Universidad Nacional Autónoma de México

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA
PSICOLOGIA EDUCATIVA Y DEL DESARROLLO

Análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos en escolares de primer y segundo grado de Primaria.

T E S I S

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A

OCTAVIANO GARCIA ROBELO

Tutora principal: Dra. Frida Díaz-Barriga Arceo

JURADO DEL EXAMEN:
Tutora Adjunta: Dra. Ileana Seda Santana
Tutor Externo: Dr. Mario Rueda Beltrán
Jurado A: Dra. Rosa del Carmen Flores Macías
Jurado B: Dra. Alicia Ávila Storer
Jurado C: Dra. Gloria Silvia Macotela Flores
Jurado D: Dr. José Reinaldo Martínez Fernández

Ciudad Universitaria 2007.

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMENTOS

A mis padres: Lupita Robelo Hernández y Nicolás García Fernández (+), por darme esta oportunidad en la vida, así como dotarme de los recursos suficientes para poderlos desarrollar en esta estancia de la vida.

A mis hermanos: Martha, Mary y Beto, Juan y Ángelica, Nieves y Lalo, Carmelo y Carmen.

A mis sobrinos: Michel, Trinidad, Laura, Lupita, Citlalli, Quetzali, Brenda, Karen, Jane, Alexis, Axel, Leslie, Jimmy, Mayra y Catherine, quienes siempre me inspiran confianza en que se debe seguir estudiando y creciendo.

A mis amigos y amigas:

Grisel gracias por estar y compartir los momentos bonitos y por apoyarme en los momentos más difíciles, eres una mujer excelente, maravillosa y creativa…sigue adelante.

Alex, Samana, Ivan, Rodrigo por todo su apoyo, amistad y sugerencias en este recorrido del Posgrado en la UNAM. Cuando tiendes la mano no sabes si por ello se siguió de pie o cuando menos inspiraste firmeza.

Gaby, Raúl, Rosy, Mine, Idolina por compartir las experiencias de esta formación doctoral, por todo su apoyo, comprensión y ánimos para encontrar salidas posibles y certeras que exige este nivel.

Lorena, Hilda, Belem y Lourdes, Miguel, Raúl, Andrés, Ramón: El Doctorado es una gran aventura por la que vale la pena insistir, pese a toda dificultad teórica, metodológica y de los mismos requisitos de la vida, por lo que se debe insistir hasta lograrlo paso a paso.

A **Juan** por tu sentido altruista, por ese ímpetu y ánimo para crecer profesional y humanamente día a día, mis mas sinceros agradecimientos por todo tu apoyo.

A mis amigos inolvidables: **Zenón, Miguel, Ramiro, Enrique, Salome, Rogelio** por su amistad siempre presente.

A la familia **Vargas-Guerrero, Gabriel, Octavio, Rogelio, Lupita, Pepe, Alfredo, Jessica** gracias por estar en el inicio y final de esta obra.

A mi familia **Caballero-García**, se que tener un punto de apoyo es suficiente para seguir con ánimo en esta formación: **Jaime, Oscar, Mary, Alejandro, Javier, Raúl, Citalli, Sonia, Daniel, Leodegario y Carmén.**

A las Instituciones:

Gracias a la “Escuela Primaria Pública de participación social”

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo como becario del Programa de Maestría y Doctorado en Psicología. No de registro: 150194

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, por dar oportunidad de formarme a nivel profesional, así como el poder cultivarse en el resto de la personalidad, a nivel cultural, recreativo, de salud, entre tanto. Es un orgullo poder egresar con este nivel de la mejor Universidad de Americana Latina y de entre las mejores de América y del mundo, gracias UNAM.

A la memoria de la Doctora: **Gloria Silvia Macotela Flores**
Sus enseñanzas siempre las llevaremos sus alumnos, no solo por lo que pudimos llegar a comprender o entender, sino también por valorar el respeto a todos los seres humanos, así como el enseñarnos a no dejar de sorprenderse de lo que puede llegar a encontrar el ser humano a través del uso de la ciencia y la tecnología.
Gracias Dr. **Rodolfo Gutierrez**, por todo su apoyo, ayuda, comprensión, guía y sugerencias.

A la Dra**. Frida Diaz-Barriga Arceo** por esa gran calidad profesional, ética, por su calidad humana para tratar a sus alumnos, por la fuerza y la confianza que siempre nos deposito y nos hizo desarrollar, ser tutora va mas allá de plano profesional. Gracias por todo tu apoyo siempre a tiempo, con respeto, y responsabilidad.

A la Dra. **Rosa del Carmen Flores**, por su gran habilidad para hacer confrontar lo que sabe el alumno y lo que puede desarrollar por si mismo. Por su gran capacidad para guiarnos, por ayudarme a darle sentido a esta tesis en el campo de la Psicologìa y las matemáticas.

A la Dra. **Ileana Seda Santana**, tener paciencia, repensar las cosas, permite reestructurar el conocimiento, y así poder avanzar en las líneas del saber diverso. Gracias por todas tus sugerencias y atenciones.

A la Dra. **Alicia Ávila**, gracias por su apoyo incondicional, por sus palabras y sugerencias siempre exactas, por su retroalimentación y apoyo para madurar esta tesis.

Al Dr**. Mario Rueda Beltrán** gracias por su optimismo y por la confianza que mantuvo en mi trabajo doctoral, por sus sugerencias y ánimo que promovió en mi.

Al Dr**. J. Reinaldo Martinez**, gracias por ayudarme a ilustrar y aclarar muchos términos y temas de la tesis, por sus estimaciones y apoyo incondicional.

A la **Dra. Sandra Castañeda**, gracias por compartir sus conocimientos y apoyarme en el campo de la evaluación y la metodología, además de su gran amistad que me brindo siempre.

"El paso del hombre por esta vida, queda mostrada por su huella que plasma en el bien o en mal, el primero mantiene a la vida y al hombre a la vanguardia, así como el respeto consigo mismo, con el resto y con la naturaleza, el segundo es lo opuesto. El desarrollo del conocimiento es algo que se puede hacer como un bien para todos, es útil en todos los aspectos, se crea, se mantiene y en otras se transforma…"

Índice

CAPÍTULO 5. Metodología de la investigación.

CAPITULO 6. Resultados.

Índice de tablas **Página**

Figuras

Resumen:

Ante las dificultades que enfrenta la educación básica en matemáticas, se analiza el proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos en niños de bajo y alto rendimiento de primer y segundo grado de primaria. Se toma como unidad de análisis el triángulo didáctico constructivista centrado en las interacciones educativas entre profesores, estudiantes y prácticas educativas en torno a contenidos prescritos en el curriculum. Mediante estudios de caso y estrategias de análisis de corte cualitativo y cuantitativo, se administraron un instrumento que evalúa el conocimiento matemático del alumno, una entrevista semiestructurada para evaluar las concepciones de los maestros, y una guía para evaluar el tipo de contrato didáctico celebrado durante las prácticas educativas.

Se encontró que los alumnos solucionan problemas aditivos aún sin haber aprendido las nociones básicas de sistema decimal ni los algoritmos formales previstos en el currículo, recurren a razonamientos y estrategias "naturales" o "inventados" para solucionar determinado tipo de problemas. Los conocimientos que más se les dificultan son la comprensión del valor posicional, la solución del algoritmo de la resta, y la solución de problemas de igualación y de comparación, debido a una falta de una comprensión conceptual y algorítmica de la suma y la resta. En las concepciones docentes, se encontraron coincidencias con estudios previos, ya que aparece la denominada docencia del sentido común, donde se explican los procesos de aprendizaje en términos de un determinismo biológico o sociológico, más que en términos de la influencia educativa y las situaciones didácticas planteadas en la escuela y en el aula.

Al contrastar las concepciones docentes frente a sus prácticas en el aula, se encuentran coincidencias y contradicciones. Los dos maestros basan su instrucción en un contrato fuertemente didáctico (de acuerdo el encuadre teórico de Brousseau), al mostrar la responsabilidad de enseñar y de provocar el aprendizaje del alumnado, pero predominan los contratos de reproducción formal, condicionamiento y ostensión, centrados en las prácticas del procedimiento y en la reproducción algorítmica, promoviendo escasamente el razonamiento y el conocimiento conceptual matemático. Se concluye con algunas sugerencias de investigación educativa futura y con las implicaciones educativas más importantes del estudio.

Palabras clave: construcción de conocimiento matemático, concepciones docentes, contratos didácticos, triángulo interactivo, educación básica.

Abstract

Considering the difficulties faced by basic education in mathematics, teaching and learning process regarding addition, subtraction and solution of additive problems in low- and high-performance first- and second-grade elementary school children were analyzed. An instrument assessing the student s mat ematical no ledge, a semistructured intervie to evaluate t e teac er s conceptions and a guide to determine the type of didactic contract during educational practices, were administered by case studies and qualitative and quantitative analysis strategies.

Students were found to solve additive problems even before learning the basic notions about the decimal system or t e formal algorit ms establis ed in t e curriculum, by applying “natural” or “invented” strategies to solve specific problems. e most difficult no ledge ere understanding positional value, solution of the subtraction algorithm, and solution of equalization and comparison problems, due to the lack of conceptual and algorithmic understanding of addition and subtraction.

n teac er s conceptions ere found t at t ere is a “common-sense teac ing,” ere learning processes are explained in terms of a biological or sociological determinism, and less on the educational influence and the didactic situations.

Coincidences and contradictions were found when comparing t e teac er s conceptions and their practices in the classroom. Both teachers based their instruction on a strongly didactic contract, s o ing is responsibility to teac and stimulating t e student s learning, centered on t e procedural practices and algorithmic reproduction, are dominant, scarcely promoting reasoning and mathematical conceptual knowledge. Some suggestions are presented on future educational research, along with the most important educational implications of the study.

Keywords: construction of mathematical knowledge, teaching conceptions, didactic contracts, interactive triangle, basic education.

INTRODUCCIÓN

A mediados del siglo pasado y recientemente la educación escolar en todos sus niveles es y ha sido uno de los temas más polémicos que mantienen y preocupan a una diversidad de organismos nacionales e internacionales (Instituto Nacional para la Evaluación Educativa, 2006; Organización para la Cooperación del Desarrollo Económico, 2001; Eurydice European Unit, 2002), y que de igual forma involucran de manera importante a una diversidad de ciencias y disciplinas relacionadas con la enseñanza y la educación, como es la psicología educativa.

En México, el Sistema Educativo Mexicano, específicamente en el marco de la educación básica, enfrenta una seria problemática que se expresa en una baja calidad de la enseñanza y el aprendizaje, y particularmente en un bajo rendimiento en áreas básicas como son la lectura, la escritura y las matemáticas (Andere 2003; Ornelas, 1998; Latapí, 1996; Macotela, 1995). Problemática que puede mostrarse en los resultados de estudios realizados por el INNE (2006) o la OCDE (2001, 2003), organismos que a su vez ofrecen públicamente la información parcial sobre los principales resultados obtenidos de sus evaluaciones masivas. Ante estas dificultades que se presentan en escritura, lectura y matemáticas el gobierno y responsables de la educación en México SEP han tratado de solucionarlo con la implementación de planes y programas, que incluyen: la carrera magisterial, cursos o talleres de las materias con los que intenta elevar la calidad de la educación. Por nuestra parte los investigadores tratamos de emplear recurso teóricos y metodológicos derivados de la ciencia y la educación, con el objetivo de aportar conocimientos acerca del proceso de la enseñanza y el aprendizaje, que concluyan en propuestas que contribuyan a la mejora de la educación básica.

No obstante, debido a su magnitud y complejidad, resulta difícil el análisis de los fenómenos educativos y sobre todo de las posibilidades de cambio a partir de investigaciones puntuales. No obstante, la investigación educativa sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de los diversos contenidos curriculares reviste interés pues permite dar apertura a nuevas orientaciones y a la búsqueda de soluciones a problemas vinculados con el fracaso escolar de los alumnos. La complejidad del fenómeno educativo a nivel del análisis investigativo también se ha visto reflejada en los tipos de investigación predominantes en años anteriores, en los que en su mayoría se han investigado por separado los elementos involucrados en el proceso enseñanza-aprendizaje (Ávila, 2003). Si bien sus resultados han sido útiles en la comprensión de cuál y cómo es el papel de los actores y de diversos elementos singulares dentro del fenómeno educativo, es necesario avanzar hacia la comprensión de la interrelación de estos elementos considerados en un proceso global y multideterminado sumamente complejo y dependiente del contexto. Asimismo, resulta importante avanzar en el desarrollo de un enfoque educativo sustentado en las didácticas específicas y la psicología instruccional en diversos campos disciplinares. Es importante señalar, de acuerdo a Silvia Dubrosky (2000) que las teorías psicológicas aplicadas a la educación intentan ofrecer un marco de referencia que permite proyectar, reflexionar o evaluar los procesos de aprendizaje que tienen lugar en las escuelas. Pero el análisis de la complejidad de la realidad escolar hace que no haya un único punto de vista, ni una única teoría psicológica que nos permita interpretarla. Es necesario ubicarse en algún lugar de esa complejidad y desde allí, quizás se tendrá la oportunidad de analizar la relación entre teoría psicológica y práctica pedagógica. Con todas estas consideraciones por delante, se procede a ubicar el objeto de estudio y alcance del presente trabajo.

Uno de los ámbitos más importantes asociado a la problemática del bajo aprovechamiento y el fracaso escolar es el de la *enseñanza de las matemáticas*, en el cual se ubica esta investigación doctoral. Se ha pretendido construir una mirada psicopedagógica y contextuada, teniendo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas básicas como objeto de estudio, a través del *acercamiento a una mayor comprensión de los procesos e interacciones educativos que ocurren en torno a dicha enseñanza, considerando las interacciones entre los actores de la educación (profesor, alumnos) y las posibilidades y restricciones que plantea el currículo y la escuela.*

Este acercamiento tiene como antecedente el trabajo que el autor de esta tesis desarrolló durante el segundo año de residencia en el Programa de Maestría en Psicología Escolar que llevó como título "Estrategias para favorecer el aprendizaje de solución de problemas matemáticos" (García, 2002), además de la experiencia, la visión, la reflexión y abstracción en el aula durante más de dos años. Específicamente en dicho trabajo, así como en una diversidad de investigaciones que con posterioridad se reseñan en la presente tesis, se observó con preocupación que había niños cursando el cuarto grado de primaria que aún no lograban dominar los procedimientos algorítmicos de la suma y la resta y menos aún mostraban un entendimiento conceptual de éstas y otras nociones matemáticas elementales, a pesar de que el currículo oficial prescribe que dichos aprendizajes deben adquirirse desde primero y segundo grado. Asimismo, se encontró que no resultaba suficiente una intervención educativa centrada en los componentes cognitivos vinculados al aprendizaje de las matemáticas, que no se podía olvidar el papel e intervención del profesor a cargo de la clase, así como también el saber planteado por el currículo oficial.

Esto condujo a plantear un estudio más amplio, con una mirada que integrara aspectos cognitivos y socioculturales y cuyo abordaje metodológico contempla como unidad de análisis central el triángulo interactivo o didáctico: profesor-alumnos-contenidos (Coll, 2001). Dicho estudio se presenta en esta tesis doctoral y tiene como propósito central arribar a *la comprensión del papel que juega cada uno de los componentes del triángulo interactivo -profesor, alumnos y contenido-, así como la forma en que se interrelacionan, en términos de las concepciones (Thompson, 1992), conocimientos y tipo de contrato didáctico (Brousseau, 1997) que se establece durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos de matemáticas elementales (la adquisición de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos).*

Se decidió emprender un trabajo que permitiera en la medida de lo posible realizar un análisis más comprehensivo y holístico del proceso de enseñanza-aprendizaje que involucra estos conocimientos matemáticos en los primeros grados de la educación primaria, en el contexto de una escuela pública mexicana. De esta manera, se estableció como foco de observación y análisis las concepciones del docente y la práctica educativa e interacción que establece con sus alumnos a través de determinadas situaciones educativas, sin dejar de lado el papel del contenido curricular y de las posibilidades de apropiación significativa de parte del niño de dichos saberes.

En atención a lo anterior, se propuso como *objetivo general de la investigación analizar el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos tomando como unidad de análisis el referido triángulo interactivo*. Se plantearon como objetivos específicos:

- Analizar los conocimientos (conceptuales y procedimentales) que adquiere el alumnado durante el aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos
- Analizar las concepciones del profesor relativas a la enseñanza conceptual y procedimental de la suma y resta y la solución de problemas aditivos.
- Analizar la relación entre el profesor y el alumno en términos del tipo de contrato didáctico que se promueve en el aula.

Se condujo un estudio de casos instrumental (Stake, 1999) de corte cualitativo el cual se combinó con una serie de análisis cuantitativos. Se trabajó durante todo un año escolar con dos casos: una profesora de primer grado de primaria y su grupo de alumnos, así como con un profesor de segundo grado de la misma escuela primaria, en una escuela pública ubicada al sur de la ciudad de México. Asimismo, se condujo un seguimiento casuístico de los alumnos de aprovechamiento más alto y más bajo en el área de matemáticas en los grupos referidos. Los docentes fueron entrevistados por lo menos en dos ocasiones en relación a sus concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas y se hicieron videograbaciones en el aula de algunas sesiones en las que impartían los contenidos matemáticos de interés en esta investigación. Para explorar el aprendizaje de los alumnos, se construyó y validó un instrumento sobre conocimientos y habilidades matemáticas (numeración, conteo, sistema decimal, algoritmos de suma y resta y la solución de problemas aditivos) el cual se administró al inicio y final del ciclo escolar en ambos grupos. La estrategia metodológica y las categorías de análisis se enfocaron a la comprensión de los conocimientos logrados por los alumnos y al desarrollo de sus propias nociones y estrategias matemáticas, mientras que en el caso del profesor, se buscó clarificar su pensamiento didáctico y sus prácticas educativas, y de manera interrelacionada, el tipo de contrato didáctico que se celebraba entre alumnos y docentes en una serie de secuencias didácticas en el aula.

En la elaboración del marco teórico de la tesis se tomó postura a favor de una diversidad de autores y enfoques que permiten dar cuenta de modelos explicativos del proceso de aprender y enseñar matemáticas básicas en los primeros años de la escolaridad, atendiendo a los procesos de construcción del conocimiento y cognición situada, así como al planteamiento de interacciones didácticas significativas. Se consideró relevante ofrecer una explicación del carácter social y cultural que tienen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela y en el nivel elemental, acentuando el papel de los mecanismos de influencia educativa que tiene su expresión más clara en la enseñanza y en la actuación de los docentes. En congruencia con el enfoque teórico del trabajo, se plantea que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo que implica por un lado una labor activa de representación y construcción del conocimiento de parte del aprendiz, pero al mismo tiempo puede decirse que ocurre debido a la interacción y construcción conjunta de significados entre el profesor y los alumnos. Visto así, el aprendizaje de las matemáticas no sólo implica acciones en el plano cognitivo, metacognitivo o intramental, sino también ocurre en el plano de interacción y mediación con los otros, por lo que es a la vez un proceso social que ocurre en un contexto educativo y cultural determinado. Sólo una visión que conjunte estas diversas perspectivas puede explicar las facilidades y restricciones que enfrentan los alumnos al intentar aprender matemáticas y cuando son apoyados por su profesor como agente educativo.

Como punto de partida, se realizó una amplia revisión de las principales teorías que explican los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la mirada del constructivismo psicológico y sociocultural, y que intentan entender las cogniciones y prácticas de los actores educativos, el docente y sus alumnos. Se encontró que algunas teorías, como la psicogenética y cognitiva, están centradas en la explicación del proceso contemplando los elementos de construcción del conocimiento en el plano de la autoestructuración individual, mientras que otras, como la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1997) están centradas en el "proceso global y en las interrelaciones didácticas". Esta última es considerada como una de las teorías más útiles e importantes a nivel nacional e internacional (Ávila y Carvajal, 2003; Lagrange, Artigue, Laborde, Trouche, 2003) y que se emplea hoy en día profusamente en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De esta forma, en el primer capítulo se abordan los principales enfoques explicativos del proceso de aprendizaje y la enseñanza vinculados con las matemáticas básicas, desde las visiones psicogenética, cognoscitiva y sociocultural. Se puso especial atención a aquellos modelos explicativos y resultados de investigación afines al interés de esta tesis.

En el segundo capítulo se describe la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas de Guy Brousseau (1997), en donde se considera que el lugar institucional donde se reproducen los conocimientos matemáticos de manera formal sigue siendo la escuela y en ella ocurren determinadas situaciones didácticas que hay que analizar para entender el porqué, cómo y qué del aprendizaje de las matemáticas. En esta teoría se propone que al ser la educación un acto social, es necesario tratar de reconocer las relaciones didácticas entre el profesor y el alumno, cómo se distribuyen las responsabilidades y obligaciones que surgen durante el acto de enseñar y aprender en términos de un contrato didáctico en particular. El autor distingue entre tres tipos principales de contrato didáctico, los cuales desglosa en otros más específicos: contratos no didácticos, contratos ligeramente didácticos y contratos fuertemente didácticos. Este abordaje resultó central para este estudio, dado que como antes se mencionó, uno de los objetivos de la investigación fue el análisis de los contratos didácticos celebrados en los grupos de primero y segundo año que se estudian.

El estudio de las concepciones de los maestros permiten reconocer cómo conciben su forma de enseñar, considerando el conjunto de creencias, representaciones mentales, imágenes, etc. (Thompson, 1992). En la contrastación de esta concepciones de los maestros con su práctica permiten reconocer, la influencia de sus concepciones sobre su pensamiento y a su vez cómo afecta su práctica educativa (Gill et al.2004). Ya en el análisis de Shulman (1989) se establece la importancia del análisis del pensamiento didáctico del profesor y de su interpretación como paradigma mediacional de la enseñanza. En el caso de esta investigación, una cuestión importante fue dar cuenta de dichas concepciones del docente respecto a la enseñanza de las matemáticas por lo que se recurrió a entrevistar al respecto a los profesores, con base a la propuesta de Monroy (1998). De esta forma, en el análisis del pensamiento del profesor se exploraron las siguientes categorías:

- Formación previa.
- Concepciones de la enseñanza de las matemáticas.
- Concepciones acerca del alumno y su aprendizaje.
- Contenidos importantes con relación a la suma, la resta y la solución de problemas aditivos. Métodos y estrategias de enseñanza.
- Evaluación del aprendizaje.

En el capítulo 3 de la tesis se describen los principales trabajos sobre las concepciones de los maestros que resultaron de interés para este trabajo, y en la sección respectiva de resultados se reportan las concepciones que se encontraron en los profesores de primaria entrevistados.

También se consideró importante un recorrido somero por el estado del arte de la investigación en enseñanza de las matemáticas en nuestro país, por lo que se revisan los estados de conocimiento coordinados por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE) durante los ochenta y noventa. Así, en el capítulo 4 se reportan una síntesis de dichos estados de conocimientos, y también una serie de investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con los temas de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos. En esta sección se concluye argumentando la necesidad de realizar investigaciones como la aquí propuesta, donde sin descuidar el tema de los contenidos, se considera de manera integrada a la enseñanza y el aprendizaje y las interacciones entre profesores y alumnos (Ávila, Block y Carvajal, 2003).

En el capítulo 5, se plantea el método seguido en la investigación, incluyendo lo relativo al planteamiento del problema, las preguntas y objetivos de la misma. Se hace una descripción del contexto educativo y de los participantes, así como de las estrategias metodológicas empleadas, el tipo de instrumentos diseñado y el procedimiento seguido.

Con el propósito de ofrecer una visión panorámica de los principales resultados que se encontraron en esta investigación el capítulo 6 inicia con una explicación de cómo se procedió al análisis de cada uno de los instrumentos aplicados y cómo se conjuntaron los resultados obtenidos para, a continuación, exponer en detalle los resultados encontrados en cuanto al conocimiento matemático de los niños, el análisis de casos de los alumnos de alto y bajo rendimiento, las concepciones docentes y el análisis de los contratos didácticos.

En el capítulo 7 se ofrece la discusión y conclusión de los resultados de la investigación. Dentro de algunos de los más importantes, se encontró que los alumnos pueden solucionar problemas aditivos aún sin haber aprendido las nociones básicas de sistema decimal y algoritmos formales previstas en el currículo, ya que los niños recurren a razonamientos y estrategias “naturales” o “inventados” que les resultan efectivos para determinado tipo de problemas. Se encontró asimismo que la comprensión del sistema de numeración decimal es lo que más se les dificulta en los dos primeros grados de primaria. El instrumento desarrollado permitió diferenciar el nivel de rendimiento de los niños (alto o bajo) e identificar el tipo de estrategias alternativas que emplean, así como su entendimiento conceptual durante la solución de problemas de suma y resta. A lo largo del ciclo escolar ambos grupos avanzaron en la adquisición del conocimiento matemático, principalmente en lo referido a conocimiento numérico y solución de problemas aditivos. En promedio, se nota un avance significativo de la primera evaluación a la segunda, sucediendo que sólo los niños de alto rendimiento logran cubrir casi el 100% de los conocimientos esperados en todas las áreas exploradas. Las nociones más complejas, que pocos alumnos lograron dominar fueron el valor posicional y la composición aditiva del número. Las estrategias alternativas o inventadas por los niños resultaron para ellos muy efectivas en tareas de solución de problemas y operaciones (el uso de sus dedos, el empleo de materiales u objetos para hacer sus cálculos, recursos gráficos o cálculos mentales por aproximaciones) pero los docentes no toman en cuenta este saber ni lo aprovechan para anclar los procedimientos canónicos o algoritmos formales.

Un elemento importante en la evaluación del conocimiento matemático del niño fue la adaptación que se hizo del sistema de evaluación mediante rúbricas basado en Illinois Rubric for Mathematics (Illionois State Board of Education, 2006) que permitió identificar los niveles de desempeño en el conocimiento matemático, estratégico y de comunicación de resultados que mostraron los niños en el instrumento anterior. En el momento de resolver los problemas, los resultados indicaron que en su conocimiento matemático la mayoría de los niños tienen dificultades para comprender y aplicar los conceptos que implican la suma y la resta y principios matemáticos, como el valor posicional del número a pesar de poder resolver algoritmos de suma o de resta, principalmente en problemas de comparación o que impliquen la resta. En cuanto a su conocimiento estratégico llegaron a identificar los datos más relevantes, podían establecer las relaciones entre las variables con problemas sencillos. Pero a medida que se complicaban las relaciones en el tipo de problema, se les dificultaba aplicarlos correctamente, sólo mediante la oportunidad de varios intentos se logró su resolución correcta. En cuanto a la comunicación de los resultados llegaron a dar alguna explicación del proceso de solución empleado, pero la comunicación llegó a ser difícil de interpretar, a pesar de que incluyeron un diagrama casi completo con algunas explicaciones.

Respecto a las concepciones docentes, se encontraron coincidencias importantes con estudios previos (Monroy, 1998; Gil et al., 1991) donde aparecen las visiones de la docencia del sentido común mediante la cual se explican los procesos de aprendizaje de los alumnos en términos de un determinismo biológico o sociológico más que en términos de la influencia educativa y las situaciones didácticas planteadas en la escuela y el aula. En particular, resalta que los profesores no vinculan su práctica educativa con alguna perspectiva psicopedagógica en particular ni con alguna propuesta estratégica concreta para enseñar matemáticas, aunque sí mencionan términos como enseñar a través de problemas, aprendizaje cooperativo, aprendizaje activo o construcción del conocimiento. Consideran que aún cuando la enseñanza de las matemáticas debe basarse en la solución de problemas, la principal problemática en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas es que se centran más en una instrucción mecanicista, memorística dejando la parte conceptual de los conocimientos matemáticos. Aún cuando creen que la evaluación es útil para ayudar al niño, ésta debe reflejarse ante todo en una calificación numérica final.

Al contrastar las concepciones docentes con sus prácticas en el aula, se encontraron coincidencias y contradicciones. A pesar de su pretendido rechazo a la instrucción mecanicista y de apelar a la necesidad del razonamiento de parte del niño, el análisis del tipo de contrato didáctico, con base en sus prácticas educativas reales en el aula, pone de manifiesto que los dos maestros basan su instrucción en un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997, 2000) al adquirir principalmente la responsabilidad de enseñar, de provocar un aprendizaje en el alumno, pero predominan los contratos de reproducción formal, condicionamiento y ostensión. En el caso de la profesora, predomina una enseñanza basada en la reproducción y en la repetición constantes de ejercicios relacionados con la temática del conteo, la identificación de la cardinalidad y del reconocimiento del numeral, con ejercicios simples de adición y en mínima proporción de ejercicios de sustracción, con la práctica del algoritmo sustentada en un resultado basado en el conteo, sin atender el procedimiento de solución, y sin la contextualización de problemas aditivos, que no tienen presencia junto el algoritmo de la restas. En el caso del profesor de segundo grado, pasa la mayor parte del tiempo frente al grupo mostrando y explicando las nociones que implican la adición y la sustracción, así como sus respectivos algoritmos, y el funcionamiento de los principios del valor posicional y de la composición aditiva; se apoya en el uso de material u objetos concretos o en el diagrama de un esquema sobre el pizarrón.

En ambos casos, pero particularmente en el de la profesora, la instrucción se centra en la transmisión del saber, basado en la memorización y la mecanización del conteo, la lectura y escritura, así como en la práctica de los algoritmos formales, y sólo esporádicamente se apela al conocimiento previo del niño o se indagan sus preconcepciones. En contadas ocasiones, y básicamente en el caso del profesor, se plantean situaciones donde el niño emplea las matemáticas para pensar, en donde tiene que explicar y comunicar el porqué de sus resultados o en donde las situaciones problema sean algo más que ejercicios convencionales. No obstante, los profesores propugnan por lo que entienden como participación activa de los escolares, la profesora concibe el diseño de situaciones lúdicas, le interesa que su clase sea divertida mediante el empleo del juego y de materiales concretos y atractivos; el maestro promueve la participación del grupo y se apoya también con material concreto, además de que proporciona ayuda individualizada a los niños. Sin embargo, las clases se centran en la transmisión del contenido procedimental, ya que la enseñanza gira en torno al aprendizaje de procedimientos formales pero casi sin promover el entendimiento conceptual ni la autorregulación y contextualización de los mismos. Finalmente, de los contratos empleados en las clases de los maestros, el de ostensión muestra mayores posibilidades para que los alumnos se apropien de los conocimientos matemáticos que se intentan. Se concluye con algunas sugerencias de investigación educativa futura y con las implicaciones educativas más importantes del estudio.

Posteriormente se encuentra el listado de referencias y los anexos principales de la tesis, dentro de estos últimos se encuentra el instrumento del conocimiento matemático aplicado a los niños, la entrevista que se utilizó para evaluar las concepciones de los maestros, la rubrica para evaluar el conocimiento matemático en el niño, así como un ejemplo de transcripción y análisis de una practica didáctica o clase de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

CAPITULO. 1 La construcción del conocimiento matemático en el escolar: enfoques cognitivos y socioculturales

1.1 Piaget y seguidores

Para este trabajo es importante la comprensión de la evolución y desarrollo del conocimiento matemático en el niño, particularmente durante los primeros grados de educación primaria. La perspectiva psicogenética piagetiana ha sido una de las tradiciones de investigación más fructíferas en la explicación del presente objeto de estudio, por ello se revisan sus postulados centrales en este apartado.

Piaget (1967) y otros teóricos afines (Labinowicz, 1987; Ginsburg, 1977) postulan que el desarrollo de los niños transcurre a través de etapas cualitativamente distintas en relación con la adquisición y organización de su conocimiento. Piaget enfatiza las acciones físicas y la experiencia con el ambiente como básicas para el desarrollo cognoscitivo temprano, pero al mismo tiempo planteaba que por sí solas no eran suficientes, dada la importancia de los procesos de abstracción reflexiva que debían acompañar dichas acciones.

Algunos de los conceptos centrales de la teoría piagetiana que permiten explicar la construcción de la noción de número y el pensamiento lógico-matemático son:

- *Esquema* es el término que Piaget utiliza para referirse a los marcos de referencia cognoscitivo, verbal y conductual que se desarrollan para organizar el aprendizaje y para guiar la conducta. El desarrollo cognoscitivo ocurre no sólo por medio de la construcción de nuevos esquemas sino también por la diferenciación e integración de los esquemas existentes.

- La *adaptación* es el proceso continuo de interactuar con el ambiente y aprender a predecirlo y controlarlo. Piaget identificó dos mecanismos de adaptación fundamentales implicados en toda acción: la acomodación y la asimilación. La *acomodación* es el cambio en la respuesta ante el reconocimiento de que los esquemas existentes no son adecuados para lograr los propósitos adecuados. La *asimilación* es el proceso de responder a una situación estímulo usando los esquemas establecidos.

- El principio de *equilibración* es la suposición motivacional básica de Piaget que sostiene que las personas luchan por mantener un balance entre la asimilación y la acomodación conforme imponen orden y significado en sus experiencias.

De acuerdo a Good y Brophy (1997), se han analizado los cuatro conceptos primarios de Piaget para describir cómo se adapta el ser humano a su ambiente: se enfocan las situaciones con estructuras cognoscitivas compuestas de esquemas interrelacionados, asimilando ciertos aspectos en los esquemas existentes pero también acomodando aquellos esquemas por medio de la reestructuración o construyendo nuevos si es necesario, motivados por el principio de equilibración. La secuencia de la adquisición de esquemas es universal según esta teoría, pero los ritmos en los cuales se desarrollan los esquemas y las formas que adoptan, dependen de las diferencias ambientales, la adquisición de conocimiento por medio de la interacción social y factores de equilibrio únicos. El desarrollo de esquemas procede a través de cuatro periodos (etapas) cualitativamente distintos. De interés para esta tesis resultan los períodos *preoperatorio* y de las *operaciones concretas*, ya que es ahí donde se ubican los niños participantes de este estudio, y en las cuales ocurre la adquisición del conocimiento del número y sus operaciones básicas.

En el período preoperacional, se atestigua el desarrollo de la imaginación y la capacidad para retener imágenes en la memoria; el aprendizaje se vuelve más acumulativo y menos dependiente de la percepción inmediata y de la experiencia concreta. Los niños comienzan a pensar de manera lógica usando los esquemas cognoscitivos que representan sus experiencias previas con relaciones secuenciales o de causa y efecto para predecir los efectos de acciones potenciales. A pesar de sus ventajas, la lógica preoperacional es egocéntrica e inestable. Se afirma que los esquemas son inestables durante el periodo preoperacional debido a que los niños todavía no han aprendido a distinguir los aspectos invariables del ambiente de los aspectos que son variables y específicos de situaciones particulares. Se confunden con facilidad por los problemas de conservación los cuales requieren que se conserven aspectos invariables de objetos mientras manipulan aspectos variables.

El *período de las operaciones concretas*, que comienza alrededor de los siete años, los niños se vuelven operacionales. Sus esquemas cognoscitivos, en especial su pensamiento lógico y sus habilidades de solución de problemas, se organizan en operaciones concretas. En el caso del número una serie de operaciones concretas implica habilidades de clasificación para agrupar y reagrupar series de objetos, que como se vera más adelante, son fundamentales en la construcción del conocimiento matemático.

El pensamiento en el periodo de las *operaciones concretas es reversible*, de modo que los niños cuyas habilidades de clasificación se han vuelto operacionales pueden manejar preguntas complejas ante un cierto problema. Estos niños pueden invertir las combinaciones de subclases en clases más grandes y pueden invertir las divisiones de clases más grandes en subclases. Además, pueden realizar estas operaciones de manera mental, sin tener que mover los objetos.

Otra operación concreta es la *seriación:* la capacidad para colocar objetos en una serie que progresa de menos a más en longitud, peso o alguna propiedad común.

Conforme los niños se desarrollan a través de los años operacionales concretos, de manera gradual alcanzan *conceptos de conservación:* capacidades para distinguir los significados invariables de clases de objetos o acontecimientos, de los aspectos variables, los cuales pueden cambiar si los ejemplos son reemplazados o transformados. Estos problemas proporcionan bases para las operaciones concretas paralelas usadas para razonar acerca de problemas de conservación.

Una operación concreta más es la *negación* que implica el reconocimiento de que una acción puede ser negada o invertida para restablecer la situación original.

Otra operación concreta es la *identidad***:** el reconocimiento de que las sustancias físicas conservan su volumen o cantidad aunque cambien, divididas en partes o transformadas de alguna otra manera en su apariencia, en tanto que nada se agregue o quite.

Dentro de este orden, la operación concreta que ayuda a los niños a comprender este problema es la *compensación o reciprocidad* o reconocimiento de que un cambio en una dimensión es equilibrado por un cambio compensatorio o recíproco en otra dimensión.

Por lo tanto las operaciones concretas no sólo permiten a los niños solucionar problemas específicos, sino que también ayudan a los estudiantes a desarrollar habilidades para aprender a aprender y capacidades de razonamiento lógico que los ayudarán a hallar sentido a su experiencia general.

Piaget (1967) plantea que el niño construye tres tipos de conocimiento: el conocimiento del mundo físico, el conocimiento social y el conocimiento lógico-matemático, que están fuertemente interrelacionados y cada nuevo avance en el campo de alguno de ellos influye en el resto. De interés especial para este trabajo, el conocimiento lógico-matemático se refiere a la adquisición de los conceptos de número, espacio y tiempo, siendo el primero objeto de indagación en esta investigación, por lo cual se explicará su desarrollo.

Los niveles del pensamiento infantil en el concepto del número

Para Piaget el número es una síntesis de dos clases de relaciones que el niño crea entre los objetos. Una de esas es el *orden* y la otra la *inclusión de clases*. Al contar los objetos, la manera de asegurarse de no saltar unos o de contar otros más de una vez es ponerlos en orden; pero si la única acción mental sobre los objetos fuera el ordenamiento, entonces éstos no podrían cuantificarse puesto que el niño los consideraría uno por uno y no como un grupo de muchos al mismo tiempo. Para cuantificar objetos como grupo el niño tiene que ponerlos también en relación de inclusión de clases (Kamii, 1988). Así, el concepto de número implica las operaciones lógicas de seriación, clasificación y conservación de cantidad. La seriación es la habilidad cognitiva para seriar u ordenar las cosas en un continuo de acuerdo con alguna propiedad y se relaciona con el aspecto ordinal.

La clasificación implica distinguir las características de las cosas para separarlas y ordenarlas de acuerdo a esas características, lo cual se relaciona con el aspecto ordinal del número. La conservación de cantidad (el número de objetos en el conjunto que permanece constante, independientemente de la forma en que se coloquen u ordenen los objetos) es imprescindible para poder captar tanto el aspecto cardinal como ordinal del número.

Las investigaciones de Piaget revelan varias ideas lógicas que cuentan en la noción del número. Una vez que estas ideas lógicas se han desarrollado, el niño puede tratar las operaciones numéricas como parte de un sistema de operaciones afines.

Contar en voz alta es una de las primeras nociones de número aprendidas por los niños. Sin embargo, Piaget indica que esta habilidad puede fácilmente engañar a un adulto: el que un niño pueda contar no significa necesariamente que entiende los números. Es decir, que el conteo como una característica del número implica una serie de principios lógicos que están encubiertos cuando el niño procede a aplicar el conocimiento del número.

Como complemento a las citas anteriores, Labinowicz (1987) hace una breve descripción de categorías y conceptos que implican y que explican la adquisición del concepto de número de acuerdo a Piaget. Refiere que el concepto de número de los niños es consecuencia de una síntesis de las operaciones lógicas de la seriación y la inclusión de clases en un marco de trabajo integrado. Su concepto de número implica además las nociones de adición y multiplicación como consecuencias de la inclusión de clases y la correspondencia uno- a- uno. Los niños, más o menos a la edad de siete años, ganan una agilidad en el pensamiento que les permite invertir mentalmente las operaciones físicas. Este autor considera que esta reversibilidad les da acceso a la sustracción como la inversa de la adición, y a la división como la inversa de la multiplicación. Por ello no hay operación numérica que exista por sí sola. Toda operación se relaciona con un sistema de operaciones y de ideas lógicas. Esta síntesis es lo que Piaget identifica como *concepto de número*, el cual se puede considerar como indispensable para proseguir con el desarrollo y adquisición de más conocimientos matemáticos.

Por otra parte, Fischbein (1999) reconoce que Piaget es uno de los teóricos cuyas ideas han sido de las más utilizadas en la investigación en la educación matemática. Es muy reconocido por su concepción fundamental de que el estudiante no es un simple receptor del conocimiento. Por lo contrario, durante su progreso intelectual, el estudiante activa constructos matemáticos básicos y conceptos lógicos relacionados con el número, la geometría y constructos matemáticos complejos como la proporción. La organización activa de estos conceptos expresa la naturaleza de esquemas intelectuales característicos de cada periodo del desarrollo intelectual del estudiante. Lo más importante es que el surgimiento de esos esquemas estructurales depende tanto del nivel de madurez intelectual (expresando el respectivo estado intelectual) como de la experiencia del individuo.

Finalmente, en términos metodológicos, se puede decir que Piaget también contribuyó al entendimiento y exploración del pensamiento y aprendizaje infantil, mediante su método clínico, basado en observaciones y entrevistas flexibles hechas a los niños así como mediante la utilización de materiales físicos (Ginsburg, 1997). Estas aportaciones metodológicas a la exploración del pensamiento infantil han resultado de gran utilidad en la investigación educativa, y en el caso de la presente investigación se retomaron en la construcción y aplicación de las entrevistas de los niños y de los profesores participantes, tal como se verá en la sección correspondiente.

Sin embargo, en complemento a las aportaciones de esta teoría, diversos autores plantean que el conocimiento matemático y su enseñanza-aprendizaje en contextos escolares, no puede quedar explicado sólo en términos de cómo se desarrollan en el niño las nociones lógico-matemáticas al estilo de los planteamientos teóricos de Piaget y seguidores. También se habla de que para entender la construcción del conocimiento matemático deben considerarse otros principios lógicos, en la extensión del conocimiento del número, como es el principio del valor posicional y de composición aditiva, en el sistema de numeración decimal. Así como la aplicación de estos principios en la comprensión del concepto y el algoritmo de la suma y la resta, aplicados durante la solución de problemas aditivos. El siguiente apartado ilustra la importancia de estos principios y conocimientos matemáticos, y su aplicación en la solución de problemas, de acuerdo a los planteamientos de Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999).

1.2 Modelo de la instrucción guiada cognitivamente (Carpenter y colaboradores)

A partir de las ideas desarrolladas por este equipo de investigadores encabezados por Carpenter et al. (1999) se plantea que los niños pueden tener concepciones de la suma, sustracción, multiplicación y división, diferentes a las de los adultos, lo cual no quiere decir que sus concepciones sean “erróneas”. En efecto, sus concepciones tienen un gran sentido, ya que proveen las bases para el aprendizaje de conceptos y técnicas básicas en el entendimiento de estos conceptos, y Fuson (1988; 1992) es un antecedente de estas ideas.

En este enfoque se considera que la solución de problemas aritméticos es un eje que contribuye a explicar el conocimiento matemático de los niños. Por ejemplo, los problemas de sustracción pueden ser solucionados con diferentes estrategias como trazar esquemas de complemento, utilizar gráficos o materiales, cuando un adulto podría simplemente sólo substraer y resolverlos. De este modo, las diferentes soluciones que los niños pueden dar a los problemas, indican que hay distinciones entre diferentes tipos de problemas de adición y entre los diferentes tipos de problemas de sustracción, los cuales son reflejados en la forma que los niños los piensan y solucionan.

Al resolver cada problema, el niño modela directamente la acción o la relación descrita en el problema. Por ejemplo, al resolver un problema de adición, el niño puede hacer grupos de un tamaño específico y contar ambos grupos para llegar a la respuesta. De esta manera, la acción y las relaciones en un problema tienden a influenciar las estrategias que los niños utilizan por un período de tiempo, pero los niños mayores no siempre representan todas las cantidades en un problema con objetos físicos. Con el tiempo, las estrategias de modelamiento directo dan forma a más estrategias de conteo eficiente, que son generalmente formas más abstractas de modelamiento de un problema matemático. Los niños también pueden inventar sus propias estrategias para solucionar problemas y mostrar sus técnicas de manera que utilizan su propio conocimiento del número natural. Este aspecto es importante y será retomado en la presente investigación, dada la importancia de conocer las estrategias que emplean los niños y que no siempre corresponden al procedimiento algorítmico del adulto que el docente les está enseñando o que viene prescrito en el currículo.

Estos autores y otros grupos de investigación han encontrado que los niños no tienen sólo una estrategia particular que los lleva a la solución de un tipo de problema en particular. Incluso, si se les proporcionan oportunidades apropiadas y apoyo didáctico, los niños pueden construir por sí mismos estrategias que modelan la acción o las relaciones en un problema matemático.

En cuanto al papel de la enseñanza, Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef (1986) plantean el modelo denominado *Instrucción guiada cognitivamente*; afirman que los niños ingresan a la escuela con una gran cantidad de conocimiento informal o intuitivo de las matemáticas que puede servirles como base para desarrollar el entendimiento de las matemáticas del curriculum escolar primario. Dentro de la instrucción directa o formal específicamente sobre los números, los algoritmos o los procedimientos, los niños pueden construir soluciones viables a una variedad de problemas. Las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división pueden ser definidas en términos de esos procesos intuitivos de solución-problema y los procedimientos simbólicos pueden ser desarrollados como una extensión de ellos. A nuestro juicio esta idea empata con el principio básico de la teoría del aprendizaje significativo y de toda propuesta que se aprecie de constructivista: el aprendizaje ocurre de manera significativa sólo si se logra vincular lo que el alumno ya sabe con los nuevos contenidos por aprender.

Por otra parte, estos autores también consideran que para entender cómo es que los niños piensan la sobre la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, es necesario considerar las diferencias existentes entre los tipos y formas de problemas que se les presentan (Carpenter et al. 1999). Aunque hay diversas formas en que los problemas pueden distinguirse uno de otro, una de las formas más útiles de clasificarlos es centrarse sobre los tipos de acción o relaciones descritas en los problemas. Esta clasificación corresponde a la forma en que los niños piensan sobre los problemas. Como resultado, existe un esquema de solución diferente para cada problema, y que provee una forma única para identificar la relativa dificultad que tienen los diversos problemas.

Para los problemas de adición/sustracción, se pueden identificar cuatro clases de problemas: *unión, separación, parte-parte-todo,* y de *comparación* (ver ejemplos en tabla 1). El tamaño del número puede variar, así como el tema o el contexto de los problemas, sin embargo la estructura básica de los dos primeros tipos de problemas involucra una acción específica. En problemas de unión, los elementos son adheridos a un conjunto dado. En problemas de separación, los elementos son removidos de un conjunto dado. Los problemas parte-parte-todo involucran las relaciones entre un conjunto y dos subconjuntos. Los problemas de comparación involucran comparaciones entre dos conjuntos separados. Los problemas entre toda una clase involucran el mismo tipo de acción sobre cantidades o relaciones entre cantidades. Entre cada clase, distintos tipos de problemas pueden ser identificados dependiendo de cuál cantidad es la desconocida, o dónde se ubica la incógnita, de tal manera que pueden construirse un total de once tipos distintos de problemas.

Tabla 1. Ejemplos del tipo de problemas aditivos.

Tipo de problema	Expresión del problema
Unión	Karla tenía 3 muñecas, su tía le regalo 5 más. ¿Cuántas muñecas tiene?
Separación	En el partido de fútbol había 11 niños jugando. Dejaron de jugar 3. ¿Cuántos niños siguieron jugando?
Parte-parte-todo	Paty tiene 12 peces, Laura tiene 7. ¿Cuántos peces tienen las dos?
Comparación	Beto tiene 9 paletas. Jorge tiene 4 paletas. ¿Cuántas paletas más que Jorge tiene Beto?

En cuanto a las estrategias Carpenter et al. (1999) identifican un conjunto coherente de estrategias que los niños inventan para resolver problemas de adición y sustracción y cómo éstas evolucionan. Las distinciones respecto a los tipos de problemas se reflejan en los procesos de solución de los niños. En la mayoría de las estrategias básicas, los niños utilizan objetos físicos o figuras para modelar directamente la acción o relación descrita en cada problema. Con el transcurso del tiempo, las estrategias de los niños llegan a ser más abstractas y eficientes. Las estrategias de modelamiento directo son reemplazadas por estrategias más abstractas de conteo, las cuales pasan a ser reemplazadas con números. La expresión de números es un conocimiento matemático con operaciones y propiedades particulares que lo definen.

En este último punto Carpenter et al.(1999) afirman que las soluciones de los niños no están limitadas a las estrategias de modelamiento y conteo, los niños aprenden los números dentro y fuera de la escuela así como la aplicación de su conocimiento para solucionar problemas. Los niños aprenden más ciertas combinaciones numéricas ante otras, y frecuentemente utilizan un pequeño conjunto de acciones memorizadas para derivar soluciones para resolver problemas involucrando otras combinaciones numéricas. Los niños usualmente aprenden la estrategia de “dobles” (ejemplo: 4 + 4, 7 + 7) ante otras combinaciones, y frecuentemente aprenden sumas de 10 (ejemplo: 7 + 3, 4 + 6) con relativa facilidad. Lo anterior implica que no todos los problemas ni operaciones aritméticas que aparentemente tienen la misma estructura o se resuelven con el mismo procedimiento algorítmico tienen el mismo nivel de dificultad para los alumnos.

Las estrategias de conteo y de soluciones rutinarias son relativamente estrategias eficientes para solucionar problemas. Sin embargo, cuando se da la oportunidad para solucionar problemas con estrategias propias inventadas, los niños eventualmente aprenden una mayor cantidad de números. Los niños generalmente seleccionan estrategias que representan directamente la acción o las relaciones descritas en los problemas. Para algunos tipos de problemas, la acción puede ser más clara que en otros.

En cuanto a los niveles de desarrollo de las estrategias, existe una variación respecto a cómo es que los niños utilizan diferentes estrategias. Cuando ingresan al jardín de niños, muchos pueden solucionar algunos problemas utilizando estrategias de modelamiento directo cuando tienen poca o ninguna instrucción formal en adición o substracción. Algunos que entran en los primeros grados son capaces de utilizar estrategias de conteo, y un poco utilizar el recuerdo de números reales o consistentemente en soluciones rutinarias.

Algoritmos

Con respecto a este conocimiento de la adición y la sustracción como una extensión del conocimiento del número, de acuerdo a Carpenter et al. (1999) los algoritmos o procedimientos formales para calcular respuestas a problemas de adición y sustracción multidígitos, descansan sobre los conceptos numéricos con base diez. De acuerdo con estos autores, en el pasado esto había sido asumido como necesario para desarrollar conceptos numéricos con base diez antes que el niño pudiera sumar, restar, multiplicar y dividir números de dos y tres dígitos. Sin embargo, Carpenter et al, (1999) sustentan que este supuesto no tiene pruebas válidas desde la investigación. A la larga los niños que pueden contar, pueden solucionar problemas involucrando números de dos dígitos aún cuando tienen nociones limitadas de agrupación por diez, es decir, aún cuando no comprenden a cabalidad las nociones básicas del sistema decimal.

Más bien, los problemas con números de dos o tres dígitos actualmente proporcionan un contexto para que los niños puedan desarrollar la comprensión del sistema decimal de numeración. De lo anterior se sugiere que los niños que no tienen un entendimiento completo de la representación numérica con base diez pueden construir soluciones a problemas multidígitos que son útiles para ellos (Fuson, 1992). De esta forma cuando los niños hablan de soluciones alternativas a estos problemas y desarrollan formas eficientes para resolverlos, su entendimiento numérico con base-diez incrementa concurrentemente con su entendimiento de cómo aplicar ese conocimiento para solucionar problemas. Los niños adquieren las técnicas y conceptos requeridos para resolver problemas al mismo tiempo que los resuelven, y su entendimiento de conceptos base diez se incrementan progresivamente.

Por otra parte para Carpenter et al. (1999) las estrategias utilizadas por los niños para problemas que implican adición y sustracción con multidígitos son paralelas a las estrategias que utilizan con números pequeños. Los niños utilizan fichas para modelar directamente la acción en los problemas e inventan estrategias mentales que son esencialmente abstracciones de esas estrategias de modelamiento. Los niños al basarse en su experiencia de modelamiento con materiales base diez, pueden inventar sus propios algoritmos para sumar o restar sin los bloques. Estos mismos autores sugieren que en algunos casos, los algoritmos inventados por los niños son similares a los algoritmos estándares tradicionales enseñados en la escuela; sin embargo otros son totalmente diferentes.

Un tipo básico de algoritmo inventado por los alumnos involucra sucesivamente incrementar o decrementar sumas o diferencias parciales. Otro tipo de algoritmo inventado consiste en manejar las decenas y las unidades por separado y combinar con posterioridad los resultados. Combinar las decenas y las unidades por separado resulta familiar para los niños y les permite relacionar el procedimiento con los algoritmos formales de la suma y la resta. Algunos niños utilizan una combinación de incrementar y combinar decenas y unidades, particularmente cuando están combinando números de dos o tres dígitos.

El empleo de estas estrategias (Hallahan, Kauffman y Lloyd, 1999) en algoritmos formales y en otros algoritmos informales que los niños llegan a inventar fuera de la educación formal (Fuson, 1998) puede facilitar a los niños encontrar el resultado correcto de las operaciones, y aproximarlos en la comprensión del algoritmo convencional.

Hasta aquí, se ha mostrado la importancia de la solución de los diferentes tipos de problemas matemáticos y el empleo de las propias estrategias que el niño puede lograr desarrollar o derivar a partir del conocimiento matemático que éste ya trae consigo. Este es un aspecto fundamental que se retomará en la exploración de los procesos de construcción del conocimiento matemático en los escolares que participan en esta investigación y permitirá explicar el desarrollo de las habilidades esperadas en relación al planteamiento curricular de la propia SEP. Pero por otro lado, también es importante considerar las situaciones didácticas durante la enseñanza de los conceptos y los algoritmos matemáticos. Por ello, en el siguiente apartado se presenta el trabajo de Nunes y Bryant (1997) sustentado en los postulados teóricos de Jean Piaget y de la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud.

1.3 Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño (Nunes y Bryant).

En este apartado se describen aspectos relacionados con la competencia numérica, la adquisición del conteo, el sistema de numeración decimal y cómo cobran sentido la suma y la resta, de acuerdo a Nunes y Bryant (1997). La finalidad es ilustrar los posibles conocimientos previos que debe adquirir el niño antes de llegar al conocimiento formal de la suma y la resta durante la solución de problemas matemáticos. En el seguimiento del tópico se encontrarán planteamientos que vienen desde Piaget (1967), hasta algunos de sus seguidores como Ginsburg y Opper (1977), Labinowicz (1987) y Kamii (1988), quienes se centran en la explicación de los principios lógicos relativos al conocimiento matemático del niño.

Nunes y Bryan hablan de tres aspectos relativos a los conceptos matemáticos que consideran medulares para el aprendizaje de las matemáticas:

1) Los niños y las niñas tienen que aprender una gran cantidad de conocimientos sobre las relaciones lógicas.
2) Deben dominar, y después aplicar toda una serie de sistemas matemáticos convencionales.
3) Tienen que aprender ciertas relaciones matemáticas que originalmente consideraban vinculadas a situaciones específicas que tienen usos mucho más extensos, y principalmente deben coordinar estos tres tipos de aprendizaje diferentes.

En relación con el significado de la competencia numérica, para Nunes y Bryan ser competente en cuanto a números se refiere, implica poder entender relaciones numéricas y espaciales y expresarlas utilizando las convenciones de la propia cultura. Es decir, emplear los sistemas de numeración y de medición, así como términos tales como área y volumen, herramientas como calculadoras y transportadores, etc. Para estos autores, sólo quien conoce las reglas lógicas puede entender y realizar adecuadamente incluso las tareas matemáticas más elementales. Para entender qué hace un niño cuando cuenta objetos tiene que obedecer muchos principios lógicos. Principalmente, tiene que comprender la naturaleza ordinal de los números, es decir, que éstos se encuentran en un orden de magnitud ascendente. Los niños y las niñas también tienen que comprender la importancia del procedimiento que siguen cada vez que cuentan una serie de objetos, lo cual también implica una serie de reglas firmemente basadas en la lógica. Cada objeto debe de contarse una vez y sólo una. El número final (denominado cardinal) es tanto el número de objetos en ese conjunto como el número que relaciona dicho conjunto de objetos con otros.

Estas reglas sobre los números ordinales y cardinales son reglas lógicas por excelencia, y los niños y las niñas necesitan entenderlas todas para comprender qué significa contar. Este es el primer aspecto convencional del mundo de los números que conquistan los escolares.

Los niños y niñas pueden llegar a comprender qué cambios pueden modificar una cantidad y cuáles no, pero saber que la suma aumenta una cantidad y que la resta la reduce no es suficiente. Deben comprender también que estos cambios tienen efectos inversos: uno cancela al otro, de manera que $5 + 2 - 2 = 5$. Comprender esta regla es importante por varias razones, y una de ellas se relaciona con la denominada composición aditiva del número; y que por supuesto también tiene que ver con lo que Piaget y sus seguidores explican por reversibilidad, la suma y la resta se corresponden y se cancelan inversamente.

Al respecto de estos principios lógicos, Nunes y Bryant mencionan que existen requerimientos lógicos que deben respetarse al pensar en términos matemáticos, que los refieren como *invariantes* a la manera de Piaget (1967) y Vergnaud (1997); términos análogos a los que se mencionan más adelante en Carraher, Carraher y Schliemann (1991).

El término invariante no sólo abarca los principios lógicos que analizó Piaget (conservación, transitividad, etcétera); incluye también las relaciones que las convenciones incorporan a las matemáticas pero que, una vez incorporadas, deben permanecer constantes. Para tener aptitudes numéricas los niños y niñas necesitan aprender sistemas convencionales. Aprender matemáticas supone algo más que simplemente dominar las reglas lógicas. A un niño que entiende las reglas lógicas necesarias para relacionar procedimientos matemáticos, todavía deben enseñarle convenciones y también algunos procedimientos. Las técnicas matemáticas obedecen a las reglas de la lógica, pero van más allá. Las convenciones son necesarias para dominar las técnicas y proporcionan maneras de representar conceptos para así pensar en ellos y hablar de ellos. Por ejemplo, en nuestra cultura el sistema de numeración decimal ayuda a mantener el orden de las designaciones fijadas, mediante la compresión de esas convenciones para reagrupar las unidades de conteo sobre base diez. Es decir, para poder sumar unidades, formar decenas y así sucesivamente.

Nunes y Bryant (op.cit.) proponen que aprender estos inventos culturales incrementa la capacidad del niño o niña de respetar principios lógicos. Nuestro sistema de numeración tiene como característica principal la estructura decimal. Al hacer una comparación con otros sistemas de numeración, argumentan que a los niños y niñas les suceden dos cosas como resultado de aprender y comprender la estructura de nuestro sistema de numeración. Una es que obtienen una manera de contar potencialmente poderosa. Con una estructura decimal, o cualquier otro sistema de base, pueden crearse números, sin ella se les dificultaría o no podrían contar. El segundo es que se convierte en una herramienta del pensamiento, como un medio para resolver problemas que no podrán resolverse sin un sistema de numeración.

Este sistema de numeración sirve para realizar sumas, por ejemplo si se calcula la suma de dos juegos de canicas, se utilizaría el sistema de numeración para hacerlo. Simplemente entender que la suma es el producto de juntar ambos juegos de canicas no es suficiente: se necesita de un sistema de numeración para hacer la cuenta.

Por lo tanto, una vez que la niña o el niño han aprendido un sistema de numeración, obtiene una herramienta matemática para pensar. En nuestra cultura, los sistemas de numeración adoptan una forma oral y otra escrita. Ambas son sistemas con base diez. Una característica distintiva es que el sistema de numeración oral utiliza expresiones diferentes para indicar unidades, decenas, y centenas, mientras que el sistema escrito utiliza una posición de derecha a izquierda (el valor del dígito 5 en 50 y 500 es diferente aunque el dígito sea el mismo). Es decir, pareciera que se invierten las posiciones de valor cuando se intenta expresar un número escrito, la atención se centra a partir del número mayor para poderlo expresar verbalmente.

El tener diferentes maneras de representar los números tiene dos consecuencias. Una es que ambos sistemas tienen la misma secuencia lógica, se tiene más de una fuente de experiencia para aprender esos principios lógicos, por lo que sería aceptable iniciar por el más fácil de dominar y aprender. Situación que en el momento de la enseñanza es cuestionable, de acuerdo a cómo es que el profesor lo trata de enseñar y a cómo el niño lo podría entender mejor, aspectos que serán analizados y discutidos en al apartado de resultados, específicamente en los estudios de caso.

Hay que resaltar que el empleo de convenciones o de inventos culturales, como es el sistema decimal, para algunos autores (Carpenter, et al.1999), no parece ser tan indispensable para que el niño logre aplicar correctamente conocimientos o conceptos matemáticos correctamente. Esto se podrá corroborar al analizar casuísticamente los resultados de algunos alumnos e incluso también se observa en el análisis cuantitativo de los datos graficados de manera grupal, para los grupos de primer y segundo grado.

Hasta este punto se han considerado dos aspectos diferentes de los conceptos matemáticos. El primero fue lo que se denominó invariantes, la lógica del concepto. El segundo fueron las convenciones utilizadas en matemáticas; es decir los sistemas de signos que se emplean para hablar sobre las matemáticas y razonarlas. Ahora queda un tercer aspecto: las *situaciones en las que se utilizan las matemáticas*, donde se pretende que este sea el punto central donde los niños logren integrar su acervo de conocimientos matemáticos. Al respecto, en muchas ocasiones los niños no saben o se encuentran con la problemática de qué procedimiento utilizar para resolver un problema. Esto ante su dificultad por el desconocimiento y comprensión conceptual de la suma y la resta, y de su mismo algoritmo, así como de la aplicación de procedimientos a otras nuevas situaciones.

La dificultad de utilizar técnicas matemáticas como herramientas del pensamiento se deriva de la relación entre el dominio de los procedimientos generales y su utilización en situaciones específicas. Dominar un procedimiento general no suele indicar cuándo éste es una buena elección para resolver el problema. Por lo tanto, se tiene que comprender la situación del problema para razonarla matemáticamente. La diferencia entre aprender procedimientos generales y comprender situaciones particulares es vital en las matemáticas. En palabras de Nunes y Bryant, para utilizar las técnicas y herramientas matemáticas apropiadamente se tiene que saber si las invariantes relacionadas con ellos son los mismos en la situación dada. Es la relación entre las invariantes en el problema y las invariantes en la herramienta matemática lo que define si ésta será la adecuada para una situación dada. La compresión de diversas situaciones es lo que da sentido a los procedimientos matemáticos generales, ya que permite conocer lo que se significa mantener algo invariante.

Una vez que se han explicado los elementos que deben estar para que la niña y el niño logren el conocimiento matemático, enseguida se tratará el tema del conteo y sus implicaciones para el conocimiento matemático del niño.

El inicio del conteo

Gelman y Gallistel (1978) al tratar de ampliar los planteamientos piagetianos, realizaron una útil compilación de principios que los niños deben respetar cuando cuentan. Señalaron que existen tres principios para aprender a contar, específicamente en un solo conjunto de objetos.

1) Principio de *correspondencia biunívoca*. Al contar, deben contarse todos los objetos, y cada uno debe contarse una vez y sólo una vez.

2) Principio del *orden constante*. Cada vez que se cuenta deben pronunciarse palabras numéricas en el mismo orden.

3) Principio de *cardinalidad*. Contar se relaciona con la manera de decidir la cantidad real de objetos en el conjunto que se está contando, es decir, cómo saber si el total de objetos corresponde a la última palabra numérica pronunciada al contar.

4) Irrelevancia del orden. La relación entre un determinado objeto y cierto número concreto es irrelevante, ya que pueden contabilizarse en un lugar y posición diferente respecto del resto de los objetos. Lo importante es no repetir el número ni saltarse el orden numeral de la serie.

Estos requerimientos son indispensables. Un niño que no los respeta no cuenta apropiadamente; aquél que los respeta sí lo hace. Pero esto no quiere decir que el segundo niño comprenda lo que está haciendo.

Nunes y Bryant analizaron estos tres principios en niños en un rango de edad entre dos a seis años, en una serie de experimentos realizados por autores como Gelman y Gallistel, Gelman y Meck, Briars y Siegler y Fuson (en Nunes y Bryant, 1997) son autores reconocidos en este campo y ya han sido citados antes en esta tesis. Sus investigaciones se enfocan en el conocimiento del número y se enfocan en diferentes situaciones de conteo (por ejemplo, pedían que los niños contaran objetos en línea recta, en círculo, al azar, observar si un títere cuenta bien algunos objetos, etc.). En su análisis concluyeron que los niños de cuatro años pueden contar relativamente bien con ayuda, pero pueden o no contar bien sin ayuda. En contraste, la mayoría de los niños y niñas de cinco años parecen tener un buen dominio de los principios de contar y cabe esperar que digan el número de objetos contados en conjunto de 20 a 40 elementos. Sin embargo otra cuestión es cómo utilizan dicho conocimiento.

De los estudios anteriores se dedujo, a partir de la aplicación del conocimiento del conteo de los niños en dos situaciones (una de equivalencia y otra para comparar grupos) que los niños y niñas saben contar bastante bien a los cinco y seis años, pero no se dan cuenta de que el conteo es la mejor herramienta para formar conjuntos equivalentes. Es probable que no se den cuenta de que el conteo es una medida del tamaño del conjunto, si bien pueden contar y decir cuántos objetos se encuentran en el conjunto. Como veremos en la sección correspondiente, resultados similares fueron encontrados en esta tesis doctoral, específicamente en el reporte de los estudios de caso, donde se observan situaciones semejantes pero con niños de mayor edad.

De acuerdo con el análisis anterior, Nunes y Bryant proponen que si bien los niños y las niñas de corta edad tal vez no cuentan espontáneamente para comparar dos conjuntos, puede estimulárseles a hacerlo. Aunque pueden contar bien, estos niños y niñas no se dan cuenta de la importancia del conteo para comparar conjuntos u obtener conjuntos equivalentes. Más que en contar, se basan en otras estrategias o en otras indicaciones proporcionadas por la situación, tales como la longitud de las hileras (cuestión ya demostrada en las clásicas tareas piagetianas). Lo anterior ejemplifica que saben cómo pero no saben cuándo hacer algo. No se percatan de la importancia de contar porque no han relacionado el conteo con situaciones que le den significados distintos al de intentar averiguar "¿cuántos?". En otras palabras, aprendieron un procedimiento que tiene el potencial de utilizarse en muchas situaciones pero le atribuyen un significado limitado. En el caso de los que saben cómo contar, pero no se dan cuenta de su importancia, el desarrollo conceptual incluiría aprender nuevas situaciones en las que el conteo sea una buena estrategia.

En este sentido, existen una diversidad de principios y operaciones lógicas que implican el conocimiento del número (Piaget, 1967; Gelman y Gallistel, 1978; Nunes y Bryant, 1997). Sin embargo, no todos estos y más principios pueden estar en el conocimiento numérico de todos los niños, se entendería que el número es un concepto polimorfo, capaz de asumir y promover múltiples sentidos: pese a que el uso particular de un número definido no puede a la vez ser cardinal y ordinal, operador, producto del conteo, algebraico, etcétera es posible utilizar los números de acuerdo a esas diferentes perspectivas. Por tanto, los niños no construyen una noción ni una práctica únicas del número, sino nociones y prácticas múltiples, que a su vez se relaciona entre si de muchos modos Scheuer (2005).

Resulta evidente que las actividades didácticas para niños y niñas de esta edad deben implicar su participación en situaciones variadas en las que contar sea una buena estrategia para resolver problemas y en las que se pueda hacer inferencias basándose en el conteo. Se espera que la utilización de esta estrategia general en situaciones más positivas les permita hacer del número algo más significativo para ellos. En otras palabras, la enseñanza a esta edad podría tener por objeto que el contar se convirtiera en una herramienta para razonar.

Comprensión de los sistemas de numeración

En este orden de explicación de los conocimientos matemáticos, Nunes y Bryant, describen que una de las ventajas es que la mayoría de los sistemas de conteo se encuentran organizados de forma tal que decir las palabras numéricas en un orden fijo se vuelve una tarea relativamente sencilla. Cuando se entiende la lógica de un sistema de numeración, se pueden formar una diversidad de números.

Una segunda ventaja es que una estructura de base también puede utilizarse para organizar un sistema de notación. Cuando se utiliza el valor posicional para escribir números, el dígito a la derecha representa unidades, el dígito a la izquierda de este representa decenas, y así sucesivamente. En otras palabras, la propia estructura utilizada para contar se vuelve el eje de organización para escribir números.Una tercera ventaja es que los cálculos basados en la notación escrita se vuelven económicos y eficaces.

Sin embargo, para poder sacar provecho de este sistema es necesario comprender su estructura. Debemos ser capaces de visualizar que pueden crearse números grandes combinando números más pequeños. Cualquier número *n* puede descomponerse en otros dos números procedentes en la lista ordinal de números, de tal forma que su suma sea exactamente *n.* Esta propiedad o invariante de los números se conoce como *composición aditiva del número,* propiedad esencial de los sistemas de numeración de base.

En la explicación de las invariantes de los sistemas de numeración de base (conceptos de unidad y composición aditiva) se dice que un sistema de numeración de base implica contar unidades de tamaños diferentes. En nuestro sistema de numeración, por ejemplo contamos unidades, decenas, centenas, etc. Se trata de unidades de diferentes tamaños que pueden agruparse en diferentes clases: la clase de las unidades, la clase de los millares, la clase de los millones, etc. Debido a que utilizamos un sistema de base diez, cuando tenemos diez unidades de cualquier tamaño las reagrupamos en unidades de orden superior. Contar unidades de diferentes tamaños no es privativo del conteo de objetos. Los sistemas de medición plantean el mismo problema de los tamaños de las unidades (dinero, longitudes).

Para comprender del todo un sistema de medición, se necesita entender las equivalencias dentro del sistema. El tamaño de las unidades es importante tanto para contar como para ordenar cantidades.

Conteo y dominio de las propiedades del sistema de numeración

De acuerdo con Nunes y Bryant, las relaciones ya señaladas son una parte elemental del sistema de numeración. Hace tiempo que los maestros de matemáticas se dieron cuenta de que es importante que los niños dominen la estructura del sistema decimal para poderlo utilizar al hacer cuentas. Sin embargo, no hace mucho que los psicólogos empezaron a investigar el origen de los conceptos que intervienen en el dominio de esta estructura. Si bien se realizaron algunas investigaciones sobre la enseñanza de esta estructura y sus consecuencias en la habilidad de los niños y niñas para sumar y restar números de varios dígitos (Resnik, 1982, y Hall et al., 1985; citados en Nunes y Bryant, 1997) se sabía muy poco sobre el comienzo de esta comprensión. En la actualidad, varios estudios como los de Carraher, Carraher y Schliemann, (1991) han explorado la comprensión infantil de unidades y composición aditiva en el contexto del manejo del dinero.

A partir de sus propias investigaciones y de otras más, Nunes y Bryant deducen que ni sólo contar ni aprender a leer y escribir números son experiencias decisivas para aprender la estructura de base diez y argumentan que es mucho más importante que los niños aprendan sobre la suma. Es decir, que estos conocimientos adquiridos deben llevarse o integrarse a otros conocimientos matemáticos más complejos.

Concluyen que si bien el sencillo conteo mediante correspondencia biunívoca es un principio muy importante, no es suficiente para que los niños y niñas comprendan nuestro sistema de numeración. En un sistema de numeración de base, la composición aditiva del número mediante unidades de diferente valor es un concepto fundamental. Si no se entiende, es difícil que los escolares aprendan a leer y escribir números. La composición aditiva, a su vez, parece depender más de la comprensión infantil de la suma que de la correspondencia biunívoca. Contar no es suficiente para que los niños y niñas comprendan el sistema de numeración.

Parece haber cierto orden en cómo evoluciona la comprensión infantil del número. La utilización de la estrategia de conteo en la suma antecede a la comprensión de las propiedades del sistema de numeración, lo cual sirve como base para que aprendan a leer y escribir números. A los niños y niñas se les pueden plantear problemas de adición en los que un sumando no sea visible. La necesidad de solucionar dichos problemas puede inducirlos a descubrir estrategias más eficaces para comprender el sistema de numeración.

Finalmente, en cuanto al valor posicional, se considera como un concepto importante en el desarrollo del pensamiento aritmético, que para ser comprendido y manejado adecuadamente requiere de un largo y complejo proceso (Cortina, 1997). La comprensión y manejo del concepto implica una diversidad de habilidades que participan en su construcción, que incluyen (con base en el análisis de Cortina, ob. cit.): la elaboración de hipótesis sobre las posibles reglas de armado del sistema de numeración escrito (Lerner, y Sadovsky,1994); la habilidad para concebir y operar con agrupamientos (Bernarz y Janvier, 1988); el reconocimiento, en colecciones de objetos, de los valores representados por los dígitos de un numeral (Ross, 1990); el uso de unidades compuestas para contar (Steffe, Cobb, y Glasersfeld, 1988); además de otros conocimientos numéricos como el hacer agrupamientos a partir de otros y el reconocer " distancias" entre cantidades (Jones, Thornton, y Putt, 1996).

De manera específica, esta investigación se limitó a explorar actividades relacionadas con el principio del valor posicional, y la composición aditiva del número, donde se explica el entendimiento o las dificultades que llegan a presentar los niños de los estudios de caso en este conocimiento. En esta evaluación, se aplican una serie de actividades que evalúan este conocimiento de manera formal e informal, en donde de acuerdo a su comprensión y operatividad se les ubica entre los niveles de 1 a 3.

Considerando este entendimiento del sistema decimal como base de los conceptos y algoritmos de la suma y la resta. Lo anterior da pauta acerca de cómo cobran sentido la adición y la substracción en el conocimiento matemático del niño y la niña, cuestión que se describe enseguida.

Cómo cobran sentido la adición y la substracción

A los niños y las niñas suele enseñárseles la suma y la resta mucho antes que otras operaciones aritméticas; no obstante, hay mucho que pueden aprender y comprender de estas dos partes básicas de las matemáticas. Por supuesto que tendrán que conquistar ciertos procedimientos, tales como llevar y pedir prestado en las sumas y las restas con varios dígitos, y ciertamente tendrán que aprender una serie de hechos (tales como que 3 + 2 = 5) que les ayudarán cuando tengan que sumar o restar mentalmente o sobre papel. Pero hay mucho más que aprender; la suma y la resta son conceptos bastante complicados, y hasta que los escolares no comprendan la base conceptual de esas operaciones no podrán utilizar los procedimientos que se les enseñan o los hechos que captan en la escuela. Este tema ha recibido mucho menos atención y ahora el foco más importante de la investigación de la suma y la resta es la resolución de problemas y la comprensión conceptual básica de estas dos operaciones.

En las escuelas regulares de educación primaria existe la preocupación de los profesores por enseñar los algoritmos de la suma y la resta de manera aislada, sin integrarlos en un contexto educativo que considere la solución de distintos tipos de problemas matemáticos. Problemática que parece no ser exclusiva en la educación elemental en México, pues también ha tenido sus dificultades y fracasos en los Estados Unidos de América (Gill, Anshton y Algina, 2004). En este trabajo se ha encontrado que si bien los profesores intentan integrar lo anterior en las tareas de solución de problemas, existen algunas inconsistencias y restricciones que dificultan el aprendizaje en sus alumnos, como es el momento de enseñar el conocimiento del sistema decimal y su integración o no en las operaciones de la suma y la resta.

De esta manera, recapitulando lo que se ha venido revisando: invariantes, convenciones y situaciones, se puede decir que éstos son factores que resultan fundamentales en la adquisición de los conceptos matemáticos.

Ahora bien, Nunes y Bryant (1997) afirman que aunque los niños resuelvan problemas de *cambio* en los que se suma o se resta otra cantidad, no necesariamente significa que hayan dominado los conceptos de suma y resta. Existen otras situaciones en la suma y la resta que representan distintos niveles de dificultad para los niños y niñas pequeñas. Se trata de las situaciones parte - todo y las situaciones comparativas. Que son similares a los tipos de problemas que se plantean en la sección de Carpenter et al. (1999).

- Los problemas de *cambio* suponen dos tipos de significados del número: medidas estáticas y transformaciones. En la situación “Juan tenía tres gatos. Después Tomás le dio cinco gatos más. Ahora Juan tiene ocho gatos”, tres y ocho se refieren a medidas estáticas y el cinco se refiere a un cambio o transformación.

- En las situaciones *parte-todo* los números se refieren a conjuntos de objetos que se continúan; no se transforma ninguna cantidad. Un ejemplo sería: “Cinco de los peces que Martín tiene en su pecera son amarillos y tres son rojos. ¿Cuántos peces tiene en total en su pecera?

- En el tercer tipo de situación a los escolares se les pide que cuantifiquen *comparaciones*. Por ejemplo: "Juan tiene ocho escarabajos y Tomas tiene cinco. ¿Quién tiene más escarabajos?" (una pregunta fácil). "¿Cuántos escarabajos tiene Juan más que Tomás?" (una pregunta difícil).

La dificultad de un problema no radica únicamente en la situación sino también en las invariantes de la suma y la resta o las operaciones del pensamiento (Vergnaud, 1982, cit. en Nunes y Bryant, 1997) que el niño debe comprender para resolverlo. Por ejemplo, un tipo de problema que resulta aún más difícil es cuando en un problema aditivo falta uno de los sumandos, aquí las invariantes involucradas exigirían posiblemente una resta o una estrategia de complemento para buscar el número faltante, esto dependería del grado de conocimiento matemático del niño o niña.

Los problemas en los que falta un sumando pueden resolverse de distintas maneras. Una es utilizar bloques o los dedos, en los que primero se cuentan un conjunto con dedos y después se agregan más dedos hasta completar el otro conjunto.

Otra manera de resolver los problemas sin sumando es mediante la resta, estrategia que depende de que el niño entienda la resta como lo inverso de la suma. Ejemplo: restar el estado inicial al estado final. Por supuesto, para hacer esto se necesita comprender una invariante de la suma/resta (la relación inversa) y también realizar una operación mental (es decir, aplicar esta transformación inversa) antes de calcular el resultado de la operación aritmética.

Al resumir los resultados acertados de niños y niñas al solucionar distintos tipos de problemas en los que se requiere la operación aritmética de suma y resta, los autores encontraron que los resultados sustentan claramente el supuesto teórico de que el análisis de las situaciones y las invariantes utilizadas para resolver un problema influyen conjuntamente en la dificultad de un problema. Pero ésos no son los únicos factores determinantes para que las niñas y niños pequeños realicen exitosamente las tareas de suma y resta. También es importante saber qué recursos están utilizando para llevar a la práctica los procedimientos de cálculo, es decir, qué herramientas del pensamiento o sistemas de signos están a su alcance.

La utilización de los dedos y de objetos para ayudarse a calcular es importante antes de la enseñanza formal y sigue siéndolo durante los primeros años escolares del niño o niña.

En un análisis que realizaron Nunes y Schliemann y Carraher (1993) del papel de los sistemas de signos utilizados para hacer cálculos cuando se pedía a niñas y niños brasileños de primero y segundo de primaria que resolvieran ejercicios de suma y resta con números mayores de diez. En este estudio concluyeron que la utilización de números escritos y algoritmos basados en números escritos parecía ser un apoyo menos eficaz para encontrar una solución que los objetos manipulables (dedos, marcas sobre una hoja) o los números orales, situación que también se relaciona con los resultados encontrados con los niños y niñas de esta investigación.

Después de un análisis general de los conceptos de suma y resta Nunes y Bryant, (1997) proponen que con el fin de analizar los conceptos del niño, se necesita tomar en cuenta simultáneamente las situaciones descritas en los problemas, las operaciones mentales o las invariantes necesarias para resolver problemas particulares, así como los sistemas de signos que el alumno esté utilizando al resolver un problema. Por lo tanto, la comprensión infantil de la suma y la resta evoluciona a medida que el alumno domina más situaciones de problemas al emplear una mayor variedad de procedimientos que utilizan diferentes invariantes y una variedad de sistemas de signos. En este caso se refiere a cuando el niño o la niña adquieren de manera general un conjunto de significados matemáticos y de estrategias que pueden implicar la suma y la resta.

¿A qué podrían referirse los números en distintas situaciones aditivas y sustractivas? Cuando los números se refieren a objetos en una situación concreta, tienen mucho más sentido para niños pequeños que cuando no se refieren a algo concreto. Hughes (1986, cit. en Nunes y Bryant, 1997) documentó la dificultad de los más pequeños para comprender sumas y restas sencillas cuando se les presentan números que no se refieren a situaciones que les puedan dar sentido.

Dos tipos de pruebas denotan que es importante considerar las medidas estáticas y las transformaciones como algo distinto, al menos desde el punto de vista de la comprensión incipiente de los niños sobre los conceptos matemáticos. El primer tipo tiene que ver con cómo comprende el niño o niña las invariantes de la suma en el contexto de estos distintos significados del número. El segundo tipo de prueba se relaciona con el índice de respuestas correctas que los niños proporcionan a problemas con una transformación sustractiva, en contraste con los problemas sobre medidas estáticas *parte todo* cuando conocen el *todo* y una de las partes.

Es necesario distinguir entre el número como magnitud estática y el número como magnitud de transformación al estudiar el desarrollo conceptual en los niños, dado que la propiedad de la conmutatividad de la suma se reconoce con más rapidez cuando los números son magnitudes de conjuntos que cuando son magnitudes de transformaciones.

Por último, los niños crean diversas estrategias para trabajar con números, pero éstas inicialmente parecen relacionarse con diferentes situaciones. Utilizan la correspondencia biunívoca para formar conjuntos equivalentes. Los escolares usan la suma y la resta en situaciones que implican números como medida del tamaño del conjunto y números como transformaciones. Sin embargo, no utilizan ninguna de estas operaciones cuando tienen que tratar con números como medida de la relación estática entre dos conjuntos: los niños pequeños no pueden resolver problemas de comparación que impliquen una relación estática entre conjuntos. Sin embargo, puede inducírseles fácilmente a coordinar las estrategias que ya conocen para así aprender a resolver problemas de comparación. Éste parece ser el último paso en la comprensión de las situaciones de la suma y resta con números naturales; que más adelante se perfeccionarán debido a su uso.

Hasta esta parte, con base a los planteamientos de Nunes y Bryant, se ha podido analizar el conocimiento matemático, que trata de integrar el conteo, la numeración, el sistema de numeración decimal, la suma y la resta, y la solución de problemas aditivos con base a tres conceptos teóricos: invariantes, convenciones y situaciones. En los que se destaca que la variación de situaciones puede llevar a una mejor aplicación de procedimientos y conceptos matemáticos más amplios, que el simple hecho de que el niño sólo repita o memorice números.

Los trabajos anteriores prácticamente cubren lo correspondiente a las corrientes de la psicología psicogénetica y la psicología cognoscitiva que se han enfocado más en la explicación psicológica de cómo se da o evoluciona el aprendizaje de las matemáticas en los niños.

Sin embargo, a manera de síntesis y de acuerdo con Flores (2003) el niño al inicio de su desarrollo comprende los principios matemáticos implícitos en la actividad de contar y en el manejo del sistema numérico, posteriormente aparecen los relacionados con la suma y la resta. Al respecto Vergnaud (1997ª, 2000) y Nunes y Bryant (1997) afirman, y resumido por Flores (2003) que:

Para la actividad de contar:

- La correspondencia: saber que a cada elemento de un conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.
- El principio de orden constante: saber que cada vez que cuenta se deben pronunciar los nombres asignados a los números en el mismo orden.
- La cardinalidad: saber que el valor de un conjunto corresponde al del último número que se contó.
- La conservación: saber que el cardinal de un conjunto de objetos sólo puede cambiarse mediante la suma y la resta.

Para la comprensión del sistema del sistema de numeración decimal:

- El concepto de unidad: Entender como se agrupan las unidades en clases con distinta denominación (unidades, decenas, centenas, etc.) y entender el valor relativo de las unidades.
- La composición aditiva del número: saber que cualquier número "*n*" puede descomponerse en otros números precedentes siempre y cuando su suma sea exactamente el número inicial.

Para la comprensión de situaciones de adición y sustracción:

- Números naturales.
- Números enteros positivos y negativos.
- Suma.
- Complemento.
- Diferencia.
- Las relaciones de comparación.
- Las relaciones de reciprocidad y de inversión.

- La propiedad conmutativa de la suma: comprender que el orden de los sumandos no altera el producto.
- La propiedad asociativa: comprender que se puede calcular la suma de tres objetos A, B o C agrupando A y B, y agregando C o agrupando A y C y agregando B.
- La propiedad transitiva: comprender que si existe una relación entre un elemento *"x"* y un elemento "*y*" por una parte, y un elemento "z", existe la misma relación entre "*y*" y "z"
- La noción de elemento neutro: Comprender que el cero tiene un valor nulo y que la suma y la resta del cero a otro número vuelve a dar el mismo número.

Enseguida dentro del enfoque sociocultural, se trata de explicar las dificultades y procesos que engloban el aprendizaje de las matemáticas considerando el triángulo interactivo, revisando con posterioridad diversos trabajos que ubican la enseñanza de las matemáticas más como un proceso situado dentro de un contexto específico, vinculado a prácticas sociales y escolares relevantes y mediado por los otros.

1. 4. La perspectiva Sociocultural: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como proceso de construcción socialmente mediado.

Factores y procesos psicológicos implicados en el aprendizaje

Con el propósito de ilustrar el enfoque sociocultural, se presentan algunas propuestas teóricas que consideran más los aspectos contextuales y sociales donde surge el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Onrubia, Rochera, y Barberá (2001) proponen que en el conocimiento matemático se pueden considerar aspectos abstractos y concretos, uno al ser representados a un nivel cognoscente y el otro al ser aplicados en el mundo real. Esta dualidad hace que se pueda hablar de dos tipos distintos de significados relacionados con el contenido matemático; uno interno, formal, puramente matemático, y otro externo, referencial, que vincula el sistema formal de las matemáticas con algunos aspectos del mundo real. Estos autores consideran que la coordinación de estos dos significados resulta compleja y puede ser un obstáculo central en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo anterior busca explicar lo que actualmente puede ocurrir dentro del aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en los momentos en que la maestra o el maestro tratan de enseñar contenidos específicos de matemáticas, que podrían ser descritos mediante aspectos contextuales y de interacción entre los actores escolares (profesores y alumnos) y no sólo en referencia a los aspectos cognitivos del aprendizaje individual en el alumno.

En este sentido, de acuerdo con Onrubia et al. (2001) las capacidades implicadas en la pericia matemática incluyen tanto el dominio de una amplia base de conocimiento declarativo y de un conjunto igualmente amplio de procedimientos específicos, como la posibilidad de emplear de manera estratégica y de controlar metacognitivamente ambos tipos de conocimiento, y también una determinada actitud, inclinación y sensibilidad hacia las matemáticas. Pero esto no puede explicarse al margen del contexto educativo, del currículo, de las prácticas educativas o del contacto con el profesor.

Es necesario asegurar el aprendizaje del niño contemplando el trabajo escolar de aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos. En particular (Onrubia et al., 2001):

- El conocimiento declarativo en matemáticas incluye el conocimiento de hechos (como una colección de eventos ordenada en función de un criterio), conceptos y sistemas conceptuales (que describen regularidades o relaciones entre hechos y que se designan mediante signos o símbolos) y principios (teorías o modelos explicativos o de naturaleza descriptiva normalmente basados en relaciones formales, lógicas y de causalidad) de carácter matemático. Por lo tanto, no se limita a un conjunto de definiciones y de teoremas al margen del proceso de demostración que los sustenta, sino que debe extenderse también a los procesos o caminos que conducen a estos enunciados o formulaciones finales.

- El conocimiento procedimental matemático supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones de las que se obtiene un resultado acorde a un objetivo concreto. El conocimiento procedimental, a diferencia del declarativo, se caracteriza por la acción (saber hacer) frente a la enunciación. Tradicionalmente se suelen distinguir en el área matemática dos grandes tipos de procedimientos: los algorítmicos y los heurísticos. Mientras que los primeros llevan a una solución adecuada si se siguen todos los pasos prescritos, los segundos no garantizan una correcta solución, pero guían de manera sistemática el proceso para llegar a ella.

.

- El conocimiento condicional supone la aplicación intencional y consciente del conocimiento declarativo y procedimental en relación con las condiciones en las que se desarrolla la acción.

Lograr la vinculación y aseguramiento de estos tres tipos de conocimientos al enseñar matemáticas en los niños, se podría asegurar las bases para un mejor aprendizaje matemático, en este caso basado en una comprensión conceptual de la suma y la resta y no solo de los algoritmos. Sin embargo, sería necesario tratar de reconocer cómo se están dando estos procesos durante la práctica escolar, y tratar de detectar aspectos favorables y otros que pudieran estar afectando el aprendizaje y la enseñanza. En relación a los aspectos afectivos, relacionales y motivacionales, se plantea que aprender matemáticas abarca más que el aprendizaje de conceptos y procedimientos y su aplicación. Supone también el desarrollo de una cierta disposición hacia las matemáticas, que incluye tanto un conjunto de actitudes como una sensibilidad hacia el desarrollo de las actuaciones apropiadas y una inclinación y motivación hacía este ámbito de conocimiento. El desarrollo de tal disposición, estará en estrecha relación con el tipo de instrucción que surja durante la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Actualmente hay un alto grado de consenso respecto a que el aprendizaje escolar es un *proceso de construcción socialmente mediado*. En el caso particular de las matemáticas, esto significa que el conjunto de elementos cognitivos y afectivos a los que se acaba de referir como implicados en el uso experto de las matemáticas se adquieren a través de ese proceso de construcción social y culturalmente mediado por los otros, principalmente por aquellos que “saben más”. Por lo anterior es necesario integrar, durante la instrucción, prácticas educativas en las que se relacionen aspectos formales y de la vida real, destacando su utilidad dentro del contexto social del niño y promover mecanismos adecuados de mediación y ayudas educativas efectivas de parte del agente educativo.

Al respecto, dos aspectos merecen resaltarse en relación con esta construcción progresiva y negociada del conocimiento matemático. El primero es la importancia de los conocimientos informales o previos de los alumnos, desde los que el profesor debe plantear el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta base de conocimientos incluye nociones, habilidades y estrategias relativas a un amplio conjunto de aspectos, desde la numeración y el conteo hasta la resolución de problemas aritméticos, la organización y representación del espacio o la proporción pasando por la planificación y la toma de decisiones sobre precios o compras. El segundo aspecto, relacionado con el anterior, es la indicación de que la mejor manera de aprender matemáticas en la enseñanza obligatoria es en un contexto relevante de aplicación y toma de decisiones específicas, como es la solución de problemas matemáticos. En este entorno, y gracias a la ayuda del profesor, el alumno puede ir progresando, en un proceso gradual que parte de sus conocimientos previos y avanza hacia niveles cada vez más elevados de complejidad y abstracción.

De acuerdo a lo anterior en la enseñanza de las matemáticas durante los primeros grados escolares, es necesario que el profesor conozca cuáles son los conocimientos y habilidades con los que cuenta el niño. Y sin duda, hasta el momento la mejor forma de enseñar matemáticas es enfocarse en la práctica y solución de problemas matemáticos, en la medida qué estos cumplan los requisitos de una verdadera situación-problema y no se restrinjan a resolver de forma mecánica ejercicios rutinarios.

Algunos criterios generales para la enseñanza de las matemáticas (Onrubia et al, 2001)

1. Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.
2. Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas.
3. Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial.
4. Activar y emplear como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.
5. Avanzar de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización.
6. Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas de alto nivel.
7. Secuenciar adecuadamente los contenidos matemáticos, asegurando la interrelación entre las distintas capacidades implicadas en la adquisición del conocimiento matemático.
8. Apoyar sistemáticamente la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos.
9. Ofrecer a los alumnos oportunidades suficientes de <<hablar matemáticas>> en el aula.

10. Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje de las matemáticas.

En este planteamiento de las propuestas socioculturales, con un estilo más de aprendizaje situado se ubica el trabajo de Lave (1991) quien discute la importancia de lo que se enseña en las aulas en términos de lo que el niño aprende o necesita en la vida cotidiana. Parte de una visión de las matemáticas donde éstas no se conciben como la realización de tareas cognitivas abstractas, sino como un saber cultural, un discurso y lenguaje profundamente vinculado con actividades socialmente organizadas y sistemas de significado. Estos trabajos parten de un creciente interés en los estudios etnográficos de las matemáticas cotidianas. En esta perspectiva se ha arribado a una especie de entendimiento sociológico de las matemáticas, el cual está teñido por un análisis que incluye lo que ocurre no sólo en la escuela, sino en los hogares o lugares de trabajo, y los aspectos relacionales que estructuran el conocimiento y aprendizaje de las matemáticas a través de toda la vida de un individuo.

Lave (1991) critica la visión de las matemáticas como el tipo de pensamiento abstracto a lo largo de una tradición de investigación en psicología cognitiva llamada "solución de problemas":

> "La solución de problemas es desafortunadamente un término frecuentemente utilizado sinónimamente con cognición, para describir, pero no para contextualizar tales actividades como prácticas aritméticas..." (Lave, Murtaugh y de la Rocha, 1984, p. 94).

En particular, Lave et al. (1984) sugieren que la palabra "problemas" propone ciertas ideas sobre las matemáticas y la cognición: aquellas situaciones para el razonamiento matemático que se presentan por sí mismas como problemas estructurados; estos problemas pueden ser solucionados para extraer información matemática desde una situación y un escenario hasta los cálculos necesarios; los resultados de esos cálculos pueden ser interpretados como soluciones para tales problemas. Lave argumenta que el razonamiento matemático debe ser visto como vinculado con las actividades entre las cuales éste toma lugar. Su conclusión central es que las actividades cotidianas de la vida no presentan problemas de corte claro en el sentido requerido por la teoría de solución de problemas de la cognición.

Lave piensa que la unidad de análisis en el estudio del aprendizaje o construcción de conocimiento matemático, no es el conocimiento abstracto, sino la actividad estructurada y mediada. Esta autora afirma que la actividad, incluyendo la cognición, se organiza socialmente y tiene un fuerte carácter cultural. Describe que la gente ciertamente conoce cosas, pero ese conocimiento es para ser entendido como un atributo de las variedades de actividades estructuradas que la persona es capaz de utilizar con propósitos particulares, socialmente organizadas y ubicadas en escenarios específicos. Además, el conocimiento está localizado en las relaciones involucradas entre las personas y los escenarios en los cuales conducen sus actividades.

En sus investigaciones; algunas realizadas en los supermercados Lave et al. (1984), observa que los consumidores pueden llegar a resultados correctos más eficientemente empleando sus propios recursos, a diferencia de cuando tratan de resolver problemas formales en un formato escolar, por lo que concluye que la teoría de la solución de los problemas escolares no puede ser aplicada tal cual en la vida cotidiana.

Lave procedió a documentar lo que llama el vocabulario descriptivo en términos relacionales respecto a la solución de problemas matemáticos. Este vocabulario descriptivo tiene dos propiedades: es dialéctico y opera en dos niveles. Cuando se pretende enseñar matemáticas dentro del aula, estas prácticas tienen un lenguaje particular, incluyendo términos y conceptos, que sólo pueden ser aplicables predominantemente en ese contexto del aula, pero resultan de poca utilidad en la vida diaria.

Resumiendo, lo interesante de esta postura es que se aparta de la visión clásica que concibe a las matemáticas como un aprendizaje abstracto sustentado en procesos cognitivos y esquemas de conocimiento u operación intramental, y lo refieren a un aprendizaje de prácticas sociales y discursos específicos de dominio. Existe una crítica a la institución escolar, que no logra acercar los modelos de solución de problemas matemáticos a la vida cotidiana, pero que por otro lado esto tiene éxito en construir o modelar una identidad de lo que implica ser "niño" en el contexto escolar.

En esta línea de aprendizaje situado de la enseñanza de las matemáticas en los niños, Carraher, Carraher y Schliemann (1991) realizan una serie de estudios donde analizan y discuten ventajas y desventajas de la enseñanza escolar en relación con lo que el niño sabe, necesita y emplea en su vida cotidiana.

De acuerdo con Carraher et al. (1991) Piaget fue, entre los estudiosos de la psicología, quien más contribuyó para que se llegara a reconocer que la lógica y las matemáticas pueden ser tratadas como formas de organización de la actividad intelectual humana. Sus estudios estimularon a los investigadores interesados en el análisis del razonamiento para que trataran de explicar los conocimientos lógico-matemáticos cuando resolvemos problemas de determinada manera. Para Piaget es el propio sujeto quien organiza su actividad y consigue, por medio de la evolución de esta organización, llegar a cambios que llamamos de desarrollo del pensamiento. En Carraher et al. la propuesta piagetiana de encontrar formas de organización lógico-matemática subyacentes a las actividades del niño fue extendida a la investigación de las actividades cotidianas fuera y dentro de la escuela en diversos estudios y esto es lo que acerca a este grupo a una mirada más sociocultural.

La relación entre la comprensión de los principios y modelos lógico-matemáticos subyacentes en la resolución de problemas en diferentes contextos culturales y su representación en esos contextos, es una preocupación de su trabajo que no tuvo lugar en los estudios piagetianos clásicos, aunque allí fueron analizadas las mismas estructuras lógicas. Carraher et al. suponen que si se parte de que la actividad humana está organizada y se acepta la noción piagetiana de que las estructuras lógico-matemáticas pueden ser concebidas como las formas principales de esta organización, se tienen entonces cuestiones no esclarecidas. Por ejemplo ¿en qué medida la situación social influye en la organización de la actividad? En la escuela, las matemáticas son una ciencia, que enseña en un momento definido alguien de mayor competencia. En la vida, las matemáticas son parte de la actividad de un sujeto que compra, vende, mide y encarga piezas de madera, que construye paredes y hace el cálculo del ángulo.

Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se hace sin referencia a lo que los alumnos ya saben, aunque la enseñanza de las matemáticas debería ser, sin duda, una área más directamente beneficiada por el conocimiento de las matemáticas de la vida cotidiana. Carraher et al. exploran la alternativa: el fracaso escolar o el fracaso de la escuela. El problema es presentado en forma un poco diferente por quienes atribuyen el fracaso escolar a la clase social.

Para el interés de esta tesis, destaca un estudio realizado por estos autores sobre la discrepancia entre el desarrollo de los niños de estratos de bajos ingresos en situaciones naturales o cotidianas y en situaciones de tipo escolar donde hay que emplear matemáticas. En su metodología, combinaron observaciones etnográficas con un análisis experimental. En el estudio, cinco niños y adolescentes entre 9 y 15 años, cuyo nivel de escolaridad variaba entre 3º y 8º grado, respondieron a 63 preguntas en un examen informal de matemáticas y a 99 en un examen formal. En la solución de los problemas se encontraron diferencias significativas favorables a la solución de problemas informales. El desempeño de los niños, además de haber sido claramente superior en el examen informal, donde las situaciones están inscritas en situaciones reales, en el examen formal fue también mejor en los problemas de situaciones imaginarias en comparación a la solución de operaciones simples, abstractas y sin contexto alguno.

