



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Convección Natural de una Capa de Fluido
en Rotación entre Paredes con
Conductividades Térmicas y Espesores
Finitos”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

IVONNE JUDITH HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS ANTONIO DÁVALOS OROZCO

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. LUIS FELIPE DEL CASTILLO DÁVILA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer especialmente a mi familia, a mi madre, a mi padre y a mis hermanos que siempre han estado conmigo y que me han apoyado para salir adelante.

También quiero agradecer al Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco por el tiempo, paciencia y dedicación que tuvo al asesorarme con la tesis.

A la Dra. Catalina Stern Forgach, Dra. Adela Monreal Gómez, Dr. Gerardo Ruiz Chavarría y al Dr. David Salas de León, miembros del jurado, por sus comentarios sobre el trabajo, que me ayudaron a mejorar la versión final de la tesis.

A todos mis amigos por su amistad y apoyo.

A mí novio por su cariño y amor.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIM-UNAM) por todas las facilidades otorgadas durante la realización de este trabajo.

Contents

I. INTRODUCCIÓN	4
II. LA INESTABILIDAD TÉRMICA DE UNA CAPA DE FLUIDO CALENTADA POR ABAJO	6
A. EL PROBLEMA DE BENARD	6
B. ECUACIONES BÁSICAS DE LA HIDRODINÁMICA	7
1. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	7
2. LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	8
3. LA RAPIDEZ DE DISIPACIÓN VISCOSA	9
4. LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR	10
C. LA APROXIMACIÓN DE BOUSSINESQ	10
D. LAS ECUACIONES DE LA PERTURBACIÓN	11
E. CONDICIONES DE FRONTERA	14
F. MODOS NORMALES	16
G. SOLUCIÓN PARA LAS COMPONENTES HORIZONTALES DE LA VELOCIDAD	18
H. ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA	19
I. LAS ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL ESTADO MARGINAL Y LA REDUCCIÓN A UN PROBLEMA DE VALOR CARACTERÍSTICO	19
J. SOLUCIONES A LAS ECUACIONES	20
III. LA INESTABILIDAD TÉRMICA DE UNA CAPA DE FLUIDO EN ROTACIÓN CALENTADA POR ABAJO	25
A. EL TEOREMA DE HELMHOLTZ Y KELVIN	25
B. LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS PARA UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN	26
C. EL TEOREMA DE TAYLOR - PROUDMAN	27
D. LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN FLUIDO EN ROTACIÓN	28
E. EL PROBLEMA DE ESTABILIDAD TÉRMICA EN UN FLUIDO EN ROTACIÓN	29
F. LAS ECUACIONES DE PERTURBACIÓN	29

G. EL ANÁLISIS DE MODOS NORMALES	30
H. EL CASO CUANDO LA INESTABILIDAD PROVOCA UNA CONVECCIÓN ESTACIONARIA	31
I. SOLUCIÓN	32
IV. CONVECCIÓN NATURAL DE UN FLUIDO EN ROTACIÓN ENTRE PAREDES RÍGIDAS CONSIDERANDO FINITOS LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA Y EL ESPESOR DE LAS PAREDES	34
A. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	34
B. ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y TEMPERATURA	35
V. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	38
A. MÉTODO DE GALERKIN	39
B. NÚMERO DE BIOT	40
C. VALOR CRÍTICO DEL NÚMERO DE RAYLEIGH SIN ROTACIÓN	42
D. ESTABILIDAD TÉRMICA EN UN FLUIDO EN ROTACIÓN	45
VI. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ECUACIÓN Ec. (257)	47
VII. REFERENCIAS	61

I. INTRODUCCIÓN

En muchos problemas que encontramos en la naturaleza, industria o laboratorios, no se puede obtener una condición de frontera tal que se tenga un conductor o aislante de calor perfecto. Es por eso que es de interés analizar el caso donde la conductividad térmica es finita, otra variable importante que se debe considerar es el espesor de las paredes entre las que el fluido está confinado, ya que las perturbaciones de la temperatura penetran las paredes. Por lo tanto, es necesario utilizar unas condiciones de frontera más generales. Tomando en cuenta que el flujo de calor y las temperaturas obedecen la condición de continuidad en las fronteras. Es conveniente definir la influencia de las conductividades térmicas como las razones entre la conductividad térmica del fluido y las conductividades térmicas de las paredes; de la misma forma para los espesores, tomamos la razón del espesor de cada pared entre el de la capa de fluido.

El caso más común que se ha considerado, es el de una capa de fluido infinita extendida horizontalmente, limitada por dos paredes con temperatura fija. Gershuni y Zhukhovitskii (1972) estudiaron un caso más general donde se considera la conductividad de las paredes, mostraron que cuando ambas paredes tienen la misma conductividad térmica, el número de Rayleigh crítico varía de 720 a 1708 y el número de onda crítico va de 0 a 3.11, cuando el cociente de conductividades decrece de infinito a cero.

Para el problema de estabilidad de una convección natural que aquí se presenta, se considera una capa de líquido horizontal rotando entre dos paredes rígidas, sujeta a un gradiente de temperatura perpendicular a la capa de fluido, con conductividades térmicas diferentes, X_u para la pared de arriba y X_l para la pared de abajo. Además se consideran los espesores de las paredes que limitan al fluido definidos como d_u en la pared de arriba y d_l en la de abajo. Al imponer un gradiente de temperaturas, se obtiene, en situación hidrostática, la distribución de la temperatura para el fluido; así como, su distribución en cada una de las paredes, considerando para ello la influencia de sus conductividades y espesores.

Con el método de Galerkin se hace una aproximación de la solución para la distribución de la velocidad como una función polinomial par. Se considera un flujo estacionario donde la tasa de crecimiento de la perturbación es cero (situación marginal). El número de Rayleigh y el número de onda críticos son determinados para un rango de cocientes de conductividades y espesores en el caso en que no hay rotación y en el que se presenta rotación. Se varía el

número de onda para encontrar su valor mínimo con la finalidad de determinar el número de Rayleigh crítico, esto es, el más pequeño.

Se calcula el número adimensional de Biot que representa el flujo de calor perpendicular correspondiente a la entrecara de las paredes y el fluido. Este incluye los cocientes de las conductividades entre el fluido y la pared, además del cociente de espesores de las paredes con respecto al del fluido. Se muestra que el número de Biot depende del número de onda de la perturbación térmica. Para el caso con rotación se introduce además un número adimensional que incluye los efectos de la rotación llamado el número de Taylor, el cual como se verá adquiere gran importancia para determinar los números de onda y de Rayleigh críticos. Se analiza el caso particular cuando los valores para los cocientes de conductividades térmicas y de espesores son los mismos para la pared de arriba y de abajo.

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma. En el siguiente capítulo (capítulo II) se presentan los fundamentos de la inestabilidad de una capa de fluido calentada desde abajo para los casos sin rotación y en el tercer capítulo para los de rotación. En el cuarto capítulo se plantea el problema a resolver y se obtienen las ecuaciones generales para la perturbación de la velocidad y de la temperatura, en presencia de un gradiente de temperatura que es perpendicular a la capa de fluido. Además, se calculan las perturbaciones de la temperatura en cada una de las paredes. En el quinto capítulo se obtienen las fórmulas aproximadas para el número de Rayleigh marginal, primero para el caso sin rotación y luego con rotación. En el sexto capítulo se comprueba que nuestra expresión, para el número de Rayleigh crítico, funciona adecuadamente. Para ello, se compara con los datos que se dan en la monografía de Gershuni y Zhukhovitskii (1972), para paredes de espesor infinito en ausencia de rotación; con los datos dados en la monografía de Chandrasekhar (1981), para temperatura constante en la pared en presencia de rotación; con el artículo de Dávalos (1984) para flujo de calor constante en presencia de rotación y con el artículo de Cerisier et al. (1998) en ausencia de rotación, pero considerando los cocientes de espesores y de las conductividades térmicas de las paredes y del fluido. Por medio del análisis numérico de la expresión de número de Rayleigh marginal se obtuvieron resultados que se muestran por medio de graficas. Al final del presente trabajo se dan estos valores, en forma de tablas, cada una de ellas tiene datos correspondientes a un valor distinto del número de Taylor.

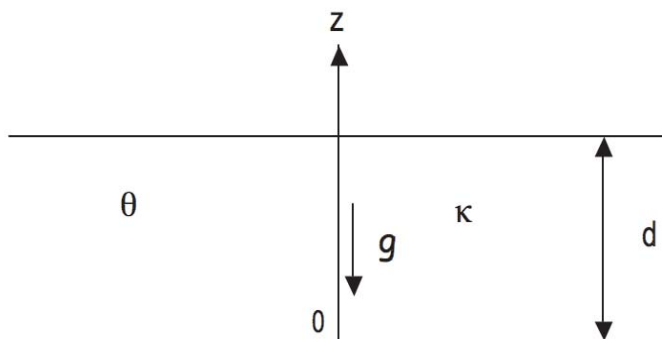


FIG. 1: Capa horizontal de fluido

II. LA INESTABILIDAD TÉRMICA DE UNA CAPA DE FLUIDO CALENTADA POR ABAJO

A. EL PROBLEMA DE BENARD

Se considera una capa horizontal de fluido, perpendicular a la fuerza de gravedad, en la cual se mantiene un gradiente de temperatura adverso al calentar la parte de abajo Fig (1). El fluido en la parte de abajo será más ligero que el fluido en la parte de arriba, en este caso se tiene una inestabilidad, la cual provoca que el fluido se redistribuya, pero al mismo tiempo, ésta tendencia natural será inhibida por su propia viscosidad. De esa forma se supone que el gradiente de temperatura adverso, excede a un cierto valor antes de que la inestabilidad pueda manifestarse. Los movimientos que resultan al sobrepasar el gradiente de temperatura crítica tienen un comportamiento estacionario en forma de celdas convectivas. Si el experimento es hecho con suficiente cuidado las celdas serán iguales y tomarán la forma de rollos.

La interpretación teórica que da Rayleigh sobre éste fenómeno, muestra que lo que determina la estabilidad, es el valor numérico del parámetro adimensional llamado número de Rayleigh,

$$R = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu}d^4 \quad (1)$$

donde g denota la magnitud de la aceleración de la gravedad, d la profundidad de la capa de fluido, $\beta = \left| \frac{dT}{dz} \right|$ el gradiente de temperatura adverso uniforme, α es el coeficiente de expansión de volumen, κ es el coeficiente de conductividad térmica y ν es la viscosidad cinemática. Rayleigh demostró además que la inestabilidad comienza cuando R excede un cierto valor crítico R_c ; y que cuando R es justamente R_c debe prevalecer un patrón estacionario de movimientos.

B. ECUACIONES BÁSICAS DE LA HIDRODINÁMICA

Las ecuaciones que gobiernan el flujo de un fluido viscoso con densidad y temperatura variables se obtienen de la siguiente forma. Considere un fluido cuya densidad ρ es función de la posición x_j ($j = 1, 2, 3$), con u_j ($j = 1, 2, 3$) como las componentes de la velocidad.

1. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (2)$$

expresa la conservación de masa. Al integrar la Ec. (2) sobre un volumen arbitrario V , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho d\tau = - \int_v \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) d\tau \quad (3)$$

donde $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$ es el elemento de volumen. Por el teorema de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho d\tau = - \int_s \rho u_j dS_j \quad (4)$$

Esta ecuación expresa el hecho de que la rapidez del cambio de la masa contenida en un volumen fijo del fluido, es igual a la rapidez con la cual el fluido fluye a través del límite S .

Una forma alternativa para escribir la ecuación de continuidad Ec. (2) es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (5)$$

Para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (6)$$

2. LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Primero se define el tensor rapidez de corte:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

El tensor de esfuerzos P_{ij} se relaciona linealmente con el tensor rapidez de corte de la siguiente forma

$$P_{ij} = \omega_{ij} + q_{ij;kl} e_{kl} \quad (8)$$

donde ω_{ij} es un tensor simétrico al que tiende P_{ij} en el límite cuando $e_{ij} = 0$. Para un fluido isotrópico se requiere que ω_{ij} y $q_{ij;kl}$ sean tensores isotrópicos, por lo tanto

$$\omega_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (9)$$

$$q_{ij;kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (10)$$

Sustituyendo las Ecs. (9) y (10) en la Ec. (8), se obtiene

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} e_{kk} \quad (11)$$

teniendo

$$P_{ii} = -3p = -3p + (2\mu + 3\lambda)e_{ii} \quad (12)$$

Se puede determinar el valor de λ (segundo coeficiente de viscosidad)

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (13)$$

al sustituir λ en la Ec. (11), el tensor de esfuerzos es

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} e_{kk} \quad (14)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad.

Los últimos dos términos del lado derecho en la Ec. (14) que son proporcionales a μ , definen al tensor de esfuerzos viscosos p_{ij}

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (15)$$

Para un fluido incompresible (ver Ec. (6)), el tensor de esfuerzos viscosos tiene la forma más simple

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

Teniendo la ecuación de movimiento

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (17)$$

donde X_i son los esfuerzos externos.

Se puede escribir la Ec. (17) en términos del tensor de esfuerzos P_{ij}

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} \quad (18)$$

Para un fluido incompresible en el que μ es constante, la Ec. (18) se puede simplificar

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_i \quad (19)$$

Esta es la forma de las ecuaciones de Navier Stokes.

3. LA RAPIDEZ DE DISIPACIÓN VISCOSA

Se define el término

$$\Phi = 2\mu e_{ij}^2 - \frac{2}{3}\mu (e_{jj})^2 \quad (20)$$

el cual representa la rapidez con la cual la energía se disipa, irreversiblemente, por la viscosidad en cada elemento de volumen del fluido.

Para un fluido incompresible $e_{jj} = 0$, por lo que:

$$\Phi = 2\mu e_{ij}^2 \quad (21)$$

4. LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR

La energía por unidad de masa del fluido, se puede escribir como

$$\epsilon = \frac{1}{2}u_i^2 + c_v T \quad (22)$$

donde c_v es el calor específico a volumen constante y T es la temperatura.

La rapidez de cambio de la energía total del fluido en movimiento es igual a la suma de la rapidez con que se realiza trabajo sobre el fluido por fuerzas externas y la rapidez con que se añade calor por conducción.

La ecuación de conducción de calor tiene la siguiente forma

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(c_v T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi \quad (23)$$

La ecuación de estado para las sustancias que se usan, se puede escribir como

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (24)$$

donde α es el coeficiente de expansión volumétrica y T_0 es la temperatura en la cual $\rho = \rho_0$. Los desarrollos de las ecuaciones anteriores se encuentran con detalle en la monografía de Chandrasekhar.

C. LA APROXIMACIÓN DE BOUSSINESQ

Las ecuaciones básicas pueden ser simplificadas considerablemente, si la variabilidad en la densidad y en los coeficientes (μ , c_v , α y κ) se debe a diferencias moderadas en la temperatura. Esta simplificación se debe a la pequeñez del coeficiente de expansión volumétrica, α está en un intervalo entre 10^{-3} y 10^{-4} . Para diferencias en la temperatura que no excedan 10° , las variaciones en la densidad son casi del 1 por ciento. En los otros coeficientes los cambios deben ser del mismo orden, y en ese caso pueden ser ignoradas. Pero hay una excepción importante, la variabilidad de ρ en el término de flotación (ρX_i) en la ecuación de movimiento no puede ser ignorada, debido a que la aceleración resultante de $\delta \rho X_i = \alpha \Delta T X_i$ puede llegar a ser más grande que la aceleración debida al término inercial $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ en la ecuación de movimiento. De acuerdo con esto, se puede considerar a ρ como una constante excepto

para el término de la fuerza externa en la ecuación de movimiento. Ésta es la aproximación de Boussinesq.

