UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ESTUDIO DE LAS CÓNICAS ATRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

CANABAL CÁCERES SILVIA GUADALUPE

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2007

Este trabajo lo dedico con mucho amor y cariño a mi amada familia, cuyos miembros son:

Mi pequeñita May

Mi inquieta y enigmática Dany

Mi traviesa y amorosa Mony

Mi adorable Nini

Y mi querido esposo Roldán, sin el amor y apoyo incondicional de todos y cada uno de ellos me hubiera sido imposible alcanzar esta meta. Dios los bendiga.

Agradecimientos

Doy gracias

A Dios que siempre está conmigo

A mis hijas Silvia Ingrid, Mónica Annette, Marian Daniela y Mayte Alejandra, porque el privilegio de compartir sus vidas me motiva cada día a ser mejor.

A mi esposo Roldán que día a día me brinda ayuda, apoyo, comprensión y cariño.

A mis padres y hermanos

A mis amigos Carmen, Hugo y Oscar

A mis compañeros de maestría Silvia y Roberto

Y a todas aquellas personas que me apoyaron, ayudaron y creyeron en mí. Muchas gracias a todos.

Los quiere BIBI

Reconocimiento explícito a la UNAM y a la DGAPA

Agradezco profundamente a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA), el apoyo proporcionado para la terminación de mis estudios en la MADEMS en el área de Matemáticas, y para la obtención del grado de dicha maestría. Ya que sin este apoyo hubiera sido difícil lograrlo.

“UN ESTUDIO DE LAS CÓNICAS ATRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”

ÍNDICE

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una alternativa didáctica utilizando la resolución de problemas, para enseñar y aprender las cónicas, apoyándose en una adecuada selección de problemas que abarquen los contenidos más importantes de dicho tema y reflejen la importancia de las cónicas cumpliendo con los propósitos planteados en los programas de estudio. Con el objeto de que la enseñanza en el bachillerato en la materia de Matemáticas tenga otra opción y permita el mejoramiento notorio en el desarrollo integral y en el aprendizaje significativo de nuestros alumnos y alumnas repercutiendo a mediano plazo en el comportamiento referente a los índices de aprobación en nuestras entidades académicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

I. Analizar el estado actual de la educación matemática.

II. Analizar las habilidades que pueden ser desarrolladas.

III. Revisar las características de la resolución de problemas.

IV. Seleccionar el material pertinente

V. Utilizar el material en grupos piloto.

INTRODUCCIÓN

Desde tiempo atrás, la educación matemática ha despertado numerosas investigaciones tanto en nuestro país como en diversas partes del mundo, las cuáles han servido como base para actuales estudios sobre dicho tema.

En los diferentes niveles de educación sabemos que se presentan problemas que son semejantes, motivo por el cuál debemos poner especial atención en estos focos que nos indican como podemos remediar tal problemática.

El aspecto más importante del presente trabajo es la presentación de problemas que permitan identificar el potencial de la resolución de problemas en la práctica de la enseñanza. En los problemas propuestos se presenta la viabilidad de la propuesta de aprender matemáticas dando énfasis a la resolución de problemas, se incluyen problemas que abarcan las cónicas desde sus propiedades de reflexión hasta aplicaciones en diferentes áreas, astronomía, ingeniería, comunicaciones, etc.

El presente trabajo contiene diversos problemas que muestran la necesidad de que los alumnos y alumnas, reflexionen y discutan diversos métodos de solución. Está dirigido principalmente a estudiantes y profesores de la enseñanza media superior, pero se pretende que sirva como guía a estudiantes de estudios superiores que quieran volver a conceptualizar el estudio de las matemáticas.

Se deja como idea que quiénes se dedican a la investigación matemática puedan trasladar este método para su uso en diferentes investigaciones.

Este trabajo pretende proponer una alternativa que le permita al docente comprometido tener acceso a un material diferente al ya utilizado en el aula que le permita a los alumnos y alumnas alcanzar aprendizajes significativos y contribuir al desarrollo integral del educando en la Enseñanza Media Superior.

El análisis de la problemática en matemáticas en nuestro bachillerato se encuentra en el capítulo I.

La descripción de habilidades y aspectos importantes de ellas se encuentran en el capítulo 2, con el fin de exponer las habilidades de pensamiento que la resolución de problemas puede desarrollar o bien emplear.

En el capítulo 3 hacemos referencia a características y aspectos a considerar en la resolución de problemas.

La propuesta de enseñanza la cual se fue integrando durante la Maestría, se encuentra en el capítulo 4, en el cual se menciona explícitamente con sus objetivos, método, evaluación y análisis de resultados. El material propuesto se orientó en las últimas unidades del curso: Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola y Ecuación General de segundo grado, utilizando problemas tanto de la vida real como geométricos, en los que ellos debían reconocer, de ser posible, conocimientos anteriores del curso al que se encontraban inscritos y anteriores.

En el capítulo 5 llamado secciones cónicas, se expone una breve introducción y la definición general de cónicas.

En el capítulo 6, cuyo nombre es circunferencia, hay una introducción y se muestran los elementos requeridos para llegar a la solución pedida en los problemas referidos a dicho tema.

En el capítulo 7, se presenta la parábola de la misma manera que en el capítulo anterior y al final de dicho capítulo se incluyen los problemas referentes a dicho tema.

En el capítulo 8, tenemos la elipse y por último en el capítulo 9 a la hipérbola ambas presentadas de la misma manera que las cónicas anteriores, cada una con sus respectivos problemas.

Se informan los resultados obtenidos al poner a prueba esta propuesta, con alumnos y alumnas de la Escuela Nacional Preparatoria a lo largo de las Prácticas docentes que se realizaron durante la maestría. De acuerdo a esas pruebas, el material es factible y puede emplearse, esto con sus debidas reservas ya que se espera muestre resultados importantes al ser empleado en forma constante en nuestras aulas.

Finalmente en las conclusiones se culmina dicho trabajo informando los resultados arrojados al implementar dicha propuesta, explicando las limitaciones y posibles perspectivas.

CAPÍTULO 1

1. Aspectos de la Enseñanza de las matemáticas

1.1 Situación actual de la enseñanza de las matemáticas

Es importante considerar que la enseñanza de las matemáticas ha venido modificándose en diferentes países, adoptando en cada uno de ellos ritmos y modalidades diferentes de acuerdo con las peculiaridades nacionales, conviene recordar que, contrario a lo que se pudiera pensar, no son las naciones grandes y ricas y con una gloriosa tradición matemática, las primeras ni las únicas que han logrado cambios sustanciales en este campo[1].

En nuestro país, sucede algo similar, necesitamos cambios que solucionen problemáticas que actualmente sufre la enseñanza, en particular de las matemáticas. Es evidente que todo esto encierra otra de las razones por la que organismos competentes deben estar a favor de una puesta al día de la enseñanza de las matemáticas que permita a los estudiantes del bachillerato, pasar a la universidad sin notar demasiado el salto y con una habilidad autodidacta que le permita dominar las nuevas técnicas y una mayor flexibilidad en su adaptación a los procesos vertiginosos de dichas técnicas.

Es prácticamente imposible separar de la enseñanza el aspecto psicológico y pedagógico, se puede mencionar en particular los descubrimientos de Piaget en la teoría del aprendizaje, con la distinción de niveles, debemos lograr como docentes que los alumnos y alumnas entren en desequilibrio y esto les permita una "acomodación" de los nuevos conceptos logrando con esto acercarnos al aprendizaje significativo.

Las matemáticas deben lograr llegar a ciertas "estructuras fundamentales de la mente"[2], pero no hay que recorrer demasiado rápido las distintas etapas del desarrollo, por lo que debemos empezar por conocerlas, cosa que no sucede

[1] Piaget, J, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, 1986
[2] Piaget, J, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, 1986

en general con los profesores: el resultado es que se enseña la matemática con métodos arcaicos.

Solo podemos axiomatizar si se dan determinadas condiciones previas y suele olvidarse que toda abstracción se lleva siempre a cabo a partir de estructuras más concretas.

Piaget (1986) también menciona recordando a Aristóteles que lo que va en primer lugar en el orden de la génesis, puede ocupar el último en el del análisis; la razón reside en que los resultados de una operación se descubren mucho antes que su existencia y sus mecanismos[3].

De todo esto se desprende que no podemos olvidar algunos principios pedagógicos como por ejemplo: toda comprensión real supone la reinvención por el sujeto, que se puede "hacer" y "comprender" en práctica, mucho más que verbalmente, y que no se debe introducir prematuramente la formalización[4].

Cada individuo tiene la capacidad de crecer, de adquirir cultura, de cada día prepararse y ser mejor, la resolución de problemas no es sólo un método es una forma de entender la problemática de otras áreas que son de vital importancia, como la Física, Química, Biología, Economía, Psicología, Astronomía, etc., en las que se presentan infinidad de problemas que deben ser resueltos.

Una de las consecuencias más reveladoras e importantes de la aplicación de lo antes dicho ha sido el empleo de material sumamente variado, también lo llamamos material didáctico que nos puede llevar a solucionar deficiencias en la enseñanza, sin embargo esto requiere que el profesor se comprometa aún más con su labor docente, requiriendo actualizarse y preparar el material que usará clase con clase con el único fin de mejorar la calidad de la enseñanza y por ende esto se verá reflejado en el aprendizaje de sus alumnos. Lo cual nos llevará a ver reflejada esta mejora en nuestros alumnos, que habrán desarrollado habilidades de pensamiento que les permitirán avanzar de manera satisfactoria en sus estudios posteriores.

[3]Piaget, J, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, 1986
[4]Polya, G, *Como plantear y resolver problemas*, 2002

Existen otros aspectos psicológicos que intervienen en la enseñanza de las matemáticas, los relativos al carácter “autoritario” y “prestigioso” que parecen revestir las matemáticas, y las “resistencias” que provocan, expresados en frases tan habituales como “en matemáticas las cosas están bien o están mal, no hay más salida”, “las matemáticas son una cosa seria, bien organizada, bien ordenada”, y por otra parte hay infinidad de casos de personas inteligentes que aborrecen y han aborrecido las matemáticas (o mejor dicho las han hecho aborrecer las matemáticas, desde su más tierna infancia)[5].

Ya lo decía Polya (2002)… las matemáticas tienen el honor de ser el tema menos popular del plan de estudios… futuros maestros pasan por las escuelas elementales aprendiendo a detestar las matemáticas… Regresan a la escuela a enseñar a nuevas generaciones a detestarlas…

Todas las características antes mencionadas no son nuevas ni propias de las matemáticas, pero se presentan recurrentemente, lo cual es mucho más visible a la luz de la psicología moderna y la pedagogía.

Es importante separar cuáles son provocadas por las matemáticas y cuáles corresponden a la enseñanza.

Hay otro aspecto que no podemos soslayar y es el del carácter “elitista” de las matemáticas, está bastante extendida la creencia de que los estudiantes se dividen en aquellos “que sirven para las matemáticas” y los condenados a nunca entenderlas hagan lo que hagan, esto se encuentra íntimamente ligado con el empleo de las matemáticas como instrumento de selección y cómo se enseña tal asignatura actualmente.

Esto sin considerar el aspecto que obliga a los padres a buscar apoyos extraescolares que pueden implicar un desembolso no previsto, lo cual no siempre es factible debido a que únicamente una pequeña población puede darse ciertos “lujos”.

[5] Polya, G, *Como plantear y resolver problemas*, 2002

De entre todas las disciplinas incluidas en los planes de estudio de la Enseñanza Media Superior, han sido las matemáticas las que han visto modificados sus planes de manera más radical[6].

Las intervenciones en pro y en contra han surgido en los diferentes gremios afectados directa o indirectamente (alumnos, padres de familia, docentes, autoridades, etc.). Todo esto afecta directamente y de manera importante la instrucción matemática[7].

Dentro de la enseñanza tradicional se presentan defectos como la "memorización excesiva", escasa calidad de los libros de texto y sobretodo la ausencia de motivaciones, esto debido a que muchas veces no consideran los docentes que trabajamos con "sujetos" y no con "objetos". En la etapa en la cual se encuentran, la adolescencia, no les permite coordinar y organizar en forma satisfactoria para ellos el deber y el "querer", razón por la cual debemos como docentes, poner especial atención en este aspecto personal de los alumnos.

El desarrollo de técnicas, métodos, materiales, etc., que nos permitan despertar disposición hacia el estudio de las matemáticas en los estudiantes ha sido una preocupación constante. El promover un ambiente instruccional propicio, que motive al educando a participar en forma activa, donde el resolver un problema no se limite a encontrar valores con escaso sentido para ellos, que involucre la utilización y exploración de conjeturas, el uso de diversas representaciones que le permitan expresar los resultados en forma oral y escrita, son caminos hacia una solución necesaria.

El aprendizaje significativo fundamentalmente requiere que los estudiantes puedan utilizar eficientemente el conocimiento adquirido. Es esencial que los estudiantes reflexionen abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de solución durante el aprendizaje de las matemáticas.

[6] Cantoral, R, *Desarrollo del pensamiento matemático,* 2000

[7] Kilpatrick, J, *Educación Matemática,* 1995

Dentro de este contexto se torna muy importante el escribir un trabajo relacionado con la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas ya que la idea de incorporar a la instrucción matemática la resolución de problemas ha despertado gran interés en varios países[8].

Uno de los aspectos más importantes a considerar dentro de la resolución de problemas es aceptar que no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse a la instrucción, existe una conceptualización dinámica de las matemáticas en la cual es importante identificar elementos que ayuden a desarrollar habilidades de pensamiento.

Una idea es considerar la resolución de problemas como una forma de pensar, donde el estudiante continuamente desarrolle esas habilidades y aprenda a utilizar continuamente estrategias de aprendizaje que el alumno llegue al conocimiento o bien que lo encuentre. Las matemáticas serán consideradas como una forma de entender los problemas, como una herramienta que nos ayude a la solución de diferentes problemas, encarando la problemática actual, en diversas áreas, enriqueciendo significativamente la cultura del individuo.

En el aprendizaje a través de la resolución de problemas se incluyen, por supuesto contenidos matemáticos, que lo lleva a discutir, reflexionar, imaginar, discernir, utilizar estrategias cognitivas y metacognitivas sobre las posibles soluciones que el problema requiere o permite, utilizar soluciones alternas o contaejemplos que le permitan resolver o entender el problema.

Así ésta técnica se relaciona no solo con el desarrollo de habilidades, sino con el desarrollo y utilización de estrategias que le permitan desempeñarse eficientemente en diferentes ámbitos.

Las matemáticas son una disciplina que le permite al alumno participar activamente en la formación de su propio conocimiento. El uso de estrategias dentro de la instrucción matemática es un asunto importante dentro de la educación matemática, aquí se destaca la importancia del monitoreo o auto evaluación del estudiante durante el uso de tales estrategias.

[8] Kilpatrick, J, *Educación Matemática,* 1995

Transferir conocimientos a través de la resolución de problemas es posible y el presente trabajo es una pequeña muestra de ello, observando que el conocimiento previo adquirido, les será útil para resolver un problema.
El uso de tecnología es otro aspecto que se puede y debe contemplar en el proceso de enseñanza aprendizaje, se propone el uso de prácticas acompañadas por el software que es posible utilizar casi en cualquier centro de cómputo, se recomienda como una herramienta alternativa para el trabajo en el aula, con esto el alumno puede hacer uso de la tecnología actual con la que se encuentra familiarizado, logrando visualizar diversos aspectos de los contenidos de la materia de Matemáticas V, en particular de las últimas unidades del actual programa de dicha asignatura de la ENP.
No por esto será imposible utilizarlo en otros bachilleratos ya que se requieren conocimientos básicos de computación que actualmente manejan la mayoría de los estudiantes adolescentes.

1.2 Fines de la educación superior, el caso de la UNAM

Como un aspecto informativo y debido a nuestra posición en el sistema educativo que nos ubica en el nivel inmediato anterior a la educación superior, considero importante mencionar algunos fines de la educación superior, como es el caso de la UNAM.

Estado, mercado y ciencia forman una tríada que determina la situación actual de la educación superior[9].
El Estado tiene que garantizar el derecho de todo individuo a la educación, creando las condiciones y las instituciones dedicadas a la investigación científica, que genere tanto conocimientos que fortalezcan a la educación, como conocimientos útiles para el desarrollo tecnológico, social y cultural.

El desafió de las sociedades está en cómo alcanzar un desarrollo con justicia o

[9] Lerner, B, *Educación, Mercado y Banco Mundial,* 2002

con una adecuada distribución de la riqueza.

Para los políticos, intelectuales, analistas y críticos sociales, la apuesta es la educación; pero, dentro de este debate ¿cuál debe ser el papel de las universidades en este contexto y esos procesos?

Si lo fundamental es resolver y al menos mitigar los problemas de la sociedad, el Estado debe apoyar a la educación y hacer frente a la necesidad de elevar los niveles socioculturales y económicos de la sociedad. Pero aquí es donde surge un conflicto, dado que para los gobiernos tecnócratas la educación debe ser evaluada en términos de costo-beneficio, y por tanto debe subordinarse a las leyes del mercado, supeditando el desarrollo de las universidades a resultados utilitaristas.

Si la educación es un bien público, ¿por qué tiene que ajustarse a los lineamientos del mercado?. Si se permite que esto suceda la educación se convertirá en una industria, corriendo el peligro de perder los fines y valores que históricamente ha tenido.

¿Podrán las instituciones de educación superior sustraerse de caer en las leyes del mercado?

En el caso de las universidades públicas, las humanidades y la ciencia son su razón de ser, ahí se retroalimentan y se fomenta que el conocimiento avance, logrando profesionistas suficientemente preparados para enfrentar y superar los retos en el mercado laboral al utilizar esa educación como herramienta para resolver los problemas que se le presenten. Mostrando que de estas universidades egresa gente capacitada y competitiva.

De acuerdo al Banco Mundial, los ingresos de los países ricos son mayores que los de los países en vías de desarrollo; el gasto de los países desarrollados en investigación es muchas veces mayor en relación a aquéllos en vías de desarrollo[10].

Al haber una mayor inversión en la generación de conocimientos, estos se traducen en patentes y nuevos desarrollos tecnológicos.

Y surge la pregunta, ¿deben las instituciones de educación superior privilegiar el conocimiento útil por encima del conocimiento *per se?*

Las universidades, en sus orígenes eran instituciones dedicadas a la búsqueda del conocimiento por el conocimiento mismo, a su protección y al cultivo de la ciencia[11].

En nuestros días dicha concepción es muy diferente ya que juegan el papel de productoras y generadoras de conocimiento útil, justificando de esta forma su acceso a los recursos públicos.

Se pretende desarrollar cultura en general, cuidar los detalles más importantes, que al ejercer su carrera, tengan la capacidad de crear y corregir el bienestar en cada enmienda. También que el estudiante identifique las múltiples necesidades de su entorno y busque la solución a ellas. Que si un estudiante está en robótica asista a conciertos, exposiciones de pintura, obras de teatro, para que tenga conocimientos más útiles, que sepa que los bienes producen bienes comunes, que desarrolle sentidos de ritmo de poesía. El formarse en una universidad le debe permitir tener una amplia visión crítica, que se cuestione y pueda analizarse críticamente.

Se postula a la universidad no únicamente como generadora de conocimiento, entrenadora de mentes jóvenes y transmisora de la cultura; sino también como el principal agente del crecimiento económico. Comenzando a ser un recurso cada vez más útil, siendo un mecanismo mediante el cual un país se desarrolla y genera su capital humano, con el fin de ser más competitivo en la economía global.

[10] Sierra, T, *Redefinición de las relaciones Estdo-Instituciones de Educación Superior,2002*

[11] Sierra, T, *Redefinición de las relaciones Estdo-Instituciones de Educación Superior,2002*

La educación debe abrirle al individuo la posibilidad de conocer y reconocer su realidad como un ser integrado a un mundo natural y ético moral. Pero el conocimiento transmitido a ese sujeto apenas y conforma su bagaje cultural, que no genera elementos que le permitan el cuestionamiento, la reflexión o interpretación de su contexto social, político, cultural y económico a fin de transformar su acción social.

La cultura educativa que impera reduce a la escuela a un espacio donde al individuo sólo se le adiestra para desarrollar una actividad que le permita insertarse en el proceso productivo, conceptualizando a la educación como generadora e instructora de recursos humanos[12].

La educación ha sido orientada a aumentar el valor del trabajo en cuanto a fuerza productiva, atendiendo las necesidades del proceso de reproducción del capital. La escuela ha promovido la idea de que el éxito individual en la vida depende del compromiso de la persona con la educación.
Ya Emile Durkheim (1925) señalaba que los conocimientos se dirigen a reproducir y transmitir de generación en generación los patrones culturales, el conocimiento científico y las destrezas; y al desarrollo de las características individuales que hacen posible producir nuevos conocimientos, reafirmar los valores tradicionales, mejorar la eficiencia de la economía, alimentar el mercado de trabajo y mantener la necesaria estabilidad interna y orden entre las fuerzas sociales.

A los sujetos se les inculca que su posición dentro de la división social del trabajo estará relacionada con los estudios certificados que mostrarán su nivel de escolarización y la calidad de la educación recibida.

Los conocimientos transmitidos por la escuela son usados para construir

[12] Lerner, B, *La sociedad mexicana frente al tercer milenio, 2000*

modelos del mundo o sirven para que los sujetos acepten su realidad así como las relaciones de dependencia y dominación entre clases.

A través del uso de estos argumentos, una gran masa de gente está convencida de que la escuela es una fuerza liberadora; que los cambios que ocurran en el sistema social dependen de la educación del pueblo y que el bienestar económico, el progreso y la modernización son consecuencias inmediatas de la educación.

El objetivo es asegurar que todos los individuos reciban los mismos patrones básicos de valores y que el grueso de la población tenga el mínimo necesario de conocimientos para servir como pieza de la maquinaria de la sociedad moderna.

El conocimiento, tiene dos concepciones o vertientes: los saberes cotidianos, que son resultado de la lógica, del sentido común y el saber académico o científico.

El conocimiento académico cuyo valor social se adquiere por que representa un saber especializado, que no es del dominio general, sólo de unos cuantos, y entre más aplicable sea, su valor es más preciado. Este conocimiento es el que buscan las personas en las universidades. Pero sabemos que ambas vertientes deben ser obtenidas para alcanzar una preparación integral que le permita rendir óptimamente y cumplir con las demandas en la sociedad actual[13].

El paso por la UNAM

El tener una estancia en la UNAM, no sólo implica formarse en alguna profesión, sino que es la oportunidad de aprender de la vida, tanto la pasada como la presente y la que suponemos futura.

[13] Ruiz Ocampo, H, *Apuntes en clase,* 2004

La universidad debe ser un espacio abierto a toda la población, nadie debe ser discriminado de la educación sea cual sea su posición social, sexo, credo o raza; todos los que formamos parte de este país debemos tener derecho a la educación superior, no aceptarlo de esta forma es ir en contra de nuestro sentido humanitario.

La educación nos aproxima a la libertad, democracia implica conciencia social y política.

Es la educación como un bien público la que permite el desarrollo científico, tecnológico y humanístico de un país, es la que permite lograr mejores niveles de salud, producción agropecuaria, vivienda y una organización social y política más armónica.

La universidad abandona su razón de ser cuando influenciada por los valores neoliberales, deja de lado la reflexión, la tolerancia y la creatividad, y se avoca sólo a formar técnicos, que en el mejor de los casos saben de su profesión pero desconocen su compromiso con la sociedad.

México debe pensar que la educación es el primer problema social que hay que atacar.

A las nuevas generaciones se les debe brindar la oportunidad de ingresar a la universidad para que su visión del mundo se amplifique para el logro de una sociedad mejor. Obviamente nosotros como docentes en el nivel de Educación Media Superior formamos parte de la realización de estudios profesionales de nuestros alumnos y alumnas.

Mencioné las características anteriores para no dejar duda alguna sobre la importante labor que llevamos a cuestas y que nuestro compromiso requiere profesionalización, actualización y una entrega que realmente contribuya a alcanzar las metas de la Enseñanza Media Superior y así lograr el objetivo de formar más y mejores profesionistas que ayuden a resolver los problemas que actualmente vive nuestro país.

1.3 Descripción del problema

En la actualidad el sistema educativo mexicano tiene diferentes retos a los cuales debe enfrentarse, uno de ellos es el mejorar la calidad de la enseñanza, en virtud de que el desarrollo económico y social de una región se apoya fundamentalmente en la educación de su población, ya que es la formación de recursos humanos que requiere el país en todos los campos y áreas.

Diversos factores influyen en el desarrollo satisfactorio de tal reto, es importante mencionar y reconocer que la situación económica del país influye directamente en la realización de un proyecto que resuelva de manera real el problema de la educación, ya que los alumnos forman parte de generaciones que han cambiado sustancialmente hábitos, costumbres, relaciones y además el entorno que no siempre es favorable para fines sociales y educativos. Aunado a esto encontramos los problemas de drogadicción, alcoholismo, pobreza, sexualidad, etc. Los cuáles contribuyen en forma negativa dando como resultado que el índice de aprovechamiento en la escuela no vaya en aumento.

Si también consideramos la afluencia del crecimiento poblacional en las principales urbes lo cual es una presión que ha generado una demanda en aras de una mejora significativa en la educación.

Otros factores que también intervienen provocando un abatimiento importante en la calidad de la enseñanza, podemos mencionar la sobresaturación de algunas carreras y en muchos casos saturación de grupos, la evidente "huída" de las áreas dedicadas a las llamadas "ciencias exactas" ya que desde pequeños se presenta la fobia a las matemáticas.

Es importante aclarar que el presente trabajo no pretende evaluar el sistema educativo, sino llamar la atención sobre algunos puntos centrales que se consideran de importancia para valorar convenientemente la propuesta aquí presentada.

Un aspecto notable que relaciona la búsqueda del significado y el sentido de las ideas matemáticas y de los resultados que se obtienen al resolver algún problema, es el desarrollo de habilidades analíticas. Los alumnos y alumnas aprenderán, al encontrar respuestas después de un análisis, que pueden resolver problemas similares de matemáticas y de otras áreas y podrán entender la importancia de las ideas y conceptos matemáticos, comprendiendo al fin el propósito de tan noble disciplina. Existen casos en los que el estudiante encuentra la respuesta a problemas, que muchas veces solo son ejercicios cuyos datos no tenían sentido o eran insuficientes, mecanizaba o memorizaba algoritmos pero no le significaban nada, motivo por el cual no había un aprendizaje, ya que carecía de significado.

Esto debido a la importancia que representa el hecho de que sus representaciones actuales no muestran la capacidad de establecer un control efectivo sobre el conflicto al cual se les está enfrentando, motivando una inevitable tendencia al fracaso, por lo que se pretende reconocer éstas deficiencias para así, buscar una solución viable ante el conocimiento específico de este dominio, que no les permite resolver la enmienda de manera satisfactoria.

Esencialmente se postula que son los estudiantes quienes deben construir su propio conocimiento mediante la interacción con sus entornos físicos y sociales.

La enseñanza de las matemáticas ocupa un lugar preferencial en los contenidos y programas de la mayor parte de los niveles que constituyen el sistema educativo nacional, los estudiantes interactúan con una gran cantidad de problemas en contextos variados que incluyen diversos contenidos matemáticos, en este trabajo haremos énfasis en la Enseñanza Media Superior ya que la parte experimental se ha desarrollado en este nivel.

Considero que un aspecto esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas es el proceso de formular y resolver problemas. En este contexto surge una propuesta para aprender matemáticas en donde el diseñar, formular, analizar, reconocer, discutir, identificar y resolver problemas desempeñan un papel fundamental durante el estudio de los conocimientos matemáticos.

“En las matemáticas existen axiomas, principios y métodos importantes, pero el resolver problemas es el corazón de esta disciplina “.Halmos (1980)[14].

“El desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se origina a partir de esfuerzos por resolver problemas”, Kleiner (1986)[15].

Un curso tradicional de Matemáticas V, se desarrolla principalmente en forma expositiva, el profesor se mantiene al frente del grupo y explica los temas del programa como el cree que debe hacerlo, empleando algún libro de texto como base, dando una amplia bibliografía y eventualmente les hace llegar a los alumnos alguna guía que podrán utilizar para preparar el examen y que será requisito para poder presentarlo y dependerá de su criterio si lo toma en cuenta o no para la calificación del alumno, para practicar lo que se está viendo en clase el profesor realiza algunos ejercicios con la intención de que el tema se entienda lo mejor posible. Posteriormente los alumnos realizan ejercicios semejantes a los resueltos por el profesor en sus cuadernos o como trabajo extraclase, que muchas veces por diversos factores no es revisado y por lo tanto el alumno no recibe ningún tipo de retroalimentación.

Debido a lo anterior y considerando también el alto índice de reprobación que presenta dicha materia en el bachillerato, es necesario considerar nuevas alternativas de enseñanza en el aula, como lo es la resolución de problemas.

Esta propuesta es congruente con la necesidad de dar a la enseñanza un impulso que le permita estar en condiciones de aceptar los retos tecnológicos actuales y del futuro inmediato.

La propuesta se llevó a cabo mediante la utilización de diversos problemas referentes a las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola), los cuáles incluyen contenidos de tales unidades con el fin de ofrecer una alternativa contrastante con la enseñanza tradicional.

Se puede considerar que el principal objetivo que se pretende alcanzar con dicha propuesta es explicitar la utilización de la resolución de problemas para que los estudiantes, a través de actividades guiadas oportunamente por el

[14] Santos Trigo, L, *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas,* 1997

[15] Santos Trigo, L, *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas,* 1997

docente alcancen a comprender significativamente el sentido de las matemáticas en diferentes áreas y ámbitos. Y así pueda contar el docente, con una alternativa de enseñanza y los alumnos y alumnas, con una alternativa de aprendizaje que los lleve a alcanzar el aprendizaje significativo que nuestro sistema requiere actualmente.

Nuestra hipótesis es que el aprendizaje a través de la resolución de problemas permite el desarrollo de habilidades que dan al alumno una posibilidad de actualización sin término, la revisión constante, razonada y crítica de los estados de un campo de saber determinado lo conducirán a esas habilidades, es por esto que considero muy factible implementar en nuestras aulas dicha forma de enseñanza y con esto acercarnos a la solución de un problema estructural, institucional que hemos detectado desde hace tiempo. Estamos concientes que esto requiere tiempo y compromiso por parte de los docentes principalmente, ya que debemos hacer ver nuestra materia de tal manera que el alumno la acepte y se comprometa con ella, ya que en el proceso enseñanza- aprendizaje, se requiere la participación activa de las partes que lo componen. Considero la resolución de problemas una excelente propuesta para lograr tales fines.

"Resolver un problema –dice G. Polya[16]-, es encontrar un camino que no conocemos de manera inmediata; un camino que rodee obstáculos, franquee dificultades, y nos permita alcanzar un fin preconcebido… La habilidad para tomar un camino indirecto, cuando el directo no existe, coloca al hombre muy por encima de los animales inteligentes, y al hombre ingenioso por arriba de los que no lo han querido ser."

No podemos cerrar este capítulo sin mencionar que los planes y programas de estudio indican la importancia de las matemáticas, pues se pretende que a través de ellas se desarrollen en los alumnos habilidades de pensamiento tales como análisis, reflexión, rapidez en la resolución de problemas, etc. Sin embargo, nos hemos encontrado a lo largo de nuestro trabajo en el aula que los alumnos y alumnas, prefieren memorizar, con la finalidad de obtener

[16] Polya G., *Cómo plantear y resolver problemas,* 2002

mejores resultados en sus exámenes. Probablemente esta creencia no les garantiza el éxito, pero les da la oportunidad de “salir bien” en las etapas de evaluación.

Por ello resulta importante buscar nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje que llevan a los estudiantes a obtener conocimientos significativos. Lo más difícil del rol del docente es: dar sentido a los conocimientos y, sobre todo, reconocerlo. No existe una definición canónica del sentido. Existe la idea de que los saberes pueden enseñarse pero que la comprensión es responsabilidad del alumno. Sin embargo debemos preguntarnos ¿hasta donde el aprendizaje depende de las estrategias implementadas por los profesores y no sólo de las acciones de los alumnos?[17]

[17] Kilpatrick, J, *Educación Matemática,* 1995

CAPÍTULO 2

2. Las habilidades que ayudan al aprendizaje en la adolescencia

2.1 Introducción a las habilidades

Existe actualmente una gran preocupación en la búsqueda de estrategias para desarrollar y mejorar las habilidades de aprendizaje. La inteligencia hábil sostiene

que la cognición se entiende mejor en términos de *habilidad*. Las habilidades deben ser analizadas en su contexto social, y pueden mejorarse por medio del entrenamiento.

La palabra cognición se refiere a las actividades de conocer, recoger, organizar y utilizar el conocimiento.

Hay habilidades cognitivas comunes tales como hablar, recordar y razonar que pueden considerarse habilidades naturales que pueden parecer superficialmente irrelevantes. La capacidad de leer y escribir o la de correr maratones son ejemplos extremos de habilidades que se creían solo eran accesibles a unos pocos individuos pero en la actualidad todos dominan. “La frecuencia con la que se despliega una habilidad dentro de una población depende de factores ajenos a la dificultad intrínseca de esa habilidad”[1]. Del mismo modo que los límites del desempeño experto se van ampliando constantemente mediante el ejercicio del ingenio humano.

“El conocimiento es una cuestión de habilidad y las habilidades cognitivas son análogas en muchos sentidos a las habilidades corporales”[2].

Aprender a realizar una tarea exige experiencia práctica, aún cuando se haya logrado una destreza considerable puede llevar años de práctica alcanzar los niveles de pericia más elevados, especialmente en lo que tiene que ver con la velocidad de realización.

[1] Sloboada,J, *Un estudio de casos de habilidades cognitivas,1986*
[2] Sloboada,J, *Un estudio de casos de habilidades cognitivas,1986*

En realidad cualquier cosa que involucre percepción, memoria, aprendizaje o pensamiento es parte de la cognición; lo cual significa que casi cualquier cosa que una persona haga tiene al menos un componente cognitivo.

La cognición en todas sus manifestaciones es una cuestión de habilidad y que, por lo tanto, todos los logros cognitivos se pueden analizar según ciertos principios involucrados en la adquisición de la habilidad.

Como la cognición aparece en todo lo que hacemos hay muchas oportunidades para usar bien esos principios, para mejorar nuestras propias habilidades cognitivas. No hay que olvidar que Piaget (1986) enfatizaba la continuidad existente entre la conducta y la cognición, entre la conducta y el pensamiento.

2.2 Cognición y habilidad

La cognición es en muchos sentidos similar a la conducta entrenada, en el uso de habilidades, como adultos casi todos hemos logrado la percepción, el recuerdo, el pensamiento y la comprensión de unos con otros. Estos son logros cognitivos.

Si hablamos de la noción de habilidad cognitiva estos logros pueden parecer milagrosos a los no iniciados y que su adquisición requiere práctica intensiva.

Características principales de la habilidad

Fluidez, rapidez, automaticidad, simultaneidad y conocimiento (FRASC)[3].

Fluidez

Quizás la mejor manera de apreciar su naturaleza sea experimentar su pérdida. La conducta fluida depende crucialmente de que la realimentación normal llegue en tiempo normal. En lo cotidiano la pérdida de fluidez se experimenta cuando estamos nerviosos, tropezamos y tambaleamos con las palabras. La fluidez suele ser el último rasgo que se adquiere en una habilidad y su pérdida es el primer signo de fractura, debida a enfermedad, intoxicación o miedo.

[3] Gellatly, A, *La inteligencia hábil, el desarrollo de las capacidades cognitivas,*1986

Rapidez

La mayoría de las habilidades incluyen la capacidad de ofrecer una respuesta adecuada rápidamente. La capacidad de ofrecer la respuesta correcta casi inmediatamente es característica en todas las habilidades.

