



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**MÉTODOS MATRICIALES PARA SERIES
RECURRENTE TIPO FIBONACCI**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

CYNTHIA BERENICE VIVEROS VERÁSTEGUI



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DOCTOR PEDRO EDUARDO MIRAMONTES VIDAL

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal
2. Dr. Francisco Larrión Riveroll
3. Dr. Javier Paez Cárdenas
4. Dra. María de Lourdes Esteva Peralta.
5. M. En C. María de Lourdes Velasco Arregui

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer de manera especial a mis padres la Dra. Gloria Verástegui Tavitas y el Dr. Alejandro Viveros Araiza; a mis sinodales el Dr. Francisco Larrión Riveroll, el Dr. Javier Paez Cárdenas, la Dra. María de Lourdes Esteva Peralta, la M. en C. María de Lourdes Velasco Arregui y desde luego a mi asesor y amigo el Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal. También quisiera agradecer al Mat. Luis Manuel Hernández Gallardo por sus aportaciones en la redacción del presente trabajo, a mi compañera Elizabeth Garcilazo Botello por su ayuda para llevar a cabo los trámites de titulación y a todas aquellas personas que lo hicieron posible.

Índice general

1. Introducción.	1
2. Antecedentes.	3
2.1. Fibonacci.....	3
2.1.1 Leonardo de Pisa	3
2.1.2 Leonardo y sus Conejos	7
2.2 Lucas	9
2.3 La proporción áurea	12
2.4 Espiral Logarítmica	17
3. Fenomenología	19
3.1 Filotaxia	19
4. Formulación Matricial de la sucesión de Fibonacci	29
4.1 Resultados Básicos	34
4.2 Fórmula binomial importante	39
4.3 La proporción áurea en términos matriciales	42
4.3.1 La Línea Áurea	45
4.4 Series de matrices Q de Fibonacci	47
4.5 Sumas binomiales.....	49
4.6 Un poco de historia	52
5. Formulación matricial de la sucesión de Lucas	55
5.1 Fórmula Bilineal	58
5.2 Series para la sucesión de Lucas	59
5.2.1 Sumas Binomiales	61
5.3 Generalización de valores iniciales	62
6. Discusión y Perspectivas	65

Capítulo 1

Introducción

La sucesión de Fibonacci ha sido tema para un sinnúmero de documentos desde que Leonardo de Pisa la planteara por primera vez como solución a un problema expuesto en *Liber Abacci* en el año de 1202. Desde entonces y hasta nuestros días mucho se ha dicho de esta sucesión y de sus aplicaciones: se han generado trabajos matemáticos, genéticos, arquitectónicos; frecuentemente aparece en obras de arte, novelas e incluso películas, y aún hoy el tema continúa siendo fascinante y cada vez sus aplicaciones más asombrosas.

En el presente trabajo se le intenta dar a las sucesiones un enfoque divulgativo, sin ánimo de abarcar todo lo referente a las mismas; posteriormente se trata de mostrar la manera analítica en que se construyen los métodos matriciales para las sucesiones de Fibonacci y Lucas, intentando en todo momento ser generoso con el lector, al tratar de explicar lo más sencillamente posible el desarrollo de dichos métodos matriciales. En los primeros capítulos se intenta dar una idea global del impacto que ha tenido esta sucesión en la cultura, la sociedad, la historia y la ciencia; en estos primeros capítulos la lectura está dirigida a toda clase de público, sin que se requiera algún conocimiento previo de matemáticas.

En el capítulo 2 se habla de los antecedentes de las sucesiones de Fibonacci y Lucas, así como una breve exposición de la proporción áurea. Por otro lado en el capítulo 3 se tratan ciertos fenómenos relacionados con la sucesión que son de gran interés, y que representan una muestra de la vasta fenomenología que existe alrededor de ella. Los capítulos 4 y 5 son la base del presente trabajo, es en dichos capítulos donde se desarrollan de manera analítica los métodos matriciales para las sucesiones de Fibonacci y Lucas y que consisten en su mayoría en desarrollos y resultados matemáticos sencillos; esta parte se

ha intentado redactar de manera que el lector pueda seguirla con fluidez, sin embargo, se recomienda que posea algún conocimiento en álgebra de matrices y algunos conocimientos básicos de cálculo. Finalmente en el capítulo 6 se concluye con una pequeña discusión de lo que le depara a la sucesión.

