, j)}{\Delta x} \right] \quad (4.22b)$$

$$H_{zx}^{n+1}(i, j) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_x^* \Delta t}{2\mu_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_x^* \Delta t}{2\mu_0}\right)} H_{zx}^n(i, j) - \frac{c\Delta t}{\left(1 + \frac{\sigma_x^* \Delta t}{2\mu_0}\right)} \left[\frac{\bar{E}_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - \bar{E}_y^{n+1/2}(i-1/2, j)}{\Delta x} \right] \quad (4.22c)$$

$$H_{zy}^{n+1}(i, j) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_y^* \Delta t}{2\mu_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_y^* \Delta t}{2\mu_0}\right)} H_{zy}^n(i, j) + \frac{c\Delta t}{\left(1 + \frac{\sigma_y^* \Delta t}{2\mu_0}\right)} \left[\frac{\bar{E}_x^{n+1/2}(i, j+1/2) - \bar{E}_x^{n+1/2}(i, j-1/2)}{\Delta y} \right] \quad (4.22d)$$

En la formulación de Berenger los valores de σ y σ^* van aumentando a medida que se avanza dentro de la PML para dar una mayor absorción. Por lo tanto, disminuyen los términos:

$$\beta_{-e1} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_\beta \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_\beta \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)}, \quad \beta_{-e2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_\beta \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)}$$

$$\beta_{-h1} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_\beta^* \Delta t}{2\mu_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_\beta^* \Delta t}{2\mu_0}\right)}, \quad \beta_{-h2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_\beta^* \Delta t}{2\mu_0}\right)}$$

donde $\beta = x, y$.

Estos términos tienen el valor de 1, en la frontera PML y disminuyen hacia la frontera externa. Si un sistema de capas perfectamente adaptadas está formado de n capas, los términos anteriores en dirección x para la frontera izquierda, se pueden calcular de la siguiente forma:

$$\beta_{-e1}(i+1/2) = \frac{\left(1 - \frac{n-i-.5}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{n-i-.5}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\beta_{-h1}(i) = \frac{\left(1 - \frac{n-i}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{n-i}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\beta_{-e2}(i+1/2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{n-i-.5}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\beta_{-h2}(i) = \frac{1}{\left(1 + \frac{n-i}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

los valores para la frontera derecha:

$$\beta_{-e1}(i_{\max} - i + 1/2) = \frac{\left(1 - \frac{n-i-.5}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{n-i-.5}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\beta_{-h1}(i_{\max} - i) = \frac{\left(1 - \frac{n-i}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{n-i}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\beta_{-e2}(i_{\max} - i + 1/2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{n-i-.5}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\beta_{-h2}(i_{\max} - i) = \frac{1}{\left(1 + \frac{n-i}{n}\right)^3} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Donde i_{\max} representa el tamaño de la matriz en la dirección x y n el número de celdas que se utilizan para la PML. Análogamente se calcula para la dirección y (Sullivan, 1996).

IV.2.2 Incremento de tiempo en 2D.

Para determinar el incremento de tiempo Δt en 2D, se debe tomar en cuenta la propagación en dirección diagonal a la celda, se utiliza la ecuación de estabilidad para 2D (3.14). A esta ecuación se agrega también el término PC, la ecuación se puede escribir igual que la ec. 4.10, pero el PC debe ser mayor o igual a $\sqrt{2}$ para que cumpla con la ecuación de estabilidad para dos dimensiones, además se considera $\Delta x = \Delta y$.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{PC * v}$$

Donde Δx es el tamaño de la celda y v la velocidad del medio.

IV.2.3 Campo Total / Campo Dispersado

Esta técnica permite la generación de una onda plana. La formulación del TF/SF se basa en la linealidad de las ecuaciones de Maxwell. Este asume que el campo físico (medible) total eléctrico y magnético \vec{E}_{total} y \vec{H}_{total} se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{disp} \quad \vec{H}_{total} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{disp} \quad (4.23)$$

\vec{E}_{inc} y \vec{H}_{inc} son los valores de los campos de la onda incidente, asumiendo que son conocidos en todos los puntos del espacio en cada instante. \vec{E}_{disp} y \vec{H}_{disp} son los valores de los campos de la onda dispersada, los cuales son inicialmente desconocidos y son productos de la interacción de la onda incidente con cualquier material en la malla.

Las operaciones de diferencias finitas del algoritmo de Yee pueden ser aplicadas al campo incidente, al campo dispersado y al campo total. Como se muestra en la figura 4.4, esta propiedad permite dividir la malla en dos distintas regiones:

Región 1, es la zona principal de la malla. El algoritmo de Yee opera sobre las componentes del vector del campo total, incluyendo necesariamente los campos que se propagan del campo incidente, así como aquellas de la onda dispersada.

Región 2 (rodea la región 1), zona exterior de la malla, el algoritmo de Yee opera solo sobre los componentes del vector del campo dispersado, esto implica que no hay una onda incidente en la región 2.

Las regiones 1 y 2 son separadas por una superficie virtual que sirve para conectar los campos en cada región, y así generar la onda incidente (Taflove y Hagness, 2002).

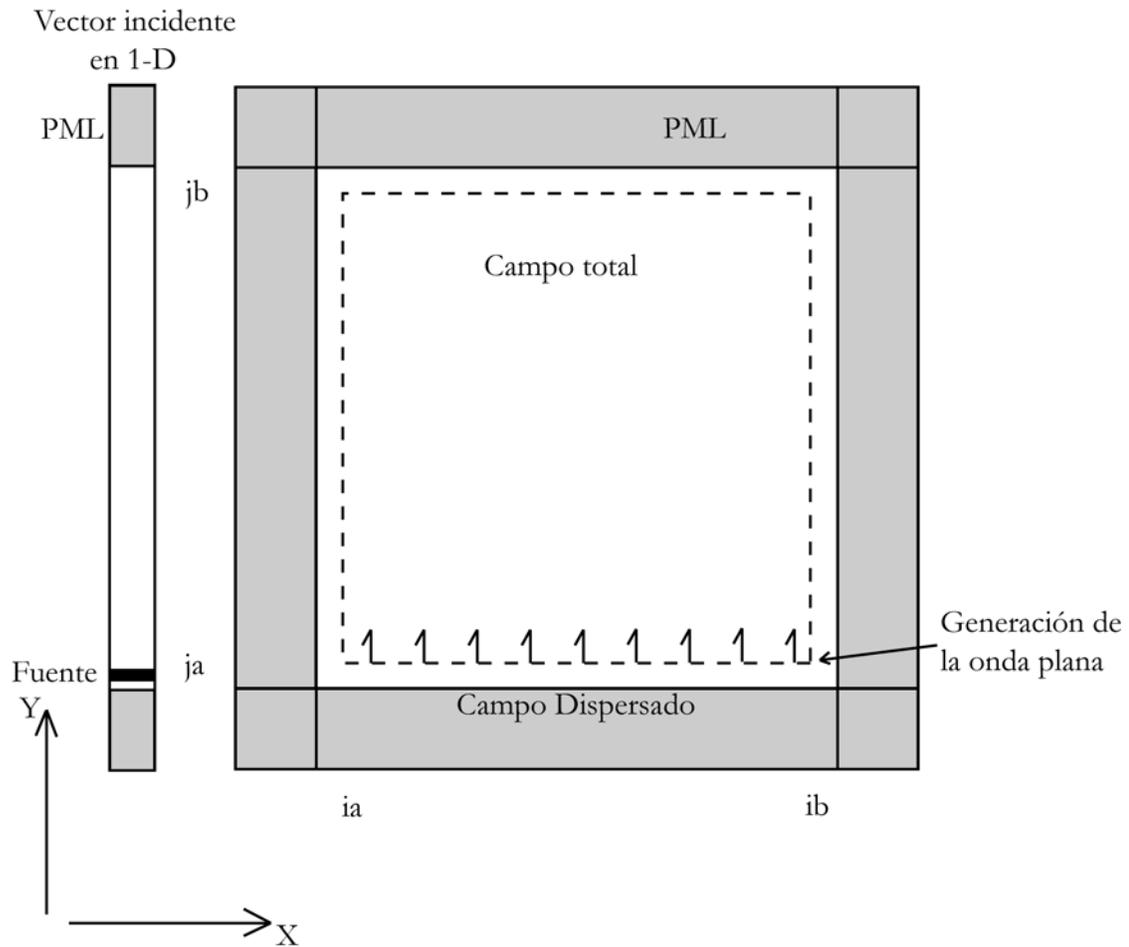


Figura 4.4 Esquema de las regiones de campo total y el campo disperso (Modificado de Sullivan, 2000).

La figura 4.4, muestra el uso de un vector incidente en el cual se genera fácilmente una onda plana; se sitúa la fuente en un punto, entre las condiciones de frontera y la interfase del campo total / campo dispersado, y el campo incidente H_z es agregado al punto de la fuente (Sullivan, 2000).

En dos dimensiones cada punto de la malla, se encuentra en el campo total o no se encuentra, pero no puede estar en la interfase. Por lo tanto, si un punto se encuentra en el campo total pero utiliza puntos exteriores para calcular las derivadas espaciales cuando se

actualiza su valor, este debe ser modificado. Lo mismo sucede con un punto que esta justo afuera y utiliza puntos internos del campo total. El vector incidente contiene los valores necesarios para realizar esas modificaciones (Sullivan, 2000).