Un estudio que demuestra la velocidad del desempeño experto es el ajedrez, donde un maestro puede aprovechar la misma información mucho más rápidamente que un principiante.

La habilidad del maestro no depende simplemente de una percepción superior o de la memoria, sino que está vinculada con la detección en el estímulo de esquemas familiares y relevantes para el juego.

La capacidad del jugador experto para percibir esquemas significativos sobre el tablero es análoga a la capacidad de un espectador experto de fútbol para reconocer, en medio de la frenética actividad de un partido, movimientos cuidadosamente ensayados.

Automaticidad

Una de las características más generales de la habilidad es la forma en que se vuelve “fácil” para quienes la practican. Ya no experimentamos esfuerzo alguno cuando llevamos a cabo una habilidad bien aprendida (como caminar). Puede “suceder” sin que tengamos que pensar en ella. Una de las formas de comprobar si una habilidad está automatizada es ver si el ejecutante puede resolver adecuadamente una situación, aún cuando no esté concentrado o no espere que ésta se presente. Por ejemplo, un conductor experto será capaz de frenar rápidamente ante un riesgo potencial, aun cuando su mente hubiera estado en otra cosa en los momentos previos.

Otra característica de las habilidades automáticas parece ser que en algunos casos son “obligatorias”, esto es, un estímulo desencadena su respuesta automática sin importar si la deseamos. Por ejemplo, cuando vemos escrita una palabra familiar no podemos evitar el pensar en su significado.

Esto nos hace pensar en consecuencias inevitables de la automatización en la conducta experta.

Simultaneidad

La simultaneidad es una característica de la habilidad en dos sentidos, en primer lugar, los componentes de una actividad experta pueden ejecutarse simultáneamente (como el ejemplo de los movimientos conjuntos de manos y pies para manejar un auto). En segundo lugar debido al alto grado de automaticidad, suele ser posible desarrollar una actividad no relacionada al mismo tiempo que se realiza una actividad experta.

Conocimiento

La habilidad no es una mera cuestión de posesión del conocimiento, se necesita que ese conocimiento esté disponible en el momento adecuado, en respuesta a la situación que exige su uso. Por ejemplo en una discusión no siempre ganamos y al repasar ésta solemos encontrar la respuesta exacta que debíamos haber dado ante el golpe aparentemente devastador de nuestro oponente. Pero en el calor del debate no podemos llegar al conocimiento adecuado, al argumento que quisiera expresar.

De manera similar, los alumnos en un examen suelen comprender, momentos después de salir del aula, lo que deberían haber escrito.

2.3 La estructura de las habilidades

Al tener un objetivo superior, se requerirá una regla de producción que nos llevará a algún otro objetivo actual que nos ayude a llegar al objetivo superior. Cuando alcanzamos el objetivo actual podrá eliminarse de la pila y el siguiente objetivo se convertirá en el actual. Entonces podrá cumplirse este objetivo y así con toda la pila hasta que ya no quede ninguno. La pila de objetivos da estructura y dirección a la conducta total.

De hecho cuando la conservación de objetivos en la pila es inadecuada, tiene lugar una falla parcial en la conducta. Esto nos sucede a la mayoría, entramos a un negocio y nos quedamos ahí parados tratando de recordar para que entramos. El objetivo de comprar “x”, nos llevó al nuevo objetivo de “ir al negocio” pero en el camino empezamos a pensar en otras cosas y esta actividad mental que interviene nos llevó a perder el objetivo original de la pila. La capacidad de recordar múltiples objetivos que uno tiene y en que etapa está el logro de cada uno de ellos es una habilidad importante por sí misma.
Ser hábil para cumplir múltiples compromisos supone ser hábil para manejar el propio entorno, sobre todo la memoria necesaria en el lugar y momento correctos.

La adquisición de la habilidad

El animal humano, es único en cuanto a la cantidad de habilidades que adquiere mediante el aprendizaje. Somos únicos por la diversidad de nuestras habilidades. Algunos seres humanos son matemáticos expertos, otros músicos expertos o mecánicos expertos.
Es importante mencionar si la adquisición de habilidades tiene o no que ver con la herencia o solamente con la práctica, numerosos estudios revelan diferentes posturas pero como menciona John Sloboda (1986), en su escrito sobre adquisición de la habilidad, las características heredadas podrían tener un efecto significativo sobre la adquisición de habilidades, por ejemplo condiciones genéticas que provocan retardos mentales irreversibles, que pueden destruir aptitudes esenciales para algunas habilidades (como el síndrome de Down). Todas estas condiciones, tienden a imponer impedimentos a quienes las poseen, otro ejemplo son las características físicas heredadas que son un factor para la determinación del logro en algunas habilidades, las posibilidades de que una persona se convierta en cantante de ópera dependerán mucho de la forma de su cavidad vocal; las posibilidades de que una persona se dedique a la danza dependerán mucho de la conformación de su esqueleto, etc.

Realmente hay todo un conjunto de lo que podríamos llamar factores de disposición y motivación que podrían tener un efecto indirecto sobre la adquisición de habilidades. Podemos suponer que es más probable que el extrovertido físicamente precoz adquiera habilidades futbolísticas mientras que el introvertido verbal podría desarrollar más fácilmente habilidad para la poesía, esto no es una cuestión de capacidad representa la cantidad de esfuerzo que una persona puede estar dispuesta a destinar a tipos peculiares de actividad.

Podemos pensar que algunas actividades van en contra de la naturaleza de las personas y por el contrario pueden existir otras que sean agradables.

Otro aspecto sumamente importante es si la adquisición de habilidades tiene que ver con la práctica, si es así estamos aceptando el supuesto que las habilidades no se adquieren en virtud de lo que uno es sino lo que uno hace, podemos pensar que se puede adquirir una habilidad si se hace lo necesario para ello. Es por esto que considero que una práctica adecuada podría llevarnos a lograr un aprendizaje significativo en matemáticas. El factor más importante que destacan entrenadores y maestros de piano es la práctica, también sabemos que la rapidez es una característica crucial de la habilidad, cuanto más rápido responde uno, más hábil o experto es, siempre y cuando las respuestas sean correctas. Pero las mejoras suelen disminuir con la práctica y esto se puede deber a que la gente se concentra cada vez menos mientras repite una tarea y no logra obtener beneficios en los intentos en la misma medida que al comienzo, entonces el éxito dependería de los factores de los que depende la concentración misma.

La práctica puede ser más eficaz por sí misma si le damos la debida importancia y ponemos cuidado en ciertas características, como lo es la retroalimentación o *feedback*.

Esta puede ser extrínseca e intrínseca y es sencillamente el conocimiento de lo que se ha logrado con las acciones propias[4]. La retroalimentación intrínseca es la que se obtiene como consecuencia directa del movimiento y las sensaciones corporales, en cuanto a la extrínseca es la proporcionada por alguna fuente o agente externo, que suele ser un entrenador o un maestro. Un ejemplo de retroalimentación extrínseca es que a uno le digan si la respuesta dada es correcta o incorrecta.
En la adquisición de cualquier habilidad, son esenciales ambas clases de retroalimentación. Para que ésta realmente funcione necesitamos prestar verdadera atención, como puede ser revisar lo que uno ha escrito cuando haces una carta o un trabajo. Muchos adolescentes estudiantes de bachillerato no lo hacen por lo que más tarde sufren las consecuencias.

Otro aspecto necesario para que la retroalimentación funcione es asegurarse que sea inmediata, ya que, si lo hacemos semanas después será ya poco útil porque el autor probablemente ya se olvidó de los pasos que siguió para realizar el texto o la forma en que lo hizo. Idealmente se debe desarrollar un contacto estrecho y prolongado que induzca una relación intensa entre un experto y un aprendiz o novato, un entrenador y un atleta o bien un profesor y un alumno o alumna, dirigidas dichas acciones al aprovechamiento integral de la retroalimentación, la cual tiene un efecto básicamente motivador que parece aumentar el compromiso con la tarea especialmente si un alumno o alumna de bachillerato le dedica tiempo suficiente a la práctica de la habilidad. En matemáticas no es necesario dedicarle varias horas de trabajo continuo el fin de semana, en general parece mejor espaciar la práctica en varias sesiones que amontonarla en una sola sesión. Ya que al realizar una tarea en forma repetitiva tiende a aparecer fatiga y disminución de la tensión, esto puede formar malos hábitos, los descansos frecuentes pueden lograr que la fatiga y los malos hábitos se disipen.

[4] Sloboada,J, *Un estudio de casos de habilidades cognitivas,1986*

Sin embargo si existe una gran motivación es posible concentrarse totalmente en una tarea durante muchas horas sin pérdida importante de la atención de modo que la regla de espaciamiento no es universalmente beneficiosa. Si logramos despertar el interés de los alumnos ellos dedicarán mas tiempo a sus tareas por convencimiento propio, en cada sesión debe fomentarse la reflexión con lo que podremos lograr motivarlos adecuadamente.

Actitud

A veces parece que si uno está lo suficientemente interesado en una actividad su compromiso dará como resultado la adquisición de cierto grado de habilidad. Podemos aprovechar el consejo y retroalimentación cuya función del experto es proporcionarlos.

La motivación va de la mano con la práctica, lo cual nos lleva a la adquisición de una habilidad. La práctica necesaria para ganar experiencia es casi insostenible sin una fuerte motivación, el interés por una actividad nos llevará seguramente a la adquisición de la habilidad en cuestión.

Sabemos que cada habilidad es única, la lectura es una habilidad representativa, saber leer es de importancia vital, cuando leemos no estamos simplemente adquiriendo conocimientos nuevos de la página, estamos utilizando muchas formas de conocimiento diferentes que ya poseemos, cuanto más se sepa de aquello de lo que se está hablando, mejoran las inferencias y es más eficiente la lectura.

Los docentes debemos elegir materiales con lenguaje y situaciones que les sean familiares a sus alumnos, así pueden hacer anticipaciones inteligentes, el éxito que obtienen les sirve para aumentar su confianza.

En la bibliografía se proporcionan lecturas interesantes que los docentes podemos utilizar para nuestros alumnos de bachillerato.

Como sucede con muchas habilidades, nuestro sistema cognitivo parece capaz de aprender reglas complejas y adaptativas sin nuestra intervención consciente, todo lo que tenemos que hacer es ofrecerle la posibilidad de construir estas reglas mediante la exposición frecuente a una amplia gama de situaciones relevantes.[5]

A cualquiera que desee mejorar su lectura, el consejo más confiable es leer mucho, con frecuencia y durante mucho tiempo (igual que para cualquier otra habilidad). Esto es “la práctica hace al maestro”.

Memoria

Una buena memoria no es factor determinante para que los alumnos aprendan matemáticas.

Sabemos que la práctica intensiva puede llevar a desarrollar habilidades de memoria verdaderamente sorprendentes. Quienes realizan hazañas memorísticas inusuales son con frecuencia personas que han practicado mucho. “Cuando percibimos información nueva y le prestamos atención, podemos mantenerla disponible durante un breve lapso, pero luego la perdemos irremediablemente a menos que le volvamos a prestar atención, es decir que la ensayemos de alguna forma.[6]

Esto apoya la hipótesis que si en clase logramos la atención de los alumnos y se lleva a cabo la retroalimentación al final de la misma y en forma planeada se dejan actividades a realizar como apoyo al aprendizaje, lograremos que más tiempo conserven la información. Es hacerlo conciente de que se le dio la oportunidad de llegar a una persistencia necesaria para lograr su meta.

Recordemos que las capacidades humanas se desarrollan a partir de las interacciones entre individuos cuyo entorno ofrece las posibilidades y los incentivos necesarios para nutrir las aptitudes en cuestión, lo cual nos indica que el ámbito educativo en el que intervienen alumno-docente debe tener las condiciones óptimas que le permitan al adolescente un ambiente satisfactorio que lo lleve a aprender con gusto y por gusto, comprometido a desarrollar el potencial necesario requerido para alcanzar la comprensión y aceptación de conocimiento que le sea significativo.

[5] Sloboada, J, *La lectura un estudio de casos de habilidades cognitivas*” 1986

[6] Hunter, I, *La habilidad de memoria excepcional.*

Sin embargo la memoria puede ayudar en los exámenes, es un aspecto importante más no determinante para un óptimo rendimiento en estos.

Beard y Hartley (1986) reseñaron las investigaciones existentes sobre la preparación de exámenes, sus ideas fundamentales son:

a) Los alumnos deben organizar sus actividades de revisión.
b) Los alumnos deben revisar activamente en lugar de hacerlo pasivamente.
c) Los alumnos necesitan práctica de exámenes si quieren mejorar sus habilidades en este sentido.

Existen también habilidades de comprensión y de comunicación, las cuales relacionadas a nuestro tema de interés, nos pueden conducir a un camino adecuado hacia el aprendizaje significativo.

2.4 Habilidades del habla

Hablar es la habilidad humana más característica, en el mundo se hablan cientos de lenguas e idiomas diferentes, algunas con vocabulario especializado, o con recursos gramaticales muy diferentes, en el caso del idioma inglés, por ejemplo, es evidente que en las estructuras gramaticales se tiene que ver el orden de las palabras.

Si bien los idiomas muestran diferencias entre si, éstas son comparativamente menores. Partimos de la aclaración de que todos los humanos pueden aprender a hablar un lenguaje, excepto personas con capacidades diferentes.

Además no hay especie, además de la humana que parezca capaz de usar el lenguaje, los usuarios del lenguaje podemos ser tanto productores como receptores del lenguaje.

Anteriormente se mencionaron las características de una persona experta en algún aspecto, es aquella que actúa con fluidez, rapidez y en forma automática, puede integrar diferentes componentes de la actividad simultáneamente y producir (habitualmente) el componente preciso en el momento justo. Lo mismo puede decirse del parlante experto. Analizando la fluidez en el habla, el discurso fluido de los adultos no carece de vacilaciones y pausas según

Goldman-Eisler “Dos tercios del lenguaje hablado vienen en grupos de menos de seis palabras”[7], aunque no sea totalmente fluido, el lenguaje del adulto muestra muchas más palabras entre las pausas y este agrupamiento de salida es una característica típica de todo tipo de habilidad.

Referente a la rapidez en el habla, los sonidos se agrupan en palabras, las palabras en frases, en proposiciones, juntos los sonidos producen una palabra significativa, o las palabras producen una cláusula significativa.

El hablante planifica por adelantado mostrando anticipación, que también se observa en las demás actividades expertas.

En un desempeño experto el que lo realiza es inconciente de los detalles de su actuación, le preocupa la planeación de nivel superior, los detalles se resuelven en “piloto automático”.

El hablante se preocupa de contar una historia, transmitir información, etc., pero no planifica concientemente el uso del plural o del singular para el sustantivo que necesita.

Se lo deja a una subrutina bien ejercitada que si no hay alguna perturbación o dificultad suele ser la adecuada.

Referente a la simultaneidad igual que al manejar un auto, implica hacer varias cosas diferentes al mismo tiempo, cuando alguien habla esto es evidente ya que, simultáneamente mueve sus manos, su cuerpo y sus ojos, cambia su expresión facial, hablamos con nuestras bocas pero conversamos con todo el cuerpo.

También puede verse en la forma en que anticipamos lo que vamos a decir mientras decimos otra cosa. Además naturalmente la gente puede hablar mientras camina, cocina, maneja o realiza casi cualquier otra actividad.

Aunque no recordemos alguna palabra el discurso avanza con bastante fluidez y la palabra adecuada aparece en el lugar correcto de la oración en la mayoría de los casos. Utilizar la palabra correcta en el momento adecuado al decir una

[7] Rogers, D, *Las habilidades del hablante*.

oración nos exige planificar por adelantado, esto está referido al "apilamiento de objetivos"[8].

Hablar es entonces una conducta experta, no muy distinta de los demás. Se necesita mucho tiempo para adquirir habilidades, se dice que se necesitan unas 10,000 horas de práctica para llegar a ser un experto. Pero haciendo cuentas al terminar la escuela primaria, los niños ya han practicado suficiente como para ser expertos en las habilidades del lenguaje.

Hablar es un arte, el hablante tiene un sinfín de posibilidades abiertas ante si, que quiere decir, relevancia, orden, vinculación de las palabras, elecciones de estructuras gramaticales específicas, elecciones de palabras y frases entre las muchas que puede transmitir con la misma idea, tono y acento de voz adecuados.

Los hablantes debemos tomar en cuenta qué saben y qué creen nuestros oyentes, enmarcando el discurso según las necesidades y propósitos que le atribuyen al oyente, debemos intentar que sea socialmente adecuado. Lo más importante de esto relacionado con la docencia, es observar que las elecciones del hablante (profesor) no solo afectan la medida en que el oyente (alumno o alumna) pueda comprender lo que se le dice sino también la medida en que el oyente estará interesado, le gustará el hablante, la condición social que le atribuirá, etc. Cuando hablamos hacemos una planeación la cual implica decisiones sobre los detalles que son realmente adecuados, discusiones sobre algunos de los puntos principales que se deben incluir; decisiones sobre el orden en que se deben mencionar. Es parte del arte del hablante ser capaz de predecir el efecto que se tendrá en las expectativas del oyente.

La planificación de la expresión de ideas parece requerir tiempo, pero una vez que se desarrolla un plan para expresar la idea, el discurso puede proceder con mayor fluidez.

Es un hecho que en los humanos los años de práctica dan como resultado un individuo experto que puede hablar sin esfuerzo, planificar por adelantado y producir oraciones que nunca ha dicho u oído antes.

[8] Rogers, D, *Las habilidades del hablante*.

Al término de ésta semblanza sobre el habla es importante rescatar la firme idea que dentro de la docencia en parte mayoritaria nos relacionamos con el alumno a través de nuestra lengua materna, el español, expresamos nuestras ideas e intentamos la transmisión de conocimientos de una manera que consideramos correcta, pero, ¿es realmente ésta acción llevada a cabo correctamente? La relación directa que existe con el oyente (alumno o alumna) es indicativa de que existe la necesidad de cuidar la forma de expresarnos, ya que una adecuada planificación del discurso puede conducirnos al camino de una enseñanza funcional que nos aproxime a la guía de un aprendizaje significativo en nuestros educandos.

Algunos aspectos de las habilidades como oyente (receptor del habla) se mencionarán ya que en todo diálogo requerimos de un emisor y un receptor en el cual exista comunicación efectiva.

Las letras son fáciles de reconocer en el contexto, lo cual facilita mucho la comprensión y el reconocimiento de las palabras, este nivel de comprensión tiene que ver con el hecho de que muchas palabras tienen más de un significado, hay que tenerlo en cuenta junto con la estructura gramatical de toda oración. Esto nos sugiere que debemos usar el contexto para determinar la parte del discurso en que se haya incluida una palabra, el significado peculiar que tiene y las palabras involucradas.

El oyente toma decisiones rápidamente sobre el significado de una oración, durante el discurso, lo cual indica que al decidir correctamente, el contexto en el que se encuentra inmersa la oración, tiene un poderoso efecto para comprenderla.

Pero aún cuando el oyente entienda las palabras y la estructura gramatical, necesita apreciar las intenciones del hablante para poder responder adecuadamente[9].

Cualquier conversador hábil y experimentado sigue de manera implícita algunos principios señalados por el filósofo francés H. P. Grise (1975), las cuales son:

a) Cantidad; ser tan informativo como se necesite, no se debe proporcionar información de más ni de menos.
b) Calidad; ser sincero
c) Relación; ser relevante
d) Modo; ser claro y ordenado

Estos principios conducen al lector o al oyente a hacer deducciones. El entender el lenguaje implica no tan solo un conocimiento del mismo, sino también del mundo.

Es necesario mejorar las habilidades del hablante y del oyente, este último enfrenta un gran problema si encuentra dificultades para comprender y recordar los contenidos, por ejemplo de una conferencia o bien de una clase, ya que no puede descansar cuando su concentración flaquea, no existe la posibilidad de volver atrás si no alcanza a seguir un argumento, la velocidad a la que tiene que incorporar la información la establece el hablante, mantener la concentración por 50 minutos es difícil, el alumno no puede prestar la misma atención a cada palabra que sale de los labios del docente, esto nos lleva a evidenciar la gran responsabilidad del hablante para aliviar la carga del oyente. Es por esto que se debe llevar a cabo una capacitación dirigida a la mejora de la habilidad para comunicarse y de la calidad expositiva, siempre tomando en cuenta al oyente, enfocándola a superar la deficiencia de prestar atención todo el tiempo, es por esto que el docente debe utilizar diferentes estrategias que le permitan llamar la atención, por ejemplo, resumir aspectos principales, proporcionar información adicional haciendo referencia al tema en cuestión y con ayuda audiovisual, siempre tomando en cuenta los conocimientos del

[9] Rogers, D, *Las habilidades del hablante*.

oyente, así como sus necesidades y propósitos. El profesor suele tener dificultades al exponer un tema nuevo de manera tal que todos puedan entenderlo, tiene que aprender a evaluar correctamente qué sabe su auditorio, si sobreestima sus conocimientos el auditorio no entenderá, no recordará y ni siquiera se interesará en lo que dice, pero si lo subestima entonces puede aburrirlo.

También los alumnos pueden ejercitar con mayor o menor pericia habilidades de comprensión de diferentes puntos, el primero tiene que ver con la atención y con tener la voluntad de oír al hablante, un segundo tipo tiene que ver con el desempeño de ciertas operaciones cognitivas como distinguir entre las principales y subordinadas, mantener en la mente detalles relacionados, sacar conclusiones adecuadas o percibir la estructura lógica de un argumento.

Hay otro conjunto de habilidades involucrado en la identificación de “pistas” que el hablante utiliza para señalar la dirección de sus pensamientos, pueden ser verbales (“en primer lugar”, “sin embargo”, “en síntesis”) o con énfasis en diferentes tonos de voz, pueden ser totalmente no verbales (gestos, posturas y movimientos corporales en general).

El hablante debe estructurar claramente su discurso, aclarando cual es la estructura que emplea, señalando sus puntos principales, repitiendo y resumiendo, proporcionando información adicional por otros medios, tiene que recurrir a las estructuras de conocimiento que el oyente ya posee, de manera que lo que diga resulte comprensible para el oyente y pueda aumentar sus conocimientos, debe existir una tarea recíproca entre el hablante y el oyente, este debe prestar atención a los mismos puntos que el hablante e intentar deducir su sentido y sus intenciones.

2.5 Competencia Social

En la adolescencia uno de los aspectos relevantes es la competencia social, que consiste en como hacer amigos e influir sobre la gente, que también es la capacidad de lograr objetivos personales y profesionales a través de las relaciones con otros o en actividades tales como la docencia, la venta, la entrevista o la psicoterapia[10]. Encontramos una nueva relación entre el docente y la adolescencia que debe ser considerado, ya que desde diferentes aspectos los alumnos y alumnas pueden ser apoyados.

Definida como habilidad social, como tal debe cumplir con un desempeño experto, una percepción selectiva (hay sensibilidad a la información visual, auditiva y tal vez táctil), un proceso de traducción central (cuando la persona aprende cuales son las técnicas sociales que generan en los demás las respuestas deseadas), respuestas motrices (desempeño fluido y preciso de la actividad motriz), retroalimentación y acción correctiva (por medio de señales preceptúales), el ejecutante realiza acciones correctivas cuando es necesario[11].

Las habilidades sociales, en parte tienen que aprenderse, podemos suponer que algunas personas las adquieren y desarrollan mejor que otras, pueden conducir a importantes consecuencias y llevar al fracaso si no son correctas, desde el mantenimiento o no de relaciones personales hasta casos extremos como el aislamiento social y quizá hasta el suicidio.

Todas estas habilidades incluyen en alguna medida la conversación sean habilidades de comunicación, habilidades interpersonales o habilidades de desempeño. Dentro de las habilidades conversacionales, esencialmente la conversación es comunicación hablada, que incluye el intercambio verbal entre personas. La conversación es sin duda la piedra basal del mundo social: los seres humanos aprenden a hablar en la conversación, encuentran compañía con la conversación, se socializa a través de la conversación, mejoran su jerarquía social como consecuencia de la conversación y hasta pueden enfermar mentalmente debido a la conversación. Beattie (1983).

Hay que recordar que los procesos cognitivos complejos están involucrados en su clasificación y generación. Al impartir nuestras clases debemos cuidar el aspecto de comunicación a través de la conversación respetuosa y dirigida, debemos garantizar que exista un compromiso activo en la conversación.

[10]Gellatly, A, *La inteligencia hábil el desarrollo de las capacidades cognitivas, 1986*

[11] Gellatly, A, *La inteligencia hábil el desarrollo de las capacidades cognitivas, 1986*

Existe también la comunicación no verbal en la cual, como descubrieron con Rosencrantz y Guildenstern (1983), hablar no es solo cuestión de palabras. En aspectos no verbales de la comunicación como la mirada, la expresión facial, la postura, el gesto y la distancia (la forma en que se percibe, estructura y utiliza el espacio físico) y en rasgos supralingüísticos de la comunicación, como la entonación, la forma de expresión y el tono de voz.

Una persona sabe cuando comenzar a hablar a través de las señales que marcan el final de una secuencia discursiva, algunas suelen incluir cambios en la entonación, el timbre o el volumen, el arrastre de las palabras o el acento en una sílaba final, alguna clase de expresión estereotipada como “no es verdad” o “usted me entiende” o la terminación con un gesto o la relajación de una posición tensa de la mano durante el propio turno de conversación que tiene consecuencias sociales importantes ya que la violación de los turnos mediante la interrupción o el habla simultánea suele considerarse una grave falta de respeto. Al asociarnos con otros aprendemos la forma en que utilizan las señales para los turnos lo cual nos permite juzgar con precisión cuando están a punto de dejar de hablar o de comenzar a hacerlo, parece que la confianza y la condición social influyen en la conversación. Mientras más confianza exista es más probable que se interrumpa y cuanto más insegura sea en lo social menos probable es que se haga.

La mirada es también una señal social importante, tiene una importancia considerable ya que, si uno no mira en la dirección correcta en el momento apropiado, no recibirá información perceptual.

Argyle y Cook (1976) afirma que las personas que miran más y sostienen la mirada más tiempo crean una impresión más favorable que aquellas que no lo hacen.

2.6 Habilidades de aprendizaje

En cada nivel la organización de los elementos que componen la información a presentar, en nuestro caso en el salón de clases, es insustituible. Recursos tales como los índices, los títulos de los capítulos y los subtítulos se utilizan para hacer evidente la estructura. Sin estos recursos gran parte de la organización impuesta por el docente puede no ser clara para el alumno.

Recordemos que los alumnos poseen conocimientos previos y expectativas diferentes respecto a lo que se está enseñando y esto puede influir en como perciben el material que se les presenta. Las evidencias sugieren que el aprendizaje mejore si los alumnos también imponen su propia estructura al material que están a prendiendo.

La idea de que cuanto más profundamente se procese la información mejor se recordara es atractiva pero difícil de comprobar. Es posible clasificar a los alumnos que adoptan un enfoque superficial y el que adopta un enfoque profundo, en donde el primero encara la tarea con la intención de memorizar y completar las exigencias de la misma a comparación del segundo el cual encara el texto con la intención de comprender. Menciono algunas estrategias de procesamiento de información para el aprendizaje las cuales comparto con Jonassen(1985), que pueden servirnos para mejorar la enseñanza en matemáticas.

*Estrategias de práctica del material. Por ejemplo: copiar, subrayar, repasar.*Estrategias de organización del material. Por ejemplo: encabezados, agrupamientos, resúmenes, mapas.

*Estrategias de integración del material. Por ejemplo: resumir, hacer diagramas, construir tablas de resumen integradoras.

*Estrategias de elaboración de la información. Por ejemplo: usar la imaginación, crear analogías, parafrasear, relacionar la nueva información con la anterior.

Llamamos metacognición al conocimiento que tenemos sobre nuestras propias habilidades de aprendizaje, se analiza de acuerdo con lo que las personas saben o creen saber sobre sus propios procesos cognitivos. La metacognición es importante ya que nos permite explorar el conocimiento que tenemos sobre nuestras propias habilidades de aprendizaje y nos permite considerar en que

medida las estrategias analizadas pueden volverse parte de nuestras propias actividades.
Brown (1985) tiene la idea de que los alumnos deben controlar, verificar y evaluar su progreso en el aprendizaje, en el estudio de un texto, sugiere que a los lectores se les debe enseñar 5 aptitudes críticas: el resumen (la autorrevisión) la interrogación, la aclaración, la predicción y el control de su comprensión, debemos guiarlos a un aprendizaje autocontrolado en el que se les aliente a hacer un buen resumen donde incluya las ideas principales, este aprendizaje en donde la responsabilidad de la evaluación del éxito del aprendizaje pasa del docente al alumno es una poderosa técnica de aprendizaje.
Las estrategias de apoyo tienen que ver con la forma de encarar los problemas que provocan las distracciones y la inquietud, con la organización del propio entorno para el estudio efectivo (tener un lugar especial para estudiar, fijar y cumplir fechas, planificar horarios de estudio, hacer ejercicios de relajación para reducir el estrés.

2.7 Aspectos relacionados con la resolución de problemas

Aquí examinaremos los procesos que constituyen la resolución de problemas y si es posible entrenar a la gente para que mejore su eficiencia en este aspecto, un problema se relaciona con las actitudes del individuo.
Para un adolescente, por la práctica categorizada, le será fácil recordar una lista de palabras ya que da los pasos adecuados de manera automática. De la misma manera leer o conducir un automóvil pueden presentarle al novato infinidad de dificultades que al experto no, se van resolviendo estos problemas conforme se van adquiriendo procedimientos de solución en el curso de la evolución social y cognitiva normal o como consecuencia del entrenamiento especial y por lo tanto dejan de ser problemas.
La gente puede aprender habilidades para eliminar todo tipo de problemas culturalmente identificados, alguna de estas habilidades como el control de la

comprensión, tienen una amplia gama de aplicaciones, otras solo resultan útiles en circunstancias muy específicas la vida cotidiana nos presenta permanentemente nuevos problemas para los que no tenemos una solución preparada. Esto nos puede llevar a preguntarnos si es posible aprender un conjunto muy general de habilidades o principios para resolver todo tipo de problemas.

La representación de problemas

Una diferencia en la forma de representación de problemas es la existente entre la codificación verbal y la codificación en imágenes, y la forma elegida puede tener consecuencias importantes. Polya (2002).

Por esto es que es de suma importancia probar las diferentes representaciones de un problema y evaluar su potencial relativo para ofrecer una solución.

Se debe tener en cuenta que nuestras experiencias basadas influyen sobre nuestra conducta presente de muchas maneras y si no tuviéramos la capacidad de aprender de ellas estaríamos realmente mal, las configuraciones mentales de corto plazo son fáciles de romper si uno toma conciencia sobre ellas. Pero las configuraciones mentales de largo plazo son parte del estilo de pensamiento de una persona.

No solo la representación general de un problema es importante, la representación de sus elementos individuales también puede influir en la probabilidad de éxito en su resolución. Tendemos a representar los objetos según sus opciones y si bien esto suele ser correcto, a veces puede ser excesivamente limitativo, esto se denomina inmutabilidad funcional. Existe otro factor aparte de las configuraciones solidificadas y de la inmutabilidad funcional que son casos especiales de un factor general que puede inhibir la flexibilidad en la representación de los problemas puede ser que varios supuestos limitativos contrabandean en sus representaciones.

A veces una representación correcta del problema es equivalente a su solución. Pero con más frecuencia, la representación es la primera etapa y a ella le debe seguir la búsqueda de una solución.

Dentro de la etapa de solución debemos mencionar el uso de heurísticas, sabemos que existen procedimientos de solución que garantizan respuestas correctas, conocidas como algoritmos.

Pero la mayoría de los problemas no se puede encarar algorítmicamente y es cuando recurrimos a las reglas empíricas denominadas heurísticas. Las heurísticas son guías para la acción, que se han adquirido con experiencia, dentro de sus ventajas incluyen la simplicidad y la familiaridad y entre sus desventajas está que nunca podemos saber por anticipado si nos llevará en la dirección correcta. Ya mencionamos antes la idea de una "pila" de objetivos [12] que sería un ejemplo de análisis de medios fines.

En este tipo de análisis, quién resuelve el problema oscila entre varios fines (objetivos y subobjetivos) por un lado y diferentes medios de lograrlos por el otro. La táctica predominante consiste en trabajar hacia atrás desde la solución final y eliminar las diferencias percibidas entre la situación presente y algún nivel de la situación del objetivo, repitiendo el proceso en cada nivel.

Es un método que básicamente utiliza el sentido común, pero su aplicación sistemática es un poderoso medio para resolver problemas, desde los más simples hasta aquellos relativos al ajedrez de alto nivel. Incluye una serie de procesos componentes como la reducción del problema, el trabajo hacia atrás y la evaluación de las semejanzas entre la situación presente y la del objetivo.

Dentro de un problema tenemos que basarnos en la información que tenemos a nuestra disposición. La disponibilidad es una heurística útil en la resolución de problemas pero solo cuando la frecuencia objetiva de un tipo de acontecimientos se correlaciona con la disponibilidad subjetiva de ejemplos de esa clase, todos tendemos a buscar la información que confirma nuestros

[12] Sloboada, J, *La lectura un estudio de casos de habilidades cognitivas*" 1986

propios prejuicios. Las interpretaciones que más practicamos son las nuestras propias y se han automatizado. Es necesario mucho esfuerzo conciente para adquirir eficiencia en adoptar el punto de vista de otro[13].

En los problemas para los que hay poca información disponible sobre las probabilidades objetivas, lo cual es muy frecuente, la representatividad puede ser un recurso heurístico razonable. Pero en ciertas circunstancias puede desencaminar significativamente nuestros pensamientos. En la mayoría de los casos, la gente comienza sus deliberaciones de acuerdo con su propia actitud ante el tema y esto les ofrece un punto de anclaje.

[13] Polya, G, *Como plantear y resolver problemas, 2002*

CAPÍTULO 3

3. Resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas

3.1 Introducción

Entre las diversas corrientes que es posible identificar en la evolución de la educación matemática, destaca la idea de que es indispensable que los estudiantes reflexionen abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de resolución durante el aprendizaje de las matemáticas. Los estudiantes deben tener la oportunidad de desarrollar o de construir las ideas matemáticas en el salón de clases. En este contexto, el escribir un trabajo sobre la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas se torna importante ya que en varios países ha despertado gran interés la incorporación de la resolución de problemas a la instrucción matemática[1].

Una idea fundamental es considerar a la resolución de problemas como una forma de pensar donde el estudiante debe desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas. Es decir, al resumir un problema o al aprender un contenido el estudiante tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación o problema, usar representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas y utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver o entender esa situación o problema. Así la resolución de problemas se relaciona no solo con el uso y desarrollo de habilidades para que el estudiante tenga acceso y utilice diversos recursos; sino también con estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones.

3.2 Aspectos esenciales de los fundamentos de las matemáticas

La resolución de problemas ha sido identificada como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas, ya que se presenta la interacción del

[1] Kilpatrick, J, *Educación Matemática,* 1995

estudiante con problemas no rutinarios y la discusión de las estrategias importantes contribuye a que desarrolle una disposición hacia el estudio de las matemáticas, el estudiante intencionalmente busca los significados de las ideas matemáticas y discute el sentido de las soluciones de los problemas. Polya (2002)

Uno de los componentes más importantes en el aprendizaje de las matemáticas se relaciona con las ideas propias de lo que son las matemáticas, es por esto que al analizar el aprovechamiento matemático de un estudiante, es importante responder la pregunta "¿qué significa que un estudiante aprenda matemáticas?" una respuesta conocida confunde el aprendizaje con una simple acumulación de pedazos de información (conceptos y habilidades) acomodados en una secuencia ordenada. A la matemática se le visualiza como un cuerpo de conocimientos acotado y estático que el estudiante tiene que dominar vía la mecanización, ésta concepción ha sido cuestionada y han surgido nuevas perspectivas acerca del aprendizaje de las matemáticas[2].