Al usar la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (25)$$

y la expresión para el tensor de esfuerzos viscosos

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (26)$$

con μ constante, la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) X_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (27)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática, ρ_0 es la densidad para una temperatura T_0 , y

$$\delta \rho = -\rho_0 \alpha (T - T_0) \quad (28)$$

La ecuación de conducción del calor se puede reducir a

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T \quad (29)$$

donde $\kappa = \frac{k}{\rho_0 c_v}$ es el coeficiente de conductividad térmica.

D. LAS ECUACIONES DE LA PERTURBACIÓN

Consideremos una capa horizontal infinita de fluido en la cual se mantiene un gradiente de temperatura estable y en la que además no hay movimientos.

El estado inicial será

$$u_j \equiv 0 \text{ y } T \equiv T(\lambda_j x_j) \quad (30)$$

donde $\lambda = (0, 0, 1)$ es un vector unitario en la dirección de la vertical.

Cuando no hay movimientos presentes, las ecuaciones de la hidrodinámica solo requieren que la distribución de la presión sea

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho X_i = -g\rho\lambda_i \quad (31)$$

donde de la Ec. (28) se tiene que

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T_0 - T)] \quad (32)$$

ρ_0 y T_0 son la densidad y la temperatura en la pared inferior (cuando $z = \lambda_j x_j = 0$). La distribución de la temperatura está definida por

$$\nabla^2 T = 0 \quad (33)$$

La solución de ésta ecuación es

$$T = T_0 - \beta\lambda_j x_j \quad (34)$$

donde β es el gradiente vertical de temperatura adverso impuesto. La correspondiente distribución de la densidad está dada por

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\beta\lambda_j x_j) \quad (35)$$

La Ec. (31) se puede integrar para obtener

$$p = p_0 - g\rho_0(\lambda_i x_i + \frac{1}{2}\alpha\beta\lambda_i\lambda_j x_i x_j) \quad (36)$$

Si la distribución de la temperatura se perturba, se obtiene

$$T' = T_0 - \beta\lambda_j x_j + \theta \quad (37)$$

Se supone que u_j denota la velocidad en el estado perturbado y que δp denota el cambio en la distribución de la presión. Ahora, se obtiene la forma linealizada de las ecuaciones de movimiento de la perturbación. Primero se considera el problema de acuerdo a la aproximación de Boussinesq. Se desprecian los términos de segundo orden y mayor en las perturbaciones. Así, las Ecs. (27) y (29) dan

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) + g\alpha\theta\lambda_i + \nu\nabla^2 u_i \quad (38)$$

y

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \lambda_j u_j + \kappa \nabla^2 \theta \quad (39)$$

y el campo de velocidades satisface

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (40)$$

Al aplicar el operador rotacional $\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}$ en la Ec. (38) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}) = g \alpha \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \lambda_k + \nu \nabla^2 (\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}) \quad (41)$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \omega_i \quad (42)$$

ω_i es la vorticidad. Entonces se tiene la ecuación

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = g \alpha \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \lambda_k + \nu \nabla^2 \omega_i \quad (43)$$

Una vez más se aplica el operador rotacional

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = g \alpha \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m + \nu \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \quad (44)$$

Al usar la identidad

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (45)$$

se encuentra que

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial u_j}{\partial x_j}) - \nabla^2 u_i = -\nabla^2 u_i \quad (46)$$

o bien,

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_l} \lambda_m = \lambda_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_i} - \lambda_i \nabla^2 \theta \quad (47)$$

Así, la Ec. (44) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = g \alpha (\lambda_i \nabla^2 \theta - \lambda_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}) + \nu \nabla^4 u_i \quad (48)$$

Al multiplicar la Ec. (43) y la Ec. (48) por λ_i , obtenemos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (49)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 w \quad (50)$$

donde

$$\zeta = \lambda_j \omega_j \text{ y } w = \lambda_j u_j \quad (51)$$

son las componentes z de la vorticidad y la velocidad.

Las Ecs. (49), (50) y

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta w + \kappa \nabla^2 \theta \quad (52)$$

son las ecuaciones de la perturbación requeridas. Las soluciones a esas ecuaciones deben satisfacer ciertas condiciones de frontera.

E. CONDICIONES DE FRONTERA

El fluido está confinado entre dos paredes colocadas en $z = 0$ y $z = d$. Las condiciones de frontera que se deben satisfacer son

$$\theta = 0 \text{ y } w = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } z = d \quad (53)$$

lo cual implica que las superficies en $z = 0$ y d se mantienen a una temperatura constante y si la superficie es indeformable la componente normal de la velocidad es cero.

Las superficies entre las que está confinado el fluido, pueden ser de dos tipos: rígidas sobre las cuales no ocurre deslizamiento y libres sobre las cuales no actúan esfuerzos tangenciales.

Para una superficie rígida, la condición de no deslizamiento implica que por fricción todas las componentes de la velocidad son cero. En general

$$u = 0, v = 0 \text{ y } w = 0 \quad (54)$$

Esta condición debe satisfacerse para toda x y y , por lo que de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (55)$$

se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (56)$$

sobre una superficie rígida.

Las condiciones de frontera para una superficie libre requieren que los esfuerzos tangenciales sean cero, esto es:

$$P_{xz} = P_{yz} = 0 \quad (57)$$

Con esta condición, se puede considerar que las componentes p_{xz} y p_{yz} del tensor de esfuerzos viscosos son cero:

$$p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (58)$$

$$p_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (59)$$

si w es cero para toda x y y en las superficies ($z = 0$ y $z = d$), se sigue que:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (60)$$

Diferenciando con respecto a z la ecuación de continuidad Ec. (55), se muestra que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (61)$$

La condición de frontera para la componente normal de la vorticidad ζ , se puede deducir de las condiciones anteriores, siendo

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (62)$$

Para una superficie rígida se consideran las componentes de la velocidad igual a cero (Ec. (54)), con lo que se tiene que

$$\zeta = 0 \quad (63)$$

y considerando Ec. (60) para una superficie libre, se obtiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (64)$$

F. MODOS NORMALES

El análisis puede ser hecho en términos de ondas periódicas en 2D. La perturbación que depende de x , y , y t tiene la forma

$$\exp[i(k_x x + k_y y) + ct] \quad (65)$$

donde

$$k = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)} \quad (66)$$

es el número de onda de la perturbación y c es una constante.

Así podemos suponer que las perturbaciones para θ , w y ζ son:

$$w = W(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + ct] \quad (67)$$

$$\theta = \Theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + ct] \quad (68)$$

$$\zeta = Z(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + ct] \quad (69)$$

Para las funciones con dependencia en x , y y t se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -k^2 \quad \text{y} \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \quad (70)$$

de ésta forma las ecuaciones de las perturbaciones Ecs. (49), (50), (52), se transforman en:

$$c\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)W = -g\alpha k^2\Theta + \nu\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^2W \quad (71)$$

$$c\Theta = \beta W + \kappa\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)\Theta \quad (72)$$

$$cZ = \nu\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)Z \quad (73)$$

Las soluciones de esas ecuaciones deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$\Theta = 0 \quad \text{y} \quad W = 0 \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad d \quad (74)$$

$$Z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dW}{dz} = 0 \quad \text{sobre una superficie r\u00edgida} \quad (75)$$

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2W}{dz^2} = 0 \quad \text{sobre una superficie libre} \quad (76)$$

Para tener las Ecs. (71), (72) y (73) adimensionales, se escogen las unidades

$$[L] = d \quad \text{y} \quad [T] = \frac{d^2}{\nu} \quad (77)$$

de esa forma se tiene

$$a = kd \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{cd^2}{\nu} \quad (78)$$

el n\u00famero de onda (a) y la raz\u00f3n de crecimiento o decremento en el tiempo (σ), definidos en t\u00e9rminos de esas unidades.

Las Ecs. (71) y (72) en forma adimensional quedan de la siguiente manera:

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)W = \left(\frac{g\alpha}{\nu}d^2\right)a^2\Theta \quad (79)$$

$$(D^2 - a^2 - \text{Pr}\sigma)\Theta = -\left(\frac{\beta}{\kappa}d^2\right)W \quad (80)$$

donde $D = \frac{d}{dz}$ y $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$ es el n\u00famero de Prandtl.

W y Θ tienen condiciones de frontera asociadas, de acuerdo al tipo de superficie que se tenga, ellas son:

$$\Theta = 0, \quad W = 0 \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad 1 \quad (81)$$

y

$$DW = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (82)$$

en el caso de que ambas superficies sean rígidas y

$$DW = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } D^2W = 0 \text{ para } z = 1 \quad (83)$$

si la superficie de abajo es rígida y la superficie de arriba es libre.

Eliminando Θ se obtiene

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2 - \text{Pr } \sigma)W = -Ra^2W \quad (84)$$

donde

$$R = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu}d^4 \quad (85)$$

es el número de Rayleigh.

G. SOLUCIÓN PARA LAS COMPONENTES HORIZONTALES DE LA VELOCIDAD

Se expresa u y v en términos de dos funciones de corriente ϕ y ψ

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ y } v = \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (86)$$

Entonces se tiene

$$-\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -a^2\phi \quad (87)$$

$$d\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -a^2\psi \quad (88)$$

Así

$$\phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial z} \text{ y } \psi = -\frac{d\zeta}{a^2} \quad (89)$$

De esa forma se puede escribir u y v como:

$$u = \frac{i}{a^2}(a_x DW + a_y dZ) \exp[i(a_x x + a_y y) + \sigma t] \quad (90)$$

$$v = \frac{i}{a^2}(a_y DW - a_x dZ) \exp[i(a_x x + a_y y) + \sigma t] \quad (91)$$

Estas ecuaciones relacionan a u y v con las componentes normales de la velocidad y la vorticidad.

H. ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA

La estabilidad de un sistema se determina de acuerdo a la reacción que tiene a pequeñas perturbaciones. Pueden existir perturbaciones estables, neutralmente estables o inestables, el sistema se considera estable si la perturbación es pequeña y decrece con el tiempo, de tal forma que regrese a su estado inicial. Si la perturbación crece en amplitud de tal modo que no regrese a su estado inicial se dice que es inestable. Un estado marginal es uno de estabilidad neutral.

Se considera un flujo estacionario y se asume que la ecuación de movimiento y las condiciones de frontera pueden ser linealizadas para perturbaciones muy pequeñas. El análisis puede ser hecho con el método de modos normales. Se considera la perturbación como una superposición de modos.

El mínimo valor para el número de Rayleigh que se encuentra considerando el valor más pequeño del número de onda, es llamado el número de Rayleigh crítico, a partir del cual la inestabilidad se presenta.

Si σ es real y el estado marginal está caracterizado por $\sigma = 0$ el intercambio de estabildades es válido

I. LAS ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL ESTADO MARGINAL Y LA REDUCCIÓN A UN PROBLEMA DE VALOR CARACTERÍSTICO

Si σ es real para todo valor positivo del número de Rayleigh, se sigue que para que pase de la transición de estable a inestable debe ocurrir a través de un estado marginal. Las

ecuaciones que gobiernan el estado marginal son obtenidas cuando $\sigma = 0$ en las ecuaciones relevantes. De esa forma se tiene

$$(D^2 - a^2)^2 W = \left(\frac{g\alpha}{\nu} d^2\right) a^2 \Theta \quad (92)$$

$$(D^2 - a^2)\Theta = -\left(\frac{\beta}{\kappa} d^2\right) W \quad (93)$$

Al eliminar Θ de esas ecuaciones, se obtiene

$$(D^2 - a^2)^3 W = -Ra^2 W \quad (94)$$

Las soluciones de esta ecuación deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$W = 0, (D^2 - a^2)^2 W = 0 \quad \text{para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (95)$$

$DW = 0$ o $D^2W = 0$ dependiendo de la naturaleza de las superficies en $z = 0$ y 1 .

De la misma forma se puede eliminar W y obtener la siguiente ecuación

$$(D^2 - a^2)^3 \Theta = -Ra^2 \Theta \quad (96)$$

con las condiciones de frontera

$$\Theta = 0, (D^2 - a^2)\Theta = 0 \quad \text{para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (97)$$

y $D(D^2 - a^2)\Theta = 0$ o $D^2(D^2 - a^2)\Theta = 0$ dependiendo de la naturaleza de las superficies en $z = 0$ y 1 .

Para un valor dado de a^2 se debe determinar el mínimo valor de R , el cual será el valor crítico del número de Rayleigh en el que la inestabilidad se presenta.

J. SOLUCIONES A LAS ECUACIONES

Se presenta una solución para temperatura constante en las paredes de los siguientes tres casos.

a) Ambas superficies de las paredes son libres, en ese caso

$$W = (D^2 - a^2)^2 W = D^2 W = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (98)$$

b) Ambas superficies de las paredes son rígidas, entonces se tiene en este caso

$$W = (D^2 - a^2)^2 W = DW = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (99)$$

c) Una de las superficies de las paredes es rígida ($z = 0$) y la otra es libre ($z = 1$), para lo cual se tiene

$$W = (D^2 - a^2)^2 W = DW = 0 \text{ en } z = 0 \text{ y } W = (D^2 - a^2)^2 W = D^2 W = 0 \text{ en } z = 1 \quad (100)$$

CASO a)

SUPERFICIES LIBRES (Solución aproximada)

De la Ec. (94) se sigue que $D^6 W = 0$ para $z = 0$ y 1 , diferenciando dos veces con respecto a z , se tiene $D^8 W = 0$, al analizar este resultado se concluye que todas las derivadas pares de W son cero en las fronteras.

Así

$$D^{(2m)} W = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } 1 \text{ donde } m = 1, 2, \dots \quad (101)$$

En éste caso las soluciones que se requieren deben ser de la forma

$$W = A \text{ sen}(n\pi z) \text{ donde } n = 1, 2, \dots \quad (102)$$

Donde A es una constante y n es un número entero. Sustituyendo ésta solución en la Ec. (94), se obtiene la ecuación característica.

$$R = \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \quad (103)$$

Para un valor dado de a^2 , el valor más pequeño de R ocurre cuando $n = 1$; entonces se tiene

$$R = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \quad (104)$$

Las perturbaciones serán marginalmente estables cuando el número de Rayleigh sea igual al valor dado por la Ec. (104). Cuando el número de Rayleigh exceda ese valor, la misma perturbación será inestable. El número de Rayleigh crítico está determinado por la condición

$$\frac{\partial R}{\partial a^2} = 3 \frac{(\pi^2 + a^2)^2}{a^2} - \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^4} = 0 \quad (105)$$

o

$$3a^2 = \pi^2 + a^2 \quad \text{ó} \quad a^2 = \frac{\pi^2}{2} \quad (106)$$

El correspondiente valor de R es

$$R_c = \frac{\left(\frac{3}{2}\pi^2\right)^3}{\frac{1}{2}\pi^2} = \frac{27}{4}\pi^4 = 657.51 \quad (107)$$

y las perturbaciones que se presentan en la estabilidad marginal, están caracterizadas por la longitud de onda correspondiente al mínimo

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{a}d = 2^{\frac{3}{2}}d \quad (108)$$

CASO b)

SUPERFICIES RÍGIDAS

Debido a la simetría que presenta el problema, donde el fluido esta confinado entre dos paredes rígidas, una forma de simplificar el problema, es trasladar el origen de z entre las dos paredes. Entonces el fluido estará confinado entre $z = \pm \frac{1}{2}$, la ecuación

$$(D^2 - a^2)^3 W = -Ra^2 W \quad (109)$$

debe satisfacer las condiciones

$$W = DW = (D^2 - a^2)W = 0 \quad \text{para} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (110)$$

Esta ecuación tiene una solución par y otra impar, el estado más bajo será par y no tendrá nodos, mientras el primer estado excitado será impar con un nodo en $z = 0$.