Con base en estos resultados, los autores suponen que el análisis lógico implícito en la solución de problemas facilita la realización de la operación porque esta se ubica en un sistema de significados bien comprendidos, en lugar de constituir una actividad aislada que se ejecuta en una secuencia de pasos, los cuales llevarán a la solución. En el análisis cualitativo de los resultados sugieren que los algoritmos que se enseñan en la escuela para realizar operaciones aritméticas pueden constituir un obstáculo para el razonamiento del niño, tal vez por interferir con el significado de los propios números con los cuales el niño debe operar. Carraher et al. concluyen en esta investigación, que existen múltiples lógicas o estrategias correctas en la resolución de los cálculos, que no son aprovechadas por la escuela. Una de ellas es la llamada descomposición del problema o el uso de unidades naturales. Es posible que el niño adquiera fluidez en los métodos informales de composición o uso de unidades naturales sin dominar los métodos escolares (reglas de llevo uno; multiplicación hecha por escrito, empezando por la ubicación de unidades, colocación convencional de número en el papel, etc.).

Dentro de este contexto el fracaso escolar aparece como un fracaso de la escuela, localizado en:

a) la incapacidad de comprender la capacidad real del niño.
b) en el desconocimiento de los procesos naturales que llevan al niño a adquirir el conocimiento, y

c) en la incapacidad de establecer un puente entre el conocimiento formal que se desea transmitir y el conocimiento práctico del cual el niño, por lo menos en parte ya dispone.

Al referirse al conocimiento formal, Carraher et al. plantean que no significa que los algoritmos formales y modelos simbólicos deben ser desterrados de la escuela, sino que la educación matemática debe dar oportunidad para que esos modelos se relacionen con experiencias funcionales que les proporcionen significado.

En lo que se refiere al uso o no de materiales concretos, Carraher et al. en sus estudios sugieren que no es preciso emplearlos, sino contextualizarse en situaciones en que la resolución de un problema implique la utilización de los principios lógico-matemáticos a ser enseñados (p 187). Donde lo que distingue esas situaciones cotidianas de las situaciones escolares es el significado que tiene para el sujeto, el cual, resolviendo problemas construye modelos lógico-matemáticos adecuados a la situación. Finalmente, de acuerdo con Carraher et al. la educación matemática, a través de situaciones cuidadosamente estudiados puede apuntar a la construcción de modelos matemáticos por los niños, quienes estarían empeñados en resolver problemas cuyo significado les orientase sobre los propios modelos matemáticos.

Una vez que se ha descrito los principales enfoques cognitivos y socioculturales, en el siguiente capítulo se describen los principales fundamentos teóricos que corresponden a la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas, representada por Guy Brousseau (1997, 2000) y también descritas en trabajos recientes de Ávila (2001). Esta teoría toma en consideración los tres elementos intervinientes (niño, profesor, saber) del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es decir, el llamado triángulo didáctico o interactivo. Esta teoría contribuye para los fines de esta investigación a describir las prácticas educativas en términos del tipo de *contrato didáctico* que ocurre dentro del aula en los momentos de las prácticas educativas, con relación a los temas específicos de matemáticas que se tratan aquí.

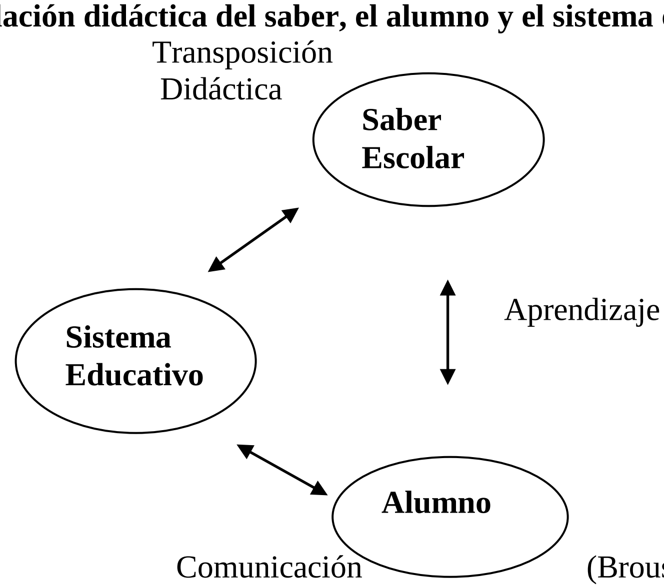
CAPITULO. 2 La teoría de las situaciones didácticas y el contrato didáctico en Guy Brousseau

2.1 Antecedentes de la teoría de las situaciones didácticas

Hace algunos años Brousseau (2000), planteaba cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos "necesarios" para la educación y la sociedad y cómo llevar al aula dichos aportes. Afirma que el comportamiento racional de una sociedad, es decir, su relación tanto con la verdad como con la realidad, no descansa únicamente en las virtudes individuales de sus miembros. Exige una práctica social y una cultura que deben enseñarse en la escuela. Las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales. Acerca de los recursos que se han creado para responder a esta demanda social cuestiona en qué medida el éxito de la difusión de los conocimientos matemáticos depende de las ciencias de la educación o de las matemáticas, y qué instituciones pueden asegurar la coherencia y la pertinencia de este género de conocimientos.

Brousseau (1997) postula la teoría de las situaciones didácticas, que se presenta actualmente como un instrumento científico, misma que ha venido desarrollada a partir de la década de los sesenta. Esta teoría tiende a unificar e integrar los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y de regulación de la enseñanza de las matemáticas. El autor plantea que con frecuencia se concibe a la enseñanza como la parte de las relaciones entre el sistema educativo y el alumno que conciernen a la transmisión de un saber, y entonces se interpreta a la relación didáctica como una comunicación de informaciones (ver figura 1).

Figura 1. Relación didáctica del saber, el alumno y el sistema educativo



(Brousseau, 2000, p. 7)

Este esquema tripolar está asociado habitualmente con una concepción de enseñanza en la que el profesor organiza el saber por enseñar en una serie de mensajes de los cuales toma lo que debe adquirir. Este esquema facilita la determinación de los objetos por estudiar, el papel de los actores, y la asignación del estudio de la enseñanza a diversas disciplinas. Por ejemplo, las matemáticas tienen la responsabilidad del contenido, la pedagogía y la psicología cognitivas de comprender y de organizar las adquisiciones y los aprendizajes. El propósito de estos mensajes es esencialmente la aculturación del alumno por la sociedad.

Brousseau escribe, que a propósito de estos fenómenos de aprendizaje, los psicólogos no han cesado de mostrar la importancia de la tendencia natural de los sujetos para adaptarse a su medio. Esto ocurre tanto en Skinner (papel de los estímulos), como en Piaget (papel de las experiencias personales en el desarrollo espontáneo de los esquemas fundamentales), o en Vigotsky (papel del medio sociocultural).

Para Brousseau la enseñanza se convierte en una actividad que no puede más que conciliar dos procesos, uno de aculturación y el otro de adaptación independiente. Al hacer una crítica a los teóricos anteriores, Brousseau (2000) menciona la existencia de una impotencia de la psicología y de la pedagogía para intervenir de otro modo que no sea el estilo crítico y correctivo. Así pues, estos esfuerzos no consiguen modificar sensiblemente este esquema tripolar.

En los años sesenta, el *medio* (ambiente, material, social) del alumno no fue objeto de estudio en sí mismo. Se buscó construir un modelo del sujeto que aprende, del proceso de producción o de aprendizaje de conocimientos, o bien, de la estructura de los saberes. El propio Brousseau (2000) describe, que siendo alumno de Pierre Grecó en psicología cognitiva, se impresionó por la habilidad de éste para concebir dispositivos experimentales destinados a poner en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños en las etapas de su desarrollo. Sin embargo, Brousseau se dio cuenta de que no se hacía ningún esfuerzo por analizar los dispositivos mismos y por hacer explícita la relación entre éstos y la noción matemática cuya adquisición era estudiada.

Para Brousseau era preciso extender estos trabajos al estudio los dispositivos mismos y de sus relaciones con tal o cual conocimiento. En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. La caja negra es, entonces, el *medio*. De acuerdo con Brousseau en esa época, en la enseñanza la aplicación en un sentido literal de las estructuras matemáticas sobre los objetos y sobre relaciones muy diversas era interesante, pero confinaba al alumno al papel de espectador, y al profesor al de presentador del espectáculo. En el mejor de los casos, hacer actuar al alumno consistía en comunicarle las condiciones y las propiedades de un sistema generador y en hacerle producir los conocimientos previstos (fórmulas, declaraciones, etc.) mediante la aplicación de las reglas enseñadas previamente.

Esta actitud conduce naturalmente a considerar un problema o un ejercicio, no como una simple reformulación de un saber, sino como un *dispositivo*, como un medio que “responde al sujeto” siguiendo algunas reglas. ¿Qué juego debe jugar el sujeto para tener la necesidad de dicho conocimiento? ¿Qué aventura –sucesión de juegos- puede llevarlo a concebirlo o a adoptarlo? ¿Qué información, qué sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer tal conocimiento en lugar de tal otro?

Brousseau dice que han llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético". Se observa que la misma palabra "situación" sirve, en un sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones que enmarcan una acción, como el modelo teórico y eventualmente formal que sirve para estudiarla.

De esta forma, es en 1970 cuando se plantea el proyecto científico de este autor: se trata de construir el modelo de las situaciones utilizadas para introducir o enseñar las nociones matemáticas (y de criticarlas) así como de imaginar otras más apropiadas.

De acuerdo a Ávila (2001b) Brousseau inició la didáctica de las matemáticas como campo científico con un doble interés: analizar los procesos a que da lugar la comunicación del saber matemático escolar e indagar las mejores condiciones de su realización. Así, al considerar las interacciones entre instituciones e individuos alrededor de saberes como casos particulares de comunicación; la didáctica de las matemáticas sería la ciencia de las condiciones específicas de la difusión de conocimientos matemáticos útiles al funcionamiento de las instituciones humanas.

Tomada en esta acepción muy general, la didáctica de las matemáticas ambiciona describir los intercambios y las transformaciones de saberes a diferentes escalas, tanto en la escala de las relaciones interculturales del mundo como en la de un grupo o una lección particular.

El sistema didáctico debe considerarse en la situación efectiva en la que se encuentra ubicado: la situación escolar, pues los sujetos en interacción (maestros y alumnos) son sujetos situados en un contexto (la institución escolar) que determina expectativas, códigos y comportamientos específicos.

El siguiente postulado, de clara influencia piagetana, sería central de la teoría de situaciones: El alumno aprende al adaptarse a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno al medio, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

Pero Brousseau consideraba que el aprendizaje "natural" de la propuesta piagetana corría el riesgo de liberar de toda responsabilidad didáctica al maestro. Para él la educación deberá provocar en el alumno las adaptaciones deseadas mediante una selección cuidadosa de problemas y situaciones que se le propongan. Por ello, lo que pondría en el corazón del análisis sería no la situación ante a la que se colocara al sujeto piagetano, sino la *situación* *didáctica*, la cual se define como un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre el alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución .

En ese orden de ideas, advierte Brousseau, que considerar que el medio es la fuente de la aceptación de la responsabilidad es insuficiente; aceptar la interacción con la situación y las reglas de la interacción no es posible sino por la mediación de un contrato didáctico portador de derechos y obligaciones para maestro y alumnos. En virtud de lo anterior, esta última noción formaría parte esencial de la teoría de las situaciones didácticas y sería precisamente la que haría explícita la ubicación del sistema maestro-alumno-saber en el contexto escolar. El contracto didáctico se pretende analizar en esta tesis como una parte de los elementos importantes durante el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las competencias matemáticas que se describen en el método de este trabajo investigativo.

Así, la descripción sistemática de las situaciones didácticas es un recurso más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían prácticamente tomar en cuenta los resultados de los investigadores en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un recurso privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un recurso de comunicación entre los investigadores y con los profesores. Brousseau (2000) plantea, que en una situación “de aprendizaje” en la que el alumno debería “adaptarse a una situación objetiva” (y no a una relación dual con el maestro) produciendo él mismo el conocimiento, es necesario que la consigna o el proyecto de acción pueda ser concebido por el sujeto mismo sin el auxilio o posibles pistas de su solución, puesto que se trata de construir o de adquirir.

El conocimiento nuevo es entonces el recurso para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura, más económica, entre otras. Sin embargo, dentro de los objetos de estudio de la didáctica el trabajo de los estudiantes y el trabajo de los maestros, resultan importantes al saber cual es su papel dentro de esta teoría.

2.2 Objetos de estudio de la didáctica de las matemáticas

De acuerdo con Brousseau (1997) el trabajo intelectual del estudiante puede ser algunas veces similar a la actividad científica. El conocimiento de los matemáticos no implica el aprendizaje de definiciones y teoremas en orden para reconocer cuando utilizarlos y aplicarlos. Se reconoce muy bien que hacer matemáticas propiamente implica tratar con problemas. Se hacen matemáticas cuando se trata con problemas, pero se olvida a veces que solucionar un problema es únicamente una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar sus soluciones. Una fiel reproducción de un actividad científica por el estudiante puede requerir que ella produzca, formule, pruebe, y construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías; que intercambie con otras personas; que reconozca esto como parte de la cultura; que utilice lo que le sea útil.

Para hacer posible una actividad semejante, el maestro debe imaginar y presentar a los estudiantes situaciones entre las cuales puedan vivir y entre las cuales el conocimiento pueda aparecer como la solución óptima y descubrible a los problemas planteados.

Dos trabajos son considerados dentro de la teoría de las situaciones didácticas:

1. El trabajo del matemático, primero consiste en identificar el conocimiento matemático nuevo que llegue a ser de interés para los otros. Todas las reflexiones irrelevantes deben ser suprimidas o retenidas. Entonces el productor del conocimiento despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza sus resultados así como sea posible. La organización del conocimiento depende de los requerimientos impuestos por el autor.

2. El trabajo del maestro es en la misma extensión lo opuesto al del investigador: debe producir una recontextualización y una repersonalización del conocimiento. Este debe llevar al conocimiento del estudiante.

El maestro puede por lo tanto simular en su clase una microsociedad científica si quiere utilizar el conocimiento como una forma económica de elaborar buenas preguntas y de resolver desacuerdos (saldar disputas), y si quiere el lenguaje como una herramienta para manejar o enseñar situaciones en la formulación de pruebas matemáticas como medios de convencimiento en las clases.

Pero el maestro debe proveer los medios de descubrimiento del conocimiento cultural y comunicable que quiere enseñar. Los estudiantes, en su retorno, deben recontextualizar y redespersonalizar su conocimiento de tal forma que identifiquen lo que producen con el conocimiento que está en uso en la comunidad científica y cultural de su tiempo. Para Brousseau, esto es una simulación; no es una actividad científica "cierta", en la misma forma ese conocimiento presentado en un modo axiomático no es un conocimiento "verdadero". Hay un fuerte énfasis en las actividades sociales y culturales que condicionan la creación, la práctica y la comunicación del conocimiento y los mismos conocimientos.

Brousseau considera que una de las hipótesis fundamentales de la *didáctica* consiste en afirmar que únicamente el estudio global de situaciones, presidiendo sobre la manifestación del conocimiento, permite elegir y conectar el conocimiento desde diferentes orígenes; el conocimiento necesario para entender las actividades cognitivas de los sujetos así como el conocimiento que el profesor utiliza y la forma como se modifica.

Una segunda hipótesis es que el estudio de las situaciones didácticas puede al final permitir la derivación o modificación de conceptos necesarios actualmente importados desde otros campos científicos.

La enseñanza, es concebida como un proyecto social. Este punto de vista lleva a sustentar la parte medular de enseñar la discusión cultural y política del conocimiento, tratando esto, sin embargo, más como un objeto de estudio el cual es parte de las situaciones que como una consideración filosófica preeliminar.

Para finalizar esta parte, el autor menciona que una buena teoría epistemológica acompañada por una buena ingeniería didáctica es necesaria para integrar la didáctica de las matemáticas. Por otro lado, el estudio didáctico puede ser posible si dos condiciones son satisfechas:

- Que se haga evidente el fenómeno específico que aparece para ser explicado por los conceptos originales que propone;

- Que indique los métodos específicos de prueba que son utilizados para ese propósito.

Estas dos condiciones son esenciales si la didáctica de las matemáticas es capaz de encargarse de sus objetos de estudio en una forma científica y así permitir el control de las acciones sobre la enseñanza.

2.3 Situación fundamental

Ahora toca mostrar lo que Brousseau (2000) llama la hipótesis de la situación fundamental. Por razones heurísticas, Brousseau supone que *cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los otros.* El conjunto de situaciones que caracterizan a una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes, de variables y de cosas sobre estas variables. Pero *una situación fundamental no es a priori una situación "ideal" para la enseñanza, ni siquiera una solución más eficaz.* El valor de una situación para su uso didáctico se aprecia en función de un gran número de parámetros externos, tales como la posibilidad efectiva de ponerlos a disposición en un ambiente psico-cultural determinado.

Para ilustrar lo anterior, Brousseau (2000) presenta un ejemplo de *la situación fundamental del conteo*, donde se le dan instrucciones específicas al niño para que ponga en correspondencia pinceles y botes. El número no es más el *objeto* explícito de la pregunta, sino el *recurso* implícito para responder a ella. Es necesario observar que si bien los niños adquieren rápidamente ciertos esquemas verdaderos para cualquier número, la posibilidad efectiva de tomar estos esquemas como objetos de conocimiento y de tratarlos como saberes no se adquiere ni espontánea ni rápidamente. Será necesario además, tarde o temprano, no conformarse con su utilización, sino también dilucidar, formular y discutir sus propiedades y sus estructuras numéricas.

Se menciona que para que el niño sepa contar, debe ser también capaz de estar suficientemente seguro de su conteo para identificar las fuentes de error y en caso dado para discutirlas. Esta confianza en sus métodos exige a su vez una posición reflexiva con respecto a ellos, es decir, un "metaconocimiento", también exige palabras para expresar los conocimientos adquiridos, un metalenguaje, y finalmente todo aquello que constituye la conversión de ciertos conocimientos en saberes. Se agrega, que con respecto a los métodos clásicos, esta situación fundamental de conteo puede revelarse útil en diversos momentos del aprendizaje y sobre todo para indicar a los profesores lo que quiere decir "contar" en términos "concretos".

Dentro los usos razonados de las situaciones fundamentales en cuanto al empleo de los números, se concreta que el niño debe ser capaz conocer las propiedades de las colecciones, de los números y de sus operaciones. El alumno debe necesariamente conocer estas últimas para poder controlar sus usos complejos. Será necesario también, esclarecer, formular, discutir las propiedades y las estructuras numéricas.

Por otra parte, Brousseau destaca algunos elementos de la teoría de las situaciones. La búsqueda o la invención de situaciones matemáticas enseñadas en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, que constituyen la materia didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Tanto para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento así como la idea que tienen las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura de las matemáticas clásicas. Lo anterior como una parte de las aportaciones de la teoría de las situaciones a la enseñanza de las diferentes nociones matemáticas.

En este sentido con sustento en Brousseau (2000) a continuación se presentan una serie de conceptos generales aplicables a las matemáticas, una especie de meta didáctica que no puede convertirse automáticamente para tratar a cualquier conocimiento.

De este modo, dentro de la estructura de las situaciones se incluye la descripción del modelo general de una situación. Donde una situación modela las relaciones y las interacciones de uno o varios actores con un medio. El modelo comprende una representación:

- De los estados del medio y de los cambios que los actores pueden imprimirle
- De aquello que se juega en la acción, generalmente un estado final del medio y el interés que el actor le asocia.
- El inventario de las elecciones permitida por las reglas.

Un conocimiento es pertinente si en esta situación es el recurso para poner en juego una estrategia o una táctica en la mejor de las elecciones permitidas en cada momento. Este modelo permite identificar algunos conocimientos de los sujetos. Permite después compararlos con otros conocimientos pertinentes, en particular con los conocimientos óptimos en esta situación. De manera importante "el propósito de la teoría de las situaciones es permitir organizar localmente el aprendizaje de conocimientos elementales considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto, y al mismo tiempo permitir su reorganización de acuerdo con las necesidades lógicas y teóricas que son el fruto de una adaptación completamente diferentes de la sociedad" (Brousseau, 2000, p. 18).

Otro de los conceptos distinguidos en esta parte son tres tipos de interacciones fundamentales de un actor con su medio.

1. El tipo “acción” que consiste para el actor en fijar un estado del medio o en determinar o limitar las acciones de otros actores (materialmente o mediante reglas impuestas).
2. El tipo de “comunicación” que consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de informaciones.
3. El tipo de “prueba” que tiende a la justificación o validación cultural de los actos o de las declaraciones (Brousseau, 2000).

Cada una de estas interacciones se modela mediante tipos de situaciones diferentes y pone en juego repertorios de recursos diferentes. En las clases, esta clasificación de situaciones ha favorecido el establecimiento y la observación del tránsito de situaciones de argumentación a situaciones de prueba. No obstante, estas situaciones no sólo constituyen un paso importante desde el punto de vista de los procesos matemáticos, son además portadoras de un proyecto educativo esencial: el hacer del alumno un ser racional, social, autónomo y responsable, capaz de comprender cómo se establece y se comparte una verdad en una sociedad, mediante debates a la vez democráticos y constructivos.

En este orden de ideas, la “situación didáctica” tiene dos significados:

1. En el sentido clásico, es una situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar, tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto.
2. Es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo.

En general las situaciones de la enseñanza reales pueden descomponerse en un componente didáctico y en un componente no didáctico (desdidactificado) que puede desarrollarse simultáneamente o sucesivamente.

En cuanto a las concepciones y obstáculos Brousseau destaca qué “medios” y agrupamientos de situaciones apelan a conjuntos de conocimientos adecuados que pueden estructurarse en teorías matemáticas. Esta idea encuentra extensión en la teoría de las situaciones: los conocimientos de los alumnos se agrupan en “concepciones”que caracterizan una cierta manera de comprender y de utilizar una noción matemática en cierto campo de situaciones.
Las situaciones que encuentra un principiante en relación con un conocimiento nuevo son necesariamente poco numerosas y frecuentemente simplificadas. La adaptación de los conocimientos a este medio limitado conduce al alumno, y también al profesor a utilizar concepciones que se manifestarán inadaptadas, aproximadas o incluso falsas en las situaciones que se encontraran más adelante. No se trata de dificultades, sino efectivamente de conocimientos, primero necesarios, pero que perturban duraderamente los aprendizajes ulteriores y que persisten, incluso después de las adquisiciones de saberes correctos.

En el tema de la relativización de los conocimientos, la definición de los conocimientos en relación con su función en una situación ratifica el hecho de que para una misma noción matemática, cada actor (sociedad, profesor alumno) desarrolla conocimientos diferentes a priori según las condiciones en las cuales los utiliza, los crea o los aprende. Válidos o no desde un punto de vista académico, en cierta forma los conocimientos se legitiman y reconocen. Los conocimientos relativos puede compararse con los “conocimientos científicos o académicos universales”, pero hay que cuidarse de una confusión: el hecho de que sean “adecuados” no los hace por ello “verdaderos”.

De acuerdo con Brousseau (2000), del gradiente y la transposición didáctica, destaca, que en relación con una misma noción, dos actores pueden tener conocimientos diferentes, lo cual puede constituir un obstáculo para su colaboración si entran en una institución. La enseñanza sólo es posible si los repertorios no son demasiado diferentes y se realiza al precio de una adaptación de los conocimientos transmitidos, llamada transposición didáctica. Por otra parte, el hecho mismo de enseñar un conocimiento lo modifica, tanto para el que enseña como para el enseñado. La transposición es una modificación de conocimientos que altera su papel, la situación en la que intervienen. Es una condición y un efecto de la relación didáctica.

2.4 Papel del maestro y el contrato didáctico en la teoría Brousseauniana

Brousseau (2000) al extender la idea del contrato social de Rousseau, destacó la noción de contrato pedagógico, en el que se precisan las obligaciones recíprocas entre alumno, sociedad y profesores. Brousseau afirma que la relación didáctica no puede dar lugar formalmente a un contrato: las cláusulas no pueden escribirse; las sanciones en caso de ruptura no pueden ser previstas; etc. Sin embargo, la ilusión de que hay un contrato es indispensable para que la relación se dé y, eventualmente, tenga éxito. Cada uno, el maestro y el alumno, se hace una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa…y esta idea crea las posibilidades de intervención, de devolución de la parte a-didáctica de las situaciones y de la institucionalización. El contrato didáctico existe por lo tanto como una ficción necesaria. El juego entre situaciones reales y situaciones ficticias también es indispensable.

En complemento a la explicación del contrato didáctico Ávila (2001b) presenta una serie de conceptos fundamentales acerca de la teoría de las situaciones formulada por Guy Brousseau en los años setenta, teoría que ha tenido una fuerte influencia en la reforma curricular de México. Con respecto al subtema del contrato y la situación didáctica, Ávila (2001b) considera que la situación es portadora de condiciones que implican una adaptación del sujeto. Pero sólo su carácter didáctico obliga a que la adaptación (el aprendizaje) se produzca. En ello media el contrato didáctico. Así pues, la situación didáctica está constituida por una situación-problema (que vincula al alumno con el saber en tanto que sujeto epistémico) y un contrato didáctico (que vincula con la intención de enseñanza en tanto que sujeto didáctico). Esta sería una diferencia capital con la postura piagetana. La autora considera, que según Brousseau, este fenómeno deriva del hecho de que el enseñante manifiesta sus expectativas al alumno a través de *camuflajes* didácticos a fin de obtener, a cualquier precio, los comportamientos esperados. Y el alumno acepta el juego.

Según Ávila, Brousseau refina el concepto de contrato y destaca el interés por el análisis de aquello asociado a la especificidad del conocimiento matemático, señala el carácter parcialmente implícito del mismo y aparece un elemento nuevo: el contrato implica una *distribución de responsabilidades* entre el profesor y los alumnos. En cuanto al tema del niño que deviene en alumno, la formulación de contrato inaugura la idea de un sujeto didáctico no reductible a lo social o epistémico y pone de relieve que el análisis del funcionamiento cognitivo del alumno no se puede llevar a cabo sin tener en cuenta la situación escolar.

En síntesis, el contrato didáctico es un concepto que – portador de la obligación de "aprender para otros"- formula y explica la tensión existente entre las razones intelectuales y didácticas que subyacen a las conductas y respuestas que los niños ofrecen en la escuela, a las formas en que participan en la relación didáctica (Ávila, 2001b).

2.5 Efectos del contrato didáctico

Respecto a los efectos del contrato didáctico, la transmisión del saber obliga a adaptarlo, a modificarlo, a recortarlo, a reorganizarlo. Tal proceso, que se llama transposición (Brousseau, 1997), es necesario pero en cierto modo, es también lamentable, ya que el juego de relaciones y obligaciones que se establecen durante la relación didáctica, produce diversos efectos, en ocasiones escasamente favorables a quien está en posición de aprender. Incluso, algunos de estos efectos deterioran y llegan a sustituir los aprendizajes, que se intentan transmitir. De acuerdo con Brousseau (1997) algunos de los fenómenos conectados con el control de la transposición didáctica pueden ser discutidos con respecto a diferentes marcos; el mismo fenómeno puede gobernar el interior de una lección o relacionarse a toda una comunidad por generaciones.

Dentro de estos fenómenos que pueden ocurrir se encuentran el fenómeno del *efecto Topaze*, el cual ocurre cuando el objetivo original del conocimiento desaparece completamente. La respuesta del alumno estará determinada previamente, por la selección y planteamiento de preguntas, así como el manejo de situaciones que induce a las respuestas. Es decir que el profesor emplea una serie de preguntas y de pistas hasta lograr la respuesta esperada del niño, sin promover un razonamiento matemático en el niño. Entonces, si el objetivo del conocimiento desaparece completamente se tiene el efecto Topaze.

Brousseau sostiene, que en el *efecto Jourdain* – así llamado por referencia a la escena en *le Bourgeois Gentilhomme* en donde el maestro filósofo revela a Jourdain que vocales y frases son realmente. Existe una sobrevaloración de los conocimientos matemáticos reales que el niño logra adquirir, se cree que porque el conocimiento matemático esta en la mente del maestro también estará en sus alumnos. Para evitar debatir el conocimiento con el estudiante y sus posibles fallas en el conocimiento, el maestro concibe reconocer la indicación de un ítem o punto de conocimiento científico en las respuestas, conocimientos científicos o en la conducta de los estudiantes, cuando sin embargo, éstos son motivados por causas y significados banales. Aquí, el deseo por insertar el conocimiento dentro de actividades familiares puede adelantar al maestro a sustituir otra *problemática* por la verdadera, alguna en específico, por ejemplo una metáfora o mnemotécnica que no dan el significado correcto a la situación.

En este mismo punto, Ávila (2001b) aclara, que entre algunos efectos "*el efecto Jourdain"* describe la creencia de que porque las ideas y los conocimientos están en la cabeza del profesor éstos estarán también en las de los alumnos.

En el *deslizamiento metacognitivo*, se dice que cuando una actividad de enseñanza ha fallado, el maestro puede sentirse forzado para justificarse a sí mismo y para continuar su actividad, toma sus propias formulaciones y medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del conocimiento matemático original. Para Brousseau, este caso ocurrió en los años sesenta con el uso de gráficas para la enseñanza de las estructuras matemáticas.

Por otro lado, la *analogía* es un excelente medio heurístico cuando la persona lo utiliza con responsabilidad. El uso incorrecto de la analogía en las relaciones didácticas, lleva a reproducir los efectos de Topaze. Esto es si el estudiante no logra el aprendizaje, y entonces pueden llegar a un segundo error con la misma materia. Para encontrar la solución leen las indicaciones didácticas y no se involucran a sí mismos en el problema. Y esto es en su interés para hacerlo así porque después de varias fallas con problemas similares, no identificables e irreconocibles, el maestro contará y dependerá sobre esas analogías para reprochar al estudiante por su obstinada resistencia.

Un fenómeno final que Brousseau menciona en el texto es el *envejecimiento* de las situaciones de enseñanza. Aquí el profesor encuentra dificultad para poder reproducir la misma lección con nuevos estudiantes. La reproducción exacta de que el profesor hizo o dijo previamente no tiene los mismos efectos y usualmente los resultados no son tan buenos. Pero, quizás como una consecuencia, el profesor siente una cierta reticencia hacia su reproducción. Siente completamente una fuerte necesidad para cambiar cuando menos la formulación de su explicación o sus instrucciones, los ejemplos, los ejercicios, y posiblemente de plano la estructura de la lección. Estos efectos incrementan con el número de reproducciones y son tan fuertes como el número de interacciones entre el maestro y el incremento de los alumnos. Las lecciones que incluyen una explicación seguida por ejercicios o una simple instrucción, seguida por una situación de aprendizaje en la cual no requiere de la intervención próxima del maestro. Al respecto, Brousseau (1997) se cuestiona acerca de la edad y el efecto del tiempo en las situaciones, qué es lo que realmente se produce durante el curso de una lección y si es posible en una misma situación didáctica producir los mismos conocimientos en un tiempo diferente. Así, el conocimiento que se produce en una situación de enseñanza es precisamente el objeto de la didáctica.

2. 6 Tipos de contrato didáctico

De acuerdo con Ávila (2001a) en 1995, Brousseau se aproxima al análisis de la participación del profesor en la relación didáctica desde una perspectiva que no había abordado. Coherente con el acercamiento sistémico que sostendrá en toda su teoría, considera que la enseñanza se caracteriza por las restricciones que acepta y por las que impone y modela la participación del profesor en términos de los contratos didácticos que podrían regular la acción. Ávila describe que lo que caracteriza a cada contrato es una cierta distribución de la responsabilidad entre el profesor y los alumnos. Conforme a esta teorización, las distintas responsabilidades que puede asumir el profesor repercuten en las de los alumnos y dan lugar a diversos contratos que van, de los *no didáctico* a los *fuertemente didácticos*.

Ávila (2001b) presenta la siguiente descripción de cada uno de los diferentes tipos de contrato, los cuales serán útiles para la exploración de su posible aplicación y existencia en las prácticas de enseñanza, mismas que se analizan como parte de esta tesis. De esta forma se tienen los siguientes tipos:

a) *Los contratos no didácticos*

Los contratos no didácticos son aquellos en el que el emisor (que puede ser el maestro) no tiene responsabilidad didáctica en relación con el receptor: no está encargado de enseñarle nada, y si modifica sus conocimientos, sus creencias o sus actos, esto es de alguna manera independientemente de su voluntad, y no conforme a algún proyecto intencional. Entre este tipo de contratos se encuentran:

1. El contrato de emisión, conforme el cual el emisor transmite su mensaje sin preocuparse de las condiciones efectivas de su recepción. En una situación límite, el emisor podría no tomar en cuenta ninguna restricción y emitir un mensaje incluso ininteligible. Este contrato es a veces observado en las clases: el profesor monologa sin tener en cuenta la presencia de los alumnos.

2. El contrato de comunicación, que es más exigente para el emisor. Éste se compromete a hacer llegar el mensaje al receptor y debe asegurarse de la buena recepción, aunque no del sentido que el da al receptor; la interpretación del mensaje en este contrato está completamente a cargo del receptor.

3. El contrato de experto, que es aún más exigente que el anterior. En él, el emisor garantiza la validez del mensaje mediante las vías distintas de la simple emisión (de acuerdo con este contrato, un profesor que pretendiera comunicar una teoría matemática, debería enunciar los teoremas que lo componen).

b) *Contratos ligeramente didácticos*

En estos contratos, el emisor acepta el compromiso de organizar el mensaje en función de ciertas características "teóricas" de su interlocutor; sin embargo no acepta responsabilidades en cuanto a sus efectos sobre él. Los siguientes son contratos de este tipo:

1) El contrato de información. El emisor busca el asentimiento del receptor y, en respuesta a una demanda eventual, ofrecerle ciertas "pruebas o "referencias". El contrato de información puede ser dialéctico o dogmático; en el primer caso, se trata de una <<gestión colectiva de la verdad>>, a la manera de los antiguos griegos; en el segundo caso, los rodeos del cuestionamiento por parte de los receptores pueden parecer pérdida de tiempo y entonces se acuerda mostrar las pruebas sistemáticamente, sin esperar la respuesta a la demanda.

2) El contrato de utilización de conocimientos. Este contrato agrega una cláusula al de información: la de mostrar el empleo y utilidad de los conocimientos. El informador por

consecuencia, debe acompañar el texto del saber de un campo de aplicaciones en el cual ese saber se supone juega un rol.

3) El contrato de aplicación y control. En los contratos precedentes el receptor decide si se considera suficientemente informado o si desea más información. En este nuevo contrato, el informador toma a su cargo parte de esa responsabilidad dando al informado un criterio para determinar si ha comprendido bien (y no sólo recibido) el saber comunicado. Ese criterio consiste en establecer una relación de equivalencia entre dos conjuntos de enunciados: el de los saberes comunicados y el del ámbito de las aplicaciones.

En opinión de Brousseau, los aspectos clave de esta noción son:

- Si bien en los contratos ligeramente didácticos la responsabilidad del emisor (el maestro) ha aumentado, el alumno conserva la responsabilidad principal: la de la realización efectiva de la comunicación. Él ejerce un cierto control sobre el profesor: si los mensajes resultan demasiado escuetos, demasiado obvios, él lo presiona a aumentar su contenido, a hacerlos más informativos.
- Los contratos ligeramente didácticos buscan que el alumno se apropie de un saber, considerándolo como un sujeto epistémico, pero no como sujeto efectivo, con características específicas.
- En ocasiones estos contratos o las cláusulas que agregan, descansan sobre hipótesis cuya validez real queda por establecerse. Tal es el caso de la cláusula que establece una relación de equivalencia entre el conjunto de saberes enseñados y el ámbito de su aplicación.

c) Los contratos fuertemente didácticos

En estos contratos el enseñante toma la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. El profesor intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno. Entre los contratos estrictamente didácticos, Brousseau identifica:

1) El *contrato de reproducción formal*. Conforme a este contrato, el profesor se compromete a hacer que el alumno realice, por un medio cualquiera, una tarea que es culturalmente reconocida como marca de adquisición de un saber; por ejemplo, el alumno dirá el texto de un teorema, escribirá la solución de un problema, reproducirá una actividad determinada. El medio por el cual se logra la producción de la tarea no es importante puesto que es la actividad en sí misma la que se supone fuente y prueba del aprendizaje. Además, los medios de reproducción, por imitación, no exigen formulaciones de razones o explicaciones. Así, la traducción de las órdenes del profesor en actos no exige el pasaje por el conocimiento previsto. Como contraparte, el compromiso del alumno, se efectuará la tarea definida por el profesor con la condición de que sea reducible al repertorio que posee.
2) El *contrato de condicionamiento*. Al no ser la reproducción de una tarea lo más frecuentemente la garantía de que el alumno puede reproducirla en cualquier

circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, es decir, como razones del saber que aquél ha aprendido. Entre estas causas se encuentran la asociación y la repetición. Aquí el rol del alumno es repetir, pues el profesor cree que el tiempo y la repetición se encargarán de familiarizarle con el objeto de aprendizaje.

3) La *mayéutica socrática*. Conforme a este contrato, el profesor escoge preguntas de las cuales el alumno puede encontrar las respuestas con sus propios recursos. Las preguntas se modifican en función de las respuestas del alumno; pueden ser abiertas o cerradas como el diálogo del Menón, y pueden *a priori* utilizar cualquier vía retórica y obtener la respuesta adecuada por analogías o metáforas.

   La mayéutica colectiva provoca numerosos efectos didácticos más o menos negativos. Uno de los principales inconvenientes deriva de que tiende a excluir las interacciones del sujeto con un *medio* efectivo. Por otra parte, los problemas abiertos, son difíciles de incluir en una mayéutica a causa de la dispersión de las respuestas que pueden provocar.

4) Los *contratos de trabajo empiristas*. En estos contratos, se supone que el conocimiento se establece esencialmente por el contacto con el *medio* al cual el alumno debe adaptarse, la responsabilidad del aprendizaje es remitida a él. En las formas más simples, la lectura del *medio* es casi directa, el alumno percibe "viendo" la estructura (sin procesos intermedios, ni cultural ni cognitivamente). Esta posición ha sido identificada como *empirismo sensualista* (por ejemplo, v. H. Aebli; 1958, citado en Ávila, 2001b).

5) Los *contratos de ostensión*. La idea de la lectura del *medio* puede ser inmediata, conduce a estrategias didácticas de *ostensión*: el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre y aprende por frecuentación repetida de las mismas circunstancias. *Los contratos de ostensión* derivan de una concepción sensual-empirista. En estos contratos, el profesor <<muestra>> un objeto, o una propiedad, y el alumno acepta <<verlo>> como el representante de una clase de la cual deberá reconocer los elementos en otras circunstancias.

6) Los *contratos constructivistas*. Aquí, las situaciones que conducen al alumno al aprendizaje no son "naturales". El profesor debe organizar el *medio*. La organización deriva esencialmente del saber previsto y el conocimiento de los procesos de adquisición de los alumnos, a quienes se les delega la responsabilidad de la adquisición. Los saberes previos se manifiestan como prerrequisitos, es decir, como medios que permiten formular las condiciones iniciales de la situación.

En estos contratos el alumno es considerado racional o al menos coherente y económico: se adapta al *medio* para minimizar sus esfuerzos o sus riesgos y para acrecentar su placer.[1]

[1] Recuérdese que en la teoría de las situaciones didácticas, la interacción del alumno con el medio es modelada a partir de la teoría de los juegos (comunicación personal de A. Ávila, agosto de 2006).

De acuerdo a Ávila como corolario de esta exposición, Brousseau afirma que los supuestos en los que descansan muchos de los contratos antes expuestos, no son sino ficciones, producto de las creencias que comparten profesores y padres de familia. Señala además el carácter insuficiente de cada uno de ellos para construir a la vez: a) un saber canónico; b) los conocimientos que la acompañan y c) las prácticas que caracterizan su puesta en operación. Tal equilibrio, en su perspectiva, se logra mediante contratos en que el profesor asume mayores responsabilidades, como serían los basados en la *transformación de saberes previos.*

7) *Contratos basados sobre la transformación de saberes previos*. En estos contratos, se acepta una epistemología según la cual los aprendizajes se dan por acomodación; se acepta también la existencia de obstáculos (epistemológicos) y la necesidad de conocimientos provisorios en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Conforme a estos contratos, la génesis didáctica de los saberes procede por modificaciones y por rupturas a la manera de una génesis histórica y no de manera lineal por simple acumulación. En este contrato, además, el estatuto del saber se modifica debido a que:

- Los saberes enseñados se transforman en medios de decisión ante una situación, es decir, en conocimientos.
- Inversamente, los conocimientos desarrollados en interacción con las situaciones, se transforman luego en saberes institucionales, organizados de manera canónica.

Es un contrato de este tipo el que sirve de telón de fondo a la teoría de las situaciones didácticas conforme a la cual se busca que sea el sujeto epistémico (que actúa por exigencias de la situación, con base en razones intelectuales) el que prive por sobre el sujeto didáctico (que actúa conforme a presiones del profesor, por razones didácticas)

De acuerdo a Ávila (2001a) el rol del profesor es entonces gestionar regulaciones no sólo intra-contratos sino también inter-contratos. Para Brousseau (2000) las intervenciones didácticas son regulaciones destinadas a mantener equilibrios, más que a producir directamente efectos, y esas regulaciones son específicas de la noción matemática.

Ávila (2001a) describe, que probablemente la vertiente más conocida de la teoría de las situaciones sea la que Brousseau construyó con un ánimo experimental: el análisis de las condiciones en las cuales se produce el conocimiento y lo que lo llevaría a centrarse en el estudio del *medio* promotor de adaptaciones. La autora coincide con Chevellard en su afirmación de que la sensibilidad antropológica, está presente en los trabajos de Brousseau.

En palabras de Ávila, en efecto, la noción de contrato didáctico otorga la posibilidad de ver, más allá de la situación y la acción del sujeto cognoscente que provoca, lo que ocurre en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en tanto que proceso situado en el ámbito de las exigencias de la institución escolar. Con el desarrollo de la noción de contrato y su vinculación con la enseñanza, así como con las nociones de regulación y memoria didáctica, la teoría de situaciones cierra el paréntesis que abriera en sus inicios sobre la acción del profesor.

2. 7 Epistemología de los profesores

Según Brousseau (2000) en cuanto a la epistemología de los profesores, se destaca en primer momento la cuestión de que si las instituciones de enseñanza desarrollan por necesidad profesional, conocimientos originales relativos a la adquisición de los conocimientos, a su papel o a su estatuto. El profesor está por lo tanto obligado a practicar y a profesar un modelo de pensamiento "oficial" calcado de aquello que la cultura declara inteligible y expresable, con la única tolerancia que ofrece la transposición didáctica. El término "epistemología" abarca un campo más amplio que la concepción de la génesis y del sentido de los saberes, aunque ésta es la parte más importante para las relaciones del enseñante con la sociedad. Existen "creencias" epistemológicas, de origen cultural, histórico, científico, y más. Estas tienen una función, una justificación. Pueden ser correctas o falsas, y adaptadas o inadaptadas. Aquello que facilita la relación didáctica "local" no siempre queda sin consecuencias posteriores. La forma en que un profesor específico piensa que puede producir una génesis didáctica de los saberes que quiere enseñar en su clase, debe estar controlada por un repertorio de conocimientos explícitos o implícitos de naturaleza epistemológica. Brousseau en su análisis acerca de la epistemología de los profesores, considera ésta es a la vez su medio de:

- *Lectura* de las matemáticas.
- De concebirlas como conocimientos proyectados para los alumnos.
- Interpretación de los comportamientos de los alumnos como distanciamientos con respecto a esta norma.
- Para concebir una intervención.

La función cognitiva de los profesores es la de integrar estos cuatro objetos en uno solo. Es por esta razón que es considerada por los profesores como la "verdadera" verdad de las matemáticas, de la enseñanza y de los alumnos (Brousseau, 2000).

Para cerrar este capítulo, se ha presentado una de las teorías que debido a su importancia en la explicación del proceso global de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una de las que actualmente se reportan como más útiles para indagar lo que ocurre en las clases de las matemáticas, utilizada a nivel nacional e internacional (Ávila, et al. 2003; Lagrange, et al. 2003). Teoría de la que uno de los elementos a considerar para el análisis de dicho proceso es la forma como ocurre el contrato didáctico dentro del aula, en las prácticas educativas durante la enseñanza y el aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.

De este modo, en el siguiente capitulo, con relación a lo que ocurre en las prácticas escolares dentro del aula se presenta la teoría que fundamenta la importancia del estudio del pensamiento docente y de las concepciones de los maestros.

CAPÍTULO 3. Las concepciones del docente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

El objetivo central de este proyecto de investigación es analizar y describir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente con relación al tipo de aprendizaje que tienen los niños de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos. En la comprensión de este proceso se considera relevante explorar y analizar la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje por parte de los profesores y el modo en que ocurre su instrucción en las prácticas educativas reales.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje, el maestro resulta ser uno de los elementos clave para la transmisión, promoción o construcción de estos conocimientos matemáticos. Sin embargo, la instrucción del profesor puede ser influida por una serie de aspectos, como son su conocimiento, sus estrategias (Díaz-Barriga y Hernández, 2003; Vermunt y Verloop, 1999), sus creencias (Gill, Anshton, y Algina, 2004; Hofer y Pintrich, 1997), y sus concepciones específicas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Thompson, 1992). Sin embargo, es preciso destacar las dificultades que han tenido los investigadores para acordar las diferencias o relaciones conceptuales principalmente entre la epistemología, las creencias y las concepciones, (Monroy y Díaz, 2004; Kane, Sandretto y Heath, 2002; Pepin, 1999,) no obstante es necesario ajustar la definición del término tratando de expandirla y justificarla teóricamente (Mcleod y Mcleod, 2002).

En este sentido, en la parte última de este capítulo se hace una reseña de los algunos trabajos relacionados con las concepciones de los maestros de interés para esta investigación. Asimismo, para fines de esta investigación se retoma la definición propuesta por Thompson (1992): "concepciones de los maestros, vistas más como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, normas, imágenes mentales, preferencias y parecidos. Entonces, la distinción puede no ser tan importante, esto podría ser más natural al referirse a las concepciones de los maestros de las matemáticas más como una disciplina que como un simple diálogo de las creencias de los maestros sobre las matemáticas" (p 130).

En diversos estudios se define y justifica teóricamente la importancia del estudio de las concepciones de los maestros; en Monroy (1998) el estudio del pensamiento docente comprende seis categorías, exploradas en una serie de entrevistas, que para fines de esta investigación se adaptaron como:

- Formación previa e interés de la didáctica específica de la disciplina (en nuestro caso, de las matemáticas).
- Enseñanza de las matemáticas.
- Aprendizaje y motivación de los alumnos.
- Contenidos y aprendizajes específicos con relación a la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.
- Métodos y estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos.
- Evaluación del aprendizaje de las matemáticas.

Para ilustrar el entendimiento y análisis de las concepciones de una maestra y un maestro acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de primer y segundo grado de educación primaria, a continuación se ofrece en este apartado, la definición conceptual de epistemología, una descripción breve de algunos de los trabajos principales acerca de las creencias epistemológicas, para continuar con las creencias epistemológicas en matemáticas, y cerrar con concepciones acerca de las matemáticas. Todo ello, con la finalidad de poder diferenciar e integrar los marcos teóricos referidos a las concepciones, y las creencias epistemológicas.

3.1 La epistemología y creencias epistemológicas

Muis (2004), concibe a la epistemología como un brazo de la filosofía relacionada con la naturaleza del conocimiento y la justificación de las creencias. En tal sentido, Muis cita la siguiente definición derivada de la noción más filosófica de la epistemología. *The Cambridge Dictionary of Philoshopy* (Audi, 1999, cit. en Muis): "el estudio de la naturaleza y justificación del conocimiento: específicamente, el estudio de a) las características definidas, b) las condiciones sustantivas u orígenes, y c) los límites del conocimiento y la justificación" (p. 273). Así, un examen de la epistemología personal que incluye la exploración de la naturaleza del conocimiento, justificación del conocimiento, orígenes del conocimiento y aspectos de desarrollo de la adquisición del conocimiento (Royce y cols., 1978).

Por su parte, Hofer (2002) expone que como interpretación filosófica, la epistemología está relacionada con el origen, naturaleza, método y justificación del conocimiento humano. El término epistemología "por contraste, relaciona al conocimiento más generalmente y por sus condiciones para adquirirlo. Desde una perspectiva psicológica y educacional, el centro del estudio epistemológico personal o cognición epistémica es cómo el individuo desarrolla concepciones de conocimiento y conoce el mundo. Esto incluye creencias sobre la definición de conocimiento y cómo el conocimiento se adquiere, se evalúa, dónde reside y cómo ocurre" (p. 4).

De acuerdo con Hofer y Pintrich (1997), los psicólogos educativos han incrementado su interés en el desarrollo de la epistemología personal y las creencias epistemológicas; es decir, en dilucidar cómo los individuos adquieren el conocimiento, las teorías y creencias que sostienen sobre el conocimiento y cómo estas creencias son parte e influencian en los procesos cognitivos, específicamente del pensamiento y del razonamiento. Recientemente, Schommer (1990) actualizó y elaboró su conceptualización de las creencias epistemológicas. La autora define las creencias epistemológicas como las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza del conocimiento y el aprendizaje. Considera que los individuos tienen un sistema inconsciente de creencias sobre lo que conocen y cómo éste es adquirido. Además, esas creencias tienen efectos sutiles y aún importantes sobre cómo los individuos comprenden, monitorean su comprensión, solucionan problemas y persisten al enfrentar los desafíos de las tareas. Sin embargo, así como cada creencia afecta el razonamiento, el aprendizaje y la toma de decisiones, tienen directa e indirectamente efectos sobre el aprendizaje. Además, las creencias afectan las conductas de los estudiantes.

De acuerdo con Hofer (2002), a partir de una perspectiva evolutiva pueden identificarse dos piedras angulares en la investigación sobre la epistemología personal: la epistemología genética de Piaget y el trabajo de Perry sobre el desarrollo epistemológico de los estudiantes universitarios. Piaget creyó que el desarrollo de la inteligencia es un aspecto del desarrollo biológico caracterizado por los procesos de asimilación y acomodación. Igualmente, consideró que la adquisición del conocimiento es un proceso más bien activo que pasivo y que conocer significa transformar la realidad para entender cómo se produce un cierto estado. La posición piagetiana sobre la epistemología ha influido a varios investigadores cuyos modelos reflejan una secuencia de desarrollo evolutivo.

En este sentido, desde una explicación evolutiva, y enmarcado en el campo del desarrollo de las creencias epistemológicas, Perry (1981) en 1968 se interesó por las diferencias de las respuestas de los estudiantes sobre la diversidad intelectual y los ambientes sociales de las universidades. Basado en dos décadas de entrevistas conducidas con estudiantes de la Universidad de Harvard, predominantemente masculinos, Perry propuso que los estudiantes progresan de modo serial sobre nueve posiciones intelectuales y éticas. En los estados tempranos, los estudiantes ven el conocimiento como algo bueno o malo y creen que la figura de la autoridad tiene todas las respuestas. Después de ser expuestos a varios modelos y paradigmas conflictivos, los estudiantes pueden llegar a concluir que un punto de vista puede ser tan malo como bueno. Así, se plantea que los estudiantes progresan a través de niveles altos de educación y llegan a percibir el conocimiento como relativamente correcto sobre varios contextos. Finalmente, cerca de la conclusión de sus carreras universitarias, los estudiantes llegan a darse cuenta que hay múltiples posibilidades para conocer y que este es el momento cuando pueden comprometerse con algunas ideas.

En esta línea de investigación de las creencias, otros trabajos se desarrollaron con base en el trabajo de Perry; tal es el caso de Belenky, Clinchy, Goldberger, y Tarule (1986) acerca de las formas de conocer de las mujeres y de cómo este conocimiento se desarrolla a lo largo del tiempo. Otro modelo de la epistemología personal que se centra sobre el desarrollo intelectual es el de Kitchener y King (1981). Su modelo del juicio reflexivo que incluye siete estados de las creencias sobre el conocimiento y la realidad.

En contraste a una aproximación de desarrollo evolutivo, Schommer (1990) desarrolló un modelo de la epistemología personal que intenta capturar la multidimensionalidad de las creencias epistemológicas. La autora argumenta que las creencias epistemológicas representan un sistema multidimensional de creencias más o menos independientes. En tal sentido, sugiere que el desarrollo de las creencias epistemológicas puede ser recursivo, y que el desarrollo y cambio son influidos por nuestras experiencias. Estas experiencias incluyen las de la educación formal (ejemplo: involucrarse en el aprendizaje y solución de problemas, la influencia del maestro, la influencia de los compañeros) y la experiencia de la vida cotidiana (ambiente del hogar).

Gil (1993) postula la existencia de la denominada “docencia del sentido común” que se caracteriza por una serie de creencias inadecuadas respecto a los alumnos y la enseñanza (i.e. los alumnos aprenden en función del nivel socioeconómico al que pertenecen, los alumnos motivados por aprender lo están debido a su familia, enseñar es fácil o cuestión del sentido común, la inteligencia y las habilidades son fijas y no pueden modificarse con la instrucción, etc.).

Lo anterior contribuye a justificar la importancia de realizar estudios que analicen las creencias de los maestros, como modelos conceptuales inmersos en sus propias concepciones específicas de dominio, en este caso el de las matemáticas.

3.2 Creencias epistemológicas en matemáticas

En el área de las creencias epistemológicas en matemáticas, Muis (2004) realizó una revisión y análisis crítico (meta-análisis) de 33 estudios sobre las creencias epistemológicas de los estudiantes acerca de las matemáticas.

Identificó cinco categorías principales: creencias sobre las matemáticas, desarrollo de las creencias, efectos de las creencias sobre la conducta, diferentes dominios y cambio de las creencias. Los estudios que examinaron las creencias sobre las matemáticas revelaron patrones consistentes de la influencia de las creencias en todos los niveles educativos. Los ambientes instruccionales en matemáticas influían el desarrollo de las creencias sobre las matemáticas. Todos los estudios revelaron relaciones significativas entre las creencias y cognición, motivación, y rendimiento académico. Los trabajos descriptivos encontraron relaciones entre creencias y conductas de aprendizaje. Los estudios que examinaron diferentes dominios encontraron variaciones significativas en las creencias a través de las disciplinas. Los que se centraron sobre el cambio de las creencias fueron exitosos, y dichos cambios fueron atribuidos a los cambios apropiados en el estilo instruccional, cuando menos en este meta-análisis.

De esta forma, en el estudio meta-analítico de Muis (2004) resultaron de interés los resultados relacionados con la categoría de los efectos de las creencias epistemológicas sobre la conducta y el cambio de las creencias epistemológicas. Adicionalmente, en su revisión este autor describe que desde 1960, la investigación epistemológica se ha centrado sobre cómo las creencias de los estudiantes maduran con el tiempo. En los inicios de los ochenta y adentrándose a los noventa, la investigación llegó a centrarse específicamente más en cómo estas creencias median la conducta de los estudiantes y precisamente cómo las creencias de los estudiantes median factores cognitivos y motivacionales que subrayan el aprendizaje y su rendimiento.

Dentro de los resultados, se examinó el impacto de las creencias de los estudiantes sobre su conducta, donde revelan relaciones significativas entre las creencias y sobre cómo los estudiantes se involucran en el aprendizaje y el rendimiento académico.

En cuanto a la metodología empleada en los diversos trabajos, se encontró que los estudios orientados cualitativamente han observado que las creencias de los estudiantes parecen influir en su aprendizaje con respecto a la cantidad de tiempo que emplean para trabajar sobre un problema, a las estrategias que utilizan para solucionar un problema y a sus justificaciones que constituyen una respuesta correcta. En tanto, los estudios con orientación cuantitativa se han apoyado en las medidas del auto-reporte para evaluar las estrategias que los estudiantes utilizan, sus orientaciones motivacionales y su confianza para tener éxito en una tarea. Estos estudios también encuentran relaciones significativas entre las creencias de los estudiantes y los tipos de conductas mientras aprenden y en cómo estas conductas se relacionan con su rendimiento. El foco central ha sido sobre cómo las conductas de aprendizaje pueden mediar las creencias y el rendimiento.

Por otra parte, la mayoría de los estudios que han examinado diferentes dominios en las creencias encontraron respaldo para la hipótesis del dominio específico como factor relevante; esto es, las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza del conocimiento y el aprendizaje fueron diferentes a través de los diferentes dominios y niveles de la educación. Muis refiere que si las creencias son multidimensionales, se puede argumentar que ciertas dimensiones en los estudiantes pueden ser similares al inicio de su educación como estudiante universitario, y las diferencias que se acentúan a medida que aumentan su pericia en dominios específicos, y por ello pueden no ser iguales o estables.

Lo anterior es consistente con los trabajos de Perry (1981) acerca de la evolución del pensamiento, del cambio de las creencias afectadas por la instrucción o por la experiencia de la vida diaria propuesta por Schommer (1990) y Gill et al. 2004. Así, como la existencia de creencias más o menos independientes, pero que de alguna forma se encuentran interrelacionadas (Schommer, 1990).

Con respecto al dominio del cambio de las creencias epistemológicas, resulta de interés central tratar de acercarse mediante una propuesta de intervención al cambio de las creencias de los profesores y posibilitar la mejora de la enseñanza.

En la literatura sobre el cambio de las creencias, existen numerosos argumentos que se han hecho acerca de cómo los investigadores deberían aproximarse a este objeto de estudio y cómo evaluar las condiciones requeridas para poder lograrlo. Por ejemplo, Posner, Strike, Hewson, y Gerzog (1982) proponen que la investigación sobre el tema puede proveer algo de insight dentro de las condiciones necesarias para el cambio de las creencias. El modelo que proponen Posner et al. se basa en cuatro condiciones señaladas para que esto ocurra. En la primera condición, los individuos deben estar insatisfechos con las actuales concepciones. Segundo, las nuevas concepciones deben ser inteligibles; esto es los individuos deben ser capaces de entender las nuevas creencias. Tercero, las nuevas concepciones deben ser plausibles, de tal manera que los individuos sean capaces de aplicar adecuadamente las nuevas creencias. Finalmente, las nuevas concepciones deben surgir para la investigación futura.

Una de las investigaciones analizadas en el dominio del cambio de las creencias, es la de Erikcson (1993), quien examinó el impacto de un proyecto diseñado para asistir a maestros en la implementación del nuevo Curriculum y los Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares (NCTM, 1989) y los Estándares Profesionales para las Matemáticas Escolares (NCTM, 1991), en Estados Unidos. Uno de los principales y nuevos estándares para las matemáticas es que los maestros centren más su instrucción en el entendimiento conceptual de las matemáticas que sobre las técnicas de cómputo eficientes. Una de las recomendaciones para los maestros fue implementar en el salón un ambiente con orientación constructivista. Así, los maestros fueron guiados en el desarrollo de un ambiente de aula centrado en proveer problemas relevantes e interesantes y utilizando herramientas y técnicas modernas en las matemáticas escolares. Los maestros también fueron guiados para cambiar el centro de las actividades al proveer a los estudiantes de oportunidades para explorar, trabajar en pequeños grupos y enfatizar el entendimiento de los conceptos más que el cómputo.

En esa misma investigación de Erikcson, se reporta que la visión de dos maestros (“A” y “B”) de educación media fue investigada acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus percepciones del propósito de la educación como su transformación dentro de la planificación para la instrucción y la enseñanza. Se aplicó al inicio y final del estudio un cuestionario, que reflejara sus definiciones de las matemáticas, los tópicos que enseñan en sus clases y sus puntos de vista de la educación escolar pública. Los maestros también participaron en entrevistas pre y pos-intervención para discutir sus metas del año escolar y cómo fueron logrando esas metas. En la segunda entrevista, los maestros elaboraron sus definiciones de las matemáticas y puntos de vista acerca de los propósitos de la educación. También se examinaron los planes de las lecciones de los maestros, un portafolio de los materiales más que los materiales de texto y videotapes de las lecciones.

Erickson (1993) concluyó que las creencias y el rendimiento de los estudiantes del maestro “A”, así como sus clases no cambiaron significativamente debido al ambiente del aula. Éste continuó siendo el más tradicional, donde el papel del maestro fue de proveedor de conocimiento más que de promotor o mediador de la construccción del conocimiento. En comparación con las creencias y el rendimiento de los estudiantes de las clases que sí cambiaron en el caso del maestro “B”, dónde Erickson argumentó que esto fue el resultado del ambiente del aula y de las actividades con una orientación constructivista.

En resumen, acerca del cambio de las creencias, Muis refiere que muchos estudios examinaron si las creencias de los estudiantes pueden cambiar como resultado de cambios específicos en la instrucción del salón de clases donde se han encontrado cambios positivos. Estos estudios proveen alguna evidencia de que las creencias de los estudiantes son maleables y que este cambio puede ocurrir al cambiar los métodos por los cuales los estudiantes se involucran en el aprendizaje. Sin embargo Martínez Fernández (2004) no encuentra que la percepción de los estudiantes acerca de la docencia sea una variable relevante en la explicación del cambio conceptual.

En su tesis doctoral Martínez Fernández encuentra que los aspectos emocionales son importantes en el pensamiento del estudiante (más motivados y si perciben la docencia como desafió e innovación); sin embargo en su análisis de otros estudios considera que ni esa motivación, ni esa percepción de la docencia explican el cambio conceptual. Considera que la gente cambia cuando dispone de información (a mayor nivel de estudios más favorable) y particularmente la explicativa en su trabajo es la metacognición. Es decir, si una persona es metacognitivamente hábil el cambio es posible y factible, si además esa persona esta intrínsecamente motivado y percibe la docencia como innovación y desafió es mejor. En otro caso si la persona percibe la docencia como desafió y esta intrínsecamente motivado, y en los últimos casos alta pericia pero no es metacognitivamente hábil el cambio se dificulta.

Los resultados de esta línea de investigación (Muis, 2004) sugieren que el corazón del desarrollo de las creencias epistemológicas reside en el contexto del aula en que los estudiantes aprenden. Sin embargo, los tipos de instrucción en los cuales los estudiantes están inmersos son paralelos a los tipos de creencias que éstos tienen. La enseñanza que se centra sobre la velocidad, la precisión y la memorización de reglas y los procedimientos centrados en las presentaciones del maestro y la práctica aislada, están asociados con las creencias de que el aprendizaje es rápido, donde hay únicamente una respuesta cierta, el éxito requiere habilidad innata, el conocimiento matemático es incambiable y consiste de piezas aisladas de información, y el maestro es el origen por el cual se justifica el conocimiento matemático. En contraste, la aproximación orientada al constructivismo (Díaz-Barriga, 2005) centra la enseñanza sobre contextos significativos y auténticos, involucra a los estudiantes en actividades de grupo y de colaboración para construir el conocimiento matemático, son procesos orientados, y proveen tiempo para que los estudiantes aprendan. Estos tipos de diseños instruccionales están asociados con las creencias de que las matemáticas son una forma de pensamiento, que el conocimiento matemático está interrelacionado, relacionado con otras disciplinas y otras facetas de la vida, que se aprende con el tiempo y con esfuerzo, que no es innato, que puede ser construido individual y colaborativamente, más que recibido pasivamente de la autoridad representada por el maestro. De este modo, específicamente en el caso de los maestros, la influencia de las creencias es importante. Se ha encontrado que afecta su práctica educativa y pueden ser el reflejo de una postura inadecuada de cómo deben enseñarse las matemáticas (Gill et al., 2004).

En síntesis, a partir de los estudios citados, es importante reconocer que la epistemología tiene como finalidad el estudio del origen, naturaleza y justificación del conocimiento (Hofer, 2002; Royce, 1978). Así, se destaca la importancia de entender a las creencias epistemológicas como las creencias que se tienen acerca de naturaleza del conocimiento y aprendizaje (Schommer, 1990) y como estas creencias influencian los procesos cognitivos, en particular la razón y el pensamiento de los individuos (Hofer y Pintrich, 1997).

El estudio de las creencias epistemológicas de las matemáticas, revelan sus efectos sobre la conducta de los alumnos, la posibilidad del cambio de las creencias y la existencia de creencias independientes para cada dominio o materia, entre otros puntos importantes (Muis, 2004).

En cuanto al meta-análisis de Muis (2004) y otros estudios presentados se observa que las creencias en el campo de las matemáticas, pueden afectar el aprendizaje de los estudiantes y las prácticas educativas de los maestros (Gill et al. 2004), como fue el caso presentado por Erikcson (1993), donde una enseñanza centrada en el constructivismo puede favorecer más el aprendizaje conceptual en los alumnos que la enseñanza centrada en la práctica tradicional, en técnicas de cómputo de los algoritmos. Aunque no todos los autores reportan el papel relevante de la estrategia instruccional.

3.3 Estudio de las concepciones de los maestros

Los hallazgos de la investigación de las creencias de los maestros en la educación primaria y secundaria parecen tener consenso sobre varios aspectos (Kane, Sandretto y Heath, 2002):

- Los estudiantes entran a los programas educativos del maestro con creencias preexistentes basadas en su experiencia como estudiantes en escuelas.
- Estas creencias son robustas y resistentes al cambio.
- Las creencias actúan como filtros permitiendo o filtrando la entrada de nuevo conocimiento que es considerado compatible o incompatible con creencias actuales.
- Las creencias existen en forma implícita y son difíciles de articular.

Basado en el concepto de sistema de creencias Green (1971, cit. en Thompson, 1992) identificó tres dimensiones de los sistemas de creencias. La primera de estas dimensiones es que una creencia jamás es sostenida en total independencia de todas las otras creencias y que esas mismas creencias están relacionadas a otras en la forma de que las razones están relacionadas a las conclusiones.

La segunda dimensión de Green está relacionada al grado de convicción en el cual las creencias son sostenidas sobre un punto de vista psicológico. De acuerdo a Green las creencias en el sistema pueden ser vistas como centrales o periféricas, las centrales pueden ser creencias sostenidas fuertemente, y las periféricas son más susceptibles al cambio o a la examinación.

La tercera dimensión de Green está relacionada con la convicción de que "las creencias son sostenidas en *clusters* o agrupamientos, más o menos en aislados de otros *clusters* y protegidas de cualquier relación con otro conjunto de creencias" (p. 48).

En adición, originalmente Thompson al aludir a la noción de sistema de creencias, se refiere a las "concepciones de los maestros, vistas más como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, normas, imágenes mentales, preferencias y parecidos. Entonces, la distinción puede no ser tan importante, esto pude ser más natural al referirse a las concepciones de los maestros de las matemáticas más como una disciplina que como un simple diálogo de las creencias de los maestros sobre las matemáticas" (Thompson, 1992, p. 130).

No obstante a la revisión teórica que realizan algunos autores (Kagan et al., 2002; Thompson, 1992; y Pepin, 1999) reportan que la literatura sobre el conocimiento y las creencias de los maestros desde los niveles primaria y secundaria han desarrollado un número diferente de términos. Al respecto, Kagan (1990, op. cit.) nota el problema de que términos como cognición del maestro, auto-reflexión, conocimiento y creencia cada uno puede ser utilizado para referirse a un fenómeno diferente. La variación en la definición de un término puede extenderse desde lo superficial y lo idiosincrásico a lo profundo y teórico.

Por su parte, Monroy y Díaz (2004) destacan que el pensamiento pedagógico del docente es un marco de referencia que integra un conjunto de teorías implícitas, creencias, expectativas, nociones y valores mediante los cuales el profesor significa, interpreta, decide y actúa en sus actividades educativas. Este conjunto de representaciones pedagógicas ha sido reconstruido personalmente sobre la base de conocimientos pedagógicos históricamente elaborados (pedagogías tradicionales, conductuales, activas, operatorias, constructivas, críticas) y apropiados por medio de la reformación docente y de la propia práctica. Las teorías implícitas (reconstrucciones personales) no sólo son un sistema cognitivo como dispositivo epistémico de interpretación de la realidad, sino también como un sistema referente de planificación y de control de la acción, no se reducen por lo tanto a un mero ejercicio intelectual, sino son parte de la actividad vital para interactuar con el medio.

Este tipo de estudios sobre las representaciones, creencias, expectativas y valores de los docentes ha tenido una orientación hacia la investigación educativa, pero también es una metodología utilizada para reflexionar sobre el pensamiento pedagógico de los profesores, con la intención de evaluar las representaciones de sus actividades académicas. El análisis de las teorías y creencias docentes es una alternativa para pensar cómo conciben ellos el pensamiento pedagógico en diferentes momentos de su quehacer educativo. Antes de iniciar las actividades docentes, el análisis del pensamiento docente brinda información acerca de la manera como el profesor se representa la práctica educativa que ejercerá con sus alumnos. Durante la acción educativa, la evaluación del pensamiento pedagógico del profesor proporciona datos sobre cómo y con base en qué elabora juicios y toma decisiones durante su intervención en los procesos de enseñanza y aprendizaje, cuando el profesor culmina una etapa del trabajo, permite observar cómo percibe la experiencia de su actividad, qué habrá de cambiar, qué habrá de desechar o enriquecer para que en futuras actuaciones educativas prevean resultados más afortunados.

En este sentido, indagar el pensamiento docente puede ser un mecanismo para evaluar a los profesores antes, durante o después de su intervención en las prácticas educativas. De este modo, se perfila como una metodología que se dirige en forma específica a cómo mejorar la planeación docente, la interacción en el aula, y de que manera mejorar la actividad en futuras realizaciones. Además, una metodología de evaluación docente que toma en cuenta motivos y significaciones de los profesores. Por otra parte, dentro de los elementos históricos se destaca que la psicología cognitiva, concretamente el enfoque del procesamiento de la información, desarrolló algunos de los primeros trabajos sobre el pensamiento del profesor (Monroy y Díaz, 2004).

De acuerdo con Monroy, uno de los aspectos cruciales para ubicar la evaluación de la docencia por medio de la reflexión sobre las teorías y creencias del docente consiste en concebirlo como un práctico reflexivo (Schön, 1994). El practicante reflexivo, dice Schön necesita reflexionar críticamente sobre el significado de su pensamiento y acciones como un camino para mejorar su práctica profesional; si ésta tiene que cambiar, los docentes necesitan evaluar algunas de sus creencias fundamentales para alejarse del “siempre me ha funcionado” o del “no tengo que cambiar”.

Una de las premisas fundamentales de este enfoque es que el docente es un sujeto que reflexiona, emite juicios, toma decisiones e imprime un sentido a su práctica educativa de acuerdo con sus teorías implícitas, creencias y valores. Es importante reflexionar (evaluar) sobre el papel determinante que desempeña el cúmulo de representaciones y de elementos que articulan su práctica: su concepción de lo que es la enseñanza, sus creencias sobre métodos de enseñanza y aprendizaje más pertinentes, sus teorías sobre cuándo consideran que sus alumnos ya aprendieron, sus actitudes y valores que han construido acerca de lo que es su papel como docentes, entre otros aspectos educativos, ya que se suele considerar que un resultado "positivo y pertinente" de los procesos de enseñanza y aprendizaje depende, en una medida considerable, de la manera en la que el docente ejerce, concibe, planifica, ejecuta y reconsidera su actividad (Clark y Peterson, 1990, cit. en Monroy y Díaz, 2004).

Otra premisa fundamental de los estudios sobre el pensamiento docente es que abre la posibilidad de considerar las teorías como precursoras, reguladoras o antecedentes de la acción y como apoyo para la evaluación. Si se pretende mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, es preciso que los docentes reflexionen sobre que teorías, creencias y valores que preceden a la práctica educativa. Es más probable prever su comportamiento si se conocen sus modelos de representación pedagógica. Basados en sus análisis Monroy y Díaz (2004) describen que al término de las acciones educativas, la reflexión sobre las prácticas educativas realizadas permite hacer explícitas las teorías pedagógicas y da oportunidad para replantear los valores educativos.

Los estudios sobre el pensamiento docente no desconocen las frecuentes contradicciones entre lo que se piensa y se hace. Los autores sintetizan, el cambio conceptual no es suficiente, aunque es necesario para producir una práctica mejor. El análisis conceptual se verá enriquecido si se acompaña con estudios sobre cómo se hace posible el pensamiento en la práctica. Un ejemplo de ello es el uso de portafolios del docente, en el que, además de observar el cambio conceptual, también se constata la producción docente.

Por otra parte, (basados en el análisis de Monroy y Díaz, ob cit.) en cuanto a los estudios sobre el pensamiento docente, el análisis de las teorías y las creencias de los docentes ha sido abordado desde diferentes ángulos y perspectivas. Rodrigo, Rodríguez y Marrero (1993) mencionan que las personas construyen sus teorías sobre la realidad a partir de experiencias personales, obtenidas en los episodios de contacto con prácticas y formatos de interacción social. Los autores realizan un análisis de las síntesis de conocimiento pedagógico (conductuales, activa, crítica, constructivista, entre otras), posteriormente un análisis de la síntesis de creencias. De una manera simple se podría decir que los profesores tienen mucha información de teorías pedagógicas alternativas que son capaces de conocer y discriminar, pero sólo creen en alguna de ellas, y son las que asumen como propias. El estudio también da cuenta de la relación que guardan las teorías implícitas de los profesores con las prácticas pedagógicas, específicamente en la planeación de la enseñanza.

Otra experiencia importante sobre el pensamiento docente y la planeación educativa se encuentra en Taylor (1984) y Tillema, (1970, citados en Monroy y Díaz, 2004). Taylor observó que los profesores, cuando planificaban, no seguían la manera lineal el esquema de

Tyler (en donde los objetivos de enseñanza son la primera preocupación); su principal inquietud se centró en los intereses y las actitudes de los alumnos y en el contenido que se va a enseñar. Por su parte, Tillema concluyó que los docentes basaban su planeación en el diagnóstico que realizaban sobre el conocimiento previo que tenían los alumnos. En ambos estudios, los profesores no necesariamente iniciaban planificando en función de los objetivos de la enseñanza. Se destaca la afirmación de que si las instituciones quieren modificar los programas de estudio, los modos de enseñanza y aprendizaje, así como los mecanismos de evaluación, no habrá que pasar por alto el pensamiento del profesor.

Peterson, Marx y Clark (1978) ofrecen resultados sobre las concepciones prácticas de los profesores; descubrieron que éstos hacen hincapié en unos aspectos más que en otros, de acuerdo con las concepciones que poseen. Así, por ejemplo, extienden el tiempo en ciertos temas, y otros, en cambio quedan reducidos o incluso suprimidos. Borko, Shavelson y Stern (1981) advirtieron que los profesores con creencias tradicionales más fuertes concedían menos responsabilidad a los alumnos en contraste con los que tenían creencias progresivas, quienes juzgaban más importantes los objetivos de competencia social y de desarrollo emocional. Los profesores con creencias tradicionales fuertes, por ejemplo, pasan más tiempo corrigiendo aspectos de orden y de disciplina que enseñando. Por otra parte, Good (1983) analizó tipos de expectativas de los docentes y las maneras como se forman y comunican en el salón de clases. Uno de los resultados más interesantes permite entender cómo algunos alumnos tienen más oportunidades para pensar, responder y ser comprendidos en función de las expectativas positivas que maneja el docente.

En esta misma dirección de investigación, Coll y Miras (1993) comprobaron que los profesores con mayores expectativas de rendimiento de sus alumnos pueden llegar a afectar significativamente el rendimiento efectivo de los mismos. Por el contrario, cuando los resultados de los alumnos no concuerdan con los resultados de los alumnos no concuerdan con las expectativas de los docentes, se estima que ésa no es la realidad.

Monroy (1998) presentó resultados sobre el pensamiento didáctico de profesores de Historia en educación media superior. En síntesis, los resultados permitieron conocer que los docentes dedican poca o nula ayuda a los estudiantes en su aprendizaje, más bien centran su actividad en la enseñanza. Con poca frecuencia se observan representaciones en donde ellos, como expertos de la docencia, ofrezcan apoyo par producir una aproximación entre los que intentan que construyan los alumnos y los significados que representan los contenidos escolares que enseñan. Una ultima crítica que Monroy y Díaz (2004) hacen a los estudios del pensamiento docente es que no se da necesariamente una relación lineal ni una congruencia entre lo que se piensa y lo que se actúa, misma afirmación que se encuentra en el trabajo de Kane, Sandretto y Heath (2002) la discrepancia entre las creencias de la enseñanza y la práctica educativa de los maestros. La inquietud por unir lo normativo y factual, lo que se dice y lo que se hace, puede enriquecer los estudios del pensamiento docente.

Por su parte Martínez y Gorgorió (2004) en un estudio acerca de las concepciones de los profesores sobre la resta y, en particular el papel que asignan a la contextualización en este contexto. De interés entienden las concepciones como el conjunto de representaciones internas evocadas por un concepto. Son las organizadoras implícitas de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva. Describen la naturaleza de los objetos matemáticos y las diferentes imágenes de estos en la mentes, ya sean simbólicos, gráficos, etcétera.

Para Martínez y Gorgorió las concepciones no sólo hacen referencia a la naturaleza de las matemáticas y de los objetos de las matemáticas, sino también hay concepciones relacionadas con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Para los objetivos de su trabajo, estos autores, entendieron por concepciones sobre la enseñanza de la resta, los pensamientos asumidos por los profesores en relación con los fines, objetivos y contenidos de aprendizaje de la resta en la educación primaria; los roles del enseñante y el alumno; el tipo de actividad didáctica o proceso instruccional más apropiado; el papel asignado a la contextualización y la enseñanza de la resta.

En sus resultados destaca que para los profesores la contextualización de la enseñanza de la resta debe hacerse a través del planteamiento y la resolución de problemas escritos; poner palabras claves; plantear y resolver problemas con un mismo tipo de estructura relacional; y que las dificultades de aprendizaje de las matemáticas son inherentes al alumno, resultados que en parte son similares a los de estas tesis.

Finalmente, destaca la utilidad y necesidad de continuar con los esfuerzos por investigar y analizar las creencias (Muis, 2004, Gill et al. 2004;) las concepciones (Pepin, 1999) y el pensamiento docente (Monroy y Díaz, 2004), pues se considera que éstos tienen una fuerte influencia durante la instrucción escolar de los maestros, que definirá de manera importante la calidad y tipo de aprendizaje que adquieran los alumnos.

En cuanto al orden en que se presenta los trabajos sobre las creencias (Shommer), el pensamiento del profesor (Monroy y Díaz) y las concepciones (Thompson) podrían llevar a una posible confusión, sin embargo al sustentarse este trabajo en la definición de Thompson, se considera que las concepciones abarcan las anteriores. De ahí la importancia de presentar las principales definiciones y trabajos correspondientes.

En este sentido en el marco anterior se concibe que durante las entrevistas realizadas en esta investigación los maestros en sus respuestas revelen o expresen sus concepciones y en estas concepciones se incluyan al mismo tiempo la expresión de sus creencias y de su pensamiento docente. De esta forma, en esta parte de la investigación se asume que todo cuanto logren expresar en su discurso los maestros será considerado como *las concepciones de los maestros*, que ayudarán a contrastar su actividad en la práctica escolar real, y relacionarlo con aprendizaje y los conocimientos que el niño sabe y adquiere acerca de los conocimientos matemáticos que se analizan en esta tesis.

CAPÍTULO 4. Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

4. 1 El estado del arte en la didáctica específica de las matemáticas en México

4.1.1 La década de los ochenta (1982-1992)

En esta década, de acuerdo con Waldegg, et al. (1995, Coord.), el área de estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos específicos se consideraba un área de desarrollo muy reciente; de hecho, no existía como tal cuando se celebró el Primer Congreso Nacional de Investigación Educativa en 1981.

En el estado del conocimiento coordinado por Waldegg, et al. (1995) se realizó un estudio de carácter diagnóstico sobre el desarrollo alcanzado por las investigaciones de los procesos de enseñanza y aprendizaje de disciplinas específicas, centrándose en el período que va de 1982 a 1992. Se trata de una investigación de tipo documental, donde se realizó una consulta a expertos, así como la búsqueda y análisis de materiales bibliográficos y hemerográficos, colecciones de instituciones especializadas en investigación y educación, tesis de doctorado, maestría y licenciatura. El propósito de este trabajo fue mostrar los avances en la investigación de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas durante la década de los ochenta (1982-1992), tratando de incorporar en lo posible, las publicaciones más recientes.

Dentro de sus antecedentes la preocupación por estudiar los problemas de enseñanza de la matemática se remonta a inicios de la Escuela Normal. Ya como una disciplina autónoma, con orientación sistemática hacia la investigación, la educación matemática tiene sus orígenes en México en la década de los setenta. En 1975 se crea una maestría en Ciencias con la especialidad de Matemática Educativa, con el auspicio del centro de investigación y de estudios avanzados (CINVESTAV), del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en la Sección de Matemática Educativa (SME) del Departamento de Investigaciones Educativas (DIE) del CINVESTAV.

Sin embargo, la investigación hasta el momento se había centrado en la elaboración de textos y en la formación docente y no precisamente en la profundización del conocimiento sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza, dando inicio a esta investigación a finales de la década de los ochenta con las primeras tesis de doctorado.

Una parte importante de la actividad de la comunidad de educadores de la matemática de esa época estaba dirigida a la elaboración de productos de desarrollo fundamentados en los resultados de la investigación. Dentro de estos productos destacan la edición de textos para maestros y alumnos, así como el diseño y desarrollo curricular. El doble proceso de diversificación y especialización en el campo de la educación matemática ha suscitado la necesidad de reflexionar acerca de la composición de este campo, las características de sus objetos de estudio y las distintas aproximaciones teóricas y metodológicas con las que éstas se abordan.

En el estado del conocimiento[*] se consideraron para el análisis de las investigaciones dos niveles. El primero corresponde al nivel escolar dentro del cual se inscribe el trabajo; en esta clasificación se determinaron tres grupos:

- Niveles básicos (preescolar, primaria y secundaria)
- Niveles medio superior y superior (secundaria en ciertos casos, preuniversitario y superior).
- Aspectos generales (trabajos en los que los niveles educativos no son determinantes y los resultados teóricos que pueden ser aplicados a cualquier nivel).

Las investigaciones que caen en el primer grupo se relacionan principalmente con aspectos psicológicos, sociológicos o pedagógicos generales del fenómeno educativo. La segunda clasificación sugerida obedece a los aspectos psicológicos, sociológicos o pedagógicos que se estudian y, por la otra, a las disciplinas específicas que abordan los estudios. De esta forma, de interés especial para los niveles básicos se tiene:

- Estudios sobre el alumno.
- Estudios sobre los contenidos de las matemáticas.
- Estudios sobre la didáctica de las matemáticas
- Análisis curricular.
- Estudios sobre conocimientos, concepciones y prácticas del maestro.
- Estudios sobre la formación de los maestros.

A continuación se presentaran sólo aquellos que son de interés para la presente investigación.

- **Estudios sobre el alumno**

Se reporta que la mayor parte de las investigaciones centradas en el alumno se han orientado a la exploración cualitativa de habilidades, competencias, dificultades conceptuales, errores y construcción de conceptos. Las influencias de la investigación internacional recibidas en esta área específica de investigación han sido diversas. Pueden advertirse investigaciones que retoman los marcos conceptuales construidos por los anglosajones (K. Hart, T. Kieren, Carpenter y Moser, citados por Waldegg, et al. 1995). Esta influencia se ha dejado sentir sobre todo en los estudios relacionados con los números racionales. Paralelamente se han construido trabajos con una clara influencia francesa, en particular de G. Vernaud o C. Escarabajal, en la investigación relacionada con las operaciones matemáticas.

Muchos investigadores buscaron ir más allá de la descripción de habilidades y competencias de los alumnos y profundizaron en el estudio sobre los procesos cognoscitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, en la década de los ochenta, algunas instituciones tales como el DIE y el DME del

[*] Revisión exhaustiva a nivel nacional e internacional de trabajos e investigaciones acerca de un tema especifico, en este caso sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

CINVESTAV, la UPN y la DGEE, realizaron una producción considerable en investigación para explorar el desempeño y las conceptualizaciones de los estudiantes con relación a los contenidos matemáticos específicos. Los estudios realizados –con diferente nivel de profundidad y rigor- se centraron, en los siguientes temas:

- Los números racionales (Ávila y Mancera, 1987 y 1989; Figueras, Filloy y Valdemoros, 1985, 1986, 1987 y 1988; Figueras 1987 y 1988; Padilla, 1984; Valdemoros, 1993; citados en Waldegg, 1995).
- Las operaciones aritméticas con números naturales asociadas a la resolución de problemas (Ávila, 1993; Figueras, 1991; Vargas *et al.*, 1988) y sus sistemas simbólicos de representación (Nemirovsky, 1987 y 1988; Waldegg, 1995; citados en Waldegg, 2005).

La mayoría de estas investigaciones se caracterizaron por utilizar dos tipos de instrumentos para la obtención de los datos: pruebas de lápiz y papel y entrevistas realizadas individualmente. Son menos las que se plantean situaciones experimentales para observar el desempeño de los estudiantes. En la mayoría de estos estudios se busca identificar las estrategias y/o procedimientos de éxito o fracaso en la resolución de los problemas planteados. Hay interés preponderante para identificar el tipo y la naturaleza de las dificultades a los que se enfrentan los estudiantes y que constituyen obstáculos para el aprendizaje de los conceptos y las operaciones. Se resalta así la importancia del análisis de los errores, ya que éstos son entendidos como el reflejo de concepciones deficitarias o erróneas por parte de los alumnos. De acuerdo con el análisis de las investigaciones que se realizaron en este trabajo, la relevancia de los resultados radica en que se sabe que la posibilidad de ofrecer experiencias de aprendizaje adecuadas a los alumnos depende, en buena medida, del conocimiento que se tenga sobre la manera en que piensan, la dificultad de las tareas que se les plantean, el repertorio de estrategias que utilizan para enfrentarlas y los límites de su pensamiento.

- **Estudios sobre los contenidos de las matemáticas**

Se reporta que en los años ochenta, en México hay pocos estudios realizados en esta dirección. Además de los análisis de contenido incluidos en investigaciones cuyo propósito central es de índole didáctico, sólo se identificaron algunos trabajos, todos sobre la noción de fracción.

- **Estudios sobre la didáctica de las matemáticas**

En la década de los sesenta, surgen reformas curriculares en los países europeos; esta influencia se hizo presente en México. Durante los setenta y los ochenta, la teoría psicogénetica del desarrollo cognoscitivo cobró una vez mas influencia entre los profesionales de la educación dedicados al estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje, desplazando en varios países otras teorías como la conductista. Las relaciones establecidas entre la teoría psicogénetica del desarrollo cognoscitivo y la enseñanza escolar han sido diversas y puede decirse problemática (Coll, 1983; citado en Waldegg, et al. 1995). Dicha teoría proporcionó una explicación de los procesos de construcción del conocimiento racional (teoría de la equilibración), destacó etapas básicas en la evolución de las operaciones lógicas que subyacen determinadas nociones, y con ello también revitalizó un cuestionamiento fundamental: el fracaso de los alumnos no se debe únicamente a dificultades "propias" del conocimiento matemático o a las limitaciones de los sujetos, sino a una forma de enseñanza que no responde a los procesos que siguen los alumnos para aprender. El propósito fundamental de la didáctica de las matemáticas, considerada campo de investigación, es crear explicaciones fundamentales acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático en el salón de clases.

Dentro de los aportes de los trabajos más importantes citados por Waldegg et al. (1995) considera que son, por un lado, las mismas secuencias didácticas para el aprendizaje de temas específicos con un enfoque constructivista, así como el análisis de procedimientos y conceptualizaciones de los niños en relación con los temas abordados y, por otro lado, las reflexiones en torno a los elementos de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau. Durante la década de los ochenta, el enfoque que postula el aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas se difundió considerablemente en México y en muchos otros países, con distintas interpretaciones. En México se identificaron sólo algunos artículos con reflexiones teóricas o reseñas relativas a este enfoque.

- **Análisis Curricular**

En esta área de acuerdo a Waldegg et al. se registran pocas publicaciones cuyo objeto sea teorizar, reflexionar o analizar el currículo global de matemáticas para la educación básica y medía básica. En 1991, motivados por la reforma curricular que acompañaría el Programa de Modernización Educativa, aparecen algunos artículos del tema.

- **Estudios sobre conocimientos, concepciones y prácticas del maestro**

Ésta es probablemente una de las líneas de investigación en educación matemática menos trabajada en México en los años ochenta. En el nivel internacional esta línea era poco explotada y aún no se había consolidado en paradigmas. La mayor parte de los trabajos se basan en el análisis de una o dos clases, o unos cuantos fragmentos de clase, los cuales muchas veces resultan interesantes pero de obvias limitaciones.

No existen muchos trabajos cuyas categorías de análisis alimenten de manera importante las investigaciones orientadas a comprender la naturaleza de los problemas de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, desde la perspectiva más general y amplia que implica el analizar lo que ocurre en el aula. En gran medida, la autora fundamenta el interés de una tesis propia, que indague las prácticas del docente de matemáticas y vincularlas con la adquisición de las competencias matemáticas de los alumnos en relación con contenidos curriculares específicos, en este caso, las operaciones de suma, resta y solución de problemas aditivos.

- **Estudios sobre la formación de maestros**

En general, se identifican pocos trabajos de investigación publicados sobre el tema, a pesar de ser reconocido como piedra angular en el proceso de cambio escolar. Tres reportes de investigación exploran formas de trabajo directo con maestros en servicio, dos de ellas se realizan en las escuelas mismas e incluyen análisis de las sesiones de clase. Las tres investigaciones tienen como propósito muy general incorporar distintos aportes de los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva constructivista.

4. 1.2 La década de los noventa (1993-2001)

En continuidad al estado de conocimiento anterior y dentro del marco del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE) se plantea la descripción de un segundo estado de conocimiento acerca de la investigación educativa en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas elaborada en la década de los noventa. Con objeto de ilustrar más los fundamentos de este marco, enseguida se presenta una síntesis del estado del conocimiento realizado por Ávila, Mancera y colaboradores (2003), acerca de las investigaciones que se consideraron importantes en el campo de las matemáticas durante el período de 1993-2001. Es necesario mencionar que únicamente se toma la información correspondiente a la educación primaria, útil para este trabajo. Un primer dato, es que de acuerdo con este estudio realizado por Ávila et al. (2003) la educación básica en nuestro país esta totalmente influenciada por el enfoque constructivista.

En la organización de las investigaciones se optó por un primer nivel de clasificación que tomo como punto inicial los elementos del clásico “triángulo didáctico” (alumnos, maestros, saber), lo que dio lugar a las siguientes tres clases: investigaciones centradas en los procesos de aprendizaje de los *alumnos*, en los conocimientos de los *maestros*, o en las características específicas del *saber* a enseñar. A esta categorización inicial se añadió un cuarto elemento, el de recursos (libros de texto, materiales concretos, programas de software, etc.). Estos estudios se dividieron a su vez en dos tipos, que implicaban la interacción de los elementos mencionados: aquellos que analizan las prácticas de enseñanza, tal como ocurren en las aulas y aquellos que, como parte de su metodología, organizan programas experimentales de enseñanza. Así, se crearon dos categorías relativas a la enseñanza en el aula: *Prácticas de enseñanza y Enseñanza experimental.* Por último, se abrió una clase adicional, la educación de los adultos (Tabla 2)

De esta manera, en el trabajo original, se presentan siete apartados y para cada uno de ellos se estableció un segundo nivel de clasificación, determinado por el tema específico en el que se centra la investigación. En su acercamiento cuantitativo se reporta haber revisado un total de 116 investigaciones sobre la educación preescolar y primaria. En su análisis se describe que es en la categoría del *Saber* donde se registran menos estudios.

En la tabla siguiente (Tabla 2) se resume y especifica este primer nivel de clasificación.

Tabla 2. Categorías y objetos de estudio en los años noventa en educación matemática

Categorías	Objetos de estudio de las investigaciones
Alumnos	Procesos de aprendizaje de nociones de matemáticas específicas.
Maestros	Concepciones, conocimientos y opiniones de los maestros. Formación de maestros.
Saber	Nociones y conceptos de matemáticas que son objeto de la enseñanza. Análisis desde el punto de vista matemático, epistemológico, curricular, entre otros.
Recursos	Libros de texto, programas para computadora y otros materiales para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje.
Prácticas de enseñanza	Prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula.
Enseñanza experimental	Programas de enseñanza experimental de nociones específicas de matemáticas.
Educación de adultos	Conocimientos de matemáticas de los adultos, prácticas de enseñanza, currículum, libros de texto.

Fuente: Ávila et al., 2003, p. 10.

Por otra parte, se reporta de manera importante que el acercamiento predominante ha sido el estudio de los procesos de aprendizaje de los alumnos, mientras que, por el otro lado, el acercamiento a través del análisis de las prácticas de enseñanza todavía es relativamente poco explorado; hallazgos relacionados con el trabajo coordinado por Waldegg y colaboradores, (1995) correspondiente a la década de los ochenta. *Con respecto a este último punto, ésta es una razón más por la cual es importante continuar con este tipo de investigaciones como el que se realiza en esta tesis doctoral.* Por otro lado el tema de los adultos sigue siendo también poco estudiado.

En relación a las investigaciones por categorías, se reporta un desequilibrio claro entre la aritmética por un lado (61 investigaciones) y la geometría y la medición por otro (14 investigaciones). En aritmética hay también una concentración de investigaciones en el tema de números naturales y su operatoria, en comparación con el tema de los números racionales y de la proporcionalidad.

Dado que en el período se reportó la realización de 49 tesis de maestría y 6 de doctorado, para los autores, esto representa cierto fortalecimiento de la investigación sobre este nivel educativo en comparación con los años ochenta, y que sin embargo sigue siendo limitada esta producción teórica.

- **Investigación centrada en los alumnos**

En cuanto a las investigaciones del aprendizaje matemático de los alumnos, se reporta que en su metodología predominante se encuentra la utilización del interrogatorio y la entrevista clínica, orientándose al análisis de las respuestas de pequeños grupos de niños. Otra forma de recolección de datos consiste en la aplicación de cuestionarios a grupos escolares completos, que se llega a complementar con entrevistas individuales. Lo más frecuente es que se prefiera un tipo de análisis denominado cualitativo por los propios investigadores. Sólo tres de los trabajos utilizaron la estadística para sustentar el análisis y las conclusiones. Esto es de resaltar, pues refleja la tendencia actual, el análisis cualitativo predomina sobre los abordajes cuantitativos.

Se señala que en muchos casos, en la primera mitad de la década, la intención fue reconstruir la génesis de ciertas nociones, el saber cómo los niños “conocen” o “construyen” los conceptos matemáticos; otras veces, particularmente al final este, se observa también el interés por estudiar la adquisición de ciertos conceptos o habilidades que supuestamente deberían haber sido transmitidos o desarrollados en la escuela. Es decir que, sin abandonar el interés por los procesos cognitivos, el referente principal para ponderarlos son los objetivos o contenidos curriculares en vigor.

En relación con la edad o el grado que cursan, los alumnos que resultan preferidos son de segundo, tercero, cuarto o sexto grados. Los de primer grado – a pesar de estar en proceso de adquisición de los conceptos matemáticos básicos- y los de quinto- no obstante que éste ha sido un grado considerado tradicionalmente difícil- han sido descuidados por los investigadores. *Por lo que resulta relevante estudiar como se inicia o se desarrolla este proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el primer grado.*

Un tema sobre el cual la investigación informa es el de los números naturales. Las aportaciones sobre esta temática van desde el conteo, la adquisición y la lectura de los números de dos cifras en niños pequeños –pasando por la comprensión del valor posicional y los problemas con las cuatro operaciones aritméticas – hasta el cálculo mental. De acuerdo a un estudio realizado por Cortina (1997) con respecto a la comprensión y el manejo del valor posicional, al igual que en niños de otros países, la noción de valor posicional y su funcionalidad no está bien instalada en los niños mexicanos sino hasta en el cuarto grado. Los resultados del estudio de Cortina muestran que los alumnos progresan con el paso de los años, pero la mayoría de los que cursan segundo grado están lejos de haber comprendido el concepto de valor posicional, mientras que en el tercero hay aún quienes se mantienen igualmente alejados junto con otros que comienzan a adquirir la comprensión. Si bien los niños de cuarto grado muestran haber adquirido la noción, en la mayoría de ellos ésta no constituye un conocimiento firme.

Otro dato importante acerca de esta temática es el que ofrecen Eudave y Ávila (2001, citados en Ávila et. al, 2003) quienes señalan que siete años después de haber sido instrumentada la reforma a la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas continúa resultando más difícil a los niños que la realización de cálculos mecánicos.

La metodología de investigación utilizada en los trabajos hasta aquí comentados, en general consiste en la aplicación de cuestionarios (problemas escritos), la realización de tareas diseñadas para hacer aparecer ciertas concepciones y comportamientos, la entrevista crítica. Tal aproximación, a la vez que permite profundizar en las cuestiones que examina, implica al análisis de poblaciones pequeñas. También se señala que hay signos débiles de que la habilidad para resolver problemas –objetivo central de la reforma introducida en 1993- pueda correlacionarse con la práctica de los profesores que han asumido ciertas directrices del nuevo enfoque de enseñanza.

Es a partir de 1997 que se identifica un número mayor de trabajos que han desplazado la preocupación por la cognición en estricto sentido hacia el análisis del aprendizaje escolar, es decir, hacia la ponderación de aquellos que, según los objetivos curriculares, los alumnos deberían haber adquirido en la escuela. También se comienza a trabajar desde entonces el aprendizaje en situaciones de interacción. Empero, sólo eventualmente se mencionan las dificultades técnicas para vincular el aprendizaje de los conceptos con la enseñanza recibida y no se incluyen sino escasas reflexiones o datos que hagan explícita la tensión entre el sujeto productor de conocimientos y las restricciones del sistema de enseñanza. De hecho, sólo eventualmente se ha buscado relacionar los aprendizajes logrados con el análisis de las prácticas de enseñanza, y cuando esto ha ocurrido, se han encontrado dificultades para asociar los primeros con las segundas. *Nuevamente, esto da relevancia al estudio que se pretende conducir, que se enfocó al análisis de dicha relación entre enseñanza y aprendizaje.*

Investigaciones sobre conocimientos, concepciones, opiniones y formación de maestros.

Se reportan investigaciones en profesores, acerca de lo que saben, conocen u opinan sobre las matemáticas y su enseñanza. También se incluyen estudios sobre la formación (inicial o continua) de los docentes de educación preescolar y primaria y de otros profesionales que intervienen en la enseñanza de las matemáticas en preescolar o primaria.

Ávila et al. (2003) reportan un total de 24 investigaciones; donde casi todas abordan el nivel de educación primaria, aunque otras se desarrollan en educación preescolar, educación normal e incluso en una licenciatura en psicología. Los teóricos en los que se apoyan consideran a Freudenthal, Vergnaud, Vigotsky y Brousseau, cabe aquí resaltar la preponderancia de los teóricos de la didáctica francesa y de la psicología sociocultural, que ya habíamos ilustrado en el marco teórico y que es un reflejo de la intuición en el plano internacional

Para el desarrollo de las investigaciones por lo general se utilizaron metodologías cualitativas, aunque algunas de ellas se apoyan también en análisis de tipo cuantitativo. Con frecuencia en el apartado de metodología más bien se describen los instrumentos de recolección de datos; los más utilizados son: entrevistas, observaciones, cuestionarios, así como análisis de producciones escritas.