La idea de que el aprender matemáticas se relacione con que el estudiante desarrolle o construya las ideas matemáticas ubica a ésta disciplina como un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión, es importante el proceso y sentido que los estudiantes muestran en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas.

Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas, aprender matemáticas es un proceso que incluye el encontrar sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir y discutir sus conexiones con otras ideas.

"Para que los estudiantes vean a las matemáticas como una actividad con sentido, necesitan aprenderlas en un salón de clases que sea un microcosmos de la cultura matemática. Es decir, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina se reflejen en la práctica cotidiana. Así, para la educación

[2] Kilpatrick, J, *Perspectiva en educación matemática, 1996*

matemática el asunto es cultural: ¿Cómo se puede crear un ambiente de clases que refleje una cultura matemática real?" Schoenfeld (1988).[3]

Encontrar y discutir el sentido de las ideas matemáticas ayuda a ubicar la importancia de las ideas y conceptos matemáticos.

Reflexionar sobre los fundamentos implica abordar diversas escuelas de pensamiento y sus controversias[4].

-Platónico: asume que las entidades matemáticas son reales y que existe independientemente el sujeto, no son creadas y no cambian con el tiempo.

-Formalismo: relaciona el desarrollo de las matemáticas con un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas, ambos fundamentos coinciden en cuanto a los principios de razonamiento que son permisibles en la práctica de las matemáticas.

-Constructivista: afirma que las matemáticas pueden obtenerse solamente a través de una construcción finita de pasos verificables.

Estas tres corrientes de pensamiento consideraban al contenido matemático como un producto.

Una caracterización de las matemáticas en términos de la resolución de problemas refleja una dirección que cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos, procedimientos o reglas que el estudiante tiene que memorizar o ejercitar: los estudiantes participan activamente en el desarrollo de las ideas matemáticas, los problemas son definidos con menor precisión y el aprendizaje se relaciona con la práctica de desarrollar matemáticas, el estudiante debe tener un papel activo al discutir problemas, proponer ejemplos y contraejemplos, usar conjeturas y en general construir el conocimiento matemático.

Barbeau (1989) sugiere que "la mayoría de la gente percibe a las matemáticas como un conjunto fijo de conocimientos pulidos y acabados. Su objetivo es la

[3] Santos Trigo, L, *Didáctica Lecturas*, 1997.
[4] Piaget, J, *La Enseñanza de las matemáticas modernas,1986*

manipulación de números y la prueba de deducciones geométricas. Es una disciplina fría y austera que le da poco espacio al juicio y a la creatividad”.[5]

Tal punto de vista es indudablemente una reflexión de las matemáticas que se estudian en la escuela, un punto de vista opuesto concibe a las matemáticas como una disciplina falible, cambiante y similar a otras disciplinas, en constante extensión tanto en resultados particulares como en métodos y principios generales.

3.3 Ideas generales sobre el desarrollo de estrategias

Argumento de transferencia

El estudiar matemáticas implica asimilar conceptos, métodos y principios que poseen diferencias fundamentales con los que se estudian en otras áreas del conocimiento. En un contexto general la propuesta de aprendizaje que identifica a la resolución de problemas como una actividad esencial aparece en varios campos incluyendo a la física, la psicología, la historia y el aprendizaje del lenguaje, está íntimamente relacionada con el desarrollo de la inteligencia o desarrollo de un pensamiento crítico.

Huter (1986) argumenta que “el desarrollo de una inteligencia general es influenciado por el dominio de algún tipo de conocimiento. Así , la gente con alta inteligencia general, tiende a ejecutar actividades de manera adecuada porque poseen un rico conocimiento básico, el determinante directo de la ejecución.”[6]

El trabajo de Polya (2002)

El trabajo de Polya se desarrolló alrededor de la resolución de problemas matemáticos específicamente, pero muchas de las heurísticas que enfatizó eran aplicables a la resolución de problemas en otros dominios, lo cual motivo la noción de que la resolución de problemas podría ser visto como una habilidad general. Identifica etapas fundamentales, de manera general éstas son:

[5] Santos Trigo, L, *Didáctica Lecturas*, 1997.
[6] Santos Trigo, L, *Didáctica Lecturas*, 1997.

1. Entendimiento del problema. Se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema. Por ejemplo, ¿cuál es la información dada en el problema (datos)?, ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?, otras heurísticas importantes aquí son el dibujar una gráfica o diagrama.
2. Diseño de un plan. Se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución.
3. Ejecución del plan. Se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución. Una idea fundamental es tratar de resolver el problema en una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida. Ésta etapa tiene conexión con lo que Polya denomina una visión retrospectiva del proceso de solución.

Algunas heurísticas identificadas como necesarias en la resolución de problemas incluían estrategias para memorizar, para tomar decisiones, para pensar creativamente y para razonar adecuadamente.

Schoenfeld (1989) ha mostrado que las heurísticas de Polya pueden ser importantes en el aprendizaje de los estudiantes si se discuten a un nivel contextualizado. Además el uso de estrategias metacognitivas ayuda al estudiante a utilizar estrategias generales eficientemente tales estrategias se refieren al monitoreo constante del proceso de solución. Schoenfeld recomienda a los estudiantes para pensar o reflexionar al resolver problemas hacerse las siguientes preguntas: ¿Qué estoy haciendo ahora? ¿Me está llevando esto a algún lugar? ¿Qué otra cosa puedo hacer en lugar de continuar con esto?, identificó huellas de la transferencia del uso de estrategias al resolver problemas totalmente diferentes a los discutidos en el curso.

La transferencia ocurre cuando:

a) Se le muestra al alumno como se relacionan los problemas entre sí.

b) La atención de los estudiantes es dirigida a resaltar la estructura de problemas comparables.
c) Los alumnos están familiarizados con los problemas del campo o dominio específico, es decir, matemáticas, física, química, u otra disciplina.
d) Los ejemplos se acompañan de reglas (formuladas por los mismos estudiantes).
e) El aprendizaje se lleva a cabo en un contexto social (enseñanza recíproca) donde las justificaciones, los principios y las explicaciones son socialmente promovidas, generadas y contrastadas (Brown y Kane, 1988).

3.4 Perspectiva dinámica de las matemáticas

Aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas, es importante que el estudiante discuta sus ideas con sus compañeros que presente conjeturas acerca del comportamiento de ciertas ideas matemáticas, y que plantee sus propios problemas.

La práctica de estudiar matemáticas se relaciona muchas veces con el recordar y aplicar la regla correcta a las preguntas de los maestros, y la veracidad de las respuestas se determina con la ratificación por parte de los maestros o del libro de texto, esto la ubica como ya se mencionó como una disciplina fría y austera que le da poco espacio al juicio y a la creatividad.

El punto de vista dinámico de las matemáticas nos lleva a un aprendizaje que tienda hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática, hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación haciendo a un lado el ver al maestro como la autoridad que da las respuestas correctas, que tienda hacia el desarrollo del razonamiento matemático dejando de ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar, hacia la resolución de problemas y no solamente encontrar respuestas en forma mecánica, hacia la conexión y aplicación de las matemáticas, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Significado de la palabra problema.

Al definir la palabra “problema” se liga la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando este intenta resolverlo. Mientras que para algunos representa un gran esfuerzo, para otros puede ser un simple ejercicio rutinario, el que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea. Schoenfeld (1989) usa el término problema para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerlo.

El uso de problemas no rutinarios (problemas con varios métodos de resolución o que requieran más que solamente la aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos para resolverlos) puede constituir un recurso natural para discutir actividades que ilustren el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones y estrategias de carácter cognoscitivo y de monitoreo.

Es por esto que es sumamente importante la selección de los problemas para discutir dentro y fuera del salón de clases la cual establece la dirección y el tipo de actividades que se deben desarrollar.

Un problema en términos generales, es una tarea o situación en la que aparecen la existencia de un interés, la no existencia de una solución inmediata, la presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico), la atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea.

En el proceso de solución, los estudiantes pueden encontrar ideas importantes que valga la pena explorar y esto puede ilustrar que algunas veces los intentos de solución son tan importantes como la solución misma del problema.

Schoenfeld (1992) encontró que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

a) Dominio del conocimiento o recursos
b) Estrategias cognitivas, métodos heurísticos
c) Estrategias metacognitivas
d) Sistemas de creencias

Los recursos representan un inventario de lo que un individuo sabe y de las formas en que adquiere ese conocimiento, influye en ellos el conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio (la disciplina) o del problema a resolver, dicho conocimiento se relaciona con las ideas que los estudiantes tienen acerca del uso de conceptos en el mundo real, este conocimiento informal muchas veces les impide entender el concepto matemático.

Durante el proceso de resolución de un problema, el estudiante debe utilizar algunos hechos necesarios para plantear o seleccionar algún camino de solución, es decir, un inventario de recursos no solamente incluye los conocimientos, hechos y definiciones básicas, sino también la forma en que el estudiante recuerda este conocimiento y tiene acceso a él para resolver el problema. Dentro de los procedimientos rutinarios se identifican técnicas no algorítmicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de problemas, cuando el estudiante tiene acceso a un procedimiento rutinario, generalmente no incluye decisiones estratégicas. En los recursos también influye el conocimiento acerca del discurso del dominio, la percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas al resolver un problema determina la dirección y los recursos que utilizan en el proceso de solución.

Cuando un estudiante comete un gran número de errores en procedimientos simples, se puede pensar que es el resultado de un mal aprendizaje, esto lo llamamos errores consistentes o recursos débiles.

Los métodos heurísticos

Aquí se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar en la resolución de un problema, en el proceso de resolver un problema, un individuo puede explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema o trabajar problemas auxiliares, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema, o trabajar con casos específicos.

Estrategias metacognitivas.

Un aspecto central en la resolución de problemas es el monitoreo o auto evaluación del proceso utilizado al resolver un problema. La evaluación o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas y el estar conciente de las propias capacidades y limitaciones también son aspectos importantes en la resolución de problemas, a tal proceso se le identifica con las estrategias metacognitivas.

La metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema. Dentro de la resolución de problemas se identifican tres categorías donde se presentan la metacognición:

a) El conocimiento acerca de nuestro propio proceso.
b) El control y la autorregulación. Que tan capaz es uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y que tan bien se ajusta al proceso.
c) Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas y como se relacionan o identifican con alguna tendencia en la resolución de problemas.

Schoenfeld (1992) afirma que el control trata sobre la forma en que el individuo usa la información, las acciones que involucran un control incluyen tener claridad acerca de lo que trata el problema (fase de entendimiento del problema), considerar formas de resolver el problema seleccionando un método de solución (fase de diseño), monitorear el proceso y decidir cuando abandonar algún camino (fase de implantación), revisar el proceso de resolución (visión retrospectiva).

En nuestros cursos debemos convencer a los alumnos de que poseen los recursos pero carecen o no han desarrollado algunas estrategias necesarias para utilizarlos a través de la discusión de videos donde ellos puedan apreciar a otros estudiantes resolviendo problemas, es importante que el estudiante conozca todas las dificultades que se presentan al intentar resolver un problema, durante las sesiones el maestro deberá cuestionar aspectos relacionados con el entendimiento del problema, de tal manera que pueda guiar a los alumnos para encontrar sentido al problema. El estudiante debe estar seguro que entiende el problema antes de intentar llegar a una solución ya que, uno siempre debe evaluar el progreso hacia la solución y si es necesario, reconsiderar lo pertinente del camino iniciado. Las discusiones en el grupo nos llevarán a que los alumnos desarrollen estrategias de autorregulación, esto nos permitirá como docentes analizar las creencias que tienen los estudiantes de las matemáticas y de la resolución de problemas. La resolución de problemas nos permite trabajar también en grupos pequeños de estudiantes, lo cual les permite a los alumnos intercambiar sus ideas y discutirlas ante sus compañeros, es importante observarlo y retroalimentarlo durante el proceso, hacerlos reflexionar con preguntas específicas como: ¿Qué están haciendo? ¿Por qué lo están haciendo? ¿Cómo les puede ayudar lo que hacen a resolver el problema?, es esencial que los estudiantes compartan el compromiso de valorar y entender las ideas de cada participante.

Sistemas de creencias

Aquí se ubica la concepción que cada individuo tiene acerca de las matemáticas, esto determinará la forma de cómo seleccionar una determinada dirección o método para resolver un problema. Las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y el control. Aquí no podemos perder de vista el rechazo muchas veces involuntario que los alumnos tienen hacia ésta disciplina, las ideas que tienen los estudiantes acerca de las matemáticas, moldean sus comportamientos en el estudio de la disciplina. Dentro de éstas creencias Schoenfeld (1992) documenta las siguientes:

a) Las pruebas formales no son necesarias a menos que explícitamente se soliciten o se requieran.
b) Todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos en diez minutos o menos, sino el alumno abandona la tarea.
c) Sólo los genios son capaces de descubrir, crear y entender matemáticas, los estudiantes toman a las matemáticas pasivamente, memorizan contenidos sin esperanza de entendimiento alguno.
d) Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo o el descubrimiento de las ideas matemáticas.

Las creencias provienen del tipo de instrucción que reciben en el salón de clases, las cuales muchas veces son motivadas por docentes que se han dedicado a hacer de las matemáticas una disciplina inentendible y de difícil acceso lo cual ha provocado que los alumnos rehuyan las áreas relacionadas con la misma.

Muchos piensan que este conocimiento es únicamente para estudiantes avanzados, sin embargo, cuando a los estudiantes se les enfrenta a problemas donde solo tienen que aplicar reglas, algoritmos o fórmulas, se observa cierta fluidez y eficiencia, pero cuando se les pide explicar o interpretar cierta información estos mismos estudiantes muestran serias dificultades. También los estudiantes aplican los conocimientos en una forma ritual, son incapaces de tratar situaciones nuevas o diferentes aún cuando tengan el conocimiento base adecuado para afrontar tal situación, los procedimientos que utilizan los estudiantes funcionan tanto en los ejercicios de clase como en los que se encuentran en la mayoría de los libros de texto.

Para los estudiantes lo más importante es alcanzar la solución y en ningún momento analizar, contrastar o relacionar las condiciones iniciales del problema.

Schoenfeld (1985) indica que entre los objetivos fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra el eliminar las creencias inapropiadas que tenga el estudiante acerca de las matemáticas y la resolución de problemas.
El dominio del conocimiento o los recursos incluye a las definiciones, los hechos y los procedimientos usados en el dominio matemático.

3.5 Algunos métodos y estrategias en la resolución de problemas

Existen problemas matemáticos en los que los desarrollos o enunciados pueden sugerir que método o técnica utilizar. Sin embargo la mayoría de los problemas no pueden ser resueltos a través del uso directo de una regla o procedimiento único, sino que necesitan ser transformados interpretados en diferentes formas, o requieren ser transportados a otros dominios para finalmente resolverlos. Por ejemplo en el que se resalta la transferencia del problema original a otro dominio o contexto como un medio para obtener la solución, es usado frecuentemente en la resolución de problemas. En la transferencia resalta el reconocimiento explícito de la estructura del problema original, la cual puede ser amplificada, reducida o simplemente interpretada desde perspectivas diferentes con la intención de resolver dificultades inmediatas asociadas con el problema original.

Algunos métodos han sido identificados por los investigadores en educación matemática, como importantes en la resolución de problemas, se espera que el alumno identifique algunos problemas que puedan resolverse por medio de estos métodos[7].

1. El método de los dos caminos. El objetivo de éste método es expresar el problema dado por medio de dos expresiones algebraicas e igualarlas.
2. El método de cancelación. Consiste en reordenar los términos de un problema dado de tal forma que algunos se eliminarán.
3. El método de casos especiales. Un problema que incluya el análisis de las raíces de polinomios puede intentarse resolver por dicho método.

---

[7] Polya, J, *Como plantear y resolver problemas, 2002*

4. Reducción de un problema a casos más simples. Aparece frecuentemente en la resolución de problemas matemáticos. La idea es considerar casos más simples que se deriven del problema original, ayuda a atacar al problema por partes. Otra estrategia importante que se utiliza ampliamente en la resolución de problemas es la multiplicación por uno, es decir, multiplicar y dividir por la misma expresión.
5. Dibujar una figura o diagrama cuando sea posible. Una representación gráfica no será útil en las partes o condiciones relevantes del problema, el pensar en una figura o gráfica nos puede sugerir alguna estrategia para resolverlo, debe representar claramente los casos que se consideran en el planteamiento del problema.
6. El método de sustitución. La transformación de la expresión de un problema a una forma más fácil de operar, es una estrategia importante en la resolución de problemas.

3.6 La resolución de problemas y su relación con otras áreas del conocimiento

El observar, codificar y analizar los procesos utilizados por los expertos al resolver un problema nos ha proporcionado un aspecto esencial de cómo un individuo resuelve problemas, la observación directa de los estudiantes en acción resolviendo problemas también ha contribuido a caracterizar algunos factores. Por esto es importante considerar la organización y codificación de datos así como los métodos de observación que ayuden a analizar la información que se obtiene al caracterizar el proceso observado en el estudiante y el experto al resolver problemas. Aquí es donde intervienen otras áreas de conocimiento cuyo trabajo desempeña un papel importante a tratar de modelar los aspectos relacionados con la resolución de problemas, es importante la incorporación del conocimiento de los matemáticos, profesores de matemáticas, educadores y especialistas de las ciencias cognitivas. La opinión de los docentes en matemáticas es importante para la implantación de diversas actividades de aprendizaje y para determinar las ventajas y limitantes que ofrece el salón de clases. La experiencia de los especialistas de la cognición acerca de cómo la gente resuelve problemas ha sido de gran utilidad para entender el proceso utilizado por los estudiantes al resolver problemas matemáticos.

A nivel internacional, la propuesta de enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas ha estado presente en el ambiente educativo, sin embargo en la práctica se han identificado diversas posiciones acerca de su significado. Algunos profesores que han adoptado esta propuesta se enfocan al uso de métodos heurísticos, para otros la esencia es seguir los cuatro pasos sugeridos por Polya (2002) (entendimiento, diseño, implantación y visión retrospectiva).

Por eso es que la resolución de problemas aparece de diversas maneras en el currículo matemático, puede aparecer como una unidad al final de determinado tema, como un enfoque a través del curso, o como una serie de actividades. La falta de información ha contribuido a la divergencia de significados.

Kilpatrick (1995) resume el uso de la resolución de problemas en tres direcciones:

a) Los problemas se analizan como un vehículo para lograr algunas metas curriculares (resolución de problemas como contexto).
b) La resolución de problemas se considera como una de tantas habilidades que se deben enseñar en los cursos.
c) La resolución de problemas se debe como un arte en el sentido de simular la actividad matemática dentro del salón de clase, lo que Schoenfeld identifica como el desarrollo de un "microcosmos matemático" en el salón de clases.[8]

[8] Santos Trigo, L, *Didáctica Lecturas,* 1997.

En el aprendizaje de las matemáticas el estudiante debe reconocer que de encontrar la solución al problema no es el final de la empresa matemática sino que es un punto inicial para buscar y encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema, además que el proceso de formular o rediseñar problemas es identificado como un componente esencial en el quehacer matemático, además el aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas, el alumno debe ser conducido al desarrollo de nuevas ideas, a la búsqueda de respuestas. Discutir con los alumnos los problemas en los que involucra el uso de varios métodos de solución o que incluyan varias soluciones es importante así como notar que muchas veces la calidad del método de resolución también es importante en las matemáticas. La resolución de problemas ofrece al estudiante la oportunidad de evaluar y contrastar las estrategias y contenidos con sus compañeros.

Schoenfeld (1992) afirma: “si uno desea que los estudiantes salgan del salón de clases con el sentido real de las matemáticas, entonces el medio ambiente del salón de clases tiene que reflejar actividades en las que los estudiantes tomen parte en el desarrollo de las matemáticas, de tal manera que le encuentren sentido al estudio de las matemáticas…es decir, que exista motivación para que los estudiantes continúen estudiando matemáticas fuera del salón de clases”.

Un objetivo esencial en la instrucción matemática es ayudar a que los estudiantes desarrollen habilidades y estrategias que usen en su estudio de las matemáticas independientemente de la presencia del maestro. El estudiante debe tener en cuenta que en la aceptación de algún argumento matemático debe inicialmente convencerse a sí mismo, debe convencer a un amigo y finalmente, debe convencer a un enemigo. En todo el proceso de resolución el estudiante debe reflexionar constantemente acerca de los aspectos vinculados con las distintas fases de resolución.

La implantación de la resolución de problemas en la instrucción matemática.

Al analizar el potencial de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, los maestros inmediatamente empiezan a cuestionar la viabilidad de llevar a la práctica ésta idea en el salón de clases. Los principales factores que identifican como incompatibles con ésta propuesta incluyen la extensión del programa y la cantidad de alumnos en el salón de clases.

Un aspecto crucial en la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos en su aprendizaje de las matemáticas, si él se desarrolla en un ambiente matemático donde se empleen estrategias para leer, conceptualizar y escribir argumentos, será más capaz de aprender en otros dominios y adquirir nuevas habilidades.

La discusión y presentación de las ideas son ingredientes fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Éstas dinámicas deben aparecer regularmente en el salón de clases. Sin embargo es importante que las tareas o problemas presenten un potencial que permita a los estudiantes proponer conjeturas y discutir las formas de solución. Cuando los estudiantes empiezan a valorar y a identificar la necesidad de trabajar en grupos, estas actividades pueden ser más frecuentes.

Debemos enfatizar que la resolución de problemas no es una tarea solitaria, ofrece a los estudiantes la oportunidad de trabajar en colaboración y desarrollar estrategias para defender sus ideas matemáticas.

Sin dejar del lado el papel del instructor el cual incluye ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas, debe construir una atmósfera de confianza y respeto para que el estudiante no se sienta mal al enfrentar alguna dificultad durante el proceso de solución, así como también permitir que los estudiantes implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando ésta sea necesaria.

Por medio de una serie de preguntas cuidadosamente escogidas y dirigidas se le debe permitir al alumno verbalizar sus procedimientos y resultados, por ejemplo: ¿Piensas qué el problema va a ser difícil para ti? Explica porqué, ¿tienes alguna dificultad para entender alguna parte del problema? Explica qué es lo que no entiendes, ¿Has resuelto algún problema similar a éste? Describe ese problema, etc. No es necesario realizar todas las preguntas siempre, pueden seleccionarse algunas dependiendo de lo que amerite el caso.

Estar convencido de que estas ideas ofrecen una perspectiva diferente sobre el aprendizaje de los estudiantes, puede ser el punto inicial para incorporar paulatinamente algunas actividades en la instrucción, junto con el desarrollo de materiales de apoyo que sirvan como medio para implantar la resolución de problemas dentro del salón de clases.

Existe evidencia según Santos (1992), que los estudiantes muestran claros avances cualitativos en algún momento de su aprendizaje.

3.7 Ideas matemáticas que se pueden discutir durante los procesos de resolución

Actualmente se le da gran énfasis a que el estudiante discuta el sentido y aplicación de las ideas matemáticas, en nuestro mundo cambiante el ser flexible y desarrollar habilidades que permitan entender y valorar los avances son aspectos fundamentales que el estudiante debe considerar, no sólo en su aprendizaje escolar, sino también para interactuar en el mundo donde vive.

Un elemento crucial asociado con la competencia matemática es que el estudiante desarrolle diversas estrategias mostrando cierto grado de independencia y creatividad. El estudiante es un sujeto activo que requiere de una comunidad para discutir sus ideas y comunicarlas de manera eficiente[9].

Comunidad matemática.

Una de las grandes implicaciones pedagógicas del trabajo cooperativo es que el salón de clases debe ser una comunidad donde el estudiante discuta y defienda sus ideas matemáticas, cuando los estudiantes encuentran éste ambiente en el

[9] Cantoral, R, *Desarrollo del pensamiento matemático, 2000*

salón de clases que les permite pensar y razonar acerca de las matemáticas y comunicar sus resultados a otros en base a argumentos, se enfrentan a la necesidad de organizar, presentar y validar sus ideas en forma convincente[10].

Los estudiantes aprenden matemáticas sólo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas, tales ideas se aprenden a través de un proceso de comunicación.

Problemas que promueven la discusión.

Los problemas que se pueden emplear para implementar esta actividad en el aula pueden ser los ejercicios típicos de los libros de texto en situaciones diferentes tratando de que el estudiante utilice diferentes métodos para resolver un problema. La idea es que el maestro reconozca, valore y motive la discusión en el salón de clase. El problema que se presente debe ser un ejemplo de cómo puede analizarse una situación o involucrar diversas ideas por parte de los estudiantes.

3.8 Estrategias didácticas en cuanto a la presentación de[11]

A. Las definiciones

Por medio de la resolución de problemas se intenta que el alumno desarrolle habilidades y estrategias que le ayuden no sólo a entender el contenido matemático, sino también a participar en el desarrollo de las ideas matemáticas, esto es lograr que el alumno mejore o complete la definición inicial dada.

B. Las heurísticas

Las estrategias heurísticas como ya se ha mencionado, juegan un papel importante en la resolución de problemas, se pretende que el alumno establezca “submetas”, estableciendo un resultado parcial que le ayude a avanzar en la resolución del problema. Por este camino puede llevar a cabo el análisis de los casos extremos, este lo llevará a considerar varios casos. Si el alumno considera

[10] Santos Trigo, L, *Didáctica Lecturas,* 1997.
[11] Santos Trigo, L, *Didáctica Lecturas,* 1997.

algo referente a dos posiciones trabajará utilizando otra heurística que es la simetría. Después de haber resuelto un problema si preguntamos ¿Hemos terminado?, esto nos llevará a trabajar el problema bajo otra heurística que será trabajando retrospectivamente, es decir, es importante analizar qué se puede obtener de los objetos que ya se tienen. Se puede realizar también una lista sistemática, que nos lleve a visualizar si están todas las soluciones posibles.

C. Las construcciones

En geometría es muy importante el tema de las construcciones. Schoenfeld (1992) recomienda que los alumnos deben participar en actividades en las que tenga que hacer construcciones y decidir cuando una construcción no es posible. Ésta actividad puede llevarse a cabo pidiéndoles la construcción de un triángulo y las rectas que forman parte o que se pueden obtener en él.

Es importante que los alumnos periódicamente reporten por escrito y verbalmente algunos avances o desarrollos que hayan encontrado en sus intentos de solución.

3.9 La tecnología y la resolución de problemas

Actualmente el desarrollo de la tecnología se ha potencializado en forma importante permitiéndonos el vislumbrar de manera eficiente y rápida un potencial en la educación. Muchos profesores no permiten a sus alumnos el uso de la calculadora en la resolución de problemas ya que creen que la calculadora les resta posibilidades de desarrollar habilidades básicas necesarias en matemáticas (cálculos aritméticos, manipulaciones algebraicas, análisis discreto del comportamiento de relaciones o funciones matemáticas, etc.).

La discusión de si deben o no usar instrumentos como la calculadora o la computadora se relaciona directamente con el sentido que le damos a la disciplina, lo que realmente importa que aprenda el estudiante. Al estudiar matemáticas el estudiante debe ser escéptico, proponer conjeturas, buscar evidencias, utilizar ejemplos y contraejemplos y apoyar sus ideas con argumentos.

De tal manera que el uso de la tecnología no debe interferir con el aprendizaje por el contrario se debe utilizar como herramienta y apoyo para anclar el conocimiento.

Los avances de la tecnología han sido tan rápidos en los últimos años que es imperativo que el estudiante adquiera habilidades y estrategias que le permitan ajustarse a estos avances y cambios e incorporarlos naturalmente a su práctica. En el aspecto de la resolución de problemas el uso de la computadora es un recurso necesario y pertinente ya que analizando diferentes problemas de geometría analítica diversos software como “The Geometer´s Sketchpad” podemos comprobar de manera gráfica las soluciones de los problemas.

Por este medio es posible contrastar las soluciones propuestas por los estudiantes con las de la computadora, esto ayuda a que los estudiantes constantemente evalúen sus resultados. Esto puede ser un punto crítico para desarrollar algunas estrategias cognitivas y la tecnología ofrece un potencial para ayudar al estudiante a profundizar en su aprendizaje. La computadora se presenta como un apoyo pero en ningún momento como sustituto del maestro.

En esta propuesta se puede implementar la utilización de prácticas con el software mencionado para que el alumno pueda visualizar alternativas de resolución de los problemas dados.

3.10 Evaluación en la resolución de problemas

En términos generales la resolución de problemas es una forma de pensar en la que el estudiante muestra una diversidad de estrategias en los diferentes momentos del proceso de resolver algún problema. El diseño de un plan y su implantación puede incluir el uso de métodos algebraicos, el descomponer el problema en otros más simples, o el transportar el problema a otro contexto (geométrico o numérico). En la fase de revisión es importante analizar el significado de la solución, verificar las operaciones y pensar en conexiones o extensiones del problema, se da la presencia de estrategias metacognitivas que ayudan a que el estudiante explore algunos caminos más eficientemente. Tomando en cuenta todas las diversas actividades que el estudiante realiza al resolver un problema es importante que la evaluación del proceso proporcione información relacionada con dichas actividades.

Podemos tomar en cuenta tres componentes de la evaluación:(Kilpatrick, 1995)

1. El estudiante debe mostrar que ha entendido el problema, se puede pedir que lo explique con sus propias palabras y si es posible estimar alguna solución.
2. El relacionado con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de resolución, así como el presentar un plan y llevarlo a cabo.
3. Es importante revisar los aspectos relacionados con lo razonable de la solución.

La evaluación de los aspectos mencionados no puede ser realizada usando solamente ejercicios para resolver con lápiz y papel. Es importante diseñar actividades adecuadas que capturen información de los momentos identificados en el modelo.

La evaluación también tiene que ver con el grado en que se les pide a los estudiantes describir sus ideas, el tiempo de verbalización y la profundidad de las ideas.

Para realizar una evaluación objetiva debemos considerar que los problemas deben cumplir con ciertas características, Perkins (1981) sugiere:

1. Que sean un reto, que sean difíciles pero accesibles.
2. Que demanden un plan y una reflexión, que no se puedan resolver instantáneamente.
3. Que permitan diferentes métodos de solución.
4. Que algunos incluyen varias soluciones.
5. Que incluya una variedad de procesos matemáticos y operaciones pero no en forma obvia o rutinaria.

6. Que cuando un estudiante los resuelva sea posible identificar los procesos y operaciones empleadas, así como el plan para resolverlos y las estrategias empleadas.

El reporte de las cualidades de los alumnos podrá discutirse alrededor de si el nivel de desarrollo de las fases de entendimiento, diseño de un plan y su implantación fueron adecuados, si las estrategias usadas en la resolución del problema son claras, si existe la presencia de conceptos y procedimientos matemáticos. Cuando un problema puede ser resuelto por medio de la aplicación de diferente contenido matemático, debe mencionarse qué contenido fue usado y que tipo de conexiones fueron explotadas.

Los aspectos antes mencionados nos dan una evaluación cualitativa, sin embargo también es posible utilizar un instrumento asociado a algún número determinado.

Para cuantificar el proceso de resolución se tomó como base el instrumento propuesto por Santos Trigo (1997) que incluye los siguientes componentes:

Puntos	Trabajo mostrado por los estudiantes
0-1	Nada de trabajo o ideas sin relación.
2-3	Identifica los datos pero sin procedimiento alguno.
4-5	Usa los datos pero la estrategia no es clara.
6-7	Introduce un plan apropiado pero éste es incompleto o es pobremente implementado.
8-9	Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta.
10	Solución completa y clara.

Además en el proceso de evaluación se pueden identificar algunos indicadores asociados con la solución del problema, el desarrollo de la solución y con respecto a las estrategias empleadas.

En este instrumento se mencionan componentes que pueden ayudar a tener una idea global del proceso de solución del problema, pero debe ajustarse dependiendo de los problemas que se consideren en la evaluación.

Solución	Desarrollo	Estrategias usadas
Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Incorrecta	Incompleto	Uso del álgebra
Indeterminada	No requerido	Lista sistemática, tabla o un diagrama
En blanco	Sin unidades	Ensayo y error
	Sin conteo	Búsqueda de patrones
	Sin desarrollo	Casos simples
		Indeterminada

CAPÍTULO 4

4. Propuesta Didáctica

4.1 Propuesta.

"Utilizar la resolución de problemas en el aula como método de enseñanza, mediante el uso de un problemario enfocado al tema de secciones cónicas que puede ser empleado como estrategia de aprendizaje por los y las alumnas".

4.2 Objetivo.

El principal objetivo de esta propuesta es que tanto el docente como los y las alumnas conozcan y utilicen las bondades que ofrece el método de resolución de problemas dentro del aula para lograr alcanzar un aprendizaje significativo en los estudiantes, desarrollando habilidades que les permitan continuar su vida escolar y cotidiana de mejor manera.

4.3 Método.

Ya se expuso en los capítulos anteriores con detalle, lo que es la resolución de problemas, como debe aplicarse, como trabaja el profesor y lo relativo al desempeño del estudiante, evaluación, creación de un ambiente matemático.[42]

En la presente propuesta utilizamos material impreso, problemas de los temas de las últimas unidades del programa de Matemáticas V, son ejercicios que incluyen gráficas que pueden ayudar a los y las alumnas a visualizar el problema y llegar a su solución, propician que recuerden y utilicen conceptos anteriores, surgiendo posibles deficiencias en el aprendizaje permitiendo corregirlos al verlos y revisarlos nuevamente.

Aplicamos el material propuesto a tres grupos de estudiantes con características similares, tal experiencia les permitió un acercamiento a la resolución de problemas.

[42] Le llamo "ambiente matemático" al entorno que se forma entre los alumnos en los diferentes grupos al utilizar la resolución de problemas y que logra que ellos se sientan inmersos en una clase de matemáticas diferente

Se realizó un cuestionario y una encuesta sobre aspectos de la matemática y la resolución de problemas.

Lugar.

Se aplicó a grupos del turno matutino, en el Plantel # 6 “Antonio Caso” de la Escuela Nacional Preparatoria, ubicada en la colonia del Carmen Coyoacán. Cuenta con 18 grupos por cada grado, con un promedio de 50 personas inscritas por grupo, lo que significa que su población es de 5000 estudiantes aproximadamente. Se aplicó a un grupo del Plantel # 5 “José Vasconcelos” ubicada en calzada del Hueso, en el turno vespertino.

Población.

Los alumnos y alumnas de estos grupos se encontraban inscritos en un curso curricular de Matemáticas V, que se imparte en quinto año de la enseñanza media superior, dentro del subsistema de la Escuela Nacional Preparatoria; la cuál forma parte de un conjunto de asignaturas obligatorias que persiguen una formación integral en el alumno que se encuentra cursando el 2° año de bachillerato. Se les cuestionó sobre su edad y se llevaban alguna actividad extra (trabajo, cuidado de hijos, familiares, etc.). En el siguiente cuadro se observa la muestra.

	Plantel	Alumnos	Alumnas	Edades	Actividades extras
Grupo 1	6	22	23	16-17	Ninguna
Grupo 2	6	17	20	16-17	Ninguna
Grupo 3	5	12	10	16-19	Ninguna
Total		51	53		

Procedimiento.