La solución de la Ec. (109) puede ser expresada como una superposición de soluciones de la forma

$$W = e^{\pm qz} \quad (111)$$

donde q^2 es una raíz de la ecuación

$$(q^2 - a^2)^3 = -Ra^2 \quad (112)$$

Para

$$Ra^2 = \tau^3 a^6 \quad (113)$$

las raíces de la Ec. (112) están dadas por

$$q^2 = -a^2(\tau - 1) \quad y \quad q^2 = a^2\left[1 + \frac{1}{2}\tau(1 \pm i\sqrt{3})\right] \quad (114)$$

al tomando la raíz cuadrada se obtienen seis raíces

$$\pm iq_0, \quad \pm q \quad y \quad \pm q^* \quad (115)$$

donde

$$q_0 = a(\tau - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (116)$$

y

$$\operatorname{Re}(q) = q_1 = a \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tau + \tau^2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\tau\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (117)$$

$$\operatorname{Im}(q) = q_2 = a \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tau + \tau^2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\tau\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (118)$$

entonces de la Ec. (114) se obtienen las relaciones

$$(q_0^2 + a^2)^2 = a^4 \tau^2 \quad (119)$$

$$(q^2 - a^2)^2 = \frac{1}{2}a^4 \tau^2 (-1 \pm i\sqrt{3}) \quad (120)$$

LA SOLUCIÓN PAR

La solución par se puede escribir como

$$W = A_0 \cos q_0 z + A \cosh qz + A^* \cosh q^* z \quad (121)$$

donde A_0 y A son constantes. Según las condiciones de frontera

$$DW = -A_0 q_0 \operatorname{sen} q_0 z + Aq \operatorname{sen} hqz + A^* q^* \operatorname{sen} hq^* z = 0 \quad (122)$$

$$(D^2 - a^2)^2 W = A_0(q_0^2 + a^2)^2 \cos q_0 z + A(q^2 - a^2)^2 \cosh qz + A^*(q^{*2} - a^2)^2 \cosh q^* z \quad (123)$$

Usando las relaciones de las Ecs. (119), (120) podemos reescribir la Ec. (123) como

$$(D^2 - a^2)^2 W = \frac{1}{2} a^4 \tau^2 \left\{ 2A_0 \cos q_0 z + (i\sqrt{3} + 1)A \cosh qz - (i\sqrt{3} + 1)A^* \cosh q^* z \right\} \quad (124)$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene un determinante. Realizando operaciones elementales sobre él se obtiene, después de desarrollarlo:

$$2i \operatorname{Im} \left\{ (\sqrt{3} + i)q \tanh \frac{1}{2}q \right\} + 2iq_0 \tan \frac{1}{2}q_0 = 0 \quad (125)$$

De ésta forma, las soluciones de la ecuación se obtienen numéricamente. Finalmente, los valores críticos para a y R son

$$a_c = 3.117 \quad \text{y} \quad R_c = 1707.762 \quad (126)$$

LA SOLUCIÓN IMPAR

La solución para el caso impar se puede escribir como

$$W = B_0 \operatorname{sen} q_0 z + B \operatorname{sen} hqz + B^* \operatorname{sen} hq^* z \quad (127)$$

de la misma forma que en el caso anterior, se obtiene el desarrollo del determinante. La solución numérica de los valores críticos es:

$$a_c = 5.365 \quad \text{y} \quad R_c = 17610.39 \quad (128)$$

CASO c)

SOLUCIÓN PARA UNA SUPERFICIE RÍGIDA Y UNA LIBRE

En este caso cuando la superficie de arriba es libre y la superficie de abajo es rígida se pueden deducir los valores del número de Rayleigh y de onda críticos a partir de los resultados para el primer modo impar, el cual tiene un nodo a la mitad de la capa de fluido. Esto hace que a la mitad de la capa se satisfagan las condiciones de superficie libre. Haciendo

un escalamiento con respecto a una capa de fluido de espesor $d/2$, se obtiene de la Ec. (128) con $a = 5.365/2$ y $R = 17610.39/16$, el resultado de los valores críticos

$$a_c = 2.682 \quad y \quad R_c = 1100.65 \quad (129)$$

III. LA INESTABILIDAD TÉRMICA DE UNA CAPA DE FLUIDO EN ROTACIÓN CALENTADA POR ABAJO

Aquí se presenta el efecto de la rotación para el mismo caso de la sección anterior, esto es, una capa horizontal de fluido en la cual se mantiene un gradiente de temperatura adverso calentando por abajo. El hecho de incluir efectos de rotación puede tener importantes consecuencias. A continuación se presentan algunos teoremas generales.

A. EL TEOREMA DE HELMHOLTZ Y KELVIN

Se considera un fluido incompresible e inviscido, las ecuaciones que lo gobiernan son:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + V \right) \quad (130)$$

y

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (131)$$

Las fuerzas externas son derivadas de un potencial V . La vorticidad ω está definida como

$$\omega = \nabla \times u \quad \text{ó} \quad \omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (132)$$

La ecuación diferencial que determina la línea de vórtice es

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3} \quad (133)$$

Por su definición, se tiene que

$$\nabla \cdot \omega = 0 \quad (134)$$

Se sigue del teorema de Gauss que la integral de la componente normal de ω sobre una superficie cerrada S es cero

$$\oint_S \omega \cdot dS = 0 \quad (135)$$

Entonces se puede tener

$$\int_{S_1} \omega \cdot dS_1 = \int_{S_2} \omega \cdot dS_2 \quad (136)$$

El flujo de vorticidad a través de cualquier sección de un tubo de vórtice es el mismo.

La ecuación de movimiento de la vorticidad en un fluido inviscido es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (u \times \omega) = 0 \quad (137)$$

La integral de la componente normal de ω sobre una superficie S que está limitada por una curva cerrada permanece constante

$$\int_{S_t} \omega_t \cdot dS = \text{constante} \quad (138)$$

El subíndice t indica el valor instantáneo en el tiempo indicado. Éste es el teorema principal sobre vorticidad debido a Helmholtz y Kelvin.

B. LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS PARA UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN

Se considera un fluido en rotación con respecto a un eje fijo, con una velocidad angular Ω constante. Será conveniente describir los movimientos desde el punto de vista de un observador que se dentro del sistema en rotación con una velocidad angular constante y cuando se encuentra fuera del sistema.

Se considera el sistema inercial (ξ, η, ζ) con respecto al cual se escoge un sistema coordenado (x, y, z) que está rotando con una velocidad angular Ω con respecto al eje ζ . El eje z coincide con el eje ζ . Las transformaciones que relacionan los dos sistemas coordenados son:

$$x = \xi \cos \Omega t + \eta \operatorname{sen} \Omega t \quad (139)$$

$$y = -\xi \operatorname{sen} \Omega t + \eta \cos \Omega t \quad (140)$$

$$z = \zeta \quad (141)$$

Diferenciando con respecto a t , se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dt} \cos \Omega t + \frac{d\eta}{dt} \operatorname{sen} \Omega t \right) - \Omega(\xi \operatorname{sen} \Omega t - \eta \cos \Omega t) \quad (142)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(-\frac{d\xi}{dt} \operatorname{sen} \Omega t + \frac{d\eta}{dt} \cos \Omega t \right) - \Omega(\xi \cos \Omega t + \eta \operatorname{sen} \Omega t) \quad (143)$$

Son las velocidades que mide el observador que se encuentra fuera del sistema.

Y las velocidades que se miden desde el punto de vista de alguien que lleva la misma velocidad angular son:

$$u_x = u_x^{(0)} + \Omega_y; \quad u_y = u_y^{(0)} - \Omega_x; \quad u_z = u_z^{(0)} \quad (144)$$

Para obtener la aceleración, se calcula la derivada segunda

$$\left(\frac{du^{(0)}}{dt} \right)^{(0)} = \frac{du}{dt} + 2\Omega \times u - \frac{1}{2} \operatorname{grad}(|\Omega \times r|^2) \quad (145)$$

El término $2\Omega \times u$ representa la aceleración de Coriolis y el término $-\frac{1}{2} \operatorname{grad}(|\Omega \times r|^2)$ representa la aceleración centrífuga.

C. EL TEOREMA DE TAYLOR - PROUDMAN

En un sistema en rotación la vorticidad es $\omega + 2\Omega$ por tanto

$$\int_S (\omega + 2\Omega) \cdot dS = \text{constante} \quad (146)$$

Lo que indica que la proyección del área S sobre un plano perpendicular a $\omega + 2\Omega$ es una constante. Cuando el flujo es estacionario, lento y lineal, solo queda de la ecuación de movimiento $\frac{\partial(u_i\Omega_j - u_j\Omega_i)}{\partial x_j} = 0$. Si Ω_j es constante y el flujo es incompresible, se concluye que

$$\Omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (147)$$

De esta ecuación se sigue que los movimientos no pueden variar en la dirección de Ω .

Se concluye que los movimientos estacionarios lentos en un fluido inviscido en rotación son necesariamente en dos dimensiones. Este es el teorema de Taylor-Proudman.

D. LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN FLUIDO EN ROTACIÓN

Las ecuaciones de movimiento en un fluido en rotación permiten soluciones periódicas representando la propagación de ondas. En ausencia de fuerzas externas, o en presencia de fuerzas derivadas de un potencial, las ecuaciones de movimiento que gobiernan un fluido incompresible viscoso, toman la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 u_i + 2\epsilon_{ijk} u_j \Omega_k \quad (148)$$

Se buscan soluciones a ésta ecuación con una dependencia en el espacio y el tiempo dada por

$$e^{i(k_j x_j + ct)} \quad (149)$$

teniendo

$$\frac{\partial}{\partial t} = ic, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = ik_j, \quad \text{y} \quad \nabla^2 = -k^2 \quad (150)$$

La Ec. (148) toma la forma

$$(ic + \nu k^2)u_i + ik_j u_j u_i = -ik_i \omega + 2\epsilon_{ijk} u_j \Omega_k \quad (151)$$

mientras la ecuación de continuidad es

$$k_j u_j = 0 \quad (152)$$

lo cual implica que las ondas son transversales.

En el límite cuando la viscosidad tiende a cero, la velocidad de propagación de las ondas está dada por:

$$\mathbf{V} = \frac{c}{k} = \pm \frac{2\Omega}{k} \cos \vartheta \quad (153)$$

Esta es la velocidad de fase. La velocidad de grupo está dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial \vec{k}} = \pm \frac{2}{k^3} \vec{k} \times (\Omega \times \vec{k}) \quad (154)$$

E. EL PROBLEMA DE ESTABILIDAD TÉRMICA EN UN FLUIDO EN ROTACIÓN

Considerando los teoremas anteriores vemos que la rotación debe tener un efecto importante en el inicio de la inestabilidad térmica. El Teorema de Taylor-Proudman prohíbe cualquier variación de la velocidad en la dirección de Ω si la viscosidad se puede despreciar, pero no prohíbe que existan movimientos oscilatorios.

F. LAS ECUACIONES DE PERTURBACIÓN

Se considera una capa horizontal infinita de fluido la cual se mantiene en rotación con una velocidad angular constante Ω . Como se mostró en la sección anterior, se puede trabajar con las ecuaciones de movimiento y conducción de calor en la aproximación de Boussinesq, introduciendo los efectos de la aceleración de Coriolis y la fuerza centrífuga en las ecuaciones de movimiento.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho_0} - \frac{1}{2} |\Omega \times r|^2 \right) + \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) X_i + \nu \nabla^2 u_i + 2\epsilon_{ijk} u_j \Omega_k \quad (155)$$

El estado inicial y las ecuaciones que gobiernan las pequeñas perturbaciones pueden obtenerse de la misma manera que en la sección anterior, con la aproximación de Boussinesq. De esa forma se obtiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) + g\alpha\theta\lambda_i + \nu\nabla^2 u_i + 2\epsilon_{ijk}u_j\Omega_k \quad (156)$$

donde $\lambda = (0, 0, 1)$ es un vector unitario en la dirección de la vertical. Al aplicar el operador $\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}$ a la k -ésima componente de la ecuación, se obtiene

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = g\alpha\epsilon_{ijk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \lambda_k + \nu\nabla^2 \omega_i + 2\Omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (157)$$

Se toma el rotacional de esta ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 u_i) = g\alpha(\lambda_i \nabla^2 \theta - \lambda_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}) + \nu\nabla^4 u_i - 2\Omega_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \quad (158)$$

Ahora se multiplican las últimas dos ecuaciones por λ_i y se obtiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu\nabla^2 \zeta + 2\Omega_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \quad (159)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \nu\nabla^4 w - 2\Omega_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \quad (160)$$

donde w es la componente z de la velocidad y ζ es la componente z de la vorticidad. En adelante, se supondrá que Ω y g son paralelos, considerando las condiciones de frontera que se discutieron en la primera sección.

G. EL ANÁLISIS DE MODOS NORMALES

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior, se considera a las perturbaciones w , θ y ζ como ondas periódicas bidimensionales. Al considerar perturbaciones caracterizadas por un número de onda k , se supone que w , θ y ζ tienen la forma de las Ecs. (67), (68), (69). Igual que en la primera sección, se puede reescribir las ecuaciones en forma adimensional

$$(D^2 - a^2 - p\sigma)\Theta = -\left(\frac{\beta}{\kappa}d^2\right)W \quad (161)$$

$$(D^2 - a^2 - \sigma)Z = -\left(\frac{2\Omega}{\nu}d\right)DW \quad (162)$$

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)W - \left(\frac{2\Omega}{\nu}d^3\right)DZ = \left(\frac{g\alpha}{\nu}d^2\right)a^2\Theta \quad (163)$$

siendo $D = \frac{d}{dz}$. Las soluciones para éstas ecuaciones deben satisfacer las mismas condiciones de frontera que se describen en las Ecs. (74), (75), (76). Una vez que se obtienen las soluciones para ellas es posible completar la solución determinando la componente horizontal de la velocidad.

H. EL CASO CUANDO LA INESTABILIDAD PROVOCA UNA CONVECCIÓN ESTACIONARIA

El principio de intercambio de estabildades generalmente no es válido cuando la rotación está presente, de modo que no es posible establecer un simple análisis para saber cuales son las condiciones suficientes de su validez.