A diferencia del estado que guardaba la investigación en la década de los ochenta, en los noventa se aprecia un incremento importante de estudios que tienen como centro del análisis los conocimientos, concepciones, creencias u opiniones de los profesores en relación con algún contenido o recurso para la enseñanza de la matemática. Este incremento también se dio en el plano internacional ante la necesidad de conocer y entender no sólo a los niños sino también el papel de los profesores y formadores en enseñanza de la matemática. El auge de la etnografía como un acercamiento que permite entender aspectos de la realidad escolar que otras aproximaciones no logran, parece ser también un elemento a considerar.

De los diez trabajos identificados, cuatro se centran en las concepciones de los profesores sobre contenidos particulares: las fracciones, la geometría y la medición. Los otros trabajos son sobre creencias y conocimientos geométricos de los profesores o la opinión de los profesores sobre el trabajo en equipo durante la clase de matemáticas. Dos trabajos más investigan las opiniones de los maestros respecto de su práctica docente en matemáticas. Finalmente, dos trabajos que se centran en la práctica, uno que aborda el trabajo en equipo en la práctica, y el otro que estudia la incorporación del enfoque actual de enseñanza de las matemáticas en el salón de clases. *Esto muestra una clara necesidad de continuar la investigación en este campo de las concepciones de los maestros y maestras, específicamente acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como lo planteado en esta tesis doctoral.* Al respecto, no se reporta ningún estudio de este tipo con relación a trabajos acerca de las competencias relacionadas a la suma y la resta, así como la solución de problemas aditivos. Lo que implica la necesidad de hacer trabajos con este estilo más aún, como antes se indicó, vinculando lo anterior con la enseñanza y la concepción del docente.

Otro tipo de estudios que se reportan es acerca de la formación de los maestros en matemáticas. Los 17 estudios que se presentan abordan aspectos del enfoque de la enseñanza de las matemáticas como solución de problemas, la percepción sobre las estrategias, las respuestas y la acción de los niños, las fracciones, la proporcionalidad, la geometría, los números, la aritmética en general, las propuestas didácticas como elementos de formación y aspectos de las prácticas de los maestros durante el trabajo en matemáticas. Ávila et al. (2003) describen que estas investigaciones tienen una presencia importante, sobre todo en la segunda mitad de la década. Si bien en los años ochenta se utilizaba con relativa frecuencia la noción de saberes en su lugar aparece la investigación sobre lo que se ha dado en llamar concepciones de los profesores. No obstante, es escasa la cantidad de trabajos que definen o ubican teóricamente los conceptos de los que hacen uso, como este de concepciones. La autora afirma que resulta incipiente, a la vez que urgente, la evaluación de la formación en términos de la influencia en las prácticas cotidianas en el salón de clase.

Investigaciones sobre el saber (contenido matemático)

De acuerdo a Ávila et al. (2003) en los estudios sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se observa la tendencia a considerar que el objeto de enseñanza, el saber específico de que se trate, no está dado de manera unívoca ni transparente y que, por lo tanto, es indispensable analizar sus diversas definiciones posibles, su articulación con otros conceptos, sus propiedades, su génesis histórica. Se señala incluso la necesidad de hacer explícita una reconstrucción del objeto matemático, desde la didáctica, reconstrucción que de todas maneras ocurre en la enseñanza, de manera implícita e incontrolada (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; citados en Ávila et al. 2003). Esta forma de abordar la didáctica es lo que ha dado un renovado potencial a las investigaciones contemporáneas en esta disciplina.

Se reportan las siguientes aproximaciones para el análisis del saber:

- Análisis de las formas que asume el contenido matemático en el curriculum: Se revisan definiciones y propiedades del concepto en la disciplina, para después analizar los recortes y las interpretaciones específicas que ocurren en la enseñanza.
- Análisis histórico y epistemológico: se revisa el desarrollo histórico del concepto, casi siempre a través de fuentes secundarias.
- Análisis fenomenológico o situacional: A partir del concepto de fenomenología de H. Freudenthal, se revisan y clasifican los fenómenos que el concepto en cuestión ayuda a organizar, o bien, a partir de la noción de situación didáctica de G. Brousseau, de la noción de "estructura multiplicativa y aditiva" de G. Vergnaud, o del análisis de las relaciones entre datos de problemas aditivos de autores como Carpenter y Moser, se estudian las familias de problemas en las que el concepto funciona, destacando los distintos aspectos semánticos ("interpretaciones", "significados", "concepciones") que entran en juego cada vez.
- Análisis curricular: Se analizan las formas y significados específicos que asume el concepto en los programas y libros de texto.
- Análisis cultural: Se estudian nociones matemáticas en algunas culturas indígenas.

De acuerdo con Ávila et al. (2003), el análisis del saber, al mismo tiempo que permite relativizar la noción misma de "saber" al ponerla en relación con instituciones, culturas y períodos específicos, proporciona al investigador una visión más amplia del mismo, desde la cual pueden comprenderse mejor las elecciones (los recortes, las articulaciones privilegiadas, los caminos para la reconstrucción) que subyacen a las distintas formas, existentes o posibles, de organizar la enseñanza.

Investigaciones sobre materiales de desarrollo curricular y otros recursos de apoyo a la enseñanza

El propósito central de los estudios que aquí se reportan es el análisis de las características didácticas y uso de diversos recursos de apoyo a la enseñanza de la aritmética en educación preescolar y primaria. En la década que se analiza, el interés por estudiar materiales de desarrollo curricular, en especial los libros de texto, y otros recursos como software y calculadoras, es mayor que en la década de los ochenta. Durante los años noventa el recurso más estudiado fueron los libros de texto (oficiales y de editoriales privadas). En este tipo de trabajos el acercamiento metodológico es relativamente variado: los que tienen como propósito conocer o evaluar la forma en que libros de texto se utilizan en las aulas establecen el análisis desde enfoques cualitativos, o bien utilizan algún tipo de instrumentos que permite el análisis tanto cualitativo como cuantitativo, como en el caso de los estudios de opinión. Otros trabajos se apoyan en el análisis didáctico o de contenido y, ocasionalmente, en el análisis estadístico. Todos los estudios reportados se realizaron en el nivel de educación primaria y algunos de ellos incluso abarcaron también la secundaria. Los estudios fueron:

- Estudios sobre libros de texto: A partir del cambio del enfoque que se propuso oficialmente para la enseñanza de las matemáticas en educación básica, se estudia el uso y opinión que se tiene de los libros, especialmente desde el punto de vista de los maestros, y su presencia e impacto en la práctica. Los libros de texto son los primeros materiales junto con el plan y programas de estudio, en los que se concreta la reforma en marcha. Entrar en las aulas, entrevistar a profesores, platicar con los niños, redescubrir la fuerte presencia de los libros de editoriales privadas, es una constante en la mayoría de los estudios. Los trabajos de la década sobre los libros de texto gratuitos centran su atención en la forma en que los maestros reciben los nuevos libros oficiales ya sea a partir de lo que dicen y opinan de ellos, de la propuesta didáctica que presentan o de la forma que los utilizan en la clase. Otros estudios enfocan el análisis en las propuestas matemáticas y didácticas que sustentan los materiales oficiales en relación con un contenido específico, con todos los contenidos, e incluso se estudian aspectos más puntuales como el tipo de problemas verbales que proponen y las aplicaciones del desempeño docente ante los cambios curriculares propuestos. Por otro lado, los libros de editoriales privadas en primaria también son objeto de análisis desde el punto de vista didáctico. Hay estudios cuyo interés se centra en recursos distintos como son la pertinencia, relevancia y usos de software, la calculadora y del juego.

Como ya se mencionó la mayoría de los estudios se centran en el análisis de los libros de texto. Los estudios enfocados al análisis de los libros de texto se hicieron desde perspectivas distintas (análisis didáctico, entrevistas, encuestas). Tanto estos estudios como los consignados en torno al uso de los libros en la práctica fueron realizados, en su mayoría, durante los primeros años de la introducción de los libros de texto gratuitos elaborados bajo un nuevo enfoque didáctico. Queda por indagar los cambios en su uso o la influencia que pueden haber tenido en el aprendizaje con el paso del tiempo.

En relación con los estudios que refieren al uso de software y otros apoyos tecnológicos en matemáticas, el análisis didáctico es central pero –además de que sería deseable incrementar este tipo de estudios- también hacen falta análisis más puntuales en relación con contenidos específicos y que consideren el papel que los maestros, los compañeros y otros materiales pueden jugar al utilizar esa tecnología.

La investigación de las prácticas de la enseñanza

Conocer y explicar los conocimientos y procesos que tienen lugar en las aulas fue la intención de la década de los ochenta, no obstante, la indagación realizada sobre el tema no sobrepasó con mucho la intencionalidad. Afirmaciones contenidas en el documento que sintetiza la investigación de dicho período muestran tal situación: “Esta es probablemente una de las líneas de investigación en educación matemática menos trabajada en México. Al respecto, sólo se ha difundido un escaso número de trabajos y más escasos son aún, entre ellos, los que aportan elementos para la comprensión de las concepciones a partir de las cuales los profesores organizan sus prácticas” (Block y Waldegg, Coords., 1995, p. 58; citado en Ávila et al. 2003).

Dentro de los teóricos y metodologías en las que se basaron los investigadores, se encuentran las teorías desarrolladas por Yves Chevallard (particularmente con la noción de transposición didáctica) y Guy Brousseau, (principalmente su tipología de situaciones didácticas: acción, formulación, validación, institucionalización…) así como la noción de contracto didáctico. (A *considerarse en este trabajo de investigación).* Otra fuente conceptual la constituyen los trabajos etnográficos en sentido estricto, entre los que con frecuencia se mencionan los desarrollados en el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV y en especial los de Elsie Rockwell. Ávila et al. (2003) consideran que, las investigaciones no son muchas, pero en conjunto comienzan a desentrañar la lógica del quehacer cotidiano en las clases de matemáticas comunes.

La enseñanza es mencionada por algunos investigadores a inicios de la década que se recuenta (Block y Dávila; 1993; Ávila; 1994; cit. en Ávila et al. 2003). En ese entonces, sin embargo, las características de la acción docente no se aludían sino a manera de reflexión, con el fin de contrastar las potencialidades intelectuales de los alumnos con su escasa promoción en la escuela común. Sin embargo, Ávila describe los datos más precisos sobre la enseñanza que tiene lugar en las escuelas que provienen de la segunda mitad de la década. La mayoría de los trabajos desarrollados en este período tienen como objetivo identificar el cómo la reforma introducida en 1993 ha sido interpretada por los profesores o las formas en que ésta está siendo llevada a cabo. Se mencionan trabajos relacionados con la transposición didáctica y el contrato didáctico. También se discute que dentro de los cambios curriculares en los que se pretendía entregar el control de su acción cognitiva a los alumnos, aún permanece centrado en el profesor.

Sin embargo Ávila et al. consideran que, en cuanto a las aplicaciones, el conocimiento específico sobre las prácticas de enseñanza – sumando a los que otras vertientes de indagación proporcionen- ofrecerá elementos para confirmar, complementar o reorientar las políticas de formación continua de los profesores y de revisión de los materiales curriculares que el Estado distribuye en las escuelas.

Investigaciones en la línea de enseñanza experimental

Con respecto a la metodología de la investigación se caracterizan por incluir la realización de experiencias didácticas, por lo general en el aula y ocasionalmente fuera de esta, con grupos pequeños de alumnos. El propósito es, casi siempre, estudiar las condiciones de enseñanza que optimizarían los procesos de aprendizaje de temas específicos de matemáticas. En algunos casos, pocos, la investigación atiende a factores más generales de los procesos, por ejemplo, las formas de evaluación, el efecto de las interacciones entre pares o el efecto de la comprensión lectora, pero siempre en el marco de la enseñanza de un tema específico.

Los aportes son de diversa índole. Algunos trabajos se proponen poner a disposición del sistema educativo alternativas para la enseñanza de temas específicos. En otros se toma un poco la distancia con respecto a dicha expectativa, al subrayar el carácter experimental del estudio; los aportes se ubican entonces en un proyecto de más largo plazo en el que se buscan comprender mejor las relaciones entre los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

La mayoría de las investigaciones se ubican explícitamente en el marco de alguna teoría sobre los procesos de aprendizaje o de enseñanza. Las principales referencias son las siguientes:

a) La teoría psicogénetica de Piaget sobre la construcción del conocimiento y, en ciertos casos, sus aportes relativos a la psicogénesis de una noción matemática específica, con referencias directas o indirectas a obras de la escuela de Ginebra. Debido a que estos referentes teóricos ayudan a explicar los procesos de desarrollo, más no necesariamente los procesos de enseñanza, las investigaciones que los asumen suelen considerar además los aportes de otros investigadores más cercanos a la problemática de la enseñanza de las matemáticas.

b) La teoría socio-cultural del aprendizaje de Vygotsky. La elección por esta teoría parece obedecer al rol que otorga a la enseñanza en los procesos de aprendizaje, rol más natural y explícito que el marco de referencia piagetano.

c) La teoría de las situaciones didácticas fundada por Brousseau. Esta teoría también es de filiación constructivista, pero su objeto teórico principal son los procesos de enseñanza de las matemáticas. Las investigaciones que se realizan en el marco de esta teoría, buscan aplicar, o desarrollar algunos aspectos de la misma, al estudiar procesos experimentales de enseñanza de conocimientos específicos de matemáticas.

De acuerdo a Ávila et al. si se considera que la teoría de las situaciones didácticas también es de filiación constructivista, y que algunos de los trabajos que se realizan en el marco de la teoría de los modelos locales asumen al constructivismo como referente, puede decirse que este paradigma sigue siendo dominante. No obstante, hay diferencias metodológicas importantes entre los trabajos que se ubican en este paradigma.

Finalmente se dice que se registra cierta diversidad en las metodologías de investigación, incluyendo los tamaños de la población con la que se trabaja (de 5 alumnos a más de 300) y la duración de los programas de enseñanza (de 7 sesiones a 44). Una dificultad metodológica central que se plantea a las investigaciones en la línea de enseñanza experimental es la determinación de las relaciones causa-efecto entre la intervención didáctica y los aprendizajes de los alumnos.

Se menciona que existen trabajos con este corte metodológico con relación a:

- La noción del número natural
- Operaciones y problemas aditivos (jerarquías, procedimientos, dificultades, errores, etapas del proceso de solución, papel del lenguaje verbal y numérico, la influencia de la interacción y otros factores inherentes al contenido y formas de evaluación)
- Operaciones y problemas multiplicativos
- Las fracciones
- Razones y proporciones
- Probabilidad
- Pre-álgebra
- Área y perímetro

Se dice que en cuanto a los temas matemáticos, se mantiene la investigación sobre dos temas clásicos de las matemáticas de la escuela primaria: la noción de número y las operaciones aditivas, con la particularidad de que ahora se observa un mayor interés por el nivel preescolar (11 de 26 investigaciones son sobre estos dos temas).

Finalmente, la autora en sus consideraciones finales contempla que:

- La investigación realizada durante los noventa en el nivel de educación primaria produjo un amplio número de escritos, que rebasó en cantidad y temáticas a la realizada en la década de los ochenta.

- El análisis de las prácticas de enseñanza que tienen lugar en aulas comunes es otra de las vertientes que cobró fuerza en los últimos años de la década; esto ocurrió también con los estudios acerca de los profesores y los recursos para la enseñanza. En cambio, la investigación sobre el nivel de preescolar o la formación inicial de los maestros muestran apenas un desarrollo incipiente, y una línea de investigación se mantuvo de bajo perfil: la centrada en los adultos.

- Debe señalarse también que los resultados de la investigación en educación primaria sostuvieron durante la década un flujo importante hacia el sistema educativo. Se produjeron libros de texto, libros para los maestros, y otros recursos para la enseñanza en buena medida sustentados en resultados de investigación. Igualmente, los programas nacionales de actualización de profesores ofrecidos por la Secretaría de Educación también fueron producto del trabajo de investigadores en el campo de la educación matemática.

- Para cierto tipo de estudios, como podrían ser los clasificados en el rubro de enseñanza experimental, la cuestión es acaso irrelevante, para otros no, pues la intención explícita es conocer lo que ocurre en situaciones comunes y con los actores de los procesos cotidianos de enseñar y aprender.

De acuerdo con el análisis anterior de manera importante se destaca en forma sintetizada que dentro de la investigación de los alumnos:

a) Los procesos del aprendizaje de los alumnos han sido más estudiados que en la década precedente, considerando como metodología:
    - Entrevistas clínicas
    - Observación
    - Interrogatorio
    - Cuestionarios

Dentro de las poblaciones estudiadas se considera que los grupos de niños de primer grado, junto con los de quinto grado son quienes han sido los más descuidados en la investigación.

Por otro lado y en relación con la investigación acerca de los maestros, sigue apareciendo que las prácticas de enseñanza han sido poco estudiadas. Sin embargo se han hecho estudios sobre conocimientos, concepciones, opiniones y formación de maestros, en la que los investigadores se han apoyado más en el siguiente tipo de metodología:

- Metodología cualitativa
- Entrevistas, observaciones, cuestionarios y análisis de producciones escritas.

En síntesis los dos trabajos anteriores, correspondiente al estudio del estado del arte en la didáctica específica de las matemáticas en nuestros país muestran el balance sobre las principales investigaciones que se han realizado en México, donde si se han hecho un buen número de investigaciones, sin embargo uno de los datos que se encuentran en ambos trabajos, es la necesidad de continuar realizando investigación con respecto a lo que ocurre dentro de las prácticas educativas, y más centradas en temas específicos, en las que se revele como se da este proceso educativo y tratar de aportar soluciones viables a la educación matemática, durante los primeros grados, objeto de este estudio.

Para enriquecer y complementar esta información enseguida se presentan investigaciones nacionales e internacionales relacionados con este tema.

4.2 Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta

Enlazando el tema anterior en esta parte se presentan una serie de investigaciones nacionales e internacionales recientes, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la suma y la resta, principalmente durante la solución de problemas aritméticos.

Recientemente García (2002) basado en la premisa que la enseñanza de estrategias apropiadas para la solución de problemas matemáticos a alumnos de primaria puede favorecer el aprendizaje y la motivación hacia esta materia. El autor se plantea el objetivo de elaborar y probar un programa con una orientación cognitiva, para desarrollar habilidades de solución de problemas de suma y resta en niños mexicanos con bajo rendimiento en matemáticas. Se trabajó con una muestra formada por 11 niños y niñas con bajo rendimiento en matemáticas, que cursaban el tercer y cuarto grado de una escuela pública ubicada en la periferia al suroeste de la ciudad de México. Para evaluar las habilidades y deficiencias generales de los niños en el manejo de los algoritmos, se empleó un instrumento referido al currículo; además se aplicó una prueba para conocer el tipo de estrategias que empleaban los niños para resolver problemas matemáticos de suma y resta y se exploraron las actitudes hacia las matemáticas.

Con base en esta información se diseñó el contenido del programa de intervención. Inicialmente se trabajó en la comprensión del sistema decimal, después con los conceptos y algoritmos de adición y substracción y finalizo con el entrenamiento para la adaptación de una estrategia auto-instruccional para la solución de problemas. Los resultados mostraron que la comprensión y la práctica del sistema decimal, contribuyen a un mejor entendimiento de los conceptos subyacentes y los procedimientos de los algoritmos. Asimismo, se demostró que la adaptación de una estrategia para la solución de problemas y el análisis y la discusión de los procedimientos con los compañeros, favorecen tanto el desempeño como la motivación de los niños en esta tarea.

También en México, Flores (2002) corroboró que la comprensión del significado de la adición y la sustracción es un proceso evolutivo a largo plazo que es influido por las situaciones y tipos de problemas con los que el niño tiene experiencia, por las relaciones que se establecen entre la adición y la sustracción y por las formas de simbolización que emplea. Observó que la participación activa de los niños en la resolución de los problemas juega un papel central para la comprensión de los conceptos cada vez más complejos. En esta comprensión se conjugan dos aspectos: los conocimientos relacionados con los problemas y la experiencia en las situaciones que se narran en los problemas.

En España dentro de un enfoque cognitivo, Aguilar y Navarro (2000) diseñaron y comprobaron la eficacia de un programa de entrenamiento específico en resolución de problemas aritméticos para 98 alumnos de educación primaria de la Ciudad de Cádiz. Se formó un grupo control y un grupo experimental de 49 niños cada uno. La edad media fue de ocho a diez años y el nivel socioeconómico medio-bajo. La fase de intervención consistió de 25 sesiones de entrenamiento, en la solución de problemas matemáticos a razón de dos sesiones por semana de entre 10 a 40 minutos de duración. El grupo control siguió la práctica escolar normal. Se desarrollo un programa especifico para el entrenamiento de habilidades de resolución de este tipo de problemas, centrado en medidas heurísticas generales, además de entrenamiento específico en problemas de cambio, de combinación, comparación, igualación, isomorfismo de medidas y producto cartesiano. El procedimiento sigue una estrategia fundamentada en la psicología cognitiva, en los que se ha tenido en cuenta los aspectos manipulativos, gráficos y simbólicos en el proceso de resolución de problemas y la necesidad de emitir una respuesta manifiesta para generar aprendizaje.

Los resultados demostraron diferencias altamente significativas a favor del grupo experimental, lo que indicó la efectividad del diseño instruccional. Mejoró la ejecución de los niños en los problemas aritméticos. Asimismo, fueron capaces de resolver un mayor número de problemas y de mayor dificultad en su estructura semántica.

Se concluyó que la toma de conciencia por parte del niño de las distintas categorías semánticas de los problemas de estructura aditiva y multiplicativa y de las estrategias utilizadas para resolverlos adecuadamente, pueden ser desarrolladas de forma progresiva.

Otro estudio en España, a partir de los planteamientos constructivistas, Bermejo, Rodríguez y Pérez (2000) demostraron que es posible mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta, mediante la aplicación de un programa psico-instruccional que integre simultáneamente al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. Cuatro ideas básicas fueron los pilares teóricos de este programa: 1) los niños construyen su propio conocimiento matemático; que no adquieren los nuevos contenidos mediante un simple proceso de absorción, sino que los integran y estructuran en función de sus competencias cognitivas; 2) la instrucción en matemáticas ha de organizarse de manera que facilite la construcción de conocimientos por parte del alumno, considerando que profesores y alumnos son creadores de significados y que los primeros deben ser guías de aprendizaje que estructuran el clima social-cognitivo de la clase; 3) la base para secuenciar los objetivos de instrucción en matemáticas ha de provenir de los conocimientos que actualmente se tienen sobre el desarrollo general de los alumnos y también del desarrollo que siguen estos últimos en la adquisición de los contenidos matemáticos específicos.

Se aplicó el programa mencionado durante todo el año escolar en tres primarias públicas de nivel sociocultural medio-alto de la ciudad de Madrid. Los profesores de los grupos experimentales asistieron a un seminario de 10 horas, en los que se analizaban y debatían sobre los principios básicos de la enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva constructivita. También analizaron los diferentes tipos de problemas verbales de sumar y restar y sus niveles de dificultad, las estrategias más frecuentes utilizadas por los niños y los errores típicos. Se entregó a los profesores una secuencia de problemas verbales que por su dificultad convenía enseñar a lo largo del ciclo escolar, para que los integraran dentro de los contenidos del currículo escolar de matemáticas.

Los resultados indicaron que los profesores del grupo experimental cambiaron sus creencias sobre la enseñanza de las matemáticas y dedicaron más tiempo a la enseñanza de problemas verbales de lo habitual para ellos. Sus evaluaciones finales se centraron fundamentalmente en los procesos y menos en los resultados. Los profesores del grupo control afirmaron que a lo largo del curso sus alumnos habían resuelto más cuentas o algoritmos, que problemas.

En cuanto al rendimiento de los alumnos se observó que el programa de intervención tuvo efectos positivos; el grupo experimental mostró mejores resultados que el grupo control y también una mejoría en sus procedimientos de solución, como es el uso frecuente de estrategias de conteo. En este grupo también se modificó el tipo de errores que los niños cometían, ya que presentaban más errores de ejecución que el grupo control. Asimismo se observó mayor heterogeneidad de errores conceptuales, esto debido a que los niños tendían a poner en marcha diversas estrategias, aunque incorrectas, que les pudieran conducir finalmente al éxito esperado.

Con base en dichos resultados los autores confirmaron sus expectativas: un mayor conocimiento del desarrollo del pensamiento matemático infantil y una mayor comprensión y aplicación en el aula de los principios constructivistas por parte del profesor, redundaría positivamente en la comprensión y en el rendimiento matemático de los alumnos.

Los autores concluyeron que las habilidades matemáticas deben desarrollarse preferentemente en el marco de la solución de los problemas, ya que los primeros conceptos que desarrollan los niños sobre la adición y la sustracción proceden de contextos de la vida real, en los que "se da" o "se quita" algo, y nunca de las expresiones numéricas. Señalaron además, que los problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana de los niños facilitan la aplicación de las habilidades matemáticas.

En otra investigación Flores (1999) diseñó un programa para niños con problemas de aprendizaje con el propósito de que aprendieran con el apoyo de sus madres una estrategia auto-instruccional para la solución de problemas aritméticos. Participaron 16 niños de segundo y tercer grado de primaria de la ciudad de México, que empleaban estrategias inadecuadas para la solución de problemas y sus madres o tutoras consideradas como inexpertas. Se demostró que mediante la capacitación, las madres del grupo experimental podían modificar su estilo de tutoría de manera que promovieran el razonamiento y la ejecución independientemente de sus hijos. Así mismo se observó que en la ejecución individual, los niños mejoraron en el empleo de la estrategia auto-instruccional para la solución de problemas.

Por otro lado, Farfán (1998) evaluó los efectos de un programa de enseñanza estratégica para la solución de problemas matemáticos. Participaron 23 niños y niñas de segundo y tercer grado de primaria de una escuela oficial de la ciudad de México, que presentaban dificultades en la solución de problemas narrativos de suma y resta. Se conformaron tres grupos: el grupo experimental recibió la capacitación en el empleo de estrategias para la solución de problemas, un grupo control sólo practicó la solución de problemas y el otro grupo control sólo fue evaluado antes y después de la intervención. Se encontró que el grupo experimental desarrolló una actitud positiva hacia la tarea de solución de problemas aritméticos narrativos, incrementó significativamente sus habilidades para la solución de este tipo de problemas y generalizó su aprendizaje a otro tipo de problemas.

En otra investigación English (1998) analizó las habilidades de los niños para la solución de problemas matemáticos en contextos formales e informales. Participaron 154 niños y niñas de ocho años de edad pertenecientes a seis grupos de tercer grado de primaria. Tres grupos pertenecían a escuelas públicas y tres a escuelas privadas, todas ubicadas en un suburbio de clase media. Los resultados del análisis mostraron que los alumnos no contaban con las habilidades necesarias para solucionar problemas matemáticos. En cuanto a los programas de enseñanza se observó que las actividades que se empleaban eran insuficientes para abordar las interpretaciones de los niños acerca de los problemas. Asimismo, se encontró que los maestros no vinculan las experiencias de los niños con las matemáticas escolares. El investigador concluyó que es necesario que los maestros realicen con sus alumnos actividades informales fuera del contexto escolar, en donde los niños puedan vivir situaciones matemáticas apegadas a su realidad, que les faciliten el aprendizaje de la solución de diversos tipos de problemas.

Otros investigadores (Jordan y Montani, 1997) examinaron las técnicas de cálculo y solución de problemas de dos grupos de niños con dificultades en matemáticas. Participaron, 48 alumnos de tercer grado de primaria provenientes de tres escuelas de una zona de clase media del distrito de New Jersey. La mitad de los niños tenía dificultades en matemáticas pero no en lectura (dificultades matemáticas específicas) y la otra mitad tenia presentaba dificultades en matemáticas y en lectura (dificultades matemáticas generales). Se evaluó a todos los niños a través problemas de historia y problemas con números reales en dos condiciones: con límite de tiempo donde la respuesta era verbal y sin límite de tiempo donde el niño podía emplear los dedos o realizar una operación utilizando lápiz y papel.

Los hallazgos mostraron que los niños del grupo normal ejecutaron significativamente mejor que los niños en el grupo con dificultades matemáticas específicas. Los niños en el grupo de dificultades matemáticas específicas ejecutaron peor que los niños del grupo normal en condiciones de tiempo límite pero no en la condición sin límite de tiempo, donde las estrategias de apoyo pudieron ser utilizadas.

El análisis de las estrategias utilizadas mostró que los niños con dificultades matemáticas específicas y generales dependían más de las estrategias de apoyo (en particular del conteo con los dedos) que los niños con rendimiento normal; sin embargo, los niños con dificultades matemáticas específicas utilizaron las estrategias de apoyo más técnicamente, lo que hizo que estuvieran a la par del grupo con rendimiento normal, cuando las tareas eran sin límite de tiempo.

A partir de los resultados obtenidos, los autores concluyeron que los niños con dificultades matemáticas generales parecen tener dificultades de conceptualización básica, falta de procedimientos adecuados de cálculo y problemas para la rápida restauración o corrección.

Desde una perspectiva psicogénetica y psicopedagógica, Guerrero (1997) realizó una investigación experimental para analizar las diferentes formas de representación simbólica que hacen los niños, de los procedimientos que utilizan, los tipos de respuesta que dan ante los problemas aritméticos y los argumentos que emplean tanto en caso de acierto como de error. Participó un total de 510 niños y niñas, de 2o. a 4o. grados de primaria de escuelas públicas, de nivel socio-económico medio (6 grupos experimentales y 3 de control) de la ciudad de México.

Los hallazgos obtenidos permitieron concluir que el análisis de las conductas de los niños frente a los contenidos de aprendizaje debe considerar, no solamente los aciertos y errores, sino también las formas en que los niños representan la estructura de los problemas y los procedimientos que utilizan para su solución. Guerrero recomienda que los programas didácticos se orienten a favorecer el desarrollo de estrategias y procedimientos de solución variados, donde el niño maneje las relaciones involucradas en el problema, realice estimaciones en torno a los resultados posibles y aplique estrategias espontáneas no algorítmicas. Como resultado de la investigación, se propuso que los elementos principales de una secuencia didáctica, deberían ser: contextualizar el problema a resolver, simular el problema con objetos, interrogar en torno a lo que se puede hacer para resolverlo, socializar las estrategias, y aplicar lo aprendido. La propuesta planteada por Guerrero se relaciona también con los resultados, entre otros, en que los programas didácticos deben considerar de manera importante los propios conceptos y estrategias de los alumnos y alumnas, así como sus propios y naturales procedimientos en la solución de problemas matemáticos.

A partir de un enfoque de la didáctica de las matemáticas Block, Dávila y Martínez (1995) plantean el proyecto: *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica,* con el objetivo crear y poner a prueba estrategias de formación que permitan vincular algunos aportes de la investigación en didáctica con la práctica de los maestros. El proyecto se desarrolló durante el año escolar 1988-1989 en dos escuelas primarias, a las que se les llamo **A** y **B**. Sin embargo los autores en este trabajo sólo citan los ejes de investigación para la escuela B. Se trata de una primaria pública con 18 grupos de primero a sexto grado. En ambas escuelas se organizó un curso-taller de tres horas, en horario de clases, cada quince días. Se dejó este espacio para que los profesores pusieran en práctica en su clase, elementos derivados directa o indirectamente de las actividades realizadas en el curso- taller. Todas las sesiones del taller fueron registradas.

Se plantearon tres tipos de observación de clase:

- Una observación de una clase mensual de los maestros, 12 en cada escuela.
- Una interobservación mensual entre los maestros participantes.
- Una autoobservación mensual.

Finalmente se ofreció a los maestros una sesión quincenal de asesoría individual sobre problemas específicos. El contenido general del curso-taller fue el tema "los problemas de matemáticas". Al iniciarse el curso-taller, se definieron sólo los aspectos generales del tema debido a la decisión de programar en detalle los cursos en función de las necesidades de los maestros de cada escuela. Durante el primer trimestre se identificaron en cada escuela los contenidos centrales sobre los que se trabajaría el resto del año. En la escuela B se identificaron dificultades relacionadas con que los problemas matemáticos se planteaban con poca frecuencia, la enseñanza estaba fuertemente centrada en los algoritmos de las operaciones, y que la resolución de problemas tendía a reducirse a la aplicación de un algoritmo previamente enseñado, y después de haber visto un "ejemplo modelo". Por ello se decidió dedicar un espacio importante al análisis de las concepciones mismas sobre la resolución de problemas y al análisis de los procedimientos de resolución de los alumnos.

De este modo, los tres ejes de análisis siguientes orientaron el desarrollo del taller de la escuela B:

- Eje 1. Procedimientos de resolución de problemas. Durante el primer trimestre se dio prioridad a la realización de actividades destinadas a favorecer un proceso de reconceptualización de la noción misma de resolución de problemas. Este eje estuvo constituido por tres tipos de actividades: el análisis de procedimientos de los niños, resolución de problemas por parte de los maestros, y el análisis de la conducción de las clases de los maestros.
- Eje 2. Recursos para apoyar a los alumnos en la resolución de problemas. Entre ellos: no dar indicaciones previas y plantear problemas con frecuencia, comentar el enunciado del problema antes de la resolución de éste, pedir a los alumnos un resultado aproximado (estimación) antes de que inicien la búsqueda del resultado exacto y organizar una confrontación colectiva.
- Eje 3. Características de los problemas. Los tipos de problemas que se plantearon a los maestros durante el primer trimestre del curso-taller tuvieron características similares a los problemas que suelen plantear en la escuela. Más adelante se plantearon problemas con características diferentes a las usuales y se fueron analizando con los maestros al término de las sesiones en que se trabajaron.

Dentro de las conclusiones más importantes acerca del grado de pertinencia de las estrategias de actualización que se pusieron en marcha fueron los siguientes. El tema "La resolución de problemas" resultó, en efecto, adecuado para abordar aspectos relevantes de la enseñanza de las matemáticas en los seis grados de primaria. Por otro lado, el conocimiento promedio de los maestros acerca de los contenidos del programa de primaria es con frecuencia insuficiente, y esto constituye un obstáculo para mejorar su práctica. Se cree que es recomendable que el trabajo se centre simultáneamente, y de manera integrada en ambos aspectos. La resolución de problemas por los maestros en pequeños grupos fue una de las actividades más provechosas al permitir a los maestros experimentar "en vivo" algunas de las características de los procesos de resolución de problemas, y al confrontarlos con lo que suele pedirse a los alumnos. Las actividades derivadas del taller que los maestros realizaron con sus alumnos durante los quince días entre cada sesión, constituyeron una valiosa forma de integración entre la práctica de los maestros y la reflexión dentro del taller. Se proporcionó a los maestros la ocasión de probar y adaptar ciertas innovaciones pedagógicas, y permitió a los investigadores conocer las posibilidades y límites de las mismas, así como comprender mejor las dificultades, no previstas, a las que se enfrenta un maestro en la dinámica de una clase.

Finalmente el aceptar por parte del profesor la existencia de procedimientos distintos y la importancia de conocer el origen de los errores es un paso difícil, pero comprender dichos procedimientos y errores lo es aún más, sobre todo cuando el maestro debe lograrlo casi al mismo tiempo que los conoce.

En otro estudio Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef (1986) se proponen investigar si proveer a los profesores el acceso a un conocimiento específico derivado de la investigación sobre el pensamiento de los niños en un dominio de contenido específico puede influenciar la instrucción de los maestros y el rendimiento de sus estudiantes. Esta investigación provee una base para estudiar cómo el conocimiento del pensamiento del niño puede ser aplicado a la instrucción. La investigación está basada sobre un análisis detallado del dominio. En este caso, los problemas de adición y sustracción fueron divididos dentro de varias clases, los cuales se distinguen por los diferentes tipos de acción o de relaciones que representan diferentes interpretaciones de la adición y la sustracción. Entre cada clase distintos tipos de problemas pueden ser generados por la variación desconocida. Participaron 40 profesores de primer grado, 20 fueron asignados al azar para el grupo de tratamiento y 20 a un grupo control. Estos profesores participaron en un taller de varano durante cuatro semanas diseñado para familiarizarlos con la finalidad de investigar acerca del aprendizaje y del desarrollo de conceptos de adición y sustracción en niños y para proveerlos con la oportunidad para pensar y planear la instrucción basada sobre ese conocimiento. El otro grupo sirvió como un grupo control quienes participaron en un taller de dos horas centrado en la solución de problemas no rutinarios.

Los participantes en el estudio fueron los maestros (39 mujeres y un hombre) y sus estudiantes en 40 salones en 24 escuelas localizadas en Madison, Wisconsin, y en cuatro pequeñas comunidades cerca de Madison. Dos escuelas Católicas y 22 escuelas públicas fueron incluidas. Los maestros fueron asignados al azar a los tratamientos por escuela. Doce estudiantes de primer grado (seis niños y seis niñas) fueron seleccionados al azar de cada clase para servir como foco para la observación y la entrevista. Los niños con necesidades de aprendizaje especial fueron omitidos de la muestra. El tratamiento fue el taller de la Instrucción guiada cognitivamente. La meta del taller fue ayudar a los maestros a entender cómo se desarrollan los conceptos de la suma y la sustracción y proveerlos con la oportunidad para explorar cómo ellos pueden usar ese conocimiento para la instrucción.

Los maestros aprendieron a clasificar los problemas, para identificar los procesos que los niños utilizan para solucionar diferentes problemas. La recolección de información formal e informal de cada uno de los maestros, fue mediante la transcripción de audiograbaciones y de observaciones en los salones, entrevistas, puntuaciones mediante la Escala Creencias del CGI, y notas de campo de interacciones informales. En la Escala de Creencias CGI, un instrumento tipo- likert de papel y lápiz, también fue utilizado para recoger información sobre las creencias de los maestros. Para describir los patrones de cambio en los maestros se basaron en la clasificación de niveles.

Con respecto a la medición del aprendizaje del niño, se aplico el análisis del tipo-problema desde el Modelo del pensamiento del niño sirvió como base para medir los conceptos y solución de problemas, y una prueba para cada grado. Estas pruebas incluían problemas de adición, sustracción, división y multiplicación con dígitos simples y multidígitos e ítems que medían conceptos de valor de lugar. Las pruebas fueron aplicadas por aplicadores entrenados siguiendo protocolos escritos en cada salto de año, sobre dos días consecutivos. Se leían los problemas a los niños y se aseguraba que tuvieran lápiz y papel, pero sin utilizar material manipulable. En algunos casos se midió el tiempo de solución.

En sus resultados se encontró que aunque las prácticas instruccionales no fueron prescritas, los profesores del grupo experimental enseñaron solución de problemas significativamente más y significativamente menos factores numéricos que los profesores del grupo control. Los maestros del grupo experimental fortalecieron a sus estudiantes a utilizar una variedad de estrategias para solucionar problemas y significativamente pusieron más atención a los procesos que sus alumnos utilizaron que los maestros del grupo control. Los maestros del grupo experimental conocieron más sobre los procesos de los estudiantes para solucionar problemas. En cuanto al rendimiento, sobre la entrevista de solución de problemas, los estudiantes de clases CGI fueron más seguros en sus habilidades para solucionar problemas matemáticos que los estudiantes del grupo control. Como sus profesores, los estudiantes en las clases CGI fueron significativamente más guiados cognitivamente en sus creencias que los estudiantes del grupo control. Finalmente, en adición los estudiantes del CGI reportaron significativamente un mayor entendimiento de matemáticas que los estudiantes del grupo control.

Por otra parte en un tema curricular Fuenlabrada en 1996 realizó un análisis del Plan y Programas de Estudio 1993 de la Educación Básica, en el Programa para la Modernización Educativa, en nuestro país. Describe que el cambio principal en esos años en matemáticas se refiere a la metodología de la enseñanza. Donde una de las causas fundamentales de la baja calidad de la educación se encuentra en las estrategias tradicionales de las matemáticas, en las que los alumnos aprenden a través de recibir información. Desde esta perspectiva, lo más fácil de transmitir del conocimiento matemático son los signos que conforman el lenguaje matemático y las reglas de combinación de ellos; sin embargo los conceptos matemáticos han estado ausentes en la enseñanza y consecuentemente en el aprendizaje de los alumnos.

Fuenlabrada menciona que el nuevo enfoque metodológico trata en cierta medida, el desarrollo de los procesos intelectuales a partir de experiencias concretas (situaciones problemáticas) que posibiliten la construcción de conocimiento por parte de los alumnos. Consecuentemente deriva, que el objetivo central de la metodología propuesta para la enseñanza, es que los niños reconozcan, a través del proceso de aprendizaje, que la matemática es:

- Un objeto de conocimiento sujeto a cuestionamiento, análisis y experimentación, en donde las cosas no están dadas de una vez y para siempre.
- Una herramienta útil que permita resolver problemas.

Por otra parte, la investigación en didáctica de la matemática desarrollada en los últimos 30 años, los niños aprenden:

- Interactuando con el objeto de conocimiento en un intento por resolver diversas problemáticas, que impliquen el concepto matemático.
- Encontrando, cada vez, argumentaciones mejores que defiendan los puntos de vista que se van externando sobre los resultados o estrategias de solución.

Con respecto a los cambios curriculares que se contemplaron en ese Programa Fuenlabrada concibe que en el programa anterior estaba organizado a través de unidades temáticas; en esta organización subyace una concepción *lineal-sumativa* del aprendizaje, es decir, se concibe a los diferentes conceptos como si fueran ajenos unos a otros, y era en todo caso competencia de los alumnos encontrar las relaciones subyacentes entre ellos.

Así, los cambios curriculares que se expresan en el programa de 1993, están en función de los cambios metodológicos que se proponen.

En términos generales, los cambios curriculares se dan en tres niveles:

a) Organización de los contenidos. La postura teórica postula que subyace a esta organización curricular considera al aprendizaje como un proceso cíclico y en espiral, esto hace que las estrategias de enseñanza posibiliten el trabajo sobre un mismo concepto, varias veces en diferentes momentos y en situaciones cada vez más complejas.

b) En los tiempos previstos para desarrollar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos. A diferencia los programas anteriores se considera una mejor y adaptable distribución para el desarrollo didáctico de los contenidos. La enseñanza de la suma, por ejemplo, va más allá de la enseñanza de un algoritmo, se necesita que los alumnos trabajen con una secuencia problemática que favorezca la construcción del concepto de suma, lo cual implica que los niños tengan la posibilidad de reconocer y diferenciar aquellos problemas que son resueltos por medio de esta operación de los que no lo son. Más aún para una buena comprensión del algoritmo de la suma se requiere un buen conocimiento sobre el sistema de numeración decimal, en lo que hace a sus reglas de agrupamiento, desagrupamiento, codificación, decodificación y valor posicional. Aquí el tiempo para el desarrollo del concepto de suma es mayor que en la enseñanza anterior. Para terminar con este ejemplo de suma se espera que alrededor del término del primer semestre del segundo grado escolar, los niños amplíen su concepto de suma.

c) Eliminación de algunos contenidos en los programas de primaria y reubicación de algunos de ellos en secundaria. Los contenidos referentes a los conjuntos y la lógica se retiran porque no favorecían suficientemente el desarrollo del pensamiento lógico. Reubicación de los números negativos, ya que ello requiere de una estructura propia de los alumnos de secundaria. La multiplicación y la división de fracciones pasan a contenidos de secundaria.

Fuenlabrada concluye que el Programa para la Modernización Educativa, en lo que hace al Plan y a los Programas de Matemáticas, propone un cambio sobre la metodología de enseñanza (que tome en cuenta de manera más coherente la forma como aprenden los niños) más que un cambio de contenidos curriculares. Finalmente considera que la realización de los planteamientos del Plan y Programas de Estudio, requiere que los maestros reconceptualicen a la matemática como un objeto de conocimiento en sí mismo, además, que reconceptualicen sus estrategias de enseñanza tomando en cuenta que el aprendizaje requiere ser reconstruido por el sujeto que aprende. No obstante, no se presentan estudios puntuales que agreguen evidencia empírica para sustentar dichos cambios.

En síntesis, en este capítulo se ha presentado algunas de investigaciones relacionadas con los procedimientos y estrategias de solución de problemas (Aguilar y Navarro, 2000; Flores, 1999), la adquisición de los conceptos y algoritmos de la suma y la resta, y de otros trabajos vinculados con el estudio de la mejora de la preparación de los profesores, como es la capacitación de una enseñanza basada en la solución de problemas (Block, Dávila y Martínez, 1995), o la utilización por parte del profesor de los conocimientos matemáticos previos, incluyendo estrategias y conceptos que poseen los niños (Carpenter, Fennema, Peterson, et al. 1986), para promover un mayor desarrollo del conocimiento matemático.

Que de alguna forma dan una panorámica de la problemática caracterizada por la preocupación de los maestros por centrarse más en la enseñanza del algoritmo Block, Dávila y Martínez (1995) de las operaciones de la suma y la resta, que el desarrollo conceptual centrado en la enseñanza basada en el planteamiento y la solución de diferentes problemas matemáticos (Flores, 2002, Guerrero, 1997). De igual forma se desataca la enseñanza del sistema decimal para una mejor comprensión de los algoritmos (Fuenlabrada, 1996) de la suma y la resta.

También se presenta una investigación acerca de los resultados del análisis de los planteamientos curriculares.

Algunas reflexiones sobre el marco teórico

En este marco teórico se ha intentando ofrecer un panorama de algunas de las principales aportaciones de la psicología cognitiva y sociocultural al estudio de la construcción del conocimiento matemático y a la representación de los profesores. Se ha visto que el modelo teórico y el programa de investigación de Piaget y seguidores de la corriente psicogenética ha sido uno de los más influyentes ya que ha dado sustento a la explicación de los procesos cognitivos involucrados en la construcción de la noción de número; conceptos como esquema operatorio, conservación de cantidad, invariantes, operaciones concretas vinculadas a la noción de número, reversibilidad, etc. han sentado las bases de otros modelos que intentan explicar hasta la fecha el aprendizaje de las matemáticas básicas en los escolares y la necesidad de una enseñanza que considere dichos conceptos. Otros destacados autores han logrado extender dicha mirada hacia concepciones más enfocadas a la cuestión didáctica y no sólo evolutiva o del desarrollo y han profundizado en los aspectos contextuales e instruccionales involucrados.

La idea perspectiva constructivista del conocimiento aparece en la literatura revisada en este marco teórico, algunos acentuando los factores psicológicos, otros los instruccionales, los referidos a la representación de los actores o a los de tipo instruccional. Términos como ”esquema” se mencionan en trabajos como el de Brousseau (1999) en su teoría de las situaciones didáctica de las matemáticas, pero también aparecen en la explicación de la lógica del pensamiento propuesta por Nunes y Bryan (1997) y con otros significados en la explicación del aprendizaje situado de las matemáticas de Carraher, Carraher y Schliemann (1991).

Se vio que Carpenter, Fennema, Franke, et al. (1999) plantean la existencia de diferentes tipos de problemas o de situaciones, y dentro de ellos variables, cantidades y acciones que establecen relaciones diferentes. Donde estas relaciones, en términos conceptuales ayudan a entender el pensamiento matemático del niño. En estos trabajos se observa un interés por conocer cómo piensa el niño al considerar la solución de problemas matemáticos, así como en relación con las diferentes estrategias que usan para solucionarlos. También enfatizan el interés porque los profesores se acerquen a la comprensión de cómo y qué aprenden los niños y que esta comprensión ayude a los maestros a realizar los cambios necesarios para una instrucción más apropiada que fortalezca el conocimiento matemático del niño.

El modelo de la instrucción guiada cognitivamente de Carpenter, Fennema, Peterson, et al. (1986) propone que los procesos de adquisición del conocimiento matemático pueden ser explicados mediante lo que ocurre durante la solución de problemas matemáticos. Los niños utilizan estrategias básicas de conteo en el desarrollo de su entendimiento de conceptos numéricos básicos, quienes ingresan a la escuela con una gran cantidad de conocimiento informal, que puede servirles como base para un entendimiento de las matemáticas escolares, durante la instrucción. Las operaciones básicas pueden ser definidas en términos de procesos intuitivos solución-problema y los procedimientos simbólicos pueden ser desarrollados como una extensión de ellos. Se considera que para entender cómo piensan los niños sobre las operaciones básicas es necesario considerar las diferencias sobre los problemas, es decir cómo comprenden y solucionan problemas que implican relaciones de cambio, combinación, igualación y comparación. Por lo que una forma útil de clasificar los problemas es de acuerdo a sus tipos de acciones o relaciones entre sus variables. Estas ideas han sido clave para el desarrollo de esta investigación. La perspectiva anterior y las categorías de problemas y estrategias descritas por estos autores, fueron un punto de partida en esta tesis y como se verá más adelante, permitieron identificar en los participantes de esta investigación una diversidad de estrategias no formales propias de los niños (“naturales”, “inventadas”, como suelen llamarse) en relación a tipos de problemas matemáticos como los descritos en la literatura.

En cuanto al reconocimiento del tipo de estrategias no formales que desarrollan y emplean los niños y que no corresponden necesariamente a los algoritmos escolares formales, así como las principales estrategias para solucionar problemas aditivos, tanto en la literatura como en esta trabajo como se verá más adelante, resalta que los niños utilizan objetos concretos y estrategias de modelamiento directo, que son después reemplazadas por estrategias abstractas de conteo gracias a la instrucción. Para este trabajo fue importante corroborar si los niños podían o no solucionar problemas con sus estrategias no formales, representando las variables y su relación con objetos tangibles y si posteriormente a lo largo de los dos primeros cursos lograban desprenderse de dichas estrategias para solucionar los problemas mediante procedimientos de conteo mental.

En el currículo de la educación básica se presupone que el conocimiento conceptual del sistema decimal es básico para arribar al entendimiento y uso efectivo de los algoritmos formales necesarios para calcular respuestas a problemas de adición y sustracción como los que se presentan en los primeros grados de la primaria. Otro interés sobre este particular era dilucidar si esto es así y bajo qué condiciones, dado que actualmente la secuencia y organización de contenidos en la enseñanza de las matemáticas descansan sobre este supuesto. En esta investigación se encontraron hallazgos interesantes que pueden llevar a proponer otras opciones didácticas.

De manera importante la teoría de las situaciones didácticas, planteada por Guy Brousseau (2000), permite analizar el objeto de estudio de esta tesis desde la perspectiva del triángulo didáctico o interactivo. Esta teoría contribuye a comprender los procesos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, trata de aclarar de manera importante la influencia recíproca entre alumno-maestro considerando la transmisión del saber, y se contempla de manera importante la influencia de aspectos sociales y contextuales. En particular para esta investigación resulta primordial analizar lo que el autor denomina contrato didáctico, que nos permitió acercarnos a una mejor comprensión de lo que ocurre durante las relaciones didácticas entre el alumno y el profesor, en el momento que se intenta la transmisión de un objeto de saber. Esta fue una base teórica importante pues se aboco a analizar el tipo de contrato didáctico que se daba en las aulas que observamos durante clases específicas enfocadas a la enseñanza-aprendizaje de las operaciones de suma y resta o la solución de problemas aditivos en los dos primeros grados de primaria.

Si bien los enfoques anteriores ayudan a describir el aprendizaje matemático en los niños y la ocurrencia de las relaciones didácticas entre profesor-alumno, falta derivar como objeto de estudio en este trabajo el interés por acercarse a develar las representaciones o concepciones de los profesores. Como antes vimos, el trabajo teórico acerca de las concepciones (Thompson, 1992) y que para fines de este trabajo incluye las creencias epistemológicas (Hofer y Pintrich, 1997; Schommer, 1990[*]) y el pensamiento pedagógico del profesor (Monroy y Díaz, 2004) resultan útiles para poder contrastar lo que concibe una maestra y un maestro acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con su

[*] Estos autores emplean originalmente el termino *epistemological beliefs*.

práctica educativa en el aula. Además permite dar significado a la actuación de los profesores y entender sus referentes, ejes de problemática y dilemas que encuentran en su enseñanza. Para algunos autores el análisis de las representaciones docentes contribuye a explicar la influencia que tienen sobre el tipo de instrucción e incluso sus efectos en la calidad y características del aprendizaje matemático que adquieren los niños durante la enseñanza (Gill et al. 2004).

Dado que el interés de esta tesis fue acercarse a una mirada más holística del objeto de estudio, se considera que cada una de las teorías o propuestas de los autores son fundamentos que proporcionan una mirada interesante pero parcial de lo que de lo que se intenta estudiar. Por el contrario, la confluencia de estas perspectivas ofrece una serie de postulados que permiten explicar el conocimiento matemático del niño así como también la manera en que puede estar influyendo el pensamiento y la actuación del profesor, tomando en cuenta el contexto educativo en que participan. Es decir, resulta importante enfocar tanto el análisis aspectos cognitivos relacionados con las estrategias y conceptos (como lo hacen Carpenter et al.) pero al mismo tiempo dilucidar el tipo de contratos didácticos asociados a determinadas formas y contenidos de enseñanza (interés que surge a partir de Brousseau y su teoría de las situaciones didácticas).

El interés en este campo de investigación también desemboca en el aspecto instruccional o de intervención educativa. Los autores e investigaciones citadas han permitido fundamentar programas educativos con orientación cognitiva, constructivista situada para afrontar la enseñanza cuestiones como la solución de problemas de suma y resta en la educación básica. Estas propuestas se han centrado en el desarrollo de habilidades de cómputo y en el empleo de estrategias que favorezcan que el niño razone el problema y que actúe autónomamente en su solución, tomando en consideración aspectos diversos (cognoscitivos, lingüísticos, socio-emocionales y características de desarrollo del individuo). En esta dirección, con el trabajo realizado y sus hallazgos, se espera contribuir en la parte final del trabajo con una diversidad de propuestas para la enseñanza de las operaciones matemáticas que aquí se estudian. La literatura revisada ha llevado a tomar postura a favor de los modelos instruccionales que consideran el contexto situado de la enseñanza de las matemáticas (Carraher, Carraher, y Schliemann, 1991).

De esta manera, se asume que hay que considerar la naturaleza de los conocimientos de los niños; es preciso que en la enseñanza se aprovechen los conocimientos matemáticos que traen consigo los niños y a partir de ahí diseñar situaciones didácticas que contribuyan al desarrollo de esos conceptos matemáticos, que promuevan un aprendizaje significativo y que permitan un conocimiento trascendente, para la vida, no sólo para la escuela.

La revisión de la literatura lleva a tomar postura a favor de que el papel del maestro debe ser de facilitador o guía, pero en el sentido de mediador del conocimiento, no de espectador al margen del mismo. Debe fomentar que el niño utilice sus propias herramientas y estrategias. También se sugiere que sea sensible y tenga conocimientos sobre la experiencia de los niños, para así para poder vincular el conocimiento matemático con dicha experiencia; consecuentemente, el aprendizaje matemático tendrá significado para el niño (English, 1998). Esto último condujo a analizar en buena medida las prácticas educativas del profesor y la manera en que, a través de su actuación en el aula, promueve o no la construcción de los conocimientos matemáticos en sus alumnos.

Finalmente, el análisis de la literatura revisada cumplió otro cometido, apoyar a derivar las herramientas metodológicas de esta investigación. Por un lado, siguiendo la línea cognitiva del estudio de los procesos de construcción de las nociones matemáticas, se optó por diseñar un instrumento de evaluación de conocimientos y habilidades en los niños y una entrevista enfocada a desentrañar las representaciones del docente. Por otra parte, en estrecho vínculo con la teoría de las situaciones didácticas, se generó la estrategia para la observación y análisis de situaciones específicas vinculadas con la enseñanza de la suma y la resta, así como para analizar cuál es el compromiso y obligaciones que se establecen entre el profesor y el alumno (contrato didáctico), dentro de dichas situaciones.

En este marco, a continuación se presenta el capitulo correspondiente a la consistencia de la metodología con la que se aborda el objeto de estudio de la investigación en esta tesis.

CAPÍTULO 5. Metodología de la investigación

5.1 Planteamiento del problema

Con base en el marco teórico desarrollado en los capítulos antecedentes, se puede afirmar que la educación matemática a nivel básico actualmente padece una problemática caracterizada por un bajo nivel de aprovechamiento (OCDE, 2002; Andere, 2003: INEE, 2006), y que los esfuerzos realizados en las principales investigaciones sobre el tema se centran en su mayoría en un análisis individual del saber matemático de los niños (Guerrero, 1997; Flores, 2002; García 2002), en las características de la enseñanza del profesor o en los contenidos del curriculum (Block y Álvarez 1999). En México aún cuando a finales de la última década se ha dado inicio a las investigaciones de los procesos educativos de las matemáticas que ocurren dentro del aula, existe actualmente la necesidad de fomentar este tipo de investigaciones (Ávila y Carvajal, 2003), más focalizadas en las prácticas educativas escolarizadas y cotidianas y en un análisis integrado de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

5.2 Preguntas de investigación

En atención a la problemática planteada, este trabajo se centra en el análisis de los procesos involucrados en la enseñanza-aprendizaje durante la adquisición conceptual y algorítmica de la suma, la resta, y la solución de problemas aditivos, que ocurren en niños que cursan el primer y segundo grado de educación primaria. A partir de las consideraciones anteriores, se derivaron las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los *conocimientos matemáticos* (conceptuales y algorítmicos) que adquiere el niño respecto al aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos?
- ¿Cuáles son las *concepciones del maestro* acerca de la enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos?
- ¿Cuáles son los tipos de *contratos didácticos* que se establecen entre el profesor y los alumnos en su relación didáctica durante la enseñanza algorítmica y conceptual de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos?

5. 3 Objetivos

Objetivo General

Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula durante la adquisición de los conceptos y algoritmos de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos con relación a las concepciones docentes, así como del tipo de contrato didáctico que se establece entre profesores y alumnos.

Objetivos específicos

De alumno:

1. Analizar los conocimientos (conceptuales y procedimentales) que adquieren los alumnos durante el aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos.

Del profesor:

2. Analizar las concepciones del profesor relativas a la enseñanza conceptual y procedimental de la suma y resta y la solución de problemas aditivos.

Con respecto a la relación que se establece entre el profesor y sus alumnos:

3. Analizar la relación entre el profesor y el alumno en términos del tipo de contratos didácticos que se promueven en el aula.

5. 4 Tipo de estudio

La presente investigación se llevó a cabo desde una aproximación metodológica mixta de método combinado, que incluye conjuntamente un análisis de tipo cualitativo y cuantitativo. En el primer caso y de acuerdo con Denzin y Lincoln (1998) la investigación cualitativa es multimetódica en esencia, puesto que investiga realidades múltiples e involucra una aproximación naturalista a la vez que interpretativa su objeto o problema de estudio. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en su ambiente natural, haciendo sentido o interpretando un fenómeno en términos del significado atribuido por los individuos participantes. La investigación cualitativa involucra la colección y el uso de una variedad de materiales empíricos (estudios de caso, experiencia personal, introspección, historia de vida, entrevistas, narraciones o textos observacionales, historias) que describen la rutina, los momentos y los significados en las vidas de los individuos.

La presente investigación plantea una vertiente cualitativa ya que se centra principalmente en la observación e interpretación de cómo ocurre naturalmente el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro del aula en dos grupos de educación primaria en una escuela pública. El propósito de esta investigación es describir y analizar el conocimiento matemático que adquiere el niño en términos del entendimiento conceptual y algorítmico de la suma y la resta, y la solución de problema aditivos. Asimismo, se busca describir e interpretar las concepciones que tienen los maestros acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en una serie de dimensiones y categorías. También se enfoca a estudiar la relación o contrato didáctico que se establece entre los profesores y los alumnos en el proceso que se sigue durante la impartición de una secuencia de clases a lo largo del año escolar. Finalmente, se busca mediante una triangulación metodológica describir las relaciones que se establecen entre los objetos de estudio y los actores bajo estudio: los alumnos, los docentes y los contenidos matemáticos de interés en un contexto educativo determinado (las aulas de primero y segundo grado en una escuela primaria pública).

La presente investigación consistió de un *estudio de casos*. Al respecto, Rodríguez, Gil y García (1999, p. 91) definen el estudio de casos como un “examen completo o intenso de una faceta, una cuestión o quizás los acontecimientos que tienen lugar en un marco geográfico a lo largo del tiempo”. Estos autores refieren que lo que caracteriza al estudio de casos es el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos, más que la verificación o comprobación de lo previamente establecido. En este estudio se consideró como caso el estudio del proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos, que ocurre a lo largo del ciclo escolar con la participación de los docentes y el alumnado de un grupo de primero y otro de segundo grado de primaria en una institución pública. En la revisión de la literatura antecedente, se estableció que no existen estudios que traten de explicar este fenómeno de manera integral y con la debida profundidad (vinculando la enseñaza, el aprendizaje y las concepciones), específicamente en poblaciones como las que nos interesan (docentes y alumnos de primer y segundo grado en escuelas públicas mexicanas).

De acuerdo con Stake (1995), el presente es un estudio de casos instrumental colectivo, ya que se realiza para llegar a comprender algo que se vincula con una necesidad de comprensión general del objeto de estudio [1]. Lo que aquí interesa comprender son una serie de procesos y representaciones relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas elementales en primer y segundo grado de primaria, más allá de que sean la profesora Ana o el profesor Mario que aceptaron participar; por esto mismo se eligieron a dos docentes y sus respectivos grupos de alumnos como objeto de estudio y no sólo a uno. Cada caso (docente y su respectivo grupo de alumnos) es un instrumento para aprender más acerca de la construcción del conocimiento matemático en los primeros grados escolares. Se decidió trabajar con un grupo de primer grado y otro de segundo dado que es en esos dos grados en que está previsto desde el marco curricular el proceso de apropiación de los contenidos matemáticos que nos interesaba estudiar, y al mismo tiempo, porque la literatura especializada sobre el tema se centra precisamente en escolares de esos grados y rangos de edad. Es importante destacar que la delimitación del foco de análisis en los casos bajo estudio estuvo presidida por un enfoque teórico en el cual se considera crucial el estudio de los elementos del triángulo didáctico: profesor, alumnos y contenido.

De acuerdo a Yin (1994) la identificación de la *unidad de análisis* se refiere a la necesidad del investigador de establecer los límites del caso tan claramente como sea posible en términos de quién se incluye, el área geográfica y tiempo de iniciación y finalización del caso. Es importante señalar que una vez que se ha identificado el caso, la unidad de análisis queda descrita dentro del contexto del caso. Los casos definidos en este estudio incluyen a dos profesores y sus respectivos grupos de alumnos de primero y segundo grado una escuela primaria pública “Participación Social # 5” de turno matutino que se ubica al sur de la del Distrito Federal (ver más adelante). La unidad de análisis es el tipo de relación didáctica que se establece entre los alumnos y su maestro en el proceso de enseñar y aprender

---

[1] Para Stake (1995) los estudios de caso se pueden clasificar en *intrínsecos, instrumentales y colectivos*, cuyas características se pueden resumir como sigue:

a) *Estudio intrínseco de caso*. En éste, lo que se pretende es alcanzar una mejor comprensión del caso concreto. No se trata de elegir un caso determinado porque sea representativo de otros, o porque ilustre un determinado problema o rasgo, sino porque es en sí mismo de interés; la finalidad no se centra en comprender algún constructo abstracto o fenómeno genérico, tal como la alfabetización o el uso de drogas en la adolescencia; el estudio está comprometido en el interés intrínseco del caso. Muchas veces no es posible elección alguna, a la hora de escoger un caso, porque “nos viene dado” al decidirnos por estudiar un alumno con dificultades, abordar determinados procedimientos o realizar la evaluación de un programa. Entonces ese caso “dado”, no nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre *ese* caso particular.

b) *Estudio instrumental de caso.* No se interesa por el caso en sí, sino por comprender un determinado problema o rasgo o bien algún constructo abstracto o fenómeno genérico; es decir, es un instrumento para conseguir algo diferente a la comprensión intrínseca del caso mismo. En este tipo, el caso se examina para afinar un tema o profundizar una teoría. El caso en sí aquí es secundario, juega un papel de apoyo, facilitando la comprensión de algo; puede ser característico de otros, o no serlo. Un caso instrumental se elige en la medida en que aporte algo a la comprensión del tema objeto de estudio. Por ejemplo, si el tema fuese la introducción de un nuevo sistema de la evaluación, su orientación y su impacto en la forma de enseñar de los profesores, se podría elegir una profesora como objeto de estudio, observar de forma general cómo enseña y de forma más particular cómo califica los trabajos de los alumnos y si ello afecta o no su modo de enseñar. Aquí el estudio de casos sería un *instrumento* para conseguir algo distinto a la comprensión de esa profesora concreta.

c) *Estudio colectivo de casos*. Siguiendo con la misma situación hipotética, quizá sería oportuno elegir varios profesores como objeto de estudio y no sólo uno. Entonces cada caso sería un instrumento para aprender algo sobre las normas de calificación, pero deberá existir una buena coordinación entre cada uno de los estudios individuales. A esto se llama estudio colectivo de casos; en realidad es estudio instrumental extendido a varios casos.

Stake (1995) afirma que la distinción que hace no se debe a su utilidad para asignar los casos a estas tres categorías, asignación que no siempre es posible decidir, sino que las técnicas que se van a emplear serán diferentes y dependerán de que el caso sea intrínseco o instrumental. Entre más intrínseco sea el interés de un caso, más se deben refrenar la curiosidad y el interés por otras historias para centrarse en los temas específicos del caso. Sin embargo, en su opinión, todos los estudios de casos deben ser descriptivos e interpretativos y a la vez enfocados a comprender la experiencia humana, empáticos y facilitadores de la comprensión de sus lectores a través de descripciones lo más densas posibles.

determinados contenidos matemáticos, relación que se encuentra mediada por las concepciones y actuación del docente y los propios conocimientos de los alumnos.

En este sentido, a través de la utilización de técnicas de observación, videofilmación, grabación y entrevistas se buscó levantar los datos necesarios para poder explicar y dar sentido a las representaciones y actuaciones de docentes y alumnos involucrados en el proceso de enseñar y aprender contenidos del dominio específico de las matemáticas escolares. Se buscó arribar de manera integral a entender las relaciones y los conceptos característicos de este proceso de enseñanza y aprendizaje de los dominios matemáticos específicos, ampliando la experiencia, confirmando lo que ya se sabe, y se trata de aportar información útil que contribuya a otras investigaciones. Se espera que los resultados puedan ser utilizados para mejorar la calidad de la instrucción de estos conocimientos matemáticos.

La validez de las técnicas se realizó siguiendo los siguientes criterios: para la validez externa, se buscó satisfacer el criterio de validez ecológica en la medida que "el hecho seleccionado representa bien el ámbito sustantivo de realidad que se quería conocer y no es necesario intentar otro…" (Olabuénaga, 1999, p. 93). El siguiente criterio es el metodológico, pues en la medida que el método sea claro y preciso en su descripción, es de esperarse que se obtengan resultados muy similares en condiciones afines al método. Y el criterio explicativo, donde se vigiló que los conceptos utilizados no fueran superados en su capacidad para explicar el fenómeno de estudio. En cuanto a su validez interna, se consideró el criterio de validez de los instrumentos a través de su correspondencia entre los conceptos y técnicas utilizadas, y el de fiabilidad en la medida en que se cuidó el control de las técnicas para obtener los datos, como fue el caso de la observación y las entrevistas, logrando consistencia interna en los datos que se obtuvieron así como estabilidad.

Un último recurso metodológico para lograr la validez de los datos y de los resultados fue la triangulación metodológica, que consiste en contrastar y relacionar los datos encontrados a través de las diferentes técnicas utilizadas para la obtención de los datos de información. En este estudio se contrastaron los resultados de la prueba aplicada a los alumnos, los resultados de la entrevista a los profesores y la observación de la clase. También se condujo la triangulación de las fuentes de datos, ya que se observaba si el fenómeno o caso seguía siendo el mismo en otros momentos, en otros espacios o cuando las participantes interactuaban de forma diferente. En el análisis de los resultados de los alumnos, se recurrió a la denominada triangulación del investigador o validación por jueces, donde se hace que otro investigador o investigadores (jueces) observen y analicen un mismo fenómeno o conjunto de resultados (Stake, 1995). Esto último permitió la construcción y validación del instrumento que valora los conocimientos matemáticos de los alumnos.

En cuanto al componente cuantitativo de esta investigación, éste estuvo presente en relación al análisis estadístico de los resultados del instrumento de conocimientos aplicado a los dos grupos de alumnos de primero y segundo grado. Consistió tanto en un análisis estadístico descriptivo como en la aplicación de pruebas de inferencia estadística (ver análisis de resultados). Dicho análisis no fue el foco central del estudio, pero sí aportó elementos valiosos para la comprensión del fenómeno de interés y para la interpretación de los resultados.

5.5 Contexto de la investigación: Escenario y participantes

Descripción del escenario

Uno de los primeros pasos que se dieron en esta investigación, fue realizar una solicitud a una escuela primaria pública de turno matutino que se ubica al sur del Distrito Federal, sobre Avenida San Fernando en la Delegación Coyoacán. Gracias a la disposición del personal de la misma y facilidades brindadas, fue posible realizar en ella el estudio y acceder a los casos de interés.

A partir de entrevistas y de acuerdo a la descripción de su directora, de algunos de sus profesores y de pláticas informales con el resto del personal, esta escuela se caracteriza por recibir a niños que no son aceptados en otras escuelas, principalmente por el tipo de comportamiento que muestran o por su bajo aprovechamiento académico. Al respecto cabe señalar que existe una opinión generalizada entre los docentes respecto a que los principales problemas de los alumnos que asisten a esta institución son la falta de respeto a la autoridad, la indisciplina, una pobre autoimagen y el no respetar turnos y tiempos en las sesiones de clase. Esta escuela tiene un carácter asistencial y recibe a hijos de madres trabajadoras, muchas de ellas a cargo totalmente de la familia y con escasos recursos económicos. Por ello un número considerable de alumnos están bajo el régimen de medio internado, es decir, entran a las 8 de la mañana a clases regulares, pero salen hasta las 5 de la tarde, recibiendo apoyo en alimentación y cuidado en el horario vespertino. Se cuenta con el apoyo de médicos, trabajadores sociales, personal de comedor, de intendencia, de vigilancia, un maestro de educación física, una trabajadora social de Unidades de Servicio y Apoyo a la Educación Regular (USAER) y un maestro auxiliar, este último se encarga de trabajar con el grupo actividades artísticas o recreativas por las tardes. Cabe señalar que el subsidio económico del plantel proviene del Gobierno del Distrito Federal.

En total la escuela cuenta con una planta docente de 12 maestros, la Directora de la escuela, una Jefa de Clase y una maestra de USAER, siendo un total de 15 maestros. Se tienen 2 grupos por cada grado, es decir doce grupos. Con respecto a la descripción física de las instalaciones, esta escuela cuenta con dos patios y un jardín trasero; el patio principal tiene unas dimensiones aproximadas de 15 metros de ancho por 30 metros de largo. Las aulas presentan las condiciones habituales de las primarias públicas, un mobiliario consistente en mesabancos para los alumnos, escritorios y sillas para los docentes, pizarrón, archivero y útiles de trabajo básicos. El número de alumnos que asistían al plantel, al momento de realizar la investigación, se estimaba en 373.

En cuanto al ambiente educativo y las rutinas, los niños entran a diario a partir de las 7 horas para poder tomar su desayuno, posteriormente a las 8 de la mañana suena el timbre para que se formen en el patio principal, ahí reciben indicaciones de actividades a realizar o del buen comportamiento que deben observar en el aula. Después pasan a su salón donde reciben clases hasta las 10: 30 horas, momento en que nuevamente suena el timbre para salir al recreo, posteriormente a las 11 horas regresan a sus salones y los maestros continúan con sus clases. A las 13 horas los niños pasan a los comedores para recibir sus alimentos; a las 14 horas regresan a sus salones para trabajar actividades recreativas y artísticas con el maestro auxiliar. Es necesario decir que cada grupo recibe una clase semanal de computación con una duración aproximada de una hora, de igual forma ocurre con educación física. En cuanto a los profesores, éstos mantienen una reunión con la directora el viernes último de cada mes escolar, donde se discuten y muestran las dificultades o problemas existentes, así como instrucciones o información proveniente de la SEP.

Esta escuela ha brindado desde hace tiempo una serie de facilidades de acceso a grupos de prácticas e investigadores de la Facultad de Psicología de la UNAM, y sus autoridades mostraron disposición e interés por nuestro estudio.

Participantes

Participaron dos profesores y sus respectivos grupos de alumnos de primer y segundo grado de primaria de dicha escuela pública, de los que se seleccionaron por grado cuatro niños de bajo y otros cuatro de alto rendimiento para la evaluación y análisis de su conocimiento matemático; los grupos se integraban con 32 y 25 niños y niñas respectivamente, con edades comprendidas entre 6 y 8 años.

La elección de los participantes fue de tipo intencional y en gran medida estuvo en función de la disponibilidad de los docentes para trabajar con ellos y con sus grupos de estudiantes.

La maestra Ana[2], quien imparte el primer grado de Primaria, nació y ha vivido hasta ahora en el Distrito Federal, actualmente tiene 47 años. En cuanto a su formación profesional, la maestra estudió la Normal Básica, ha trabajado como maestra de primaria durante 21 años, por las mañanas es maestra y por las tardes se dedica a las actividades de su hogar. Considera que su formación profesional en la enseñanza de las matemáticas inició a partir de sus estudios de primaria y de manera formal cuando llevó un curso de matemáticas en la Escuela Normal con duración de un año y durante todo el ciclo escolar con una duración de una hora diaria.

El maestro Mario de segundo grado, nació en el ciudad de Monterrey, actualmente tiene 25 años. En cuanto a su formación profesional, el maestro comenta que estudió la normal básica, ha trabajado en educación primaria durante dos años y tres meses, por las mañanas se dedica a enseñar al grupo de segundo grado, y por las tardes estudia una licenciatura en educación secundaria con la especialidad de matemáticas, sin realizar alguna otra actividad profesional o de otro tipo.

En cuanto al grupo de primer grado participaron 32 alumnos en total, entre niños y niñas que asistían regularmente a clases, sus edades oscilaron entre los 6 y 7 años. En el grupo de segundo grado, participaron 25 niños y niñas, cuyas edades promedio fueron entre los 7 y 8 años (Tabla 3).

La participación de los grupos en su totalidad ocurrió únicamente en la fase del análisis del contrato didáctico, es decir, durante la videograbación de algunas sesiones de clase. Por otro lado, como se verá más adelante, se realizaron algunos análisis casuísticos del conocimiento matemático de los niños, por lo que se seleccionó una muestra pequeña entre los grupos de ambos grados. En la selección intencional (Olabuénaga, 1999) de esta muestra pequeña para el análisis del conocimiento matemático, se tomó por cada grado una muestra de 8 alumnos, de los cuales 4 de ellos mostraban bajo rendimiento y otros 4 alto rendimiento académico en matemáticas. Para la elección de estos participantes, se le pidió a los docentes que eligieran a los niños o niñas en función de su desempeño académico en la materia, por lo cual los docentes realizaron la selección con base a los resultados de sus evaluaciones al inicio del ciclo escolar (Tabla 3). Se pidió que fueran alumnos con diferente nivel de aprovechamiento académico con la finalidad de observar las posibles variaciones en el aprendizaje logrado respecto a los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) bajo estudio.

[2] Los nombres de docentes y alumnos se cambiaron por motivos de confidencialidad.

Tabla 3. Distribución de participantes en la investigación

Grados	Total de alumnos	Alumnos de alto rendimiento	Alumnos de bajo rendimiento	Maestros
1ro.	32	4	4	1
2do.	25	4	4	1
Total	*57*	*8*	*8*	*2*

5. 6. Delimitación conceptual del objeto de estudio

Conocimientos conceptuales y procedimentales de la suma, la resta y la solución de problemas aditivos

Para los fines de esta investigación, el *conocimiento conceptual* puede definirse como el conocimiento y la comprensión que tiene el niño acerca del significado de los conceptos implicados en la suma y la resta, y el empleo de sus algoritmos correspondientes aplicados a la solución de problemas. El conocimiento conceptual y algorítmico comprende conceptos numéricos y principios matemáticos como la asociación, la conmutatividad, la adición, la sustracción, etc. así como la comprensión de la composición aditiva del número y la operatividad del sistema decimal. El conocimiento conceptual puede reflejarse en el momento que el niño intenta solucionar un problema, en la forma de comprender la posible relación que se establece entre las variables que forman un problema planteado con diferentes niveles de complejidad (Carpenter et al., 1999; Nunes y Bryant, 1997). Es decir, el conocimiento conceptual abarca el entendimiento de los significados subyacentes a la adición y la sustracción y las situaciones con que éstas se relacionan.

El conocimiento procedimental matemático supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones de las que se obtiene el resultado acorde a un objetivo concreto. Tradicionalmente se distinguen en el área de las matemáticas dos grandes tipos de procedimientos: los algorítmicos y los heurísticos. Mientras que en los primeros llevan a una solución adecuada si se siguen todos los pasos prescritos, los segundos no garantizan una solución correcta, pero guían el proceso para llegar a ella (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001). El conocimiento procedimental, en esta investigación, se refiere al conjunto de estrategias, que incluye recursos cognoscitivos o materiales que el niño puede utilizar en el momento de solucionar un problema y los mismos algoritmos de la suma y la resta. Cabe mencionar que el conocimiento conceptual y procedimental fue indagado en nuestro estudio a través de un instrumento construido ex profeso, basado en el Inventario de Ejecución Académica (Macotela, Bermudez y Castañeda, 2000), el cual se describe en la sección correspondiente.

Concepciones del profesor acerca de la enseñanza de las matemáticas

En la literatura reportada, las representaciones o concepciones del profesor, se han aglutinado bajo el término genérico de "pensamiento del profesor" (Clark y Peterson, 1990; Monroy, 1998), aunque en realidad recogen conceptos y metodologías diversas empleadas en el estudio del conocimiento profesional del profesorado. Thompson (1992, p. 130) en un concepto más amplio al aludir a la noción de sistema de creencias, se refiere a las "concepciones de los maestros, vistas como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, normas, imágenes mentales, preferencias y situaciones semejantes".

Por su parte, ya hemos visto que Monroy y Díaz (2004) destacan que el pensamiento pedagógico del docente es un marco de referencia que integra un conjunto de teorías implícitas, creencias, expectativas, nociones y valores mediante los cuales el profesor significa, interpreta, decide y actúa en sus actividades educativas. Este conjunto de representaciones pedagógicas ha sido reconstruido personalmente sobre la base de conocimientos pedagógicos históricamente elaborados (pedagogías tradicionales, conductuales, activas, operatorias, constructivas, críticas) y apropiados por medio de la reformación docente y de la propia práctica. Las teorías implícitas (reconstrucciones personales) no sólo son un sistema cognitivo como dispositivo epistémico de interpretación de la realidad, sino también como un sistema referente de planificación y de control de la acción, no se reducen por lo tanto a un mero ejercicio intelectual, sino son parte de la actividad vital para interactuar con el medio.

Este tipo de estudios sobre las representaciones, creencias, expectativas y valores de los docentes ha tenido una orientación hacia la investigación educativa, pero también es una metodología utilizada para reflexionar sobre el pensamiento pedagógico de los profesores, con la intención de evaluar las representaciones de sus actividades académicas. El análisis de las teorías y creencias docentes es una alternativa para pensar cómo conciben ellos el pensamiento pedagógico en diferentes momentos de su quehacer educativo. Antes de iniciar las actividades docentes, el análisis del pensamiento docente brinda información acerca de la manera como el profesor se representa la práctica educativa que ejercerá con sus alumnos. Durante la acción educativa, la evaluación del pensamiento pedagógico del profesor proporciona datos sobre cómo y con base en qué elabora juicios y toma decisiones durante su intervención en los procesos de enseñanza y aprendizaje, cuando el profesor culmina una etapa del trabajo, permite observar cómo percibe la experiencia de su actividad, qué habrá de cambiar, qué habrá de desechar o enriquecer para que en futuras actuaciones educativas prevean resultados más afortunados.

En conclusión se adopta el termino *concepciones* derivado de la definición antes citada de Thompson (1992) considerando que el termino incluye el resto, aludiendo que de la literatura revisada para fines de esta investigación fue el que mas se adapto, ya que incluye en su definición el conjunto de creencias y representaciones que el docente pueda tener acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido en el marco anterior se concibe que durante las entrevistas realizadas en esta investigación los maestros en sus respuestas revelen o expresen sus concepciones y en esas concepciones se incluyan al mismo tiempo la expresión de sus creencias y de su pensamiento docente. De esta forma, en esta parte de la investigación se asume que todo cuanto logren expresar en su discurso los maestros será considerado como *las concepciones de los maestros*, que ayudarán a contrastar su actividad en la práctica escolar real, y relacionarlo con aprendizaje y los conocimientos que el niño sabe y adquiere acerca de los conocimientos matemáticos que se analizan en esta tesis.

En esta investigación nos circunscribimos a las *concepciones* que los docentes reportan sobre la enseñanza de las matemáticas, en particular respecto a los contenidos referidos a conceptos y algoritmos para aprender la suma y la resta y la solución de problemas aditivos. Dichas concepciones docentes se exploraron a través de una entrevista semiestructurada basada en Monroy (1998), enfatizando los *juicios de valor*, el *conocimiento experiencial* y las *propuestas para enseñar y evaluar* por parte del docente (ver anexo 2). Las dimensiones estudiadas mediante dicha entrevista son las que se señalan a continuación (Tabla 4).

Tabla 4. Concepciones docentes sobre la enseñanza de las matemáticas

Concepciones del profesor acerca de la enseñanza de las matemáticas -Categorías a explorar en la entrevista semiestructurada- (Basado en Monroy, 1998)	Formación previa e interés en la didáctica de la materia
	Concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas (importancia, ubicación en el currículo, sentido del aprendizaje, tipo de aprendizajes buscados, problemática, etc.)
	Concepciones acerca del alumno y de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas.
	Contenidos específicos y aprendizajes más importantes en relación con la suma, la resta y la solución de problemas aditivos
	Métodos /Estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos
	Evaluación del aprendizaje

Contrato didáctico

En términos de la teoría de Brousseau, ya vimos que el *contrato didáctico* "es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica. Esto es la justificación que el maestro tiene para presentar su situación. Pero la evolución de la situación modifica el contrato, quien entonces permite que surjan nuevas situaciones. En la misma forma, que es el conocimiento que es expresado por las reglas de la situación a-didáctica y por las estrategias. La evolución de estas estrategias requiere producción de conocimiento que en su paso permite el diseño de una nueva situación a-didáctica. El contrato didáctico no es un contrato pedagógico general. Este depende estrechamente del conocimiento específico en juego" (Brousseau, 1997, p.31).

En síntesis y de acuerdo con Brousseau (2000), se puede definir el contrato didáctico como el conjunto de obligaciones recíprocas entre alumnos y profesores, las posibilidades de intervención, de devolución de la parte a-didáctica de las situaciones y de la institucionalización. Un contrato didáctico puede ser perecedero de acuerdo con las necesidades o cambios de la actividad didáctica, por ello en el transcurso de la clase pueden presentarse varios tipos de contratos que se sintetizan en el cuadro siguiente (Tabla 5).

Tabla 5. **Tipos de contrato didáctico según Brousseau**

Tipo de contrato	**Subcategorías de contrato**
No didácticos	Emisión
	Comunicación
	Experto
Ligeramente didácticos	Información
	Utilización de conocimientos
	Aplicación y control
Fuertemente didácticos	Reproducción formal
	Condicionamiento
	Mayéutica socrática
	Trabajo empiristas
	Ostensión
	Constructivistas
	Transformación de saberes previos

Un contrato didáctico transcurre a lo largo de una secuencia didáctica, por lo que se le puede considerar como la unidad básica de observación, análisis e interpretación en esta parte de la investigación.

Una secuencia didáctica se puede definir como el conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos, que tienen un principio y un final conocidos tanto por el profesor como por el alumnado (Zabala, 2000). También se define como un proceso completo de la enseñanza en miniatura, es decir, como el proceso mínimo de enseñanza y aprendizaje que incluye todos los componentes propios de este proceso (objetivos, materiales, actividades de enseñanza, actividades de aprendizaje y evaluación) y en el que es posible identificar un principio y un final (Coll, Colomina, Onrubia y Rochera, 1992). En esta investigación la exploración del tipo de contrato didáctico presente en las clases de los profesores se realizó mediante el análisis de las secuencias didácticas videograbadas en el aula, buscando identificar los tipos de contrato antes mencionados.

5.7 Estrategia metodológica e instrumentos

En relación a la estrategia metodológica de esta investigación, en la tabla 6 se muestra sistemáticamente el tipo de participante, la dimensión bajo estudio, la categoría básica a indagar y la estrategia metodológica y/o el tipo de instrumento que se utilizó para la recolección y análisis de la información o datos necesarios para esta investigación. Se indican asimismo los autores que se tomaron como referentes teóricos y para el diseño de los instrumentos. Este esquema nos permite dar una visión de conjunto antes de pasar a una explicación más detallada de cómo se condujo la investigación.

Tabla 6. Dimensiones, categorías y estrategia metodológica e instrumentos

Participante	Dimensiones	Categorías	Instrumento y/o Estrategia
Profesor	Concepciones docentes	• Formación previa en didáctica de cada materia • Enseñanza de las matemáticas • Métodos /Estrategias didácticas • Contenidos y aprendizajes más importantes para la suma, la resta y la solución de problemas aditivos • El alumno y su aprendizaje • Evaluación del aprendizaje	Entrevista semiestructurada acerca de las concepciones de enseñanza docente; basado en Monroy (1998)
Alumnos	Adquisición del conocimiento matemático	• Conocimientos matemáticos previos: conteo, numeración y sistema decimal. • Conceptos y algoritmos de la suma y la resta • Solución de problemas aditivos	Prueba de conocimientos matemáticos. Construida y validada por el doctorando con base en Nunes y Bryant, (1997) y en Carpenter, Fennema, Franke, Lev y Empson, (1999).
Profesor-alumnos	Tipo de contrato didáctico	• No didácticos • Ligeramente didácticos • Fuertemente didácticos	Análisis del tipo de contrato didáctico mediante observación no participante con base en Brousseau, (1999, 2001); Ávila, (2001a, 2001b).

Diseño de instrumentos y entrevistas

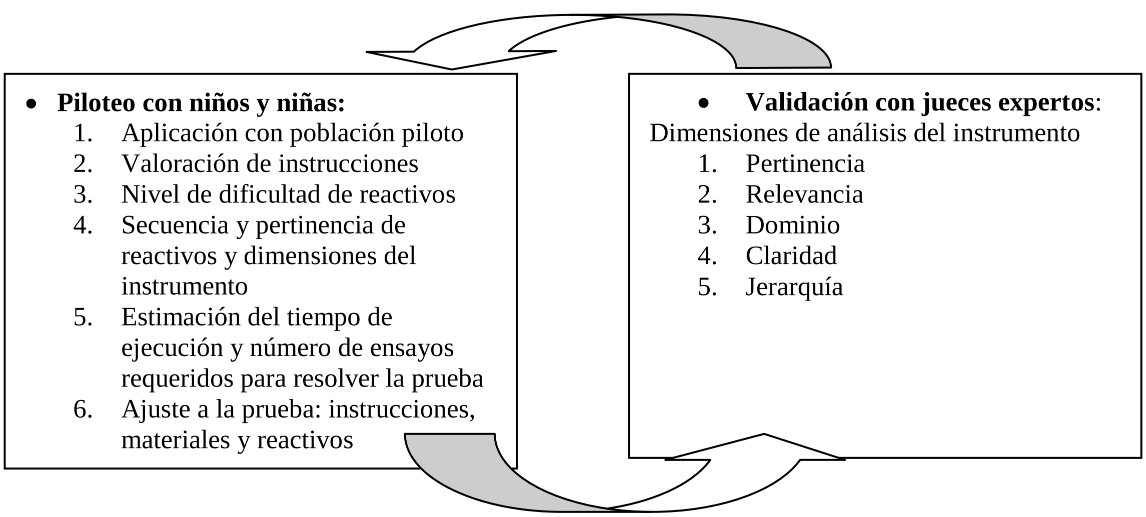
- *Diseño de un instrumento para medir y evaluar el conocimiento matemático*. (Anexo 1).

Como uno de los primeros pasos en la realización de esta investigación se procedió a la construcción de la "Prueba de evaluación de conocimientos matemáticos previos, suma, resta y solución de problemas aditivos".

Los conocimientos matemáticos, se centraron específicamente en dos aspectos: los conocimientos previos o precurrentes (numeración y conteo, sistema numérico decimal) y los conocimientos matemáticos de interés en esta investigación: conceptos y algoritmos de la suma y la resta, solución de problemas aditivos (basado en SEP, 1993; Nunes y Bryan, 1997; Carpenter et al. 1999). En principio, se realizó un análisis de la teoría relacionada, se consultaron otros instrumentos cómo el Instrumento de Ejecución Matemática (Macotela, Bermúdez y Castañeda, 2000) y pruebas informales que los maestros del grado empleaban. Se construyeron y respaldaron teóricamente los constructos o dimensiones, se procedió a la elaboración de las categorías y sus respectivos reactivos o tareas, se piloteó y se realizó una validación interjueces. Finalmente, se hicieron los ajustes sugeridos y necesarios para su aplicación a los participantes del estudio[3] .

Durante el proceso del piloteo se asistió a la escuela primaria, se aplicó la prueba a niños y niñas de rendimiento promedio, se observó cómo respondían y la efectividad del reactivo, se realizaron las anotaciones necesarias para posteriormente regresar a analizar las respuestas de los niños y plantear las modificaciones pertinentes. Se prepararon las observaciones de la aplicación para reportarlo y discutirlo con el equipo de jueces y tomar las decisiones procedentes. Posteriormente se realizaron los ajustes y cambios pertinentes para regresar, en varias ocasiones, nuevamente a probar los reactivos modificados. La figura 2 ilustra el ciclo y el proceso del piloteo con los niños y su validación con jueces.

Figura 2. Esquema del Proceso del piloteo y validación de los reactivos de la Prueba de Evaluación de Conocimientos Matemáticos



[3] La construcción de este instrumento fue apoyada por la Dra. Sandra Castañeda Figueiras, dado que su elaboración se realizó durante los seminarios doctorales que el investigador tomó con la misma. La metodología de construcción, validación y piloteo fue sugerida y supervisada por la Dra. Castañeda y acordada con la directora de esta tesis. En la sección de resultados se dan a conocer en detalle el procedimiento seguido y los resultados obtenidos.

- Diseño de entrevistas

Se diseñaron dos entrevistas, una para los alumnos (Ginsburg, 1997, García, 2002) y otra para los maestros (basada en Monroy, 1998).

1. *Para los niños*. Consistió en una entrevista abierta que se realizó en el momento en que el niño resolvía las tareas o reactivos contenidos en el instrumento de conocimientos matemáticos, aplicada durante el estudio piloto. El investigador planteaba preguntas pertinentes conforme dicha aplicación transcurría, con el propósito de detectar qué sabía el niño, cómo lo sabía, cuál era su posición, dudas, actitudes, etc. ante los diferentes contenidos de dicho instrumento. Esto con la finalidad de saber las justificaciones y el tipo de conocimiento matemático que el niño podía proyectar o expresar en sus respuestas, específicamente para cada tarea y categoría del instrumento de evaluación. La aplicación de este instrumento permitiría detectar sus conceptos y procedimientos, relacionados con los algoritmos de la suma la resta y la solución de problemas aditivos (Anexo 2).

2. *Para los maestros.* Relativa a las concepciones docentes sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; las dimensiones a explorar fueron las planteadas con antelación en la tabla 4 y la sección respectiva. El proceso para su validación consistió en una aplicación piloto, a dos maestros, uno de primer grado y otro a una maestra de segundo grado, que fueron profesores que no se integraron al estudio definitivo (Anexo 3).

- *Instrumento para tipificar los contratos didácticos*

Con base en la literatura revisada, se elaboró un cuadro guía del tipo de contratos didácticos planteados por Brousseau (Anexo 4), a fin de identificar y caracterizar el contrato didáctico que se desarrollaba en las clases específicas que fueron videograbadas en esta investigación (Tabla5). Las características descritas en cada tipo de contrato se contrastaban con la transcripción de lo ocurrido en los episodios de enseñanza-aprendizaje en el aula y cuando era posible, se confrontaban con el discurso del profesor durante la entrevista. Al mismo tiempo, se consultó a Lemke (1997) para poder caracterizar la secuencia didáctica en su conjunto.

5.8 Procedimiento

- Aplicación de entrevistas e instrumentos a los niños

Una vez que el profesor autorizó y designó a los niños, así como la misma aceptación por parte del niño o niña, se procedió a aplicarle el instrumento de conocimiento de dominio y la entrevista respectiva. Es necesario señalar que durante la aplicación del instrumento de dominio también se aplicó la entrevista acerca de la ejecución que realizó el niño en el momento: por ejemplo si el niño resolvía una operación una vez que había concluido, en ese momento se le entrevistaba acerca de cómo lo había hecho, qué entendía por suma o resta dependiendo o cuál fue la secuencia que realizó. Otro ejemplo puede ser cuando el niño resolvía un problema y una vez que concluía su solución se le entrevistaba acerca de la forma en que lo había resuelto, así como cuáles eran sus estrategias. De igual forma, el investigador permanecía atento y anotaba cualquier observación importante, que ayudara a explicar el proceso realizado. Esta entrevista también se grabó en videocassette para la posterior transcripción de los segmentos de interés.

Para poder lograr esta aplicación se procedió a elegir un espacio dentro de la escuela donde se dispuso de una mesa y sillas para el niño y el investigador. Se preparó y adaptó la cámara de videofilmación en el lugar de trabajo. El investigador tenía a mano el cuadernillo de reactivos, así como hojas para realizar las anotaciones procedentes respecto a la ejecución y las respuestas o incidencias de interés en la entrevista del niño. Por su parte, se aseguró que el niño siempre tuviera un lápiz, hojas blancas y sacapuntas como material de apoyo. El investigador dispuso de un espacio breve de tiempo para establecer confianza y seguridad en el niño; le explicó en qué consistía la actividad y su participación. Una vez logrado este clima de confianza y aceptación, se procedió a la aplicación ya descrita. La aplicación tuvo como finalidad analizar y explorar los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) relativos a la suma y la resta y la solución de problemas aditivos. Es importante señalar que durante la aplicación de los reactivos de la prueba se le dio a cada alumno hasta cuatro oportunidades o intentos para tratar de solucionar correctamente. De igual forma, el aplicador le proporciono material como semillas hasta una serie de ayuda que consistía en tratar de hacerle preguntas al niño, de dialogar y de buscar explicaciones con la finalidad de acercarlo a una comprensión y solución del ítem donde presentará dificultad. Los intentos finalizaban cuando se creía que se el niño llegaba al esfuerzo máximo o donde el mismo niño refería que desconocía una repuesta, si el niño lograba dar la solución correcta se le puntuaba con un uno, en caso contrario con cero de puntuación.

- Aplicación de entrevistas a profesores

Una vez que se estableció la cita con el profesor, preferentemente en el momento del recreo o en algún espacio libre, se procedió a aplicarle la entrevista de manera individual. Esto se realizó con la finalidad de explorar y analizar sus principales concepciones y la forma en que realiza la planeación e impartición de la enseñanza de la suma y la resta y la solución de problemas aditivos. Se grabó en audiocasete para su posterior transcripción. Después de la entrevista, se analizó su contenido y se consideró que si alguna categoría no había sido explorada o cubierto su contenido, se procedía a buscar una cita más para completar los aspectos necesarios.

- Videofilmación de sesiones de clase en el aula

Se acordó previamente con los docentes las sesiones en las que pensaban impartir los contenidos matemáticos de interés para nuestro estudio (conceptos y algoritmos de suma y resta, solución de problemas aditivos) y se solicitó su permiso para realizar la grabación de la sesión o sesiones completas.

A partir de los planteamientos de Erikson (1992) en "Microanálisis etnográfico de interacción", se procedió a atender sus sugerencias técnicas para la videofilmación de la siguiente forma. Una vez obtenido el consentimiento del maestro y los alumnos, se procedió a asistir con la cámara al aula regularmente con algunas semanas de anticipación antes de realizar la primera grabación. Se explicó a los niños que se realizarían algunas filmaciones, por curiosidad de los niños se les mostró la cámara, se les filmó y mostró la filmación en algunas ocasiones. Después de varias visitas, cuando se consideró que los niños, su maestra o maestro y el mismo observador ya se habían integrado y adaptado, se procedió a acordar con los maestros las fechas y horarios para filmar las clases.

Con respecto a la disposición del equipo técnico, ya en el aula durante la videofilmación se dispuso de dos cámaras, una se ubicó y fijó al fondo del salón para grabar la clase en general y se colocó un micrófono inalámbrico en el centro del salón de clases. La segunda cámara se utilizó para seguir la actuación y acción del participante, alumno o maestro. Una vez terminada la grabación se rotularon los casetes con el nombre del docente y grado, el tema de la clase, la fecha y su duración, y se procedió a archivarlos.

Estas videofilmaciones permitieron analizar los tipos de contratos didácticos que ocurren en la relación didáctica entre el profesor y sus alumnos en las clases, para cada uno de los dominios matemáticos de interés. Es importante aclarar que se eligieron intencionalmente únicamente los segmentos de interés que explicaban dónde ocurrían de la manera más clara los contratos didácticos.

- Análisis de los contenidos curriculares (programas de estudio)

Se consultaron los fundamentos y lineamientos para la enseñanza de cada uno de los contenidos de nuestro interés que se tienen previstos en los programas oficiales de la materia de Matemáticas para primero y segundo grado. Se tomó como referente al programa de estudios oficial de SEP y el libro del maestro para los grados respectivos. Esto permitió identificar el tipo y nivel de los aprendizajes buscados, así como su progresión y los ejemplos de actividades o métodos didácticos recomendados a los docentes. Esto nos permitirá comparar en alguna medida lo que prescribe el currículo con lo que en realidad se practica durante las clases video filmadas. El asunto reviste interés ya que como se revisó en el apartado del marco teórico, el currículo vigente supuestamente se encuentra sustentado en un enfoque pedagógico propio de la didáctica francesa (Vergnaud, Brousseau) y se espera que los docentes privilegien el enfoque basado en la resolución de problemas a la par que promueven los procesos de construcción del conocimiento y reflexión en los estudiantes.