La aplicación de la propuesta a los grupos, duró 3 semanas, en cada una se les impartieron 5 horas, con sesiones de 2 horas y 1 hora, haciendo un total de 15 horas. En cada sesión se incluyó material impreso (se puede observar a partir del capítulo 4 del presente trabajo), se utilizó el pizarrón, gises de colores, material didáctico para mostrar algún elemento (imanes, listones, papeles de colores, etc.) y ocasionalmente se utilizó un proyector de acetatos, pantalla, cañon y laptop. Con el objeto de poder observar detenidamente el empleo del material, se contó con un equipo de video por medio del cual pudieron ser captadas características, aspectos y comportamientos de los alumnos al utilizar la resolución de un problema.

Se les llevó al laboratorio de cómputo del plantel para observar en la computadora algunas gráficas. El material fue elegido de esta manera ya que sabemos que es importante despertar en el alumno el interés, la confianza y crear un ambiente propicio en el aula, buscando una representación gráfica que le permita comenzar con la resolución de problemas.

Se iniciaba la sesión con una pequeña introducción del tema, se continuaba con el desarrollo de la clase dando paso a la lectura del problema elegido de acuerdo a la planeación por medio de una lluvia de ideas se daban ideas generales y se dejaba que lo discutieran en equipo de 2-3 personas por lo menos 15 minutos. Se proseguía con una discusión grupal en la que se estimulaban los contrastes de las diferentes ideas, soluciones y avances obtenidos. En busca de una forma de plantear el problema más compacta y cómoda que sea al mismo tiempo clara e ilustrativa que los lleve a un diseño de un plan de solución.

En cada grupo empleamos el mismo material y se pidió la participación de todos los asistentes.

Entre los lineamientos adoptados estuvieron, el que el profesor no interviniera en la solución del problema dirigiendo la clase, que fuera un facilitador del aprendizaje promoviendo que el mismo alumno encuentre las posibilidades de solución que el problema le ofrece, el trabajo en equipo debía ser llevado a cabo por todos los integrantes del equipo, a cada equipo les fue requerido un reporte por cada problema trabajado y la presentación oral de los resultados obtenidos por un integrante del equipo. Tiene conexión con lo que Polya (2002), denomina visión retrospectiva del proceso de solución.

4.3 Evaluación.

Cuestionario.

Con el propósito de conocer la opinión sobre lo acertado de la enseñanza empleando la solución de problemas, utilicé un cuestionario (anexo 1), el cual fue aplicado al encontrar la solución del problema presentado. El cuestionario es de preguntas abiertas que los alumnos debían responder, sobre las principales dificultades que encontraron al resolver el problema, del trabajo en equipo y de cómo se debe trabajar en la materia. Se eligió de preguntas abiertas porque se necesitaba que los alumnos expresaran con sus palabras lo que piensan sobre este tema y que sepan y sientan que se les toma en cuenta, al mismo tiempo que sirve de guía para conocer si el método funciona o no.

Se les pidió a los estudiantes de cada grupo que respondieran algunas preguntas sobre la experiencia vivida y su sentir. También que contesten preguntas de carácter general (nombre, grupo, edad, sexo) para ubicar su contexto social.

Los aspectos de la materia sobre los que fueron cuestionados con preguntas abiertas fueron:

1.- ¿Qué le pareció el empleo de resolución de problemas en la clase?

2.- ¿Cómo le gustaría que le dieran los cursos de Matemáticas?

3.- En términos comparativos podrías decirme ¿Qué manera de impartir la materia de Matemáticas le parece mejor, la tradicional o utilizando la resolución de problemas?

4.- ¿Qué opinas de los maestros de Matemáticas?

Es necesario mencionar que al utilizar esta forma de enseñanza se pretende que los alumnos y alumnas involucren la utilización y exploración de conjeturas, la reflexión, el uso de diversas representaciones y les permita expresar los resultados en forma oral y escrita. Es por esto que se le pidió de manera individual sus observaciones, dudas e ideas ya que es muy importante la retroalimentación en el aula.

Encuesta.

Se les dio una encuesta (anexo 2), en la que debieron contestar 10 reactivos de opción múltiple, en este instrumento se incluyen creencias sobre la materia de Matemáticas, se les pide su opinión acerca del desempeño del profesor, de cómo debe ser un problema en Matemáticas, qué es importante al resolverlo y sobre el trabajo en equipo, con el cual pretendo mostrar algunas tendencias relacionadas con aspectos que considero de vital importancia considerar en el desarrollo y planeación de las clases.

Registro de Aprendizaje.

Al mismo tiempo utilicé, en cada sesión el "registro de aprendizaje"[43] (anexo 3), el cual consta de 10 preguntas que los alumnos y alumnas deben contestar en 5 minutos al final de la clase, con la idea de detectar posibles dificultades durante el desarrollo de la misma, descubrimientos, actividades, recuerdos y si notaron para que les servía, si usan conocimientos previos, si entendieron algo mas de lo que ya sabían, sus sentimientos hacia dicha clase, recibimos una retroalimentación que nos permite hacer ajustes pertinentes en la planeación, con la clara intención de ir garantizando que el estudiante va con el profesor en el desarrollo del curso y no va tan sólo con una minoría de las personas inscritas en el curso, o bien provocando una marcada deserción del aula al creer que no ha entendido nada y ya no puede acreditar la materia (factor muchas veces muy importante para ellos).

Al pedirles que expresen lo que sienten o piensan se descontrolan un poco no dando crédito a que se les esta solicitando su opinión, y que además será considerada para lograr un mayor beneficio para él. Un aspecto que dentro del salón de clases, también logra la confianza y la tendencia hacia una comunidad matemática es el dominio sobre los temas impartidos, ya que es primordial para mejorar nuestra actividad docente una preparación efectiva y suficiente que nos permita motivar a los alumnos.

Aparece la confianza en el profesor lo que los convence e incentiva a continuar en la materia, comprometidos, tranquilos y convencidos que lo que están haciendo no es una perdida de tiempo, tiene sentido y eso para ellos es sumamente importante.

43 Profesora Dulce Peralta 2004 CCH Sur

La evaluación se hizo empleando también un examen escrito a petición de los supervisores. Se consideraron tareas, investigaciones, participaciones y construcciones de los alumnos durante el desarrollo de la clase. Lo que fueron un indicativo del aprendizaje matemático en los alumnos.

Se tomaron en cuenta también, el control y auto monitoreo mostrado por el estudiante al resolver el problema. Finalmente deberá tomarse en cuenta si el estudiante obtuvo la respuesta correcta y si lo hizo con o sin ayuda del facilitador. Se debe indicar el tiempo empleado en la resolución y los comentarios pertinentes.

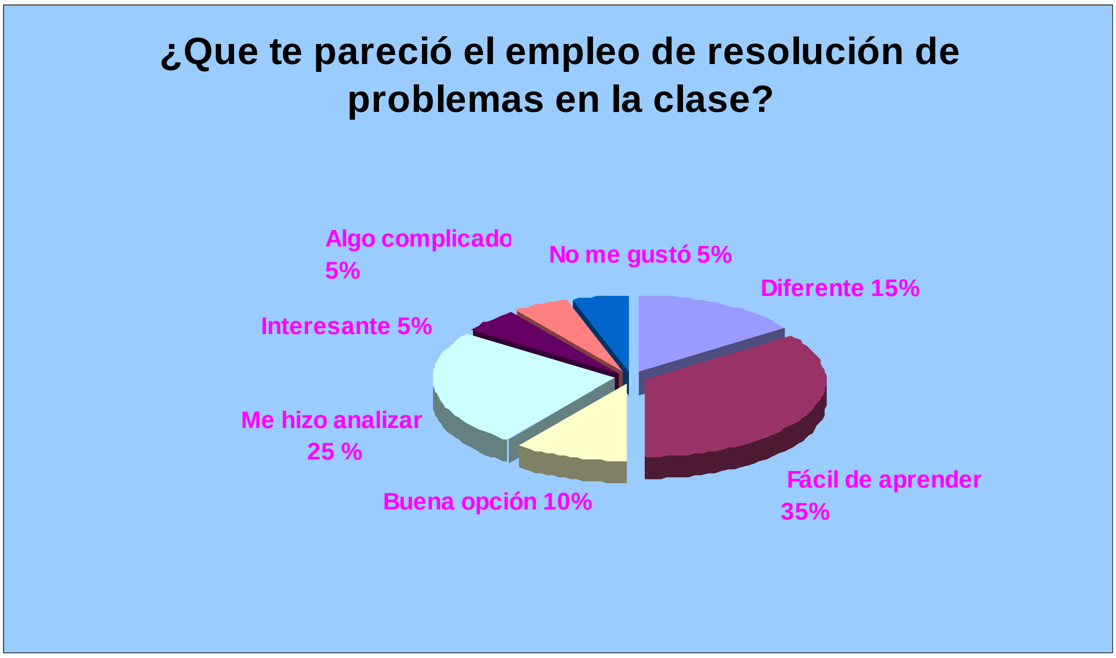
4.4 Análisis de resultados.

Se elaboraron gráficas para cada una de las preguntas que componen el cuestionario así como también para cada una de las que están en la encuesta, De esta manera se pueden observar los resultados más claramente.

Cuestionario.

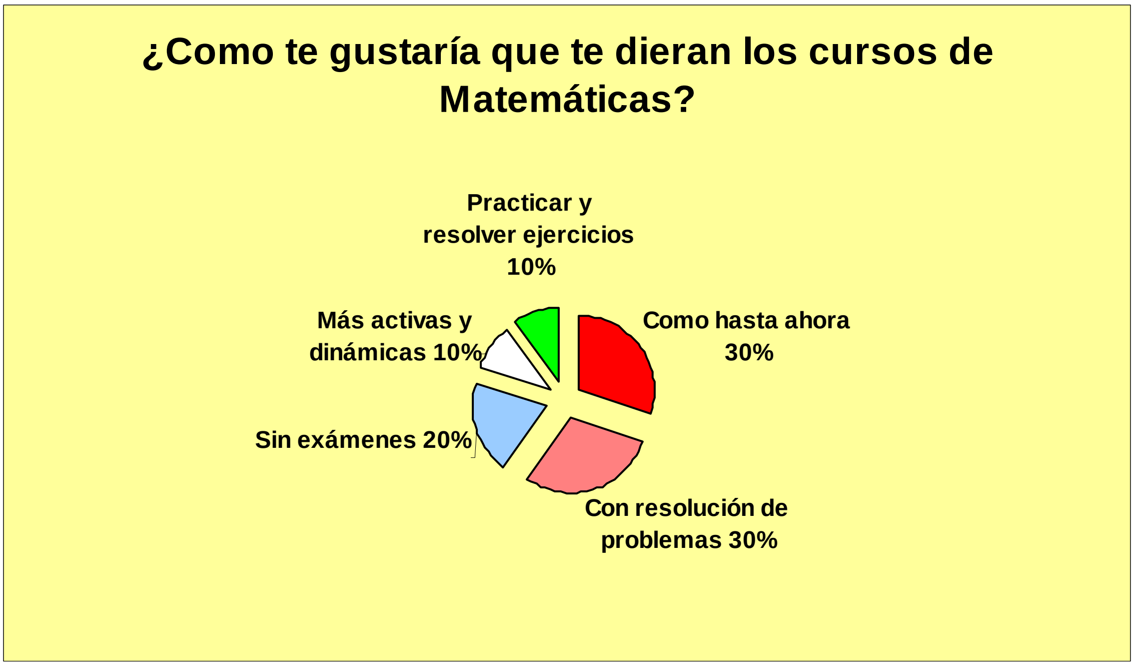
Se presentan a continuación los resultados de cada pregunta.

Pregunta 1



En esta gráfica podemos observar que a los alumnos y alumnas, la resolución de problemas les pareció fácil de aprender (35%) y que los hizo analizar (25%), lo que nos dice que se dieron cuenta que es una buena alternativa, contrastando con las opiniones en las que consideran que es algo complicado (5%) interesante (5%) y que no les gustó (5%), esto puede deberse a que ninguno de ellos había tenido ningún acercamiento con este tipo de clases, una opinión digna de considerarse es que el método es diferente (15%), lo que les despertó interés y curiosidad permitiéndonos la disposición por parte de ellos, opinando que también es una buena opción (10%). Algunos mencionaron: “una forma en la que nunca se me olvidan las cosas”, “me di cuenta de mis propios errores”, “aplicas conocimiento que aún no comprendiste ó que estaban volando”. En general se observa que la mayoría de los comentarios escritos por los alumnos son positivos, mostrando aceptación a la clase alternativa.

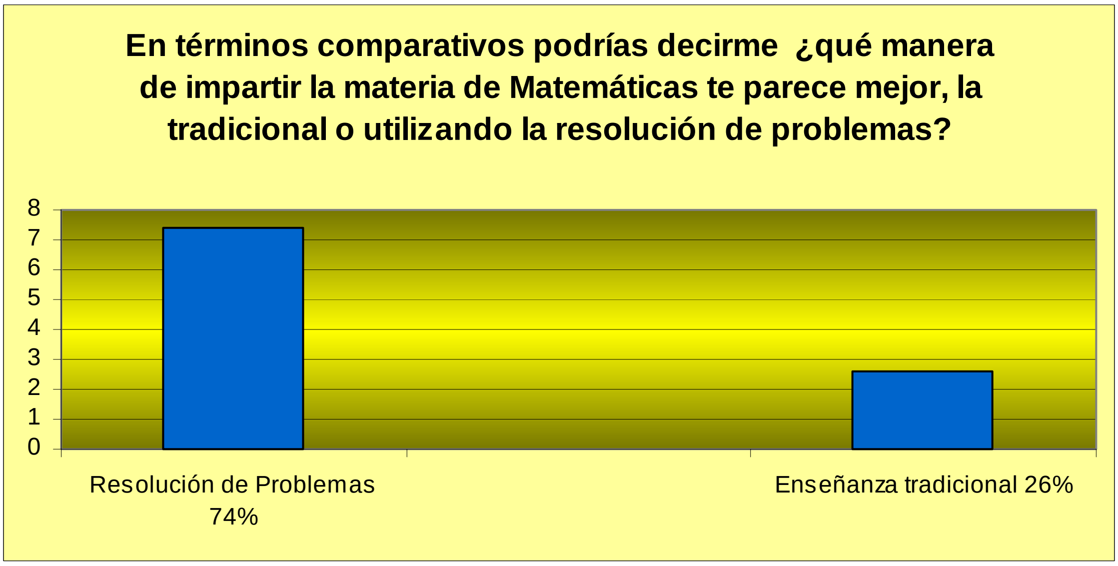
Pregunta 2



Al cuestionarlos sobre como quisieran su curso de Matemáticas, la respuesta “resolución de problemas” (30%) junto con “como hasta ahora” (30%) fueron las dos opiniones mas comentadas, notando que falta mayor implementación de formas alternativas de enseñanza, sin embargo los resultados obtenidos con “sin exámenes” (20%), nos conducen hacia la forma de evaluar en el aula, lo que provoca gran preocupación para ellos. Las respuestas “practicar y resolver ejercicios” (10%) con “más activas y dinámicas” (10%), estos comentarios podemos utilizarlos para enriquecer las clases.

Con las respuestas es perceptible la necesidad de un cambio en la forma de impartir las clases, ellos también necesitan alternativas en la enseñanza, para poder utilizar y/o desarrollar estrategias de aprendizaje.

Pregunta 3



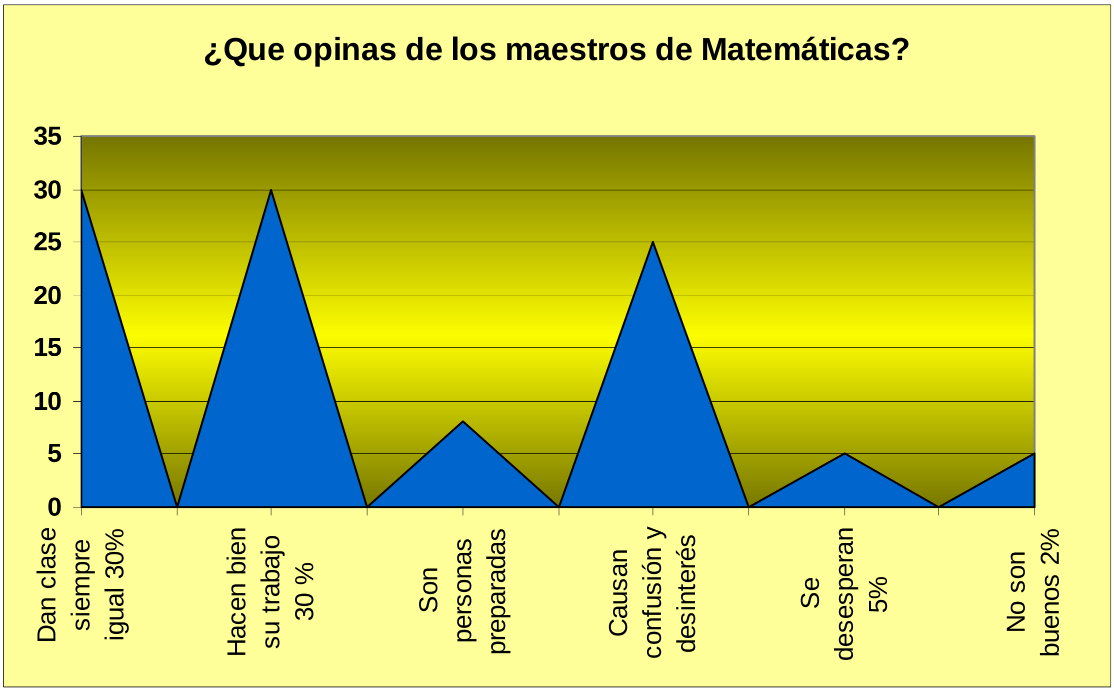
Respondieron a la utilización de resolución de problemas el 74% de los que contestaron el cuestionario, y el 26% estuvieron a favor de la enseñanza tradicional.

Dentro de los comentarios a favor de la resolución de problemas están que ellos pueden practicar los conocimientos adquiridos de mejor manera, que pueden encontrar sus dudas y aclararlas, sin embargo hay personas que les agrada la enseñanza tradicional.

Con este resultado se muestra la disposición al cambio en la forma de impartir la materia.

La última pregunta puede dirigirnos hacia una toma de conciencia de muchos profesores, que al no escuchar a nuestros alumnos, no percibimos su sentir acerca de esto que considero muy importante, sus creencias acerca de los profesores de matemáticas.

Pregunta 4



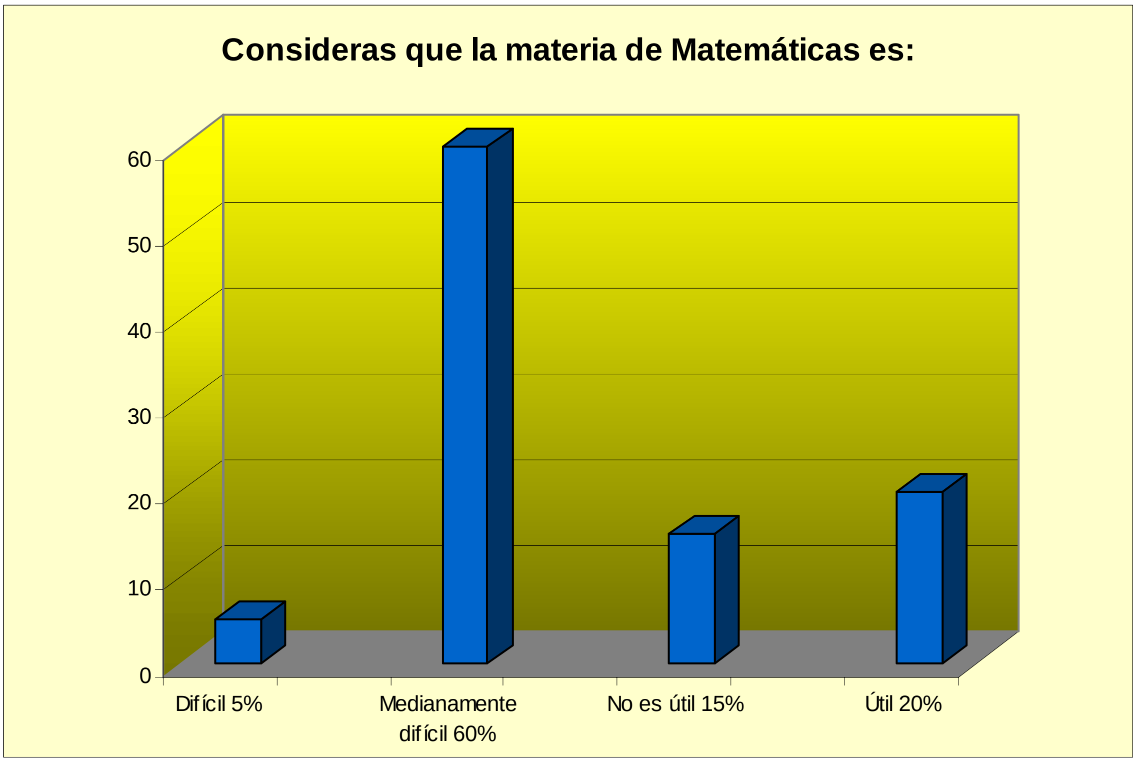
En esta gráfica notamos que los profesores de Matemáticas, según los alumnos, dan clase siempre igual (30%) y que hacen bien su trabajo (30%), con esto nos damos cuenta que los alumnos confían en sus profesores aunque no varían la forma de dar la clase. Y les causan confusión y desinterés (25%) este es un aspecto sumamente importante. Entre sus respuestas está el hecho de que se desesperan (5%) al darles clase.

Comentan que hay algunos que son buenos pero no saben enseñar. “Si son buenos nos ayudan a pensar pero si no, no sirve de nada y es una pérdida de tiempo”.

Este último comentario encierra diferentes aspectos a considerar en la enseñanza, debemos ayudar a pensar, utilizando diferentes estrategias, es muy importante que no crean que durante todo un año escolar sólo perdieron el tiempo. Debemos despertar y mantener su interés en todo el curso.

Encuesta.

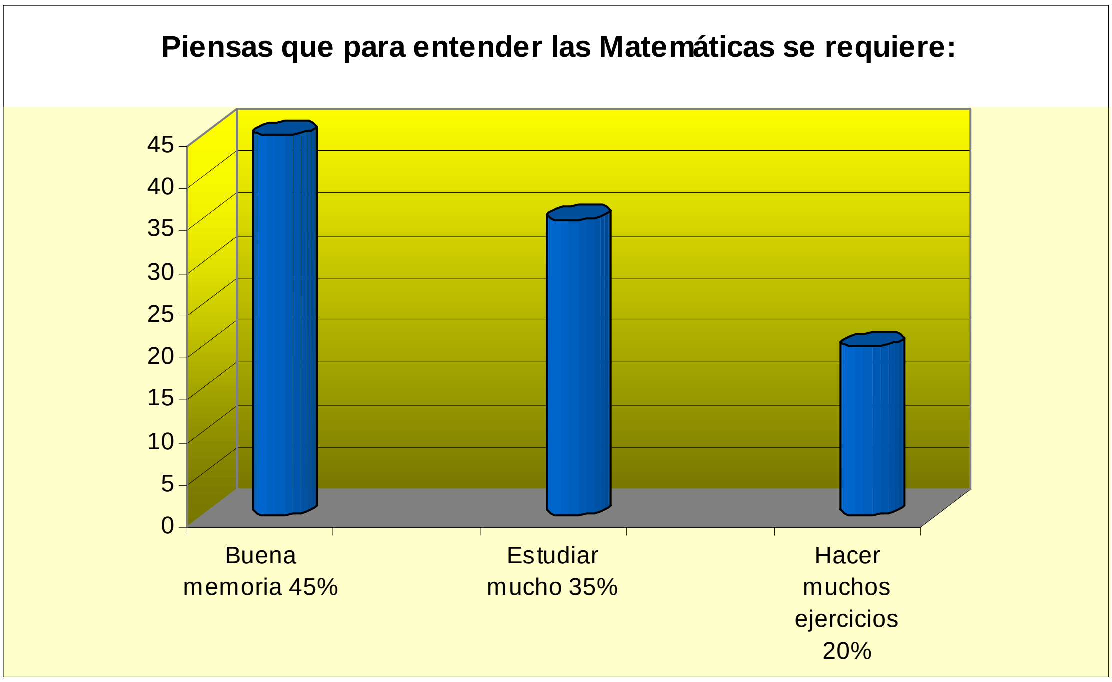
Pregunta 1



Contrario a lo que podríamos suponer, en esta pregunta la mayoría, manifestó que consideran a las Matemáticas “medianamente difíciles” (60%) y útiles (20%), lo que nos indica que les falta información, que no recuerdan o no saben que las Matemáticas no sólo les han sido útiles sino que les seguirán siendo útiles en su vida futura.

Comparamos “difícil” y “útil” debido a que cuando se les cuestiona sobre las Matemáticas, normalmente contestan que son difíciles e ignoran si son o no útiles.

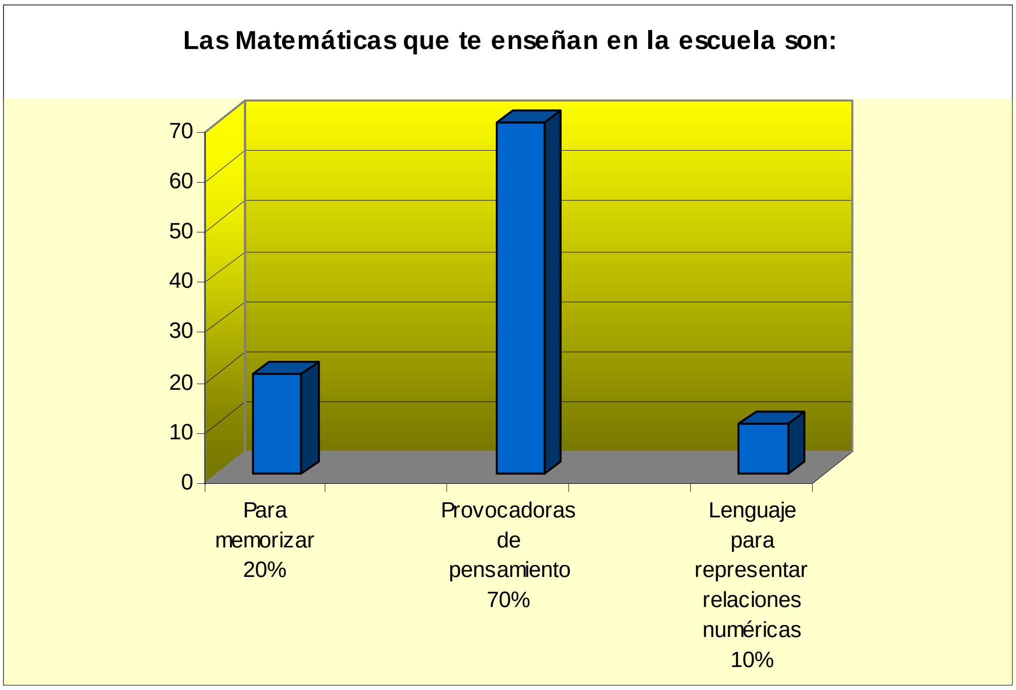
Pregunta 2



Al preguntarles acerca de qué se necesita para entender Matemáticas, un 45% respondió que "buena memoria" esto quiere decir que siguen con la tendencia arcaica que este aspecto les llevará al éxito, ellos buscan acreditar la materia no necesariamente aprender. Es bien sabido que el estudiar (35%) y hacer ejercicios (20%), es un camino que los puede llevar a alcanzar sus objetivos.

Sin embargo podemos considerar que el uso de la resolución de problemas los ayudará a desarrollar habilidades de pensamiento, mediante las cuales podrán llegar a las soluciones pedidas, y una buena memoria no será el factor determinante.

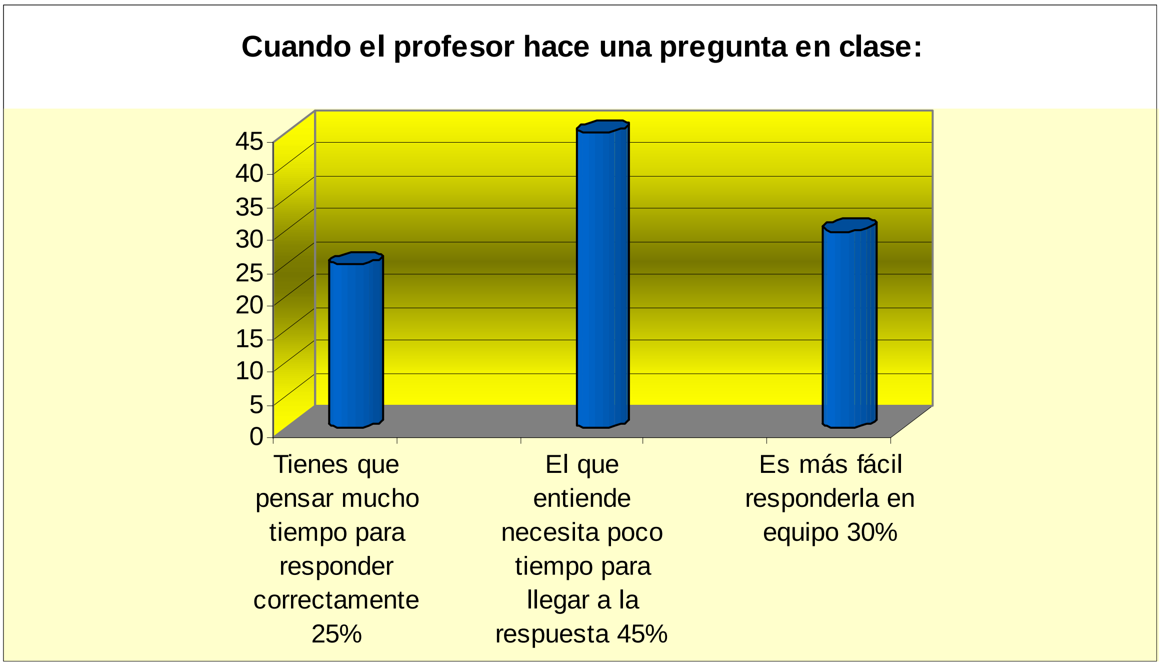
Pregunta 3



En esta gráfica la opción “provocadoras de pensamiento” obtuvo la mayoría de coincidencias con 70%, este aspecto es muy bueno ya que ellos reconocen que las Matemáticas los pueden hacer pensar. El 20% nos menciona que son para memorizar y el 10% que son un lenguaje para representar relaciones numéricas, es evidente la inclinación hacia el concepto que las Matemáticas son promotoras de pensamiento.

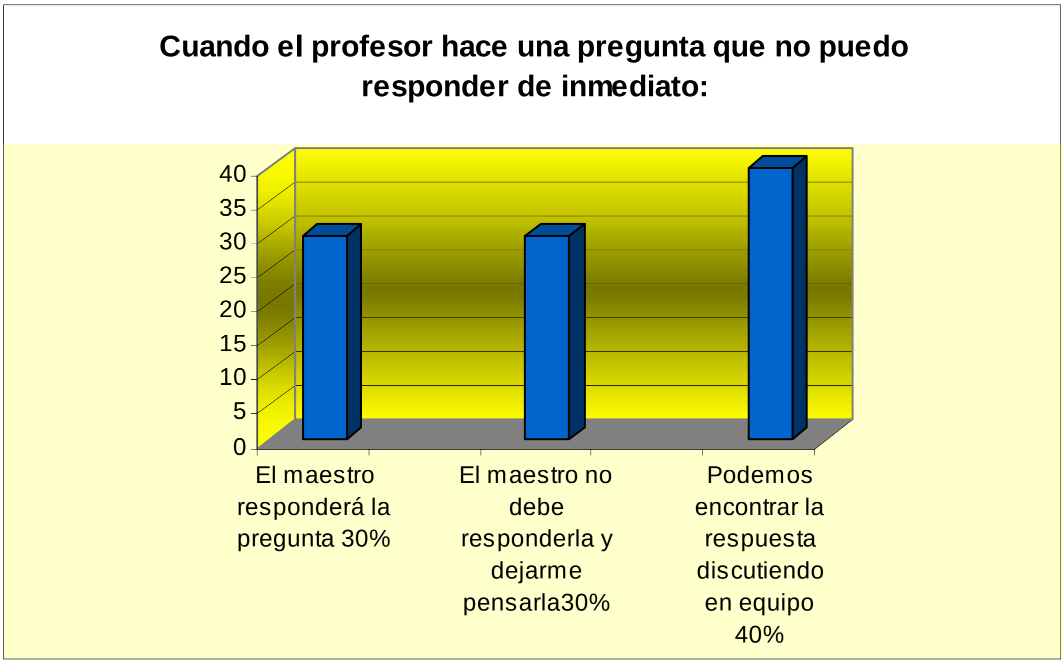
Piensan que para entender las matemáticas se necesita buena memoria, estudiar mucho y hacer muchos ejercicios, pero son provocadoras de pensamiento.

Pregunta 4



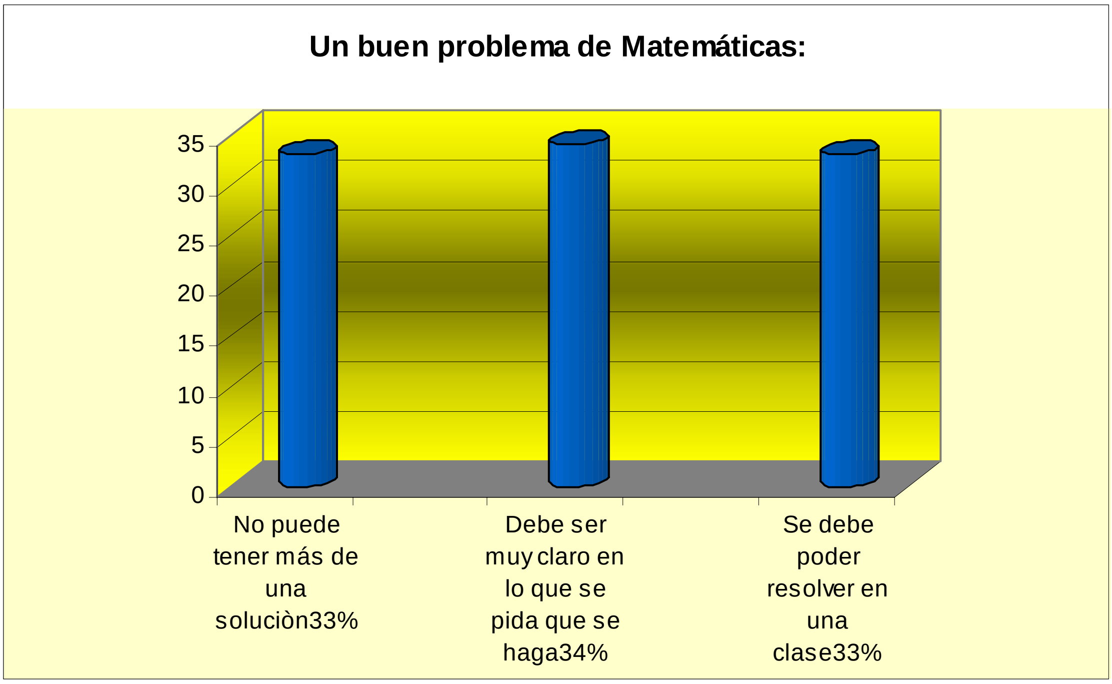
Al analizar esta gráfica se pone de manifiesto que cuando el profesor hace una pregunta durante la clase, sólo puede responder rápidamente el que ya entendió (45%), y es más fácil responderla en equipo (30 %), el resto piensa que necesita mucho tiempo para responder (25%). Estos valores son indicativos que los alumnos y alumnas suponen, que si lo hacen rápido, lo hacen mejor. El profesor debe poner atención en este tipo de comentarios, ya que el interés del estudiante por la materia podría verse afectado por este tipo de factores.

