



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Dinámica y Cosmología del Taquión

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Uriel Filobello Niño

DIRECTOR DE TESIS: [Dr. Axel de la Macorra Pettersson](#)

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: [Dr. Manuel Torres Labansat](#)

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: [Dr. Jaime Besrosvany Fridzon](#)



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F. a 8 de agosto de 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción General	PAG 1
-----------------------------------	-------

CAPITULO 1 Introducción y Antecedentes.

1.1	Introducción a la cosmología en general	PAG. 3
1.1.A	Observables Cosmológicas.....	PAG. 4
1.2	Revisión de Cosmología Estándar.....	PAG. 8
1.3	Dinámica del Campo Escalar.....	PAG.10
1.3.A)	El Campo Escalar como Quintaesencia.....	PAG.10
1.3.B)	Ecuaciones para Quintaesencia.....	PAG. 11
1.4	Introducción a Cuerdas y Branas.....	PAG. 15
1.4.A)	Cuerdas.....	PAG. 16
1.4.B)	Branas.....	PAG. 19
1.4.C)	La acción de Dirac Born Infeld.....	PAG. 20
1.4.D)	Dualidad y Teoría M.....	PAG. 21
1.5	Inflación Temprana y Condiciones De Rodado Lento.....	PAG. 22
1.6	Energía oscura.....	PAG. 23
1.7	Recalentamiento.....	PAG. 25

CAPITULO 2 Introducción a los Campos Taquionicos.

	Introducción del capítulo 2.....	PAG. 26
2.1	Interpretación de los Taquiones como Estados de mínima energía. ($m^2 < 0$).....	PAG. 26
2.1.A	Supercuerdas.....	PAG. 28
2.1.B	Cuerdas Bosónicas.....	PAG. 33

2.1.C	Acción Efectiva Alrededor Del Vacío Taquiónico.....	PAG. 36
2.2	El Campo Taquiónico (espacio de Minkowski).....	PAG. 37
2.2.A	Confinamiento Carrolliano.....	PAG. 37
2.2.B	El Campo Taquiónico (espacio F.R.W).....	PAG. 38
2.2.C	Condiciones de Rodamiento Suave Para Un Campo Taquiónico (caso de baja velocidad).....	PAG. 40
2.3	Los Potenciales Taquionicos De Cuerdas y Su Comportamiento General.....	PAG. 41
2.4	El Problema De Materia Para Los Potenciales De Cuerdas Taquiónicos.....	PAG. 43
2.5	Evolución Del Campo Taquiónico T Como Sistema Dinámico.....	PAG. 44

CAPITULO 3 La Masa, Normalización y Comportamiento Tardío del Campo Taquionico.

3.1	Introducción al capítulo 3.....	PAG. 50
3.2	El Campo Taquiónico T.....	PAG. 51
3.3	La Masa Taquiónica.....	PAG. 52
3.4	El Campo Escalar Normalizado.....	PAG. 53
3.5	Análisis General.....	PAG. 55
3.5.A	Ejemplos.....	PAG. 55
3.5.A.A	Potencial $V = V_i \text{Exp}[-T^2 / 2]$	PAG. 55
3.5.A.B	Potencial $V = V_i / \cosh[T]$	PAG. 57
3.5.A.C	Potencial $V = T^3 + T^2 - 4/27$	PAG. 58
3.6	Comportamiento Tardío.....	PAG. 60
3.6. A	Condiciones de rodado lento y la regla de <i>L'Hopital</i>	PAG. 60
3.6.A.A	Campo Escalar Canónico ϕ	PAG. 61
3.6.A.B	Campo Taquiónico T.....	PAG. 62
3.6.B	Limite Asintótico Para ϕ	PAG. 63
3.6.B.A	Límite asintótico para ϕ en FRW.....	PAG. 64
3.7	Resumen y Conclusiones.....	PAG. 64

CAPITULO 4 Análisis Dinámico de la Interacción Taquión y Campo Escalar.

Introducción del capítulo 4.....	PAG. 66
4.1 Acoplamiento Taquiónico y Campo Escalar	PAG. 66
4.2 Ecuación De Estado Efectiva.....	PAG. 68
4.3 Análisis Dinámico.....	PAG. 69
4.4 Soluciones Críticas Para Algunos Modelos De λ 's Constantes.	PAG. 71
4.5 Comportamiento Asintótico.....	PAG. 74
4.6 Soluciones Críticas En General y Estabilidad.....	PAG. 76
4.7A Análisis Detallado De Algunos Modelos De Interés.....	PAG. 79
4.7B Modelos De Física De Partículas y La T- Derivada..... Del Potencial Para El Taquión T.	PAG. 84
4.8 Ejemplos.....	PAG. 86
4.9 Tablas de valores críticos.....	PAG. 93
4.10 Conclusiones del capítulo.....	PAG. 97
Resumen y Conclusiones Del Trabajo.....	PAG. 99
Bibliografía.....	PAG.102

Resumen

Las observaciones cosmológicas han determinado que el universo actualmente está constituido por 74% de energía oscura, 22% de materia oscura y solo 4% de bariones. Esto implica que la física de las partículas elementales del modelo estándar solo puede explicar al 4% del universo y el entendimiento del restante 96% tiene que tener otro origen. Por otro lado, la teoría de cuerdas es actualmente la única teoría que cuantiza a la gravedad y por lo tanto puede incorporar a las cuatro fuerzas fundamentales: la débil, la fuerte la electromagnética y la gravedad, en una sola teoría. La teoría de cuerdas predice que vivimos en un espacio de 10 dimensiones (9 espaciales más 1 temporal) y nuestro universo sería entonces un subespacio de 3 dimensiones, una 3-brana. El espacio total de 10 dimensiones podría tener además de nuestro universo otras branas las cuales pueden tener efectos observables en nuestro universo como la existencia de los taquiones.

En este trabajo se estudia la dinámica y cosmología de los taquiones. El taquión T esta motivado por la teoría de cuerdas y son los estados de cuerdas abiertas de menor energía que tienen sus extremos en una brana, ya sea en un sistema brana-antibrana o en la misma brana. La peculiaridad de estos estados es que el cuadrado de su masa es negativa por lo que son una manifestación clara de una inestabilidad en el sistema. Los campos taquiónicos los vemos en nuestro universo como campos escalares pero descritos por un lagrangiano de Dirac-Born-Infeld (DBI) y con un potencial $V(T)$, con un máximo en el origen, que es la manifestación de la inestabilidad de los taquiones. En esta tesis estudiamos la evolución cosmológica de campos escalares con un lagrangiano tipo DBI y tomamos potenciales arbitrarios $V(T)$, i.e. incluimos los potenciales con un máximo en el origen motivados por la teoría de cuerdas pero generalizamos los resultados para cualquier tipo de potencial $V(T)$. Además de estudiar la evolución de campos escalares con un lagrangiano de DBI en presencia de un fluido barotrópico, que puede ser materia o radiación, también incluimos la interacción entre estos campos taquiónicos y campos escalares canónicos y hacemos un estudio exhaustivo de la dinámica, evolución cosmológica de estos campos y determinamos diferentes propiedades fenomenológicamente relevantes.

Abstract

The cosmological observations give us a universe with 74% of Dark Energy, 22% of Dark Matter and 4% of baryons. Therefore, the standard model of particle physics contains only 4% of the energy density of our universe and the other 96% must have some other explanation. On the other hand, string theory is up to date the only theory that quantizes gravity and therefore it contains all known interactions, the strong, weak, electromagnetic and gravitational force. String theory predicts a 10 dimensional space-time (9 space and 1 time dimensions) and our universe is then a 3-dimensional space (3-brane). The total 10-D space-time may contain other subspaces (i.e. branes) and these branes could have observable consequences as the existence of tachyon fields.

In this work we study the dynamics and cosmology of the tachyon field. The tachyon T is motivated by string theory and they are the lowest energy states of open strings that begin and end on a brane or on a brane-antibrane system. The mass of these states has a negative mass square and it is therefore a manifestation of an instability of the system. The tachyon fields are seen in our universe as scalar fields with a Dirac-Born-Infeld DBI type lagrangian and with a potential $V(T)$ with a maximum at the origin, showing the instability of the system. In this thesis we study the cosmological evolution of scalar field with a DBI lagrangian and arbitrary potential $V(T)$, i.e. we include potentials with a maximum at the origin but we generalize the study to any kind of potential $V(T)$. We also incorporate a barotropic fluid, which can be matter or radiation, and another scalar but with canonical kinetic term and we analyze the dynamics and cosmological evolution of these fields and we determine the relevant phenomenological quantities

INTRODUCCION GENERAL

El estudio de la cosmología ha tenido un auge increíble en los últimos años. Esto se debe principalmente a la gran cantidad de datos cosmológicos tomados por los satélites COBE, HUBBLE y WMAP además de los resultados en la determinación de la constante de Hubble usando a las supernovas SN1a. De todas estas observaciones se ha confirmado que el universo actualmente está constituido por 74% de energía oscura, 22% de materia oscura y solo 4% de bariones. Esto implica que la física de las partículas elementales del modelo estándar solo puede explicar al 4% del universo y el entendimiento del restante 96% tiene que tener otro origen. Una posibilidad es que haya otro tipo de partículas o campos pero que interactúen débilmente con nosotros de tal forma que no los hayamos detectado en los aceleradores en la tierra. En este contexto el estudio de campos fuera del modelo estándar es de gran importancia.

Por otro lado, se ha determinado que el universo está actualmente acelerándose, y esto requiere un fluido con presión negativa llamado energía oscura. Además de este periodo de crecimiento acelerado, el universo sufrió durante el primer minuto de vida otro periodo de crecimiento acelerado. La aceleración temprana es conocida como inflación y es necesaria para resolver los problemas de la isotropía y homogeneidad del universo.

Los dos periodos de crecimiento acelerado no pueden ser entendidos a través de partículas cuyo comportamiento sea tipo radiación (con ecuación de estado $w=1/3$) o materia ($w=0$) y otro tipo de partículas son necesarias. Una posible explicación son los campos escalares pues estos pueden generar etapas con presiones negativas que dan lugar a un universo acelerado.

Unos campos escalares muy interesantes son los campos taquiones y en este trabajo lo que se presenta es el análisis y la determinación de sus consecuencias fenomenológicas y cosmológicas. El taquión esta motivado por la teoría de cuerdas y son los estados de cuerdas abiertas de menor energía que tienen sus extremos en una brana, ya sea en un sistema brana-antibrana o en la misma brana. La peculiaridad de estos estados es que el cuadrado de su masa es negativa por lo que son una manifestación clara de una inestabilidad en el sistema. Esta inestabilidad tiene una explicación física clara como se verá más adelante.

La importancia de la teoría de cuerdas es que hoy en día es la única teoría que cuantiza a la gravedad y por lo tanto puede incorporar a las cuatro fuerzas fundamentales, la débil, la fuerte la electromagnética y la gravedad en una solo teoría. Sin embargo la teoría de cuerdas predice que vivimos en un espacio de 10 dimensiones (9 espaciales más 1 del tiempo). Una posibilidad es que de las nueve dimensiones espaciales seis podrían ser muy chicas (compactificadas). La otra opción es que nuestro universo sea un subespacio de 3 dimensiones, es decir una 3-brana y las otras 6 dimensiones pueden ser grandes (o chicas). El espacio total de 10 dimensiones podría tener además de nuestro universo, una 3-brana, más branas las cuales podrían interactuar con nuestro universo. Precisamente, los taquiones surgen de la interacción entre dos subespacios como por ejemplo una brana y una antibrana. Estos estados son los estados de menor energía del sistema, y como se dijo al principio, tienen la peculiaridad de que su masa al cuadrado es negativa. Esta característica indica que estos estados representan una inestabilidad del sistema por lo que no se espera que el sistema se mantenga por mucho tiempo. Por supuesto que nuestro universo, es decir la 3-brana donde vivimos, es una brana estable pero en el espacio de 10-D podría haber inestabilidades debido a otras branas. En este trabajo, se analiza los efectos cosmológicos que estas inestabilidades tendrían en nuestro universo y que se manifiestan a través de los campos taquiónicos. En este contexto el espacio donde esta nuestro universo (una 3-brana) podría convivir con una D_p -brana que interactúa con una D_p -antibrana. La inestabilidad del sistema de la D_p -brana con la D_p -antibrana se manifiesta a través de la existencia de los taquiones y que son descritos en nuestro universo como campos escalares. Las consecuencias fenomenológicas y cosmológicas de estos taquiones tienen una importancia fundamental en la comprensión de la teoría de supercuerdas y branas.

Los campos taquiónicos T los vemos en nuestro universo como campos escalares pero descritos por un lagrangiano de Dirac-Born-Infeld (DBI) y con un potencial V , con un máximo en el origen, que es la manifestación de la inestabilidad de los taquiones. Estos campos podrían tener consecuencias interesantes en la evolución del universo y podría resolver algunos de los problemas teóricos de la cosmología como son las etapas de aceleración de nuestro universo que se presentan a un tiempo temprano (durante el primer minuto de vida de nuestro universo) y a un tiempo tardío (hoy) dado por la energía oscura.

Los campos escalares con un lagrangiano tipo DBI no están canónicamente normalizados por lo que su dinámica no es trivial de leer dado un potencial V y un análisis exhaustivo y cuidadoso debe de hacerse. En esta tesis estudiamos la evolución cosmológica de campos escalares con un lagrangiano tipo DBI y tomamos potenciales arbitrarios V , i.e, incluimos los potenciales con un máximo en el origen, motivados por la teoría de cuerdas, pero generalizamos los resultados para cualquier tipo de potencial V . Además de estudiar la evolución de campos escalares con un lagrangiano de DBI en presencia de un fluido barotrópico, que puede ser materia o radiación, también incluimos la interacción entre estos campos taquiónicos y campos escalares canónicos. Esta interacción puede ser de gran ayuda para entender el decaimiento de los taquiones y tiene consecuencias fenomenológicas interesantes.

El trabajo de esta tesis esta organizado de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se hablará de la cosmología estándar así como de sus principales logros y problemas, del campo escalar y su formalismo matemático como un posible medio para explicar los procesos inflacionarios. Se comentan los aspectos de cuerdas y branas de interés para el trabajo.

En el capítulo 2, se revisarán los aspectos relevantes del campo taquiónico T de interés para este trabajo, enfatizando en la naturaleza y motivación del mismo en el contexto de la teoría de cuerdas, y su aplicación a la cosmología. Para ello se mencionaran las suposiciones usadas para conjeturar la forma del potencial taquiónico $V(T)$, algunas soluciones independientes y dependientes del tiempo, el problema cosmológico a que da lugar el comportamiento asintótico como materia del campo taquiónico, y se concluye con la exposición de la evolución del campo T como sistema dinámico.

Los capítulos 3 y 4 constituyen los resultados de la investigación desarrollada en esta tesis. En el capítulo 3 se deducirán la masa del taquión, la transformación del campo T para obtener un campo escalar ϕ canónicamente normalizado, las propiedades generales de dicho campo taquiónico $\phi(T)$ enfatizando en una posible aplicación de este en el caso de los sistemas de D - p branas bosónicas, y las condiciones de rodado lento. En el capítulo 4 presentaremos las ecuaciones dinámicas de la evolución de un campo taquiónico acoplado con un campo escalar canónicamente normalizado en presencia de un fluido barotrópico. Se calcularán los puntos críticos del sistema y se darán algunos relevantes. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

CAPITULO 1 INTRODUCCION

SECCION1-1 INTRODUCCION A LA COSMOLOGIA EN GENERAL

La época actual se caracteriza por el rápido avance de la ciencia en todas sus ramas. La tecnología le proporciona continuamente datos junto con nuevas formas de análisis y maneras de comunicar los resultados de una investigación. Así que el actual es un momento importante, pues las condiciones favorecen la solución de problemas en la frontera del conocimiento. El caso de la cosmología es un ejemplo claro, pues recibe constantemente información proveniente de las observaciones astronómicas y con esta desarrolla nuevas teorías a la vez que verifica las existentes [6,9]. Esta información experimental se obtiene por ejemplo, de la radiación cósmica de fondo hasta las observaciones de radiación gama, que hablan de eventos extremadamente energéticos con energías entre 10^{18} y 10^{21} eV.

La cosmología tiene como pilar el modelo del big bang (de la gran explosión), también conocido con el nombre de modelo estándar de la cosmología [82]. Este propone que el universo se encuentra en expansión y, por extrapolación con esta característica, que el universo surgió de un tamaño más pequeño (si se parte de la teoría de la relatividad general se puede afirmar en base a los trabajos de Hawking que el universo comenzó en una singularidad) en donde se concentraba toda la energía que lo constituye. El astrónomo Edwin P.Hubble fue el primero en cuantificar la razón entre la velocidad a la que se alejan los objetos celestes y su distancia, la cual resultó ser una constante (ley de Hubble). Esto trajo a escena la imagen de un universo en expansión donde los objetos celestes ubicados en todas direcciones, presentan un corrimiento al rojo con respecto a la Tierra que indica su alejamiento (de acuerdo al llamado principio cosmológico los objetos se alejan los unos de los otros de la misma manera observados desde cualquier otro punto del universo según la ley de Hubble). Además, al tener una ley válida que se cumple en todas direcciones, se tiene una razón para pensar en la isotropía y homogeneidad del universo, Existen otras evidencias que indican que esta conclusión es correcta, por ejemplo, las fluctuaciones respecto a la posición del fondo de radiación de microondas que son menores a una parte en 10^5 . Por lo anterior se puede decir que el universo es adecuadamente descrito por un modelo que tome en cuenta a la expansión, y la homogeneidad e isotropía a grandes escalas (sin olvidar el gran éxito de la nucleosíntesis que se dio entre el primero y el tercer minuto de vida del universo en su predicción de las abundancias relativas de los elementos ligeros, con aproximadamente 75% de hidrogeno, 24% de helio, y otros elementos ligeros como el deuterio D y el ^4He , con una pequeña fracción del porcentaje.)

El modelo cosmológico estándar presenta, además de importantes logros, ciertas dificultades que no se pueden explicar partiendo solo de sus fundamentos. Entre ellas se encuentran la de la curvatura, y el problema del horizonte, la homogeneidad, la producción de monopolos, bariogénesis, materia oscura, energía oscura, anisotropías del fondo cósmico entre otras.

La problemática antes descrita ha propiciado la formulación de modelos complementarios al estándar, como aquellos que incorporan distintos agentes que modifican la densidad total de energía de una manera tal que la dinámica del universo se ve afectada. Uno de estos es el modelo inflacionario, cuya principal característica es la de proporcionar un crecimiento exponencial del factor de escala durante una etapa temprana del universo gracias a la presencia de un campo escalar, el modelo estándar no es desechado sino tomado como base por lo que ambos son equivalentes en etapas posteriores. Gracias a la inflación se logran resolver algunos de los problemas del modelo estándar como el de la curvatura o el del horizonte.

Otro ejemplo es el modelo que considera un término asociado a la energía oscura de carácter constante llamado constante cosmológica. Este término propiciara un cambio en las ecuaciones que rigen el comportamiento del universo, de tal forma que el factor de escala presentará un desarrollo distinto al que tiene en el modelo estándar, ya sea sufriendo una aceleración positiva o un cambio nulo. Este comportamiento no es posible al considerar únicamente

los campos de radiación y materia tomados en consideración por el modelo estándar. La constante cosmológica surgió del requerimiento de un universo estático, sin embargo las observaciones de objetos celestes con corrimiento al rojo descartan esta posibilidad. Existen evidencias recientes de que el término asociado a la energía oscura podría contribuir de forma significativa a la densidad total del universo, aproximadamente de 7/10 del total [10,11]. Queda abierta la posibilidad de que esa energía provenga de un término dependiente del tiempo, el cual podría ser originalmente del orden de la masa de Planck, despreciable en la etapa de nucleosíntesis y de magnitud considerable actualmente [12].

Como ejemplo de lo anterior se tienen ciertos modelos que incluyen, además de los campos considerados en el modelo estándar, un campo escalar ϕ distribuido homogéneamente en el universo. Este campo se desarrolla según un potencial de auto interacción y está acoplado solamente de forma gravitacional a los otros campos presentes. Los anteriores son los llamados modelos de quintaesencia y tienen como consecuencia afectar la dinámica del universo. Para que estos modelos resulten útiles, es necesario que se ajusten a las restricciones dadas por las observaciones recientes que implican que el universo es dominado por energía oscura y que se expande aceleradamente. En un principio el campo escalar partiría de un cierto valor, luego entraría a una etapa en donde dicha densidad es despreciable, la cual se llama etapa de escalamiento y que incluiría el proceso de nucleosíntesis cumpliendo con su restricción. Finalmente la densidad deberá crecer hasta su valor de 7/10 sugerido por las observaciones, generando una aceleración positiva del universo.

OBSERVABLES COSMOLOGICAS

Existen diferentes tipos de observables que dan información sobre la historia y estructura del universo. Estas son las llamadas observables cosmológicas y en base a ellas es que las implicaciones teóricas son comprobadas. Se ha mencionado ya el fondo de radiación de microondas, que indica la época en que los fotones se dispersaron por última vez y corresponde al momento en que el universo se enfrió lo suficiente como para que el gas ionizado se convirtiera en átomos neutros (proceso de recombinación) volviéndose muy transparente a los fotones. Por lo que un fotón típico en la radiación de fondo se ha desplazado en línea recta desde 3×10^5 años después del inicio del universo hasta el presente. También tenemos información sobre fondos de otras naturalezas como el fondo en infrarrojo, de rayos x, y de radiación gama entre otros. La expansión del universo es otra de ellas. Las densidades relativas entre materia, radiación, materia oscura, etc. son también cuantificadas. Otros datos con importancia para la cosmología son la abundancia de elementos ligeros (D, ^3He , ^4He , ^7Li , etc.); la proporción entre bariones y fotones y la distribución de la materia a diferentes escalas (galaxias, cúmulos de galaxias, supercúmulos, etc.).

En el modelo del big bang es posible caracterizar la evolución del universo según la energía promedio. En un principio existe una situación extremadamente energética, por lo que la materia es inestable y entonces es la radiación la que predomina como constituyente del universo. Al expandirse este, la densidad de energía de sus componentes se diluye, la radiación lo hace en la forma: $\rho_r = \rho_{r_0} (a/a_0)^{-4}$ mientras que para la materia se tiene que: $\rho_m = \rho_{m_0} (a/a_0)^{-3}$ (esto se explica en la sección 1.2). Al diluirse la materia más lentamente que la radiación llega un momento en que la primera domina la densidad total de energía, esto después del punto en el cual las dos densidades de energía se igualan y que se puede denominar como: $\rho_{m=r}$ (tal y como se explica en el capítulo 4, sección 4.2, cuando se tienen dos fluidos de parámetros de estado w_1 y w_2 constantes, se diluye más rápido el que tiene el parámetro mas grande, ver por ejemplo la ec. 4.11).

Es posible definir varios parámetros para describir el estado del universo. Estos son los llamados parámetros cosmológicos, entre los cuales están:

*Parámetro de Hubble: definido por $H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, en donde $a(t)$ es el factor de escala. Hubble

encontró que a grandes escalas las galaxias se alejan unas a otras con una velocidad proporcional a su distancia, de tal forma que H resulta ser la constante de proporcionalidad y tiene el valor actual

según las últimas observaciones de: $H_0 = 100h_0 \frac{km}{segMpc}$, donde: $h_0 = 0.71 \pm 0.07$.

*Parámetro de desaceleración: esta definido por: $q = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)}$, de tal forma que es positivo si el universo tiene una aceleración negativa y negativo si la aceleración es positiva.

*Parámetro de densidad: denominado por Ω , es el valor que resulta de comparar la densidad total a la correspondiente de un universo plano, llamada crítica. Esta dada por la expresión: $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$, en

donde $\rho_c \equiv 3H^2$ es exactamente la densidad crítica. Si $\Omega > 1$, el universo es cerrado ($k=1$), si $\Omega < 1$, el universo es abierto ($k=-1$), y si $\Omega = 1$ el universo es plano ($k=0$).

Existen indicaciones teóricas de que no solo la materia (a la que se asocia una Ω_m) contribuye a la densidad total, sino que hay una aportación debida a la energía oscura Ω_Λ , para explicar el hecho de que $\Omega \cong 1$, (se ha estimado que $\Omega = 1 \pm 0.02$) señalada por razonamientos teóricos y, últimamente, por evidencias arrojadas por los experimentos: BOOMERANG, MAXIMA, DAISI y WMAP.

Si los parámetros mencionados son conocidos entonces es posible calcular cantidades como la edad del universo o características como si este es plano, cerrado o abierto. Entonces la fenomenología que surge de la relatividad general estará determinada.

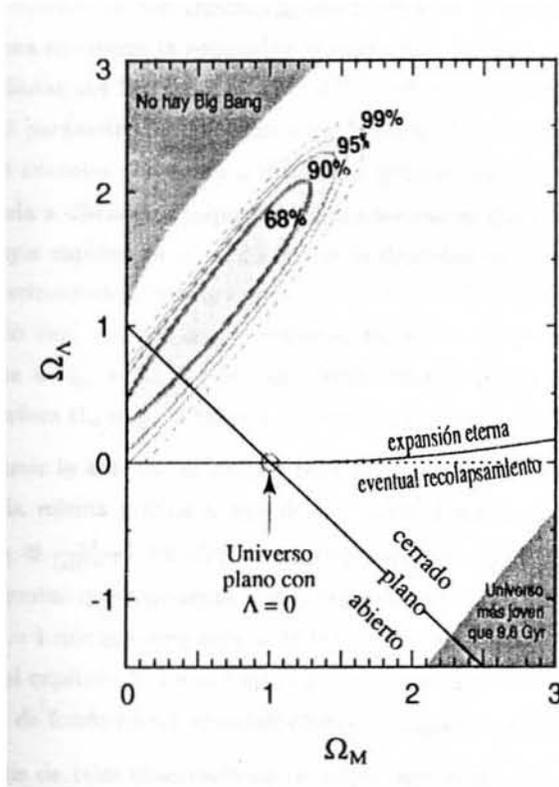
Sin embargo la precisión de los experimentos actuales es insuficiente para descartar a alguno de los modelos existentes, por ejemplo: en el caso de Ω se tiene un rango amplio de valores al haber varios métodos para calcular el valor actual de dicho parámetro. Algunos de los rangos se resumen en la siguiente tabla:

Método	Ω_m	Ω_Λ
H_0 vs. z	< 0.7	
diagrama de Hubble con SNe Ia	≤ 0.3	≈ 0.7
densidad de luminosidad $\times M/L$	0.1-0.4	
fracción bariónica	0.15-0.35	
evolución de cúmulos	≈ 0.3	
pico acústico CBR	$\approx (1 \pm 0.12) - \Omega_\Lambda$	$\approx (1 \pm 0.12) - \Omega_m$
lentes gravitacionales		< 0.8
recuento	0.15-0.45 ($k = -1$) 0.2-0.4 ($k = 0$)	0.6-0.8

Tabla 1.1: Valores experimentales para Ω_m y Ω_Λ

de donde se ve que los experimentos sugieren que Ω está formada por Ω_m , en un rango de 0.2 a 0.4 y Ω_Λ con uno de 0.6 a 0.8 para un universo plano. Como consecuencia de estas observaciones es que se cree en la posible existencia de una densidad de energía oscura, lo cual tendría importantes consecuencias sobre la dinámica del universo.

Las observaciones de supernovas [10,11] con alto corrimiento al rojo proporcionan un método para determinar si el universo se expande aceleradamente. Este consiste en comparar la relación entre la distancia (calculada a partir del inverso de la magnitud aparente) con el corrimiento al rojo, para supernovas lejanas frente a la misma relación para supernovas cercanas. Esto se hace mediante un parámetro d/z con d = distancia y z = corrimiento al rojo. Si una estrella lejana presenta un valor mayor para este cociente que el encontrado en las cercanas quiere decir que ha habido una aceleración positiva, puesto que el universo se expandió con menor velocidad en tiempos pasados. Lo anterior es debido a que la luz proveniente de una supernova con z mayor partió de la fuente en un pasado más lejano. Las distancias “ d ” encontradas por uno de los grupos que se han dedicado a recopilar este tipo de datos son 10 a 15% mas grandes de lo que se esperaba en un universo con densidad de materia correspondiente a $\Omega_m = 0.2$ sin presencia de la energía oscura. Los resultados encontrados por otro grupo restringen los valores tanto de Ω_m como de Ω_Λ , lo cual se ve en la siguiente figura:



Las observables cosmológicas determinan el estado del universo para distintas etapas, sin embargo, no todas las observaciones encuentran explicación en el modelo estándar de la cosmología. Este tiene en su haber importantes logros, ya que explica de manera elegante varias de las características del universo, pero fracasa en la explicación de algunas cuestiones, entre las que se encuentran:

Problema de la curvatura: Como ya se mencionó el universo es casi plano en el sentido de que $\Omega = 1 \pm 0.02$, de tal forma, que de acuerdo a la ecuación de Friedmann (ver adelante) Ω se puede escribir en términos de la contribución de varias componentes:

$\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_{bm} + \Omega_{dm}$. Donde la contribución de la energía oscura Ω_Λ , es del orden de 0.7, y la de la materia se divide en dos: la de la materia barionica: Ω_{bm} con un 0.05, y la de la materia oscura (materia que solo se detecta por sus efectos gravitacionales sobre la materia visible) con un: 0.25.

Dado que la curvatura k y Ω , están relacionadas en la forma: $k \approx |\Omega - 1|$, lo anterior implica que para etapas iniciales del universo, del orden del tiempo de Planck ($t_p \approx \frac{1}{M_p}$) se debió haber

cumplido que: $|\Omega - 1| < 10^{-59}$. El modelo estándar no puede explicar esta gran similitud entre la densidad inicial y la crítica, que hace esencialmente a $k=0$, y restringe el universo a ser plano.

Problema del horizonte: La isotropía del universo reflejada por el fondo cósmico de microondas resulta un problema, pues implica que el universo era homogéneo e isotrópico con fluctuaciones menores a una parte en 10^5 cuando su edad era de aproximadamente 10^5 años. Las regiones observables que estaban causalmente desconectadas en ese momento eran de unas 10^6 , por lo cual es difícil de explicar la similitud que existió entre regiones que no pudieron haber interactuado. Las regiones desconectadas casualmente se encuentran separadas por una distancia llamada horizonte causal, que puede tomarse a grosso modo como proporcional a t , de allí el nombre de este problema.

Problema de la homogeneidad: Por las observaciones astronómicas se sabe que el universo a gran escala (10^3 Mpc) es sumamente homogéneo, sin embargo en otras escalas se encuentran inhomogeneidades como las estrellas, las galaxias, o los cúmulos de galaxias, etc. Las teorías de formación de estructuras requieren que las semillas de las estructuras de hoy en día, hayan sido las fluctuaciones de la materia en las primeras etapas del universo. El modelo estándar de la cosmología no da ninguna explicación del origen de estas inhomogeneidades.

Problema de la asimetría barionica (bariogénesis): El modelo estándar no puede explicar por qué en apariencia existe un exceso de materia sobre antimateria, ya que en principio se podría esperar que se diera un equilibrio en términos de la densidad, a diferencia de lo que se ve, que la materia constituye casi completamente el total de la densidad barionica. En particular entra en este punto la dificultad para explicar la desproporción entre el número de bariones y el número de fotones:

$$\frac{n_b}{n_\gamma} \approx 10^{-9}.$$

El problema de la cuantización de la gravitación: se refiere a la imposibilidad de desarrollar una teoría cuántica consistente de la gravedad..

Problema de la materia oscura: Se refiere a materia que solo se detecta por su fuerza gravitacional sobre la materia visible. Se sabe a partir de la sonda WMAP que la materia oscura contribuye con un 25% a la densidad de energía del universo. El 5% con que la materia barionica contribuye a la densidad crítica, no puede explicar la cinemática de galaxias y grupos de galaxias, y por lo tanto se tiene que agregar un componente de masa al que se llama materia oscura. Existen varios candidatos para esta materia, uno de ellos es que sea la partícula supersimétrica más ligera.

Problema de la energía oscura: Como ya se mencionó observaciones recientes de corrimiento al rojo de las supernovas han producido un giro inesperado en la idea que se tenía de la evolución del universo.

Las investigaciones de hace unos años sugerían una desaceleración en la expansión cósmica, sin embargo la nueva evidencia observacional indica una expansión acelerada del universo. Una constante cosmológica efectiva o un campo escalar variable en el tiempo son las principales propuestas para esta energía

SECCION 1-2 REVISION DE COSMOLOGIA ESTÁNDAR.

Se parte del hecho de que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico. El soporte observacional para esta observación se basa principalmente en el alto grado de isotropía de la radiación de fondo. Bajo estas condiciones, la evolución del universo esta determinada por la métrica de Friedmann, Robertson, Walker (F.R.W) [82], la cual puede escribirse en la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1-1).$$

en donde t es la coordenada temporal; r, θ, ϕ ; son las coordenadas espaciales comóviles, $a(t)$ es el factor de escala y el parámetro discreto k es la constante de curvatura del espacio, que puede tomar los valores: -1, 0, o 1; los cuales determinan si el universo es abierto, plano, o cerrado respectivamente. Las perturbaciones del fondo cósmico de microondas (CMB) indican que el universo es plano de tal forma que se considerará el caso $k=0$.

El factor de escala $a(t)$ queda determinado a través de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales determinan la geometría del espacio- tiempo, al relacionarla con el tensor de energía momento generado por los campos presentes en el universo y tiene la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R \equiv 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1-2)$$

donde: $G_{\mu\nu}$, es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G es la constante universal de Newton con un valor de $G = 6.673 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2}$ en el sistema SI o de 1 en el sistema geometrizado, y finalmente $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento.

El tensor de energía momento que se considera usualmente corresponde al de un fluido perfecto, el cual cumple con las condiciones que se aplican en el universo, pues presenta las mismas simetrías que la métrica y es isotrópico en las coordenadas espaciales. Este tensor estará definido por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} P, \quad (1-3)$$

en donde $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la cuadrivelocidad de las partículas, ρ y P, son la densidad de energía y la presión del fluido que llena el universo.

En el marco propio de cada elemento de fluido las componentes diferentes de cero son: $T_{00} = \rho$, y $T_{ij} = P g_{ij}$, donde ρ y P, satisfacen una ecuación de estado de la forma:

$$P = w\rho, \quad (1-4)$$

donde w, es un parámetro el cual para muchos casos interesantes es una constante que describe el tipo de fluido que domina en el tensor de momento energía, estando definido por la microfísica de los constituyentes de este. Así se puede ver que $w = 1/3$, representa un comportamiento tipo radiación, $w=0$, será el correspondiente a la materia tipo polvo, y $w= -1$, a la energía del vacío. Es importante aclarar que w puede también depender del tiempo, ya que es probable que el universo sea dominado por distintos tipos de materia, con $w \neq 0, 1/3$ en diferentes etapas o que algunos de estos presente una w cambiante.

A partir de la métrica (1-1), las ecuaciones de campo son:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (1-5)$$

ecuación de Raychaudury,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (1-6)$$

ecuación de Friedmann,
 en la cual ya se tomo en cuenta que para un universo plano $k=0$,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (1-7)$$

primera ley de la termodinámica.

donde $\rho = \sum \rho_i$, $P = \sum P_i$, con i = materia, radiación, vacío, etc. Usando la ec. (1-4), la primera ley ec (1.7), se integra para obtener:

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3(1+w)} \quad (1-8)$$

Para energía oscura, $w = -1$ y por lo tanto:

$$\rho = \text{constante}. \quad (1-8a)$$

Para la materia, $w = 0$ y

$$\rho \cong \frac{1}{a^3}. \quad (1-8b)$$

Para radiación como ya se mencionó, $w = 1/3$ y

$$\rho \cong \frac{1}{a^4}. \quad (1-8c)$$

Nótese de la ec. (1-5) que el requisito para tener una expansión acelerada es que se satisfaga:

$$\rho + 3P < 0, \quad (1-9)$$

y para tener aceleración negativa:

$$\rho + 3P > 0. \quad (1-9a)$$

La densidad crítica esta definida por:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1-10)$$

La cual para el valor actual de $H_0 = 100h_0 \frac{km}{segMpc}$, da un valor de: $\rho_c = 8.0992 h^2 \times 10^{-47} Gev^4$
 $\cong 1.8791h^2 \times 10^{-29} g cm^{-3}$

Como ya se mencionó, esto permite definir un parámetro adimensional Ω , el cual se expresa como la razón de la densidad de energía de un sistema a la densidad crítica.

De estas definiciones es posible reescribir a la ec (1-6) como

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1, \quad (1-11)$$

donde $\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}$, donde “i” denota las diferentes contribuciones a la densidad de energía.

SECCION 1-3 DINAMICA DEL CAMPO ESCALAR

En el formalismo lagrangiano de la teoría de campos para un campo escalar $\phi(t, x)$ real, con potencial de autointeracción $V(\phi)$, y que solamente está acoplado gravitacionalmente a los otros campos, se tiene la densidad lagrangiana $\mathfrak{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$.

En el caso de un campo espacialmente homogéneo

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1-12)$$

Mientras que la integral de acción para este caso esta dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathfrak{L} \quad (1-13)$$

donde para el caso de una métrica de F. R.W, se tiene que: $\sqrt{-g} = a^3$.

A partir de los principios variacionales es posible deducir a partir de (1-12) la siguiente ecuación del campo ϕ

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (1-14)$$

EL tensor de energía momento se determina de

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathfrak{L} \quad (1-15)$$

La sustitución de (1-12) en (1-15), escogiendo el marco propio del observador lleva a:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1-16a)$$

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1-16b)$$

La sustitución de las ecuaciones (1-16a) y (1-16b), en la ecuación (1-9) lleva de inmediato a que $\dot{\phi}^2 < V$, como la condición que se debe satisfacer para que el campo ϕ genere antigravedad.

Finalmente, la ecuación de estado se puede escribir en términos del campo y su derivada temporal como:

$$w = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (1-17)$$

Para el caso en que $V(\phi) = \text{constante}$, la energía cinética es cero y ello es equivalente a tener una constante cosmológica con $w = -1$ y una ecuación de estado de la forma: $P_\phi = -\rho_\phi$ correspondiente a un universo cuyo tensor de energía momento es del tipo asociado a la energía oscura (modelo de de Sitter).

SUBSECCION 1.3.A EL CAMPO ESCALAR COMO QUINTAESNCENCIA

Como ya se mencionó la razón que lleva a considerar un término de energía oscura es la aparente aceleración actual del universo. Para que esta dinámica sea posible es necesaria la inclusión, en el modelo cosmológico de un factor que presente presión negativa. Un campo de quintaesencia ϕ está definido como uno que tiene dependencia temporal, i.e, es espacialmente homogéneo, interactúa solo de forma gravitacional con los demás campos presentes en el universo y evoluciona según el potencial $V(\phi)$, además deberá presentar una presión negativa (o sea un

parámetro $w_\phi < 0$). Un candidato para dar identidad a la quintaesencia es un campo escalar ϕ , que evoluciona según la ecuación (1-14) ya que como se mencionó antes, puede contribuir de tal manera que se de la expansión acelerada del universo a condición de que, satisfaga la condición que $\dot{\phi}^2 < V$. A continuación se explora la posibilidad de que desempeñe el mismo papel si además el universo está lleno de algún fluido barotrópico (materia, radiación o una mezcla de los dos).

SUBSECCION 1.3.B ECUACIONES PARA QUINTAESENCIA

Los modelos de quintaesencia deberán obedecer las ecuaciones de movimiento (1-5, 1-6 y 1-7), así como la ecuación del campo escalar (1-14), más la restricción de Friedmann de un universo plano. Dada la dificultad de resolver de manera analítica el sistema de ecuaciones anterior, a continuación se expresa en forma de un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden, de tal manera que las soluciones sean fácilmente visualizadas en el espacio fase (el resto de la sección se basa especialmente en la referencia [4]). Lo anterior se logra por medio de las sustituciones:

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6H}} \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3H}}. \quad (1-18)$$

La restricción de Friedmann para un universo plano está dada por:

$$\frac{\rho_\gamma}{3H^2} + x^2 + y^2 = 1, \quad (1-19)$$

en donde $\rho_\gamma = \rho_m + \rho_{rad}$ es la densidad de un flujo barotrópico que llena el universo, sea este radiación o materia o una mezcla de las dos.

A partir de (1-18) y recordando que $\rho_c \equiv 3H^2$, es posible escribir a Ω_ϕ en términos de las variables x , y como:

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 \quad (1-20)$$

la cual a partir de (1-19) satisface la restricción $\Omega_\phi \leq 1$.

También es práctico tomar la dependencia del número de e- folds, mediante el cambio de variable $N = \ln a$, y expresar al sistema en términos de N . Las ecuaciones que resultan de estas sustituciones son:

$$x_N = -3x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + x \frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2), \quad (1-21)$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda yx + y \frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2), \quad (1-22)$$

$$H_N = -H \frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (1-23)$$

en donde $\lambda(N) \equiv -\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}$, $x_N = \frac{dx}{dN}$, $y_N = \frac{dy}{dN}$, $H_N = \frac{dH}{dN}$, mientras que $\gamma_\gamma = 1 + w_\gamma$ da la

ecuación de estado para ρ_γ y P_γ .

Se ha mencionado que la condición para tener un universo con expansión acelerada es que se cumpla la condición (1-9). Es conveniente ahora definir el parámetro de aceleración:

$$\alpha \equiv \frac{\rho + 3P}{(3\gamma_\gamma - 2)\rho} = \frac{3\gamma_\gamma - 2}{3\gamma_\gamma - 2}, \quad (1-24)$$

cuya construcción muestra la comparación entre las cantidades $\rho + 3P$ y $\rho_\gamma + 3P_\gamma$, en donde $\rho = \rho_\phi + \rho_\gamma$. Esto con el fin de saber si el universo sufre una aceleración positiva ($\alpha < 0$), una negativa de menor magnitud que la del fluido barotrópico ($0 < \alpha < 1$), una negativa con mayor magnitud ($\alpha > 1$), o una aceleración idéntica a la del fluido barotrópico ($\alpha = 1$). En términos de $\Omega_\phi, \gamma_\gamma$ y γ_ϕ el parámetro α esta dado por

$$\alpha = 1 - 3\Omega_\phi \frac{\gamma_\gamma - \gamma_\phi}{3\gamma_\gamma - 2}. \quad (1-25)$$

Observando el sistema de ecuaciones diferenciales mencionado es claro que los diferentes modelos posibles dependen solo de λ y la constante γ_γ . Para un potencial arbitrario V , se ve que en general se trata de un sistema no lineal muy complicado, y sin soluciones analíticas. Para obtener información de la evolución dinámica del campo escalar resulta útil el estudio del limite asintótico, para lo cual se obtienen los puntos críticos del sistema: (1-21), (1-22) y (1-23), para el caso en que λ es constante, los puntos críticos se obtienen de la condición de que: $x_N = 0, y_N = 0, H_N = 0$, de tal forma que:

$$(x,y) = (0,0), (1,0), (-1,0), \left(\frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}} \right) \text{ y } \left(\frac{\gamma_\gamma}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{3(2-\gamma_\gamma)\gamma_\gamma}}{2\lambda^2} \right). \quad (1-26)$$

Para la situación general en donde λ depende de N , los puntos críticos anteriores serán importantes en el límite asintótico donde $\lambda(N)$ se aproxima a un valor determinado. De hecho se hablara del comportamiento del sistema dependiendo del valor asintótico de $\lambda(N)$, para épocas tardías, quedando tres casos que se explican como se hace en [4]:

* $\lambda \rightarrow$ constante

Los potenciales que presentan $\lambda = c$ tienen la forma: $V = be^{-c\phi}$, donde b y c son constantes. En este caso resulta que las tres primeras soluciones de (1-26), son inestables, mientras que las otras dos son estables bajo ciertas condiciones:

El cuarto punto requiere que $\lambda^2 < 6$, y el comportamiento del sistema en esta situación es tal que $\Omega_\phi = 1$ para tiempos tardíos. Esto significa que el campo escalar termina por dominar y abre la

posibilidad a una posible expansión acelerada, la cual dependerá del valor de $\gamma_\phi = \frac{\lambda^2}{3}$ según la ecuación (1-24).

El quinto punto critico requiere que $\lambda^2 > 3\gamma_\gamma$, originando que en este caso $\Omega_\phi = \frac{3\gamma_\gamma}{\lambda^2}$ y $\gamma_\gamma = \gamma_\phi$ en etapas tardías. Al tener una ecuación de estado equivalente a la del fluido barotrópico el campo escalar no puede ser causante de un a expansión acelerada. [4,12].