Cuando la inestabilidad provoca una convección estacionaria, el estado marginal está caracterizado por $\sigma = 0$, por lo que las ecuaciones básicas se reducen a

$$(D^2 - a^2)\Theta = -\left(\frac{\beta}{\kappa}d^2\right)W \quad (164)$$

$$(D^2 - a^2)Z = -\left(\frac{2\Omega}{\nu}d\right)DW \quad (165)$$

$$(D^2 - a^2)^2W - \left(\frac{2\Omega}{\nu}d^3\right)DZ = \left(\frac{g\alpha}{\nu}d^2\right)a^2\Theta \quad (166)$$

Eliminando Z y Θ de estas ecuaciones y operando con $(D^2 - a^2)$, se tiene

$$(D^2 - a^2)^3W + T_a D^2W = -Ra^2W \quad (167)$$

donde R es el número de Rayleigh y

$$T_a = \frac{4\Omega^2}{\nu^2}d^4 \quad (168)$$

es el número de Taylor.

Las condiciones de frontera que se deben cumplir para resolver las ecuaciones son

$$W = 0 \text{ y } \Theta = 0 \quad \text{para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (169)$$

$$Z = 0 \text{ y } DW = 0 \quad \text{sobre una superficie rígida} \quad (170)$$

$$DZ = 0 \text{ y } D^2W = 0 \quad \text{sobre una superficie libre} \quad (171)$$

Para determinar el valor característico más pequeño del número de Rayleigh, se deben obtener las soluciones como función de a para un T_a dado y encontrar el mínimo para esa función.

I. SOLUCIÓN

La solución para el caso en que ambas superficies fronterizas son libres, las condiciones (169), (170) y (171) requieren

$$W = D^2W = D^4W = D^6W = 0 \text{ y } DZ = 0 \quad \text{para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (172)$$

Diferenciando la Ec. (167) un número de veces par, es posible concluir que todas las derivadas pares de W deben desaparecer para $z = 0$ y 1 . La solución que se propone para W es

$$W = A \text{ sen } n\pi z \quad (173)$$

donde A es una constante y n es un número entero.

La solución correspondiente para Z es

$$Z = A\left(\frac{2\Omega}{\nu}d\right)\frac{n\pi}{n^2\pi^2 + a^2} \cos n\pi z \quad (174)$$

Sustituyendo la Ec. (173) en la Ec. (167), se obtiene la ecuación característica, cuando $n = 1$ y haciendo $a^2 = \pi^2 x$, se obtiene

$$R = \pi^4 \frac{1}{x} \left[(1+x)^3 + \frac{T_a}{\pi^4} \right] \quad (175)$$

Con R como una función de x , el mínimo ocurre cuando

$$2x^3 + 3x^2 = 1 + \frac{T_a}{\pi^4} \quad (176)$$

Para $\frac{T_a}{\pi^4}$ suficientemente grande

$$x_{\min} \rightarrow \left(\frac{T_a}{2\pi^4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{con} \quad T_a \rightarrow \infty \quad (177)$$

los valores correspondientes para R_c y a_{\min} son

$$R_c \rightarrow 3\pi^4 \left(\frac{T_a}{2\pi^4}\right)^{\frac{2}{3}} = 8.6956T_a^{\frac{2}{3}} \quad (178)$$

$$a_{\min} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\pi^2 T_a\right)^{\frac{1}{6}} = 1.3048T_a^{\frac{1}{6}} \quad (179)$$

Sustituyendo los valores encontrados para R y T_a , tenemos la fórmula que determina el gradiente de temperatura de la convección estacionaria, cuando $T_a \rightarrow \infty$ es

$$g_\alpha \beta_c \rightarrow 21.911 \left(\frac{\Omega}{d}\right)^{\frac{4}{3}} \kappa \nu^{-\frac{1}{3}} \quad (\Omega \rightarrow \infty; \text{ o } \nu \rightarrow 0) \quad (180)$$

La dependencia de β_c con el inverso de ν , para Ω fijo y $\nu \rightarrow 0$, implica que un fluido inviscido ideal en rotación es estable con respecto a la convección estacionaria para todos los gradientes de temperatura adversos.

Las soluciones para el número de Rayleigh crítico cuando las paredes son rígidas y se encuentran a temperatura constante se calcularán numéricamente y se darán en la siguiente sección.

IV. CONVECCIÓN NATURAL DE UN FLUIDO EN ROTACIÓN ENTRE PAREDES RÍGIDAS CONSIDERANDO FINITOS LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA Y EL ESPESOR DE LAS PAREDES

A. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se propone ahora el problema en el que se tiene una capa infinita de fluido, incompresible, viscoso y tridimensional. El fluido se mantiene en rotación con una velocidad angular constante Ω entre dos paredes rígidas horizontales separadas una distancia d entre ellas y rotando a la misma velocidad angular. Además, se toma en cuenta que cada una de las paredes que limitan el fluido tienen una conductividad térmica y un espesor que se variará, en particular son de interés los valores finitos (intermedios) que no han sido estudiados en convección con rotación. Este hecho se considera importante en este trabajo de investigación por la influencia que pudiera tener en la obtención del valor del número de Rayleigh crítico. En la Fig (2) se muestra un esquema de cómo se puede representar éste sistema cuya estabilidad se investiga.

Se toma un sistema coordenado cartesiano (x, y, z) con origen en la superficie interior de la pared de abajo y con el eje z vertical hacia arriba. La gravedad se encuentra en dirección contraria y paralela al eje z de coordenadas.

Las conductividades térmicas que se consideran son: X_u que corresponde a la pared que limita al fluido por arriba, X_l que corresponde a la pared que limita el fluido por la parte de abajo y X , que corresponde al fluido. Los espesores de las paredes son d_u para la de arriba y d_l para la de abajo. Para entender la influencia de las paredes en la convección es necesario definir algunas cantidades adimensionales tanto para las conductividades térmicas como para los espesores. Para la conductividad se definen cocientes de conductividades dados por la conductividad térmica del fluido con respecto a la conductividad térmica de cada una de las paredes. Esto es:

$$\overline{X}_l = \frac{X}{X_l} \text{ para la pared de abajo} \quad (181)$$

$$\overline{X}_u = \frac{X}{X_u} \text{ para la pared de arriba} \quad (182)$$

Para los espesores, las cantidades adimensionales se obtienen como la razón de los espesores de cada una de las paredes con respecto al espesor de la capa de fluido:

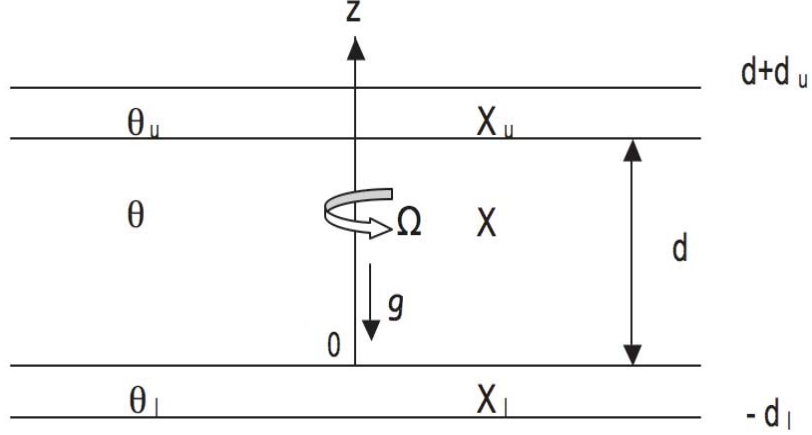


FIG. 2: Capa de fluido horizontal con una conductividad X y con una profundidad d limitada entre dos paredes. La pared de arriba tiene una conductividad X_u y un espesor d_u . La pared de abajo tiene una conductividad X_l y espesor d_l . La fuerza de gravedad es paralela y en dirección contraria al eje z de coordenadas.

$$\bar{d}_l = \frac{d_l}{d} \text{ para la pared de abajo} \quad (183)$$

$$\bar{d}_u = \frac{d_u}{d} \text{ para la pared de arriba} \quad (184)$$

B. ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y TEMPERATURA

Se considera que el fluido obedece la aproximación de Boussinesq, es decir que los coeficientes (μ, c_v, α_e y X) tienen una variación muy pequeña con la temperatura, podemos escribir las ecuaciones que gobiernan el sistema, en forma dimensional:

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + g\alpha_e T + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (185)$$

Ecuación de conducción del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (186)$$

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (187)$$

donde $\vec{V} = (u, v, w)$ es el vector velocidad, $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ es el vector rapidez de rotación, P es la presión que ya incluye la fuerza centrífuga, α_e es el coeficiente de expansión volumétrica, ν es la viscosidad cinemática y κ es la conductividad térmica.

En la ecuación de conducción del calor Ec. (186), se toma $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ya que la temperatura en el estado hidrostático permanece constante en el tiempo. Así, obtenemos la ecuación que se debe resolver para encontrar la temperatura en el estado hidrostático:

$$D^2 \bar{T}(z) = 0 \quad (188)$$

siendo $D = \frac{d}{dz}$ la derivada con respecto a z . Su solución es

$$\bar{T} = A_f z + B_f \quad \text{en el líquido} \quad (189)$$

Se propone que la temperatura al exterior de las paredes inferior y superior sean $T_A + \Delta T$ y T_A , respectivamente. Para determinar la solución de la temperatura principal tomando en cuenta la influencia de las conductividades y los espesores de las paredes, se requiere resolver en forma acoplada las ecuaciones de las paredes y del líquido hidrostático. La ecuación que se utiliza para obtener la temperatura en cada una de las paredes se establece a partir de la ecuación de conducción de calor, sabiendo que en ella no hay término advectivo. Así, obtenemos:

$$D^2 \bar{T}_w(z) = 0 \quad (190)$$

La cual tiene una solución de la forma:

$$\bar{T}_{wa} = A_{wa} z + B_{wa} \quad \text{para la pared de arriba} \quad (191)$$

$$\bar{T}_{wb} = A_{wb} z + B_{wb} \quad \text{para la pared de abajo} \quad (192)$$

Se tienen dos condiciones de frontera que se deben cumplir en las paredes

$$\bar{T}_{wa}(d + d_u) = T_A \quad (193)$$

$$\bar{T}_{wb}(-d_l) = T_A + \Delta T \quad (194)$$

Suponiendo que la temperatura entre el fluido y las paredes que estan en contacto con él son iguales justo en ese punto, es decir en $z = 0$ y d , se tiene

$$\bar{T}(0) = \bar{T}_{wb}(0) \quad (195)$$

$$\bar{T}(d) = \bar{T}_{wa}(d) \quad (196)$$

y considerando que el flujo de calor es continuo en las interfaces del fluido y las paredes, las relaciones son de la siguiente forma

$$\bar{X}_l D\bar{T} \big|_{z=0} = D\bar{T}_{wb} \big|_{z=0} \quad (197)$$

$$\bar{X}_u D\bar{T} \big|_{z=d} = D\bar{T}_{wa} \big|_{z=d} \quad (198)$$

Tomando en cuenta estas consideraciones se resuelve el sistema de ecuaciones acopladas y se adimensionaliza de la siguiente forma: las distancias con el espesor de la capa d , la temperaturas menos sus respectivas constantes (B_f, B_{wa}, B_{wb}) con $\Delta T / (1 + \bar{X}_l d_l + \bar{X}_u d_u)$: El resultado simplificado que se obtiene para la temperatura del fluido en situación hidrostática es:

$$T_h(z) = -z \quad (199)$$

La temperatura en la pared de arriba resulta ser

$$T_{wa}(z) = -\bar{X}_u z \quad (200)$$

y en la pared de abajo

$$T_{wb}(z) = -\bar{X}_l z \quad (201)$$

V. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Después de restar la solución hidrostática, se perturban las ecuaciones de movimiento, de continuidad y calor, y se expresan en forma adimensional usando d , el espesor de la capa de fluido, para las distancias; $\Delta T/(1 + \overline{X_l d_l} + \overline{X_u d_u})$ para la temperatura, ν/d para la velocidad, d^2/ν para el tiempo y finalmente $\rho(\nu/d)^2$ para la presión.

Se introducen perturbaciones infinitesimales al estado estacionario para la velocidad, presión y la temperatura como sigue

$$u = u(x, y, z, t) \quad (202)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (203)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (204)$$

$$P = P_h(z) + p(x, y, z, t) \quad (205)$$

$$T = T_h(z) + \theta(x, y, z, t) \quad (206)$$

Se sustituyen en las ecuaciones con la aproximación de Boussinesq y al simplificar despreciando términos no lineales y de orden mayor, se obtienen las siguientes expresiones

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{T_a}v\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u \quad (207)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{T_a}u\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2 v \quad (208)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 w + R\theta \quad (209)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta u + wDT_h(z) = \nabla^2 \theta \quad (210)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (211)$$

donde $\text{Pr} = \nu/\kappa$ es el número de Prandtl, $T_a = 4\Omega^2 d^4/\nu^2$ es el número de Taylor y R es el número de Rayleigh que se define ahora como

$$R = \frac{\alpha_e g \Delta T d^3}{X\nu(1 + \overline{X_l d_l} + \overline{X_u d_u})} \quad (212)$$

Se supone que las variables dependientes tienen una solución de la forma

$$\{u, v, w, \theta\} = \{u(z), v(z), w(z), \theta(z)\} \exp[i(kx + my - \sigma t)] \quad (213)$$

siendo k y m los números de onda en la dirección x y y respectivamente. $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ cuya parte real σ_R es la frecuencia de oscilación y su parte imaginaria σ_I es la razón de crecimiento. Se puede definir el número de onda a como $a^2 = (k^2 + m^2)$.

Al sustituir y calcular el primero y segundo rotacional de las ecuaciones, tomando la componente vertical \hat{k} de las expresiones que resulten se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.

A. MÉTODO DE GALERKIN

Las ecuaciones mencionadas en la sección anterior se presentarán más adelante. Aquí se presenta el método numérico que se usa para resolver el problema de valor propio planteado junto con las condiciones de frontera. Se emplea la técnica descrita por Finlayson (1972), para representar la solución de la velocidad como una serie de potencias

$$w_j(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^{j-1} \sum_{i=0}^4 a_i z^i \quad (214)$$

donde j puede tomar valores desde 1 hasta N .

Desarrollando la sumatoria se tiene

$$w_j(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^{j-1} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4) \quad (215)$$

lo cual se deriva como

$$Dw(z) = (j-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)^{j-2} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4) +$$

$$(z - \frac{1}{2})^{j-1}(a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3) \quad (216)$$

Se aplican las siguientes condiciones de frontera para la velocidad

$$w(z) = Dw(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad 1 \quad (217)$$

Al tomar $a_4 = 1$, debido a una condición de normalización. Entonces se encuentra que el valor para las demás constantes es

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -2 \quad (218)$$

con lo que la aproximación de la solución para la velocidad toma una forma simplificada dada por la siguiente expresión

$$w_j(z) = (z - \frac{1}{2})^{j-1}z^2(z - 1)^2 \quad (219)$$

Ésta es una solución general para la velocidad y el valor que tome j dependerá del orden de la aproximación que se quiera hacer.