Pregunta 5



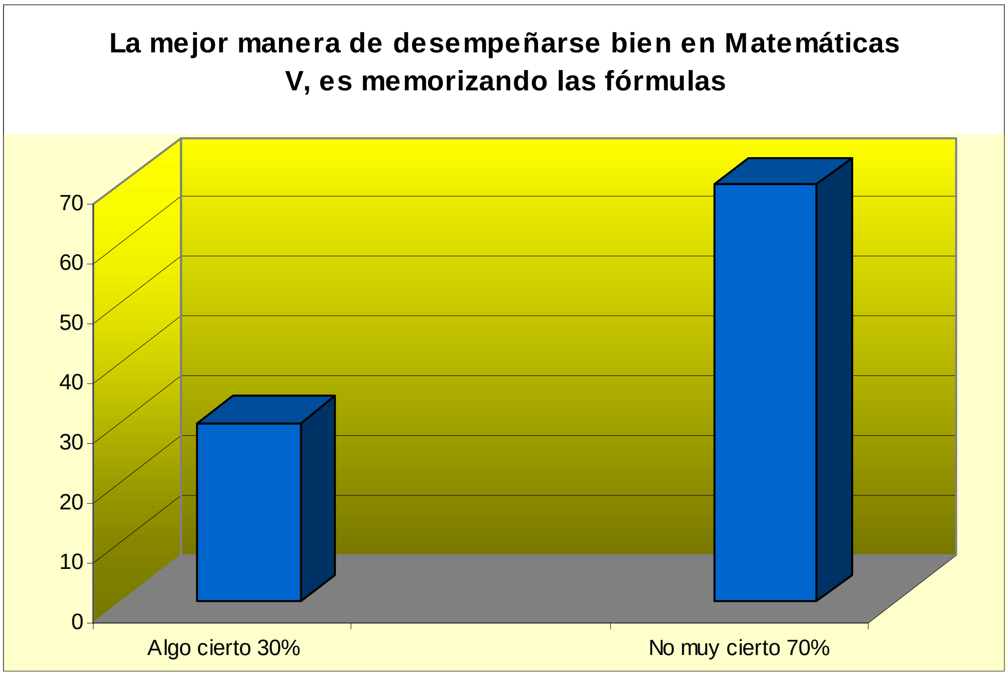
Aquí se manifiesta la preferencia por el trabajo en equipo (40%), muchas veces es mejor hacer trabajar al alumno con sus pares, sintiéndose apoyado y seguro, características que le pueden ayudar a enfrentar un problema adecuadamente cuando cree no tener las bases suficientes para resolverlo por sí mismo. No muy lejos de esta opinión, se encuentra que hay alumnos y alumnas que esperan que el profesor responda la pregunta (30%), llevándolos a no hacer esfuerzo alguno. Y También los que piensan que el profesor no debe responderla y dejarlos pensar (30%), esto muestra disposición a intentar participar.

Pregunta 6



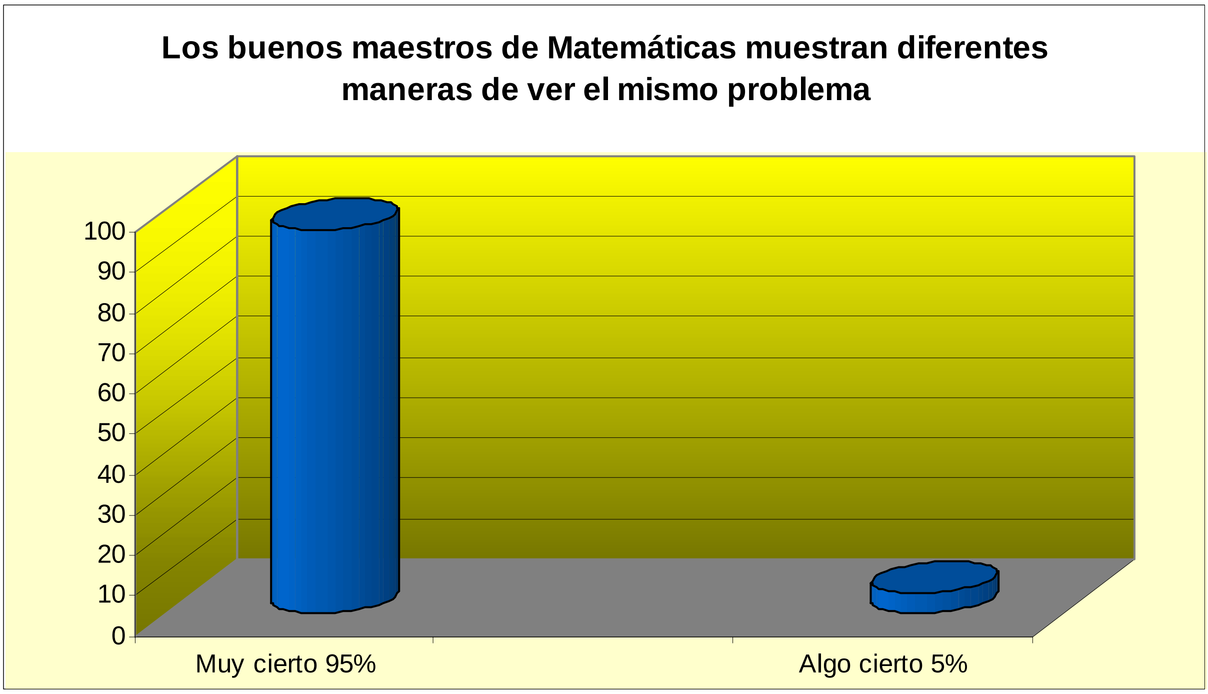
Las respuestas en esta cuestión estuvieron equitativamente distribuidas, notamos que un problema expuesto en clase, debe tener siempre claridad (34%), no debe tener más de una solución (33%) y debe poderse resolver en una clase (33%). Aspectos que si se cumplen los alumnos y las alumnas podrán enfrentar el problema con menos dificultades.

Pregunta 7



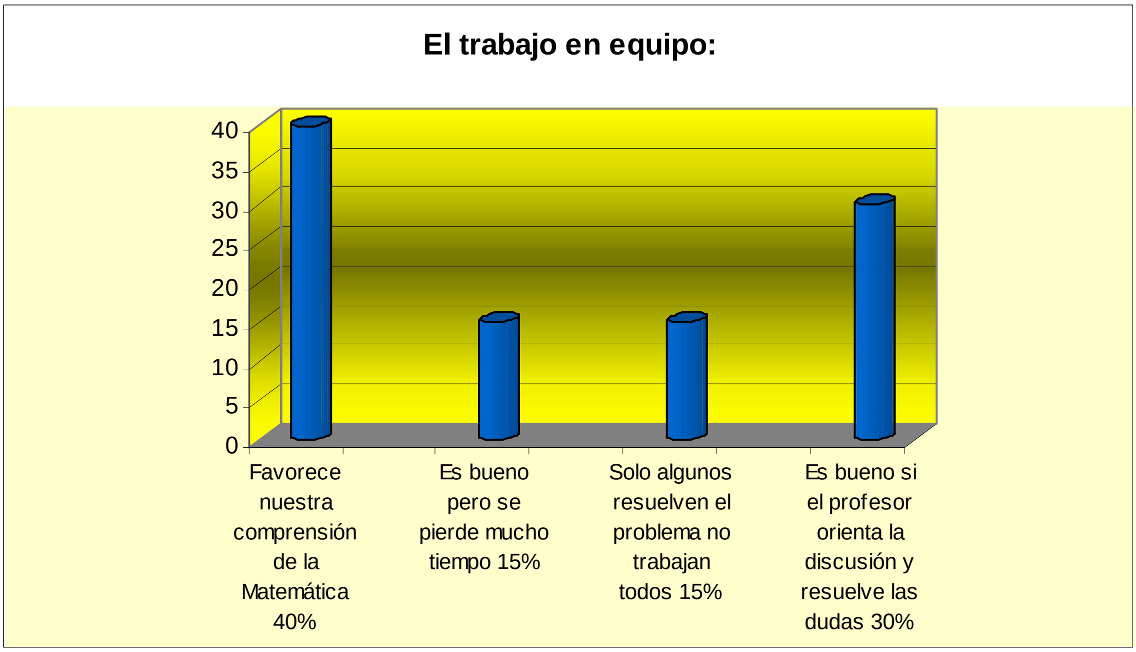
Se refirió la pregunta a la materia de Matemáticas V, ya que el material propuesto es de temas de dicha asignatura, vemos que están convencidos que su desempeño no depende de la memorización ya que un 70 % dio esta respuesta, sin embargo 30 % dijo que es algo cierto, lo que nos da entender que la memorización es tomada en cuenta de manera importante.

Pregunta 8



Considerar a un maestro bueno, depende de muchos factores, le llamaron bueno al que explica y trata de hacerse entender, buscando la manera de que la mayoría comprenda el tema. Los alumnos y alumnas piensan que es muy cierto (95%) que los buenos maestros muestran diferentes maneras de ver el mismo problema, esto es que no llegan a resolverlo, solamente debe enseñarles lo necesario para que ellos empiecen a analizar, reflexionar y decidir por donde empezar la obtención de la solución, opinión sumamente interesante y digna de ser tomada en cuenta por la planta docente del área de nuestra materia en cuestión.

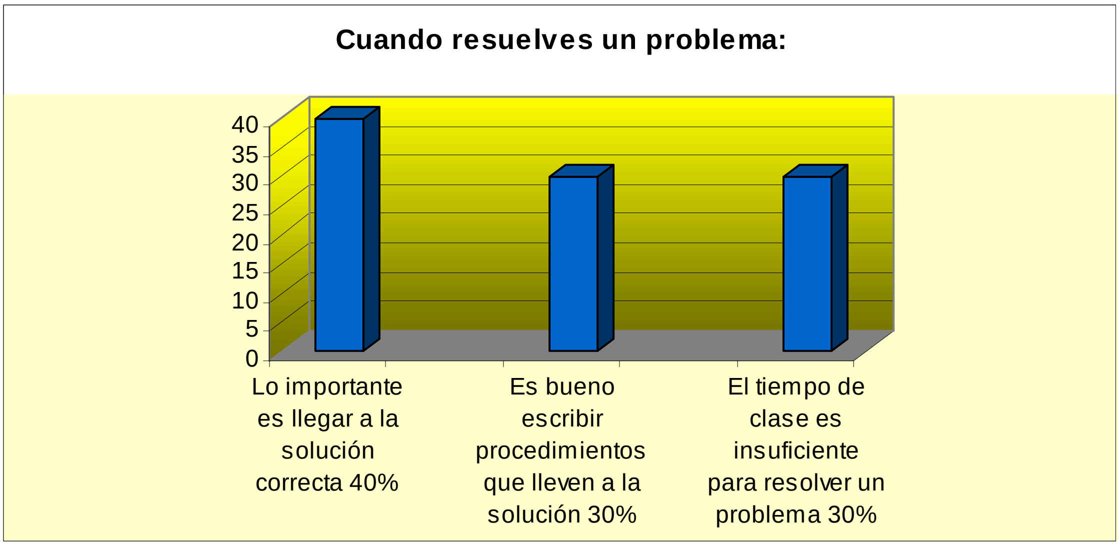
Pregunta 9



Parte de este material se probó trabajando en equipo, al respecto coinciden que el trabajo en equipo favorece nuestra comprensión de la matemática (40%), que es bueno si el profesor orienta la discusión y ayuda a resolver los problemas cuando el equipo tiene dudas (30%). Si utilizamos el trabajo en equipo en el aula debe estar guiado y monitoreado constantemente el no hacerlo adecuadamente puede resultar contraproducente a nuestros objetivos.

El 15% opina que es bueno pero se pierde mucho tiempo y que sólo algunos resuelven el problema, no trabajan todos los integrantes (15%).

Pregunta 10



Piensan que al resolver un problema, es más importante llegar a la solución (40%), que lograr procedimientos (30%) y que el tiempo de clase es insuficiente para resolverlo (30%), todavía les falta analizar a profundidad el sentido y propósito de trabajar de esta manera en la que se pretende lograr aprendizajes significativos y no tan solo encontrar una respuesta, esto no implica dejar de resolverlo en su totalidad, pero cada parte es importante.

Con los resultados analizados en esta encuesta se puede observar que los alumnos, consideran a las Matemáticas importantes e interesantes sin embargo no siempre sienten el apoyo suficiente por parte del docente ya que pareciera que no se encuentra decidido a lograr desarrollo de habilidades, sino una memorización o mecanización sin sentido, que no le deja nada positivo al estudiante, el trabajo en equipo lo consideran bueno pero debe ser guiado y supervisado por el profesor, manifiestan que es bueno trabajar así, es útil y se puede aprender resolviendo algunas dudas con los pares.

Mencionan también lo importante que es llegar al resultado del problema sin considerar el procedimiento, muchas veces aprenden mas durante el proceso, que al obtener un resultado que no les significa nada. En los siguientes capítulos se muestra el material utilizado.

CAPÍTULO 5

5. Secciones Cónicas

5.1 Introducción al estudio de las cónicas

Una vez que ya se han estudiado los sistemas de coordenadas y las ecuaciones de las figuras geométricas más elementales, las rectas, pasaremos al estudio de algunas líneas curvas que pueden ser definidas, como lugares geométricos.

El estudio de las cónicas tiene su origen en el libro de Apolonio de Perga, "*Cónicas*", en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar un cono cualquiera por diversos planos.
Previamente a este trabajo existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose elipses, parábolas o hipérbolas según que el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso, respectivamente.

Si bien no se disponía de la geometría analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las mismas que se aproxima mucho a aquélla. Los resultados obtenidos por Apolonio fueron los únicos que existieron hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone.

La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:

- La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

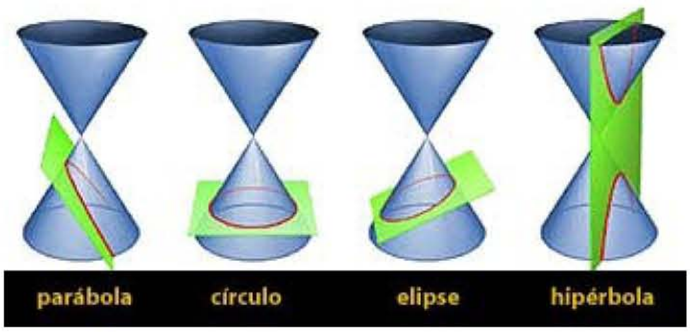
- Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.

- La órbita que sigue un objeto dentro de un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, es una parábola.

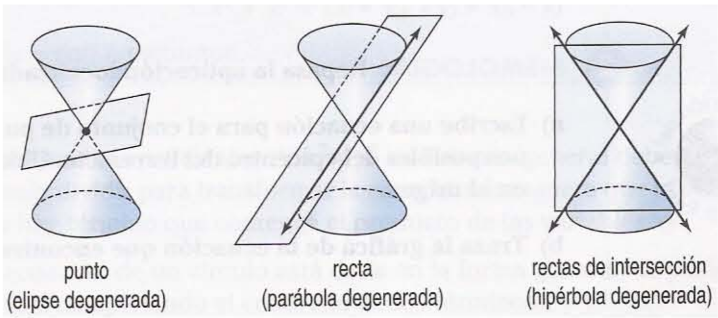
Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad la curva que describe el móvil (si se ignora el rozamiento del aire) es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.

Una cónica puede considerarse como el resultado de cortar una superficie cónica con un plano; o como el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la razón de sus distancias a un punto y a una recta es constante; o bien puede darse de ella una definición específica, que es lo que se va a desarrollar en este tema.

Estudiaremos cuatro curvas llamadas cónicas, por resultar de la intersección de un cono circular recto con un plano.
Las figuras que se van a estudiar son la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.



Si el plano secante es perpendicular al eje del cono, la curva resultante es una *circunferencia*. Si el plano es oblicuo respecto al eje del cono, pero corta a todas las generatrices, la curva es una *elipse*. Si el plano secante es paralelo a una de estas generatrices del cono, resulta una curva abierta llamada *parábola*, suponiendo el cono ilimitado. Por último si el plano secante corta a los dos mantos del cono, se obtiene la *hipérbola*, curva abierta que consta de dos ramas.



Si el plano pasa exactamente por el vértice del cono entonces tenemos un punto (elipse degenerada), si pasa por el mismo punto y además es paralela a la generatriz del cono entonces tenemos una recta (parábola degenerada), si dicho plano pasa por el vértice del cono y es perpendicular a lo que podríamos llamar base entonces tenemos dos rectas cruzadas ó rectas de intersección (hipérbola degenerada). Los casos anteriores dan origen a los casos de cónicas degeneradas.

5.2 Definición general de cónicas

Dada una recta l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva.
La recta fija l se llama directriz, el punto fijo F foco y la constante positiva, a la que designaremos por e *excentricidad de la cónica* cuyo valor determina el género de ésta e influye en la forma de la misma.

Con estos datos podemos analizar todas las cónicas, el problema I nos muestra la obtención de las ecuaciones que las definen utilizando la definición anterior.

5.3 Problemas

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

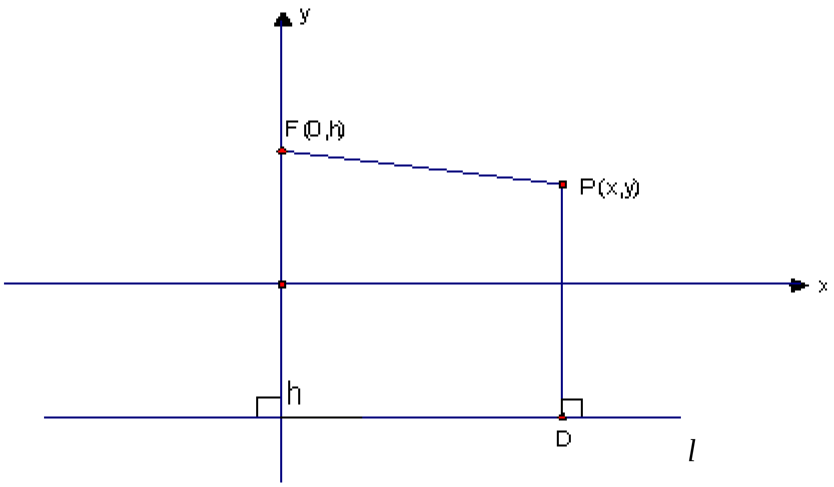
EXCENTRICIDAD

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema I

Encontrar la ecuación general de segundo grado para cada una de las cónicas, a partir de un punto llamado foco F y una recta l llamada directriz.



F fijo, l fija

Definiremos la excentricidad como la razón entre las distancias $\overline{FP}$ y $\overline{PD}$

$$e = \frac{\overline{FP}}{\overline{PD}}$$

Podemos encontrar la distancia entre dos puntos,

$$e = \frac{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}}{|y+h|}$$

Acomodando términos, elevando al cuadrado y efectuando operaciones:

$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 = e^2\left(y^2 + 2hy + h^2\right)$$

$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 = e^2y^2 + 2e^2hy + e^2h^2$$

Igualando a cero

$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 - e^2y^2 - 2e^2hy - e^2h^2 = 0$$

Ecuación general de las cónicas en función de la excentricidad

$$\boxed{x^2 + \left(1-e^2\right)y^2 - 2h\left(1+e^2\right)y - h^2\left(e^2-1\right) = 0}$$

Analicemos ahora la ecuación anterior para diferentes valores de e:

A) Para $e=1$

$$x^2 + \left(1-e^2\right)y^2 - 2h\left(1+e^2\right)y - h^2\left(e^2-1\right) = 0$$

$$x^2 + \left(1-(1)^2\right)y^2 - 2h\left(1+(1)^2\right)y - h^2\left((1)^2-1\right) = 0$$

$$x^2 + (0)\,y^2 - 2h(2)\,y - h^2(0) = 0$$

$$x^2 - 4hy = 0$$

$$x^2 - 4hy = 0$$

$$x^2 = 4hy$$

Despejando a y, obtenemos

$$la\ \ parábola \qquad \boxed{y = ax^2} \qquad donde \quad a = \frac{1}{4h}$$

B) Para $e<1$

Partiendo de la ecuación general

$$x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2h\left(1+e^2\right)y-h^2\left(e^2-1\right)=0$$

Completando trinomio cuadrado perfecto

$$x^2+\left(1-e^2\right)\ \ y^2-\frac{2h\left(1+e^2\right)y}{1-e^2}\ \ =h^2\left(e^2-1\right)$$

$$x^2+\left(1-e^2\right)\ \ y^2-\frac{2h\left(1+e^2\right)y}{1-e^2}+\frac{h^2\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}\ \ =h^2\left(e^2-1\right)+\frac{h^2\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)}$$

Llamaremos al término de la derecha de la igualdad anterior a^2, para esto hay que garantizar que sea positivo, no emplearemos h^2, bastará con utilizar el término

$$\left(e^2-1\right)+\frac{\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)}$$

Para $\quad e<1$,

$$\left(e^2-1\right)^2<\left(e^2+1\right)^2$$

$$e^4-2e^2+1<e^4+2e^2+1$$

$$-2e^2<2e^2$$

Como $\quad -2e^2<2e^2$

$$1-2e^2+e^4<1+2e^2+e^4$$

$$\left(1-e^2\right)^2<\left(1+e^2\right)^2$$

$$e<1,\qquad e^2<1$$

$$1-e^2>0$$

$$1-e^2<\frac{\left(1+e^2\right)}{1-e^2}$$

$$\frac{\left(1+e^2\right)}{1-e^2}+e^2-1>0$$

El término de la derecha de la igualdad es positivo, al multiplicarlo por h^2, es mayor que cero, quedándonos:

$$a^2=h^2\left(e^2-1\right)+\frac{h^2\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)}$$

Al sustituir en la ecuación obtenemos:

$$x^2+\left(1-e^2\right)\left(y-\frac{h\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)}\right)^2=a^2$$

Dividiendo entre a^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{h\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)}\right)^2}{\frac{a^2}{\left(1-e^2\right)}}=1$$

Ahora ponemos

$$b^2=\frac{a^2}{1-e^2}$$

Para decir que la expresión anterior es cierta hay que garantizar que $1-e^2>0$.
La ecuación nos queda:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{h\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)}\right)^2}{b^2}=1$$

La expresión anterior se conoce como la ecuación de una ***elipse***, la cual depende de la coordenada h y de la excentricidad, ya que viendo el desarrollo sabemos que a y b dependen de h y de e.

C) Para $e>1$
Utilizando la ecuación general

$$x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2h\left(1+e^2\right)y-h^2\left(e^2-1\right)=0$$

Completando trinomio cuadrado perfecto

$$x^2+\left(1-e^2\right)\left(y^2-\frac{2h\left(1+e^2\right)y}{1-e^2}\right)=h^2\left(e^2-1\right)$$

$$x^2+\left(1-e^2\right)\left(y^2-\frac{2h\left(1+e^2\right)y}{1-e^2}+\frac{h^2\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}\right)=h^2\left(e^2-1\right)+\frac{h^2\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)}\ldots(1)$$

Como $e>1$, $e^2>1$

$$1-e^2<0$$

$$1-e^2>\frac{\left(1+e^2\right)}{1-e^2}$$

$$\frac{\left(1+e^2\right)}{1-e^2}+e^2-1<0$$

Al multiplicar por h^2, no se altera el signo, por lo tanto llamaremos al término de la derecha $-a^2$ quedándonos:

$$-a^2=h^2\left(e^2-1\right)+\frac{h^2\left(1+e^2\right)^2}{\left(1-e^2\right)}$$

Al sustituir en la ecuación obtenemos:

$$x^2+\left(1-e^2\right)\left(y-\frac{h\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)}\right)^2=-a^2$$

Dividiendo entre $-a^2$

$$\frac{x^2}{-a^2}+\frac{\left(y-\frac{h\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)}\right)^2}{\frac{-a^2}{\left(1-e^2\right)}}=1$$

Ahora ponemos

$$b^2=\frac{-a^2}{1-e^2}\qquad 1-e^2<0,\qquad b^2>0$$

La ecuación nos queda:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{h\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)}\right)^2}{b^2}=1$$

La expresión anterior representa una ***hipérbola***, observemos que la única diferencia con la elipse es el signo. ¿A que se deberá esto?

D) Para $e=0$, sustituyendo en la ecuación de las cónicas:

$$x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2h\left(1+e^2\right)y-h^2\left(e^2-1\right)=0$$

Nos queda: $x^2+y^2-2hy+h^2=0$

La cual es la ecuación de una ***circunferencia.***

Por lo tanto y después del análisis anterior podemos concluir que las cónicas se encuentran relacionadas entre sí en una sola expresión por medio de la excentricidad.

Caso particular

I) Ahora colocaremos la directriz sobre el eje de las ordenadas $"y"$ $(x=0)$,el foco sobre el eje $"x"$ con coordenadas $(h,0)$ y el punto $M(x,y)$.

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MD}}=e$$
$$\overline{MF}=\sqrt{(x-h)^2+(y-0)^2}$$
$$\overline{MD}=\sqrt{x^2}=x$$

$$\frac{\sqrt{(x-h)^2+y^2}}{x}=e$$
$$(x-h)^2+y^2=e^2x^2$$
$$x^2-2xh+h^2+y^2-e^2x^2=0$$

Factorizando encontramos:

$$\boxed{\left(1-e^2\right)x^2+y^2-2xh+h^2=0}$$

Ecuación general de las cónicas con directriz vertical

Si $e=0$

$$\left(1-(0)^2\right)x^2+y^2-2xh+h^2=0$$
$$x^2+y^2-2xh+h^2=0$$

…Ecuación de la circunferencia

Si $e=1$

$$\left(1-(1)^2\right)x^2+y^2-2xh+h^2=0$$
$$y^2-2xh+h^2=0$$
$$y^2=2xh-h^2$$

…Ecuación de la parábola

Si $0<e<1$

$$e<1 \qquad e^2<1 \qquad 0<1-e^2 \qquad q=1-e^2$$
$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2-2xh+h^2=0$$
$$qx^2+y^2-2xh+h^2=0 \quad , \quad e>0, \quad e^2>0, \ q>0$$

…Ecuación de la elipse

Si $e>1$

$$e>1 \qquad e^2>1 \qquad 1-e^2<0 \qquad -q=1-e^2$$
$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2-2xh+h^2=0$$
$$-qx^2+y^2-2xh+h^2=0 \quad , \quad e>0, \quad e^2>0$$

…Ecuación de la hipérbola

II) Ahora colocaremos la directriz sobre el eje de las abscisas $"x"\ (y=0)$, el foco sobre el eje $"y"$ con coordenadas $(0,h)$ y un punto $M(x,y)$

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MD}}=e$$
$$\overline{MF}=\sqrt{(x-0)^2+(y-h)^2}$$
$$\overline{MD}=\sqrt{y^2}=|y|$$

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-h)^2}}{|y|}=e$$

$$x^2+(y-h)^2=e^2y^2$$

$$x^2+y^2-2hy+h^2-e^2y^2=0$$

Factorizando encontramos:

$$\boxed{x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2hy+h^2=0}$$

Ecuación general de las cónicas con directriz horizontal

Si $e=0$

$$x^2+y^2\left(1-(0)^2\right)-2hy+h^2=0$$

$$x^2+y^2-2hy+h^2=0$$

…Ecuación de la circunferencia

Si $e=1$

$$x^2+\left(1-(1)^2\right)y^2-2hy+h^2=0$$

$$x^2-2hy+h^2=0$$

$$x^2=2hy-h^2$$

…Ecuación de la parábola

Si $0<e<1$

$$e<1 \qquad e^2<1 \qquad 0<1-e^2 \qquad q=1-e^2$$

$$x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2hy+h^2=0$$

$$x^2+qy^2-2hy+h^2=0 \qquad , \quad e>0, \quad e^2>0, \quad q>0$$

…Ecuación de la elipse

Si $e>1$

$$e>1 \qquad e^2>1 \qquad 1-e^2<0 \qquad -q=1-e^2$$

$$x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2hy+h^2=0$$

$$x^2-qy^2-2hy+h^2=0 \qquad , \quad e>0, \quad e^2>0, \quad -q>0$$

…Ecuación de la hipérbola

CAPÍTULO 7

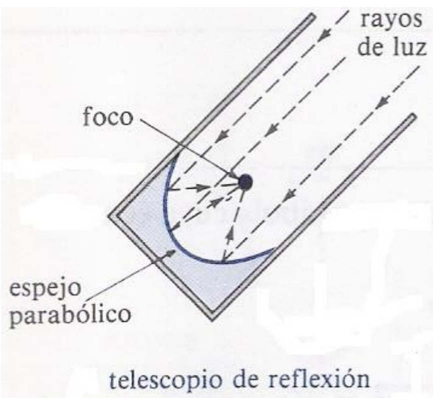
7. La parábola

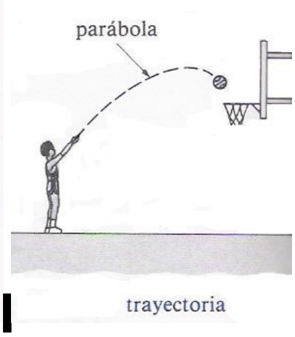
7.1 Introducción

En cursos previos de geometría elemental, conociste dos líneas: la línea recta y la circunferencia, ambas ya fueron estudiadas desde el punto de vista analítico. Ahora iniciamos el estudio de ciertas curvas planas.

La parábola es una curva que tiene una infinidad de aplicaciones prácticas, en este capítulo aprenderás cosas fundamentales acerca de ella.
Estudiada en la antigüedad por los griegos, desde un punto de vista exclusivamente geométrico, puede ser comprendida en la actualidad por medio de relaciones algebraicas. El diseño de objetos como reflectores, faros de automóviles, telescopios de reflexión y antenas de microondas, se basa en una propiedad muy conveniente de la parábola. Si al espejo de un telescopio de reflexión de forma parabólica, llegan rayos de luz paralelos, por ejemplo de una estrella lejana, se puede demostrar que entonces todos los rayos se reflejarán dirigiéndose al foco.

Si una fuente luminosa se coloca en el foco de una superficie parabólica reflectora, entonces se producirá un haz de rayos paralelos al eje de la parábola.
La trayectoria de un proyectil es una parábola si se considera que el movimiento se lleva a cabo en un plano y se desprecia la resistencia del aire, los arcos tienen algunas veces apariencia parabólica, los cables de un puente colgante pueden pender en forma de parábola, las antenas para la recepción de señales de televisión provenientes de satélites son también de forma parabólica. En ciertas circunstancias, la curva de persecución de un tiburón en busca de su presa también es parabólica.





Como verás esta curva tiene una amplia gama de utilidades en nuestra vida.

7.2 Definición de parábola

Definición de parábola
Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se denomina **foco** y la recta fija se llama **directriz**.

Hacemos referencia a la *distancia de un punto a una recta*, se entiende por tal distancia, la longitud del segmento de recta perpendicular a la recta desde el punto.

7.3 Parábola con vértice en el origen y eje coincidente con el eje y

A partir de esta definición se deducirá una ecuación de la parábola, se elige el eje y perpendicular a la directriz de modo que contenga al foco. El origen del sistema se toma como el punto que se encuentra sobre el eje y, a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz.
Sea p la distancia dirigida $\overline{OF}$. El foco es el punto $F(0, p)$, y la directriz es la recta que tiene por ecuación $y=-p$.
Un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si P equidista de F y de la directriz. Si $Q(x,-p)$ es el pie de la recta perpendicular a la directriz desde P, entonces P está en la parábola si y sólo si

$$\left|\overline{FP}\right|=\left|\overline{QP}\right|$$

Como

$$\left|\overline{FP}\right|=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

y

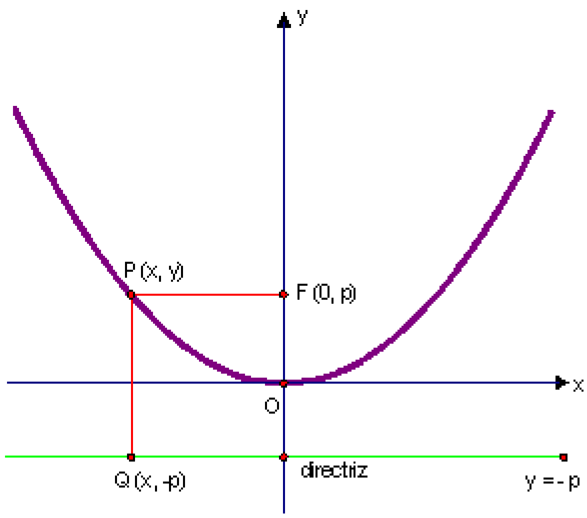
$$\left|\overline{QP}\right|=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

el punto P está en la parábola si y sólo si

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$

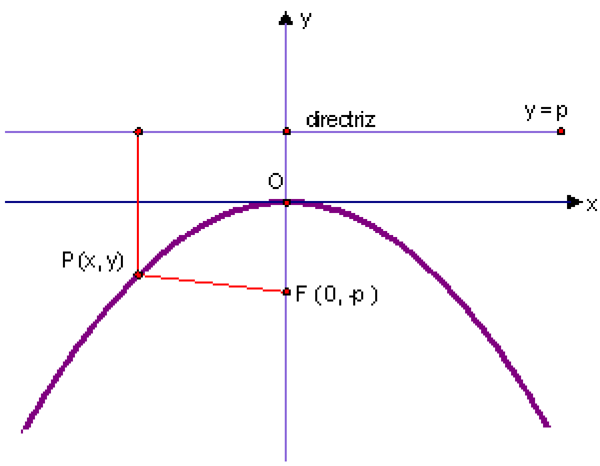
$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$ al simplificar nos queda

$$\boxed{x^2=4py}$$ Ecuación de la parábola



$$x^2 = 4py, \quad p > 0$$

En la figura anterior $p > 0$, sin embargo p puede ser negativo debido a que es la
distancia dirigida $\overline{OF}$.



$$x^2 = 4py, \quad p < 0$$

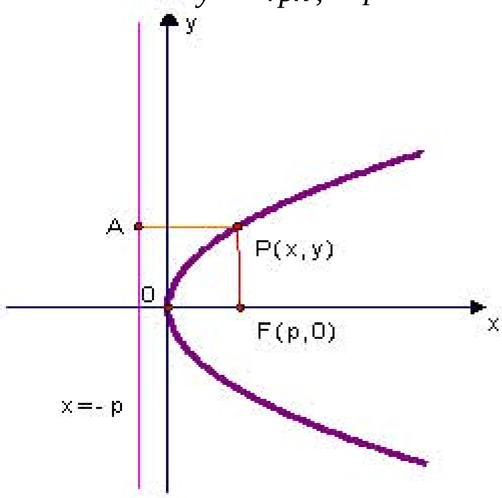
Si la parábola abre hacia arriba $p > 0$, y se abre hacia abajo $p < 0$. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina eje de la parábola, en los dos casos anteriores es el eje y.La intersección de la parábola con su eje se llama vértice, el cual está a la mitad de la distancia entre

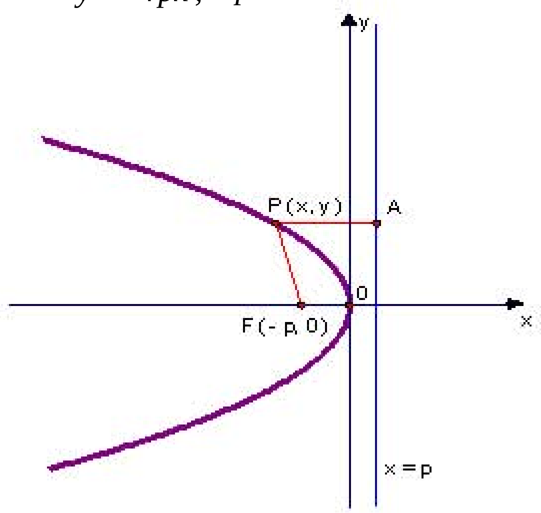
el foco y la directriz. El vértice de las parábolas anteriores es el origen. Las llamamos parábolas verticales.
La cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría de la parábola se le llama lado recto. En cada caso la longitud del **lado recto** está dada por el valor absoluto de $4p$, que es el coeficiente del término de primer grado.