* $\lambda \rightarrow 0$. Los potenciales que satisfacen esta condición son los del tipo $V = a\phi^{-n}$, con $n > 0$. Al analizar el sistema formado por las ecuaciones: (1-21), (1-22) y (1-23) en el limite en que λ es muy pequeña, se ve que los términos asociados a esta son despreciables y por lo tanto se satisface:

$-3 < \frac{H_N}{H} < 0$, para todos los valores de x, y, γ_γ lo cual lleva a:

$$\frac{x_N}{x} = -\left(3 + \frac{H_N}{H}\right) < 0, \quad (1-27)$$

$$\frac{y_N}{y} = -\frac{H_N}{H} > 0. \quad (1-28)$$

estas ecuaciones implican una evolución de x hacia el mínimo $x=0$, y de y hacia su máximo $y=1$. Entonces se tiene que $\Omega_\phi \rightarrow 1$, por lo tanto el campo termina por dominar para tiempos grandes.

Así mismo se encuentra que para este mismo régimen ($\lambda \ll 1$), el parámetro de aceleración

$$\alpha = -\frac{2}{3\gamma_\gamma - 2},$$

es siempre negativo, lo cual lleva a una expansión acelerada del universo.

* $\lambda \rightarrow \infty$. Se divide para su estudio en dos casos: oscilante y no oscilante

λ No oscilante

En este caso los términos dominantes son los proporcionales a λ , de tal forma que el sistema se reduce a:

$$x_N = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2, \quad (1-29)$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda yx, \quad (1-30)$$

de donde se ve que, para $|x|$ y $|y|$ no muy pequeños, el signo de λ determinara la dirección del cambio en x , ($\lambda > 0 \rightarrow x_N > 0$ y $\lambda < 0 \rightarrow x_N < 0$). En ambos casos el signo de y_N es negativo, por lo que $y \rightarrow 0$, lo cual en algún momento causara que la simplificación que se hizo a las ecuaciones (1-21) y (1-22) deje de ser válida.

Del mismo sistema se ve que la evolución de x en la región en donde $|x| \geq |\lambda|y^2$, esta dada por:

$$\frac{x^N}{x} = -\left(3 + \frac{H^N}{H}\right) < 0,$$

por lo que se aproximara a su valor mínimo absoluto $x \rightarrow 0$, del mismo modo que lo hace y .

Esta región se conoce como región de escalamiento, y se caracteriza por que los valores de x , y y λ , son casi constantes. El final de esta región es cuando y^N/y cambia de signo y se vuelve positivo, esto sucede cuando $\sqrt{3/2}\lambda x + H^N/H \cong 0$, con $H^N/H \cong -3\gamma_\lambda/2$. Después de un breve incremento x y y se aproximaran a los valores (x_c, y_c) dados por el quinto punto crítico de los mencionados en la ecuación (1-26), y terminaran acercándose a sus valores extremos $x=y=0$. Es importante recalcar que por su dependencia de λ , x_c y y_c no son en realidad puntos críticos constantes, puesto que λ no lo es. Las energías cinética y potencial del campo escalar decrecerán más rápido que ρ , es decir que la materia o la radiación ordinarias. Es de interés observar que aunque x , y se aproximan a cero la ecuación de estado del campo escalar se aproxima a una constante, esto es así por que x y y decrecen a la misma rapidez, esto lleva a que γ_ϕ se aproxime al valor de γ_γ , lo cual generara una dinámica en la que el universo evolucionara sin aceleración positiva.

Este tipo de potenciales (por ejemplo $V = e^{-a\phi^2}$ o $V = e^{-ae^\phi}$) hacen que el parámetro de aceleración se aproxime, después de poco tiempo a uno, indicando que se da una evolución similar a la que se da cuando el campo escalar no esta presente.

* λ Oscilante

Los potenciales que se encuentran en esta categoría son tales que es posible hacer una expansión en serie de potencias de ϕ alrededor del mínimo (el que se puede tomar en $\phi = 0$, sin pérdida de generalidad). Al retener el término dominante es claro que $V = V_i \phi^n$, en donde n es la menor potencia de la serie y debe ser un número par positivo para que el potencial sea acotado por abajo y su derivada sea cero en el mínimo. Entonces $\lambda = -\frac{n}{\phi}$ oscila entre $-\infty$ y ∞ debido a la

oscilación de ϕ alrededor de cero. En el límite asintótico se tiene que $H \approx \frac{1}{t}$, por lo que, para tener

una Ω_ϕ constante, los parámetros $x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6H}}$ y $y = \frac{\phi^{n/2}}{\sqrt{3H}}$ deben ser tales que: $\dot{\phi}$, $\phi^{n/2} \approx \frac{1}{t}$ para

que x y y sean constantes u oscilen. Entonces es posible escribir $y = BF_1^{n/2}[G(t)]$ y $x = AF_2[G(t)]$, en donde F_1 y F_2 son funciones oscilatorias arbitrarias, que dependen del tiempo mediante un argumento desconocido $G(t)$; A y B son constantes. Calculando las derivadas con respecto a N se obtiene:

$$x_N = \frac{dF_2}{dG} \frac{G_N}{F_2} x \quad (1-31)$$

$$y_N = \frac{n}{2} \frac{dF_1}{dG} \frac{G_N}{F_1} y \quad (1-32)$$

en donde el subíndice N significa diferenciación con respecto a N.

Debido a la naturaleza oscilatoria de F_i ($i = 1, 2$) se tiene que su promedio temporal se expresa por

$$\langle F_i^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{dF_i}{dG} \right)^2 \right\rangle \quad (\text{donde } \langle \rangle, \text{ denota el promedio temporal}).$$

Del mismo modo para x y y :

$$\langle y_N^2 \rangle = \frac{n^2}{4} \langle G_N^2 y^2 \rangle \quad (1-33)$$

$$\langle x_N^2 \rangle = \langle G_N^2 x^2 \rangle \quad (1-34)$$

En el límite asintótico en que $\lambda \rightarrow \infty$, se pueden utilizar las ecuaciones (1-29) y (1-30) junto con el resultado anterior para obtener:

$$\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} = \frac{2}{n}, \quad (1-35)$$

de donde:

$$\langle \gamma_\phi \rangle = \frac{2}{1 + \frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle}} = \frac{2n}{2+n}. \quad (1-36)$$

De aquí, el comportamiento asintótico de Ω_ϕ es tal que para $\gamma_\phi > \gamma_\gamma$, se tiene $\Omega_\phi \rightarrow 0$, para $\gamma_\phi < \gamma_\gamma$, se tiene que $\Omega_\phi \rightarrow 1$ y si $\gamma_\phi = \gamma_\gamma$ entonces $\Omega_\phi \rightarrow \text{constante}$ (con $0 < \text{constante} < 1$). Es interesante observar que un campo cuyo potencial posee $n = 2$, evolucionara como materia ($\gamma_\phi = 1$), y con uno en el que $n=4$ lo hará como radiación ($\gamma_\phi = 4/3$).

La condición sobre γ_ϕ para una expansión acelerada según el parámetro α , en términos de Ω_ϕ , γ_γ y γ_ϕ (1-25), es

$$\gamma_\phi < \gamma_\gamma - \frac{\gamma_\gamma - 2/3}{\Omega_\phi}. \quad (1-37)$$

Se ve que si $\Omega_\phi = 1$, se tendrá la restricción: $\gamma_\phi < 2/3$.

De lo anterior se concluye que en el caso de una λ oscilatoria, serán los parámetros Ω_ϕ , γ_γ y γ_ϕ , quienes darán la posibilidad de un universo en expansión acelerada según la relación (1-37).

SECCION 1-4 INTRODUCCION A CUERDAS Y BRANAS

La teoría de cuerdas afirma que los constituyentes fundamentales de la naturaleza no son partículas puntuales de dimensión cero, sino diminutos filamentos unidimensionales vibratorios llamados cuerdas (alrededor de 10^{20} veces más pequeñas que un protón). En esta imagen, cada partícula corresponde a una resonancia distinta de una cuerda que vibra sólo a una frecuencia característica, de tal modo que las propiedades observadas como su masa surgen del hecho de que la cuerda respectiva está sometida a un modelo resonante de vibración concreto, sin embargo en teoría de cuerdas las partículas del modelo estándar tienen modos de vibración cero porque los modos de vibración están cuantizados en términos de la masa de Planck, es decir 10^{18} GeV.

Otro hecho notable es que la teoría de cuerdas puede explicar no solo la naturaleza de las partículas sino también el número de dimensiones del espacio, resulta que la compatibilidad de la teoría de cuerdas con la mecánica cuántica prohíbe que la cuerda se mueva en tres dimensiones espaciales (a diferencia de las partículas puntuales) sino que sólo puede hacerlo en diez o en veintiséis dimensiones. En el primer caso deberán vibrar en nueve dimensiones espaciales es decir diez en total, a estas cuerdas se les conoce como supercuerdas. Se les llama así por que la teoría incluye el concepto de supersimetría que establece que por cada modo fermiónico hay uno bosónico y viceversa, lo que significa que los modos fermiónicos y bosónicos aparecen por pares (superparejas). En el segundo caso se trata de la primera teoría basada en el concepto de cuerda (que no incluía la supersimetría) y se llama teoría de cuerdas bosónicas. La palabra bosónica indica que todos los modos de vibración de la cuerda tienen valores de espín que son números enteros (no existen modos fermionicos), esta versión de la teoría requiere de 25 dimensiones espaciales. En la actualidad se conocen cinco teorías de supercuerdas a saber (ver la sección 1.4.A) de los tipos I, IIA, IIB, así como las teorías heteróticas E ($E_8 \times E_8$) y heterótica O (SO (32)). Más recientemente se tiene la llamada teoría M que une las cinco teorías de cuerdas anteriores dentro de un único marco que las abarca a todas. (Ver la sección (1.4.A) para una breve introducción matemática de las cuerdas y la sección (1.4.C) para una descripción introductoria de la relación entre las diferentes teorías de cuerdas).

La idea de que el universo pudiera tener dimensiones espaciales extras se remonta al trabajo de Kaluza quien asumiendo que existe una dimensión espacial adicional hizo una extensión al desarrollo de las ecuaciones de Einstein para un universo de cuatro dimensiones espaciales, encontró un marco elegante para unificar la gravedad y la teoría electromagnética.

Si bien es cierto los primeros creadores de la teoría de cuerdas asumen que las dimensiones espaciales adicionales eran enrolladas y pequeñas (del orden de la longitud de Planck 10^{-33} cms), los más recientes sugieren que las cuerdas abiertas (incluyendo a las partículas del modelo estándar y a los campos de gauge) están confinados a hipersuperficies llamadas branas, mientras que el resto del espacio se le conoce como el bulto (las dimensiones extras); sólo las cuerdas cerradas incluyendo a la gravedad, y otros campos como el dilatón pueden propagarse en el bulto.

A continuación se formaliza en las diferentes características de la teoría de cuerdas, que permiten profundizar en sus límites y especulaciones, como lo referente a la teoría M.

SUBSECCION 1.4.A CUERDAS

Se comienza por simplicidad con la acción clásica de la cuerda bosónica, y posteriormente la discusión se extiende a las distintas teorías de cuerdas [15].

La acción de una cuerda puede ser descrita en base al área que barre sobre el espacio tiempo:

$$S = T_C \int d\sigma d\tau \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2}, \quad (1-38)$$

donde (τ, σ) representan las coordenadas de la superficie barrida (también llamada hoja de mundo); y

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \tau}, \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma}. \quad (1-39)$$

Si D es la dimensión del espacio tiempo, entonces $\mu = 0, \dots, D-1$. De esta manera, el índice μ de los campos X^μ sería visto desde las dos dimensiones que describe la acción (1-38), como representando dimensiones internas y no del espacio tiempo. Introduciendo una nueva variable $h^{\alpha\beta}$ (con $\alpha, \beta = 1, 2$), que corresponde a la métrica de la superficie descrita por la cuerda en el espacio tiempo, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$S = -T_C/2 \int d\sigma d\tau \sqrt{h} h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (1-40)$$

que se puede identificar con la acción de un campo escalar en dos dimensiones. Aquí \sqrt{h} es la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante de $h^{\alpha\beta}$ y $G_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo. A partir de la acción anterior es posible obtener la ecuación de constricción de Euler Lagrange para $h^{\alpha\beta}$:

$$G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - 1/2 h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} G_{\mu\nu} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X^\nu = 0, \quad (1-41)$$

de donde se puede resolver para h y sustituir en (1-40), para recuperar la acción (1-38). Es importante mencionar que aunque la equivalencia entre las acciones (1-38) y (1-40) se da a nivel clásico, el uso de (1-41) ha permitido extenderla a nivel cuántico.

La constante T_C que aparece en la acción (1-38), es de gran importancia: resulta ser el único parámetro libre de la teoría de cuerdas y permite que la expresión sea adimensional. En el caso en que se utilice la convención: $c = \hbar = 1$, T_C tiene dimensiones de $(\text{longitud})^{-2}$, y por lo mismo está asociada con la tensión de la cuerda. Al definir una nueva variable α' que tiene dimensiones de $(\text{longitud})^2$, y que es inversamente proporcional a la tensión de la cuerda ($\alpha' = 1/(2\pi T_C)$), se puede fijar dicho parámetro libre al pedir que:

$$\alpha' \approx l_p^2 \quad (T_C \approx m_p^2) \quad (1-42)$$

donde m_p y l_p son la masa y la longitud de Planck. Esto se hace para poder recuperar la relatividad general de Einstein.

Otra cosa importante es que la acción (1-40) en verdad corresponde a una cuerda, para verlo se nota que la ecuación del movimiento de la acción (1-38) para el campo X^μ esta dada por

$$\partial_\alpha \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu = 0, \quad (1-43)$$

véase que si se escoge la métrica $h^{\alpha\beta}$ como la de Minskowski, la ecuación anterior se reduce a una simple ecuación de onda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = 0, \quad (1-44)$$

que corresponde por supuesto a la ecuación de la cuerda mencionada.

Otro rasgo interesante surge al recordar que para la obtención de la ecuación de Euler-Lagrange del campo X^μ se consideran las variaciones del tipo: $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$. Sin embargo al tomar estas variaciones en la acción se encuentran dos términos: uno que es proporcional a la ecuación (1-43), y el otro que es un término de superficie, cuya nulidad depende de la siguiente condición

$$\delta X^\mu \partial_n X^\mu \Big|_{\sigma=\pi} - \delta X^\mu \partial_n X^\mu \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad (1-45)$$

donde ∂_n es la derivada normal a la frontera de la hoja de mundo. Como ya se mencionó las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas, y esto depende de cómo se cumple la condición a la frontera (1-45). En el caso de las cuerdas cerradas, la condición de periodicidad en la cuerda se expresa como:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi), \quad (1-46)$$

la cual cumple con (1-45). Como se sabe, la ecuación de onda (1-44) tiene soluciones consistentes con la condición de periodicidad (1-46), que pueden viajar hacia la izquierda o hacia la derecha y cuyos modos son independientes. Así que se puede escribir la solución de la ecuación de onda para X^μ como la suma de dos partes independientes, una derecha X_D^μ y una izquierda X_I^μ

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_D^\mu(\tau - \sigma) + X_I^\mu(\tau + \sigma). \quad (1-47)$$

De este modo, la solución más general de la ecuación de onda (1-44), para el caso de cuerdas cerradas es:

$$\begin{aligned} X_D^\mu(\tau - \sigma) &= 1/2 x^\mu + 1/2 \alpha' p^\mu (\tau - \sigma) + i/2 \sqrt{\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \xi_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \\ X_I^\mu(\tau + \sigma) &= 1/2 x^\mu + 1/2 \alpha' p^\mu (\tau + \sigma) + i/2 \sqrt{\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\xi}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \end{aligned} \quad (1-48)$$

donde ξ_n^μ son coeficientes de Fourier de los modos de oscilación de la cuerda; x^μ y p^μ son la posición y el momento que definen el centro de masa de la cuerda, y los términos sucesivos son los modos de vibración de la cuerda. Es fácil ver que se cancelan los términos lineales sobre σ al efectuar la suma $X^\mu(\tau, \sigma) = X_D^\mu(\tau - \sigma) + X_I^\mu(\tau + \sigma)$, por lo tanto se cumple la condición de periodicidad (1-46).

Para el caso de las cuerdas abiertas, resulta que la condición de restricción (1-45) es satisfecha por cualquiera de las condiciones de frontera (Neumann):

$$\partial_n X^\mu = 0 \quad (1-49)$$

o Dirichlet

$$\delta X^\mu = 0, \quad (1-50)$$

para ambos extremos de la cuerda (i.e. $\sigma = 0, \pi$). Sin embargo en este caso los modos izquierdos y derechos no son linealmente independientes y por el contrario se combinan para formar modos estacionarios. Las condiciones de Neumann respetan la invarianza de Poincare y conservan el momento. Las condiciones de Dirichlet, por otro lado, describen defectos espaciotemporales como se verá mas adelante al hablar sobre las Dp-branas.

La solución para cuerdas abiertas con condiciones de Neumann (1-49) está dada por:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \sqrt{\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \xi_n^\mu e^{-2in\tau} \cos(n\sigma). \quad (1-51)$$

Cuando se cuantizan los diferentes armónicos de las fluctuaciones de las cuerdas, se desprenden un número finito de modos sin masa, además de un número infinito de modos masivos; cuya masa para las cuerdas abiertas está dada por [15]:

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{-n} \cdot \xi_n + A, \quad (1-52)$$

y para las cuerdas cerradas

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{-n} \cdot \xi_n + \bar{\xi}_{-n} \cdot \bar{\xi}_n) + A, \quad (1-53)$$

donde A es una constante de orden dada por el valor de

$$A = -1, \quad (1-54)$$

el parámetro α' es inversamente proporcional a la tensión de la cuerda

$$\alpha' = 1/2\pi T_c. \quad (1-55)$$

Como se ve en las ecuaciones anteriores, la masa es inversamente proporcional a $\sqrt{\alpha'}$ y de (1-42) se obtiene un espectro de masas para las cuerdas abiertas o cerradas del orden de la masa de la masa de Planck m_p , lo cual hace que los modos masivos sean de magnitudes tan grandes, como para no ser detectados a las energías que se alcanzan hoy en día.

Por otro lado, en los estados sin masa se encuentran partículas con espín dos, que a su vez se encuentran acoplados a la materia. Debido a la aparición de estas partículas en el espectro y a que en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas se recupera la relatividad general de Einstein, la teoría de cuerdas contiene y cuantiza a la gravedad.

Uno de los problemas más serios que enfrenta la teoría de cuerdas bosónicas que se acaba de describir es que el estado de mínima energía resulta ser un taquión ($m^2 < 0$), por lo que la energía no está acotada por debajo. Para resolver este problema se introducen campos fermiónicos de tal forma que el lagrangiano resultante sea supersimétrico. Debido a estos campos extra, la dimensión crítica es de diez, y ahora el estado de mínima energía es cero (ver el capítulo 2).

Al incorporar estos campos fermiónicos surge otra condición de frontera similar a (1-45). Sin entrar en más detalles, en las cuerdas abiertas existen dos posibles configuraciones que satisfacen la condición de frontera, y que dan lugar a dos posibles sectores: uno periódico llamado Neveu-Schwarz (NS), y otro antiperiódico denominado Ramond (R). En el caso de las cuerdas cerradas, dado que las soluciones Fermiónicas izquierdas y derechas también son independientes, se tiene cada uno de los sectores de la cuerda abierta para ambos lados (izquierdo y derecho) de la cuerda cerrada, es decir se tienen cuatro diferentes sectores: NS-NS, NS-R, R-NS y R-R. En las teorías de cuerdas IIA y IIB, los campos no masivos de los sectores NS-R y R-NS son fermiónicos y son iguales en ambas teorías. Por otro lado, los sectores NS-NS y R-R representan campos bosónicos.

En el caso del sector NS-NS, para ambas teorías (IIA y IIB), los campos no masivos son un escalar, un tensor de dos índices simétrico y otro antisimétrico. Sin embargo, para el sector R-R cada teoría tiene diferentes campos no masivos: para la teoría IIA se tiene una uno-forma y otra tres-forma; mientras que la teoría IIB contiene un escalar (distinto al del sector NS-NS), una dos-forma y otra cuatro-forma.

Tipos De Cuerdas

Como ya se dijo existen cinco diferentes teorías de cuerdas. El llamado tipo I es el único de cuerdas abiertas, y como se mencionó, sus soluciones izquierda y derecha no son linealmente independientes. Sin embargo las cinco teorías de cuerdas mencionadas tienen cuerdas cerradas, y tienen soluciones derecha e izquierda linealmente independientes.

Dentro de las cuerdas cerradas se encuentran las del tipo IIA y el IIB, y se diferencian principalmente en la manera en que se trata al sector fermiónico.

Las dos cuerdas restantes equivalen a un tipo diferente, el de las cuerdas heteróticas. Son cuerdas donde la parte izquierda (por convención) es del tipo bosónica, es decir viven en un espacio de 26 dimensiones, y la parte derecha (es decir los modos de oscilación derechos) es una supercuerda, viven en un espacio de 10 dimensiones. La diferencia de dimensiones anterior se puede entender de la siguiente manera: en la solución izquierda, cuya dimensión crítica es de 26, las 10 primeras dimensiones son de espacio tiempo y son las mismas que en la parte supersimétrica. Las 16 dimensiones restantes pueden concebirse como provenientes de un espacio interno (para entenderlo mejor se puede pensar en la acción para la cuerda del tipo (1-38), donde el índice de los campos X^μ representan una dimensión interna más la del espacio tiempo). De esta manera, los únicos dos grupos que son consistentes con esta idea de la cuerda heterótica son el grupo de norma $SO(32)$ y el $E_8 \times E_8$.

SUBSECCION 1.4. B BRANAS

Son objetos más generales que las cuerdas, y se les denomina p-branas, donde p es la dimensión espacial de los mismos. Siguiendo esta nomenclatura una partícula sería una 0-brana, una cuerda una 1-brana, una 2-brana describiría una membrana, y así sucesivamente.

De la misma manera que las partículas pueden estar cargadas ante la fuerza electromagnética, estos objetos extendidos pueden estar cargados ante los tensores antisimétricos de los sectores NS-NS y R-R de las cuerdas cerradas del tipo IIA o IIB. Las branas que se acoplan al tensor antisimétrico del sector NS-NS son llamadas NS p-branas, y de las que solo se tienen las NS 1-branas (también conocidas como cuerdas fundamentales) y las NS 5-branas. Estas últimas se encuentran en todas las teorías de cuerdas cerradas (excepto las del tipo I) Por otra parte las branas que se acoplan a las cargas R-R son las llamadas D p-branas [18], y se caracterizan por que las cuerdas que terminan en ellas cumplen con la condición de frontera de Dirichlet (50-I). De esta manera, en las cuerdas del tipo IIA existen Dp-branas con dimensión par ($p= 0, 2, 4, 6$ y 8), mientras que, para las cuerdas del tipo IIB, las Dp-branas tienen dimensión impar ($p= -1, 1, 3, 5, 7$ y 9). Incluso se sabe que las cuerdas cerradas del tipo IIA y IIB tienen sectores con cuerdas abiertas, o mejor dicho, cuerdas que descansan sobre las p-branas con las condiciones de frontera de Dirichlet (la dimensión $p= -1$ dice que la D- brana barre una superficie $p+1=0$, en el espacio tiempo; esto es un punto en el espacio tiempo que es llamado D-instantón). De esta manera, en las cuerdas del tipo IIA y IIB se puede tener interacción entre las cuerdas cerradas y las cuerdas abiertas que terminan sobre las Dp – branas.

Sistemas de N Dp-branas. Una característica importante que se desprende de trabajar con un sistema de N branas, es la posibilidad de formar un grupo de norma $U(N)$. Fue Polchinski [19] quien mostró la forma en que los diferentes grados de libertad dinámicos de las DP-Branas son descritos por los modos no masivos de las cuerdas abiertas que en ellas acaban. Dentro del espectro de los modos no masivos de estas cuerdas se encuentra un campo A^α . Supóngase que se tiene una estas cuerdas abiertas con los dos extremos terminados en la misma brana. Dado que las condiciones a la frontera de esta cuerda son de Dirichlet para las (p+1) coordenadas del volumen que describe la Dp-brana, y de Neumann para el resto de las coordenadas del espacio; el campo descompone en dos partes distintas: una que corresponde a las componentes paralelas al volumen que describe la Dp-brana y otra que se desprende de las componentes transversales al mismo volumen. Dado que los extremos de la cuerda en estas (p+1) coordenadas están fijas a la brana, podemos interpretar a estos campos como si se encontraran dentro del volumen descrito por la brana. De esta manera, las (p+1) componentes del campo A^α forman un campo de norma ($\alpha = 0, \dots, p$) que corresponde a una teoría de norma con grupo $U(1)$ sobre el volumen de la

brana [19] mientras que las 9-p componentes restantes forman los campos escalares X^a ($a=1, \dots, 9-p$). Estos campos X^a describen las fluctuaciones del volumen que produce la D p-brana en las direcciones transversales al mismo. Si en lugar de tener una sola brana, se tiene un sistema de N D-p branas paralelas, dado que en cada brana existe un campo sin masa A^α , la teoría de norma final tendrá un grupo $U(1)^N$. Sin embargo, también existen unos campos masivos que corresponden a las cuerdas que inician en cierta brana y terminan en una brana distinta. Existen $N^2 - N$ campos masivos que cumplen con esta característica, y la masa de cada uno de ellos es proporcional a la distancia entre las branas involucradas. Witten [20] fue el primero en señalar que conforme se acercan las branas unas a las otras, las cuerdas tendidas entre ellas se tornan no masivas y se tienen finalmente N^2 campos no masivos cuyas transformaciones corresponden al grupo $U(N)$. Por lo tanto, la teoría de bajas energías de un sistema de N D p-branas es simplemente la teoría de Yang Mills, con grupo de norma $U(N)$. Este resultado es muy importante, dado que solo se podían construir grupos de norma para el modelo estándar a partir de las cuerdas heteróticas. Ahora, sin embargo, se ve que con las Dp-branas es posible generar grupos de norma a partir de las supercuerdas del tipo IIA y IIB.

SUBSECCION 1.4.C LA ACCION DE DIRAC-BORN-INFELD.

Las Dp-branas son objetos dinámicos y en este sentido sienten la fuerza de la gravedad. Además la tensión de una brana controla la respuesta de influencias externas que tratan de cambiar su forma, absorber energía, etc., tal y como lo hace la tensión de la cuerda.

Con el fin de escribir la acción de una p-brana de la misma manera a como se hizo en el caso de la cuerda (1-40) en un espacio D-dimensional, se introducen sobre ella las variables: ξ^α ($\alpha = 1, \dots, p$), es decir en términos de los campos $X^m(\xi)$ (con $m = p+1, \dots, D-1$) que se encuentran dentro del volumen barrido sobre el espacio tiempo. Por esta analogía con lo hecho con las cuerdas, la acción más sencilla sería

$$S = -\tau_p \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} \sqrt{\det(G_{\alpha\beta})} \quad (1-56)$$

donde τ_p es la tensión de la brana, y que al igual que en el caso de las cuerdas es una constante que deja adimensional la acción; $G_{\alpha\beta}$ es la métrica inducida sobre la brana, conocida como el jalamiento (“pullback”) de la métrica del espacio tiempo a la brana, es decir,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu} \quad (1-57)$$

Por otro lado, la dependencia del dilatón e^{ϕ} en la acción (1-56) proviene de pedir que sea invariante bajo las dilataciones de Weyl, asociadas con la posibilidad de interponer un factor que expanda o comprima la métrica del espacio tiempo. Además, la identificación de la constante de acoplamiento de cuerdas abiertas g_s y el dilatón dada por

$$g_s \equiv e^{\phi} \quad (1-58)$$

De la misma manera en que se ha considerado el acoplamiento de los campos $X^m(\xi)$ a la métrica $G_{\mu\nu}$, es posible hacerlo con otros campos de fondo, tales como el tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ del sector NS-NS. La dependencia de la acción a este nuevo término estará dada por el campo $B_{\alpha\beta}$, que se define de manera equivalente a $G_{\alpha\beta}$ en la ecuación (1-57). A su vez se puede establecer una acción que tome en cuenta a los campos de norma $A_\alpha(\xi)$ que se encuentran sobre la p-brana; y

la manera de incluirlos, conservando invarianza de norma (ante el grupo U(1)) en los campos A_α y $B_{\alpha\beta}$, es mediante el termino $B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha'F_{\alpha\beta}$, donde $F_{\alpha\beta}$ esta definido en términos de los campos A_α por $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y con un grupo de norma U(1). La acción de las branas que toma en cuenta todos estos términos es la llamada acción de Dirac-Born-Infeld (D.B.I) y que aunque no se conoce de manera completa (al igual que la de cuerdas), tiene una parte fundamental motivada por estas ideas y por resultados en el límite de bajas energías (i.e, $\alpha' \ll 1$ y que corresponde a la teoría de campos). Matemáticamente la acción para una p-brana esta dada por

$$S = -\tau_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{\det(G_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha'F_{\alpha\beta})} \quad (1-59)$$

donde τ_p , la tensión de la p-brana, está dada por:

$$\tau_p = \frac{(2\pi\sqrt{\alpha'})^{1-p}}{2\pi\alpha'} \quad (1-60)$$

de donde es claro que para el caso de p=1 se reduce a la tensión de la cuerda

SUBSECCION 1.4.D DUALIDAD Y TEORIA M

En los últimos años se han podido relacionar los distintos tipos de teorías de cuerdas. Esto ha sido posible gracias al descubrimiento de un tipo de correspondencia llamada la dualidad T y la dualidad S (dos teorías o modelos teóricos son duales o equivalentes cuando parecen ser diferentes pero se puede demostrar que poseen exactamente las mismas propiedades físicas).

Dualidad T

Es una relación que se ha encontrado en ciertas teorías de cuerdas, y consiste en que una teoría de cuerdas compactificada en un círculo de radio R es equivalente a otra teoría de cuerdas distinta compactificada en un círculo de radio $\frac{\alpha'}{R}$. En otras palabras, una teoría compactificada

sobre un círculo muy pequeño es equivalente a otra compactificada sobre un círculo muy grande. La simetría tiene su origen en el espectro de momentos y de masas de la teoria de cuerdas compactificada. Se puede demostrar que al compactificar la cuerda sobre un círculo se obtiene todo un espectro de momentos con masas dadas por $M \approx m/R$ (con m entero). Al mismo tiempo, las cuerdas cerradas tienen los llamados modos enrollados, y que son consecuencia de que la cuerda envuelva al círculo compactificado. Por eso, cuando la cuerda le da n vueltas al círculo los estados obtienen masas dadas por $M \approx nR/\alpha'$. Ahora se puede ver que el valor de la masa es invariante al cambiar R por α'/R , además del intercambio de m y n pues su valor esta dado por

$$M^2 = \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{nR}{\alpha'}\right)^2, \text{ y resulta claramente invariante ante los intercambios mencionados.}$$

Después de estudiar esta simetría en los lagrangianos de las teorías de cuerdas, se tiene que las cuerdas IIA compactificadas en un círculo de radio R son T-dual a las cuerdas IIB compactificadas en un círculo de radio α'/R , y viceversa. Del mismo modo se ve que las cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ y SO(32), compactificadas sobre un círculo son T-duales.

Dualidad S

Permite establecer una relación entre teorías débilmente acopladas (es decir con constante de acoplamiento g_s pequeña o débil) y fuertemente acopladas (con constante de acoplamiento g_s grande o fuerte). Esta dualidad entre acoplamiento débil-fuerte (dualidad S), permite trabajar con

modelos de cuerdas en donde no se puede aplicar la teoría de perturbaciones. Para que la dualidad sea consistente, se sabe que la teoría no perturbativa debe de contener toda una variedad de p-branas, que juegan el papel de los monopolos magnéticos [18]. A su vez, la importancia de las p-branas dentro de esta dualidad radica en la estrecha relación de la tensión de la brana con la constante de acoplamiento de la cuerda g_s . A continuación se mencionan algunos casos de esta dualidad:

El primer ejemplo de esta dualidad es el de las cuerdas del tipo IIB, que resultan ser autoS-duales, es decir, S-duales a las cuerdas IIB. Cuando se pasa de un acoplamiento débil a uno fuerte, las fluctuaciones cuánticas predominan y lo último que se esperaría es obtener la misma teoría que en acoplamiento débil. Sin embargo lo que realmente sucede es que las cuerdas fundamentales son S-duales a las D1-branas (que también están presentes en la teoría de cuerdas IIB)

Con respecto a las cuerdas del tipo I, el siguiente argumento podría llevar a indicar que este tipo de cuerdas debería de ser auto S duales: en principio se puede pensar que esta teoría es simplemente una proyección de las cuerdas del IIB. Para que esta proyección sea consistente deben estar presentes las D 9-branas; que barren un volumen de 10 dimensiones en el espacio tiempo, pudiendo llenar todo el espacio. Dado que las cuerdas pueden acabar en cualquier brana con la condición de Dirichlet, en el caso de las D 9-branas, que llenan todo el espacio podrían acabar en cualquier parte. Esta es justamente la definición de una cuerda abierta. Sin embargo, aunque las cuerdas del tipo I provienen de cierta proyección del tipo IIB, no son auto S-duales. Las sutilezas de la dualidad S llevan a que las cuerdas abiertas del tipo I sean S- duales a las cuerdas heteróticas SO (32). De hecho, la teoría del tipo I contiene D 1-branas que se convierten en las cuerdas fundamentales heteróticas al hacer el mapeo de la dualidad S. De la misma manera es de esperarse que las cuerdas heteróticas SO (32) tuvieran algún objeto análogo que sobre el mapeo inverso se convirtieran en las cuerdas abiertas de la teoría I, pero esto no sucede.

Teoría M

En principio, el que existan cinco teorías perturbativas de cuerdas distintas más supergravedad en once dimensiones (la supergravedad es una clase de teorías de partículas puntuales que combinan la relatividad general y la supersimetría), y con sus respectivas relaciones de dualidad que permiten pasar de una a la otra lleva a pensar que quizás exista una teoría mas general y cuyos límites son las teorías que se conocen. Esta teoría deberá tener, en principio, once dimensiones (pues por el momento no hay necesidad de dimensiones extras) y sus objetos fundamentales no podrán ser cuerdas, pues como ya se mencionó las cuerdas solo viven en 10 dimensiones. Aunque todavía no se conoce mucho esta teoría, es de esperarse que los nuevos avances en resultados no perturbativos den pistas para la estructura y los componentes de esta teoría, llamada Teoría M.

SECCION 1.5 INFLACION TEMPRANA Y CONDICIONES DE RODADO LENTO.

El universo inflacionario fue propuesto hace más de veinte años para ofrecer una posible solución a los problemas de: (i) la planitud, (ii) del horizonte y (iii) de los monopolos magnéticos; (aunque nunca han sido observados, las teorías de gran unificación predicen su existencia, con masas del orden de 10^{17} GeV, lo cual los vuelve inobservables en aceleradores de partículas, pero es probable que se produjeran en el Big- Bang). Incluso esta teoría podría ofrecer una explicación para las anisotropías del C.M.B. y por lo tanto para la formación de la estructura.

En esta teoría se postula que $a(t)$ experimentó un crecimiento por un factor cuyo valor es al menos de 10^{30} . En este marco, el modelo cosmológico estándar se modificó durante un pequeñísimo intervalo de tiempo (entre 10^{-36} y 10^{-34} segundos), en ese lapso el tamaño del universo aumento en un porcentaje mayor que el que ha aumentado en los 15×10^9 años siguientes. Matemáticamente esto significa que durante ese intervalo de tiempo se cumplió la condición:

$$\ddot{a} > 0, \quad (1-61)$$

lo cual implica que se cumpla la condición (1-9) $\rho + 3P < 0$, esto significa que el universo tuvo antigraedad en el pasado [21,25] y así como parece que la tiene en el presente [2,3,4,21,25].

Como ya se dijo en la secciones 1.1.A, 1.3 y 1.3.A, la forma más usual de explicar un proceso de expansión exponencial (inflación) es postular la existencia de un campo escalar inobservable (el inflatón); el cual en la mayoría de los casos se asume que comienza cerca de la parte más alta de un potencial (no negativo) muy plano y rueda muy lentamente hacia abajo, al mínimo del potencial. Como ya se explicó, para el caso del campo escalar la sustitución de las ecuaciones (1-16a) y (1-16b), en la ecuación (1-9) lleva de inmediato a que

$$\dot{\phi}^2 < V, \quad (1-62)$$

como la condición que se debe satisfacer para que el campo ϕ , genere antigraedad.

Las condiciones para la expansión exponencial (inflación) se resumen en las llamadas condiciones de rodamiento lento, definidas por:

$$\begin{aligned} 1/2\dot{\phi}^2 &\ll V, \\ \ddot{\phi} &\ll 3H\dot{\phi}. \end{aligned} \quad (1-63)$$

A partir de estas se deduce que:

$$\varepsilon \equiv \frac{m_p^2}{48\pi} \left[\frac{V''}{V} \right]^2 \ll 1 \quad (1-64a)$$

$$\eta \equiv \frac{m_p^2}{24\pi} \left[\frac{V'''}{V} \right]^2 \ll 1 \quad (1-64b)$$

Físicamente la primera condición requiere que el potencial sea lo suficientemente plano como para garantizar una expansión exponencial, mientras que (1-64b) implica el rodado lento del campo sobre el potencial de tal forma que el periodo inflacionario dure más tiempo [3].

Si el potencial fuera constante, entonces se trataría de un universo de De Sitter y la cantidad de inflación estaría dada por H , (pues: $a \cong \exp(Ht)$).

SECCION 1.6 ENERGIA OSCURA

En el curso de la década pasada se dieron más evidencias del resultado más extraordinario de la cosmología moderna, la existencia de una constante cosmológica la cual esta originando una expansión acelerada del universo [1,2]. Aunque este hecho quizás no ocasionó una gran sorpresa entre algunos pocos teóricos que en ese momento se encontraban interpretando un gran número de observaciones de diferentes tipos [74], para la mayoría resultó ser algo sorprendente. El universo no solo se expande sino que se acelera, el resultado primero publicado en la referencia [1] originó un cambio total en la forma de pensar acerca del universo.

Es sabido que el mundo de la física de partículas y el de la cosmología han convergido en el estudio del universo antiguo, pues la primera de ellas provee a la segunda de las fuentes de densidad de energía necesarias durante ese periodo que permite llevar a procesos como la inflación, bariogénesis, transiciones de fase, etc. Aunque en la actualidad esta relación entre ambas ramas se mantiene, la explicación de la actual aceleración del universo ha llevado a los teóricos a conjeturar explicaciones que están o no relacionadas con la física de partículas, con el fin de entender la naturaleza de esta aceleración.

Una de las problemáticas principales (sin que se haya entendido plenamente hasta ahora) es el valor de la densidad de energía almacenada en la constante cosmológica mencionada (a la cual también se le llama energía oscura), la cual resulta ser del orden de $\rho_\Lambda \cong 10^{-3} eV^4$. Desafortunadamente no existe en la actualidad ninguna explicación razonable del por qué debería

de tener esta escala, lo más natural es que esta fuera mucho más grande. Puesto que esta es convencionalmente asociada con la energía del vacío en teoría cuántica, es de esperarse que fuera del tamaño de la escala de las transiciones de fase del universo antiguo. Aún en la escala de la QCD debería tener un valor del orden de $\rho_\Lambda \cong 10^{-3} GeV^4$, por lo que una de las preguntas más importantes es el por qué del valor de Λ en la actualidad.

En vez de tratar directamente con la constante cosmológica, se han propuesto una serie de rutas alternativas para enfrentar esta difícil cuestión [24,25], algunas de las más conocidas son las siguientes: Modelos quintaesenciales [75,76], los cuales introducen un campo escalar canónico que evoluciona en el tiempo con un potencial (el cual debería de proveer un campo inflatón en la actualidad), y hace uso de sus propiedades de escalamiento [67] y su naturaleza de rastreador [3,27] en la presencia de otros campos materiales de fondo. Modelos de campos escalares donde la masa pequeña del campo quintaesencial es protegida por una simetría global aproximada, haciendo al campo un pseudo-bosón de Nambu-Goldstone [77]; Los campos de Chamaleon en los cuales el campo escalar se acopla a la densidad de energía bariónica y aunque es homogéneo puede variar a través del espacio desde el sistema solar hasta escalas cosmológicas [29]; Un campo escalar con un término cinético no canónico, conocido como K-esencia [30] basado sobre los trabajos anteriores de K-inflación; Gravedad modificada que tiene motivaciones de acciones de cuerdas [31], o más generalmente de acciones de relatividad general modificadas [32] las cuales en ambos casos tiene el efecto de introducir correcciones de gran escala y modificar la evolución tardía del universo; Gases de Chaplygin los cuales intentan unificar a la energía oscura y a la materia oscura a través de una ecuación de estado que evoluciona entre las dos [33]; Taquiones [66,17,50,51] que surgen de la teoría de cuerdas y que son ampliamente estudiados a lo largo de este trabajo, El campo escalar responsable tanto de la inflación primordial, como de la inflación actual conocida como inflación quintaesencial [4,25]; energía oscura “phantom” [34]; Condensación “ghost” [35]; Universos cíclicos [36]; argumentos antrópicos directos [78].

Dada la solidez de los datos con los que se cuenta, que indican definitivamente la presencia de un término del tipo de una constante cosmológica, cualquier contribución que evolucione dinámicamente deberá parecerse a una constante cosmológica en la actualidad. Si se ha de buscar evidencia de evolución temporal en las ecuaciones de estado de la energía oscura, es necesario probar hacia atrás en el tiempo, de hecho una gran cantidad de rutas en esa dirección han sido sugeridas y se ha planeado hacer otras extensiones. Por ejemplo, observando los patrones detallados de las anisotropías en el fondo cósmico de microondas (CMB), se observa cuándo y en qué condiciones los fotones dejaron la superficie de última dispersión. Conforme ellos se propagaron hacia la Tierra, debieron haber viajado a través de potenciales gravitacionales determinados por la naturaleza de la materia oscura y de la energía oscura, y así diferentes formas de energía oscura podrían en principio haber dejado diferentes contribuciones a cantidades tales como la separación de los picos CMB [40], la naturaleza de la formación de galaxias [39], la formación de estructura a gran escala (LSS) [40], la propagación de la luz a través de lentes gravitacionales débiles y fuertes [41], y simplemente a través de la evolución de la razón de expansión de Hubble la cual es una función de las contribuciones energéticas a la ecuación de Friedmann (ecuación 1-6).

Una minoría de los cosmólogos han sostenido que la mayoría de los datos que se han presentado pueden ser interpretados sin necesidad de recurrir a una constante cosmológica, y que se pueden explicar usando otros procesos físicos, por ejemplo relajando la hipótesis que el espectro de fluctuaciones puede ser descrito por una sencilla ley de potencias, por otra parte quizás no se conoce completamente como las supernovas del tipo 1A evolucionan y se tendría que pensar eventualmente en otras explicaciones alternativas. Aunque este podría ser el caso, ha aumentado la evidencia para aceptar la existencia de una constante cosmológica la cual no se basa en datos de supernovas [79].

Sin embargo la mejor interpretación de los datos es que la consistencia entre las anisotropías en el CMB [37,38] y LSS [80] OBSERVATIONS implican que la densidad de

energía del universo se dominada por una constante cosmológica. Un aspecto de esta consistencia es el hecho de que la física asociada con cada época es completamente diferente y esto sucede en diferentes escalas temporales. Parece ser que la consistencia se logra para un universo espacialmente plano con una densidad de energía fraccional para la materia de $\Omega_m^{(0)} \approx 0.3$, y para la energía oscura $\Omega_\Lambda^{(0)} \approx 0.7$.

SECCION 1.7 RECALENTAMIENTO

Se entiende por recalentamiento del universo al proceso por el cual el campo que domina la energía del universo decae en otros campos más ligeros y por lo cual deja de ser importante transfiriéndoles a dichos campos su energía. Este proceso se da debido a la interacción del campo original con los otros campos ligeros. Si el recalentamiento es eficiente entonces el campo original decae completamente y si no lo es entonces llega un momento donde la transferencia de energía se detiene. Lo anterior queda determinado por las siguientes condiciones:

1.- La relación Γ/H , donde Γ es la razón de decaimiento, definida como la probabilidad por unidad de tiempo de que alguna partícula se desintegre (equivalentemente es el inverso de la vida media de la partícula), y H es el parámetro de Hubble. Resulta que mientras $\Gamma/H > 1$, el decaimiento se da pero si llega a suceder que $\Gamma/H < 1$, entonces el decaimiento se detiene. (Físicamente esta condición equivale a decir que si $\Gamma/H > 1$, entonces la edad del universo es mayor que la vida media de la partícula).