Las modificaciones consisten en agregar las ecuaciones que relacionan el campo total y el campo dispersado, y son las siguientes:

Para el campo H_{zx} y H_{zy} , en el valor $j = ja$ y $j = jb$:

$$H_{zx}^{n+1}(i, ja) = H_{zx}^n(i, ja) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \bar{E}_{x_inc}^{n+1/2}(ja - 1/2)$$

$$H_{zx}^{n+1}(i, jb) = H_{zx}^n(i, jb) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \bar{E}_{x_inc}^{n+1/2}(jb + 1/2)$$

$$H_{zy}^{n+1}(i, ja) = H_{zy}^n(i, ja) - \frac{c\Delta t}{2\Delta y} \bar{E}_{x_inc}^{n+1/2}(ja - 1/2)$$

$$H_{zy}^{n+1}(i, jb) = H_{zy}^n(i, jb) + \frac{c\Delta t}{2\Delta y} \bar{E}_{x_inc}^{n+1/2}(jb + 1/2)$$

Para el campo \bar{E}_x justo afuera $j = ja$ y $j = jb$:

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(i, ja - 1/2) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(i, ja - 1/2) - \frac{c\Delta t}{\varepsilon_r\Delta y} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} H_{z_inc}^n(ja)$$

$$\bar{E}_x^{n+1/2}(i, jb+1/2) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_x^{n-1/2}(i, jb+1/2) + \frac{c\Delta t}{\varepsilon_r\Delta y} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} H_{z_inc}^n(jb)$$

Para el campo \bar{E}_y justo afuera $i = ia$ y $i = ib$:

$$\bar{E}_y^{n+1/2}(ia-1/2, j) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_y^{n-1/2}(ia-1/2, j) + \frac{c\Delta t}{\varepsilon_r\Delta x} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} H_{z_inc}^n(j)$$

$$\bar{E}_y^{n+1/2}(ib+1/2, j) = \frac{\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} \bar{E}_y^{n-1/2}(ib+1/2, j) - \frac{c\Delta t}{\varepsilon_r\Delta y} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)} H_{z_inc}^n(j)$$

CAPITULO V

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo se obtienen los radagramas sintéticos utilizando los modelos de Díaz (2003) y Bergmann *et al* (1998) y se describe un experimento de campo para el que también se obtiene un radagrama sintético equivalente a dicha prueba para su comparación. Para programar los algoritmos numéricos con el método de DFDT previamente descritos se utiliza el software MATLAB 7 R14.

Los datos de entrada para el programa para 1D (figura 5.2) provienen de un archivo de texto el cual contiene la profundidad a la cual se encuentra cada interfase de material, la permitividad relativa y la conductividad. Por defecto, el primer material debe ser aire. Se introducen al programa los datos siguientes: tamaño de celda, porcentaje de confianza (PC), ventana de registro y frecuencia del pulso. Posteriormente, se inicializan las condiciones de frontera y de los campos **E** y **H** con el objetivo de iniciar los ciclos que actualizan los valores de los campos **E** y **H** en cada celda así como las condiciones de frontera absorbentes, representando cada ciclo un incremento de tiempo.

Las fronteras absorbentes implementadas para el material inferior tienen el inconveniente de ser perfectas solo cuando la multiplicación de la raíz de la permitividad relativa del material por el término PC es un número entero o muy próximo a entero. El problema de la reflexión de la onda cuando no es atenuada en la frontera inferior se soluciona incrementando la profundidad de la última capa lo necesario para que la reflexión no aparezca en el radagrama. Si $PC=1$, se utiliza la fuente transparente como la suma del valor actual y anterior de la función, pero si $PC > 1$, se calcula utilizando la respuesta al impulso. En la figura 5.1 se muestra el diagrama de flujo para obtener la respuesta al impulso.

Para el programa en 2D, se introducen manualmente los siguientes parámetros: longitud y profundidad del modelo, número y posición de estructuras (rectangulares o elipsoidales) y sus propiedades electromagnéticas, tamaño de celda, porcentaje de confianza, ventana de registro y frecuencia del pulso. En esencia este programa realiza lo mismo que el programa en 1D, solo que en éste se tienen dos componentes para el campo

eléctrico y una para el campo magnético y en vez de vectores se trabaja con matrices. Para las fronteras absorbentes se utiliza el Sistema de Capas Perfectamente Adaptadas (PML) y en la generación de la fuente se utiliza la técnica de Campo Total/ Campo Dispersado (TF/SF). El diagrama de flujo del programa en 2D se ilustra en la figura (5.3).