7.4 Parábola con vértice en el origen y eje que coincide con el eje x

De la misma manera se puede obtener la ecuación de la parábola que tiene como foco el punto $(p,0)$ y la ecuación de la directriz es $x=-p$. Si $p>0$, la parábola abre hacia la derecha; si $p<0$, la parábola abre hacia la izquierda.
Estas son parábolas horizontales.

$y^2 = 4px, \quad p>0$ $\qquad$ $y^2 = 4px, \quad p<0$





7.5 Parábola con vértice (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado

Frecuentemente será necesario obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no coincide con uno de los ejes coordenados.

Consideremos la parábola de la siguiente figura, cuyo vértice es el punto (h,k) y cuyo eje es paralelo al eje x. Vamos a trasladar los ejes coordenados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h,k) se sabe de acuerdo a las ecuaciones anteriores, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes x', y' está dada por

$$y'^2 = 4px' \qquad \ldots(1)$$

Referido a los nuevos ejes, las coordenadas del foco F son $(p,0)$.

A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales x y y, podemos obtener la ecuación (1), usando las ecuaciones de transformación.

$$x = x' + h, \quad y = y' + k$$

De donde $$x' = x - h, \quad y' = y - k$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) obtenemos:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

Ecuación de la parábola con vértice (h,k) y eje focal paralelo al eje x

Siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.

Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda. En forma análoga, la parábola cuyo vértice es el punto (h,k) y cuyo eje es paralelo al eje y tiene por ecuación

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Recuerda:

En una parábola horizontal, siendo p positivo, el foco queda a la derecha y la directriz a la izquierda del vértice, si p es negativo el foco queda a la izquierda del vértice y la directriz a la derecha.
En una parábola vertical, siendo p positivo, el foco queda arriba y la directriz abajo del vértice, si p es negativo el foco queda abajo del vértice y la directriz arriba.

Si la ecuación de la directriz inicia con la variable x, indica que la parábola es horizontal.

Si la ecuación de la directriz inicia con la variable y, indica que la parábola es vertical.

7.6 Forma general de la ecuación de la parábola

Parábola horizontal: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Parábola vertical: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ahora resuelve los problemas de parábola y fíjate en los datos de cada uno de ellos, así sabrás como encontrar el camino hacia la solución.
Apóyate haciendo la gráfica de acuerdo a las características de cada problema.

7.7 Problemas

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

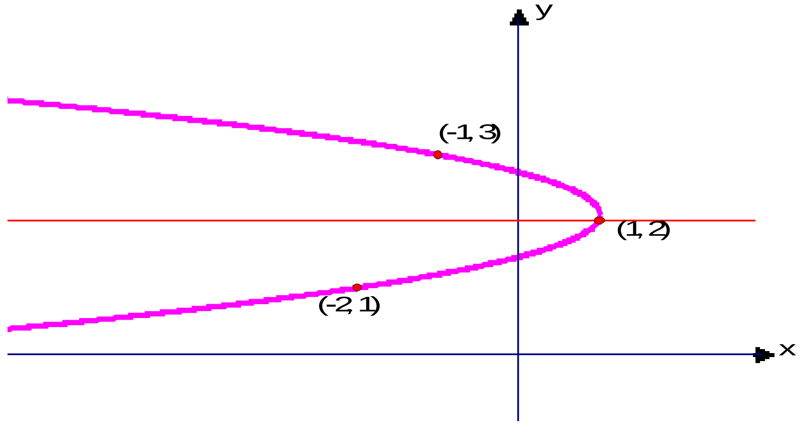
PARÁBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XII

Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas x, y que pase por los puntos $(-2,1)$, $(1,2)$ y $(-1,3)$.



Elegimos la ecuación que debemos utilizar que dependerá de los datos dados en el problema, como el eje de la parábola es paralelo al eje x, ésta será horizontal
$y^2 + Dx + Ey + F = 0.$

Sustituyendo x e y por las coordenadas de los puntos,

$$1-2D+E+F=0$$
$$4+D+2E+F=0$$
$$9-D+3E+F=0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, $D=\frac{2}{5}$, $E=-\frac{21}{5}$, $F=4$.

Por tanto, la ecuación pedida es $y^2+\frac{2}{5}x-\frac{21}{5}y+4=0$, o bien, $5y^2+2x-21y+20=0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

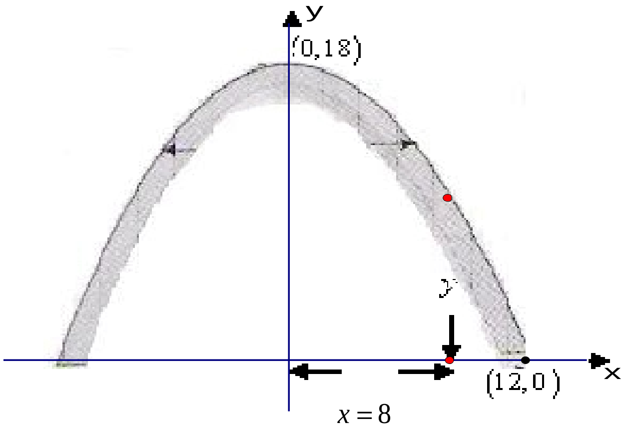
PARÁBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XIII

Hallar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 metros de altura y 24 metros de base**,** situado a una distancia de 8 metros del centro del arco.



Pondremos el eje x en la base del arco y el origen en el punto medio. La ecuación de la parábola será de la forma,

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

O bien $$(x-0)^2=4p(y-18)$$

La curva pasa por el punto $(12,0)$. Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación se obtiene, $p=-2$.

Por consiguiente,

$$(x-0)^2=-8(y-18)$$

Para hallar la altura del arco a 8 metros del centro se sustituye $x=8$ en la ecuación y se despeja el valor de y. Por tanto, $8^2=-8(y-18)$, de donde $y=10$ metros.

El arco simple más resistente es el de forma parabólica, son de sencilla construcción, los esfuerzos se materializan en compresión y permiten la entrada de la luz solar.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

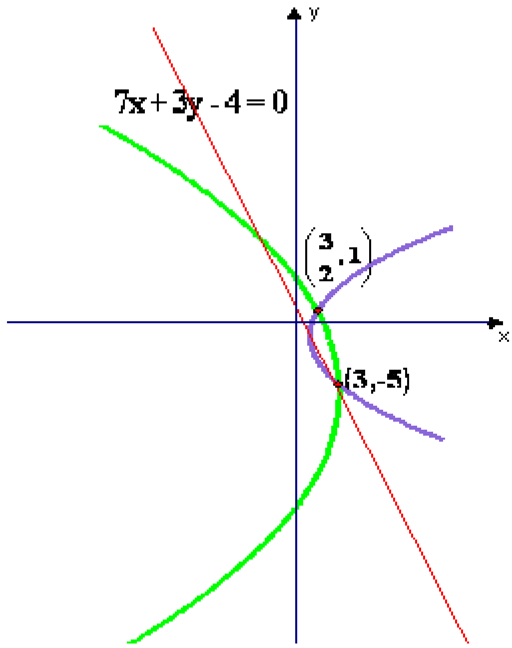
PARÁBOLA

MADEMS
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XIV

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice esta en la recta $7x+3y-4=0$, de eje horizontal y que pase por los puntos $(3,-5)$ y $\frac{3}{2},1$.



Aplicamos la ecuación en la forma $(y-k)^2 = +4p(x-h)$, ya que en el problema nos indican que el eje es horizontal. Sustituyendo las coordenadas de los puntos dados se obtiene.

$$(-5-k)^2 = 4p(3-h) \text{ y } (1-k)^2 = 4p\left(\tfrac{3}{2}-h\right)$$

Como (h,k) pertenece a la recta $7x+3y-4=0$, se tiene, $7h+3k-4=0$.

Resolviendo el sistema de estas tres ecuaciones resulta $h=1$, $k=-1$, $4p=8$; y $h=\frac{359}{119}$, $k=-\frac{97}{17}$, $4p=-\frac{504}{17}$.

Luego las ecuaciones pedidas son, $(y+1)^2 = 8(x-1)$; $\left(y+\frac{97}{17}\right)^2 = -\frac{504}{17}\left(x-\frac{359}{119}\right)$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

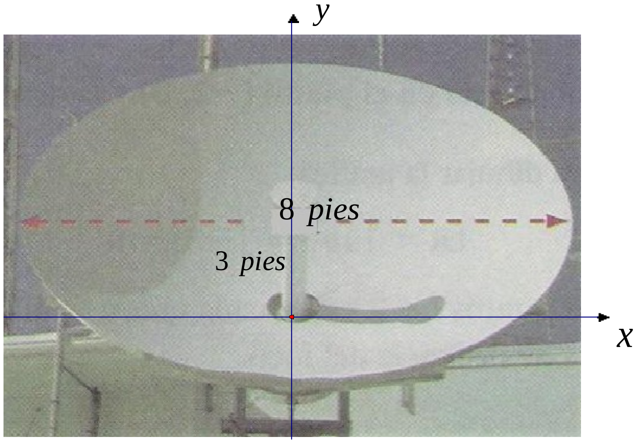
Escuela Nacional Preparatoria

PARÁBOLA

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XV

Una antena parabólica tiene la forma de un paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y se reflejan hacia el punto donde está localizado el receptor. Si la antena tiene 8 pies de abertura y 3 pies de profundidad en su centro. ¿En qué posición debe colocarse el receptor?



El receptor queremos que esté en el foco de la parábola. Consideremos la parábola cuyo vértice está en el origen y su foco sobre el eje y, su ecuación será:

$$x^2 = 4py$$

De los datos que se dan se deduce que los puntos $A(-4,3)$ y $B(4,3)$ están en la parábola, podemos tomar uno de ellos y sustituirlo en la ecuación para obtener el valor de p y determinar las coordenadas del foco.

$$16 = 4p(3) \qquad 16 = 12p \qquad \frac{16}{12} = p \qquad \frac{4}{3} = p$$

Con este dato las coordenadas del foco son $0, \frac{4}{3}$, la distancia de la base de la antena sobre el eje de la parábola hasta el lugar donde está el receptor debe ser de $\frac{4}{3}$ 1.33 pies.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

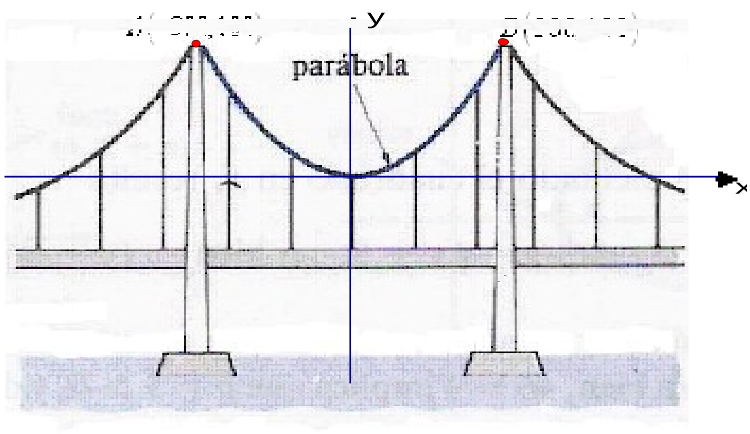
PARÁBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XVI

Los cables de un puente colgante tienen forma parabólica. Las torres que soportan los cables se encuentran separadas 600 pies entre sí y tienen una altura de 100 pies. Si los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál será la altura del cable en un punto situado a 150 pies del punto de contacto sobre la superficie de rodamiento hacia una de las torres?



puente colgante

Situaremos la parábola que forman los cables de tal manera que el vértice esté en el origen y dirija su concavidad hacia la parte positiva del eje y, la ecuación de dicha parábola será:

$$x^2 = 4py$$

De los datos podemos encontrar al menos dos puntos que pertenecen a la parábola $A(-300,100)$ y $B(300,100)$, al sustituir cualquiera de ellos en la ecuación propuesta podemos encontrar el valor de p, por ejemplo utilizaremos el punto B.

$$(300)^2 = 4p(100)$$
$$90000 = 400p$$
$$\frac{90000}{400} = p$$
$$225 = p$$

Con el valor de p obtenido podemos encontrar la ecuación de la parábola que es,

$$x^2 = 900y$$

Para encontrar la altura solicitada damos el valor de $x = 150$ en la ecuación.

$$(150)^2 = 900y$$
$$22500 = 900y$$
$$\frac{22500}{900} = y$$
$$25 = y$$

La altura del cable será de 25 pies.

CAPÍTULO 8

8. La elipse

8.1 Introducción

En este capítulo estudiarás la curva conocida desde la época de los antiguos griegos como elipse y que, como la parábola, es una curva con importantes aplicaciones prácticas que abarcan campos como la medicina, la ingeniería y la astronomía. En algunos casos, su forma es completamente redonda pues toda circunferencia es en realidad una elipse.

Los planetas, cuerpos y objetos espaciales, que giran alrededor del Sol o de otros cuerpos celestes, se mueven describiendo órbitas elípticas.

8.2 Definición de elipse

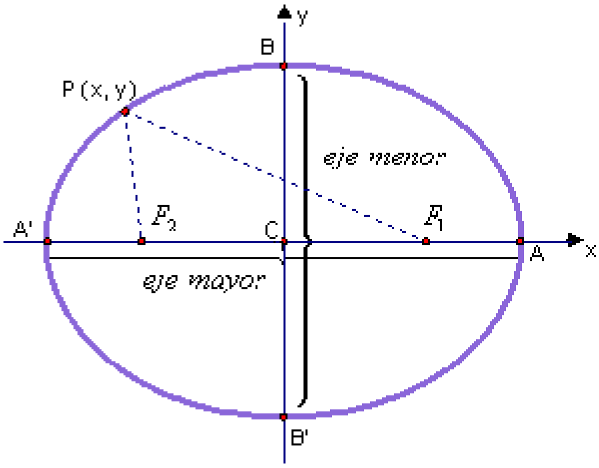
Definición de elipse Una elipse es el conjunto de puntos P del plano tales que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados **focos**, es constante.

Si P es un punto de la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$, $d_2 = d(F_2, P)$ y $k > 0$ es una constante, como se muestra en la figura, $d_1 + d_2 = k$

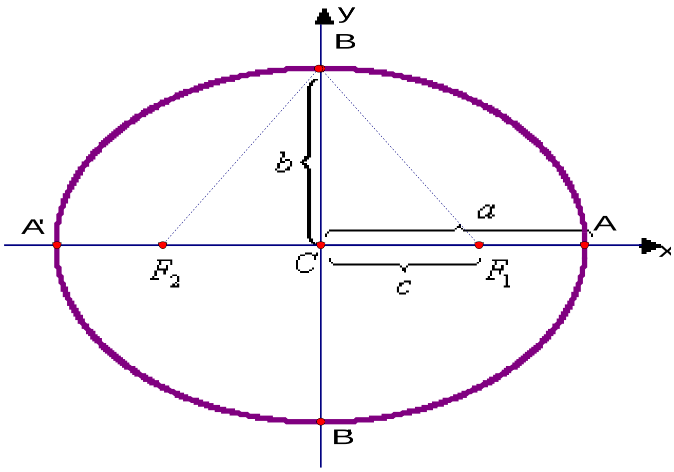
El punto medio del segmento de recta que une a los focos se llama **centro** de la elipse, una elipse tiene dos ejes de simetría, interseca dos veces cada eje de simetría. El segmento de recta de mayor longitud, $\overline{AA'}$, el cual contiene los focos, se denomina **eje mayor**, el de menor longitud, $\overline{BB'}$, recibe el nombre de **eje menor**.

El centro separa cada eje en dos segmentos congruentes, llamaremos b al segmento que representa el **semieje menor** y a la longitud del **semieje mayor.**

Los focos se localizan a lo largo del eje mayor a *c* unidades del centro.
Existe una relación especial entre a, b y c.



Analizando la siguiente figura, de los segmentos $\overline{BF_1}$ y $\overline{BF_2}$,vemos que las longitudes de estos segmentos son iguales, ya que $\Delta BF_1C \cong \Delta BF_2C$.



Dado que B y A son dos puntos sobre la elipse, podemos usar la definición de elipse para determinar $\overline{BF_2}$.

$BF_1 + BF_2 = AF_1 + AF_2$	Definición de elipse
$BF_1 + BF_2 = AF_1 + A'F_1$	$AF_2 = A'F_1$
$BF_1 + BF_2 = AA'$	Adición de segmentos: $AF_1 + A'F_1 = AA'$
$BF_1 + BF_2 = 2a$	Sustitución: $AA' = 2a$
$2(BF_2) = 2a$	$BF_1 = BF_2$
$BF_2 = a$	

Dado que $BF_2 = a$ y ΔBF_2C es un triángulo rectángulo, $b^2 + c^2 = a^2$ por el teorema de Pitágoras.

8.3 Elipse con centro en el origen y ejes que coinciden con los ejes coordenados

Apoyándonos en la gráfica anterior, el centro de la elipse coincide con el origen y su eje focal (la línea donde están los focos) coincide con el eje x. Los focos F_1 y F_2 están sobre el eje x. El centro C, es el punto medio del segmento F_1F_2, las coordenadas de los focos serán, si ponemos a C en el origen $(c,0)$ y $(-c,0)$,siendo c una constante positiva, si ponemos a C en el origen.. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| = 2a, \qquad \ldots(1)$$

en donde a es una constante positiva *mayor* que c.

Utilizando la distancia entre dos puntos tenemos,

$$\left|\overline{F_1P}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad \left|\overline{F_2P}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

De manera que la condición geométrica está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad \ldots(2)$$

Para simplificar la ecuación anterior pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Nos queda

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

De donde, podemos factorizar

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \quad \ldots(3)$$

Como $2a > 2c$ es $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2$ es un número positivo que puede sustituirse por el número positivo b^2 , nos queda

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \ldots(4)$$

Si en (3) se sustituye $a^2 - c^2$ por b^2 , obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ ,$$

Y dividiendo cada expresión entre a^2b^2, finalmente tenemos

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal que coincide con el eje x. Se puede observar en la gráfica anterior que forma tiene dicha elipse.

Las coordenadas del punto *A* son $(a,0)$ y de *A'* $(-a,0)$ que son las coordenadas de los vértices sobre el eje x, la longitud del eje mayor es igual a $2a$. Las coordenadas de los puntos *B* y *B'* son respectivamente $(0,b)$ y $(0,-b)$ que son las coordenadas de los extremos del eje menor, sobre el eje y, la longitud del eje menor es igual a $2b$.

Tomando como base la ecuación anterior de la elipse, despejando la variable y, y sustituyendo el valor de b^2, la longitud del **lado recto** para cada uno de los focos es

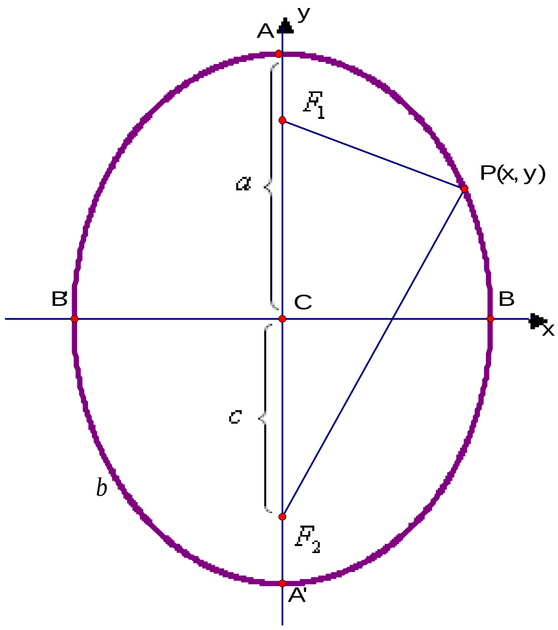
$$\frac{2b^2}{a}$$

Ya obtuvimos la ecuación de la elipse con vértice en el origen y eje focal sobre el eje x, ahora consideremos el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal esta sobre el eje y.

Cambian las coordenadas de los focos serán entonces $(0,c)$ y $(0,-c)$. Y por el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación anterior hallamos la ecuación de la elipse que es

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

En donde a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor y se tiene la relación $a^2 = b^2 + c^2$.



8.4 Elipse con centro *C* (h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

Ahora determinemos la ecuación de la elipse con centro *C* (h,k) y con ejes paralelos a los ejes coordenados. Consideremos la elipse cuyo centro está en *C* (h,k) y el eje focal es paralelo al eje x. Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor respectivamente, trasladamos los ejes coordenadas de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro *C* (h,k) de la elipse, de acuerdo al procedimiento con el que se obtuvieron las ecuaciones anteriores de la elipse, se sigue que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes x', y' está dada por

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(\text{i})$$

De esta ecuación puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales x, y, usando las ecuaciones de transformación, a saber:

$$x = x' + h \quad , y = y' + k,$$

De donde

$$x' = x - h \quad , y' = y - k$$

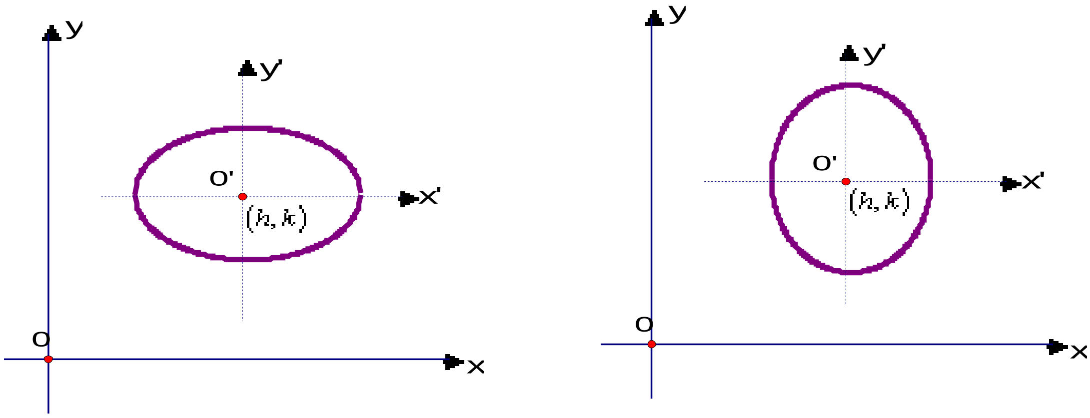
Sustituimos estos valores de x', y' en la ecuación (i), quedándonos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de la elipse referida a los ejes coordenados x, y.

De la misma manera podemos demostrar que la elipse cuyo centro es (h,k) y cuyo eje focal es paralelo al eje y tiene por ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Para cada elipse a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor y se tiene la relación $a^2 = b^2 + c^2$ y la longitud de cada uno de sus lados rectos es

$$\frac{2b^2}{a}$$

8.5 Forma general de la ecuación de la elipse

Si los coeficientes A y C son del mismo signo y distinto de cero, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

Excentricidad de la elipse

Un elemento importante a considerar en las elipses es su excentricidad que ya se definió como la razón $\frac{c}{a}$ y queda representada por la letra e. Por lo tanto,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Como $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que la uno.

8.6 Problemas

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

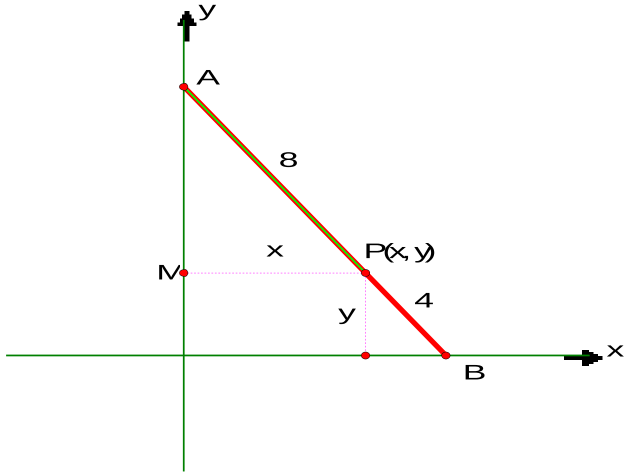
ELIPSE

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XVII

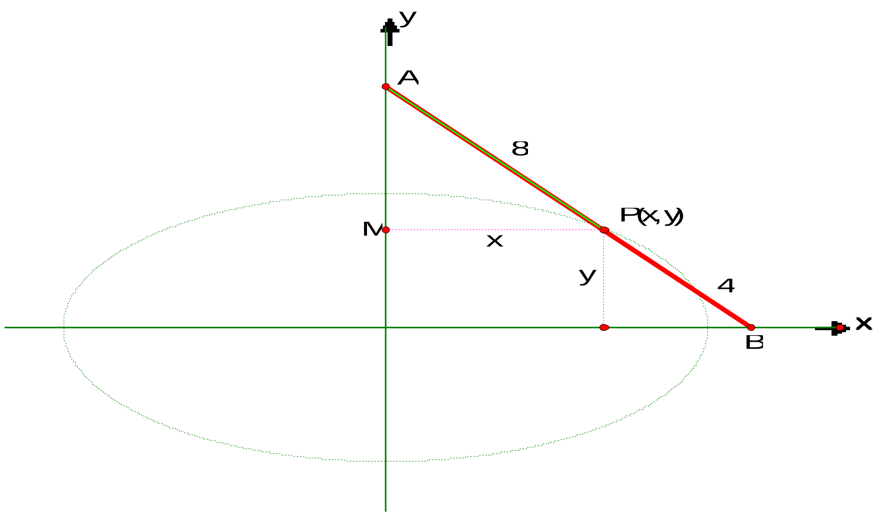
Se considera un segmento AB de doce unidades de longitud y un punto $P(x, y)$ situado sobre él a 8 unidades de A.

Hallar el lugar geométrico de P cuando el segmento se desplace de forma que los puntos A y B se apoyen constantemente sobre los ejes de coordenadas y y x respectivamente.



Por triángulos semejantes, $\frac{MA}{AP}=\frac{y}{PB}$, o sea, $\frac{\sqrt{64-x^2}}{8}=\frac{y}{4}$.

Luego $64 - x^2 = 4y^2$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 64$. Es una elipse con su centro en el origen y de eje mayor que coincide con el eje x



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

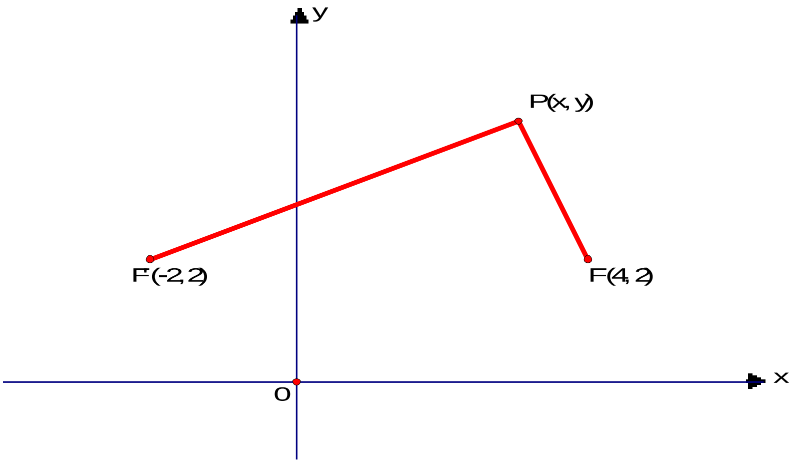
ELIPSE

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XVIII

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(4,2)$ y $(-2,2)$ sea igual a 8.



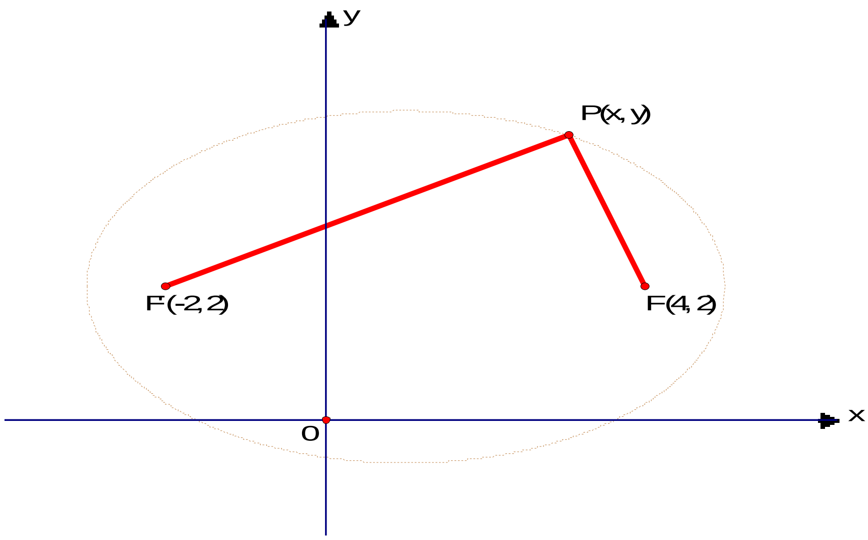
$F'P + FP = 8$, o sea, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 8.$

Ordenando términos, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos, $3x-19=-4\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$.

Elevando nuevamente al cuadrado y reduciendo términos resulta la ecuación

$7x^2+16y^2-14x-64y-41=0$, que es una elipse.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

ELIPSE

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

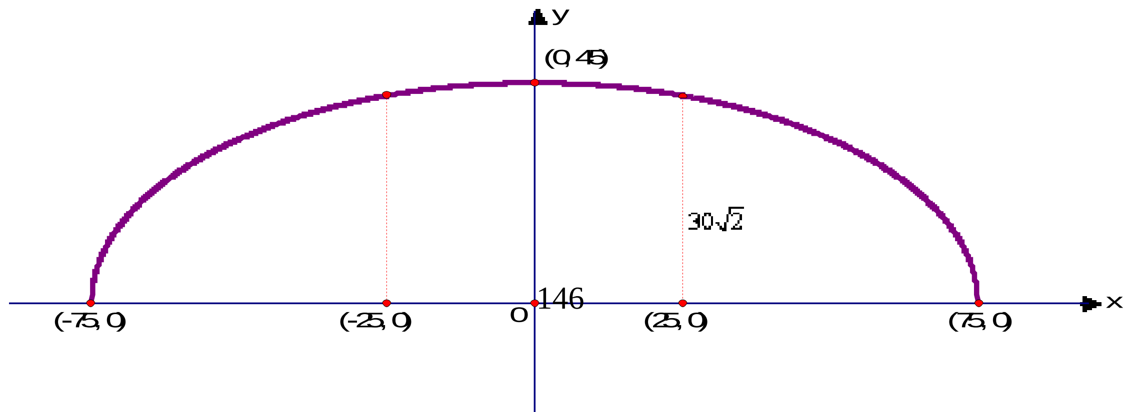
Problema XIX

Un arco tiene forma de semielipse con una luz de 150 metros siendo su máxima altura de 45 metros. Hallar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco.

Supongamos el eje x en la base del arco y el origen en su punto medio. La ecuación del arco será, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ siendo $a=75,\ b=45$

Para hallar la altura de los soportes, hacemos $x=25$ en la ecuación, ya que $AA'=150$, y el enunciado nos pide que los soportes estén a igual distancia del extremo del arco. De la ecuación anterior despejamos el valor de y.

Es decir, $\frac{625}{5.625}+\frac{y^2}{2.025}=1,\ \ y^2=8(225),\ \ y=30\sqrt{2}$ metros.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

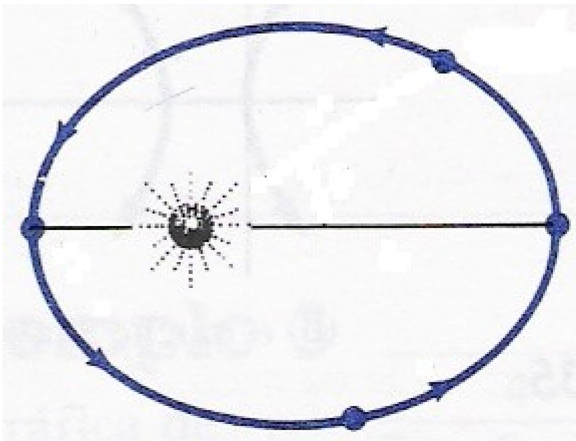
ELIPSE

Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XX

La tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos.



Sabiendo que el semieje mayor de la elipse vale $1.485\ 10^{8}$ kilómetros y que la excentricidad es, aproximadamente, $\frac{1}{62}$, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

Excentricidad $e=\frac{c}{a}$. Luego $\frac{1}{62}=\frac{c}{148,500,000}$, o sea, $c=2,395,161$.

Al encontrar el valor de c, podemos encontrar el valor de las distancias

máximas y mínimas que se nos piden.
La máxima distancia es $a+c=1.485\ \ 10^{8}+2,395,161=1.509\ \ 10^{8}$
La mínima distancia es $a-c=1.485\ \ 10^{8}-2,395,161=1.461\ \ 10^{8}$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

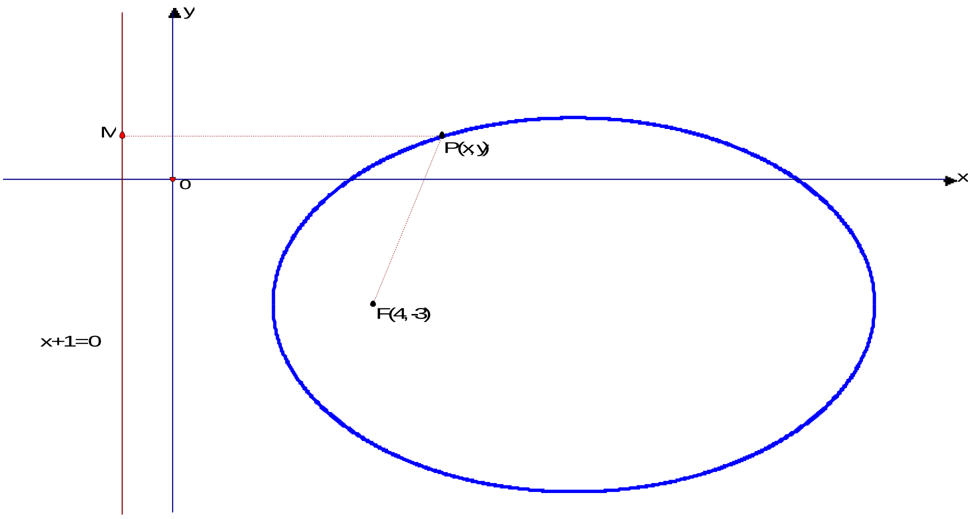
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
Escuela Nacional Preparatoria
ELIPSE

MADEMS
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXI

Hallar la ecuación de la elipse cuya directriz es la recta $x=-1$, uno de los focos, el punto $(4,-3)$ y excentricidad $\dfrac{2}{3}$.



De la definición general de sección cónica (problema I), $e=\dfrac{PF}{PM}$ y $e<1$ entonces la curva es una elipse.

Por consiguiente, $\dfrac{\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}}{x+1}=\dfrac{2}{3}$.