5.9. Procedimiento de análisis e interpretación de los Resultados

Considerando que el presente estudio sigue un método cualitativo-cuantitativo, la estrategia que predomina para el análisis de datos estuvo en ciertos momentos orientada de manera inductiva y en otros de manera deductiva, es decir, siguiendo un método combinado. Se consideró como referente la estrategia de Glaser y Strauss (1967) para la delimitación de dimensiones y categorías de análisis, aclarando que la propuesta de estos autores consiste de cuatro etapas: comparación de los episodios aplicados a cada categoría; integración de categorías y sus propiedades; delimitación de la teoría y su escrito. Cada etapa alcanza un desarrollo que la define como la siguiente hasta lograr escribir la teoría o arribar a una interpretación de lo que se ha indagado. Sin embargo, el foco del análisis no reside siempre en la posibilidad de elaborar explicaciones o construcciones teóricas desde los datos, antes bien, su función principal está en la posibilidad de realizar comparaciones constantes para generar categorías. Este aspecto atrae a la mayoría de los investigadores (Merriam, 1998) y es lo que orienta el presente análisis pues no se pretende construir una teoría sustantiva, sino más bien aportar a la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas elementales.

En este sentido, a continuación se explica cómo se realizó el análisis y la interpretación de los resultados, considerando cada uno de los instrumentos aplicados. Iniciaremos con la presentación de los resultados del instrumento de conocimientos matemáticos aplicado a los alumnos de manera grupal, para pasar después a los análisis de casos realizados. En un siguiente apartado se presentarán los resultados de la entrevista sobre pensamiento del profesor. Posteriormente, se describe lo que se ha encontrado respecto al análisis de los contratos didácticos en las aulas bajo observación.

1) *De los resultados de la prueba de conocimientos matemáticos aplicada a los niños:*

Se revisaron todas y cada una de las pruebas aplicadas en cada grado. Se asignaron puntuaciones de “1” para los reactivos contestados correctamente y “0” para los que fueron incorrectos.

Esta calificación asignada fue acompañada con la revisión del video de la aplicación de la prueba al niño, con la finalidad realizar la anotación de las respuestas o justificaciones que el niño ofrecía a partir de su entrevista, y poder utilizar esta información en momentos necesarios, como fue durante el estudio de caso.

Para obtener la calificación total de la prueba se realizo el conteo por cada área y por el total de la prueba, de este modo el niño podía obtener una puntuación total máxima de 70 puntos en natural, que corresponde a los 70 reactivos que evalúa la prueba, para facilitar los análisis cuantitativos estas puntuaciones naturales se convirtieron a porcentajes respectivamente. Es importante aclarar que la prueba en la categoría de conocimiento del sistema decimal, específicamente en la subcategoría del tamaño de las unidades los reactivos del 19 al 24 se presentaron bajo tres modalidades diferentes por lo que se evaluaron de tres formas diferentes. Por su parte, en la subcategoría del valor posicional los reactivos del 25 al 30 se presentaron bajo dos modalidades por lo que se evaluó cada reactivo dos veces respectivamente, con los que al realizar la sumatoria de la puntuación total se obtenía un máximo de 70 puntos (ver tabla 9).

Posterior a la calificación, se procedió a la elaboración de una matriz de datos en el paquete estadístico SPSS 11 (Pardo y Ruiz, 2002; Pavkov y Pierce, 2003). Se realizó un análisis de las principales medidas descriptivas. Se aplicó un análisis de estadística inferencial, con la prueba U de Mann Whitney para el análisis entre puntuaciones de los subgrupos de bajo y alto rendimiento, y la prueba de Wilcoxon para medidas repetidas entre la primera y segunda evaluación, tanto para primer como para segundo grado. Esto con la finalidad de observar cómo se comportaban los datos de forma grupal y para tomarlo como un referente explicativo más.

Una primera interpretación se basó en los porcentajes obtenidos para cada categoría o dimensión valorada en el instrumento (conocimiento numérico, conocimiento del sistema de numeración decimal, operaciones de suma y resta y solución de problemas aditivos) y de modo global.

Posteriormente, mediante los resultados del análisis estadístico inferencial se realizó la interpretación con base a los niveles de significancia obtenidos. La tabla 7 ilustra las posibles combinaciones de análisis realizados.

a) Interpretación de la primera evaluación, por grado y por nivel de rendimiento
b) Interpretación de la segunda evaluación por grado y por nivel de rendimiento
c) Comparación entre la primera y la segunda evaluación intra grado y por nivel rendimiento.
d) Comparación entre la primera y la segunda evaluación entre grados y por nivel de rendimiento.

Tabla 7. **Combinaciones de análisis inferencial por grado, por evaluación, y por tipo de rendimiento.**

GRADO	**Pre-evaluación**	**Pos-evaluación**	**Rendimiento**
Primero	❖	❖	Alto
Segundo	❖	❖	Bajo

2) Del análisis del estudio de casos

De los niños participantes, de primer y segundo, se procedió a analizar sus porcentajes de calificación para elegir la prueba de un niño o niña de alto y otro de bajo rendimiento, de éstos se eligió a uno que obtuvo la puntuación menor y a otro con la puntuación mayor.

A partir de la prueba seleccionada, se analizó detalladamente el tipo de respuesta dada para cada reactivo y en cada categoría de conocimiento matemático, considerando la parte verbal, procedimental y estratégica. Se ubicó el conocimiento matemático de cada niño por nivel, considerando una progresión que va desde el desconocimiento, la muestra de conocimientos parciales y el conocimiento completo. Estos niveles son explicados ampliamente en la sección correspondiente.

Los resultados encontrados en cada uno de los casos se contrastan contra lo que plantea el programa de la SEP, con los planteamientos que desde los resultados de otras investigaciones se hacen acerca del número (Gelman y Gallistel, 1978) el sistema decimal, algoritmos de suma y resta, la solución de problemas aditivos (Nunes y Bryan, 1997; Carpenter et al, 1999; Flores, 2002), entre otros autores.

Finalmente, de manera general y con base en los resultados encontrados en el instrumento para niños, se determinaron los principales conocimientos que éstos desarrollan y al mismo tiempo se analizaron y categorizaron sus respuestas en términos conceptuales y estratégicos. Para ello se considera el dominio matemático y el grado correspondiente.

c) Del análisis de las concepciones de los maestros:

Obtenidas las entrevistas, se procedió a su transcripción textual, se analizó su contenido escrito, y se procedió a ubicar los segmentos o partes de los textos que correspondían o se relacionaban con las categorías a investigar, tomando como referente a Monroy (1998), cuidando que éstas fueran mutuamente excluyentes en lo posible.

Posteriormente en la interpretación de estas concepciones se seleccionaron únicamente los segmentos considerados como los más representativos o cercanos a cada una de las categorías y se contrastaron las concepciones de los docentes con las propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas de la SEP, el libro del maestro de cada grado y los referentes teóricos como (Cruz y Pozo, 2003; Martínez y Gorgorió, 2004; entre otros) enfatizando los *juicios de valor*, el *conocimiento experiencial* y las *propuestas para enseñar y evaluar el conocimiento matemático* por parte del docente.

d) Del análisis de las secuencias didácticas o clases

Considerando el concepto de contrato de didáctico de Brousseau (1997) se utilizó la videofilmación de secuencias didácticas para analizar principalmente los tipos de contrato que se dan en el aula, tomando en consideración las obligaciones recíprocas entre los alumnos y el profesor. En la figura 5 aparece una síntesis de la clasificación de tipos de contrato didáctico, la cual guió la identificación de los mismos teniendo como fuente de información las videograbaciones referidas, así como las respuestas dadas en algunas de las entrevistas respectivas a profesores y alumnos.

1. Se videofilmaron aproximadamente cuatro clases por cada uno de los dos maestros. Las fases de análisis del tipo de contrato didáctico siguieron el orden siguiente. En este orden, a partir de los registros de las clases se hizo una selección y un recorte de los datos de acuerdo con los siguientes criterios.
2. La primera fase del análisis consistió en realizar la edición del cassette. Posteriormente se revisaron los videos de las clases, teniendo a la mano el cuadro (Anexo 4) con las características

de los principales contratos para poder ubicar los segmentos de la clase que se consideraron representativos de algún tipo de contrato didáctico.

3. Ubicados los segmentos en el video donde ocurrían los tipos de contratos didácticos se procedió a la trascripción textual de los segmentos.
4. Por segunda ocasión se procedió a analizar ahora en el texto, tratando de ubicar de manera más precisa el contenido del texto y el discurso para reubicar o constatar el tipo de contrato, en caso de alguna duda se repetía la revisión del video y de su texto, tantas veces como fuera necesario.
5. Como era de esperarse, durante el desarrollo de la situación didáctica surgieron diferentes tipos de contratos, independientemente de que cambiara el objeto o tema de estudio, por lo que se localizaron en la secuencia didáctica completa de cada clase los cambios de contrato didáctico, así como la ubicación correspondiente de los episodios o segmentos de mayor interés.
6. Así como se localizaron los segmentos de interés, se realizó otro tipo de reducción de los registros de los textos donde en ocasiones se redujo exclusivamente al segmento del discurso donde se explicita el manejo del contenido matemático (Ávila, 2001a) de interés.
7. Como una forma de validar la localización y la ubicación del tipo de contrato se consultó de manera informal la localización con otros colegas y miembros del comité de tesis.
8. Finalmente, para la interpretación de los tipos de contratos se insertaron los textos más representativos y se discutía con la teoría lo que ocurrió en clase, considerando las acciones del maestro y de los alumnos, así como lo propuesto por la teoría (Brousseau, 1997, 2000: Ávila, 2001a, 2001b).

Finalmente, en una triangulación metodológica (Stake, 1998) para validar los resultados encontrados, se contrastaron los resultados obtenidos de la prueba de conocimientos matemáticos aplicado a los alumnos, las entrevistas de las concepciones de los docentes y las observaciones de las filmaciones de las clases, que de igual forma permitió poder apreciar la correspondencia o incongruencia entre los planteamientos de los programas y las características de la práctica educativa de los docentes respecto a la enseñanza.

5.9.1 Validación por jueces de la Prueba de Evaluación del Conocimiento Matemático

Cabe explicar que el diseño de la construcción de esta prueba de Evaluación de Conocimientos Matemáticos responde a la necesidad de que no se encontró otra prueba que evaluara específicamente las categorías y en conjunto el conocimiento matemático como se evalúa con esta prueba (Tabla 9), que se diseño para los fines de esta investigación.

De este modo, los resultados siguientes (Tabla 8) corresponden a la validación de la tercera y última versión de la prueba que se utilizó para evaluar el conocimiento matemático en el niño, después de ser sometida a un proceso de diseño, piloteo, validación por acuerdo entre jueces expertos en la materia, y la realización de los ajustes pertinentes.

En la siguiente tabla se presentan los niveles de concordancia entre jueces, siendo significativas las correlaciones entre los jueces en los cuatro constructos y el total de la prueba. Lo que significa un alto nivel de acuerdo entre éstos acerca de la viabilidad y posibilidad de aplicar la prueba, considerando los distintos constructos, para evaluar y medir los conocimientos matemáticos en los niños.

Tabla 8. Correlaciones, sin reactivos eliminados, entre jueces por constructo y el total de acuerdo general, de la prueba de Evaluación de Conocimientos Matemáticos

Constructo	**Jueces**	**Reactivos**	**W de Kendall**	**Significancia**
1. Conocimiento numérico	5	1-8=8	.644	.000*
2. Conocimiento del sistema decimal	5	13-20=8	.758	.000*
3. Operaciones de suma y resta	5	25-40=16	.878	.000*
4. Solución de problemas aditivos	5	41-46=6	.885	.000*
Total de los cuatro constructos	5	38	.440	.000*

***= $p \leq 0.000$**

En la tabla 8, las correlaciones más altas fueron para los reactivos de las secciones de solución de problemas aditivos y operaciones de suma y resta. No obstante, el nivel de correlación también puede considerarse bastante aceptable para los reactivos contenidos en los constructos del conocimiento numérico y conocimiento del sistema decimal, los cuales presentaron mayor dificultad; sin embargo después del proceso descrito en el procedimiento, se logró mejorar la calidad y pertinencia de los reactivos finales.

Se debe tomar en consideración que la ligera correlación para los reactivos de los constructos conocimiento numérico y del sistema decimal posiblemente se debió al diseño y planteamiento inadecuado de los reactivos, que presentaban la más baja puntuación de acuerdo entre jueces, situación que queda demostrada al eliminar esos reactivos y observar que en un tercer análisis el nivel concordancia prácticamente se duplica. De esta forma, la tabla 9 presenta los reactivos que integran las categorías y subcategorías de la prueba final, aplicada durante la primera y segunda evaluación a la muestra definitiva de esta investigación.

Tabla 9. Tercera y definitiva versión de la Prueba de Evaluación de Conocimiento Matemático

Constructos	**Sub-categorías**	**Reactivos**	**Total de reactivos**
I. Conocimiento numérico	Principio de cardinalidad	1, 2, 3, 4 y (igualación de conjuntos) 5	5
	Reconocimiento de representación simbólica del número	6,7,8,9,10,11	6
	Escritura de números	12,13,14,15,16,17,18	7
II. Sistema decimal de numeración	Tamaño de las unidades: a) Conocimiento formal b) Conocimiento cotidiano o informal c) Conocimiento con material	19, 20, 21, 22, 23, 24	18
	Valor posicional: a) Valor de lugar b) Representación con material	25, 26, 27, 28, 29,30	12
III. Operaciones	Sumas sin integración	31, 32, 33, 34	4
	Sumas con integración	35, 36, 37, 38	4
	Restas sin descomposición	39, 40, 41, 42	4
	Restas con descomposición	43, 44, 45, 46	4
IV. Solución de problemas aditivos	Problemas de cambio	47, 48	2
	Problemas de igualación y combinación	49, 50	2
	Problemas de comparación	51, 52	2
Total de reactivos			**70**

De esta manera, los juicios de los expertos y el análisis de concordancia con la prueba de W de Kendall para muestras relacionadas (Siegel y Castellán, 2001; Pardo y Ruiz, 2002) nos permiten decir que se puede medir y evaluar confiablemente con el instrumento cada uno de los cuatro constructos que componen la Prueba para Evaluar el Conocimiento Matemático.

Una vez presentada la metodología y la manera que se abordo el objeto de estudio a continuación se ofrecen los principales resultados, en orden se presentan los resultados grupales de la evaluación de este conocimiento de los niños para primer y segundo grado de alto y bajo rendimiento, resultados de los análisis de los alumnos que representan los estudios de caso de un niño de bajo rendimiento y otro de alto rendimiento para cada grado, resultados del análisis de las concepciones de los maestros, resultados del análisis de los contratos didácticos y finalmente la triangulación de estos resultados para cada grado.

CAPITULO 6. RESULTADOS

6. Resultado del análisis cuantitativo del conocimiento matemático de los niños y niñas

A continuación, se presenta el análisis de los principales resultados de la primera y segunda evaluación que se realizó con la muestra definitiva de niños y niñas de alto y bajo rendimiento en conocimiento matemático, de primer y segundo grado. Se ofrecen una serie de tablas y gráficas con datos porcentuales y análisis estadísticos descriptivos e inferenciales.

6. 1 Resultados en términos porcentuales de la primera y segunda evaluación

El siguiente análisis de datos se realizó de forma individual y grupal con los porcentajes obtenidos por los alumnos de alto y bajo rendimiento, de primer y segundo grado respectivamente, en principio se analizan los datos de la primera evaluación realizada entre septiembre y octubre del 2004, seguidos por la segunda evaluación realizada entre mayo y junio del 2005. Aclarando que en algunas ocasiones se comparan los resultados más importantes entre los alumnos o entre los grupos.

Resultados de la primera evaluación de los niños y niñas de primer y segundo grado

La tabla 10 muestra los porcentajes obtenidos en la primera evaluación de los alumnos de primer y segundo grado, se observa en la última columna del total de la puntuación en la prueba, que los resultados siguen un continuo ascendente al pasar de primer a segundo grado, con porcentajes más favorables para el grupo del segundo grado y dentro de éste para los alumnos de alto rendimiento.

Tabla 10. Porcentajes individuales de los alumnos de primer y segundo grado con bajo y alto rendimiento durante la primera evaluación en su conocimiento matemático

Número de Alumno	Grado	Rend.	Sexo	Total Conoc. Numérico	Total Sistema Decimal	Total Opers. Suma	Total Opers. Resta	Total Solución Problemas	Total puntuación obtenida en prueba
1	1°	Bajo	Niña	61.11	.00	25.00	25.00	33.33	24.29
2	1°	Bajo	Niña	50.00	3.33	.00	.00	33.33	17.14
3	1°	Bajo	Niño	33.33	.00	12.50	25.00	50.00	17.14
4	1°	Bajo	Niño	55.56	6.67	25.00	.00	16.67	21.43
5	1°	Alto	Niña	55.56	.00	25.00	25.00	66.67	25.71
6	1°	Alto	Niña	66.67	.00	37.50	25.00	50.00	28.57
7	1°	Alto	Niño	55.56	3.33	12.50	25.00	50.00	24.29
8	1°	Alto	Niño	61.11	20.00	25.00	.00	66.67	32.86
9	2°	Bajo	Niña	66.67	23.33	25.00	5.00	50.00	37.14
10	2°	Bajo	Niña	66.67	43.33	50.00	.00	33.33	44.29
11	2°	Bajo	Niño	38.89	20.00	25.00	12.50	66.67	28.57
12	2°	Bajo	Niño	44.44	.00	50.00	50.00	83.33	30.00
13	2°	Alto	Niña	94.44	43.33	25.00	5.00	50.00	52.86
14	2°	Alto	Niña	77.78	53.33	50.00	25.00	50.00	55.71
45	2°	Alto	Niño	77.78	40.00	50.00	5.00	83.33	52.86
16	2°	Alto	Niño	100.00	30.00	100.00	50	50.00	60.00

Otro dato importante en la primera evaluación es que los dos grupos presentaron respectivamente dificultades o desconocimiento en el dominio del sistema decimal y en solución de operaciones de suma y resta, sin embargo los alumnos lograron resolver problemas aditivos con sus propios recursos o conocimientos matemáticos (estrategias propias o inventadas), sin la necesidad de emplear los algoritmos escolares formales. Esto permitió corroborar el supuesto de que los niños, además de adquirir conocimientos derivados de la educación formal, ya cuentan con sus propios conocimientos matemáticos previos, que incluyen una serie de estrategias y heurísticos (Carraher et al.; Jordan y Montani; Onrubia et al.), que pueden emplear efectivamente en la solución de problemas aditivos, como fueron los planteados en esta investigación tal como se muestran mas adelante en los resultados de los estudios de casos.

De manera general, en la tabla 10, en la primera evaluación se observa un bajo rendimiento en todas las categorías, en ambos grados, con mayor dificultad en el conocimiento del sistema decimal y la solución de operaciones de resta y suma. También se observa bajo rendimiento en solución de problemas aditivos y conocimiento numérico, aún cuando este último resulta ser el constructo donde mejor puntuaron los alumnos. Las puntuaciones más bajas son para los alumnos de bajo rendimiento de primer y segundo grado y en general más bajas para los alumnos de primer grado. Enseguida se realiza un análisis detallado describiendo los porcentajes de manera individual y por niveles de bajo y alto rendimiento.

Específicamente en la tabla 10 se observa que la mayoría de los alumnos de primer grado, de acuerdo con sus porcentajes, tienen nulo o escaso conocimiento del sistema decimal. En segundo grado los alumnos muestran cierto conocimiento, aunque la mayoría obtiene porcentajes por debajo del 50%.

En cuanto a la solución de operaciones de resta en primer grado se observa dificultad o escaso conocimiento al obtener la mayoría de los alumnos porcentajes iguales o menores del 25%. En tanto que en segundo grado su conocimiento es mejor al obtener porcentajes similares al primer grado, a excepción de un niño de alto y otro de bajo rendimiento que obtienen un 50%.

En operaciones de suma, en primer grado también se observa dificultad en este conocimiento para la mayoría de los alumnos, al obtener porcentajes por debajo del 25% a excepción de una niña que obtiene 37%. Este conocimiento es mejor en los alumnos de segundo grado al obtener la mayoría porcentajes igual o menor del 50%, a excepción de un niño de alto rendimiento que obtiene el 100%.

En conocimiento numérico fue donde ambos grados obtuvieron sus mejores porcentajes, en primer grado la mayoría se ubican entre el 50% y el 61%, y en segundo grado entre el 66% y 77%, a excepción de una niña y un niño de alto rendimiento que logran 94% y 100% respectivamente. No obstante, al avanzar de grado se observa que los porcentajes en el conocimiento numérico en los alumnos de segundo grado las diferencias comienzan a ser notorias a favor de los alumnos de alto rendimiento, sin llegar a igualarse, como ocurrió en algunos casos del primer grado.

La solución de problemas aditivos fue la segunda área donde los alumnos de ambos grados obtuvieron sus mejores porcentajes, siendo mayores para los grupos de alto rendimiento.

Curiosamente los alumnos de segundo grado de bajo rendimiento obtienen porcentajes semejantes a los de alto rendimiento de primer grado, lo que indicaría un nivel de conocimiento matemático similar entre éstos. La diferencia está en los porcentajes que de manera individual logró cada uno de los niños, que se explica a detalle más adelante en los estudios de caso.

Finalmente, en el total de la puntuación obtenida se observan porcentajes bajos en ambos grupos, en primer grado entre el 17% y 32%, en segundo grado entre el 28% y el 60%. Se observan porcentajes ascendentes en la mayoría de los casos, en función del grado y los niveles de rendimiento, es decir, las puntuaciones más altas las logran los alumnos de segundo grado y los alumnos de alto rendimiento.

Resultados de la segunda evaluación de los alumnos de primer y segundo grado

En comparación con los porcentajes previos, en la segunda evaluación en primer grado la dificultad mayor se encuentra nuevamente en el sistema decimal y en operaciones de resta, en esta última categoría los alumnos de segundo grado presentaron mayor dificultad. En tanto que en la solución de problemas aditivos ambos grupos lograron los porcentajes más altos. En la tabla 11 se presentan estos resultados considerando los porcentajes individuales, el grado, y el nivel de rendimiento en función de los constructos evaluados.

Tabla 11. Porcentajes individuales de los alumnos de primer y segundo grado, de bajo y alto rendimiento durante la segunda evaluación en su conocimiento matemático.

Numero de alumno	Grado	Rend.	Sexo	Total Conoc. Numérico	Total Sistema Decimal	Total Opers. Suma	Total Opers. Resta	Total Solución Problemas	Porcentaje Total en prueba
1	1°	Bajo	Niña	72.22	43.33	50.00	37.50	50.00	51.43
2	1°	Bajo	Niña	66.67	13.33	25.00	.00	100.00	34.29
3	1°	Bajo	Niño	50.00	3.33	25.00	25.00	66.67	25.71
4	1°	Bajo	Niño	88.89	13.33	37.50	50.00	66.67	44.29
5	1°	Alto	Niña	72.22	40.00	62.50	62.50	83.33	57.14
6	1°	Alto	Niña	72.22	40.00	75.00	75.00	100.00	61.43
7	1°	Alto	Niño	72.22	56.67	75.00	75.00	83.33	67.14
8	1°	Alto	Niño	77.78	53.33	50.00	75.00	100.00	65.71
9	2°	Bajo	Niña	66.67	33.33	37.50	25.00	66.67	43.83
10	2°	Bajo	Niña	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
11	2°	Bajo	Niño	88.89	100.00	100.00	75.00	100.00	94.29
12	2°	Bajo	Niño	72.22	73.33	62.50	50.00	100.00	71.43
13	2°	Alto	Niña	100.00	90.00	100.00	87.50	100.00	94.29
14	2°	Alto	Niña	100.00	100.00	100.00	87.50	100.00	98.57
45	2°	Alto	Niño	100.00	100.00	100.00	50.00	100.00	94.29
16	2°	Alto	Niño	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

Durante la segunda evaluación, el desempeño de los niños mejora en comparación con la primera evaluación, pero en ambos grados en la solución de operaciones de resta sigue siendo una de las áreas donde continuaron presentando mayor dificultad. En primer grado obtienen porcentajes por debajo del 75%; y en segundo grado obtienen porcentajes por debajo del 87%, a excepción de una niña de bajo rendimiento y un niño de alto rendimiento que obtienen el 100%. La mayoría de los porcentajes menores son obtenidos por los alumnos de bajo rendimiento en ambos grupos, incluso una niña de primer grado continua desconociendo la solución de la resta al obtener el 0%.

En cuanto al conocimiento del sistema decimal se observa una mayor dificultad para el grupo de primer grado, al obtener porcentajes por debajo del 56%. El grupo de segundo grado logra avances significativos al obtener la mayoría de los alumnos puntuaciones altas, incluso hasta del 100%. En ambos grados la dificultad se centra en los alumnos de bajo rendimiento, al obtener los porcentajes menores. Sin embargo algunos de estos alumnos llegan a superar o igualar a los de alto rendimiento.

En general, durante esta segunda evaluación, en el grupo de segundo grado, seis de ocho alumnos lograron cubrir al 100% la categoría del conocimiento del sistema decimal, esto es un avance considerable con relación con la primera evaluación.

Otra dificultad que se muestra en los alumnos de primer grado es la solución de operaciones de suma al obtener puntuaciones menores o iguales al 75%. A su vez, los alumnos de segundo grado en su mayoría logran el 100%, a excepción de dos alumnos de bajo rendimiento.

En esta segunda evaluación, en la solución de problemas aditivos la mayoría de los alumnos de ambos grupos logra mejores porcentajes. Específicamente, en segundo grado siete de los ocho niños logró el 100%, y tres niños de primer grado alcanzan esta misma puntuación. En la solución de problemas aditivos, en los alumnos de primer grado y dentro de ellos, los de bajo rendimiento obtienen las puntuaciones más bajas, a excepción de la niña que obtiene el 100%.

Durante la segunda evaluación, en cuanto al conocimiento numérico, la mayoría de los alumnos de primer grado obtiene porcentajes por debajo del 75% y una niña cubre hasta el 89%. En el grupo de segundo grado todos los alumnos de alto rendimiento cubren al 100% este conocimiento, a diferencia de una niña de bajo rendimiento que logra este nivel.

Finalmente, en la segunda evaluación en la última columna correspondiente al porcentaje total de la prueba, los porcentajes más bajos son prácticamente para los alumnos de primer grado, y dentro de ellos los más bajos pertenecen a los alumnos de bajo rendimiento. En tanto que los alumnos de segundo grado obtienen porcentajes más altos, como era de esperarse. Dos alumnos de alto y dos de bajo rendimiento cambian de nivel de clasificación inicial. Los cuatro participantes de alto rendimiento obtienen porcentajes altos que van del 94% al 100% en el total de la prueba, situación que los hace mantenerse en las puntuaciones máximas tanto en la primera evaluación como en esta segunda evaluación.

Después de este análisis, se puede observar que los alumnos de primer y segundo grado, de alto y bajo rendimiento parecen continuar un patrón ascendente en la adquisición del conocimiento matemático. Sin embargo, también se observan excepciones, como son los dos participantes de segundo grado que en un inicio se ubicaron como alumnos de bajo rendimiento, que ahora obtienen puntuaciones altas, por arriba del 94% del total de la prueba.

El siguiente análisis estadístico ayuda a determinar con mayor precisión los cambios o diferencias que ocurrieron por grado y entre los grupos de alto y bajo rendimiento. Estos resultados permiten establecer un punto de partida que servirá más adelante para analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conocimientos matemáticos, específicamente en las categorías de la prueba de evaluación, así como un referente que se relaciona con las concepciones de cada uno de los maestros acerca de este proceso, y su relación con la ocurrencia de las prácticas educativas, así como las actuaciones de los agentes escolares involucrados, que se describe al final de este trabajo.

6.2 Análisis de la estadística descriptiva e inferencial durante la primera y segunda evaluación

Los siguientes resultados se derivan de un análisis de los datos porcentuales de cada uno de las categorías y del total de la prueba, entre la primera y la segunda evaluación de los grupos bajo estudio.

En ese orden, se presentan una serie de tablas con resultados de la estadística descriptiva e inferencial con la prueba de Wilcoxon para medidas repetidas entre la primera y segunda evaluación para cada grado, posteriormente con U de Mann Whitney para analizar las puntuaciones entre los subgrupos de bajo y alto rendimiento en cada a cada uno de los grados escolares (Pardo, Ruiz, 2002).

Análisis estadístico entre la primera y la segunda evaluación para primer grado

En la tabla 12 se presenta el análisis de los datos, mediante la prueba de Wilcoxon para medidas repetidas, entre la primera y la segunda evaluación para el grupo de primer grado.

Tabla 12. Estadísticas descriptivas e inferencial para el primer grado considerando los porcentajes de todos los alumnos de alto y bajo rendimiento, entre la primera y segunda evaluación.

Categorías analizadas	N	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo	Probabilidad Wilcoxon
Pre-Numeración	8	54.86	10.04	33.33	66.67	.010*
Pos-Numeración	8	71.52	10.8856	50.00	88.89	
Pre-Sistema Decimal	8	4.16	6.84	.00	20.00	.012*
Pos-Sistema Decimal	8	32.91	20.1138	3.33	56.67	
Pre-Suma	8	20.31	11.45	.00	37.50	.011*
Pos-Suma	8	50.00	20.0446	25.00	75.00	
Pre- Resta	8	15.62	12.93	.00	25.00	.026*
Pos- Resta	8	50.00	27.5487	.00	75.00	
Pre-Solución de problemas	8	45.83	17.25	16.67	66.67	.011*
Pos-Solución de problemas	8	81.25	18.7665	50.00	100.00	
Pre- Total de la Prueba	8	23.92	5.38	17.14	32.86	.012*
Pos- Total de la Prueba	8	50.89	15.0594	25.71	67.14	

*** p $\leq$ .05**

De acuerdo con los niveles de significancia obtenidos, en la tabla 12 se observa que sí existen diferencias estadísticamente significativas en los niveles de aprendizaje matemático del grupo de primer grado, con relación a sus puntuaciones logradas entre la primera y la segunda evaluación en cada una de las cinco categorías y en el total de la prueba. Esto da indicios de un avance real en el aprendizaje de las matemáticas en estos escolares entre la primera y segunda evaluación.

En la tabla 12, se observa que la media porcentual más baja corresponde para el sistema decimal tanto en la primera como en la segunda evaluación, categoría que se ubicaría como la principal problemática en el conocimiento matemático de los alumnos de primer grado, a pesar del incremento del 28% en la segunda evaluación. Por otra parte, las mejores puntuaciones que obtuvo el grupo de primer grado fueron en conocimiento numérico y solución de problemas aditivos, a pesar de sus porcentajes bajos en operaciones de suma y resta.

Análisis estadístico entre la primera y la segunda evaluación para segundo grado

En la siguiente tabla 13 se presenta el análisis de los datos, mediante la prueba de Wilcoxon para medidas repetidas, entre la primera y la segunda evaluación para el grupo de segundo grado.

Tabla 13. Estadística descriptiva e inferencial para el segundo grado, considerando los porcentajes de todos los alumnos de alto y bajo rendimiento, entre la primera y las segunda evaluación

.

Categorías analizadas	N	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo	Probabilidad Wilcoxon
Pre-Numeración	8	70.8333	21.5677	38.89	100.00	.027*
Pos-Numeración	8	90.9722	13.9087	66.67	100.00	
Pre-Sistema Decimal	8	31.6667	16.9967	.00	53.33	.017*
Pos-Sistema Decimal	8	85.0000	29.1684	16.67	100.00	
Pre-Suma	8	46.8750	24.7758	25.00	100.00	.017*
Pos-Suma	8	87.5000	24.0906	37.50	100.00	
Pre- Resta	8	26.5625	16.9525	.00	50.00	.026*
Pos- Resta	8	71.8750	27.3453	25.00	100.00	
Pre-Solución de problemas	8	58.3333	17.8174	33.33	83.33	.011*
Pos-Solución de problemas	8	95.8333	11.7851	66.67	100.00	
Pre- Total de la Prueba	8	45.1786	12.0721	28.57	60.00	.017*
Pos- Total de la Prueba	8	86.2500	21.8921	37.14	100.00	

*** $p \leq .05$**

De igual forma que en el grupo de primer grado, en los resultados de la tabla 13, los niveles de significancia permiten inferir que sí hubo un avance significativo en la adquisición del conocimiento matemático al considerar a todo los alumnos del grupo de segundo grado, en cuanto a las cinco categorías y el total de la prueba, favorable para la segunda evaluación.

A pesar de las diferencias significativas, con base a la media porcentual se observa mayor dificultad en solución de operaciones de resta, seguido del conocimiento del sistema decimal tanto en la primera como en la segunda evaluación. Por otra parte, las puntuaciones más altas para el grupo de segundo grado, en las dos evaluaciones fueron en el conocimiento numérico y la solución de problemas aditivos, aunque en la segunda evaluación el orden se invierte. Los resultados demuestran cambios significativos en este grupo de la primera a la segunda evaluación.

Análisis estadístico descriptivo e inferencial para los alumnos primer grado entre bajo y alto rendimiento, durante la primera evaluación.

Con relación a los datos anteriores, con la finalidad de precisar las posibles variaciones entre los subgrupos de alto y bajo rendimiento, en la tabla 14 se presentan los resultados del análisis estadístico con la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney para dos muestras independientes con datos de la primera evaluación.

Tabla 14. Estadística descriptiva e inferencial de los porcentajes del primer grado por categoría y del total de la Prueba de conocimientos matemáticos, entre alto y bajo rendimiento, en la primera evaluación.

Rend.	Categorías	N	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo	Probab.
Bajo	Total conocimiento numérico	4	50.00	12.00	33.33	61.11	.028*
Alto		4	59.72	5.31	55.56	66.67	
Bajo	Total conocimiento del sistema decimal	4	2.50	3.19	.00	6.67	.028*
Alto		4	5.83	9.57	.00	20.00	

Bajo	Total operaciones de suma	4	15.62	11.96	.00	25.00	.028*
Alto		4	25.00	10.20	12.50	37.50	
Bajo	Total operaciones de resta	4	12.50	14.43	.00	25.00	.028*
Alto		4	18.75	12.50	.00	25.00	
Bajo	Total solución de problemas	4	33.33	13.60	16.67	50.00	.028*
Alto		4	58.33	9.62	50.00	66.67	
Bajo	Total de la prueba	4	20.00	3.49	17.14	24.29	.028*
Alto		4	27.85	3.77	24.29	32.86	

$* = p \leq 0.05$

De acuerdo con los resultados encontrados en la primera evaluación en primer grado, en la tabla 14, como era de esperarse el grupo de alto rendimiento en las todas las categorías, y en el total de la prueba presenta una media superior al grupo de bajo rendimiento. No obstante, en las diferencias se observan porcentajes bajos en el conocimiento del sistema decimal y la solución de operaciones de resta en ambos subgrupos, constatándose la problemática que se ha encontrado en los análisis anteriores individuales y por grado. En conocimiento numérico y solución de problemas aditivos, ambos subgrupos obtienen sus mejores porcentajes, aunque superiores para el subgrupo de alto rendimiento.

Análisis de estadístico descriptivo e inferencial para los alumnos de primer grado entre bajo y alto rendimiento durante la segunda evaluación.

Tabla 15. Estadística descriptiva e inferencial de los porcentajes del primer grado por categoría y del total de la Prueba de conocimientos matemáticos, entre los grupos de alto y bajo rendimiento, en la segunda evaluación.

Rend.	Categorías	N	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo	Prob.
Bajo	Total conocimiento numérico	4	69.44	16.03	50.00	88.89	.48
Alto			73.61	2.77	72.22	77.78	
Bajo	Total conocimiento sistema numérico decimal		18.33	17.32	3.33	43.33	.11
Alto			47.50	8.76	40.00	56.67	
Bajo	Total operaciones de suma		34.37	11.96	25.00	50.00	.02*
Alto			65.62	11.96	50.00	75.00	
Bajo	Total operaciones de resta		28.12	21.34	.00	50.00	.02*
Alto			71.87	6.25	62.50	75.00	
Bajo	Total solución de problemas		70.83	20.97	50.00	100.00	.20
Alto			91.66	9.62	83.33	100.00	
Bajo	Total de la prueba		38.92	11.27	25.71	51.43	.02*
Alto			62.85	4.51	57.14	67.14	

$* = p \leq 0.05$

De acuerdo con los datos en la tabla 15, en la segunda evaluación en primer grado se encuentran diferencias estadísticamente significativas, entre los subgrupos de bajo y alto rendimiento, en cuanto a su conocimiento para solucionar operaciones de resta, solucionar operaciones de suma y el total de la prueba, favorables para el subgrupo de alto rendimiento. No se encuentran diferencias en conocimiento numérico, del sistema decimal ni en solución de problemas.

En cuanto al conocimiento del sistema decimal, nuevamente esta fue la categoría donde los niños presentan mayor problemática, relacionada con la dificultad de los alumnos para comprender y poder operar correctamente en los ejercicios que implican los principios del valor posicional y la composición aditiva, en donde únicamente reconocen el valor absoluto del número y no el relativo. Esto a pesar de que los programas de la SEP (1993) establecen que al término del ciclo escolar los niños deben haber adquirido este conocimiento hasta las decenas. Estas suposiciones son mejor exploradas y detalladas en los estudios de caso.

Estos resultados apoyan la idea de que el conocimiento del sistema decimal es una dificultad importante en el aprendizaje de las matemáticas en los niños (Cortina, 1997), donde se espera que éste sea adquirido totalmente hasta el cuarto grado, pero que de alguna forma este estudio permite poner en claro parte de las dificultades que tienen los niños a lo largo de este proceso de aprendizaje.

Otro resultado importante, es que también la solución de operaciones de resta continúa ubicada en las categorías de conocimiento matemático con mayor dificultad. Nuevamente, estas dificultades, están relacionadas con el desconocimiento del valor posicional, la composición aditiva y las reglas formales para solucionar los algoritmos de la suma y la resta que implican una transformación con dos o más dígitos.

Los de alto rendimiento sabían mejor como "hacer cuentas" pero no poseían un conocimiento conceptual y solucionar problemas mejor. Estas incomprensiones conceptuales y algorítmicas, también se ahondan en la sección de los estudios de caso.

Análisis de la estadística descriptiva e inferencial para los niños de segundo grado durante la primera evaluación.

Tabla 16. Estadística descriptiva e inferencial de los porcentajes del segundo grado por categoría y del total de la Prueba de conocimientos matemáticos, entre los grupos de alto y bajo rendimiento, en la primera evaluación.

REND.	Categorías	N	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo	Prob.
Bajo	Total conocimiento numérico		54.16	14.61	38.89	66.67	.486
Alto			87.50	11.45	77.78	100.00	
Bajo	Total conocimiento sistema decimal	4	21.66	17.74	.00	43.33	.114
Alto			41.66	9.62	30.00	53.33	
Bajo	Total operaciones de suma		37.50	14.43	25.00	50.00	.029*
Alto			56.25	31.45	25.00	100.00	
Bajo	Total operaciones de resta		21.87	21.34	.00	50.00	.029*
Alto			31.25	12.50	25.00	50.00	
Bajo	Total solución de problemas		58.33	21.51	33.33	83.33	.200
Alto			58.33	16.66	50.00	83.33	
Bajo	Total de la prueba		35.00	7.23	28.57	44.29	.029*
Alto			55.35	3.37	52.86	60.00	

*** = $p \leq 0.05$**

En los resultados de la tabla 16, en la primera evaluación en el grupo de segundo grado se observan diferencias estadísticamente significativas entre los alumnos de bajo y alto rendimiento, en cuanto a su conocimiento para solucionar operaciones de resta y operaciones de suma, favorables para los alumnos del grupo de alto rendimiento. También en el total de la prueba existen diferencias significativas favorables al grupo de alto rendimiento.

Nuevamente en esta primera evaluación en segundo grado, se repite el patrón observado en primer grado, donde tanto en el grupo de alto como en el de bajo rendimiento, su problemática se centra en sistema decimal y solución de operaciones de resta, aunque se invierten los porcentajes para el grupo de alto rendimiento con mayor dificultad en operaciones de resta.

Un dato importante en esta primera evaluación, que ocurrió al igual que en el grupo de primer grado (v. tabla 16) es que en segundo grado los porcentajes mayores tanto en alto como en bajo rendimiento, corresponden a solución de problemas aditivos y conocimiento numérico, invirtiéndose este orden en el grupo de alto rendimiento. Sin embargo el rendimiento más bajo en los subgrupos fue en el sistema decimal y en solución de operaciones de suma y resta, que se suponen como indispensables para poder solucionar problemas matemáticos en la educación formal (SEP, 1993).

En solución de problemas tanto el grupo de alto como de bajo rendimiento obtienen el mismo porcentaje en solución de problemas, lo que hablaría que el conocimiento de la solución de algoritmos de suma y resta es independiente de cómo utilizan los niños sus estrategias y conocimientos matemáticos propios que tienen los niños de bajo rendimiento para solucionar problemas quienes, a pesar de puntuar más bajo, son capaces de lograr en esta categoría un porcentaje igual que el grupo de alto rendimiento, en la primera evaluación. Se esperaría que el grupo de alto rendimiento al tener mayor conocimiento en las demás categorías lograrían porcentajes mejores al solucionar problemas ya que implica el uso de los algoritmos de la suma y la resta, lo que nuevamente llama a discusión el entendimiento conceptual de estos conocimientos.

Análisis estadístico de la segunda evaluación, para los alumnos de segundo grado, entre bajo y alto rendimiento.

Tabla 17. Estadística descriptiva e inferencial del grupo del segundo grado, de los porcentajes obtenidos en la Prueba de conocimientos matemáticos, entre los grupos de bajo y alto rendimiento, en la segunda evaluación

REND.	Categorías	N	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo	Prob.
Bajo	Total conocimiento numérico	4	81.94	15.29	66.67	100	.114
Alto			100	.00	100	100	
Bajo	Total conocimiento sistema decimal		72.50	39.28	16.67	100	.486
Alto			97.50	5	90	100	
Bajo	Total operaciones de suma		75	30.61	37.50	100	.343
Alto			100	0	100	100	
Bajo	Total operaciones de resta		62.50	32.27	25	100	.486
Alto			81.25	21.65	50	100	
Bajo	Total solución de problemas		91.66	16.66	66.67	100	.686
Alto			100	.00	100	100	
Bajo	Total de la prueba		75.71	28.52	37.14	100	.343
Alto			96.78	2.94	94.29	100	

*** = p ≤ 0.05**

De manera general, durante la segunda evaluación, en los subgrupos de segundo grado se observa en los datos de la tabla 17 que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los subgrupos de bajo y alto rendimiento en ninguna de las categorías, ni en el total de la prueba, a pesar de que el grupo de alto rendimiento muestra puntuaciones más altas en todas y cada una de las categorías. Esto refleja que en la segunda evaluación, cercana al final del ciclo escolar, los alumnos con bajo rendimiento han logrado avanzar sustancialmente y acercarse al nivel de rendimiento de los estudiantes de alto rendimiento. Nuevamente esta cercanía es más clara en solución de problemas.

Es preciso señalar que se hicieron otra serie de análisis estadísticos en los que no se encontraron resultados significativos. Estos análisis, fueron entre los niños de bajo y alto rendimiento durante la primera y segunda evaluación tanto en primero como en segundo grado. Tampoco se encontraron diferencias significativas al comparar los resultados del mismo subgrupo entre su primera y segunda evaluación, considerando por separado alto y bajo rendimiento. Sin embargo, las comparaciones entre el mismo subgrupo permiten observar el tipo de avances que lograron en cada área evaluada, tal como se muestran estos resultados en las tablas 18 y 19.

Tabla 18. Resultados del primer y segundo grado, del grupo de bajo rendimiento entre la primera y segunda evaluación.

Grado	Categorías	N	Media en primera evaluación	Media en segunda evaluación	Nivel signif. Wilcoxon	Ganancia promedio
1ro.	Conoc. Numérico	4	**50**	69.44	.059	19.44
	Sistema decimal		***2.50***	***18.33***	.066	***15.83***
	Oper. de suma		15.62	34.37	.066	18.75
	Oper. de resta		12.550	28.12	.066	***15.62***
	Sol. de problemas		33.33	**70.83**	.066	**37.5**
2do.	Conoc. Numérico	4	54.16	81.94	.109	***27.78***
	Sistema decimal		**21.66**	72.50	.144	**50.84**
	Oper. de suma		37.50	75.00	.066	37.5
	Oper. de resta		**21.87**	**62.50**	.180	40.63
	Sol. de problemas		**58.33**	**91.66**	.066	33.33

En la tabla 18 destaca que para el grupo de bajo rendimiento de primer grado la ganancia promedio más alta fue en solución de problemas y la más baja en conocimiento del sistema decimal, y operaciones de resta. En tanto que para el segundo grado, ocurre lo contrario, la ganancia más alta resultó en el sistema decimal y la solución de operaciones de resta, y la más baja en conocimiento numérico. En tanto el grupo de bajo rendimiento de primero presenta dificultades en sistema decimal y solución de operaciones de resta, el grupo de bajo rendimiento de segundo grado obtiene su mayor avance en estas áreas. Estos resultados, posiblemente se debieron al grado que cursan, al tipo de experiencia y oportunidades educativas que cada uno tuvo a lo largo del año escolar, y a la misma forma en que cada niño logro estructurar estos conocimientos matemáticos, de acuerdo a sus propias habilidades cognitivas en interacción con sus conocimientos previos.

Tabla 19. Resultados del primer y segundo grado, del grupo de alto rendimiento entre la primera y segunda evaluación.

Grado	**Categorías**	**N**	**Media en primera evaluación**	**Media en segunda evaluación**	**Nivel signif. Wilcoxon**	**Ganancia promedio**
1ro.	Conoc. Numérico	4	**59.72**	73.61	.066	***13.89***
	Sistema decimal		***5.83***	***47.50***	.068	41.67
	Oper. de suma		25.00	65.62	.063	40.62
	Oper. de resta		18.75	71.87	.180	***53.12***
	Sol. de problemas		**58.33**	**91.66**	.066	33.33
2do.	Conoc. Numérico	4	**87.50**	**100**	.102	***12.50***
	Sistema decimal		41.66	97.50	.066	**55.84**
	Oper. de suma		56.25	**100**	.102	43.75
	Oper. de resta		31.25	81.25	.066	**50**
	Sol. de problemas		**58.33**	**100**	.059	41.77

Por otra parte, en los niños de alto rendimiento entre la primera y segunda evaluación tampoco se encontraron diferencias estadísticamente significativas en ninguno de los dos grados (tabla 19). En primer grado, el grupo de alto rendimiento obtiene la ganancia más alta en solución de operaciones de resta y el más bajo en conocimiento numérico. Para el grupo de alto rendimiento de segundo grado, la mayor ganancia la obtienen en sistema decimal, solución de operaciones de resta, la más baja corresponde a conocimiento numérico.

Se podría inferir que las ganancias más bajas en algunas áreas fueron porque los grupos presentaron mayor dificultad o porque ya habían cubierto esas áreas. En las áreas donde lograron los avances más amplios fue porque avanzaron en áreas que en inicio presentaron mayor dificultad, siempre favorables para los subgrupos de alto rendimiento de primer y segundo grado.

Como ya se venía señalando en los análisis anteriores la principal problemática de los niños en los dos grados, tanto en la primera como en la segunda evaluación, en primer grado es en el conocimiento del sistema decimal y de la solución de los algoritmos de la resta y la suma. En segundo grado, su máxima dificultad mayor se encuentra en la solución de la resta y seguido del sistema decimal.

De acuerdo con la revisión del proceso de solución, así como del tipo de respuestas que dan los niños de ambos grupos, se observa que sus dificultades se ubican en el desconocimiento o no entendimiento conceptual y de la operatividad del sistema decimal. Aunado a esto, al igual que en otras investigaciones (García, 2002; García, Jiménez, Flores, 2006) los niños principalmente presentan dificultades en la solución y la falta o el uso inadecuado de las reglas de los algoritmos, donde específicamente se les dificulta el entendimiento conceptual y la aplicación de los principios de composición aditiva y del valor posicional (Carpenter et al. 1999; Cortina, 1997), así como una comprensión del concepto de la suma y la resta que se reduce a la solución de problemas aditivos que implican cambio o combinación que en problemas de mayor complejidad como los de comparación. Sin embargo esto se explica mejor en el análisis de los estudios de casos.

Lo anterior contribuye a explicar el porqué los niños logran los porcentajes más altos en solución de problemas aditivos, relacionándose directamente con un alto porcentaje en conocimiento numérico. Al respecto, se observa en este proceso que los niños de ambos grados, son capaces tanto en la primera como en la segunda evaluación de resolver problemas aditivos, que impliquen suma o resta con solo tener conocimientos básicos del conteo y de la numeración, a pesar de sus dificultades en el manejo y conocimiento del sistema decimal y de las operaciones de la suma y la resta. Aquí es donde justamente los conocimientos matemáticos que tiene cada niño, se caracterizan por una serie conocimientos y estrategias que el mismo ha construido sobre el conteo y la numeración (Gelman y Gallistel, 1978) como son comparar o igualar conjuntos numéricos, además de poner en juego sus propios conceptos como son: ”dar”o “quitar”, ”unir” o “separar”que tiene acerca de la adición y de la sustracción, considerados como la base de sus primeras nociones para el desarrollo conceptual que llevarán al conocimiento matemático formal de la suma y la resta (Bermejo, Rodriguez, Pérez, 2000).

En el caso de los niños de segundo grado, ya contaban con sus experiencias y adquisiciones del primer año cursado, y a pesar de sus avances significativos en cada categoría, su conocimiento parece estar más centrado en la solución algorítmica o mecánica de la operación, más no en la comprensión conceptual. Este tipo de procesos y conocimientos, se explican por la relación estrecha que se establecen con los tipos de prácticas educativas, los contenidos a los que se dan peso durante las clases, así como de manera muy importante al tipo de relación didáctica que se establece entre los alumnos y su maestro, caracterizado por el tipo de contrato didáctico (Brousseau, 2000, 1997) que da lugar en el proceso de la enseñanza y aprendizaje dentro de las prácticas escolares.

Hasta aquí los resultados presentados, tanto en primer como en segundo grado, permiten constatar la importancia de que el niño ya cuenta con los recursos o conocimientos matemáticos naturales o propios, que ha venido desarrollando y construyendo durante sus experiencias de la vida cotidiana (Carraher, y Carraher, Schliemann, 1991) junto con la instrucción que imparte la institución escolar, donde esos conocimientos previos (Fennema, et al. 1996; Onrubia, Rochera y Barberá, 2001) deben ser considerados por el profesor durante su instrucción al pretender cubrir los contenidos matemáticos que establecen los programas curriculares.

En este sentido, continuando con esta exposición y análisis acerca de los resultados del conocimiento matemático del niño, en la siguiente parte de los resultados se describe y explica en detalle los conocimientos matemáticos que ya contenían y los que lograron desarrollar los niños y niñas de primer y segundo grado. Considerando las categorías de conocimiento numérico, el sistema decimal, la solución de operaciones de suma y resta, y los tipos de solución y estrategias que utilizan los niños al solucionar problemas de diversos tipos de complejidad, intentando de atender en este análisis las posibles relaciones y las diferencias que se encontraron en este análisis de cuatro estudios de casos (Stake, 1998).

6. 3 Resultados de los análisis de caso

En este apartado se dan a conocer los principales resultados de cuatro alumnos participantes del estudio de caso, dos de primero y dos de segundo grado. Cabe señalar que se realizo el análisis y la interpretación por cada caso, sin embargo en los siguientes resultados se realiza una comparación entre un caso de un niño de bajo rendimiento y otro de alto rendimiento en ambos grados, tratando de ver sus similitudes y diferencias en términos explicativos de su conocimiento matemático. En el anexo se ofrece el análisis de un caso completo que ilustra este análisis (Anexo 7).

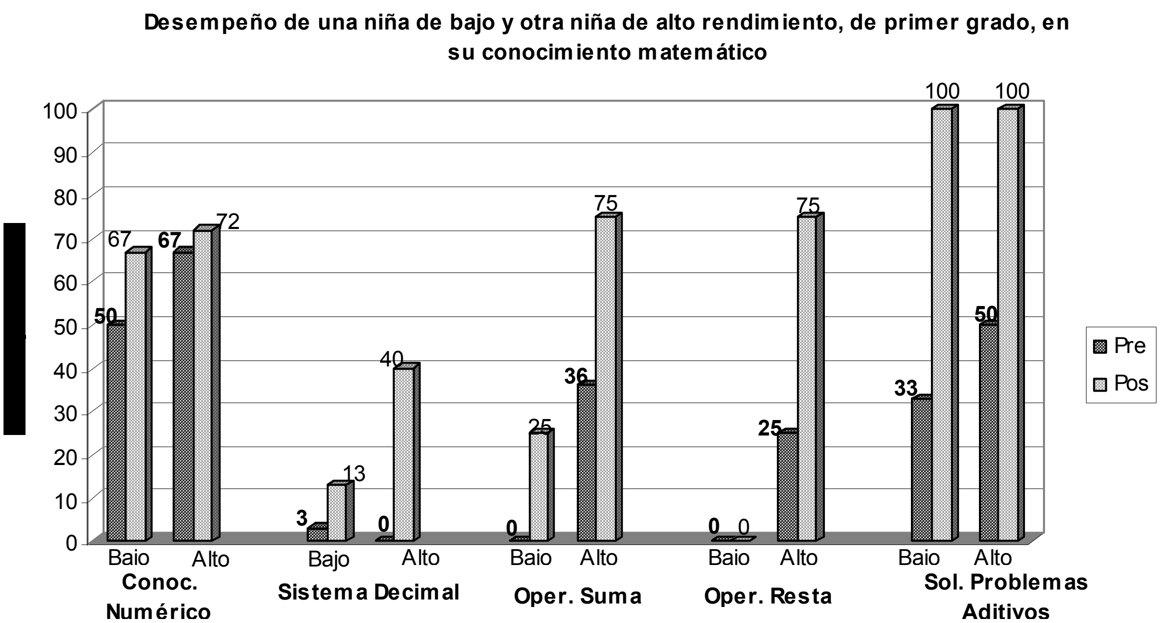
En principio se comparan los porcentajes de su desempeño matemático, en cada una de las categorías evaluadas en la primera y la segunda evaluación. Posteriormente, se describen los procesos que siguen los niños, explicando sus dificultades y aciertos más relevantes en términos estratégicos y conceptuales. Al final se ofrece una síntesis de los principales resultados de estos estudios de caso y de los resultados grupales.

Como introducción, en el siguiente análisis se observa en las gráficas (figura 3 y 4) que los casos son representativos de lo que ocurrió en términos estadísticos en cada uno de los grados. Es decir, tanto en primer como en segundo grado la dificultad se centró básicamente en el conocimiento del sistema decimal y solución de operaciones de resta. En segundo grado, son más bajos en solución de operaciones de resta y después en conocimiento del sistema decimal, destacando que el niño de alto rendimiento de segundo grado cubre al 100% todas las categorías. En estos casos el porcentaje más alto, al igual que sus grupos provenientes, es en solución de problemas aditivos, con diferencias en el conocimiento conceptual y algorítmico para cada alumno.

Resultados gráficos de los estudios de caso en primer grado y segundo grado

En la siguiente gráfica se describe y explica el conocimiento matemático de Karen de 7 años de bajo rendimiento y Deniz de 6 años de alto rendimiento, de primer grado. La gráfica ilustra sus logros y dificultades en términos porcentuales.

Figura 3.



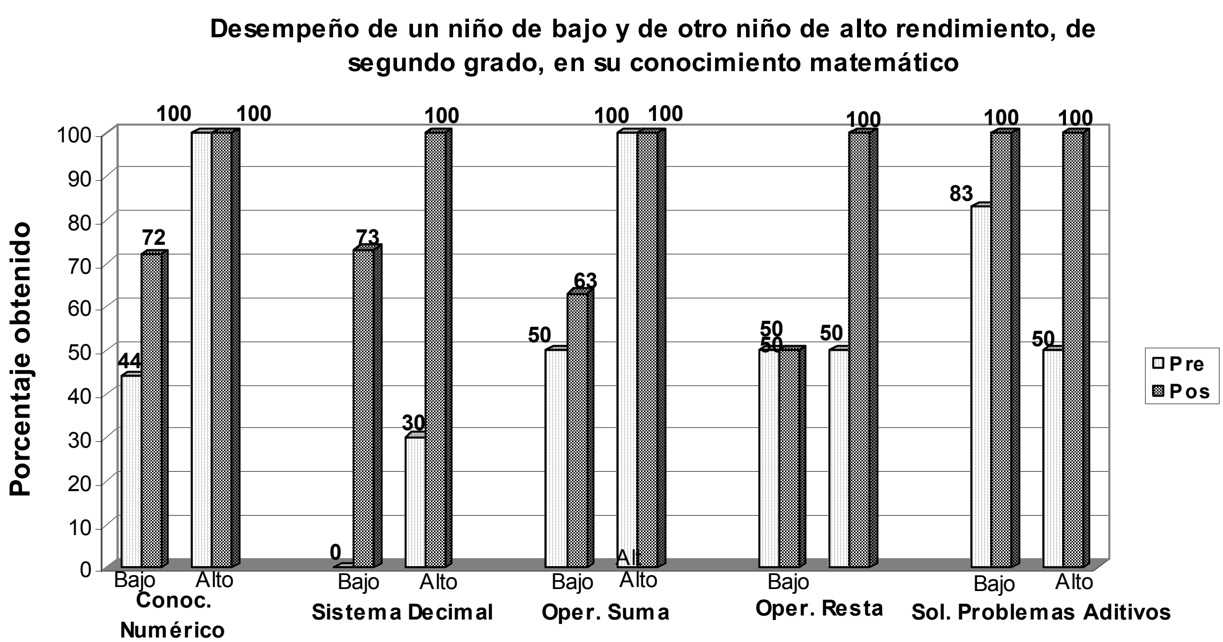
En esta gráfica (figura 3), se observa que Karen de alto y Deniz de bajo rendimiento, en la primera evaluación obtienen los porcentajes más altos en conocimiento numérico y en solución de problemas, y en la segunda evaluación en esta última categoría logran el 100% a pesar de sus dificultades, especialmente para Karen en el conocimiento del sistema decimal y la solución de operaciones de suma y resta.

En este análisis, Karen de bajo rendimiento en la primera evaluación desconocía la solución de operaciones de suma y resta, y del sistema decimal, en la segunda evaluación continua desconociendo el algoritmo de la resta, pese al incremento ligero de sus porcentajes en las otras categorías (figura 3). Aún en estas condiciones, logra resolver todos los problemas con un incremento del 67%, recurriendo a otros procedimientos de solución.

En tanto que Deniz de alto rendimiento (figura 3) en principio presentó desconocimiento en el sistema decimal, con dificultades en solución de operaciones de resta y suma. Sin embargo, en la segunda evaluación logra incrementos muy importantes en todas las categorías, aún con dificultades en conocimiento del sistema decimal, cubre al 100% la solución de problemas, y mejora sus porcentajes en la solución de operaciones de suma y resta.

En este contexto en la siguiente gráfica (figura 4) se describe y explica el conocimiento matemático, en términos porcentuales de los logros y dificultades de Michel de bajo rendimiento y Esteban de alto rendimiento, ambos de 8 años de edad, de segundo grado.

Figura 4.



En la gráfica anterior, se observa en la primera evaluación diferencias importantes en la solución de problemas, donde Michel de bajo rendimiento obtiene su mayor porcentaje, y supera a Esteban de alto rendimiento. La razón principal fue que Esteban intento solucionar los problemas mediante el empleo de algoritmos, sin embargo en la suma comete errores de regla al alinear los números en un lugar de valor posicional inadecuado, el niño desconoce el algoritmo de la resta que resuelve como suma. En tanto que Michel soluciona mediante el conteo y con el apoyo de una serie de dibujos gráficos y materiales, que le resultan útiles. En la segunda evaluación los dos niños logran cubrir al 100% la solución de problemas, sólo Esteban cubre al 100% todas las categorías.

Por otra parte, en la primera evaluación la principal dificultad que comparten Michel y Esteban se encontró en el conocimiento del sistema decimal y en la solución de operaciones de resta. Específicamente, Michel presento dificultad en la solución de operaciones de suma, en tanto que Esteban logra cubrir al 100% desde la primera evaluación la solución de operaciones de suma sencillas y con transformación hasta con tres dígitos, que se espera en los programas de la SEP que los niños cubran este conocimiento al término del segundo grado.

Michel presenta conocimiento numérico como otra de las categorías con mayor dificultad, a diferencia de Esteban quien logra cubrir al 100% desde la primera evaluación.

En la segunda evaluación Michel incrementa de modo importante en 73% su conocimiento del sistema decimal, y un incremento ligero en el resto de las categorías. Esteban también logra el incremento más importante en el conocimiento del sistema decimal y operaciones de la resta.

En este orden, a continuación se describe este conocimiento matemático de los dos casos de primer y dos casos de segundo grado, en términos de su entendimiento conceptual y estratégico al solucionar problemas aditivos, y de esta manera complementar el primer objetivo de análisis de esta investigación.

Resultados del análisis conceptual y estratégico del tipo de solución de problemas en los estudios de caso de los alumnos de primer y segundo grado

En los resultados siguientes se muestran tablas con: los tipos de problemas, los tipos de solución y estrategias que utilizan los niños, así como los resultados de la evaluación mediante la Rúbrica de Illinois (Illinois State Board of Education, 2006) que evalúa el conocimiento matemático. En este orden en la siguiente tabla se presentan los problemas en los cuales se evalúan los tipos de solución y estrategias que utilizan los niños al resolverlos. Además, esta tabla permite localizar el número, el contenido y el tipo de problema, que facilita la explicación de otras tablas.

Tabla 20. Clasificación del tipo de problemas aditivos

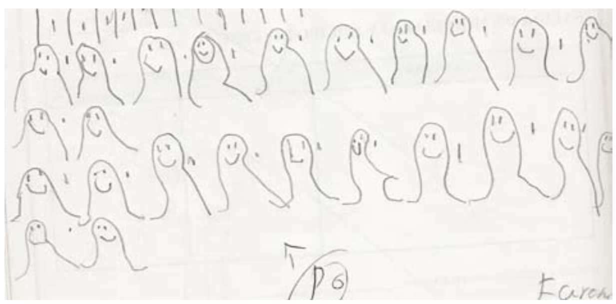
No	Problema planteados, en la primera y segunda evaluación:	Tipo Problema
1.	Karen tenía 12 pesos. En el recreo su hermano le dio 5 pesos más. ¿Cuántos pesos tiene ahora Karen?	Cambio con adición. Hay un estado inicial, una transformación positiva y un estado final
2.	Pedro tenía 13 estampas. En el parque le regaló 6 estampas a Rigo. ¿Cuántas estampas tiene ahora Pedro?	Cambio con sustracción Hay un estado inicial, una transformación negativa y un estado final
3.	Carla tiene 8 peces. Su prima Mayra tiene 5 peces. ¿Cuántos peces tienen entre las dos?	Combinación hay dos conjuntos elementales que se combinan para formar uno compuesto
4.	Rafael tenía 11 cochecitos. Marcos tiene 5 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos necesita Marcos para tener igual que Rafael?	Igualación Hay dos conjuntos que se comparan y se pide que uno se iguale para conocer la diferencia
5.	Mariana tiene 13 vestidos. Lupita tiene 6 vestidos. ¿Cuántos vestidos más que Lupita tiene Mariana?	Comparación tipo I. Hay dos conjuntos que se comparan y se pide conocer la diferencia a partir del conjunto menor
6.	Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marcos dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marcos?	Comparación tipo II Hay dos conjuntos que se comparan y se pide conocer la diferencia a partir del conjunto mayor

En este sentido, a continuación se definen y ejemplifican los cuatro tipos posibles de solución a los problemas aritméticos, clasificados de acuerdo a la propuesta de Flores (2002). Esta propuesta señala un patrón evolutivo en la complejidad de las soluciones pues parte de una interpretación y solución equivocada del problema hasta llegar a una interpretación adecuada y una solución empleando un algoritmo. De esta forma se puede identificar cómo cambió el conocimiento matemático de los niños del estudio. Estos cuatro tipos de solución son:

Solución no canónica o tipo I.

En este tipo de solución la interpretación del niño no es acorde con el contenido matemático del problema por lo tanto no hay un entendimiento del problema, pues el niño no comprende las relaciones matemáticas de adición o sustracción que implica. Cuando el niño intenta resolverlo emplea su conocimiento de otros problemas por lo que el resultado es erróneo (figura 5)

Figura 5. Solución tipo I en problemas comparación, de Karen de bajo rendimiento de primer grado, en la primera evaluación.

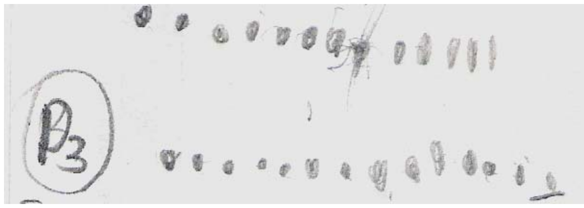


La figura anterior muestra una solución tipo I en un problema de comparación, (*Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marcos dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marcos?)* y donde Karen no lo conceptualiza como problemas de comparación en el que hay que identificar la diferencia, sino que se limita dibujar dos conjuntos con igual número de fantasmas sin establecer el valor de la diferencia. Con lo que su esquema de solución no corresponde al planteamiento correcto del tipo de problema.

Solución canónica no algorítmica o tipo II.

En esta solución la interpretación matemática del niño es acorde con la naturaleza de las relaciones matemáticas implicadas en el problema pero para solucionarlo no recurre al algoritmo aritmético. Los niños representan los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en los problemas mediante sus dedos, representaciones gráficas, cálculo mental y emplean diferentes estrategias de conteo. Algunos autores han estudiado estas estrategias de conteo y formas de representación e indican que son un antecedente para el entendimiento del algoritmo (Carraher et al 1991; Fuson 1992; Flores 2002). Un ejemplo se ilustra en la figura 6.

Figura 6. Solución tipo II a problema de combinación de Michel de bajo rendimiento, de segundo grado durante la primera evaluación.

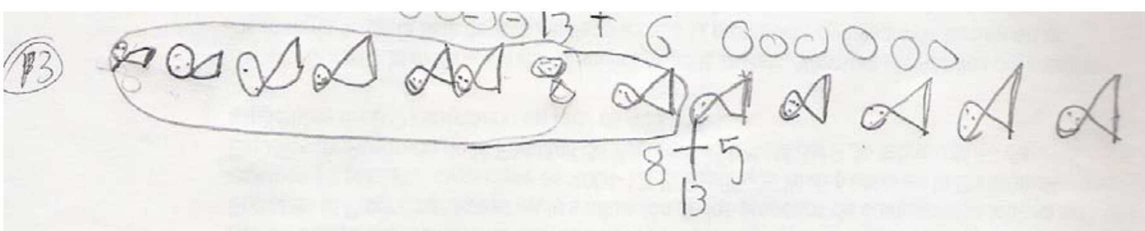


En la figura anterior, en el problema de combinación (*Carla tiene 8 peces. Su prima Mayra tiene 5 peces. ¿Cuántos peces tienen entre las dos?)* , Michel dibuja ocho peces (puntitos), y después dibuja cinco peces y finalmente cuenta todos a partir de uno para encontrar el conjunto combinado de peces. En su descripción, después de dibujar los dos conjuntos de peces dice: "*sumé cuántos pececitos había, sumé 1, 2, 3….11,12 y 13, son 13" "fui contando"* . En este tipo de respuestas se observa como el niño llega a un resultado basándose en el conteo, apoyándose en sus dibujos de cada uno de los conjuntos. Ella entiende que se trata de un problema de adición pero aún no utiliza el algoritmo.

Solución canónica algorítmica basado en una solución no algorítmica o tipo III.

En esta solución el niño comprende el problema, su interpretación es acorde con el significado matemático y empieza a comprender el empleo del algoritmo pero como todavía no lo acaba de entender valida su resultado mediante una solución no algorítmica. En su estrategia de solución no hay todavía un entendimiento cabal de porqué se emplea un algoritmo determinado y por ello al solucionar suma o resta siempre corrobora su resultado con una solución no algorítmica. El niño elige el algoritmo adecuado pero puede ocurrir que cometa errores de cálculo o cómputo, ejemplo figura 7.

Figura 7. Solución tipo III a problema de combinación, de Deniz de alto rendimiento en la primera evaluación

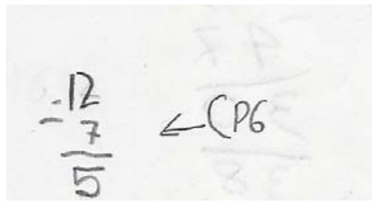


En la figura 7 se observan una solución tipo III en el problema de combinación (*Carla tiene 8 peces. Su prima Mayra tiene 5 peces. ¿Cuántos peces tienen entre las dos?)*, donde Deniz combina la representación gráfica de los dos conjuntos de peces con el algoritmo y cuenta los dos conjuntos a partir de uno para indicar el resultado. Ella indica como resultado la suma de ambos conjuntos. Este tipo de respuesta aproxima a la niña a la comprensión conceptual del algoritmo de la suma en los problemas de combinación.

Solución canónica algorítmica o tipo IV.

En esta última solución, la interpretación del problema corresponde al significado matemático, existe una comprensión de la relación entre las variables del problema y del empleo del algoritmo. En ocasiones se cometen errores de cómputo o cálculo pero que el alumno corrige por su cuenta, ejemplo figura 8.

Figura 8. Solución algorítmica en problemas de comparación de Esteban de alto rendimiento de segundo grado durante la segunda evaluación.



En la figura anterior, se presenta una solución tipo IV a un problema de comparación (*Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marcos dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marcos*?) donde la incógnita está en la diferencia y se necesita conocer la relación de ésta con el algoritmo de la sustracción. Esteban en su solución muestra un entendimiento conceptual entre el planteamiento de los problemas, al relacionar y solucionar correctamente con el algoritmo de la sustracción correspondiente.

De esta forma presentados los tipos de solución, enseguida se muestran (tabla 21), los tipos de solución que dieron los niños de los estudios de caso en la primera y la segunda evaluación.

Tabla 21. Tipo de solución (I, II, III, IV) dada por alumnos de alto o bajo rendimiento en la primera y segunda evaluación.

Tipo de problema	Primer grado				Segundo grado			
	Deniz (alto)		Karen (bajo)		Esteban (alto)		Michel (bajo)	
	1ª	2ª.	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.
Cambio (-)	III	III	II	III	III	III	III	III
Cambio (+)	III	III	II	II	III	IV	II	III
Combinación	III	III	I	III	IV	IV	II	III
Igualación	II	III	I	II	I	III	II	II
Comparación	I	III	I	II	II	III	I	II
Comparación	I	III	I	II	I	IV	I	II

En general se observa (tabla 21), tanto en los casos de primer y segundo grado que en la primera evaluación presentan los cuatro tipos de respuestas, con mayor dificultad en los niños de bajo rendimiento al predominar las soluciones tipo I y tipo II, quienes muestran dificultad para comprender y solucionar los problemas, así como la falta o ausencia de conocimiento del concepto y la solución de los algoritmos de la suma y la resta.

En la segunda evaluación en todos los alumnos se observa una evolución en este conocimiento matemático al predominar una solución tipo III, lo que significa que sin el conocimiento o el empleo formal de los algoritmos de la suma y la resta, los alumnos mejoran al resolver los problemas empleando como base sus nociones conceptuales de la composición aditiva, como son la adición y la sustracción, apoyándose en un dibujo gráfico y al comprender mejor la relación aditiva que se establece entre las variables de los problemas.

Esta mejoría en sus soluciones de los niños, durante la segunda evaluación, indican un mayor progreso en su desarrollo conceptual y algorítmico de la adición y la sustracción, con características diferentes y particulares. Donde destaca el caso de Esteban quien muestra un concepto más amplio para comprender las relaciones de adición y sustracción planteadas en algunos problemas, y relacionarlos con sus algoritmos de la suma y la resta respectivamente.

En este contexto, destaca que cada tipo de solución de los alumnos se acompaña de estrategias propias o naturales, y que sólo el niño de alto rendimiento en algunos problemas puede emplear el algoritmo correctamente. Cabe señalar que el empleo de estas estrategias está totalmente relacionado con el entendimiento conceptual que tienen los niños de la adición y la sustracción. De este modo a continuación se presentan una serie tablas con las estrategias empleadas, en cada tipo de problema.

Tabla 22. Estrategias para solucionar el problema ***Karen tenía 12 pesos. En el recreo su hermano le dio 5 pesos más. ¿Cuántos pesos tiene ahora Karen*****? (cambio con adición*)* por los alumnos de primer y segundo grado, durante la primera y segunda evaluación**

Alumno	Tipo de estrategias	
	Primera-evaluación	Segunda –evaluación
Deniz	***Solución tipo III***. Dibuja el valor del estado inicial y de la transformación, cuenta todas, posteriormente suma con el algoritmo.	***Solución tipo III***. Cuenta con sus dedos a partir del valor del estado inicial y agrega la transformación, posteriormente utiliza el algoritmo.
Karen	***Solución tipo II***. Representa el valor del estado inicial y el de la transformación con semillas, junta todas y cuenta.	***Solución tipo III***. Representa el valor del estado inicial y el de la transformación con semillas, suma la transformación a partir del estado inicial, después utiliza el algoritmo.
Esteban	***Solución tipo III***. Emplea algoritmo, soluciona incorrectamente, dibuja personajes sin relación.	***Solución tipo III***. Calculo mental, representa el valor del estado inicial en su mente y suma valor de la transformación con dedos, cuenta a partir del estado inicial, después emplea algoritmo.
Michel	***Solución tipo III***. Representa valor del estado inicial con dedos y el valor de la transformación, cuenta todas, después utiliza el algoritmo.	***Solución tipo III***. Representa valor del estado inicial con dedos, suma el valor de la transformación a partir del estado inicial, después utiliza el algoritmo.

En este problema de cambio con adición (tabla 22), únicamente Karen mejora al emplear solución tipo III, en tanto que el resto de los niños emplea esta solución en ambas evaluaciones. Sin embargo, a diferencia de la primera se observa en la segunda evaluación una evolución en el conocimiento matemático de todos los niños al emplear estrategias de conteo más complejas, por ejemplo sumar a partir del valor del estado inicial, y no contar todos y cada uno de los elementos.

Específicamente en la primera evaluación, Esteban intenta solucionar con el algoritmo de la suma pero comete un error en la operación al desconocer las reglas del valor posicional, y colocar los números en otros lugares de valor.

En la segunda evaluación, tres alumnos emplean el conteo con material a partir del valor inicial, sin embargo al tratar de solucionar con el algoritmo cometen errores al desconocer el valor posicional y colocar los números indistintamente de su valor posicional, a pesar de obtener un resultado correcto (por el uso de sus estrategias). Donde solo Esteban utiliza correctamente el algoritmo de la suma apoyándose del conteo con sus dedos.

Tabla 23. Estrategias para solucionar el *problema de cambio con sustracción* (Pedro tenía 13 estampas. En el parque le regaló 6 estampas a Rigo. ¿Cuántas estampas tiene ahora Pedro?) de los alumnos de primer y segundo grado, durante la primera y segunda evaluación

Alumno	Tipo de estrategias	
	Primera evaluación	Segunda evaluación
Deniz	***Solución tipo III***. Representa valor del estado inicial con dibujos, sobre los que marca el valor de la transformación y cuenta el valor final, después emplea algoritmo de la resta.	***Solución tipo III***. Representa valor del estado inicial (contando 2 veces dedos de una mano), retira valor de transformación y cuenta estado final, después emplea algoritmo de resta.
Karen	***Solución tipo II***. Representa valor de estado inicial con semillas, de las que retira valor de transformación y cuenta estado final.	***Solución tipo II***. Representa valor de estado inicial con semillas, de las que retira valor de transformación y cuenta estado final.
Esteban	***Solución tipo III***. Emplea algoritmo de la resta, desconoce reglas de la resta, (coloca los números en otro lugar de valor y resta indistintamente el valor menor del mayor.	***Solución tipo IV***. Soluciona con algoritmo de la resta, se apoya con dedos en el cálculo.
Michel	***Solución tipo II***. Representa estado inicial con dedos (contando 2 veces dedos de una mano), de los que cuenta y retira valor de transformación cuenta estado final. Olvida contar 5 dedos.	***Solución tipo III***. Representa valor del estado inicial con semillas, retira valor de transformación, cuenta estado final (pierde conteo), después utiliza algoritmo de resta.

En la solución del problema de cambio con transformación negativa, de acuerdo con sus soluciones se observa (tabla 23) una evolución más clara en los niños de segundo grado, al pasar de una solución tipo II en la primera evaluación a soluciones tipo III y IV en la segunda evaluación, en contraste las niñas de primer grado emplean la misma solución.

Se observa en ambas evaluaciones, que todos los alumnos de acuerdo con el manejo de sus estrategias consideran el concepto de sustracción al quitar elementos, y al referir en sus acciones frases como: *"Pedro le regaló seis", "es de restar", "a trece le quitamos seis"*, esto a pesar de no utilizar el algoritmo de la resta como principal recurso para solucionar.

Específicamente, en la segunda evaluación destaca el caso de Esteban, quien en la segunda evaluación emplea una solución tipo IV, donde de acuerdo a su respuesta muestra su entendimiento conceptual y algorítmico de resta.

Esteban en la primera evaluación soluciona tipo III, al intentar solucionar con el algoritmo de la resta muestra dificultades para ubicar y restar los números de acuerdo a su valor posicional, el niño muestra desconocer las reglas de la operación de la resta, aún así permanece conciente de que *"es una resta"*. En tanto que, en la segunda evaluación el niño cambia a solución tipo IV, conoce y soluciona correctamente con el algoritmo de la resta. En su solución refiere: *"...es una resta, trece menos seis...a 3 le quitas 6 no se puede, le pide una decena...*[suma la decena a las 3 unidades y dice] *trece menos seis...13,12,11...son 7..."*. En su solución con el algoritmo de la resta muestra además sus conocimientos acerca de la composición aditiva y del valor posicional, al reconocer el valor del lugar de las decenas y la descomponer en unidades cuando resta.

Tabla 24. Estrategias para solucionar el *problema de combinación* (*Carla tiene 8 peces. Su prima Mayra tiene 5 peces. ¿Cuántos peces tienen entre las dos?)* de los alumnos de primer y segundo grado, durante la primera y segunda evaluación.

Alumno	Tipo de estrategias	
	Primera evaluación	Segunda evaluación
Deniz	***Solución tipo III***. Representación los dos conjuntos elementales con material, y cuenta todos a partir de uno, después utiliza algoritmo de la suma.	***Solución tipo III***. Parte del conjunto mayor y agrega el conjunto menor, cuenta apoyándose con dedos, después utiliza algoritmo de la suma.
Karen	***Solución tipo I***. Representa con dibujo el conjunto mayor y el conjunto menor, iguala conjunto mayor, resultado erróneo.	***Representación tipo II***. Intenta usar dedos, (pone 8) cambia y decide usar semillas, representa conjunto mayor y conjunto menor y cuenta todas.
Esteban	***Solución tipo IV***. Emplea algoritmo correcto.	***Solución tipo IV***. Emplea Algoritmo de suma correcto.
Michel	***Solución tipo II***. Representa con dibujo los dos conjuntos y cuenta todos a partir de uno.	***Solución tipo III***. Calculo mental, suma el conjunto menor a partir del conjunto mayor. Representa conjunto mayor en mente y suma conjunto menor apoyándose con semillas, después utiliza algoritmo.

En la tabla 24, en problemas de combinación, en la primera evaluación casi todos los niños comprenden la relación aditiva entre las variables del problema y solucionan tipo II, III y IV respectivamente a excepción de Karen, a quien se le dificulta comprender la relación aditiva entre las variables del problema, y se confunde con un problema de igualación.

Sin embargo, en la segunda evaluación se observa una evolución importante para Karen y Michel de bajo rendimiento al solucionar tipo III, quienes logran comprender la relación aditiva entre los dos conjuntos, al respecto refieren: _"*los unimos", "en suma le pondría".*

Nuevamente, solo Esteban en ambas evaluaciones al comprender la relación aditiva entre las variables, logra vincular la solución con el algoritmo de la suma, que justifica: _" *...cuantos tienen entre Carla y su prima...no es de separar, es de saber cuanto tienen entre las dos* [escribe una suma y soluciona correctamente]".

Tabla 25. Estrategias para solucionar el *problema de igualación* (*Rafael tenía 11 cochecitos. Marcos tiene 5 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos necesita Marcos para tener igual que Rafael?)* de los alumnos de primer y segundo grado, durante la primera y segunda evaluación.

Alumno	Tipo de estrategias	
	Primera evaluación	Segunda evaluación
Deniz	***Solución tipo II***. Cuenta a partir del conjunto menor para igualar al conjunto mayor, cuenta con sus dedos la diferencia como resultado.	***Solución tipo III***. Representa en su mente e iguala conjunto menor y cuenta hasta igualar conjunto mayor, la diferencia es el resultado, después utiliza algoritmo (5+11) y (5-11).
Karen	***Solución tipo I***. Representa con un dibujo del conjunto mayor, dibuja once coches.	***Solución tipo II***. Representa conjunto mayor y conjunto menor con semillas, y deriva resultado, por correspondencia uno a uno.
Esteban	***Solución tipo I***. Emplea algoritmo resta (11-6), resta en forma descendente con apoyo de dedos, iguala el conjunto menor a 5.	***Solución tipo III***. Calculo mental, cuenta e iguala conjunto mayor a partir del conjunto menor, después utiliza algoritmo de la suma (5+6).
Michel	***Solución tipo II***. Calculo mental, cuenta e iguala el conjunto mayor a partir del conjunto menor.	***Solución tipo III***. Calculo mental, cuenta e iguala el conjunto mayor a partir del conjunto menor, después utiliza el algoritmo de la suma (5+6).

En este problema de igualación (tabla 25) en la segunda evaluación se observa una evolución en el conocimiento matemático de tres niños al emplear solución tipo III y de Karen que emplea una solución tipo II, en cuya estrategia emplean el conteo, apoyándose con el uso de materiales o de un dibujo, para igualar el conjunto mayor a partir del menor. Los niños de respuesta III tratan de relacionar su solución con un algoritmo, a excepción de Karen.

La principal dificultad en la comprensión de este problema fue que en ambas evaluaciones no logran identificar la relación inversa entre la adición y la sustracción, ni su relación con el tamaño de los conjuntos.

Por ejemplo, en la primera evaluación Esteban intenta utilizar y solucionar con el algoritmo de la resta, pero no logra una comprensión clara de relación entre las variables, dice: _*"reste, para que puedan tener igual a 5*", iguala la cantidad menor y no la mayor. Sólo Michel y Deniz consideran que para igualar los conjuntos, había que agregar elementos mediante la adición explican: *"es de sumar", "le faltan 6 a Marcos"* . Sin embargo en la segunda evaluación todos mejoran su comprensión al solucionar tipo III y II.

Tabla 26. Estrategias para solucionar el problema de *comparación tipo I:* *(Mariana tiene 13 vestidos. Lupita tiene 6 vestidos. ¿Cuántos vestidos más que Lupita tiene Mariana?)* de los alumnos de primer y segundo grado, durante la primera y segunda evaluación.

Alumno	Tipo de estrategias	
	Primera-evaluación	Segunda-evaluación
Deniz	***Solución tipo I**.* Comenta no sabe resolver ese tipo de problemas.	***Solución tipo III**.* A partir del conjunto menor cuenta e iguala el conjunto mayor, la diferencia es el resultado. Después utiliza algoritmo de resta (13-6) representa 13 con semillas y retira 6, cuenta el resto como resultado.
Karen	***Solución tipo I**.* Representa con un dibujo conjunto mayor, dibuja otro conjunto con la misma cantidad (13 palitos).	***Solución tipo II**.* Representa el valor de los dos conjuntos con semillas, a partir del conjunto menor cuenta e iguala al conjunto mayor, la diferencia es el resultado.
Esteban	***Solución tipo II**.* Calculo mental, a partir del conjunto menor cuenta con los dedos e iguala conjunto mayor, la diferencia es el resultado.	***Solución tipo III**.* Calculo mental, a partir del conjunto menor cuenta con los dedos e iguala conjunto mayor, después utiliza algoritmo de la suma (6+7).
Michel	***Solución tipo I**.* Dibuja conjunto mayor (14 puntos); a partir de conjunto menor iguala conjunto mayor, la diferencia es el resultado.	***Solución tipo II**.* Calculo mental, a partir del conjunto menor iguala conjunto mayor. Después representa 13 con semillas y retira 6, cuenta el resto como resultado.

Este problema de comparación tipo I, resulto difícil, en la primera evaluación (Tabla 26) la mayoría de los niños solucionan tipo I, dan una respuesta errónea; muestran dificultad para establecer el inverso recíproco entre el conjunto referente y el conjunto comparado, que los llevaría a entender la solución con el algoritmo de la resta. En estos problemas llegan a utilizar gráficos o semillas representando el valor de alguna de las variables, *"le faltan 13 vestidos"*, pero sin un procedimiento lógico, que les ayude a buscar una solución, muestran confusión. Solo Esteban logro comprender y solucionar este problema mediante un esquema de complemento o igualación.

Sin embargo, en este problema de comparación en la segunda evaluación los niños muestran mejoría al solucionar tipo II y III. En esta evaluación muestran un mayor desarrollo en su entendimiento conceptual, en donde los niños solucionan igualando el conjunto mayor, y la niña y el niño de alto rendimiento además intentan utilizar un algoritmo que se relacione con su respuesta. Por ejemplo Karen resuelve igualando el valor de los conjuntos, al respecto dice:

"cuantas necesita para tener igual", "cuantos le faltan para tener igual" [cuenta e iguala cantidades]. Por su parte Deniz, se guía en las palabras claves *"más que" y "menos que"*, también iguala los conjuntos pero después resuelve correctamente con algoritmo de resta, sin poder justificar su uso, muestra aún dificultad para comprender este tipo de problemas y relacionarlos con el algoritmo.

Otro ejemplo, es Esteban en problemas de comparación tipo I, quien en la segunda evaluación en su evaluación iguala los dos conjuntos y toma la diferencia como el resultado, quien además en su respuesta justifica su resultado que: _*"Mariana tiene 7 vestidos más que Lupita"*, con esto muestra comprender la relación entre las variables. Sin embargo, muestra dificultad para vincular su solución con el algoritmo de la resta y dice: - *" ¿trece menos siete, ó seis más siete?...es más verdad"* [escribe la suma de seis mas siete]... Esta respuesta, así como sus dudas en su reflexión de solución, lo acercan a un entendimiento más claro, puesto que ya plantea el algoritmo adecuado de la resta, sin llegar a concretar, pero que sigue como un referente de su comprensión conceptual de la adición y la sustracción, y sus algoritmos.

Tabla 27. Estrategias para solucionar el *problema de comparación tipo II*: *(Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marcos dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marcos?)* de los alumnos de primer y segundo grado, durante la primera y segunda evaluación.

Alumno	Tipo de estrategias	
	Primera evaluación	Segunda evaluación
Deniz	***Solución tipo I***. Comenta no sabe resolver ese tipo de problemas	***Solución tipo III***. Representa el valor de los dos conjuntos con semillas, cuenta e iguala el conjunto mayor a partir del conjunto menor, la diferencia es el resultado. Después utiliza algoritmo de suma y resta.
Karen	***Solución tipo I.*** Dibuja conjunto mayor (13 fantasmas) y luego dibuja otro conjunto igual con 13 fantasmas.	***Solución tipo II***. Representa el valor de los dos conjuntos con semillas, cuenta e iguala el conjunto mayor a partir del conjunto menor, la diferencia es el resultado.
Esteban	***Solución tipo II.*** Calculo mental, a partir del conjunto mayor cuenta e iguala conjunto menor (iguala a 5). Cuenta en retroceso con apoyo de sus dedos hasta igualar al menor.	***Solución tipo IV***. Calculo mental, utiliza algoritmo de resta escrita, resuelve con apoyo de dedos (12-5).
Michel	***Solución tipo I***. Dibuja valor de conjunto mayor (12 puntos).	***Solución tipo II***. Representa el valor de los conjuntos con semillas, cuenta e iguala conjunto mayor a partir del menor, la diferencia como resultado.

Este último tipo de problema de comparación tipo II, con incógnita en la diferencia, también resultó difícil (Tabla 27). En la primera evaluación a los cuatro niños se les dificulta establecer el inverso recíproco entre el conjunto referente y el conjunto comparado, que los llevaría a entender la solución con el algoritmo de la resta. Deniz no logra expresar relación alguna, Karen, Michel y Esteban comprenden el problema como un problema de igualación, refieren: *"le resté siete a Arturo para que tenga cinco igual", " le gano por doce*".

En la segunda evaluación todos muestran una evolución al mejorar su solución, Karen y Michel solucionan tipo II, emplean un dibujo, semillas o mediante un calculo mental para llegar al resultado, a pesar de ser difícil los niños se acercan a un mejor entendimiento, incluso Deniz emplea los algoritmos de la suma y la resta correctamente, pero sin poder justificar el algoritmo correcto, al preguntarle que algoritmo emplearía refiere: *"siete para que tenga doce"* ," *no sé, se me ocurre suma (escribe suma y después una resta)*"a pesar que la niña continua presentando dificultad conceptual al tratar de establecer la relación entre el problema y el algoritmo.

En este problema de *comparación tipo II*, sólo Esteban en la segunda evaluación emplea una solución algorítmica, quien comprende la relación de sustracción entre las variables y vincularla con el algoritmo de la resta. De manera importante, el siguiente esquema (Figura 9) ilustra este proceso que sigue el niño en la comprensión y la solución de este problema de comparación.

De este modo Esteban en su procedimiento primero cuenta del 5 hasta el 12 y, considera que *Arturo* dibujo 7 más, posteriormente sustrae 7 a esos 12 y cuenta en reverso a partir del 12 hasta el 5, y dice: "*siete Marcos menos que Arturo, y siete más Arturo que Marcos*".

Figura 9. Esquema de conteo que emplea Esteban en segunda evaluación para solucionar con algoritmo de resta el problema de comparación tipo II.

5,6,7,8,9,10,11,12 → [suma números desde el 5 hasta 12]

12,11,10,9,8,7,6,5 ← [sustrae números desde el 12 hasta el 5, después:]

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{-\,5} \\ 7 \end{array} \longrightarrow \text{[emplea el algoritmo de la resta]}$$

Finalmente, esta comprensión de Esteban, constata lo que refería Piaget, que los niños en su concepto de número consideran la sustracción como lo inverso de la suma. Aquí, el niño primero emplea su concepto de adición y suma para encontrar un primer resultado, posteriormente emplea su concepto de sustracción para encontrar la solución buscada, y relacionarla inmediatamente con el algoritmo de la resta, este juego de reversibilidad le da acceso a la sustracción como lo inverso de la adición (Wadsworth, 1991). Este proceso de entendimiento de alguna forma también es al que se aproxima Deniz, la niña de alto rendimiento de primer grado.

De esta forma en estos resultados se ha presentado los tipos de soluciones y las estrategias que emplean los niños de los estudios de caso, en general se observan avances en los cuatro casos, tanto en la comprensión de los problemas, así como en el uso de estrategias para solucionar los problemas, básicamente basadas en el conteo y mediante dibujos gráficos, el uso de materiales, o el calculo mental, en el mejor de los casos el algoritmo correcto.

En cuanto al tipo de soluciones, en las tablas precedentes se observan diferencias entre los niños, específicamente en la segunda evaluación donde Deniz y Esteban de alto rendimiento, aunque de grados diferentes, logran una mayor comprensión conceptual de los problemas, incluso Esteban es capaz de comprender las relaciones de tres problemas y relacionarlos con la solución mediante un algoritmo.

Respecto a las estrategias de solución de los niños, la diferencia entre la primera y segunda evaluación, radica en el tipo de estrategias de conteo de simples a complejas, ya que estas últimas son empleadas en su mayoría por los niños en la segunda evaluación.

Finalmente, como complemento al análisis anterior, se ofrecen los resultados evaluados mediante la Rúbrica de Illinois para las Matemáticas (Illinois State Board of Education, 2006). Las rúbricas son guías o escalas de evaluación donde se establecen niveles progresivos de dominio o pericia relativos al desempeño que una persona muestra respecto de un proceso o producción determinada. Las rúbricas integran un amplio rango de criterios que cualifican de modo progresivo el tránsito de un desempeño incipiente o novato al grado del experto. Son escalas ordinales que destacan una evaluación del desempeño centrada en aspectos cualitativos, aunque es posible el establecimiento de puntuaciones numéricas. En todo caso, representan una evaluación basada en un amplio rango de criterios más que en una puntuación numérica única. Son instrumentos de evaluación auténtica sobre todo porque sirven para medir el trabajo de los alumnos de acuerdo con "criterios de la vida real" (Díaz Barriga, 2005).

La utilización de la evaluación mediante la rúbrica del conocimiento matemático, cuando los niños solucionan problemas matemáticos, en esta investigación, permite describir sus niveles evolutivos que logran entre la primera y segunda evaluación, que en términos del análisis de estos resultados ofrece una representación global de este proceso de aprendizaje.

Específicamente la Rúbrica de Illinois para Matemáticas (Illinois State Board of Education) evalúa el conocimiento matemático del niño al solucionar problemas aritméticos. Básicamente esta rúbrica permite evaluar el conocimiento matemático de acuerdo con tres categorías (ver anexo 4).

- La primera, es la *Escala de conocimiento matemático* que evalúa el nivel de compresión conceptual que tiene el niño de la suma y la resta.
- La segunda es la *Escala del conocimiento estratégico* que evalúa las estrategias que el niño emplea durante el proceso de solución, e incluye el conocimiento y uso de los algoritmos de la suma y la resta.
- Finalmente la *Escala de comunicación del resultado*, se refiere a la capacidad que tiene el niño en el momento de reportar su resultado, considerando sus respuestas escritas y justificación verbal en términos matemáticos.

Resultados de la evaluación mediante La Rúbrica de Illinois para Matemáticas (Illinois State Board of Education, grados: 3-12).

A continuación se presentan los resultados de la evaluación de la Rúbrica de Illinois para las matemáticas (Illinois State Board of Education, grados: 3-12), para cada una de las tres categorías que evalúa: Conocimiento matemático, Conocimiento estratégico y Comunicación del resultado.

Tabla 28. Resultados de la Escala de Conocimiento Matemático (0,1,2,3,4) de la Rúbrica de Illinois

Tipo de problema	**Primer grado**				**Segundo grado**			
	Deniz		Karen		Esteban		Michel	
	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos
1	1	3	1	3	2	3	2	3
2	1	3	1	2	2	4	1	2
3	1	3	0	3	4	4	2	3
4	0	3	0	2	0	3	1	3
5	0	3	0	1	2	3	0	1
6	0	3	0	1	0	4	0	2

En la categoría de conocimiento matemático (Tabla 28), en la primera evaluación las dos niñas de primer grado se ubican entre el nivel 0 y 1, al presentar en los primeros problemas un entendimiento de algunos de los principios y conceptos matemáticos como la adición y la sustracción, con desconocimiento de sus algoritmos, y con limitado entendimiento en la comprensión de la relación establecida en los problemas de igualación y comparación.

En la segunda evaluación este conocimiento mejora en Karen, al ubicarse entre los niveles 1 y 3, donde puede aplicar únicamente el algoritmo de la suma. El cambio en Deniz es mayor, al predominar el nivel 3, donde presenta un entendimiento más completo de los principios y conceptos implicados en los primeros tres problemas, utiliza y ejecuta los algoritmos de la suma y la resta correctamente (algoritmos sencillos con uno o dos dígitos, que no implican transformación). Sin embargo, se le complica la aplicación de estos conocimientos en el resto de los problemas.

En los niños de segundo grado en la escala de conocimiento matemático, Michel en la primera evaluación, se ubica entre el nivel 1 y 2, y presenta también limitado entendimiento de los principios y conceptos matemáticos. Puede presentar un uso incorrecto y falla al utilizar conceptos matemáticos, como el uso indistinto de la suma para resolver el problema de cambio con resta. Por su parte Esteban en la primera evaluación, se ubica en el nivel 2, al presentar entendimiento de algunos de los principios y conceptos matemáticos; tiene claro en que momento emplear la adición o la sustracción. Tiene serias dificultades, al desconocer el procedimiento de los algoritmos de la suma y resta, en el momento de solucionar un problema. Sin embargo, en la segunda evaluación los dos niños mejoran, las respuestas de Michel predominan en el nivel 2 y 3, presenta un mejor entendimiento de los principios de la suma y la resta y el conteo, pero con serios errores de cómputo, escribe sólo parte de un algoritmo escrito. No obstante, respecto a Esteban, su ubicación predomina entre los niveles 3 o 4, dado que es capaz de presentar un entendimiento más completo de los principios y conceptos matemáticos analizados en la mayoría de las situaciones matemáticas. Utiliza apropiadamente una notación y terminología matemática. Soluciona correctamente los algoritmos de la suma y la resta con transformación hasta con tres dígitos.

Sin embargo, de acuerdo con los resultados anteriores de la rúbrica, se observa una dificultad en este conocimiento matemático, relacionado con el hecho de que los niños puedan resolver algoritmos y debido a la conceptualización que tienen acerca de sus significados y su correcta aplicación en el entendimiento que tienen al tratar de comprender y solucionar los problemas planteados. Aunque el niño conozca y pueda resolver correctamente los algoritmos, esto no implica que necesariamente entienda el concepto. A la inversa, el que el niño pueda resolver problemas no implica que entienda el uso de los algoritmos. Sin embargo observamos que al comprender o tener nociones de lo que implica la adición y la sustracción, junto con el uso apropiado de sus estrategias y algoritmos naturales, esto los lleva a resolver exitosamente los problemas. Lo ideal sería aprovechar estos conocimientos que tienen los niños acerca de la adición y la sustracción como base para la enseñanza de los algoritmos.

La anterior sirve como justificación del por qué varían los resultados entre el tipo de solución y el nivel logrado en las rúbricas. Por ejemplo, ante una solución tipo III, en la evaluación mediante la rúbrica obtiene calificación 2, la razón es que aún cuando el niño puede dar un resultado correcto, en su solución no demuestra una comprensión de la relación entre las variables, como es el caso de los problemas de comparación, en el que los niños expresan: *"no sé si es suma o es resta"* o dudan en qué algoritmo utilizar: *"una suma o una resta", "no sé cuál* *es"* , aún cuando los niños puedan llegar a resolver algoritmos correctamente. La razón es que existe una comprensión de algunos de los principios y conceptos matemáticos, que solo pueden ser aplicados en problemas de menor complejidad como de cambio con adición o de combinación.

En relación al conocimiento estratégico cuando resuelven problemas de diferente tipo, los resultados se muestran en la tabla 29.

Tabla 29. Resultados de la Escala de Conocimiento estratégico (0,1,2,3,4) de la Rúbrica de Illinois

Tipo de problema	**Primer grado**				**Segundo grado**			
	Deniz		Karen		Esteban		Michel	
	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos
1	2	4	2	3	3	4	3	3
2	2	4	2	2	3	4	1	2
3	1	3	1	2	4	4	3	3
4	2	2	1	2	1	2	2	2
5	0	1	0	1	2	3	0	1
6	0	1	0	1	2	4	1	2

Se observa que Karen y Deniz, en la primera evaluación, se ubican entre los niveles 0 y 2, un poco mejor para Deniz. Las dos niñas en los dos problemas de cambio logran identificar algunos elementos importantes del problema pero presentan únicamente limitado entendimiento de la relación entre sus variables. Dan alguna evidencia del proceso de solución. Fallan para identificar elementos importantes (datos numéricos, en ocasiones la pregunta*)* así como para enfatizar sobre elementos sin importancia, reflejan una estrategia deficiente para solucionar el problema. En los últimos dos problemas de comparación dan mínima evidencia de un proceso de solución. El proceso es difícil de identificar pues no pueden explicar su solución. Karen copia partes del problema, pero sin intentar una solución.