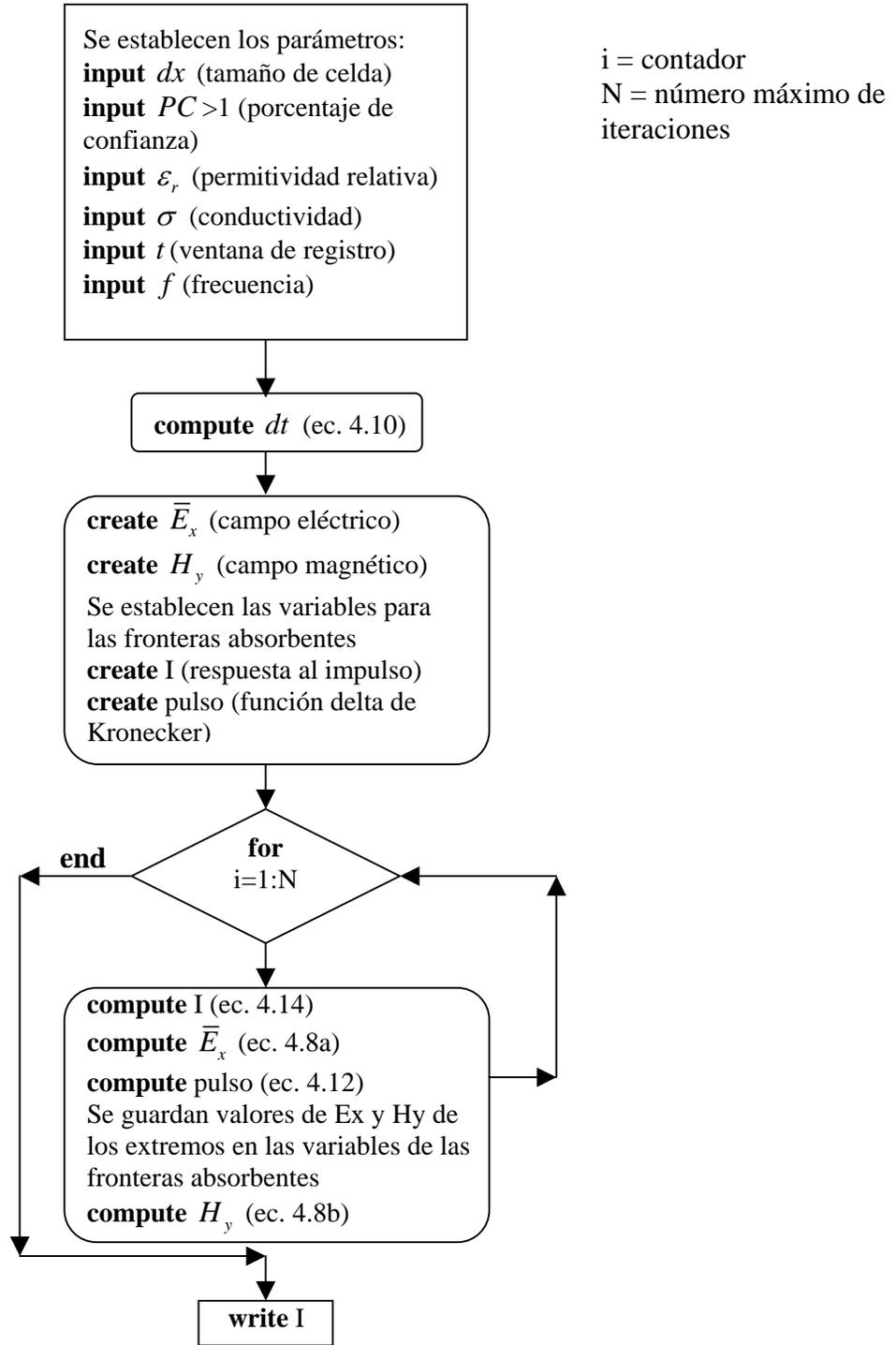


Figura 5.1 Diagrama de flujo del programa para obtener la respuesta al impulso

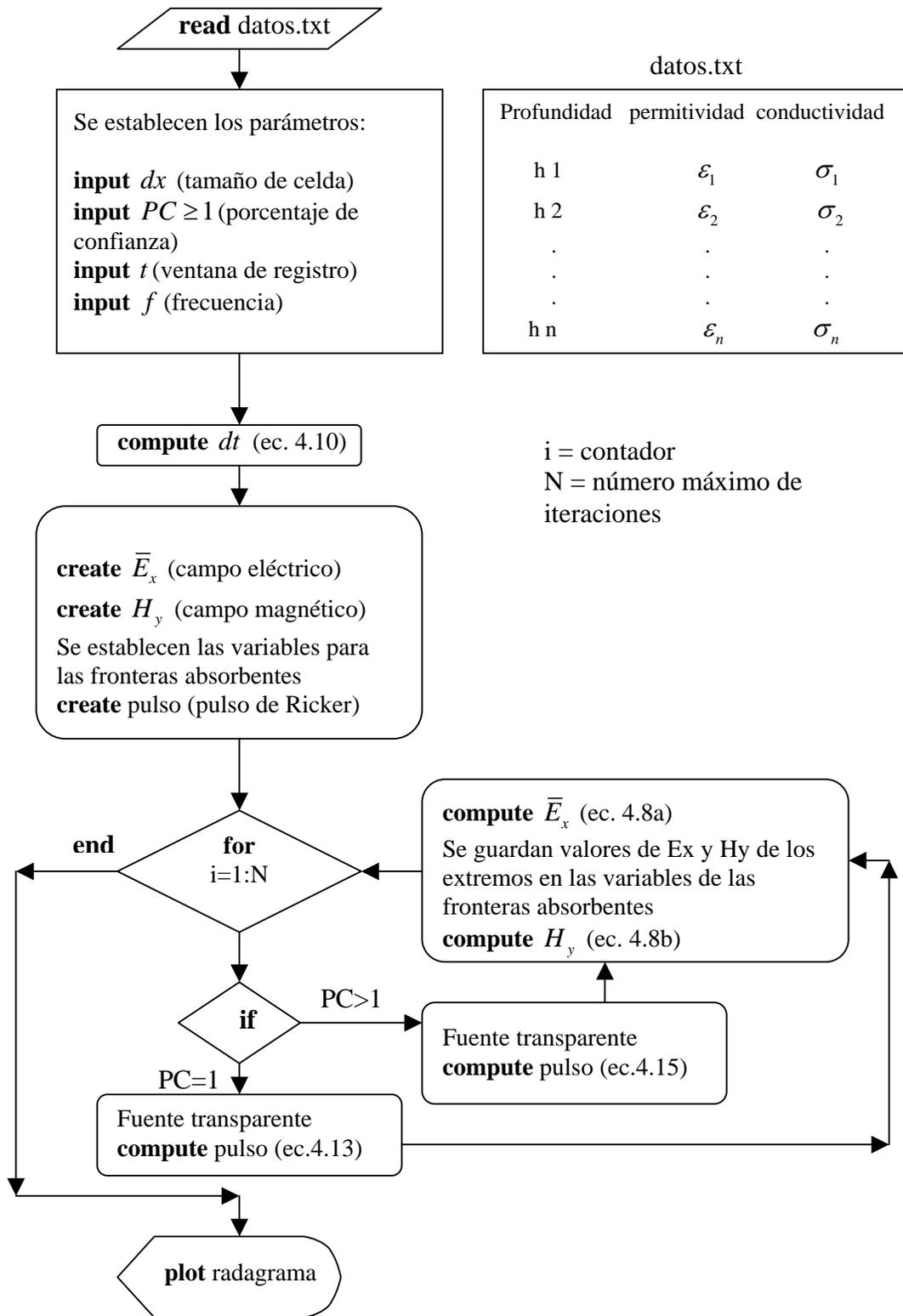


Figura 5.2 Diagrama de flujo del programa DFDT 1D

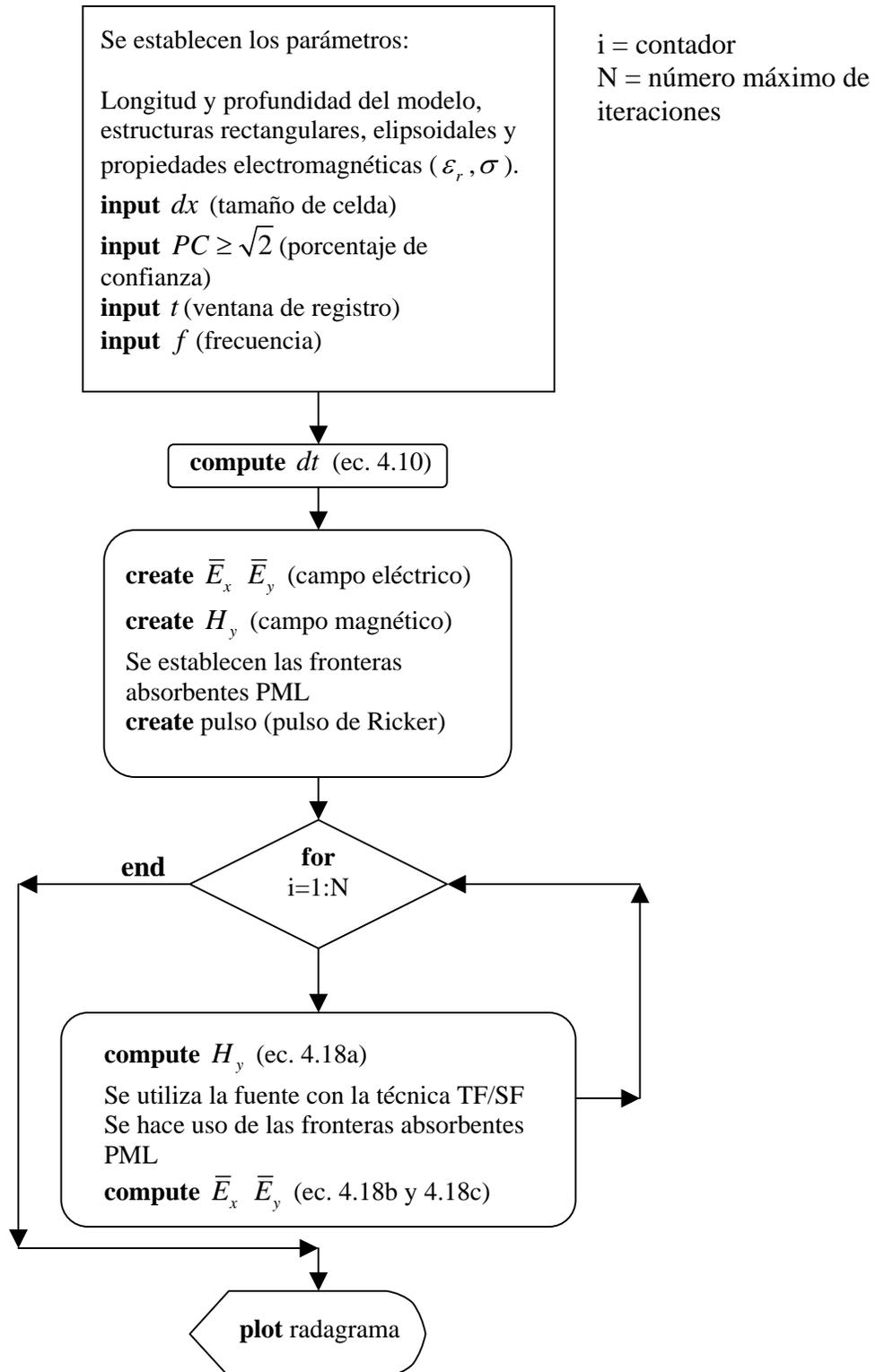


Figura 5.3 Diagrama de flujo del programa DFDT 2D

V.1 MODELO 1D

El modelo utilizado para realizar la modelación en 1D fue el de Díaz (2003), y tiene las siguientes características:

Capa	Material	Profundidad (m)	Permeabilidad Magnética	Conductividad Eléctrica(S/m)	Permitividad Eléctrica
1	Caliza	0	μ_0	0.002	$6 \varepsilon_0$
2	Aire	4	μ_0	0	ε_0
3	Caliza	6	μ_0	0.002	$6 \varepsilon_0$

Tabla 5.1 Características del modelo de Díaz (2003).

El radagrama se calculó con una ventana de muestreo de 200 ns, 1024 muestras por registro y un pulso de Ricker en el dominio de las frecuencias (ec. 5.1), con una frecuencia central de 100 MHz.

$$S(f) = \frac{f^2}{f_c^2} e^{-\frac{f^2}{f_c^2}} \quad (5.1)$$

Díaz (2003) obtuvo el radagrama sintético utilizando el procedimiento propuesto por Wait (Wait, 1970), en el cual se puede encontrar una relación de recurrencia para encontrar la constante de amplitud B_0 . Sumando la constante de amplitud B_0 al campo inicial A_0 , se obtiene el campo eléctrico en la superficie en el dominio de las frecuencias. Para poder determinar las amplitudes, se condiciona que el campo inicial es igual a 1.

$$E_{x0} = 1 + B_0 \quad (5.2)$$

Donde B_0 en cada capa, esta dada por la ecuación de recurrencia:

$$B_0 = e^{i2\gamma_0 z_0} \frac{R_{0,1} + e^{i2\gamma_1(z_1 - z_0)} \left[\frac{R_{1,2} + e^{-i2\gamma_2 z_1} \left[\dots \frac{e^{i2\gamma_{n-2} z_{n-2}} \frac{R_{n-2,n-1} + e^{i2\gamma_{n-1}(z_{n-1} - z_{n-2})} R_{n-1,n}}{1 + R_{n-2,n-1} e^{i2\gamma_{n-1}(z_{n-1} - z_{n-2})} R_{n-1,n}} \right]}{1 + R_{1,2} e^{-i2\gamma_2 z_1} \left[\dots \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right]} \right]}{1 + R_{0,1} e^{i2\gamma_1(z_1 - z_0)} \left[\frac{R_{1,2} + e^{-i2\gamma_2 z_1} \left[\dots \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right]}{1 + R_{1,2} e^{-i2\gamma_2 z_1} \left[\dots \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right]} \right]} \quad (5.3)$$

La constante de amplitud B_0 está en función de las propiedades de todas las capas inferiores. Sustituyendo la ecuación 5.3 en 5.2, se obtiene finalmente la ecuación del campo eléctrico en superficie (Díaz, 2003). Después se acopla el pulso de Ricker al campo eléctrico y se llevan al dominio del tiempo para obtener su representación física, la cual se muestra en al figura 5.4.

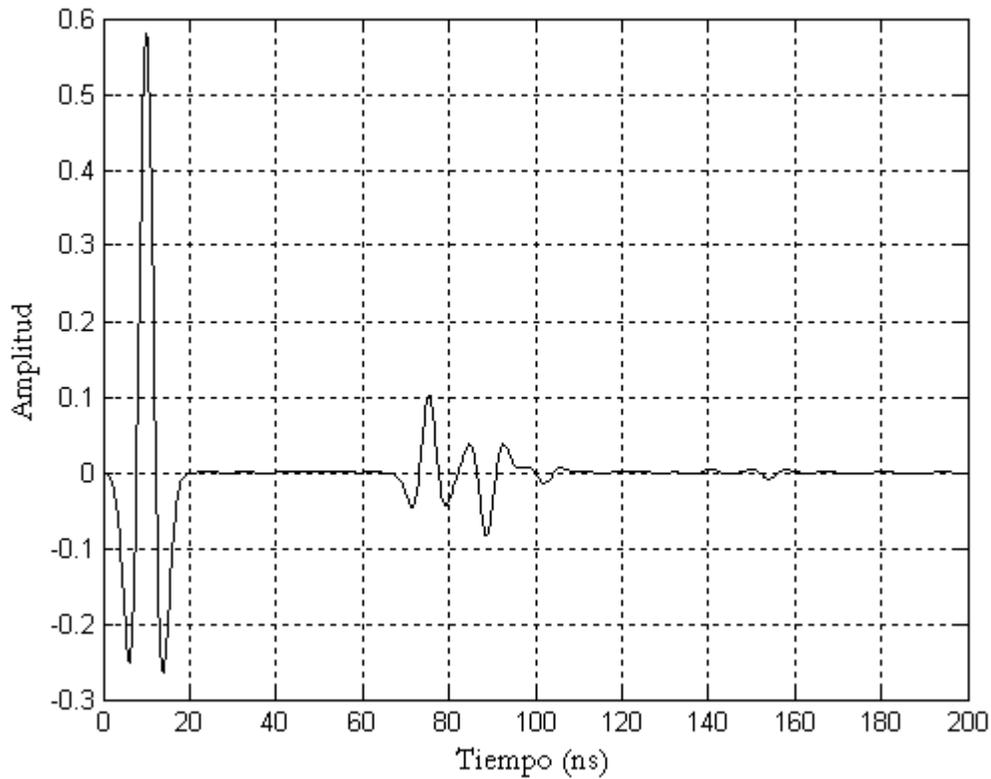


Figura 5.4 Radagrama normalizado en el dominio del tiempo para el modelo propuesto.

En la figura 5.4 se pueden apreciar los primeros tres arribos asociados a las interfaces de las capas, así, como las reflexiones múltiples debidas a la cavidad y a los primeros arribos.