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación y simplificando resulta,

$$5x^2+9y^2-80x+54y=-221$$

Completando cuadrados, $5(x^2-16x+64)+9(y^2+6y+9)=-221+320+81$,

es decir, $5(x-8)^2+9(y+3)^2=180$,

o bien, $\dfrac{(x-8)^2}{36}+\dfrac{(y+3)^2}{20}=1$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

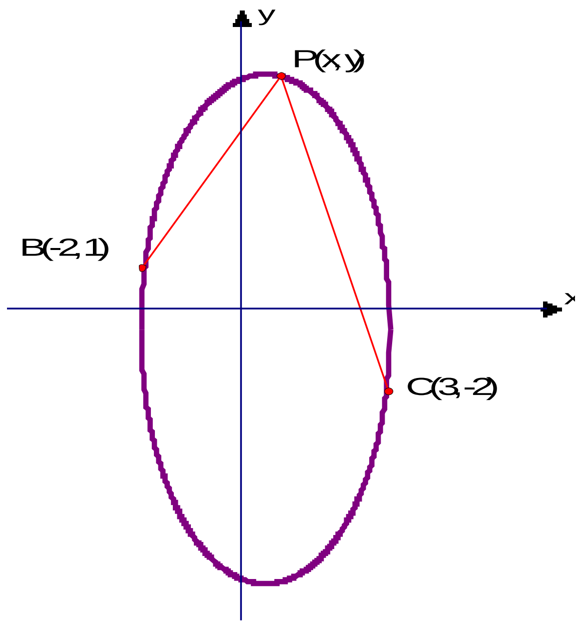
ELIPSE

Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXII

Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que unen $P(x,y)$ con los puntos fijos $(3,-2)$ y $(-2,1)$ es igual a -6.



$$\frac{y+2}{x-3}\quad\frac{y-1}{x+2}=-6$$, o bien, $6x^2+y^2+y-6x=38$, una elipse.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

ELIPSE

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

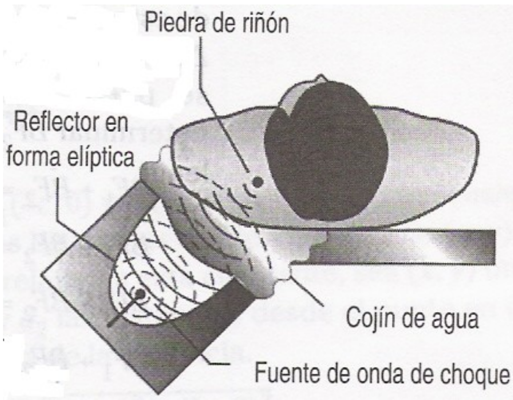
MATEMÁTICAS

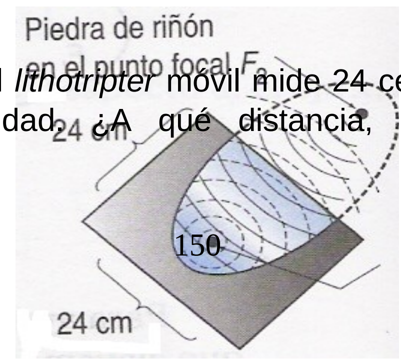
Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXIII

Tecnología médica

Para eliminar piedras en el riñón, los médicos recurren algunas veces a una herramienta médica llamada *lithotripter*, que significa “triturador de piedras”. Se trata de un dispositivo que utiliza ondas de choque de ultra alta frecuencia que se mueven por el agua para romper la piedra. Después de aplicar rayos X a un paciente para localizar y medir la piedra con precisión, el *lithotripter* se coloca de modo que las ondas de choque reflejen la superficie interna del tubo elíptico y rompan la piedra.





Supón que el reflector del *lithotripter* móvil mide 24 centímetros de ancho y 24 centímetros de profundidad. ¿A qué distancia, hasta la centésima de centímetro más cercana, de la piedra en el riñón del paciente debe situarse el emisor de ondas de choque?

Para que el *lithotripter* desintegre la piedra, el emisor de ondas de choque debe ubicarse en un punto focal de la elipse y la piedra del riñón, en el otro. Para determinar la distancia entre el emisor y la piedra, deben determinarse primero las longitudes de los semiejes mayor y menor.

El semieje mayor en esta elipse es igual a la profundidad del reflector, 24 centímetros. Por lo tanto, $a = 24$.

El semieje menor es la mitad del ancho del reflector, 12 centímetros. Por lo tanto, $b = 12$. Para determinar la longitud focal de la elipse, utiliza la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$.

$$
\begin{aligned}
&c^2 = a^2 - b^2 \\
&c^2 = (24)^2 - (12)^2 \\
&c^2 = 432 \\
&c = \sqrt{432} \\
&c \quad 20.8
\end{aligned}
$$

La distancia entre los dos focos de la elipse es $2c$ o 41.6

Por lo tanto, el emisor debe situarse aproximadamente a 41.6 centímetros de distancia del riñón del paciente sobre el eje mayor de la elipse.

CAPÍTULO 9

9. La hipérbola

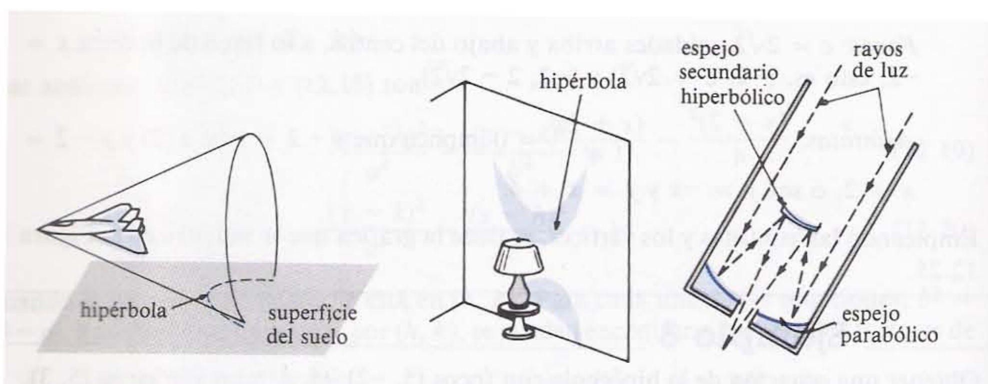
9.1 Introducción

Ahora conocerás las propiedades de una curva que consta de dos ramas, que desde la antigüedad fue llamada hipérbola por lo geómetras griegos. Muchos fenómenos en física, biología, ingeniería y otras ciencias están representados mediante relaciones de proporcionalidad inversa, cuya gráfica es una rama de esta curva.

A primera vista puede parecer que una de tales ramas es una parábola, veremos que no es así. Ambas curvas como cónicas, poseen propiedades similares, pero como curvas independientes, muestran comportamientos muy diferentes.

En aeronaútica las modernas naves vuelan manteniendo en muchas ocasiones su posición respecto a dos torres distintas de control de forma que la diferencia de sus distancias es siempre la misma. La trayectoria que describen las aeronaves en tales circunstancias es una rama de una curva denominada hipérbola.

Con este sistema de navegación denominado LORAN (Long Range Navigation), las aeronaves aseguran su trayectoria, en este caso, sobre la rama de una hipérbola, manteniendo constante la diferencia de tiempo entre los pulsos sincronizados de ondas de radio enviados por las estaciones.



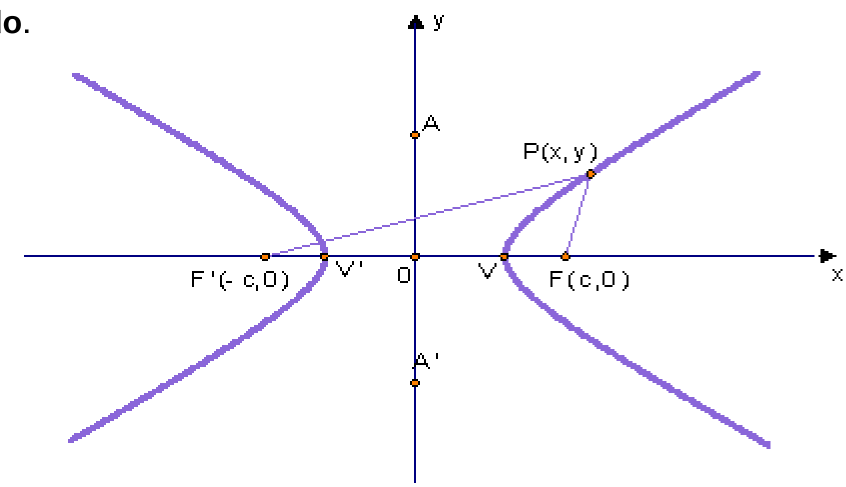
(a) "huella" acústica (b) luz de una lámpara sobre una pared (c) telescopio Cassegranian

9.2 Definición de hipérbola

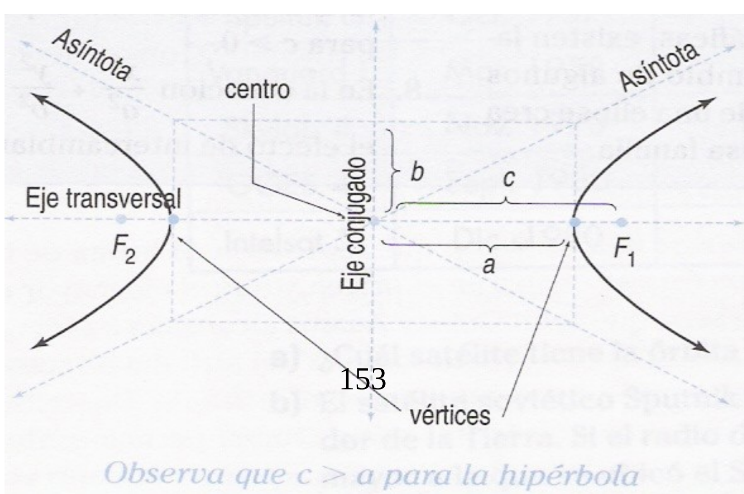
Definición de hipérbola

Una hipérbola es una curva formada por puntos del plano para los cuales es constante la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos**.

Los **focos** están designados por F y F', la recta que pasa por los focos, como en la elipse, se llama **eje focal**. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V', llamados **vértices**. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento VV', se llama **eje transverso**. El punto medio C del eje transverso se llama **centro**, el segmento AA' que tiene a C por punto medio, se llama **eje conjugado**.



Los focos F y F' están sobre el eje x, el centro C es el punto medio del segmento FF' y las coordenadas de dichos puntos serán $(c,0)$ y $(-c,0)$ respectivamente, siendo c una constante positiva.



9.3 Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal horizontal

El punto $P(x,y)$ es un punto cualquiera sobre la hipérbola. Entonces por la definición de hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente:

$$\left|\left|\overline{FP}\right|-\left|\overline{F'P}\right|\right|=2a \qquad \ldots(1)$$

En donde a es una constante positiva y $2a<2c$. La condición geométrica anterior es equivalente a las relaciones,

$$\left|\overline{FP}\right|-\left|\overline{F'P}\right|=\ 2a, \qquad ...(2)$$
$$\left|\overline{FP}\right|-\left|\overline{F'P}\right|=-2a \qquad ...(3)$$

La expresión (2) será verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha. Por la definición de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\left|\overline{FP}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad \left|\overline{F'P}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

De manera que la condición geométrica (1) podemos expresarla analíticamente como:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, \qquad ...(4)$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a \qquad ...(5)$$

Usando el mismo procedimiento que en la elipse, se puede demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

Por ser $c>a$, c^2-a^2 es un número positivo que podemos designar por b^2. Sustituimos en la ecuación anterior la relación

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

Quedándonos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

Que puede escribirse en la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

9.4 Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal vertical

Análogamente podemos encontrar la ecuación de la hipérbola con eje focal vertical

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

En cualquier hipérbola:

Eje transverso = 2a, eje conjugado = 2b, c es la distancia del centro a cada uno de los focos, y a, b, c están ligadas por la relación: $c^2 = a^2 + b^2$ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$,

$LR = \frac{2b^2}{a}$

Como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que la uno.

En la hipérbola podemos tener $a > b$, $a < b$ ó $a = b$, por lo tanto, la posición de la hipérbola se podrá determinar por los signos de los coeficientes de las variables en las ecuaciones ya obtenidas. La variable con coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

9.5 Ecuación de la hipérbola con centro (h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

Si el centro de una hipérbola no coincide con el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden determinarse de la misma manera que las de la elipse. Ahora ya puedes obtenerla, se deja como ejercicio.

Si el eje focal es paralelo al eje x, su ecuación es

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

Si el eje focal es paralelo al eje y, su ecuación es

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}-=1}$$

9.6 Forma general de la ecuación de la hipérbola

Si los coeficientes A y C difieren en el signo, la ecuación

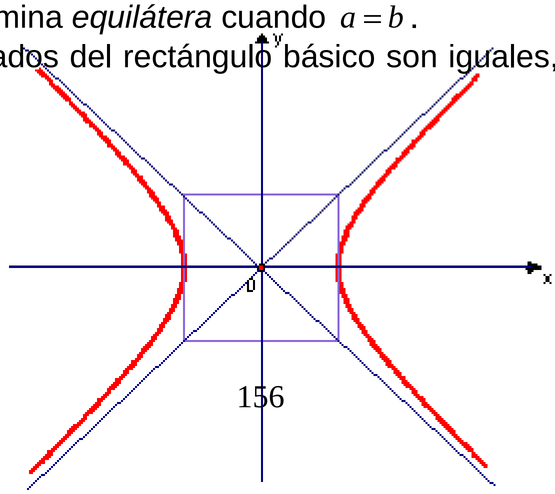
$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

A partir del centro de la hipérbola se obtienen los vértices o los focos, sumando y restando, respectivamente, a ó c, a la abscisa o a la ordenada del centro, según que la hipérbola sea horizontal o vertical.

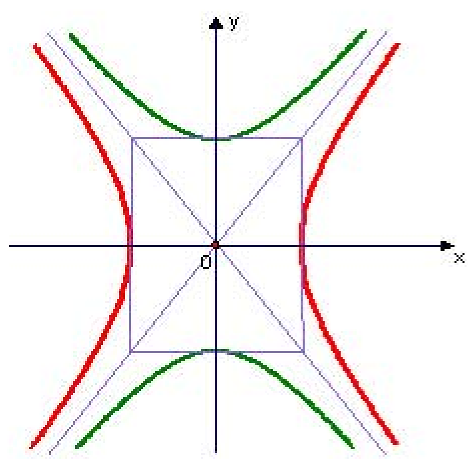
9.7 Hipérbolas equiláteras y conjugadas

Una hipérbola se denomina *equilátera* cuando $a=b$.
$a=b$ implica que los lados del rectángulo básico son iguales, es decir, forman un cuadrado.



Dos hipérbolas son *conjugadas* cuando el eje transverso de una es el eje conjugado de la otra.

Las hipérbolas conjugadas tienen el mismo rectángulo básico y las mismas asíntotas.



9.8 Asíntotas de la hipérbola

Definición
Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva.

Esto implica dos cosas: 1) una curva que tiene una asíntota no es cerrada o de extensión finita, se extiende indefinidamente; 2) una curva se aproxima a la asíntota más y más a medida que se extiende más y más.

De acuerdo a su posición recibe su nombre, *asíntota horizontal* si es paralela o coincide con el eje x, tiene una ecuación de la forma, $y=k$, y si es paralela o coincide con el eje y, $x=h$ *asíntota vertical* y si no es paralela a ningún eje, *asíntota oblicua*.

Partiendo de la primera ecuación de la hipérbola, despejando a y, si x aumenta numéricamente sin límite, encontramos la ecuación.

$$y = \quad \frac{b}{a}x$$

La cual representa a las rectas

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x$$

Que son las asíntotas de una hipérbola .

Las ecuaciones de las asíntotas pueden obtenerse sustituyendo el término independiente por cero y factorizando el primer miembro.

La gráfica de una hipérbola puede esbozarse muy fácilmente trazando sus vértices y sus asíntotas. Las asíntotas actúan en la gráfica como *líneas guía*.

9.9 Recta directriz de la hipérbola

Las rectas directrices están dadas por

$x = \frac{a^2}{c}$, o bien $y = \frac{a^2}{c}$ es decir son simétricas

9.10 Problemas

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

HIPÉRBOLA

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXIV

Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las directrices, las correspondientes de las asíntotas, la longitud del lado recto, la excentricidad y la gráfica de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Escribiendo la ecuación en la forma $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ se tiene, $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{16+9} = 5$.

Los vértices o puntos reales de corte con los ejes esto es son $(\ \ 4,0)$, y los focos $(\ \ 5,0)$.

La excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$, y las ecuaciones de las directrices son $x=\ \ \frac{a}{e}=\ \ \frac{16}{5}$.

Lado recto $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y=\ \ \frac{b}{a}x=\ \ \frac{3}{4}x$.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

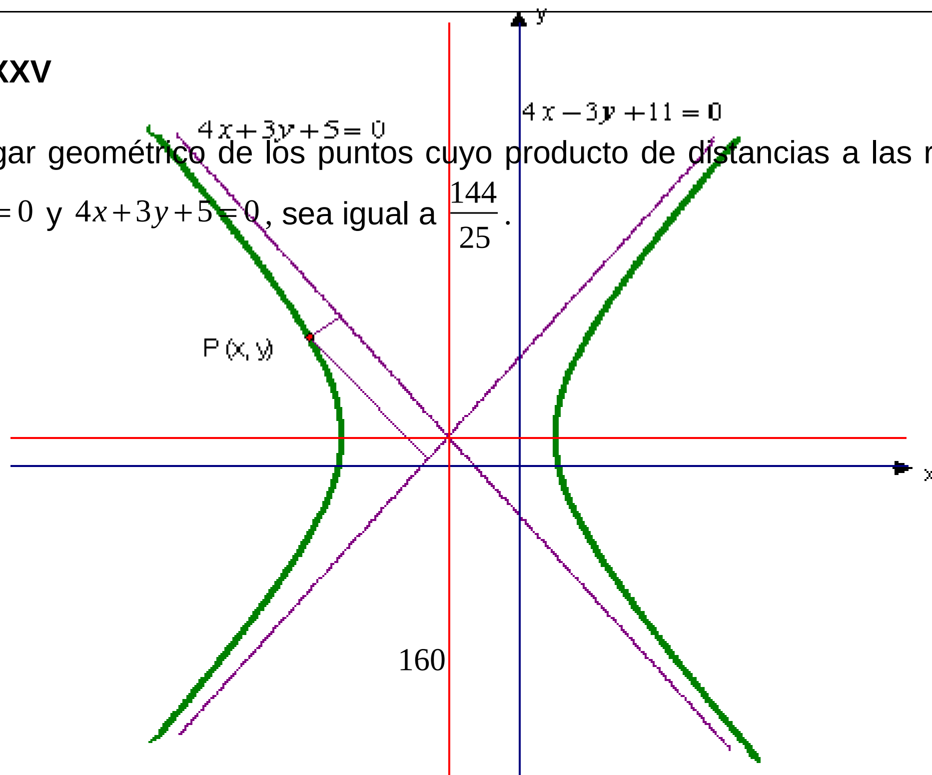
HIPÉRBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXV

Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a las rectas $4x-3y+11=0$ y $4x+3y+5=0$, sea igual a $\frac{144}{25}$.



Sea $P(x,y)$ un punto genérico cualquiera del lugar. Entonces,

$$\frac{4x-3y+11}{-5}\quad\frac{4x+3y+5}{-5}=\frac{144}{25}$$

Simplificando, $16x^2-9y^2+64x+18y-89=0$, o bien, $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1.$.

que es la ecuación de una hipérbola que tiene por asíntotas las rectas dadas.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

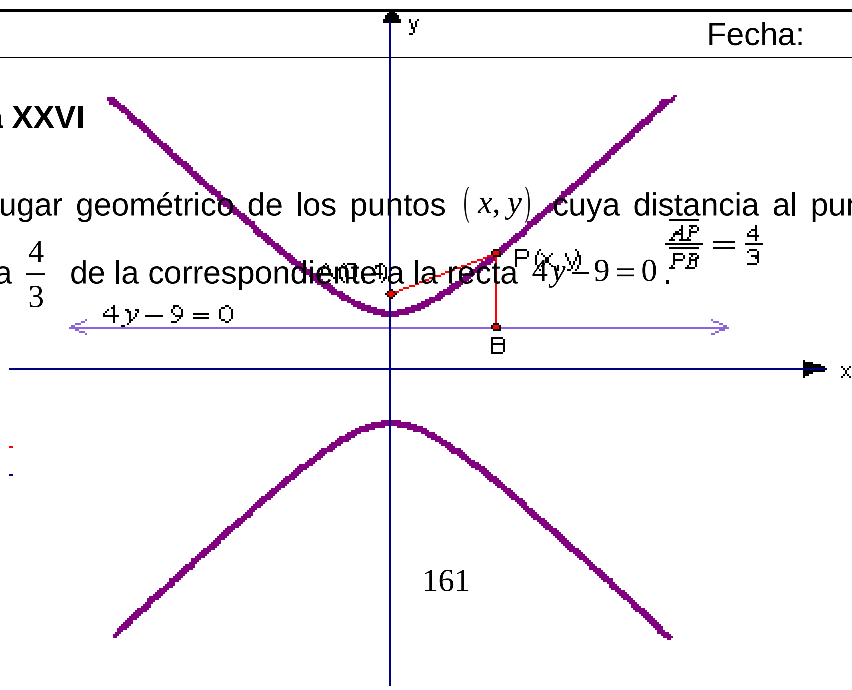
HIPÉRBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXVI

Hallar el lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya distancia al punto fijo $(0,4)$ sea igual a $\frac{4}{3}$ de la correspondiente a la recta $4y-9=0$.



$$\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=\frac{4}{3}\,\frac{4y-9}{|4|}$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $9x^2-7y^2+63=0$, o bien, $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$, que es una hipérbola.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

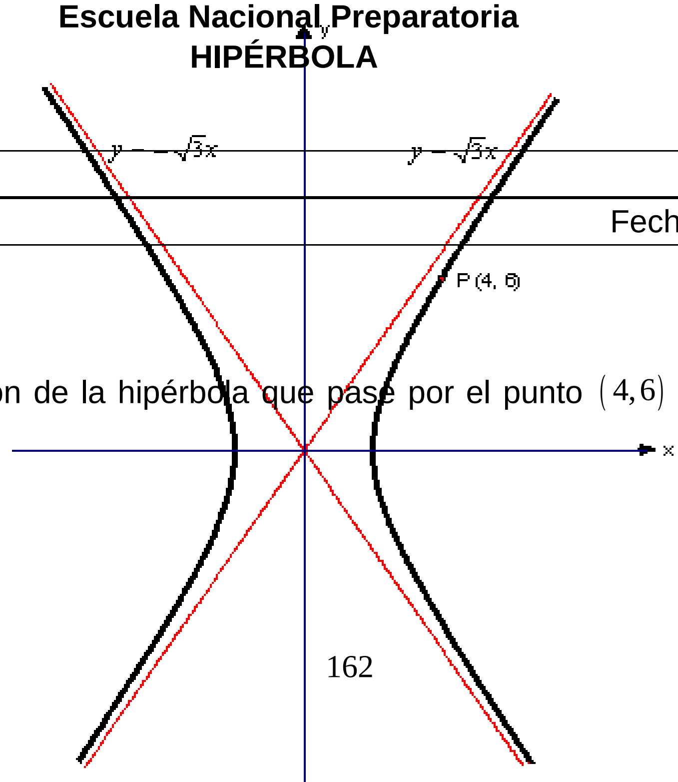
Escuela Nacional Preparatoria

HIPÉRBOLA

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXVII

Hallar la ecuación de la hipérbola que pase por el punto $(4,6)$ y cuyas asíntotas sean $y = \sqrt{3}x$.



Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son $y = \quad \frac{b}{a} x$.

Haciendo operaciones, $\frac{y}{b} = + \frac{x}{a}$, o bien, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Como el producto $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, se deduce que las ecuaciones de las asíntotas de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se pueden determinar anulando el término independiente y descomponiendo en factores.

En este problema, la ecuación de la hipérbola toma la forma

$$\left(y - \sqrt{3}x\right)\left(y + \sqrt{3}x\right) = C \quad \text{(constante).}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto $(4, 6)$, $\left(6 - 4\sqrt{3}\right)\left(6 + 4\sqrt{3}\right) = C = -12$

Luego la ecuación pedida es $\left(y - \sqrt{3}x\right)\left(y + \sqrt{3}x\right) = -12$, o bien, $3x^2 - y^2 = 12$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

HIPÉRBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXVIII

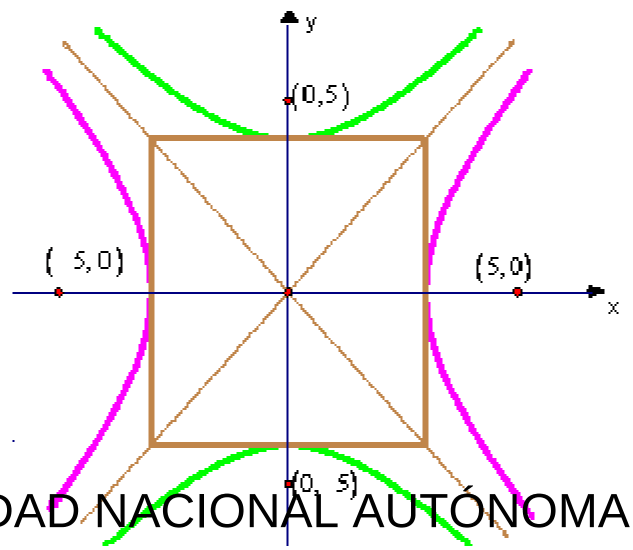
Deducir la ecuación de la hipérbola conjugada de $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los focos de ambas hipérbolas.

La ecuación de la hipérbola conjugada es $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, es decir $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

En las dos hipérbolas, $c=\sqrt{9+16}=5$. Luego las coordenadas de los focos de la hipérbola dada son $(\quad 5,0)$, y los de la conjugada $(0, \quad 5)$.

Las ecuaciones de las asíntotas , $y= \quad \frac{4}{3}x$,son las mismas para las dos hipérbolas.

$y=\frac{4}{3}$ $\qquad$ $y=-\frac{4}{3}$



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

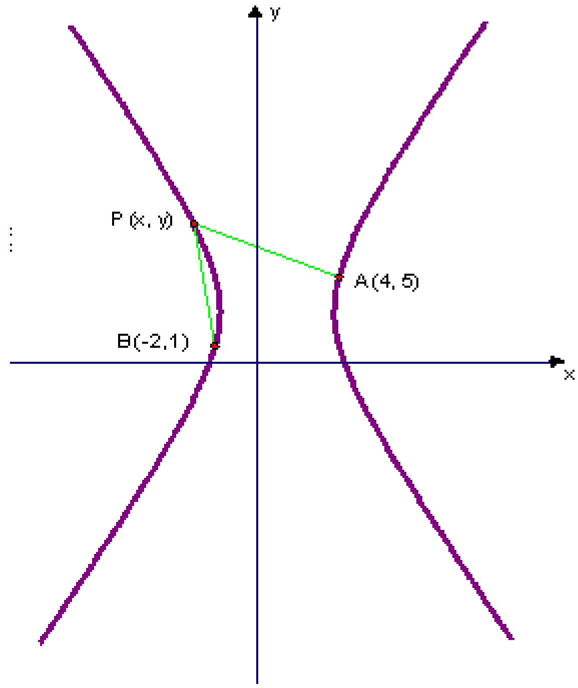
HIPÉRBOLA

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXIX

Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos $(-2,1)$ y $(4,5)$ es igual a 3.



$$\frac{y-1}{x+2} \quad \frac{y-5}{x-4} = 3 \ .$$

Simplificando nos queda, $3x^2 - y^2 + 6y - 6x - 29 = 0$, una hipérbola.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria

HIPÉRBOLA

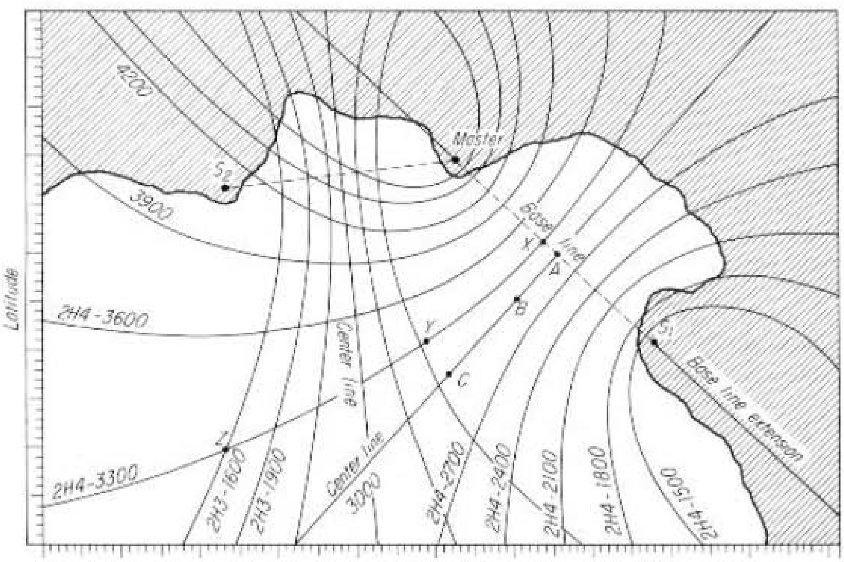
MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema XXX

En el sistema de navegación LORAN, una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente más cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre las distancias recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales. En tanto que la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia entre las dos distancias también será constante. Si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija en el tiempo, está trayectoria será una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones. Así, para cada diferencia de tiempo, se tendrá una hipérbola diferente, cada una de las cuales guía al barco a una posición diferente en la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes trayectorias hiperbólicas correspondientes a las diversas diferencias de tiempo.

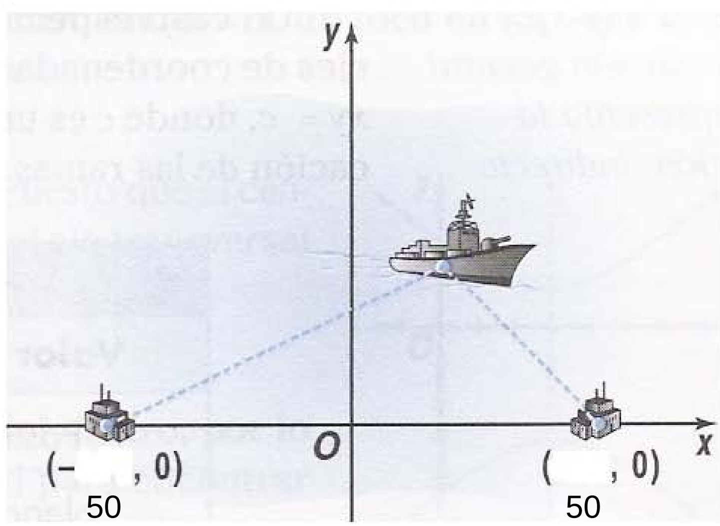
Ejemplo de carta de navegación



Supongamos que las estaciones LORAN A y B se ubican a 400 metros de distancia a lo largo de un litoral recto, con A en dirección oeste respecto de B. Un barco que se aproxima a la costa recibe ondas de radio de las estaciones y es capaz de determinar que se encuentra100 metros más alejado de la estación A que de la estación B.

a) Encuentra la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco.
b) Determina las coordenadas exactas del barco si éste se encuentra a 60 metros de la costa.

a) Establece primero un sistema de coordenadas rectangulares con el origen ubicado a la mitad entre la estación A y la estación B.



Las estaciones se localizan en los focos de la hipérbola, por lo que, la diferencia de las distancias desde el barco hasta cada estación es de 100 metros.
De acuerdo con la definición de la hipérbola, esta diferencia es igual a $2a$, por lo que $a = 50$.
Los vértices de la hipérbola se localizan sobre el mismo eje $(-50, 0)$ y $(50, 0)$.

Dado que el eje transversal de la hipérbola es el eje x, la forma de la ecuación de ella es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Utilizando la ecuación $b^2 = c^2 - a^2$, podemos encontrar el valor de b^2.

$$
\begin{aligned}
b^2 &= c^2 - a^2 \\
b^2 &= (200)^2 - (50)^2 \\
b^2 &= 37500
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{37500} = 1$.

b) Si el barco se encuentra a 60 metros de la costa, sea $y = 60$ en la ecuación de la hipérbola y resuelve para x.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{37500} &= 1 \\
\frac{x^2}{2500} &= 1 + \frac{(60)^2}{37500} \\
\frac{x^2}{2500} &= 1.096 \\
x^2 &= 2500(1.096) \\
x &= \sqrt{2740} \quad 52.3
\end{aligned}
$$

Puesto que el barco se ubica más cerca de la estación B que de la estación A, utilizamos el valor positivo de x para localizar el barco en las coordenadas $(52.3, 60)$.

Conclusiones

La lucha constante que tiene la academia por introducir nuevos enfoques filosóficos y pedagógicos para el estudio de la matemática en la enseñanza básica, media y superior, no ha logrado aminorar la devastadora estructura de pensamiento centrada en la enseñanza de memoria que le ofrece al estudiante una definición o una fórmula, para luego resolver ejercicios siguiendo patrones de imitación, sin lograr un verdadero aprendizaje ya que los estudiantes no entienden a veces lo que están haciendo, y mucho menos se logra que éste interiorice los conceptos y procesos matemáticos para posteriormente aplicarlos en diversas situaciones bajo una estructura cognitiva de forma sustantiva.

Desarrollar habilidades en alumnos que llegan con un bagaje matemático deficiente no es labor sencilla, esto se vio a lo largo de las Prácticas Docentes, lo cual dificulta nuestra labor mas no la imposibilita. Una habilidad es el agente que permite a una persona manejar el conocimiento disponible, una capacidad se maneja con frecuencia con el potencial para poner en juego varias habilidades ante una situación, por ejemplo tomar decisiones o resolver problemas, con esta propuesta se pretende que el alumno profundice su capacidad de raciocinio, habilidad en el manejo del lenguaje algebraico, destreza en las operaciones algebraicas y no algebraicas, habilidad y destreza para graficar una función y capacidad para determinar si la solución encontrada es la adecuada, tal vez suene imposible pero al probar este material los alumnos demostraron un marcado interés por la nueva manera de aprender en su clase de matemáticas, la motivación positiva funciona, ya que al ver el material manifestaron curiosidad, disposición y agrado.

Cuando se piloteo el material se manifestaron algunos problemas que ya habíamos mencionado, que afectan el aprendizaje, varios chicos se encontraban en medio del divorcio de sus padres, falta de recursos económicos y hasta un pleito entre novios, confirmando que esto afecta su rendimiento. Esta problemática en innumerables ocasiones puede orillarlos a comportarse de manera que su conducta pueda ser calificada como dependiente, intransigente o irresponsable, razones importantes para tener siempre presente que tratamos con material humano y esto exige un mayor compromiso por parte del docente.

Considerando la estructura y secuenciación del contenido temático de las unidades antes mencionadas, se encuentran varios aspectos que no contribuyen a cumplir los objetivos de dicha asignatura debido a que la extensión del programa comprende once unidades temáticas, esto se convierte en excesiva carga de trabajo para el docente y el alumnado debido al corto tiempo del cual disponemos en nuestros cursos regulares, que muchas veces se presentan diferentes actividades que no nos permiten respetar la planeación y que son enteramente ajenas a nosotros como pueden ser la suspensión de clases, el cierre de instalaciones, incapacidad médica del profesorado y lo que considero más importante *las deficiencias en sus conocimientos previos y el insuficiente bagaje* matemático con el que nos llegan muchos de nuestros alumnos y que no nos permiten avanzar como se planeó, se debe efectuar un ajuste de acuerdo al estado del grupo, con el fin de alcanzar la mayor parte de los objetivos y que continúen su camino de manera satisfactoria. Utilizando la resolución de problemas, se puede abarcar en un solo problema varios contenidos del programa lo que permitirá también optimizar el tiempo dentro del aula.