En la segunda evaluación, las niñas mejoran sus estrategias, Karen se ubica entre los niveles 1 y 3, y Deniz entre el 1 y el 4, logran identificar los datos más importantes, pueden establecer la relación entre ellos, el proceso de solución es casi correcto, sin embargo al elevarse el nivel de complejidad dado por las relaciones entre los problemas se les dificulta cada vez más.

Por su parte, en los niños de segundo grado en esta escala del Conocimiento estratégico, en la primera evaluación se observa (Tabla 29) una variación de la efectividad de sus estrategias que los ubica entre el nivel 1 y 3, donde pueden llegar a utilizar información relevante. Fallan en algunas ocasiones, para identificar elementos o partes importantes, principalmente en los problemas de igualación y de comparación. Pueden reflejar una estrategia importante para solucionar el problema, como es el uso de dibujos o el empleo de sus dedos. Se les dificulta explicar el proceso de solución, con mayor dificultad para Michel, quien si identifica algunos elementos importantes del problema pero presenta únicamente un limitado entendimiento de las relaciones entre las variables.

En la segunda evaluación, las diferencias son más claras, Michel se ubica más entre los niveles 2 y 3, en problemas de cambio con adición y de combinación da clara evidencia del proceso de solución, no siendo así con el resto de los problemas, principalmente los que implican la resta, como el de cambio con sustracción y los problemas de comparación. Por su parte, Esteban se ubica entre el nivel 3 al 4, donde predomina el nivel 4, identifica todos los elementos importantes del problema y presenta un entendimiento de las relaciones entre ellos, incluso en los problemas de comparación. Refleja más una estrategia sistemática y apropiada para solucionar los problemas. Da una clara evidencia del proceso de solución, y este proceso es completo y sistemático, destaca el uso del cálculo mental, el empleo de los dedos y en algunos problemas emplea los algoritmos de la suma y la resta.

Como complemento a lo anterior, también es importante presentar la forma en que los niños llegan a comunicar su conocimiento (Tabla 30), y las estrategias que emplean durante la solución de los problemas planteados, que ayudan a reflejar el grado de entendimiento que puede tener. A continuación se presenta una tabla con estos resultados.

Tabla 30. Resultados de la Escala de Comunicación (0,1,2,3,4) de la Rúbrica de Illinois

Tipo de problema	**Primer grado**				**Segundo grado**			
	Deniz		Karen		Esteban		Michel	
	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.	1ª.	2ª.
1	2	2	2	2	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	3	1	3
3	1	2	1	2	3	4	3	3
4	1	1	1	1	2	3	2	3
5	0	1	0	1	2	3	0	2
6	0	1	0	1	2	4	1	2

Finalmente en la tercera escala, en Comunicación del resultado (Tabla 30) las dos niñas de primer grado en ambas evaluaciones logran el nivel 1 y 2, con dificultades en la Comunicación del resultado, con una ligera mejoría en la segunda evaluación. De manera general logran dar o no alguna explicación del proceso de solución empleado, pero la comunicación es vaga o difícil de interpretar, llegan a incluir un diagrama que es imperfecto, sin claridad, o no explicado. Pueden fallar para completar o pueden omitir partes importantes del problema. Dan una explicación errónea o difícil de presentar, en menor medida para Deniz quien en problemas de menor complejidad puede llegar a explicar el proceso de solución.

En la escala Comunicación del Resultado, Michel y Esteban en ambas evaluaciones tienden a ubicarse en el nivel 3 en problemas que implican la suma, logran dar explicación del proceso de solución empleado, donde pueden incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones. Sin embargo, en problemas que implican resta se ubican desde en el nivel 0 hasta niveles 1 y 2 principalmente en los problemas de comparación. Con una explicación mínima del proceso de solución. Pueden fallar u omitir partes importantes del problema. Pueden incluir un diagrama el cual representa incorrectamente la situación del problema, o este no puede ser claro y difícil de interpretar.

Sin embargo en la segunda evaluación Michel logra nivel 3, mejora su explicación del proceso de solución empleado, y llega a incluir diagramas casi completos con algunas explicaciones. Esteban por su parte, en la segunda evaluación, se ubica entre los niveles 3 o 4, donde predomina el nivel 3, da bastante explicación del proceso de solución empleado. Puede tener algunos huecos menores o partes sin explicar. Puede incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones. En los problemas de combinación que implica resta y el de combinación que implica la suma logra dar una explicación clara del proceso para llegar al resultado.

Por otra parte, hasta aquí, se han explicado los avances logrados en relación a la construcción del conocimiento matemático de los niños a lo largo del ciclo escolar. Se ha descrito el proceso que siguen los niños en términos conceptuales y estratégicos, así como sus dificultades y avances en cada categoría evaluada. Sin embargo, es importante vislumbrar los resultados encontrados respecto a la participación del maestro en términos de cuáles son sus concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas para poder contrastarlas más adelante con los resultados del análisis de las prácticas educativas en el aula.

6.4 Resultados del análisis de las concepciones de la maestra de primer grado y del profesor de segundo sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En esta sección se ofrecen primero los resultados del análisis individual y para cada una de las seis categorías de las concepciones de la maestra de primer y del maestro de segundo grado, al final se presenta una síntesis comparando y relacionando sus concepciones.

6. 4.1 Análisis de las categorías de la entrevista aplicada a la maestra de primer grado

Formación previa e interés en la didáctica de la materia

La maestra Ana, quien imparte el primer grado de primaria, nació y ha vivido hasta ahora en el Distrito Federal, actualmente tiene 47 años de edad. En cuanto a su formación profesional, la maestra refiere que estudió la Normal Básica, ha trabajado como maestra de primaria durante 21 años; por la mañana es maestra y por la tarde se dedica a actividades de su hogar. Considera que su formación profesional en la enseñanza de las matemáticas inició a partir de sus estudios de primaria y de manera formal cuando llevó un curso de matemáticas en la Escuela Normal, con duración de una hora diaria, durante un año en todo el ciclo escolar.

De inicio, al preguntarle si se basa en alguna teoría o corriente teórica para la enseñanza de las matemáticas destacó:

> "Sólo retomando de todos los métodos que hay, y más que nada, que el niño a través de sus vivencias cotidianas se le haga razonar y resolver problemas que se le presentan..."[C1AN-P1]

No precisa en detalle a qué se refiere con dichos "métodos" o qué los caracteriza, pero tampoco recuerda con precisión qué fue lo qué aprendió o la huella que le deja el curso formal que tomó en algún momento de su preparación como profesora normalista. De acuerdo con lo que menciona la maestra Ana, se observa la ausencia de fundamentos teóricos específicos para la enseñanza de las matemáticas, es decir, no se apela a una didáctica específica de la disciplina fundamentada en alguna corriente o autor identificable. Como lo ilustra el extracto anterior y por otros más en la entrevista, apela a una suerte de aprendizaje experiencial del cómo se aprende y se enseña esta disciplina, que le ha permitido acercarse de manera empírica a plantear su abordaje de la enseñanza en el aula. Más que apelar a una formación profesional, plantea una formación para la enseñanza basada en la práctica y las vivencias como estudiante y como docente.

Esta respuesta coincide con la literatura reportada (Monroy, 1998; Llinares y Sánchez, 1990) respecto a que los profesores no reportan sustentar su enseñanza en alguna teoría, autor o método psicopedagógico determinado, sino que apelan a su experiencia y a su historia personal. Esto trae a discusión algunos de los dilemas más importantes respecto a la actuación docente, si ésta se sustenta en una formación profesional y se vincula a una didáctica disciplinar específica, o más bien se construye de manera artesanal, con base en la experiencia. Sin embargo, también se ha establecido que tanto el tipo de conocimientos teóricos y metodológicos que poseen los profesores como sus representaciones, afectan su enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas en sus alumnos (v. lo reportado en el capítulo dos de esta tesis). También se abre otra discusión: qué tanto fue pertinente y suficiente la formación inicial recibida para sustentar la enseñanza de las matemáticas, como en este caso, durante más de dos décadas, y encontrar un referente lejano y poco significativo que podría hablar de la participación en un proceso permanente de formación y actualización docente, que según los especialistas (v.Imbernón, 1994) es requisito indispensable para el perfeccionamiento y profesionalización de los profesores. Asimismo, Perreneoud (2004) encuentra que para adquirir las competencias que permiten gestionar la progresión de los aprendizajes, los profesores requieren como competencia específica el poder establecer vínculos con las teorías que sostienen las actividades de aprendizaje.

Concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas

Acerca de la importancia de enseñar matemáticas [C2AN-P1], la maestra Ana considera que ésta reside en el desarrollo de habilidades cognitivas generales, como el razonamiento y no en el desarrollo de habilidades matemáticas concretas o en la adquisición de contenidos puntuales; al respecto afirma que enseñar matemáticas es importante:

> "Para que el niño aprenda a razonar a todos los problemas que se le presentan." [C2AN-P1]

A diferencia de lo que reportan otros profesores, quienes consideran que las asignaturas más importantes son el Español y las Matemáticas, esta maestra concibe que existen materias más importantes como "valores", por lo que las Matemáticas no tienen tanta importancia, y que en ocasiones "se piensa que no sirven para nada".

> "Sí, sí hay otras más importantes, como valores porque actualmente se están perdiendo mucho, también matemáticas, pero primero valores" [C2AN-P2].

De acuerdo con estudios realizados, el estatuto o importancia otorgada por los profesores a las distintas materias influye en su conducta durante su practica educativa (Gill et al. 2004), en particular en la calidad de organización del conocimiento a enseñar, el tiempo dedicado a su impartición y la motivación para enseñar, lo que se reflejará en el aprendizaje del niño (Llinares y Sánchez, 1990).

Por otra parte, en cuanto a los tipos de aprendizaje que se deben aprender en matemáticas, la maestra considera que son: " la lógica-matemática y el razonamiento de problemas", los cuales ilustra con situaciones funcionales de la vida cotidiana, como el manejo del dinero en operaciones de compra-venta:

> "Por ejemplo, si el niño va a la tienda y si tiene un billete de $50 tiene que pensar cuánto le tienen que dar de cambio y se debe de dar cuenta cuánto cuesta y si le están dando mal el cambio... que llegue a conclusiones de cómo llegó a ese resultado, que si costó $40 pesos por qué le dieron 10 pesos. Con qué operación y cómo lo resolvería él" [C2AN-P3]

En cuanto las concepciones con respecto a la principal problemática para la enseñanza de las matemáticas, para esta maestra el reto es superar el aprendizaje memorístico y la falta de razonamiento:

> "...todo es muy memorístico, se les da a los niños para que todo se lo aprendan, todo de memoria y las tablas sin que las razonen, para mí es lo más difícil" [C2AN-P4].

Es interesante que esta concepción se relaciona con la preocupación científica acerca de la educación matemática que privilegia el aprendizaje de procesos algorítmicos, y la falta de la promoción del conocimiento conceptual o el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático (v. los autores referidos en el primer capítulo, en particular, Ávila, 2004; Eurydice Europan Unit, 2002; English, 1998). Pero al mismo tiempo, la maestra describe que la problemática que enfrenta en el momento de enseñar es cómo arribar a la solución de problemas; la dificultad la ubica tanto en el educando como en la enseñanza, ya que piensa que al niño al que le cuesta trabajo esta parte de las matemáticas porque implica ir más allá de memorizar y que "se les da" el contenido para que lo memoricen. Valdría la pena preguntarse si la atribución que hace la profesora es externa a ella misma, es decir, el problema se ubica en el sujeto de la educación y en la forma en que "otros" docentes los enseñan. Más adelante, también se verá que esta concepción se relaciona con los tipos de contratos didácticos que promueve en el aula.

Concepciones acerca del alumno, de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas.

La maestra Ana considera que los libros tienen un método para transmitir sus contenidos o enseñanzas y concibe que las actividades presentadas en el libro de matemáticas no son "llamativas" (motivantes) en los niños y niñas [C3AN-P1]. Esto la conduce a inferir el desinterés por parte de los alumnos, y que conduce a describir más adelante cómo ocurren las clases cuando se recurre a la lección del libro de texto.

> "Es muy sistemático, ya muy visto, como que al niño ya no le llama la atención como vienen ahí en los libros". [C3AN-P1]

No obstante, el desinterés puede transformarse en interés en función de quién y cómo imparta la enseñanza, sobre todo si ésta se apoya con cierto tipo de materiales y es el docente quien logra motivar al alumno. Se observa que la profesora concibe que ella es una maestra que logra una clase divertida y motivante debido a que maneja materiales concretos y actividades lúdicas, así sus alumnos aprenden haciendo y a través del juego.

> "Si es de interés, claro porque yo se los enseño...al principio como que no les gustaba se aburrían y como se da material si toma mucho interés". [C3AN-P4]

Para ello describe la manera cómo considera que enseña las matemáticas.

> "... a veces trato de darles a conocer los números poco a poco con materiales como palitos, por la lotería, por el juego de serpientes y escaleras, y así poco

a poco el niño va conociendo los números, también ellos que se cuenten, cuando es su cumpleaños, qué día naciste y muchas preguntas…busco involucrarlos en el trabajo que están haciendo, que trabajen en equipo, con material concreto...” [C3AN-P5]

Para los niños que tienen dificultad para aprender las matemáticas la maestra cree que debe apoyárseles de la siguiente manera:

“... niños pasivos apáticos, vamos a apoyarlos con material, que les guste para que se motiven y que les llame la atención, si no lo conocen cuando lo conozcan va a despertar su interés y a lo mejor les va a gustar más que las otras materias” [C3AN-P6]

Con base a lo anterior la maestra reporta una actitud positiva de sus alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas, a razón de que utiliza materiales y emplea juegos. Sin embargo cabe preguntar qué tanto atrae esto al niño en función de lo observado en el aula, y si las actividades lúdicas promueven el hecho de jugar por jugar o se juega para aprender matemáticas, aspectos que se pudieron observar en el análisis de las prácticas escolares, última parte de esta tesis.

En cuanto al tipo de conocimientos que el niño de primer grado debe dominar, la maestra menciona el conocimiento de los números hasta las centenas y el poder resolver problemas matemáticos simples. El programa de la SEP (1993) propone que los niños de primero dominen hasta las decenas, y se enseñen problemas de diferente tipo.

“Que conozca los números hasta las centenas, que sepa resolver problemas” [C3AN-P2]

Con respecto a los tipos de problemas matemáticos, la maestra refiere que éstos deben de ser sencillos e involucrar las operaciones de suma, resta y la repartición [C3AN-P23].

“Por ejemplo tienen 5 perros, y al lado derecho 10 huesos, cuantos huesos le tocan a cada perro....sería una operación relacionada a la división. Esas serían las principales”. [C3AN-P23]

Con base en lo anterior, la maestra Ana centra el aprendizaje de las matemáticas en la numeración, los algoritmos de la suma y la resta y los problemas elementales, más que en conocimientos matemáticos básicos, como es la comprensión conceptual y procedimental del sistema decimal de numeración, el desarrollo conceptual y algorítmico de la suma y la resta, o la necesidad de desarrollar en el alumno habilidades específicas de razonamiento matemático, el fortalecimiento y la mejora de estrategias para la solución de problemas aditivos.

De acuerdo con la maestra Ana, a diferencia de los alumnos con dificultades para aprender matemáticas, los alumnos con mayor facilidad para ello, viven con una familia unida, los papás tienen un poco de más recursos económicos, cuentan con una computadora, la que en su opinión les permite despertar las mentes de niños y niñas.

Sostiene la creencia de que los niños y niñas con dificultad para aprender matemáticas provienen de familias desintegradas o que se están desintegrando. Por el contrario, sugiere que al alumno que se le facilita aprender matemáticas es porque tiene una suerte de curiosidad intrínseca y una capacidad de razonamiento propia:

> "Es muy inquieto, luego le gusta estar contando mucho sus cosas, sus libros y acomodando... hasta como responsables... Liderazgo, le gusta formar y contar a sus compañeros. Por ejemplo, cuando pasa la señora que pasa la asistencia, la mayoría de los niños están contando...somos tantos, pareciera que el niño esta utilizando su razonamiento..." [C3AN-P7]

Y por el lado de los niños y niñas que se les dificulta aprender matemáticas, éstos son pasivos:

> "...y los otros ni se paran y nadamás se quedan quietecitos... son pasivos, pienso que les afecta no nadamás en matemáticas sino en todo lo demás. Ya ahorita sé los que necesitan ayuda y quiénes no… [C3AN-P8]

La maestra relaciona los rasgos aparentes de comportamiento o personalidad de los niños y niñas con la capacidad y disposición para aprender matemáticas; los niños y niñas activos que son líderes, son los que aprenden, en contraposición a los "pasivos".

En esta concepción, la maestra vincula características personales que ella percibe con capacidades y nivel de aprendizaje de sus alumnos, sin considerar aspectos relacionados con la forma en que un niño puede aprender o puede construir conceptos y conocimientos matemáticos. No hay una mención a las posibles habilidades cognitivas y metacognitivas implicadas ni al modelado y desarrollo gradual de estrategias y motivos provenientes de una determinada forma de enseñar. Por otra parte, también se nota que la maestra entiende por razonamiento el hecho de que el niño se ponga a contar (objetos, personas, eventos) [C3AN-P7].

En cuanto a los contenidos o unidades de las matemáticas que más se les dificultan a las niñas y los niños de primer grado la maestra cree que son:

> "...el cálculo mental… porque no están acostumbrados, porque todo se los dan, uno les dice el resultado. Por ejemplo se le dice son 8 pesos, sabe que son 8 pesos porque se lo dijo su mamá, pero no está razonando, no tiene todos los conocimientos previos...[guarda silencio]" [C3AN-P9]

Llama de nuevo la atención que se ubica el origen del conocimiento matemático del niño en la familia ("se lo dijo su mamá") y que se espera que en buena medida los conocimientos previos pertinentes ya los hayan adquirido, al parecer en un contexto extraescolar. Por otro lado, la maestra agrega que el cálculo mental que realizan los niños y niñas está dirigido a las operaciones y a la solución de problemas.

En cuanto a la utilidad de los conocimientos matemáticos que el niño aprende en primer grado de primaria, la maestra Ana cree que es un conocimiento que les ayuda en su vida, ya que lo emplearán todos los días, describe que:

> En la escuela:
> "Para todo...para contar a sus compañeros, para ver cuántos libros le van a dar para que utilice este año". [C3AN-P10]
>
> Fuera de la escuela:
>
> "Para ubicarse y que no se les haga tarde, que sepa que son 4 cuadras de aquí a allá, que conozca los números", "me dijeron que en la calle no. 2" "para ubicarse" [C3AN-P11]
>
> En la casa:
> "Para contar el número de familia que hay". [C3AN-P12]

De acuerdo con lo anterior, la maestra Ana puntualiza como principal utilidad o aplicación del conocimiento matemático el conteo, la cual es una habilidad básica pero que no relaciona con la solución de problemas, ni con el desarrollo el pensamiento lógico-matemático en un sentido más amplio. [C3AN-P10, P11, P12]. La utilidad del conocimiento matemático reside para ella en que lo empleen de manera funcional en sus vidas diarias, pero no en que también contribuya al desarrollo de otros conocimientos matemáticos más complejos y de otras habilidades cognitivas en el pensamiento del niño. Está lejos de concebir a la matemática como ese tipo de conocimiento científico que sólo se adquiere mediante un proceso de escolarización y promueve el desarrollo de los procesos psicológicos avanzados o superiores en la acepción vigotskiana que se revisó en el primer capítulo. Por otro lado, el lenguaje matemático es un potente instrumento de mediación que puede funcionar como una forma de representación y transformación de la propia cognición del sujeto y del mundo social en que participa.

Contenidos específicos y aprendizajes más importantes con relación a la suma, la resta y la solución de problemas aditivos

Antes que el niño o la niña llegue al conocimiento de la suma y la resta, la maestra considera indispensable que conozcan lo siguiente:

> "Primeramente que conozca los números, el valor de cada número, y que sepa interpretar el problema. Para que sepa cuál es la respuesta si es una suma o una resta o va a ser una división o de reparto". [C4AN-P1]
>
> Y agrega que también otros conocimientos, además de los números:
>
> "Que sepan leer, si no saben pues no, que conozcan los números, la escritura y su valor". [C4AN-P2]

De acuerdo con lo anterior, la maestra considera que los niños deben tener conocimiento del número, su escritura, su valor e incluso saber leerlo. Se refiere sólo a la escritura y a la lectura de los números, una de las primeras partes del conocimiento de número.

Sin embargo, quedan encubiertos otros conocimientos indispensables del número para poder ser útil en el momento de que el niño pueda construir los conceptos que implican la suma y la resta. Ya que además de que el niño debe: saber contar, también debe respetar principios como son: correspondencia biunívoca, ordinalidad y cardinalidad (Gellman y Gallistel, 1978); además también debe ser capaz de emplear este conocimiento en una variedad de situaciones como el igualar un conjunto o aún más complicado, poder hacer comparaciones entre dos o más conjuntos, para que de este modo el niño pueda ir construyendo el concepto de suma y resta, (Nunes y Bryant, 1997); junto con el aprendizaje del procedimiento y la solución de sus algoritmos correspondientes, con la aplicación y el conocimiento convencional y conceptual del sistema de numeración decimal (Carpenter, et al. 1999).

Acerca de la importancia de enseñar o que los niños y las niñas aprendan a solucionar problemas aditivos, considera lo siguiente:

> "Para todo, en toda su vida se va a encontrar con problemas que va a usar la suma y la resta ya sea cuando vaya a la tienda, cuando este trabajando…mi sueldo es tanto..." [C4AN-P5]

Y para esta etapa escolar la maestra cree que estas son útiles únicamente para resolver las operaciones de suma y resta, ella dice:

> "Para que sepa resolverlas" [C4AN-P6]

Sin embargo, también considera que los problemas se involucran en el desarrollo del conocimiento matemático del niño.

> "Porque más adelante van a venir problemas más complicados para poder dividir y conocer el sistema decimal, hasta el sexto año resolver la raíz cuadrada. Teniendo siempre el conocimiento previo de la suma y resta". [C4AN-P7]

El desarrollo de conceptos, la aplicabilidad de éstos a la cotidianidad de los niños y a su mismo desarrollo, el enlace o crecimiento lógico de estos conocimientos matemáticos, quedan en duda dependiendo de si la maestra tiene o no la claridad pertinente para llegar a enseñar los conocimientos correspondientes al primer grado. Entre éstos, la comprensión y utilización del conteo y la numeración, no únicamente para saber contar un solo conjunto de objetos, sino quizás también para aplicar este conocimiento en una diversidad de situaciones complejas como el igualar o comparar conjuntos (Nunes y Bryant, 1997). O el hecho de saber hasta las decenas en primer grado, que también deben ser aplicadas al entendimiento de los algoritmos formales de la suma y la resta (Carpenter, et al. 1999). Y en el mejor de los casos poder aplicar y emplear los conocimientos anteriores en la solución de problemas matemáticos. Finalmente, respecto a la importancia de que el profesor tenga un buen conocimiento de la materia a impartir, la investigación ha mostrado que la falta de dicho conocimiento constituye, quizás, la principal dificultad de que los profesores afectados se impliquen en actividades innovadoras (Tobin y Espinet, 1989).

Métodos y estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos

En este contexto de la enseñanza de las matemáticas, específicamente para el conteo, la numeración, la suma, la resta y la solución de problemas aditivos en esta edad escolar, las estrategias y los recursos que emplea el maestro son esenciales para poder lograr los objetivos de enseñanza. En términos de Vermunt y Verloop (1999) las estrategias cognitivas, metacognitivas, y afectivas son indispensables para el tipo y calidad de los resultados en el aprendizaje, en este caso de las matemáticas. Por lo que resulta indispensable poder explorar cuáles son las concepciones de la maestra en esta área.

De acuerdo con la concepción de la maestra, la manera de cómo enseña las matemáticas, ya antes se vio que recurre al empleo de materiales concretos, actividades lúdicas y a tareas donde ejercitan los algoritmos y problemas convencionales, tratando de apegarse al programa. En relación a cómo trabaja el aprendizaje por problemas, plantea lo siguiente:

> "¡Ah!, pues con un problema de sus compañeritos, por ejemplo. María tenía una bolsa de 20 paletas pero un niño le quitó 8, se le desaparecieron 8, ¿cuántas le quedan? O sea que sean cosas que él sienta, que él las palpe" [C5AN-P2]

El texto anterior, sirve para dos comentarios, el primero se relaciona con la conexión entre la teoría de la mente del niño y las concepciones del aprendizaje de los docentes. Aquí, se puede notar, la preocupación de la maestra porque el niño adquiera el conocimiento entendido como una copia exacta y directa de la realidad. Es decir, que en su concepción pareciera que si el niño puede palpar los objetos, entonces podrá adquirir los conocimientos que se pretenden, en este caso la sustracción. Esta concepción de la profesora a nuestro juicio coincide con lo encontrado por Pozo (2000) respecto a las teorías implícitas de los profesores sobre el aprendizaje. Según este autor, los profesores que detentan una teoría implícita de la enseñanza que Pozo denomina *teoría directa*, parten de una epistemología propia del realismo ingenuo y del dualismo; dicha teoría implícita tiene los siguientes supuestos: "El conocimiento refleja el objeto con fidelidad, aunque con diversos grados de plenitud o exhaustividad. Hay conocimientos parciales y conocimientos completos. Se establece una relación directa entre unas condiciones (edad, motivación, contacto con el objeto, etc.) y los resultados del aprendizaje" (Pozo, 2000, p.9) Como se vera más adelante, dichas concepciones tienen trascendencia en la práctica docente, pues se ha encontrado que se vinculan, en el caso de esta docente, con el modo en que emplea los materiales educativos y con el tipo de contracto didáctico que establece.

El segundo aspecto a resaltar, es que hasta aquí, pareciera que lo anterior resulta congruente con lo que se menciona en los programas de la SEP (1993) acerca de enseñar las matemáticas con el planteamiento de problemas matemáticos. Sin embargo, en su concepción [C5AN-P2] se aprecia un planteamiento de problemas típicos de los maestros (Martínez y Gorgorio, 2004; Mendoza, 2004) que se ubican en la categoría de problemas de *transformación o cambio* (Vergnaud, 1991), en la que dada una medida inicial y ocurre una transformación de ella, se plantea a los niños y niñas que encuentren una medida o resultado final. Sin la aparición de otros tipos de problemas, que plantean situaciones más complejos y otro tipo de relaciones sus variables del problema, que lleven al niño a reflexionar y razonar de formas diferentes.

Sin embargo, más adelante se triangulan los tipos de problemas que llegan a aparecer durante las prácticas educativas, y de las que se tienen que revisar las filmaciones obtenidas.

En su concepción de la maestra acerca de si deben o no tener los niños alguna habilidad específica para aprender matemáticas, en especial para sumar, restar o solucionar problemas matemáticos, considera que todos pueden aprenderlas:

> "Yo digo que no, características, yo digo que todos los niños deben tener la mente abierta para poder aprender, por ejemplo, ahorita que vamos a empezar pues no, yo creo que todos pueden aprenderlas..." [C5AN-P3]

Destaca en su concepción para promover el aprendizaje en sus alumnos ella hace lo siguiente:

> "Pues involucrarlos, en el trabajo que están haciendo que trabajen en equipo, con material concreto..." [C5AN-P14]

Y para los niños que tienen dificultad para aprender las matemáticas la maestra cree que debe apoyárseles de la siguiente manera:

> "..Muy pasivos apáticos, vamos a apoyarlos con material, que les guste para que ellos se motiven y que les llame la atención, si no lo conocen cuando lo conozcan va a despertar su interés y a lo mejor les va a gustar más que las otras materias". [C5AN-P5]

En el discurso anterior se nota la importancia que da la maestra de utilizar materiales y también de realizar los trabajos en equipo. Dos estrategias que resultan importantes, la primera que ayuda al niño la comprensión de conceptos matemáticos, a través de un acercamiento mediante el uso de materiales concretos, la segunda que tiene que ver con el trabajo colaborativo que ayuda a un mejor desempeño con y entre sus compañeros, un punto importante que destaca la educación constructivista.

En este sentido, una investigación que realizaron Martínez y Gorgorió (2004) específicamente en sus concepciones para la enseñanza de la resta. Para los profesores la contextualización de la enseñanza de la resta debe hacerse a través del planteamiento y la resolución de problemas de enunciado escrito. Así, todas las situaciones propuestas por los profesores eran referidas a problemas de enunciado escrito y ejercicios numéricos, y que el planteamiento de problemas y de ejercicios a través de otras vías de representación (gráfica, con dibujos o de manera concreta) estaban ausentes.

Evaluación del aprendizaje

Finalmente, su concepción de la evaluación se desprende que los libros de la SEP son los materiales con los que se apoya la maestra para la evaluación. La maestra también considera otras características del alumno como es su participación en clase:

> "Con la guía. Podría ser los libros de la SEP, la participación del niño, creo que lo principal es la participación del niño" [C6AN-P1]

Acerca de la conducta del niño en el momento de evaluar sugiere que:

> "La conducta no, no la conducta no, sí son un poco latosos pero no tanto" [C6AN-P2]

Y acerca de otras formas de evaluar, un elemento más es considerado para la evaluación de los niños, la maestra Ana dice:

> "Sólo ésta, sus tareas y ya nada más" [C6AN-P3]

De acuerdo con lo que describe la maestra se puede ver que entiende la conducta como "buen comportamiento" no como aprender determinados comportamientos o un saber hacer respecto al conocimiento matemático. No considera posibilidades de evaluación auténtica, situaciones experienciales, de aplicación o transferencia del conocimiento matemático a problemas reales (Díaz-Barriga, 2006), más allá de los problemas rutinarios de lápiz y papel donde ejercitan algoritmos. Nótese también que sólo tiene una fuente de información y un instrumento único de evaluación, las tareas realizadas en casa. En un inicio afirma que no emplea exámenes en sentido estricto, sino resolución de ejercicios.

De acuerdo con la maestra, ella utiliza los resultados de la evaluación para:

> "Saber hasta dónde ha aprendido y si no ha aprendido regresarnos para ver otra vez el tema, hasta que el niño lo ubique"
> "Se les va a aplicar un pequeño ejercicio, pero no examen, para determinar qué conocimientos trae el niño, qué sabe y qué no sabe de matemáticas y a partir de ahí vamos a ver en adelante, la mayoría sí se sabe los números...no los conocen pero si los verbalizan" [C6AN-P4]

Sin embargo, concibe de la utilidad de la evaluación y de sus resultados para conocer los conocimientos con los que cuenta el niño y de ahí reforzar o en su caso avanzar a los otros conocimientos matemáticos. Lo anterior resultaría clave en la educación de las matemáticas siempre que se lleve a cabo durante la práctica.

La consideración de los tiempos de la evaluación también son contemplados dentro de las concepciones de los maestra, por lo que al preguntarle acerca de si tiene o no un momento para la evaluación ella dice:

> "Yo creo que se evalúan en todos los momentos, en todos momentos se está evaluando, en las tareas, en los trabajos " [C6AN-P5]

Aquí, se observa que hay en la maestra una concepción de evaluación formativa como valoración de avances y desempeño gradual del alumno, pero entra en contradicción con su visión de evaluación centrada sólo en lo sumativo, en las tareas, con el fin de otorgar una calificación. En este párrafo habla de una evaluación en "todos momentos", pero más adelante, dice "cada quince días", pareciera que se evalúa para obtener una calificación.

> "Cada quince días se evalúa al niño, de ahí se saca una calificación y después un porcentaje, y de ahí una calificación del bimestre, y de ahí se anota en la boleta" [C6AN-P6]

Sin embargo, al adentrarnos más en la entrevista con respecto a sí existen más formas de evaluación confirma cuáles y cómo se elabora, es entonces que aparece la figura del examen:

> "Sí, el bimestral, ese lo tenemos que desarrollar nosotros de todas las materias. Basándome en todas las características de los niños, pongo ejercicios que cuente cuántos carritos hay ahí, que ocho, entonces voy a poner ejercicios que pueda, no voy a poner cosas que no" [C6AN-P7]

En esta elaboración de los exámenes, también comenta que ella toma en consideración que los niños saben y además:

> "Que entienda el niño, ... que los motive, que les guste, que vea la prueba y que diga: ¡ahhh!, qué bonito está, ¡ahh!, que les llame la atención, desde que ven los muñequitos y desde ahí ya empiezan a resolverlo" [C6AN-P8]

Es evidente que la evaluación más importante, la bimestral, está planteada en los términos convencionales, una situación de examen de lápiz y papel, en la que ilusoriamente espera que por el hecho de ponerle "*muñequitos*" los niños se van a sentir motivados al resolver dicha prueba o van a comprender mejor los conceptos evaluados. No se observa por otro lado, que se vinculen las distintas materias del currículo, ni en la enseñanza ni en la evaluación.

Por último, al indagar al profesor acerca de cuál es la actitud de los estudiantes hacia la evaluación del área de las matemáticas responde:

> "... algunos están sí como con temor pero no, yo les digo que es un ejercicio, no les digo que es prueba de examen, les digo: ¡a ver, vamos a dibujar este niño, este cochecito, vamos a ponerles cuántos son y ya!, al niño se le quita el miedo, ya cada vez que hacemos examen de matemáticas como que les gustan más que las demás materias" [C6AN-P10]

El comentario es importante porque está consciente que desde el primer grado la situación de examen genera una fuerte tensión ("miedo") en los alumnos, por lo que ésta se tiene que disfrazar de "ejercicio". También es de notar que sigue enfatizando al conteo como el contenido curricular clave en este grado y materia.

En este contexto, también la evaluación masiva consume tiempo y dificultad para que la profesora califique, con la necesidad de proveer en la formación de los profesores de otros modos de evaluación, como pueden ser la evaluación por rúbricas o por portafolios, que puedan dar cuenta de del conocimiento que el niño ha logrado aprender, así como las dificultades que éste podría tener a nivel conceptual o procedimental (Díaz-Barriga, 2006).

> "Supuestamente es un día, y si no es mucho, lo que es mucho es para calificar". [C6AN-P11]

Como comentario final de la maestra, al preguntarle si sugiere algo o agrega algo a la entrevista refiere que:

> "No, no nadamás que es muy extensa la materia, y si nos gustaría saber nuevas formas de enseñar las matemáticas a los niños, a lo mejor estamos mal y si nos gustaría nos dijeran de algún método" [C6AN-P12]

Este comentario final, refirma la necesidad sentida del propio docente por una mejora del abordaje didáctico de esta materia en específico, y también nos habla de las dificultades de enseñar los diferentes contenidos, así como de la falta de otras estrategias o métodos de enseñanza.

En una apreciación general de la entrevista de la profesora, se encontró que aparecen algunas de las ideas de la "docencia del sentido común" que han sido documentadas por el grupo de investigación encabezado por Daniel Gil (1991, p.25), propia de las teorías implícitas de los profesores de materias científicas acerca de la enseñanza y el aprendizaje escolar:

- Una visión simplista de lo que es el conocimiento disciplinar que se enseña.
- La reducción del aprendizaje a ciertos conocimientos y a lo sumo, a ciertas destrezas, olvidando otros aspectos importantes.
- El asumir la obligación de cumplir el programa o seguir el libro de texto (en general enciclopédico) lo que termina siendo un obstáculo para profundizar en los temas o desarrollar habilidades.
- El carácter "natural" del fracaso generalizado de los alumnos en las materias científicas, el pensar que hay un determinismo biológico inmanente (alumnos listos y torpes) y sociológico (no se puede hacer nada o muy poco con los alumnos de medios socioeconómicos bajos o de familias desintegradas).
- La atribución de las actitudes negativas a la materia a factores exclusivamente externos, ignorando el papel que juega la enseñanza, la actitud y expectativas de los profesores hacia los alumnos, principalmente las propias.
- No ser consciente de cómo se aprende, de la necesidad de un conocimiento profundo de este tema y de la comprensión de lo que ocurre con sus alumnos.

- La idea de que enseñar es cuestión de experiencia, sentido común o de encontrar la receta adecuada (i.e. encontrar actividades y juegos que cumplan básica o exclusivamente la función de divertir o motivar a participar en su realización). Esto último impide muchas veces que los profesores tomen conciencia de la necesidad de un trabajo colectivo y de la apropiación crítica de una concepción teórica que articule planteamientos didácticos congruentes y apropiados.

6. 4. 2 Análisis de las categorías de la entrevista aplicada al maestro de segundo grado.

Formación previa e interés en la didáctica de la materia

El maestro Mario, que imparte el segundo grado, nació en la ciudad de Monterrey, actualmente tiene 25 años de edad. En cuanto a su formación profesional, estudió la normal básica, ha trabajado en educación primaria durante dos años y tres meses, por las mañanas se dedica a enseñar al grupo de segundo grado, y por las tardes estudia una licenciatura en educación secundaria con la especialidad de matemáticas, sin realizar otra actividad profesional o de otro tipo.

Nuevamente, semejante al caso de la maestra Ana en su concepción de la formación profesional, el maestro Mario considera que ha sido influido sobre todo por la experiencia de su propia etapa infantil o por la actuación de sus maestros. También considera que su formación profesional en la enseñanza de las matemáticas inició desde la primaria, y de manera formal a partir de cómo les enseñaron a impartir las materias, aún cuando no fue específicamente para la enseñanza de las matemáticas.

Al entrevistarlo acerca de si se basa en alguna corriente teórica o teoría en específico para abordar la enseñanza de las matemáticas respondió:

> "De hecho nuestra formación especifica en lo que es la enseñanza se basó en…bueno hay muchos métodos, desafortunadamente la formación del magisterio…lo que es la programación de los pasos a seguir, de lo que son metodologías, los maestros por tiempos o por x razón no nos muestran al pie de letra cómo usar o si funcionan bien los métodos, *realmente lo que uno toma son las ideas de los maestros que ya tienen experiencias en el ramo, y con base de ellos nos vamos adaptando a las estrategias que ellos toman. De hecho corrientes, corrientes algunas que existan no*"... [C1MA-P1]

De acuerdo con la que menciona el maestro, también se observa la carencia de fundamentos teóricos claros para la enseñanza de las matemáticas [C1MA-P1]. Se aprecia que su formación profesional, al igual que la maestra Ana, se encuentra más relacionada con una formación durante la práctica, basada en su propia experiencia y a su historia personal, situaciones semejantes a otras investigaciones (Monroy, 1998; Llinares y Sánchez, 1990), y en este caso basado en la experiencia de otros profesores. En este caso habría que destacar, además de lo ya acotado para el caso de la profesora anterior, que resalta el hecho de la carencia de una visión de didáctica específica con bases teórico-metodológicas en un docente que se está formando profesionalmente en la enseñanza de las matemáticas.

Nuevamente, se apelaría a las observaciones de Imbernón (1994) y Perrenoud (2004) sobre la importancia que reviste la apropiación significativa y reflexiva de las teorías pedagógicas y del aprendizaje vinculadas con lo que uno enseña. Como ya antes vimos, Gil (1991) ha establecido que es indispensable que los profesores logren superar las ideas de sentido común sobre la enseñanza y el aprendizaje, y que una docencia de calidad y orientada a la construcción del conocimiento, no puede lograrse si no se parte tanto de una crítica fundamentada a la enseñanza habitual como de la adquisición de conocimientos teóricos pertinentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la materia que se enseña.

Por lo que surge como interrogante central cómo puede verse afectado el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, cuando los profesores no tienen claridad sobre las teorías o métodos para la enseñanza de las matemáticas. El problema es más complejo cuando enfrentamos la fuerte demanda que el currículo plantea a los profesores: una orientación didáctica centrada en el aprendizaje del alumno con bases constructivistas, y en el caso de esta materia, fincada en el aprendizaje basado en la solución de problemas inspirada en la didáctica de la escuela francesa (v. los dos primeros capítulos de esta tesis).

Concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas

En cuanto a la importancia de las matemáticas con respecto a otras materias, este docente considera a las matemáticas tan importantes como la materia de español que se orienta a la función de la comunicación, en tanto que las matemáticas están orientadas hacia la interpretación y la solución de problemas matemáticos [C2MA-P1]. Esta última parte se relaciona de manera general, con lo que propone el currículo de la SEP (1993), donde se enfatiza el interés porque los niños desarrollen habilidades de solución de problemas.

> "Creo que su importancia es tan relevante como el español, sobre todo porque las matemáticas están implícitas en todas las actividades, desde muy chiquitos ellos tienen que contar, sus juguetes, canicas…sus cositas, de una manera no convencional ellos están aprendiendo matemáticas y las aplican en todo momento. A nivel mundial en todas las materias y carreras las matemáticas están implícitas, lo cual implica una gran relevancia en cuanto su estudio porque de eso va a determinar el gran desarrollo del matemático en todo lo que se dedica…" [C2MA-P1]
> "...el español tiene que ver con todo lo que es comunicación, pero las matemáticas tienen que ver con la interpretación y la decisión de problemas que requieren un resultado numérico…"[C2MA-P2]

En este contexto, en su concepción de los tipos de aprendizajes que se buscan en el niño se observa, la intención por que el niño aprenda la solución de problemas matemáticos, como un conocimiento capaz de ser aplicado en la vida cotidiana, como el manejo del dinero en operaciones de compra y venta [C2MA-P3].

> "...es digamos un aprendizaje significativo y práctico, la importancia que ellos aprendan, de cual es la utilidad que ellos puedan encontrarles, su aspecto vivencial, para que ellos puedan resolver todo tipo de problemas que se le presenten como ir a la tienda, comprar un dulce. Comprender cuánto le

> van a dar de cambio, lo que le van a cobrar y en relación con el costo de lo que él adquirió. Entonces en ese sentido todo lo que aprenda de matemáticas debe ser un aprendizaje significativo y tenaz" [C2MA-P3].

En cuanto, a su concepción de la principal problemática en la enseñanza de las matemáticas se observa [C2MA-P4], en coincidencia con la profesora del primer grado, que una de las grandes preocupaciones de la educación en matemáticas, en este caso el aprendizaje basado más en la memorización y en el entrenamiento de las operaciones más a nivel del simple algoritmo que con su relación con la parte conceptual (Mendoza, 2004).

> "La problemática en las matemáticas es el razonamiento, muchos niños entienden números, saben interpretar números. Niños de sexto año saben lo que es una suma, lo que es una resta, lo que es una multiplicación pero lo saben de una manera mecánica, lo que no entienden es que la multiplicación es una suma abstracta, y que la suma es un desarrollo de una multiplicación, es lo que ellos no han entendido, no tienen ese razonamiento, no saben interpretar un problema. Cuando se les plantea un problema lo que ellos preguntan: _¿maestro es suma?, ¿maestro es resta?, ¿es división? La problemática mundial de la desventaja de esta materia es simplemente el razonamiento, todo lo que ellos aprenden es de manera mecánica, primero multiplicas esto, luego esto el otro, lo hacen de manera memorística – mecánica." [C2MA-P4]

De alguna forma, el profesor trata de aproximarse, a la concepción de la dificultad de la enseñanza con relación a la comprensión de los principios del conocimiento numérico. A los principios del número con relación al sistema decimal, describe la problemática del aprendizaje y comprensión de los principios del valor posicional, del tamaño de las unidades y de composición aditiva, entre algunos, aplicados al concepto y algoritmo de la resta.

> "El aprendizaje…digamos que el problema de las matemáticas es el razonamiento, pero en cuanto a que es su aprendizaje a nivel primaria lo que les cuesta mucho trabajo es que no saben relacionar el número con la realidad que representa, no es que sean todos pero hay quienes les cuesta identificar un número y ese número relacionarlo a la vez con la cantidad que están esperando. Otro problema del aprendizaje y que les cuesta mucha dificultad, es entender lo que es una decena y que es una unidad y las ubicaciones que tienen cada número y óomo afecta la posición que tiene con respecto a otro. Un dos al inicio es un dos, pero si ese dos lo recorro un espacio hacia la izquierda no entienden que ese dos ya no es dos, sino que es un veinte ese proceso de asimilación...de cardinalidad. Es lo que les cuesta mucho trabajo" [C2MA-P5]

Finalmente y de manera muy importante considera como problema más grave la forma en cómo se da la instrucción y su vez el entendimiento del alumno:

> "…el problema más grave de las matemáticas es la forma como se imparte y como el niño lo aprecia, no todos tienen la facilidad para explicar, lo cual impide el asimilamiento matemático…" [C2MA-P6]

En sus concepciones se aproxima a las dificultades que implica el sistema decimal y su aplicación y entendimiento de los algoritmos. Esta concepción resulta importante, pues contribuye a puntualizar la necesidad de atender las dificultades que pueden estar enfrentando con estos conocimientos matemáticos tanto el niño cuando los aprende, como también las dificultades que podría estar enfrentando el profesor al enseñar.

Concepciones acerca del alumno, de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas

El maestro Mario cree que la capacidad del niño para aprender matemáticas, depende de la actitud y de la forma de enseñanza de los profesores así como del grado. Considera las concepciones de los maestros de las matemáticas como "difíciles" pues afectan el aprendizaje de los niños porque desarrollan una actitud negativa. A mayor grado, será mayor la dificultad del niño por el tipo de conocimientos más complejos. También considera importante la forma en la que el profesor enseña, siendo más difíciles cuando el aprendizaje es de tipo mecánico, memorístico, dirigido y complicado. Nótese que piensa que en los dos primeros grados no se trata como tales a las matemáticas y no se les dice a los niños que están estudiando dicha materia, porque cuando esto se hace, se vuelve "aversivo" y difícil.

> "A nivel primaria, en primero y segundo año, no lo ven como algo fastidioso, aversivo porque no se les trata como tales matemáticas, bueno dependiendo también del maestro porque hay maestros que de lleno están diciendo ¡esto es matemáticas, échenle ganas porque es difícil!, cuando el maestro empieza a decir esto, ¡es difícil!, ¡pongan mucha atención! ó ¡esto se hace bien!, lo que está enseñando es un a predisposición a que el niño este como en contra de las matemáticas. Yo pienso que en las matemáticas empieza a haber un choque con el niño en cuarto año, porque entran en un proceso más complicado porque ven fracciones, diferentes tipos de fracciones, multiplicaciones, divisiones con el punto decimal, y toda la serie de actividades que conlleva a eso las conversiones,..... La forma que un maestro las da: muy mecánico, muy dirigido, muy memorístico y muy complicado, hay maestros que en la primaria las hacen enredadas, cuando en realidad debe hacerse de la forma más sencilla posible" [C3MA-P1].

Esta reflexión es importante porque, a diferencia de la profesora de primer grado, este docente articula en su concepción del cómo se aprende y cómo se enseña factores vinculados entre sí que se relacionan con el sujeto que aprende, el agente educativo y los contenidos a aprender. Concibe el aprendizaje en términos de procesos que van aumentando en número y complejidad (cognitivos, motivacionales, didácticos, etc.). De acuerdo con lo que se ha reportado de los estudios de Pozo (2000) sobre las teorías implícitas de los profesores, logra superar en parte la teoría directa de la enseñanza para incursionar en lo que el autor llama teoría *interpretativa*, puesto que tiene una visión más plural de los factores involucrados y un enfoque realista interpretativo. No obstante, también llegan a aparecer, aunque en menor medida, los rasgos de la docencia del sentido común documentados por Gil et al. como se vera más adelante.

Cree que no hay ese “choque” en su grupo, porque considera que los niños ven el aprendizaje de las matemáticas como algo divertido, y se involucran en actividades de tipo “vivencial” y que pueden serles útiles.

> “Mi grupo, con lo de las matemáticas no tienen ningún choque, porque lo ven como algo divertido, se parte de algo que pueden necesitar. Por ejemplo el medir, el medir es matemático y me está gustando porque saben que se puede medir por ejemplo su estatura, cuánto mide su zapato, o su muñeca o su cuarto, su mesita cuánto mide, o su libreta cuánto mide, están aprendiendo matemáticas pero de algo que ellos están viviendo, algo que ellos viven. Cuando se hace de esta forma las matemáticas no son aversivas sino se acogen con agrado porque saben que nos está siendo útil y están partiendo de algo que yo vivo y que yo utilizo” [C3MA-P2].

El maestro Mario destaca como características de los alumnos a los que se les facilita aprender: que son maduros a nivel cognitivo, el papel cultural, económico y social de los padres, el tipo de relación que mantienen entre los padres, el propio interés por sus hijos. Al igual que la profesora de primero que cree que los niños que aprenden matemáticas vienen de familias “integradas”, este profesor afirma que “tienen padres unidos”; también apela a un cierto determinismo biológico. En las siguientes concepciones del profesor destacan aspectos biológicos y genéticos, la ubicación o tipo del área geográfica donde viven, siendo desfavorable el aprendizaje matemático cuando los padres tienen pocos estudios, provienen de lugares rurales, el ambiente de estimulación es pobre, etc. Vuelve aparecer la idea de que los mejores alumnos son más activos e inquietos, “más preguntones”. No obstante, el profesor llega a cuestionarse el determinismo subyacente a estas concepciones cuando relata el caso de un alumno “aplicado” que sigue “normal” aunque sus padres se hayan separado.

> **“**Depende mucho de la forma o del desarrollo del niño, hay niños que su desarrollo es más rápido por lo tanto en su madurez cognitiva sería más avanzada, más sociables. Padres que estudian, que leen, que viven especialmente con el, que platican, que se lo hacen, que le despierten el interés por hacer las cosas, que lo motivan y que se lo premian cuando hay un acierto, que lo sancionan cuando hay una conducta negativa, eso tiene que ver demasiado cuando a un niño lo estimulan, su desarrollo cognitivo es superior a aquel que esta totalmente apartado de la familia que lo ven como hijo pero que no le dan atención que debe ser, yo considero que eso también influye demasiado. *Los niños que tienen una habilidad matemática regularmente son aquellos que trabajan con los padres…*en las tardes llegan repasan, los incentivan a que participen, que hablen en su casa, que comenten lo que les pasa…”[C3MA-P3]

> “…además, *tiene que ver mucho la parte genética*, por ejemplo tengo aquí niños que su mamá no sabe leer, su abuelita no sabe leer, mamá que vive sola, papás que viven solos por lo tanto los tienen descuidados, además tengo niñas que su nivel económico, su estrato social está en una norma media, y tengo niños, con papás o mamás que vienen de una comunidad rural. Los que vienen de una comunidad rural les está costando más trabajo aprender a adaptarse, más trabajo captar lo que acá se está mostrando mientras los que vienen del medio urbano tienen mayor facilidad, porque están en contacto con muchas cosas, están más despiertos y por lo tanto su cognitividad es más avanzada...” [C3MA-P4]

> “*Los que tienen un mayor avance en matemáticas, son más educados*, un poquito más educados, más dedicados a sus estudios, más cuidadosos…les llama la atención todo: -¿qué haces maestro, o para qué lo haces? Son muy preguntones, muy interrogativos de lo que a ellos les interesa, están mas motivados... de hecho no sé que tanto pueda afectar la separación de la familia, porque tengo un niño que su familia se separó apenas, a lo mejor la forma como se lo manejan influyen demasiado porque no le afectó, él sigue normal, no ha bajado en su rendimiento pero lo que yo en sí veo es una mayor educación a los hijos, son más observadores, son como que más analíticos, son más preguntones respecto a lo que uno hace…”[C3MA-P5]

Y en cuanto a los niños con dificultad para aprender matemáticas:

> “Los otros niños que no tienen la habilidad desarrollada, son así como lo que uno hace les da igual, no preguntan, regularmente lo que a ellos les interesa es platicar, o hacer otras cosas como pintar, jugar, pararse, los que se la pasan parados, que nomás andan de allá hacia acá por minutos es menor porque esa distracción que ellos tienen impiden que ellos puedan acumular correctamente lo que uno trabaja, es lo que a diferencia de los demás que están un poquito más atentos, eso hace que su procesamiento mental sea más rápido porque está captando toda la información que se está trabajando…”[C3MA-P6]

A partir de los diálogos anteriores se puede observar una asociación del maestro de los rasgos de comportamiento o de personalidad de los niños con su facilidad o dificultad para aprender matemáticas, los niños que platican, juegan o están parados tendrán dificultad para aprender contrario a los que se muestran más atentos e inquisitivos y que son niños “educados”. En este contexto, el profesor señala características de los alumnos y diversos factores que ciertamente podrían afectar el aprendizaje de los niños sin ser del todo determinantes. Esta concepción muestra las dificultades diversas y complejas que puede encontrar como docente durante su misión de educar, sin embargo su papel en la educación sigue siendo fundamental, por lo que resulta importante revisar más adelante sus concepciones acerca de cómo o en qué estrategias se apoya para enseñar y atender las diferencias de sus alumnos cuando aprenden.

Con respecto a los contenidos o unidades de las matemáticas que más se les complican a los alumnos, el profesor cree que son:

> "El problema de las matemáticas, *lo que les cuesta mucho trabajo son las unidades y centenas y la posición del número y el valor que adquiere*, esa es la parte que les cuesta más trabajo. Hablando con otros maestros es muy similar, la posición del número es lo que les cuesta más trabajo y entender el sistema métrico decimal, precisamente se va de 10, 20, 30, 40, 50, precisamente porque de hecho solamente manejamos seis números... y si la mayor problemática esta en la posición del número y la agrupación en decenas y centenas" [C3MA-P7]

El maestro Mario concibe que la principal problemática, en sus alumnos de segundo grado, se enfoca en el sistema decimal de numeración, con relación al principio de valor posicional y de composición aditiva. Concepción que se relaciona con los resultados de la investigación de Cortina (1997) que señala este conocimiento es una dificultad importante que enfrenta la población infantil en México y otros países, con relación a la comprensión del concepto y operatividad específicamente del valor posicional, que se espera concreticen en cuarto grado (Garcia, 2002).

Contenidos específicos y aprendizajes más importantes en relación con la suma, la resta y la solución de problemas aditivos

El maestro entiende que el niño debe adquirir los siguientes conocimientos con relación a la suma y la resta:

> "Básicamente para que el niño pueda comprender la suma la resta, es importante que el niño logre *entender el valor posicional de cada número*, si el niño no sabe que un uno puede representar a la vez una unidad y a la vez una decena se le va a dificultar, puesto que no va a entender que dos unos solitos significa un once. Debe entender el valor posicional que se les está dando, debe identificar cuál es la decena, cuál es la centena y cuál es la unidad para que partiendo de ello, pueda decir si tenemos una resta, once más nueve … perdón por ejemplo en una resta si decimos once menos nueve él tal vez va a pensar que a uno no le puedo quitar nueve, lo que si debe entender es que el numero que esta a su lado izquierdo, en este caso estamos hablando de un once, se esta dando un valor mayor de esos dos unos en comparación con el nueve, y si el niño no comprende que ese valor posicional es tan importante se le va a dificultar la resta y la suma, al menos aquí debemos trabajar la parte de la reflexión, del análisis, porque el niño tiene que comprender en los casos de las situaciones que se les presente cuando tiene que ser suma, cuando tiene que ser resta" [C4MA-P1].

De acuerdo con el párrafo anterior, se observa que el maestro concibe que el principal conocimiento para la adquisición de la suma y la resta es el principio del valor posicional, con relación al sistema decimal. Como se vio en el apartado de resultados del aprendizaje de los niños, hay coincidencia con las dificultades reales que muestran los alumnos. También se observa su preocupación por que el niño desarrolle habilidades cognoscitivas como son la reflexión y el análisis con relación a estos conocimientos. Sin embargo, parece dar por sentado que previamente los niños ya manejan el conocimiento del conteo y la numeración.

> "Primero *debemos partir de que el niño identifique lo que es el valor posicional,* unidad decena y centena, en este caso en el segundo que abarca la parte de las centenas, necesitamos sentarnos a trabajar con ellos, si él ya entendió esa parte de unidad, decena y centena, si ya él comprendió que los números adquieren un valor de acuerdo a la posición donde están, digamos lo más sencillo la decena, centena que es lo mas común que se maneja en este nivel, vamos a trabajar de uno en uno, posteriormente *el análisis en una situación problemática*. Por ejemplo si le digo: ¡si vas al cine te compras un helado unas palomitas, un refresco, qué tienes que hacer para saber cuánto te gastaste. Si él ya analizó y comprendió que gastar y gastar es un acumulamiento de cantidades, entonces el va a entender que si es un acumulamiento entonces es una suma, porque se van haciendo más y más cosas. También debe entender, en ese mismo sentido, que si llevo 50 pesos y que gaste en unas palomitas, en un helado, y un refresco, entonces si me estoy gastando quiere decir que le estoy quitando y al estar quitando el lo va asimilando con una resta, del dinero que llevaba y lo que se gastó, pero también de lo que fue comprando, de tantas cosas fue el acumulamiento de ese gasto, cuando él ya entiende ese análisis la suma y la resta es mas fácil mientras el no entienda que sumar es agregar cosas y restar es sustraer cosas no es posible que él logre aprender a hacer la suma y la resta,… más aún si ve que tiene utilidad le va a poner mayor interés pero si él ve que es mecánico de aprender por aprender no es posible que él puede asimilar tan pronto la suma y la resta [C4MA-P2].

De acuerdo con el diálogo anterior, el maestro concibe que además de trabajar con la comprensión del valor posicional de los números, también es importante trabajar aspectos conceptuales, más que de procedimientos mecánicos. Afirma que hay que enseñar la suma y la resta, más a nivel de comprensión conceptual y con base a las tendencias teóricas de la enseñanza de las matemáticas (aunque nunca precisa cuáles), y que es importante centrar la instrucción en la solución de problemas matemáticos.

En sus concepciones acerca de la importancia del conocimiento del sistema decimal, se centra más en el entendimiento por parte del niño del principio del valor posicional y de la composición aditiva, señalando la agrupación de unidades de menor valor a unidades de mayor valor, se observa que enfatiza más el conocimiento del sistema decimal con la suma y prácticamente lo relaciona poco con la resta. Además, concibe que estos conocimientos deben de ser enseñados en los últimos tres grados de educación primaria. Nótese que la argumentación gira en torno a la observación de los procesos de aprendizaje de los contenidos en sus alumnos, así como en torno a las dificultades que éstos encuentran en la comprensión:

> "…la importancia probablemente es de que a los niños se les menciona, ya en cuarto , quinto o sexto año, donde se supone debe tener un mayor reflexión, una mayor comprensión y entendimiento, nuestro sistema decimal es de base diez, okey es de diez pero por qué, pero en qué nos basamos para decir que es de base diez, yo nomás hablo que es de diez…es muy importante (levanta las cejas, la mirada y se lleva la mano para rascarse la frente) que el niño a esa edad comprenda que si yo tengo diez unidades no las puedo tener en ese orden porque ese orden es de orden inferior y no puedo acumular diez cosas como unidades porque esas diez cosas pasan a siguiente orden que son decenas, el niño debe comprender que por cada diez cosas de unidades puedo pasar a las decenas, por cada diez cosas que tengo de decenas puedo pasar a las centenas, cuando entiende ese sentido es cuando va entendiendo porque mi sistema de numeración es de base diez. Cuando el niño entiende y comprende ese aspecto va asimilando implícitamente que es el valor posicional, en este sentido ahí radica la importancia de que el niño conozca el sistema de numeración, como es que se van dando las agrupaciones y porque se van cambiando a órdenes superiores, o por queé no se puede ascender a un orden superior cuando un número es de menor cantidad, ese es de menor nivel. De hecho muchos niños ya pueden comprender que si tengo diez cosas puedo pasarlos a un orden superior, desde luego no los manejo desde un orden superior, los manejamos desde unidades, ¡si tengo diez unidades por qué las puedo cambiar, aaah¡ por una decena, ¡si tengo diez decenas, ahhh, por una centena! Hay quienes ya asimilaron ese proceso pero aún no se les menciona tan específicamente los sistemas de base diez, sino que yo lo voy asimilando primero para que después pueda explicarles: se acuerdan cuando se cambiaban de diez en diez, y en base a ese recuerdo poder decirles por eso nuestro sistema decimal se llama base diez porque tiene como base el número diez" [C4MA-P3].

En el mismo tenor habla de la importancia de enseñar a solucionar problemas aditivos, aunque el énfasis recae en la aplicación funcional de este conocimiento en operaciones de compraventa, de manera similar a docente de primer grado; en su caso, piensa además que el niño podrá defenderse de que le roben su dinero:

> "La importancia es mucha no vamos tan lejos, los niños en la escuela traen su dinerito se compran un boing (jugo), unos cacahuates, palomitas y si el niño no sabe hacer su suma, ni su resta, aquí viene la dificultad el niño va a ser propenso constantemente a que le roben su dinerito si el no se da cuenta de esto. Por ejemplo si entrega una moneda de diez y se compra unas palomitas que valen 3 pesos y le dan 5 pesos el se va a quedar contento, puesto que no tiene la noción de que entregó más dinero de lo que está comprando el producto. En este aspecto si el no sabe eso su dinero constantemente se lo van a estar quitando y sin que él se de cuenta [mira fijamente y mueve la cabeza afirmativamente]. Pero si él sabe asimilar, si ya comprendió la suma y la resta se va a poder defender más y va a ser menos frágil de que le estén quitando o robando su dinero de manera mal intencionada.." [C4MA-P4]

> “Repercute mucho, por que a niveles mayores como es tercero y cuarto... hay problemas que son realmente muy sencillos y si el niño no conoce la suma y la resta, se le va complicar un poquito más porque hay operaciones donde se requiere resolver hasta de 3 o 4 operaciones a la misma vez, en un solo problema...posteriormente las cantidades se van haciendo un poquito más grandes, es decir se van pasando a ordenes superiores: 4000, 5000, 10000 pesos, es la unidad, decena, centena, es la centena de millar, si es una cantidad más elevada ...si el niño no ha sumado esas cantidades, se le va a dificultar más, mucho más. Porque si con los sencillitos no puede asimilarlos, con los grandes va a decir cómo le hago, va a ser tremendo [termina, el maestro muestra esfuerzo y se lleva manos a la cara] [C4MA-P5].

Con base al argumento anterior, el maestro considera la utilidad del conocimiento de la suma y la resta para la solución de otros problemas que impliquen el uso de más que una sola operación en un problema, y en el uso de cantidades que impliquen hasta siete o más dígitos. También relaciona estos conocimientos con el empleo del sistema de numeración decimal. Sin embargo, no aparece la relación de estos conocimientos como base para la comprensión de otros conocimientos más complejos como son la multiplicación y la división (Wadsworth, 1991; Nunes y Bryant, 1997).

Métodos y estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos

En cuanto a sus estrategias para la enseñanza de las matemáticas, es interesante notar que apela a actividades experienciales cercanas a su vida cotidiana y la idea de que la motivación no sólo está dada por la actividad lúdica en sí, sino que también influye si el niño está sintiendo o no que aprende, si el resultado de la actividad es exitoso o no en términos de lo que se ha logrado aprender (lo que los psicólogos llamamos motivación de logro y de control). Asimismo, Mario utiliza el planteamiento de problemas con la simulación de “la tiendita”, postura que coincide con el punto de vista de Carraher et al. (1991) quienes señalan la importancia de proponer a los alumnos situaciones cotidianas como contexto para la enseñanza de las matemáticas; y en este caso vinculadas con el juego, donde los niños interactúan unos con otros:

> “Dependiendo cuál sea la actividad, en primer año utilicé con ellos una parte de la tiendita. Unos niños representaban a los personajes del comprador y otros la parte del vendedor, cuando el niño se acerca a la tienda dice: ¡Quiero un boing y unas sabritas. Anticipadamente es necesario que ellos traigan unos sobres de unos productos: colgate, boing, sabritas, palomitas, etc., todo lo que pueden. En grupo ponen los precios, ¿cuánto cuesta el boing? ¡Dos pesos!, ¿las sabritas? ¡3 pesos!... Cuando el niño el niño se da cuenta de que estamos retomando cosas de lo que é quiere se motiva más. Después de eso vemos quién va a vender y quién a comprar, después se trabaja la parte de las monedas y los billetes de su libro recortable, se recorta y se les reparte su dinero a cada uno, y los vendedores también tienen su dinero y su cambio.
> Cuando se da esa interacción nos damos cuenta de quién sí ha comprendido lo que es una suma y una resta y si han comprendido la importancia que tiene,

porque muchos de los niños sólo juegan por jugar y quienes sí le dan la importancia, desde luego la intención es jugar. Pero por ejemplo, ¡te di 10 pesos y el jugo vale 2, me debes cambio!, y ahí también nos damos cuenta que también va implícito la suma y la resta, y tanto el comprador como el vendedor tienen que sumar como restar, es una forma de motivarlos. Nos apoyamos en este tipo de material del externo que ellos pueden traer, o planteamos problemas de su vida diaria, ir al cine, ir a la feria, ir a la tienda, que si vas a una fiesta, de viaje, los niños también van de viaje.. Hay quienes por la dificultad de no asimilar el concepto de número, de unidad, de decena hay veces que no se concentran, porque muchas veces no se motivan, no porque la clase no sea motivante, sino porque no saben lo que sé esta haciendo y digo: ¡oye estuvo motivante!, ¿y tú por qué no?" porque no es que el problema no sea motivante, sino que el niño no está motivado porque no está aprendiendo o simplemente no tiene el conocimiento, porque todos aquéllos que tienen el conocimiento se motivan cuando leen algo, está motivado por lo que sabe y aquél que no sabe el contenido y aún cuando quiera motivarse puede hacerlo pero no lo puede lograr" [C5MA-P1]

Sin embargo, al igual que en la maestra Ana, en el discurso del maestro se plantea únicamente un tipo de problemas típicos (Martínez y Gorgorio, 2004) que se ubican en la categoría de problemas de transformación (Vergnaud, 1991), sin plantear otros, con diferentes niveles de complejidad. Pero a diferencia de la profesora de primer grado, aunque el profesor destaca la importancia del juego y el poder motivacional de las actividades lúdicas, es consciente de que la cuestión no es jugar por jugar, sino que la meta es el aprendizaje con comprensión de los conceptos matemáticos implicados. Se observa de igual forma el uso de otros recursos, como: materiales de reciclaje, dinero de juguete, así como el empleo de su libro recortable, estrategia que enriquece el ambiente y el contexto en el que se plantean y solucionan problemas.

Específicamente dentro de las estrategias que el maestro utiliza para promover el aprendizaje de las matemáticas con los niños que tienen dificultades en esta materia considera lo siguiente:

"A los niños que se les dificulta, cuando hacemos una actividad, me dedico a él, estoy más enfocado con esos niños; con quienes ya saben los dejo solos para que vayan enriqueciendo más de lo que ya aprendieron, pero aquellos que no, sí me acerco a ellos cuando se da la oportunidad y trabajo de manera individual o sino en las misma actividad yo intervengo. La mejor manera para apoyarlo es este aspecto es la atención individualizada. Si se presta también, si hay alguien con las mismas características en ese nivel se trabaja con los dos al mismo tiempo para que los dos se vayan ayudando. Y desde luego las clases se preparan considerándolos a ellos y desde luego en su defecto pero también considerando a los demás. O sea es muy difícil adaptar una clase considerando a todos, si es posible hacerlo, pero es un poco difícil"[C5MA-P2].

Dentro de sus estrategias dice recurrir principalmente a trabajar con los niños con dificultades de manera individual o personalizada, dar más tiempo y atención, utilizar materiales, trabajar con niños con las mismas características de dificultad y adaptar las clases, sin embargo considera que esto resulta más difícil, por los niños que sí han entendido el conocimiento que se trabaja.

En la concepción del maestro Mario acerca de si los niños y niñas tienen o desarrollan alguna habilidad específica para aprender matemáticas, en especial para sumar, restar o solucionar problemas matemáticos, nuevamente aparece la idea de la influencia de los padres. Nótese que en algún momento se confunden las "condiciones genéticas" con el nivel de instrucción o escolaridad de los padres:

> "Yo creo que la relación con los padres, eso influye demasiado, es importante la relación que se tiene con ellos, hay padres, que llega el niño a su casa y lo hacen al ir y al venir de su vida cotidiana...lo llevan a la tienda, le dicen: ¡cómprate un dulce, a ver cuánto te cuesta, fíjate bien cuánto te están dando!, y hay quienes... simplemente, si les dejan problemas, lo único que hacen es resolvérselo, y cuando los niños llegan aquí, yo les pregunto: ¿a ver cómo le hiciste?, se quedan callados...¿cómo le hiciste? (sube tono de voz), ¿quién te los hizo?", se quedan callados y no responden, cuando se quedan callados, es una clara señal (se muestra un tanto molesto) de que la mamá, el papá, el tío, el primo, el cuñado les hizo la tarea y en ese sentido tiene que ver la parte de la relación familiar, pero también tiene que ver la genética.
> Quizás algún niño no puede estar tan motivado y no tener tanta instrucción, pero la genética tiene que ver mucho en su desarrollo y su aprendizaje, hay niños que son superinteligentes, además de que los padres quizás los dos pueden saber leer y escribir, los dos pueden saber sumar y restar, multiplicar y dividir o hacer todas las demás operaciones y se los están transmitiendo a ellos; parte de la genética se trasmite a los hijos. *Si el padre es superinteligente y la madre también es superinteligente es muy probable casi al cien, que los niños tengan las mismas características de saber asimilar las cosas con mayor rapidez y viceversa.* Digamos de aquellos padres que en primera ambos no fueron a la escuela y en aquellos dónde sus antecedentes académicos no fueron tan eficientes, el niño también tiene esa probabilidad de no serlo, por las condiciones genéticas que se están dando en ellos." [C5MA-P3]

En este sentido, más allá de lo que se ha comentado respecto a la coincidencia con los hallazgos de Gil (ob. cit.) resulta importante poder diseñar programas para trabajar el cambio conceptual de estas de concepciones del sentido común en el docente (Thompson, 1992; Martínez; 2004) con la intención tanto de cambiar sus concepciones como de mejorar sus prácticas educativas.

En cuanto a sí utiliza algún material didáctico en específico para la enseñanza de la suma, la resta, y la solución de problemas aditivos considera lo siguiente:

> "Material didáctico sí tenemos, se adapta todo a las condiciones del grupo, no hay material suficiente, si falta material, aquí en caso de la suma y la resta había la necesidad de utilizar billetitos, que antes había de los didácticos, yo he tratado de conseguirlos no los he podido encontrar, aquí la cuestión es que

> luego se les pide a los niños, pero no los han podido encontrar...aquí la cuestión del asunto es que no todos los niños lo pueden traer, hay quienes no lo encontraron, no lo pudieron comprar y eso también les puede crear dificultades, entonces lo que se hace con esos niños es trabajar con el material que tenemos: rondanitas, fichas, papeles, de todo tipo" [C5MA-P4].

Dentro del uso del material destaca la falta de material suficiente, así como necesidad del uso de dinero de juguete para la enseñanza de la suma y la resta, sin embargo, el maestro Mario considera que se adapta el material que se tiene dentro del salón como: rondanitas, fichas, papeles, entre otros. Esta concepción ilustra el ingenio del profesor por tratar de adaptar y de utilizar eficientemente el material con el que les es posible contar y utilizar. De igual forma, expresa las condiciones precarias en su clase, así como de la creatividad del maestro para intentar los "mejores" resultados.

En cuanto al uso de otros textos, sólo emplea los permitidos por la SEP (avance programático y libros de texto), además de que cree que la posición económica de los padres no se los permitiría:

> "No, los únicos libros son obviamente nuestro avance programático y nuestros libros de texto, y en libros adicionales no se utiliza porque en un circular que se nos dio, nos prohíbe rotundamente utilizar libros extras, a menos que los padres estén de acuerdo y se tenga una justificación bastante fuerte, además de que mayoría de los padres son de escasos recursos" [C5MA-P5]

Evaluación del aprendizaje

Con respecto a la concepción del maestro acerca de su forma de evaluar el aprendizaje de las matemáticas considera lo siguiente:

> "La evaluación que nosotros hacemos es constante, es evaluación cuantitativa y cualitativa a final de cuentas siempre va a afectar en un número. La importancia de la evaluación cualitativa es con la finalidad de entender cuál es el nivel de comprensión que hasta el momento tienen los niños, bien para reconocer en qué puedo ayudar, en qué no puedo ayudar, en qué estoy fallando, en qué están fallando, es lo importante de la evaluación; la evaluación es diaria, continua, no puede ser un día sí, un día no, lo importante de la evaluación en matemáticas es ver cómo lo esta comprendiendo y cómo lo puedo ayudar. Es a través de la observación del alumno, de los exámenes, también de la evaluación de los ejercicios" [C6MA-P1].

De acuerdo con la concepción del maestro, su evaluación cualitativa consiste en tratar de entender el nivel de comprensión de los niños para después poderles ayudar centrándose en una evaluación formativa, pero al final esto necesariamente se reflejará en una calificación numérica, dada la importancia de la evaluación sumativa. Para el profesor la evaluación la realiza a diario, mediante la observación, aplicación de exámenes bimestrales y evaluación de ejercicios. Es importante destacar que la función principal que atribuye a la evaluación se enfoca a la comprensión y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje; también destaca la idea de que no sólo se evalúa al niño, sino a sí mismo, a la manera en que está enseñando. La concepción de que la evaluación tiene que ser continua, ajustada, y que se pueden utilizar los resultados para ayudar al niño, coincide con la tendencia constructivista (Gil y Hernández, 1993).

A manera de comentario de cierre de lo que se ha encontrado respecto a las concepciones de los profesores, y a pesar de que no hay un pronunciamiento explícito por alguna corriente psicológica o pedagógica que de soporte a su enseñanza, en su discurso aparecen elementos vinculados con las corrientes educativas prevalecientes: la importancia del razonamiento, lo inapropiado de quedarse en un aprendizaje memorístico, la relevancia de resolver problemas, de llevar el conocimiento matemático a la vida diaria, lo importante que es que el alumno esté motivado y participe activamente, etc. El análisis ulterior de su actuación en el aula nos permitirá ver el sentido real de tal discurso y lo factible que es llevar a la realidad estas concepciones. Los profesores afirman que su aproximación a la docencia de las matemáticas es resultado *su propia experiencia e historia personal*, situación que coincide con lo que se ha encontrado en otros estudios (Llinares, 1990; Monroy, 1998). Finalmente, se ha encontrado algunas ideas de la llamada docencia del sentido común (Gil, 1991), sobre todo las referidas al determinismo genético y sociológico con base en el cual los profesores explican la capacidad de los distintos alumnos para aprender matemáticas.

De esta manera se han presentado los resultados del análisis de las concepciones de la maestra y del maestro de primer y segundo grado respectivamente. Para finalizar la presentación de resultados, siguiendo con los objetivos centrales de esta investigación, en el siguiente capítulo se presentan los resultados de las prácticas educativas, en términos del contrato didáctico (Brousseau, 1997) que ocurre durante en las clases, que permiten contrastar estas concepciones de los maestros y la forma de cómo realizan sus prácticas durante la enseñanza de las matemáticas. Además, permitirán relacionar las concepciones y las prácticas docentes con los resultados del conocimiento matemático adquirido por los alumnos.

6. 5 RESULTADOS DEL ANALISIS DE LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS

El tipo de conceptos, procedimientos y estrategias que caracterizan el conocimiento matemático que el niño adquiere, es influido por su propia participación y por las características de la instrucción de su profesor durante la clase, así como por la relación didáctica que logran establecerse entre ellos.

Se ha visto que en la adquisición de estos conocimientos matemáticos durante la clase se establece un tipo de relación didáctica, mediada por un conjunto de obligaciones y responsabilidades que son distribuidas entre el profesor y el alumno, relación didáctica determinada por un tipo de contrato (Brousseau, 1997, 2000). También se vio, de acuerdo con Ávila (2001a) que lo que caracteriza a cada contrato es una cierta distribución de la responsabilidad entre el profesor y los alumnos. Conforme a esta teorización, las distintas responsabilidades que puede asumir el profesor repercuten en las de los alumnos y dan lugar a diversos contratos que van, de los *no didácticos,* a los *fuertemente didácticos.*

En esta investigación, con base en los resultados que a continuación se expondrán, se ha corroborado que no ocurre un tipo único de contrato, pues como bien dice Brousseau (2000) los contratos son perecederos y tienden a cambiar de acuerdo a las exigencias de la actividad, del cambio de la temática, y en este caso, del estilo o características especificas de cada profesor. Por esta razón, se observó que durante el análisis de las clases se establecían diversos contratos, pero predominaron los contratos fuertemente didácticos. A continuación se ofrece evidencia respecto a la clase de la maestra Ana donde ocurrían más el *contrato de reproducción* y el *contrato de condicionamiento*, mientras que en el caso del maestro Mario predominó el *contrato de ostensión*.

Por razones metodológicas[1] y de síntesis, se presentan sólo segmentos transcritos de las clases que se consideraron como los más representativos del tipo de contrato de cada profesor. Este análisis de los contratos didácticos en específico se basa en trabajos de Ávila (2001a, 2001b), por lo que conviene citar cómo se definieron los contratos encontrados en este análisis. De acuerdo a esta autora y con base en Brousseau, en los setenta se buscaba partir de las nociones intuitivas de los niños para -mediante apoyo de las situaciones y las interrogaciones pertinentes- arribar a las nociones matemáticas formales, lo que implicaba incorporar la interrogación y, a partir de las respuestas sucesivas dadas por los alumnos concluir con la formulación de la noción prevista dando lugar al establecimiento de un *contrato de descubrimiento*

Por su parte el *contrato de explicación "a la medida",* implica que el profesor debe tener una excelente memoria didáctica; a cada momento sus decisiones derivan del re-conocimiento de los conocimientos personales y diversos de cada uno de sus alumnos; también de sus exigencias y necesidades didácticas, implica explicar bien (y con ello hacer comprender) las nociones matemáticas a los alumnos. El alumno ostenta su estado de conocimiento y expresa públicamente sus dudas.

En los contratos de *reproducción formal* el maestro se compromete a que el alumno realice una tarea culturalmente aceptada como adquisición de un saber, los medios no importan, si la actividad en sí misma que se supone fuente y prueba de aprendizaje. Los medios de reproducción por imitación no

[1] Un criterio para la elección del fragmento de la clase fue analizar y seleccionar intencionalmente el segmento que representara más las características de un tipo de contrato determinado basados en la definición de los tipos de contrato por Brousseau (1997, 2000). Para validar la pertenencia a un tipo determinado de contrato, se recurrió a una triangulación de datos por jueces, con la participación del investigador, la directora de tesis y la Dra, Ávila, especialista en el tema. Los tres revisamos los fragmentos seleccionados y de manera independiente los ubicamos como representativos de los tipos de contrato referidos.

exigen razones o explicaciones. El alumno realiza la tarea con la condición de que sea reductible al repertorio que posee.

En los *contratos de condicionamiento* la producción de una tarea no garantiza que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, como son la asociación y la repetición, el profesor cree que con esto el alumno se familiarizará con el objeto de aprendizaje.

Los *contratos de ostensión*, definidos por Brousseau y relacionados según Aebli (1958) con una forma de enseñanza propia de la didáctica tradicional, la idea de que la lectura del *medio* puede ser inmediata, conduce a estrategias didácticas de *ostensión*: el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre y aprende por repetición frecuente de las mismas circunstancias. *Los contratos de ostensión* derivan de una concepción sensual-empirista. En estos contratos, el profesor <<muestra>> un objeto, o una propiedad, y el alumno acepta <<verlo>> como el representante de una clase de la cual deberá reconocer los elementos en otras circunstancias.

En este sentido, en esta sección se presentan por grado los tipos de contratos que ocurren durante el análisis de cuatro clases. Al final, se ofrece una síntesis que compara y relaciona los resultados de cada grado en términos de lo que se plantea.

6.5.1 Resultados del análisis de las prácticas de la maestra de primer grado

Enseguida se presentan (tabla 31) los tipos de contratos que se observaron durante las prácticas instruccionales de la maestra Ana de primer grado, aún cuando en cada clase se presentaron más de un tipo de contrato didáctico, el que predominó fue el contrato de reproducción formal y en segundo término el de condicionamiento.

Tabla 31. Tipo de contrato didáctico que ocurre durante la clase de matemáticas del primer grado

Clase	Fecha	Temática	Tipo de contrato: Fuertemente y ligeramente didácticos
1	8/octubre/ 2004	Conteo, suma y resta con material, escritura de números.	Reproducción formal – Condicionamiento
2	10/nov./2004	Conteo y numeración del 1 al 100	Reproducción formal – Condicionamiento
3	2/jun./2005	Manejo de decenas, conteo y numeración, reconocimiento de la palabra escrita de un número y su símbolo numérico.	Reproducción formal – Condicionamiento
4	24/jun./2005	Decenas, adición con material, algoritmo de la suma.	Reproducción formal – Condicionamiento, Información

6.5.1.1 Del tipo de contrato didáctico en la primera clase

A continuación, se presenta un segmento que muestra el tipo de contrato didáctico que ocurrió en la primera clase como muestra del tipo de contrato, que impartió la maestra Ana del primer grado en los primeros días de octubre, donde el tema central fue la suma y la resta mediante el conteo con material, además se buscaba que el niño identificara el cardinal y el numeral, en números menores que doce.

De la relación didáctica establecida en esta clase [CL1AN-AC1] se observa que la profesora Ana toma la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. La maestra intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno, ante esta acción la profesora lleva a cabo un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997, 2000) que se ilustra con el siguiente segmento de la clase 1: [CL1AN-AC1].

[La clase inicia con el ejercicio del conteo. La maestra Ana dice repartir rollos de 10 palitos (algunos rollos tienen más o menos de 10 palitos)]

M: Vamos a poner 9 palitos [se detiene pensativa y muestra al grupo]...si tengo 9 palitos, ¿Cuántos me faltan para tener 12?

Ns: [Varios niños al contar consideran los palitos que tienen en sus rollos para llegar a 12 y no los 9 que dice la maestra, y contestan] Uno, cuatro, uno, dos.

M: [Cambia a otro ejercicio] Ahora, pongan 10 palitos, si ya tienen 10 ¿Cómo le van a hacer?

A: [Andrea] Que nos den uno

M: Que nos presten, [dice a Andrea] a ver pasa [Muestra caja con palitos] ¿cuántos te vas a llevar?

Na: [Permanece en silencio]

M: [Dice a grupo] ¿Cuántos tenemos?

Ns: ¡Diezzzzzz!

M: [Mira a Andrea] Andrea si yo quiero tener 12, ¿cuántos te vas a llevar?

Na: Dos

M: Llévatelos. [Después de varios ejercicios pasa a otra actividad]

M: Tengo tres pelotas ó palitos, más siete ¿Cuánto es?

N: Ocho. [Un niño dice rápidamente]

M: Manuel no has contado.

No: [Otro niño] Nueve.

M: [Trata de explicar a una niña] No, a ver…a ver [Cuenta, pone 3 y 7 palitos], primero 3 más 7¿cuánto tengo? 1, 2, 3 …8,9,10. [Se dirige a grupo] ¿Cuánto es?

No: 7

M: Tienen que contar por eso no saben cuánto es...

[Algunos ejercicios son al frente del pizarrón y otros cuando la maestra camina entre los niños] [CL1AN-AC1]

En esta clase [CL1AN-AC1] la profesora Ana se ve comprometida a que el alumno realice, por un medio cualquiera, una tarea que es culturalmente reconocida como marca de adquisición de un saber; en este caso, hacer que el niño reproduzca una serie de tareas en las que debe contar, tratando de resolver tareas de suma y en escasas ocasiones tareas de resta mediante las acciones de agregar o sustraer con el apoyo de palillos. El medio por el cual se logra la producción de la tarea no es importante puesto que es la actividad en sí misma la que se supone fuente y prueba del aprendizaje. En esta clase 1, la maestra Ana no exige razones o explicaciones, ni ella ofrece retroalimentación ni explicación a los niños. Así, la traducción de las órdenes del profesor en actos no exige el pasaje por el conocimiento previsto, el hecho de que la maestra pida al niño que quite o agregue palillos difícilmente promoverá que el niño comprenda la suma o la resta. Como contra-parte, el compromiso del alumno es efectuar la tarea definida por el profesor con la condición de que sea reducible al repertorio que posee, si el niño no logró reproducir la actividad, la maestra la resuelve frente al niño. Ante estas condiciones bajo la que cual ocurre la clase se estable un contrato formal.

Con el transcurrir de la clase, en este caso al no ser la reproducción de una tarea lo más frecuentemente es la garantía de que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, es decir, como razones del saber que aquél ha aprendido. Entre estas causas se encuentran la asociación y la repetición, como es el dictado de varios ejercicios de conteo que el niño debe seguir mediante el uso de material. La profesora en algunas ocasiones revisa y ayuda a que los niños sigan el procedimiento correcto. Aquí el rol del alumno es repetir, pues el profesor cree que el tiempo y la repetición se encargarán de familiarizarle con la cardinalidad del número, los numerales, y principalmente con la adición y la sustracción, que serían el objeto de aprendizaje. El alumno tiene la obligación de realizar la actividad, de seguir el procedimiento que la maestra indica y en algunas ocasiones que muestra, esto cuántas veces se sugiera y en su caso el alumno tratar de poner atención. Ante las características que se establece en esta clase tiende a predominar un contrato de condicionamiento y en algunas ocasiones aparece el contrato basado en la ostensión como la exposición de cómo contar que hace la maestra frente al grupo.

Por lo tanto, la dinámica del desarrollo del tipo de contrato didáctico que ocurre en esta clase [CL1AN-AC1], se establece entre un contrato de reproducción formal y posteriormente con el transcurrir repetitivo de una serie de ejercicios similares pasa a establecerse un contrato de condicionamiento, y en algunas ocasiones se muestra el procedimiento a seguir con la aparición de un contrato de basado en la ostensión (Ávila, 2001a, 2001b).

Sin embargo, con el transcurrir de la clase suele ocurrir efectos que afectan la relación didáctica, y la calidad del conocimiento en el alumno, en algún momento de esta fase del proceso de enseñanza y aprendizaje, el profesor tiende a dar las indicaciones de cómo proceder o qué hacer para dar solución **[CL1AN-AC1]** a los ejercicios que se plantean y no se logran completar los objetivos de aprendizaje que se plantean dando lugar al efecto Topaze (Brousseau, 1997), del que más adelante en otros análisis podrán encontrarse ejemplos más claros. Se observa en varias actividades que la maestra no sólo dice cada uno de los pasos de las actividades, también resuelve la actividad por sí misma, da pistas, sugiere preguntas, o puede dar la respuesta del resultado.

[La maestra intenta practicar con sus alumnos restas con material]
M: [Se dirige al grupo] A ver ponemos 8 palitos, levanten la mano ¿quién tiene 8 palitos? ¿Dónde están 8 palitos?, por eso no saben cuanto es. [Revisa a los niños] se me pierden 4*, [los niños esperan y la maestra ordena] ¡quitan 4!... ¿cuántos quedan?, qué hago para que se me pierdan…*
Ns*: [Alzan manos] Quitarle, separarlos*
M: Ya separaron, ¿cuánto es?
Ns: Cuatro **[CL1AU-AC1]**

Lo que podría generar que el alumno lograra conocimientos matemáticos parciales o fragmentados.

6.5.1.2. De la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta

En la descripción de estos resultados se describe lo más relevante que ocurrió en las cuatro clases con la finalidad de mostrar una visión del desarrollo de las clases, que ilustran el transcurrir y de alguna forma la evolución sobre el tiempo de este proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta, considerando los contenidos de enseñanza, la forma en que la profesora intenta enseñar, así como los principales logros y dificultades de los niños.

En la primer clase [CL1AN-AC] que impartió la maestra Ana en el mes de octubre, se observa su intención porque los niños trabajen una serie de ejercicios relacionados con la noción conceptual de la adición y la sustracción, donde la maestra en estos ejercicios dicta dos números de un solo dígito y los niños deben representar con objetos y emplear la adición o la sustracción. Se observa que en el dictado de estos ejercicios la maestra hace uso de los términos: “suman” y “más” para la adición y “se me pierde” y “quitan” para la sustracción, enseguida se ofrece un segmento seleccionado:

> [La maestra hace que su grupo practique sumas mentalmente y con palitos, además de la escritura del numeral]
> **M**: Van a poner o mentalmente ¿Cuánto es 7 más 2?
> **N**: 8
> **M**: Levanten mano.
> **N**: 9
> **M**: ¡Pasa Fátima a poner el nueve!
> **Na**: [Niña pasa a pizarrón y escribe 9]
>
> **M**: 6 palitos más 4
> **Ns**: [Espontáneamente dicen] ¡Diez!
> **M**: No vale, deben levantar la mano para participar…Cristian [levanta mano]
> **No**: [Cristian] Diez.
> **M**: Recuerden levantar mano y sin hablar.
>
> **M**: Otro, 4 palitos más 1
> **Ns**. [Contestan en coro] ¡5!
> **M**: No podemos hablar todos al mismo tiempo. Tengo 1 más 3 [levantan mano]. ¿Cuánto es Karina?
> **K**: 4
> **M**: Bien. **[CL1MA-AC2]**

En este proceso la maestra Ana se asegura de que los niños realicen la actividad con objetos, y en algunas ocasiones pide que realicen cálculos mentales, en caso de que los niños resuelvan así cuando la maestra no lo pide, sus resultados se consideran como no válidos. En algunos de estos ejercicios de adición o sustracción la maestra utiliza el resultado obtenido para trabajar el reconocimiento del cardinal y su numeral, en donde los alumnos después de obtener el resultado deben pasar a escribir en el pizarrón su numeral [CL1MA-AC2]. Dentro de estos ejercicios se observa la práctica de ejercicios de conteo aislado, simple y repetitivo, sin contextualizarse mediante el planteamiento y solución de problemas como base para la enseñanza de esos conceptos. No existe el planteamiento de situaciones problema reales, donde sea el niño quien trate de buscar una solución, en donde el profesor le guíe a través de preguntas, que provoque la reflexión, lo anime a la creatividad, al uso y el incremento de más y mejores estrategias y conceptos matemáticos como son la suma y la resta.

Por otra parte, durante la segunda clase [CL2AN-AC] impartida en el mes de noviembre, la maestra Ana trabaja dos actividades, en la primera los niños practican el conteo y a la vez el reconocimiento del numeral [CL2AN-AC1]. En donde utilizan el juego de "el caminito", en el que los niños tienen una cartulina con números del 1 al 100, ordenados en una serie de cuadros, y en cada cuadro va un número y una figura, la maestra pide se ubiquen en alguna figura, y cuenten hasta llegar a otra figura y digan como resultado cuántos faltan para llegar a la figura sugerida y al mismo tiempo reconozcan el numeral en que cayó la figura indicada. Para ello los niños deben reproducir y repetir varios ejercicios una y otra vez. En la segunda actividad, se trabaja la cardinalidad y su numeral, la cual se basa en el libro de primer grado (página 20), en donde los niños tienen que contar el total de los grupos con figuras y unir con su número correspondiente.

> [La maestra trabaja el conteo sobre una cartulina "el caminito" con números del 1 al 100, después trabajan el reconocimiento del numeral y su cardinal en el libro.]
> **M**: Vamos a contar…saquen su tabla del caminito… ¿Por qué no han traído el caminito? ¡Así no se puede trabajar!...¿Para qué sirve el caminito?
> **N**: Para jugar
> **M**: Ricardo
> **R**: Para contar
> **M**: ¿Hasta qué número trae?
> **Ns**: Hasta el 100
> **M**: Pongan su dedo en el número 1… ¿Cuántos deben pasar para llegar al número 10?…[la maestra cuenta junto con los niños] 1, 2, 3…7, 8, 9
> **Ns**: [Cuentan en voz alta junto con la maestra] 1, 2, 3…7, 8, 9
>
> **M**: Nos paramos en el número 5. ¿Cuántos falta para llegar al número 15?
> **Ns**: [Cuentan, levantan mano y gritan resultados diferentes:] .., 8, 9 10 [otros continúan contando]
> **M**: [Pide paren de contar y cuenten hasta el 50] A ver nos paramos y vamos a contar 1, 2, 3…8, 9,10…
> **Ns**: [Cuentan hasta el 50 y otros se siguen contando]…49, 50, 51…
> **M**: ¡Quedamos que hasta el 50...! Jimena cuántos pasos faltan para llegar al barco [cae en el 53]…
> **N**: Tres [Responde correctamente]
> **M**: [Dice al grupo]…Vamos a ver cuántos pasos
> **M** y **Ns**: [cuentan] Igual a tres.
>
> [La maestra cambia de actividad, ahora dice un número, los niños deben localizarlo y decir su figura]
> **M**: ¿Qué dibujo hay en el número 13?
> **N** y **M**: Un payaso
> [Se repite actividad, se cambia la figura y su número a localizar] **[CL2AN-AC1].**

En cuanto a la tercera clase analizada que se realizó en el mes de junio, último mes del ciclo escolar, la maestra Ana trabajó dos actividades, relacionadas con la práctica del reconocimiento del valor posicional de los números y su valor cardinal, el reconocimiento de la palabra escrita del número en forma de oración y su numeral, empleando como base la actividad del conteo. En la actividad [Cl3AN-AC1] de la representación del valor posicional de los números hasta con decenas, los niños deben representar sobre una cartulina el valor de números menores a 100, colocando una ficha roja sobre las decenas y una ficha azul sobre las unidades.

[En esta actividad los niños deben representar sobre una tabla las unidades y decenas que contiene ciertos números que la maestra dicta, al mismo tiempo un niño pasa a hacerlo frente al pizarrón]

M: Guardamos libro en mochila…saquen su cuaderno azul

Ns: [Algunos sacan su cuaderno azul, otros permanecen dialogando con sus compañeros].

M: [Llama a niños por su nombre para que pasen por su "tabla", que es una cuadricula que tiene dos filas: la de abajo números del 1 al 9 (unidades), y la de arriba números del 10 al 90 (decenas)…reparte fichas]…les voy a dar fichas (rojas decenas y azules unidades) aunque no sean de ustedes, nada más van a ocupar dos de cada color…¡vamos a empezar a trabajar! [Repite varias veces… pega cartulina en el pizarrón de tabla con una fila de unidades y una fila de decenas, y se dispone de fichas que los niños deberán pegar en tabla para representar las decenas y las unidades] ¡Guardamos silencio!

Ns: [Casi todos ya están en su lugar revisando sus tablas y fichas]

M: Levantan manos los que tienen tablas de decenas y unidades

Ns: [Levantan manos]

M: Quién tiene fichas de decenas y unidades

Ns: [Levantan manos]

M: Con fichas representamos el número, ayer trabajamos un poquito… a ver aquí lo voy a poner [escribe en pizarrón 28, dice] el 28, represéntenlo en su tabla de decenas y unidades

Ns: [Varios niños han terminado, ponen ficha roja en el 20 y la azul en el 8, y levantan mano]

M: Va a pasar…

Ns: [Varios niños dicen] yo maestra, yo, yo…

M: Entre todos se fijan si lo hicieron bien, si se equivocaron vean cómo es y lo corrige … A ver su ficha roja ¿cuánto vale?

Ns: Diez

M: ¿Y su ficha azul?

Ns: Uno

M: [Escribe 28 en pizarrón, pregunta a niña] ¿qué número es?

Na: [Tímida dice] 28 [pasa pizarrón pega sobre la tabla una ficha roja en el 20 y una azul en el 8]

M: ¿A ver así esta bien?, vean…

Ns: ¡Si¡

M: [Titubea]… bueno no lo muevan vamos a poner otro ahí

M: Vamos a representar ahora el número… que nos diga Ernesto, qué número quieres…

No: 28

M: Representen el número 28…[observa a un niño de enfrente] ¡Iván no esta trabajando, no me diste tu tabla ayer!…

I: [Mira a los ojos a la maestra] es que no tengo tabla…si

M: [Va a su escritorio por una tabla y se la da]

Ns: [Trabajan]

M: Levante mano el que ya terminó

Ns: [Levantan mano algunos]

M: Va a pasar Wendy, pon el numero 91 [no alcanza pizarrón] si no alcanzas súbete a la sillita.

Na: [Coloca correctamente las fichas]

M: Representan ahora el número 62…pasa Manuel [había levantado mano]
No: [Pasa y representa el 60 con ficha roja…voltea ver a ss compañeros…tira una ficha]
Ns: [Ríen]…
M: Ya pusiste el 60, mira ahí esta el 62 [señala el numero escrito sobre el pizarrón]…te falta el 2
No: [Observa, regresa la mirada a la tabla y coloca la ficha en el dos]

M: A ver nos va a decir un número Diana
D: 29
M: [Escribe el 29 en pizarrón]. Pasa Iván a representar el 29
I: [Pasa y pega sobre la tabla una ficha azul en el 2 y una roja en el 90, invirtió fichas]
M: Vean si va bien, si coloco bien sus fichas
Ns: ¡No!, ¡Bu, bu, bu.!
I: [Corrige correctamente]
Ns: [Algunos niños dicen a Manuel] ¡si, si! [otros] ¡Bu, bu, bu!
M: ¡Se callan!

M: Representen el 90, [escribe en pizarrón el 90] pase Karen Arlen
K: [Pega una ficha roja en el 90]
M: y qué hacemos con el cero
Ns: Se queda…pues nada… ¡uuu fácil!....
M: Ya vieron como trabajamos decenas y unidades **[Cl3AN-AC1]**

En esta segunda clase [CL3AN-AC1] la maestra Ana al igual que en las cuatro clases, se asegura que los niños realicen la actividad, que repitan los ejercicios en su cuaderno, pasen a resolver sobre el pizarrón, y en caso de que no puedan hacerlo por si mismos sugiere lo copien del pizarrón como muestra de que se ha realizado el trabajo exigido institucionalmente. En esta actividad se observa una enseñanza y aprendizaje basados en la memorización de la colocación correcta de las fichas en el lugar de las decenas y de las unidades correspondientes, en caso de que el niño no lo logre, la maestra da a evaluar al grupo sus respuestas, permitiendo la ayuda o sugerencias de los compañeros hasta resolver correctamente. Ante estas condiciones se observa una clase en la que trascurren contratos alternativos entre los contratos de reproducción formal y los de condicionamiento y en su caso de ostensión.

Sin embargo, la actividad se centra en la memorización de cuánto vale la ficha roja, de la colocación correcta de las fichas, no se observa el planteamiento de preguntas, o de situaciones matemáticas que lleven al niño hacia la reflexión y la comprensión del valor posicional. En contrastación con sus concepciones, la maestra Ana considera que la principal problemática de la enseñanza de las matemáticas [CA2AN-P4] es que esta basado en lo memorístico, y sin embargo esto es lo que ocurre durante sus prácticas instruccionales:

> "...todo es muy memorístico, se les da a los niños para que todo se lo aprendan, todo de memoria y las tablas sin que las razonen, para mí es lo más difícil" [C2AN-P4].