B. NÚMERO DE BIOT

Se define una cantidad adimensional llamada número de Biot, el cual obtenemos de la siguiente manera. Se considera que la parte exterior de las paredes se encuentran a temperatura constante. Entonces la perturbación de la temperatura θ debe ser cero en ese lugar. Así:

$$\theta = \theta_l = 0 \quad \text{en la pared de abajo} \quad z = -\bar{d}_l \quad (220)$$

$$\theta = \theta_u = 0 \quad \text{en la pared de arriba} \quad z = 1 + \bar{d}_u \quad (221)$$

siendo θ_l la perturbación de la temperatura dentro de la pared de abajo y θ_u la perturbación de la temperatura de la pared de arriba. Además, se considera que en la interface entre las paredes y el fluido, la temperatura y el flujo de calor son continuos, con lo cual se obtienen las siguientes condiciones para las perturbaciones de temperatura

$$\theta = \theta_l \quad \overline{X}_l D\theta = D\theta_l \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (222)$$

$$\theta = \theta_u \quad \overline{X}_u D\theta = D\theta_u \quad \text{en} \quad z = 1 \quad (223)$$

Para obtener el número de Biot en la parte de abajo, se tiene una solución general de la ecuación de la perturbación de la temperatura que proviene del laplaciano en tres dimensiones $d^2\theta/dz^2 - a^2\theta = 0$. La solución está dada en términos de senos y cosenos hiperbólicos

$$\theta_l = A_l \cosh(az) + C_l \sinh(az) \quad (224)$$

usando la condición de la Ec. (220) y despejando el término C_l se puede sustituir en la solución general Ec. (224) para encontrar A_l , una vez que se tiene la expresión para las constantes A_l y C_l , se deriva la solución general y se utiliza la condición de la Ec. (222), para obtener

$$D\theta - \frac{a}{\overline{X}_l \tanh(a\overline{d}_l)}\theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (225)$$

de donde definimos al número de Biot como

$$B_l = \frac{a}{\overline{X}_l \tanh(a\overline{d}_l)} \quad (226)$$

donde se tiene como a al número de onda adimensional, a \overline{X}_l como el cociente de conductividades y a \overline{d}_l como el cociente de espesores de la pared que limita al fluido por abajo. De esta forma se obtiene la siguiente condición

$$D\theta - B_l\theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (227)$$

De manera similar se puede definir un número de Biot para la pared de arriba, el cual queda definido como

$$B_u = \frac{a}{\overline{X}_u \tanh(a\overline{d}_u)} \quad (228)$$

Y la condición en este caso se reduce como

$$D\theta + B_u\theta = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (229)$$

Así tenemos el número de Biot adimensional que incluye las propiedades de las paredes y el número de onda.

C. VALOR CRÍTICO DEL NÚMERO DE RAYLEIGH SIN ROTACIÓN

Ahora se presenta un caso particular en el cual se aplica el método numérico de la sección anterior. Vamos a determinar el valor crítico para el número de Rayleigh en el caso cuando no hay rotación en el sistema. Para ello se considera el estado marginal en el cual la razón de crecimiento y la frecuencia de oscilación son cero, es decir tenemos $\sigma = 0$.

De esta manera las ecuaciones de la perturbación se simplifican y se obtiene

$$D^4w(z) - 2a^2D^2w(z) + a^4w(z) = a^2R\theta(z) \quad (230)$$

$$D^2\theta(z) - a^2\theta(z) = -w(z) \quad (231)$$

Se propone una solución aproximada para la velocidad vertical obtenida con el método de Galerkin descrito anteriormente y presentado en la Ec. (219) pero con $j = 1$ para calcular la primera aproximación. Así la función aproximada para la velocidad está dada en la forma

$$w(z) = z^2(1 - z)^2 \quad (232)$$

Ésta aproximación satisface las condiciones de frontera

$$w(z) = Dw(z) = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } 1 \quad (233)$$

Si se sustituye la aproximación de la distribución de la velocidad Ec. (232) dentro de la ecuación de conducción de calor Ec. (231), es posible obtener la solución general para la temperatura

$$\theta(z) = A \sinh(az) + B \cosh(az) + \frac{z^2(z-1)^2a^4 + 2(1-6z+6z^2)a^2 + 24}{a^6} \quad (234)$$

Al considerar las condiciones de frontera

$$D\theta(z) - B_l\theta(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (235)$$

$$D\theta(z) + B_u\theta(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 1 \quad (236)$$

que se obtienen a partir de las Ecs. (227) y (229), encontramos el valor de las constantes A y B .

$$A = \frac{2\{ [(a^2 + 12)B_l + 6a^2] [B_u \cosh(a) + a \sinh(a)] - A_1 \}}{a^6\{ a \cosh(a) [B_u + B_l] + \sinh(a) [a^2 + B_l B_u] \}} \quad (237)$$

$$B = \frac{-2\{ [(a^2 + 12)B_l + 6a^2] [B_u \sinh(a) + a \cosh(a)] + B_1 \}}{a^6\{ a \cosh(a) [B_u + B_l] + \sinh(a) [a^2 + B_l B_u] \}} \quad (238)$$

donde

$$A_1 = [(a^2 + 12)B_u + 6a^2]B_l \quad (239)$$

$$B_1 = [(a^2 + 12)B_u + 6a^2]a \quad (240)$$

Ahora se sustituye la aproximación de la velocidad y la expresión que se obtuvo para la temperatura Ec. (234), en la Ec. (230) y se multiplica por $w(z)$. Después se integra con respecto a z de 0 a 1, para obtener una fórmula para el número de Rayleigh marginal.

$$R = \frac{a^4(504 + 24a^2 + a^4)}{a^4 - a^2\{7560[A \sinh(a) + B \cosh(a)] + 12\} + q} \quad (241)$$

donde

$$q = a(15120 + 1260a^2)(B \sinh(a) + A[\cosh(a) - 1]) + 504 \quad (242)$$

El número de Rayleigh crítico en este caso depende de los parámetros adimensionales como son: el número de onda a y los números de Biot B_l y B_u . A su vez estos últimos también dependen de los cocientes de espesores \bar{d}_l y \bar{d}_u y de las razones de la conductividad \bar{X}_u y \bar{X}_l .

Si se calcula el caso particular en que las razones de las conductividades son iguales y además éstas toman el valor extremo en que ellas tienden a cero (paredes conductoras). Esto es:

$$\overline{X_u} = \overline{X_l} \rightarrow 0 \quad (243)$$

entonces la expresión que se obtiene para el número de Rayleigh marginal aproximado es:

$$R = \frac{a^9 (a^4 + 24a^2 + 504) \sinh(a)}{a \sinh(a) q_1 + [1 - \cosh(a)] q_2} \quad (244)$$

donde

$$q_1 = (a^8 - 12a^6 + 504a^4 + 30240a^2 + 362880)$$

$$q_2 = (5040a^4 + 120960a^2 + 725760)$$

De ésta expresión para R es posible obtener un valor mínimo, respecto al número de onda crítico. El número de onda crítico, el cual corresponde al valor crítico de R , en este caso vale $a_c = 3.11$. Al sustituir este valor a_c en la expresión para R , el número de Rayleigh crítico que resulta es $R_c = 1708.05$. Los resultados calculados en este caso para a_c y R_c se obtuvieron numéricamente y gráficamente y coinciden con los valores que se presentan en la literatura (ver Chandrasekhar (1981)), por lo cual se tiene una buena aproximación.

En el caso límite, cuando los cocientes de conductividad son iguales y tienden a infinito (paredes aislantes)

$$\overline{X_u} = \overline{X_l} \rightarrow \infty \quad (245)$$

la expresión para el número de Rayleigh crítico es

$$R_c = \frac{a^8(a^4 + 24a^2 + 504) \sinh(a)}{q_3 \sinh(a) + 181440[1 + \cosh(a)]}$$

$$q_3 = [a^8 - 12a^6 + 504a^4 - 30240a^2 - 362880]$$

Se puede mostrar que en este caso, cuando el número de onda crítico $a \rightarrow 0$, el número de Rayleigh crítico es $R_c = 720$, que también es una buena aproximación en este límite.

Ya se comparó la aproximación que se obtuvo para el número de Rayleigh crítico en los casos límite, pero aun falta probar como funciona para valores intermedios de los cocientes de conductividades. Para ello se puede sustituir en la Ec. (241) los números de Biot que se definieron anteriormente, considerando que $\overline{X}_u = \overline{X}_l = \overline{X}$ y que los cocientes de espesores $\overline{d}_u = \overline{d}_l = \overline{d} \rightarrow 0$. Esto lleva a la aproximación realizada por Gershuni y Zhukovitskii (1972). Así se encuentran los valores que se presentan en la Tabla 1 (ver apéndice) para varios valores del cociente de conductividades \overline{X} . Se pueden reproducir los valores presentados en la Tabla 3 del libro de Gershuni y Zhukovitskii (1972). Esto comprueba una vez más la validez de la aproximación.

D. ESTABILIDAD TÉRMICA EN UN FLUIDO EN ROTACIÓN

Para el caso en el que se impone rotación al sistema, las ecuaciones adimensionales que se utilizan son:

$$(D^2 - a^2 - \text{Pr } \sigma)\theta = -w(z) \quad (246)$$

$$(D^2 - a^2 - \sigma)Z = -\sqrt{T_a}Dw(z) \quad (247)$$

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)w(z) - \sqrt{T_a}DZ = Ra^2\theta \quad (248)$$

donde T_a es el número de Taylor, un número adimensional que involucra el efecto de la rotación, definido como:

$$T_a = \frac{4\Omega^2}{\nu^2}d^4 \quad (249)$$

Siendo Ω el término de la rapidez de rotación en la dirección de z , d es el espesor de la capa de fluido y ν es la viscosidad cinemática del fluido en rotación.

Para determinar el número de Rayleigh crítico de la inestabilidad cuando se considera que el flujo es estacionario se supone que $\sigma = 0$. Las ecuaciones básicas presentadas anteriormente se reducen a

$$(D^2 - a^2)\theta = -w(z) \quad (250)$$

$$(D^2 - a^2)Z = -\sqrt{T_a}Dw(z) \quad (251)$$

$$(D^2 - a^2)^2w(z) - \sqrt{T_a}DZ = Ra^2\theta \quad (252)$$

Para obtener la distribución de la temperatura, se utiliza la aproximación a primer orden del método de Galerkin para la velocidad w , así se sustituye la distribución de la velocidad Ec. (232) dentro de la ecuación de conducción de calor Ec. (250). Se toman las condiciones de frontera para la temperatura Ec. (235) y Ec. (236) y se calcula su solución general, la cual resulta ser igual a la solución ya obtenida para el caso en ausencia de rotación Ec. (234).

Por otro lado, se resuelve para Z la ecuación de la vorticidad Ec. (251) con las siguientes condiciones de frontera

$$Z(z) = 0 \quad \text{para } z = 0 \text{ y } 1 \quad (253)$$

y se encuentra la siguiente solución

$$Z(z) = 2\sqrt{T_a} \left[\frac{-6 (\cosh(a) + 1) \sinh(az)}{a^4 \sinh(a)} + \frac{\cosh(az)}{a^4} + \frac{(2z-1)(z^2a^2 - za^2 + 6)}{a^4} \right] \quad (254)$$

Cuya derivada es

$$DZ(z) = 2\sqrt{T_a} \left[\frac{-6 (\cosh(a) + 1) \cosh(az)}{a^3 \sinh(a)} + \frac{6 \sinh(az)}{a^3} + q_4 \right] \quad (255)$$

$$q_4 = \frac{2z(z-1) + (2z-1)^2}{a^2} + \frac{12}{a^4} \quad (256)$$

Ahora se sustituyen las aproximaciones de la velocidad, la temperatura y la derivada de Z en la Ec. (252). Después se multiplica por la velocidad $w(z)$ y se integra con respecto a z de 0 a 1. Entonces, se obtiene, como condición de solubilidad, una fórmula para el número de Rayleigh marginal

$$R = -\frac{q_0 T_a + q_2}{q_3} \quad (257)$$

donde

$$q_0 = \sinh(a)e^a a^4 [12a^2 - 504]$$

$$\begin{aligned}
& +a^2\{7560[(\cosh(a) + 1)(e^{2a} - 1) - \sinh(a)(e^{2a} + 1)] + 15120 \sinh(a)e^a\} \\
& +45360\{\sinh(a)(e^{2a} - 1) - [1 + \cosh(a)](e^{2a} + 1 + 2e^a)\}a \\
& -9720[\sinh(a)(e^{2a} + 1) + [\cosh(a) + 1](1 - e^{2a})] + 181440
\end{aligned} \tag{258}$$

$$q_2 = e^a a^8 \sinh(a)(a^4 + 24a^2 + 504) \tag{259}$$

$$\begin{aligned}
q_3 = a^4 \sinh(a) \{ & -e^a a^4 + [630(-Ae^{2a} - Be^{2a} + B - A) + 1260Ae^a]a^3 \\
& + [3780(Be^{2a} + Ae^{2a} + B - A) + 7560Be^a + 12e^a]a^2 \\
& + [7560(B - A - Ae^{2a} - Be^{2a}) + 15120Ae^a]a - 504e^a \}
\end{aligned} \tag{260}$$

Aquí las constantes A y B tienen la misma forma que las obtenidas en ausencia de rotación, esto es, como en las ecuaciones (237) y (238). En el caso particular donde $T_a = 0$ se encuentra que la ecuación de arriba para R se reduce a la Ec. (241) sin rotación.

En la siguiente sección se presentarán resultados de cálculos numéricos cuando $T_a \neq 0$. Se obtendrán valores de R y a críticos para distintas magnitudes de los cocientes de las conductividades y de los espesores de las paredes.

VI. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ECUACIÓN EC. (257)

Para el caso en que no hay rotación, como ya se mencionó anteriormente, se hace la aproximación presentada en la monografía de Gershuni y Zhukhovitskii (1972). En ella se considera que los cocientes de conductividades son iguales, esto es $\overline{X}_u = \overline{X}_l$ y que además el espesor de las paredes es infinito. De esa forma, se obtuvieron los datos que se presentan en la Tabla 1, los cuales son acordes con los de Gershuni y Zhukhovitskii (1972).

Cuando $\overline{X}_u = \overline{X}_l \rightarrow \infty$, se tiene el caso de un fluido entre paredes aislantes, es decir que son muy mal conductoras de calor. En este caso, el número de Rayleigh crítico baja hasta 720 y el número de onda crítico a tiende a cero. De aquí que la longitud de onda tiende a infinito y la celda convectiva es muy grande. En el otro extremo, cuando $\overline{X}_u = \overline{X}_l \rightarrow 0$ se tiene el caso donde la capa de fluido se encuentra entre dos paredes que son muy buenas

conductoras. El número de Rayleigh crítico en este caso es 1708, el cual coincide con el valor aproximado para el caso de paredes rígidas.

Cuando hay presencia de rotación, se definió el número de Taylor el cual representa el efecto de la rotación sobre el sistema convectivo. Si T_a es mayor o igual a 1, se pueden empezar a considerar sus efectos. Entonces si en convección estacionaria tomamos $T_a \neq 0$ considerando $\overline{X}_u = \overline{X}_l \rightarrow 0$ y $\overline{d}_u = \overline{d}_l \rightarrow \infty$ nuestra aproximación Ec. (257) nos da valores del número de Rayleigh crítico y de onda crítico (ver Tabla 2) muy semejantes a los de la Tabla VIII del Capítulo III (pág. 102) de la monografía de Chandrasekhar. Al comparar ambos resultados se encuentra una diferencia porcentual de 0.03% para $T_a = 100$, 0.61% para $T_a = 1000$, 1.46% para $T_a = 2000$ y 3.8% para $T_a = 5000$.