2.- La masa de la partícula que decae m , debe ser más grande que la suma de las masas de las partículas en las que decae m_1, m_2, \dots , (es decir se debe de satisfacer que $m > m_1 + m_2 + \dots$).

CAPITULO 2 INTRODUCCION A LOS CAMPOS TAQUIONICOS

INTRODUCCION

En este capítulo se da una revisión de algunos aspectos relevantes del campo taquiónico T que resultan de interés para este trabajo, en particular se trata de enfatizar en la naturaleza del mismo en el contexto de la teoría de cuerdas, y su aplicación a la cosmología. Para ello se analizan las propiedades que debe satisfacer una acción efectiva para que las ecuaciones taquiónicas se deriven a partir de ella, así como las suposiciones usadas para conjeturar la forma del potencial taquiónico $V(T)$. A partir de lo anterior se mencionan algunas soluciones independientes y dependientes del tiempo, y se comentan las componentes relevantes del tensor de energía momento. De particular importancia es el problema cosmológico a que da lugar el comportamiento asintótico como materia del campo taquiónico, y el hecho de que la presencia de taquiones en la teoría de cuerdas bosónicas hace a la misma inapropiada para describir al universo. El capítulo se concluye con una exposición de la evolución del campo T como sistema dinámico. El capítulo 2 se organiza de la siguiente manera: en la sección 2.1 se mencionan los diferentes enfoques del taquión en las distintas teorías, en la sección 2.1.A se analiza la presencia de taquiones en la teoría de supercuerdas, mientras que en la sección 2.1.B se hace lo propio para la teoría de cuerdas bosónicas, en la sección 2.1.C se menciona la acción efectiva de Born-Infeld alrededor del vacío taquionico. En la sección 2.2 se analiza el campo taquiónico en el espacio de Minkowski, en la sección 2.2.A se analiza el confinamiento carolliano que entre otras cosas prohíbe que las perturbaciones taquiónicas sean superlumínicas, en la sección 2.2.B, se analiza el campo taquiónico en un espacio de Friedmann-Robertson-Walker (F.R.W), en la sección 2.2.C se analizan las condiciones de rodamiento suave para un campo taquiónico en el límite de bajas velocidades que determinan los requerimientos para un periodo inflacionario, en la sección 2.4 se examina en detalle el problema cosmológico del comportamiento asintótico del taquión como materia, y se termina con la sección 2.5 donde se analiza la evolución del campo T como sistema dinámico.

Las referencias más utilizadas a lo largo del capítulo se enumeran a continuación: las secciones 2.1, 2.1.A, 2.1.B y 2.1.C se basan sobretodo en la referencia [17], el desarrollo de la sección 2.2.A se apoya en la referencia [53] y la sección 2.5 se basa en las referencias [21,55]; las otras referencias se mencionan donde es oportuno.

SECCION 2.1 INTERPRETACION DE LOS TAQUIONES COMO ESTADOS DE MINIMA ENERGIA ($m^2 < 0$)

Una de las definiciones más conocidas del taquión es la de una partícula que viaja más rápido que la luz. A partir de la ecuación relativista: $p = mv/\sqrt{1-v^2}$ entre la velocidad v , el momento espacial p y la masa m de una partícula se deduce que $v = p/\sqrt{p^2 + m^2}$. Se ve que para un p real, un taquión deberá tener un valor de $m^2 < 0$. Sin embargo es importante aclarar que el taquión al que se refiere este trabajo es totalmente diferente del que se menciona en relación a las partículas clásicas, por ejemplo en la sección (2.2.A) se hace ver que el taquión que se deduce de la teoría de cuerdas (al que se refiere este trabajo) nunca viaja más rápido que la luz.

Las teorías de campo ofrecen otra definición del papel del taquión. A partir de la expansión de un campo escalar ϕ con un término cinético convencional y descrito por un potencial $V(\phi)$ (el cual alcanza un valor extremo en algún valor del campo $\phi = \phi_0$), expandiendo a segundo orden el potencial alrededor de $\phi = \phi_0$ en la acción se encuentra que la masa de los estados de partícula es

$m^2 = V''(\phi_0)$ (ver la ecuación 3-12 y comentario que sigue). Para $V''(\phi_0)$ positivo se tiene un mínimo del potencial y una partícula de masa al cuadrado positiva. Pero si se tiene un potencial con un máximo entonces en ese punto se tiene que $V'' < 0$ y dada la interpretación de la masa como la segunda derivada del potencial se concluye que la $m^2 < 0$, es decir un Taquión.

En este caso la existencia del taquión tiene una interpretación física clara, pues si el potencial tiene un máximo en el origen cualquier pequeño desplazamiento de ϕ desde el origen ocasionara que este crezca exponencialmente en el tiempo, por lo cual la presencia de un taquión se asocia con una inestabilidad del sistema que origina un rompimiento de la teoría de perturbación, esta interpretación sugiere que el remedio consiste simplemente en expandir el potencial alrededor de un nuevo punto donde este tenga un mínimo (asumiendo que el potencial tenga un mínimo para algún valor del campo) y llevar a cabo la cuantización perturbativa de la teoría alrededor de este otro punto, resultando en una partícula de $m^2 > 0$ en el espectro.

Un ejemplo de taquión relacionado con este trabajo aparece en la teoría de cuerdas bosónicas de (25+1) dimensiones, donde el estado de más baja energía resulta ser taquiónico. De hecho la presencia de taquiones en el espectro hace que la teoría de cuerdas bosónicas se vuelva inestable (ver secciones 1-4A y 2.1.B) y por lo mismo inapropiada para describir al universo [17]. Esto se debe en parte a que el potencial efectivo taquiónico de la teoría no está acotado por abajo (figura 3) lo cual origina inestabilidades y que el potencial se vaya a menos infinito, es decir a su valor mínimo a expensas de producir más taquiones con energía negativa.

Existen varias versiones de teorías de cuerdas (supercuerdas), definidas en (9+1) dimensiones con espectros de cuerdas cerradas libres de taquiones. Estas teorías son los puntos de partida de la mayoría de los intentos de construir una teoría unificada de la naturaleza. Esto no quiere decir que el tema del campo taquiónico carezca de interés, como ya se mencionó (ver la sección 2.2.B), si la teoría de cuerdas es correcta el universo (una 3-brana) podría ser el resultado de la interacción de una k-brana con una k-antibrana, con k mayor que 3, lo cual significa que el universo bien podría estar formado por la aniquilación de este sistema de branas inestables dando origen a un sub espacio estable de 3 dimensiones pero con la existencia de taquiones, las consecuencias fenomenológicas y cosmológicas de estos estados tiene una importancia fundamental en la comprensión de la teoría de supercuerdas y branas. Otra posibilidad es que en el espacio donde esta nuestro universo (una 3-brana) podría convivir con una Dp-brana que interactúa con una Dp-antibrana. La inestabilidad del sistema de la Dp-brana con la Dp-antibrana se manifiesta a través de la existencia de los taquiones y que son descritos en nuestro universo como campos escalares.

Como ya se dijo (ver sección 1-4A), algunas teorías de cuerdas contienen además de cuerdas cerradas excitaciones de cuerdas abiertas con condiciones a la frontera adecuadas para los dos extremos de la cuerda, de hecho solo pueden existir cuando se consideran teorías en presencia de configuraciones conocidas como D-branas (es decir branas con condiciones a la frontera de Dirichlet para los extremos de las cuerdas (ver sección 1-4-B). Inversamente la inclusión de estados de cuerdas abiertas en el espectro implica que se cuantiza la teoría en presencia de una D-brana. En presencia de N D-branas del mismo tipo el espectro contiene N^2 diferentes configuraciones de cuerdas abiertas, con sus extremos en una de las N D-branas y así se pueden generar cuerdas con cargas de un grupo de norma U(N). La interpretación física de estos estados de cuerdas abiertas es que representan excitaciones cuánticas del sistema de D-branas.

En algunos casos el espectro de estados de cuerdas abiertas de un sistema de Dp-branas contiene taquiones, por ejemplo Dp-branas en teoría de supercuerdas del tipo IIA/IIB para valores impares/par, de p. Como sucede por ejemplo en teoría de campos se puede esperar que la existencia de cuerdas taquiónicas abiertas represente inestabilidades del sistema D-branas cuyas excitaciones cuánticas son descritas por ellas, la cuestión de si existe un mínimo estable del potencial taquiónico alrededor del cual se pueda cuantizar la teoría es aún un tema de investigación [17].

A continuación se resumen los puntos relevantes de las propiedades de los taquiones de cuerdas abiertas tanto para una D-brana inestable, como para un sistema inestable brana-antibrana en las teorías de supercuerdas y de cuerdas bosónicas.

SECCION 2.1.A Supercuerdas

Es sabido que las teorías de cuerdas IIA/IIB contienen Dp-branas BPS para p par/impar (son Dp branas para las cuales su masa (m) esta relacionada con su carga (q) a través de la desigualdad Bogomolny- Prasad-Sommerfeld por la relación $m \geq |q|$, ver la sección 1-4 B para una discusión de branas) [15,16]. Las Dp-branas BPS son estables, y todos los modos de cuerdas abiertas que habitan en ellas tienen $m^2 > 0$. Puesto que estas branas son orientadas, dada una Dp-brana BPS se llamara a una Dp-brana con orientación opuesta una anti-Dp-brana BPS o una $\bar{D}p$ -brana. Aunque las Dp-branas BPS no tienen modos taquiónicos, al considerar un par coincidente Dp-brana- anti-Dp-brana, entonces las cuerdas abiertas que van desde la brana a la antibrana (o viceversa) tienen un modo taquiónico debido a la presencia en el espectro del estado base en el sector Neveu-Schwarz el cual normalmente no forma parte del espectro. De lo anterior hay dos modos taquiónicos en el espectro y la masa de cada uno de estos modos esta dada por $m^2 = -1/2$ (en unidades donde $\hbar = c = \alpha = 1$). Además de las Dp-branas BPS, las teorías de cuerdas del tipo II contienen en sus espectros Dp-branas no BPS inestables, las cuales se caracterizan por ser no orientadas y poseer precisamente las dimensiones que las Dp-branas BPS no tienen. De lo explicado se deduce que las teorías de cuerdas IIA/IIB contienen Dp-branas no BPS para p impar/par.

El rasgo más importante que distingue a las Dp-branas no BPS de las Dp-branas BPS es que el espectro de cuerdas abiertas de las primeras contienen un modo taquiónico de masa dada por $m^2 = -1/2$ además de un numero infinito de otros modos de $m^2 > 0$ [17] (los extremos de este modo taquiónico a diferencia de los taquiones mencionados arriba, terminan en la misma brana).

Para entender las propiedades de los taquiones de cuerdas abiertas es necesario conocer la dinámica de estos modos taquiónicos, lo cual en general no es una tarea sencilla. La dinámica de las cuerdas abiertas que viven en una Dp-brana es descrita por una teoría de campos de cuerdas (p+1) dimensional, definida de tal forma que la cuantización de los campos libres de la teoría de campos reproduce el espectro de las cuerdas abiertas sobre la DP-brana. Sobre una Dp-brana no BPS la existencia de un modo taquiónico escalar muestra que la correspondiente teoría de campos de cuerdas abiertas debe tener un campo escalar real T con masa $m^2 = -1/2$, de la misma forma se ve que una teoría de campos de cuerdas abiertas asociada con un sistema coincidente brana-antibrana deberá contener dos campos escalares reales, o equivalentemente un campo escalar complejo T de masa $m^2 = -1/2$ (como ya se dijo en unidades donde $\hbar = c = \alpha = 1$). Sin embargo estos campos se acoplan de una manera no trivial al infinito número de los otros campos en la teoría de campos de cuerdas abiertas, y por lo tanto no es posible estudiar la dinámica de estos modos taquiónicos de manera aislada. Además la masa $|m^2|$ de los modos taquiónicos es del mismo orden de magnitud de los modos pesados de la cuerda, por lo cual no se puede trabajar con una simple acción efectiva de baja energía obtenida integrando sobre los otros modos pesados de la cuerda, esto es lo que hace el análisis de la dinámica taquiónica no trivial. Sin embargo se ha demostrado de forma empírica que la integración es correcta en el sentido de que efectuando la integración de las primeras correcciones (es decir partiendo de una acción aproximada e integrando sobre los otros campos) se recupera con un alto grado de aproximación el potencial taquiónico $V(T)$ [51]. Conjeturando que el proceso anterior es 100% válido (es decir asumiendo que el proceso de aproximación anterior lleva a $V(T)$ en un 100%), es conveniente establecer los resultados del análisis en términos de una acción

efectiva $S_{eff}(T, \dots)$, (donde T denota el campo taquiónico y los puntos suspensivos indican la dependencia de otros campos) obtenida formalmente integrando sobre todos los campos de masa m^2 positiva. (Restringiéndose a la teoría de campos de cuerdas abiertas clásicas, la integración sobre los campos pesados equivale simplemente a eliminarlos a través de sus ecuaciones de movimiento.)

Las dos propiedades de $S_{eff}(T, \dots)$ que se derivan del análisis de la matriz S son [17]:

1.- Para una Dp-brana no BPS la acción taquiónica efectiva tiene una simetría Z_2 bajo $T \rightarrow -T$, mientras que para un sistema brana-antibrana la acción efectiva taquiónica tiene una simetría de fase bajo $T \rightarrow e^{i\alpha}T$.

2.- Sea $V(T)$ el potencial efectivo taquiónico de la teoría, definido para una configuración de campos independientes del espacio tiempo, y con todos los campos sin masa puestos a cero, entonces la acción taquiónica efectiva $S_{eff}(T, \dots)$ de la teoría tiene la forma: $-\int d^{p+1}x V(T)$. En este caso $V(T)$ tiene un máximo en $T=0$, lo cual es una consecuencia directa del hecho de que la cantidad m^2 del campo T está dada por $V''(T=0)$ y esta resulta ser negativa. Se escoge la constante aditiva en $V(T)$ de tal manera que $V(0)=0$.

La cuestión más interesante de saber es si $V(T)$ tiene un mínimo (local), y si lo tiene determinar como se comporta la teoría alrededor de este mínimo, para determinarlo se utilizan las siguientes tres conjeturas [42, 43, 44, 17]:

1.- $V(T)$ tiene un par de mínimos globales en $T = \pm T_0$ para las Dp-branas no BPS y una familia uniparamétrica (α) de mínimos globales en $T = T_0 e^{i\alpha}$ para los sistemas brana-antibrana. En este mínimo la tensión de la configuración de la D-brana original es exactamente cancelada por la contribución negativa del potencial $V(T)$, [45] de tal forma que:

$$V(T_0) + E_p = 0,$$

$$\text{donde } E_p = \begin{cases} \tilde{\tau}_p & \text{para una Dp-brana no BPS} \\ 2\tilde{\tau}_p & \text{para un par de branas Dp - } \tilde{D}p \end{cases} \quad (2-1)$$

Así, la densidad de energía total se hace cero en el mínimo del potencial taquiónico (ver la figura 1). (en las ecuaciones anteriores $\tilde{\tau}_p$ denota la tensión de la brana, es decir, el cociente de su masa por unidad de p volumen).

2.-Puesto que la densidad de energía total se hace cero en $T = T_0$, y ni las Dp-branas no BPS ni los sistemas brana-antibrana tienen carga RR, se conjetura que la configuración $T = T_0$ describe el vacío sin ninguna D-brana. Esto de vuelta implica que en la teoría perturbativa no se obtienen estados de cuerdas abiertas físicas cuantizando la teoría alrededor del mínimo del potencial, puesto que los estados de cuerdas abiertas viven solo sobre las D-branas. Esto es contraintuitivo, puesto que en las teorías de campos convencionales el número de estados físicos perturbativos no cambian cuando se pasa de un extremo del potencial al otro.

3.-Aunque no hay estados físicos perturbativos alrededor del mínimo del potencial, las ecuaciones del movimiento derivadas de la acción taquiónica efectiva $S_{eff}(T, \dots)$ tienen soluciones clásicas

independientes del tiempo. Se ha conjeturado que estas soluciones representan D-branas de dimensiones más bajas. Algunos ejemplos se dan a continuación (desde el punto de vista de las dimensiones que sobreviven la forma asintótica del tensor momento energía es descrita por un gas sin presión y una densidad de energía distinta de cero, esta última queda almacenada en los campos de cuerdas abiertas de las branas resultantes) [46]:

a) La acción efectiva sobre una Dp-brana no BPS admite una solución clásica kink como se muestra en la figura 2. (Kink se refiere a una solución topológica (mas específicamente se trata de un solitón con una dimensión), i.e, es estable por su topología lo que significa que no se dispersa en el tiempo como las soluciones perturbativas (ondas).) Esta solución depende de solo una de las coordenadas espaciales, marcada por x^p en la figura, tal que T se aproxima a T_0 mientras $x^p \rightarrow \infty$ y a $-T_0$ cuando $x^p \rightarrow -\infty$, e interpola entre esos dos valores alrededor de $x^p = 0$. Puesto que la densidad de energía total se desvanece para $T = \pm T_0$, se ve que para la configuración de arriba la densidad de energía se concentra alrededor de un subespacio (p-1 dimensional) $x^p = 0$. Esta solución de kink describe una D-(p-1)-brana BPS en la misma teoría [17,47]

b) Para el caso de un sistema brana-antibrana la parte imaginaria del campo taquiónico es puesta a cero, y la parte real toma la forma dada en la figura 2. Esta no es una solución estable pero describe una D-(p-1) brana no BPS en la misma teoría.

c) Puesto que el campo taquiónico T de un sistema $Dp - \bar{D}p$ brana es un campo complejo, se puede construir una solución de vórtice donde T es una función de dos de las coordenadas espaciales (por decir x^{p-1} y x^p) y toma la forma:

$$T = T_0 f(\rho) e^{i\theta}$$

$$\text{donde: } \rho = \sqrt{(x^{p-1})^2 + (x^p)^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(x^p / x^{p-1}), \quad (2-2)$$

son las coordenadas polares sobre el plano $x^{p-1} - x^p$ y la función $f(\rho)$ tiene la propiedad:

$$f(\infty) = 1, \quad f(0) = 0.$$

Así la energía potencial asociada con la solución se desvanece para $\rho \rightarrow \infty$. Además del taquión la solución así mismo incluye un acompañante, un campo de norma de fondo por el cual la derivada covariante del taquión disminuya con la suficiente rapidez para valores grandes de ρ como para que la densidad de energía se concentre alrededor de la región $\rho = 0$. Esto resulta en una solución solitónica con codimensión 2, la cual describe una D-(p-2)-brana BPS.

d) Si se toma un par coincidente de Dp-branas no BPS, entonces la teoría de campos de la D-brana alrededor de $T=0$ contiene un campo de norma U(2), y hay cuatro estados taquiónicos representados por una matriz hermitiana 2×2 campo escalar valuada transformando en la representación adjunta de este grupo de norma. La componente (i, j) de la matriz representa al taquión en el sector de cuerdas abiertas comenzando sobre la i-ésima D brana y terminando en la j-ésima D brana. Una familia de mínimos del potencial taquiónico se puede encontrar empezando con la configuración

$$T = T_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ la cual representa el taquión sobre la primera D-brana en su mínimo } T_0 \text{ y al}$$

taquión sobre la segunda D-brana en su mínimo $-T_0$, y después efectuar una rotación SU (2). Esto da una familia de mínimos de la forma $T = T_0 \hat{n} \vec{\sigma}$, donde \hat{n} es un vector unitario y σ_i son las matrices de Pauli. En cualquiera de estos mínimos del potencial taquiónico la parte SU (2) del grupo de norma es rota a U (1) por el valor de expectación del taquión.

Esta teoría contiene una solución con un monopolo de 't Hooft- Polyakov la cual depende de tres de las coordenadas espaciales \vec{x} , y para el cual la forma asintótica del taquión y del campo de intensidad de norma SU(2) $F_{\mu\nu}^a$ están dados por:

$$T(\vec{x}) \cong T_0 \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad F_{ij}^a(\vec{x}) \cong \varepsilon^{aij} \frac{x^a}{|\vec{x}|^3}, \quad (2-3)$$

donde ε^{aij} es el tensor antisimetrico de Levi-Civita.

La densidad de energía de esta solución esta concentrada alrededor de $\vec{x} = 0$ y por lo tanto da una 3 brana codimension. Esta solución describe una D-(p-3)-brana BPS en la misma teoría (es decir una D-brana de dimensión p-3) [48].

Hasta ahora se han mencionado algunas soluciones independientes del tiempo de las ecuaciones taquiónicas del movimiento. Una cuestión natural que lleva al análisis de soluciones dependientes del tiempo resulta de la observación de que el potencial taquiónico de una Dp-brana no BPS o de un sistema $Dp - \bar{D}p$ tiene la forma dada en la figura 1. Entonces cabe preguntar que sucede con el taquión cuando se le desplaza desde el máximo del potencial y se le permite rodar abajo hacia su mínimo.

Si T fuera un campo escalar ordinario la respuesta es simple: el campo oscilará alrededor del mínimo del potencial, y en ausencia de cualquier fuerza disipativa las oscilaciones continuarían por siempre. La densidad de energía T_{00} permanecerá constante durante estas oscilaciones, pero otras componentes del tensor de energía momento, por ejemplo la presión $p(x^0)$, definida a través de $T_{ij} = p(x^0) \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq p$, oscilará alrededor de su valor promedio. Sin embargo para el caso del taquión de teoría de cuerdas la respuesta es diferente y algo sorprendente [49]. Resulta que la densidad de energía para el taquión rodante de una D-brana inestable permanece constante como en el caso de un campo escalar usual, pero la presión, en vez de oscilar alrededor de un valor promedio, se va a cero asintoticamente. Más precisamente, las componentes diferentes de cero de $T_{\mu\nu}$ toman la forma:

$$T_{00} = \varepsilon \delta(x_{\perp}), \quad T_{ij} = p(x^0) \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq p \quad (2-4)$$

$$p(x^0) = -E_p \tilde{f}(x^0) \delta(x_{\perp}),$$

(aquí se toma en cuenta que el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ esta confinado al plano de la D-brana original y por lo tanto su expresión se hace acompañar por una función delta de las coordenadas transversales de la brana $\delta(x_{\perp})$) donde ε es una constante que denota la densidad de energía en la brana, E_p está dada por (2-1) y $\tilde{f}(x^0)$ es una función que se desvanece cuando $x^0 \rightarrow \infty$. Para dar la forma precisa de la brana de $\tilde{f}(x^0)$ se deben considerar dos casos:

1.- $\varepsilon \leq E_p$; en este caso es posible parametrizar las soluciones por un parámetro $\tilde{\lambda}$ definido a través e la relación

$$T_{00} = E_p \cos^2(\pi \tilde{\lambda}) \delta(x_{\perp}) \quad (2-5)$$

T_{00} incluye la contribución de la tensión de la D brana(s) así como la energía cinética y potencial del taquión. Puesto que la densidad total de energía disponible es menor que ε_p (la densidad de energía en el máximo del potencial taquiónico que describe la brana original) en algún instante de tiempo durante su movimiento se espera que el taquión llegue al reposo en algún punto lejano desde el máximo del potencial. Escogiendo ese instante de tiempo como $x^0 = 0$, lleva a que la función $\tilde{f}(x^0)$ tome la forma

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{1 + e^{\sqrt{2}x^0} \text{sen}^2(\tilde{\lambda}\pi)} + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{2}x^0} \text{sen}^2(\tilde{\lambda}\pi)} - 1, \quad (2-6)$$

de aquí se ve que conforme $x_0 \rightarrow \infty$, $\tilde{f}(x_0) \rightarrow 0$, de tal forma que la presión se hace cero asintóticamente.

2.- $\varepsilon \geq \varepsilon_p$; en este caso se pueden parametrizar las soluciones por un parámetro $\tilde{\lambda}$ definido a través de la relación

$$T_{00} = \varepsilon_p \cosh^2(\pi\tilde{\lambda})\delta(x_\perp). \quad (2-7)$$

Puesto que la densidad de energía disponible para el sistema es más grande que E_p , en algún instante de tiempo durante su movimiento se espera que el taquión pase por el punto $T=0$ donde el potencial tiene un máximo. Escogiendo las condiciones iniciales de tal manera que en $x^0 = 0$ el taquión alcanza el máximo de su potencial y tiene una velocidad diferente de cero. La función $\tilde{f}(x^0)$ en este caso adopta la forma

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{1 + e^{\sqrt{2}x^0} \sinh^2(\tilde{\lambda}\pi)} + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{2}x^0} \sinh^2(\tilde{\lambda}\pi)} - 1, \quad (2-8)$$

como $\tilde{f}(x_0) \rightarrow 0$, conforme $x_0 \rightarrow \infty$, la presión se desvanece asintóticamente.

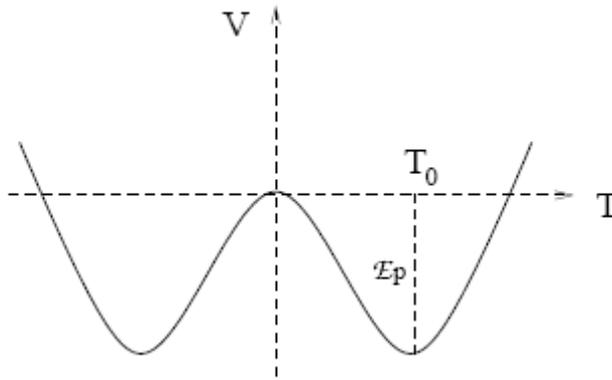


FIGURA 1.- El potencial taquiónico de una D-brana no BPS en teorías de supercuerdas. El potencial taquiónico de un sistema brana-antibrana se obtiene girando este diagrama alrededor del eje vertical.

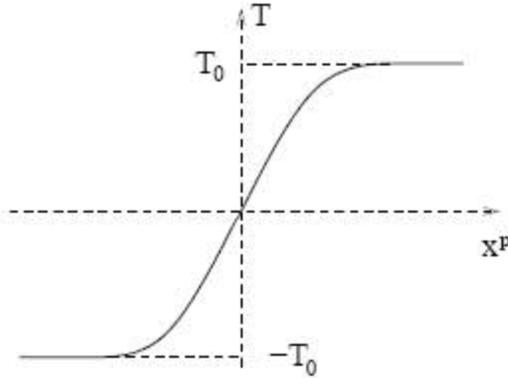


FIGURA 2.- La solución de kink sobre una D-brana no-BPS.

SECCION 2.1.B. Cuerdas Bosónicas

La teoría de cuerdas bosónicas en $(25+1)$ dimensiones tiene D_p branas para todos los enteros $p \leq 25$. El espectro de cuerdas abiertas sobre cada una de estas D branas contiene un estado taquiónico simple con masa $m^2 = -1$, además de un número infinito de otros estados de masa $m^2 \geq 0$. Denotando como en supercuerdas a la acción efectiva con $S_{eff}(T, \dots)$, (donde T denota el campo taquiónico y los puntos suspensivos indican la dependencia de otros campos) la cual se obtiene integrando sobre los campos con *masa*² positiva, y reconociendo a $V(T)$ como el potencial efectivo para el taquión, obtenido al restringirse a configuraciones de campos independientes del espacio tiempo y haciendo los campos sin masa cero, de manera que $V(T)$ tenga un máximo en $T=0$. Entonces cabe preguntar si el potencial tiene un mínimo y si la respuesta es positiva como se comporta la teoría de campos de cuerdas abiertas alrededor de este mínimo.

Como se dijo, la teoría de cuerdas bosónicas tiene un taquión en el sector de cuerdas cerradas, por lo cual la teoría se vuelve inestable. Sin embargo es interesante el estudio de las D_p -branas en esta teoría por dos razones: 1) Aunque los taquiones de cuerdas cerradas hacen la teoría cuántica de campos de cuerdas abiertas inestable debido a la aparición de cuerdas cerradas en diagramas de lazo de cuerdas abiertas, la versión clásica de esta teoría no se ve afectada directamente por el taquión de cuerdas cerradas. 2) La dinámica del taquión clásico sobre una D_p -brana bosónica tiene muchos rasgos en común con la de una D_p -brana no BPS o un par brana-antibrana en teoría de supercuerdas, y es más sencilla de estudiar que su correspondiente problema en supercuerdas, lo cual significa que estudiando la dinámica taquiónica sobre una D -brana bosónica se obtiene una penetración valiosa en el problema más relevante en teoría de supercuerdas.

Las tres conjeturas que describen las propiedades estáticas de la acción efectiva taquiónica sobre una brana bosónica D_p son las siguientes [50,51]

1.- El potencial efectivo taquiónico $V(T)$ tiene un mínimo local en algún $T = T_0$, y en su mínimo la tensión τ_p de la brana D original es exactamente cancelada por el valor negativo $V(T_0)$ del potencial, de tal manera que [45]

$$V(T_0) + \tau_p = 0. \tag{2-9}$$

La forma del potencial se muestra en la figura (3). Nótese que a diferencia del caso de supercuerdas, en este caso el potencial taquiónico no tiene un mínimo global, característica que como se mencionó ya, implica que no puede servir como teoría física, pues el potencial se va a infinito, es decir a su valor mínimo a expensas de producir más taquiones con energía negativa.

2.- Puesto que la densidad de energía total se desvanece en $T = T_0$, es posible identificar a dicha configuración como el vacío sin ninguna D brana. Esto de vuelta significa que no hay perturbaciones físicas de estados de cuerdas abiertas alrededor del mínimo del potencial, puesto que los estados de cuerdas abiertas viven solo sobre las D branas.

3.- Aunque no hay estados físicos perturbativos alrededor del mínimo del potencial las ecuaciones de movimiento derivadas de la acción taquiónica efectiva $S_{eff}(T, \dots)$ tiene soluciones clásicas independientes del tiempo no triviales lump de varias codimensiones. Una solución localizada de codimensión q sobre una D_p -brana, para la cual T depende de q de las coordenadas espaciales y se aproxima a T_0 conforme cualquiera de las coordenadas q tiende a infinito, representa una $D-(p-q)$ -brana en la teoría de cuerdas bosónicas. Un ejemplo de una solución de codimensión 1 se muestra en la figura 4

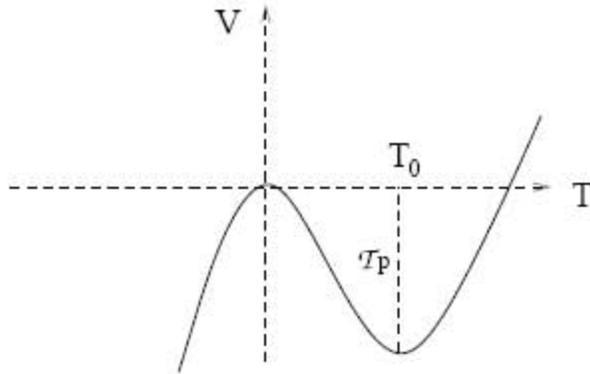


FIGURA 3.- El potencial efectivo taquiónico de una D_p -brana teoría de cuerdas bosónicas.

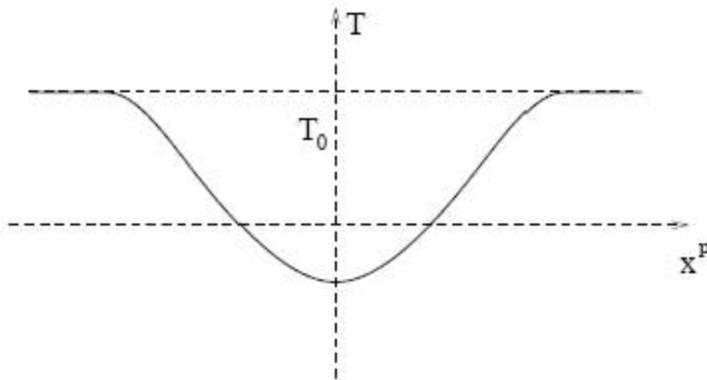


FIGURA 4.- La solución lump en una D_p -brana en la teoría de cuerdas bosónicas.

En cuanto a las soluciones dependientes del tiempo, hay que hacer notar que como ya se dijo el potencial taquiónico bosónico a diferencia del caso de supercuerdas no es simétrico alrededor de $T=0$, y por lo tanto es de esperarse un diferente comportamiento dependiendo si se desplaza el taquión a la izquierda (alejándose del mínimo local) o hacia la derecha (acercándose al mínimo

local). Como en el caso de supercuerdas, la densidad de energía sobre la brana permanece constante durante el movimiento, pero la presión a lo largo de la brana evoluciona en el tiempo como

$$p(x^0) = -\varepsilon_p \tilde{f}(x^0) \delta(x_\perp). \quad (2-10)$$

Para especificar la forma de $\tilde{f}(x^0)$ se consideran dos casos separadamente:

1.- $T_{00} = \varepsilon \delta(x_\perp)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_p$; en este caso es posible parametrizar a T_{00} como:

$$T_{00} = \varepsilon_p \cos^2(\pi\tilde{\lambda}) \delta(x_\perp). \quad (2-11)$$

Escogiendo el origen de la coordenada temporal x^0 tal que $x^0 = 0$ el taquión tiene velocidad cero y es desplazado desde $T=0$ por una cierta cantidad determinada por el parámetro $\tilde{\lambda}$. La función $\tilde{f}(x^0)$ esta dada por

$$\tilde{f}(x^0) = \frac{1}{1 + e^{x^0} \text{sen}(\tilde{\lambda}\pi)} + \frac{1}{1 + e^{-x^0} \text{sen}(\tilde{\lambda}\pi)} - 1. \quad (2-12)$$

Nótese que $\pm\lambda$ da el mismo T_{00} pero diferente $\tilde{f}(x^0)$. Esto es debido a que el signo positivo de $\tilde{\lambda}$ corresponde a un desplazamiento del taquión hacia el mínimo local del potencial, mientras que a valores negativos de $\tilde{\lambda}$ corresponden a desplazamientos de T hacia la dirección en la cual el potencial es ilimitado desde abajo. Como se puede ver de (2-12), para valores positivos de $\tilde{\lambda}$ la función $\tilde{f}(x^0)$ se aproxima a cero conforme $x_0 \rightarrow \infty$, mostrando que el sistema evoluciona a un gas sin presión. Por otra parte para $\tilde{\lambda}$ negativo, $\tilde{f}(x^0)$ diverge para

$$x^0 = \ln \frac{1}{|\text{sen}(\tilde{\lambda}\pi)|} \equiv t_c. \quad (2-13)$$

Lo cual muestra que si se desplaza el taquión hacia la dirección en la cual el potencial es ilimitado desde abajo, el sistema le pega a una singularidad a un tiempo finito.

2.- $T_{00} = \varepsilon \delta(x_\perp)$, $\varepsilon \geq \varepsilon_p$; en este caso se puede parametrizar a T_{00} como:

$$T_{00} = \varepsilon_p \cosh^2(\pi\tilde{\lambda}) \delta(x_\perp). \quad (2-14)$$

Por una apropiada elección del origen de la coordenada del tiempo x^0 la función $\tilde{f}(x^0)$ que aparece en (2-10) esta dada por

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{1 + e^{x^0} \text{senh}(\tilde{\lambda}\pi)} + \frac{1}{1 - e^{-x^0} \text{senh}(\tilde{\lambda}\pi)} - 1. \quad (2-15)$$

Se ve de nuevo que $\pm\tilde{\lambda}$ da el mismo valor de T_{00} pero diferente $\tilde{f}(x^0)$. El signo positivo corresponde al desplazamiento del taquión hacia el mínimo local del potencial, mientras que el negativo significa que evoluciona en la dirección en que este es ilimitado desde abajo. Para $\tilde{\lambda}$ positivo la función $\tilde{f}(x^0)$ se aproxima a cero conforme $x^0 \rightarrow \infty$, lo cual muestra que el sistema evoluciona a un gas sin presión. Por otra parte, para $\tilde{\lambda}$ negativo $\tilde{f}(x^0)$ diverge en:

$$x^0 = \ln \frac{1}{|\text{senh}(\tilde{\lambda}\pi)|}. \quad (2-16)$$

Esto muestra que si se desplaza el taquión en la dirección en la cual el potencial es ilimitado desde abajo, el sistema le pega a una singularidad a tiempos finitos.

SECCION 2.1.C Acción Efectiva Alrededor Del Vacío Taquiónico

Una cuestión que surge naturalmente es la de describir la física alrededor del vacío taquiónico por una acción efectiva de baja energía. Dado que el campo taquiónico cerca de la parte alta del potencial tiene una *masa*² del orden de la escala de cuerdas no se puede asegurar que tal acción existe. Además, puesto que alrededor del vacío taquiónico no se espera encontrar estados de cuerdas abiertas físicas, no existe una matriz S con lo cual se puedan comparar las predicciones de la acción efectiva. [52]

Sin embargo como se vio en las secciones 2.1.A y 2.1.B hay familias de soluciones dependientes del tiempo alrededor del vacío taquiónico parametrizadas con el parámetro $\tilde{\lambda}$ (ver por ejemplo las ecuaciones (2-4), (2-5) y (2-7) para el caso de supercuerdas) se podría preguntar si es posible construir una acción efectiva que reproduzca estas soluciones. A continuación se muestra que es posible construir una acción efectiva que satisface estos criterios a nivel cualitativo. Sin embargo no será posible derivar esta acción efectiva a partir de primeros principios, por ejemplo por comparación con los elementos de alguna matriz S, o haciendo afirmaciones definitivas acerca de la región de validez de esta acción. Algunos intentos por justificar al menos parcialmente esta acción efectiva han sido hechos en [52].

Acción Efectiva Alrededor Del Vacío Taquiónico.

La acción propuesta alrededor del vacío taquiónico es la de Born-Infeld en donde se ignoran los campos sin masa sobre el volumen de mundo de la D-brana, está dada por (ver la sección 2.2)

$$S = \int d^{p+1}x \mathfrak{S}, \quad (2-17)$$

$$\text{con } \mathfrak{S} = -V(T)\sqrt{1 + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T} = -V(T)\sqrt{-\text{Det}G}, \quad (2-18)$$

donde a

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu T \partial_\nu T, \quad (2-19)$$

se le llama la métrica taquiónica y como se discute en la sección 2.2.1, rige la rapidez de las fluctuaciones taquiónicas.

El potencial V (T) tiene un máximo en T=0 y tiene la forma asintótica:

$$V(T) \cong e^{-\alpha T/2} \text{ para } T \text{ grande}, \quad (2-20)$$

con los valores: $\alpha = 1$ para teoría de cuerdas bosónicas

$$\alpha = \sqrt{2} \text{ para teoría de supercuerdas.} \quad (2-21)$$

En esta parametrización el potencial tiene un mínimo en infinito. El tensor de energía de momento puede ser calculado a partir de los principios variacionales aplicados a la acción (2-17)

$$T_{\mu\nu} = \frac{V(T)\partial_\mu T \partial_\nu T}{\sqrt{1 + \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma T \partial_\rho T}} - V(T)\eta_{\mu\nu} \sqrt{1 + \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma T \partial_\rho T}. \quad (2-22)$$

En primer lugar se verificará que la acción (2-17) predice el comportamiento correcto de la presión para valores grandes de x^0 , para configuraciones de campo dependientes del tiempo y homogéneas. Para este caso la densidad de energía conservada está dada por

$$T_{00} = V(T)(1 - \dot{T}^2)^{-1/2}. \quad (2-23)$$

Dado que T_{00} se conserva, y $V(T) \rightarrow 0$ para T grande, se ve de inmediato que para algún T_{00} dado $\dot{T} \rightarrow 1$, conforme $T \rightarrow \infty$, y por lo tanto $T \rightarrow x^0 + \text{constante}$. En particular usando (2-20) se puede mostrar que para x^0 grande, la solución tiene la forma

$$T = x^0 + ce^{-\alpha x^0} + O(e^{-2\alpha x^0}). \quad (2-24)$$

Una forma de verificar que (2-24) da la forma correcta de la solución es notar que la contribución principal a T_{00} calculada a partir de esta configuración permanece constante en el tiempo

$$T_{00} \cong \frac{1}{\sqrt{2\alpha c}}. \quad (2-25)$$

La presión asociada con esta configuración está dada por

$$p = T_{11} = -V(T)(1-\dot{T}^2)^{1/2} = -\sqrt{2\alpha c}e^{-\alpha x^0}. \quad (2-26)$$

Utilizando la elección de α dada en (2-21), lleva de inmediato a que (2-26) está en perfecto acuerdo con las formas asintóticas (2-12) y (2-15) para cuerdas bosónicas y con (2-6) y (2-8) para las supercuerdas en el régimen de x^0 grande. En particular la presión se desvanece asintóticamente.

SECCION 2.2 EL CAMPO TAQUIONICO (espacio de Minkowski)

A continuación se hace un análisis de la acción taquiónica efectiva de la sección anterior (ecuación (2-17)) para $p=3$, en un espacio tiempo plano (Minkowski) para el cual la métrica esta dada por $ds^2 = dt^2 - dx^2$ y a partir de este análisis se muestra una de las características relevantes de la materia taquiónica, la de comportarse como materia ($P=0$) en sus últimas etapas, este punto resultara relevante en particular en la discusión de la sección 2-4.

Como se vera más adelante, la ecuación del campo taquiónico para este caso se obtiene de poner $H=0$ en (2-39)

$$\frac{\ddot{T}}{1-\dot{T}^2} = -\frac{V_T}{V}. \quad (2-27)$$

Multiplicando ambos miembros por \dot{T} e integrando se obtiene la constante del movimiento $\rho = V(T)/\sqrt{1-\dot{T}^2} = CTE$, la cual de (2-43) (o bien de (2-23)) resulta ser la densidad de energía del campo taquiónico.

Dado que ρ se conserva, si el potencial taquiónico se aproxima a cero, es decir $V \rightarrow 0$ entonces necesariamente implica que $\dot{T}^2 \rightarrow 1$ y la presión se va a cero pues $P = \dot{T}^2 - 1 = 0$. La métrica en este caso está dada por el limite Carrolliano que se discute en la sección 2.2.A. Sin embargo lo anterior da lugar a un problema abierto del taquión, el hecho de que al final se comporte como materia, daría lugar a un universo dominado por la materia sin que hubiera una época dominada por la radiación. Este problema se trata con mayor amplitud en la sección 2.4.

SECCION 2.2.A CONFINAMIENTO CARROLLIANO

El confinamiento de los estados de cuerdas abiertas puede ser explicado de manera elegante en términos del llamado límite Carrolliano, que describe una velocidad de la luz cero y la imposibilidad de la propagación de señales.

El grupo de Poincaré $E(n-1,1)$ (algunas veces conocido como grupo de Lorentz inhomogeneo), tiene dos importantes contracciones Inonu-Wigner las cuales ocurren en los casos límites donde $c \rightarrow \infty$, o $c \rightarrow 0$. El primer caso corresponde al grupo de Galileo en el cual se da la propagación instantánea y la acción a distancia y donde los campos satisfacen ecuaciones diferenciales parciales elípticas, mientras que el segundo caso es conocido como el grupo de Carroll [53] y se refiere a la imposibilidad de la propagación de señales. En este caso los campos en cada punto espacial evolucionan independientemente y son gobernados típicamente por ecuaciones diferenciales ordinarias con respecto a la variable temporal. Por esta razón, este caso surge como el grupo de simetría de un esquema de aproximaciones en el cual las derivadas espaciales son

ignoradas comparadas con las derivadas temporales. Tales esquemas de aproximación son a veces llamados “dominados por la velocidad”.

Geoméricamente el grupo de Galileo surge cuando el cono futuro de luz se aplana y se convierte en un hiperplano espacial. Por el contrario el grupo de Carroll se origina cuando el cono en cuestión se colapsa a una media línea temporal. En el caso Galileano solamente el tensor métrico contravariante tiene un límite bien definido conforme $c \rightarrow \infty$

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow \text{diag}(0,1,1,\dots,1), \quad (2-28)$$

la estructura espacio-temporal límite es llamada un espacio tiempo de Newton-Cartan. En el caso del límite Carrolliano es el tensor métrico covariante el cual sobrevive

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \text{diag}(0,1,1,\dots,1), \quad (2-29)$$

se tiene un espacio-tiempo Carrolliano.

Para entender lo anterior se utiliza la métrica taquiónica ya definida en la ecuación (2-19) la cual se puede reescribir como

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \partial_\mu T \partial_\nu T = \text{diag}(-1 + \dot{T}^2, 1, 1, 1), \quad (2-30)$$

considerando el límite de condensación taquiónica i.e. cuando $|\dot{T}| \rightarrow 1$

$$G_{\mu\nu} \rightarrow \text{diag}(0,1,1,1), \quad (2-31)$$

se ve que cuando $|\dot{T}| \rightarrow 1$, el cono definido por $G_{\mu\nu}$ se comprime sobre una media línea y ninguna excitación taquiónica abierta se puede propagar. Si estas se piensan como ondas sonoras, entonces la rapidez del sonido se va a cero y por lo tanto la presión cae a cero en este límite.