Finalmente, en la cuarta clase que impartió la maestra Ana en los últimos días del mes de junio, se observa la práctica de la solución del algoritmo escrito y de la suma con el apoyo de material. En esta actividad, la maestra inicia la clase brevemente con el repaso del conteo y la cardinalidad del número, para dar paso a la práctica del algoritmo formal por escrito de las sumas con un solo dígito, y continuar con sumas que impliquen dos dígitos, en especial con decenas (30 + 20]. En este proceso del aprendizaje del algoritmo de la suma la maestra trata de cuidar que los niños escriban correctamente los números y el signo "más" (+), recordando las "reglas del algoritmo", iniciando por escribir los números, después el signo, escribir el número más grande "arriba", no escribir "chuecos los números" (alinear los números por su valor posicional), escribir la raya y debajo de ésta el resultado, siempre con la exigencia de que muestren primero un resultado mediante el conteo con material. El siguiente segmento [CL4AN-AC3] ilustra las descripciones anteriores.

> [La maestra hace que los niños trabajen primero sumas con palitos (azules unidades y rojos decenas) y después lo complementa con la suma escrita, donde se pide a un niño que resuelva la suma en el pizarrón, y el resto de los niños en su cuaderno]
>
> **M**: Ahora, vamos a jugar con los palitos [repiten varias sumas con unidades con palitos azules...después:]
> **M**: Ahora, vamos a hacer otro ejercicio, porque al ratito lo vamos hacer en nuestro cuaderno, lo tienen que hacer con los palitos, porque todavía hay muchos niños que se equivocan. Vamos a representar, ahora, 3, [una niña bosteza], 3, número 3, más, a ver más, 5, cuánto es 3 + 5
> **Ns**: [Los niños representan los números con palitos azules y los cuentan]
> **Na**: [Levanta la mano con los palitos para enseñar que está representando cada número]
> **M**: [No comenta nada a la niña]
> **No**: [Iván dice:] 45
> **Ns**: [Algunos] 8
> **M**: Iván estamos con palitos azules, ni siquiera te estas fijando Iván
> **M**: 3 y luego 5, ¿Cuanto son? [muestra 8 palitos azules]
> **Ns**: 8
> **M**: 8 palitos ¿verdad?, 8, bueno, vamos a anotar otra. Ahora vamos a escribir en el pizarrón. Uno va a pasar al pizarrón y en el cuaderno los demás vamos a escribir, ¿si?
> **Na**: Yo, yo
> **Ns**: Eh!, eh! [Quieren pasar al pizarrón]
> **M**: A ver pasa esta Wendy, pasa Wendy, Wendy va a escribir y Ernesto le va a dictar una suma, díctale una suma, ahorita de las que estamos haciendo, así de…
> **Na**: [Wendy, pasa al pizarrón y escribe la suma]
> **Na**: 5 más 5
> **M**: "Aja"
> **M**: A ver Ernesto
> **No**: [Ernesto] 5 + 4
> **M**: ¿5 más ?
> **Na**: 9
> **M**: ¿5 más qué?
> **Na**: 9
> **No**: [Ernesto] 4
> **M**: Más 4 dijo, 5 + 4
> **M**: Vamos sacando nuestros palitos, vemos cuánto es el resultado sin decir a Wendy, ella solita lo va a hacer con sus palitos. Pongan 5 + 4, 5 + 4. A ver vean que el signo de "+" esté bien escrito, ¿sí es el de más?
> **Ns**: Sí
> **M**: Bueno, ahora ve a tu lugar y cuenta a ver, y vienes a anotar el resultado Wendy. A ver levante la mano el que ya tiene el resultado, a ver, [5 niños(as) levantan la mano]. Cuando tengas el resultado Wendy pásalo a escribir.

No: 9
N*a*: *[Wendy cuenta en su lugar los palitos] 9*
M: *Ya anoten la suma y pongan el resultado abajo. Ya Wendy, a ver*
Na: [Wendy pasa al pizarrón a escribir el resultado]
N: Yo paso maestra
M: Ya, a los que estén participando más a los que no, no.

M: Alondra, todos van a pasar. Pasa Alondra, le va a dictar Ingrid, Ingrid le va a dictar, [el grupo se muestra inquieto, algunos se levantan de su lugar y platican en voz alta]. A ver vemos quien está participando, Manuel, ya no está participando, voy a empezar a anotar. A ver Ingrid va a dictar, a ver Ingrid fuerte.
M: A ver Ingrid va a dictar, a ver Ingrid fuerte.
Na: [Niña dicta] a ver 100 + 100
M: ¡Que no pase de 20!
No: [Otro niño insiste] 100 +100 maestra
Na: [Otra niña], ¡Yo maestra!
M: A ver Karen
Na: [Karen] 20
M: ¿A ver 20 más…?
Na: [Otra niña] 20
Na: [Otro niño dice 20 y Karen repite] 20
M: No, pero que no te digan, tu solita, tu piensas, no digas lo que te digan.
Na: [Karen] Más dos.
Na: [Alondra, escribe el 2 sin alinearlo en la fila de las unidades, la maestra no lo observa]

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{+2} \end{array}$$

M: ¿Más 2? A ver 20 más 2.
No: ¡Ay qué fácil!
M: A ver represéntenme el 22 ahí en su resultado,(deben poner dos palitos rojos y dos azules) lo ponen ahí encima de su cuaderno y me dicen: ¡Maestra ya aquí está mi resultado!, sin hablar, con palitos.
Na: Ya maestra
M: Cristian, Cristian vamos a anotar a Cristian. Me tienes que representar el resultado, levantando la mano quien ya lo representó con palitos el 22, a ver representen el 22.
Ns: [Los niños cuentan con sus palitos 22]
M: [Revisa a algunos] Dónde está representado, no, no, con sus palitos, encima del cuaderno, que diga el resultado cuánto es. Si les falta un palito vienen por sus palitos. [A un niño le faltan palitos azules (unidades) y le da rojos] Haz de cuenta que son azules. A ver, quien ya tiene el 22, el resultado, cuánto fue el resultado.
Ns: ¡22!
M: Enséñenme el resultado en su cuaderno con los palitos. [Pasa a revisar a cada niño] 22 muy bien, no necesitan más palitos con los que tienen, 22, donde dice 22 con tus palitos, ¿donde está el resultado?, [A un niño le dice] ahí no dice 22 ahí dice 12 (un palito rojo y dos azules), ahí pon 22 con tus palitos encima, que diga 22, a ver aquí dice 11, no hay necesidad que ocupen todos los palitos azules, recuerden que tenemos rojos, ¿cuánto vale el rojo?, ¿a dónde están los 22 con tus palitos?
M: [Dice a un niño] Representa 22 con tus palitos, 2 azules y el 20 ¿Cómo lo vas a representar? ¿Con qué color?

Na: 2 rojos y 2 azules.
M: 2 rojos y 2 azules [se aleja del niño sin observar el resultado] Es el 22, no necesitamos muchos palitos. **[CL4AN-AC3]**

De acuerdo con la clase anterior [CL4AN-AC3] se observa la intención de la maestra porque los niños repitan una serie de ejercicios con la finalidad de que aprendan a hacer sumas primero con material y luego por escrito, primero con sumas de un solo digito para trabajar las unidades posteriormente con decenas. En algunas ocasiones la maestra muestra como hacer las sumas con palitos, posteriormente cuando trabaja con la suma por escrito indica que todos deben escribir primero el algoritmo en su cuaderno, luego realizar el conteo con material, y finalmente escribir el resultado. La actividad se centra en la escritura de la operación, la obtención de un resultado del conteo con material, y escribir el resultado obtenido en el conteo sin atender el procedimiento del algoritmo escrito. Ante estas situaciones en la clase ocurre más un contrato de condicionamiento y en otras ocasiones aparece el contrato de ostensión.

En cuanto a la escritura del algoritmo, se observan una serie de inconsistencias, la niña quien realiza el algoritmo sobre el pizarrón al escribir no alinea los números en su lugar del valor posicional, situación que es observada con varios niños cuando escriben la operación en sus cuadernos, la maestra solo atiende la obtención y la escritura del resultado correcto con base al conteo con objetos.

En esta clase, se observa que algunos niños reconocen el valor asignado al color rojo 10 y azul como el valor de uno, solo como regla establecida. Se observa la carencia de preguntas o argumentos por parte de la maestra que guíen al niño en comprensión del valor posicional aplicado al concepto y solución del algoritmo de la suma.

De manera general, en este proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta, ante los tipos de contrato que se celebran en esta y en las demás clases, la única practica y repetición de uno y otro ejercicio, pareciera que está más en cumplimiento de las obligaciones curriculares institucionales que la finalidad de provocar algún cambio cognitivo (Mendoza, 2004) que se caracterice por la construcción de más conocimiento matemático, en este caso el conocimiento y el empleo útil del conteo, como son el uso del valor y significado de los números, o la práctica de diferentes situaciones, como el planteamiento de problemas aritméticos de la vida cotidiana que se orienten hacia el desarrollo conceptual de la adición y la sustracción (Gellman y Gallistel, 1978; Nunes y Bryant, 1997), y en su caso poderlos relacionar con sus algoritmos de la suma y la resta, que sean de utilidad para el desarrollo del conocimiento matemático del niño.

A lo largo del análisis de estas cuatro clases se observa el planteamiento de actividades más relacionadas con el desarrollo del conocimiento de la suma. En el desarrollo del conocimiento de la resta, sólo se observan dos actividades en la primera clase, relacionadas con ejercicios de la sustracción de números con un dígito mediante el empleo de material. En el que la maestra emplea los términos "se me pierden" "quitan" y los niños los expresan como "quitarle, separarlos". Estos son ejercicios únicamente con material, y sin contextualizarse en algún problema.

6.5.1.3 Del juego a los problemas no planteados en el grupo de primer grado

Mediante el análisis de esta prácticas educativas se observa la ausencia del planteamiento y de la solución de problemas aditivos, con la presencia única de ejercicios como los descritos anteriormente, cómo estrategia para la enseñanza del conocimiento matemático. En todo caso, la maestra recurre a la práctica de una serie de ejercicios que involucran la práctica del conteo, el reconocimiento del número escrito y de su valor, y en la última clase, la práctica del algoritmo de la suma y con materiales.

Por otra parte, ante la falta o ausencia de una enseñanza basada en el planteamiento y de la solución de problemas, se aprecia la intención de la maestra por utilizar el juego, sin embargo se observa el planteamiento de una secuencia de actividades rutinarias que implican únicamente del conteo, el reconocimiento del número, con escasa o nula interacción entre los alumnos, sin preguntas de reflexión, sin reformulación de los conocimientos del valor posicional, de la suma y la resta que se intentan enseñar y aprender.

Como ejemplo, en la descripción de estos intentos de la maestra por utilizar el juego para aproximarse a la enseñanza del conocimiento matemático, se observa que en la clase 2 procura trabajar el valor posicional con una serie de fichas de color y de tablas donde los niños deben representar el valor posicional de algunos números. En la clase 3 en la práctica del conteo y el reconocimiento del numeral utilizan una lámina "el caminito" con números del 1 al 100 acompañadas de figuras [CL4AN-AC1], en la que los niños practican el conteo y el reconocimiento del cardinal y del numeral.

Como mejor estrategia de apoyo, se observa el empleo de "palitos" como material para el apoyo de la realización de las actividades del conteo, de la adición y la sustracción, como se muestra en el siguiente ejemplo, y otros anteriores.

[La maestra trabaja con sus alumnos la suma con materiales]
M: Ahora vamos a jugar con los palitos, vamos trabajar, quedamos que íbamos a participar, 40, ahora, para que diga 48 ¿qué tengo que hacer?
Na: 8 palos
M: 8 palitos
M: ¿De qué color?
Ns: Azules
Ns: [Cuentan sus palitos, representando el número 8].
M: A ver aquí esta el número 48 ¿sí? [Muestra al grupo 4 palitos rojos y 8 azules] [CL4AN-AC1]

En síntesis, se nota que desde el inicio hasta el final del ciclo escolar la maestra continua trabajando actividades relacionadas con el conteo y la numeración. Sin embargo, se observa que al final del ciclo escolar los niños presentan aún dificultad para entender las actividades relacionadas con la cardinalidad del número, el reconocimiento de los numerales, dificultades con el entendimiento del valor posicional de las decenas, y su aplicabilidad en la solución del algoritmo de la suma, la ausencia del planteamiento de problemas, y de la resta, dificultades que se relacionan con la muestra de los resultados grupales y de los estudios de caso del conocimiento matemático de los niños de primer grado.

En complemento de lo que ocurre en las clases de la maestra Ana y de sus concepciones expresadas durante la entrevista, considera que antes de que el niño conozca la suma y la resta debe conocer primero los números, el valor de cada número, la interpretación del problema para que sepa que operación debe utilizar [CL4AN-P1]. Al respecto se observan prácticas relacionadas con ejercicios del conteo, la cardinalidad y el reconocimiento del numeral, únicamente el algoritmo de la suma, sin observarse el planteamiento de problemas.

En su discurso, acerca de sus estrategias de enseñanza concibe el trabajo en equipo [CA5AN-P4] pero en las prácticas solo se logra observar el trabajo individual. Concibe hacer uso de materiales y del juego [CA5AN-P4] donde ciertamente se observa en su práctica el apoyo constante de materiales como son “palitos”, o juegos como el “caminito”. Considera la solución de problemas para la enseñanza de los conocimientos anteriores, sin embargo en la práctica no se observan dichas actividades, en la solución de problemas que contemplen los conocimientos referidos. Y aún cuando ya se discutió en los resultados de sus concepciones, la maestra muestra solo problemas sencillos de compra o venta.

Finalmente en cuanto a la dinámica de la clase, se observa el trabajo en pizarrón, la copia, el apunte y la escritura del ejercicio en sus cuadernos, el trabajo individual, el apoyo en actividades del libro, y como estrategia principal el diálogo triádico (Lemke, 1997), en el que la maestra plantea un ejercicio, el alumno da la respuesta y se evalúa el resultado como correcto o erróneo, por lo regular es el maestro quien evalúa las respuestas y en algunos casos da avaluar la respuesta a los alumnos, en caso de error el alumno corrige el resultado.

De esta forma, se han presentado los resultados del análisis de las prácticas educativas, de la maestra Ana del primer grado, en términos del contrato didáctico con predominio de la ocurrencia del contrato de reproducción formal al contrato de condicionamiento, y en algunas ocasiones ocurre el contrato de ostensión. En la celebración de este tipo de contratos se observa a la maestra preocupada porque sus alumnos reproduzcan las actividades correspondientes, y ejecuten cuantas veces sea necesario los ejercicios matemáticos como prueba de que han aprendido. En cuanto a los contenidos de la enseñanza, estos se centran en conocimientos del conteo, el reconocimiento del número y su cardinal, las aproximaciones del reconocimiento del valor posicional de las decenas, la solución del algoritmo de la suma, la ausencia del algoritmo de la resta y ausencia del planteamiento y solución de problemas aditivos.

6.5.2 Resultados del análisis de las prácticas del maestro Mario de segundo grado

Siguiendo la forma anterior de la presentación y el análisis de estos resultados, enseguida (tabla 32) se presentan los tipos de contratos que se observaron durante las prácticas educativas del maestro Mario de segundo grado. A razón de que una clase pude ser dinámica, por el cambio de contenido temático, el tipo de instrucción del maestro, entre otros, ésta no puede permanecer regida por un solo tipo de contrato didáctico ya que estos son perecederos, en este sentido en la clase del maestro Mario se presentaron más de un tipo de contrato didáctico, predominando un contrato basado en la ostensión.

Tabla 32. Tipo de contrato didáctico que ocurre durante la clase de matemáticas del segundo grado

Clase	Fecha	Temática	Tipo de contrato: Fuertemente didácticos
1	6/octubre/2004	Solución de problemas de suma y resta	Condicionamiento, Ostensión
2	16/nov./2004	Solución de problemas de suma y resta	Reproducción Formal-Condicionamiento, Ostensión
3	27/enero/2005	Sistema decimal, Suma, Solución de Problemas	De descubrimiento, de Explicación, Ostensión,
4	28/enero/2005	Sistema decimal, Suma, Resta, Solución de problemas	Reproducción formal, Condicionamiento, Ostensión,

En la tabla anterior se observa la ocurrencia de diversos tipos de contratos, en el caso de los contratos de reproducción formal en algunos casos se pedía a los niños que copiaran lo escrito en el pizarrón como justificación de su aprendizaje, y en el de condicionamiento ocurría cuando los niños tenían que repetir una serie de ejercicios, por ejemplo la solución de los algoritmos. En el caso de los contratos de explicación y de descubrimiento sólo se mostraron ocasionalmente al inicio sin llegar a completarse, sin embargo, predominó el contrato de ostensión al presentarse consecutivamente en las cuatro clases, aún dentro de una misma clase al cambiar de actividad. A continuación se describe su proceso de ocurrencia.

6.5.2.1 Del contrato de ostensión en la clase del Maestro Mario

Para el análisis del tipo de contrato didáctico se eligió la clase 4 [CL4MA-AC], en la que el profesor trabajó el algoritmo de la suma y la resta y la solución de problemas. En este segmento [CL4MA-AC4] durante el transcurso de la clase, se observa que el profesor en la actividad 4 trata de hacer la explicación del procedimiento del algoritmo de la suma, sin embargo hace una explicación general al grupo, sin emplear de manera precisa los conocimientos diversos y personales de la mayoría de los alumnos, además que la memoria didáctica no esta presente en la estrategia de enseñanza del maestro, a pesar de que se presentan ciertas características no se logra desarrollar un contrato de explicación.

En la relación establecida durante esta cuarta clase, se observa al maestro tomar la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. El profesor intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno. Ante esta acción, de acuerdo con Brousseau (1997, 2000) el profesor establece un contrato fuertemente didáctico, basado en la ostensión, que se puede ilustrar con el siguiente segmento [CL4MA-AC4].

Actividad 4
El maestro ha repartido tablas con el “sistema decimal” [así lo llama el maestro, que son cartulinas que representan el parte de arriba una **C** para centenas, una **D** para decenas y una **U** para Unidades, de color amarillo, rojo y azul respectivamente]. También reparte material: cuadritos sueltos (unidades) hileras con 10 cuadritos (decenas) y cuadrados con 100 cuadritos (centenas).

Después que los niños han resuelto un problema, el profesor indica trabajarán solo la solución de operaciones de resta.

M: La siguiente resta es 523 menos 125 pónganlo en su tabla…[En el pizarrón dibuja tabla…revisa niños y regresa para representar el 523 en el pizarrón] le quitamos 125. A este [señala el 3] no le podemos quitar 5…le pedimos a este [señala el 2] una decena [dibuja 15 bolitas y borra 8…repite proceso de explicación acompañado con la participación de los niños, termina y dice:] ¿dónde salieron resultados diferentes? [y agrega] nos quedaron 398…los que tienen calculadora hagan 523 menos 125 ¿Cuánto salió?

Ns:[Varios resultados] 300, 320, 340…[guardan silencio]

M: En la calculadora pongan 523 el signo de menos, ahora pongan 125, y el signo de igual, ¿cuánto es?

Na: 398

M: [Explica considerando el 523] Rogelio ve como cuando no alcanza [señala el 3] y le pedimos prestado al 2 una decena [muestra una hilera con 10 cuadritos], pide prestado sino alcanzan las unidades, se convierte en 10 unidades y 3, tenemos 13; y este 2 se convierte en 1 pide prestado 1 al 4, y el 4 se convierte en 3 [error es 5 en lugar del

4]…vamos a ver una manera más fácil… [Señal] Michel trata de no juntar tus cuentas.¿Quién ya entendió?
Ns: [Algunos levantan la mano]
Na: Un poquito
M: [Borra lo que esta en el pizarrón y escribe otra resta en el pizarrón, 628 menos 219] ¿Quién pasa?
Ns: [Pasan momentos y nadie levanta la mano].
M: Aquí no hay más inteligentes, todos tenemos la misma capacidad, pongan atención [Deysi decide pasar]

$$\begin{array}{r} 628 \\ \underline{-219} \end{array}$$

D: [Explica] El 8 como no alcanza pide una decena prestada al 2, son 18 [se detiene a pensar…]
M: [Ayuda] Con esos 18 cuántos debes pagar, Deysi a 18 le quitas 9
D: Cero
M: ¿Te queda cero?, haz bien tus cuentas, tienes que hacer 18 palitos [dibuja 18 palitos] y cuántos debe pagar
D: [Borra 9] nueve…
Ns: [Otros niños ya llevaron a calificar, Deysi fue de las últimas en solucionar, algunos compañeros se acercaron y discutían con ella, el maestro califica al grupo]
D: Ya está…[se retira a su lugar]
M: Para aquellos que no entendieron vamos a hacer otra [Llama atención a niños, los sienta y retoma clase]…volvamos al que hizo Deysi. [Se dirige al pizarrón y considera la resta de 628 menos 219, señala]… El 9 llega y le dice al 8…págame lo que me debes, cuánto le debe.
Ns: Nueve
M: ¿Y qué dice el 8?
Ns: No me alcanza con lo que tengo
M: y le dice al dos préstame una decena, porque el 9 me cobra, y el dos le dice está bien, le presta una decena y con esa decena le dio 10, ¿10 más 8?
Ns: 18
M: Con esos 18 paga 9, 18 menos 9 te quedan…
Ns: 9
M: Pero resulta que el 2 ya no es 2 es 1, uno menos uno, uno menos uno es…
Ns: Cero
M: Y el 6 que tenía mucho dinero [interrupción, sigue]…pero tenía que pagar 2, 6 menos 2…
Ns: 4
M: Entonces 628 menos 219 es igual a [señala el 409]
Ns: 409 [CL4MA-AC4].

Específicamente en la relación didáctica entre el maestro y el alumno, en la actividad 4 [CL4MA-AC4], el maestro Mario pasa la mayor parte del tiempo frente al grupo o junto a los niños mostrando las nociones y las reglas que implica restar, luego incorporando y diciendo, o reafirmando los procedimientos del algoritmo a seguir. Sí en el primer intento con la mostración o exposición de estos conocimientos no son comprendidos por los alumnos, entonces se repite la mostración de cómo operar cuando se resta, ya sea con material, o con un gráfico, para tratar de explicar cómo solucionar con el algoritmo de la resta, en caso de descubrir un “error” de procedimiento del algoritmo el maestro intenta aclararlo, recordando a sus alumnos las reglas del algoritmo formal de la resta, ante estas condiciones se establece un contrato didáctico basado en la ostensión.

En complemento el profesor, ayuda a los niños a realizar la tarea, sugiere y muestra cómo hacerlo, ejemplifica a los alumnos con el trabajo o dificultad de otro compañero, continuamente realiza preguntas del cómo proceder o del resultado, muestra continuamente el problema a resolver, da a evaluar al grupo los resultados encontrados, hace participar directamente a los alumnos, exige explicaciones a sus alumnos, llama la atención constantemente a quienes interrumpen.

Por su parte, los alumnos se responsabilizan por: mantenerse atentos a las exposiciones que hace el maestro en el pizarrón o a las explicaciones que hace en voz alta a alguno de sus compañeros; proporcionan las respuestas que se les demanda como muestra de su aprendizaje; anotan en su cuaderno los ejemplos realizados; recuerdan y memorizan los procedimientos que implican sumar o restar; resuelven ejercicios y problemas para aplicar los conocimientos adquiridos. Su compromiso es demostrar que han memorizado cómo operar con material (tabla del sistema decimal y cuadros para las unidades sueltas y tablas con valores de decenas y centenas) en el momento de solucionar una resta.

Sin embargo pese a la responsabilidad del maestro por enseñar como operar y proceder, cuando se resuelve una resta, se observa que el profesor trata de recordar a sus alumnos como descomponer unidades de mayor valor para poder restar. No obstante, ocurre una dificultad en este proceso de enseñanza-aprendizaje, en una fase [CL4MA-AC1] de este proceso se observa que el maestro se desespera e incurre a decirles que deben hacer, el objetivo por enseñar en algunos casos no desaparece por completo, pero si afecta la calidad de lo que se pretende enseñar, lo que da lugar a el *efecto topaze* (Brousseau (1997), que se relaciona con la forma que el profesor elige, plantea preguntas y maneja las situaciones para la enseñanza. El profesor explica un conocimiento incompleto, y termina por sugerir claves, preguntas y en algunos casos da la respuesta, por lo que se podría perder el objetivo de la enseñanza, o en su caso se podría lograr un aprendizaje incompleto o fragmentado, de tal forma que se va perdiendo la significación de la situación y el conocimiento inicial.

El siguiente segmento (CL4MA_AC1) ilustra cómo el profesor intenta ayudar a solucionar el problema, sin embargo sugiere qué hacer, y termina por dar el resultado, a pesar del trabajo en clase.

[Los niños resuelven un problema de cambio con sustracción, empleando material y con el algoritmo escrito]

M: [Escribe y después lee] Jose Carlos tenía 326 pesos, si se compró una chamarra de 115. ¿Cuánto le quedo de dinero?...Si tenía 326 pesos y dice que se compró, ¿aumentó o quitó?
Ns: Se quitó
M: ¿Por qué Juan Carlos?
JC: Restó…[Permanece en silencio]
No: No puede sumar
Na: No, aumentó
M: ¿Aumento? ¡No! Si compran un *boing,* ¿aumentó o disminuyó su dinero?
Ns: No aumentó…disminuyó
M: [Se dispone a escribir una resta] ¿Qué número colocó arriba?
Ns: 326
M: Menos qué…
Ns:115

M: Coloquen el 326 en su tabla utilicen su material [Ha escrito la resta en el pizarrón]… ya deben tener el problema escrito…[pregunta y responde el mismo] ¿cuántas unidades? seis, ¿cuántas decenas? dos, ¿cuántas centenas? tres [repite] 326…

***No**: [Lleva su cuaderno para mostrar una operación y no la representación en su tabla]*

***M**: No Armando, estas sumando…es resta* [camina y observa por filas el trabajo de los niños]...Michel no colocas nada*,* Armando nada, solo trabaja Sofía y Carlitos…Angeles nos has colocado nada…Tijeras, dije que nada de recortar…Alejandra no veo que coloques el de arriba, no el de abajo, es 326…no están colocando el material… ¿ya esta?...no veo el 326…¿ya esta?

Ns: [Representan en tabla el 326]

M: ¿Ya?, a ese 326 le van a quitar..115, quítenselo…

No: [Interrumpe]

M: Si tienen duda levanten la mano, no hay permiso para ir al baño, no nada [continua explicación]… *a ese 326 le van a quitar 115, qítenselo…[explica] quitan una centena, una decena y cinco unidades, quítenle 115…*

No: [Da respuesta] No es cierto, es 111

M: [El maestro cuenta frente al niño que le quedo con sus cuadriculas] Son 100, 200…[deja que concluya el niño]

No: 211 **(CL4MA_AC1)**

Como consecuencia de buscar las respuestas correctas de los alumnos, es el mismo profesor quien por esta ocasión en su intento por enseñar cómo restar incurre a decir al niño como hacerlo, se ve cuando tiene lugar el *efecto topaze* (Ávila, 2001a), que no es el sujeto epistémico -el que busca obtener una solución impelido por las exigencias de una situación- sino el alumno (el sujeto didáctico) quien busca responder al profesor, aun sin significado; se ve que no es necesariamente el trabajo que promueva el desarrollo cognoscitivo, sino las respuestas correctas que busca el profesor.

6.5.2.2 Del proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta

En la primera clase impartida en el mes de septiembre, en general se observa que en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la suma y la resta, el profesor trata de introducir estos conocimientos a través del planteamiento de problemas sencillos que implican uno ó dos dígitos, en el que deben resolver con material en principio y, después intenta relacionar esta práctica con el aprendizaje del algoritmo escrito de la suma, pues la resta sólo se resuelve con material. En fragmentos siguientes [CL1MA-AC2] y [CL1MAC3], específicamente en la enseñanza de la suma, el maestro trata de introducir el concepto de la suma mediante el planteamiento de un problema que implica adición, con datos numéricos menores a 15, en principio promueve su solución mediante el uso de materiales diversos y después trata de relacionarla con el algoritmo escrito.

[En esta clase los niños trabajan la solución de tres problemas de cambio, dos que implican operaciones sencillas de suma y uno de resta, de los cuales, un problema que implica la suma se trabaja primero mediante el conteo con material y después el maestro trata de relacionarlo el algoritmo de la suma].
[CL1MA-AC2]

Actividad 2

M: Vamos a trabajar con el nombre de Carlos [Escribe en el pizarrón y dicta el problema] Carlos compró…

Na: [Dice al mismo tiempo que el maestro, sin ser atendida] Michel se compró un estuche

M: Carlos compró una paleta de $6 y un chocolate de $14, ahora, quiero saber cuánto gastó Carlos. Estos signos [señala signos] de interrogación para qué son.

Ns: [Escriben problema] para hacer…
M: Para hacer preguntas, ¿Qué nos están preguntando?
***Na**: ¿Qué cuánto se gastó Carlos?*
***M**: Eso es lo que tienen que decir ustedes, por eso tienen ahí las rondanitas, los palitos o los frijolitos.*
***N**: [Se observa que Abraham, realiza conteo con dedos, y el mismo se respondió que $20 en voz baja]*
***No**: [Otro niño] $15, $15*
***N**: ¨[Armando, juega con los palitos, no atiende a la clase]*
***M**: Ahora sí, hagan sus cuentas y díganme cuánto se gastó Carlos:*
***N**: 20*
M: No sé, ustedes anoten y ya cuando yo revise voy a saber si están bien, ustedes anoten ahí cuanto creen que se gastó y paso a revisar, aquí adelante de la "R" tienen que decirme cuánto se gastó...Cuenten, ahí tienen sus palitos, hagan primero sus montones, o con sus dedos o con lo que ustedes puedan hacerlo. Si no hacen bien ese problema a Carlos le van a robar dinero. Vean qué tienen que hacer.
Na: [Sahori llama al maestro para revisar el resultado]
M: [El maestro toma su cuaderno y compara con el de otra niña, le dice a Sahorí] ¿Cómo supiste que era esta cantidad?
Na: Contando
M: ¿Cómo contaste?
Na: Con las rondanitas
M:Te Dio el total de…
Na: 20
M: Vamos a ver otro [otro cuaderno]
M: ¿Cómo te dio esta cantidad?
N: Porque a 14 le pones 6 [cuenta con los dedos] 20
M: ¿Cómo te dió esta cantidad?
N: Cuenta con los dedos a partir del 1, [el maestro lo interrumpe]
M: [Por que no cuentas desde el 15 si ya tienes los 14]
N: [Niño muestra desconcierto, y el maestro lo apoya para comenzar a contar desde:], 15, 16, 17…20
Na: [Otra niña, también cuenta a partir del 1, y no del número mayor que es 15]
M: [Llama la atención a un niño] ...Ya saben que si los anoto no salen al recreo. Ahora tenemos el siguiente problema.
¿Cuánto se gastó Carlos?
Ns: $20
M: ¿Por qué se gastó $20? A ver Diana, dinos por qué se gastó $20
Na: Porque se compro una paleta de $6 [guarda silencio, un niño la ayuda]
No: y un chocolate de $20
N: [Juan grita]$82
M: A ver, Juan por qué dices, que se gastó $82, ¿es cierto qué se gastó $82?, ¿se habrá gastado $19?
Ns: ¡No, no!
M: ¡No!, [Afirma] ¡por que no!, se gastó $20 **[CL1MA-AC2]**

Actividad 3
[Pasan a resolver el problema anterior con la operación escrita de la suma]

M: Vean, a ver cómo lo hubieran resuelto si lo hubieran hecho de esta forma, a ver Monse cómo lo hubieras hecho de esta forma 14 más 6 ¨[El maestro escribe sobre el pizarrón la suma de 14 más 6]

14
+ 6

A ver Monse pon 14, vean como va a hacer Monse con esa operación, ya la habíamos utilizado, cómo hacíamos, qué hacíamos primero.

N: Contábamos primero el 4 y luego el 6
M: Contamos primero el 4 y luego el…
Ns: Seis
M: A ver Monse cuenta 4 más 6 cuánto nos da.
Na: [Monse, cuenta con los dedos y escribe 10 a un lado de la operación]
M: Ahora este 10, qué hacíamos, qué hacíamos con este número Agustín
N: [Agustín grita] ¡Lo destruimos!
M: Lo destruíamos y qué hacíamos con cada número
Ns: El 1 lo ponemos arriba
M: El número 1 va arriba, ¿de dónde, va arriba del 4? ¿lo ponemos arriba del 4?, ¿arriba de quién?
Ns: Del 1, [otros] del 4
M: Del 1 [afirma] Monse ponlo ahí, ¿y el cero?
Ns: Abajo
M: ¿Abajo de quién?
Ns: Del 6
M: Colócalo, el 0 abajo del 6, y luego ¿qué hacíamos?
Ns: Contábamos el 1
M: Contábamos el 1 y qué más, el otro 1 que colocó Monse, que son en total…
Ns: 2
M: ¿En dónde ponemos ese 2?
Ns: Abajo
M: ¿Qué número nos dio?
Ns: 20
M: $20, entonces 14 más 6 es igual a:
Ns: 20 **[CL1MA-AC3]**

Se observa en el segmento de la actividad 2 [CL1MA-AC2] el planteamiento de un problema de cambio con adición por parte del profesor. Los alumnos tienen la obligación de copiarlo del pizarrón y escribirlo en su cuaderno. Para solucionar son dos fases primero el profesor formula preguntas de qué deben hacer, les proporciona y les recuerda que pueden utilizar el material incluyendo sus dedos, regresando a los alumnos la responsabilidad de buscar una solución solo mediante el empleo y el conteo con material, el calculo por otro medio no se considera valido. Durante el proceso de solución, el profesor observa las estrategias de conteo de los niños y trata de que éstos las mejoren, indicándoles en algunos casos como contar a partir del número mayor, y no todos los elementos a partir de uno.

En el segmento de la actividad 3 [CL1MA-AC2] el profesor pide a los niños que recuerden cómo sumar por escrito (operación sencilla con dos y un dígito), recordando conocimientos previos, (una característica de los contratos constructivistas). Sin embargo, éste se centra más en la explicación y mostración frente al pizarrón, ya sea que él la realice o algún alumno, de cómo resolver el algoritmo de la suma, basando su enseñanza en la ostensión. Se observa la intención del profesor por dar a conocer la suma, el centrarse el profesor más en la enseñanza del algoritmo, se observa la necesidad de que en sus explicaciones o demostraciones trate de integrar el funcionamiento y el concepto del valor posicional, y se discuta más el problema, tratando de aprovechar su forma de enseñar.

Con respecto a la segunda clase que se impartió en octubre, en el segundo mes del ciclo escolar, en este análisis del proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta, el profesor nuevamente trata de introducir estos conocimientos a través del planteamiento de problemas de cambio y combinación, derivados del libro, que implican sólo uno o dos dígitos, en el que deben resolver con material en principio y en el que se puede seguir observando cómo se enseña el algoritmo de la suma, pues la resta continua resolviéndose con material.

En esta clase se observa la solución de un problema de cambio con la solución del algoritmo donde se nota que algunos niños aún desconocen el procedimiento formal de la solución del algoritmo de la suma, ante esto el maestro escribe el algoritmo en el pizarrón, en su exposición señala el nombre del valor posicional con la primera letra, posteriormente traza una línea vertical para separar las unidades y las decenas, y recuerda las reglas del valor posicional por donde iniciar a sumar, en este caso por las unidades, para continuar con la integración de las decenas. Cómo ejemplo [CL2MA-AC2] se muestra lo siguiente:

> [De libro, se resuelve el problema “La mamá de Ricardo fue al mercado quiere comprar dos piñatas, pero no puede gastar más de 45 pesos. ¿Qué piñatas puede comprar?”. Además sobre el pizarrón se escribió nombre de piñatas con sus precios, que se sustituyen datos en el problema para un nuevo ejercicio…]

M: [Dice al grupo] Lean el siguiente problema
Ns: [Leen en coro, se observa dificultad para leer] La ma-má de Ri-car-do fue al mer-ca-do quie-re com-prar dos pi-ña-tas, pero no pue-de gas-tar más de 45 pesos. ¿Qué piñatas puede comprarrrrrr?
M: [Repite lectura, y dice:] La mamá de Ricardo quiere comprar, ¿cuántas piñatas?
Ns: Dos
M: Hay un detalle cuánto es lo más que puede gastar
Ns: 45 pesos
M: [Se dirige a una niña que levanto mano o terminó] A ver Verónica dinos cómo le hiciste para saber qué piñatas comprar y cuánto te gastabas
Na: [Pasa a pizarrón, no escribe nada, se pega a pared y dice:] ¿Pero cómo?
M: Verónica explícanos cómo le harías, que piñatas pueden comprar
Na: El “mundo” porque tiene la misma cantidad de dinero [una sola piñata]
M: [Explica al grupo] Pero si tiene que comprar dos…a ver Armando, ¿cuáles dijiste?
No: Payaso y zanahoria
M: ¿Cuánto vale el payaso?
Ns: 21 pesos
M: El payaso vale 21 pesos [anota en pizarrón], ¿cuál otra más dijiste Armando?
No: La zanahoria
M: ¿Cuánto cuesta?
Ns: 13
M: Armando, ¿cómo le hiciste para saber?
No: Sumándole
M: ¿Cómo le hiciste?, ¿cómo sumaste? [niño pasa a pizarrón]
No: [Escribe]…

$$\begin{array}{r} \mathbf{21} \\ + \underline{\mathbf{13}} \\ \mathbf{34} \end{array}$$

[Inicia sumando por las decenas, realiza computo mental]
M: ¿Cuánto se gastó?

Ns: 34
M: ¿Se gasto más de 35 pesos?
Ns: ¡Noooo!
M: ¿Se llevó dos piñatas?
Ns: ¡Siiiiii!
M: Si pero aquí hay un detalle [señala suma del niño] ¿Se dieron cuenta por dónde inicio a sumar Armando?
Ns: No…
M: De este lado [señala las decenas] dijo dos más uno, tres…tres más uno cuatro, ¿así sumamos?
Ns: ¡Nooo!
M: ¿Por dónde suman?
Ns: Primero las unidades
M: [Escribe la misma operación, explica y señala] Sumamos primero por las unidades, atento ¡eh! Armando si tengo el 21 [detiene explicación para llamar atención]… Rogelio si tu ya lo sabes deja que Luis Angel aprenda por que quiere saber mucho, por qué crees que está contigo…bien [pone una línea divisoria entre las unidades y las decenas, dice:] Esteban primero vamos a sumar las [señala las unidades]:
Ns: Las unidades
M: Las unidades, si tengo 1 más 3
Ns: 4
M: y luego las [señala las decenas]:
Ns: Las decenas
M: Dos decenas más una decena
Ns: Tres
M: Cuánto salió
Ns: 34
M: ¡34! [CL2MA-AC2]

En la clase anterior [CL2MA-AC2] se observa la intención del maestro por enseñar la suma mediante la solución de un problema, el planteamiento de preguntas por parte del profesor ayuda al niño a buscar la solución correcta. Sin embargo, sería importante que el profesor también formulara cuestiones que permitieran al niño reflexionar sobre el concepto de la suma y su relación con el procedimiento de solución, además de plantear otro tipo de problemas más complejos como son los de igualación y de comparación. En cuanto a la solución del algoritmo de la suma el maestro trata de integrar el conocimiento y la aplicación de las reglas del valor posicional, específicamente de iniciar a sumar por las unidades, sin aceptar los procedimientos espontáneos de los niños mismos que podrían emplearse como la base de los conocimiento matemáticos formales que el maestro enseña.

La tercera clase impartida a principios de enero, ejemplifica mejor este proceso de la enseñanza de la suma, en donde el profesor continua introduciendo la práctica de la suma con material y después se realiza el ejercicio del algoritmo sobre el pizarrón. En el primer ejercicio [CL3MA-AC1] realizan operaciones de suma sencillas sin transformación con tres dígitos. En esta parte el profesor puntualiza diciendo a los niños iniciar por el lugar de las unidades, siguiendo con las decenas y las centenas, los niños deben seguir este proceso y anotar la operación basándose en el trabajo del pizarrón.

En la actividad 2 [CL3MA-AC2] el maestro introduce la práctica de la suma con transformación de tres dígitos con material (utilizan recortes de papel: cuadritos sueltos para unidades, tiras con 10 cuadritos para decenas y tablas con 100 cuadritos para centenas).

De inicio, al buscar una solución con material algunos niños presentan dificultad cuando obtienen más de diez cuadritos porque no se percatan de que tiene más de 10, que deben cambiar por una hilera de 10, sin embargo el profesor lo observa y pide que cambien por una tira de 10. Más adelante, cuando trabajan con el algoritmo de la suma se observa que los niños aún continúan con dificultad para integrar unidades de mayor valor, pues en algunos casos los niños desconocen cómo proceder cuando obtienen más de diez unidades.

Otra dificultad en este ejercicio de la solución del algoritmo de la suma, es que algunos de los niños al escribir el algoritmo de la suma, aún no consideran el valor posicional de los números ubicando los números sin importar el lugar. Otra de sus dificultades es que al resolver la operación los niños al obtener más de diez unidades llevan la decena correspondiente hasta el lugar de las centenas.

En estos casos el profesor interviene para mostrar el error sin explicación o justificación alguna, o pidiendo que corrijan el error. El siguiente segmento [CL3MA-AC2] ayuda a ilustrar lo anterior.

[En esta actividad el maestro dicta una suma con transformación, donde primero los niños deben representar y solucionar con material, es decir representar cada valor con unidades sueltas (cuadritos), con decenas (hileras de 10 cuadritos) y con centenas (cuadricula con 100 cuadritos), después sumar las dos cantidades con ese material realizando los cambios necesarios, finalmente deben realizar la suma por escrito.]

M: [Después de resolver una suma sin transformación el maestro dice:] Otra suma primero 355…fórmenlo en su tabla.
Ns: [Forman el 355 con sus tablas]
M: [Revisa que tengan el 355 representado] a ese 355 le van a sumar 255, aparte de ese pongan 255 [se acerca a los niños y repite varias veces]… estamos haciendo suma 355 más 255 [ayuda a contar a un niño] 230, 240…te faltan son 255
N: [El niño agrega de 10 en 10]
M: [Pasa al pizarrón] ¡Pongan atención…Zahori, Janneth! [sobre el pizarrón escribe cuadricula, y explica] A ver, si tienen 10 cuadritos no lo pueden dejar así, tiene que cambiarla por uno de éstas [muestra tira con diez]...y así hagan sus cambios [revisa los ejercicios]…no veo que hagan sus cambios...¿ya los hicieron?
Ns: [Cambian diez cuadritos por una tira de diez y diez tiras de diez por un cuadrado de 100 cuadritos, la mayoría de los niños ya lo hicieron, los niños cuentan con su pareja. Se observa que algunos niños ya lo entendieron y otros no…]
M: [Pasa al pizarrón y resuelven entre todos]…Esta la van a resolver solitos…quienes ya entendieron como se lleva no pongan esto [señala rayita arriba de las decenas] y quienes no, pónganlo para que vayan entendiendo [Escribe suma en pizarrón … **346**
¡Resuelvan solitos o con su material!… **+144**

[Algunos niños ya lo resolvieron y lo llevan a calificar, sin embargo han olvidado poner la rayita del resultado].
M: No olviden poner la raya…no se les olvide poner la raya.
Ns: [Un niño lleva a calificar]
M: ¡El signo no va afuera!
Ns: [Diana lleva a calificar…regresa cabizbaja y enojada a su asiento].
M: Por eso esta tú material, Diana si no puedes así…

[Se observa que al igual que varios niños que han llevado a revisar, Michel lleva el uno de las decenas hasta el lugar de las centenas].

***M**: Michel esta decena debe ir arriba del cuatro [El maestro dice donde llevar].*
***No**: [Corrige]*
M: Ahora suma esto ¿cuánto te da?….[El maestro pasa al pizarrón y explica como hacer la suma…hace notar el error de que están llevando las decenas hasta el lugar de las centenas]. ¡Algunos niños están sumando las decenas con las centenas y así no es, tienen que sumarlas con las decenas! [CL3MA-AC2]

Actividad 3 [Los niños han resuelto la suma de: **320**] Después el profesor dice:
<u>+115</u>

M: Vamos a hacer un problema, esa suma la vamos a llevar a un problema…dice así: [escribe en pizarrón] Pedro por estudiar su papá le dio $320 pesos y su mamá le dio $115 ¿Cuánto dinero reunió Pedro? Leemos el problema…
Ns: [Leen todos]
M: ¿Qué operación vamos a emplear? [El maestro responde que una suma] ...Una suma..resuelven y traen, si tienen dudas pregunten.
Ns: [Copian problema, leen en voz baja]
M: [Camina entre las filas de los niños, los observa y va diciendo]…La suma la debo ver en su cuaderno…si tienen duda pregunten al compañero de a lado…en lo que resuelven ese problema…les califico su tarea…
Ns: [Diana dice:] No la traje…
M: Ya saben que quien no la trajo no sale al recreo…
[Abraham fue de los primeros en llevar a calificar y estuvo correcto]
***E**: [Observador pregunta a niño] ¿Por qué empleaste una suma…?*
***A**: El maestro dijo…*
***E**: ¿y tu por que crees?*
***A**: ...por el signo…*
Ns: [Resuelven entre todos el problema]
M: [Revisa soluciones, observa que varios niños escriben los números de la suma independientemente de su valor posicional, y el maestro explica] los números no pueden ser así…tenemos tres números arriba y tres abajo [señala los números de la suma] si no me escriben el resultado no se los voy a tomar como buena…

[Los niños resuelven dos problemas más…la secuencia de solución es la misma].
M: Escriban y resuelvan este problema: "José estudio 125 páginas en mayo y 110 en junio. ¿De cuántas páginas es el libro que leyó José? "
Na: ¿Lo sumamos o lo restamos?
No: Sumas
M: Estamos trabajando sumas

En la dinámica de esta tercera clase, durante le proceso de la enseñanza de la suma, los niños deben resolver la suma primero mediante el uso y su representación con material, y después resolver a través de la aplicación del algoritmo de la suma por escrito. El maestro trata de enseñar el conocimiento de la suma formal a partir de que el niño primero experimente con material concreto, para después enseñar el procedimiento del algoritmo escrito, y finalmente llevar la suma a un problema, y de esta manera llegar el conocimiento abstracto. En esta última parte trata de explicar las reglas de como operar con el valor posicional en el momento de resolver el algoritmo, sin embargo las explicaciones son dadas por el maestro, sin reflexión por el alumno y sin respuestas que garanticen su entendimiento, a pesar de que algunos niños reconocen las reglas para resolver correctamente el algoritmo. Su estrategia principal es mostrar a cada niño cómo hacerlo, en su caso recurre al pizarrón para mostrar el procedimiento de la suma, en todo caso pide a un alumno que pase al pizarrón para mostrar cómo se resuelve y sobre el pizarrón el profesor trata de aclarar las posibles dudas de cómo proceder para sumar e ir integrando unidades de mayor valor cuando obtiene más de diez unidades. Ante estas condiciones didácticas el maestro permanece mostrando un contrato basado en la ostensión.

Este proceso que sigue la enseñanza y aprendizaje de la suma continua centrado en el procedimiento correcto del algoritmo, y en la explicación básica de cómo integrar las decenas o centenas, al no haber reflexión por parte de los niños y limitarse a seguir las reglas del algoritmo, el no tener discusión durante la solución del problema la enseñanza se reduce al aprendizaje del algoritmo dejando de lado la parte conceptual.

De esta forma, a lo largo de la clase 3 al igual que las clases anteriores, se observa en las respuestas de los niños una forma de operar mecánicamente al solucionar el algoritmo de la suma, el profesor enfatiza el lugar por el que se debe iniciar a resolver la operación, qué deben hacer cuando al iniciar a sumar obtienen más de 10, así como cuál debe ser la ubicación de cada uno de los números obtenidos de ese primer resultado, qué hacer con el resto de lo números y escribir correctamente el algoritmo de la suma.

Se puede observar [CL3MA-AC3] cómo el maestro guía o en algunos casos cómo dice al grupo la resolución del procedimiento correcto, se nota en el discurso de algunos niños una confusión acerca de dónde debe ubicarse la decena cuando suman las unidades y obtienen más de diez. Esto conduce a la idea de que esta confusión obedece a la enseñaza orientada hacia un conocimiento centrado en cómo proceder con las reglas del valor posicional al solucionar el algoritmo de la suma, más que a un conocimiento conceptual, derivado del planteamiento de problemas, de su reflexión y su solución.

Es importante, puntualizar esta parte, a razón de que durante las evaluaciones, se observaron esas dificultades en algunos niños en la realización de los algoritmos de suma. Este patrón podría representar un conocimiento fragmentado o incompleto en el niño, y dónde el maestro no exploró, ni se cuestionó sobre como era ese "conocimiento" en el momento de tratar que los niños comprendieran como integrar y ubicar las decenas y las centenas, relacionado con los principios y conceptos del valor posicional y de la composición aditiva, en el momento de sumar.

Hasta aquí, este análisis permite observar un tipo de enseñaza centrada en la parte procedimental o algorítmica del conocimiento matemático, donde el profesor enfatiza la enseñanza de: los procedimientos de los algoritmos correctos, la aplicación correcta de las reglas del valor posicional y de composición aditiva, pese a las dificultades que llegaron a presentar los niños. Situaciones que corroboran la relación entre lo que ocurre durante las prácticas escolares y las concepciones del maestro, acerca de los conocimientos matemáticos que los niños de segundo grado deben aprender.

Como ejemplo, en su concepción expresa que una de las grandes preocupaciones de la educación en matemáticas, es el aprendizaje basado más en la memorización y en el entrenamiento de las operaciones más a nivel del simple algoritmo que su relación con la parte conceptual [C2MA-P4], sin embargo esta situación se presenta en su clase. En su concepción expresa:

"La problemática en las matemáticas es el razonamiento, muchos niños entienden números, saben interpretar números, de hecho niños de sexto año saben lo que es una suma, saben lo que es una resta, saben lo que es una **multiplicación pero lo saben de una manera mecánica**, pero lo que no entienden es que la multiplicación es una suma abstracta, y que la suma es un desarrollo de una multiplicación, es lo que ellos no han entendido, no tienen ese razonamiento, no saben interpretar un problema. **Cuando se les plantea un problema lo que ellos preguntan ¿maestro es suma?, ¿maestro es resta?, ¿Es división? la problemática mundial de las desventajas de esta materia es simplemente el razonamiento, todo lo que ellos aprenden es de manera mecánica**, primero multiplicas esto, luego esto el otro, **lo hacen de manera memorística – mecánico** y no aprenden de que por ejemplo en una resta porque si tenemos 31 menos ocho como es que el 8 se convierte en 11, no saben que el tres le prestará un número al uno y se convirtiera en once no entiende que lo que esta prestando es un decena no simplemente un número en si, ese proceso es el razonamiento" [C2MA-P4]

Aún cuando el profesor trata aproximarse a una concepción de la dificultad de la enseñanza de las matemáticas en segundo grado, como son: la comprensión conceptual y algorítmica de la suma y la resta, y la comprensión de los principios del valor posicional, y de composición aditiva [C2MA-P5], no se responsabiliza de la falta de razonamiento de sus alumnos. Ante ello, durante su enseñanza se presentan situaciones, en la que los niños deben de resolver correctamente los procedimientos y llegar a un resultado correcto, sin llegar a la conceptualización de estos conocimientos matemáticos:

"El aprendizaje... digamos que el problema de las matemáticas es el razonamiento, en su aprendizaje a nivel primaria lo que les cuesta mucho trabajo es que no saben relacionar el número con la realidad que representa, no es que sean todos pero hay quienes les cuesta identificar un número y ese numero relacionarlo a la vez con la cantidad que están esperando, **otro problema del aprendizaje que se presenta y que les cuesta mucha dificultad, es entender lo que es una decena y que es una unidad y las ubicaciones que tienen cada número y como afecta la posición que tiene con respecto a otro.** Un dos al inicio es un dos, pero si ese dos lo recorro un espacio hacia la izquierda no entienden que es dos ya no es dos, sino que es un veinte ese proceso de asimilación...de cardinalidad. Es lo que les cuesta mucho trabajo" [C2MA-P5].

En resumen, en la tercera clase que se desarrolla en el mes de enero, se observa a niños que tienen dificultad para operar y conceptuar la suma, específicamente cuando algunos de los alumnos pasan al pizarrón y no saben o se les dificulta resolver el algoritmo de la suma. A pesar de los esfuerzos del profesor por enfatizar la enseñanza de estos conceptos predomina la enseñanza centrada en los procedimientos.

Finalmente, en la cuarta clase que ocurrió a fines del mes de enero, ésta se centró prácticamente en la solución de dos problemas que implicaban resta, y la solución de varios ejercicios del algoritmo de la resta con transformación, donde únicamente se practicó una solución del algoritmo de la suma.

Con relación al proceso de la enseñanza y aprendizaje de la resta, el profesor trató de introducir este conocimiento, como lo había hecho en clases anteriores, primero a través del planteamiento de un problema y la solución de algoritmos con tres dígitos que implican restas con y sin transformación, que deberían resolverse con material, con el empleo de dibujos gráficos y finalmente solucionar con el algoritmo de la resta.

Como ejemplo, en la primera actividad [CL4MA-AC1] se resuelve un problema que implica una resta con transformación, donde se observa dificultad en algunos niños para decidir si emplearán una suma o una resta para solucionar, situación que podría vincularse con la falta de comprensión del concepto que implica la resta, así como el algoritmo necesario para solucionar el problema.

[De inicio, después de que los niños han resuelto una suma comprobando el resultado con la calculadora, el maestro dicta un problema que implica una resta con transformación:]

M: Ahora, vamos a empezar la resta, si ya colocaron la fecha, pongan la resta [escribe]
N: Ya
M: Reparte cartulinas con el sistema decimal [cartulinas que representan el parte de arriba una **C** para centenas, una **D** para decenas y una **U** para Unidades, de color Amarillo, Rojo y azul respectivamente]
Ns: [A algunos niños y niñas nos le toca cartulina]...a mi no me tocó.
[La señora de los comedores toca y pasa para contar los niños y niñas que llegaron]
Ns: Buenos días
S: Los cuenta y se retira
M: [Reparte cuadriculas de 100, filas con 10 cuadros y cuadritos solos] ¡Dejen de hablar, a quien no le tocó lo utilizan con su compañero de a lado...guardamos silencio, anotamos en cuaderno problema uno!
Na: ¿De tarea?
M: No, es ahorita
Na: ¡No es cierto!

M: [Leen problema:] Jose Carlos tenía 326 pesos, si se compró una chamarra de 115. ¿Cuánto le quedó de dinero?...Si tenía 326 pesos y dice que se compró, ¿aumentó o quitó?
Ns: Se quitó
M: ¿Por qué Juan Carlos?
JC: [Permanece en silencio]...Resto
No: No puede sumar
Na: [Da respuesta opuesta] No, aumentó
M: ¿Aumentó? [El mismo contesta] ¡No!, Si compran un *boing*, ¿aumentó o disminuyó su dinero?
Ns: No aumentó…disminuyó
M: [Sobre el pizarrón escriben operación de resta, el maestro dice:] ¿Qué número coloco arriba?
Ns: 326
M: Menos qué…
Ns: 115
M: Coloquen el 326 en su tabla utilicen su material [Ha escrito la resta en el pizarrón]… ya deben tener el problema escrito. ¿Cuántas unidades? seis, ¿cuántas decenas? dos, ¿cuántas centenas? tres [repite] 326…
***No**: [Lleva su cuaderno para mostrar una operación y no la representación en su tabla]*
***M**: No Armando, estás sumando…es resta* (CL4MA-AC1)

Con respecto al algoritmo de la resta a partir de la segunda a la cuarta actividad se observa el ejercicio de la solución de tres operaciones de resta con y sin transformación. Donde se nota [CL4MA-AC1] que durante la solución del algoritmo, los niños presentan dificultad con las restas que requieren transformación, precisamente en el momento de tener que descomponer o "pedir prestada" una decena. Esta situación se ilustró en el primer segmento que se utilizó en la parte del análisis del tipo de contrato.

Una vez que han resuelto el problema antes citado, y ante la problemática que ha captado el maestro en el momento que los niños tratan de resolver la resta, decide realizar una serie de ejercicios con a resta. En esta otra parte [CL4MA-AC2] el profesor trata de explicar el procedimiento durante la descomposición de ciertos valores mayores en unidades de menor valor y su funcionamiento en el momento de resolver el algoritmo de la resta. Ante esta situación el profesor recuerda las reglas de cómo proceder en restas que implican transformación. En este proceso el profesor trata de ilustrar primero con un gráfico, explicando y pidiendo que deben pedir "prestada una decena y convertirla en diez cuadritos" (unidades) y después sumarlos con los que ya se tenía y de esta forma poder restar la cantidad sugerida, además de señalar que el número al que se pidió prestado disminuye una unidad de valor, y así continuar con el proceso de sustracción hasta las centenas. La explicación anterior la da a los niños utilizando material y finalmente trata de llevar la explicación anterior con la solución del algoritmo de la resta por escrito, tal como se ilustra enseguida:

> **[**Una vez que los niños han resuelto un problema de resta, y ante las dificultades que aún mantienen para solucionarla, el profesor decide practicar una serie de ejercicios de resta, uno de ellos es el siguiente:]
>
> **M**: Vamos a dejar de hacer problemas y vamos a hacer restas con su material…pongan 420, debe haber cero unidades, 2 decenas y 4 centenas [revisa] ....no veo Rogelio. [Advierte) la calculadora solo la vamos a utilizar cuando ya esté… a ese 420 quítenle 212, réstenle 212
> **No**: No se puede
> **M**: ¿Por qué Rogelio?
> **R**: No tiene nada de unidades
> **M**: ¿Qué tienen que hacer? Recuerden que el cero es amigo del 2, y qué le va a pedir…
> **No**: Pedirle prestada una decena
> **M**: …en lugar de poner la decena completa ¿qué tenemos que hacer?
> **Na**: Hacerla unidades
> **M**: Hacerla unidades, esa decena háganla unidades.
> No: No se puede
> **M**: Sí se puede, en lugar de poner la decena pongan diez unidades. [Ayuda a Zahori] el cero le pide prestada una decena al 2, ya se la pidió, y se convierte en diez unidades, a ese 420 ¿cuántas le quito más…?
> **Ns**: No se puede
> **M**: [Regresa al pizarrón] voy a hacerlo en el pizarrón, pongan atención, [dibuja tabla, y [agrega], después lo hacen con material. Primero necesitamos que entiendan por qué se convierte este cero [de las unidades] en 15 o en 10.
> **Ns**: [Los niños se muestran atentos]
>
> **M**: [Representa en cuadrícula 4 centenas con 4 cuadrados de 100, luego 2 decenas con dos filas de 10, sin poner nada en unidades, al mismo tiempo que dice]...tenemos aquí 100, 200, 300, 400; y tenemos aquí una fila de 10 y otra de 10; y en unidades nada. [Regresa a fila de centenas y cuenta hasta la fila de unidades, va señalando] aquí tenemos 100, 200, 300, 400…410, 420…¿cuánto le vamos a quitar?
> **Na**: 400
> **M**: [Observa grupo] cuánto le vamos a quitar Armando…Diana…voy a preguntar a los más distraídos

No: [Otro niño contesta] ¡Dos!
M: A este 420 le vamos le vamos a quitar 200…[señala 212 y espera respuesta]
Ns: 212
M: [Señala el cero del 420] a este cero le vamos a quitar pero no tiene nada…
Na: Pero la decena la convertimos en unidades.
M: ¡Aja! [Continua exposición] Pero recuerden que el cero es cuate de éste [señala 2 del 240] y le dice: ¡Oye me vinieron a cobrar dos pesos pero no tengo dinero préstame una decena!.y le dice sí, entonces le presta una decena y esa decena se va a convertir en:
Ns: Diez unidades
M: Ahora cuántas unidades tengo
Ns: ¡Diez!
M: A esas diez unidades, Monse, que ya consiguió, ¿el cero ahora cuánto tiene?
Ns: Diez
M: …y con esas diez que ya consiguió el cero, ¿Viridiana, qué va a pagar?
Ns. y M: Los dos pesos
M: Los dos pesos que debe, quito dos [borra dos unidades del 10] quiten esas dos de los 10 que pusieron
Ns: [Quitan dos]
M: Pero resulta que esta decena que dejó también debe [señala la decena sobrante] es uno menos uno…
Ns: Cero
M: Quitamos ésta ya no está [borra la decena], por último este cuatro [señala el 4 de las centenas del 420] cuánto debe
Ns: Dos
M: 2, entonces quitamos 2, ¿cuánto nos quedó?
Ns: 2
M: [Señala resultado final] es 208. **[CL4MA-AC2]**

Es cierto que el profesor intenta explicar en forma grupal o individual, mediante las estrategias ya descritas, sin embargo en la solución del algoritmo de la resta que implica transformación a los niños les continúa causando dificultad. En la quinta actividad (CL4MA-AC5) se nota que la mayoría de los niños siguen el patrón de escribir la operación conforme aparecen los datos, se observa la dificultad para analizar y reflexionar la relación entre las variables del problema, así como utilizar adecuadamente los datos al escribir el algoritmo. Con lo que se demuestra nuevamente un conocimiento matemático del niño caracterizado por seguir procedimientos y estrategias aprendidas de los ejercicios hechos, sin un razonamiento o explicación conceptual. El siguiente párrafo ayuda a ilustrar lo anterior:

[Después de que han resuelto cuatro operaciones de resta, el profesor dicta el segundo y último problema en la clase:]
M: Anotan el siguiente problema [Anota en el pizarrón] Eduardo compró un juguete que cuesta 182 y le dan 290. ¿Cuánto le quedo de dinero?...resuelven, si no tienen la resta no se las reviso.
Ns: [Trabajan]
M: [Se va al fondo del salón] Si terminan les reviso su tarea…[un niño pega a Alejandra, Maestro llama la atención].
No: [Abraham termina y lleva a revisar, ha invertido las cantidades en la operación escrita:
182]
<u>- 290</u>
M: A 182 le puedes quitar 290, cuánto le quitaron, a quien le vas a quitar al 290 ó al 182.

N: [Abraham observa]…al 290
***M**: Quítaselo…abusados, lo que tiene de dinero es esto [señala 290] y le quito esto [señala 182]…*
A: [Regresa a su lugar y borra]
N: [Otro niño lleva]
M: [Revisa sin explicar] …está mal
Se observa que a casi todos los niños les ayuda y trata de explicar
M: [Revisa] Esta al revés…
Ns: [Los niños que ya han sido calificados regresan al fondo del salón y juegan, platican, hacen ruido …llega alguien al salón]
M: Los niños que han perdido un suéter o chamarra vayan con Zahori.
[El maestro explica a una niña y a un niño en el pizarrón, lee nuevamente el problema y pregunta a los niños]…cuánto tenía de dinero..298 [escribe resta] de esos 298 ¿cuánto gastó 182?…[Explica nuevamente la forma de cómo realizar la resta]
Ns: [Casi todos los niños se salieron, el maestro inicia a contar 1,2,3…8,9,… va por ellos, y regresa al pizarrón]… recuerden que el cero no tiene y debe pedir prestado…[se molesta y observa fijamente] me dicen a qué horas sigo...
No: Ya maestro, ya puede empezar
M: [Lee nuevamente el problema] Eduardo compró ¿cuánto cuesta?
Ns: 182
M: Si tiene 290, me preguntan cuánto te quedo de dinero, ¿cuánto tenía de dinero Eduardo?
Ns: 290
M: 290 que...
Ns: Pesos
M: A ver Sofía, ¿Eduardo puede tener de dinero esta cantidad [señala 182]?
Na: No, eso le costó
M: A esos 290, ¿cuánto le vamos a quitar?
Ns: 182…porque eso le costó
M: [Escribe la resta: 290]
-182
a este cero cuando le quitamos 2…no se puede, pide prestada... convierte en…
Ns: 10
M: 10 menos 2
Ns: 8
M: [Señala resta] el 9 ya no es 9, es 8, 8 menos 8 es…
Ns: Cero
M: El dos no prestó nada, dos menos uno
Ns: Uno
M: [Señala lo que resultó y dice finalmente)]¡Eso es el resultado!
Ns: [Después de explicación en pizarrón, dos niños llevan a calificar, el maestro califica] **[CL4MA-AC5].**

En este proceso los niños deben resolver la resta primero mediante el uso y su representación con material concreto, y resolver a través de la aplicación del algoritmo de la resta por escrito. El maestro trata de enseñar el conocimiento de la resta formal a partir de que el niño primero experimente con material concreto, para después enseñar el procedimiento del algoritmo escrito, el conocimiento abstracto. En esta última parte trata de explicar cómo operar con el valor posicional de los números y la descomposición de unidades de valor en el momento de resolver el algoritmo, sin embargo las explicaciones son dadas por el maestro, sin reflexión por el alumno y con respuestas que garanticen su entendimiento, a pesar de que algunos niños reconocen las reglas que para resolver correctamente el algoritmo, y en algunos casos se observa la explicación escasa de sus respuestas por parte de los alumnos.

De este modo, en la actividad 5 de la clase 4 [**CL4MA-AC5]**, se observa en las respuestas de los niños una forma de operar mecánicamente al solucionar el algoritmo de la resta con o sin transformación, el profesor enfatiza el lugar por el que se debe iniciar a resolver la operación, qué deben hacer cuando al iniciar a restar no "alcanza" y tener que pedir "prestado" para desintegrar la decena en unidades, hasta complementar la solución del algoritmo.

Por otra parte, en cuanto a las dificultades de la instrucción y que posiblemente afecte el entendimiento de los conceptos en el niño, es además la forma en que el maestro utiliza el lenguaje durante su instrucción caracterizado por el empleo de términos o palabras centradas más en "la matemática escolar o cotidiana" diferente al lenguaje de la "matemática de los matemáticos científicos" (Laplante,1996; Mercer,1996). Puesto, que en su práctica, en su vocabulario, en sus exigencias, etc., el profesor pone en juego "conceptos" o "leyes" cuyo objetivo es permitir la acción del alumno y justificar las decisiones del profesor (Brousseau, 2000). Por lo que un lenguaje de la matemática cotidiana puede ser utilizado para acercarse a la introducción del lenguaje de la "matemática de los matemáticos científicos".

Como consecuencia, en el diálogo de este segmento [**CL4MA-AC2]**, se muestra un momento en el que el profesor al explicar la descomposición de una decena, utiliza un lenguaje metafórico: "*… recuerden que el cero es amigo de este [señala el 2 del 420] y le dice: ¡oye me vinieron a cobrar dos pesos pero no tengo dinero préstame una decena, y esa decena se va a convertir en…"* Esto cuando se refieren a una acción del principio de composición aditiva, la de descomponer una decena en unidades, siendo que durante el proceso de la enseñanza el uso del lenguaje se considera como indispensable para transmitir un conocimiento científico, situación que limita el uso de conceptos formales y el que los niños deberían apropiarse, lo que podría desviar el objetivo de la enseñanza original, ante un uso excesivo de las analogías.

Esta fue la cuarta clase que ocurrió en el mes de enero del ciclo escolar, durante los ejercicios se observó a niños que muestran dificultad para operar y conceptuar tanto con la suma como con la resta, específicamente esto queda claro cuando algunos de los alumnos pasan al pizarrón y no saben o se les dificulta elegir o resolver el algoritmo de la resta. Se observó el interés y la insistencia del profesor por introducir estos conocimientos, principalmente trata de enfatizar los algoritmos de la suma y la resta, pero muy poco el de su conocimiento conceptual, predomina la enseñanza y aprendizaje de los algoritmos, a pesar de plantear dos problemas de cambio con sustracción.

De acuerdo con lo anterior, este proceso que sigue la enseñanza y aprendizaje de la resta, continua centrado en el procedimiento correcto del algoritmo, y en la explicación básica de como poder "descomponer" las unidades de valor y en su caso sustraer, al no haber reflexión por parte de los niños, de limitarse a seguir las reglas y aplicación del algoritmo, se estaría limitando la comprensión formal de aspectos conceptuales como la importancia que tiene conocer el valor posicional de los números, la desintegración de unidades de diferente valor y su aplicación en la solución del algoritmo la resta.

Podría decirse que implícitamente el profesor intenta enseñar estos conocimientos de un modo *sencillo* con los niños, sin lograr una integración formal de estos conocimientos señalados. Por lo que si el profesor ya ha logrado mostrar estos conocimientos a sus alumnos este debe aprovechar y buscar otras actividades y estrategias que culminen con la enseñanza del conocimiento formal de la suma, la resta, y la integración del conocimiento del sistema decimal en la solución de diversos tipos de problemas.

6.5.3. Los problemas como base para el aprendizaje matemático

Ante la diversidad de estrategias y/o formas utilizadas en la búsqueda del aprendizaje o la construcción de conocimientos específicos, el aprendizaje basado en problemas resulta clave en los actuales modelos de enseñanza constructivista. De acuerdo con Díaz Barriga (2005) el aprendizaje basado en problemas consiste en el planteamiento de una situación problema, donde su construcción, análisis y/o solución constituyen el foco central de la experiencia, y donde la enseñanza consiste en promover deliberadamente el desarrollo del proceso de indagación y resolución del problema en cuestión. Suele definirse como una experiencia pedagógica de tipo práctico organizada para investigar y resolver problemas vinculados al mundo real, la cual fomenta el aprendizaje activo y la integración del aprendizaje escolar en la vida real. Como metodología de enseñanza, el aprendizaje basado en problemas requiere la elaboración y presentación de situaciones reales o simuladas –siempre lo más auténticas y holistas posible- relacionadas con la construcción de conocimiento o el ejercicio reflexivo de determinada destreza en una ámbito de conocimiento, práctica o ejercicio profesional particular.

El aprendizaje basado en problemas puede entenderse y trabajarse en una doble vertiente: en el nivel del diseño del currículo y como estrategia de enseñanza (Díaz Barriga y Hernández, 2002; Edens, 2002; Posner, 2004, cit. en Díaz Barriga, 2006). En ambas vertientes, el interés estriba en fomentar el aprendizaje activo, aprender mediante la experiencia práctica y la reflexión, vincular el aprendizaje escolar a la vida real, desarrollar habilidades de pensamiento y toma de decisiones, así como ofrecer la posibilidad de integrar el conocimiento procedente de distintas disciplinas. Por otra parte, Reigeluth (2000) sostiene que el modelo educativo requerido en la nueva era de la información tiene como rasgos más notables el aprendizaje cooperativo, la reflexión, las habilidades de comunicación, las aptitudes para resolver problemas y construir significados, y el papel del docente como preparador cognitivo o facilitador del aprendizaje.

Por su parte, Brousseau (2000) en su teoría de las situaciones didácticas, considera un problema o ejercicio no como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio al que "responde el sujeto" siguiendo algunas reglas.

Ubicados en el campo de las matemáticas diversos autores (ejem. Vergnaud 1997; Mendoza, 2004) en su análisis refieren que un problema puede ser entendido como "una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para lo cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución". La práctica y solución continua de los problemas puede transformarlos en ejercicios, por lo que es necesario diferenciar entre lo que es un ejercicio y lo que es un problema. De acuerdo con Pozo (1998) un problema se diferencia de un ejercicio, en que en este último se dispone de mecanismos que llevan de forma inmediata a la solución y que se puede convertir en algo rutinario.

De acuerdo con los planteamientos y programa de la SEP, (1999), se tiene que el planteamiento y la solución de problemas son la base para que los niños construyan su conocimiento matemático. Dentro de estos planteamientos destacan las siguientes características del enfoque que tiene como fundamento principal la resolución de problemas (SEP, 1999):

a) La actividad del niño enfrentado a situaciones problemáticas es el punto de partida y el elemento central de las secuencias didácticas que se proponen.

b) En la variedad de problemas que se presentan a los alumnos radica la significatividad de los aprendizajes construidos o en vías de construcción.
c) En el proceso de resolución de problemas se elaboran estrategias personales de resolución.
d) El diálogo y la confrontación de resultados y procedimientos entre los niños contribuyen al aprendizaje.
e) El aprendizaje es entendido como un proceso caracterizado por aproximaciones sucesivas mediante el cual los niños tienen acceso a representaciones y procedimientos cada vez más formales.
f) La función del profesor será coordinar las discusiones, plantear situaciones didácticas que permitan analizar los contenidos de forma gradual y advertir los momentos en que podrá llevar a los alumnos a seguir las estrategias convencionales.

Al tomar como referente las características anteriores del enfoque que tiene como fundamento la resolución de problemas en el programa de la SEP (1999) y lo que ocurre en la clase del maestro Mario, en un primer análisis, se observa la intención del profesor por enseñar el conocimiento de la suma y la resta sustentados en el planteamiento de problemas, apoyado con el uso estratégico de materiales y en el caso más avanzado que solucionen con una algoritmo. Sin embargo, el maestro Mario al plantear en su clase una serie de problemas sencillos de agregar y quitar, los niños utilizan la misma estrategia de conteo sustrayendo o agregando cantidades, lo que sería una enseñanza basada más en la solución de ejercicios (Hembree y Marsh, 1991; Pozo, 1998; Mendoza, 2004) que en problemas.

En cuanto a la calidad de problemas planteados, en las clases analizados del maestro Mario de segundo grado, quedan enmarcados en una serie de ejercicios que de problemas. Que de acuerdo con sus características, se observan ejercicios que son solucionados con estrategias o técnicas procedimentales y rutinarias. Al respecto Pozo (1998) plantea que con el tiempo los problemas al ser solucionados repetidamente, pasan a ser ejercicios, con la necesidad de plantear nuevos problemas, que sean innovadores y donde sea necesario que el niño emplee sus estrategias y conocimientos matemáticos, que al ser utilizados permitan desarrollar más estrategias y que logre incrementar o generar un conocimiento matemático nuevo.

En cuanto a la diversidad de los problemas, se observa en las clases el planteamiento de problemas sencillos de comparación y de cambio, que establecen una relación sencilla entre las variables que implican la adición o sustracción, que involucran uno o dos dígitos. En las dos últimas clases se considera el manejo de cantidades hasta con tres dígitos siempre con la incógnita al final. Predominan los problemas por aplicar y la ausencia de problemas por descubrir, y relacionados en su contenido con el eje de los números y sus relaciones y sus operaciones.

El predominio del planteamiento de preguntas es de bajo nivel cognitivo, total ausencia de problemas planteados por los alumnos, que son más bien problemas planteados por el profesor y con el apoyo de actividades del libro, en donde los niños llegan a participar esporádicamente únicamente en la aportación de los datos a incluir, sin un trabajo reflexivo en el alumno.

En general, después del análisis de las cuatro clases anteriores del maestro Mario, se observa que en el planteamiento de problemas el profesor basa su clase en algunos momentos en el libro y que también en sus concepciones lo considera como un recurso para apoyar sus clases, además del juego y de materiales diversos. Ante este práctica con escasos problemas sencillos, se muestra la necesidad de incluir situaciones o una diversidad de problemas, que establezcan diferentes niveles de complejidad entre sus planteamientos, más contextualizados, además de que durante su solución se incluya en el diálogo preguntas que permitan la reflexión y la comprensión en los alumnos, acerca del concepto y algoritmo de la suma y la resta, planteados en problemas más situados.

Durante estas clases, el proceso de enseñanza y aprendizaje sigue una secuencia donde la interacción para la discusión de procedimientos y resultados es mínima, se observa más un trabajo individual del alumno. Una observación en esta clase semejante a la que realiza Claudine (2003), es que el trabajo del profesor parece que consiste en ofrecer a los alumnos un procedimiento para resolver los problemas, que posiblemente dificultaría o no permitiría la comprensión conceptual por parte del alumno, pues no se funda en el análisis del trabajo que se tiene que realizar y porque no permitiría un trabajo cognitivo del niño con respecto al trabajo matemático especifico que está en juego.

Brousseau (1997) plantea desde de la teoría de las situaciones didácticas, que en la moderna concepción de la enseñanza además se requiere al maestro para provocar la adaptación esperada en sus estudiantes por una elección juiciosa de "problemas" que pone frente a sus estudiantes. Problemas, elegidos de tal forma que los estudiantes puedan aceptarlos, que puedan hacer actuar a los estudiantes, hablar, pensar e involucrarse por su propia motivación. Los resultados anteriores, de este trabajo, en cuanto a la solución de problemas matemáticos como base para la enseñanza de las matemáticas, son muy similares a los resultados presentados en el estudio de Mendoza (2004; coordinado por Ávila), que realizó con grupos de segundo, cuarto y quinto grado, de educación pública, en aulas mexicanas. Acerca de una inclinación de los profesores por el planteamiento de preguntas de bajo nivel cognitivo, poca presencia de problemas planteados por los alumnos, predominio de los problemas por aplicar, y mayor asociación de los problemas con el contenido del eje los números, sus relaciones y sus operaciones.

En otro punto, en el análisis de la estructura y de la forma como transcurren las clases (Lemke, 1997) se observa en una primera parte la introducción a la clase, el profesor recurre a la exposición sobre el pizarrón, al repaso de conocimientos relacionados con las reglas del algoritmo de la suma, el trabajo individual de los alumnos, y a la discusión grupal de los resultados obtenidos. Sin embargo, uno de los principales patrones para la enseñanza, en la estructura de la actividad más común, que describe Lemke (1997) es el *diálogo triádico*, en donde el profesor plantea preguntas, pide a los alumnos que respondan y evalúa las respuestas. Cuando las respuestas son correctas se reafirma lo que dice el alumno y en caso contrario se corrige.

Finalmente, al comparar la forma en que ocurre la instrucción entre los dos profesores durante la enseñanza y aprendizaje de estos conocimientos matemáticos, la maestra Ana de primer grado en sus prácticas educativas analizadas no se observa el planteamiento de problemas de suma o resta.

En cuanto al tipo de relación didáctica que los profesores establecen con sus alumnos, se observa con la maestra Ana de primer grado que se centra en la enseñanza de los números (numeral y cardinal), en la solución de sumas en su mayoría con material y muy escasamente en la resta. En su labor de enseñanza la maestra Ana continuamente muestra el material a los niños, frente al grupo expone cómo sumar con el material, en otras ocasiones pide que uno de los niños pase al frente para mostrar a sus compañeros que ha aprendido como realizar una suma o cómo contar, lo que daría lugar a sus clases sustentadas en un contrato de ostensión. Sin embargo, la maestra Ana en sus cuatro clases pide continuamente que los niños se fijen y realicen los ejercicios de conteo o de suma, su persistencia por que los niños repitan cuantas veces sea necesario los ejercicios que plantea, con la intención posible que con esto aprenderán lo que daría lugar al predominio de los contratos que van del de reproducción formal al de condicionamiento, basados en la realización de los ejercicios y de la repetición constante de estos. Ante estos últimos tipos de contrato se permite el aprendizaje de los niños. Sin embargo podría limitar y dificultar el aprendizaje matemático del niño, situación que es reconocida por la misma maestra en la última clase del mes de junio, en la que a los niños aún se les dificulta reconocer la cardinalidad del número en cantidades menores [CL4AN-AC1].

[En esta clase los niños resuelven sumas de un dígito con palitos]
M: Ahora vamos a hacer otro ejercicio, porque al ratito vamos hacer en nuestro cuaderno, lo tienen que hacer con los palitos, porque todavía hay muchos niños que se equivocan. Vamos a representar, ahora, 3, [una niña bosteza], 3, niños que estén jugando me acerco y el material lo levantamos, número 3, más, a ver más, 5, ¿cuánto es? 3 + 5
Ns: [Niños representan los números con palitos azules y los cuentan]
Na: [Levanta la mano con los palitos para enseñar que está representando cada número]
M: [Sin comentarios a la niña]
No: [Iván] 45
Ns: [algunos] 8
M: Iván estamos con palitos azules, ni si quiera te estas fijando Iván
M: 3 y luego 5, ¿Cuanto son? [muestra 8 palitos azules]
Ns: 8 [CL4AN-AC1]

En cuanto al maestro Mario se observa el interés del profesor por mostrar y explicar una y otra vez de cómo proceder para solucionar los algoritmos de la suma o de la resta, incluso pareciera que llega a agotar sus recursos y estrategias, como fue el caso en que explicó el algoritmo de la suma o la resta, en donde emplea diversas estrategias como la representación con material, el empleo de un diagrama dibujado sobre el pizarrón, hasta sus intentos por integrar y explicar estos conocimientos del valor posicional y de la composición aditiva, en una operación por escrito frente al pizarrón, pidiendo continuamente que pase alguno de los alumnos a resolver, en su caso que los demás niños permanezcan atentos y contribuyan a resolver bien, ante estas estrategias de mostración y exposición se da lugar al contrato de ostensión.

En la clase del maestro Mario, ante el empleo del contrato de ostensión, éste parece que contribuye más a la adquisición de los algoritmos de la suma y la resta, a la resolución de ejercicios que implican el reconocimiento del valor posicional y de la composición aditiva, tal como lo muestran en la parte de de los resultados grupales en sus avances. Sin embargo, escasamente se promovería el entendimiento conceptual de la suma y la resta, donde aún se observan dificultades en los niños en los procedimientos de los algoritmos de la suma y la resta, así como dificultades en la forma de operar con el valor posicional. Los conocimientos que adquieren los niños de segundo grado, bajo el contrato de ostensión, quedan en duda, como se muestra en el momento de que los niños, al solucionar problemas aditivos con diferentes tipos tal como muestra en los estudios de caso, prefieren solucionar con sus propias estrategias de calculo u conteo (que no eran permitidas en clase cuando se enseñaba el algoritmo formal), y en las que muy difícilmente podrían emplear los conocimientos adquiridos como herramientas derivadas de su conocimiento matemático formal que el maestro enseña para solucionar problemas. Por lo que sería necesario promover en los profesores para que estos se acercaran a desarrollar contratos didácticos *constructivistas* o *basados en saberes previos*, donde se pueda promover mas los conocimientos conceptuales de la suma y la resta en la solución de problemas aditivos.

Por otra parte, se observa en ambos maestros la ocurrencia del "Efecto de Topaze" (Brousseau, 1997, 2000; Avila, 2001ª, 2001b) que ocurre constantemente y en mayor medida con la maestra Ana, en la que en los momentos de ofrecer alguna explicación a los niños concluyen por sugerir pistas, interrogantes o en último de los casos dar las respuestas de solución a sus alumnos, no se pierde el objetivo total de la enseñanza pero si podría afectarse, al no ser el mismo niño quien lo entiende o explica. Por lo que esta situación dificultaría o imposibilitaría que el niño adquiera el aprendizaje matemático que se pretende.

En cuanto a sus contenidos temáticos que se tratan en las clases analizadas, la maestra Ana centra sus actividades en el conteo, el reconocimiento de la cardinalidad y de los numerales, la representación del valor de las decenas, la adición y la sustracción con material, y el algoritmo de la suma con un resultado basado en la solución mediante el conteo y no en el procedimiento del algoritmo como tal, no se observa el trabajo del algoritmo de la resta y escasos ejercicios de sustracción. Se observa una enseñanza de las matemáticas basada en una serie de ejercicios repetitivos, con la ausencia de problemas matemáticos.

En el maestro Mario de segundo grado, sus clases se ubican en la solución de los algoritmos con y sin transformación hasta con tres dígitos de la suma y la resta, en el conocimiento del valor posicional y de la composición aditiva, en algunos problemas de adición y de sustracción y sus respectivos algoritmos de la suma y la resta,. Se observa una enseñanza basada en la solución de ejercicios constante que puntualiza la ejecución correcta de los algoritmos, de la operatividad del valor posicional, con la necesidad de contextualizarse en problemas auténticos que promuevan el desarrollo no sólo algorítmico sino también de su concepto, guiando y apoyando a los alumnos hacia un conocimiento matemático que integre más conocimientos matemáticos.

Finalmente, en ambos maestros se observa una instrucción que se apoya del empleo de materiales, libros, el diálogo triádico, el trabajo en el pizarrón y el trabajo individual.

A continuación se presenta un esquema (Figura 10) donde se relacionan las concepciones del docente, su práctica y el aprendizaje de los alumnos.

6.6 Relación entre concepciones docentes, práctica educativa, conocimientos matemáticos del alumno y contenidos curriculares de la SEP.

Figura 10. Esquema del pensamiento y la práctica de la maestra de primer grado

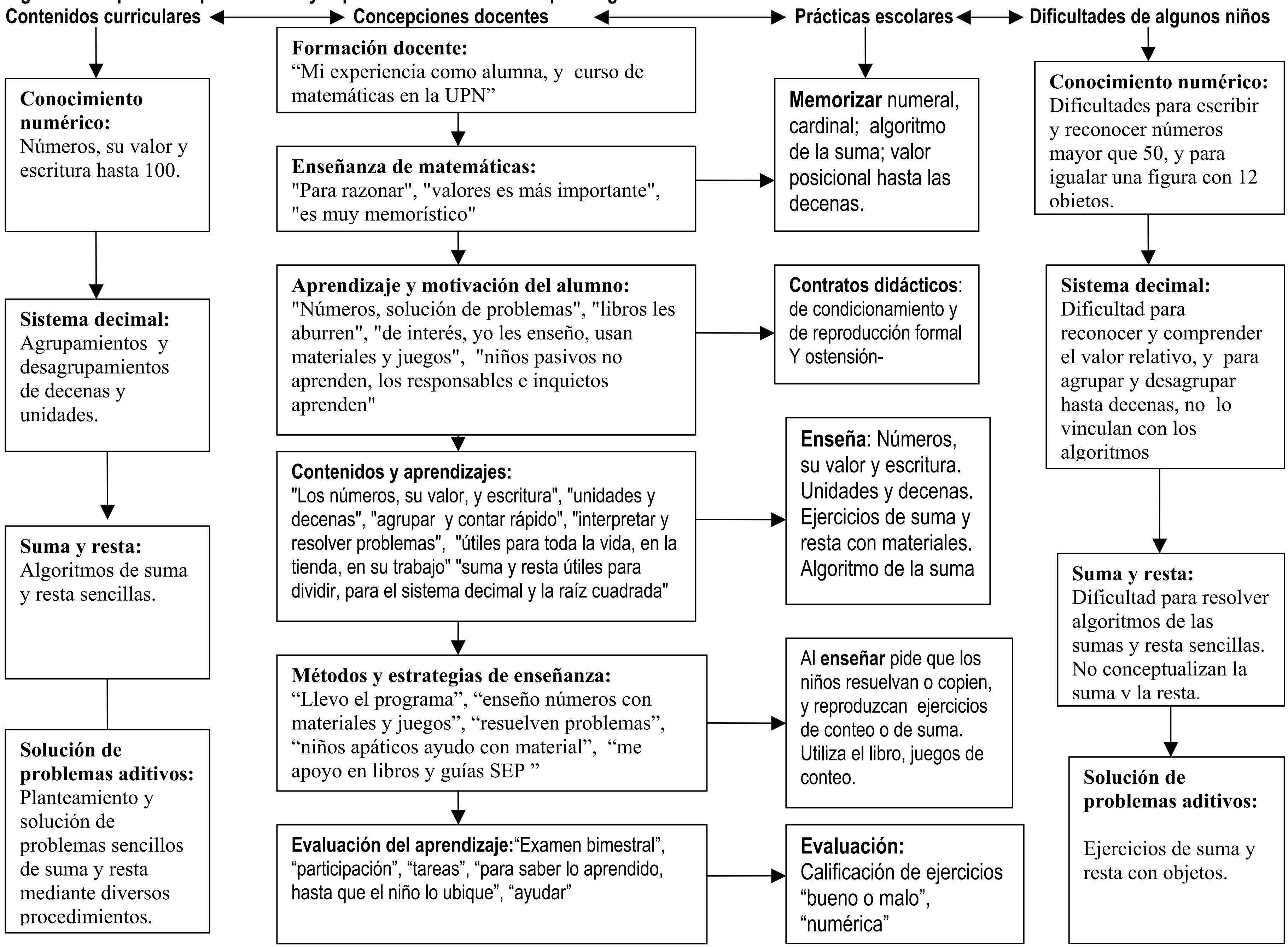


Figura 11. Esquema del pensamiento y la práctica del maestro de segundo grado

Contenidos curriculares ⟷ Concepciones docentes ⟷ Prácticas escolares ⟷ Dificultades de algunos niños

Contenidos curriculares

Conocimiento numérico: Lectura y escritura de números con tres cifras.

Sistema decimal: Agrupamientos y desagrupamientos hasta centenas. Valor posicional.

Suma y resta: Algoritmo de la suma y resta con transformación.

Solución de problemas aditivos: Planteamiento y solución de problemas de suma y resta hasta con tres cifras, utilizando diversos procedimientos.

Concepciones docentes

Formación docente: "De la experiencia y adaptación de las estrategias de los maestros", "No conoce alguna didáctica especifica de las matemat.

Enseñanza de matemáticas: "Importante como el español", "para resolver problemas de la vida" "es mecánico y muy memorístico

Aprendizaje y motivación del alumno: "Mi grupo lo ve divertido, en otros es fastidioso", "aprenden de lo que viven" "el aprendizaje depende del desarrollo cognitivo, la herencia genética, el nivel económico", "Les cuesta trabajo el valor posicional"

Contenidos y aprendizajes: "Para comprender la suma y la resta debe comprender el valor posicional" , ""agrupaciones de unidades, decenas y centenas" "analizarlo en situaciones problema", "lo utilizan a diario", "que aprendan la suma y la resta porque lo aplicarán con más números"

Métodos y estrategias de enseñanza: "uso la tiendita", "el libro recortable", "planteamos problemas de la vida diaria", "niños con dificultad trabajo individual, con las mismas características", "adaptación de clases", "uso material concreto".

Evaluación: "es cuantitativo y cualitativo, al final termina en número" "observación diaria", "para saber su comprensión y ayudarlo", "exámenes, evolución de ejercicios"

Prácticas escolares

Memorizar valor posicional hasta las centenas, y los algoritmos de la suma y la resta.

Contratos didácticos: De ostensión. Expone, explica, pide que pasen alumnos a resolver en pizarrón. Llega a plantear preguntas de reflexión.

Enseña: Algoritmos de suma y resta. Valor posicional hasta las centenas. Problemas sencillos de cambio con adición y sustracción

Utiliza materiales, juegos, retoma problemas del libro. Trabaja individual y niños con mismas características.

Evaluación: Calificación de ejercicios "bueno o malo", "calific. Numérica" " llega a explicar errores".

Dificultades de algunos niños

Conocimiento numérico: Dificultades para escribir y reconocer números mayor que 500, y para igualar una figura con 12 objetos.

Sistema decimal: Dificultad para reconocer y comprender el valor relativo, y para agrupar y desagrupar hasta centenas, no lo vinculan con los algoritmos

Suma y resta: Dificultad para resolver algoritmos de las sumas y resta con transformación. No conceptualizan la suma y la resta.

Solución de problemas aditivos: Dificultad para resolver problemas de igualación y de comparación"

El planteamiento de los mapas anteriores (figura 10 y 11) nos permite integrar y observar las relaciones y contradicciones de la maestra y el maestro entre sus concepciones, su práctica y el tipo de conocimientos matemáticos que los niños adquirieron durante sus clases.

Dentro de las observaciones de mayor importancia, respecto a la Maestra Ana de primer grado, efectivamente concibe y basa el contenido de su enseñanza en el conocimiento del número menor a 100, donde los resultados grupales, junto con solución de problemas, atestiguan que fue en esta área donde mejor puntuaron los alumnos, sin embargo se observaron dificultades en los estudios de caso para escribir algunos números.

Otra relación, es entre lo que la maestra Ana concibe y su práctica de estrategias y métodos de enseñanza acerca de su forma de enseñar mediante el uso de juegos y materiales que si ocurre en aula. Sin embargo el uso didáctico mediante la orientación que éstos siguen, junto con el planteamiento y la solución de ejercicios simples de suma y de conteo con objetos obedecen más a los tipos de contratos didácticos, bajo los que transcurre su clase, basados en la reproducción y la resolución de los ejercicios y actividades descritas.

Por lo que el uso didáctico limitado de los ejercicios de conteo y de suma, la falta del planteamiento de diversos tipos de problemas aditivos, el acercamiento de las actividades para que los niños reconozcan el nombre y el valor de las unidades y las decenas, así como la sola práctica del algoritmo de suma y de la ausencia de la resta podrían limitar conceptual y operacionalmente el aprendizaje de estos conocimientos matemáticos, tal como lo desmotraron los resultados grupales y de caso que fueron los mas bajos en solución de operaciones de resta y de suma, y del sistema decimal, y donde los niños presentaron mayor dificultad de comprensión y solución.

Por último, la maestra Ana concibe una evaluación sumativa, y dice practicar la evaluación formativa con características constructivistas, si embargo en el aula se observa únicamente la revisión y calificación numérica de los ejercicios, en función de si el resultado es correcto o erróneo.

Con respecto al Maestro Mario de segundo grado, se observa una mayor coincidencia entre su forma de concebir los contenidos y aprendizajes que los niños deben lograr y entre los planteamientos del curriculum de la SEP que son: conocimiento del número con mas de tres cifras, operaciones de suma y resta sencillas y con transformación hasta con tres cifras, el conocimiento del valor posicional hasta las centenas, y la solución de problemas que impliquen operaciones de suma y resta.

El profesor Mario centra su enseñanza en los contenidos antes mencionados y de acuerdo con los resultados grupales de la segunda evaluación los niños lograron resultados aceptables en términos numéricos en todas estas áreas. Sin embargo, considerando las áreas de mayor dificultad y los estudios de caso lo que más les cuesta trabajo comprender a los niños son el valor posicional, el algoritmo de la resta, así como el concepto que implican la suma y la resta; esta dificultad la demostraron los niños cuando vimos que preferían solucionar los problemas de la prueba con sus propios algoritmos naturales, en vez de recurrir a los algoritmos formales enseñados por el docente.

Estas dificultades que presentan los niños posiblemente encuentran relación con las estrategias y formas de enseñar del profesor, en las que además del uso constante de materiales, se basa principalmente en la exposición y la explicación de los conocimientos matemáticos a enseñar, que caracteriza a los contratos de ostensión. Por lo que sería importante que el profesor además de incrementar el planteamiento y la solución de otros tipo de problemas aditivos, pudiera plantear una serie de preguntas de reflexión que ayuden al niño a abstraer los conceptos, al tiempo de ir integrando los conocimientos del valor posicional, durante el empleo y la solución de los algoritmos de la suma y la resta al solucionar los problemas.

Finalmente, el profesor Mario concibe una evaluación que permite revisar lo que el niño va aprendiendo, ayudarlo en sus errores de comprensión y en las que se pueda asignar una calificación en función de esto, pero al igual que la maestra Ana, en la práctica se queda en la evaluación sumativa, y con escasas prácticas de la evaluación formativa. Por lo que sería importante, que el profesor Mario, al igual que la maestra Ana, pudieran integrar formas alternativas de evaluación de carácter formativo y promovieran la autoevaluación que se traduce en toma de conciencia y regulación de los aprendizajes de parte de los propios niños. Es decir, en la práctica no se aprovecha con regularidad su concepción de "evaluar para ayudar".

A partir del análisis anterior, corroboramos que conocer de forma separada las concepciones y por otro lado sus prácticas de los maestros, sólo permite a los investigadores conocer la mitad de la historia (Kane, Sandreto, Heath, 2002) de lo que podría estar pasando en el proceso de enseñanza y aprendizaje, de ahí la necesidad de realizar investigación que considere al maestro, al alumno y las prácticas educativas de forma conjunta, para poder identificar coincidencias, contradicciones y factores que apoyan el aprendizaje en la práctica. Así, este análisis nos permite constatar que hay logros importantes promovidos por la enseñanza que imparten los profesores, pero al mismo tiempo es difícil que exista una plena coincidencia entre lo que los maestros afirman respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y lo que verdaderamente hacen en las aulas.

CAPÍTULO 7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo, y dando seguimiento a las preguntas de investigación, primero se discuten los principales resultados encontrados en cuanto al conocimiento matemático del niño considerando un análisis grupal y de los resultados de los estudios de casos, posteriormente se continua con las concepciones de los maestros acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y finalmente con el análisis de las prácticas de enseñanza en términos del tipo de contrato didáctico, que logran establecer los profesores de primer y segundo grado.

En primer término, de acuerdo con el análisis de los resultados grupales obtenidos mediante la *Prueba de Evaluación de Conocimiento Matemático del Niño*, se encontró que los alumnos de los grupos de primer y segundo grado parecen seguir un patrón evolutivo a nivel cognoscitivo que coincide con lo encontrado por otros autores (Piaget, 1967; Labinowicz, 1987; Wadsworth, 1991) en relación con la adquisición de nociones vinculadas al conocimiento matemático. Fue posible identificar una progresión en la adquisición de los conocimientos evaluados del primer al segundo grado. Dicha progresión se manifestó en un incremento, estadísticamente significativo, en el número de respuestas acertadas en la prueba, en la resolución de ítems cada vez más complejos y en un decremento del número de oportunidades necesarias para arribar a una solución correcta. Los cambios sustanciales en el manejo de las nociones matemáticas estriban en que los niños y niñas de segundo grado lograron un conocimiento más amplio y preciso de la noción de número, observado en la comprensión y manejo de la cardinalidad y del valor posicional de los números, así como en el tipo de solución ofrecida ante problemas cuya complejidad implica operaciones de igualación y comparación de cantidades. En ambos grupos se identificó la existencia de las estrategias o algoritmos naturales, vinculados al empleo de esquemas gráficos y a la manipulación de objetos concretos, el manejo de los mismos se fue haciendo más pertinente y efectivo en los alumnos de segundo grado, a la par que les permitió transitar hacia el uso apropiado de los algoritmos formales de suma y resta en la solución del problema.

La progresión en el conocimiento en todo momento se encuentra mediada por las experiencias educativas en las que el niño participa, las cuales imponen en buena medida lo que los autores de la vertiente sociocultural denominan facilidades y restricciones al aprendizaje, aspectos que se discutirán en esta sección.

En cuanto a la identificación de diferencias entre los grupos de alto y bajo rendimiento es importante mencionar que no se consideraron las oportunidades que los niños necesitaron para llegar a una respuesta correcta (hasta cuatro), lo cual implica que los datos estadísticos se refieren a las respuestas correctas pero no al proceso que se siguió para llegar a ellas. Igualmente es importante aclarar que no siempre las oportunidades de respuesta llevaron a una respuesta correcta.

En la primera evaluación se encontraron diferencias estadísticamente significativas en todas las categorías para el primer grado, y sólo en suma y resta para el segundo grado, favorables para el grupo de alto rendimiento. Esto en alguna medida permitió cuestionar la percepción de los docentes para ubicar a los alumnos como estudiantes de bajo y alto rendimiento, por lo menos para el caso de segundo grado, ya que algunos alumnos de bajo rendimiento respondieron mejor o igual que los de alto rendimiento en la prueba administrada.