Para realizar el radagrama sintético en este trabajo, se utiliza como fuente un pulso de Ricker con una frecuencia central de 100 MHz, el cual se muestra en la figura 5.5. El pulso de Ricker utilizado para realizar la modelación en 1D y 2D tiene la siguiente forma (ec. 5.4 tomada de Ricker, 1977):

$$V(u|\infty) = \left(\frac{u^2}{4} - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \quad (5.4)$$

Donde:

$$u = \frac{2\sqrt{6}}{b} \tau$$

La frecuencia central se define como:

$$f_c = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{1}{b} \quad (5.5)$$

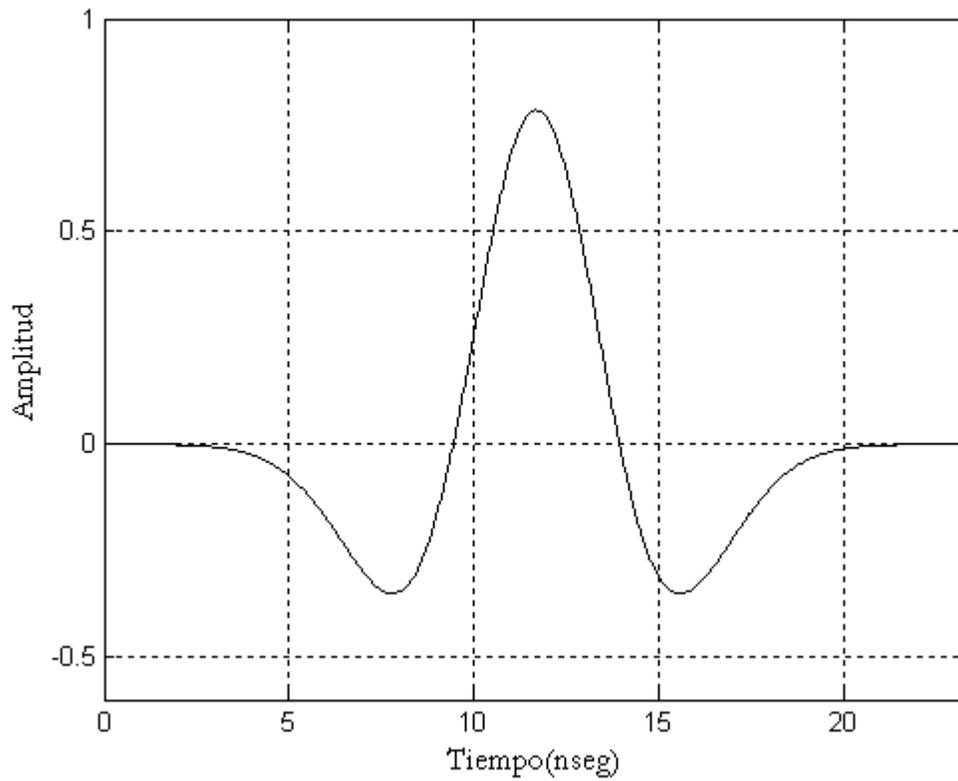


Figura 5.5 Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

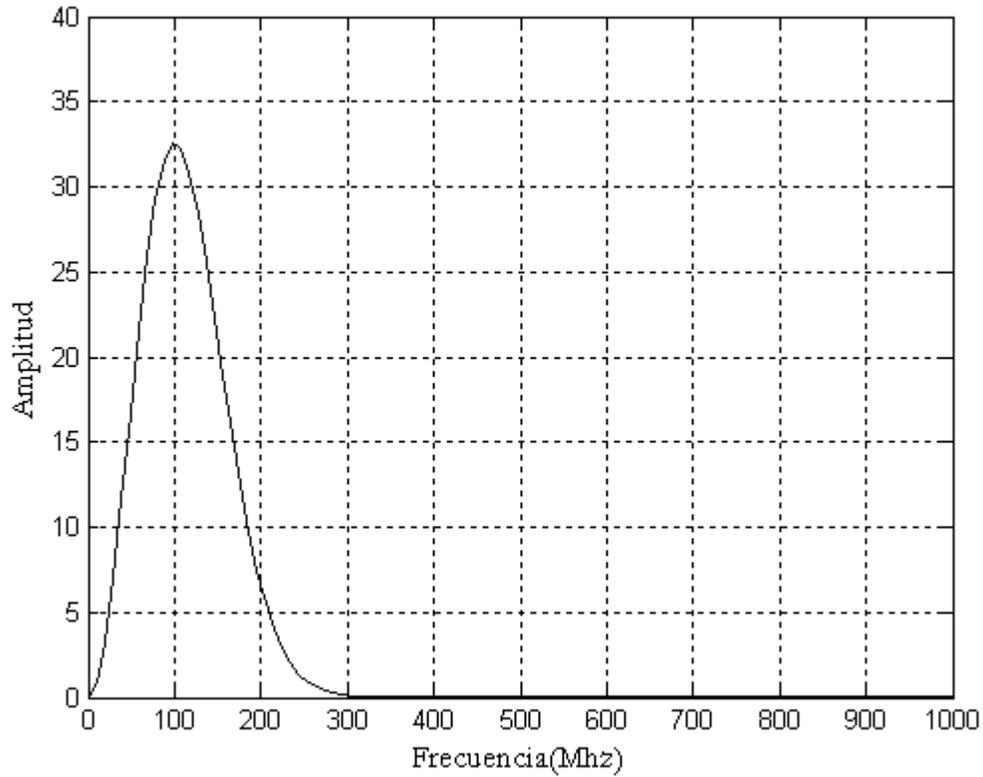


Figura 5.6 Espectro de amplitud del pulso de Ricker.

Para encontrar el tamaño de la celda es necesario determinar la longitud de onda. Para esto, se aplica la ecuación 2.52, en donde la frecuencia central es de 100 MHz por lo que:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_{central}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/seg}}{1 \times 10^8 \text{ seg}^{-1}} = 3 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \text{ m}}{\sqrt{6}} = 1.224 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{10} = \frac{1.224 \text{ m}}{10} = 0.1224 \text{ m}$$

Utilizando $\lambda/10$, se obtiene un tamaño de celda que se puede aproximar a 12 centímetros.

El incremento de tiempo se calcula con la ecuación 4.10 tomando en cuenta la velocidad del vacío.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{PC * c}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2c}$$

Las condiciones absorbentes de frontera se calculan con la ecuación 4.11:

$$dist = v \cdot \Delta t$$

En la parte superior del modelo el medio es aire y su velocidad se asume como la del vacío.

$$dist = c \cdot \frac{\Delta x}{2c} = \frac{\Delta x}{2}$$

Esto indica que en la parte superior, el frente de onda tarda dos pasos temporales para cruzar una celda, entonces, para atenuar la onda que llega a la orilla superior se debe almacenar el valor dos tiempos en $\bar{E}_x(1)$ y luego se asigna en $\bar{E}_x(0)$.

$$\bar{E}_x^n(0) = \bar{E}_x^{n-2}(1)$$

En la parte inferior del modelo la velocidad ya no es la del vacío, por lo que la condición de frontera tendrá que ser diferente para que no existan reflexiones. En esta parte del modelo se tiene un medio con las propiedades de una caliza y la velocidad se puede calcular con la ecuación 2.51.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

La permitividad eléctrica relativa de la caliza considerada fue de 6, por lo que la velocidad de la onda en este medio será:

$$v = \frac{c}{\sqrt{6}}$$

Y sustituyendo ésta en la ec. 4.11 se obtiene:

$$dist = \frac{c}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\Delta x}{2c} = \frac{\Delta x}{2\sqrt{6}} \cong \frac{\Delta x}{5}$$

En este medio la onda tarda cinco pasos temporales para cruzar la celda, y para atenuarla se almacena el valor cinco pasos temporales en $\bar{E}_x(k)$ y después se asigna a $\bar{E}_x(k+1)$.

$$\bar{E}_x^n(k+1) = \bar{E}_x^{n-5}(K)$$

El radagrama tiene una ventana de 200 ns, con este tamaño de celda no se distinguen bien los eventos que definen la cima y la base de la cavidad.

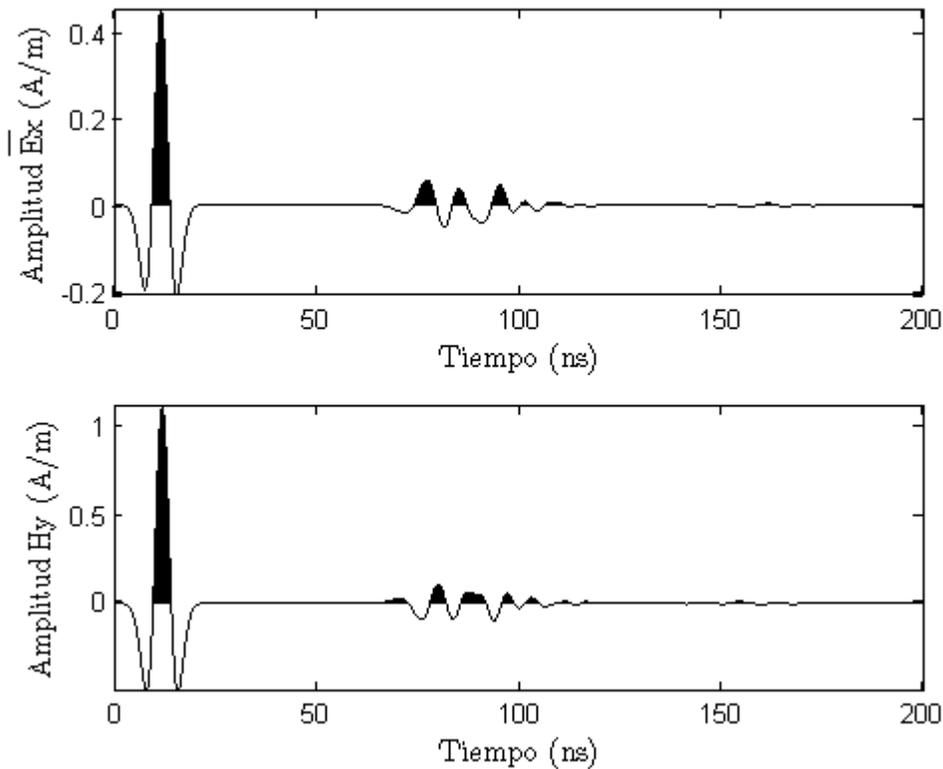


Figura 5.7 Radagramas con pulso de 100 MHz, tamaño de celda de 0.12m y PC=2. En la parte superior se muestra el radagrama del campo eléctrico, y en la inferior el radagrama del campo magnético.