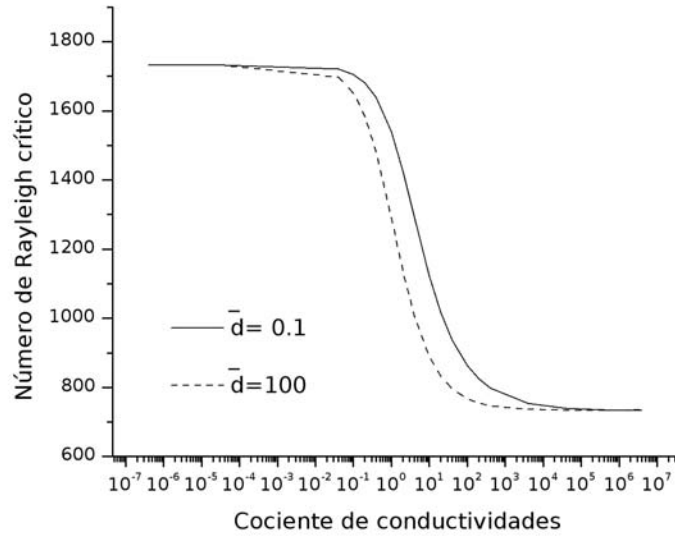


FIG. 3: Número de Rayleigh crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

En el caso límite cuando tenemos paredes aislantes donde $\overline{X}_u = \overline{X}_l \rightarrow \infty$, con $\overline{d}_u = \overline{d}_l \rightarrow \infty$, se recurre a los resultados de Dávalos (1984, de aquí en adelante sólo se mencionará como Dávalos) para comparar el número de Rayleigh crítico. Dávalos obtuvo analíticamente la Ec. (9) para el número de Rayleigh crítico, calculada en el límite de número de onda pequeño. Nótese que la raíz cuadrada de la definición del número de Taylor presentada aquí corresponde a la τ usada por Dávalos. En nuestra notación la ecuación es:

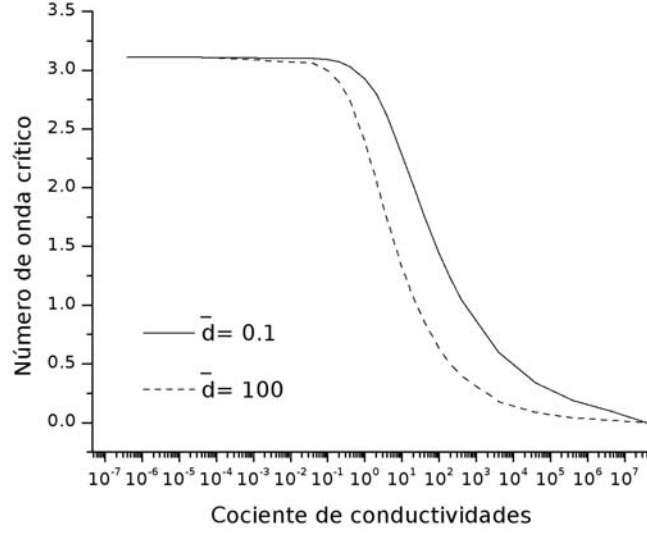


FIG. 4: Número de onda crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{T_a} \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{8}T_a}(\sinh(\sqrt{\frac{1}{2}T_a}) + \sin(\sqrt{\frac{1}{2}T_a}))}{\cosh(\sqrt{\frac{1}{2}T_a}) - \cos(\sqrt{\frac{1}{2}T_a})} - 1 \right] \quad (261)$$

Así, encontramos que para un número de Taylor de 100 el número de Rayleigh crítico tiende a 764.6 en nuestro caso y el de la ecuación de Dávalos es 762.67 cuando $a \rightarrow 0$, lo cual da una diferencia porcentual de 0.25%. Para $T_a = 1000$ se tiene que $R_c = 1153$ y el de Dávalos es 1131.1 en el límite $a \rightarrow 0$, dando una diferencia porcentual de 1.9%. Para el número de Taylor 2000 el número de Rayleigh crítico es 1578.5 y el de Dávalos es 1511.8 en el límite $a \rightarrow 0$, que tiene una diferencia porcentual de 4.4%. Para $T_a = 5000$ calculamos $R_c = 2862.8$ y el de Dávalos es 2522.0 en el límite $a \rightarrow 0$, que difiere un 13.4%. Sin embargo, se debe notar que a partir de $T_a = 1868.8$ (ver artículo de Dávalos) el número de Rayleigh crítico ya no sucede a un número de onda cero, si no más bien a una magnitud finita. Entonces es posible suponer que cuando el número de onda crítico queda fuera de la región de números de onda pequeños, la aproximación al número de Rayleigh crítico mejora. De esta forma se compara la aproximación en los casos extremos conocidos $\overline{X}_u = \overline{X}_l \rightarrow 0$ y $\overline{X}_u = \overline{X}_l \rightarrow \infty$, demostrando que funciona y que es bastante buena para los valores de

número de Taylor considerados.

Ahora se hace el análisis general cuando el cociente de conductividades es finito, o sea, no toma los valores extremos en los límites de cero e infinito. Los cocientes de los espesores de las paredes también serán finitos. Se introduce además la influencia del número de Taylor con los valores de $T_a = 100, 1000, 2000$ y 5000 . Debido a que no se encontraron diferencias notables en los resultados para espesores relativos menores de 0.1 y mayores a 100, se decidió presentar sólo resultados para los casos de 0.1 y 100.

Para ello, primero se hace un análisis tal que permita comparar con los resultados en ausencia de rotación de Cerisier et al. (1998, en adelante se mencionará como Cerisier et al.). Aquí, se toma en cuenta la influencia de los diferentes espesores y conductividades en las paredes. Cerisier et al. solo presenta las curvas críticas en gráficas; aquí, se calculan los valores numéricos para el número de onda crítico y el número de Rayleigh crítico y se presentan en la Tabla 3. Al graficar los datos que se presentan en la Tabla 3, se observa que coinciden con las obtenidas por Cerisier et al. (1998). Una de ellas graficando el número de Rayleigh contra el cociente de conductividad Fig. (3), y la otra considerando el número de onda crítico como función del cociente de conductividades Fig. (4). En ambas gráficas se toma en cuenta el cociente de espesores con los valores 0.1 y 100.

El objetivo de presentar las gráficas es comparar nuestra aproximación, que incluye el efecto de la rotación, con la de Cerisier et al. (1998). Nótese que en los casos extremos $\overline{X_u} = \overline{X_l} \rightarrow \infty$ y $\overline{X_u} = \overline{X_l} \rightarrow 0$, nuestros resultados tienen una diferencia porcentual menor que los de Cerisier et al (1998) con respecto a los resultados que ya se conocen en la literatura para el caso de paredes rígidas.

Usaremos nuestra aproximación y tomaremos en cuenta la influencia de las conductividades y de los espesores finitos cuando las paredes son idénticas. Se calculan los números de Rayleigh y de onda críticos para diferentes valores del número de Taylor. Con la finalidad de encontrar una diferencia considerable respecto al caso investigado por Cerisier et al. (1998).

Si en la Ec. (257) se sustituye un valor de 100 para el número de Taylor y fijamos \bar{d} en 0.1 o 100, se busca el mínimo del número de Rayleigh variando el número de onda. Ese mínimo es el número de Rayleigh crítico y al valor donde sucede se le llama número de onda crítico. Los resultados se presentan en la Tabla 4.

Los datos presentados en la Tabla 4, se grafican para el número de Rayleigh y el número de onda críticos en las Figs. (5 , 6) como una función del cociente de conductividades y para

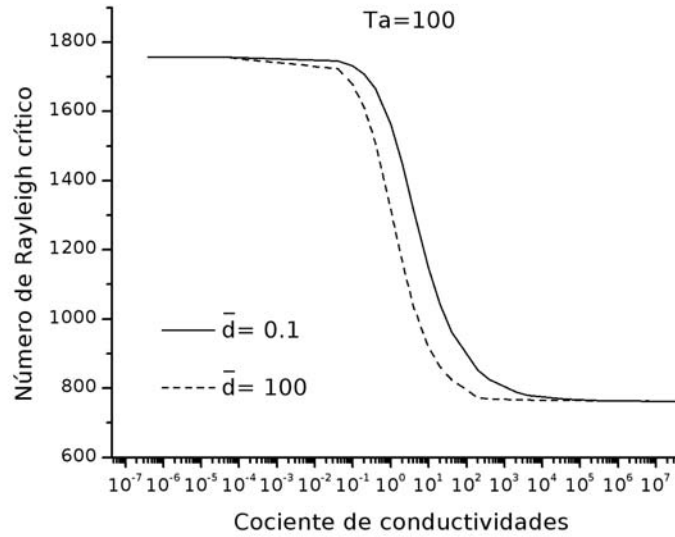


FIG. 5: Número de Rayleigh crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

dos valores de \bar{d} .

Ahora se incrementa el número de Taylor a 1000. Al calcular los mínimos para el número de Rayleigh y el número de onda críticos obtenemos los valores de la Tabla 5.

Al graficar los valores para el número de Rayleigh y el número de onda críticos con respecto a \bar{X} y dos valores de \bar{d} se obtienen las Figs. (7, 8).

En la Tabla 6 se presentan los valores obtenidos, con un número de Taylor 2000. Estas cantidades se grafican para dos magnitudes de \bar{d} en las Figs. (9) y (10) En la Fig. (9) se presentan curvas de R_c en función de \bar{X} y en la Fig. (10) se presentan curvas de a_c en función de \bar{X} .

La Tabla 7 ofrece datos para un número de Taylor 5000. Estos datos se grafican en la Fig. (11) para número de Rayleigh crítico y en la Fig. (12) para número de onda crítico.

Si se comparan las gráficas anteriores, de manera conjunta como en la Fig. (13), se encuentra que los números de Rayleigh críticos para Taylor de 100 difieren pero poco de aquellos de Cerisier et al. (1998). En general para todos los números de Taylor investigados, en los límites donde las paredes son aislantes o son conductoras perfectas, no hay diferencias entre los resultados de los cocientes $\bar{d} = 0.1$ y 100. Sin embargo, en la parte media si existe

una diferencia notable. Sin embargo, debemos observar que con el incremento del número de Taylor se provoca que esta diferencia entre las separaciones de las curvas correspondientes a $\bar{d} = 0.1$ y 100 vaya disminuyendo. La menor diferencia se observa en el máximo número de Taylor investigado, $T_a = 5000$.

En el caso para el número de onda crítico las curvas se comparan en la Fig. (14). Aquí se encuentran diferencias con respecto a los resultados de Cerisier et al. cuando $T_a = 100$. Se nota que las curvas obtenidas con un número de Taylor menor a 1868.8 (ver Dávalos) presentan un número de onda crítico tendiendo a cero cuando la conductividad de las paredes es muy mala. La Fig. (14) muestra que para valores $T_a > 1868.8$ los límites en esa región tienen un a_c finito. Estos casos corresponden a $T_a = 2000$ y $T_a = 5000$.

Haciendo un análisis más detallado de los datos presentados arriba, se determina la diferencia que hay entre las dos curvas del número de Rayleigh crítico para $\bar{d} = 0.1$ y 100. Para medir la diferencia se determinó tomar los valores del cociente de conductividades $\bar{X} = 1, 2, 10$. La selección se debió a que para esas \bar{X} 's se tiene control de las partes más separadas en magnitudes de R_c en todo el rango desde $\bar{X} = 4 \times 10^{-7}$ hasta 4×10^{-5} .

Si se toma en cuenta el error porcentual, mencionado al principio de esta sección, que se

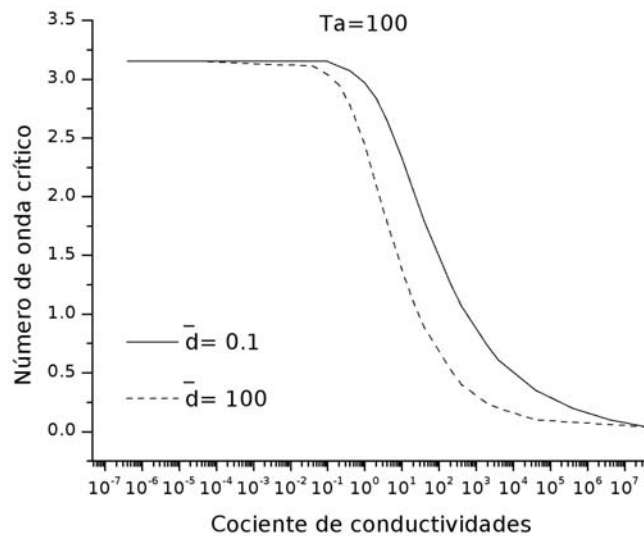


FIG. 6: Número de onda crítico como función del cociente de conductividades.

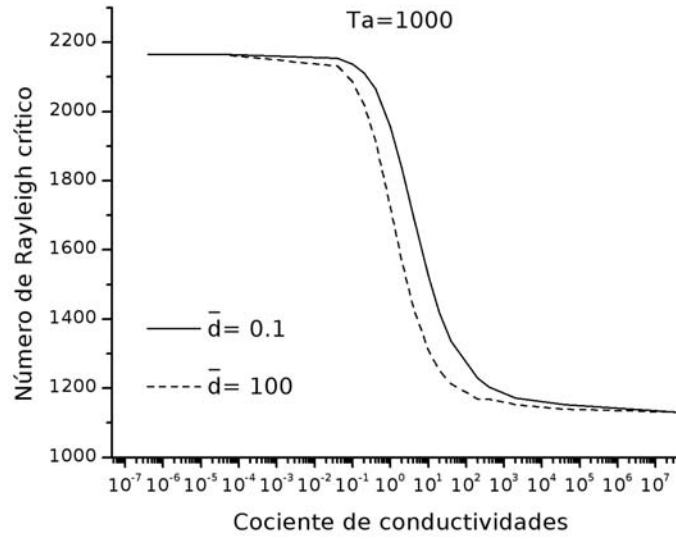


FIG. 7: Número de Rayleigh crítico como función del cociente de conductividades.