Una explicación plausible de la ausencia de diferencias mercadas entre ambos grupos, puede ser la forma de administración de la prueba misma, dado que el investigador permitía que los alumnos intentaran más de una vez la resolución de los ítems, lo cual pudo permitir a los niños con un rendimiento bajo que tuvieran la oportunidad de repensar sus respuestas y estrategias o de reflexionar el porqué habían fallado en el primer intento. En este sentido Jordan y Montani (1997) reportan que los niños necesitan de más oportunidad y de tiempo, para poner en juego sus conocimientos y estrategias, que les permita evaluar y mejorar su efectividad, y poder superar las dificultades que pueden encontrar al solucionar problemas aditivos de diversos tipos. Aún los escolares catalogados por el docente como alumnos de bajo rendimiento podían superar sus dificultades si se les daba la oportunidad de reflexionar y repensar sus respuestas de forma que en muchos casos arribaban a procesos y respuestas correctas en un nuevo intento. Esta es una posibilidad poco explorada por los docentes en las pruebas y ejercicios que realizan en el aula con sus estudiantes. Es importante marcar que los alumnos recibieron hasta cuatro oportunidades para responder al problema, mismas que se suspendían si el alumno no lograba llegar al razonamiento correcto

En la segunda evaluación, resultaron diferencias estadísticamente significativas únicamente entre los subgrupos de bajo y alto rendimiento de primer grado, y sólo en solución de operaciones de resta y de suma favorables para el grupo de alto rendimiento. Para el grupo de segundo grado en la segunda evaluación no hay diferencias significativas en ninguna de las categorías, a pesar de que se reportan las medias porcentuales más bajas en solución de operaciones de suma y resta, y sistema de numeración decimal. En particular con el grupo de bajo rendimiento, existen ganancias considerables en todas las áreas para ambos grupos. Igual que en la primera evaluación los alumnos recibieron hasta cuatro oportunidades para responder.

Específicamente, en cuanto al conocimiento del número se consideraron diversas situaciones en su evaluación como fue la escritura, la lectura, así como el conteo y la igualación de conjuntos con figuras, donde los niños resolvieron una buena proporción de estas actividades. En los resultados grupales, se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre los niños de alto y bajo rendimiento sólo en primer grado durante la primera evaluación, ya que en la segunda evaluación fue mínima la diferencia. En la segunda evaluación a pesar de que en el grupo de segundo grado no se encontraron diferencias estadísticamente significativas, sí las diferencias en el porcentaje de respuestas correctas favorables al grupo de alto rendimiento que logra cubrir y solucionar al cien porciento esta categoría, frente a un ochenta y un porciento del grupo de bajo rendimiento, siendo mayor la diferencia que en los grupos de primer grado.

A pesar de que se encuentran avances en el conocimiento del número, el hecho de que los niños puedan contar en voz alta, escribir o leer un número no implica que tienen un conocimiento completo del número (Piaget, 1967; Labinowicz, 1987). Al respecto, de acuerdo a los resultados de los análisis de los estudios de caso y del resto de las evaluaciones de cada uno de los niños de cada grado, se encontraron dificultades diversas como: desconocimiento de un numeral mayor que 24, dificultad para escribir un número mayor que 100, dificultad para poder igualar la figura de un triángulo con 12 objetos, así como dificultad en otros conocimientos más complejos como fue el valor posicional, o su aplicación en la solución de algoritmos de suma y resta, además de la solución de problemas aditivos de comparación e igualación, como antes se había indicado.

Sin embargo, pese a estas dificultades los niños lograron resolver con relativo éxito los reactivos de la categoría de problemas aditivos empleando sus algoritmos naturales o informales, aún cuando no había una comprensión suficiente del sistema decimal y del manejo de los algoritmos de la suma y de la resta. Por lo que parecería que el conocimiento o no del sistema decimal así como de la solución de las operaciones de suma y resta empleando dichos algoritmos formales, no impide que en los primeros grados los niños y niñas puedan arribar a la solución correcta de problemas aditivos de cambio y combinación, y en algunos casos, incluso de igualación y comparación con apoyo en el conteo y la comprensión de las cantidades involucradas.

Las dificultades que se encuentran en los niños marcan el límite entre lo que el niño sabe y entre el conocimiento matemático que intenta abordar, por lo tanto durante la enseñanza este primer conocimiento del número en el niño debe ser aprovechado para la construcción de otros conocimientos más complejos, y extenderse a otros campos del conocimiento matemático.

Por otra parte, de acuerdo con investigadores en estos campos del conocimiento numérico, existe una diversidad de principios y operaciones lógicas que implican el conocimiento del número. Para Piaget (1967) el número es una síntesis de dos clases que crea el niño entre los objetos, el orden y la inclusión de clases. Así, el concepto de número implica las operaciones lógicas de seriación, clasificación y conservación de cantidad. Sin embargo, de acuerdo con Scheuer (2005), no todos éstos y otros principios pueden estar en el conocimiento numérico de todos los niños. Se entendería que el número es un concepto polimorfo, capaz de asumir y promover múltiples sentidos, pese a que el uso particular de un número definido no puede a la vez ser cardinal y ordinal, operador, producto del conteo, algebraico, etcétera, por lo que es posible utilizar los números de acuerdo a esas diferentes perspectivas. Por tanto, los niños no construyen una noción ni una práctica únicas del número, sino nociones y prácticas múltiples, que a su vez se relacionan entre sí de muchos modos.

En primer grado, la categoría de conocimiento del sistema decimal fue donde los niños presentan mayor dificultad, y de acuerdo con los estudios de caso lo más difícil para los alumnos fue comprender y operar correctamente en los ejercicios que implican el valor posicional y la composición aditiva del numero, en donde únicamente lograron reconocer el valor absoluto del número y no el relativo. No obstante, en los programas de la SEP (1993) se plantea que al término del ciclo escolar los niños deben conocer hasta las decenas. Esta dificultad también se encontró en la primera evaluación con los grupos de alto y bajo rendimiento de segundo grado, y en la segunda evaluación sólo en algunos niños de bajo rendimiento de segundo grado.

De este modo un resultado importante, en la segunda evaluación y que se encuentra en ambos grados, referido a la solución de operaciones de suma y resta, es este desconocimiento o incomprensión del valor posicional, así como de la composición aditiva y las reglas formales para solucionar los algoritmos de la suma y la resta con dos o más dígitos que implican una transformación. A excepción de los niños del subgrupo de alto rendimiento de segundo grado, se puede ubicar a los conceptos antes referidos en la categoría de conocimiento matemático de mayor grado de dificultad.

En este sentido, estos resultados coinciden con otros estudios en que el conocimiento del sistema de numeración decimal es una de las áreas con una dificultad importante en el aprendizaje de las matemáticas de los niños (Cortina, 1997; García et al, 2006). Aunque se espera que éste sea adquirido totalmente hasta el cuarto grado, García et al encontraron que niños de tercer y cuarto grado presentan serias dificultades en la comprensión de este conocimiento que afecta directamente la comprensión de otros conocimientos como son la comprensión y solución de la suma y la resta.

Además, de que el hecho de tener conocimiento del sistema decimal no es suficiente para que los niños puedan llegar a solucionar todos los problemas que se le presenten, pero sí es básico para poder solucionarlos con base en los algoritmos formales de la suma y la resta (Carpenter et al, 1999), por ello se puede recomendar que para mejorar el entendimiento e interacción de estas nociones, éstas sean enseñadas de manera concurrente a través de la solución de problemas.

Considerando que los primeros conceptos que desarrollan los niños sobre la adición y la sustracción proceden de contextos de la vida real, en los que “se da” o se “quita algo” y nunca de las expresiones numéricas en abstracto, dichos problemas deben provenir de situaciones que enfrentan en la vida cotidiana de los niños (Bermejo, Rodríguez y Pérez, 2000). Por tal motivo, el tipo de problemas planteados y la orientación del maestro o maestra para arribar a su solución, debe ayudar a conectar las actividades didácticas con el conocimiento que el niño ya posee y el que se intenta mostrar.

En cuanto al análisis del tipo de solución de problemas que los niños dieron en la prueba de conocimientos matemáticos permitió concluir que ciertamente podían resolverlos predominantemente mediante una solución tipo II ó tipo III, debido a que entraban en juego procesos de razonamiento de parte de los niños en los que empleaban sus propios recursos o conocimientos matemáticos previos, en particular, una diversidad de estrategias “naturales” o “inventadas” (Carraher et al 1991; Fuson, 1992) sin la necesidad de utilizar los algoritmos formales. Estos resultados de la primera evaluación permitieron corroborar el supuesto de que los niños, además de adquirir conocimientos derivados de la educación formal o preescolar, ya cuentan con sus propios conocimientos matemáticos previos, que incluyen una serie de estrategias y heurísticos (Carraher, et al.1991; Jordan y Montani, 1997; Onrubia, et al. 2001), que pueden emplear efectivamente en la solución de problemas aditivos, como los que se plantean en esta investigación.

En buena medida, este hallazgo, además de corroborar lo encontrado por los autores citados, refuerza el supuesto básico constructivista de que el aprendizaje significativo se produce en la medida en que se establece una relación sustancial entre los conocimientos previos y experiencias de la persona que aprende con los nuevos contenidos por aprender. Por otro lado, el enfrentar al alumno las tareas de resolución de problemas donde hay sentido y la posibilidad de conectar la actividad a una situación real o vivencial (por ejemplo, la compra-venta de algo) en vez de pedirle la resolución de operaciones en el vacío, permitió situar a los niños en un contexto que facilitó el proceso de razonamiento matemático y la aplicación de sus propios algoritmos. Al respecto Carraher, Carraher y Schliemann (1991) reportan que los niños responden mejor a situaciones imaginarias o simuladas en comparación a la solución de operaciones simples, abstractas y sin contexto alguno.

En la segunda evaluación aplicada a los alumnos se encontró que sigue teniendo un peso importante el empleo de dichas estrategias o heurísticos propios. A pesar de que se observa en ambos grados un incremento del conocimiento matemático en todas las categorías evaluadas, nuevamente destacan los resultados obtenidos en las categorías de solución de problemas y conocimiento numérico con las puntuaciones más altas. También se encontró un incremento de las puntaciones en las escalas de solución de operaciones de suma y resta, y en conocimiento del sistema de numeración decimal en comparación con la primera evaluación, lo que en buena medida es reflejo del efecto de la instrucción que han recibido en el transcurso de varios meses. Pero aún así, en particular la comprensión del sistema de numeración decimal sigue resultando difícil para los alumnos, y es mayor el conocimiento adquirido en el grupo de segundo grado.

El análisis cualitativo de casos permitió profundizar un tanto más en esta situación. Se esperaría, con base a los resultados anteriores, que si los niños de ambos grupos ya adquirieron el conocimiento de los algoritmos formales de la suma y la resta serían capaces de utilizarlos para solucionar los problemas aditivos sin tener que recurrir a otro tipo de procedimientos no algorítmicos. Sin embargo, los estudios de caso indican todo lo contrario, pues aún cuando ya se ha aprendido el procedimiento prescrito por el algoritmo formal, esto no es condición suficiente para que el alumno lo emplee exitosamente en la solución de problemas, puesto es necesario que el niño comprenda sus conceptos (Carpenter al., 1999; Mendoza, 2004; Orrantia, 2003; Flores, 2003, 2005; García et al, 2006). En este caso, sólo el niño de segundo grado considerado por el docente como alumno de alto rendimiento solucionó tres de seis problemas con el algoritmo formal de la suma y la resta, solución tipo IV. Esto indicaría que los conocimientos matemáticos algorítmicos que va adquiriendo el niño en la escuela resultarán de escasa utilidad en la medida en que no logre vincularlos con situaciones de aplicación relevantes, ya que en este caso no demuestra utilizarlos al solucionar problemas aditivos. Esto corrobora la idea de que el aprendizaje a través de la mecanización, centrado en los procedimientos de los algoritmos matemáticos no puede ser un fin en sí mismo si no se vincula a situaciones relevantes de aplicación que requieren procesos de abstracción reflexiva de parte del aprendiz, para que este valla construyendo un concepto matemático más amplio.

Sin embargo, en el análisis de las prácticas docentes se observa que los maestros tienden a plantear y a solucionar problemas en donde las relaciones que se establecen se refieren a problemas sencillos de cambio o combinación, y donde no se promueven otros tipos de problemas más complejos, como por ejemplo los de diferencia relacionados con la resta, o los de igualación entre un conjunto mayor y otro menor, relacionados también con la resta.

A pesar del avance significativo que muestran los resultados estadísticos con relación al aprendizaje de los niños al transcurrir el ciclo escolar y al avanzar de grado, se considera que el entendimiento conceptual de la suma y la resta resulta aún difícil en los niños, y en muchos casos en lo que se avanza es en el procedimiento de la solución correcta del algoritmo lo que conduce a la respuesta correcta en determinados ejercicios. Se coincide con los autores revisados (Carpenter, et al. 1999; Nunes y Bryan, 1997; Cortina, 1997; Orrantía, 2003) en que el entendimiento conceptual y operacional de los principios del sistema decimal resultan clave para poder entender y poder aplicar los algoritmos de la suma y la resta de manera razonada cuando el niño intenta solucionar un problema, y no únicamente basarse en sus propias estrategias lo que explica porque los niños preferían utilizar una solución tipo III.

De acuerdo con lo anterior, durante la solución de un problema por escrito el niño se enfrenta a un entendimiento textual y a la utilización de sus propios modelos matemáticos de solución. En problemas que implican una relación sencilla de cambio y combinación, como fue el caso de esta investigación, los niños pueden basarse fácilmente en palabras claves y elegir el algoritmo correcto de inmediato, sin embargo esta estrategia de solución puede verse limitada al enfrentar la solución de problemas de mayor complejidad como son los de comparación o de igualación (Orrantia, 2003), de aquí la importancia de promover en el niño de un entendimiento conceptual de la suma y la resta, considerando, entre otros, el valor posicional y la composición aditiva de forma integral cada vez mas amplio, a través de la solución de problemas de diversos tipos.

Por otro lado, como una explicación a las diferencias entre los alumnos de alto y bajo rendimiento, se pueden plantear cuestiones relacionadas con el propio estudiante, pero siempre en interacción con el contexto educativo en que participan. De acuerdo con las explicaciones emanadas de los estudios sobre cognición y aprendizaje de las matemáticas, estas diferencias posiblemente residan en la capacidad, el grado y la forma en cómo comprenden los niños en un inicio los principios lógicos del conteo y de la numeración, como serían la cardinalidad del número o el reconocimiento de su numeral (Gelman y Gallistel, 1978). Posteriormente y en su caso al pasar a otros niveles de comprensión mayor, cómo logran la integración de estos principios básicos del conocimiento numérico, al arribar al nivel del conocimiento de las convenciones (Nunes y Bryant, 1997). Otra diferencia no sólo puede estar en cómo aplican y comprenden a su vez los sistemas de convenciones matemáticas, sino cómo logran aplicarlos junto con los principios lógicos de la numeración, al enfrentar y solucionar situaciones matemáticas diferentes (Vergnaud, 1997). Así, el conocimiento matemático no puede quedar ubicado únicamente en la comprensión de las convenciones como son los algoritmos de la suma y la resta, y el sistema de numeración decimal, sino que este conocimiento debe conceptualizarse en situaciones matemáticas distintas. Y en este punto es donde se intersecta la explicación de los procesos cognitivos en el escolar con las posibilidades de intervención educativa de parte del docente, en concreto, con el tipo de situaciones matemáticas que plantea al alumno para promover su aprendizaje.

Asimismo, se encontró que no todos los tipos de problemas entrañan la misma dificultad para los escolares, porque a pesar de que algunos niños logran resolver la mayoría de los problemas esto no indica que lograron comprender completamente las relaciones entre sus variables. En todo caso los niños logran comprender claramente los problemas de cambio, de combinación y sus dificultades de entendimiento inician con los problemas de igualación, y con mucha mayor dificultad en los problemas de comparación. Ya que para resolver estos últimos problemas en la primera evaluación la mayoría de los niños emplearon una solución tipo I, y en todo caso en la segunda evaluación algunos niños se aproximaron a un mejor entendimiento mediante una solución tipo II o solución tipo III. Específicamente en los problemas de comparación "más que" y "menos que" los niños mostraron dificultad para establecer el inverso recíproco entre el conjunto referente y el conjunto referido, lo que les llevaría a entender la solución con el algoritmo de la resta. Al desconocer el concepto y en algunos casos el algoritmo implicado, asociaron la palabra "más", con una operación de suma, o "menos que" con una operación de la resta.

Hubo casos de niños que logran respuesta tipo III, donde se observó que tenían conocimiento del algoritmo formal, pero a pesar de ello, no lo empleaban y recurrían a sus estrategias o algoritmos naturales. Así, aunque saben cómo resolver, por lo menos en términos de la mecanización, un algoritmo formal, aún no tienen una comprensión tal de mismo que les permita su empleo al solucionar un problema.

De manera general tanto niños de primer como de segundo grado, emplean de manera útil diversas estrategias no formales como son la representación de gráficos, la representación del valor de las variables con objetos proporcionados como es el uso de semillas o en el mejor de los casos prefieren el empleo de sus dedos (Hembree y Marsh, 1991; Martínez y Gorgorio, 2004). Estas estrategias particulares están basadas más en sus conocimientos que tienen acerca del número (Gelman y Gallistel, 1978), donde en sus estrategias los niños de primer grado prefieren contar de uno en uno todos los elementos; los niños de segundo llegan a contar a partir del número mayor para poder resolver problemas aditivos, quienes también tienen sus limitaciones pues en el momento de igualar una figura no emplean su conocimiento del número al pretender igualar la figura sólo por su forma (Piaget, 1967), o en el mejor de los casos en la segunda evaluación utilizan la correspondencia uno a uno para igualar.

Cabe destacar que de nuevo, sólo el alumno de segundo grado de alto rendimiento empleó su conocimiento de la cardinalidad para poder igualar una figura y fue capaz dar una solución tipo IV al emplear correctamente el algoritmo de la suma y de la resta en un problema de cambio, en un problema de combinación y en otro problema de comparación "menos que", lo que le permitió mostrar un entendimiento conceptual más amplio del número y de sus propiedades. De los estudios de caso, fue el único niño que mostró un nivel apropiado de conocimiento conceptual de la adición y de la sustracción, así como de los algoritmos formales y del sistema decimal; sin embargo sólo empleó estos conocimientos formales en la resolución de tres de seis problemas, en los demás aparecieron las estrategias alternativas que se han venido mencionando.

La niña de bajo rendimiento de primer grado y el niño de bajo rendimiento de segundo grado, aún al final del ciclo escolar, continúan presentando dificultad para resolver la resta más sencilla con un solo digito y desconocen las reglas y el procedimiento para solucionarlo.

Por otro lado, hubo casos en que se observó que conocer y entender el algoritmo de la resta, lo que permitía su empleo en la solución de problemas, no implicaba que ya no se recurriera a los algoritmos propios expresados mediante el recurso de los dibujos o gráficos. Es decir, en algunos casos se manejó a la par o alternativamente el algoritmo formal y el informal, incluso con la intención de corroborar los resultados. Esto estaría indicando que entre comprender los problemas y emplear un algoritmo, los algoritmos naturales juegan un papel de anclaje importante.

En términos generales, los alumnos de primero y segundo grado para solucionar problemas y operaciones, emplean una solución tipo III quienes recurren a gráficos u objetos, con dificultad para poder operar con esquemas a nivel mental en la solución de problemas tanto sencillos como complejos. Es necesario apoyar a los niños con estas características en el uso de objetos externos, así como brindarles más oportunidades de reflexión, durante las situaciones didácticas, que los ayude transitar de un razonamiento matemático concreto a uno más abstracto y conceptual que los aproxime a una respuesta tipo IV y emplear los algoritmos. De acuerdo con Fischbein (1999), el surgimiento de esos esquemas estructurales dependen tanto del nivel de madurez intelectual (expresando el respectivo estado intelectual) como la experiencia del individuo. En este caso una experiencia mediada también por las características de la enseñanza, impartida por el profesor. Coincidimos en que aún en una actividad sencilla como contar cinco manzanas no se puede aprender por simple repetición ni reproducirse mecánicamente: el niño que cuenta debe comprender el procedimiento y otorgarle un sentido para que el comportamiento constituya un acto matemático genuino (Sinclair, 2005), donde se logre un entendimiento conceptual, y no sólo algorítmico, basado en la solución de problemas aritméticos.

Es cierto que los niños pueden llegar a resolver problemas utilizando sus propios recursos y estrategias como el conteo y apoyándose con el uso de sus dedos u objetos (Carraher et al, 1991; Fuson, 1999) tal como lo demuestran los resultados grupales de la primera y la segunda evaluación, y en los estudios de caso, esta forma individual de resolver los problemas indicaría los conocimientos matemáticos previos que pueden llegar a tener los niños, que le pueden resultar efectivos para operaciones o cálculos sencillos, además de que son la base para el entendimiento conceptual de la suma y la resta. Sin embargo, estos resultados de la evaluación muestran la necesidad de conocimientos cada vez más eficientes y complejos que el niño construirá en medida de su propia naturaleza le permita construirlos en conjunto de las facilidades durante la instrucción.

Por lo que, es preciso que los niños logren integrar en el momento apropiado estos conocimientos de manera formal como intenta la enseñanza en la escuela, ya que más adelante estarán por aprender otros algoritmos y conceptos matemáticos más complejos como son la multiplicación y la división, entre otros. Por lo que resultará importante, asegurar que el niño logre aprender y comprender los primeros conocimientos matemáticos como una base fundamental del conocimiento matemático.

En gran medida el conocimiento matemático que cada niño de primer o segundo grado logró construir se debe a las contribuciones de sus profesores, cuyas prácticas educativas que ejercen a diario son influenciadas de manera importante por sus concepciones (Gill, Anshton, y Algina, 2004; Hofer y Pintrich, 1997; Thompson, 1992) tal como se pudo corroborar.

En este sentido, con relación a las concepciones de los docentes, de sus representaciones y actuación pedagógica en el aula, se considera que estos son aspectos importantes, íntimamente relacionados con los propios logros de los niños. Ambos docentes, como se vió, cursaron estudios profesionales en la Escuela Normal Superior, aún cuando la profesora ha ejercido por 21 años la docencia mientras que el profesor sólo dos años, pero éste cursa una licenciatura en educación matemática para alumnos de secundaria. Los dos maestros consideran que no basan su instrucción en alguna corriente o teórico en especial, sino que más bien basan su instrucción en su propia experiencia e historia personal, sin tener una fundamentación teórica psicopedagógica especifica, coincidiendo estos resultados con lo encontrado por otros autores (Llinares y Sánchez, 1990; Gil, 1991; Monroy, 1997).

Como consecuencia de lo anterior, al no tener los maestros un conocimiento claro de las principales teorías o enfoques psicopedagógicos en los cuales basa su enseñanza, podría ponerse en riesgo las mejores formas y alternativas para ayudar a prender a los niños matemáticas, como serían: el conocimiento que tienen el maestro del nivel de madurez cognitiva de sus alumnos, la adaptación de las actividades y secuencias didácticas, la consideración de cuál es, así como el uso del conocimiento previo que cada niño posee, el planteamiento problemas contextualizados, con diferentes niveles de complejidad que sean de interés, y ayude al niño a construir y ampliar sus propios conceptos matemáticos como son la suma y la resta.

En ambos maestros, en su discurso la importancia de las matemáticas va más enfocada al desarrollo de habilidades cognitivas generales como el razonamiento que permite sobre todo resolver transacciones de compra-venta y problemas que involucran operaciones básicas. Los dos maestros conciben que la solución de problemas se debe enfocar a la solución de problemas de la vida cotidiana, como el manejo de dinero en operaciones de compra y venta. Sin embargo, su concepción de problema matemático es restringida, pues se refieren a ejercicios simples (Pozo, 1996; Mendoza, 2004) sin la promoción de un desarrollo conceptual o estratégico más amplio (Marshall, 1995) que garanticen el conocimiento matemático del niño. Ambos maestros consideran que la principal problemática en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el aprendizaje memorístico, la dificultad que los niños tienen para razonar en el momento de solucionar problemas, al entrenamiento mecánico del algoritmo. No obstante, estas representaciones no encajan con lo que los propios docentes realizan en su aula, pues como se ha encontrado, las situaciones de enseñanza que plantean se centran sobre todo en contratos de reproducción formal y condicionamiento, donde no hay un trabajo de construcción de conocimientos matemáticos, sino más bien una apropiación precisamente mecánica y memorística de dichos conceptos, a pesar de que en el caso del profesor, se encontraron más episodios donde promueve la reflexión en sus estudiantes e intenta la construcción de conceptos matemáticos.

En cuanto a sus estrategias para enseñar a los niños con dificultades en matemáticas, ambos maestros consideran importante el trabajo con materiales; el maestro además considera importante la asesoría individualizada, organizar a los niños con problemas semejantes y trabajarlos, así como organizar clases al nivel de estos niños. Sólo en el caso del maestro se encontró una aproximación a la necesidad de realizar adaptaciones curriculares para el caso de los niños con algún tipo de dificultad.

En cuanto a sus estrategias para enseñar a los niños con dificultades en matemáticas, la maestra y el maestro consideran importante el trabajo con materiales; el maestro además considera importante la asesoría individualizada, organizar a los niños con problemas semejantes y trabajarlos, así como organizar clases al nivel de estos niños. Sólo en el caso del maestro se encontró una aproximación a la necesidad de realizar adaptaciones curriculares para el caso de los niños con algún tipo de dificultad. Donde precisamente el uso de materiales, el apoyo individualizado y la adaptación curricular han sido considerados como algunos de los principales recursos considerados como útiles para apoyar la enseñanza a niños con dificultades de aprendizaje en matemáticas (Fuchs & Fuchs, 2003).

Por lo que resultaría útil continuar promoviendo formas para que los maestros puedan considerar y trabajar con estas técnicas y otras más como son: la solución de problemas en pequeños grupos o con niños que tenga las mismas o características semejantes, la ayuda y la retroalimentación constante en las fallas de los conceptos y de los procedimientos de los niños, la formulación de preguntas que orienten y lleven al niño a sus propia reflexión, centrar el trabajo en la solución problemas de suma y resta de menor a mayor dificultad, así como la introducción del algoritmo de la suma y la resta, y del valor posicional con la ayuda de material ó la representación con figuras como en algún momento lo hacía el maestro Mario, entre otras estrategias que podrían ayudar más a los niños con dificultades para aprender matemáticas (Hallahan, Kauffman y Lloyd, 1999).

En su concepción de la evaluación ambos dicen basarse en una serie de exámenes bimestrales, considerando además la participación y la conducta del alumno. La utilidad de la evaluación para la maestra es poder ver los conocimientos que el niño ha logrado y en su caso regresarse con los que no, hasta que el niño lo logre. En el caso del profesor, concibe que su evaluación es cualitativa porque explora para saber el nivel de comprensión de sus alumnos y en su caso poderlos ayudar, la calificación cuantitativa es para asignar una calificación numérica. En sus concepciones consideran realizar una evaluación formativa, sin embargo pareciera que los dos maestros centran su evaluación en las prácticas tradicionales de evaluar para constatar el "aprovechamiento" del alumno, asignándole una calificación que pretende servir de base objetiva para su promoción, con escasas prácticas de la evaluación formativa. Al respecto para que una evaluación sea coherente con los planteamientos constructivistas (Gil y Guzmán, 1993) se espera que a partir de la actuación del docente, ésta sea percibida por los alumnos como una ayuda real, generadora de expectativas positivas; deba extenderse a todos los aspectos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) del aprendizaje, rompiendo con la habitual reducción repetitiva y de memorización; y de una evaluación que se realice a lo largo del todo el proceso y no de valoraciones terminales, además de evaluar y considerar los conocimientos previos y promover la autoevaluación y regulación del propio alumno.

En este sentido, en el Sistema Educativo Mexicano al establecerse un curriculum de tipo constructivista, como consecuencia también se ha insistido en la necesidad de dar paso de una evaluación sumativa a una evaluación formativa. Sin embargo, como muestra de lo que podría estar ocurriendo, en las concepciones de los dos maestros de esta investigación se expresan nociones como "evaluar para ayudar a los alumnos en su conocimiento", las que parecieran que no van más allá de una respuesta comprometedora enmarcado lo ideal, pero donde no se observa mayor claridad explicita en sus respuestas; además de que en sus prácticas de clase en ambos maestros se observó, que los alumnos al concluir un ejercicio pasaban a recibir una calificación y los maestros se concretaban a calificar como "bueno o malo" el resultado, y a la recomendación de que tenían que corregir su trabajo o copiar las respuestas correctas. En el mejor de los casos, el maestro de segundo grado en algunas ocasiones se centraba en ayudar a corregir las soluciones de algunos alumnos.

En conclusión, los resultados demandan continuar la línea de investigación que explore las concepciones y su relación con las prácticas de los docentes, junto con la búsqueda de formas alternativas de intervención y de prevención durante la formación docente, buscando coincidir entre lo que los maestros conciben cómo debe ser la enseñanza y cómo lo hacen cuando enseñan. Por lo que sería importante, que en esta exploración espontánea de las concepciones del sentido común

(Gil, 1991), se aprovecharan para que los docentes pudieran reflexionar sobre sus concepciones y su práctica (Coll, 2000). Como un ejemplo, sus concepciones acerca de la evaluación, pueden aprovecharse para que sobre su práctica reflexionen y consideren otras formas alternativas de evaluar como la aplicación de rúbricas o el uso de portafolios, que les permita revisar más el proceso de enseñanza y aprendizaje (Díaz-Barriga, 2005), junto con los tipos de conceptos que los alumnos van construyendo acerca de la suma y la resta, la integración y comprensión del valor posicional al emplear y resolver los algoritmos durante la solución de problemas aditivos, además de utilizar dichos resultados como retroalimentación continua en los errores o dificultades de los niños.

En cuanto al análisis del tipo de la relación didáctica entre los alumnos y el profesor, mediado por un tipo de contrato didáctico, durante este proceso de enseñanza y aprendizaje, se observa la responsabilidad y obligación de la maestra y del maestro por enseñar los contenidos matemáticos establecidos en los programas de la SEP (1993) cómo son: enseñar los números, el valor posicional de los números, la solución de operaciones de suma y resta y la "solución de problemas", ante estas condiciones se estableció un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997). Sin embargo, la forma particular en que cada maestro desarrollo sus clases determinó un tipo de contrato didáctico específico, que a su vez de acuerdo a las características de estos contratos didácticos se promovió el tipo y la calidad de los conocimientos matemáticos analizados.

En primer grado se observó que la maestra basa específicamente su trabajo de enseñanza en la realización y repetición de ejercicios, revisando que todos los niños escriban y los resuelvan en su cuaderno; por su parte los niños deberán poner atención, seguir las reglas del grupo, como levantar la mano para participar, copiar y resolver los ejercicios como muestra de que han aprendido. Ante estas condiciones específicas en las que transcurre la clase, se observa la ocurrencia de un contrato que va de la reproducción formal al condicionamiento (Ávila, 2001a, 2001b); aunque en ciertas ocasiones la maestra expone frente al pizarrón cómo proceder para contar, sumar o en solo una ocasión de cómo restar, o en su caso pide que pasen los niños uno a uno para resolver frente al pizarrón, tratando de utilizar un contrato basado en la ostensión. Bajo las condiciones propias de los contratos de reproducción formal y de condicionamiento la promoción del aprendizaje y la construcción conocimiento matemático del niño podrían verse limitados, tal como lo muestran los resultados grupales y del análisis de caso de la prueba de conocimientos matemáticos. Estos resultados de aprendizaje también son constatados por la propia maestra, quien mencionó en una última clase que aún se les dificultaba a sus alumnos reconocer la cardinalidad del número en cantidades menores a 100, problemática que también coincide con los resultados de los estudios de caso de las dos niñas que no cubren lo planteado por la SEP (1993) en lectura de números. Un problema recurrente es que en general no reconocen prácticamente el valor posicional del número, reconociendo únicamente el valor absoluto de los números y no el relativo, aún cuando se establece en los programas de la SEP que los niños de primer grado deben conocer hasta las decenas. Además, de que los alumnos presentaron dificultad para solucionar los algoritmos de la suma y la resta, ante la ausencia total de la solución del algoritmo escrito de la resta y la solución de problemas aditivos en las clases analizadas.

Por tanto, en el caso de la maestra, sería importante promover el uso de alguna estrategia que ayude al niño a reflexionar e ir comprendiendo el concepto y el algoritmo de la suma y la resta, que transcurra más allá de la repetición de los ejercicios de conteo de cantidades diversas, porque de otra manera difícilmente se promoverá el aprendizaje de conocimientos matemáticos útiles para el desarrollo cognitivo del niño. También se plantea en este caso la necesidad de buscar y desarrollar un contrato didáctico en el que la maestra considere los conocimientos previos, plantee situaciones didácticas de interés y de reto para los niños acorde a su nivel cognitivo, donde se le plantee preguntas que comprometan más los conocimientos del niño, guiándolo a la promoción y construcción conceptual del número, abarcando la adición y sustracción y su algoritmo, así como el valor posicional durante la solución de problemas.

En cuanto al maestro de segundo grado, se observa la aplicación de un contrato fuertemente didáctico (Brousseau, 1997) específicamente centrado en la ostensión (Ávila, 2001a, 2001b) en donde destaca el interés del profesor por mostrar y explicar los conocimientos de la suma, la resta y el sistema decimal, mediante el empleo de diversas estrategias y recursos (por ejemplo, la representación con material y el empleo de un diagrama dibujado sobre el pizarrón). Los resultados al final de la evaluación grupal, y también los estudios de caso permiten corroborar que el contrato de ostensión contribuye a la adquisición del conocimiento de los algoritmos de la suma y la resta, la resolución de ejercicios que implican el reconocimiento del valor posicional y de la composición aditiva. Sin embargo, parecería que mediante la ostensión se limita la promoción del entendimiento conceptual de cuando y cómo aplicar sus conocimientos de la suma y la resta al solucionar diversos problemas, dado que se observan dificultades en la comprensión de la lógica procedimental de los algoritmos de la suma y la resta, así como dificultades en la forma de operar con el valor posicional en el sistema decimal. Los conocimientos que adquieren los niños, bajo un contrato de ostensión, quedan en duda en el momento que los niños al intentar solucionar problemas aditivos con diferentes tipos de complejidad, prefieren abordarlos con sus propias estrategias de cálculo u conteo, que les hacen más sentido y significado; observamos que difícilmente emplean los conocimientos formales adquiridos como herramientas preferidas para solucionar problemas. Por lo que sería importante contribuir con los profesores hacia los contratos *constructivistas* y de los *saberes previos*, que fomenten el desarrollo conceptual y no sólo el algorítmico de la suma y la resta, y del sistema decimal.

Por otra parte, se observa en ambos maestros la ocurrencia del "Efecto Topaze" (Brousseau, 1997, 2000; Ávila, 2001a, 2001b) que ocurre constantemente y en mayor medida con la maestra. De esta manera, el objetivo docente de enseñar un contenido no desaparece por completo, pero sí se ve afectado, como ocurrió en los momentos que los profesores intentaban ofrecer alguna explicación a los niños concluyendo por inducir pistas o en último de los casos dar las respuestas correctas a los alumnos, limitando la posibilidad de que el niño pueda reflexionar sobre sus propios aprendizajes y dificultades. En particular, esto afecta la posibilidad de una comprensión significativa de la suma y la resta, el uso apropiado de los algoritmos de la suma y la resta en el momento de solucionar problemas y les impide entender, dado el caso, el porqué de lo correcto o erróneo de sus respuestas.

En conclusión la maestra de primer grado centra sus actividades en el conteo, el reconocimiento de la cardinalidad y de los numerales, la representación del valor de las decenas, la adición y la sustracción con material concreto, y el algoritmo de la suma con un resultado basado en la solución mediante el conteo y no en el procedimiento del algoritmo como tal, no se observa el trabajo del algoritmo de la resta y escasos ejercicios de sustracción. Se observa una enseñanza de las matemáticas basada en una serie de ejercicios repetitivos, con la ausencia del planteamiento y solución de problemas matemáticos. En el maestro de segundo grado, encontramos que sus clases se ubican en el conocimiento de los principios del valor posicional y de la composición aditiva, de la adición, la sustracción y sus respectivos algoritmos de la suma y la resta con transformación hasta con tres dígitos, solución de problemas de cambio sencillos de adición o de sustracción. Se observa una enseñanza basada en la solución de ejercicios, donde constantemente se centra en la ejecución correcta de los algoritmos y la operatividad del sistema decimal pero sin contextualizar problemas auténticos (Díaz-Barriga, 2006) que promuevan el desarrollo no sólo algorítmico sino también conceptual (Nunes y Bryant, 1997; Carpenter et al., 1999).

De acuerdo con las características del tipo del tipo de contrato especifico y a la adquisición del conocimiento adquirido por el niño, se observaría que un conocimiento centrado en la transmisión del conocimiento, en donde el profesor posee el conocimiento y lo transmite y el alumno es sobre todo un receptor y ulterior reproductor (Cruz y Pozo, 2003) capaz de reproducir una copia fiel de lo que se le enseña, como muestra de su aprendizaje. Las formas características del transcurrir de las clases de ambos profesores, se asemeja a lo que Aebli (1958) cita como la didáctica tradicional donde se destaca la importancia de la "intuición" y de los sentidos para hacer que los alumnos aprendan algún contenido matemático que el maestro debe exponer o mostrar, de ahí que se calificó de sensual- empirista a una psicología que halla el origen de todas las ideas en la experiencia sensible y que no atribuye al sujeto sino un papel insignificante en su adquisición, cuando debería ser el maestro el guía y el alumno el constructor de su propio conocimiento.

El proceso que se sigue de enseñanza y aprendizaje en las clases sigue una secuencia donde la interacción para la discusión de procedimientos y resultados es mínima, se observa más un trabajo individual del alumno. Cabe enfatizar que en ninguna de las clases se observó el aprendizaje colaborativo como tal. Se coincide con lo que reportan otros estudios, como Claudine (2003) y Marshall (1995) en sus investigaciones con profesores de matemáticas, puesto que el trabajo docente parece que consiste en ofrecer a los alumnos un procedimiento para resolver los problemas de manera rutinaria, que no permite la comprensión por parte del alumno, pues no se funda en el análisis del trabajo que se tiene que realizar y porque no permite un trabajo cognitivo del niño con respecto al trabajo matemático especifico que está en juego. Asimismo, no se diferencian ni abordan los tipos de problemas que representan la mayor dificultad, como son los de igualación y comparación.

Por otra parte, se observa que existe predominantemente un tipo de contrato didáctico que cada maestro logra establecer de manera general con su grupo, no obstante las condiciones parecen cambiar cuando este contrato didáctico se pone a prueba de manera individual con cada alumno. Este podría ser el caso de la posible diferencia que pudo llegar a establecerse entre alumnos de bajo y alto rendimiento. En este caso el compromiso parece ser mayor con los alumnos de alto rendimiento, quienes se muestran más responsables en su modo de atender y de responder a las clases expuestas. Por ejemplo, un niño de alto rendimiento al estar más interesado en lo que el maestro o maestro intenta mostrar, puede realizar un mayor número de preguntas y demandar mayor atención del maestro para poder resolver dudas de las tareas. Por su lado, el profesor se apoya en estos alumnos de alto rendimiento para plantear preguntas y corroborar resultados o procedimientos, así como darles mayor autonomía dentro del aula, lo que ayudaría a que estos niños pudieran aprender a sumar o restar. En tanto, con los niños de bajo rendimiento el tipo de contrato podría cambiar, por ejemplo estos niños pueden no mostrar interés o tener dificultades respecto al contenido por aprender, escasamente llegan o no a plantear preguntas para resolver dudas del objeto de estudio, presentan tareas o procedimientos incompletos, no hay expresión abierta en el aula y no plantean al maestro de sus incomprensiones o dudas. Por lo tanto, en reciprocidad podría ser que el tipo de interacción entre maestro y alumno pueda llegar a ser diferente por el tipo de relación que se establece, cuyas características podrían dificultar el aprendizaje de los algoritmos de la suma y la resta y su aplicación en la solución de problemas, en este caso, en los alumnos de bajo rendimiento.

El análisis del tipo de contrato establecido entre el docente y los alumnos en lo individual no fue el objetivo central de esta tesis, sino el planteamiento del tipo de contrato en las sesiones grupales de enseñanza. Sin embargo, dado lo antes expuesto, para futuras investigaciones se recomienda que se considere cómo pueden llegar a ocurrir en detalle este tipo contratos didácticos entre maestros y alumnos de alto y bajo rendimiento, lo que permitiría establecer patrones que ayuden a promover un mayor aprendizaje y comprensión del conocimiento matemático en todos los alumnos. A fin de cuentas, esto es lo que permitiría atender la situación de diversidad de estilos y niveles de aprendizaje de los alumnos.

En cuanto a la dinámica de la clase, se observa en ambos profesores el trabajo en pizarrón, la copia, el apunte y la escritura del ejercicio en sus cuadernos, el trabajo individual, el apoyo en actividades del libro, y como estrategia principal el diálogo triádico (Lemke, 1997), esta última resulta ser la estructura más común de la clase. Así, la dinámica de trabajo prevaleciente es que los profesores plantean preguntas, piden a los alumnos que las respondan y evalúan las respuestas.

Por otra parte, en términos de aportación, el estudio del conocimiento matemático del niño a través del instrumento que se diseñó permitió realizar el análisis del conocimiento matemático del niño, no sólo en términos cuantitativos utilizando como punto de referencia la propuesta curricular de la SEP (1993). La evaluación que se realizó permitió reconocer el proceso que sigue el niño y no sólo los productos o resultados que genera, ya que se detectaron los conocimientos y las dificultades que va construyendo el alumnado en términos de las categorías evaluadas. Por su parte, el estudio de las concepciones de los docentes permitió reconocer cuáles son sus concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además de contrastarlas con el tipo de práctica instruccional que siguen durante la impartición de sus clases. Esto condujo a entender el tipo de relación didáctica que se establece entre el alumno y el maestro, en términos del contrato didáctico que establece en las clases específicamente en relación con determinados conocimientos matemáticos.

En cuanto a los aspectos metodológicos, en esta tesis se aporta un modelo de análisis, que no se observó que emplearan los autores e investigaciones revisadas en estado del arte: se estudia en conjunto el proceso de la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, que considera el conocimiento matemático del niño, las concepciones del maestro y sus prácticas instruccionales, así como la interacción entre los tres elementos. Esto permite partir del triángulo interactivo o didáctico como unidad de análisis en la investigación y ofrecer una visión más completa y multideterminada del objeto de estudio, y no sólo de explicaciones que se derivan de estudios individuales considerando por aislado al alumno, al maestro o al curriculum. Este modelo de investigación podría ser utilizado para poder realizar otras líneas de investigación que impliquen cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje escolar en cualquier nivel y materia, como podría ser explorar las dificultades el aprendizaje no sólo de las matemáticas, sino en lectura y escritura, ciencias, historia, etc. considerando los diferentes niveles de educación básica.

Se considera que otra aportación importante de este trabajo fue el diseño del instrumento de evaluación de los conocimientos matemáticos de los niños dividido en cuatro categorías: conocimiento numérico, conocimiento del sistema de numeración decimal, solución de operaciones de suma y resta y solución de problemas aditivos. La validación por jueces, permitió obtener un instrumento confiable y válido. El piloteo con los niños permitió adaptar los reactivos de la prueba en cuanto a las instrucciones, la secuencia y el grado de dificultad al nivel del rendimiento esperado en los niños, ya que ayudó a incluir reactivos pertinentes para evaluar el conocimiento matemático de los niños. El instrumento hizo posible la identificación de los aprendizajes esperados en el currículo oficial y su contraste en términos de los logros reales de los alumnos, así como con las principales propuestas teóricas (Fuson, 1992; Nunes y Bryan, 1997; Carpenter, et al. 1999) que fundamentaron esta investigación.

El empleo combinado de una metodología cuantitativa y cualitativa representa la ventaja de poder observar el comportamiento de los datos en términos más amplios cuando se estudia la perspectiva del grupo, y de manera más fina, a profundidad, mediante el empleo de los estudios de caso con unos cuantos alumnos. La observación y la entrevista semiestructurada, que permitieron revelar con mayor detalle las representaciones y prácticas que ocurren en la dinámica de trabajo del grupo, e indagar las interpretaciones, necesidades y problemas planteados por los propios actores. En este trabajo resultó pertinente realizar un estudio de corte cualitativo mediante el empleo de técnicas como la entrevista, la observación y análisis del discurso en las prácticas educativas, porque permitió describir y entender el proceso de aprendizaje que siguen los alumnos de primer y segundo grado y su vínculo con la manera en que sus maestros enseñan, y a su vez cómo esto se engarza en determinadas prácticas educativas (Ávila et al, 2003). Se arribó así a una visión global del fenómeno de interés, el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estos dos primeros grados de la educación primaria. El conocimiento obtenido ofrece una aproximación a la comprensión del fenómeno y a la vez coadyuva a sugerir qué factores podrían modificarse o fortalecerse para obtener mejores logros educativos. De hecho, esta es una aportación importante desde la mirada de la psicología educativa, que es la disciplina que permite generar conocimiento sobre la manera en que los alumnos piensan, los procesos psicológicos que se ponen en juego cuando se aprenden matemáticas, las dificultades que plantean a dicho aprendizaje las tareas escolares y el repertorio de estrategias que utilizan los educandos al enfrentarlas.

Se corroboro que siguen teniendo vigencia los postulados de la teoría psicogenética que contribuyen a la explicación de los procesos de construcción del conocimiento matemático relativo a la noción del número. Pero al mismo tiempo, desde la perspectiva sociocultural, concluimos que las dificultades de los alumnos no se deben únicamente a situaciones "propias" de la complejidad del conocimiento matemático per se o a las limitaciones cognitivas de los sujetos, sino a una interacción entre diversos factores y procesos, sucediendo que las formas de enseñanza requieren un mayor ajuste a los procesos que siguen los alumnos para aprender.

Por último, a partir del análisis de la teoría, los resultados y conclusiones de esta investigación es posible plantear una serie de sugerencias encaminadas a promover y fortalecer el desarrollo del conocimiento matemático del niño en estos grados. Se aclara que dichas sugerencias no pueden ser tomadas como una receta para la enseñanza de las matemáticas, sino como una serie de recomendaciones que se desprenden de estos resultados y de la revisión de la literatura realizada en esta tesis. Entre las sugerencias que se desprende de esta investigación destacan:

a) En la promoción del conocimiento matemático hay que considerar como punto de partida en la enseñanza, las nociones conceptuales y estratégicas que el niño ya ha construido relacionadas con la adición y la sustracción (conocimientos previos y algoritmos naturales).

b) En relación con el conocimiento numérico, es deseable plantear una diversidad de situaciones didácticas referidas al cambio, combinación, comparación e igualación, que ayuden al niño desarrollar los principios básicos del conocimiento numérico, y no sólo a contar por el contar en sí o la práctica rutinaria del numeral. Esto permite asimismo afrontar la complejidad creciente de los tipos de problemas matemáticos que se le presentan al alumno en estos grados escolares.

c) Resulta apropiado promover el aprendizaje de los algoritmos de la suma y la resta sobre la base conceptual y estratégica que ya tienen los niños, dentro de un ambiente contextuado de solución de problemas auténticos, sin olvidar la reflexión sobre los mismos y no sólo la mecanización de los procedimientos.

d) En el planteamiento de la solución de una diversidad amplia de problemas, se debe hacer participar al alumno en la construcción total de la situación problema y no sólo en su solución, o en la simple aportación de los datos. Es importante trabajar (tanto en la enseñanza como en la evaluación) las competencias referidas al conocimiento matemático conceptual, al conocimiento estratégico y a la comunicación de resultados, tal como se ha expuesto en diversos apartados de la tesis.

e) De manera importante, se requiere vincular el planteamiento de problemas en situaciones relevantes de aplicación que requieran procesos de abstracción reflexiva, considerando un ambiente de trabajo grupal y cooperativo, no sólo individual.

f) Considerar por parte del maestro una evaluación continua, tanto de entrada como en el transcurso del proceso de aprendizaje, que le permita conocer las nociones conceptuales, estratégicas y de procedimiento que emplean los alumnos, para ofrecer la realimentación y ajuste de las ayudas pedagógicas pertinentes.

g) Diversificar las estrategias de evaluación del aprendizaje de las matemáticas, la cual no sólo debe considerar el resultado de las operaciones, sino una valoración enfocada a determinar niveles progresivos de desempeño (i.e. mediante el empleo de una evaluación por rúbricas como la que aquí hemos empleado).

h) Promover la autoevaluación en los alumnos y apoyarlos en el desarrollo de estrategias metacognitivas y de autorregulación del propio aprendizaje.

i) Finalmente, es importante revisar la secuencia y organización de contenidos del currículo de matemáticas en los primeros grados de la primaria para plantear una estructura más acorde a la manera en que los niños se apropian este conocimiento y diseñar materiales y secuencias didácticas congruentes con la misma.

j) Por último, es importante abordar un proceso de formación de docentes para la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel inicial como cuando ya están en el servicio. En dicha formación es importante un aprendizaje significativo de diversos enfoques de didáctica específica de las matemáticas que puedan resignificar y aplicar en la práctica, así como conducir experiencias de reflexión crítica sobre sus concepciones y prácticas docentes, promover un trabajo colaborativo y colegiado, encaminado a la generación de propuestas didácticas innovadoras. Los docentes deben reunirse como colectivo para analizar el sentido de su labor docente y para plantear y afrontar las necesidades y problemas de la enseñanza, en este caso de las matemáticas. Otro aspecto importante, apoyarlos en la generación de materiales y secuencias didácticas pertinentes.

Entre las principales limitaciones de este estudio, se encontró que los resultados se circunscriben al contexto educativo que hemos estudiado, su generalidad es limitada, por lo que se requiere conducir más investigaciones en otros contextos educativos. La investigación sólo se realizó en primer y segundo grado y podría hacerse en otros grados y ampliar el análisis para observar la evolución y apropiación de los contenidos matemáticos en otros grados.

En cuanto a las limitaciones del instrumento para evaluar el conocimiento matemático, a pesar de que realmente evalúa lo que se pretende evaluar en los niños, este resultó ser bastante extenso en su aplicación, al grado de tener que aplicarse en dos sesiones. Se observó que contiene varios reactivos que estarían evaluando casi lo mismo en el área de solución de operaciones y del sistema decimal, por lo que sería importante seleccionar los reactivos más representativos y construir una versión más corta. La ventaja de realizar estos ajustes es que el instrumento sería más práctico de aplicar y de calificar, considerando el tiempo de atención y tolerancia de los niños.

De la aplicación de las entrevistas acerca de la concepciones de los maestros, un aplicación al inicio del ciclo escolar sólo permitió explorar sus concepciones en el momento, sin embargo se cree que podría ser interesante analizar si existen o no cambios en las concepciones de los maestros a lo largo del año escolar, dado que las concepciones son dinámicas, también cambian en consonancia con el devenir de la enseñanza y el aprendizaje logrados. En caso de constatar cambios, al seguir la secuencia, podrían analizarse las principales causas o factores de esa transformación y determinar si en los propios docentes hay procesos de cambio conceptual importantes. Por lo que se recomienda realizar no sólo una, sino varias entrevistas a lo largo del año escolar o por lo menos una entrevista más, al final del mismo.

De la videograbación de las prácticas educativas para el análisis de los tipos de contratos didácticos que se desarrollan en las aulas, conviene considerar aspectos técnicos de importancia que limitaron esta investigación. En primer lugar es indispensable considerar el apoyo técnico para lograr instalar cuando menos dos cámaras de videograbación fijas, una al fondo y otra al frente, y una tercera cámara que siga la secuencia total de los participantes en clase (maestro y alumnos). Además es importante, que cuando se este grabando la participación y trabajo del niño, existan momentos en que se le cuestione acerca de sus procesos y la comprensión que está logrando en esos momentos o bien al finalizar la secuencia didáctica. Las videograbaciones en este caso se enfocaron a captar el devenir natural de las secuencias didácticas impartidas por los profesores en clase. Esto podría haberse complementado con entrevistas u otro tipo de protocolos dirigidos a los niños para tratar de recuperar desde la perspectiva de éstos, que dificultades habían enfrentado, qué habían aprendido, qué tan interesados estaban, etc. En un principio, se realizaron algunos interrogatorios informales con los niños al terminar las clases que se videograbaron, pero ya no se sistematizaron ni formaron parte del análisis de datos de esta tesis. Esta información contribuiría a enriquecer el análisis de los posibles avances o dificultades que el niño va enfrentando durante el proceso de enseñanza y aprendizaje en el momento mismo que trascurre un tipo de contrato didáctico.

Finalmente es necesario continuar realizando este tipo de estudios que revelan las incidencias del proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que ayudan a explicar el cómo y el qué aprende del aprendizaje del niño. Cuáles son sus dificultades, qué factores y de qué manera influyen en su aprendizaje matemático, cuál es la forma de enseñar del profesor, qué ventajas o desventajas conlleva ésta para el aprendizaje del alumno, etc. son aspectos que es posible recuperar de este tipo de investigaciones. Esto es lo que a mi juicio permitirá la construcción de modelos explicativos y de intervención más sólidos, que orienten la prevención de dificultades y la intervención educativa encaminada a la mejora educativa en este campo de conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Agre, P. E. (1997). Living math: Lave and Walkerdine on the meaning of everyday arithmetic. En D. Kirshner y J. A. Whitson (Eds.), Situated cognition. Social, semiotic an psychological perspectivas (71-96). New Jersey, EE. UU. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Aguilar, V. y Navarro, G. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. Revista de Psicología General y Aplicada, 53 (1), 63-83.

Andere, M. E. (2003). La educación en México: un fracaso monumental. México: Editorial Planeta Mexicano, S.A. de C. V.

Ávila, S. A. (2001a). La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar. Tesis de doctorado en Pedagogía. Facultad de Filosofía y Letras. México: UNAM

Ávila, S. A. (2001b). El maestro y el contrato didáctico en la teoría Brousseauniana. Educación matemática, 13 (3) 5-21, diciembre.

Ávila, S. A. (2004). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas. En: A. S. Ávila (Dir.), L. M. Aguayo, D. Eudave, J. L. Estrada, A. Hermosillo, J. Mendoza, M. E Saucedo, E. La Reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas. México: SEP

Ávila, S. Á. y Carvajal, A. (2003). El campo de la educación matemática (1993-2001). En Angel y López, Coords. Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. México: Grupo Ideograma Editores. pp. 35-149.

Baxter, M. M. (2004). Evolution of a constructivist conceptualization of epistemological reflection. Educational Psychologist. 39(1), 31-42.

Becerra. (1997) La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas. México. SEP. pp. 103-164.

Bermejo, V., Lago, M., Rodríguez, P. y Pérez , M. (2000). Fracaso escolar en matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. Revista de Psicología General y Aplicada, 53 (1), 43-62.

Block, D., Álvarez, M. (1999). Los números en primer grado: Cuatro generaciones de situaciones didácticas. Educación Matématica. 11 (1), 57-76, abril.

Block, D., Dávila, M., Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. Educación Matemática. 7 (3), 5-26.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática. 12 (1), 5-38.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Great Britain: Kluwer Academic publishers.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi L., Empson, S. (1999). Children's Mathematics. Madison: Heinemann.

Carpenter, T., Fennema E., Peterson, P., Chiang, C-P., Loef, M. (1986). Using Knowledge of Children's Mathematics Thinking in Classroom in Teaching: An Experimental Study. American Educational Research. 26, (4), 476- 499.

Carraher, T., Carraher D., y Schliemann A. (1991) En la vida diez, en la escuela cero. México: Siglo Veintiuno Editores, S. A. de C. V.

Castañeda, F. S. (1996). Documento interno de trabajo del Laboratorio de Fomento de Desarrollo Cognitivo y del Aprendizaje. Posgrado, Facultad de Psicología. México: UNAM

Castañeda, F. S. (2004). Educación, aprendizaje y cognición. En: S. Castañeda. Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica. Manual Moderno. México, D. F.

Clark, C. M. y Peterson, P. L. (1990). "Procesos de pensamiento de los docentes". En: M. Wittrock (ed.). La investigación de la enseñanza III. Profesores y alumnos. Barcelona: Paídos.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia J., y Rochera M. J. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa. Infancia y aprendizaje, 59-60pp, 189-232pp.

Coll, C., Pozo, J.I., Sarabia, B. y Valls, E. (1992). Los contenidos de la reforma. Enseñanza y Aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes. Madrid: Santillana.

Coll, C., Sole, I. (2001) Enseñar y aprender en el contexto en el aula. En: C. Coll, J. Palacios, Á. Marchesi. Desarrollo psicológico y educación (357-386). Madrid: Alianza. cap. 14.

Colomina , R. Onrubia, J., y Rochera M. J. (2001). Interacción educativa y aprendizaje escolar: la interacción entre alumnos. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi. (Comps.). Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar (pp. 415-435). Madrid: Alianza.

Cortina, M. J. L. (2006). Las mediciones de la calidad del aprendizaje matemático en México: ¿qué nos devela la prueba PISA 2003 y cómo podemos responder? Vol.18, numero 1.pp. 161-176.

Cortina, M. J. L. (1997). Conceptualización y operación del valor posicional en diferentes situaciones. Un estudio con niñas y niños mexicanos de segundo, tercer y cuarto grados. Tesis Maestría. México: Universidad de las Ámericas

Díaz-Barriga, A. F. (2005). Enseñanza situada: Vinculo entre la escuela y la vida. México: McGraw Hill.

English, L. (1998). Children's problem posing within formal and informal. Journal for Research in Mathematics Education. 29 24-83.

Erickson, F. (1992). Etnographic microanálisis of interation. In: M., D., Lecompte., W., L., Millroy, & J., Prissle (Editors). The Hanbook of Qualitative Research in Education. 5, 201-225.

Erickson, D. K. (1993, april). Midle school matehematics teachers´ views of mathematics and matehematics education, their planning and clasroom instruction, and student beliefs and achievement. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta GA.

Eurydice European Unit (2002). Key Competencies. Belgium, Brussels: Eurydice

Farfan, M. A (1998). Enseñanza de estrategias de autorregulación en solución de problemas aritméticos a niños con dificultades de aprendizaje. Tesis de Licenciatura. Facultad de Psicología, México: UNAM.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, L. Levi, J., and Empson S., (1996). Learning to use children's thinking in mathematics instruction: A longitudinal study. Journal for Research in Mathematics Education 27 (4): 403-434.

Fischbein, E. (1999). Psychology and Mathematics Education. Mathematical Thinking & Learning. 1 (1), 12-47.

Flores, M. R. C. (1999). La enseñanza de estrategias de autorregulación a niños con problemas de aprendizaje mediante la capacitación a madres. Integración: Educación y Desarrollo Psicológico. 11, 1-17.

Flores, M. R. C. (2002). El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción. Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación. Tesis de doctorado, Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. Educación Matemática, 17(7), 7-34

Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (2003). Enhancing the mathematical problem solving of students with mathematics disabilities. En: En: H. L. Swanson, K. R. Harris, S. Graham (Ed.), Handbook of learning disabilities (pp. 306-322). New York, EE. UU. : The Guilford Press.

Fuenlabrada, I. (1996). Innovaciones de la matemática en la escuela primaria. Cero en conducta. Año 11, (42-43), pp. 72-79.

Fuson, K. C. (1992) Research on whole number addition and substraction. En D. A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning: A proyect of the National Council of Teachers of Mathematics. (243 –275). New York: McMillan Publishing Company.

Fuson, K. C. (1988). Children's counting and concepts of number. New York: Springer Verlag.

García, R. O. (2002). Estrategias para favorecer el aprendizaje de solución de problemas matemáticos de suma y resta. Tesis de maestría. Facultad de Psicología: UNAM.

García, C. B., Delgado-Cervantes G., González, M., Pastor R., Espinosa L., Baeza, C. (2002). Establecimiento de competencias básicas de la educación en la primera infancia. Documentos de trabajo sobre el desarrollo de la primera infancia en México, No. 4., México: UNESCO y UNICEF.

García, R. O., Jímenez, H, E., Flores M. R.C. (2006). Un programa de apoyo para facilitar el aprendizaje de solución de problemas de suma y resta en alumnos de bajo rendimiento. Educación Matemática. Vol 18 (2).

Gil, P. D. (1991). ¿Qué hemos de saber y hacer los profesores de ciencias? En: D. Gil, J. Carrascosa, C. Furió y J. Martínez-Torregrosa. La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. Barcelona: ICE/Horsori, p.p. 19-32.

Gil, P. D y Guzmán O. M. (1993). La necesidad de innovaciones en la evaluación. Enseñanza de las ciencias y la matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. España: Editorial Popular.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge, Massachussets:Harvard University Press.

Gill, M. G., Ashton P. T. and Algina J. (2004). Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. Contemporary Educational Psychology. 29. 64-185.
.
Ginsburg, H. y Opper, S. (1977). Piaget y la teoría del desarrollo intelectual. Madrid: Prentice Hall Internacional.

Ginsburg, H., P. (1997). Entering the child's mind. The clinical interview in psychology psycholoical research and and practice. New York: Cambrige University Press.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory. Chicago: Aldine de Gruyter.

Good, T. y Brophy, J. (1997) Psicología educativa. México: McGraw-Hill.

Guerrero, A. (1997). El proceso de enseñanza aprendizaje de las operaciones aritméticas elementales. Tesis Doctoral, Facultad de Filosofía, México: UNAM.

Hallahan, D., Kauffman J., and Lloyd J. (1999). Introduction to learning disabilities. Massachussets: Allyn and Bacon.

Hans, A. (1958). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Buenos Aires: Editorial Kapeluz.

Hembree, R y Marsh, H. (1991). Problem solving in early childhood: Building foundations. En: R. J. Jensen, (editor). Research ideas for the classroom. Early childhood mathematics. pp. 151-170. New York.: Mc Millan Publicity Company.

Hernández, S., Fernández C. y Baptista L. (1991) Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill.

Hofer, B. K (2001). Personal epistemology research: Implications for learning and teaching. Journal of Educational Review, 13, (4). 353-383

Hofer, B. K. (2002). Personal epistemology as a psychological and educational construct: an introduction. En: B. Hofer K. Personal epistemology: the psychology of beliefs about knowledge and knowing. New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hofer, B. K. y Pintrich P. R. (1997). The development of epistemological theories: beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of Educational Research. 67(1), 88-140.

Hopkins, K., Hopkins B., Glass, G., (1997) Estadística básica para las Ciencias Sociales y del comportamiento. México: Prentice Hall.

Chicago Public Schools Bureau of Student Assesment. Illinois Rubric for Mathematics. Recuperado el 8 de diciembre del 2005, en: http: //intranet, cps.k12.il.us/ Assesments/Ideas_and_Rubrics/ Rubric_Bank/MathRubrics. pdf

Imbernón, F. (1994). La formación del profesorado. Colección Papeles de Psicología no. 11. Barcelona: Paidós.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2006). El aprendizaje el español y las matemáticas en la educación básica: sexto de primaria y tercero de secundaria. México: INEE.

Jordan, N. & Montani, T. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities. 30 (6), 624.

Kamii, C. (1988). El niño reinventa la aritmética: Implicaciones de la teoría de Piaget. Madrid: Visor.

Kane, R., Sandretto S., Heath C., (2002). Telling half the story: A critical review of research on the teaching beliefs and practices of university academics. Review of educational research. 72 (2). Pp. 177-228.

King, P. M. (2002). The reflective judgment model: Twenty years of research on epistemic cognition. En: B. K. Hofer. Personal epistemology: the psychology of beliefs about knowledge and knowing. New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Labinowicz, E. (1987). Introducción a Piaget. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Lagrange, J-B., Artigue, M., Laborde, C., Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research an inovation, en: Second International Handbook of Mathematics Education, 237-269.

Lave, J., Murtaugh, M., de la Rocha, O. (1984). The dialectic of aritmetic in grocery shopping. En: Rogoff B., Lave J. Everyday cognition. USA: Harvard University Press.

Lave, J. (1991). La cognición en la práctica. Barcelona: Paidos.

Lemke, J. (1997). Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores. Barcelona. PAIDOS.

Levin, J. (1979). Fundamentos de estadística en la investigación social. México: Harla, S. A. de C. V.

Llinares, C. S. y Sánchez G. V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En S. Llinares y V. Sánchez (Ed.). Teoría y práctica en educación matemática (pp. 63-116). Sevilla: Alfar.

Macotela, F. G. S. (1995). Desarrollo y perspectivas en el área de problemas de aprendizaje. Programa de publicaciones y de material didáctico. Facultad de Psicología, México: UNAM.

Macotela, F. G .S, Bermúdez P. Castañeda, I. (2000). Inventario de Ejecución Académica. Facultad de Psicología. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Marshall, S. (1995) Schemas in problem solving. New York: Cambrydge University Press.

Martínez, F. J. R. (2004). Concepción de aprendizaje, metacognición y cambio conceptual en estudiantes universitarios de psicología. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

Martínez, Silva, M. y Gorgorio, N. S. (2004).Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6(1). Consultado el día cuatro de junio del 2005 en http: //redie.uabc.mx/ vol6no1/contenido-silva.html.

Mcleod, D. B. & Mcleod, S. H. (2002). Syntesis-beliefs and mathematics education: implication for learning teaching, and research. En: G. C. Leder, E. Pehkonen and G. Törner. Netherlands, USA: Kluwer Academics Publishers.

Mendoza, M. J. (2004). La reforma curricular y los problemas en la clase de matemáticas. En: A. Ávila (Dir.), L. M. Aguayo, D. Eudave, J. L. Estrada, A. Hermosillo, J. Mendoza, M. E Saucedo, E. La Reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas. México: SEP

Mercer, N. (1996). Las perspectivas socioculturales socioculturales y el estudio del discurso en el aula. En: C. Coll y D. Edwards. Enseñanza y aprendizaje aproximaciones al estado del discurso educacional. Madrid: Aprendizaje. Cap. 1, pp. 11-21.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research an Case Study Applications in Education. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Monroy, M. (1998). Un estudio con profesores de Ciencias Histórico Sociales del Colegio de Bachilleres y del Colegio de Bachilleres y del Colegio de Ciencias y Humanidades. Tesis de Maestría, Facultad de Psicología: UNAM.

Monroy, M., Díaz, M. (2004). Las teorías y las creencias docentes, una alternativa para la evaluación. En: F. Díaz-Barriga y M., Rueda. La evaluación de la docencia en la Universidad. pp. 137-151.

Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. Review of educational research. Vol. 74, No. 3, pp. 317-377.

Nunes, T., Schliemann A. L. Y Carraher (1993). Street Mathematics and School Mathematics, Nueva York, Univesrity of Cambridge Press.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño. México: Siglo XXI.

OCDE (2001). Resultados del estudio PISA. Disponible en:http//www.rtn.net.mx/OCDE/prensa.html#pisa1.

Olabuénaga, R. (1999) Metodología de investigación cualitativa. La oportunidad de investigar cualitativamente. Universidad de Deusto.

Onrrubia, J., Rochera, Ma. J., Barberá, E. (2001). La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En: Coll, C., Palacios, J., y Marchesi, A. Desarrollo psicológico y educación. Madrid: Alianza. pp. 487-508. (19).

Ornelas, C. (1998). El sistema educativo mexicano. La transición de fin de siglo. México: Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE), Nacional Financiera y Fondo de Cultura Económica.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. Infancia y aprendizaje. 26 (4), 451-468.

Pardo, A., Ruíz, M. A. (2002). SPSS 11 Guia para el análisis de datos. Madrid. McGraw-Hill/ Interamericana.

Paredes, D. H. (2002). La compresión del texto de problemas matemáticos de suma y resta: una intervención con niños de quinto grado de primaria. Tesis de maestría. Facultad de psicología: UNAM..

Pavkov, T., W. & Pierce, K., A. (2003). Ready, Set, Go¡. A student guide to SPSS 11. 0 Windows. New York: McGraw Hill.

Pepin, B. (1999). Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: the theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England. France and Germany: TNTEE publicatios. Vol. 2 (1).

Perrenoud, P. (2004). Diez nuevas competencias para enseñar. Barcelona: Graó, Colección Biblioteca del aula, no. 196.

Perry, W. G. (1981). Cognitive and ethical growth: The making of meaning. In A. Chickering (Ed.) The modern American college. pp. 76-116. New York: Josey-Bass.

Piaget, J. (1967). La génesis del número en el niño. Buenos Aires: Guadalupe.

Posner, G., Strike, K., Hewson, P., &Gerzog, W. (1982). Accomodation of a scientific concepction: toward a theory of conceptual change. Science Education, 66, (2), 211-227.

Pozo, J. L. (1996). La solución de problemas. Madrid: Santillana.

Pozo, J. L. (2000). Concepciones de aprendizaje y cambio educativo. Ensayo y experiencias. Psicología en el campo de la educación, Sumario no. 33, 4-13, Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E., (1999). Metodología de al investigación cualitativa. Granada: Ediciones aljibe.

Scheuer, N. (2005). Introducción al Dossier: De las matemáticas como conocimiento lógico a las matemáticas como conocimiento sociocultural: implicaciones para el estudio de la adquisición y enseñanza del número. Infancia y Arendizaje. 28(4), 363-375.

Shommer, M. (1990). Efects on beliefs about the nature of knowledge on comprhesion. Journal of Educatinal Psychology, 82, 498-504.

Schön, D. (1994). " La práctica reflexiva: aceptar y aprender de la discrepancia". Cuadernos de Pedagogía. 222, 183-189.

Sinclair, A. (2005). Las matemáticas y la imitación entre el año y los tres años de edad. Infancia y Aprendizaje. 28(4), 377-392.

Stake, R. (1994). Case Studies. En: N. K. Denzin & Lincoln Y. S.(Editors). Hanbook of Qualitative Research. California, USA: SAGE Publications.

SEP. (1999a) Plan y programas de estudio. Educación básica. México. SEP pp. 9-68

SEP. (1993b) Plan y programas de estudio. Educación básica. México. SEP

Stake, R. Investigación con estudio de casos. (1998). Madrid: Morata

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a syntesis of the research. In D. A. GROUWS (ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan. San Diego University.

Tobin, K. y Espinet, M. (1989). Impediments to change: applications of coaching in high school sicence teaching. Journal of Research in Sicence Teaching, 26 (2), 105-120.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts Learning. En: Nunes y Bryant. Learning and Teaching Matematics: International Perspective. Sucesse Oku: Pshychology Press.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México:Trillas.

Vermunt, J., Verloop, N. (1999) Congruence and friction between learning and teaching. Learning and instruction. (9), 257-280.

Vigotsky, L. S. (1997). Obras escogidas. Tomo I. Moscu: Editorial Pedagógica.

Wadswort, B. (1991). Teoría de Piaget del desarrollo cognoscitivo y afectivo. México: Diana.

Waldegg, G. (1995). La investigación educativa en los ochenta perspectivas para los noventa. Procesos de enseñanza y aprendizaje II. México: Fundación para la Cultura del Maestro Mexicano. (2) 11- 63.

Yin, R. K. (1994). Case study research. Design and methods. (2nd ed.) Thousand Oaks, Calif.: Sage.

GLOSARIO

Del conocimiento numérico:

Principio de correspondencia biunívoca. Al contar, deben contarse todos los objetos, y cada uno debe contarse una vez y sólo una vez.

Principio del orden constante. Cada vez que se cuenta debe pronunciarse palabras numéricas en el mismo orden.

Principio de cardinalidad. Para contar se relaciona con la manera de decidir la cantidad real de objetos en el conjunto que se está contando, es decir, cómo saber si el total de objetos corresponde a la última palabra numérica pronunciada al contar, principio de cardinalidad.

La seriación es la habilidad cognitiva para seriar u ordenar las cosas en un continuo de acuerdo con alguna propiedad y se relaciona con el aspecto ordinal.

La clasificación implica distinguir las características de las cosas para separarlas y ordenarlas de acuerdo a esas características, lo cual se relaciona con el aspecto ordinal del número.

La conservación de cantidad (el número de objetos en el conjunto que permanece constante, independientemente de la forma en que se coloquen u ordenen los objetos) es imprescindible para poder captar tanto el aspecto cardinal como ordinal del número.

Del sistema numérico decimal:

Composición aditiva del número. Cualquier número *n* puede descomponerse en otros dos números precedentes en la lista ordinal de números, de tal forma que su suma dé exactamente *n*. Esta propiedad esencial de los sistemas de numeración se conoce como composición aditiva del número.

Concepto de unidades. Un sistema de numeración implica contar unidades de tamaños diferentes: unidades, decenas, centenas, etc. Debido a que se utiliza un sistema de base diez, cuando se tienen diez unidades de cualquier tamaño se reagrupan en unidades de orden superior.
De igual forma, para comprender del todo un sistema de medición, se necesita entender las equivalencias dentro del sistema.
El tamaño de las unidades es importante tanto para contar como para ordenar cantidades.

Valor posicional es la expresión que muestra que el lugar del dígito indica el valor relativo.

De operaciones de suma y resta

Operaciones. De acuerdo con Carpenter y cols. (1999) éstas pueden ser consideradas como los algoritmos y procedimientos formales.

Para la SEP (1993) las operaciones son concebidas como instrumentos que permitan resolver problemas; el significado y sentido que los niños puedan darles, deriva precisamente de las situaciones que resuelvan con ellas.

Agrupamiento, integrar unidades menores a otras mayores cuanto estas pasan de nueve unidades.

Desagrupamiento, desintegrar unidades mayores en unidades menores.

De solución de problemas aditivos

Problemas de cambio, cuando el valor inicial se modifica en función de otra variable.

Problemas de combinación, si se mezclan los valores de las variables.

Problemas de comparación, cuando se establece una relación entre dos variables.

Problemas de igualación, ante situaciones en las que dos cantidades, tras ser comparadas se modifican hasta ser iguales.

Del instrumento de validación:

Pertinencia, es decir, si corresponden las definiciones elaboradas sobre los constructos y sus reactivos en validación.

Relevancia, esto es, si se trata de un constructo y los reactivos principales dentro de lo que en el campo disciplinario y didáctico se cataloga como básico.

Claridad, es decir, si el constructo y los reactivos correspondientes comunican con precisión y sencillez la calidad y el alcance de los desempeños asociados.

Jerarquía, adecuada entre los constructos y entre los reactivos que conforman cada constructo, es decir que los niveles de desagregación en los que han sido definidos cada uno de ellos guarden relaciones de inclusión debidas.

ANEXO 1.

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PREVIOS HASTA LA SUMA Y LA RESTA Y LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS

Instrucciones generales: Presente en forma secuencial los reactivos correspondientes a las áreas de Competencia Numérica, Sistema Decimal y Suma y Resta y solución de problemas.

I. Forma de evaluar para el área de Competencia Numérica: Después que el niño ha realizado el reactivo se puntuará en la hoja de evaluación de estrategias el tipo de respuesta, se pondrá una palomita sobre el número del reactivo si es correcta y una diagonal en caso contrario. De igual forma se puntuará si presenta los componentes correspondientes a las subáreas.

II. Forma de evaluar para Sistema Decimal y Suma y Resta. Después que el niño ha realizado el reactivo, se puntuará si presenta o no la competencia correspondiente y se preguntará al niño como ha llegado a la respuesta al mismo tiempo que se escribirán sus respuestas (estrategias).

III. Forma de evaluar problemas y algoritmos de suma y resta. Presente los reactivos, observe cómo realiza sus procedimientos, pregunte y anote sus respuestas.

I. CONOCIMIENTO NUMÉRICO

PRINCIPIO DE CARDINALIDAD

1. Instrucciones: El aplicador dirá al niño: " Observa con cuidado el siguiente conjunto de ranas, cuéntalas en voz alta y dime: ¿cuántas ranas son?"

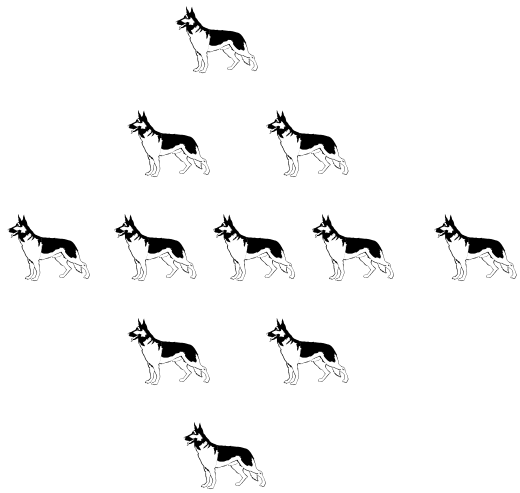
Una vez que el niño ejecuta el reactivo el aplicador puntúa, en la hoja de Hoja de Evaluación, si o no el niño presenta el principio de Cardinalidad con figuras. También observará e identificará si están o no presentes las estrategias correspondientes al reactivo, o si presenta otras las anotará.

R= 10

2. Instrucciones: El aplicador dirá al niño: “ Observa con cuidado el siguiente conjunto de ranas, cuéntalas en voz alta y dime: ¿cuántas ranas son?”

   Una vez que el niño ejecuta el reactivo el aplicador puntúa, en la hoja de Hoja de Evaluación, si o no el niño presenta el principio de Cardinalidad con figuras. También observará e identificará si están o no presentes las estrategias correspondientes al reactivo, o si presenta otras las anotará.

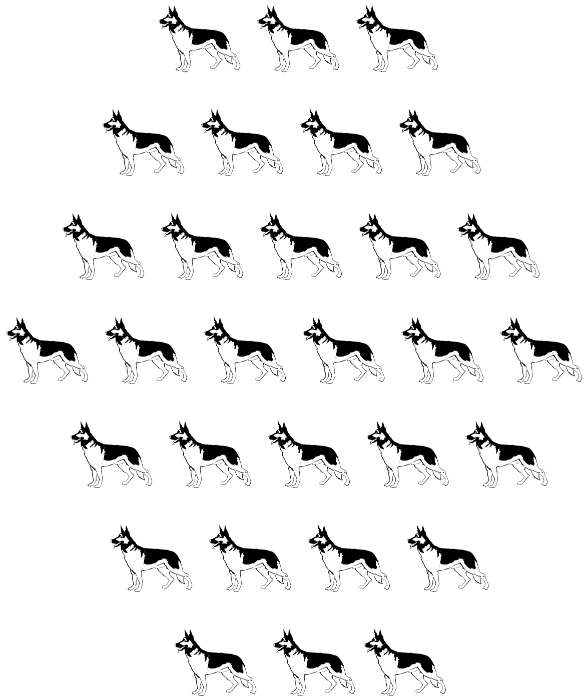
   R= 18



3. Instrucciones: El aplicador dirá al niño: “Observa con cuidado el siguiente conjunto de perros, cuéntalos en voz alta y dime: ¿ cuántos perros son?

Una vez que el niño ejecuta el reactivo el aplicador puntúa, en la hoja de Hoja de Evaluación, si o no el niño presenta el principio de cardinalidad con figuras. También observará e identificará si están o no presentes las estrategias correspondientes al reactivo, o si presenta otras las anotará.

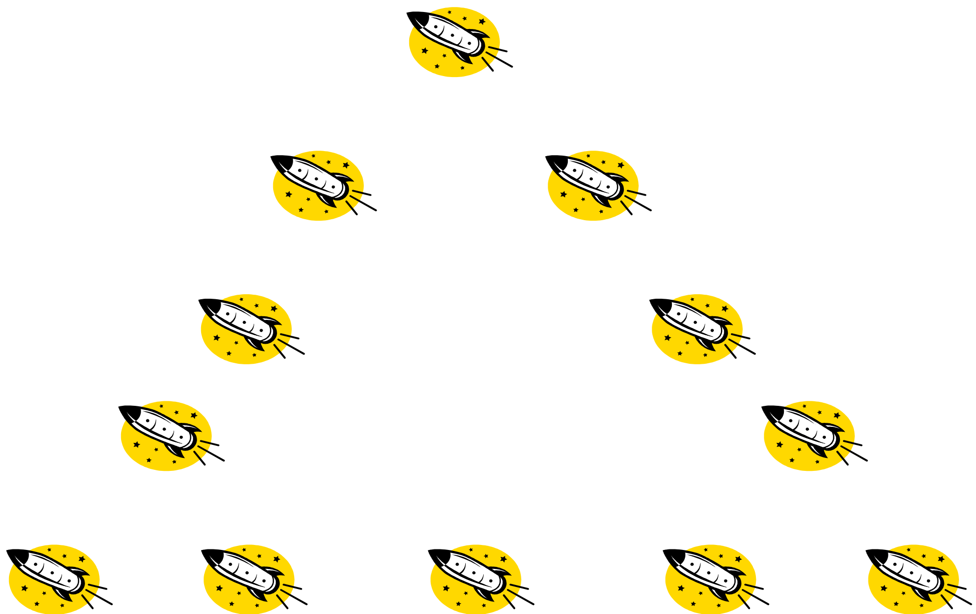
R= 11



4. Instrucciones: El aplicador dirá al niño: " Observa con cuidado el siguiente conjunto de perros, cuéntalos en voz alta y dime: ¿cuántos perros son?

Una vez que el niño ejecuta el reactivo el aplicador puntúa, en la hoja de Hoja de Evaluación, si o no el niño presenta el principio de Cardinalidad con figuras. También observará e identificará si están o no presentes las estrategias correspondientes al reactivo, o si presenta otras las anotará.

R= 30



(Fig. 2)

5. Instrucciones: El aplicador ubicará 12 objetos en forma de triangulo (fig. 2) y (proporcionará al niño caja con objetos) y dirá al niño: "observa detenidamente este conjunto de objetos y dime: "¿Cuántos objetos son?, ¿Cuántos objetos debes poner para que sea igual a este?.

Una vez que el niño ejecuta el reactivo el aplicador puntúa, en la hoja de Hoja de Evaluación, si o no el niño presenta el principio de Cardinalidad con objetos. También observará e identificará si están o no presentes las estrategias correspondientes al reactivo, o si presenta otras las anotará.

R = 12

8	**105**
10	**487**
24	**990**

6,7,8,9,10, 11. **RECONOCIMIENTO DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DEL NÚMERO**

Instrucciones. El aplicador dirá para cada número: “Observa cuidadosamente el siguiente número y dime que numero es”

Reactivo 6= 8
Reactivo 7= 10
Reactivo 8= 24
Reactivo 9= 105
Reactivo 10= 487
Reactivo 11= 990

7

28

50

100

500

630

986

12, 13, 14, 15,16, 17,18 ESCRITURA DE NÚMEROS

Instrucciones: El aplicador dirá al niño para cada uno de los números : “Escucha con atención, enseguida te diré algunos números para que los escribas, escribe el número: 7, 38, 89, 102, 630, 986

Reactivo 12 = 7
Reactivo 13= 28
Reactivo 14= 50
Reactivo 15=100
Reactivo 16=500
Reactivo 17=630
Reactivo 18=986

13	**109**
20	**348**
57	**762**

II. SISTEMA NUMÉRICO DECIMAL

2.1 Tamaño de las unidades

Instrucciones. El aplicador dirá para cada número: “Observa cuidadosamente el siguiente número y dime”:

19 ¿Cuántas decenas (dieses) hay en el número 13?
20. ¿Cuántas decenas (dieses) hay en el número 20
21. ¿Cuántas decenas (dieses) hay en el número 57?
22. ¿Cuántas centenas (de a 100) hay en el número 109
23. ¿Cuántas centenas (de a 100) hay en el número 348?
24. ¿Cuántas centenas (de a 100) hay en el número 762?

1. Estos reactivos se aplican de manera:

a) Formal: Preguntar al niño tal y como esta la pregunta, no decir lo del paréntesis.
b) Forma cotidiana: Preguntar al niño diciendo lo que esta en el paréntesis y omitir lo formal.
c) Con objetos pedir al niño que represente la cantidad utilizando bolsitas de 10 o de 100 respectivamente.

El aplicador observará al niño y una vez que ha dado la respuesta preguntará sobre como lo supo y que hizo para resolver. El aplicador anotará las respuestas del niño.

14 **87**

27 **342**

43 **956**

2.2 Valor posicional

Instrucciones. Muestre al niño las siguientes cantidades y realice las siguientes preguntas

25. En el 14 cuanto vale el 1 (señala el lugar de las decenas)
26. En el 27 cuanto vale el 2 (señala el lugar de las decenas)
27. En la cantidad 43 cuánto vale el 4 (señala el número que ocupa el lugar de las decenas)
28. En el 87 cuanto vale el 8 (señala el lugar de las decenas)
29. En el número 342 cuánto vale el 3 (señala que número ocupa el lugar de las centenas)
30. En el número 956 cuánto vale el 956 (señala que número ocupa el lugar de las centenas) (checar valor de lugar: U.D.C.)***

(poner en tacita el número total)

1. El aplicador observará al niño y una vez que ha dado la respuesta preguntará al niño como lo supo y que hizo para resolver.
2. El aplicador anotará las respuestas del niño.

$\begin{array}{r} 2 \\ + \underline{4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ + \underline{3} \end{array}$	$\begin{array}{r} 47 \\ + \underline{32} \end{array}$	$\begin{array}{r} 86 \\ + \underline{21} \end{array}$
$\begin{array}{r} 57 \\ + \underline{46} \end{array}$	$\begin{array}{r} 98 \\ + \underline{53} \end{array}$	$\begin{array}{r} 123 \\ + \underline{178} \end{array}$	$\begin{array}{r} 456 \\ + \underline{305} \end{array}$

III. Operaciones.

3. 1 Sumas.

Instrucciones. El aplicador dirá al niño: _"Aquí tienes algunas operaciones cópialas y por favor resuélvelas cómo sabes, si puedes trata de ir diciendo en voz alta como le vas haciendo".

1) El aplicador observará detalladamente el procedimiento que sigue el niño y realizará sus anotaciones respectivas.

2) Una vez que el niño ha concluido la resolución de la operación, el aplicador verificará su procedimiento, preguntará al niño acerca de cómo realizó su operación y anotará sus respuestas.

Reactivos:
Suma: 31, 32, 33, 34
Suma: 35, 36, 37, 38

6	**8**	**69**	**98**
- 2	**- 5**	**- 43**	**- 45**
40	**75**	**205**	**978**
- 26	**- 47**	**- 175**	**- 393**

III. Operaciones.

3. 2 Restas.

Instrucciones. El aplicador dirá al niño: _"Aquí tienes algunas operaciones cópialas y por favor resuélvelas cómo sabes, si puedes trata de ir diciendo en voz alta como le vas haciendo".

1) El aplicador observará detalladamente el procedimiento que sigue el niño y realizará sus anotaciones respectivas.

2) Una vez que el niño ha concluido la resolución de la operación, el aplicador verificará su procedimiento, preguntará al niño acerca de cómo realizó su operación y anotará sus respuestas.

Reactivos:
Resta: 39, 40, 41, 42
Resta: 43, 44, 45, 46

Karen tenía 12 pesos. En el recreo su hermano le dio 5 pesos más. ¿Cuántos pesos tiene ahora Karen?

Pedro tenía 13 estampas. En el parque le regaló 6 estampas a Rigo. ¿Cuántas estampas tiene ahora Pedro?

IV. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS
4. 1 Problemas de cambio

Instrucciones. El aplicador proporcionará al niño una hoja en blanco y un lápiz y dirá:
-" Enseguida te leeré algunos problemas, pon mucha atención para que después los resuelvas como sabes" (Si el niño sabe leer se le pedirá que lea el problema).

1. El aplicador observará al niño detalladamente sobre como resuelve el problema y anotará sus observaciones.
2. Después que el niño ha resuelto cada problema, el aplicador preguntará al niño como y que hizo para llegar al resultado, y también anotará las respuestas del niño.

Reactivos:
47. R = 17
48. R = 7

Carla tiene 8 pececitos. Su prima Mayra tiene 5 pececitos. ¿Cuántas pececitos tienen entre las dos?

Rafael tenía 11 cochecitos. Marcos tiene 5 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos necesita Marcos para tener igual que Rafael?

4. 2 **Problemas igualación**
4.3 **Problemas de combinación**

Instrucciones. El aplicador proporcionará al niño una hoja en blanco y un lápiz y dirá:
-" Enseguida te leeré algunos problemas, pon mucha atención para que después los resuelvas como sabes"

1. El aplicador observará al niño detalladamente sobre como resuelve el problema y anotará sus observaciones.

2. Después que el niño ha resuelto cada problema, el aplicador preguntará al niño como y que hizo para llegar al resultado, y también anotará las respuestas del niño.

Reactivos:
49. R = 13
50. R = 6

Mariana tiene 13 vestidos. Lupita tiene 6 vestidos. ¿Cuántos vestidos más que Lupita tiene Mariana?

Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marco dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marco?

4.4 **Problemas de comparación**

Instrucciones. El aplicador proporcionará al niño una hoja en blanco y un lápiz y dirá:

-"Enseguida te leeré algunos problemas, pon mucha atención para que después los resuelvas como sabes"

1. El aplicador observará al niño detalladamente sobre como resuelve el problema y anotará sus observaciones.
2. Después que el niño ha resuelto cada problema, el aplicador preguntará al niño como y que hizo para llegar al resultado, y también anotará las respuestas del niño.

Reactivos:

51. R = 7
52. R = 7

ANEXO 2

ENTREVISTA AL NIÑO
I. DATOS DE IDENTIFICACIÓN

1. Nombre:
2. Sexo:
3. Edad:
4. Grado escolar:
5. Ocupación de los padres:
6. Edad de los padres:
7. No de hermanos:

II. ACTITUD Y VALORACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS
¿Te gustan las matemáticas?,¿Por qué?
¿Para que te sirve aprender matemáticas?
¿Crees que eres bueno para las matemáticas?¿En qué?
¿Te resulta fácil o difícil aprender matemáticas? ¿En qué?
¿En qué utilizas lo que te enseña el profesor en las clases de matemáticas?
¿Qué te gustaría que se hiciera en la clase de matemáticas para que aprendieras mejor o te gustará más esta materia?
¿De todo lo que has aprendido este año en la escuela, que es lo más importante?

III. CONTEO
¿Es importante para ti saber contar?
¿Qué es contar?, ¿Cómo cuentas?

IV. NUMERACIÓN
¿Es importante para tí aprender a numerar?
¿Qué haces cuando numeras algo?

V. SISTEMA DECIMAL
¿Qué es el sistema decimal?
¿Para que te sirve aprender el sistema decimal?
¿En que te ayuda conocer el sistema decimal?

VI. SUMA Y RESTA
¿Podrás sumar y restar?
¿Qué es para ti sumar?
¿Qué es para ti restar?
¿Qué haces cuando sumas?
¿Cómo le haces para restar?

VII. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS
¿Tu maestro te enseña a solucionar problemas matemáticos?
¿Para que te sirve saber solucionar problemas?
¿Cómo te enseña tu maestro a solucionar problemas?
¿Cómo resuelves los problemas?
Cuándo no puedes como resolver un problema o una operación de suma y resta, ¿qué haces?, ¿a quién le pides ayuda? ¿Alguien te ayudará con tus dudas o tus tareas?

ANEXO 3

ENTREVISTA PROFESOR DE PRIMARIA

DATOS DE IENTIFICACIÓN:
1. Escuela:
2. Nombre:
3. Edad.
4. Escolaridad.
5. Años ejerciendo:
6. Escuelas en las que trabaja:
7. Grado que imparte
8. Realiza otra tipo de actividad profesional:

Concepciones del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas

a) Formación previa e interés en la didáctica de la materia
_ ¿Dónde inicio ud. su formación en la enseñanza de las matemáticas?
_ ¿Su forma de enseñar sigue o se basa en alguna teoría, corriente o teórico en específico?
_ ¿Cuál es, … en que consiste?

b) Concepciones docentes sobre la enseñanza de las matemáticas
_ ¿Cuál cree ud. que es la importancia de enseñar matemáticas?
_ ¿Cómo o dónde ubica ud. las matemáticas con respecto a las otras materias dentro del currículo?
_ ¿Cuáles son los tipos de aprendizajes que se pretenden o buscan en el alumno?
_ ¿Cuál considera usted que sea la principal problemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

c) Concepciones acerca del alumno y de su aprendizaje y motivación en el dominio de las matemáticas
_ ¿Cuál cree usted que es el papel del alumno en el aprendizaje de las matemáticas?
_ ¿Cuál cree que sea la motivación del alumno para aprender matemáticas? ¿Cuál cree ud. que es la actitud, inclinación o disposición del alumno para aprender matemáticas?
_ ¿Cuál son los características de los alumnos que aprenden mejor matemáticas y de los que tienen dificultades para aprender?
_ ¿En qué parte de las matemáticas cree que les cueste más trabajo aprender a los alumnos de este grado?
_ ¿Qué conocimientos matemáticos cree que debe aprender el niño?
_ ¿Cuál cree que sea la importancia de lo que aprende el niño en su vida diaria, escuela, calle, casa…?

d) Contenidos específicos y aprendizajes más importantes en relación con la suma, la resta y la solución de problemas aditivos
_ ¿Cuáles cree ud. que son los conocimientos que debe adquirir el niño antes de o para llegar al conocimiento de la suma y la resta? ¿Cuál es su importancia de tales conocimientos?

_ ¿Qué conocimientos considera ud. que debe aprender el niño en la relación a la suma…y a la resta?
_ ¿Cómo podría ud. conceptuar o describir a la suma…y a la resta?
_ ¿Cuál cree ud. que sea el papel de conocer el sistema numérico decimal, en el aprendizaje de la suma y la resta?
_ ¿Cuál cree ud. que sea la importancia de enseñar o que los niños aprendan a solucionar problemas…y los aditivos? ¿Cómo cree ud. que puede influir en su aprendizaje matemático?

e) Métodos/ Estrategias didácticas que emplea en la planeación y en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos
_ ¿Cómo promueve el aprendizaje de las matemáticas: de la suma… de la resta…de la solución de problemáticos? ¿Que materiales utiliza para cada uno de ellos? ¿Se basa en algún material, programa o libro en específico?
_ ¿Cómo considera ud. que se de be enseñar a los alumnos a sumar…a restar…y a solucionar problemas matemáticos?
_ ¿Qué actividades utiliza para enseñar la suma, la resta y la solución de problemas? ¿Podría describir algunas?
_ ¿ Cree usted que esta forma de enseñar matemáticas, sea especifica para ello o también se aplicar para enseñar conocimientos de otras materias?
_ ¿Existe algún tipo habilidades o capacidades específicas que debe tener un niño para aprender matemáticas, específicamente para sumar, restar o solucionar problemas matemáticos?
_ Si no las tienen ¿cómo las desarrolla o cómo las promueve?

d) Evaluación del aprendizaje
_ ¿Cree ud. que tiene alguna importancia evaluar el conocimiento matemático de los niños…cuál?
_ ¿Cómo evalúa?, ¿Qué recursos utiliza para evaluar?
_ ¿Cuál es la utilidad que da a los resultados de esa evaluación?
_ ¿En que momentos o situaciones de las matemáticas evalúa?
_ ¿Cuándo considera que debe ser necesario evaluar?

ANEXO 4

Tipos de contratos didácticos (Brousseau, 1997)

<table>
<tr><th>Tipo de contrato</th><th>Subcategorías de contrato</th></tr>
<tr><td rowspan="3">No didácticos: Sin responsabilidad didáctica, sin proyecto intencional de enseñar. “Conferencia magistral”</td><td><u>Emisión</u>: Transmisión del mensaje sin condiciones efectivas de su recepción. Monologo sin considerar a los alumnos.</td></tr>
<tr><td><u>Comunicación</u>: Se compromete a hacer llegar el mensaje, asegurándose de su recepción, la interpretación es a cargo del alumno.</td></tr>
<tr><td><u>Experto</u>: Garantiza la validez del mensaje, considera la demanda del receptor mediante vías distintas de la simple demanda.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ligeramente didácticos: Acepta el compromiso de organizar el mensaje, no acepta responsabilidad de sus efectos sobre el alumno. “Es demostrativo del empleo o utilidad del conocimiento, sin saber que el alumno aprende”</td><td><u>Información:</u> Busca asentimiento del alumno, ofrece ciertas pruebas, puede ser dialéctico o dogmático.</td></tr>
<tr><td><u>Utilización de conocimientos:</u> Agrega un cláusula al anterior: la de mostrar el empleo y la utilidad de los conocimientos.</td></tr>
<tr><td><u>Aplicación y control:</u> En los anteriores el alumno decide si necesita mas información, aquí el informador toma esa responsabilidad en parte, dando un criterio al informado para determinar si ha comprendido bien el saber.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Fuertemente didácticos: El maestro toma la responsabilidad del resultado efectivo, intenta provocar un aprendizaje, trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno:</td><td><u>Reproducción formal:</u> El maestro se compromete a que el alumno realice un tarea culturalmente aceptada como adquisición de un saber, los medios no importan, si la actividad en si misma que se supone fuente y prueba de aprendizaje. Los medios de reproducción por imitación no exigen razones o explicaciones. El alumno realiza la tarea con la condición de que sea reductible al repertorio que posee.</td></tr>
<tr><td><u>Condicionamiento:</u> La producción de una tarea no garantiza que el alumno puede reproducirla en cualquier circunstancia, el profesor busca condiciones que funcionen como causas del aprendizaje, como son la asociación y la repetición, el profesor cree que con esto el alumno se familiarizará con el objeto de aprendizaje.</td></tr>
<tr><td><u>Mayéutica socrática</u>. El profesor escoge respuestas de las cuales el alumno pueda encontrar respuestas con sus propios recursos.</td></tr>
</table>

	Trabajo empiristas: El conocimiento se establece esencialmente por el contacto con el *medio* al cual el alumno debe adaptarse, la responsabilidad de aprender es de él. La lectura del *medio* es casi directa, el alumno percibe "viendo" la estructura.
	Ostensión: Con base a la lectura del medio inmediata, el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre pro frecuentación repetida. El profesor "muestra" un objeto, o una propiedad, y el "alumno" acepta verlo como el representante de una clase de la cual deberá reconocer lo elementos en otras circunstancias.
	Constructivistas: El profesor organiza el medio, se deriva del saber previsto y de los procesos de adquisición del alumno, de su saber previo, el alumno es responsable de adquirir el saber, es racional y coherente. El alumno debe ser autónomo en la construcción de su conocimiento.
	Transformación de saberes previos: Los aprendizajes se dan por acomodación, la génesis didáctica de los saberes procede por modificaciones y por rupturas a la manera de una génesis histórica y no de manera lineal por simple acumulación. Sirve de fondo a la teoría de las situaciones didácticas se busca que sea el sujeto epistémico el que prive por sobre el sujeto didáctico.

Anexo 5. Illinois Rubric for Mathematics (Illinois State Board of Education)

Escala 1. Conocimiento Matemático

4**.** Presenta un entendimiento completo de los principios y conceptos de los problemas matemáticos. Utiliza apropiadamente una notación y terminología matemática. Ejecuta algoritmos completa y correctamente.

3. Presenta casi un entendimiento completo de los principios y conceptos matemáticos. Utiliza casi una notación y terminología matemática. Ejecuta algoritmos completamente. Sus cálculos de cómputo son generalmente correctos, pero pueden contener errores mínimos.

2. Presenta entendimiento de algunos de los principios y conceptos matemáticos. Puede contener serios errores de cómputo.

1. Presenta muy limitado entendimiento de los principios y conceptos matemáticos. Puede hacer uso indebido o fallar al utilizar términos matemáticos. Puede contener errores de computo mayores.