Para tener una mejor representación de los eventos se debe disminuir el tamaño de la celda. Al utilizar 1204 muestras y el PC=1, se obtiene un tamaño de celda de 0.0586m que es aproximadamente la mitad del que se obtuvo anteriormente. El resultado se muestra en la figura 5.8, en la cual se muestran los campos eléctrico y magnético. Los eventos que no se podían distinguir anteriormente, ahora se observan con claridad. Este resultado puede ser mejorado si se disminuye aún más el tamaño de la celda.

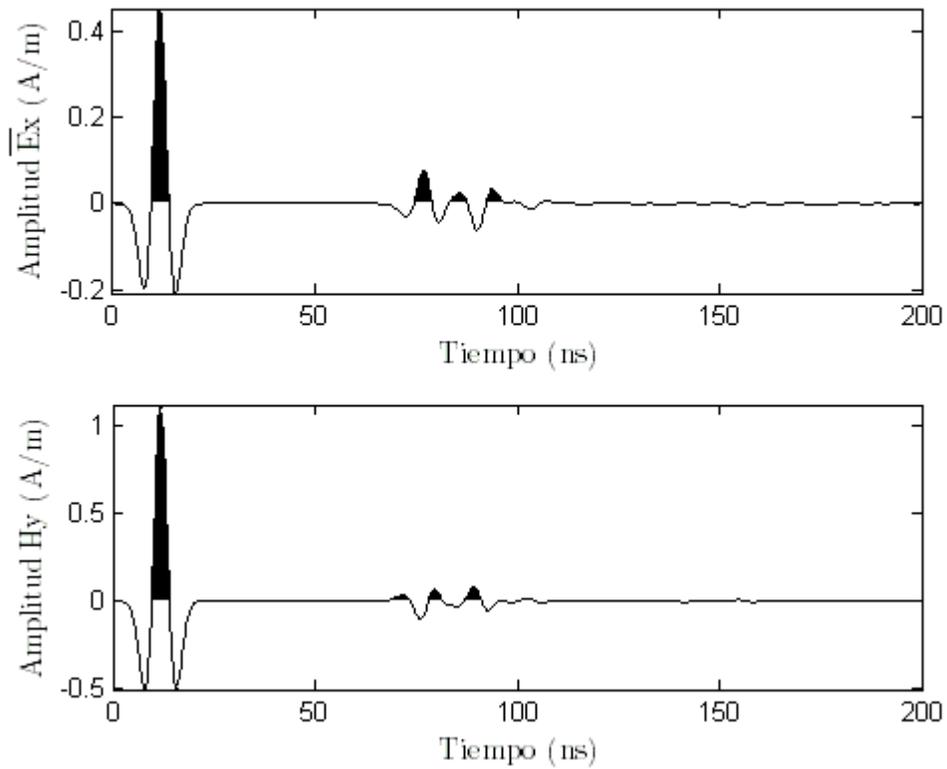


Figura 5.8 Radagramas con pulso de 100 MHz y 1024 muestras. La parte superior se muestra el radagrama del campo eléctrico, y la parte inferior el radagrama del campo magnético.

La amplitud del campo magnético aumenta si disminuye la amplitud del campo eléctrico y viceversa.

Cuando el pulso viaja de un medio de baja velocidad a uno de alta velocidad la polaridad del pulso reflejado no cambia para $\bar{\mathbf{E}}$, pero si para \mathbf{H} . Cuando el pulso viaja de un medio de alta velocidad a uno de baja velocidad la polaridad del pulso reflejado cambia para $\bar{\mathbf{E}}$, pero no para \mathbf{H} .

El radagrama del campo eléctrico obtenido anteriormente se compara con el obtenido por Díaz (2003), y se presenta en la figura 5.9.

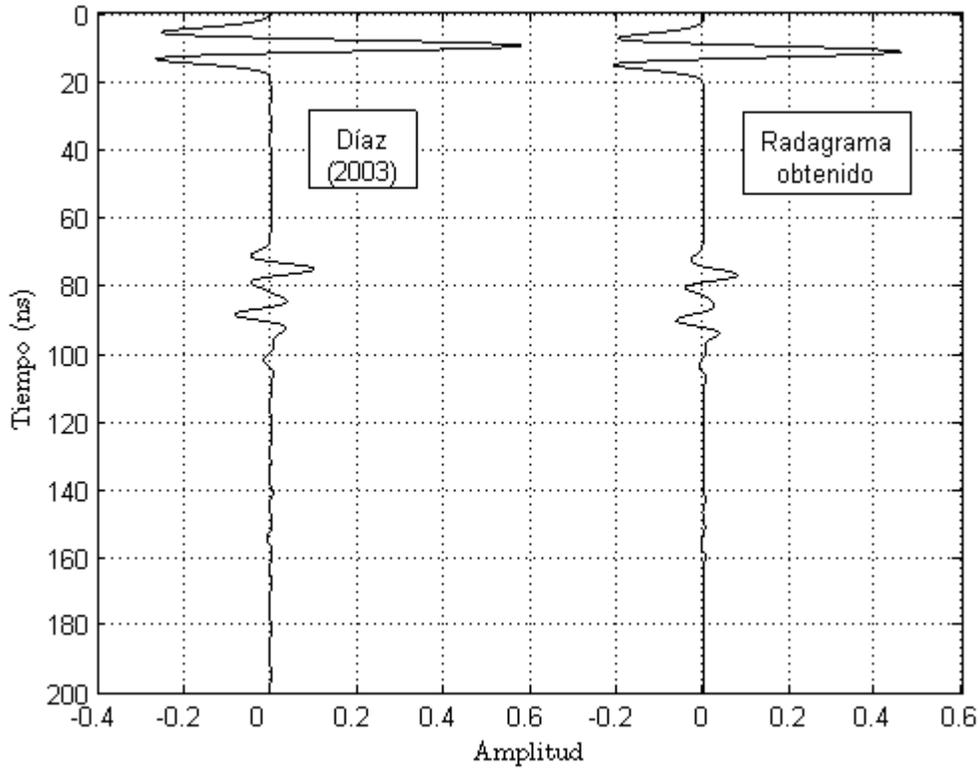


Figura 5.9 Comparación del radagrama de Díaz (2003) y el obtenido en este trabajo por diferencias finitas en el dominio del tiempo.

Al comparar los radagramas, se observa que los eventos son básicamente los mismos, aunque existe un ligero desfasamiento debido a que el pulso utilizado por Díaz (2003) es de más corta duración que el que se utiliza en el presente trabajo. También se observa que la amplitud de los radagramas es diferente, y se debe a que el que se encuentra del lado izquierdo de la figura está normalizado, mientras que en el de la derecha, la amplitud que se toma es la que resulta de la ecuación 5.4 tal como se observa en la figura 5.5, siendo su amplitud máxima de 0.785. Si se divide la amplitud normalizada entre el valor de la amplitud del primer evento, se obtiene el valor de 0.579. Al repetir el mismo procedimiento con el radagrama que se obtuvo en este trabajo se obtiene un mismo valor.

V.2 MODELO 2D

El modelo utilizado para realizar el radagrama sintético en 2D es el de Bergmann *et al*, 1998. En la figura 5.10 se muestra el modelo que consiste de dos cavidades llenas de aire en un medio formado por caliza.

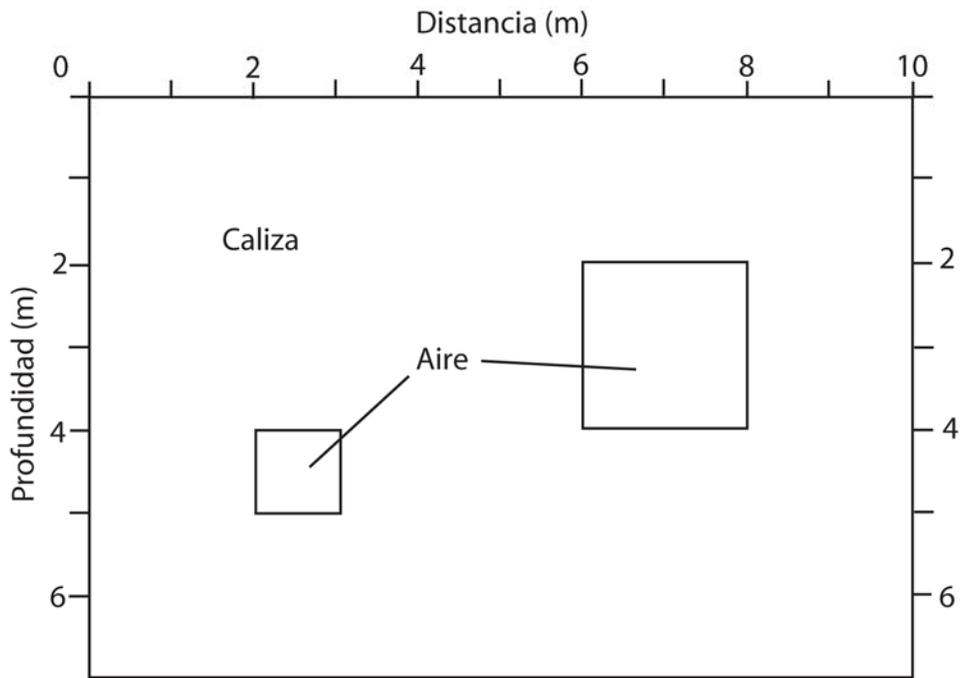


Figura 5.10 Modelo en dos dimensiones con dos cavidades en caliza (Modificado de Bergmann et al, 1998).

Las propiedades son $\epsilon_r = 5$, $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 2 \text{ mS/m}$ para la caliza, y $\epsilon_r = 1$, $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$ para el aire.

En el radagrama obtenido por Bergmann *et al* (figura 5.11) se observan las hipérbolas producidas por la cima y la base de las cavidades.

Para realizar el perfil de GPR sintético de este trabajo, se utiliza como fuente una onda plana conformada por el pulso de Ricker (ec. 5.5), con una frecuencia central de 100 MHz. Se aplica una malla de 520 X 370 celdas, siendo el tamaño de cada celda de 2 centímetros, donde 10 celdas definen el campo dispersado y 8 celdas el sistema de capas perfectamente adaptadas.