En este punto se aclara una cuestión pendiente de la sección 2.1, de que el taquión de cuerdas al que se refiere este trabajo nunca viaja más rápido que c . En otras palabras en un fondo taquiónico no trivial, las fluctuaciones taquiónicas viajarán a una rapidez diferente y menor de la luz.

Para verlo sea un vector cualquiera l_μ que se encuentra sobre el cono de Einstein (es decir el definido por la métrica $g_{\mu\nu}$), y considérese la contracción

$$G_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = (l^\mu \partial_\mu T)^2 \quad (2-32)$$

(en la ecuación anterior se utiliza el hecho de que: $g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0$).

Es claro que el cono de Einstein se encuentra afuera o sobre el cono taquiónico, lo cual se puede denotar por

$$g_{\mu\nu} \geq G_{\mu\nu}, \quad (2-33)$$

de donde se concluye que ninguna propagación súper lumínica es posible tal y como se dijo antes.

SECCION 2.2.B EL CAMPO TAQUIONICO (espacio de F.R.W.)

A continuación se hace un análisis de la acción taquiónica efectiva de la sección 2.1.C (2-17) para el caso concreto de $p=3$, en una métrica de Friedman-Robertson-Walker (F.R.W). Esta acción se deduce del universo de branas; en teoría de supercuerdas al considerar por ejemplo, los estados de las cuerdas abiertas que van de una D-P brana a una anti-D-P brana.

A cada estado se le asocia una energía, y sucede que algunas veces se encuentran estados para los cuales $m^2 < 0$, por lo cual corresponden a taquiones que dan lugar a inestabilidades del sistema brana-antibrana (sección 2.1); a que colisionen y desaparezcan [17,45,46,54] (el caso más simple de taquión es como ya se dijo en la teoría de cuerdas bosónicas de (25+1) dimensiones, donde el estado

de más bajo valor de m^2 resulta ser taquiónico, esto sucede para las D-pbranas, para cualquier p, y cabe esperar que la presencia de taquiones origine inestabilidades de los sistemas de branas).

Dado que el universo es una 3-brana, es interesante estudiar la dinámica del campo taquiónico T en un espacio de FRW de tres dimensiones espaciales pues se ha conjeturado que el universo (una 3-brana) podría ser el resultado de la interacción de una (3+k)-brana con una (3+k)-antibrana lo cual significa que el universo bien podría estar formado por branas (estables) pero con la existencia de taquiones, las consecuencias fenomenológicas y cosmológicas de estos estados tiene una importancia fundamental en la comprensión de la teoría de supercuerdas y branas.

Estos serían los taquiones que se estudiarían desde el universo (una 3-brana) y como se conjetura que los taquiones representan la energía total de la brana, el análisis que sigue en gran parte corresponde al universo que resultaría de la evolución dinámica del campo taquiónico en un espacio de F.R.W de tres dimensiones. (ver secciones 2.1.A y 2.1.B para mayor detalle).

El campo taquiónico es descrito por la acción de Born-Infeld, la cual se expresa por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathfrak{S}. \quad (2-34)$$

Donde $a^3 = \sqrt{-g}$ en la métrica de F.R.W, a es el factor de escala (Ec.1-1) y \mathfrak{S} es la densidad lagrangiana taquiónica dada por (2-18)

$$\mathfrak{S} = -V(T) \sqrt{1 - \partial_\mu T \partial^\mu T}, \quad (2-35)$$

en esta expresión: T es el campo taquiónico, V (T) es el potencial taquiónico (el cual puede tomar distintas formas dependiendo si se trata de supercuerdas o de cuerdas bosónicas, sección 2.1.B) y ∂_μ denota derivadas parciales respecto al tiempo y al espacio.

A continuación se considera el caso en que T es homogéneo (pues el universo es homogéneo e isotrópico), es decir $T=T(t)$, entonces considerando formalmente a T como un campo escalar homogéneo, la acción anterior es equivalente a:

$$S = \int a^3 L d^4x, \quad (2-36)$$

con

$$L = -V(T) \sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (2-37)$$

De los principios variacionales se obtienen las ecuaciones de Lagrange del campo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial T} = 0. \quad (2-38)$$

De tal forma que la sustitución de (2-37) en (2-38) lleva a la ecuación del taquión:

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = 0 \quad (2-39)$$

(donde $H = \dot{a}/a$).

El cálculo del tensor de energía momento se efectúa a partir de la ecuación (1-15)

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathfrak{S}.$$

Una selección adecuada del sistema de referencia es la del marco propio del observador donde la parte espacial de los elementos métricos adoptan la forma:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad (2-40)$$

de tal forma que en términos de la métrica:

$$\mathfrak{S} = -V(T) \sqrt{1 - g_{\mu\nu} \frac{dT}{dx_\mu} \frac{dT}{dx_\nu}}, \quad (2-41)$$

por lo tanto, la densidad de energía está dada por

$$\rho = T_{00} = 2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g^{00}} - g_{00} \mathfrak{S}, \quad (2-42)$$

después de sustituir (2-41) en (2.42) se reduce a (ver 2-23)

$$\rho = T_{00} = \frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}. \quad (2-43)$$

La presión del campo se obtiene, por ejemplo de la expresión

$$P = T_{rr} = 2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g^{rr}} - g_{rr} \mathfrak{S}, \quad (2-44)$$

y como $T = T(t)$, se reduce de inmediato a:

$$P = -g_{rr} \mathfrak{S},$$

por lo cual de (2-40) y (2-41) se obtiene que (ver 2-26)

$$P = -V(T) \sqrt{1-\dot{T}^2}, \quad (2-45)$$

de (2-10) y (2-12)

$$P = -\frac{V^2(T)}{\rho}, \quad (2-46)$$

o bien la ecuación de estado

$$P = -(1-\dot{T}^2)\rho, \quad (2-47)$$

de (2-45) por ejemplo, es claro $\dot{T}^2 \leq 1$, por lo tanto el parámetro w esta en el intervalo:

$-1 \leq w \leq 0$ (ver (1-4)).

Debido a las propiedades generales de los potenciales taquiónicos (ver sección 3.2), la ecuación (47-2) expone una de las características de la materia taquiónica, la de representar una transición entre un universo dominado por una constante cosmológica:

$$P = -\rho, \quad (2-48)$$

($w = -1$, para $\dot{T} = 0$)

y otro (materia), con:

$$P = 0 \quad (2-49)$$

($w = 0$, mientras $\dot{T}^2 \rightarrow 1$) [17].

Uno de los aspectos importantes a considerar de la cosmología del taquión es la aceleración que experimenta un universo sujeto a él, para deducirlo se sustituyen (2-43) y (2-45) en la ecuación de Raychaudhuri (1-5) para obtener

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(-2 + 3\dot{T}^2), \quad (2-50)$$

de aquí se obtiene una conclusión importante, si $\dot{T} < \sqrt{2/3}$ entonces $\ddot{a} > 0$ y el universo se acelera mientras que si $\dot{T} \in (\sqrt{2/3}, 1]$ entonces se desacelera.

SECCION. 2.2 C CONDICIONES DE RODAMIENTO SUAVE PARA UN CAMPO TAQUIONICO (Caso De Baja Velocidad).

Como se dijo en relación a los campos escalares los requisitos para un periodo inflacionario eficaz es que el potencial sea lo suficientemente plano como para garantizar una expansión exponencial y que la aceleración del campo sea despreciable, como para que el rodado del campo T

sea lento y se prolongue el periodo inflacionario; resulta que es posible utilizar las condiciones (1-64a) y (1-64b) de un campo canónicamente normalizado (ec.1-14), para un campo taquiónico en el limite de bajas velocidades, de la siguiente manera:

La densidad lagrangiana del campo taquiónico esta dada por

$$L = -V(T)\sqrt{1-\dot{T}^2}. \quad (2-37)$$

No tiene términos cinéticos en su forma canónica, pero se puede definir un campo canónicamente normalizado T de la siguiente manera: Expandiendo la acción taquiónica (2-34) en el caso homogéneo en donde $T=T(t)$, se obtiene

$$S \approx -\int d^4x \sqrt{-g} V[1-1/2\dot{T}^2 + \dots], \quad (2-51)$$

a continuación se define el campo ϕ en el límite de \dot{T} pequeño como

$$V\dot{T}^2 = \dot{\phi}^2, \quad (2-52)$$

lo que equivale a

$$\phi = \int \sqrt{V(T)} dT, \quad (2-53)$$

la sustitución de (2-52) en (2-51) lleva de inmediato a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (1/2\dot{\phi}^2 - V), \quad (2-54)$$

esta ecuación muestra que es respecto al campo ϕ que aplican las condiciones de rodamiento suave, por lo que es suficiente reescribir dichas condiciones en términos de T (ver ec. 12-1), de (2-53) se tiene que

$$V'(\phi) = \frac{V'(T)}{\sqrt{V(T)}}, \quad (2-55)$$

sustituyendo (2-55) en (1-64a)

$$\frac{V'^2(T)}{V^3(T)} \ll \frac{48\pi}{m_p^2}, \quad (2-56)$$

que es la primera condición.

Para obtener la segunda, de (2-55)

$$\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} = \frac{V''(T)}{V^2(T)} - \frac{V'^2(T)}{2V^3(T)},$$

sustituyendo este resultado en (1-64b) se obtiene

$$\frac{V''(T)}{V^2(T)} - \frac{V'^2(T)}{2V^3(T)} \ll \frac{24\pi}{m_p^2}, \quad (2-57)$$

como la segunda condición.

De (2-54) es claro que las condiciones anteriores son válidas sólo si \dot{T}^2 es pequeño, lo cual significa que si se cumplen las condiciones en un problema se puede confiar en el resultado, y si no se debe tomar con cautela, el campo podría estar rodando lento e inflacionando y tener valores de \dot{T} grandes (es decir cercanos a $\sqrt{2/3}$). (Ver el capítulo 3 para una deducción mas general de las condiciones de rodamiento suave).

SECCION 2.3 LOS POTENCIALES TAQUIONICOS DE CUERDAS Y SU COMPORTAMIENTO GENERAL.

En principio la expresión del potencial $V(T)$ en la ecuación taquiónica (2-39) es arbitraria, y la razón principal para escoger algunos de ellos para su estudio es motivada por consideraciones fenomenológicas y por la teoría de cuerdas.

Entre los primeros se puede mencionar el caso del potencial inverso: $V(T) = T^{-n}$, con $n > 2$, y que se menciona en el contexto de este trabajo en el capítulo 4.

El caso más interesante es el de los potenciales taquiónicos en teoría de cuerdas por que relacionan a esa teoría con el papel cosmológico que podría desempeñar el taquiión, tanto como fuente de energía oscura, como en relación al proceso de recalentamiento (ver el capítulo 4). Algunos de los potenciales de cuerdas más conocidos son los siguientes:

$V(T) = T^{-2}$ que corresponde a soluciones de escalamiento (el interés de este potencial radica en que una solución de escalamiento es aquella para la cual $X = V / \rho = \text{constante}$, donde V es el potencial taquiónico y ρ está dada por (2-43) y por que el parámetro $\lambda_1 = V_T / V^{3/2}$ resulta constante también) (ver las secciones 2.5, 4.4, 3.6.A.B y [4,55]).

$V = e^{-\alpha\phi}$, este potencial aparece en el contexto de la inflación taquiónica y puede aparecer en la cosmología en relación al comportamiento tardío de un sistema D3-anti-D3 [55], para este sistema el campo taquiónico es un campo escalar complejo $T = \phi e^{i\theta}$. Cuando θ es constante la acción efectiva del sistema es la dada por (1.2). (Cabe mencionar que esta misma forma asintótica de potencial se da en la teoría de cuerdas bosónicas, donde lo único que cambia es el exponente β en relación al caso de supercuerdas: $V \approx e^{-\beta T}$).

$V(T) = B e^{-\alpha T^2}$ y $V(T) = A \text{Sech} [\sqrt{\beta} m T]$, de los cuales se ha especulado que representan el campo taquiónico para un sistema de D.P branas en supercuerdas [17,55] de lo dicho antes (sección 2.2) estos casos son de importancia para este análisis. Para ser más precisos lo que se requiere es que el potencial tenga alguna de las formas de estos potenciales alrededor del máximo, (en el caso de cuerdas bosónicas la forma correspondiente del potencial alrededor del máximo debe ser $V = T^2 e^{-\alpha T^2}$), pero asintóticamente, es decir para valores grandes de T , el potencial debe de ser exponencial, es decir: $V = e^{-T}$ [17]. De lo anterior se asume que el potencial V en una acción del tipo Born-Infeld (ec. 1-2) será una función suave que interpola entre las dos expresiones asintóticas: $V(T) = B e^{-\alpha T^2}$ o $V(T) = A \text{Sech} [\sqrt{\beta} m T]$ en el máximo y $V = e^{-T}$ al infinito.

En particular el segundo caso corresponde al del potencial taquiónico de una D3- brana no-BPS [17], el cual es el mismo que el de un sistema D3-anti-D3, donde β es un factor de deformación (WARP) en la posición del sistema D3-anti-D3 en el espacio compacto interno, m es la escala de la masa de la cuerda y A es una cantidad relacionada con β y con la tensión de la brana, obsérvese que en el límite asintótico ($T \rightarrow \infty$) el potencial se comporta de la forma deseada como: $V \approx e^{-m\sqrt{\beta}T}$, de tal forma que en este límite se tiene el mismo potencial del sistema $D3 - \bar{D}3$, descrito arriba. Obsérvese que estos potenciales tienen un máximo en el origen, y son lo suficientemente planos como para originar aceleración al principio, esto se ve de sustituir la forma de estos potenciales en las condiciones de rodado lento (2-56) y (2-57) para verificar que se cumplen para $T=0$. De la ecuación para la masa (3-14) del capítulo 3, también se ve que estos potenciales satisfacen al principio la condición $m^2 < 0$, que es la razón por la cual se les llama taquiónicos. Finalmente como se mencionó antes (ec. 2-49) la materia taquiónica en su etapa final se comporta como materia ($P=0$) lo cual como se analiza a continuación resulta un problema abierto del taquiión.

SECCION 2.4 EL PROBLEMA DE “MATERIA” PARA LOS POTENCIALES DE CUERDAS TAQUIONICOS.

Una de las posibilidades que más se han examinado es el papel que podría desempeñar el taquión como fuente de materia oscura en el universo. El punto es muy interesante, en virtud de que recientes observaciones (WMAP) han confirmado algo que se sabe desde hace 30 años, que la materia oscura (es decir aquella que solo se detecta por su fuerza gravitacional sobre la materia visible) contribuye con un 25% de la densidad de energía del universo, mientras que la materia bariónica solo con un 5%; dado que no se sabe con precisión el origen de esa materia, una propuesta interesante sería aprovechar que en la etapa final de su evolución el taquión se comporta como un gas de presión cero (materia), para proponerlo como una nueva forma de materia oscura.

Sin embargo lo anterior da lugar a un problema abierto del taquión, el hecho de que al final se comporte como materia, daría lugar a un universo dominado por la materia sin que hubiera una época dominada por la radiación [56].

A continuación se demuestra que de haber quedado un residuo de materia taquiónica desde la época de Planck, este no podría haber sido mayor de una parte en $10^{-28.5}$ de la correspondiente cantidad de radiación en ese momento, para que el universo hubiera evolucionado como lo predice la cosmología estándar, en particular que la mayor parte del tiempo el universo fue dominado por la radiación.

Se parte de las ecuaciones (1-8b) y (1-8c), para materia y radiación respectivamente:

$$\rho_m = \rho_{mi} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3}, \quad (2-58)$$

$$\rho_r = \rho_{ri} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-4}. \quad (2-59)$$

Dividiendo la ecuación (2-58) entre la (2-59) se obtiene

$$\frac{\rho_m}{\rho_r} = \frac{\rho_{mi}}{\rho_{ri}} \frac{a}{a_i}, \quad (2-60)$$

introduciendo las cantidades $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ (ver ec. 1-11) se tiene de (2-60) que

$$\frac{\rho_m}{\rho_r} = \frac{a}{a_i} \frac{\Omega_{mi}}{\Omega_{ri}}, \quad (2-61)$$

de aquí

$$a = a_i \frac{\Omega_{ri}}{\Omega_{mi}} \frac{\rho_m}{\rho_r}. \quad (2-62)$$

En particular interesa el caso en que $\rho_m = \rho_r$, por lo cual para este momento la ecuación (2-62) se reduce a

$$a = a_i \frac{\Omega_{ri}}{\Omega_{mi}},$$

asumiendo que las condiciones iniciales se dan en la época de Planck:

$$a = a_{pl} \frac{\Omega_{rpl}}{\Omega_{mpl}}, \quad (2-63)$$

escogiendo el valor actual de: $a_0 = 1$, los valores del factor de escala para algunos de los momentos relevantes en la historia del universo son:

$$a_{NS} \approx 10^{-11} \quad (\text{Núcleo síntesis})$$

$$a_{EQ} \approx 10^{-3.5} \quad (\text{Densidad de materia=densidad de radiación})$$

$$a_{PL} \approx 10^{-32} \quad (\text{Época de Planck})$$

sustituyendo estos valores en (2-63), y recordando que $a = a_{EQ}$

$$\frac{\Omega_{mpl}}{\Omega_{rpl}} = \frac{a_{PL}}{a_{EQ}} = 10^{-28.5}. \quad (2-64)$$

El resultado anterior demuestra que aunque hubiese quedado una pequeña cantidad de materia taquiónica (mayor a la calculada por la ec. (2-64)) el universo hubiese sido dominado de inmediato por la materia sin que la época de la radiación hubiera durado el tiempo suficiente (ver la sección 2.2 donde se demuestra que el campo T se comporta como materia asintóticamente). Una propuesta interesante se daría en relación al recalentamiento taquiónico, buscar entre los modelos taquiónicos aquellos que al terminar el recalentamiento desaparezcan por completo después de liberar su energía, esto evitaría el problema mencionado (ver sección 1.7).

SECCION 2.5 EVOLUCION DEL CAMPO TAQUINICO T COMO SISTEMA DINAMICO

Al igual que como se hacía anteriormente para el caso de un campo escalar, a continuación se analiza la posibilidad de que la dinámica del campo taquiónico sea la responsable del actual periodo de aceleración del universo. Como ya se mencionó (capítulo 1 introducción) esta es la razón que lleva a considerar un término de energía oscura en las ecuaciones cosmológicas. Para que esta dinámica sea posible es necesaria la inclusión en el modelo de un factor que presente presión negativa. Se han propuesto varias posibilidades para descubrir la naturaleza de la energía oscura: la posibilidad de una constante cosmológica que surgiera por ejemplo de un escenario del tipo de campos dinámicos quintaesenciales como el representado por el campo escalar derivado de la lagrangiana (1-12), escenarios K-essenciales donde la aceleración es controlada por términos cinéticos modificados en la acción, modificaciones en la gravedad (motivadas principalmente por modelos de branas) las cuales llevan a soluciones aceleradas asintóticas de la ecuación de Friedmann modificada, y modelos de gases de Chaplygin que intentan incorporar una descripción unificada de energía oscura y materia oscura [33], la lista continúa pero el objetivo de todos los modelos es el mismo, explicar por qué el universo ha empezado recientemente a acelerarse con una densidad de energía cercana a la crítica.

En esta sección se analiza la posibilidad de que el taquión desempeñe el papel de energía oscura [21,55] Ya se ha mencionado con anterioridad que el taquión es un campo inestable que tiene importancia en teoría de cuerdas a través de su papel en la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI) la cual se utiliza para descubrir la acción de las D branas (ver capítulo 1). De hecho la posibilidad del taquión como generador de energía oscura ya se menciona en la sección (2.2) en relación a la ecuación (2-50), donde se vio que actuando por sí solo puede llevar a un universo acelerado a condición de que $\dot{T} < \sqrt{2/3}$. A continuación se explora la posibilidad de que desempeñe el mismo papel si además el universo esta lleno de algún fluido barotrópico (materia, radiación o una mezcla de los dos).

La densidad de energía y la presión de un campo taquiónico están dadas por las ecuaciones (2-43 y (2-45):

$$\rho = T_{00} = \frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}, \quad (2-43)$$

$$P = -V(T) \sqrt{1-\dot{T}^2}. \quad (2-45)$$

En presencia de un fluido barotrópico cuya ecuación de estado es $\gamma \equiv 1 + \omega_m = 1 + p_m / \rho_m$, las ecuaciones de movimiento del sistema se expresan por:

$$\dot{H} = -\kappa^2 \left[\frac{\dot{T}^2 V(T)}{2\sqrt{1-\dot{T}^2}} - \frac{\gamma \rho_m}{2} \right], \quad (2-65)$$

$$\frac{\ddot{T}}{1-\dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = 0, \quad (2-39)$$

$$\dot{\rho}_m + 3\gamma H \rho_m = 0. \quad (2-66)$$

Junto con una ecuación de restricción para el parámetro de Hubble

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2}} + \rho_m \right], \quad (2-67)$$

donde se definió a $\kappa^2 = 8\pi G$.

Dada la dificultad de resolver de manera analítica el sistema de ecuaciones anterior, a continuación se expresa en forma de un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden, de tal manera que las soluciones sean fácilmente visualizadas mediante un diagrama en un espacio de fase, lo anterior se logra por medio de las sustituciones:

$$x = \dot{T} = HT', \quad y = \kappa \frac{\sqrt{V(T)}}{\sqrt{3H}}. \quad (2-68)$$

Donde una prima denota la derivada con respecto al número de e-folds, $N = \text{Ln}(a)$. Sustituyendo estas cantidades en el sistema se obtiene el siguiente sistema autónomo:

$$x' = -(1-x^2)(3x - \sqrt{3}\lambda y), \quad (2-69)$$

$$y' = \frac{y}{2} \left(-\sqrt{3}\lambda xy - \frac{3(\gamma-x^2)y^2}{\sqrt{1-x^2}} + 3\gamma \right), \quad (2-70)$$

$$\lambda' = -\sqrt{3}\lambda^2 xy (\Gamma - 3/2), \quad (2-71)$$

en donde: $x' = \frac{dx}{dN}$, $y' = \frac{dy}{dN}$, $\lambda' = \frac{d\lambda}{dN}$; junto con la ecuación de restricción (2-67) que en estas variables tiene la forma

$$\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}} + \kappa^2 \frac{\rho_m}{3H^2} = 1. \quad (2-72)$$

En las ecuaciones anteriores:

$$\lambda \equiv -\frac{V_{,T}}{\kappa V^{3/2}}, \quad \Gamma \equiv \frac{VV_{,TT}}{V^2_{,T}}. \quad (2-73)$$

La ecuación de estado efectiva y la fracción de la densidad de energía en el campo taquiónico están dadas a partir de (2-73) y las ecuaciones (2-43) y (2-45) por:

$$\gamma_T = x^2, \quad \Omega_T = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2-74)$$

puesto que $0 \leq \Omega_T \leq 1$, el rango permitido de x y y es $0 \leq x^2 + y^4 \leq 1$, por lo tanto ambos son finitos en el rango $0 \leq x^2 \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.

La dinámica cosmológica depende crucialmente del comportamiento asintótico de λ , como se ve a continuación:

Caso de λ constante

De (2-71) se ve que λ es constante para $\Gamma = 3/2$, integrando la ecuación (2-73) resulta de inmediato un potencial cuadrado inverso $V(T) = M^2 T^{-2}$, el cual corresponde al potencial para las

soluciones de escalamiento en el contexto del universo de branas y corresponde a soluciones del tipo $a \propto t^p$. Los puntos críticos para este sistema se pueden obtener haciendo: $x' = 0$ y $y' = 0$ en las ecuaciones (2-69) y (2-70) y se resumen en la tabla I (figura 5 ver al final del capítulo) esencialmente se tienen cuatro puntos críticos: a) $x = 0, y = 0$, b) $x = \pm 1, y = 0$ c) $x = \lambda y_s / \sqrt{3}$, $y = y_s$ y d) $x = \sqrt{\gamma}$, $y = \sqrt{3\gamma} / \lambda$, donde se ha definido a y_s por

$$y_s = \left(\frac{\sqrt{\lambda^4 + 36} - \lambda^2}{6} \right)^{1/2}. \quad (2-75)$$

Los casos (b) y (d) son divididos en dos casos, dependiendo de los signos de x . Como se verá (c) y (d) corresponden a puntos fijos estables que satisfacen las condiciones $3x = \sqrt{3}\lambda y$ y $3\gamma = \sqrt{3}\lambda xy + \left[3(\gamma - x^2)y^2 / \sqrt{1 - x^2} \right]$ en las ecuaciones (2-69) y (2-70).

Estabilidad de los puntos fijos

Para estudiar la estabilidad de los puntos críticos de la tabla se consideran las pequeñas perturbaciones u y v alrededor de los puntos (x_c, y_c) , i.e.:

$$x = x_c + u, \quad y = y_c + v. \quad (2-76)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2-69) y (2-70) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$Y' = M Y. \quad (2-77)$$

Donde: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es la matriz del sistema y depende de los valores de x_c y y_c , $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es

el vector columna de las cantidades perturbadas y Y' la derivada del mismo vector.

El sistema puede ser considerado perturbativamente estable cuando los valores propios de la matriz anterior sean ambos negativos [57], en base a lo anterior se discute la estabilidad de los puntos fijos μ_1 y μ_2 de la tabla 1:

Caso a) $(x_c = 0, y_c = 0)$;

Los valores propios en este caso son:

$$\mu_1 = -3, \mu_2 = 3\gamma/2. \quad (2-78)$$

Por lo tanto este punto crítico es inestable para $\gamma > 0$, mientras que es un nodo estable para $\gamma = 0$, como sea no se puede usar como una solución atractora asintótica pues lleva a $\Omega_T = 0$.

Caso b) $(x_c = \pm 1, y_c = 0)$;

Puesto que los valores propios son:

$$\mu_1 = 6, \quad \mu_2 = 3\gamma/2. \quad (2-79)$$

El punto fijo es un nodo inestable, esto corresponde a una solución del tipo polvo, con $\gamma_T = \dot{T}^2 = 1$, pero el sistema es repelido del punto crítico.

Caso c) $(x_c = \lambda y_s / \sqrt{3}, y_c = y_s)$;

Los valores propios en este caso son:

$$\mu_1 = -3 + \frac{\lambda^2}{12} \left(\sqrt{\lambda^4 + 36} - \lambda^2 \right), \quad (2-80)$$

$$\mu_2 = -3\gamma + \frac{\lambda^2}{6} \left(\sqrt{\lambda^4 + 36} - \lambda^2 \right), \quad (2-81)$$

donde μ_1 esta en el intervalo $-3 \leq \mu_1 < -3/2$, obsérvese que $\mu_2 \leq 0$ para $\gamma \geq \gamma_s \equiv \frac{\lambda^2}{18} \left(\sqrt{\lambda^4 + 36} - \lambda^2 \right)$, (2-82)

esto significa que el punto fijo es un nodo estable para $\gamma \geq \gamma_s$, y es uno inestable para: $\gamma \leq \gamma_s$.

Caso d) ($x_c = \pm\sqrt{\gamma}$, $y_c = \pm\sqrt{3\gamma/\lambda}$);

Los valores propios son:

$$\mu_{1,2} = \frac{3}{4} \left[\gamma - 2 \pm \sqrt{17\gamma^2 - 20\gamma + 4 + \frac{48}{\lambda^2} \gamma^2 \sqrt{1-\gamma}} \right]. \quad (2-83)$$

Las partes reales de μ_1 y μ_2 resultan ser ambas negativas si la condición

$$0 \leq \gamma \leq \gamma_s = \frac{\lambda^2}{18} \left(\sqrt{\lambda^4 + 36} - \lambda^2 \right), \quad (2-84)$$

es satisfecha. Nótese que γ_s es siempre más pequeña que uno. Cuando la raíz cuadrada en (2-83) es positiva el punto fijo es un nodo estable. Mientras que si la raíz cuadrada es negativa entonces resulta una espiral estable.

Los valores de Ω_T y γ_T en los puntos críticos son:

$$\Omega_T = \frac{3\gamma}{\lambda^2 \sqrt{1-\gamma}}, \quad \gamma_T = \gamma, \quad (2-85)$$

lo cual corresponde a la solución de escalamiento donde las densidades de energía ρ_m y ρ_T decrecen con la misma rapidez. Sin embargo se debe aclarar que este tipo de soluciones no existen ni en la era de la radiación ($\gamma = 4/3$) ni en la de la materia ($\gamma = 1$), pues la existencia de las soluciones de escalamiento requiere la condición: $0 \leq \gamma \leq \gamma_s < 1$. En este sentido la solución no puede ser aplicada como un modelo realista de energía oscura.

Caso de λ no constante

Cuando el potencial es diferente del cuadrado inverso $V(T) = M^2 T^{-2}$, λ es una cantidad que evoluciona dinámicamente, al igual que sucedió para el caso de quintaesencia (sección 1-3), existen básicamente dos casos: (i) λ evoluciona hacia cero o $|\lambda|$ se incrementa hacia infinito. El caso (i) es considerado como una solución de rastreo (“tracking”) en la cual la densidad de energía del taquión eventualmente termina por dominar a la del fluido. Esta situación se presenta cuando se satisface la condición:

$$\Gamma > 3/2, \quad (2-86)$$

la cual se obtiene de la ecuación (2-71). Cuando $\Gamma < 3/2$ la densidad de energía del campo escalar se vuelve despreciable comparada a la del fluido.

Como un ejemplo se considera el caso del potencial inverso

$$V(T) = M^{4-n} T^{-n}, \quad n > 0. \quad (2-87)$$

De (2-73) se ve que $\Gamma = \frac{n+1}{n}$, en este caso, por lo cual de (2-86) es claro que la densidad de energía del taquión domina a tiempos tardíos para $n < 2$. El sistema se aproxima al punto crítico instantáneo (c) para $\gamma \geq 1$. En el límite $\lambda \rightarrow 0$ se tiene que $x \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 1$ para el punto (c) lo cual significa que de la primera condición de rodamiento suave para el taquión es posible escribir el parámetro (ver (2-56)):

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \cong \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_T}{V}\right)^2 \frac{1}{V} = \frac{n^2}{2} \left(\frac{M_{pl}}{M}\right)^2 \frac{1}{(TM)^{2-n}}, \quad (2-88)$$

se ve que ε decrece para $n < 2$, a medida que el campo evoluciona a valores grandes. La condición para la expansión acelerada corresponde a $\varepsilon < 1$, lo cual lleva a:

$$TM > \left(\frac{n}{\sqrt{2}} \frac{M_{pl}}{M}\right)^{2/2-n}. \quad (2-89)$$

La energía potencial presente es aproximadamente del orden de $V(T_0) = M^4 / (T_0)^n \cong 10^{-47} GeV^4$. Combinando esta relación con (2-89) se obtiene

$$\frac{M}{M_{pl}} > \left[\left(\frac{\rho_c^{(0)}}{M_{pl}^4}\right)^{1-n/2} \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^n \right]^{1/(4-n)}, \quad (2-90)$$

de la ecuación anterior se ve que M es próximo a la escala de Planck para $n=2$, este problema se ve aligerado para valores de n mas pequeños. Por ejemplo para $n=1$ se tiene que $M / M_{pl} \geq 10^{-20}$. En este caso las soluciones se aproximan a los puntos críticos instantáneos $(x_c, y_c) = (\lambda(N)y_s(N)/\sqrt{3}, y_s(N))$, donde se ha definido

$$y_s(N) = \left[\left(\sqrt{\lambda(N)^4 + 36} - \lambda(N)^2 \right) / 6 \right]^{1/2}. \text{ Este comportamiento se aprecia en la figura 6. De lo}$$

anterior se ve que lo estudiado para λ constante se aplica al caso de λ variable en cuanto el sistema se aproxima a una solución atractora estable.

Existen otros potenciales taquiónicos en los cuales la cantidad λ decrece a cero con oscilaciones [21,55]. Un ejemplo de este comportamiento se da con el potencial

$$V(T) = V_0 e^{1/2 M^2 T^2}, \quad (2-91)$$

el cual por ejemplo aparece como una excitación de los estados masivos sobre las anti-branas [17]. En este caso el campo escalar se aproxima al mínimo del potencial en $T=0$ con oscilaciones, donde finalmente el campo se estabiliza. Puesto que la energía potencial V_0 permanece en $T=0$, esta funciona como una constante cosmológica a tiempos tardíos.

Finalmente, existen potenciales que exhiben el comportamiento $|\lambda| \rightarrow \infty$ asintóticamente. Por ejemplo $V(T) = M^{4-n} T^{-n}$ con $n > 2$, y $V(T) = V_0 e^{-\mu T}$ con $\mu > 0$. En el ultimo caso se tiene que $\Gamma = 1$ y $d\lambda/dN = (\sqrt{3}/2)\lambda^2 xy$, de donde se ve que λ crece para $x > 0$. En el límite $\lambda \rightarrow \infty$ el punto crítico instantáneo (c) se aproxima a $x_c(N) \rightarrow 1$ y $y_c(N) \rightarrow 0$, con $\gamma_T \rightarrow 1$, lo cual significa que no hay expansión acelerada.

Aunque no se da inflación tardía en este escenario, es posible tener aceleración temporal para $\lambda \leq 1$ y tener una desaceleración para $\lambda \gg 1$ [55]. Si esta aceleración temporal corresponde al presente, el universo eventualmente entrara a un régimen de desaceleración en el cual el campo taquiónico se comportará como polvo sin presión.

Nombre	x	y	Existencia	Estabilidad	Ω_ϕ	γ_ϕ
(a)	0	0	Todo λ y γ	Caballote inestable para $\gamma > 0$. Nodo estable para $\gamma = 0$	0	0
(b1)	1	0	Todo λ y γ	Nodo inestable	1	1
(b2)	-1	0	Todo λ y γ	Nodo inestable	1	1
(c)	$\lambda y_s / \sqrt{3}$	y_s	Todo λ y γ	Nodo estable para $\gamma \geq \gamma_s$. Caballote para $\gamma < \gamma_s$.	1	$\lambda^2 y_s^2 / 3$
(d1)	$\sqrt{\gamma}$	$\sqrt{3\gamma} / \lambda$	$\lambda > 0$ y $\gamma < \gamma_s$	Estable para $\Omega_\phi < 1$	$\frac{3\gamma}{\lambda^2 \sqrt{1-\gamma}}$	γ
(d2)	$-\sqrt{\gamma}$	$-\sqrt{3\gamma} / \lambda$	$\lambda < 0$ y $\gamma < \gamma_s$	Estable para $\Omega_\phi < 1$	$\frac{3\gamma}{\lambda^2 \sqrt{1-\gamma}}$	γ

TABLA 1 (Figura 5) (ver referencia [21])

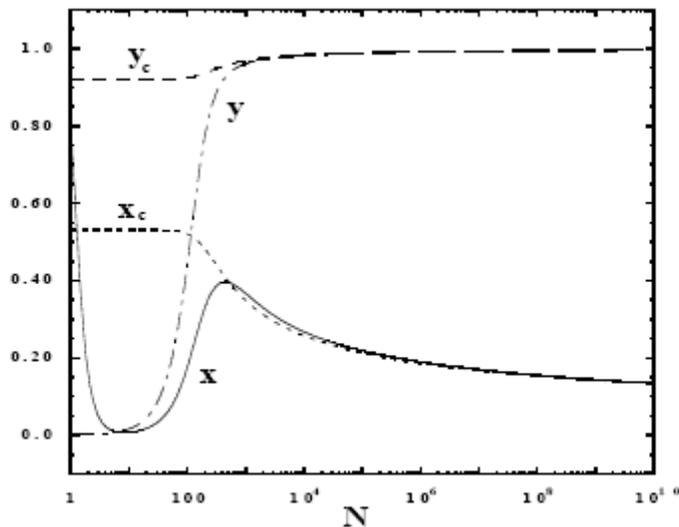


FIGURA 6.- Evolución de los parámetros x y y y de los valores críticos x_c, y_c para el caso del taquión con potencial $V(T) = M^3 T^{-1}$ y un fluido barotrópico con $\gamma = 1$. Se escogen como condiciones iniciales $x_i = 0.8, y_i = 5 \times 10^{-4}$ y $\lambda_i = 1$. La solución se aproxima a los puntos críticos instantáneos cuyos valores asintóticos son $x_c = 0$ y $y_c = 1$ [21,55].

CAPITULO 3 LA MASA, NORMALIZACION Y COMPORTAMIENTO TARDIO DEL CAMPO TAQUIONICO.

SECCION 3.1 INTRODUCCION

Recientemente se ha dedicado un gran esfuerzo al estudio de la dinámica del campo taquiónico. [58, 52,59]. El taquión surge de la teoría de cuerdas branas y representa el nivel energético más bajo de una Dp-brana inestable, o el de un sistema brana-antibrana [49,60]. Una de las propiedades genéricas de esta clase de sistemas es precisamente la existencia del campo taquiónico T. Por lo tanto, la fenomenología de este campo es muy importante en el entendimiento del límite de bajas energías de los modelos de cuerdas-branas.

Resulta fundamental determinar algunas de las propiedades físicas del taquión, las cuales son importantes para lograr la transición de una teoría de cuerdas branas a una teoría de campos efectiva de baja energía de cuatro dimensiones [49,60]. Puesto que el campo taquiónico es el último modo sobreviviente de branas inestables, el recalentamiento taquiónico (o sus procesos de decaimiento) son especialmente importantes en las teorías de baja energía. Como se sabe el recalentamiento usual se da en términos del acoplamiento del campo original a otros campos más ligeros (escalares o fermiónicos) y a su masa, por lo cual la fenomenología del taquión depende mucho de su masa.

En el caso de los sistemas de Dp-branas en supercuerdas, se ha conjeturado [49,60]: (i) que el potencial V (T) es taquiónico en el origen T=0 [es decir que ahí se satisface $m^2 < 0$, donde m denota la masa del campo], (ii) tiene una simetría $Z_2 T \rightarrow -T$, (iii) y tiene un mínimo estable (como por ejemplo el caso de los potenciales $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$ y $V = V_i / \cosh[T]$). Por otra parte en el caso de los sistemas de D-pbranas bosónicos se ha conjeturado que el potencial V (T) es taquiónico en el origen, tiene un mínimo en un $T = T_1 > 0$, con $V(T_1) = 0$ y es ilimitado desde abajo para $T < 0$ con $V(T_2) = 0$ (como por ejemplo el potencial cúbico de la forma $V = T^3 + T^2 + A$). El caso de los taquiones bosónicos no ha sido estudiado tan exhaustivamente como en supercuerdas pues se argumenta que la ilimitación en el potencial mencionada es un problema y por que los potenciales con un mínimo para un valor finito de T son inestables [61]. Aquí se mostrará que el campo taquiónico normalizado $\phi(T)$ definido abajo no percibe que V (T) es ilimitado, debido a que $\phi(T)$ está restringido en el intervalo $T_2 \leq T \leq T_1$ (donde T_1 y T_2 son los ceros del potencial $V(T)$).

Uno de los puntos de interés en este trabajo es el de determinar la transformación que lleva del campo taquiónico T a un campo escalar normalizado estándar ϕ , así como determinar el potencial efectivo U ($\phi(T)$). Dicha transformación se debe de reducir a aquella válida para términos cinéticos pequeños $|\dot{T}| \ll 1$ (ver ecuación (2.52)) pero asimismo debe ser válida para valores grandes de \dot{T} . Esto es especialmente relevante para el estudio de energía oscura donde $\dot{T} \approx 1$ con $V(T) \approx 0$. Como se vio en mayor detalle en el capítulo dos, el potencial de cuerdas V en una acción del tipo Born-Infeld (ec. 2-34) corresponde a los casos $V(T) = B e^{-\alpha T^2}$ o $V(T) = A \text{Sech}[\sqrt{\beta m} T]$.

Para determinar en qué casos el universo acelera se deben deducir las condiciones de rodamiento lento exactas a diferencia de las que se deducen en (2-56) y (2-57) válidas para \dot{T}^2 pequeño. Con ese fin se emplea la regla de L'Hopital y se estudia el comportamiento tardío de los campos T y ϕ . Apoyándose en lo anterior es fácil obtener las soluciones para el potencial de escalamiento, y determinar los potenciales que originan un universo acelerado.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 3.2 se presenta una revisión con los aspectos relevantes del campo taquiónico para este trabajo. En la sección 3.3 se usa la definición de la masa de un campo escalar como el polo del propagador para determinar la masa del taquión. En la

sección 3.4 se encuentra la transformación del campo T para obtener un campo escalar ϕ canónicamente normalizado. Mientras que en la sección 3.5 se estudia el comportamiento general de ϕ es decir independiente de los modelos, y se concluye presentando unos ejemplos. En la sección 3.6 se utiliza la regla de L'Hopital para estudiar el comportamiento tardío del campo escalar, y finalmente las conclusiones se dan en la sección 3.7.

Los resultados de este capítulo forman parte de las contribuciones de esta tesis, y se basan en la referencia [62].

SECCION 3.2 EL CAMPO TAQUIONICO T

El campo taquiónico de cuerdas está dado en términos de la lagrangiana de Dirac-Born-Infeld “DBI”, en unidades de $\alpha' \equiv 1$ (la tensión de la cuerda es $(2\pi)^{-1}$) [ver [49,60] y la ec (1-42) así como el comentario seguido de la ec. (1-41)] por la ecuación (2.35)

$$\mathfrak{S} = -V(T) \sqrt{1 - \partial_\mu T \partial^\mu T}, \quad (3-1) \text{ (ec.2-35)}$$

donde V (T) es el potencial, T es el campo normalizado en unidades de la longitud de la cuerda $l_s = \sqrt{\alpha'}$ (ver ecuación (1-42)). El potencial es en principio arbitrario pero en general no se tendría un potencial de cuerdas, supondremos que V(T) tiene un máximo en el origen T=0, con energía positiva. La evolución de T se puede obtener resolviendo la ecuación de movimiento que se deduce de (2-35), la cual para el caso de un campo homogéneo en una métrica de Minkowski está dada por

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2} + \frac{V_T}{V} = 0, \quad (3-2)$$

donde $\dot{T} \equiv dT/dt$ y $V_T \equiv dV/dT$ [hacer H = 0 en (2-39)]. El segundo término de esta ecuación puede definir un potencial efectivo:

$$F(T) \equiv \text{Log}[V(T)] \quad (3-3)$$

con: $dF/dT = V_T/V$. El potencial F ha sido ampliamente usado en la literatura como potencial efectivo pero aquí se demostrara que ni F ni V son el potencial efectivo correcto para T [62].

La densidad de energía y la presión están dadas por las ecuaciones (2-43) y (2-45):

$$\rho = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}, \quad P = \mathfrak{S} = -V(T) \sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (3-4)$$

En términos de ρ la presión se puede escribir según (2-46) como:

$$P = -\frac{V^2(T)}{\rho} = w\rho, \quad (3-5)$$

que representa una ecuación de estado efectiva con $w = -V^2/\rho^2$. De (3-5) se ve que el campo taquiónico puede ser tratado como un gas de Chaplygin para un potencial plano V o como quintaesencia con $w = -V^2/\rho^2$. (Un gas de Chaplygin es aquel que obedece una ecuación de estado de la forma $P = -A/\rho$, donde A es una constante positiva, ver [33]).

La ecuación del movimiento (3-2) implica que $\dot{\rho} = 0$, es decir que la densidad de energía es conservada, y \dot{T} se convierte en una función de T, misma que de la ecuación (3-4) se expresa por

$$\dot{T}^2 = 1 - \frac{V(T)^2}{\rho^2}. \quad (3-6)$$

Si en el origen $T = T_i = 0$, se escoge como condición inicial $\dot{T}_i = 0$ entonces de (3-4) se ve que la densidad de energía toma el valor constante $\rho = V_i \equiv V(T_i)$ donde V_i representa el valor máximo del potencial, es decir $V(T) \leq V_i$ para todo. Además si el mínimo del potencial se hace cero $V_{\min} = 0$, entonces en este punto la energía cinética se hace $\dot{T}_{\min}^2 = 1$. De donde si se quiere tener un campo canónicamente normalizado el cual incluya el comportamiento tardío del campo T, especialmente importante para consideraciones de energía oscura, entonces la transformación del campo deberá ser necesariamente válida para valores grandes de \dot{T} .

SECCION 3.3 LA MASA TAQUIONICA

La masa de una partícula entra en diferentes procesos fenomenológicos tales como el decaimiento de partículas o el recalentamiento. Por lo que es importante determinar cual es la masa del campo taquiónico T. La masa de un campo escalar está dada por la segunda derivada del potencial $V(\phi)$, es decir $m^2 = d^2V/d\phi^2$. No obstante, lo anterior es sólo válido si el campo escalar tiene un término cinético canónico lo cual no es el caso para el campo taquiónico T. Aún considerando el potencial efectivo F (ec.3-3), la masa del taquión no es d^2V/dT^2 ni $d^2F/dT^2 = V_{TT}/V - V_T^2/V^2$.