0. Presenta un no entendimiento de los principios y conceptos matemáticos.

Escala II. Conocimiento Estratégico

4. Identifica todos los elementos importantes del problema y presenta un entendimiento de las relaciones entre ellos. Refleja una estrategia sistemática y apropiada para solucionar los problemas. Da clara evidencia de un proceso de solución, y este proceso de solución es completo y sistemático.

3. Puede utilizar información relevante y externa de naturaleza formal o informal. Identifica la mayoría de los elementos importantes del problema y presenta un entendimiento general de las relaciones entre ellos. El proceso de solución es casi completo.

2. Identifica algunos elementos importantes del problema pero presenta únicamente limitado entendimiento de la relaciones entre ellos. Da alguna evidencia del proceso de solución.

1. Puede intentar utilizar información relevante externa. Falla para identificar importantes elementos o partes así como para enfatizar sobre elementos sin importancia. Puede reflejar una estrategia importante para solucionar el problema. Da mínima evidencia de un proceso de solución. El proceso puede ser difícil para identificar.

0. Intenta utilizar información externa y relevante. Falla para indicar elementos del problema. Copia partes del problema, pero sin intentar una solución.

Escala III. Comunicación

4. Da una completa explicación escrita del proceso de solución empleada. Incluye un diagrama apropiado y completo con explicación de los elementos. Puede proveer ejemplos y ejemplos contrarios si es apropiado.

3. Da bastante explicación del proceso de solución empleado. Puede tener algunos huecos menores. Puede incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones.

2. Da alguna explicación del proceso de solución empleado, pero la comunicación es vaga o difícil de interpretar. Puede incluir un diagrama que es imperfecto, sin claridad, o no explicado.

1. Provee una explicación mínima del proceso de solución. Puede fallar para completar o puede omitir partes significantes del problema. Explicación errónea o difícil de presentar. Puede incluir u diagrama el cual representa incorrectamente la situación problema o el diagrama puede ser no claro y difícil para interpretar.

0. Las palabras no reflejan el problema o no da una explicación escrita. Puede incluir grafos o dibujos con el que completamente mal interpreta el problema.

Anexo 6. Criterios para evaluar los conocimientos matemáticos de los niños y niñas de primer y segundo grado

A continuación, se presentan y se describen los criterios y conceptos que se evalúan con las niñas y niños de primer y segundo grado, con relación a la propuesta de los programas de la SEP (1993) acerca de la enseñanza de las matemáticas en estos grados.

También se presenta una serie de tablas que especifican y describen los reactivos que constituyen y evalúan los conocimientos matemáticos específicos, para cada área.

PROGRAMAS DE LA SEP (1993)

De acuerdo con el programa de la SEP se plantea, como contenido de enseñanza referido a los dos primeros grados de educación primaria en el área de matemáticas, lo siguiente:

Primer grado:

Los números, sus relaciones y sus operaciones

Números naturales

- Los números naturales del 1 al 100
    - Conteos
    - Agrupamientos y desagrupamientos de decenas y unidades
    - Lectura y escritura
    - Orden de la serie numérica *
    - Antecesor y sucesor de un número *
    - Valor posicional
- Introducción a los números ordinales *
- Planteamiento y resolución de problemas sencillos de suma y resta mediante diversos procedimientos, sin hacer transformaciones
- Algoritmo convencional de la suma y la resta sin transformaciones (SEP,1993, p. 57)

Segundo grado:
Los números, sus relaciones y sus operaciones

Números naturales

- Los números de tres cifras
    - Conteos
    - Agrupamientos y desagrupamientos en centenas, decenas y unidades
    - Lectura y escritura
    - El orden de la serie numérica *
    - Antecesor y sucesor de un número *
    - Valor posicional
- Uso de números ordinales en contextos familiares para el alumno *

- Planteamiento y resolución de diversos problemas de suma y resta con números hasta de tres cifras, utilizando diversos procedimientos
- Algoritmo convencional de la suma y resta, con transformaciones
  Introducción a la multiplicación. (SEP, 1993, p. 58) *

  *** No se evalúan en esta investigación**

Criterios y descripción de los reactivos que constituyen la prueba para evaluar los conocimientos matemáticos en los niños y niñas de primer y segundo grado.

1 Conocimiento numérico

1.1 Conteo

La primera área a evaluar es el conocimiento numérico, al respecto, Labinowikcz (1987) describe que contar en voz alta es una de las primeras nociones de número aprendidas por los niños. Sin embargo, Piaget indica que esta habilidad puede fácilmente engañar a un adulto: el niño que puede contar difícilmente entiende los números.

Al respecto Kamii, (1988) señala que para Piaget el número es una síntesis de dos clases de relaciones que el niño crea entre los objetos. Una de esas es el orden y la otra la inclusión de clases.

Así, el concepto de número implica las operaciones lógicas de seriación, clasificación y conservación de cantidad. La seriación es la habilidad cognitiva para seriar u ordenar las cosas en un continuo de acuerdo con alguna propiedad y se relaciona con el aspecto ordinal. La clasificación implica distinguir las características de las cosas para separarlas y ordenarlas de acuerdo a esas características, lo cual se relaciona con el aspecto ordinal del número.

La conservación de cantidad (el número de objetos en el conjunto que permanece constante, independientemente de la forma en que se coloquen u ordenen los objetos) es imprescindible para poder captar tanto el aspecto cardinal como ordinal del número.

De esta forma en esta investigación, específicamente del conteo se considera el trabajo de Gelman y Gallistel (1978) quienes realizaron una útil compilación de principios que niños y niñas deben respetar cuando cuentan, estos autores son reconsiderados por Nunes y Bryan, (1997). Donde se puntualiza que existen tres principios para aprender a contar, específicamente en un solo conjunto de objetos.

1) Principio de correspondencia biunívoca. Al contar, deben contarse todos los objetos, y cada uno debe contarse una vez y sólo una vez.
2) Principio del orden constante. Cada vez que se cuenta debe pronunciarse palabras numéricas en el mismo orden.

3) Principio de cardinalidad. Para contar se relaciona con la manera de decidir la cantidad real de objetos en el conjunto que se está contando, es decir, cómo saber si el total de objetos corresponde a la última palabra numérica pronunciada al contar, principio de cardinalidad.

En este sentido se entiende que un conocimiento amplio del número puede ser demostrado en los niños pequeños al resolver diversas situaciones, con un orden de complejidad ascendente, desde el conteo de un conjunto simple, hasta la igualación y la comparación de este con otros conjuntos de objetos, como se plantean en los reactivos correspondientes.

Tabla 1. Principios que se evalúan en el conocimiento del conteo

<table>
<tr><th>Evalúa principios:</th><th>Descripción de la actividad</th><th>Reactivos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Correspondencia Biunívoca
Ordinalidad
Cardinalidad</td><td>Cuenta figuras en línea hasta con 30.</td><td>1-4</td></tr>
<tr><td>Iguala un conjunto con 12 objetos</td><td>5</td></tr>
</table>

Criterios de evaluación
1. Principiante: No cuenta, intenta por ensayo y error
2. Intermedio: Cuenta no en primer intento, equivoca conteo y necesita hasta 4 intentos, con ayuda
3. Avanzado: Cuenta en primer intento sin ayuda

1.2.2 Lectura de números
1.2.3 Escritura de números

Tabla 2. Evaluación del conocimiento de lectura y escritura de números

Evalúa	**Descripción de la actividad**	**Reactivos**
Lectura de números	Lee: 8, 10, 24, 105, 487, 990	6-11
Escritura de números	Escribe: 7, 25, 50, 100, 500, 630, 986	12-18

Criterios de evaluación lectura:
Nivel 1 = No conoce más del 24
Nivel 2= Conoce menos del 105
Nivel 3= Conoce más números que impliquen tres digítos
Criterios de evaluación escritura
Nivel 1= Conoce números menores que 50
Nivel 2 = Conoce números has el 100
Nivel 3 = Conoce números que impliquen tres cifras

2. Sistema decimal de numeración

De acuerdo con Nunes y Bryan (1997) aprender la lógica de un sistema de numeración base tiene ventajas muy grandes como formar una infinidad de números, organizar un sistema de notación y otra, es que los cálculos basados en la notación se vuelven económicos y eficaces.

Sin embargo para la utilidad de este sistema es necesario comprender su estructura. En este sentido, para la definición de este constructo se consideran tres subconstructos. Así, en el primero, se establece que cualquier número *n* puede descomponerse en otros dos números precedentes en la lista ordinal de números, de tal forma que su suma dé exactamente *n*. Esta propiedad esencial de los sistemas de numeración se conoce como composición aditiva del número.

El segundo subconstructo se refiere al concepto de unidades. Un sistema de numeración implica contar unidades de tamaños diferentes: unidades, decenas, centenas, etc. Debido a que se utiliza un sistema de base diez, cuando se tienen diez unidades de cualquier tamaño se reagrupan en unidades de orden superior.

De igual forma, para comprender del todo un sistema de medición, se necesita entender las equivalencias dentro del sistema.

El tamaño de las unidades es importante tanto para contar como para ordenar cantidades. Las relaciones anteriores son elementales del sistema de numeración.

Un tercer subconstructo es el valor posicional es la expresión que muestra que el lugar del dígito indica el valor relativo.

Se presentaron cinco actividades diferentes relacionadas con el análisis del nivel de conceptualización y operacional del sistema decimal, que poseían cada niño o niña participante, las tres primeras actividades exploraban: tamaño de las unidades y las otras dos actividades exploraban el valor posicional. Las actividades variaron desde un planteamiento formal hasta el informal.

En cada una de las cinco actividades aplicadas, basado en el clasificación que realiza Cortina (2000) se procedió a clasificar en tres niveles el grado de desarrollo conceptual y operativo del sistema decimal, de acuerdo con la respuesta de los niños y niñas.

Tabla 3. Conocimiento conceptual y operacional del tamaño de las unidades

Evalúa	**Descripción de la actividad**	**Reactivos**
Conocimiento formal	Reconoce cuántas decenas, centenas y unidades hay en el: 13, 20, 57, 109, 348, 762	19- 24
Conocimiento informal	Reconoce cuántos billetes de 100, monedas de 10 pesos y monedas sueltas hay en números.	
Conocimiento con material	Representa el valor de los números con costalitos de 100, 10 y con semillas sueltas.	

Tabla 4. Conocimiento conceptual y operacional del valor posicional

Evalúa	Descripción de la actividad	Reactivos
Conocimiento formal	Reconoce el valor relativo del: 14, 27, 43, 87, 342, 956.	25-30
Conocimiento informal	Representa el valor relativo con costalito de 100, con 10 y semillas sueltas el valor del: 14, 27, 43, 87, 342, 956.	

Criterios de evaluación

Nivel 1. Quienes nunca mostraron que comprendían el concepto o que no podían operar con él.
Nivel 2. Quienes en algunas actividades mostraban comprender el concepto, pero en otras operaban como si no lo comprendieran.
Nivel 3. Quienes mostraron que comprendían el concepto y podían operar con él.

La importancia del conocimiento numérico con base diez se extiende a otros conocimientos matemáticos. De acuerdo con Carpenter, Fennema, Franke, Levi, Empson (1999) los algoritmos, o procedimientos formales para calcular respuestas a problemas de adición y sustracción multidígitos, dependen de los conceptos numéricos con base diez, que se evalúan en la tercer área.

3. Solución de operaciones

3.1 Solución de operaciones de suma
3.2 Solución de operaciones resta

De acuerdo con Carpenter y cols. (op. cit.) las operaciones pueden ser consideradas como los algoritmos y procedimientos formales.

Para la SEP (1993) las operaciones son concebidas como instrumentos que permitan resolver problemas; el significado y sentido que los niños puedan darles, deriva precisamente de las situaciones que resuelvan con ellas.

Sin embargo la suma y la resta implican una representación algorítmica por lo que en este constructo se busca analizar:

a) La representación o escritura del algoritmo formal o canónico de la suma y la resta:
   1) En el momento de escribir el algoritmo si el niño respeta el valor posicional de lugar, es decir si logra el agrupamiento correcto.

b) La forma de cómputo en el momento de resolver el algoritmo y dentro de éste observar las reglas de cómputo que el niño utiliza.

2) El reconocimiento del signo.
3) En suma y resta si logra integrar o agrupar las unidades correspondientes.
4) Si realiza el conteo numérico correctamente durante la suma.
5) Si desagrupa unidades en resta

Sin embargo, los niños quienes no tienen un entendimiento completo de representación numérica con base diez pueden construir soluciones a problemas multidígitos que son útiles para ellos y constituyen algoritmos alternativos, razón por la cual también se analizan sus algoritmos alternativos en el momento de solucionar problemas aditivos.

Tabla 5. Conocimiento de solución de operaciones de suma

Evalúa	**Descripción de las actividades**	**Reactivos**
Restas sin transformación	(6-2), (8-5), (69-43), (98-45)	33-36
Restas con transformación	(40-26), (75-47), (205-175), (978-393)	37-40

Tabla 6. Conocimiento de solución de operaciones de resta

Evalúa	**Descripción de las actividades**	**Reactivos**
Restas sin transformación	(6-2), (8-5), (69-43), (98-45)	33-36
Restas con transformación	(40-26), (75-47), (205-175), (978-393)	37-40

Criterios para evaluación
Nivel 1. No conoce procedimiento
Nivel 2. Conoce procedimiento con dificultad en el procedimiento
Nivel 3. Conoce procedimiento sin transformación
Nivel 4. Conoce procedimiento con transformación

4. Solución de problemas aditivos

Actualmente la solución de problemas es considerada como el principal recurso para promover el aprendizaje matemático (SEP, 1993), así como los conceptos y algoritmos de la suma y la resta (Carpenter y cols. 1999, Nunes y Bryan, 1997).

De acuerdo con Carpenter y cols. (1993) la solución de problemas aritméticos es un eje que contribuye a explicar el conocimiento matemático de los niños. Las diferentes soluciones que los niños pueden dar a los problemas, indican que hay distinciones entre diferentes tipos de problemas de adición y de sustracción, los cuales son reflejados en la forma que los niños los piensan y solucionan. Con relación a lo anterior es importante contar con una definición de las situaciones problemáticas asociadas a la adición y la sustracción que son enseñadas durante la primaria. Vergnaud (1997) define las siguientes categorías:

1) *Situaciones de combinación*: expresan una relación entre la medida de dos conjuntos elementales que se combinan para formar uno compuesto.

2) *Situaciones de transformación:* expresan una relación estado-transformación-estado. Se relaciona temporalmente el estado inicial de un evento y el estado final del mismo mediante una transformación.
3) *Situaciones de comparación.* Expresan una relación de comparación que vincula las medidas de dos conjuntos mediante la identificación de la diferencia.

De esta forma la acción y las relaciones en un problema tienden a influenciar las estrategias que los niños utilizan por un período de tiempo, pero los niños mayores no siempre representan todas las cantidades en un problema con objetos físicos. Por otra parte las estrategias utilizadas por los niños con problemas que implican adición y sustracción con multidígitos son paralelas a las estrategias que utilizan con números pequeños. Los niños utilizan fichas para modelar directamente la acción en los problemas, e inventan estrategias mentales que son esencialmente abstracciones de esas estrategias del modelamiento.

Para la SEP (1993) la solución de problemas es entonces, a lo largo de la primaria, el sustento de nuevos programas. A partir de las acciones realizadas al resolver un problema (agregar, unir, igualar, quitar, buscar un faltante, sumar repetidamente, repartir, medir, etcétera) el niño construye los significados.

Al enfatizar los tipos posibles de soluciones a los que puede llegar en la solución de problemas aditivos, Flores (2003) destaca que: "En la evolución en la representación de un problema, los homorfismos son un indicador claro de la evolución del conocimiento en el campo de las estructuras aditivas. Los niños establecen homorfismos entre: los hechos del mundo y su representación de las relaciones descritas en el problema; entre esquemas de solución no-algorítmicos; entre formas de simbolización" (2003, p. 169).

De acuerdo con Flores, entre las soluciones a las que puede llegar un niño, se encuentran: una Representación no-canónica (Tipo I) donde la relación entre los hechos y la representación lleva a la expresión de un cálculo relacional falso. En este caso el niño aprovecha un conocimiento que ya posee pero que no es matemáticamente apropiado a la solución canónica del problema. Pudiera pensarse que no hay un desarrollo en el conocimiento. Sin embargo, en acuerdo con Brun (1996; cit. en Flores), la sistematicidad en los errores refleja una organización del conocimiento matemático para adaptarse a las particularidades de una situación. Los errores de interpretación no implican que el niño sea incapaz de dar un significado al problema, al contrario, reflejan una iniciativa por dar una respuesta adaptativa a una situación.

Al respecto, en su investigación Flores revela que, los niños y niñas pueden estar conscientes de la falsedad de su representación cuando coordinan en su solución invariantes operacionales que les permiten hacer una representación canónica del problema basada en un esquema no-algorítmico (Tipo II). Esta es rudimentaria, parte de una simbolización espontánea y no es ligada a un algoritmo; incluso los niños cuestionan su empleo.

En la Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no-algorítmico (Tipo III) hay un entendimiento canónico y coexisten un esquema no-algorítmico y un algorítmico que son considerados como equivalentes. Al principio la relación entre ambos esquemas se basa en la similitud entre los resultados de ambos. Flores cita ejemplo, en donde los niños y las niñas explican que contar con los dedos desde el cardinal menor hasta el cardinal mayor es lo mismo que al cardinal mayor restar el menor porque en ambos se obtiene el mismo resultado. Algunos niños también mencionan los aspectos de su procedimiento que les son comunes. Por ejemplo, dicen que la resta y el esquema de complemento son lo mismo pues en ambos se cuenta en forma similar (ambos se dice tantos para llegar a tantos). Estas explicaciones serán la base para construir los conocimientos necesarios para comprender el esquema algorítmico.

Es necesario que el niño(a) construya nuevos conocimientos y descarte otros para pasar a una Representación canónica algorítmica (Tipo IV), en la que hay una correspondencia entre los hechos y relaciones expresadas en el problema y la representación. Así, a lo largo de su investigación, se observó la existencia de conocimientos –conceptos en acto y teoremas en acto- que son clave en la evolución de la representación y que se vinculan con conocimientos y acciones fundamentales de la adición (combinar, juntar, aumentar) y la sustracción (decrementar).

De esta forma en esta investigación se analizan y evalúan los tipos posibles de soluciones que los niños y niñas pueden utilizar al resolver problemas aditivos, y que reflejan aspectos conceptuales y a la vez estratégicos al solucionar problemas aditivos.

Tabla 7. Tipo de solución a problemas aditivos

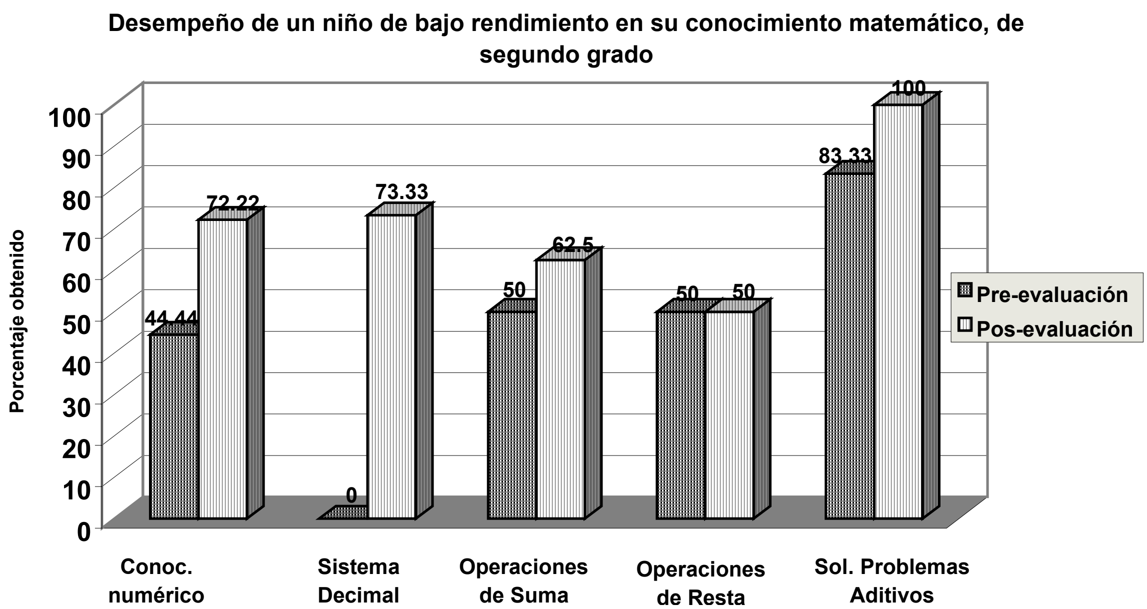
No.	**Problema planteados, en la pre y pos-evaluación:**	**Clase de Problema**	**Tipo Solución / Intentos:**	
			Pre	**Pos**
1.	Karen tenía 12 pesos. En el recreo su hermano le dio 5 pesos más. ¿Cuántos pesos tiene ahora Karen?	Cambio con adición		
2.	Pedro tenía 13 estampas. En el parque le regaló 6 estampas a Rigo. ¿Cuántas estampas tiene ahora Pedro?	Cambio con sustracción		
3.	Carla tiene 8 peces. Su prima Mayra tiene 5 peces. ¿Cuántos peces tienen entre las dos?	Combinación		
4.	Rafael tenía 11 cochecitos. Marcos tiene 5 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos necesita Marcos para tener igual que Rafael?	Igualación		
5.	Mariana tiene 13 vestidos. Lupita tiene 6 vestidos. ¿Cuántos vestidos más que Lupita tiene Mariana?	Comparación más que		
6.	Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marcos dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marcos?	Comparación menos que		

Anexo 7.

Análisis de caso Michel de bajo rendimiento del segundo grado

En el siguiente caso, se analiza y describe el conocimiento matemático de Michel, un niño de 7 años, quien fue asignado por su maestro como de bajo rendimiento en matemáticas.

Figura 12



De acuerdo con la ***figura 12*** el primer dato importante es que Michel, presenta su mejor rendimiento en solución de problemas, pese a las dificultades en el resto de las áreas. Así, se observa en la pre-evaluación, que su principal problemática se ubicó en el desconocimiento total del sistema decimal, luego en conocimiento numérico, y en operaciones de suma y resta, al obtener porcentajes no mayores al 50%.

En la pos-evaluación permanece igual su dificultad en solución de operaciones de resta, con incremento ligero del 12.5% en suma, también en conocimiento numérico y sistema decimal presenta dificultades.

Sin embargo, en la pos-evaluación existe un incremento importante aproximado del 0% al 73% en sistema decimal, una ganancia del 28% en conocimiento numérico, y un 17% en solución de problemas. A continuación se describen a detalle estos resultados.

1. Conocimiento numérico

Dentro de esta área se analiza el conteo, la lectura y la escritura del número.

1.1 Conteo (Principios: ordinalidad, correspondencia biunívoca y cardinalidad.

Tabla 31. Nivel de conocimiento y estrategias de conteo.

Situación	Nivel		Estrategias en:		Ayuda, el avaluador sugiere:
	Pre	Pos	Pre-eval.	Pos-eval.	
Figuras en línea hasta 30	3	3	- Cuenta de uno en uno, señalando con el dedo.	- Cuenta de uno en uno, tocando con el dedo.	-“Cuenta la figura original” -“Cuenta tu figura” -¿Cuántos son? -¿Recuerdas dónde iniciaste a contar?
Igualación de figura con 12 objetos	2	2	- Copia fig. - Quita objs. - Corresp. biunívoca	- Cuenta objetos - Quita objs. - Corresp. biunívoca	

Con referente a la tabla 31, Michel en ambas evaluaciones se ubica en el nivel 3 avanzado, en situaciones de conteo con figuras en línea. Cuenta en un orden constante, cuenta todas las figuras y cada figura una y solo una vez, y asigna correctamente la última palabra numérica al total de los objetos. Su estrategia, de contar uno a uno señalando con el dedo, le es útil, aunque en la pos-evaluación prefiere tocar y contar uno a uno. En la pre-evaluación Michel comento que sabía contar solo hasta el numero 50.

En la igualación de figura con objetos, se ubica en el nivel 2 intermedio, al presentar dificultad, y emplear tres oportunidades en la pre-evaluación, y dos en pos-evaluación para llegar al resultado correcto.

En la pre-evaluación, su dificultad fue que su estrategia de igualación se basaba en copiar la forma de la figura completa, sin contar, al sugerirle utilice el conteo, compensa su estrategia al quitar objetos y ajustar al número correcto. En la pos-evaluación cuenta los objetos e iguala cada lado hasta concluir los tres lados de la figura. En su estrategia, por percepción, olvidaba en que lugar había iniciado a contar, no obstante, al ayudarle a recordar donde había iniciado el conteo, contribuyó a que igualara correctamente la figura.

Michel emplea correctamente los principios básicos del conteo sólo con figuras en línea, sin embargo en igualación de figura con objetos altera la cardinalidad por dificultad estratégica.

1.2 Lectura de números

En la pre-evaluación Michel se ubicó en el nivel 1 principiante, al identificar y leer correctamente únicamente hasta el número 10. En sus dificultades, identifico el 24 como “20”, y el 105 como “diez y cinco”.

En la pos-evaluación, se ubicó en el nivel 2 intermedio, al reconocer únicamente hasta el número 105. En sus dificultades identificó el 487, como “40 ó 147”, el 990 como “199 ó 190”. Frente a estos resultados, en ambas evaluaciones Michel no cubre lo planteado por el programa de la SEP, aún al aproximarse en la pos-evaluación.

2.1.1.3 Escritura de números

En pre-evaluación, se ubicó en el nivel 1, al escribir correctamente el 7 y el 100. En sus dificultades escribe el “18” por el 28, y presenta inversión del 50 por “05”. Comenta “si se los números pero escribir me cuesta trabajo”

En pos-evaluación, se ubicó en el nivel 2 intermedio al escribir hasta el 100. En sus dificultades escribe el "505" por 500, el "663" por el 630, el "9983" por el 986. Por lo que en lectura de números, no cubre en ambas evaluaciones lo planteado por el programa de la SEP.

En resumen, Michel presenta avances y dificultades en conocimiento numérico, en conteo aplica correctamente los tres principios básicos, con dificultad en sus estrategias al igualar un conjunto de objetos. Lee hasta el 105 y escribe hasta el 100, cuando de acuerdo con los programas de la SEP se esperaba manejara más números con tres cifras.

2. Conocimiento del sistema decimal de numeración

De acuerdo con la figura 12, en esta área, Michel presentó mayor dificultad. En la pre-evaluación se ubicó en el nivel 1, como principiante al tener un desconocimiento total; desde el propio término de decena hasta los principios básicos de valor posicional y el principio de composición aditiva, sin embargo en la pos-evaluación presentó una ganancia importante del 73%. A continuación se describe su proceso de avances e incomprensiones.

Tabla 32. Nivel de conocimiento conceptual y operacional del tamaño de unidades y del valor posicional

Conocimiento	Variación de la actividad	Nivel	
		Pre-evaluación	**Pos-evaluación**
Tamaño de unidades	Formal	1. Principiante	2. Intermedio *
	Informal	1. Principiante	2. Intermedio *
	Con material	1. Principiante	2. Intermedio *
Valor posicional	Formal	1. Principiante	2. Intermedio *
	Informal	1. Principiante	2. Intermedio *

* Resuelve en más de un intento y con ayuda del aplicador.

Nivel 1. Quienes nunca mostraron que comprendían el concepto o que podían operar con él.
Nivel 2. Quienes en algunas actividades mostraban comprender el concepto, pero en otras operaban como si no lo comprendieran.
Nivel 3. Quienes mostraron que comprendían el concepto y podía operar con él.

En la tabla 32, en conocimiento del tamaño de las unidades, en la pre-evaluación se ubicó en el nivel 1, significa que presento desconocimiento para conceptuar y operar: al intentar reconocer cuántas decenas, al representar con monedas de 10 y al representar con costalitos de 10 semillas, el tamaño, del valor que puede contener números con dos y tres cifras. A pesar de que mencionó que: "una decena vale 10...es un grupo de 10". Sin embargo en la pos-evaluación logra el nivel 2 intermedio, puesto que comprende en algunas actividades que "una decena vale 10 y una centena 100", mientras que en otras actividades se le dificulto principalmente operar con centenas, a pesar de poder operar con las actividades con decenas, con menor ayuda.

Ejemplo. Reconocimiento en Michel del tamaño de las unidades y del valor relativo

Aplicador: Cuánto vale este número [señala el número 2 del 27]...

Michel: Vale veinte...porque son decenas...son dos decenas, porque cada decena vale diez.

Con respecto al valor posicional, en la pre-evaluación se ubicó en el nivel 1, al reconocer únicamente el valor absoluto de los números, sin conocer cuantas decenas, y sin poder representar con costalitos de 10 el valor relativo de números hasta con tres cifras. En la pos-evaluación se ubicó en el nivel dos, dónde curiosamente pudo operar hasta las centenas. Michel logro comprender formalmente, solo y en algunas ocasiones con ayuda, cuántas decenas o centenas puede tener números hasta con tres cifras, así cómo decir y representar con material el valor relativo de los números (ver ejemplo anterior). Aún al acercarse a un nivel óptimo, no cubre lo planteado por la SEP en ambas evaluaciones.

3. Solución de operaciones de suma y resta

3.1 Operaciones de suma

Con referente a la figura 12, se observa que esta fue la tercera área donde Michel presento mayor dificultad, al obtener un 50% en la pre-evaluación y una ganancia ligera del 12.5% en la pos-evaluación. A continuación se describe su nivel de desempeño, sus estrategias de solución, así como sus comprensiones e incomprensiones.

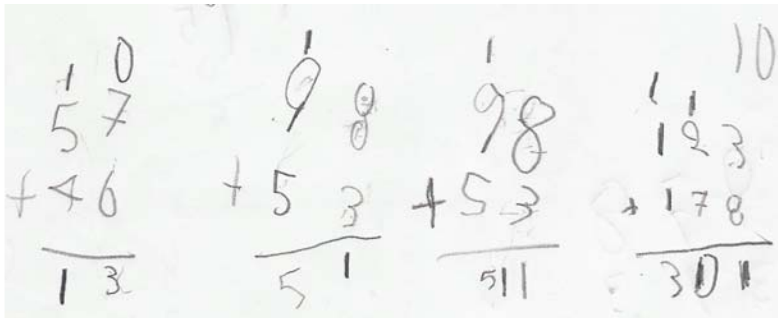
Tabla 33. Nivel de conocimiento y de estrategias, en solución de operaciones de suma

Tipo de suma	Nivel		Estrategias de solución en Pre-evaluación	Estrategias de solución en Pos-evaluación
	Pre	Pos		
Con un dígito	3	3	Cuenta desde uno hasta sumando superior, continua conteo hasta completar sumando inferior, siempre con apoyo de dedos.	Cuenta desde uno hasta sumando superior, continua conteo hasta completar sumando inferior, se apoya con dedos
Con dos dígitos	2*	1*	Utiliza procedimiento anterior, suma por columna e inicia por "izquierda".	Utiliza procedimiento anterior, suma por columna e inicia por "derecha".
Transformación dos dígitos	1	1	Suma y anota resultado por columna independiente. Como dos sumas diferentes.	Suma primera columna obtiene dos números, escribe uno en resultado y el otro sobre la fila siguiente, sin concluir suma. (Ver figura 5)
Transformación tres dígitos	1	4	Utiliza procedimiento anterior	Utiliza procedimiento anterior, a diferencia que si concluye el resultado, cerrado a un numero.

*** Resuelve en más de un intento y con ayuda del aplicador**

La tabla 33 muestra que Michel en solución de operaciones de suma con un dígito, en ambas evaluaciones se ubica en el nivel 3. Sin embargo, en la pre-evaluación con dos dígitos se ubica en el nivel 2, serle útil y resolver correctamente con su propia estrategia, aún con la necesidad de un segundo intento al perder un contador. En caso contrario, desciende a nivel 1 en pos-evaluación, al intentar aplicar el procedimiento enseñado en el año escolar, integrar las decenas al siguiente orden, no obstante presento confusión (ver figura 13).

Figura 13. Confusión de aplicación de reglas de suma, en pos-evaluación



Como un ejemplo, la figura 13 ilustra en la suma 98+53, en la que Michel suma la primera columna "ocho mas tres son once", y al obtener dos números, y en su intento de integrar las decenas al orden siguiente decía : "ocho más tres...once...tengo que dividirlos...uno abajo y el otro arriba", sin conocer la razón lógica, así este mismo procedimiento se repetía sin concluir la suma.

En sumas de transformación con tres dígitos, en pos-evaluación logro nivel 4, al seguir correctamente el procedimiento del algoritmo, en la integración de unidades, decenas y centenas, esto al sumar columna por columna y logrando cerrar el resultado, a razón de que ya no tuvo la necesidad de integrar centenas a unidades de millar. Por lo tanto Michel en sumas se aproxima, sin cubrir totalmente las propuestas de la SEP.

En una explicación de estas variaciones extremas del conocimiento matemático del niño, en este caso influyo el modo de enseñar del maestro, el conflicto de Michel en el procedimiento al integrar unidades, y el diseño de los reactivos de la prueba. La observación a estos últimos, fue que las cantidades utilizadas no permiten observar como el niño finalizaría al integraría centenas a unidades de millar, en una tercera columna.

Este caso es extraordinario, da pauta para analizar más a fondo la forma de enseñanza del profesor, así como la estructuración, diseño de la prueba, y la forma de aplicar del investigador.

3.2 Solución de operaciones de resta

De acuerdo con la figura 12, esta fue la segunda área con mayor dificultad para Michel, al obtener la misma puntuación baja del 50% en ambas evaluaciones, sin cubrir la propuesta del programa de la SEP. Enseguida se describen sus logros e incomprensiones.

Tabla 34. Nivel de conocimiento y de estrategias, en solución de operaciones de resta

Tipo de resta	**Nivel**		**Estrategias de solución en Pre-evaluación**	**Estrategias de solución de Pos-evaluación**
	Pre	**Pos**		
Con un dígito	2*	3	Representa número mayor con dedos, cuenta y retira el número menor, y cuenta dedos restantes.	Representa número mayor con dedos, cuenta y retira número menor, y cuenta dedos restantes.
Con dos dígitos	2*	3	Inicia por "izquierda", resta por columna, y emplea estrategia anterior.	Inicia por "derecha", resta por columna, y emplea estrategia anterior.
Transformación dos dígitos	1	1	Inicia por "izquierda" y emplea estrategias anteriores.	Inicia por "derecha", y emplea estrategias anteriores.
Transformación tres dígitos	1	1	Procedimiento igual que el anterior.	Procedimiento igual que el anterior.

*** Significa que resuelve correctamente en más de un intento y con ayuda**

En la tabla 34, Michel en la primera evaluación se ubica en el nivel 2 en restas hasta con dos dígitos, al conocer el procedimiento, sin embargo, llega a cometer errores en el cálculo al perder un contador en el momento de restar. Sin embargo en la segunda evaluación se ubica en el nivel 3 al calcular correctamente.

Al subir el nivel complejidad, en restas con transformación, en ambas evaluaciones se ubicó en el nivel 1, desconoce su procedimiento, como las reglas del algoritmo y la aplicación correcta de la descomposición o desintegración de las unidades de valor. En este caso las de "pedir prestado".

Ejemplo. Incomprensión de Michel en la resta 75 menos 47.

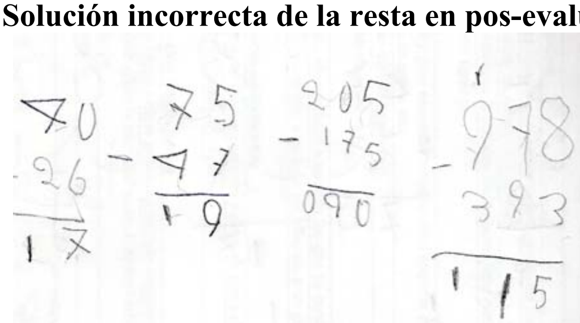
Michel: A siete le quito cuatro...[pone 7 dedos y quita 4, y dice] ...son 3. A 5 le quito 7 [pone 7 dedos y retira cuando se le han acabado, dice] ...pues cero verdad...le quito 7 y llegue a 5, ya no había nada es cero]

Su incomprensión en la pre-evaluación, fue que desconocía por completo las reglas del algoritmo, iniciaba a restar por la izquierda, restaba correctamente al minuendo, y en el momento que se le acaban las unidades, decidía poner cero (ver el siguiente ejemplo).

Ejemplo. Incomprensión en la aplicación de las reglas de descomposición de unidades de valor, en restas con transformación: 75 menos 47.

Michel: [Observa resta 75-47]...a 5 le quitamos 7 [pone 5 dedos y retira...]...me quedan cero porque ya no tiene, pero el cero le pide prestado 2 al 7 se las da y se convierte en 9 [escribe 9 como primer resultado] y al "5" [antes 7] le quitan 4 queda 1...[escribe 1 en resultado: 19]

Figura 14. Solución incorrecta de la resta en pos-evaluación



En la pos-evaluación, en restas con transformación continuo con dificultades en su comprensión y solución, donde conocía parte del procedimiento, escribía correctamente el algoritmo, iniciaba a restar por la derecha, su principal dificultad fue en el momento de que no alcanzaba para restar el minuendo, ahí iniciaba su confusión, puesto que pedía prestadas dos decenas y se las agregaba al sustraendo de la siguiente fila. Al número que le pedía prestado le restaba los dos números y así lo dejaba y como resultado ponía la suma de las "dos decenas" con el sustraendo.

Su estrategia de representar el valor del minuendo con los dedos y restar el sustraendo lo llevo a resolver correctamente la operación sólo con restas sencillas, sin embargo no le fue útil en restas con transformación. Por lo que no logra cubrir los conocimientos planteados por los programas de la SEP en operaciones con resta.

4.1 Solución de problemas aditivos

Finalmente, en esta parte se analizan los conceptos y estrategias de Michel al solucionar cuatro tipos de problemas. Se analizan primero el tipo de representaciones y posteriormente las estrategias.

De acuerdo con la figura 12 esta fue el área donde Michel obtuvo su mejor desempeño, con 83% en la pre-evaluación y con un 100% en la pos-evaluación.

Tabla 35. Tipo de tipo de solución y de intentos a problemas aditivos

No.	**Problema planteados, en la pre y pos-evaluación:**	**Clase de Problema**	**Tipo Solución: Intentos:**	
			Pre	Pos
1.	Karen tenía 12 pesos. En el recreo su hermano le dio 5 pesos más. ¿Cuántos pesos tiene ahora Karen?	Cambio con adición	III 1	III 1
2.	Pedro tenía 13 estampas. En el parque le regaló 6 estampas a Rigo. ¿Cuántas estampas tiene ahora Pedro?	Cambio con sustracción	I, I,III* 3	III* 4
3.	Carla tiene 8 peces. Su prima Mayra tiene 5 peces. ¿Cuántos peces tienen entre las dos?	Combinación	III 1	III 1
4.	Rafael tenía 11 cochecitos. Marcos tiene 5 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos necesita Marcos para tener igual que Rafael?	Igualación	II* 3	II 1
5.	Mariana tiene 13 vestidos. Lupita tiene 6 vestidos. ¿Cuántos vestidos más que Lupita tiene Mariana?	Comparación más que	I 2	III* 4
6.	Arturo dibujó 12 fantasmas en su castillo. Marcos dibujó 5 fantasmas en su castillo. ¿Cuántos fantasmas menos que Arturo dibujó Marcos?	Comparación menos que	II 1	II 1

*** Resuelve correctamente en más de un intento y con ayuda**

Los tipos de soluciones son:

Tipo I.
Tipo II.
Tipo III.
Tipo IV.

Al considerar la tabla 35 en problema de cambio con adición en ambas evaluaciones resuelve correctamente mediante representación tipo III. En la pre-evaluación logra establecer la relación entre las variables, representa sus valores y cuenta con dedos. En la pos-evaluación en un primer intento establece la relación entre las variables y da mentalmente un resultado. Sólo a sugerencia del aplicador de que trate solucionar con un algoritmo escrito, utiliza el algoritmo de la suma, con un resultado correcto, cuenta con apoyo de sus dedos. Sin embargo, en la escritura del algoritmo no ubica los números en su lugar de valor correcto.

En problema de cambio con sustracción, en la pre-evaluación emplea dos intentos sin lograr establecer la relación correcta entre las variables representación I, lo comprende como de adición, en un tercer intento dibuja 13 círculos, quita 6 y cuenta diferencia como resultado, emplea representación tipo III. En pos-evaluación representa situación con semillas, establece la relación entre variables, comprende que es de sustraer, y utiliza representación tipo III canónica algorítmica basada en esquema no algorítmico con dificultad en el calculo, por ello emplea 4 intentos. Emplea algoritmo solo con sugerencia.

En problemas de combinación, en ambas evaluaciones, utiliza representación tipo III, con un solo intento. En pre-evaluación establece relación entre las variables y representa sus valores con un dibujo o gráfico. En pos-evaluación, da respuesta inmediata mediante calculo mental, y mediante la representación de las variables con semillas, con resultados correctos, al respecto dice “los unimos…en suma le pondría”

En problemas de igualación “Rafael” en ambas evaluaciones realiza un calculo mental, con representación tipo II, en la que coordina invariantes operacionales para hacer una representación canónica del problema basado en esquema no algorítmico. Es decir que para llegar al resultado utiliza un esquema de complemento del valor menor al mayor, y ese valor complemento sirve como resultado correcto, a diferencia de que en la pre-evaluación empleo tres intentos. El uso del algoritmo y del gráfico no fueron útiles, en la pre-evaluación desconocía el algoritmo, en la pos-evaluación emplea suma. En la pre-evaluación utiliza gráfico sin relación real con las variables.

En problemas de comparación más que y menos que, emplea representación tipo I y II, en la que coordina invariantes, de tal forma que comprende estos problemas como de igualación, hace a una representación canónica, basado en esquema no algorítmico, que en este caso es un esquema de complemento, de número menor para igualar número mayor.

Tabla 36. Estrategias para solucionar problemas aditivos

Problema	Tipo de problema	Tipo de estrategias	
		Pre-evaluación	Pos-evaluación
1. Karen	Cambio con adición	Representa valor de variables con dedos, cuenta primer valor y agrega segundo.	Representa valor de variables con dedos, cuenta primer valor y agrega segundo.
2. Pedro	Cambio con sustracción	Representa variable mayor con dedos(contando 2 veces dedos de una mano), cuenta y retira valor menor, cuenta resto como resultado. Olvida contar 5 dedos.	Representa variable más grande con semillas, retira variable menor, cuenta resto como resultado. Pierde conteo
3. Carla	Combinación	Representación grafica de variables, cuenta todos a partir de uno.	Calculo mental correcto Parte del número mayor y agrega el resto, apoyándose con semillas.
4. Rafael	Igualación	Calculo mental, complementa valor menor hasta igualar el mayor.	Representa variables mayor en su mente, complementa valor menor hasta igualar el mayor.
5. Mariana	Comparación más que	Dibuja gráfico, 14 rayas, iguala valor mayor.	Calculo mental, iguala valor mayor. Representa 13 con semillas y retira 6, cuenta el resto
6. Arturo	Comparación	Calculo metal, iguala valor	Representa variables con semillas e

	menos que	mayor.	iguala a 12, retira 5 y cuanta resto como resultado.

De acuerdo con tabla 36 se observa, que en la pre-evaluación sus estrategias se basaban en representar el valor de las variables con el apoyo de los dedos, en algunos casos el empleo de gráficos y en menor medida el cálculo mental. En una forma de mayor sofisticación del uso de sus estrategias, en la pos-evaluación sus estrategias se observan más sofisticadas y precisa, como por ejemplo en el uso del conteo ya cuenta a partir de y no contar todos a partir de uno. Aún se observa dificultades en el conteo.

Tabla 37 Resultados aplicación de Rubrica Illinois para las Matemáticas, con tres escalas

Tipo de problema	I. Conocimiento Matemático		II. Conocimiento Estratégico		III. Comunicación resultado	
	Pre	**Pos**	**Pre**	**Pos**	**Pre**	**Pos**
1	2	3	3	3	3	3
2	1	2	1	2	1	3
3	2	3	3	3	3	3
4	1	3	2	2	2	3
5	1	1	1	1	0	2
6	1	2	1	2	1	2

De acuerdo con la tabla 37, Michel en la Escala de Conocimiento matemático se ubica en el nivel 2 y 1, donde presenta muy limitado entendimiento de los principios y conceptos matemáticos. Puede presentar un uso incorrecto y falla al utilizar conceptos matemáticos, como el uso de la suma para resolver el problema de cambio con resta. Sin embargo, en la pos-evaluación mejora al predominar el nivel 3 y 2, presenta un mejor entendimiento de los principios de la suma y la resta, y el conteo, con serios errores de computo, escribe solo parte de un algoritmo escrito.

En conocimiento estratégico, en la pre-evaluación se ubica entre los niveles 1 y 3, con predomino del nivel 1, identifica algunos elementos importantes del problema pero presenta únicamente un limitado entendimiento de las relaciones entre ellos. En la pos-evaluación, hay mas un predominio de los niveles 2 y 3, en problemas de cambio con adición y combinación da clara evidencia del proceso de solución, no siendo así con el resto de los problemas, principalmente los que implican la resta, como los problemas de comparación y de cambio con sustracción.

En la escala Comunicación del Resultado, en ambas evaluaciones la tendencia de ubicarse en el nivel 3 es en problemas que implican una suma, donde Michel es capaz de dar explicación del proceso de solución empleado, donde puede incluir un diagrama casi completo con algunas explicaciones. Sin embargo se ubica en el nivel desde cero hasta niveles uno y dos en problemas que implican resta, principalmente los problemas de comparación. Con una explicación mínima del proceso de solución. Puede fallar u omitir partes importantes del problema. Puede incluir un diagrama el cual representa incorrectamente la situación del problema, o este no puede ser claro y difícil de interpretar. Sin embargo en la pos-evaluación, predomina el nivel 3, mejora su explicación del proceso de solución empleado, y llega a incluir diagramas casi completo con algunas explicaciones.

En conclusión, Michel presenta avances y dificultades en conocimiento numérico, en conteo aplica correctamente los tres principios básicos, con dificultad en sus estrategias al igualar un conjunto de objetos. Lee hasta el 105 y escribe hasta el 100, cuando de acuerdo con los programas de la SEP se esperaba manejara más números con tres cifras.

Inicialmente presentaba desconocimiento total del tamaño de las unidades y del valor posicional, sin embargo en la pos-evaluación logro comprender formalmente, solo y en algunas ocasiones con ayuda, cuántas decenas o centenas podían tener números hasta con tres cifras, así cómo decir y representar con material el valor relativo de los números.

En solución de operaciones de suma, presenta confusión en el momento de tratar de aplicar la regla de integración de unidades de valor en la suma. En resta, de igual forma no tiene claridad el funcionamiento de desintegración de unidades de valor o de "pedir prestado". A pesar de resolver correctamente operaciones de suma y resta sin transformación.

De esta forma en estas tres áreas evaluadas, a pesar de acercarse a un nivel optimo, no cubre lo planteado por la SEP en ambas evaluaciones.

Sin embargo, su mejor desempeño fue en solución de problemas, en ambas evaluaciones mediante cálculos mentales, con empleo de sus dedos, con gráficos y por petición del investigador, en la pre-evaluación puede utilizar y asociar el algoritmo en el problema de cambio con adición. En la pos-evaluación sólo a petición puede relacionar los conceptos relacionados con sus algoritmos correspondientes en problemas de cambio y de combinación, sin ser así con problemas de comparación e igualación.

Anexo 7.

Profesor: Mario **Fecha:** 7 Octubre del 2004 **Tiempo:** 1: 20 minutos **Clase 2** CLMA2
Tema: Solución de problemas con operaciones de suma sencilla con unos o dos dígitos **Clave**
Conceptos: Sistema Decimal (decenas) Suma con cuadritos, algoritmo de la suma.
Clase: Sistema decimal, suma

Eje Temporal	**Principales actividades**	**Comentarios**	**Contrato Didáctico**
13 minutos	Instrucciones, repartir material, sentar a los niños(as). ***Actividades preclase*** ***Empezar***	M: Se sientan 1, 2, 3…[Cuenta 3 para que se sienten] Michel a tu lugar. Ns: [Casi todos se sientan] M: Saquen su libro de Matemáticas, abran la pagina 22 y 23 [Solución de problemas del precio de varias piñatas] …[Observa que un niño hizo las dos páginas] solo les había dejado de tarea resolver la pagina 22. Ns: [Platican y hacen ruido] M: ¡Silencio!	
50minutos	Actividad en el libro: Solución de problema de comparación (comparan sus valores, mayor) ***Actividades preeliminares*** ***Actividad 1*** ***Clase principal***	M: Antes vamos a poner el nombre de las piñatas en el pizarrón. Ns: [Pasan en orden y unos escriben el nombre de la piñata y otros pasan a escribir el número] Barco 31, Estrella 23, Payaso 21, Zanahoria 13, Mundo 35, Caballo 30, Sirena 42, Conejo 8, Gallina 25. Ns: [Levantan la mano insistentemente] ¡Yo!, ¡Yo! ¡Maestro! M: Pásale escribe caballo…[cuida que pasen solo una vez] Na: [Realiza otra actividad de coloreo y recorte]…es que como no vine ayer me retrace y tengo que hacerlo… Ns: [Terminan de escribir los valores] M: Ahora si atentos al pizarrón, porque ahora si inician los problemas…[llama atención]…la primer piñata ¿cuánto vale? Na: Veinte... treinta y do… * M: 23 pesos... [llama atención al grupo] solo me contestan dos alumnos, ¿sólo tengo dos y los demás?, ¿Cuánto vale el payaso? Ns: 21 pesos…[continúan diciendo los valores del resto de las piñatas] M: Leemos todos el primer punto verde que dice ahí … Ns: [Deletrean la mayoría] Ri-car-do a-com-pa-ñó a su ma-má a com-prar la pi-ña-ta…[Maestro ayuda a leer] dice ¿Cuál de todas cuesta más? Ns: [Inmediatamente] La sirena… M: ¿Cuánto vale el mundo? [Se dirige al pizarrón] ponemos aquí los números.	*Aún se observa en esta participante, dificultades para reconocer el valor simbólico del número (El profesor dice el número correcto)

		Ns: [1, 2, 3…51…Cuentan hasta más del 50) M: Alto hasta ahí… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11, 12,13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28,29, 30 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50	
	Diálogo triadíco	M: ¿Cuánto vale la piñata del mundo? Ns: 35 M: ...Pasa Monserrat a encerrar el precio de la Piñata Na: [Encierra el 25] M: [Señala el número] ¿Será ese el 35? No: Nooo, ¡Ese es el 25! M: ¿Por qué es 25? Na: [La niña que lo encerró] Porque tiene un dos y un cinco… M: Hay un error Monse	Se observa la solución de problemas de comparación, entre el precio más chico y mas grande (Cardinales). Pregunta, sin reflexión, se trabaja el valor absoluto de los números y no se discute el valor relativo.
	Trabajo en pizarrón	Na: [Observa pizarrón y corrige] M: Pasa Joel y encierra el precio de la Sirena, ¿cuánto vale el precio de la sirena?	
	Diálogo triádico	N: [Encierra el 42, voltea a ver al grupo con mirada triunfante y desafiante] M: Estas bien siéntate, ahora de la numeración que aparece encerrada [tabla de números] ¿Qué número aparece primero y cuál después? Na: El 35 M: El 35 y ¿qué apareció después? [Una pareja de niñas no atienden y solo platican] Ns: El 42	
	Dialogo triádico	M: ¿Quién es más grande el 35 o el 42? Na: El 35. Ns: El 42.	
	Interrupción	M: [Se detiene momentáneamente y se dirige a niñas platicando] haber aquí Deysi que está atenta que nos diga, ¿qué preguntamos Deysi? [la niña chupa una paleta y agacha mirada]	
	Interrupción	M: [Regresa al pizarrón y explica] Siempre que un número que aparece después de otro va a ser la cantidad más grande, ese es el más grande. Si yo marco [Interrumpe para llamar la atención a un niño que se levantó para pedir permiso para ir al baño] Si yo marco el 1 y el 2, ¿cuál es el más grande el 1 ó el 2? Ns y M: El 2 porque apareció después. M: [Continua preguntando con diferentes cantidades y señalándolas en la tabla] Ns: [Contestan correctamente cuál es la	De acuerdo con los

		cantidad mayor o menor] [En general muchos niños se muestran aburridos, aun sentados en sus lugares juegan con las manos, otros bostezan o cambian continuamente la mirada de un lugar a otro, síntoma de que muchos dominan esa actividad al menos hasta el 50.] M: Estamos diciendo que los números que aparecen después son los más grandes…entonces ¿cuál es el más grande en las piñatas, el 35 o el 42? Ns: El 42 M: ¿Por qué? Ns: Porque apareció después. M: ¿Entonces quién es más grande? Ns: El 42…[corrigen] La sirena, porque vale 42. M: Corríjanle si están mal …están en la pagina 22, en la primera rayita ¿Qué piñata es más cara? Na: La sirena M: La sirena y le ponen el 42.	ejercicios anteriores se observa la intención del profesor por que los niños aprenden el teorema" el número que aparece después de otro es más grande", no exige explicaciones, los niños repiten el teorema, y de igual forma los que se equivocaron " corríjanle si están mal… " con base al resuelto…el profesor repite una y otra vez este ejercicio…por lo que con estas características se hablaría de que el profesor hace uso de un contrato que va del de ***reproducción formal a el de condicionamiento.***
	Actividad 2 Problemas de comparación (el menor) *Diálogo triádico*	<u>**Actividad 2**</u> M: La segunda pregunta ¿cuál es? léanla… Ns: ¿Cuál piñata cuesta menos? Ns: El conejo M: ¿Cuánto cuesta? Ns: 8 pesos M: [Muestra y encierra el 8 en la tabla] Vean el 8 esta hasta acá…[pregunta precios del resto de las piñatas y encierra los números] ¿Qué piñata cuesta menos? Ns: El conejo M: ¿Cuánto cuesta? Ns: 8 pesos M: Anótenlo ahí [en su libro] en la segunda raya.	**Actividad 2**
	Actividad 3 Problemas cambio (adición y sustracción)	**Actividad 3** M: El segundo punto es... Ns: [Leen en coro, se observa aún dificultad para leer] La ma-má de Ri-car-do fue al mer-ca-do quie-re com-prar dos pi-ña-tas, pero no pue-de gas-tar más de 45 pesos. ¿Qué piñatas puede comprarrrrrr? M: [Retoma la lectura] La máma de Ricardo quiere comprar, ¿Cuántas piñatas?	**Actividad 3**

		Ns: Dos M: Hay un detalle ¿Cuánto es lo más que puede gastar? Ns: 45 pesos M: [Se dirige a una niña que levantó la mano] A ver Verónica dinos cómo le hiciste para saber qué piñatas comprar y cuánto te gastabas. V: ¿Pero cómo? [Se recarga en la pared] M: Verónica explícanos ¿Cómo le harías, qué piñatas pueden comprar? Na: porque tiene la misma cantidad de dinero [una sola piñata] M: [Explica al grupo] Pero si tiene que comprar dos…haber Armando, ¿Cuáles dijiste? A: Payaso y zanahoria M: ¿Cuánto vale el payaso? Ns. 21 pesos M: El payaso vale 21 pesos [anota en pizarrón] ¿Cuál otra más dijiste Armando? No: La zanahoria M: ¿Cuánto cuesta? Ns: 13	Los algoritmos naturales no son considerados dentro de la clase formal de la suma, que podrían ser uno de las mejores bases conceptuales que pueden ser ampliados o complementados con la educación formal en las aulas (Carraher y Carraher,1987 Fuson, 1993)
	Trabajo de pizarrón	M: Armando ¿Cómo le hiciste para saber? A: Sumándole M: ¿Cómo le hiciste?¿Cómo sumaste? A: [pasa al pizarrón y escribe la suma] $\begin{array}{r} \mathbf{21} \\ +\,\underline{\mathbf{13}} \\ \mathbf{34} \end{array}$ [Inicia sumando por las decenas, realiza el cálculo mentalmente]	En esta parte se observa que el profesor toma en consideración los conocimientos que ya había enseñado de cómo sumar, se apoya en el grupo para ayudar a explicar al niño del pizarrón.
	Diálogo triádico Exposición pizarrón	M: ¿Cuánto se gastó? Ns: 34 M: ¿Se gastó más de 35 pesos? Ns: ¡Noooo! M: Se llevó dos piñatas. Ns: ¡Sííí! M: Sí pero aquí hay un detalle [señala la suma del niño] ¿Se dieron cuenta por dónde inició a sumar Armando? Ns: No M: De este lado [señala las decenas] dijo dos más uno, tres…tres más uno cuatro, ¿así sumamos? Ns: ¡Nooo! M: ¿Por dónde suman? Ns: Primero las unidades. M: [Escribe la misma operación, explica y señala] Sumamos primero por las unidades, atento ¡eh! Armando si tengo el 21 [Interrupción, para llamar atención]…	No obstante en el resto de los ejercicios se observa que el profesor toma como responsabilidad central: mostrar a los alumnos una forma de operar en la suma… Se trata de que los niños sepan resolver los ejercicios que luego les pondrá <para ver si el objetivo se logro>...el profesor

	Act**ividad 4** Problemas cambio (adición-sustracción) Trabajo pizarrón *Exposición pizarrón*	Rogelio si tu ya lo sabes deja que Luis Angel aprenda por que quiere saber mucho, por qué crees que está contigo…bien [pone una línea divisoria entre las unidades y las decenas] Esteban primero vamos a sumar las... Ns: Las unidades M: Las unidades, si tengo 1 más 3 Ns: 4 M: y luego las... Ns: Las decenas M: Dos decenas más una decena Ns: Tres M: ¿Cuánto salió? Ns: 34 M: 34 **Actividad 4** M: Pero, ahora, si la señora se quiere gastar exactamente los 35 pesos, ¿Qué piñatas se va a llevar? [elige participante] Ns: [Niña contesta inmediatamente] la del mundo…yo dije maestro [No la pasa el maestro] M: Pasa Sahori y nos vas a explicar cómo le hiciste Na: [Pasa a pizarrón, espera y ve al maestro] M: Recuerda que sólo se puede llevar dos piñatas no sólo una, tienes los precios de las piñatas…Diana pásale a ayudar…¿Qué piñata se puede llevar? [pasa Diana] Na: El conejo M: Anótenle lo que se puede llevar Nas: [Forcejean por el plumón…anotan 8]… M: ¿Qué otra? [varios niños pasan] solamente llame a...siéntense. Ns: Zanahoria…Caballo Nas: [Discuten entre ellas y hacen cálculos mentales] Anotan y borran…juguetean… M: [Pide plumón] siéntense…haber Ns: Hacen ruido… *M: 1,2,3,4 [llama atención]… los estamos haciendo en el pizarrón para que todos vean como estamos analizando el problema…Repite problema…[señala en tabla de número] si la señora se quiere llevar el mundo se gasta los 35 pero solamente se lleva una pero se tiene que llevar dos:* No: Que se lleve la mitad de una…	se apoya fundamentalmente en la ***ostensión repetida*** de un procedimiento…tal ostensión hace necesario introducir ilustraciones (rueditas), representación con material y por escrito en el pizarrón… Los niños por su parte tienen como responsabilidad primera poner atención y observar la demostración. Si pasan al pizarrón deben saber hacer, pues tal hacer (nueva repetición) se convertirá en recurso para mostrar al profesor que su objetivo de enseñanza se logró, para que otros aprendan o terminen de aprender el procedimiento en cuestión.

		M: Ve a comprar una piñata y que te den la mitad ya no es una piñata…si se lleva [señala los números] la piñata de 8 y de 13 ¿Cuánto se gasta? Ns: 21 pesos maestro. M: 21 pesos…¿Cómo harías para sumar estas cifras Abraham? A: [Pasa y pone raya divisoria entre las unidades y decenas] M: Primero las unidades…[Escribe raya en la suma para alinear y separar los números] esa rayita la colocamos pero no podemos colocarla… Na: Yo sé cómo sumar sin la rayita [El maestro no responde al comentario de la niña] No: ¡Yo, yo sí sé sumar maestro! M: Atentos…siéntate Abraham. [No realizó la suma] Pasa Esteban...primero ¿Qué hacemos? E: [Pone U en fila de unidades…espera y da vueltas moviendo la cabeza hacia atrás, hace cálculos] M: Ocho más tres ¿Cuánto da? No: [Luis Ángel calcula suma utilizando sus dedos] ¡Once! M: ¿Cuánto es 8 más 3 Luis Ángel? No: [Cuenta hasta 8 y suma 3 dedos] …¡Once! M: Ese 11 lo puedo poner completo abajo Na: ¡No! ¡Lo rompemos! M: Lo vamos a destruir en unidades y decenas Na: [Otra niña] Arriba el uno y abajo el uno M: Bien, abajo el uno y arriba el uno No: [Esteban pone la D en la fila de decenas y escribe el uno y termina la suma] M: Se gastó más de 35, ¿se llevó dos piñatas?... Na: Noo. Sííí M: Sólo una alumna me está contestando ¿y los demás? Bien, anoten ahí en su libro qué piñatas se puede llevar la señora.	El profesor explica las reglas formales de la suma Hasta aquí los niños resuelven poniendo resultados en libro, sin realizar la operación escrita con práctica sólo observando el niño que paso al pizarrón, se aplica ***un contrato de reproducción formal.***
	Actividad 5 *Trabajo individual* Interrupción (atención)	**Actividad 5** M: Este lo hacen solos [el problema siguiente del libro] Ns: [Sahori realiza cálculos de la suma empleando los dedos al igual que varios niños] M: [Llama la atención] 1,2,3,4…Antonio. Bien [Corrige errores de ortografía de las palabras sobre el pizarrón junto con el	**Actividad 5**

	Actividad 6 ***Clase principal*** Problema cambio de suma y resta (Con material y dibujo) *Diálogo triádico* *Interrupción* *Diálogo triádico*	grupo, como espacio intermedio] **Actividad 6** M: [Dice] Pagina 23… Empiecen a leer Ns: Leen…Ricardo escogió la piñata de Payaso y la de Zanahoria su mamá pagó con 40 pesos, ¿Cuánto dinero le dieron de cambio? M: [Pregunta precios a los niños(as) y escribe la suma] $\begin{array}{r} 21 \\ +\underline{13} \end{array}$ Si la mamá pagó con 40 pesos ¿Cuánto le tienen que dar de cambio? ¿Qué tenemos que saber primero? Ns: Sumar…¿Saber cuánto se gastó? M: Primero tenemos que saber cuánto se gastó…y ¿Qué tenemos que hacer para saber Juan Antonio? JA: Sumar 8 y 21…[niño distraído dice otro número, el maestro pide que pase al pizarrón] M: ¿Qué vas a sumar? … ¿Por qué el precio? ¿De qué piñata vas a sumar? JA: [se pasea, espera y voltea al pizarrón] M: [Interviene] Díganle qué tiene que sumar, lo van a ayudar, lo van a apoyar Ns: las unidades…el 1 el 3 JA: [pone raya intermedia, se espera y se muestra indeciso] M: Súmalo …ya ves por andar fuera de tu lugar…¿Cuánto fue el precio de la piñata? Ns: 34 pesos M: La señora se gastó 34 pesos ¿Cuánto le dieron de cambio? *Na: Un peso.* *M: [Sin comentario a la respuesta de la niña]…quien quiera material aquí está [argollitas y base con 5 palitos] [les recuerda las reglas del uso del material] compártanlo si no alcanza ¿Cuántas monedas debemos tener?* *Ns: 40 [Cuentan]* *M: [Revisa conteo y ayuda a los niños(as)] ¿Seguro que son 4? [pregunta a un niño] ¿Cuánto se gastó la señora?* *No: 34…* *M: ¿Cuánto le vas a quitar a esto? [señala las 40 argollas, parece desesperarse]* *No: 6…* *	**Actividad 6** Un niño que permanecía descontextualizado de este problema, se le dificulta o imposibilita realizar la suma (maestro y compañeros dicen que hacer) sin embargo no tenía ni utilizó su conocimiento matemático …aún para sumar 2 más 1. *Aquí el niño llego

	Interrupción *Trabajo en pizarrón* ***Actividad 7*** *Trabajo individual*	*M: A este 40 quítale 34 pesos…ayúdenle [Niñas que están a un lado, cuentan las que quitan].1.2.3…[regresa al frente y pregunta al grupo] a los cuarenta pesos ¿cuánto le tenemos que quitar?* *Na: 34* *M: ¿Por qué 34?* *Ns: [No contestan]* *M: A los 34 que se gastó la señora…a los 40 pesos que llevaba ¿qué le van a quitar? [Intenta hacer que los niños(as) reconozcan la procedencia de los valores] ¿Cuánto les queda? [Regresa a los niños y ayuda] A estos 40 que se gastó la señora quítale los 34…si tenía 40 y se gastó 34…¿Cuánto le queda?…Si llevaba 40 y se gastó cuarenta ¿cuánto le quedó?...[se va al pizarrón]* ***Entrevista a Esteban del problema (permanece debajo de su mesa, tranquilo y atento):*** ***E: ¿Cuánto tenía la señora?*** ***No: 40 y le sobró 6*** ***E: ¿Cuánto tenía?*** ***No: 40*** ***E: ¿Cuánto se gastó?*** ***No: Se gastó 34.*** ***E: ¿Por qué no usas material?*** ***M: …no me gusta…y aparte yo pienso con mi cabecita (señala su cabeza)*** M: [Se dirige a una niña] A ver dibuja 40 rueditas en bloques de 10…a ver pasa, borra las que vale el payaso, ¿Cuántas? Ns: 21 M: Borra 21... que tus compañeros cuenten y tú tachas.. Na: [Sus compañeros cuentan 1, 2, 3... 21 y ella va tachando] M: Pasa Alejandra a borrar... las de la zanahoria. A: [Pasa y borra las correspondientes] M: [Repite problema]... si la señora llevaba 40 pesos y se gastó 34, ¿cuánto le dieron de cambio? [Señala las 6 bolitas restantes] Ns: 6 pesos M: [parece cansado] eso es el resultado pónganlo en la primera rayita. **Actividad 7** M: El segundo lo van a hacer solito. [Ordenar de menor a mayor los precios de las piñatas.]	*al resultado correcto, sin embargo ante las preguntas del maestro, el niño se enreda entre los valores, al final el profesor índica que hacer con el material para llagar la resultado (Efecto topaze)* Esteban un niño de mayor rendimiento puede operar mentalmente al realizar cálculos de computo en su mente, sin la necesidad de utilizar material concreto…se responsabiliza de aprender y poner en práctica sus conocimientos de la suma (concepto y algoritmo) en el momento de solucionar un problema. *Efecto Topaze* Después de iniciar con preguntas ***(contrato de descubrimiento)*** para orientar a la solución, el profesor termina por decir a los niños que hacer para que estos escriban el resultado del problema, utiliza ***contrato de***

		Ns: [Lo realizan y llevan a calificar]	***reproducción formal.***
Cierre de clase 8 minutos	Deja tarea, recojan material, revisa tarea	M: Lo demás de tarea…guarden sus cosas…menos libro de matemáticas, paso a revisar su tarea…las argollitas las recogen…mesa no ordenada no se va al recreo…les anoto la tarea porque cuenta para su evaluación, de hecho el examen le asignamos un 30%, la tarea va incluido lo que es asistencia, participación, aseo personal, cumplimiento de material, conducta todo eso es el 40%, el otro 30% es trabajo extra o material que tengan que recolectar, se complementa la conducta, la tarea y la participación…a quienes ya revisé, acomodan su mesa y silla y se van a lavar para el comedor… [Finaliza]	Sentido de la evaluación

Busca controlar y llamar los procesos de atención del alumnado.

En la clase anterior, se observa que el profesor trata de dar explicación acerca del objeto a saber o de los conocimientos que se muestran a los alumnos(as).

Cuando algunos de sus alumnos(as) dicen que ya han comprendido el profesor se acerca con interrogantes para saber que sean los alumnos los que expliquen las razones de su actuación en términos matemáticos.

En sus estrategias procura revisar y dar atención personalizada, y detectar las fallas de cada uno.

En esta clase, todo el ejercicio se basa en el libro de texto.

DEL TIPO DE CONTRATO EN LA CLASE

De acuerdo a Ávila (2001a)**:** en los sesenta se buscaba partir de las nociones intuitivas de los niños(as) para –mediante apoyo de las situaciones y las interrogaciones pertinentes- arribar a las nociones matemáticas formales, lo que implicaba incorporar la interrogación y, a partir de las respuestas sucesivas dadas por los alumnos concluir con la formulación de la noción prevista dando lugar al establecimiento de un *Contrato de descubrimiento* (p. 114)

Ávila (2001a) refiere que en el *Contrato de explicación " a la medida",* implica que el profesor debe tener una excelente memoria didáctica; a cada momento sus decisiones derivan del re-conocimiento de los conocimientos personales y diversos de cada uno de sus alumnos; también de sus exigencias y necesidades didácticas…explicar bien (y con ello hacer comprender) las nociones matemáticas a sus alumnos. El alumno ostenta su estado de conocimiento y expresa públicamente sus dudas (p. 144)

De acuerdo con el análisis de la clase anterior (CL2MA), se observa la tendencia del maestro por utilizar preguntas, para guiar a los niños(as) en la solución de los problemas, sin embargo no se da completo el proceso, no llega al contrato de descubrimiento.

Por otra parte, el profesor trata de hacer la explicación (contrato de explicación a la medida) del procedimiento del algoritmo de la suma, sin embargo hace una explicación general al grupo, sin emplear de manera precisa los conocimientos diversos y personales de la mayoría de los alumnos, pues aún los desconoce o no está en su estratega de enseñanza.

De la relación didáctica establecida en esta segunda clase se observa al maestro tomar la responsabilidad del resultado efectivo de su acción sobre el alumno. El profesor intenta provocar un aprendizaje; trata de modificar los sistemas de decisión (conocimientos) del alumno. Ante esta acción, de acuerdo con Brousseau (1997, 2000) el profesor establece un contrato fuertemente didáctico, basado en la ostensión, que se puede ilustrar con el siguiente fragmento (CL2MA-AC3).

> [Se resuelve el problema "La mamá de Ricardo fue al mercado quiere comprar dos piñatas, pero no puede gastar más de 45 pesos. ¿Qué piñatas puede comprar?", sobre el pizarrón hay nombre de piñatas con sus precios…]

M: El segundo punto es...
Ns: [leen en coro, se observa aún dificultad para leer] La ma-má de Ri-car-do fue al mer-ca-do quie-re com-prar dos pi-ña-tas, pero no pue-de gas-tar más de 45 pesos. ¿Qué piñatas puede comprarrrrrr?
M: [Retoma la lectura] La máma de Ricardo quiere comprar, ¿Cuántas piñatas?
Ns: Dos
M: Hay un detalle ¿Cuánto es lo más que puede gastar?
Ns: 45 pesos
M: [Se dirige a una niña que levantó la mano] A ver Verónica dinos cómo le hiciste para saber qué piñatas comprar y cuánto te gastabas.
V: ¿Pero cómo? [Se recarga en la pared]
M: Verónica explícanos ¿Cómo le harías, qué piñatas pueden comprar?
Na: porque tiene la misma cantidad de dinero [una sola piñata]
M: [Explica al grupo] Pero si tiene que comprar dos…haber Armando, ¿Cuáles dijiste?
A: Payaso y zanahoria
M: ¿Cuánto vale el payaso?
Ns. 21 pesos
M: El payaso vale 21 pesos [anota en pizarrón] ¿Cuál otra más dijiste Armando?
No: La zanahoria
M: ¿Cuánto cuesta?
Ns: 13
M: Armando ¿Cómo le hiciste para saber?
A: Sumándole
M: ¿Cómo le hiciste?¿Cómo sumaste?
A: [pasa al pizarrón y escribe la suma]

$$\begin{array}{r} \mathbf{21} \\ + \underline{\mathbf{13}} \\ \mathbf{34} \end{array}$$

[Inicia sumando por las decenas, realiza el cálculo mentalmente]
M: ¿Cuánto se gastó?
Ns: 34
M: ¿Se gastó más de 35 pesos?

Ns: ¡Noooo!
M: Se llevó dos piñatas.
Ns: ¡Sííí!
M: Sí pero aquí hay un detalle [señala la suma del niño] ¿Se dieron cuenta por dónde inició a sumar Armando?
Ns: No
M: De este lado [señala las decenas] dijo dos más uno, tres…tres más uno cuatro, ¿así sumamos?
Ns: ¡Nooo!
M: ¿Por dónde suman?
Ns: Primero las unidades.
M: [Escribe la misma operación, explica y señala] Sumamos primero por las unidades, atento ¡eh! Armando si tengo el 21 [Interrupción, para llamar atención]… Rogelio si tu ya lo sabes deja que Luis Angel aprenda por que quiere saber mucho, por qué crees que está contigo…bien [pone una línea divisoria entre las unidades y las decenas] Esteban primero vamos a sumar las...
Ns: Las unidades
M: Las unidades, si tengo 1 más 3
Ns: 4
M: y luego las...
Ns: Las decenas
M: Dos decenas más una decena
Ns: Tres
M: ¿Cuánto salió?
Ns: 34
M: 34

Ya sea que el profesor o mediante un niño, es la ostensión la noción que sustenta la relación didáctica en esta clase (CL2MA-AC3), el maestro pasa la mayor parte del tiempo frente al grupo o junto a los niños mostrando las nociones que implica sumar o restar, dependiendo del problema, luego incorporando y diciendo, o reafirmando los procedimientos del algoritmo a seguir. Si en primer intento con la representación o exposición estos no son comprendidos por los niños(as), entonces se repite la demostración de cómo operar cuando se suma o se resta, ya sea con material, o con un esquema gráfico, o en este caso explica como solucionar con el algoritmo de la suma, y en los que detecta un error de procedimiento del algoritmo e intenta aclararlo, recordando a sus alumnos las reglas del algoritmo formal de la suma.

En complemento el profesor, ayuda a los niños(as) a realizar la tarea, sugiere y muestra como hacerlo, ejemplifica a los alumnos con el trabajo o dificultad de otro compañero, continuamente realiza preguntas del proceder o del resultado, muestra continuamente el problema a resolver, da a evaluar al grupo los resultados encontrados, hace participar directamente a los alumnos, exige explicaciones a sus alumnos, llama la atención constantemente a quienes interrumpen.

Por su parte, los niños(as) se responsabilizan por: mantenerse atentos a las exposiciones que hace el maestro en el pizarrón o a las explicaciones que hace en voz alta a alguno de sus compañeros; proporcionar las respuestas que se les demanda como muestra de su aprendizaje; anotar en su cuaderno los saberes institucionalizados; recordar y memorizar las procedimientos que implican sumar o restar; resolver ejercicios y problemas para aplicar los conocimientos adquiridos. Su compromiso es demostrar que han memorizado como operar con material en el momento de solucionar un problema que implique suma o resta, y particularmente en esta clase como proceder ante el procedimiento del algoritmo de la suma.

Sin embargo pese a la responsabilidad del maestro por enseñar como operar y proceder, cuando se resuelven problemas de suma o resta, se observa que el profesor trata de recordar a sus alumnos las reglas de la suma, y los guía con preguntas.

Sin embargo, ocurre un problema en esta relación didáctica (CL1MA2-AC6), en alguna fase del proceso de enseñanza el maestro se desespera e incurre a decirles que deben hacer, el objetivo por enseñar en algunos casos no desaparece por completo, pero si afecta la calidad de lo que se pretende enseñar, lo que da lugar a lo que Brousseau (1997) llama el efecto Topaze que se relaciona con la forma que el profesor elige, plantea preguntas y maneja las situaciones para la enseñanza. El profesor explica un conocimiento incompleto, y termina por sugerir claves, preguntas y en algunas casos dar la respuesta y se pierde el objetivo de la enseñanza, o en este caso lograr un aprendizaje incompleto o fragmentado.

El siguiente segmento (CL1MA_AC6) ilustra como el profesor intenta ayudar a solucionar sin embargo el profesor sugiere que hacer, y termina por dar el resultado, a pesar del trabajo en clase.

[Se resuelve el problema “Ricardo escogió la piñata de Payaso y la de Zanahoria su mamá pago con 40 pesos, ¿cuánto dinero le dieron de cambio?”, soluciona con argollas de plástico…y una niña en el pizarrón] (CL1MA2_AC6)

M: [Se dirige a una niña] A ver dibuja 40 rueditas en bloques de 10…a ver pasa, borra las que vale el payaso, ¿Cuántas?
Ns: 21
M: Borra 21... que tus compañeros cuenten y tú tachas..
Na: [Sus compañeros cuentan 1, 2, 3... 21 y ella va tachando]
M: Pasa Alejandra a borrar... las de la zanahoria.
A: [Pasa y borra las correspondientes]
M: [Repite problema]... si la señora llevaba 40 pesos y se gastó 34, ¿cuánto le dieron de cambio? [Señala las 6 bolitas restantes]
Ns: 6 pesos
M: [parece cansado] eso es el resultado pónganlo en la primera rayita.

Como consecuencia de buscar las respuestas correctas de los alumnos, se cae en la institucionalización, se ve cuando tiene lugar el efecto Topaze (Avila, 2001a), que no es el sujeto epistémico -el que busca obtener una solución impelido por las exigencias de una situación- sino el alumno (el sujeto didáctico) quien busca responder al profesor, aun sin significado; se ve que no es necesariamente el trabajo que promueva el desarrollo cognoscitivo, sino las respuestas correctas que busca el profesor.

DEL PROCESO DE LA ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA

Esta es la segunda clase que el profesor imparte a sus alumnos(as) en el tercer mes del ciclo escolar. En este proceso de la enseñanza y aprendizaje de la suma y la resta, el profesor trata de introducir estos conocimientos a través del planteamiento de problemas, derivados del libro, que implican sólo uno dos dígitos, en el que deben resolver con material en principio y en el que se puede observar como se enseña el algoritmo de la suma, pues la resta solo aún se resuelve con material.

En la primera y segunda actividad de la clase se trabajan problemas de comparación "menor que" o "mayor que" con sólo identificar el cardinal del número.

En la tercera parte el maestro trata de introducir el concepto de la suma y la resta mediante el planteamiento de problemas de cambio que implica adición y sustracción, con datos numéricos de dos cifras menores a 40, en principio promueve su solución mediante el uso de materiales diversos, y solo se aplica el algoritmo de la suma con ejercicios sobre el pizarrón. Se observa (CL1MA-AC3) durante la solución del algoritmo, que aún desconocen como sumar con el algoritmo, el maestro escribe el algoritmo, señala el nombre del valor posicional con la primera letra, posteriormente traza una línea vertical para separar las unidades y las decenas, posteriormente recuerda las reglas del valor posicional por donde iniciar a sumar, en este caso por las unidades, para continuar con la integración de las decenas.

CL1MA-AC3 [Trabajan la operación de un problema sobre el pizarrón]

M: …si se lleva [señala los números] la piñata de 8 y de 13 ¿Cuánto se gasta?
Ns: 21 pesos maestro.
M: 21 pesos…¿Cómo harías para sumar estas cifras Abraham?
A: [Pasa y pone raya divisoria entre las unidades y decenas]
M: Primero las unidades…[Escribe raya en la suma para alinear y separar los números] esa rayita la colocamos pero no podemos colocarla…
Na: Yo sé cómo sumar sin la rayita [El maestro no responde al comentario de la niña]
No: ¡Yo, yo sí sé sumar maestro!
M: Atentos…siéntate Abraham. [No realizó la suma] Pasa Esteban...primero ¿Qué hacemos?
E: [Pone U en fila de unidades…espera y da vueltas moviendo la cabeza hacia atrás, hace cálculos]
M: Ocho más tres ¿Cuánto da?
No: [Luis Ángel calcula suma utilizando sus dedos] ¡Once!
M: ¿Cuánto es 8 más 3 Luis Ángel?
No: [Cuenta hasta 8 y suma 3 dedos] …¡Once!
M: Ese 11 lo puedo poner completo abajo
Na: ¡No! ¡Lo rompemos!
M: Lo vamos a destruir en unidades y decenas
Na: [Otra niña] Arriba el uno y abajo el uno
M: Bien, abajo el uno y arriba el uno
No: [Esteban pone la D en la fila de decenas y escribe el uno y termina la suma]
M: Se gastó más de 35, ¿se llevó dos piñatas?...
Na: Noo. Sííí
M: Sólo una alumna me está contestando ¿y los demás? Bien, anoten ahí en su libro qué piñatas se puede llevar la señora.

En este proceso los niños(as) deben resolver la suma primero mediante el uso y su representación con material concreto, y resolver a través de la aplicación del algoritmo de la suma por escrito. El maestro trata de enseñar el conocimiento de la suma formal a partir de que el niño primero experimente con material concreto, para después enseñar el procedimiento del algoritmo escrito, el conocimiento abstracto. En esta última parte trata de explicar como operar con los principios del sistema decimal en el momento de resolver el algoritmo, sin embargo las explicaciones son dadas por el maestro, sin reflexión por el alumno y con respuestas que garanticen su entendimiento, a pesar de que algunos niños reconocen las reglas para resolver correctamente el algoritmo.

Este proceso que sigue la enseñanza y aprendizaje de la suma, continua centrado en el procedimiento correcto del algoritmo, y en la explicación de la básica de como integrar las decenas, al no haber reflexión por parte de los niños y limitarse a seguir las reglas del algoritmo, se gira hacia un conocimiento mecánico.

De esta forma, en el diálogo**(CL1MA-AC3)**, se observa en las respuestas de los niños(as) una forma de operar mecánicamente al solucionar el algoritmo de la suma, el profesor enfatiza el lugar por el que se debe iniciar a resolver la operación, qué deben hacer cuando al iniciar a sumar obtienen dos números, así como cuál debe ser la ubicación de cada uno de los números del primer resultado en la operación, y finalmente que hacer con el resto de lo números.

El siguiente diálogo **(CL1MA-AC3)**, permite observar como a pesar de que el maestro guía al grupo en la resolución del procedimiento correcto, se observa en el discurso de algunos niños confusión acerca de donde debe ubicarse la decena obtenida en la primera suma (ver figura en el diálogo). Esto conduce a la idea de que esta confusión obedece a la enseñaza orientada hacia un *conocimiento de tipo mecanización del sistema decimal*, más que a un conocimiento conceptual.

Es importante, puntualizar esta parte, a razón de que durante las evaluaciones, se observo dificultades en algunos niños al dificultad en la realización de los algoritmos de suma, dónde justamente en el segmento **(CL1MA-AC3)** participa un niño de alto rendimiento y que no pudo resolver o no supo que hacer, y que su pos-evaluación presento dificultad para seguir las reglas de integración de las unidades de valor. Este patrón puede representar un conocimiento fragmentado o incompleto, y dónde no se exploro ni se cuestiono sobre como era ese "conocimiento" en el niño en la comprensión para integrar y ubicar las decenas y las centenas, con relación a los principios y conceptos del valor posicional y de la composición aditiva, en el momento de sumar.

Un factor aunado al problema anterior es además la forma en que el maestro utiliza el lenguaje y que se refleja en el conocimiento del niño, caracterizado por el empleo de términos o palabras centradas más en "la matemática escolar o cotidiana" diferente al lenguaje de la "matemática de los matemáticos científicos" (Laplante,1996; Mercer,1996). Así, en su práctica, en su vocabulario, en sus exigencias, etc., el profesor pone en juego "conceptos" o "leyes" cuyo objetivo es permitir la acción del alumno y justificar las decisiones del profesor (Brousseau, 2000). El diálogo en el segmento **(CL1MA-AC3)**, muestra un momento de la clase cuando los niños se refieren a una acción del principio de composición aditiva y un niño en su participación refiere este conocimiento en palabras como: "¡Lo rompemos!" y el profesor lo ratifica como: "lo destruimos en decenas y unidades".. Siendo que durante el proceso de la enseñanza el uso del lenguaje se considera como indispensable para transmitir un conocimiento científico.

En este sentido, la enseñanza de un conocimiento matemático mecánico de la suma es lo que se observa en esta clase a tres meses y que ya se veía desde el inicio del ciclo escolar.

Al puntualizar este tipo de conocimiento que ocurre dentro del aula, considerado dentro de las concepciones del maestro como uno de los principales problemas en la enseñanza de las matemáticas. En su concepción, expresa que una de las grandes preocupaciones de la educación en matemáticas, es en este caso el aprendizaje basado más en la memorización y en el entrenamiento de las operaciones más a nivel del simple algoritmo que su relación con la parte conceptual, sin embargo esta situación es lo que ocurre en su clase. En su concepción expresa:

> "La problemática en las matemáticas es el razonamiento, muchos niños entienden números, saben interpretar números, de hecho niños de sexto año saben lo que es una suma, saben lo que es una resta, saben lo que es una **multiplicación pero lo saben de una manera mecánica**, pero lo que no entienden es que la multiplicación es una suma abstracta, y que la suma es un desarrollo de una multiplicación, es lo que ellos no han entendido, no tienen ese razonamiento, no saben interpretar un problema. **Cuando se les plantea un problema lo que ellos preguntan ¿maestro es suma?, ¿maestro es resta?, ¿Es división? la problemática mundial de las desventajas de esta materia es simplemente el razonamiento, todo lo que ellos aprenden es de manera mecánica**, primero multiplicas esto, luego esto el otro, **lo hacen de manera memorística – mecánico** y no aprenden de que por ejemplo en una resta porque si tenemos 31 menos ocho como es que el 8 se convierte en 11, no saben que el tres le prestará un número al uno y se convirtiera en once no entiende que lo que esta prestando es un decena no simplemente un número en si, ese proceso es el razonamiento"

De alguna forma, el profesor trata aproximarse, a la concepción de la dificultad de la enseñanza en la comprensión de los principios del sistema decimal de numeración, donde describe la problemática del aprendizaje y comprensión de estos principios de valor posicional, del tamaño de las unidades y de composición aditiva entre algunos.

> "El aprendizaje.. digamos que el problema de las matemáticas es el razonamiento, pero en cuanto a que es su aprendizaje a nivel primaria lo que les cuesta mucho trabajo es que no saben relacionar el número con la realidad que representa, no es que sean todos pero hay quienes les cuesta identificar un número y ese numero relacionarlo a la vez con la cantidad que están esperando, **otro problema del aprendizaje que se presenta en primer año, y que les cuesta mucha dificultad, es entender lo que es una decena y que es una unidad y las ubicaciones que tienen cada número y como afecta la posición que tiene con respecto a otro.** Un dos al inicio es un dos, pero si ese dos lo recorro un espacio hacia la izquierda no entienden que es dos ya no es dos, sino que es un veinte ese proceso de asimilación...de cardinalidad. Es lo que les cuesta mucho trabajo"

Finalmente y de manera muy importante considera como problema más grave la forma de cómo se da la instrucción y su vez el entendimiento del niño o niña, al respecto afirma:

> "…el problema más grave de las matemáticas es la forma como se imparte y como el niño lo aprecia, no todos tienen la facilidad para explicar, lo cual impide el asimilamiento matemático…"

Esta es la segunda clase que pertenece al tercer mes del ciclo escolar, y se observa a niños que tienen dificultad para operar y conceptuar la suma y la resta, específicamente es claro cuando algunos de los alumnos pasan al pizarrón y no saben o se les dificulta resolver el algoritmo de la suma. Se observa el interés y la insistencia del profesor por introducir este conocimiento de la suma y en parte de la resta, en las clases mas avanzadas se observa el esfuerzo del profesor por enfatizar la enseñanza de estos conceptos y principios del sistema decimal, sin embargo hasta aquí predomina la enseñanza mecánica de estos conocimientos.

LOS PROBLEMAS COMO LA BASE PARA EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Si bien existe una diversidad de estrategias y/o formas para buscar el aprendizaje o la construcción de conocimientos específicos, el aprendizaje basado en problemas resulta clave en los actuales modelos de enseñanza constructivista. El aprendizaje basado en problemas (Díaz Barriga, 2005) consiste en el planteamiento de una situación problema, donde su construcción, análisis y/o solución constituyen el foco central de la experiencia, y donde la enseñanza consiste en promover deliberadamente el desarrollo del proceso de indagación y resolución del problema en cuestión. Suele definirse como una experiencia pedagógica de tipo práctico organizada para investigar y resolver problemas vinculados al mundo real, la cual fomenta el aprendizaje activo y la integración del aprendizaje escolar en la vida real. Como metodología de enseñanza, el aprendizaje basado en problemas requiere la elaboración y presentación de situaciones reales o simuladas –siempre lo más auténticas y holistas posible- relacionadas con la construcción de conocimiento o el ejercicio reflexivo de determinada destreza en una ámbito de conocimiento, práctica o ejercicio profesional particular.

El aprendizaje basado en problemas puede entenderse y trabajarse en una doble vertiente: en el nivel del diseño del currículo y como estrategia de enseñanza (Díaz Barriga y Hernández, 2002; Edens, 2002; Posner, 2004, cit. en Díaz Barriga, 2005). En ambas vertientes, el interés estriba en fomentar el aprendizaje activo, aprender mediante la experiencia práctica y la reflexión, vincular el aprendizaje escolar a la vida real, desarrollar habilidades de pensamiento y toma de decisiones, así como ofrecer la posibilidad de integrar el conocimiento procedente de distintas disciplinas. Por otra parte, Reigeluth (2000) sostiene que el modelo educativo requerido en la nueva era de la información tiene como rasgos más notables el aprendizaje cooperativo, la reflexión, las habilidades de comunicación, las aptitudes para resolver problemas y construir significados, y el papel del docente como preparador cognitivo o facilitador del aprendizaje.

Por su parte Brousseau (2000) en su teoría de las situaciones didácticas, considera a un problema o ejercicio no como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas. Donde el medio se considera como un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es del que conviene hacer un modelo en tanto una especie de autómata.

Brousseau llama "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen la posibilidad al sujeto para construir por sí mimo un conocimiento nuevo en un proceso "genético".

Específicamente, un problema matemático puede ser entendido como "una tarea o una cuestión establecida en palabras donde la persona al intentar solucionar debe seleccionar las operaciones" (Hembree y Marsh, 1991, p. 152).

Ubicados en el campo de las matemáticas, Mendoza (2004) en su análisis refiere que un problema puede ser entendido como "una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para lo cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución" (p. 71). La práctica y solución continua de los problemas puede transformarlos en ejercicios, por lo que es necesario diferenciar entre lo que es un ejercicio y lo que es un problema. De acuerdo con Pozo (1998) un problema se diferencia de un ejercicio, en que este último se dispone de mecanismos que llevan de forma inmediata a la solución y que se puede convertir en algo rutinario.

De acuerdo con los planteamientos y programa de la SEP, (1999), se tiene que el planteamiento y la solución de problemas sean la base para que los niños(as) construyan su conocimiento matemático.

Dentro de estos planteamientos destacan las siguientes características del enfoque que tiene como fundamento principal la resolución de problemas (SEP; 1999):

a) La actividad del niño enfrentado a situaciones problemáticas es el punto de partida y el elemento central de las secuencias didácticas que se proponen.
b) En la variedad de problemas que se presentan a los alumnos radica la significatividad de los aprendizajes construidos o en vías de construcción.
c) En el proceso de resolución de problemas se elaboran estrategias personales de resolución.
d) El diálogo y la confrontación de resultados y procedimientos entre los niños contribuyen al aprendizaje.
e) El aprendizaje es entendido como un proceso caracterizado por aproximaciones sucesivas mediante el cual los niños tienen acceso a representaciones y procedimientos cada vez más formales.
f) La función del profesor será coordinar las discusiones, plantear situaciones didácticas que permitan analizar los contenidos de forma gradual y advertir los momentos en que podrá llevar a los alumnos a seguir las estrategias convencionales.

Los planteamientos anteriores sirven para corroborar con lo que ocurre en la clase 2 de este maestro de segundo grado acerca de la enseñanza de las matemáticas basada en el planteamiento y solución de problemas. En el primer análisis se observa la intención del profesor por enseñar el conocimiento de la suma y la resta sustentados en el planteamiento de problemas, apoyado con sus estrategias como el uso de material. Sin embargo, al plantear en su clase una serie de problemas simples de agregar y quitar, los niños(as) utilizan la misma estrategia de conteo sustrayendo o agregando cantidades, lo que sería una enseñanza basada en la solución de ejercicios (Hembree y Marsh, 1991; Pozo, 1998; Mendoza, 2004).

Sin embargo los problemas planteados en clase 2, podrían quedar enmarcados en una serie de ejercicios que de problemas. Puesto que en esta clase se observan ejercicios que son solucionados con estrategias o técnicas sobreaprendidas y rutinarias. Con la necesidad de plantear nuevos problemas, que sean innovadores y donde sea necesario que el niño emplee estrategias y conocimientos matemáticos, y que a su vez permiten desarrollar más estrategias e incrementar o generar nuevo conocimiento matemático.

Si bien se plantea (Pozo, 1998) que con el tiempo los problemas al ser solucionados repetidamente estos pasan a ser ejercicios, cuyos procedimientos de solución pueden ser utilizados para resolver nuevos problemas, surge la necesidad elaborar, elegir y plantear nuevos problemas.

Siguiendo un análisis de la clase 1, a partir de los planteamientos de la SEP (1999), en cuanto a la diversidad de los problemas, se observa el planteamiento de problemas de comparación y de cambio que establecen una relación sencilla entre las variables que implican la adición o sustracción, que involucran uno o dos dígitos, siempre con la incógnita al final. Predominan los problemas por aplicar, y relacionados en su contenido con el eje de los números y sus relaciones y sus operaciones.

El predominio del planteamiento de preguntas es de bajo nivel cognitivo, total ausencia de problemas planteados por los alumnos, que son más bien problemas planteados por el profesor y con el apoyo de actividades del libro, los niños llegan a participar esporádicamente únicamente en la aportación de los datos a incluir.

El proceso que sigue de enseñanza y aprendizaje sigue una secuencia donde la interacción para la discusión de procedimientos y resultados es mínima, se observa más un trabajo individual del alumno. Una observación en este clase semejante a la que realiza Claudine (2003), esa que el trabajo del profesor parece que consiste en ofrecer a los alumnos un procedimiento para resolver los problemas, que no permite la comprensión por parte del alumno, pues no se funda en el análisis del trabajo que se tiene que realizar y porque no permite un trabajo cognitivo del niño con respecto al trabajo matemático especifico que está en juego.

Esta practica de la clase, se relaciona con lo que el maestro concibe acerca del empleo de los problemas, la dinámica que se sigue para solucionar, el tipo de problemas que se resuelven, la utilidad cotidiana de estos conocimientos, sin mencionar la importancia que juegan para el desarrollo cognoscitivo del niño, como la reflexión y el razonamiento, el siguiente fragmento ilustra la concepción del maestro:

> ”La importancia es mucha no vamos tan lejos, los niños en la escuela traen su dinerito ***se compran*** un boing (jugo), unos cacahuates, palomitas y si el niño no sabe hacer su suma, ni su resta, aquí viene la dificultad el niño va a ser propenso constantemente digamos a que le roben su dinerito si el no se da cuenta de esto. Por ejemplo si entrega una moneda de diez y se compra unas palomitas que valen 3 pesos y le dan 5 pesos el se va a quedar contento, puesto que no tiene la noción de que entrego más dinero de lo que esta comprando el producto. En este aspecto si el no sabe eso su dinero constantemente se lo van a estar quitando y sin que el de cuenta (mira fijamente y mueve cabeza afirmativamente). Pero si el sabe asimilar, si ya comprendió la suma y la resta se va a poder defender más y va a ser menos frágil de que le estén ***quitando o robando*** su dinero de manera mal intencionada. Si yo fuera su cliente que bien, pero si se dan cuenta de que el niño no sabe hacer sus cuentas, (exclama) ¡aquí me agarro un peso, dos pesos o tres pesos!, y así diario, diario...después el niño no va a saber ni para que le va a alcanzar. Si cuando el ya sabe...asumió la suma y la resta, ¡caray! Si entregue 10 y me dan 5 oye no me están robando. ***Si te di 10 y este vale 3, me tienen que dar 7.*** **Va a poder defender su punto de vista, sus intereses, y va a poder con su dinero comprender que puede comprar y que no puede comprar, exclama ¡y si va a comprar esto, cuánto me tienen que devolver o cuánto no le tienen que devolver, de ahí la importancia de aprender a sumar y aprender a restar, sobre todo porque no es algo que únicamente se da en la escuela,** ***se da en la casa, se da en la tienda*** cuando su mamá lo manda a la tienda le dice: ¡ve a comprarte unas galletas!, si el niño no comprendió la suma y la resta, ahí en la tienda va a ocurrir lo mismo le pueden quitar su dinero, y cuando regrese a la casa su máma lo va a regañar entonces: ¡Oye hijo ten más cuidado te están robando tu dinero!.. ahí (afirma con el dedo y concluye)… ***porque lo utilizan a diario***.

En la concepción del maestro, se observa el planteamiento de problemas sencillos de adición o sustracción, cuestionándose la calidad de los problemas. Al no ser la intención de esta tesis analizar la calidad de los problemas planteados en el libro de matemáticas, en este caso el profesor basa su clase en el libro, con la necesidad de contar o generar más recursos que enriquezcan su enseñanza. Brousseau (1997) plantea desde de la teoría de las situaciones didácticas, que en la moderna concepción de la enseñanza además se requiere al maestro para provocar la adaptación esperada en sus estudiantes por una elección juiciosa de “problemas” que pone frente a sus estudiantes. Problemas, elegidos de tal forma que los estudiantes puedan aceptarlos, puedan hacer actuar a los estudiantes, hablar, pensar e involucrarse por su propia motivación.

Finalmente, los resultados encontrados el análisis anterior referentes al uso de problemas matemáticos como base para la enseñanza de las matemáticas, son muy similares a los resultados presentados en el estudio de Mendoza (2004), que realizo con grupos de 2°, 4° y 5° grado, de educación publica, en aulas mexicanas.

Estos resultados del análisis de la clase 1, también en este caso, permiten reflejar y transparentar un caso real de lo que puede ocurrir en las aulas mexicanas cuando los profesores intentan enseñar la suma y la resta basándose en la solución de problemas matemáticos.

ESTRUCTURA DE LA CLASE

En el análisis de la estructura y de la forma como transcurren las clases (Lemke, 1997) se observa en una primera parte la introducción a la clase. En este caso, se observa que el profesor recurre a la exposición sobre el pizarrón, al repaso de conocimientos relacionados con las reglas del algoritmo de la suma, el trabajo individual de los alumnos, a la discusión grupal de los resultados obtenidos.

Sin embargo, una de los principales patrones para la enseñanza, en la estructura de la actividad más común, que describe Lemke (1997) es el diálogo triádico. El profesor plantea preguntas, pide a los alumnos(as) que respondan y evalúa las respuestas. Cuando las respuestas son correctas se reafirma lo que dice el alumno y en caso contrario se corrige.

Con la necesidad de incluir un discurso, que incluya en el diálogo preguntas o el planteamiento de situaciones que permitan hacer reflexionar más a los alumnos. Acerca del concepto y algoritmo de la suma y la resta, planteados en problemas más situados.