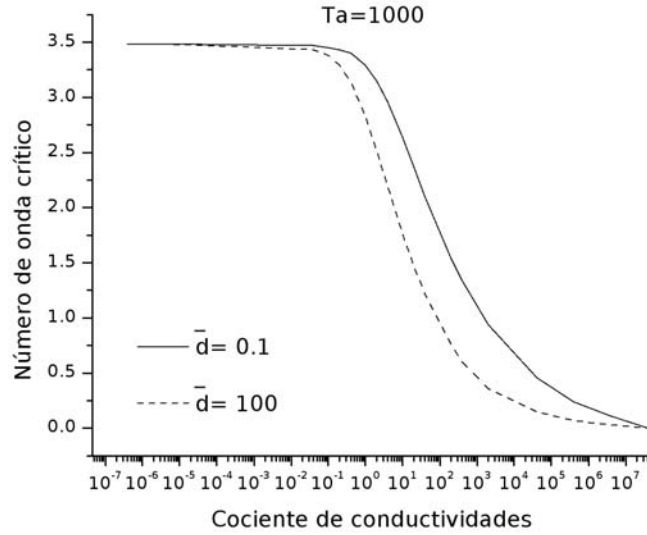


FIG. 8: Número de onda crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

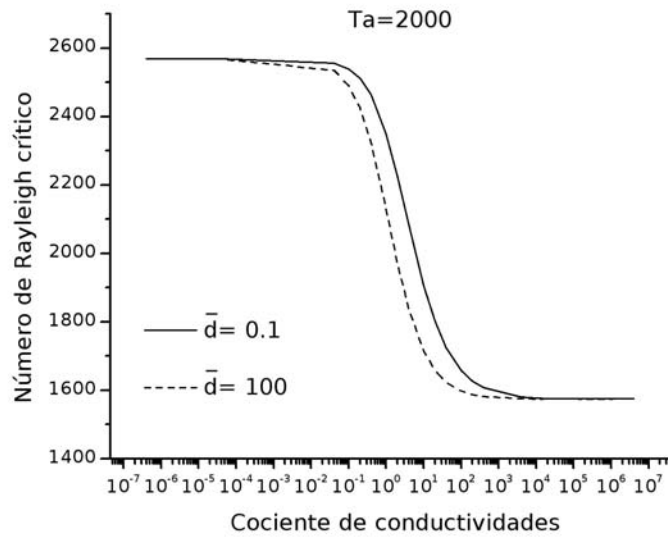


FIG. 9: Número de Rayleigh crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

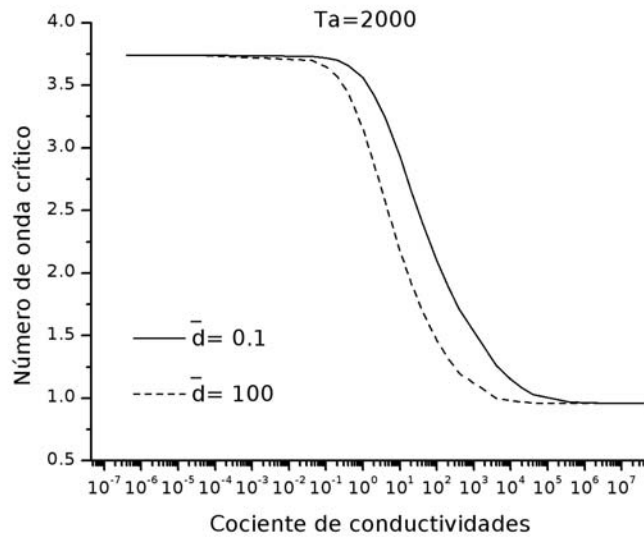


FIG. 10: Número de onda crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

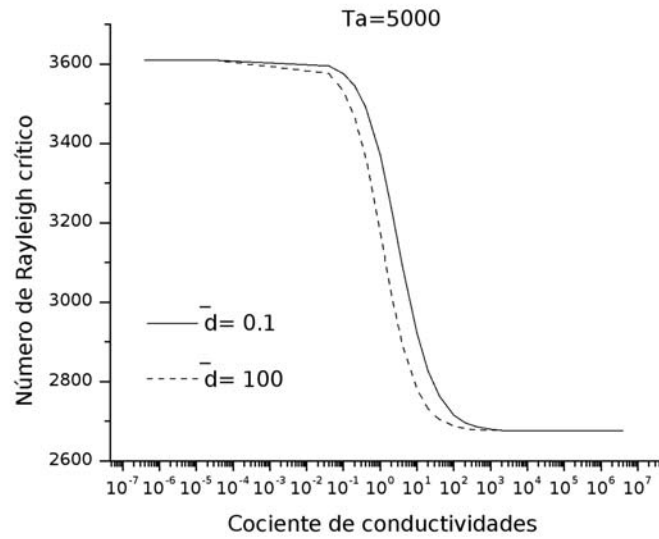


FIG. 11: Número de Rayleigh crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

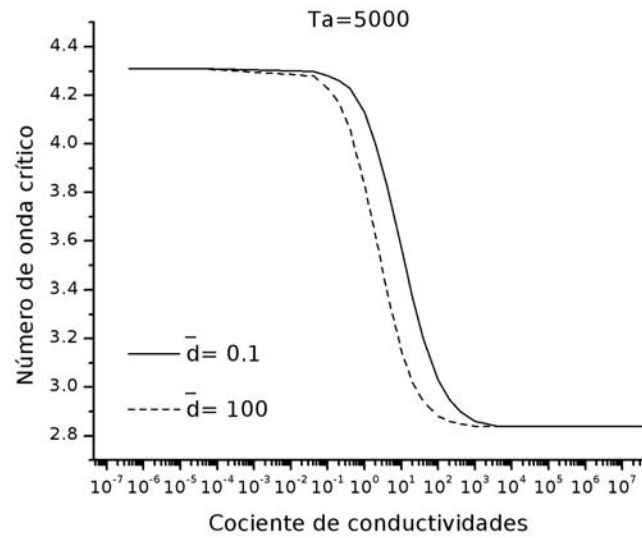


FIG. 12: Número de onda crítico como función del cociente de conductividades, para dos valores del cociente de espesores.

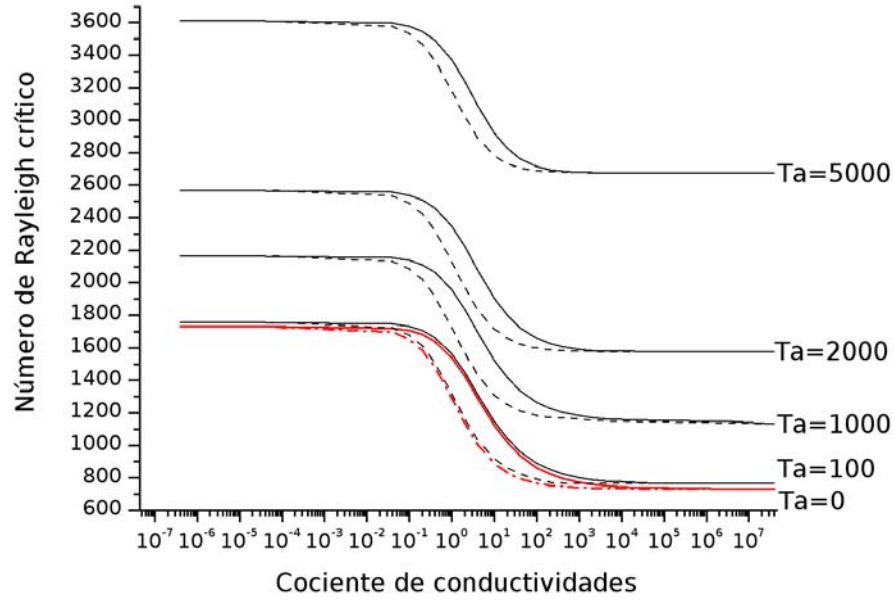


FIG. 13: Número de Rayleigh crítico para diferentes números de Taylor como función del cociente de conductividades. Cada par de curvas corresponde a dos valores del cociente de espesores (0.1 y 100).

encontró en nuestro método con respecto a los resultados de Chandrasekhar y con respecto al del límite cuando las paredes son aislantes perfectas, se puede obtener una aproximación para el rango de incertidumbre que aparece con nuestro método. Se determinó usar el promedio del error con respecto a Chandrasekhar, más el error con respecto a la fórmula de Dávalos Ec. (261), como la incertidumbre para cada número de Taylor investigado y presentado en las siguientes figuras. La Fig. (15) muestra la diferencia que se encuentra entre los números de Rayleigh con respecto al número de Taylor, para 3 magnitudes del cociente de conductividades donde la diferencia es más notable, o sea en $\bar{X} = 1$ (cuadros), 2 (círculos), 10 (triángulos). Nótese que la línea sólida corresponde a la diferencia entre los R_c 's para $\bar{d} = 0.1$ y 100. Las líneas punteada y punto raya, abajo y arriba de la sólida respectivamente, marcan la incertidumbre en los resultados. El objetivo es mostrar que las diferencias no son menores a la incertidumbre y que son reales.

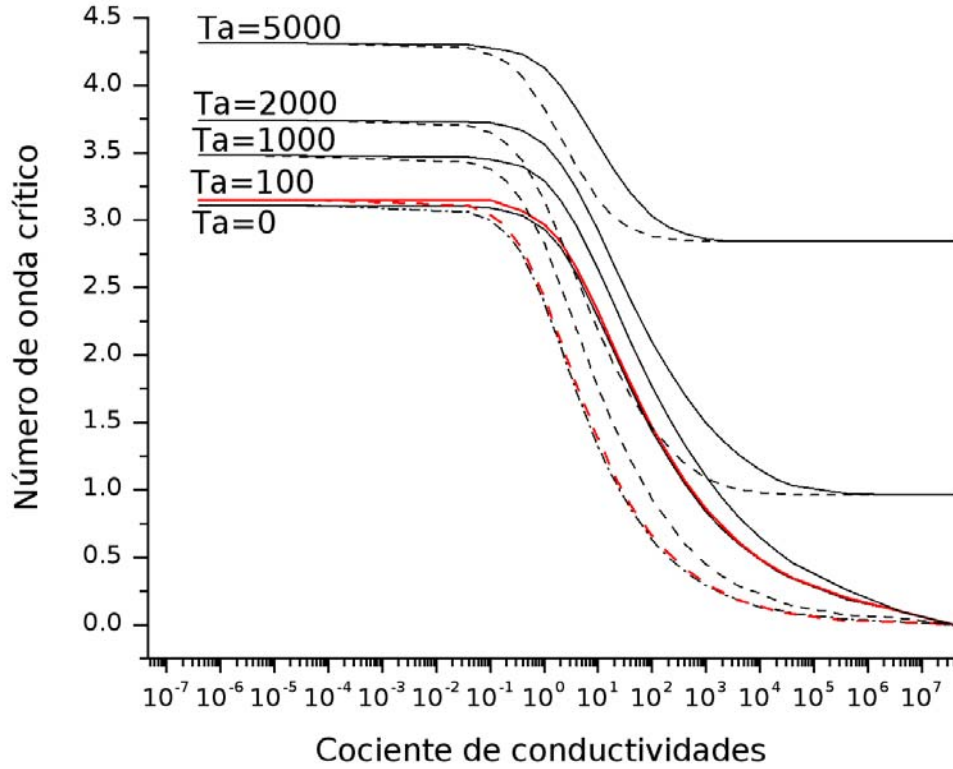


FIG. 14: Números de onda críticos para diferentes valores del número de Taylor como función del cociente de conductividades. Cada par de curvas corresponde a dos valores del cociente de espesores (0.1 y 100).

En la figura se encuentra que para $\bar{X} = 2$ (estrella) la diferencia de los números de Rayleigh críticos es la mayor. También es posible observar cómo la mayor incertidumbre se encuentra para un número de Taylor de 5000. Además, se observa que, conforme crece el número de Taylor, la diferencia de R_c 's disminuye.

Para el caso del número de onda crítico se grafican las diferencias entre números de onda críticos con respecto al número de Taylor, para cocientes de conductividad de $\bar{X} = 1$ (cuadros), 2 (círculos), 10 (triángulos), que son las posiciones donde se midieron las diferencias entre los números de Rayleigh. Las curvas se presentan en la Fig. (16). En ella se observa que la diferencia es mayor para el cociente de conductividad $\bar{X} = 10$. Además, es

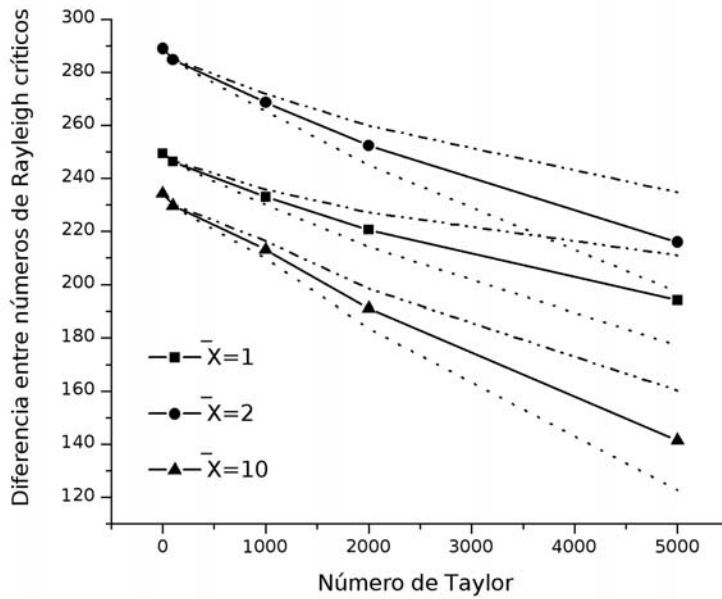


FIG. 15: Comparación de las diferencias entre los números de Rayleigh críticos cuando $\bar{d} = 0.1$ y 100 con respecto al número de Taylor. La comparación se hace en tres valores distintos del cociente de conductividades. El decremento de las diferencias con T_a es notable.

claro que la diferencia entre los números de onda críticos disminuye notablemente cuando crece el número de Taylor. El mínimo se encuentra para el máximo número de Taylor investigado $T_a = 5000$.

La diferencia porcentual que se encuentra para el número de onda crítico con respecto a los resultados de Chandrasekhar es muy poca. En el otro extremo de paredes mal conductoras, se encuentra que con ayuda del paquete algebraico MAPLE, se pudo llegar siempre al límite de número de onda cero. Por tanto, no hay incertidumbre en este caso. El problema sólo fue que en ese límite el número de Rayleigh sí difiere respecto a la fórmula de Dávalos. Por esa razón no incluimos incertidumbres en la Fig. (16).

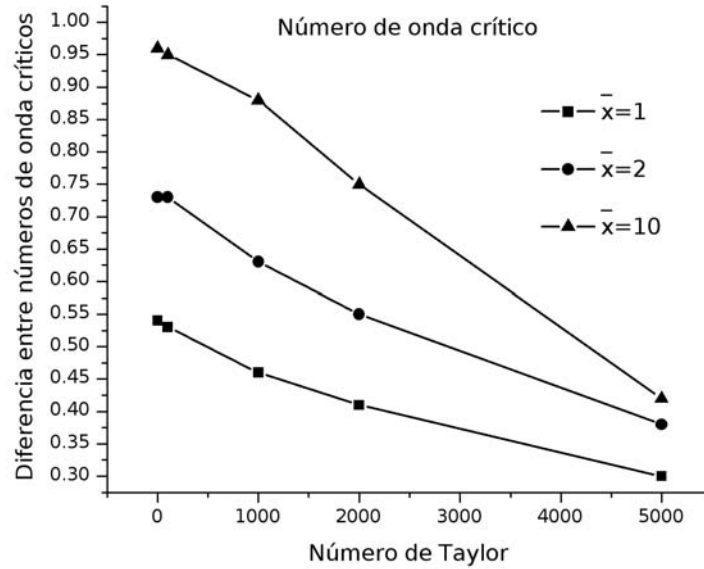


FIG. 16: Comparación de las diferencias entre los números de onda críticos cuando $\bar{d} = 0.1$ y 100 con respecto al número de Taylor. La comparación se hace en tres valores distintos del cociente de conductividades. El decremento de las diferencias con T_a también es notable.