Debido a lo anterior, resulta más conveniente definir la masa a partir del polo del propagador [63]. A continuación se lleva a cabo un procedimiento general para encontrar la masa de un campo escalar, asumiendo potenciales arbitrarios y términos cinéticos tales que $\mathfrak{S}(\phi, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)$, y después se especializa para encontrar una expresión para la masa del campo taquiónico. Con este fin se expande $\mathfrak{S}(\phi, \partial_\mu \phi)$ a segundo orden en el campo perturbado $\phi(t, x) \equiv \phi_0(t) + \delta\phi(t, x)$ (la contribución a primer orden de la expansión anterior lleva de inmediato a la ecuación de movimiento del campo, en el caso de T a (3-2)).

Para potenciales arbitrarios y con términos cinéticos tal que $\mathfrak{S}(\phi, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)$, el término de segundo orden puede ser puesto en la forma:

$$\int dx^4 \delta\mathfrak{S} = \int dx^4 [A(t)\delta\dot{\phi}^2 + B(t)\delta\phi\delta\dot{\phi} + C(t)\delta\phi'^2 + D(t)\delta\phi^2], \quad (3-7)$$

con: $\delta\phi' = \partial(\delta\phi)/\partial x$ y:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi}^2}, \quad B = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi} \partial \phi}, \quad (3-8)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \phi'^2}, \quad D = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \phi^2}, \quad (3-9)$$

y los otros términos que contienen derivadas segundas se anulan.

Después de integrar por partes y eliminar los términos de superficie se obtiene:

$$\int dx^4 \delta\mathfrak{S} = -\int dx^4 A \delta\phi \left(\partial_t^2 + \frac{C}{A} \partial_x^2 + m^2 \right) \delta\phi. \quad (3-10)$$

Con la masa del campo escalar dada por:

$$m^2 = -\frac{1}{A} \left(D + \frac{\ddot{A}}{2} - \frac{\dot{B}}{2} \right), \quad (3-11) \quad \text{de}$$

(3-10) es claro que m^2 representa el polo del propagador: $(\partial_t^2 + \frac{C}{A} \partial_x^2 + m^2) \Delta_F(x) = -\delta^4(x)$.

En el caso de un campo escalar canónico normalizado con lagrangiana $\mathfrak{S} = (\partial_\mu \phi)^2 / 2 - W(\phi)$ los coeficientes (3-8) y (3-9) están dados por:

$$A = 1/2, \quad B = 0, \quad C = -1/2, \quad D = -1/2 d^2W/d\varphi^2. \quad (3-12)$$

El término $A = 1/2$ define un campo canónicamente normalizado y la masa esta dada por la expresión usual $m^2 = -D/A = d^2W/d\varphi^2$.

En el caso del campo taquiónico T definido en la ecuación (3-1), se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \frac{\rho^3}{V^2}, & B &= \frac{\rho V_T \dot{T}}{V} \\ C &= -\frac{\rho}{2}, & D &= -\frac{V V_{TT}}{2\rho}, \end{aligned} \quad (3-13)$$

al sustituir en (3-11) se obtiene

$$m^2 = \frac{V_{TT}}{V} - \frac{V_T^2}{V^2} \left(3 - \frac{V^2}{\rho^2} \right). \quad (3-14)$$

Como se dijo arriba el polo del propagador determina la expresión para m^2 , la cual no coincide con d^2V/dT^2 ni con $d^2F/dT^2 = V_{TT}/V - V_T^2/V^2$.

El término proporcional a $\partial_x^2 C/A = -V^2/\rho^2$ equivale a la velocidad de fase de las perturbaciones v_{ph}^2 y determina una métrica del tipo Carrolliano ver sección 2.2.A). Lo cual significa que $v_{ph}^2 = -C/A = V^2/\rho^2$ se anula cuando $V = 0$, para entenderlo físicamente, se puede pensar en las excitaciones taquiónicas como ondas sonoras, el hecho de que su rapidez tienda a cero se corresponde con que la presión en este límite se haga cero ($P=0$), pues $\dot{T}^2 \rightarrow 1$.

SECCION 3-4 EL CAMPO ESCALAR NORMALIZADO

A continuación se busca una transformación que permita obtener un campo taquiónico canónico, válida para valores arbitrarios de \dot{T} .

El caso de un campo escalar con términos canónicos cinéticos en el límite de términos cinéticos pequeños ($|\dot{T}| \ll 1$) ha sido estudiado en la literatura dando una lagrangiana de la forma

$\mathfrak{S} \cong V(T)(1 - \dot{T}^2/2)$ con $A = V/2$ (8-3). Esto sugiere la transformación [56,59]

$$V\dot{T}^2 = \dot{\phi}^2. \quad (3-15)$$

Esta transformación lleva a una lagrangiana de la forma $\mathfrak{S} \cong \dot{\phi}^2/2 - V$. Sin embargo es claro que el campo ϕ es canónicamente normalizado solo en el límite de términos cinéticos pequeños mientras que la región más interesante es a tiempos tardíos donde V se aproxima a cero y $\dot{T} \cong 1$.

Para obtener una transformación válida para valores arbitrarios de \dot{T} , se expande la ecuación (3-1) alrededor de un valor arbitrario $T_0(t)$ y $\dot{T}_0(t)$ i.e., $T(t) = T_0(t) + \delta T(t, x)$, de tal forma que el término en segundo orden en $\delta\dot{T}$ esta dado por

$$\delta L \cong \frac{V(T_0)}{2(1 - \dot{T}_0^2)^{3/2}} \delta\dot{T}^2, \quad (3-16)$$

el cual es justamente el término A de la ecuación (3-13) pues la densidad de energía $\rho = V(T_0)/\sqrt{1 - \dot{T}_0^2}$ es constante. De (3-16) se sugiere como nueva transformación para el taquiión

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{V(T_0)}{(1 - \dot{T}_0^2)^{3/2}}} \dot{T} = \frac{\rho^{3/2}}{V} \dot{T}, \quad (3-17)$$

para obtener un campo taquiónico normalizado ϕ . La transformación anterior se reduce a la (3-15) cuando $\dot{T} \ll 1$ lo cual implica que $\rho \cong V$, sin embargo claramente (3-17) es válida para valores arbitrarios de \dot{T} y no solo cuando es pequeño.

Integrando la ecuación (3-17)

$$\phi = \int (\rho^{3/2} \dot{T} / V) dt = \rho^{3/2} \int (\dot{T} / V) dt = \rho^{3/2} \int dT / V . \quad (3-18)$$

La ecuación de movimiento para ϕ resulta de (3-2), utilizando (3-17) (con ρ constante):

$$\ddot{\phi} + U_{\phi} = 0 , \quad (3-19)$$

con el potencial efectivo definido por

$U_{\phi} \equiv dU / d\phi = (\rho^3 / V^3) dV / d\phi$. Para ρ constante la ecuación anterior se integra para U, y se reduce a:

$$U = U_0 - \frac{\rho^3}{2V^2} , \quad (3-20)$$

donde U_0 es una constante dada por: $U_0 = 3\rho/2$ (para que inicialmente cuando $\dot{T} \ll 1$ $U = \rho \cong V$).

La densidad de energía (3-4) se puede escribir en términos de ϕ y el potencial efectivo U como:

$$\rho = \frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2}} = \frac{V}{\sqrt{1-(V^2/\rho^3)\dot{\phi}^2}} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi) . \quad (3-21)$$

La última igualdad de (3-21) se puede deducir por ejemplo extrayendo $\dot{\phi}^2$ de $\rho^2 = V^2 / (1 - V^2 \dot{\phi}^2 / \rho^3)$ y comparándolo con $\dot{\phi}^2 = 2(\rho - U)$. Es claro de la última igualdad que la densidad de energía ρ en términos de ϕ y U es la de un campo escalar canónicamente normalizado el cual puede ser derivado de una lagrangiana de la forma:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi) , \quad (3-22) \text{ con una}$$

ecuación del movimiento dada por (3-19). La masa del campo ϕ está dada por:

$$M^2(\phi) = \frac{d^2U}{d^2\phi} = \frac{\rho^3}{V^2} \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} - 3 \frac{V_{\phi}^2}{V^2} \right) \quad (3-23)$$

donde $V_{\phi} \equiv dV / d\phi$. Para expresar $M^2(\phi)$ en términos del campo T es suficiente usar la ecuación (3-17) para reescribir a U_{ϕ} y $U_{\phi\phi}$ como:

$$U_{\phi} = \frac{\rho^3}{V^3} \frac{dV}{d\phi} = \frac{\rho^3}{V^3} \frac{dT}{d\phi} \frac{dV}{dT} = \frac{\rho^{3/2}}{V^2} \frac{dV}{dT} \quad (3-24)$$

$$M^2(\phi) = \frac{d^2U}{d^2\phi} = \frac{\rho^3}{V^2} \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} - 3 \frac{V_{\phi}^2}{V^2} \right) = \left(\frac{V_{TT}}{V} - 2 \frac{V_T^2}{V^2} \right) . \quad (3-25)$$

Sustituyendo (3-17) en (3-1) se obtiene la lagrangiana $\mathfrak{S} = -V(\phi) \sqrt{1 - V(\phi)^2 \dot{\phi}^2 / \rho^3}$, con ρ constante. Si se realiza la expansión a segundo orden en perturbaciones de ϕ alrededor de un valor arbitrario $\phi_0(t)$, los coeficientes A, B, C, D, como se definen en (3-7) están dados ahora por:

$$A = \frac{1}{2} , \quad B = \frac{\phi V_{\phi}}{V} \left(3 - \frac{2V^2 \dot{\phi}^2}{\rho^3} \right) , \quad C = -\frac{V^2}{2\rho^2} ,$$

$$D = -\frac{V_{\phi\phi}\rho}{2V}(1-2V^2\dot{\phi}^2) + \frac{V_{\phi}^2\dot{\phi}^2}{2V^2}(3-2V^2\dot{\phi}^2). \quad (3-26)$$

La masa de ϕ está dada por el polo del propagador, a partir de las ecuaciones (3-11) y (3-26) se obtiene una masa que es igual a la obtenida en la ecuación (3-23).

En conclusión se ha mostrado que a primero y segundo orden la parte homogénea de la lagrangiana

$$\mathfrak{S} = -V(\phi)\sqrt{1-V(\phi)^2\dot{\phi}^2/\rho^3} \text{ y } \mathfrak{S} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi) \text{ son equivalentes.}$$

SECCION 3-5 ANALISIS GENERAL

A continuación se estudian algunas propiedades generales del campo taquiónico $\phi(T)$. Sin pérdida de generalidad se toma el origen en $T = 0$ y se asume que $V_i = V(T = 0) \neq 0$. Si T es un taquión en el origen, entonces $V_T(T=0)=0$. Se puede ver que la propiedad taquiónica de T se transmite a ϕ y a su potencial $U(\phi)$, puesto que en el origen $\phi=0$ y de las ecuaciones (3-20), (3-24) y (3-25) se tiene que: $U(\phi = 0) = \rho = V_i$ y $U_{\phi}(0) = V_T/V_i^{1/2}|_{\min} = 0$ y $U_{\phi\phi}(0) = V_{TT}/V_i|_{\min} > 0$

El potencial $U = U_0 - \frac{\rho^3}{2V^2}$ diverge y es ilimitado desde abajo mientras que $V \rightarrow 0$. En términos del potencial U y usando la ecuación (3-17) el valor de $\dot{\phi}$ es:

$$\dot{\phi}^2 = 2(\rho - U) = \rho(\rho^2/V^2 - 1). \quad (3-27)$$

En el origen se tiene que $V(T_i) = V_i = \rho$ y $\dot{\phi} = 0$ (ver 3-17) mientras que en el mínimo $V(T = 0)$ y $|\dot{\phi}| = \infty$. Aunque el potencial es ilimitado desde abajo la densidad de energía ρ permanece constante.

La conclusión es que en el mínimo las cantidades $U(\phi)$ y los campos ϕ y $\dot{\phi}$, tienden a un valor infinito, mostrando que ϕ tiene un comportamiento ilimitado y no oscila en el mínimo $V=0$. Sin embargo no existe una configuración estable, lo cual podría ser interpretado como el decaimiento de un sistema inestable brana-antibrana representado por el potencial taquiónico.

SUBSECCION 3.5.A Ejemplos

En esta sección se analizan unos pocos ejemplos interesantes. Primero se estudiarán los potenciales $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$ [49,60]. y $V = V_i/\cosh[T]$ ([64] y cap 2). En ambos casos se ha conjeturado que representan el campo taquiónico para un sistema Dp-branas en supercuerdas. Posteriormente se considera el caso de un potencial cúbico el cual es ilimitado desde abajo para T negativa a un sistema Dp-brana en cuerdas bosónicas.

SUBSECCION 3.5.A.A

Potencial $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$

El potencial $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$ ha sido ampliamente estudiado en la literatura [49,60]. Se caracteriza por tener un máximo en $T=0$ y aproximarse a cero para valores grandes de T.

El campo taquiónico normalizado ϕ en términos de T se obtiene sustituyendo V en la ecuación (3-18) para obtener:

$$\phi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E_{\text{rfi}} \left(\frac{T}{\sqrt{2}} \right), \quad (3-28)$$

y se puede ver en la figura 1. Nótese que cuando $T \rightarrow \pm \infty$ se tiene que $\phi \rightarrow \pm \infty$. El potencial efectivo $U(\phi)$ es ilimitado desde abajo para $V(T) \rightarrow 0$ y se muestra en la figura 2. El comportamiento de U, V y $F = \text{Log}[V] + C$, con C una constante tal que $F(T_i) = V(T_i)$, están dados por las líneas sólida, cortada y punteada respectivamente. Nótese que el potencial efectivo F es asimismo ilimitado desde abajo para $V(T) \rightarrow 0$.

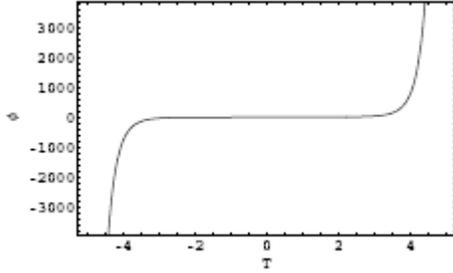


FIG1.- Se muestra el campo taquiónico normalizado ϕ como una función de T para el potencial $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$.

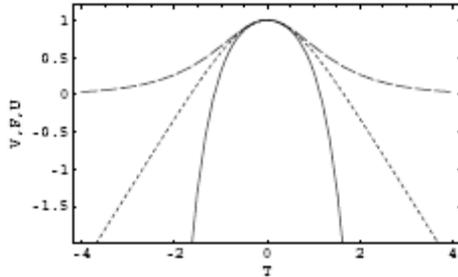


FIG 2.- Se muestran los potenciales U, V, F como una función de T (sólida, rayada, punteada respectivamente) para $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$.

La masa del campo taquiónico normalizado ϕ se obtiene de la ecuación (3-25), la masa de T de la (3-14), mientras que las segundas derivadas de V y F son tales que:

$$M^2 = -(T^2 + 1), \quad m^2 = T^2(e^{-T^2} - 2) - 1 \quad (3-29)$$

$$V_{TT} = e^{-T^2/2}(T^2 - 1) \quad F_{TT} = -1 \quad (3-30)$$

y son mostradas en la figura 3. (sólida, rayada, punteada rayada y punteada respectivamente). Las masas M^2 , m^2 , F_{TT} son negativas para todos los valores de T y M^2 , m^2 divergen cuando $T \rightarrow \pm \infty$ o equivalentemente si $V \rightarrow 0$. La masa infinita implica que el campo ya no es una variable dinámica en esos puntos. Por otra parte la cantidad V_{TT} es negativa en el origen y tiende a cero desde arriba para cuando $T \rightarrow \pm \infty$.

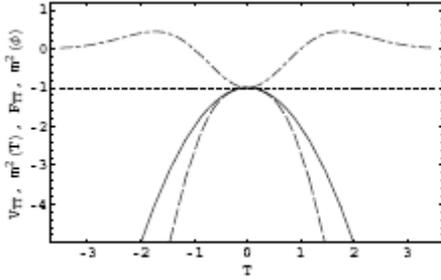


FIG.3.-Se muestran las masas M^2 , m^2 así como las segundas derivadas V_{TT} , F_{TT} como una función de T (sólida, rayada, punteada rayada, y punteada respectivamente). Para el potencial $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$.

SUBSECCION 3.5. A.B Potencial $V = V_i / \cosh[T]$

A continuación se estudia el potencial $V = V_i / \cosh[T]$ el cual ha sido también ampliamente analizado en la literatura [64]. Se caracteriza por tener un máximo en el origen $T=0$, ser nunca negativa, aproximarse a cero para valores grandes de T .

Usando la ecuación (3-18) se deduce que el campo taquiónico normalizado ϕ en términos de T es

$$\phi = \sinh[T], \quad (3-31)$$

se puede ver en la figura 4. Para $T \rightarrow \pm\infty$ se tiene el límite esperado $\phi \rightarrow \pm \infty$. Los potenciales efectivos $U(\phi)$ y $F(T)$ son ilimitados hacia abajo cuando $V(T) \rightarrow 0$, mientras que $V(T) \geq 0$ para todo T . Los comportamientos de U, V y F se muestran en la figura 5 y están dados por las líneas sólida, rayada y punteada respectivamente. El comportamiento del campo escalar normalizado ϕ y el de los potenciales U y F son muy similares para los dos ejemplos considerados hasta ahora: $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$ y $V = V_i / \cosh[T]$.

La masa del campo taquiónico normalizado ϕ se obtiene de la ecuación (3-25), la masa de T de la (3-14), mientras que las segundas derivadas de V y F son tales que:

$$M^2 = -1, \quad m^2 = -\frac{1}{4} \frac{(\cosh[4T] + 3)}{\cosh[T]^4} \quad (3-32) \quad V_{TT} = \frac{1}{2} \frac{(\cosh[2T] - 3)}{\cosh[T]^3},$$

$$F_{TT} = -\frac{1}{\cosh[T]^2}, \quad (3-33)$$

son mostradas en la figura 6 (sólida, rayada, rayada-punteada, y punteada respectivamente). La masa M^2 es negativa y constante, mientras que m^2 , F_{TT} son negativas para todos los valores de T y se aproximan a cero desde abajo para $T \rightarrow \infty$. La cantidad V_{TT} es negativa en el origen y tiende a cero desde arriba para $T \rightarrow \pm\infty$.

Contrario al caso de $V = V_i \text{Exp}[-T^2/2]$, para el potencial $V = V_i / \cosh[T]$ la masa de ϕ y T , i.e., M^2 y m^2 no diverge aunque los potenciales efectivos U, F divergen para T grande.

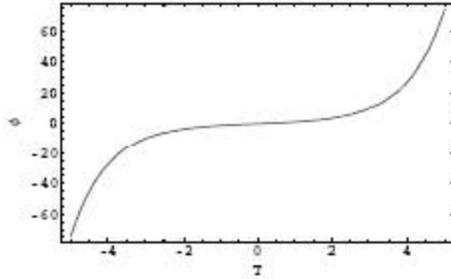


FIG.4 Se muestra el campo taquiónico normalizado ϕ como una función de T para el potencial $V = V_i / \cosh[T]$.

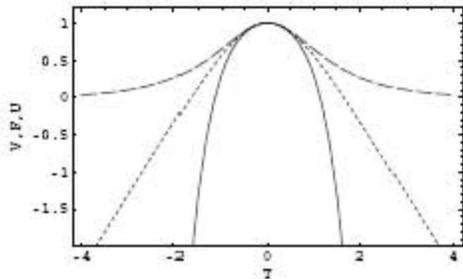


FIG.5.- Se muestran los potenciales U, V, F como una función de T (sólida, rayada y punteada respectivamente) para el potencial $V = V_i / \cosh[T]$.

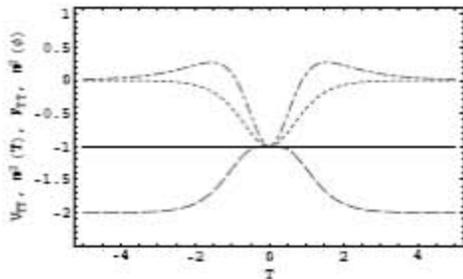


FIG.6 Se muestra las masas M^2, m^2 y las segundas derivadas V_{TT}, F_{TT} como una función de T (sólida rayada, rayada-punteada y punteada respectivamente) para el potencial $V = V_i / \cosh[T]$

SUBSECCION 3.5. A.C Potencial $V = T^3 + T^2 - 4/27$

A continuación se estudia el potencial

$$V = T^3 + T^2 - 4/27. \tag{3-34}$$

Este tipo de potencial se ha sugerido [49,60] para parametrizar el campo taquiónico de un sistema Dp-branas bosónicas inestables. El potencial tiene un máximo en el origen $T = 0$, un mínimo en

$T = 2/3$, es ilimitado hacia abajo para T negativo y $V(T)$ se desvanece en $T = 2/3, -1/3$ como se ve de la figura 7.

El campo taquiónico normalizado ϕ en términos de T se obtiene sustituyendo la ecuación (3-34) en (3-18), para obtener

$$\phi = \frac{8}{81\sqrt{3}} \left(\frac{9T}{2(2-3T)} + \text{Log} \left[\frac{2(1+3T)}{2-3T} \right] \right), \quad (3-35)$$

y se puede ver en la figura 8. Es claro que ϕ tiene un polo en $T = 2/3$ y en $T = -1/3$ donde $|\phi| \rightarrow \infty$ por lo cual aunque el potencial $V(T)$ esta definido para todos los valores de T , el campo taquiónico normalizado ϕ esta definido solo en el intervalo $-1/3 \leq T \leq 2/3$ lo cual implica que ϕ no conoce de la ilimitación de $V(T)$ para valores negativos de T . Sin embargo una vez más los potenciales efectivos $U(\phi)$ y F resultan ser ilimitados desde abajo para $V(T) \rightarrow 0$ y en la figura 9 se muestra el comportamiento de U, V y F dados por las líneas sólida, cortada y punteada respectivamente.

Los valores de la masa del campo taquiónico normalizado ϕ (ec 3-25), del campo T (ec 3-14) y las segundas derivadas de V y F están dados por

$$M^2 = -\frac{54(1+18T^2)}{(2-3T)^2(1+3T)^2}, \quad (3-36)$$

$$m^2 = \frac{27[-32-576T^2+5832T^4(T-1)]}{16(2-3T)^2(1+3T)^2} + \frac{27 \times 19683T^6(1-T)^2}{16(2-3T)^2(1+3T)^2}, \quad (3-37)$$

$$V_{TT} = 6T - 2, \quad (3-38)$$

$$F_{TT} = -\frac{27(2+9T^2)}{(2-3T)^2(1+3T)^2}, \quad (3-39)$$

y se muestran en la figura 10 (sólida, rayada, rayada-punteada y punteada respectivamente). Las masas M^2, m^2 y F_{TT} son negativas para todos los valores de T y tienen un polo en $T = 2/3, -1/3$ o equivalentemente $V \rightarrow 0$. La masa infinita implica que el campo ya no es una variable dinámica en esos puntos. La cantidad V_{TT} es solo positiva para $T > 1/3$.

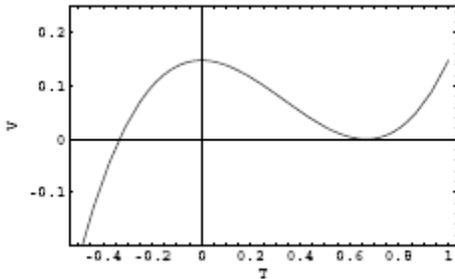


FIG. 7.- Se muestra el potencial $V = T^3 + T^2 - 4/27$ como una función de T .

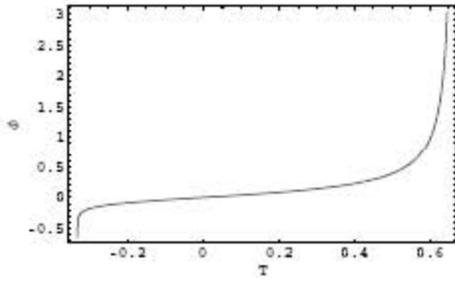


FIG. 8.- Se muestra el campo taquiónico normalizado ϕ como una función de T .

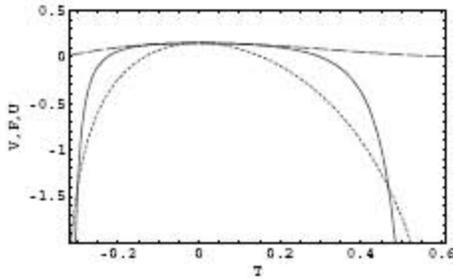


FIG. 9.- Se muestran los potenciales U, V, F como una función de T (sólida, rayada y punteada respectivamente).

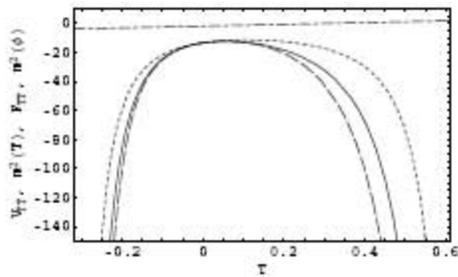


FIG. 10.- Se muestran las masas $M^2(\phi)$, $m^2(T)$ y las segundas derivadas V_{TT}, F_{TT} como una función de T (sólida, rayada, punteada-rayada y punteada, respectivamente).

SECCION 3-6 COMPORTAMIENTO TARDIO

En esta sección se analizará el comportamiento tardío del campo taquiónico normalizado en una Lagrangiana DBI. Asimismo existe interés en determinar si se puede obtener un universo acelerado al final. Para ello se utilizara la regla de *L' Hopital* para derivar las condiciones de rodado lento exactas. Dichas condiciones para el caso taquiónico han sido estudiadas en [62].

3.6. A Condiciones de rodado lento y la regla de *L'Hopital*

SUBSECCION3.6.A.A Campo escalar canónico ϕ .

A manera de introducción, se comienza con el análisis de un campo canónicamente normalizado y después se estudia el caso de una Lagrangiana del tipo DBI. En el primer caso la densidad de energía esta dada por $\rho = E_K + V$ y la presión por $P = E_K - V$ donde $E_K = \dot{\phi}^2 / 2$ es la energía cinética y $V(\phi)$ el potencial escalar. Para un análisis general véase por ejemplo la referencia [4]. La evolución de ρ y la aceleración del factor de escala $a(t)$ del universo son dadas en términos de ρ y P por las ecuaciones (1-7) y (1-5):

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) = -6H\rho(1 - X), \quad (3-40)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P) = -\rho\left(\frac{2}{3} - X\right), \quad (3-41)$$

con $H \equiv \dot{a}/a$. En las ecuaciones anteriores se ha definido la cantidad $X \equiv V/\rho$ y se ha puesto: $E_K = \rho - V = \rho(1 - X)$ en la última parte de las ecuaciones (3-40) y (3-41) (ver que $2E_K = \rho + P$). La cantidad X está claramente restringida a los valores $1 \geq X \geq 0$, además de (3-41) se ve que si X es más grande que $2/3$ entonces tiene un universo acelerado. El parámetro que define la ecuación de estado está dado en este caso por $w = P/\rho = 1 - 2X$ y si X es constante entonces se tiene una solución de escalamiento con $\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-6(1-X)}$ (integrando (3-40)).

A continuación se consideraran solo potenciales que se desvanecen en el mínimo $V_{\min} = 0$ (si $V_{\min} > 0$ es fácil mostrar que la dinámica siempre lleva a la inflación, si $V_{\min} \rightarrow cte > 0$, se trata de un gas de De Sitter y si $V_{\min} < 0$ entonces se da un universo no inflacionario (ec. 42-3) de hecho resulta en una gran implosión (“big crunch”) [65]. Para $V = 0$ con $\rho \neq 0$, i.e. $X = 0$ se ve de (3-41) que ϕ no lleva a ningún universo inflacionario. Sin embargo de (3-40) se ve que en este caso $\dot{\rho} < 0$ y por lo tanto ρ decrece hasta alcanzar el valor de $\rho = 0$. Este argumento muestra que el comportamiento tardío es el esperado: $V \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$, pero el límite $X = V/\rho$ si depende del modelo. Puesto que los límites de V y ρ son cero, se puede usar la regla de *L'Hopital* para determinar el valor asintótico (tiempo tardío),

$$\lim\left(X = \frac{V}{\rho}\right) = \lim\left(\frac{\dot{V}}{\dot{\rho}}\right) \quad (3-42)$$

Y puesto que el $\lim(\dot{\rho}) = 0$, si \dot{V} asimismo se hace cero entonces

$$\lim X = \lim\left(\frac{\ddot{V}}{\ddot{\rho}}\right). \quad (3-43)$$

De las ecuaciones de Friedmann (1-6) $H^2 = \rho/3$, del movimiento (1-14) $\ddot{\phi} = -V' - 3H\dot{\phi}$, y de la (3-40), es posible escribir (3-42) y (3-43) como las restricciones:

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{6(1 - X)} < \sqrt{2}, \quad (3-44)$$

$$\frac{V''}{V} = 6(1-X) < 2, \quad (3-45)$$

donde se ha utilizado la ecuación (3-44) para escribir la segunda derivada del potencial como: $\ddot{V}(\phi) = V''\dot{\phi}^2 + V'\ddot{\phi} = 2(1-X)\rho(V'' + 3V(1-X))$ para derivar la ecuación (3-45).

Las ecuaciones (3-44) y (3-45) son las condiciones de rodado lento a tiempo tardío (para V , $\rho \rightarrow 0$) y son exactas en este límite. Como ya se dijo un universo inflacionario requiere que $X > 2/3$, lo cual da lugar a la desigualdad en la ecuación (3-44). De esta forma se han determinado los valores exactos de V'/V y V''/V para los cuales el universo no infla asintóticamente, es fácil ver que el límite es satisfecho por un potencial de la forma $V = V_0 \exp[6(1-X)\phi]$ lo cual es inmediato de (3-44) y (3-45) al considerar que V'/V y V''/V son constantes y el exponente debe ser más pequeño que dos para que V infle. Este potencial corresponde a la solución de escalamiento (i.e. $X = cte$) y $\rho \propto (a/a_0)^{-6(1-X)}$.

Una inflación tardía, i.e. energía oscura requiere que $X > 2/3$ y en el límite de $X \rightarrow 1$, a partir de (3-44) se ve que $V'/V \rightarrow 0$. para un potencial $V = \phi^\alpha$ un periodo de inflación tardía es obtenido simplemente para $\alpha < 0$.

SUBSECCION 3.6. A.B Campo taquiónico T

A continuación se repite el análisis anterior para el campo taquiónico con Lagrangiana (3-1) en una métrica F.R.W. La ecuación del movimiento para T está dada por ec. (2-39) $\ddot{T}/(1-\dot{T}^2) + 3H\dot{T} + V_T/V = 0$ y la densidad y presión están dadas por la ec. (3-4). La evolución de ρ y la aceleración del universo son dadas en términos de ρ y P por las ecuaciones (1-7) y (1-5):

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) = -3H\rho(1-X^2), \quad (3-46)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P) = -\frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{3} - X^2\right), \quad (3-47)$$

con $1 \geq X = V/\rho \geq 0$ (ver ec. (3-6)). de la ecuación (3-46) es claro que un universo inflacionario requiere que $X^2 > 1/3$, además el lado derecho de la misma ecuación es no positivo lo cual implica que ρ permanece constante en el tiempo o decrece. El primer caso se da para $\rho = 0$ o cuando $X^2 = V^2/\rho^2 = 1$. Al igual que en el caso canónico, si $V(T) = 0$ y $\rho \neq 0$ entonces $X = 0$ y de (3-47) es fácil de ver que el campo taquiónico no infla al universo. Sin embargo en el límite cuando $V \rightarrow 0$ con $X \neq 1$ la densidad de energía decrece y $\rho \rightarrow 0$ asintóticamente.

Puesto que V y ρ tienden a cero entonces es posible usar la regla de *L'Hopital* para determinar el comportamiento asintótico de X , usando las ecuaciones (2-39), (3-42) y (3-43) es posible obtener las restricciones:

$$\left| \frac{V_T}{V^{3/2}} \right| = \sqrt{3\left(\frac{1}{X} - X\right)} < \sqrt{2\sqrt{3}}, \quad (3-48)$$

$$\frac{V_{TT}}{V^2} = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{X} - X\right) < 3\sqrt{3}. \quad (3-49)$$

Las ecuaciones (3-48) y (3-49) dan el límite asintótico exacto para potenciales taquiónicos y las desigualdades se cumplen si el universo ha de inflacionar (i.e. $X^2 > 1/3$). Una solución de

escalamiento requiere que $X = cte$ y de (3-48) se obtiene como potencial $V = V_0/T^2$, puesto que en este caso V_{TT}/V^2 y $V_T/V^{3/2}$ son constantes. Este potencial ha sido ampliamente estudiado [66] y aquí ha sido obtenido a través de una herramienta muy simple y poderosa, la regla de *L'Hopital*. El análisis anterior reproduce los resultados encontrados para una solución de escalamiento en [55], a saber: $\lambda \equiv -V_T/V^{3/2}$ constante y $\Gamma \equiv -V_T/V^2 = 3/2$. Sustituyendo el potencial $V = V_0/T^2$, en (3-48) se obtiene el valor de la constante V_0 en términos de X , según la relación: $V_0 = 4X/3(1-X^2)$ mientras que un universo inflacionario requiere que $V_0 \geq 2/\sqrt{3}$ para $X^2 \geq 1/3$. Contrario al caso de los campos canónicamente normalizados donde un potencial inverso siempre lleva asintóticamente a la inflación en este caso el término constante determina si el universo infla o no.

Si $X = 0$ entonces el lado derecho de la ecuaciones (3-48) y (3-49) es infinito (y no se satisfacen las desigualdades), tomando $V = T^\alpha$ se tiene que $\frac{V_T}{V^{3/2}} = T^{-(2+\alpha)/2}$ y $\frac{V_{TT}}{V^2} = T^{-(2+\alpha)}$, las ecuaciones (3-48) y (3-49) son satisfechas para $\alpha > 0$ con $V(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$, o para $\alpha < -2$ en el límite en que $V(T \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Por otra parte si $X = 1$ los lados derechos de (3-48) y (3-49) se desvanecen lo cual implica que $0 \geq \alpha > -2$ para $V(T \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Se ha demostrado que para potenciales inversos solo los modelos con $0 \geq \alpha \geq -2$ llevan a un periodo de inflación tardía, i.e. energía oscura.

SUBSECCION 3.6.B Límite asintótico para ϕ

A continuación se estudia como el campo taquiónico normalizado ϕ definido por (3-17) se comporta asintóticamente. Se supondrá que el origen esta en $T = 0$ y que el potencial $V(T)$ se desvanece en $T = T_m$, i.e. $V(T_m) = 0$ donde T_m puede tomar un valor finito o infinito. El potencial podría tener un mínimo en T_m pero no es relevante para lo que sigue si $V(T_m)$ es un mínimo o no. Para empezar se hace el estudio en una métrica de Minkowski. En este caso se tiene ρ constante y de la ecuación (3-17) se ve que en el límite $V(T \rightarrow T_m) \rightarrow 0$ se tiene:

$$\phi = \int \rho^{3/2} dT / V(T) = \rho^{3/2} \int dT / V(T) \rightarrow \infty, \quad (3-50)$$

puesto que el integrando diverge. Esto implica que el campo escalar normalizado ϕ está restringido entre los ceros del potencial $V(T)$ y nunca alcanza la región de $T > T_m > 0$ (o $T < T_m$ para T_m negativo) y ϕ siempre alcanza un valor infinito en $V(T) = 0$, i.e. el campo ϕ está definido solo en el intervalo $T_{m1} \leq T \leq T_{m2}$, donde $V(T_{m1}) = V(T_{m2}) = 0$, mientras que ϕ toma el rango completo de valores $-\infty \leq \phi \leq \infty$. Este resultado contrasta con el obtenido usando (3-15) donde se obtienen valores finitos de ϕ en el límite $V \rightarrow 0$. Sin embargo en este punto se vuelve a señalar que la transformación (3-15) da un campo escalar canónico solo para pequeños valores de \dot{T} y no para valores de $\dot{T} \cong 1$ donde V se aproxima a cero.

La restricción del campo taquiónico en el intervalo $T_{m1} \leq T \leq T_{m2}$, con $V(T_{m1}) = V(T_{m2}) = 0$, es muy importante para modelos con valores finitos de T_m como en el caso de un potencial cúbico de la forma $V = T^3 + T^2 - C$ ($C > 0$), este tiene un mínimo local para $T > 0$ y es ilimitado desde abajo para $T < 0$. Este tipo de potenciales obtenidos de branas D-p en teoría de cuerdas bosónicas no ha sido completamente analizado porque es ilimitado desde abajo para $T < 0$ y porque en el valor

mínimo $T > 0$ el sistema es inestable [61] (un crecimiento grande de perturbaciones cuando T oscila alrededor de $T_m > 0$).

Sin embargo el campo físico ϕ no alcanza las regiones afuera de los ceros del potencial $V(T)$ y por lo tanto no oscila alrededor de $T_m > 0$ ni percibe la ilimitación del potencial para T negativo. El hecho de que ϕ no oscile alrededor de un mínimo es lo que se espera de un taquión motivado de cuerdas [49,60].

SUBSECCION 3.6. B.A Límite asintótico para ϕ en FRW

En el caso de una métrica FRW, la densidad de energía no es constante y no se puede sacar ρ de la integral (3-18) sin embargo todavía es posible investigar el valor asintótico de ϕ para $V(T) \rightarrow 0$ utilizando la regla de *L'Hopital*, como en la sección previa. La cantidad relevante es el integrando $Y \equiv \rho^{3/2}/V(T)$ de la ecuación (3-18). Similar a las ecuaciones (3-42) y (3-43) se tiene en este caso

$$\text{Lim}\left(Y = \frac{\rho^{3/2}}{V}\right) = \text{Lim}\left(\frac{(3/2)\dot{\rho}\rho^{1/2}}{\dot{V}}\right), \quad (3-51)$$

(derivando respecto al tiempo numerador y denominador) con $\dot{V} = V_T \dot{T}$. Usando las ecuaciones (3-46) y (3-48) es posible escribir (3-51) en la forma:

$$\text{Lim}(Y) = \text{Lim}\left(\frac{3}{2}Y\right), \quad (3-52)$$

la cual es satisfecha solo si $Y = \rho^{3/2}/V = 0$ o $Y = \infty$. Puesto que $Y = \sqrt{\rho}/X = \sqrt{V}/X^{3/2}$ y $0 \geq X = V/\rho \geq 1$ un valor de $X \neq 0$ lleva a que $Y \rightarrow 0$. Este es el caso para cualquier modelo que lleva a inflación tardía puesto que X debe ser mas grande $2/3$. En este caso el integrando de la ecuación (3-18) se desvanece a tiempos tardíos y un valor finito de ϕ es obtenido siempre que $\int Y dT \equiv (\int \sqrt{V} dT)/X^{3/2}$ sea finito en el limite de V cero (se ha tomado X fuera de la integral puesto que en el limite asintótico se aproxima a una constante). Esto sucederá para modelos con un potencial $V(T)$ que se desvanece en un valor finito de T . Por otra parte si $X = 0$, el cual representa un modelo sin inflación tardía, el valor de Y es dependiente del modelo.

SECCION 3.7 RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se ha analizado el campo taquiónico motivado por interacciones brana antibrana con una Lagrangiana efectiva del tipo BI con potencial $V(T)$. Se ha deducido la masa del campo taquiónico T como el polo del propagador el cual no está dado por la segunda derivada de V ni por la segunda derivada del potencial efectivo $F \propto \text{Log}[V]$. La masa de T está dada por (3-14).

Puesto que T no tiene término cinético canónico se generalizó la transformación usada comúnmente $\varphi = \int \sqrt{V} dT$ la cual es solamente valida para \dot{T} pequeño, a la transformación $\phi = \int (\rho^{3/2}/\sqrt{V}) dT$ válida para todo \dot{T} y la cual se reduce a la transformación de φ en el límite de \dot{T} pequeñas. Se obtuvieron también las ecuaciones del movimiento para ϕ , el potencial efectivo $U(\phi)$ dado por la ecuación (3-20), y su masa (3-23). Se demostró que el campo taquiónico

normalizado ϕ en una métrica de Minkowski esta definido solamente en la región entre los ceros del potencial original $V(T)$ y toma el rango completo entre $-\infty$ y ∞ .

El potencial $U(\phi)$ es ilimitado desde abajo pero la densidad de energía total ρ permanece constante.

Para derivar las condiciones exactas de rodado lento para inflación tardía (energía oscura) se utilizó una herramienta simple pero poderosa, la regla de *L'Hopital*. De paso se derivó el potencial de escalamiento tanto para un campo escalar estándar como para uno taquiónico.

CAPITULO 4 ANALISIS DINAMICO DE LA INTERACCION TAQUION Y CAMPO ESCALAR.

INTRODUCCION

En este capítulo se estudia la evolución de un campo escalar T con una lagrangiana del tipo Dirac-Born-Infeld acoplada a un campo escalar canónico a través de un término de interacción arbitrario $B(T, \phi)$ en la presencia de un fluido barotrópico, el cual puede ser materia o radiación. Es importante mencionar que la aportación de este análisis es generalizar lo que se ha hecho en otros trabajos anteriores: en el caso de un campo escalar y un fluido barotrópico [4] (ver sección 1-3), un campo taquiónico y un fluido barotrópico [55] (sección 2-5), y dos campos escalares simples, con potencial arbitrario y un fluido barotrópico [81]. A lo largo del capítulo se llamará al campo T taquiónico aunque no se restringirá el trabajo al caso de potenciales $V(T)$ tales que $m^2 < 0$ en el origen. De tal forma que los resultados obtenidos sean válidos para cualquier potencial. Se demostrará que la dependencia de todos los modelos se da a través de tres parámetros $\lambda_1 = -V_T/V^{3/2}$, $\lambda_2 = -B_T/B^{3/2}$, $\lambda_3 = -B_\phi/B$. Se determinan las ecuaciones dinámicas y se obtienen las soluciones atractoras como una función de estos parámetros λ_i . Uno de los resultados importantes que se obtienen en este trabajo es mostrar que en ausencia de un término de interacción B el campo taquiónico se diluye como materia; mientras que en presencia de B lo hace tardíamente como radiación.

El capítulo 4 se organiza de la siguiente manera: En la sección 4.1 se encuentran las ecuaciones dinámicas del movimiento, incluyéndolas en su forma en términos de las densidades de energía. En la sección 4.2 se encuentran las ecuaciones de estado efectivas de los campos taquiónico y escalar. En la sección 4.3 se expresa el sistema de ecuaciones original en términos de un sistema dinámico de ecuaciones de primer orden y se hace ver que queda determinado por solo tres parámetros. En la sección 4.4 se calculan los puntos críticos del sistema incluyendo un análisis de estabilidad de los mismos asumiendo por simplicidad que dominan asintóticamente uno de los dos campos escalares o ambos. Mientras que en la subsección 4.4 A se hace un análisis teórico detallado de dos de los modelos de interés obtenidos en la sección 4.4. En la subsección 4.4B se hace énfasis en los modelos de física de partículas y en definir una T -derivada de un potencial efectivo V_{efec} . En la sección 4.5 se encuentran soluciones críticas del sistema hallado en la sección 4.3 para el caso de valores constantes de los parámetros λ_i .

En la sección 4.6 se analiza el comportamiento asintótico de los diferentes límites de los parámetros λ (asumiendo que ya no son constantes y que evolucionan), en la subsección 4.6 A se dan algunos ejemplos interesantes de soluciones atractoras incluyendo las gráficas que las ilustran, y en la sección 4.7 se concluye con un resumen de los aspectos más importantes del capítulo.