En la figura 5.12 se muestra la onda plana en tres dimensiones, producida por la técnica de Campo total/ Campo dispersado.

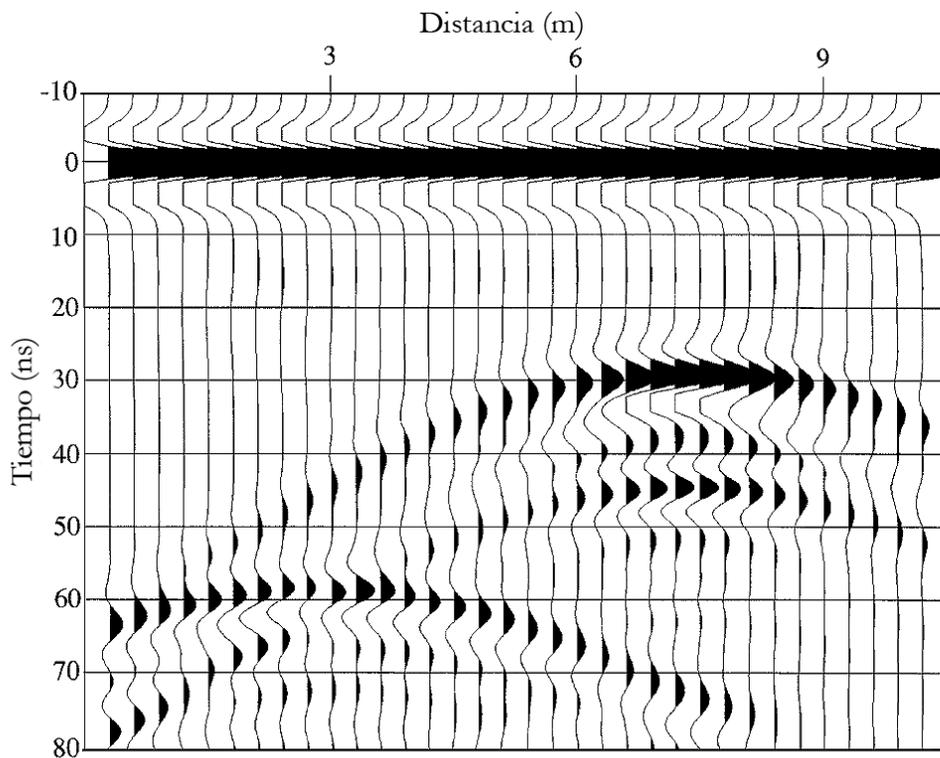


Figura 5.11 Radagrama (campo E_y) del modelo propuesto por Bergmann et al (Modificado de Bergmann et al, 1998).

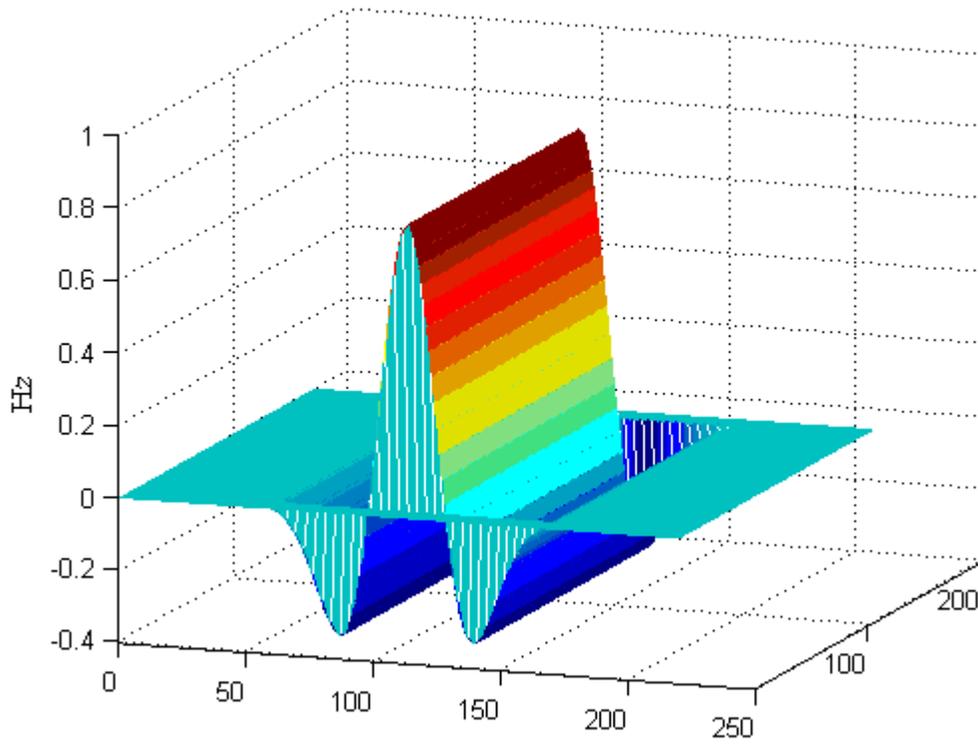


Figura 5.12 Onda plana

En el radagrama obtenido (figura 5.13) se observa la cima y la base de las cavidades al igual que en el radagrama que se toma como referencia. Al radagrama obtenido se le aplica una ganancia lineal para poder apreciar mejor los eventos.

Los radagramas difieren en la polarización de los eventos ya que el de Bergmann *et al (1998)* muestra el campo eléctrico E_y y en el presente trabajo el campo magnético H_z .

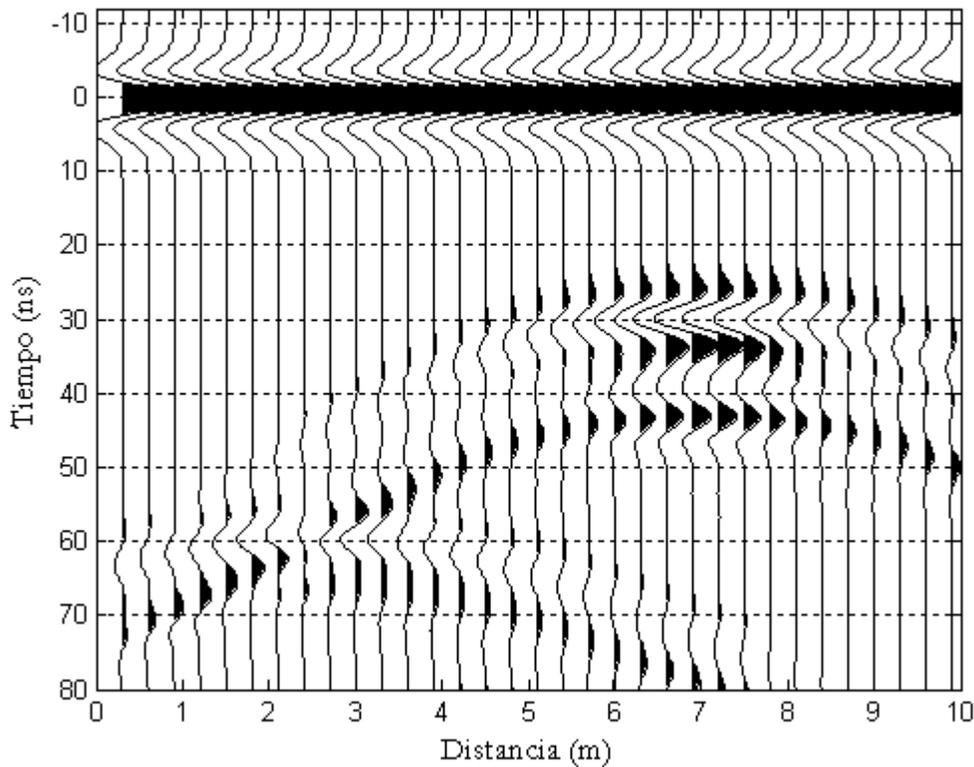


Figura 5.13 Radagrama sintético (campo H_z) obtenido, $f_c = 100$ MHz.

V.3 COMPARACIÓN ENTRE DATOS DE CAMPO Y DATOS SINTÉTICOS

Para realizar la comparación se realizó una prueba de campo con materiales naturales y estructuras de geometría y distribución espacial conocida. Esta prueba consistió en cavar una zanja de 2.5 metros de largo, 2 metros de ancho y 80 centímetros de profundidad aproximadamente. La zanja se rellenó con una capa de arena, después una de tepetate y finalmente una de arena, el material encajonante fue tepetate. Conforme se rellenaba la cavidad se trató de compactar lo más posible. También se enterraron tres tubos de diferentes materiales; cartón, pvc y metal. Las características de las capas y los tubos se establecen en las tablas 5.2 y 5.3 respectivamente.



Figura 5.14 En las fotografías se muestra la realización del experimento de campo. En la fotografía superior se observa la capa inferior de arena, en la fotografía inferior se ve la disposición de los tubos.



Figura 5.15 Antena SubEcho 1200

Capa	Material	Profundidad (m)	Permeabilidad Magnética	Conductividad Eléctrica(S/m)	Permitividad Eléctrica
1	Arena	0	μ_0	0.00001	$6.8 \varepsilon_0$
2	Tepetate	0.25	μ_0	0.000001	$10.5 \varepsilon_0$
3	Arena	0.5	μ_0	0.00001	$6.8 \varepsilon_0$
4	Tepetate	0.73	μ_0	0.000001	$10.5 \varepsilon_0$

Tabla 5.2 Características de las capas.

Tubo	Radio (m)	Distancia (m)	Profundidad (m)	Material	Perm. Magnética	Cond. Eléctrica (S/m)	Permitividad Eléctrica
1	0.20	0.59	0.39	carton	μ_0	-	$3 \varepsilon_0$
2	0.025	1.3	0.205	pvc	μ_0	-	$3 \varepsilon_0$
3	0.025	1.86	0.205	metal	μ_0	100E6	$1 \varepsilon_0$

Tabla 5.3 Características de los tubos empleados. La distancia se mide del inicio del modelo al centro de la circunferencia del tubo, y la profundidad se mide de la superficie al centro de la circunferencia del tubo.