CONCLUSIONES

Después de analizar los resultados obtenidos con el método que se propuso, aproximando la solución para la velocidad con el método de Galerkin, encontramos resultados muy similares a los aceptados en la literatura para ciertos números de Taylor. Para números de Taylor iguales o mayores a 10000 la diferencia respecto a los valores aproximados obtenidos por Chandrasekhar y la fórmula de Dávalos crece de manera considerable.

Al incluir efectos de rotación, representados por el número de Taylor (T_a), junto con los cocientes de conductividad (\bar{X}) y espesores (\bar{d}), se encuentra que T_a tiene una influencia importante en las magnitudes de los números de Rayleigh y de onda críticos. De acuerdo al análisis se observa que cuando el número de Taylor aumenta, el número de Rayleigh crítico también aumenta de manera considerable, lo que implica que el efecto de la rotación es estabilizador en nuestro sistema. Por lo tanto, el flujo termoconvectivo es más estable cuando es sometido a rotación. Lo cual sugiere que podemos aumentar la diferencia de las temperaturas entre las paredes y el fluido permanecerá hidrostático. El número de onda

crítico también aumenta, en general, cuando incrementamos el número de Taylor.

Al tomar en cuenta el cociente de conductividades \bar{X} y de espesores \bar{d} ; encontramos que en el caso del número de Rayleigh crítico R_c existen valores para el cociente de conductividad donde la diferencia en el cociente de espesores hace que los números de Rayleigh críticos difieran para el mismo número de Taylor. En los extremos donde se tienen paredes perfectamente conductoras o aislantes el cociente del espesor no influye. En el caso del número de onda crítico a_c , cuando tenemos paredes perfectamente conductoras el cociente de espesores no influye. En el otro extremo, donde se tienen paredes aislantes dependerá del número de Taylor la influencia del cociente de espesores. Si $T_a < 1868.8$ el cociente de espesores parece tener importancia en la vecindad de $\bar{X} = 10^7$. Sin embargo, si $T_a > 1868.8$, en esa vecindad las curvas se juntan y son planas y el cociente de espesores es irrelevante. Esta región crece si se incrementa aún más el número de Taylor, como se observa en el extremo derecho de la gráfica Fig. (14) para $T_a = 2000$ y 5000 .

Al determinar la diferencia que se encuentra con respecto a las curvas graficadas con diferentes cocientes de espesores $\bar{d} = 0.1$ y 100 (ver Figs. (16) y (15)) para el número de onda y Rayleigh críticos, observamos que conforme el número de Taylor aumenta esta diferencia que se tiene en el caso de paredes con conductividades finitas disminuye. Por ello concluimos que al aumentar la rapidez de rotación Ω se va haciendo despreciable el efecto que tiene la \bar{d} en el valor de R_c . En otras palabras, al aumentar el número de Taylor disminuye el efecto del espesor de las paredes que limitan el fluido. De este modo, se espera que para T_a muy grande se encuentre un número de Rayleigh crítico único para cada \bar{X} a lo largo de todas las curvas R_c vs. \bar{X} .

A futuro, es de interés, analizar los casos cuando los valores para los cocientes de conductividades y espesores son distintos para cada pared que limita la capa de fluido. También es necesario investigar que sucederá para números de Taylor mayores a los usados en el presente trabajo. Para ello se requiere aplicar un método numérico más preciso.

VII. REFERENCIAS

Cerisier, P. , Rahal, S. , Condonnier, J , Lebon, G. , ” Thermal influence of boundaries on the onset of Rayleigh-Bénard convection” , Intl. J.Heat Mass Transfer 41, (1998), 3309-3320.

Chandrasekhar,S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover publications, New York, (1981).

Davalos O., ”Magnetoconvection in a Rotating Fluid between Walls of Very Low Thermal Conductivity” , J. of the Physical Society of Japan, vol. 53, (1984), 2173-2176.

Finlayson, B. A., *The method of weighted residuals and variational principles*, Academic Press, New York (1972).

Gershuni, G. Z. ,Zhukhovitskii, E. M. , *Convective stability of incompressible fluids*, Izdatel'stvo "Nauka", Moskva (1972), Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, (1976).

Gustafson, M. R. and Howle, L. E. , ”Effects of anisotropy and boundary plates on the critical values of a porous medium heated from below” , Intl. J. Heat Mass Transfer 42, (1999), 3419-3430.

Howle, L. E. , ”The effect of boundary properties on controlled Rayleigh-Bénard convection” , J. Fluid Mech, vol. 411, (2000), 39-50.

Metcalf, G. P. and Behringer, R. P. ”Critical Rayleigh numbers for cryogenic experiments, J. Low temperature Phys vol. 78 (1990) 231.

Riahi, D. N. , *Flow instability*, WIT Press, Boston (2000).

TABLAS

TABLA 1

$\bar{\chi}$	a_c	R_c
0	3.11	1708.055835
0.1	3.00	1628.394247
0.2	2.90	1561.998791
0.3	2.81	1505.776737
0.4	2.74	1457.522869
0.5	2.66	1415.630845
0.6	2.60	1378.892838
0.7	2.54	1346.403754
0.8	2.49	1317.444601
0.9	2.44	1291.458787
1	2.39	1268.000676
2	2.07	1116.827309
3	1.87	1038.213647
4	1.73	989.1993326
5	1.63	955.3234087
6	1.54	930.3266182
7	1.48	910.9909904
8	1.42	895.5288910
9	1.37	882.8653723
10	1.33	872.2100564
20	1.07	816.8601356

Tabla1. Valores críticos para el número de onda (a_c) y el número de Rayleigh (R_c) con diferentes cocientes de conductividad.

TABLA 2

T_a	a_c	R_c
0	3.11	1708.055390
10	3.10	1713.084942
100	3.15	1757.153753
500	3.30	1945.116347
1000	3.50	2164.956282
2000	3.75	2568.110278
5000	4.25	3609.856401
10000	4.80	5061.478078
30000	5.80	9603.490816

Tabla 2. Número de onda crítico (a_c) y número de Rayleigh crítico (R_c) para diferentes números de Taylor (T_a).

TABLA 3

\bar{x}	$\bar{d} = 0.1$		$\bar{d} = 100$	
	a_c	R_c	a_c	R_c
4E-7	3.11	1731.364856	3.11	1731.364717
4E-6	3.11	1731.364032	3.11	1731.361533
4E-5	3.11	1731.354459	3.11	1731.329848
4E-2	3.10	1720.962185	3.06	1697.679590
1E-1	3.09	1705.924286	3.00	1651.689514
2E-1	3.07	1682.285144	2.90	1585.185191
4E-1	3.03	1639.638290	2.74	1480.352140
1E0	2.93	1538.977964	2.39	1289.620456
2E0	2.8	1425.784607	2.07	1136.917795
4E0	2.61	1293.078320	1.73	1007.587001
1E1	2.28	1122.991180	1.32	888.6942540
2E1	2.02	1017.633014	1.07	832.3860754
4E1	1.76	936.8087575	0.86	796.0616013
1E2	1.44	862.3233100	0.63	767.5120204
2E2	1.23	824.3551662	0.50	754.9158704
4E2	1.048	797.5198979	0.40	746.9640547
1E3	0.84	773.8089420	0.29	740.7885618
2E3	0.71	761.9171189	0.23	738.0744202
4E3	0.6	753.5373873	0.18	736.3433312
1E4	0.48	746.1260693	0.13	735.0210368
2E4	0.40	742.4010563	0.11	734.4446416
4E4	0.34	739.7697261	0.087	734.0805628
4E5	0.19	735.4637550	0.04	733.4526090
4E6	0.10	734.0932284	0.02	734.7436538
4E7	0	734	0	734

TABLA 3. Valores para el número de onda crítico a_c y el número de Rayleigh crítico R_c , obtenidos con diferentes cocientes de conductividad \bar{x} y cocientes de espesores \bar{d} .

TABLA 4

\bar{x}	$\bar{d} = 0.1$		$\bar{d} = 100$	
	a_c	R_c	a_c	R_c
4E-7	3.15	1757.153779	3.15	1757.153630
4E-6	3.15	1757.152971	3.15	1757.150497
4E-5	3.15	1757.143251	3.15	1757.118823
4E-2	3.15	1746.618374	3.11	1723.496666
1E-1	3.15	1731.470245	3.04	1677.607032
2E-1	3.11	1707.539648	2.95	1611.260337
4E-1	3.07	1664.502692	2.78	1506.769787
1E0	2.97	1563.158077	2.44	1316.834825
2E0	2.84	1449.564805	2.11	1164.847671
4E0	2.65	1316.835439	1.78	1036.060072
1E1	2.33	1147.363253	1.38	917.6159458
2E1	2.05	1042.796771	1.11	861.3906159
4E1	1.79	962.7899475	0.89	825.0835178
1E2	1.47	889.2861136	0.66	793.3290097
2E2	1.26	851.9429156	0.53	772.9276384
4E2	1.07	825.7268772	0.42	767.2826
1E3	0.86	802.0203556	0.31	765.36
2E3	0.73	789.9325333	0.24	764.32
4E3	0.61	778.9858451	0.18	763.47
1E4	0.49	775.24	0	762.67
2E4	0.41	771.61	0	762.67
4E4	0.35	769.03	0	762.67
4E5	0.20	764.69	0	762.67
4E6	0.18	763.41	0	762.67
4E7	0	762.67	0	762.67

TABLA 4. Muestra valores para el número de onda crítico a_c y el número de Rayleigh crítico R_c , obtenidos con diferentes cocientes de conductividad \bar{x} y cocientes de espesores \bar{d} , para un número de Taylor de 100.

TABLA 5

\bar{x}	$\bar{d} = 0.1$		$\bar{d} = 100$	
	a_c	R_c	a_c	R_c
4E-7	3.48	2164.806707	3.48	2164.806559
4E-6	3.48	2164.805657	3.48	2164.803412
4E-5	3.48	2164.795313	3.47	2164.779438
4E-2	3.47	2153.425549	3.43	2131.523852
1E-1	3.45	2137.021602	3.38	2086.034958
2E-1	3.43	2111.284440	3.29	2020.094037
4E-1	3.40	2065.052281	3.14	1915.720978
1E0	3.29	1956.917335	2.83	1723.986431
2E0	3.15	1836.855475	2.52	1568.202142
4E0	2.96	1697.967981	2.19	1434.321502
1E1	2.64	1522.960457	1.76	1309.824727
2E1	2.37	1416.570121	1.47	1250.724608
4E1	2.10	1336.408222	1.22	1212.694492
1E2	1.77	1264.265950	0.93	1183.486307
2E2	1.54	1228.498425	0.76	1169.586974
4E2	1.34	1203.831852	0.6	1168.190252
1E3	1.10	1182.372069	0.4	1165.478953
2E3	0.94	1172.084289	0.36	1153.20
4E3	0.80	1163.905561	0.29	1149.51
1E4	0.65	1160.346281		
2E4	0.55	1155.82		
4E4	0.46	1153.67		
4E5	0.26	1150.17		
4E6	0.18	1149.33	0.18	1149.08
4E7	0	1131.089	0	1131.089

TABLA 5. Usando un número de Taylor de 1000 se obtienen valores para el número de onda crítico a_c y el número de Rayleigh crítico R_c , con diferentes cocientes de conductividad \bar{x} y cocientes de espesores \bar{d} .

TABLA 6

\bar{x}	$\bar{d} = 0.1$		$\bar{d} = 100$	
	a_c	R_c	a_c	R_c
4E-7	3.75	2568.110499	3.75	2568.117224
4E-6	3.75	2568.109433	3.74	2568.114030
4E-5	3.75	2568.098359	3.74	2568.083035
4E-2	3.74	2556.030488	3.70	2535.111830
1E-1	3.72	2538.638870	3.65	2489.942664
2E-1	3.70	2511.403552	3.57	2424.390348
4E-1	3.66	2462.633604	3.44	2320.393678
1E0	3.56	2349.296884	3.15	2128.636911
2E0	3.42	2224.678501	2.87	1972.278557
4E0	3.24	2082.186573	2.57	1838.040578
1E1	2.93	1905.761155	2.18	1714.730165
2E1	2.66	1800.990883	1.92	1657.894657
4E1	2.41	1724.186550	1.70	1622.915312
1E2	2.10	1657.975261	1.46	1597.474828
2E2	1.89	1627.049249	1.32	1587.449913
4E2	1.71	1607.078582	1.20	1581.909207
1E3	1.50	1591.470630	1.09	1578.498930
2E3	1.37	1584.746303	1.04	1577.062967
4E3	1.26	1580.724130	1.00	1576.136615
1E4	1.15	1577.591929	0.98	1574.943305
2E4	1.08	1576.781863	0.97	1575.438865
4E4	1.03	1575.651992	0.96	1575.540459
4E5	0.97	1575.229508	0.96	1575.194816
4E6	0.96	1575.508288	0.96	1575.485766
4E7	0.96	1575.404424	0.96	1575.359603

TABLA 6. Usando un número de Taylor de 2000 se obtienen valores para el número de onda crítico a_c y el número de Rayleigh crítico R_c , con diferentes cocientes de conductividad \bar{x} y cocientes de espesores \bar{d} .

TABLA 7

\bar{x}	$\bar{d} = 0.1$		$\bar{d} = 100$	
	a_c	R_c	a_c	R_c
4E-7	4.31	3608.675694	4.31	3608.675463
4E-6	4.31	3608.674461	4.31	3608.672460
4E-5	4.31	3608.662152	4.31	3608.642149
4E-2	4.30	3595.233567	4.28	3576.235359
1E-1	4.28	3575.950667	4.23	3531.841546
2E-1	4.26	3545.854242	4.17	3467.313597
4E-1	4.23	3492.330439	4.06	3364.855836
1E0	4.13	3369.979036	3.83	3175.916495
2E0	4.00	3238.699982	3.62	3022.777321
4E0	3.83	3093.235939	3.40	2893.697055
1E1	3.57	2921.963462	3.15	2780.497451
2E1	3.37	2827.344127	3.02	2732.383213
4E1	3.20	2763.718263	2.94	2705.404850
1E2	3.03	2715.669991	2.88	2688.041016
2E2	2.95	2696.881483	2.86	2682.024595
4E2	2.90	2686.715769	2.85	2678.970357
1E3	2.86	2680.308571	2.84	2677.123090
2E3	2.85	2678.111823	2.84	2676.503538
4E3	2.84	2675.894985	2.84	2676.193741
1E4	2.84	2676.332040	2.84	2676.007800
2E4	2.84	2676.107870	2.84	2675.945695
4E4	2.84	2675.995782	2.84	2675.914704
4E5	2.84	2675.894985	2.84	2675.886759
4E6	2.84	2675.884813	2.84	2675.884081
4E7	2.84	2675.883836	2.84	2675.883722

TABLA 7. Usando un número de Taylor de 5000 se obtienen valores para el número de onda crítico a_c y el número de Rayleigh crítico R_c , con diferentes cocientes de conductividad \bar{x} y cocientes de espesores \bar{d} .