SECCION 4.1 ACOPLAMIENTO TAQUIONICO Y CAMPO ESCALAR

En lo que sigue se estudia la cosmología de un universo dominado por un campo taquiónico en interacción con un campo escalar canónico en presencia de un fluido barotrópico, la importancia de este tipo de análisis es que por un lado, el taquión podría jugar un papel relevante como fuente de energía oscura [21]. La evidencia experimental indica que el universo ha comenzado recientemente a acelerarse con una densidad de energía muy próxima a la crítica [70,71,72], de la cual la energía de vacío corresponde a 7/10 del total [1,2] (ver sección 1-1). También es interesante el papel que podría desempeñar en la cuestión del proceso de inflación primordial, de tal modo que pudiera contribuir a la solución de algunos de los problemas clásicos de la cosmología estándar como el de la planitud y el horizonte (ver subsección 1.1.A y [5]). Por otra parte el campo taquiónico también

tiene un sitio relevante en lo que se refiere al recalentamiento (el recalentamiento es el proceso por el cual un campo escalar evoluciona y desciende su potencial hasta liberar su energía ver sección 1.7 y [68]). Como ya se mencionó (Cáp.2) este campo es motivado de la física de cuerdas-branas y representa el nivel de energía más bajo de una Dp-brana inestable, o de un sistema brana-antibrana. Puesto que el taquión es el último modo sobreviviente de branas inestables, el proceso de recalentamiento taquiónico es especialmente importante en el límite de bajas energías [17]. El caso particular del recalentamiento taquiónico depende de su acoplamiento a campos escalares y fermiónicos más ligeros. En principio se podría aprovechar el hecho de que tal y como se menciona en el capítulo 2, el taquión en su etapa final se comporta como materia (presión cero) para proponerlo como una fuente de materia oscura [46] sin embargo ello representa un problema abierto del taquión, pues ello daría lugar a un universo dominado por la materia sin que hubiera una época dominada por la radiación (ver sección 2-4 [56,61]).

De lo anterior, es interesante la búsqueda de modelos que den lugar a un proceso de expansión acelerada del universo, mientras que en relación al recalentamiento taquiónico, buscar entre los modelos aquellos que al terminar el recalentamiento desaparezca por completo, después de liberar su energía, lo cual evitaría el problema mencionado.

El punto de partida es un universo lleno con dos campos escalares ϕ, T y una densidad de energía barotrópica ρ_b , la cual puede ser materia ($w_b = 0$) o radiación ($w_b = 1/3$). Se asumirá que dichos campos interactúan a través de un potencial $B(T, \phi)$, mientras que su interacción con el fluido barotrópico es solo gravitacional. Este análisis generaliza lo que se hizo en el caso de un campo escalar y un fluido barotrópico [4] (ver sección 1-3), un campo taquiónico y un fluido barotrópico [55] (sección 2-5), y dos campos escalares simples, con potencial arbitrario y un fluido barotrópico [81].

Las ecuaciones de un campo taquiónico acoplado a un campo escalar para el caso de un universo Friedmann Robertson Walter (FRW) espacialmente plano se deducen a partir de la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-V(T) \cdot \sqrt{1 - \dot{T}^2} + 1/2 \dot{\phi}^2 - B(T, \phi) \right]. \quad (4-1)$$

Donde el taquión está dado por una lagrangiana del tipo Born-Infeld [49,60,17] con un potencial taquiónico $V(T)$ y $B(T, \phi)$ es la interacción entre los campos escalar ϕ y taquiónico T , mientras que $\sqrt{-g} = a^3$ (a es el factor de escala).

Del principio variacional las ecuaciones del movimiento quedan dadas por [73]:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + B_\phi = 0, \quad (4-2)$$

$$\frac{\ddot{T}}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} + 3H\dot{T} + \frac{V_T}{V} + B_T \frac{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}{V} = 0. \quad (4-3)$$

De la relación $\dot{H} = \ddot{a}/a - H^2$, se obtiene

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho_\phi + \rho_T + \rho_b + P_\phi + P_T + P_b) = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \rho_T \dot{T}^2 + \rho_b(1 + w_b)) \quad (4-4)$$

Donde $H = \dot{a}/a$, ρ_b y P_b denotan la densidad y presión del fluido barotrópico, ρ_ϕ y P_ϕ denotan la densidad y presión del campo escalar, ρ_T y P_T denotan respectivamente las mismas cantidades del campo taquiónico, H es el parámetro de Hubble el cual se encuentra relacionado con la densidad total ρ a través de la ecuación de Friedmann $H^2 = 1/3\rho$ y como ya se dijo a es el factor de escala.

Por otro lado la presión y la densidad de energía del sistema están dadas por:

$$P = -V(T) \cdot \sqrt{1-\dot{T}^2} + 1/2 \dot{\phi}^2 - B(T, \phi) + P_b, \quad \rho = \frac{V}{\sqrt{1-\dot{T}^2}} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + B(T, \phi) + \rho_b. \quad (4-5)$$

En las expresiones anteriores las contribuciones del campo escalar a la presión y a la densidad de energía están definidas por:

$$P_\phi = 1/2 \dot{\phi}^2 - B(T, \phi), \quad \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + B(T, \phi), \quad (4-6)$$

mientras que las correspondientes cantidades taquiónicas están dadas por (ver ecs. (2-43) y (2-45)):

$$P_T \equiv -V(T) \sqrt{1-\dot{T}^2}, \quad \rho_T \equiv \frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}. \quad (4-7)$$

A partir de las ecuaciones (4-6) y (4-7) es posible reescribir las ecuaciones dinámicas (4-2) y (4-3) en términos de las densidades de energía como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\phi + 3H \rho_\phi (1 + w_\phi) &= \delta = B_T \dot{T}, \\ \dot{\rho}_T + 3H \rho_T (1 + w_T) &= -\delta = -B_T \dot{T}, \\ \dot{\rho}_b + 3H \rho_b (1 + w_b) &= 0. \end{aligned} \quad (4-8)$$

En donde se ha incluido la evolución del fluido barotrópico ρ_b y

$$\delta \equiv B_T \dot{T}, \quad (4-9)$$

define el término de interacción.

Los parámetros de las ecuaciones de estado están dados por:

$$w_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{1/2 \dot{\phi}^2 - B(\phi)}{1/2 \dot{\phi}^2 + B(\phi)}, \quad w_T \equiv \frac{P_T}{\rho_T} = -1 + \dot{T}^2. \quad (4-10)$$

Para tener una densidad de energía taquiónica real (ver ecuación (4-7)) se requiere que $0 \leq \dot{T}^2 \leq 1$, y de la ecuación (4-10), se ve que $-1 \leq w_T \leq 0$.

SECCION 4.2 ECUACION DE ESTADO EFECTIVA

Para obtener una ecuación de estado efectiva, simplemente se reescriben las ecuaciones (4-8) en la forma [73]:

$$\dot{\rho}_\phi = -3H \rho_\phi (1 + w_{\phi_{efec}}), \quad \dot{\rho}_T = -3H \rho_T (1 + w_{T_{efec}}). \quad (4-11)$$

Con la ecuación de estado efectiva definida por:

$$w_{\phi_{efec}} \equiv w_\phi - \frac{B_T \dot{T}}{3H \rho_\phi}, \quad w_{T_{efec}} \equiv w_T + \frac{B_T \dot{T}}{3H \rho_T}. \quad (4-12)$$

De la ecuación (4-11) se ve que $w_{T_{efec}}$, $w_{\phi_{efec}}$ dan la evolución completa de ρ_T Y ρ_ϕ . Para $B\dot{T} > 0$ se tiene que $w_{\phi_{efec}} < w_\phi$ y el fluido ρ_ϕ se diluye más despacio de lo que lo hace en ausencia del término de interacción (i.e. $B_T \dot{T} = 0$), mientras que ρ_T lo hace más rápido por que $w_T < w_{T_{efec}}$. La respuesta a la pregunta de cual de los fluidos dominará a tiempos tardíos, dependerá de cual ecuación de estado es la más pequeña. La diferencia de las ecuaciones (4-12), queda dada por:

$$\Delta w_{efec} \equiv w_{T_{efec}} - w_{\phi_{efec}} = \Delta w - \Upsilon, \quad (4-13)$$

con: $\Delta w \equiv w_T - w_\phi$ y Υ definido como

$$\Upsilon = \frac{\mathbf{B}_T \dot{T}}{3H} \begin{pmatrix} \rho_\phi + \rho_T \\ \rho_\phi \rho_T \end{pmatrix}. \quad (4-14)$$

Mientras que la suma da:

$$\Omega_T w_{Tefec} + \Omega_\phi w_{\phiefec} = \Omega_T w_T + \Omega_\phi w_\phi, \quad (4-15)$$

donde como ya se mencionó en los capítulos (1) y (2) las cantidades adimensionales Ω_i se expresan como la razón de la densidad de energía de un sistema a la densidad crítica y se dan por: $\Omega_T = \rho_T / 3H^2$, $\Omega_\phi = \rho_\phi / 3H^2$ y $\Omega_b = \rho_b / 3H^2$ (ver las ecuaciones (4-23) y (4-24)).

Claramente la cantidad relevante para determinar el crecimiento relativo es Υ y si $\Upsilon < \Delta w$ se tiene que $\Delta w_{efec} > 0$ (i.e. $w_{Tefec} > w_{\phiefec}$) y ρ_ϕ dominará el universo en tiempos tardíos con $\Omega_\phi = 1$, $\Omega_T = 0$. Para $\Upsilon > \Delta w$ se tiene que $\Delta w_{efec} < 0$ y $w_{Tefec} < w_{\phiefec}$ con ρ_T prevaleciendo y $\Omega_T = 1$, $\Omega_\phi = 0$.

Si ambos fluidos se diluyen de la misma manera i.e. $\Delta w_{efec} \equiv 0$ y $w_{efec} = w_{Tefec} = w_{\phiefec}$, de la ecuación (4-15) se obtiene

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_\phi} = \frac{w_\phi - w_{efec}}{w_\phi + w_{efec}}. \quad (4-16)$$

Si $w_\phi < w_T$ se tiene que:

$$w_\phi \leq w_{\phiefec} = w_{Tefec} = \frac{w_T \Omega_T + w_\phi \Omega_\phi}{\Omega_T + \Omega_\phi} \leq w_T, \quad (4-17)$$

y para el caso en que $w_\phi \geq w_T$ se obtiene

$$w_\phi \geq w_{\phiefec} = w_{Tefec} = \frac{w_T \Omega_T + w_\phi \Omega_\phi}{\Omega_T + \Omega_\phi} \geq w_T, \quad (4-18)$$

i.e, la ecuación de estado efectiva se encuentra restringida a estar entre los valores de w_ϕ y w_T . En el limite de no interacción $\delta = 0$, se obtiene $\Upsilon = 0$ y $\Delta w_{efec} = \Delta w$, y dependiendo de cual de w_ϕ o w_T sea más pequeña, se tendrá cual de las densidades ρ_ϕ o ρ_T terminara por dominar el universo tardíamente.

SECCION 4.3 ANALISIS DINAMICO.

Con el fin de simplificar el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (4-2) y (4-3) (o bien el (4-8)), y de paso determinar las soluciones atractoras es posible expresarlo en forma de un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden, por medio de las sustituciones [4,55,67,73]:

$$\begin{aligned} X_1 &= \dot{T} = HT' & X_2 &= \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6H}} \\ Y_1 &= \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3H}} & Y_2 &= \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3H}} \end{aligned} \quad (4-19)$$

Donde una prima denota la derivada respecto al número de e-folds $N = \ln(a)$. De tal forma que el sistema de ecuaciones (4-8), y la ecuación (4-4) se expresan como [73]:

$$\begin{aligned}
X_1' &= -(1-X_1^2) \left(3X_1 - \sqrt{3}Y_1\lambda_1 - \sqrt{3}\sqrt{1-X_1^2} \frac{Y_2^3}{Y_1^2} \lambda_2 \right) & X_2' &= -\left(3 + \frac{H'}{H} \right) X_2 + \sqrt{\frac{3}{2}} Y_2^2 \lambda_3 \\
Y_1' &= -\frac{H'}{H} Y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_1 X_1 Y_1^2 & Y_2' &= -\frac{H'}{H} Y_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_2 X_1 Y_2^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda_3 X_2 Y_2.
\end{aligned} \quad (4-20)$$

$$\frac{H'}{H} = -\frac{3}{2} (\Omega_1 \gamma_1 + \Omega_2 \gamma_2 + \Omega_3 \gamma_3) = -\frac{3}{2} (2x_2^2 + x_1^2 \Omega_1 + \Omega_b \gamma_b). \quad (4-21)$$

Donde se ha definido:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{V_T}{V^{3/2}} & \lambda_2 &= -\frac{B_T}{B^{3/2}} \\
\lambda_3 &= -\frac{B_\phi}{B}
\end{aligned} \quad (4-22)$$

Con la notación:

$$V_T = \frac{dV}{dT}, \quad B_T = \frac{dB}{dT}, \quad B_\phi = \frac{dB}{d\phi}.$$

Las ecs (4-20) deben estar sujetas a la ecuación de Friedmann de restricción para un universo plano:

$$\Omega_T + \Omega_\phi + \Omega_b = 1. \quad (4-23)$$

$$\text{Donde: } \Omega_T = \Omega_1 = \frac{Y_1^2}{\sqrt{1-X_1^2}}, \quad \Omega_b = \rho_b / 3H^2 \text{ y } \Omega_\phi = \Omega_2 = X_2^2 + Y_2^2. \quad (4-24)$$

No es difícil demostrar que las presiones P_T Y P_ϕ se relacionan con las variables X_i, Y_i a través de las ecuaciones:

$$\frac{P_T}{3H^2} = -Y_1^2 \sqrt{1-X_1^2}, \quad \frac{P_\phi}{3H^2} = X_2^2 - Y_2^2. \quad (4-25)$$

De la misma manera los parámetros de las ecuaciones de estado se expresan en términos de las mismas cantidades por las relaciones:

$$w_1 = w_T \equiv \frac{P_T}{\rho_T} = -1 + X_1^2, \quad w_2 = w_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{X_2^2 - Y_2^2}{X_2^2 + Y_2^2}, \quad (4-26)$$

con $\gamma_1 = 1 + w_1 = X_1^2$, $\gamma_2 = 1 + w_2 = 2X_2^2 / \Omega_2$. El término de interacción definido en (4-9) se reescribe como:

$$\delta \equiv B_T \dot{T} = -3^{3/2} H^3 \lambda_2 X_1 Y_2^3. \quad (4-27)$$

Los parámetros de ecuación de estado efectiva definidos en las ecuaciones (4-12) se expresan en estas nuevas variables como:

$$w_{1efec} \equiv w_{Tefec} = w_1 - \frac{\lambda_2 X_1 Y_2^3}{\sqrt{3}\Omega_1} = \frac{\sqrt{3}\Omega_1 w_1 - \lambda_2 X_1 Y_2^3}{\sqrt{3}\Omega_1}, \quad (4-28)$$

$$w_{2efec} \equiv w_{\phi efec} = w_2 + \frac{\lambda_2 X_1 Y_2^3}{\sqrt{3}\Omega_2} = \frac{\sqrt{3}\Omega_2 w_2 + \lambda_2 X_1 Y_2^3}{\sqrt{3}\Omega_2}, \quad (4-29)$$

donde se usa la notación:

$$\gamma_{1efec} \equiv 1 + w_{1efec}, \gamma_{2efec} \equiv 1 + w_{2efec}, \gamma_{befec} \equiv \gamma_b. \quad (4-30)$$

Nótese que los distintos modelos del sistema de Ecs (4-20) solo dependen de los tres parámetros λ , mismos que a su vez dependen de las cantidades $V(T)$ y $B(T, \phi)$ y del parámetro constante $\gamma_b = 1 + w_b$. Obsérvese de la ecuación (4-21) que se satisface la desigualdad $-3 \leq H'/H \leq 0$, para todos los valores de X_i, Y_i y γ_b , este toma el valor de -3 cuando el universo es dominado por el termino cinético $X_2^2 = 1$ y por lo tanto se verifica que $\Omega_b = \Omega_1 = 0$, mientras que $H'/H = 0$ cuando $\Omega_b = X_1 = X_2 = 0$ y el universo es dominado por un potencial constante $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$. El conjunto de ecuaciones dado por (4-20) determina la evolución de dos campos escalares ϕ, T , un campo taquiónico y un campo escalar canónico, con potenciales arbitrarios en presencia de un fluido (perfecto) barotrópico con ecuación de estado $w_b = 1 - \gamma_b$. Si no se quiere considerar la contribución del fluido barotrópico lo que se hace es simplemente tomar el límite $\gamma_b = 0$ en las ecuaciones (4-20) y (4-21), puesto que toda la contribución de ρ_b esta dada en la cantidad H'/H , a través del termino $\Omega_b \gamma_b$. Para $\Omega_b \neq 0$, se asumirá un fluido barotrópico con $0 < \gamma_b < 2$, donde $\gamma_b = 1$ para materia y $\gamma_b = 4/3$ para radiación.

La aceleración se determina de la ecuación de Raychaudury la cual en términos de los parámetros definidos en las ecs (4-19) se expresa por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 \left(1 + \frac{H'}{H} \right) = -\frac{H^2}{2} \left(\Omega_b (1 + 3w_b) + \Omega_1 (3X_1^2 - 2) + 4X_2^2 - 2Y_2^2 \right), \quad (4-31)$$

donde se hizo uso de $\dot{H} = HH'$ y las ecuaciones (4-21).

De particular interés son los modelos que originan una expansión acelerada $\ddot{a} > 0$, pues como se mencionó al principio de este capítulo y en mayor detalle en la sección (1-1), el universo está dominado actualmente por un elemento de energía oscura [21] Se espera que los modelos taquiónicos ayuden a explicar la actual etapa acelerada del universo, y que desempeñen un papel relevante en la etapa de inflación primordial, desde el punto de vista matemático lo que se requiere es que la expresión que aparece dentro del corchete de la ecuación anterior se haga negativa, lo cual sucederá si el universo es dominado por el término potencial $Y_2^2 = B/3H^2$ o por Ω_1 con $X_1^2 < 2/3$, i.e. para $Y_2^2 + \Omega_1 (1 - 3X_1^2/2) > \Omega_b (1 + 3w_b) + 4X_2^2$ este requerimiento corresponde a la condición general dada por la ec (1-9).

SECCION 4.4 SOLUCIONES CRITICAS PARA ALGUNOS MODELOS DE λ 's CONSTANTES.

En esta sección se analizan algunos modelos concretos donde por simplicidad se toman los valores de las λ_i ($i= 1, 2, 3$) constantes [73] (de la primera de las ecuaciones (4-22) esto significa de paso que el potencial taquiónico a considerar será el $V(T) = AT^{-2}$), y se supondrá la existencia de un fluido barotrópico es decir se supondrá que $\gamma_b \neq 0$. La manera de proceder consistirá en calcular los puntos críticos en diferentes límites y resolver el sistema de ecuaciones (4-20) numéricamente para mostrar el comportamiento de los campos escalares T Y ϕ .

Como se dijo en la sección 4.1, de las densidades de energía ρ_1, ρ_2 y ρ_b terminará por dominar al universo la que tenga la ecuación de estado más pequeña, o alternativamente la del valor γ_{iefec} ($i= 1, 2, b$) más pequeño. Para $\gamma_{iefec} < \gamma_{kefec}, \gamma_{jefec}$, se tiene que $\Omega_i = 1$ y por lo mismo

$\Omega_k = \Omega_j = 0$, en tiempos tardíos. Si dos o las tres densidades de energía tienen la misma (la más pequeña) ecuación de estado efectiva entonces dos de las Ω 's o las tres Ω 's serán distintas de cero al final. Por lo tanto la forma asintótica de la ecuación (4-21) será:

$$-\frac{3H'}{2H} = (\Omega_1\gamma_1 + \Omega_2\gamma_2 + \Omega_b\gamma_b) = (\Omega_1\gamma_{1efec} + \Omega_2\gamma_{2efec} + \Omega_b\gamma_b) = \gamma_{efec} \quad (4-32)$$

donde la última igualdad en (4-32) es válida solo asintóticamente y $\gamma_{efec} = 1 + w_{efec}$ es la más pequeña de las γ_{efec} 's, i.e. $\gamma_{efec} = \min(\gamma_{1efec}, \gamma_{2efec}, \gamma_b)$.

Para empezar se determinarán las condiciones para las cuales los dos campos T y ϕ se diluyen de la misma manera.

De las (4-28) y (4-29) se ve que ambas ecuaciones de estado efectivas son iguales si:

$$\frac{\lambda_2 X_1 Y_2^3}{\sqrt{3}} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} (w_1 - w_2) = \Omega_1 \left(\frac{3H'}{2H} + \gamma_1 \right) = -\Omega_2 \left(\frac{3H'}{2H} + \gamma_2 \right), \quad (4-33)$$

y de las ecuaciones (4-32) y (4-33) se obtiene la relación

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{\gamma_1 - \gamma_{efec}}{\gamma_{efec} - \gamma_2} = \frac{w_1 - w_{efec}}{w_{efec} - w_2}, \quad (4-34)$$

la cual coincide con la ecuación (4-16).

La solución de las ecuaciones dinámicas dadas en (4-20) para valores finitos de X_2, Y_1, Y_2 como una función de X_1 son:

$$Y_1 = \frac{\sqrt{3}\gamma_{efec}}{\lambda_1 X_1}, \quad (4-35)$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda_3 Y_2^2}{(2 - \gamma_{efec})}, \quad (4-36)$$

$$Y_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}\gamma_{efec}^2 (X_1^2 - \gamma_{efec})}{\lambda_1^2 \lambda_2 X_1^3 \sqrt{1 - X_1^2}} \right)^{1/3} = -\frac{\sqrt{3}\gamma_{efec}^{2/3}}{\lambda_1^{2/3} \lambda_2^{1/3}} G(X_1), \quad (4-37)$$

$$X_1 = \frac{2}{\sqrt{3}\lambda_2 Y_2} \left(\frac{3\gamma_{efec}}{2} - \frac{\lambda_3^2 Y_2^2}{2 - \gamma_{efec}} \right), \quad (4-38)$$

con

$$G(X_1) \equiv \frac{1}{X_1} \left(\frac{(\gamma_{efec} - X_1^2)}{\sqrt{1 - X_1^2}} \right)^{1/3}, \quad (4-39)$$

de (4-35) y (4-24) se obtiene

$$\Omega_1 = \frac{3\gamma_{efec}^2}{\lambda_1^2 X_1^2 \sqrt{1 - X_1^2}}. \quad (4-40)$$

Como se ve los valores de Y_1, Y_2, X_2 son funciones de X_1 y γ_{efec} . Soluciones con $\Omega_1 \neq 0, \Omega_2 \neq 0, \Omega_b \neq 0$ implican que $\gamma_{efec} = \gamma_b = \gamma_{1efec} = \gamma_{2efec}$. Supóngase que $\gamma_{efec} = \gamma_{1efec} = \gamma_{2efec} < \gamma_b$ entonces $\Omega_b = 0$ y γ_{efec} no es una constante dada a priori sino que es una constante función de X_i y Y_i . En este caso las ecuaciones (4-35) - (4-38) deben suplementarse con la ecuación (4-32). Usando las ecuaciones (4-35)-(4-37) es posible reescribir a (4-32) como

$$1 = \frac{\Omega_1 \gamma_1}{\lambda_{efec}} + \frac{\Omega_2 \gamma_2}{\lambda_{efec}} = \frac{3\gamma_{efec}}{\lambda_1^2 \sqrt{1-X_1^2}} + \frac{334\lambda_3^2 \gamma_{efec}^{5/3}}{(2-\gamma)^2} G(X_1)^4. \quad (4-41)$$

El cual es solo válido para $\Omega_b = 0$. Considérese ahora $\gamma_{efec} = \gamma_b$ con un fluido barotrópico con $\gamma_b \geq 1$ i.e. este incluye materia $\gamma_b = 1$ y radiación $\gamma_b = 4/3$ y en este caso se obtienen las siguientes restricciones sobre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ del requerimiento de que $|X_i| < 1, 0 < Y_i < 1$.

$$\lambda_1^2 > \frac{3\gamma_{efec}^2}{X_1^2 \sqrt{1-X_1^2}} > \frac{9\sqrt{3}\gamma_{efec}^2}{2}, \quad (4-42)$$

$$|\lambda_1^2 \lambda_2| > \left| \frac{3\sqrt{3}\gamma_{efec}^2 (\gamma_{efec} - X_1^2)}{X_1^3 \sqrt{1-X_1^2}} \right| > 3\sqrt{3}\gamma_{efec}^2 G_m^3, \quad (4-43)$$

$$\lambda_2 X_1 < 0, \lambda_1 X_1 > 0, \lambda_3 X_2 > 0, \lambda_1 \lambda_2 < 0, \quad (4-44)$$

$$\frac{3(2-\gamma_{efec})\alpha}{2\gamma_{efec}^{1/3} G_m^2} \lambda_1^{4/3} \lambda_2^{2/3} > \lambda_3^2 > \frac{3\gamma_{efec} (2-\gamma_{efec})\alpha}{2} \quad (4-45)$$

donde G_m en las ecuaciones (4-43) y (4-45) es el mínimo valor de $G(X_1)$. La restricción (4-42) proviene del requerimiento de que $\Omega_1 < 1$ y $(X_1^2 \sqrt{1-X_1^2})^{-1}$ tenga un valor mínimo de $(X_1^2 \sqrt{1-X_1^2})^{-1} = 3\sqrt{3}/2$ en $X_1^2 = 2/3$. De la ecuación (4-37) se tiene que $G\lambda_2 < 0$, lo cual para $\gamma_{efec} \geq 1$ implica que $\lambda_2 X_1 < 0$. Para $\gamma_b = \gamma_{efec} = 1$ (materia) la función G es $G = (1-X_1^2)^{1/6} / X_1$ y G toma el valor $G(0) = \infty$ y $G(\pm 1) = 0$ así que $0 \leq |G(X)| \leq \infty$. Por otra parte si $\gamma_b = \gamma_{efec} > 1$ (como para radiación $\gamma_b = 4/3$) $G(\pm 1) = G(0) = \infty$ y $G(X)$ tiene un mínimo absoluto $G_m \equiv |G(X = X_m)|$ en $X_m = \pm \left[1 + 4\gamma_{efec} - \sqrt{1 + 16\gamma_{efec}(\gamma_{efec} - 1)} \right]^{1/2} / 2$ la cual para $\gamma_{efec} = 4/3$, da $X_m = 0.93$ y $G_m = 1.16$. El hecho de que G tiene un valor mínimo para $\gamma_{efec} = \gamma_b > 1$ implica una restricción sobre $\lambda_1^2 \lambda_2 > 3\sqrt{3}\gamma_{efec}^2 G_m^3$ (ver 4-37), como es visto de (4-44) y (4-45) un valor superior e inferior para λ_3 (ver 4-38).

Para resolver el sistema de ecuaciones (4-35)-(4-38) se sustituye Y_2 de (4-37) en (4-38) para obtener una ecuación no lineal para X_1 solamente

$$Y_2^2 = \frac{3\gamma_{efec}^{4/3}}{\lambda_1^{4/3} \lambda_2^{4/3}} G(X_1)^2 = \frac{3(2-\gamma_{efec})}{2\lambda_3^2} \left(\gamma_{efec} - \frac{\lambda_2 X_1 Y_2}{\sqrt{3}} \right) \equiv \frac{3(2-\gamma_{efec})\gamma_{efec} \alpha}{2\lambda_3^2}, \quad (4-46)$$

con

$$\alpha \equiv 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2/3} \gamma_{efec}^{-1/3} X_1 G(X_1) > 1, \quad (4-47)$$

como se ve α depende de λ_2 / λ_1 y de X_1 con $\alpha > 1$ puesto que el segundo término en (4-47) es positivo. Sin embargo la ecuación (4-46) es válida para cualquier valor de γ_{efec} , incluso para $\gamma_{efec} < 1$. En este último caso el segundo término de (4-47) no es más definido positivo ($X_1 G$ es

negativo para $X_1^2 > \gamma_{efec}$) y el hecho de que α debe ser no negativa puesto que $Y_2^2 > 0$, da la restricción: $\lambda_2^{2/3} \lambda_1^{-2/3} \gamma_{efec}^{-1/3} X_1 G(X_1) > -1$.

La solución de (4-46) es no analítica y se debe resolver numéricamente para X_1 . En términos de G la ecuación (4-46) se expresa como

$$G(X_1)^2 = \frac{\lambda_1^{4/3} \lambda_2^{2/3}}{\lambda_3^2} \frac{\alpha(2 - \gamma_{efec})}{2\gamma_{efec}^{1/3}} \geq G_m^2. \quad (4-48)$$

Para $\gamma_b = \gamma_{efec} = 1$, la ecuación (4-48) no impone restricción alguna sobre la elección de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ puesto que G puede tomar valores desde cero hasta infinito y $G_m = 0$. Sin embargo para $\gamma_{efec} > 1$ la función G tiene un valor mínimo dado por G_m , por lo tanto la elección de los $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ deberán ser tales que el valor de G resulte ser mas grande que G_m , y para $\gamma_b = 4/3$ se tenga el valor de $G_m = 1.16$.

En relación a la ecuación (4-47), la respuesta de cual de los términos domina y contribuye principalmente a α depende del valor de λ_2/λ_1 y de X_1 a través de la función $F(X_1) = X_1 G(X_1) = ((\gamma_{efec} - X_1^2)/\sqrt{1 - X_1^2})^{1/3}$. F tiene un valor mínimo en $X_1 = 2 - \gamma_{efec}$, dando un valor de $F_m = 2^{1/3}(\gamma_{efec} - 1)^{1/6}$. Para $\gamma_{efec} = 1$ se tiene que $0 \leq F = \sqrt{1 - X_1^2} < 1$ mientras que para $\gamma_{efec} > 1$ se tiene que $F_m \leq F \leq F(X=1) = \infty$. Sin embargo el valor de F esta restringido entre $F_m \leq F \leq F(0) = \gamma_{efec}^{1/3}$ para $|X_1| < \sqrt{\gamma_{efec}^2 - \gamma_{efec}}$, por ejemplo para $\gamma_{efec} = 4/3$ se tiene que $F_m = 1.05 \leq F \leq F(0) = (4/3)^{1/3} = 1.1$ para $0 < |X_1| < 2\sqrt{2}/3 = .94$ i.e. para la mayor parte del rango $|X_1| = (0,1)$, y $\gamma_{efec}^{-1/3} F$ resulta ser en general del orden de la unidad dando $\alpha \cong 1 + (\lambda_2/\lambda_1)^{2/3}$ en la ecuación (4-47).

Si ahora se da que $\lambda_{efec} = \lambda_{1efec} = \gamma_{2efec} < \gamma_b$, entonces $\Omega_b = 0$ y γ_{efec} no es ya una constante dada sino que es una función de X_i, Y_i Y podría ser más pequeña que uno. En este caso la solución a las ecuaciones (4-35)-(4-38) es dada resolviendo numéricamente (4-48) y (4-41). Si $\gamma_{efec} < 1$ entonces el mínimo de $|G|$ Y $|F|$ son $G_m = F_m = 0$, con $0 \leq G \leq \infty$ y $0 \leq F \leq \infty$, no hay restricción superior sobre λ_3 en la ecuación (4-45) y tampoco restricción inferior sobre $|\lambda_1 \lambda_2|$ en (4-44). Sin embargo dado que el segundo término en (4-47) puede ser negativo para $X_1^2 > \gamma_{efec}$ se tiene la restricción $\alpha > 0$ o $F(X_1) = X_1 G(X_1) = ((\gamma_{efec} - X_1^2)/\sqrt{1 - X_1^2})^{1/3} > -\lambda_2^{-2/3} \lambda_1^{2/3} \gamma_{efec}^{1/3}$

SECCION 4.5 COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

Es posible estudiar algunos casos especiales al considerar los diferentes límites de los parámetros λ . Una λ_1 constante tal y como ya se ha dicho se obtiene a partir de un potencial $V = V_0/T^2$ con $\lambda_1 = 2/\sqrt{V_0}$. Un valor constante de λ_3 puede ser obtenido por ejemplo si se considera un potencial de interacción factorizable $B(T, \phi) = h(T)K(\phi)$ y tomar $K(\phi)$ como un potencial exponencial. En este caso $\lambda_3 = -a$ si $K = K_0 e^{a\phi}$. Sin embargo un potencial factorizable

B resultará en $\lambda_2 = -h_r / (h^{3/2} K^{1/2})$ el cual es ahora una función de los dos campos T y ϕ de tal manera que un valor constante de λ_2 puede ser obtenido solamente como una combinación de las evoluciones de los campos T y ϕ , y no puede ser anticipada trivialmente con solo observar la forma funcional de $B(T, \phi)$.

Un límite interesante es cuando $X_1^2 = \dot{T}^2 = 1$. En este caso $Y_1 = 0$ puesto que $\Omega_1 = Y_1^2 / \sqrt{1 - X_1^2}$ debe ser más pequeño que uno. El valor de Ω_1 depende de los valores de los parámetros λ_i . Resolviendo las ecuaciones (4-20) se encuentran dos soluciones, que corresponde a los valores:

$$\begin{aligned} X_1^2 &= 1, Y_1 = 0 \text{ y} \\ X_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\lambda_3^2} \left((2 - \gamma_{efec}) \lambda_2^2 + 4\gamma_{efec} \lambda_3^2 - \lambda_2 \operatorname{sgn}[X_1] \sqrt{8(2 - \gamma_{efec}) \gamma_{efec} \lambda_3^2 + (2 - \gamma_{efec})^2 \lambda_2^2} \right), \\ Y_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4\lambda_3^2} \left(-(2 - \gamma_{efec}) \lambda_2 \operatorname{sgn}[X_1] + \sqrt{8(2 - \gamma_{efec}) \gamma_{efec} \lambda_3^2 + (2 - \gamma_{efec})^2 \lambda_2^2} \right), \end{aligned} \quad (4-49)$$

lo cual restringe los valores de λ_2, λ_3 puesto que $|X_2| < 1$, $0 < Y_2 < 1$. Esta solución requiere que $|\lambda_2 / \lambda_3| < 1$. La segunda solución tiene $X_1^2 = 1$, $Y_1 = 0$ y $(X_2, Y_2) = (0, 0)$ i.e. $\Omega_2 = 0$, la cual se reduce al caso donde no existe un campo escalar canónico.

En el límite $\lambda_2 = 0$ las ecuaciones (4-20) se reducen a dos campos escalares desacoplados con el término de interacción δ igual a cero y $\gamma_{1efec} = \gamma_1$, $\gamma_{2efec} = \gamma_2$. La solución puede ser obtenida de la combinación de los resultados obtenidos en los trabajos dados en referencias [55] y [4], donde un campo taquiónico y un campo escalar son estudiados respectivamente en presencia de un fluido barotrópico [73]. La cuestión de cual es el término dominante para tiempos tardíos depende de los valores de λ_1, λ_3 y cual ecuación de estado es la más pequeña. La ecuación de estado para el campo T en este caso esta dado por $\gamma_{1efec} = \gamma_1 = \lambda_1^2 (3\sqrt{\lambda_1^2/3 + 4} - \lambda_1^2) / 18$ si $\gamma_b > \gamma_1$ y $\gamma_1 = \gamma_{1efec} = \gamma_b$ de otra manera [55] mientras que para ϕ se tiene que $\gamma_{2efec} = \gamma_2 = \lambda_3^2 / 3$ para $\lambda_3^2 / 3 < 3\gamma_b$ y $\lambda_{2efec} = \gamma_2 = \gamma_b$ si $\lambda_3^2 > 3\gamma_b$ [4]. Por lo tanto si $\lambda_3^2 < \lambda_1^2 (3\sqrt{\lambda_1^2/3 + 4} - \lambda_1^2) / 6$ entonces se tiene que $\gamma_2 < \gamma_1$ y la densidad de energía de ϕ dominara el universo en tiempos tardíos.

De las ecuaciones (4-20) el límite $\lambda_3 = 0$ lleva a $X_2' / X_2 < 0$ lo cual implica una X_2 decreciente con un límite asintótico $X_2 = 0$ y en este caso las ecuaciones (4-20) o equivalentemente la ecuación (4-46) requiere $F(X_1) = X_1 G(X_1) = -(\lambda_1 / \lambda_2)^{2/3} \gamma_{efec}^{1/3}$ i.e. $\alpha = 0$. Una vez que X_1 ha sido obtenido las ecuaciones (4-35) y (4-37) dan los valores de Y_1 y Y_2 .

Finalmente si se considera el caso $\lambda_1 = 0$, entonces de la ecuación que resulta de poner $Y_1' = 0$ en (4-20) se tiene $Y_1 H' / H = 0$. Si $H' / H = 0$ entonces $X_2 = X_1 = \Omega_b = 0$ y de $X_2' = 0$ se concluye que $Y_2 = 0$ y el universo es dominado por un potencial taquiónico constante $\Omega_1 = Y_1^2 = 1$. Si por el contrario resulta que $Y_1 = 0$ entonces de la ecuación para $X_1' = 0$ se requiere que $X_1^2 = 1$ o

$Y_2 = 0$. Para $X_1^2 \neq 1$ entonces la solución tiene $Y_1 = Y_2 = X_2 = 0$ con $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ y $\Omega_b = 1$. Si $X_1^2 = 1$ entonces la solución es $Y_1 = 0$ y X_2, Y_2 están dados por las ecuaciones (4-49).

SECCION 4.6 SOLUCIONES CRITICAS EN GENERAL Y ESTABILIDAD.

Dependiendo del comportamiento asintótico de las cantidades λ , se buscan soluciones correspondientes a puntos críticos estables (atractores), las cuales se encuentran de igualar a cero el lado derecho de las ecuaciones (4-20), de tal forma que $X_1' = 0, X_2' = 0, Y_1' = 0, Y_2' = 0$. Una vez obtenidos los puntos críticos se hace un análisis de estabilidad para determinar cuales de ellos son estables. A diferencia de lo que se hizo en las secciones 4.4 y 4.5, aquí se va a considerar el caso de un universo sin fluido barotrópico o equivalentemente, se consideran los modelos en donde terminan por dominar asintóticamente los campos escalares o alguno de ellos, de lo dicho arriba equivale a tomar el límite $\gamma_b = 0$ ($\Omega_b = 0$) en las ecuaciones (4-20) y (4-21). En la siguiente sección se vuelve al análisis de modelos donde el fluido barotrópico puede jugar un papel relevante en la cosmología para algunos casos particulares de interés.

Antes de hablar de estabilidad se da una breve discusión de algunos de los potenciales taquiónicos $V(T)$ importantes, y de interacción $B(T, \phi)$, dado que los diferentes modelos y su estabilidad dependen de los mismos a través de los parámetros λ 's. Algunos de los potenciales taquiónicos son motivados por teorías de cuerdas, como es el caso de: $V(T) = e^{-\beta T}$, que aparece en el contexto de la inflación taquiónica y que puede aparecer en la cosmología en relación al comportamiento tardío de un sistema D3-anti-D3, en este caso se tiene que: $\lambda_1 \rightarrow \infty$ mientras $T \rightarrow \infty$, del mismo modo los potenciales: $V(T) = e^{-\alpha T^2}$ y $V(T) = \text{Sech}[T]$, de los cuales se ha especulado que representan el campo taquiónico para un sistema de Dp-branas en supercuerdas y que resulta en un valor asintótico de $\lambda_1 \rightarrow \infty$, cuando $T \rightarrow \infty$.

Otros potenciales a considerar solo tienen motivaciones fenomenológicas, como sucede con los casos de: $V(T) = T^{-2}$ que corresponde a soluciones de escalamiento y a un valor de λ_1 constante (ver las secciones 2.5, 4.6, 3.6.A.B y [4,55]). $V(T) = T^{-n}$, en este caso se tiene que: $\lambda \approx T^{n-2/2}$; como se dijo para el caso de $n=2$ λ_1 es constante, pero cambia dinámicamente para $n \neq 2$, de tal forma que $\lambda_1 \rightarrow 0$, cuando $T \rightarrow \infty$ y $0 < n < 2$, y $\lambda_1 \rightarrow \infty$ para $n > 2$.

El potencial $V(T) = e^{\alpha T}$, para el cual se tiene que: $\lambda_1 \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$. Y el potencial $e^{\alpha T^2}$ [17,55], en este caso se tiene que $\lambda_1 \rightarrow 0$, mientras $T \rightarrow 0$, entre otros potenciales.

En el caso de la función $B(T, \phi)$, dado que representa el término de interacción de los campos, es común expresarla como: $B(T, \phi) = f(T)g(\phi)$ (esta forma tiene motivación de la física de partículas ver sección 4.7 B) de tal forma que λ_3 solo dependerá de la variable ϕ como: $\lambda_3 = -\frac{g_\phi}{g}$. En este caso los valores asintóticos de λ_3 , también dependerán de las funciones $g(\phi)$, como se ve de unos ejemplos a continuación:

Para $g(\phi) = e^{-\beta\phi}$, resulta que: $\lambda_3 = \beta$ (constante), para $g(\phi) = e^{-\beta e^\phi}$, se tiene que $\lambda_3 \rightarrow \infty$ (sin oscilaciones), mientras que para: $g(\phi) = \phi^n$ ($n > 0$), lleva a $\lambda_3 \rightarrow \infty$ (oscilatorio), finalmente el caso de: $g(\phi) = \phi^{-n}$ ($n > 0$), lleva a que $\lambda_3 \rightarrow 0$.

Por último, λ_2 depende del valor de $B(T, \phi)$, y por lo mismo depende tanto de $g(\phi)$ como de $f(T)$, esto hace más difícil predecir su comportamiento asintótico. Algunos casos relativamente simples se muestran en los siguientes ejemplos: Para $f(T) = T^{-2}$ y para los casos de $g(\phi) = e^{-c\phi}$ y $g(\phi) = e^{-\beta e^\phi}$ se obtiene que $\lambda_2 \rightarrow \infty$, para $f(T) = T^{-2}$ y para $g(\phi) = \phi^{-n}$ ($n > 0$) se tiene que $\lambda_2 \rightarrow \text{constante}$, por último si: $f(T) = \text{Cosh}(1/T)$ y $g(\phi) = \phi^{-n}$ ($n > 0$), entonces se tiene que $\lambda_2 \rightarrow 0$.

Para un potencial taquiónico arbitrario V y una función de acoplamiento B , las ecuaciones (4-2) a la (4-4) o bien el sistema (4-8) son en general no lineales y por lo tanto no tienen soluciones analíticas y aunque es posible el uso de los métodos numéricos, estos solo permiten encontrar soluciones para cada caso particular y condiciones iniciales separadamente. La manera de entender el comportamiento dinámico de los campos anteriores bajo estas restricciones es el estudio de su límite asintótico, el cual permite distinguir los diferentes casos límites de las cantidades cosmológicas relevantes $X_1, X_2, Y_1, Y_2, \Omega_r, \Omega_\phi$ y Ω_b . En particular si $\Omega_b, \Omega_r \rightarrow 0$, el campo escalar dominará el universo y se tendrá un proceso de recalentamiento adecuado (ver sección 1.7 y [68]) si $0 < \Omega_r \rightarrow \text{cte} < 1$ y $\Omega_b \rightarrow 0$ entonces ambos campos escalares se diluyen a la misma rapidez y por supuesto el recalentamiento es incompleto, la misma situación sucedería si $\Omega_r \rightarrow 1$, donde el universo es dominado totalmente por el taquión. Es importante aclarar que los modelos de interés son aquellos que describan por lo menos alguna de las propiedades siguientes (en la sección 4.7A se proponen dos modelos que presentan recalentamiento de T y energía oscura).

Energía oscura: Como se dijo en el capítulo introductorio las observaciones recientes de corrimiento al rojo de las supernovas indican que el universo experimenta una expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$). Una constante cosmológica efectiva o un campo escalar variable en el tiempo son las principales propuestas para esta energía [21,53,69].

Inflación temprana: como se menciono en el capítulo 1 (sección 1.5) las observables cosmológicas determinan el estado del universo para distintas etapas, sin embargo, no todas las observaciones encuentran explicación en el modelo estándar de la cosmología. El universo inflacionario fue propuesto hace unos 20 años para ofrecer una posible solución a algunos de los problemas clásicos de la cosmología estándar como el de la planitud y el horizonte, en esta teoría se postula que el factor de escala $a(t)$ experimento un crecimiento por un factor cuyo valor es al menos de 10^{30} de tal forma que el modelo estándar se modifica durante un pequeñísimo intervalo de tiempo (entre 10^{-36} y 10^{-34} segundos), en este caso también se requieren modelos para los cuales $\ddot{a} > 0$.

Recalentamiento de T: como se explica en la sección 2-4, el campo taquiónico se comporta asintóticamente como materia ($P=0$). Sin embargo lo anterior da lugar a un problema abierto del taquión, el hecho de que al final se comporte como materia, daría lugar a un universo dominado por la materia sin que hubiera una época dominada por la radiación. Una propuesta interesante es buscar entre los modelos taquiónicos aquellos que al terminar el recalentamiento desaparezcan por completo después de liberar su energía, esto evitaría el problema mencionado (recalentamiento es el proceso por el cual un campo escalar inflatón evoluciona y desciende su potencial hasta terminar la

inflación, y liberar su energía (lo que se requiere matemáticamente es que $\Omega_T = 0, \Omega_\phi = 1$) (ver sección 1.7 y [68]).