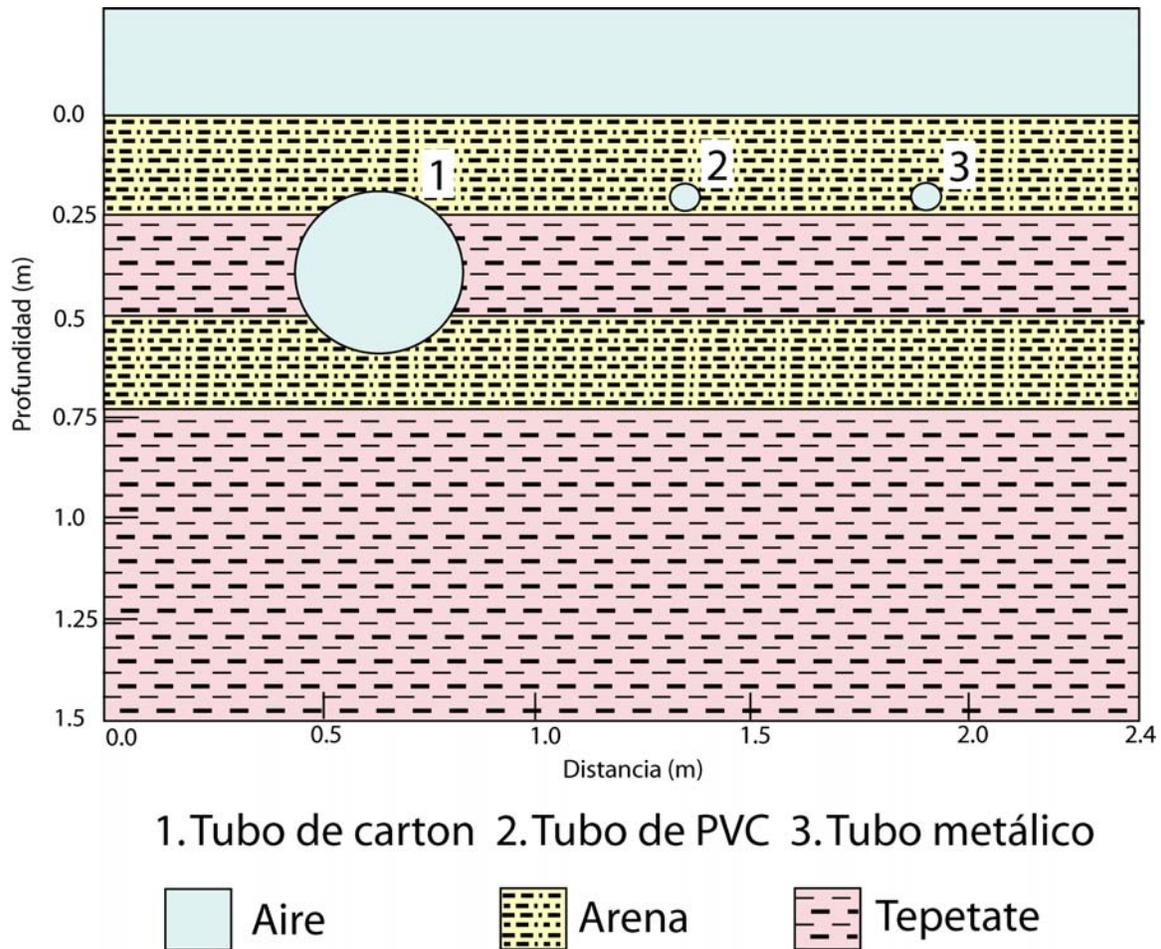


Figura 5.16 Modelo con tuberías en un medio intercalado de arenas y tepetate.

La disposición de las capas y los tubos se muestran en la figura 5.16. La adquisición de los datos se realizó utilizando una consola GSSI SIR-3000 y una antena SubEcho de 1.2 GHz. La sección capturada tuvo una longitud de 2.4 metros y una ventana temporal de 16 ns.

En la figura 5.17 se muestra la sección del radagrama obtenido en la prueba de campo observándose claramente las tres hipérbolas producidas por los tubos, siendo de mayor amplitud la correspondiente al tubo metálico. También se observan varios eventos horizontales asociados a las interfases o contactos entre los diferentes materiales encajonantes.

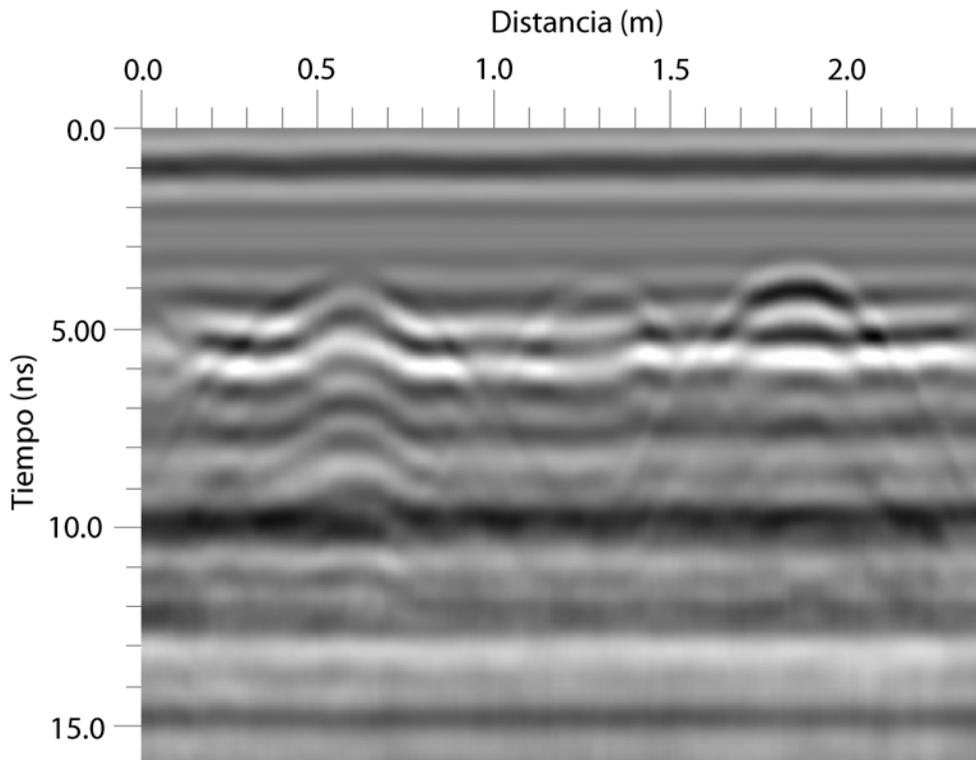


Figura 5.17 Radagrama obtenido a partir del modelo anterior con una antena de 1.2 GHz.

Para obtener el radagrama sintético se utiliza el modelo de la figura 5.16 y las características descritas en las tablas 5.2 y 5.3. Se aplica una onda plana conformada por

el pulso de Ricker de 1.2 GHz y un tamaño de celda 0.2 centímetros. A cada lado el modelo se incrementó en 2 metros para evitar las reflexiones que se producen entre cada interfase y la frontera absorbente. El número total de celdas fue de 3220 X 770. Una ganancia lineal fue agregada para apreciar mejor los eventos. En la figura 5.18 se presenta solo el área de interés.

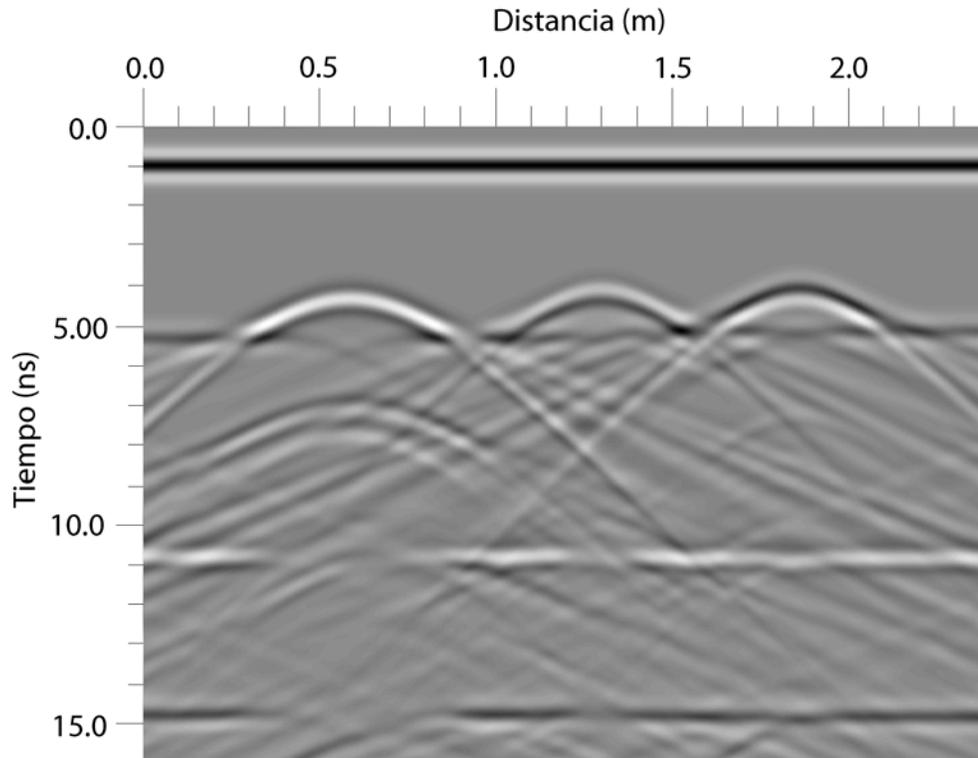


Figura 5.18 Radagrama sintético con una frecuencia central de 1.2 Ghz.

En el radagrama sintético se aprecian claramente las hipérbolas producidas por los tubos y las reflexiones debidas a las interfases entre la arena y el tepetate, en la figura 5.19 se señalan los diferentes eventos. La diferencia en cuanto a la forma que existe entre las hipérbolas de los datos de campo y las del radagrama sintético puede ser atribuible a la diferencia de la forma del pulso que el radar produce y la fuente que se utilizó.

Otra diferencia notable, es la presencia de un gran número de eventos horizontales en el radagrama de campo, que probablemente son producidos por pequeñas interfases dentro de la misma capa introducidas al realizar la compactación de los materiales.