Al aplicar el material en el grupo, al resolver los problemas, el alumno identificó la importancia de haber aprendido los conocimientos previos de Álgebra y del curso de Geometría Analítica considerándolos un lenguaje y una herramienta que lo vincula con temas posteriores y con su entorno social ya que se les mostraron las aplicaciones de los temas vistos.

Durante las sesiones se detectó la habilidad de los alumnos para interpolar y extrapolar información verbalmente, esto al ser aprovechado nos puede permitir mejorar el aprendizaje de nuestros alumnos.

Debido al tiempo que había pasado desde que les enseñaron algunos conceptos ellos mostraron “olvido”, por lo que debemos buscar reafirmar conocimientos que ellos utilizarán en sus cursos posteriores.

El instrumento empleado para detectar algunas emociones y temas que les inquietaban que llamamos “Registro de Aprendizaje” por medio del cual ellos pudieron manifestar de manera escrita dichas emociones, funcionó como se esperaba y nos sirvió como guía.

Se observó que las aplicaciones los entusiasman y los predispone de manera positiva a recibir nueva información.

El usar diversas estrategias oportunas, pertinentes y adecuadas, como lo es el “verbalizar” los contenidos y conceptos les permite recordar más fácilmente, les costó trabajo, pero lograron descubrir muchas cosas que no recordaban.

Pedirles que piensen qué es lo que se les dificulta más, también les costó trabajo ya que la autoevaluación (otra estrategia) no estamos acostumbrados a llevarla a cabo y además a ser críticos desarrollando su capacidad de análisis, uno de los objetivos de esta propuesta.

La evaluación del aprendizaje es una actividad difícil de llevar a cabo, tiene que ver con muchos aspectos, por lo tanto nos puede llevar al error humano, es importante evaluar cada aspecto del educando aunque no por esto se le deba asignar una calificación numérica a cada uno de estos aspectos.

Se deben considerar muchos aspectos por medio de los cuáles se logre detectar si se logró el aprendizaje pretendido o en qué grado tal objetivo se alcanzó. Debemos tomar en cuenta el proceso completo de enseñanza-aprendizaje y el proceso de desarrollo personal ya que cada alumno es un sujeto particular.

Conclusiones particulares de la investigación:

* La mayoría de los entrevistados dijeron que sabían las fórmulas y algoritmos básicos, pues las habían aprendido en el curso de geometría memorizándolas vagamente pero no recordaban cómo se utilizaban no tenían la certeza de que fuera correcto su procedimiento, como

señalábamos en la introducción de este trabajo, muchos piensan que únicamente la memoria los llevará al éxito,.

* De acuerdo a lo que esperábamos, no les fue sencillo encontrar las soluciones de los problemas rápidamente y necesitaron la guía del docente, pero la mayoría de ellos llegó a la solución adecuada.

* Resulta que les es más difícil trabajar con algunos problemas de circunferencias que con la misma hipérbola. Esto debido a que se sienten muy familiarizados con la circunferencia y lo hacen con menos cuidado que con la hipérbola.

La formación disciplinaria necesaria correspondiente a los contenidos en el campo de conocimiento de matemáticas está acorde con las necesidades de la Enseñanza Media Superior, al unir las tres líneas de conocimiento que componen la Maestría (socio-educativa, ético-educativa y psicopedagógico-didáctica), se logró la obtención de un producto que es una alternativa viable para mejorar el proceso de aprendizaje en el nivel bachillerato. Se requiere implantar poco a poco métodos diferentes de enseñanza que logren aprendizajes significativos. Es imperativo que los docentes nos mantengamos en constante actualización, manteniendo nuestro compromiso con la Educación en México.

Dentro de las limitaciones de esta propuesta encontramos claramente que el docente debe elegir y cambiar de la enseñanza tradicional a la resolución de problemas preparando el material adecuado, actualizándose, buscando alternativas durante la clase que le permitan lograr que los y las alumnas aprendan, compromiso que no es fácil adquirir después de varios años de dar clase.

Se requiere material impreso y fotocopias lo que implica una inversión, que en ocasiones el alumno no podrá pagarlo.

La planeación del curso debe hacerse cuidadosamente logrando abarcar todos los temas del programa. Sólo contiene temas de Matemáticas V (curso de quinto año).

Debido a los resultados obtenidos yo propongo que:

a) Esta propuesta podría ser utilizada en alumnos durante los tres años de bachillerato, para darles un seguimiento que nos permita observar los resultados y darnos cuenta del impacto real sobre el problema planteado al principio de este trabajo.
b) Se debe crear el material necesario para los cursos de cuarto y sexto año, de acuerdo al programa oficial.
c) Se dé a conocer a los profesores las bondades y ventajas de dicha forma de enseñanza.

Bibliografía

1. POLYA, G, "*Cómo plantear y resolver problemas*", Editorial Trillas, México, 2002.

2. GONZÁLEZ CAPETILLO, OLGA, et. al*.,* *"El trabajo docente"*, Editorial Trillas 2ª. ed., México, 1999.

3. QUESADA, ROCÍO, *"Cómo planear la enseñanza estratégica"*, Editorial Limusa, México, 2003.

4. ARREDONDO, VÍCTOR, et. al, *"Didáctica general"*, Editorial Limusa 3ª. ed, México, 2004.

5. BARABTARLO, ANITA, *"Investigación acción"*, Editorial Castellanos Editores 2ª. ed, México, 2002.

6. BIXIO, CECILIA, *"Cómo planificar y evaluar en el aula"*, Editorial Homo Sapiens Ediciones 2ª. ed, Argentina, 2004.

7. RUIZ BASTO, JOAQUÍN, *"Geometría analítica"*, Editorial Publicaciones Cultural, 1ª. ed, México, 2002.

8. DE OTEYZA DE OTEYZA, ELENA, et al, *"Geometría analítica y trigonometría",* Editorial Prentice Hall 1ª. ed, México, 2001.

9. RAMÍREZ GALARZA, ANA IRENE, *"Geometría analítica, una introducción a la geometría",* Editorial Las Prensas de Ciencias 2ª. ed, México, 2004.

10. LEHMANN, CHARLES, *"Geometría analítica"*, Editorial Limusa 5ª ed, México, 1982.

11. HOLLIDAY, BERCHIE, et al, *"Geometría analítica y trigonometría"*, Editorial McGraw-Hill, México, 2002.

12. DE LA BORBOLLA, FRANCISCO, *"Geometría analítica"*, Editorial Esfinge 6ª ed, México, 1999.

13. SANTOS TRIGO, LUZ MANUEL, *"Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas"* , Didáctica Lecturas, Editorial Grupo Editorial Iberoamérica 2ª ed, México, 1997.

14. GELLATLY, ANGUS, et al, *"La inteligencia hábil, el desarrollo de las capacidades cognitivas"*, Editorial Aique, México, 1986.

15. PIAGET, J, et al, *“La enseñanza de las matemáticas modernas”,* Editorial Madrid, 1986.

16. POZO, J,I, *“Teorías cognitivas del aprendizaje”,* Editorial Morata 6ª ed, Madrid, 1999 .

17. DÍAZ BARRIGA, A, *“Estrategias docentes para un aprendizaje significativo”,* Editorial Mc Graw-Hill, México 2001.

18. SANCHEZ, M.A., *“Desarrollo de habilidades de pensamiento: razonamiento verbal y solución de problemas”,* Editorial Trillas, México, 1996.

19. POZO, J, I, *La solución de problemas”,* Editorial Morata 6ª ed, Madrid, 1994.

20. KILPATRICK, J, et al, *“Educación Matemática”,* Editorial Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

21. CANTORAL, R, et al, *“Desarrollo del pensamiento matemático”,* Editorial Trillas, México, 2000.

22. FRIDMAN LEV, M, *“Metodología para resolver problemas de Matemáticas”,* Editorial Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1995.

23. ARTIGUE, M, *“Ingeniería didáctica en educación matemática”,* Editorial Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1995.

24. SANTOS TRIGO, L, *“Perspectivas en Educación Matemática”,* Editorial Grupo Editorial Iberoamericana ,1996.

25. ALVARADO, D, *“Creencias de estudiantes de bachillerato sobre aspectos de la enseñanza de las matemáticas”,* CINVESTAV, 2002.

26. MORA, D, *“Aprendizaje y enseñanza”,* Editorial Campo Iris, La Paz Bolivia, 2002.

27. BAZÁN, J, *“Aportes, Educación Media Superior”,* Volumen I, CCH, UNAM, 2001.

ANEXO

1. Cuestionario
2. Encuesta
3. Registro de aprendizaje
4. Problemas resueltos en clase

Anexo 1

Cuestionario

1. ¿Qué te pareció el empleo de resolución de problemas en la clase?

2. ¿Cómo te gustaría que le dieran los cursos de Matemáticas?

3. En términos comparativos podrías decirme ¿Qué manera de impartir la materia de Matemáticas le parece mejor, la tradicional o utilizando la resolución de problemas? ¿Porqué?

4. ¿Qué opinas de los maestros de Matemáticas?

Anexo 2

Encuesta

1. Consideras que la materia de Matemáticas es:

a) Muy difícil	a) Muy útil
b) Difícil	b) Útil
c) Medianamente difícil	c) Medianamente útil
d) Fácil	d) No es útil

2. Piensas que para entender las matemáticas se requiere:

a) Muy buena memoria	a) Estudiar mucho	a) Saber de memoria las fórmulas
b) Buena memoria	b) Estudiar	b) Saber demostraciones
c) Memoria normal	c) Estudiar poco	c) Hacer muchos ejercicios
d) Nada	d) Nada	d) Resolver problemas aunque sean pocos

3. Las matemáticas que te enseñan en la escuela son:

En su mayor parte fórmulas y procedimientos que deben memorizarse	Provocadoras de pensamiento
a) Muy cierto	a) Muy cierto
b) Algo cierto	b) Algo cierto
c) No muy cierto	c) No muy cierto
d) Falso	d) Falso

Un lenguaje para representar relaciones numéricas

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

4. Cuando el maestro hace una pregunta en la clase de matemáticas:

Se tiene que pensar durante mucho tiempo para responder correctamente	El estudiante que entiende necesita pocos segundos para llegar a una respuesta
a) Muy cierto	a) Muy cierto
b) Algo cierto	b) Algo cierto
c) No muy cierto	c) No muy cierto
d) Falso	d) Falso

5. Cuando el profesor hace una pregunta que no puedo responder de inmediato:

El maestro responderá la pregunta	El maestro no debe de responderla y dejarme pensarla
a) Muy cierto	a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Podemos encontrar la respuesta discutiendo en equipo

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

6. Un buen problema de matemáticas:

No puede tener más de una solución

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Debe ser muy claro en lo que se pida que se haga

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Se debe poder resolver en una clase a lo más

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

7. La mejor manera de desempeñarse bien en Matemáticas V es memorizando las fórmulas

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

8. Los buenos maestros de matemáticas, muestran diferentes maneras de ver el mismo problema

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

9. El trabajo en equipo

Favorece nuestra comprensión de la matemática

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Es bueno pero se pierde mucho tiempo

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Sólo algunos resuelven el problema, no trabajan todos los integrantes

a) Muy cierto

b) Algo cierto

Es bueno si el profesor orienta la discusión y ayuda a resolver los problemas cuando el equipo tiene dudas

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

10. Cuando resuelves un problema

Lo importante es llegar a la solución correcta

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Lo importante no es el proceso de solución sino Llegar a la respuesta correcta

a) Muy cierto
b) Algo cierto
c) No muy cierto
d) Falso

c) No muy cierto

d) Falso

Es bueno escribir los procedimientos que llevaron a su solución

a) Muy cierto

b) Algo cierto

c) No muy cierto

d) Falso

Piensa que el tiempo de clase es insuficiente para escribir y resolver un problema

a) Muy cierto
b) Algo cierto
c) No muy cierto
d) Falso

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

Escuela Nacional Preparatoria plantel 6
“Antonio Caso”

Registro de aprendizaje

Nombre____fecha___________
Edad _____________ Grupo____________ Sexo F M
Contesta lo más concreto y breve posible. Si lo juzgas necesario, puedes ocupar el reverso de la hoja para completar tus respuestas.

1. Una cosa que recuerdo de la clase de hoy es...

2. Todavía sigo confundid@ con respecto a...

3. Lo que en este momento resulta verdaderamente difícil para mí es...

4. ¿Cómo, lo que aprendí hoy, se conecta con algo que yo ya sabía?

5. ¿Qué entendí hoy que no había entendido con anterioridad?

6. El problema que más trabajo me costó de la lección fue...

7. La actividad que más me gustó del día de hoy fue...

8. Explica los pasos que seguiste para resolver los problemas del día de hoy.

9. Un nuevo descubrimiento para mí fue...

10. La emoción predominante frente a la enseñanza de las matemáticas hoy fue de...

Aplicó: *Silvia Canabal Cáceres*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Cuestionario

PROFESOR:

MATERIA:

NOMBRE DEL ALUMNO:

1. ¿Que te pareció el empleo de resolucion de problemas en la clase?
Pues bien porque nos hace pensar más y nos ayuda a aclarar nuestras dudas.

2. ¿Como te gustaria que te dieran los cursos de matemáticas?
Creo que con problemas, porque te van explicando y lo vas haciendo, pero tu piensas como, y así se te graba mas el procedimiento.

3. En términos comparativos podrías decirme ¿Que manera de impartir la materia de Matemáticas te parece mejor, la tradicional o utilizando la resolución de problemas? ¿porque?
Dependiendo del tema, pero en general creo que la de problemas, porque nosotros vamos viendo las soluciones que les podemos dar, y ya si no entendemos o tenemos dudas, preguntamos y continuamos resolviendolo. En el tradicional es primero la explicación, pero no sabemos después emplearla en los ejercicios.

¿Que opinas de los maestros de Matemáticas?
En este caso no se puede generalizar porque hay como de distintos tipos. Algunos que me han tocado siento que creen que estamos en su nivel, y aunque saben mucho nosotros no les entendemos. Pero hay otros que sí te explican paso por paso y resuelven tus dudas, y creo que esos son mejores maestros.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: Cuestionario

PROFESOR:

MATERIA: Matemáticas

NOMBRE DEL ALUMNO:

...é te pareció el empleo de resolución de problemas en la clase?
Mejor que con maestros anteriores ya que me fue más facil entenderlo

...ómo te dieran los cursos de matemáticas?
Pues poniendo varios ejercicios.

En términos comparativos podrías decirme:
...ué manera de impartir la materia de matemáticas te parece mejor,
... tradicional o utilizando la resolución
...e problemas?
¿Por qué?

Pues las dos me gustan pero en este curso escolar me acomode y entendí mejor los problemas matemáticos con la resolución de problemas.

¿Qué opinas de los maestros de matemáticas?

:: Depende quien me toque y su forma de ser, y claro de enseñar, pero desde la secundaria para aca he tenido dos ~~las~~ muy buenos maestros, con los que he podido aprender y entender las matemáticas, y no es por se feminista ni nada pero los dos han sido mujeres.

Encuesta

Cuestionario

1.- Consideras que la materia de Matemáticas es

1)Muy difícil
2)Difícil
3)Medianamente difícil
4)Fácil

1) Muy útil
2) Útil
3) Medianamente útil
4) No es útil

2.- Piensas que para entender las matemáticas se requiere

1) Muy buena memoria
2) Buena memoria
3) Memoria normal
4) Nada

1) Estudiar mucho
2) Estudiar
3) Estudiar poco
4) Nada

1)Saber de memoria las fórmulas
2)Saber demostraciones
3)Hacer muchos ejercicios
4)Resolver problemas aunque sean pocos

Las matemáticas que te enseñan en la escuela son

En su mayor parte fórmulas y procedimientos que deben memorizarse

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Provocadoras de pensamiento

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Un lenguaje para representar relaciones numéricas

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Cuando el maestro hace una pregunta en la clase de matemáticas:

Se tiene que pensar durante mucho tiempo para responder correctamente

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

El estudiante que entiende necesita pocos segundos para llegar a una respuesta

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Cuando el profesor hace una pregunta que no puedo responder de inmediato:

El maestro responderá la pregunta

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

El maestro no debe de responderla y dejarme pensarla

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Podemos encontrar la respuesta discutiendo en equipo

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Un buen problema de matemáticas:

No puede tener más de una solución

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Debe ser muy claro en lo que se pida que se haga

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Se debe poder resolver en una clase a lo más

1) Muy cierto

~~2)~~ Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Se tiene que memorizar la forma de encontrar las ecuaciones de las cónicas

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

Los buenos maestros de matemáticas, muestran diferentes maneras de ver el mismo problema

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

La mejor manera de desempeñarse bien en Matemáticas V es memorizando las fórmulas

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

Los verdaderos problemas de matemáticas pueden resolverse por sentido común en lugar de las reglas que se aprenden en la escuela

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

El trabajo en equipo

Favorece nuestra comprensión de la matemática

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Es bueno pero se pierde mucho tiempo

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

Sólo algunos resuelven el problema, no trabajan todos los integrantes

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

Es bueno si el profesor orienta la discusión y ayuda a resolver los problemas cuando el equipo tiene dudas

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Cuando resuelves un problema

Lo importante es llegar a la solución correcta

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Es bueno escribir los procedimientos que llevaron a su solución

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Lo importante no es el proceso de solución sino Llegar a la respuesta correcta

1) Muy cierto

~~2)~~ Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Piensa que el tiempo de clase es insuficiente para escribir y resolver un problema

1) Muy cierto

~~2)~~ Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Encuesta

Cuestionario

1.- Consideras que la materia de M

1)Muy difícil | 1) M

2)Difícil | ~~2)~~ U

~~3)~~ Medianamente difícil | 3) M

4)Fácil | 4) N

2.- Piensas que para entender las m

1) Muy buena memoria | 1) Estudiar m

~~2)~~ Buena memoria | ~~2)~~ Estudiar

3) Memoria normal | 3) Estudiar p

4) Nada | 4) Nada

Las matemáticas que te enseñan e

En su mayor parte fórmulas y proce que deben memorizarse

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

Un lenguaje para representar relaci

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Cuando el maestro hace una pregu

Se tiene que pensar durante much responder correctamente

1) Muy cierto

2) Algo cierto

~~3)~~ No muy cierto

4) Falso

Cuando el profesor hace una pregu

El maestro responderá la pregunta

1) Muy cierto

~~2)~~ Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Podemos encontrar la respuesta di

1) Muy cierto

~~2)~~ Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Un buen problema de matemáticas

No puede tener más de una soluci

~~1)~~ Muy cierto

2) Algo cierto

3) No muy cierto

4) Falso

Encuesta
Cuestionario

1.- Consideras que la materia de Matemáticas es

1)Muy difícil — 1) Muy útil
2)Difícil — X) Útil
X)Medianamente difícil — 3) Medianamente útil
4)Fácil — 4) No es útil

2.- Piensas que para entender las matemáticas se requiere

1) Muy buena memoria — 1) Estudiar mucho — 1)Saber de memoria las formulas
X) Buena memoria — X) Estudiar — 2)Saber demostraciones
3) Memoria normal — 3) Estudiar poco — 3)Hacer muchos ejercicios
4) Nada — 4) Nada — X)Resolver problemas aunque sean pocos

Las matemáticas que te enseñan en la escuela son

En su mayor parte fórmulas y procedimientos que deben memorizarse

1) Muy cierto
2) Algo cierto
X) No muy cierto
4) Falso

Provocadoras de pensamiento

X) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Un lenguaje para representar relaciones numéricas

X) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Cuando el maestro hace una pregunta en la clase de matemáticas:

Se tiene que pensar durante mucho tiempo para responder correctamente

1) Muy cierto
2) Algo cierto
X) No muy cierto
4) Falso

El estudiante que entiende necesita pocos segundos para llegar a una respuesta

X) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Cuando el profesor hace una pregunta que no puedo responder de inmediato:

El maestro responderá la pregunta

1) Muy cierto
X) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

El maestro no debe de responderla y dejarme pensarla

1) Muy cierto
X) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Podemos encontrar la respuesta discutiendo en equipo

1) Muy cierto
X) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Un buen problema de matemáticas:

No puede tener más de una solución

X) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Debe ser muy claro en lo que se pida que se haga

X) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Se debe poder resolver en una clase a lo más

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

La mejor manera de desempeñarse bien en Matemáticas V es memorizando las fórmulas

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Se tiene que memorizar la forma de encontrar las ecuaciones de las cónicas

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Los verdaderos problemas de matemáticas pueden resolverse por sentido común en lugar de las reglas que se aprenden en la escuela

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Los buenos maestros de matemáticas, muestran diferentes maneras de ver el mismo problema

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

El trabajo en equipo

Favorece nuestra comprensión de la matemática

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Es bueno pero se pierde mucho tiempo

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Sólo algunos resuelven el problema, no trabajan todos los integrantes

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Es bueno si el profesor orienta la discusión y ayuda a resolver los problemas cuando el equipo tiene dudas

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Cuando resuelves un problema

Lo importante es llegar a la solución correcta

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Es bueno escribir los procedimientos que llevaron a su solución

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Lo importante no es el proceso de solución sino Llegar a la respuesta correcta

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Piensa que el tiempo de clase es insuficiente para escribir y resolver un problema

1) Muy cierto
2) Algo cierto
3) No muy cierto
4) Falso

Esc

Registro de aprendiza

Nombre ____
Edad ____
Contesta lo más concreto
de la hoja para completar t

1. Una cosa que recuerdo
   baricentro
2. Todavía sigo confundi
   Sacar algunos
3. Lo que en este momen
   Sustituir y f
4. ¿Cómo, lo que aprendí
   Con Sacar medi
   variables y
5. ¿Qué entendí hoy que
   Sacar Ortocen
6. El problema que más t
   sacar el orto
7. La actividad que más n
   Que fue muy
   repasamos, p
8. Explica los pasos que
9. Un nuevo descubrimie
   con números, S
   aunque cambien
10. La emoción predomina
    Sorpresa y S
    aunque con un

s V es

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MADEMS
en Docencia
para la Educación Media Superior

Escuela Nacional Preparatoria plantel 6
"Antonio Caso"

Registro de aprendizaje

Nombre ______________________________ fecha ________

Edad __________ Grupo 501 ________ Sexo F M

Contesta lo más concreto y breve posible. Si lo juzgas necesario, puedes ocupar el reverso de la hoja para completar tus respuestas.

1. Una cosa que recuerdo de la clase de hoy es... Como sacar las alturas, baricentro ~~y~~ ortocentro y circuncentro.

2. Todavía sigo confundid@ con respecto a...
Sacar algunos despejes o factorizar.

3. Lo que en este momento resulta verdaderamente difícil para mí es...
Sustituir y factorizar (identificar cuando factorizar)

4. ¿Cómo, lo que aprendí hoy, se conecta con algo que yo ya sabía?
Con sacar medianas, alturas y mediatrices pero ahora con variables y no con números

5. ¿Qué entendí hoy que no había entendido con anterioridad?
Sacar Ortocentro, baricentro y circuncentro, que se hace en c/u

6. El problema que más trabajo me costó de la lección fue...
sacar el ortocentro ya que tenía muchas variables o letras.

7. La actividad que más me gustó del día de hoy fue...
Que fue muy activa y que participabamos con todo el grupo, repasamos, pregunte a la maestra y tambien a mis compañeros

8. Explica los pasos que seguiste para resolver los problemas del día de hoy.
Atrás →

u solución

9. Un nuevo descubrimiento para mí fue... Que es más fácil con variables que con números, sólo que te confundes más, y que es lo mismo aunque cambien los datos, y que si sé hacerlo y no es difícil

10. La emoción predominante frente a la enseñanza de las matemáticas hoy fue de...
Sorpresa y saber que si sé hacer las cosas aunque con un poco de confusión

Aplicó: Silvia Canabal Cáceres

8. Primero saqué las pendientes y sus perpendiculares, después apliqué la fórmula de las alturas y posteriormente saqué el ortocentro.
Segundo realicé con los puntos medios y el dato del triángulo con su fórmula de las medianas y empecé a sacar su baricentro.

UN
AU

Escuela

Registro de aprendizaje

Nombre________________
Edad 17________ Grup
Contesta lo más concreto y brev
de la hoja para completar tus res

1. Una cosa que recuerdo de la
   Resolvi un ejerci
   Mediatrices
2. Todavía sigo confundid@ co
   nada
3. Lo que en este momento resu
   Hacer rápido los
4. ¿Cómo, lo que aprendí hoy, s
   Pues en la parte
   suma y resta
5. ¿Qué entendí hoy que no hab
   Nada
6. El problema que más trabajo
   Las alturas
7. La actividad que más me gust
   Resolver el ejerc
8. Explica los pasos que seguist
   Sacar las median
   sacar las coorden
9. Un nuevo descubrimiento par
   Que se puede hac
10. La emoción predominante fre
   Ansiedad y des

mente

triángul

su

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

MADEMS
en Docencia
para la Educación Media Superior

Escuela Nacional Preparatoria plantel 6
"Antonio Caso"

Registro de aprendizaje

Nombre________________ fecha________

Edad 17 Grupo 561 Sexo F (M)

Contesta lo más concreto y breve posible. Si lo juzgas necesario, puedes ocupar el reverso de la hoja para completar tus respuestas.

1. Una cosa que recuerdo de la clase de hoy es...
   Resolvi un ejercicio muy interesante de Alturas, Medianas y Mediatrices
2. Todavía sigo confundid@ con respecto a...
   nada
3. Lo que en este momento resulta verdaderamente difícil para mí es...
   Hacer rápido los ejercicios
4. ¿Cómo, lo que aprendí hoy, se conecta con algo que yo ya sabía?
   Pues en la parte donde utilizas la igualacion o el metodo de suma y resta
5. ¿Qué entendí hoy que no había entendido con anterioridad?
   Nada
6. El problema que más trabajo me costó de la lección fue...
   Las alturas
7. La actividad que más me gustó del día de hoy fue...
   Resolver el ejercicio que mencione al principio
8. Explica los pasos que seguiste para resolver los problemas del día de hoy.
   Sacar las medianas, luego sacar las alturas y por ultimo sacar las coordenadas del ortocentro
9. Un nuevo descubrimiento para mí fue...
   Que se puede hacer el ejercicio con literales
10. La emoción predominante frente a la enseñanza de las matemáticas hoy fue de...
    Ansiedad y desesperacion

Aplicó: Silvia Canabal Cáceres

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

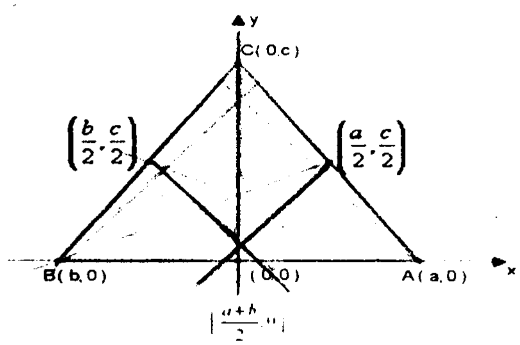
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
Escuela Nacional Preparatoria # 6
"Antonio Caso"

MADEMS
en Docencia
para la Educación Media Superior
MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo:	Fecha:

Problema

Demostrar analíticamente que el baricentro, circuncentro y ortocentro de cualquier triángulo son colineales. La recta que los une se llama recta de Euler.



$a > 0$
$b < 0$
$c > 0$

Alturas

$A(a,0) \quad C(0,c)$

$m_{AC} = \frac{c-0}{0-a} = \frac{c}{-a}$

$m_\perp = \frac{a}{c}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{a}{c}(x-b)$

$cy = ax - ab$

$\boxed{ax - ab - cy = 0}$

$B(b,0) \quad C(0,c)$

$m_{BC} = \frac{c-0}{0-b} = \frac{c}{-b} \quad m_\perp = \frac{b}{c}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{b}{c}(x-a)$

$cy = bx - ba$

$\boxed{bx - ba - cy = 0}$

Medianas

$A(a,0) \quad C(0,c)$

$Pm_{AC} = x = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2} \quad y = \frac{0+c}{2} = \frac{c}{2}$

$B(b,0) \quad Pm_{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{\frac{c}{2} - 0}{\frac{a}{2} - b}(x-b)$

$y = \frac{2c}{2a-4b}(x-b)$

$2ay - 4by = 2cx - 2cb$

$\boxed{2cx - 2ay + 4by - 2cb = 0}$

$Pm_{BC} = x = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2} \quad y = \frac{0+c}{2} = \frac{c}{2}$

$A(a,0) \; Pm_{BC}\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$y - 0 = \frac{\frac{c}{2} - 0}{\frac{b-2a}{2}}(x-a)$

$y = \frac{2c}{2b-4a}(x-a)$

$2by - 4ay = 2cx - 2ca$

$\boxed{2cx - 2ca - 2by + 4ay = 0}$

Mediatrices

$Pm_{BC} = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \quad m_\perp = \frac{b}{c}$

$y - \frac{c}{2} = \frac{b}{c}\left(x - \frac{b}{2}\right)$

$c\left(y - \frac{c}{2}\right) = b\left(x - \frac{b}{2}\right)$

$cy - \frac{c^2}{2} = bx - \frac{b^2}{2}$

$2cy - 2c^2 = 2bx - 2b^2$

$\boxed{2bx - 2b^2 - 2cy + 2c^2 = 0}$

$Pm_{AC}\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right) \quad m_\perp = \frac{a}{c}$

$y - \frac{c}{2} = \frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{2}\right)$

$c\left(y - \frac{c}{2}\right) = a\left(x - \frac{a}{2}\right)$

$cy - \frac{c^2}{2} = ax - \frac{a^2}{2}$

$2cy - 2c^2 = 2ax - 2a^2$

$\boxed{2ax - 2a^2 - 2cy + 2c^2 = 0}$

Ortocentro

$ax - ab - cy = 0$

$-1(bx - ba - cy = 0)$

$ax - ab - cy = 0$

$-bx + ab + cy = 0$

$ax - bx = 0$

$x(a-b) = 0$

$x = \frac{0}{a-b}$

$\boxed{x = 0}$

$-cy = ab$

$-y = \frac{ab}{c}$

$\boxed{y = -\frac{ab}{c}}$

$O\left(0, \frac{-ab}{c}\right)$

Baricentro

UNIVERSI

MAESTRÍA EN DO

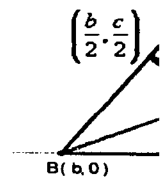
Escue

Nombre:

Grupo: 501

Problema

Demostrar analíticamente que el
colineales. La recta que los une se l



Alturas

$B(b,0)$ m_{AC} $A(a,c)$ $C(0,c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $y - 0 = \frac{a}{c}(x -$

$m = \frac{c-0}{0-a} = \frac{c}{-a}$ $cy = ax - ab$

$m = \frac{a}{c}$ $ax - ab - cy =$

$x = \frac{cy + ab}{a}$

$\frac{cy + ab}{a} = \frac{ab}{b}$

$b(cy + ab) = a($

$bcy + ab^2 = a^2$

$-a^2b - acy + bcy +$

$-acy + bcy = -ab^2$

$y(-ac + bc) =$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Escuela Nacional Preparatoria # 6

"Antonio Caso"

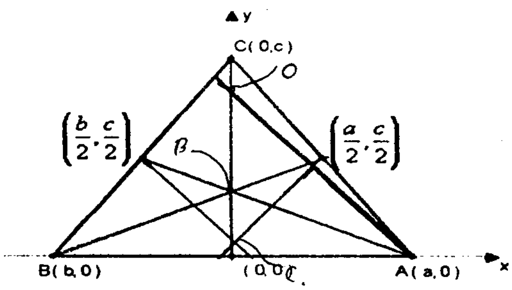
MADEMS en Docencia para la Educación Media Superior

MATEMÁTICAS

Nombre:	
Grupo: 501	Fecha:

Problema

Demostrar analíticamente que el baricentro, circuncentro y ortocentro de cualquier triángulo son colineales. La recta que los une se llama recta de Euler.



$\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$

$a > 0$ 1

$b < 0$ −1

$c > 0$ 2

...

(b,c) m_{AC} $A(a,0)$ $C(0,c)$ $\qquad$ $A(a,0)$ m_{BC} $B(b,0)$ $C(0,c)$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\qquad y-0 = \frac{a}{c}(x-b)$ $\qquad m_{BC} = \frac{c-0}{0-b}$

$m = \frac{c-0}{0-a} = \frac{c}{-a}$ $\qquad cy = ax-ab$ $\qquad m_{BC} = \frac{c}{-b}$ $\quad m_\perp = \frac{b}{c}$

$m_\perp = \frac{a}{c}$ $\qquad ax-ab-cy=0$ $\qquad y-0 = \frac{b}{c}(x-a)$

$cy = bx-ab$

$bx-ab-cy=0$

$x = \frac{cy+ab}{a}$ $\qquad x = \frac{ab+cy}{b}$ $\qquad x = ab + c\frac{ab^2+a^2b}{-ac+bc}$

$\frac{cy+ab}{a} = \frac{ab+cy}{b}$ $\qquad$ ① $ax-ab-cy=0$ $\qquad x = ab+\frac{ab^2c+a^2bc}{-ac+bc}$

② $bx-ab-cy=0$ $\qquad \frac{-ac+bc}{b}$

$b(cy+ab) = a(ab+cy)$

$bcy+ab^2 = a^2b+acy$ $\qquad \begin{array}{l} ax - \cancel{ab} \\ -bx + \cancel{ab} + cy \end{array}$ $\qquad x=$

$-a^2b-acy+bcy+ab^2=0$ $\qquad y = \frac{ab^2-a^2b}{-ac+bc}$ $\qquad y=$

$-acy+bcy = -ab^2+a^2b$

$y(-ac+bc) =$

(19) Medianas

P_m P

$B(b,0)$ $P_{mAC}\left(\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$y-0=\frac{\frac{c}{2}-0}{\frac{a}{2}-b}(x-b)$$

$$y=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{a-2b}{2}}(x-b)$$

$$y=\frac{2c}{2a-4b}(x-b)$$

$$2ay-4by=2cx-2bc$$

$$2cx-2bc-2ay-4by=0$$

$$cx-bc-ay-2by=0$$

P_{mBC} $A(a,0)$

$P_{mBC}\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$y-0=\frac{\frac{c}{2}-0}{\frac{b}{2}-a}(x-a)$$

$$y=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{b-2a}{2}}(x-a)$$

$$y=\frac{2c}{2b-4a}(x-a)$$

$$2by-4ay=2cx-2ac$$

$$2cx-2ac-2by+4ay=0$$

$$cx-ac-by+2ay=0$$

$$x=\frac{ac+by-2ay}{c} \qquad x=\frac{+bc+ay+2by}{c}$$

$$ac^2+bcy-2acy=bc^2+acy+2bcy$$

Mediatrices

P_m m

$P_{mAC}\left(\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$ $m_{AC}=\frac{c}{-a}$

$m_{\perp}=\frac{a}{c}$

$$y-\frac{c}{2}=\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

$$cy-\frac{c^2}{2}=ax-\frac{a^2}{2}$$

$$ax-\frac{a^2}{2}-cy+\frac{c^2}{2}=0$$

$$2ax-a^2-2cy+c^2=0$$

P_{mCB} m_{CB}

$P_m\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ $m=\frac{c}{-b}$

$m_{\perp}=\frac{b}{c}$

$$y-\frac{c}{2}=\frac{b}{c}\left(x-\frac{b}{2}\right)$$

$$cy-\frac{c^2}{2}=bx-\frac{b^2}{2}$$

$$bx-\frac{b^2}{2}-cy+\frac{c^2}{2}=0$$

$$2bx-b^2-2cy+c^2=0$$