El criterio general para determinar la estabilidad de los puntos críticos es considerar pequeñas perturbaciones alrededor de los puntos críticos ($X_{1c}, X_{2c}, Y_{1c}, Y_{2c}$) para ello escribimos:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{1c} + u, & X_2 &= X_{2c} + w, \\ Y_1 &= Y_{1c} + v, & Y_2 &= Y_{2c} + z. \end{aligned} \quad (4-50)$$

Donde: X_{1c}, X_{2c}, Y_{1c} y Y_{2c} son las soluciones de las ecuaciones (4-20) cuando el lado izquierdo se anula, es decir: $X'_1 = X'_2 = Y'_1 = Y'_2 = 0$.

La sustitución de estas cantidades en el sistema de ecuaciones (4-20) lleva, después de retener los términos a primer orden en las perturbaciones al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u' &= A u + B v + 0 w + C z, \\ v' &= D u + E v + F w + 0 z, \\ w' &= G u + H v + I w + J z, \\ z' &= K u + L v + M w + N z. \end{aligned} \quad (4-51)$$

Donde los coeficientes A, B,.....N, dependen de los valores críticos (ecs 4-50), y están dados por:

$$\begin{aligned} A &= -3\sqrt{3}X_1\sqrt{1-X_1^2}\lambda_2\frac{Y_2^3}{Y_1^2} + 9X_1^2 - 3 - 2\sqrt{3}X_1Y_1\lambda_1 & B &= \sqrt{3}(1-X_1^2)\lambda_1 - 2\sqrt{3}\frac{Y_2^3}{Y_1^3}(1-X_1^2)^{3/2}\lambda_2 \\ C &= 3\sqrt{3}\lambda_2\frac{Y_2^2}{Y_1^2}(1-X_1^2)^{3/2}, & D &= \frac{3Y_1^3X_1}{\sqrt{1-X_1^2}} + \frac{3Y_1^3X_1}{2(1-X_1^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1Y_1^2 \\ E &= \frac{9X_1^2Y_1^2}{2\sqrt{1-X_1^2}} + 3X_2^2 - \sqrt{3}\lambda_1Y_1X_1, & F &= 6X_2Y_1, \\ G &= \frac{3Y_1^2X_1X_2}{\sqrt{1-X_1^2}} + \frac{3X_1^3Y_1^2X_2}{2(1-X_1^2)^{3/2}}, & H &= \frac{3Y_1X_1^2X_2}{\sqrt{1-X_1^2}}, \\ I &= -3 + 9X_2^2 + \frac{3Y_1^2}{2\sqrt{1-X_1^2}}X_1^2, & J &= 2\sqrt{3/2}\lambda_3Y_2, \\ K &= \frac{3Y_1^2X_1Y_2}{\sqrt{1-X_1^2}} + \frac{3Y_1^2X_1^3Y_2}{2(1-X_1^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2Y_2^2, & L &= \frac{3X_1^2Y_1Y_2}{\sqrt{1-X_1^2}}, \\ M &= 6X_2Y_2 - \sqrt{3/2}\lambda_3Y_2, & N &= \frac{3Y_1^2X_1^2}{2\sqrt{1-X_1^2}} + 3X_2^2 - \sqrt{3}\lambda_2X_1Y_2 - \sqrt{3/2}\lambda_3X_2. \end{aligned} \quad (4-52)$$

La representación matricial del sistema anterior esta dada por: $Z' = M Z$.

Donde: $M = \begin{pmatrix} A & \dots & C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K & \dots & N \end{pmatrix}$ Es la matriz del sistema, Z es el vector columna de las cantidades

perturbadas $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix}$ y Z' la derivada del mismo vector $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ z' \end{pmatrix}$.

El sistema se considera perturbativamente estable cuando los eigenvalores (μ) de la matriz M sean negativos. A partir de la ecuación característica del sistema $DET[M - \mu I] = 0$, se deduce que

$$\mu^4 + \alpha \mu^3 + \beta \mu^2 + \delta \mu + \kappa = 0. \quad (4-53)$$

Donde los coeficientes están dados por:

$$\alpha = -A - E - I - N, \quad (4-54a)$$

$$\beta = AE + IA + NA + EI + EN + IN - MJ - FH - DB - CK, \quad (4-54b)$$

$$\delta = -AIE - AEN - INA + MJA + FHA - EIN + MEJ + FHN - FLJ + DIB + DNB - FGB - CDL + CEK - CGM + CKI, \quad (4-54c)$$

$$\kappa = AEIN - MEJA - FHNA + FLJA - DINB + DMJB + FGNB - FKJB - CDHM + CDLI + CEGM - CEKI - CFGI + CFKH. \quad (4-54d)$$

La solución a la ec. (4-53) tiene en general una expresión complicada. Sin embargo para la estabilidad de los puntos críticos solo interesa que las raíces de la ec. (4-53) sean todas negativas. Para ello se usa el resultado [57] que asegura que la parte real de las mismas será negativa si sus coeficientes ecs. (4-54) son positivos.

SECCION 4.7 A ANALISIS DETALLADO DE ALGUNOS MODELOS DE INTERES

A continuación se analizan en detalle dos de los modelos estables presentados en la sección 4.9. Los modelos que se escogieron describen alguna de las propiedades ya mencionadas, i.e, que den lugar a un universo acelerado ($\ddot{a} \geq 0$), o un recalentamiento taquiónico ($\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$) (o ambos), como se menciona en la sección (4.3) los distintos modelos del sistema de ecs. (4-20) solo dependen de los tres parámetros λ , mismos que a su vez dependen de los potenciales $V(T)$ y $B(T, \phi)$ (ver ecuaciones 4-22) por lo que el conocimiento de un modelo implica encontrar potenciales posibles que sean consistentes con las soluciones críticas propuestas en los modelos. Por lo que respecta al potencial taquiónico $V(T)$, en ambos ejemplos se escoge el potencial de cuerdas $V(T) = Sech(T)$ [17]. Como ya se dijo se especula que representa el campo taquiónico para un sistema de Dp-branas en supercuerdas, como se explica detalladamente en el capítulo 2. El interés de este potencial proviene que el universo es una 3-brana, y se ha conjeturado que los taquiones representan la energía total de la brana. Desde este punto de vista los modelos que se analizan

corresponderían al universo que resultaría de ser dominado por ese potencial taquiónico acoplado con las funciones $B(T, \phi)$ propuestas en cada caso.

PRIMER MODELO.

$$\lambda_1 = \infty, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \text{CTE}, \quad X_1 = \pm 1, \quad X_2 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{6}}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = \sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}}, \quad \Omega_T = 0, \quad \Omega_\phi = 1.$$

$$\ddot{a} \geq 0 \quad \text{si } \lambda_3 \in [-2, 2].$$

Este modelo es interesante porque puede llevar al universo a una etapa de aceleración $\ddot{a} \geq 0$, y da un recalentamiento taquiónico completo ($\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$), como interacción se selecciona una función factorizable (4-55) motivada de física de partículas de tal forma que represente el decaimiento del campo T en el campo ϕ . La función de interacción se escoge según (4-56) y se demuestra que esta elección es consistente con las soluciones críticas asintóticas propuestas en la tabla de arriba. Dado que los resultados son válidos para λ_3 constante en general, para obtener un universo acelerado es suficiente escoger a $\lambda_3 \in [-2, 2]$ como se ve de la ecuación (4-31) (asumiendo que no hay un fluido barotrópico). (En el caso del modelo particular que se presenta solo se excluye el caso de $\lambda_3 = 0$, como se ve del desarrollo).

A continuación se demuestra que un modelo consistente con los datos de la tabla es aquel donde el potencial de interacción esté dado por (este tipo de potenciales de interacción se motivan de física de partículas):

$$B(T, \phi) = F(T) f(\phi), \quad (4-55)$$

con

$$F(T) = Ae^{1/T}, \quad f(\phi) = e^{-c\phi}. \quad (4-56)$$

Se considera el potencial taquiónico de branas (ver sección 4.3 y el capítulo 2)

$$V(T) = \text{Sech}(T). \quad (4-57)$$

Con esta elección, las ecuaciones (4-22) se escriben como:

$$\lambda_1 \rightarrow e^{T/2}, \quad \lambda_2 = \frac{-F_r e^{c\phi/2}}{F^{3/2}}, \quad \lambda_3 = c. \quad (4-58)$$

De inmediato se cumplen las condiciones $\lambda_1 \rightarrow \infty$ (cuando $T \rightarrow \infty$), y $\lambda_3 = \text{constante}$, como se requiere para este modelo.

Con la finalidad de determinar el parámetro de Hubble se usa la ecuación (4-4) para el caso donde $\rho_b = 0$, es decir:

$$\dot{H} = -\Omega_T V - 1/2\dot{\phi}^2. \quad (4-59)$$

Dado que se requiere que $\Omega_T \rightarrow 0$ y del potencial que se escogió $V \rightarrow 0$ (cuando $T \rightarrow \infty$) la ecuación anterior se reduce a

$$\dot{H} = -1/2\dot{\phi}^2, \quad (4-60)$$

(de hecho se demuestra más adelante que el supuesto $\Omega_T \rightarrow 0$ es consistente pero la ecuación (4-60) no depende en absoluto de esto pues $V \rightarrow 0$ y Ω_T está acotado).

Asumiendo que $\lambda_3 \neq 0$, dado que $X_2 \rightarrow \lambda_3/\sqrt{6}$ y de las ecs. (4-19) se tiene que $X_2 \rightarrow \lambda_3/\sqrt{6} = \dot{\phi}/\sqrt{6}H$, y de aquí

$$\dot{\phi} = \lambda_3 H. \quad (4-61)$$

Sustituyendo (4-61) en (4-60)

$$\dot{H} = -1/2\lambda_3^2 H^2. \quad (4-62)$$

Integrando se obtiene

$$H = \frac{2}{\lambda_3^2 t}, \quad (\text{asintótico}) \quad (4-63)$$

sustituyendo (4-63) en (4-61) se obtiene

$$\dot{\phi} = \frac{2}{\lambda_3 t}, \quad (4-64)$$

integrando

$$\phi(t) = \frac{2}{\lambda_3} \ln(t), \quad (\text{asintótico}) \quad (4-65)$$

por lo que es posible expresar a $f(\phi)$ en función del tiempo t con

$$f(\phi) = e^{-c\phi} = t^{-2}. \quad (\text{asintótico}) \quad (4-66)$$

El siguiente argumento muestra que es factible escribir a $F(T)$ como $F(T) = Ae^{1/T}$, y demuestra como se calcula la constante A :

$$\text{De la condición } Y_2 \rightarrow \sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}} \text{ y de las ecs. (4-19) se tiene que: } Y_2 \rightarrow \sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3H}}$$

sustituyendo (4-55), (4-63) en la última ecuación y resolviendo para F se obtiene

$$F = \frac{2(6 - \lambda_3^2)}{\lambda_3^4 t^2 e^{-c\phi}}, \quad (\text{asintótico}) \quad (4-67)$$

no obstante (4-67) se reduce a una constante al sustituir ϕ de (4-65) en (4-67) para obtener

$$F \rightarrow \frac{2(6 - \lambda_3^2)}{\lambda_3^4} = \frac{12Y_2^2}{\lambda_3^4} = cte. \quad (\text{asintótico}) \quad (4-68)$$

Considerando que $T \rightarrow \infty$ de (4-56) se ve que $F \rightarrow A$ de aquí que

$$A = \frac{2(6 - \lambda_3^2)}{\lambda_3^4} = \frac{12Y_2^2}{\lambda_3^4}. \quad (4-69)$$

De la condición asintótica $X_1 \rightarrow 1$, se deduce que en este régimen se cumple aproximadamente

$$T \cong t, \quad (4-70)$$

más adelante se puede efectuar una estimación mejor bajo un argumento de consistencia.

De paso se ve de la segunda ecuación de (4-58) que efectivamente como se requiere

$$\lambda_2 = \frac{-F_T e^{c\phi/2}}{F^{3/2}} = \frac{-F_T}{F^{3/2}} t = \frac{-F_T}{F^{3/2}} T \rightarrow 0, \quad (T \rightarrow \infty) \quad (4-71)$$

(donde se usaron los resultados (4-65), (4-70), y el valor de F dado en la ecuación (4-56).

Como se mencionó es posible mejorar (4-70), bajo el requerimiento de consistencia siguiente:

Los valores dados: $X_1 = \pm 1$, $X_2 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{6}}$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = \sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}}$, son valores críticos del

sistema homogéneo: $X_1' = 0$, $X_2' = 0$, $Y_1' = 0$, $Y_2' = 0$, definido por (4-20). Por simple

sustitución de estos valores, se ve que se satisfacen las ultimas tres ecuaciones: $X_2' = 0$, $Y_1' = 0$, $Y_2' = 0$, mientras que la ecuación: $X_1' = 0$, equivale a

$$X_1' = -(1 - X_1^2) \left(3X_1 - \sqrt{3}Y_1\lambda_1 - \sqrt{3}\sqrt{1 - X_1^2} \frac{Y_2^3}{Y_1^2} \lambda_2 \right) = 0, \quad (4-72)$$

dado que $X_1 \rightarrow 1$, se reduce a

$$\sqrt{3}(1 - X_1^2)\lambda_1 Y_1 = -\sqrt{3}(1 - X_1^2)\sqrt{1 - X_1^2} \frac{Y_2^3}{Y_1^2} \lambda_2, \quad (4-73)$$

usando las ecuaciones (4-73), (4-22), el valor asintótico del potencial (4-57) y (4-63) se obtiene que

$$\lambda_1 Y_1 \rightarrow \frac{\lambda_3^2 t}{2\sqrt{3}}, \quad (\text{asintótico}) \quad (4-74)$$

por otra parte usando de nuevo las ecuaciones (4-19), (4-22), (4-70) el valor asintótico del potencial (4-57) y (4-63)

$$\frac{Y_2^3}{Y_1^2} \lambda_2 \rightarrow \frac{12Y_2^3}{\lambda_3^4} \left(\frac{-F_T e^T}{F^{3/2} T} \right), \quad (\text{asintótico}) \quad (4-75)$$

sustituyendo (4-74) y (4-75) en (4-73) se obtiene

$$\sqrt{1 - \dot{T}^2} = \frac{\lambda_3^6}{24\sqrt{3}Y_2^3} (T^4 e^{-T}), \quad (4-76)$$

despejando

$$\dot{T}^2 = 1 - \frac{\lambda_3^{12}}{1728Y_2^6} (T^8 e^{-2T}), \quad (4-77)$$

o bien

$$\dot{T} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_3^{12}}{1728Y_2^6} (T^8 e^{-2T})}, \quad (\text{asintótico}) \quad (4-78)$$

como es un resultado asintótico entonces T es grande y (4-78) se puede escribir aproximadamente como

$$X_1 = \dot{T} = 1 - \frac{\lambda_3^{12}}{3456Y_2^6} (T^8 e^{-2T}) + \dots \quad (\text{asintótico}) \quad (4-79)$$

Para $T \rightarrow \infty$, por supuesto $\dot{T} \rightarrow 1$ ($X_1 \rightarrow 1$), Y $T \cong t$ (ec. 4-70), así la condición de consistencia (4-73) lleva a una mejor aproximación para \dot{T} .

Para terminar solo falta que se es consistente con el supuesto $\Omega_T \rightarrow 0$, para ello de la

$$\text{ecuación (4-24) se tiene } \Omega_T = \Omega_1 = \frac{Y_1^2}{\sqrt{1 - X_1^2}}.$$

Sustituyendo en (4-24) la ecuación (4-77) y el valor asintótico de $Y_1^2 \cong e^{-T} T^2$ (ver ecs (4-19), (4-63), (4-70) y el valor asintótico del potencial (4-57)) se obtiene

$$\Omega_T \cong 1/T^2 \rightarrow 0, \quad (T \rightarrow \infty) \quad (4-80)$$

como se quería.

Finalmente se hace ver que también el potencial de interacción se diluye de la misma manera, para ello se sustituyen en (4-55) los valores asintóticos dados por las ecuaciones (4-66), (4-68) y (4-70) para obtener

$$B = Ff \cong 1/T^2 \rightarrow 0. \quad (T \rightarrow \infty) \quad (\text{asintótico}) \quad (4-81)$$

SEGUNDO MODELO.

$\lambda_1 = \text{CTE}$, $\lambda_2 = \text{CTE}$, $\lambda_3 = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$; Y_1 y Y_2 satisfacen las restricciones: $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$, $\lambda_1 Y_1^3 + \lambda_2 Y_2^3 = 0$; $\Omega_T \neq 0$, $\Omega_\phi \neq 0$, $\ddot{a} \geq 0$ (acelera). La estabilidad en este caso requiere que se satisfaga la restricción adicional $(\lambda_1 Y_1)^2 - (\lambda_1 Y_1)(\lambda_2 Y_2) \geq 0$.

Este modelo es interesante porque lleva al universo a una etapa de aceleración $\ddot{a} \geq 0$ (de lo dicho en la sección 4.3 este modelo corresponde al caso donde $H'/H = 0$ cuando $\Omega_b = X_1 = X_2 = 0$ y el universo es dominado por un potencial constante $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$), además dependiendo del valor de los parámetros λ_1 y λ_2 es posible también tener un proceso de recalentamiento adecuado. Como interacción se selecciona de nuevo una función factorizable (4-55) motivada de física de partículas de tal forma que represente el decaimiento del campo T en el campo ϕ . Las funciones de interacción adecuadas como se menciona abajo son en general del tipo $F \rightarrow \text{cte}$ y $f \rightarrow \text{cte}$, cuando $T, \phi \rightarrow \infty$, de tal forma que al final $B(T, \phi) = F(T)f(\phi) \rightarrow \text{cte}$, lo cual corresponde al hecho de que el universo al final es dominado por una constante cosmológica. Un hecho interesante de este modelo es que las conclusiones serán diferentes en este caso de un taquión en interacción con un campo escalar de cuando el único campo que actúa es el taquiónico (ver los comentarios finales de este modelo). En esta sección se asume desde el principio que no hay fluido barotrópico. Se supone de nuevo que el potencial de interacción está dado por (4-55)

$$B(T, \phi) = F(T)f(\phi).$$

Se ejemplifica de nuevo con el potencial de cuerdas (4-57)

$$V(T) = \text{Sech}(T).$$

A continuación se ve que bajo estas condiciones el valor de λ_2 resulta ser cero para este modelo. La manera más rápida de exponer las características generales es la siguiente:

La ecuación (4-59) $\dot{H} = -\Omega_T V - 1/2\dot{\phi}^2$ se reduce a

$$\dot{H} = -1/2\dot{\phi}^2 \quad (4-82)$$

(por la forma del potencial se ve que $V \rightarrow 0$, cuando $T \rightarrow \infty$).

De la ecuación (4-19), resulta que $\dot{\phi} = \sqrt{6}HX_2$, por lo tanto

$$\dot{H} = -3H^2 X_2^2 = 0, \text{ y en general se tiene que}$$

$$H = \text{constante.} \quad (4-83)$$

Por lo cual una característica general de este modelo es que resulta en una constante cosmológica para tiempos tardíos. De lo dicho en (4-58) se sabe que para este potencial $\lambda_1 \rightarrow \infty$ (cuando $T \rightarrow \infty$), de esto y de la ecuación de restricción $\lambda_1 Y_1^3 + \lambda_2 Y_2^3 = 0$, resulta que $Y_1 \rightarrow 0$, (pues $\lambda_2 = \text{cte}$), de la otra ecuación de restricción: $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$, se deduce que: $Y_2 = 1$, además de las ecuaciones (4-19) y (4-22) se ve que para este potencial: $\lambda_1 Y_1 = 1/H = \text{cte}$, por lo tanto: $\lambda_1 Y_1^3 = 0$, de lo cual se deduce que:

$$\lambda_2 \rightarrow 0. \quad (4-84)$$

De la expresión $Y_2 = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3H}}$, se tiene que

$$B = 3H^2 = cte, \quad (4-85)$$

que da lugar precisamente a una constante cosmológica dominada por el potencial de interacción.

Los valores asintóticos de los parámetros λ_2 y λ_3 , imponen las siguientes condiciones sobre $F(T)$ y $f(\phi)$:

$$\lambda_2 = \frac{-F_r}{F^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{f(\phi)}} \rightarrow 0, \quad (4-86)$$

$$\lambda_3 = \frac{-f_\phi}{f} \rightarrow 0. \quad (4-87)$$

De estas condiciones y dado que en general $B = 3H^2 = cte \neq 0$, se buscan funciones f y F tales que asintóticamente: $F \rightarrow cte$ y $f \rightarrow cte$, como $f(\phi) = A \cosh(\phi^{-1})$, $f(\phi) = A \frac{\alpha\phi + \beta}{\phi + \delta}$,

mientras que para $F(T)$ se pueden usar las mismas funciones o $F(T) = Ae^{1/T}$ como en el modelo anterior. Obsérvese que funciones como $f(\phi) = A\phi^{-n}$ ($n > 0$), satisfacen la condición (4-87), pero dado que $B(T, \phi) = F(T)f(\phi)$, entonces en general $B \rightarrow 0$ (a menos que se diera exactamente $F \approx 1/f$ al final) y por lo tanto de (4-85) también $H \rightarrow 0$, en este caso se requeriría

de (4-86) que $\frac{F_r}{F^{3/2}} \phi^{n/2} \rightarrow 0$, y como en este caso $\lambda_1 Y_1 = \frac{1}{H} \rightarrow \infty$, la condición $\lambda_1 Y_1^3 = 0$ ya no

resulta de inmediato; de cumplirse estos requerimientos extras el resto de los argumentos son iguales. Un rasgo interesante de este modelo es que se sabe que el potencial $V(T) = Sech(T)$ por si solo lleva a un universo dominado por un gas sin presión ($P=0$), y $\ddot{a}/a < 0$, (ver cáp.2 sección 3, ecuación (2-26) y [17,55]) lo cual cambia radicalmente cuando interacciona con un campo escalar en el modelo descrito. Véase el modelo es

estable pues se verifica la condición $(\lambda_1 Y_1)^2 - (\lambda_1 Y_1)(\lambda_2 Y_2) \geq 0$, de lo dicho arriba esta se reduce a $(\lambda_1 Y_1^2) = 1/H^2 = cte > 0$. Como se requiere para la estabilidad.

SECCION 4.7 B MODELOS DE FISICA DE PARTICULAS Y LA T - DERIVADA DEL POTENCIAL PARA EL TAQUION T.

En esta sección se continúa con el estudio de los modelos de física de partículas con la diferencia de que se parte desde un punto de vista un poco diferente, para empezar no se supone de antemano que el fluido barotrópico es cero como en la sección anterior, y por otro lado se introduce el concepto de la T derivada del potencial taquiónico [73], lo que se hace es encontrar la derivada del potencial efectivo taquiónico y después usar el hecho de que la dinámica de un campo escalar consiste en minimizar el potencial, a partir de este procedimiento se ejemplifica con el caso del potencial taquiónico de branas $V = V_0 e^{-T^2/2}$ y el término de interacción como $B = B_0 e^{\beta T} \phi^n$ con $V_0 > 0$ y $B_0 > 0$ para determinar la dinámica del modelo. En dos de los casos se encuentra que corresponden con dos de los modelos señalados en la tabla de valores críticos, los ejemplos 37 (46 si $\lambda_1 \rightarrow \infty$) y 48 de la sección 4.9. Se continúa analizando potenciales motivados de la física de partículas. Para ello se considera un potencial de interacción factorizable de la forma:

$$B(\phi, T) = h(T)K(\phi). \quad (4-88)$$

En este caso los parámetros λ_1 y λ_3 se vuelven funciones de un solo potencial:

$$\lambda_1 = -\frac{V_T}{V^{3/2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{h_r}{h^{3/2}K^{1/2}}, \quad \lambda_3 = -\frac{K_\phi}{K}. \quad (4-89)$$

Se considerará un ejemplo simple donde el potencial del campo escalar T tiene un comportamiento exponencial, ampliamente usado en física de partículas como potencial de energía oscura, mientras que para el campo ϕ se utilizará como potencial una potencia de ϕ el cual representará un campo escalar estándar. Es bien sabido que para un campo escalar con un potencial de la forma ϕ^n la densidad de energía se diluye como $w_\phi = (n-2)/(n+2)$, resultando en que $w_\phi = 0,1/3$ para $n = 2,4$ [4].

De los últimos dos términos de la ecuación (4-3), se puede definir una T -derivada de un potencial efectivo V_{efec} como:

$$\frac{dV_{efec}}{dT} \equiv (1-\dot{T}^2) \left(\frac{V_T}{V} + \frac{B_T}{V} \sqrt{1-\dot{T}^2} \right) = \frac{V \left(V_T + B_T \sqrt{1-\dot{T}^2} \right)}{\rho_r^2}, \quad (4-90)$$

donde se ha usado $\rho_r = \frac{V}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}$. La dinámica del campo taquiónico origina que la derivada de

dV_{efec}/dT se anule es decir: $\frac{dV_{efec}}{dT} = V \left(V_T + B_T \sqrt{1-\dot{T}^2} \right) / \rho_r^2 = 0$. Es importante incluir en la

ecuación (4-90) el factor multiplicativo $(1-\dot{T}^2)$. La dinámica de un campo escalar consiste en minimizar el potencial (i.e, la derivada del potencial del campo escalar se debe desvanecer) y en ausencia del término de interacción B la dinámica taquiónica no resulta en un valor de $\frac{V_T}{V} = 0$,

sino mas bien de $(1-\dot{T}^2) \frac{V_T}{V} = 0$. Para ejemplificarlo considérese el potencial taquiónico típico

$V \approx e^{-T^2/2}$, de este se obtiene: $\frac{V_T}{V} = -T$ y la solución a la ecuación (4-3) se da como $\dot{T}^2 = 1$,

$T \rightarrow \infty$ con $V_T/V \rightarrow -\infty$, pero $(1-\dot{T}^2)V_T/V = V_T V / \rho_r^2 = 0$. Lo cual muestra que V_T/V no es la T -derivada del potencial para el taquiión T .

Cuando $dV_{efec}/dT = 0$, la ecuación (4-3) adopta la forma $\ddot{T} + 3H\dot{T}(1-\dot{T}^2) = -dV_{efec}/dT = 0$ y esta tiene dos soluciones:

$$V = 0, \quad \ddot{T} = 0, \quad \dot{T}^2 = 1. \quad (4-91)$$

$$V_T = -B_T \sqrt{1-\dot{T}^2}, \quad \frac{\dot{T}}{\sqrt{1-\dot{T}^2}} = Ka(t)^{-3}, \quad (4-92)$$

donde K es una constante de integración. La solución de la ecuación (4-91) implica necesariamente que $V = 0$ puesto que $\Omega_r = V/3H^2 \sqrt{1-\dot{T}^2}$ debe ser más pequeña que uno, mientras que (4-92) da asintóticamente: $\dot{T} = 0$ Y $V_T = -B_T$.

Si se supone que $\dot{T} \neq 1$, entonces sustituyendo la ecuación (4-92) en la (4-90) se obtiene

$$K(\phi) = -\frac{V_T}{h_r \sqrt{1-\dot{T}^2}} = -\frac{V_T \rho_r}{h_r V}, \quad (4-93)$$

donde se ha usado el resultado $\rho_T = V / \sqrt{1 - \dot{T}^2}$; sustituyendo el valor de K dado en (4-93) en (4-89) se obtiene

$$\lambda_2 = \left(\frac{h_T}{h} \right)^{3/2} \left(\frac{-V}{V_T} \right)^{1/2} \frac{1}{\rho_T^{1/2}}. \quad (4-94)$$

La solución (4-92) tiene $\dot{T} \cong 0$ Y $\rho \cong V$ Si se toma el caso del potencial taquiónico de branas $V = V_0 e^{-T^2/2}$ y el término de interacción como $B = B_0 e^{\beta T} \phi^n$ con $V_0 > 0$ y $B_0 > 0$. Entonces resulta que $K = T e^{-\beta T} / \beta$ de tal manera que:

$$\lambda_1 = T e^{T^2/4}, \quad \lambda_2 = -\frac{\beta^{3/2}}{(T\Omega_T)^{1/2}}, \quad \lambda_3 = -\frac{n}{\phi} = \pm n K^{-1/n} = \pm \frac{n \beta^{1/n} e^{\beta T/n}}{(T\Omega_T)^{1/n}}. \quad (4-95)$$

Y en el límite $T \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\lambda_1 \rightarrow \infty, \quad \lambda_2 \rightarrow 0, \quad \lambda_3 \rightarrow \pm \infty, \quad (4-96)$$

(corresponde a uno de los modelos señalado en la tabla de valores críticos, el ejemplo 48 de la sección 4.9, en el caso en que $\dot{T}^2 \rightarrow 1$ pues entonces se tiene que $V = 0$ y se tiene la solución $\Omega_2 = 0$) donde se ha tomado $\beta > 0$ como es requerido por la ecuación (4-90) puesto que V_T Y B_T deben tener signos opuestos. El crecimiento relativo está dado por

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cong T^{3/2}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cong T^{-(n+1)/n} e^{\beta T + T^2(2-n)/4n}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \cong T^{(n-2)/n} e^{\beta T + T^2(2-n)/4n}. \quad (4-97)$$

De la ecuación (4-97) se tiene que $\lambda_1 \gg |\lambda_2|$ y para $n=2$ se tiene que $|\lambda_3| \gg \lambda_1 \gg |\lambda_2|$, mientras que para $n>2$ se encuentra que $\lambda_1 \gg |\lambda_2| \gg |\lambda_3|$. Por otra parte si $\dot{T}^2 = 1$ entonces se tiene que $V = 0$ y la solución es $\Omega_2 = 0$ o esta dada por (4-49) (ver sección 4.5). Resolviendo numéricamente las ecuaciones (4-2) y (4-3) con $n = 4, \beta = 1$ se encuentra que $\dot{T}^2 \rightarrow 1$ con $|\lambda_1| \gg |\lambda_2| \gg |\lambda_3| \gg 1$ y $\Omega_2 = \Omega_b = 0$. (Este modelo corresponde a un caso particular del ejemplo señalado con 37 (46 si $\lambda_1 \rightarrow \infty$) en la tabla de valores críticos de la sección 4.9.)

SECCION 4.8 EJEMPLOS.

A continuación se presentan cuatro soluciones atractoras diferentes que dependen de los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. En las figuras del final de esta sección se muestra la evolución de $\Omega_T \equiv \Omega_1, \Omega_\phi \equiv \Omega_2, \Omega_b$ y $w_1 \equiv w_T, w_{Tefec}, w_2 \equiv w_\phi, w_{\phi fec}$ para las distintas elecciones de las λ 's. Asimismo se muestra el espacio fase de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) para cada caso. Puesto que el espacio fase depende de las cuatro variables (X_1, Y_1, X_2, Y_2) no es sorprendente que las curvas en los dos espacios bidimensionales (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) se podrían cruzar.

En la figura 1, se considera el caso $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -10, \lambda_3 = -5$, y $\gamma_b = 1 + w_b = 1$. Dado que se satisfacen las condiciones de las ecuaciones (4-42)-(4-45) se espera tener $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_b$ diferentes de cero. De hecho se obtienen los valores $\Omega_1 = 0.14, \Omega_2 = 0.35, \Omega_b = 0.51$ y

$(X_1, Y_1) = (0.48, 0.36)$ y $(X_2, Y_2) = (0.48, 0.34)$. Las ecuaciones efectivas de estado son $w_{1efec} = w_{2efec} = w_b = 0$, resultando un universo desacelerado (ver 4-31).

En la figura 2, se considera un modelo con $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$ y $\gamma_b = 1 + w_b = 4/3$. La solución atractora tiene $\Omega_1 = 0.03$, $\Omega_2 = 0.56$, $\Omega_b = 0.41$ y $(X_1, Y_1) = (0.28, 0.16)$ y $(X_2, Y_2) = (0.63, 0.41)$. La ecuación de estado efectiva esta dada por $w_{1efec} = w_{2efec} = w_b = 1/3$ lo cual muestra que el campo taquiónico y ϕ se diluyen como radiación. Esto muestra que un término de interacción puede resolver el problema del comportamiento del campo taquiónico como materia en las etapas antiguas del universo antes de la nucleosíntesis.

En la figura 3 se muestra el mismo modelo de la figura 2 pero con un término de interacción que se desvanece i.e. $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$ y $\gamma_b = 1 + w_b = 4/3$ La solución atractora tiene $\Omega_1 = 2/3$, $\Omega_2 = 1/3$, $\Omega_b = 0$ y $(X_1, Y_1) = (0.99, 0.03)$ $(X_2, Y_2) = (0.40, 0.40)$. La ecuación de estado w_i es igual a la ecuación de estado efectiva $w_{iefec} = w_i = 0$. Se ve la relevancia del termino de interacción en la figura 2 es que cambia a w_{iefec} de $w_{iefec} = 0$ (no interacción) a $w_{iefec} = 1/3$ (con interacción).

En la figura 4 se tiene el caso de $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1$ y $\gamma_b = 1 + w_b = 1$. Con esta elección de λ 's las soluciones atractoras tienen la forma $(X_1, Y_1) = (1, 0)$ y $(X_2, Y_2) = (1/3, 0.78)$, $\Omega_1 = 0.27$, $\Omega_2 = 0.73$, $\Omega_b = 0$ y $w_{1efec} = w_{2efec} = w_b = -0.5$. Nótese que aunque $Y_1 \rightarrow 0$ se tiene que $X_1 \rightarrow 1$ y un valor finito de Ω_1 el cual domina el universo con $w_{1efec} = w_{2efec} = -0.5$ resultando en una aceleración positiva del universo. Nótese que $w_i \rightarrow 0$ para un taquión sin interacción, sin embargo el término interactivo da una ecuación de estado efectiva negativa.

En la figura 5 se analiza el caso en que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ y $\gamma_b = 1 + w_b = 1$. Las condiciones de las ecuaciones (4-42)-(4-45) no son satisfechas y no se espera tener todas las Ω 's distintas de cero. En efecto se tiene que $\Omega_1 = 0.74$, $\Omega_2 = 0.26$, $\Omega_b = 0$, i.e, el campo taquiónico domina a tiempos tardíos, $(X_1, Y_1) = (0.55, 0.8)$ y $(X_2, Y_2) = (-0.11, 0.49)$. Las ecuaciones efectivas de estado son $w_{1efec} = w_{2efec} = -0.75$ dando como resultado un universo acelerado.

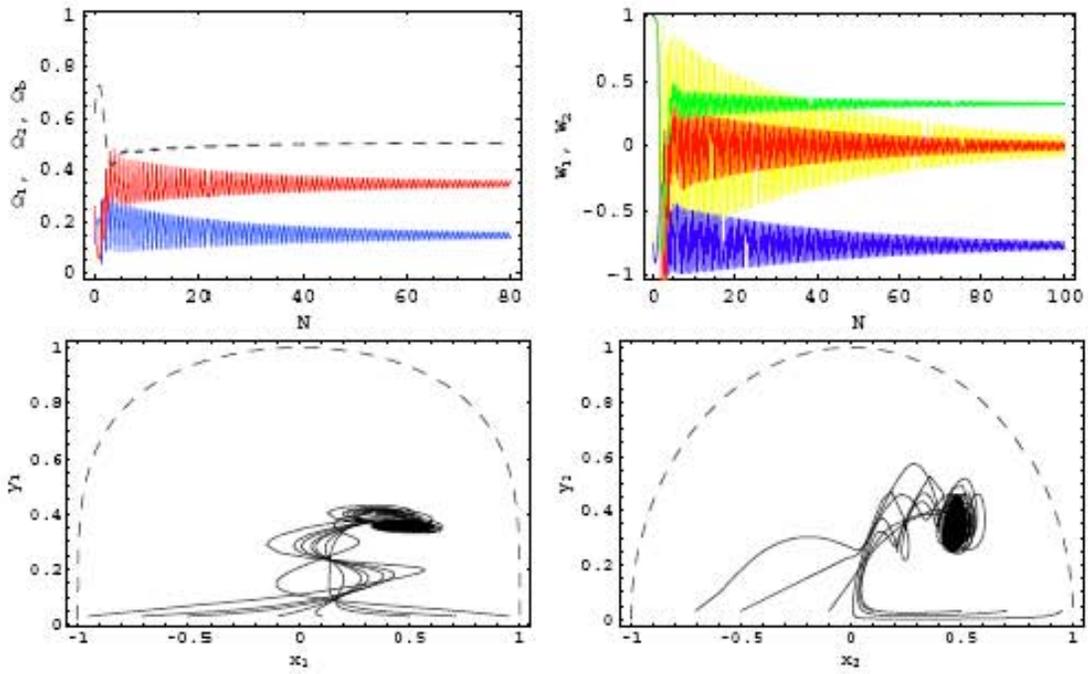


FIG.1 Se muestra para $\lambda_1=10$, $\lambda_2=-10$, $\lambda_3=-5$ y $\gamma_b=1+\omega_b=1$, la evolución de $\Omega_1 = \Omega_T, \Omega_2 = \Omega_\phi, \Omega_b$ (azul (sólida), roja (punteada) y negra (rayada), respectivamente). Asimismo se muestran los parámetros de ecuación de estado $\omega_1 = \omega_T, \omega_{Tefec}$ (azul, amarillo, respectivamente) y $\omega_2 = \omega_\phi, \omega_{\phi fec}$ (verde, rojo, respectivamente) como una función de $N = \text{Log}[a]$. Con esta selección de λ 's, la solución atractora tiene $(X_1, Y_1) = (0.48, 0.36)$ y $(X_2, Y_2) = (0.48, 0.34)$, $\Omega_1 = 0.14$, $\Omega_2 = 0.35$, $\Omega_b = 0.51$ y $w_{1efec} = w_{2efec} = w_b = 0$.

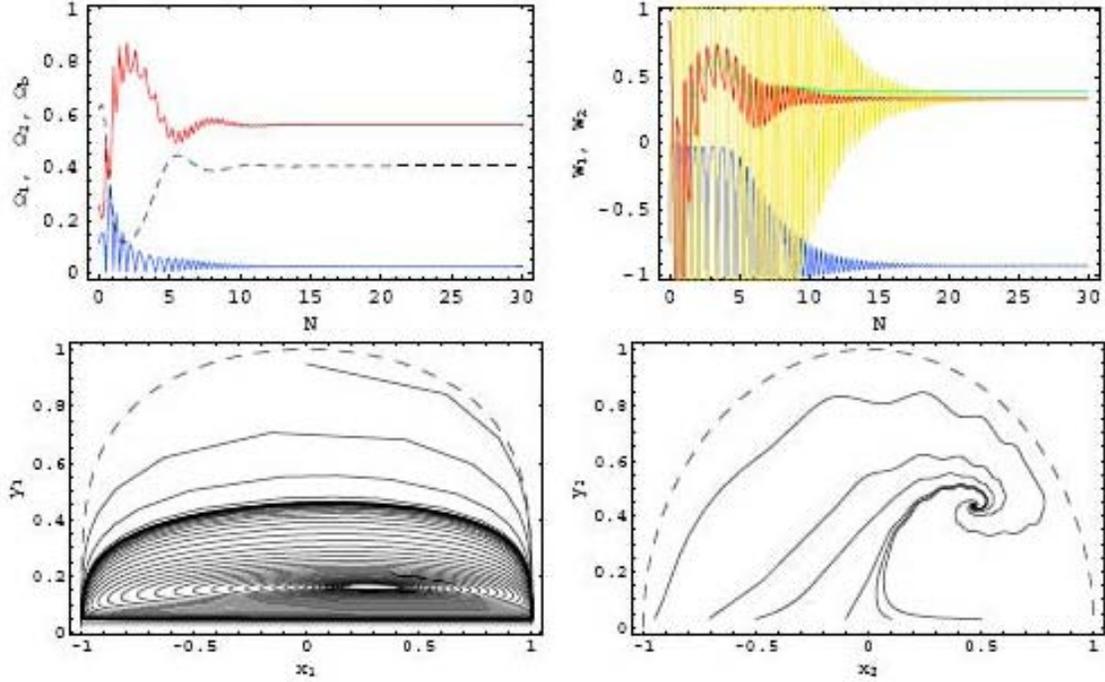


FIG.2 Se muestra para $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$ y $\gamma_b = 1 + \omega_b = 4/3$, la evolución de $\Omega_1 = \Omega_T, \Omega_2 = \Omega_\phi, \Omega_b$ (azul (sólida), roja (punteada) y negra (rayada), respectivamente). Asimismo se muestran los parámetros de ecuación de estado $\omega_1 = \omega_T, \omega_{Tefec}$ (azul, amarillo, respectivamente) y $\omega_2 = \omega_\phi, \omega_{\phi fec}$ (verde, rojo, respectivamente) como una función de $N = \text{Log}[a]$. Con esta selección de λ 's, la solución atractora tiene $(X_1, Y_1) = (0.28, 0.16)$ y $(X_2, Y_2) = (0.63, 0.41)$. $\Omega_1 = 0.03$, $\Omega_2 = 0.56$, $\Omega_b = 0.41$ y $w_{1efec} = w_{2efec} = w_b = 1/3$.

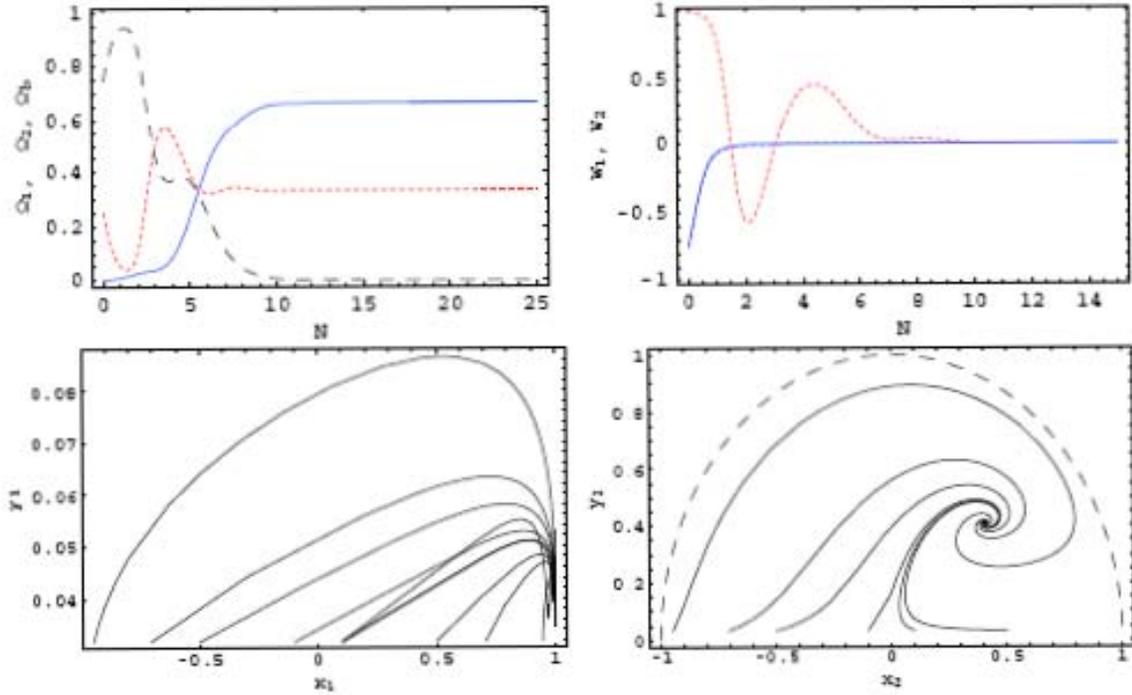


FIG.3 Se muestra para $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$ y $\gamma_b = 1 + \omega_b = 4/3$, la evolución de $\Omega_1 = \Omega_T, \Omega_2 = \Omega_\phi, \Omega_b$ (azul (sólida), roja (punteada) y negra (rayada), respectivamente). Asimismo se muestran el parámetro de ecuación de estado $\omega_1 = \omega_T = \omega_{Tefec}$ (azul) y $\omega_2 = \omega_\phi = \omega_{\phi fec}$ (rojo (punteada)) como una función de $N = \text{Log}[a]$. Con esta selección de $\lambda's$, la solución atractora tiene $(X_1, Y_1) = (0.99, 0.03)$ $(X_2, Y_2) = (0.40, 0.40)$ $\Omega_1 = 2/3$ $\Omega_2 = 1/3, \Omega_b = 0$ $\omega_{1efec} = \omega_{2efec} = 0$.