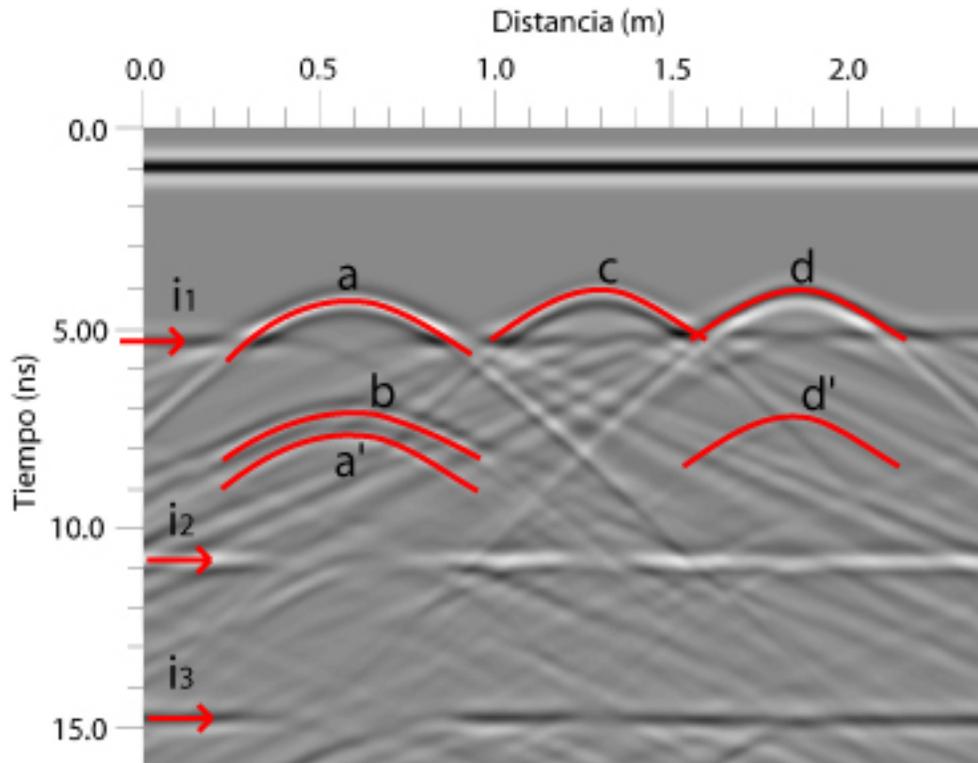
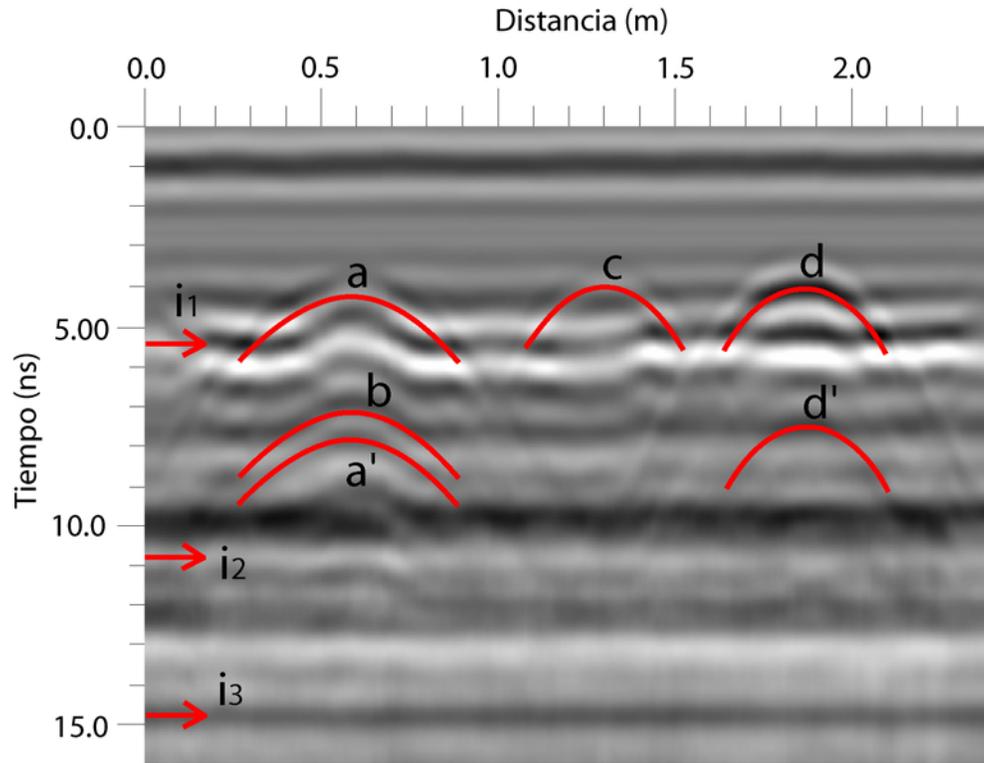


Figura 5.19 Eventos relacionados a las distintas estructuras en el radagrama sintético. *a)* corresponde con la cima del tubo, *b)* con la base del tubo, *a')* se refiere al múltiple de *a*, *c)* es la cima del tubo de PVC, *d)* es la cima del tubo de metal y *d')* es el múltiple. La primera interfase se denota con *i₁*, la segunda con *i₂* y la tercera con *i₃*.

Utilizando los datos sintéticos de la figura anterior se ubican con mayor facilidad los principales eventos en los datos de campo. En la figura 5.20 se señalan dichos eventos.



*Figura 5.17 Eventos de las principales estructuras en la sección de campo. **a**) corresponde con la cima del tubo, **b**) con la base del tubo, **a'**) se refiere al múltiple de **a**, **c**) es la cima del tubo de PVC, **d**) es la cima del tubo de metal y **d'**) es el múltiple. La primera interfase se denota con **i₁**, la segunda con **i₂** y la tercera con **i₃**.*

CONCLUSIONES

El propósito de este trabajo de tesis fue generar radagramas sintéticos en 1D y en 2D utilizando el Método de Diferencias Finitas en el dominio del tiempo. El uso de radagramas sintéticos para la caracterización del subsuelo es de gran utilidad en la caracterización y análisis del subsuelo mediante técnicas de GPR al apoyar las interpretaciones de radagramas y para descartar señales debidas a reflexiones múltiples.

Para obtener radagramas sintéticos adecuados es importante tomar en cuenta la condición de estabilidad, ya que si no se cumple este criterio se producen efectos que interfieren o distorsionan la propia fuente y por ende toda la simulación. Otro punto importante a considerar son las fronteras absorbentes debido a que el método de GPR se debe simular como una región abierta, de lo contrario se tendría que hacer un modelo muy extenso, y el consumo de recursos computacionales serian considerables. Las fronteras absorbentes deben atenuar casi perfectamente las ondas que inciden sobre estas fronteras para que no se tengan reflexiones que dificulten la localización de los principales eventos.

La realización de estos radagramas se puede llevar a cabo en una computadora personal. Para el programa 1D se requirieron solo de algunos segundos para el proceso; en 2D para el primer modelo se utilizaron unos cuantos minutos y para el segundo modelo (más complejo) alrededor de 90 minutos.

Las condiciones absorbentes de frontera funcionan satisfactoriamente cuando existe un medio homogéneo pero en un medio estratificado se presentan algunas reflexiones indeseadas en el punto en el que coinciden las interfases y la frontera absorbente: estas reflexiones pueden generarse cuando se implementa la técnica TF/SF. Esta situación no interfirió con el objetivo del trabajo.

Los resultados obtenidos fueron muy satisfactorios en comparación con los resultados de los modelos de Díaz (2003) y Bergman *et al* (1998). Para obtener radagramas representativos se deben tener bien controladas las propiedades electromagnéticas de cada medio así como su ubicación espacial. Los radagramas sintéticos ayudan a identificar los eventos relacionados con cada interfase o estructura, así como reflexiones múltiples.

BIBLIOGRAFÍA

Berenger J. P., 1994. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics* 114. Pp. 185-200.

Bergmann Tim, Robertsson J. O. A., Holliger Klaus, 1998. Finite-difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media. *Geophysics*, vol. 63, no. 3. Pp. 856-867.

Clayton R. Paul, 2006. *Introduction to Electromagnetic compatibility*. Jhon Wiley & Sons. Second Edition. Hoboken, New Jersey.

Díaz Molina O. 2003, *Modelación 1D Directa e Inversa de Radar de Penetración Terrestre*. Programa de Posgrado de Ciencias de la Tierra, Instituto de Geofísica. UNAM. México.

Ida Nathan, 1995. *Numerical Modeling for Electromagnetic Non – Destructive Evaluation*. Chapman & Hall. Great Britain.

Ida Nathan y Bastos Joao P.A., 1997. *Electro – Magnetics and Calculation of Fields*. Springer – Verlag New York, second edition.

Ida Nathan, 2004. *Engineering Electromagnetics*. Springer – Verlag New York, second edition. Pp. 704-707, 553-554, 225-226.

Irving James y Knight Rosemary, 2006. *Numerical Modeling of ground-penetratin radar in 2-D using MATLAB*. Elsevier Computers & Geosciences 32. Pp. 1247-1258

Mitchell Andrew R. y Griffiths David F., 1980. *The finite difference method in partial differential equations*. Chischestes Wiley.

Orellana, E. 1974. *Prospección Geoeléctrica, por campos variables*. Paraninfo. Madrid.

Pareda José A., García Oscar, Vegas Ángel y Prieto Andrés, 1998. Numerical Dispersion and Stability Analysis of the FDTD Technique in Lossy Dielectrics. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 8, no. 7. Pp. 245-247.

Ricker, N. H. 1977. *Transient Wave in Visco-Elastic Media*. *Developments in Solid Earth. Geophysics 10*. Elsevier. Amsterdam-New York. Pp. 278.

Schneider John B., Wagner Christopher L., y Ramahi Omar M., 1998. Implementation of Transparent Sources in FDTD Simulations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. vol. 46, no. 8. Pp. 1159-1168.

Sullivan Dennis M., 1996. A Simplified PML for Use with the FDTD Method. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 6, no. 2. Pp. 97-99.

Sullivan Dennis M., 2000. *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*. IEEE Press. New York.

Swanson Daniel G. Jr y Hofer Wolfgang J. R., 2003. *Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation*. Norwood, MA, Artech House.

Taflove Allen y Hagness Susan, 2002. *Computational Electrodynamics: the finite - difference time - domain method*. Norwood, MA. Artech House. Second edition.

Tarricone L. y Esposito A. 2004. *Grid computing for electromagnetics*. Norwood, MA. Artech House.

Wait, J.R., 1970. *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. Pergamon Press. Oxford-New York.

Yee Kane S., 1966. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. vol. AP-14, no. 8. Pp. 302-307.