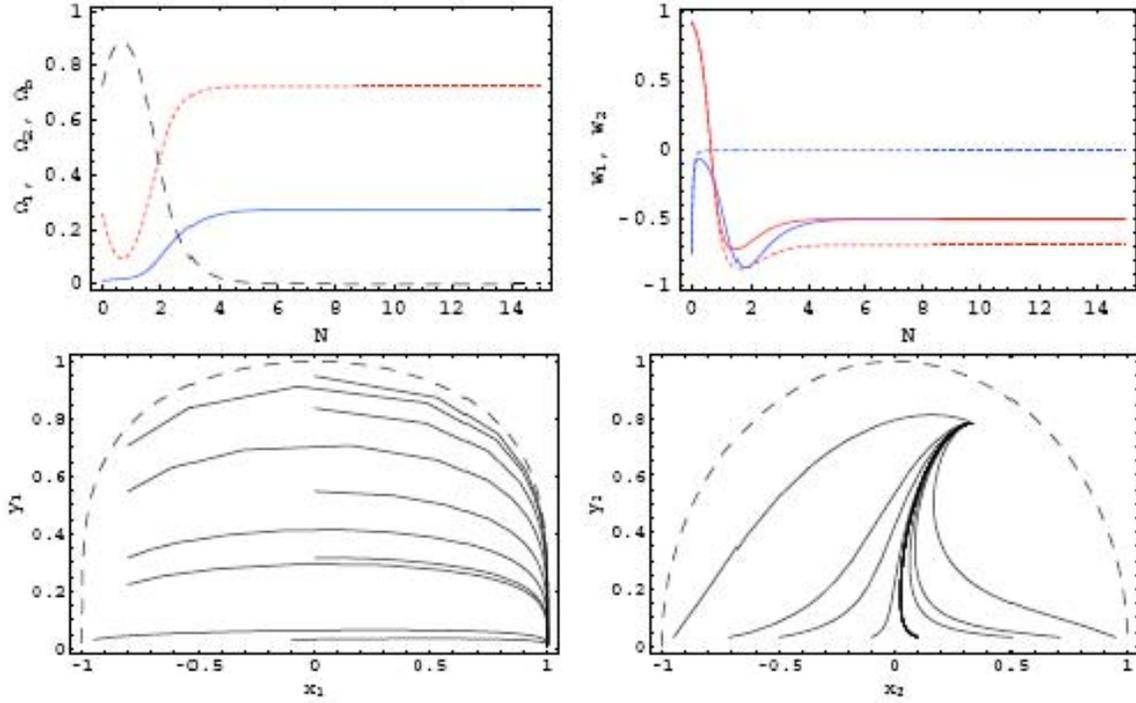


FIG.4 Se muestra para $\lambda_1=100$, $\lambda_2=1/2$, $\lambda_3=1$ y $\gamma_b=1+\omega_b=1$, la evolución de $\Omega_1 = \Omega_T, \Omega_2 = \Omega_\phi, \Omega_b$ (azul (sólida), roja (punteada) y negra (rayada), respectivamente). Asimismo se muestran los parámetros de ecuación de estado $\omega_1 = \omega_T, \omega_{Tefec}$ (azul (punteada), azul (sólido), respectivamente) y $\omega_2 = \omega_\phi, \omega_{\phi fec}$ (rojo (punteada), rojo (sólido), respectivamente). Con esta selección de $\lambda's$, la solución atractora tiene $(X_1, Y_1) = (1, 0)$ y $(X_2, Y_2) = (1/3, 0.78)$, $\Omega_1 = 0.27$, $\Omega_2 = 0.73$, $\Omega_b = 0$ y $w_{1efec} = w_{2efec} = w_b = -0.5$.

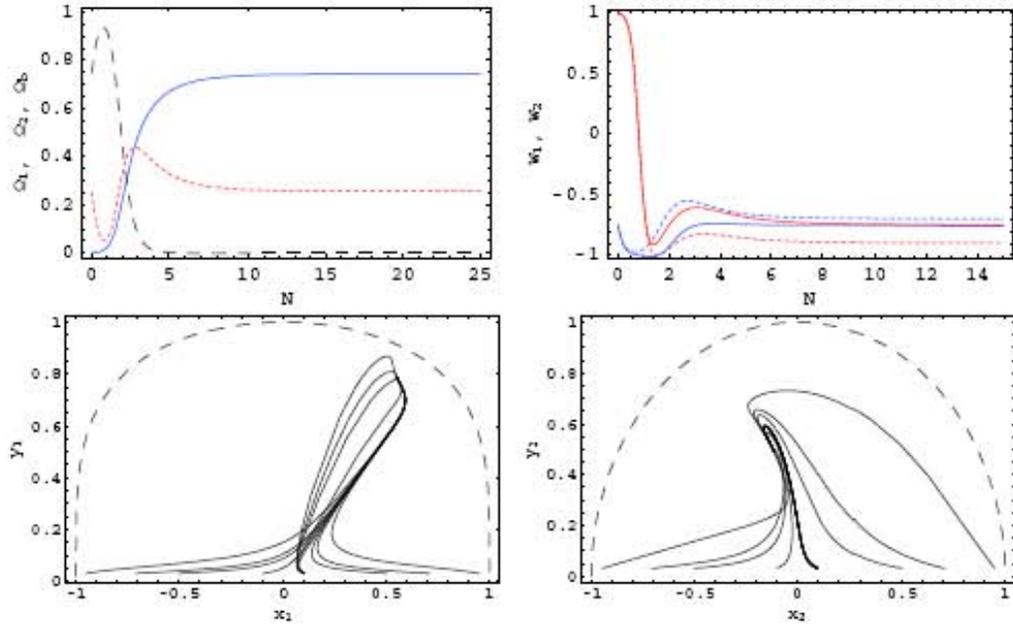


FIG.5 Se muestra para $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$ y $\gamma_b=1+\omega_b=1$, la evolución de $\Omega_1 = \Omega_T, \Omega_2 = \Omega_\phi, \Omega_b$ (azul (sólido), roja (punteada) y negra (rayada), respectivamente). Asimismo se muestran los parámetros de ecuación de estado $\omega_1 = \omega_T, \omega_{Tefec}$ (azul, amarillo, respectivamente) y $\omega_2 = \omega_\phi, \omega_{\phi fec}$ (verde, rojo, respectivamente) como una función de $N = \text{Log}[a]$. Con esta selección de λ 's, la solución atractora tiene $(X_1, Y_1) = (0.55, 0.8)$ y $(X_2, Y_2) = (-0.11, 0.49)$, $\Omega_1 = 0.74$, $\Omega_2 = 0.26$, $\Omega_b = 0$ y $w_{1efec} = w_{2efec} = -0.75$.

SECCION 4.9 TABLAS DE VALORES CRITICOS.

A continuación se presentan 50 de los valores críticos del sistema de ecs. (4-20), de los 69 que se encontraron en total, incluidos los casos de interés para el trabajo. Para ello se consideró oportuno agruparlos en cinco grupos con el siguiente criterio: En los primeros tres grupos se consideran los modelos estables que llevan a un universo acelerado o a un recalentamiento taquiónico adecuado (como ya se dijo es aquel en donde al final se transfiere completamente la energía taquiónica en la del campo escalar), por lo anterior estos grupos son los más importantes pues corresponden a los modelos de interés físico para este trabajo. Por completez se continúa y en la cuarta tabla se agrupan algunos de los modelos inestables que llevan a un universo acelerado o a un recalentamiento taquiónico, pero que carecen de interés para este trabajo por su inestabilidad y se espera que podrían servir de referencia para otros trabajos sobre la dinámica de los taquiones, por las mismas razones de la tabla anterior, en la última se agregan los modelos que no aceleran el universo, ni originan recalentamiento, por lo cual en general se consideran sin interés para los fines de este trabajo, sin embargo en la sección 4.7 B, se hace contacto con los modelos 37,46 y 48.

MODELOS ESTABLES:

MODELOS QUE LLEVAN A UN UNIVERSO ACELERADO, ORIGINAN RECALENTAMIENTO, O AMBOS

$\lambda_1 = \text{CONSTANTE}$ (Corresponde al potencial taquiónico $V \approx T^{-2}$).

En esta tabla 1 se ve que los seis ejemplos presentados llevan a una aceleración, (pues $\ddot{a} \geq 0$) solo en los ejemplos 3 y 4 la aceleración del modelo esta sujeta al intervalo de $\lambda_3 \in [-2, 2]$ y $\lambda_2 \in [0, 2)$ respectivamente. Por lo que respecta al recalentamiento se ve que los modelos 2,3 y 5 llevan a un recalentamiento asintóticamente pues $\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$, mientras que 1 y 4, llevan al recalentamiento taquiónico para algunos de los valores de los parámetros λ 's involucrados en cada caso. Finalmente véase que en el ejemplo 6 no se da recalentamiento en lo absoluto pues se cumple $\Omega_T = 1$, $\Omega_\phi = 0$.

TABLA 1

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
1.	CTE	CTE	0	0	0	$Y_1^2 + Y_2^2 = 1$	$\lambda_1 Y_1^3 + \lambda_2 Y_2^3 = 0$	$engral \neq 0$	$engral \neq 0$	SI

(La estabilidad en este caso requiere que se satisfaga la restricción adicional:
 $(\lambda_1 Y_1)^2 - (\lambda_1 Y_1)(\lambda_2 Y_2) \geq 0$).

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
2.	CTE	0	0	0	0	0	1	0	1	SI
3	CTE	0	CTE	± 1	$\frac{\lambda_3}{\sqrt{6}}$	0	$\sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}}$	0	1	si $\lambda_3 \in [-2, 2]$
4	CTE	CTE	0	± 1	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{\lambda_2^2 + 12} - \lambda_2)$	$engral \neq 0$	$engral \neq 0$	$\lambda_2 \in [0, 2)$

(Es estable por lo menos para el caso de $\lambda_2 = 0$, ver el caso que sigue)

5	CTE	0	0	± 1	0	0	1	0	1	SI
---	-----	---	---	---------	---	---	---	---	---	----

(La estabilidad en este caso requiere que se satisfaga la restricción asintótica adicional $\sqrt{3} \frac{X_1 \lambda_2}{\Omega_T} \rightarrow cte \geq 2$).

6	CTE	CTE	CTE	$\frac{\lambda_1}{\sqrt{3}} \Re$	0	0	1	0	1	SI
---	-----	-----	-----	----------------------------------	---	---	---	---	---	----

(Donde $\Re = \sqrt{\frac{\lambda_1^4 + 36 - \lambda_1^2}{6}}$, se puede demostrar que el único valor posible es $\lambda_1 = 0$, que equivale a $X_1 = 0$ y $Y_1 = 1$, ver el primer caso de la tabla λ_1 cero).

MODELOS QUE LLEVAN A UN UNIVERSO ACELERADO, ORIGINAN RECALENTAMIENTO, O AMBOS

$$\lambda_1 = \text{CERO}$$

En esta tabla se observa que los modelos 7, 8, 9, 10, 11 y 14 presentados llevan a un universo acelerado (pues $\ddot{a} \geq 0$) mientras que los modelos 12 y 13 lo hacen solo en el intervalo $\lambda_3 \in [-2, 2]$ y $\lambda_2 \in [0, 2)$ respectivamente. Por lo que respecta al recalentamiento taquiónico se ve que los modelos 9, 12 y 14 ofrecen un recalentamiento adecuado ($\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$), el modelo 8 lleva al recalentamiento en el caso en que: $Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$, el 13 origina recalentamiento para $\lambda_2 = 0$, mientras que los modelos 7, 10 y 11, no llevan en absoluto a un proceso de recalentamiento taquiónico (pues: $\Omega_T = 1$, $\Omega_\phi = 0$).

TABLA 2

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
7.	0	CTE	CTE	0	0	1	0	1	0	SI
8.	0	0	0	0	0	$Y_1^2 + Y_2^2 = 1$	$Y_1^2 + Y_2^2 = 1$	$engr1 \neq 0$	$engr1 \neq 0$	SI
9.	0	0	0	0	0	0	1	0	1	SI
10	0	CTE	0	0	0	1	0	1	0	SI
11	0	∞	0	0	0	1	0	1	0	SI

(La estabilidad en este caso requiere que se satisfagan las restricciones asintóticas adicionales: $\lambda_2 Y_2^2 = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 Y_2 = 0$).

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
12	0	0	CTE	± 1	$\frac{\lambda_3}{\sqrt{6}}$	0	$\sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}}$	0	1	si $\lambda_3 \in [-2, 2]$
13	CTE	CTE	0	± 1	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{\lambda_2^2 + 12} - \lambda_2)$	$engr1 \neq 0$	$engr1 \neq 0$	$\lambda_2 \in [0, 2)$

(Es estable por lo menos para el caso de $\lambda_2 = 0$, ver el caso que sigue).

14	0	0	0	± 1	0	0	1	0	1	SI
----	---	---	---	---------	---	---	---	---	---	----

(La estabilidad en este caso requiere que se satisfaga la restricción asintótica adicional

$$\sqrt{3} \frac{X_1 \lambda_2}{\Omega_T} \rightarrow cte \geq 2).$$

MODELOS QUE LLEVAN A UN UNIVERSO ACELERADO, ORIGINAN RECALENTAMIENTO, O AMBOS

$$\lambda_1 = \infty$$

En esta tercera tabla se observa que los modelos 15, 16 y 18 presentados llevan a un universo acelerado (pues $\ddot{a} \geq 0$) mientras que los modelos 17 y 19 lo hacen solo en el intervalo $\lambda_2 \in [0, 2)$ y $\lambda_3 \in [-2, 2]$ respectivamente. Por lo que respecta al recalentamiento taquiónico se ve que los modelos 15, 18 y 19 ofrecen un recalentamiento adecuado ($\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$), el 17 lleva al recalentamiento para $\lambda_2 = 0$, mientras que el modelo 16 no lleva en absoluto a un proceso de recalentamiento taquiónico (pues: $\Omega_T = 1$, $\Omega_\phi = 0$).

TABLA 3

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
15	∞	0	0	0	0	0	1	0	1	SI

(En el caso en que $\lambda_1 Y_1 \rightarrow 0$ se da la estabilidad, sí $\lambda_1 Y_1 \rightarrow \infty$, se requiere además que $\frac{27}{2}(\lambda_1 Y_1)^2 [N - 3X_1 \lambda_2] \geq 0$, donde N , esta dada en las ecuaciones (4-52).

16	∞	∞	0	0	0	1	0	1	0	SI
----	----------	----------	---	---	---	---	---	---	---	----

(El modelo es estable cuando $\lambda_1 Y_1 \rightarrow 0$ y $\lambda_2 Y_2 \rightarrow 0$. Si $\lambda_1 Y_1 \rightarrow \infty$ entonces se requiere que $\lambda_2 Y_2 \rightarrow 0$ pero depende demasiado de los detalles).

17	∞	CTE	0	± 1	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{\lambda_2^2 + 12} - \lambda_2)$	<i>engral</i> $\neq 0$	<i>engral</i> $\neq 0$	$\lambda_2 \in [0, 2)$
----	----------	-----	---	---------	---	---	-----------------------------------------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

(Es estable por lo menos para el caso de $\lambda_2 = 0$, ver el caso que sigue).

18	∞	0	0	± 1	0	0	1	0	1	SI
----	----------	---	---	---------	---	---	---	---	---	----

(El modelo es estable cuando $\lambda_1 Y_1 \rightarrow 0$ y $\sqrt{3} \frac{X_1 \lambda_2}{\Omega_T} \rightarrow cte \geq 2$. Si $\lambda_1 Y_1 \rightarrow \infty$, se requiere que

$\sqrt{3} \frac{X_1 \lambda_2}{\Omega_T} \rightarrow cte \geq 2$, además de que $(\lambda_1 Y_1)^2 \left[\frac{81\Omega_T}{2} - 18N \right] - \frac{27N\lambda_2}{\Omega_T} (\lambda_1 Y_1) \geq 0$, donde N está dada en las ecuaciones (4-52)).

19	∞	0	CTE	± 1	$\frac{\lambda_3}{\sqrt{6}}$	0	$\sqrt{1 - \frac{\lambda_3^2}{6}}$	0	1	si $\lambda_3 \in [-2, 2]$
----	----------	---	-----	---------	------------------------------	---	------------------------------------	---	---	----------------------------

MODELOS INESTABLES

Los ejemplos del 20 al 36 no son interesantes para este trabajo por que son inestables y carecen de interés físico, sin embargo por completos los presentamos a continuación.

TABLA 4.

con $\lambda_1 = \text{CONSTANTE}$ (Corresponde al potencial taquiónico $V \approx T^{-2}$)

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
20.	CTE	CTE	CTE	± 1	1	0	0	0	1	NO
21	CTE	∞	0	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
22.	CTE	CTE	CTE	0	± 1	0	0	0	1	NO
23	CTE	CTE	∞	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
24	CTE	0	CTE	± 1	$\frac{\sqrt{6}}{2\lambda_3}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2\lambda_3}$	$1 - \frac{3}{\lambda_3^2}$	$\frac{3}{\lambda_3^2}$	NO

(Es inestable para el caso de interés donde $\lambda_3 = \sqrt{3}$, $\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$).

(CONTINUA TABLA 4).

con $\lambda_1 = \text{CERO}$

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
25.	0	CTE	CTE	± 1	1	0	0	0	1	NO
26.	0	0	$\sqrt{6}$	± 1	1	0	0	0	1	NO
27.	0	∞	0	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
28.	0	CTE	CTE	0	± 1	0	0	0	1	NO
29.	0	CTE	∞	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
30	0	0	CTE	± 1	$\frac{\sqrt{6}}{2\lambda_3}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2\lambda_3}$	$1 - \frac{3}{\lambda_3^2}$	$\frac{3}{\lambda_3^2}$	NO

(CONTINUA TABLA 4)

con $\lambda_1 = \text{INFINITO}$

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
31.	∞	CTE	CTE	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
32.	∞	∞	0	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
33.	∞	CTE	CTE	0	± 1	0	0	0	1	NO
34.	∞	CTE	∞	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
35.	∞	∞	0	± 1	± 1	0	0	0	1	NO
36	∞	0	CTE	± 1	$\frac{\sqrt{6}}{2\lambda_3}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2\lambda_3}$	$1 - \frac{3}{\lambda_3^2}$	$\frac{3}{\lambda_3^2}$	NO

(Es inestable para el caso de interés donde $\lambda_3 = \sqrt{3}$, $\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$).

CASOS SIN INTERES: los modelos de la tabla 5 (del 37 al 50) no presentan recalentamiento taquiónico ni aceleran el universo. A continuación. los presentamos:

TABLA 5

$\lambda_1 = \text{CONSTANTE}$ (Corresponde al potencial taquiónico: $V \approx T^{-2}$).

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
37.	CTE	CTE	CTE	± 1	0	0	0	1	0	NO
38.	CTE	∞	0	± 1	0	0	0	1	0	NO
39.	CTE	0	∞	± 1	0	0	0	1	0	NO
40.	CTE	0	0	± 1	0	0	0	1	0	NO
41.	CTE	CTE	∞	± 1	0	0	0	1	0	NO

(CONTINUA TABLA 5)

$\lambda_1 = \text{CERO}$

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
42.	0	CTE	CTE	± 1	0	0	0	1	0	NO
43.	0	∞	0	± 1	0	0	0	1	0	NO
44.	0	0	∞	± 1	0	0	0	1	0	NO
45.	0	CTE	∞	± 1	0	0	0	1	0	NO

(CONTINUA TABLA 5)

$\lambda_3 = \text{INFINITO}$

	λ_1	λ_2	λ_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Ω_T	Ω_ϕ	$\ddot{a} \geq 0$
46.	∞	CTE	CTE	± 1	0	0	0	1	0	NO
47.	∞	∞	0	± 1	0	0	0	1	0	NO
48.	∞	0	∞	± 1	0	0	0	1	0	NO
49.	∞	CTE	CTE	± 1	0	0	0	1	0	NO
50.	∞	CTE	∞	± 1	0	0	0	1	0	NO

SECCION 4.10 Conclusiones del capítulo.

En este capítulo se estudio la evolución de un campo escalar T (taquiónico) con una lagrangiana del tipo Dirac-Born-Infeld acoplada a un campo escalar canónico a través de un término de interacción arbitrario $B(T, \phi)$ en la presencia de un fluido barotrópico, el cual puede ser materia o radiación. Una de las características interesantes es que se demostró que la dependencia de todos los modelos se da a través de tres parámetros $\lambda_1 = -V_T / V^{3/2}$, $\lambda_2 = -B_T / B^{3/2}$, $\lambda_3 = -B_\phi / B$. En primer lugar se encontraron las ecuaciones dinámicas de los campos T Y ϕ (sección 4.1), las cuales se les puede expresar de manera alternativa en términos de las densidades de energía de los campos (secciones 4.1 y 4.2). Dado que las ecuaciones anteriores son no lineales y muy complicadas, se expresan en forma de un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden (i.e, como un sistema dinámico) lo cual de paso permite dejar en claro el hecho de que los distintos modelos sólo dependen de tres parámetros λ_i , mismos que a su vez dependen de las cantidades $V(T)$ y $B(T, \phi)$ y del parámetro constante $\gamma_b = 1 + w_b$. (sección 4.3). A partir de lo anterior se encontraron las soluciones atractoras y por lo mismo los valores críticos del sistema (sección 4.9), mismos que se

agruparon en cinco grupos con el siguiente criterio: En los primeras tres grupos se consideraron los modelos estables que dan lugar a un universo acelerado o a un recalentamiento taquiónico adecuado (como ya se dijo es aquel en donde al final se transfiere completamente la energía taquiónica en la del campo escalar), por lo anterior estos grupos son las más importante pues corresponden a los modelos de interés físico para este trabajo. En el cuarto grupo se agrupan los modelos inestables que llevan a un universo acelerado o a un recalentamiento taquiónico, pero que carecen de interés por su inestabilidad. Finalmente la ultima tabla trata de los modelos que no aceleran el universo, ni originan recalentamiento, por lo cual de principio se consideran sin interés para los fines de este trabajo (en esta parte por simplicidad se supuso que no había fluido barotrópico o equivalentemente que termina por dominar alguno de los campos escalares o ambos, matemáticamente $\gamma_b = 0$ o $\Omega_b = 0$). Como una aplicación de los valores críticos deducidos en la sección anterior, en la sección 4.7A se hizo un análisis detallado de dos modelos de interés, i.e, se buscó entre los modelos estables aquellos que dieran lugar a un universo acelerado ($\ddot{a} \geq 0$), o un recalentamiento taquiónico ($\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$) (o ambos), para ambos modelos se escoge el potencial taquiónico $V(T) = Sech(T)$, y el potencial de interacción factorizable $B(T, \phi) = F(T)f(\phi)$. En la sección 4.7 B se siguió con el estudio de los modelos de física de partículas (i.e, de nuevo se escoge $B(T, \phi) = F(T)f(\phi)$) pero se hizo desde un punto de vista diferente, para empezar no se supuso de antemano que el fluido barotrópico era cero como en la sección anterior, y por otro lado se introdujo el concepto de la T derivada del potencial taquiónico, el procedimiento consistió en encontrar la derivada del potencial efectivo taquiónico y después usar el hecho de que la dinámica de un campo escalar consiste en minimizar el potencial, a partir de este procedimiento se ejemplifica con el caso del potencial taquiónico de branas $V = V_0 e^{-T^2/2}$ y como término de interacción $B = B_0 e^{\beta T} \phi^n$ con $V_0 > 0$ y $B_0 > 0$ para determinar la dinámica del modelo. En dos de los casos se encontró que correspondían con dos de los modelos señalados en la tabla de valores críticos, los ejemplos 37 (46 si $\lambda_1 \rightarrow \infty$) y 48 de la sección 4.9. En la sección 4.4 se analizaron algunos modelos concretos donde por simplicidad se tomaron los valores de las λ_i ($i= 1, 2, 3$) constantes, (de la primera de las ecuaciones (4-22) esto significa de paso que el potencial taquiónico a considerar será el $V(T) = AT^{-2}$), y se tomó en este caso la existencia de un fluido barotrópico es decir $\gamma_b \neq 0$. Aquí se procedió de una manera un poco distinta, calculando los puntos críticos en diferentes límites y resolviendo el sistema de ecuaciones (4-20) numéricamente para mostrar el comportamiento de los campos escalares T y ϕ . En la sección 4.5 se estudió de forma detallada el comportamiento asintótico al estudiar algunos casos especiales considerando los diferentes límites de los parámetros λ . Para ello se ofrecieron ejemplos de cuando los parámetros en cuestión toman algunos valores en particular (se mencionó que un valor constante de λ_3 puede ser obtenido por ejemplo, si se considera un potencial de interacción factorizable $B(T, \phi) = h(T)K(\phi)$ y tomar $K(\phi)$ como un potencial exponencial), a partir de estos valores asintóticos se discutió de una manera más bien general los valores en el mismo límite de las cantidades cosmológicas relevantes como X_1, X_2, Y_1 y Y_2 , y Ω_1, Ω_2 y Ω_b . En la sección 4.8 se presentaron cuatro soluciones atractoras diferentes que dependen de los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Se ofrecieron una serie de figuras donde se mostró la evolución de $\Omega_T \equiv \Omega_1, \Omega_\phi \equiv \Omega_2, \Omega_b$ y $w_1 \equiv w_T, w_{Tefec}$, $w_2 \equiv w_\phi, w_{\phi fec}$ para las distintas elecciones de las λ 's. Asimismo se mostró el espacio fase de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) para cada caso.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

El trabajo que ahora concluye trató en gran medida de determinar y analizar las consecuencias fenomenológicas y cosmológicas del taquión. El taquión está motivado por la teoría de cuerdas y son los estados de menor energía. Estos estados son de cuerdas abiertas que tienen sus extremos en una brana, ya sea en un sistema brana-antibrana que en la misma brana. La peculiaridad de estos estados es que su masa al cuadrado es negativa, por lo que la creación de estas partículas estaría favorecida energéticamente y el sistema es inestable. En este sentido, como se vio en el capítulo dos, las Dp-branas en sistemas de cuerdas bosónicas siempre contienen taquiones y el sistema es totalmente inestable y acaba colapsando. Sin embargo, para los sistemas de supercuerdas se tiene que dependiendo del tipo de cuerdas, ya sea IIA o IIB, se tienen branas estables para dimensiones pares o impares, respectivamente. En sistemas de Dp-branas-anti-Dp-branas la existencia del taquión haría que el sistema se desvaneciera. Un resultado muy interesante es que el potencial del taquión representa la energía total del sistema de una brana o el de brana-antibrana, Esto quiere decir que conociendo el potencial del taquión se puede determinar la energía de la Dp-brana completamente.

En un espacio de tres dimensiones espaciales, D3-brana, el taquión de un sistema de branas, en el límite de teoría de campos, sería descrito por un campo escalar con un lagrangiano tipo Dirac-Born-Infeld y con un potencial que tiene un máximo en el origen. Dado que la masa está dada como la segunda derivada del potencial, el hecho de que tenga un máximo es equivalente a que la m^2 sea negativa y de allí el nombre de taquión.

Una peculiaridad del taquión es que en los potenciales motivados por la teoría de cuerdas, (ver capítulo dos), la evolución de este campo da asintóticamente una presión igual a cero por lo que el taquión se comportaría cosmológicamente como materia. Sin embargo, si el taquión está presente en el universo a energías altas (la masa del taquión está dada en órdenes de la masa de Planck) entonces nuestro universo hubiera estado dominado por materia taquiónica y no por radiación y mucho antes que la época de equivalencia materia-radiación. Entonces, la existencia a altas energías de taquiones es un problema serio para los modelos cosmológicos con branas inestables. En este trabajo para tratar de resolver este problema estudiamos la interacción del taquión con otro campo escalar y vimos en el capítulo 4 que la interacción es fundamental para la evolución cosmológica. La interacción permite que el campo T decaiga y deje de dominar al universo. Encontramos que se puede tener al taquión dominando al universo sin interacción pero si incluimos la interacción con otro campo entonces se diluye como radiación. Este trabajo está en la referencia [73] (nuestro 2do artículo Interacting Tachyon: Generic cosmological evolution for a tachyon and a scalar field. A. de la Macorra, U. Filobello, hep-th/0705.2059).

Dado que la energía cinética del taquión no es canónica, tiene una raíz cuadrada, entonces la interpretación de la masa no es trivial. La m^2 está dada como la segunda derivada del potencial con respecto al campo pero esto es solo válido para campos canónicamente normalizados. En general la definición de masa está dada por ser el polo del propagador. En el capt. 3 estudiamos precisamente cómo determinar la masa del taquión tomando en cuenta que el lagrangiano es tipo Dirac-Born-Infeld y se publicó en nuestro primer artículo [62] (The mass, normalization and late time behavior of the tachyon field, Physics Letters B 635 (2006) 355-363). Por otro lado es importante resaltar que no se puede leer trivialmente el comportamiento del taquión del potencial V como se puede ver de la ec. del movimiento dada en (2-39).

Por otro lado, los campos escalares, incluyendo al taquión, pueden generar épocas en donde el universo se acelera. Según la teoría actual de la cosmología hay dos etapas de inflación. La primera a escalas de energía grandes, y ha sido propuesta para resolver los problemas de la isotropía y homogeneidad del modelo de la gran explosión. La segunda etapa es muy reciente y es generada por la energía oscura que domina actualmente al universo en un 74%. En el capt. 4 vimos la posibilidad de que estas etapas de inflación hayan sido generadas por el campo taquiónico. En el

capt. 3 estudiamos las condiciones generales que debe cumplir el potencial de T para que el universo se acelere.

Finalmente, en el capítulo 4 generalizamos el análisis dinámico del taquión y estudiamos la dinámica y la evolución cosmológica de un campo escalar con un lagrangiano tipo DBI y un campo escalar canónico en presencia de un fluido barotrópico que podría ser radiación o materia. Tomamos al potencial de taquión V y al potencial de interacción B entre los dos campos totalmente arbitrarios. La interacción con el fluido barotrópico es solo gravitacional. Obtuvimos unas ecuaciones dinámicas y demostramos que toda la dependencia de los diferentes potenciales queda reducida a tres parámetros. Estudiamos en forma general la evolución de estos campos para diferentes valores de los parámetros y demostramos la relevancia de la interacción entre ambos.

A continuación resaltaremos los resultados más importantes del trabajo de investigación de la tesis que está descrito en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3, se encontró una transformación que permitiera obtener un campo taquiónico canónico ϕ válido para valores arbitrarios de \dot{T} . De este resultado fue posible definir un potencial efectivo U de tal forma que por ejemplo, es posible escribir a la densidad de energía en términos de ϕ y el potencial efectivo U de forma canónica. Se obtuvo que el potencial $U(\phi)$ diverge y es ilimitado desde abajo mientras que $V \rightarrow 0$. Aunque el potencial es ilimitado desde abajo la densidad de energía ρ permanece constante. Se concluyó que en el mínimo las cantidades $U(\phi)$ y los campos ϕ y $\dot{\phi}$, tienden a un valor infinito, mostrando que ϕ tiene un comportamiento ilimitado y no oscila en el mínimo $V = 0$. Sin embargo no existe una configuración estable lo cual podría ser interpretado como el decaimiento de un sistema inestable brana-antibrana representado por el potencial taquiónico. Los resultados de esta sección son parte de las aportaciones de esta investigación.

Un resultado importante se dio para el potencial cúbico de la forma $V = T^3 + T^2 - C$ ($C > 0$), este tiene un mínimo local para $T > 0$ y es ilimitado desde abajo para $T < 0$. Este tipo de potenciales obtenidos de Dp-branas en teoría de cuerdas bosónicas no ha sido completamente analizado por que es ilimitado desde abajo para $T < 0$ y porque en el valor mínimo $T > 0$ el sistema es inestable (un crecimiento grande de perturbaciones cuando T oscila alrededor de $T_m > 0$). Sin embargo el campo físico ϕ no alcanza las regiones afuera de los ceros del potencial $V(T)$ y por lo tanto no oscila alrededor de $T_m > 0$ ni percibe la ilimitación del potencial para T negativo. El hecho de que ϕ no oscile alrededor de un mínimo es lo que se espera de un taquión motivado de cuerdas.

En el capítulo 4 se encontraron las ecuaciones diferenciales acopladas dinámicas de los campos T y ϕ . Así como los elementos relevantes del tensor de esfuerzo-energía (densidad y presión del sistema). Se expresó el sistema de ecuaciones diferenciales de la sección (4.1) en forma de un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden (sistema dinámico). Una de las características sobresalientes de esta sección es que se encontró que los distintos modelos solo dependen de tres parámetros λ_i ($i=1, 2, 3$). Se buscaron soluciones correspondientes a puntos críticos estables (atractores). Para ello una vez obtenidos los puntos críticos se hizo un análisis de estabilidad para determinar cuales de ellos eran estables. Como parte de esta investigación se presento una tabla de 50 puntos críticos (de los 69 encontrados), señalando tanto a los modelos estables como a los que no lo son, consignándose de paso a los que tenían interés para este trabajo. Se estudiaron dos de los modelos estables de la sección anterior, se escogieron modelos de interés desde el punto de vista que describieran alguna de las propiedades mencionadas, i.e, que den lugar a un universo acelerado ($\ddot{a} \geq 0$), o un recalentamiento taquiónico ($\Omega_T = 0$, $\Omega_\phi = 1$) (o ambos), por su interés se consideraron modelos motivados de física de partículas, i.e, donde el potencial de interacción sea separable ($B(T, \phi) = F(T)f(\phi)$). Los resultados de esta sección son parte de las

aportaciones de esta investigación. Se continuó con el estudio de los modelos de física de partículas con la diferencia de que se partió desde un punto de vista un poco diferente, para empezar no se supuso de antemano que el fluido barotrópico es cero como en la sección anterior, y por otro lado se introdujo el concepto de la T derivada del potencial taquiónico, lo que se hizo es encontrar la derivada del potencial efectivo taquiónico y después usar el hecho de que la dinámica de un campo escalar consiste en minimizar el potencial. Se analizaron algunos modelos concretos donde por simplicidad se toman los valores de las λ_i ($i= 1, 2,3$) constantes. En esta sección se enfatizó en los criterios para determinar cual de los fluidos termina por dominar, así mismo se resolvieron las ecuaciones dinámicas numéricamente para mostrar el comportamiento de los campos escalares T y ϕ . Se demostró que es posible estudiar algunos casos especiales al considerar los diferentes límites de los parámetros λ_i ($i= 1, 2,3$). Así por ejemplo se mencionó que una λ_1 constante tal y como ya se ha dicho se obtiene a partir de un potencial $V = V_0/T^2$ con $\lambda_1 = 2/\sqrt{V_0}$. Un valor constante de λ_3 puede ser obtenido por ejemplo si se considera un potencial de interacción factorizable $B(T, \phi) = h(T)K(\phi)$ y tomar $K(\phi)$ como un potencial exponencial etc. Se presentaron cuatro soluciones atractoras diferentes que dependen de los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. En las figuras que se presentaron se muestra la evolución de $\Omega_r \equiv \Omega_1, \Omega_\phi \equiv \Omega_2, \Omega_b$ y $w_1 \equiv w_r, w_{r_{efec}}, w_2 \equiv w_\phi, w_{\phi_{efec}}$ para las distintas elecciones de las λ 's. Asimismo se muestra el espacio fase de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) para cada caso.

Finalmente, creemos que una continuación natural de lo investigado sería ampliar el análisis dinámico del taquiión pero ahora acoplado a un campo fermiónico e investigar de nuevo las consecuencias cosmológicas y fenomenológicas del universo que resultaría. Además, faltaría hacer un estudio más exhaustivo de los potenciales y hacer una comparación de los modelos cosmológicos con los datos observacionales.

BIBLIOGRAFIA

1. - A. Riess et al., "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant", *Astron. J.* 116, 1009 (1998).
2. - S. Perlmutter, "Supernovae, Dark Energy and the Accelerating Universe: The Status of the Cosmological Parameters", *Int. J. Mod Phys. A* 15S1, 715 (2000)
3. - Paul Steinhardt, "A quintessential introduction to dark energy", *Phil. Trans. R Soc. Lond. A* (2003) 361, 2497-2513.
4. - A de la Macorra y G. Piccinelli, "Cosmological Evolution Of. General Scalar Fields as Quintessence", *Phys. Rev. D* 61, 123503 (2000).
5. - D. E. Groom, "Astrophysical Constants en Review of Particle Physics (RPP 2000)", *Eur. Phys. J. C* 15, 74 (2000).
6. - M. Fukugita y C. J. Hogan, "Global cosmological parameters: H_0 , Ω_M , and Λ en review of Particle Physics (RPP 2000)", *Eur. Phys. J. C* 15, 136 (2000)
7. - A. Linde, *Inflation and Quantum Cosmology*, Boston Academic Pr. (1990)
8. - A. Linde, *Particle Physics and inflationary Cosmology*, (Contemporary concepts in Physics, 5), Harwood Academic Pr. (1990).
9. - Spergel, D.N., "First year (WMAP) observations: Determination of cosmological parameter", *Astrophys. J.* 148, 175.
10. - Filippenko, A. V., "The accelerating universe and dark energy". Evidence from type 1a. Supernovae, astro-ph/0309739.
11. - Rie, A. et al 1998 (High-Z Supernovae Search) 1998, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant", *astronomical journal*, 116, 1009.
12. - E. J. Copeland, A. Liddle y D. Wands, "Exponential potentials and cosmological scaling solutions", *Phys. Rev. D* 57, 4686 (1998)
13. - A. de la Macorra y C. Stephan-Otto, astro-ph/0106316.
14. - Fernando Quevedo, "lectures on strings/ brane cosmology, hep-th/0210292 v1
15. - M.B.Green, J.H.Schwarz, E. Witten, *super string theory*, vol.1 (1987).
16. - J. Polchinski, "String Theory", Cambridge University Press (1998).
17. - A. Sen, "Tachyon dynamics in open string theory", hep-th/0410103.
18. - J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond charges", *Phys. Rev* 75 (1995) 4724, hep-th/9510017.
19. - J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, "new connections between string theories

- Mod. Phys. Lett. A4 (1998) 2073.
20. - E. Witten, "Bound states of strings and P branes", Nucl. Phys. B460 (1996) 335-350, hep-th/9510135.
 21. - Edmund J Copeland, M Samy, and Shinji Tsujikawa, "Dynamics of dark energy", ar Xiv: hep-th /0603057v3.
 22. - L. M. Krauss and M.S Turner, Gen. Rel. Grav. 27, 1137 (1995)
 - 23.- A. G Riess et al, Astron. J. 116, 1009 (1998); Astron. J. 117, 707 (1999).
 24. - S. M Carroll, living Rev. Rel. 4, 1 (2001).
 25. - P.J.E. Peebles and B Ratra, Rev. Mod. Phys. 75, 559 (2003).
 26. – P.G. Ferreira and M. Joice, Phys. Rev. Lett. 79, 4740 (1997); Phys. Rev. D58 023503 (1998).
 27. - R.R Caldwell, R. Dave and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 80, 1582 (1998).
 28. - J.A. Firemen, C.T.Hill and R. Watkins, Phys. Rev. D 46, 1226 (1992).
 29. - J. Khourny and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. 93, 171104 (2004).
 30. – T. Chiba , T. Okabe and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D 62, 023511 (2000).
 31. - G.R Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B 485, 208 (2000).
 32. - S. Capozziello, S Carloni and A. Troisi, arXiv: astro-ph/0303041.
 33. - R Collister et al, "Dark energy, dark matter and the Chaplygin gas" gr-qc/0210079.
 34. - R.R.Caldwell, Phys. Lett.B 545, 23-29 (2002).
 35. - N.Arkani-Hamed, P.Creminelli,S. Mukohyama and M. Zaldarriaga, JCAP 0404, 001 (2004).
 36. - P.J.Steinhardt and N. Turok, ar Xiv astro-ph/0605173.
 - 37.- D.N.Spergel et al. [WMAP Collaboration], Astrophys. J.Suppl, 148, 175
 - 38.- D.N.Spergel et al. [WMAP Collaboration], arXiv:astro-ph/0603449(2003).
 - 39.- J.S.Alcaniz and J.A.S.Lima, Astrophys. J. 550, L133 (2001).
 40. - M. Doran, J.M.Schwindt and C. Wetterich, Phys. Rev. D 64, 123520 (2001).
 41. - N.N.Weinberg and M. Kamionkowsky, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 341,251 (2003).
 42. - A. Sen, JHEP 9808, 010 (1998) [ar Xiv: hep-th/9805019].
 43. - A. Sen, JHEP 9808, 012 (1998) [ar Xiv: hep-th/9805170].
 44. - A. Sen, JHEP 9809, 023 (1998) [ar Xiv: hep-th/9808141].
 45. - A. Sen and Barton Zwiebach "Tachyon condensation in string theory", ar Xiv: hep-th/9912249v1 24dec 1999.

46. - A. Sen “Tachyon matter”, arXiv: hep-th/0203265.
47. - Joseph A Minahan and Barton Zwiebach “Effective tachyon dynamics in superstring theory”, arXiv: hep-th/0009246v1 29sept 2000.
48. - P. Horava, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 1373 (1999) [arXiv: hep-th/9812135].
49. - A. Sen, JHEP 0204, 048 (2002) [ar Xiv: hep-th/0203211].
50. - A.Sen, Int. J.Mod. Phys. A 14, 4061 (1999) [arXiv: hep-th/9902105]
51. - A. Sen, JHEP 9912, 027 (1999) [ar Xiv: hep-th/9911116].
52. - D.Kutasov and V.Niarchos, Nucl.Phys. B 666, 56 (2003) [arXiv: hep-th/0304045].
53. - G.W.Gibbons, class. Quantum grav. 20 (2003) S321, hep-th/0301117.
54. - A.Sen, “Tachyon condensation on the brane antibrane system”,arXiv: 9805170v3 28may 1998.
55. - E.Copeland, M.R.Garousi, M.Sami and Shinji Tsujikawa.”What is need of a tachyon if it is to be the dark energy?” Physical review D 71, 043003 (2005).
56. - Lev Kofman and Andrei Linde, “Problems with tachyon inflation”, arXiv: hep-th/0205121v1 14may 2002.
57. - D. Faddieev, I. Sominski, “Problemas de algebra superior”, cuarta edición, Editorial Mir moscú.
58. - A.Sen, Mod.Phys.Lett.A17 (2002) 1797, hep-th/0204143
59. - M.Fairbairn, M.H.G. Tytgat, Phys.Lett.B 546 (2002)1, hep-th/ 0204070.
60. - A. Sen, JHEP 0207, 065 (2002) [ar Xiv: hep-th/0203265].
61. - A.V.Frolov, L. Kofman, A.A Starobinsky, Phys. Lett.B 545 (2002) 8, hep-th/0204187.
- 62.- A.de la Macorra, U.Filobello, G.Germán. “The mass, normalization and late time behavior of the tachyon field”, Physics letters B 635 (2006) 355-363.
- 63.- S.Weinberg, the quantum theory of fields, Cambridge univ. press, Cambridge 2000.
64. - N.Lambert, H. Liu, J.Maldacena, hep-th/0303139.

65. - A.de la Macorra y G.German, Int. J. Mod. Phys. D 13 (2004) 1939.
66. - T.Padmanabhan, Phys. Rev. D 66 (2002) 021301, hep-th/0204150.
67. - E.J.Copellan, A.R.Liddle, and D.Wands, Phys.Rev.D 57, 4686 (1998).
68. - L Kofman, A Linde and A Starobinsky, "Towards the theory of reheating, After inflation" arXiv: hep-ph/9704452 v2 1997).
69. - G.W.Gibbons, Phys. Lett.B 537 (2002) 1, hep-th/0204008.
70. - G.Shui and I. Wasserman, Phys. Lett. B 541, 6 (2002).
71. - C.J.Kim, H.B.Kim and Y.B.Kim, Phys. Lett.B 552, 111 (2003).
72. - B.C.Paul and M. Sami, Phys. Rev. D 70, 027301 (2004).
73. - A de la Macorra and U. Filobello "Interacting Tachyon: generic cosmological evolution for a tachyon and a scalar field" arXiv: 07052059v1. hep-th 15 Mayo 2007.
74. - L.M Krauss and M.S Turner, Gen. Rel. Grav. 27, 1137 (1995).
75. - P.J.E. Peebles and B Ratra, Phys. Rev D 37, 321 (1988).
76. - S. M Carroll, Phys. Rev. Lett. 81, 3067 (1998).
77. - J.A.Frieman, C.T.Hill and R.Watkins, Phys. Rev. D 46, 1226 (1992).
78. - S.Weinberg, Rev .Mod. Phys. 61, 1 (1989).
79. - A.Blanchard, M. Douspis, M Rowan- Robinson and S.Sarkar, arXiv: astro-Ph/0512085.
80. - M. Tegmark et al. [SDSS Collaboration], Phys. Rev.D 69, 103501 (2004).
81. - A. de la Macorra, Interacting dark energy: generic cosmological evolution for two scalar fields, astro-ph/0703702v1 27 Mar 2007.
- 82.- "The Early Universe", E.W. Kolb y M.S. Turner, F. in Physics, Edit. Addison-Wesley 1990