Capítulo 2

Antecedentes

0.1. Fibonacci

0.1.1. Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa o Leonardo Pisano, mejor conocido como Fibonacci¹, nace en Pisa aproximadamente en el año de 1170. No se conoce mucho acerca de su vida, las primeras referencias aparecen en sus propias publicaciones. Fue hijo de Guillermo, un miembro de la familia Bonacci. Fibonacci algunas veces se refería a sí mismo con el nombre de Bigollo, que significa *bueno para nada o viajero*, (Robertson 1995 b).

Fibonacci nació en Italia pero fue educado en el norte de África, donde su padre Guillermo, manejaba una oficina diplomática. El trabajo de su padre era representar a los mercaderes de la República de Pisa, quienes hacían transacciones en Bujía, posteriormente llamada Bougie y actualmente llamada Bejaia. Bejaia es un puerto del Mediterráneo en la parte noroeste de Argelia. Fibonacci estudió matemáticas en Bujía y viajó muchísimo con su padre, donde reconoció las numerosas ventajas del sistema matemático usado en los países que visitaban. Fibonacci escribe en su famoso libro *Liber Abaci* (1202):

Cuando mi padre me mantuvo a su lado en Bujía mientras era todavía un niño, y teniendo buen ojo para la utilidad y conveniencia futura, pidió que me quedara ahí y recibiera instrucción en la escuela de contabilidad; ahí, cuando fui introducido al arte indio de los nueve símbolos a través de una enseñanza extraordinaria, el conocimiento de este arte me complació rápidamente por encima de todo lo demás hasta llegar a comprenderlo, en donde quiera que había sido estudiado: Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza, y en todas sus formas, (Robertson 1995 b).

Fibonacci terminó sus viajes alrededor del año 1200 y en ese tiempo regresó a Pisa. Ahí escribió un gran número de textos que jugaron un papel importante

¹Fibonacci probablemente proviene del latín “filius Bonacci”, que significa “El hijo de Bonaccio”.

al revivir viejas habilidades matemáticas y haciendo significativas contribuciones propias. Fibonacci vivió en una época anterior a la imprenta, por lo que sus libros fueron escritos a mano y la única manera de obtener una copia de ellos era hacer otra manualmente. De algunos de sus libros aún se tienen ejemplares de *Liber abaci*(1202), *Practica geometriae*(1220), *Flos*(1225), y *Liber quadratorum*. Sin embargo, se sabe que escribió otros trabajos, que desafortunadamente se perdieron. Su libro acerca de aritmética comercial *Di minor guisa* está perdido, así como su comentario del libro X de los *Elementos de Euclides*, que contenía un tratamiento numérico de los números irracionales, y que había sido abordado por Euclides desde un punto de vista geométrico.

Uno puede pensar que en ese tiempo no existía gran apoyo a la educación y que Fibonacci pudo haber sido largamente ignorado, sin embargo, esto no sucedió así y un interés desbordado contribuyó fuertemente a su importancia. Fibonacci era un contemporáneo de Jordanus de Nemore², pero era un matemático mucho más sofisticado y sus logros eran claramente reconocidos.

Federico II había sido coronado rey de Alemania en 1212 y posteriormente coronado como emperador del sacro imperio romano germánico por el Papa en la iglesia de San Pedro en Roma en noviembre de 1220. Federico II controló Pisa y sus conflictos con Génova en el mar y Florencia en tierra y pasó sus años hasta 1227 consolidando su poder en Italia. El control del Estado fue introducido en el intercambio y la manufactura, así como sirvientes civiles que vigilaran el monopolio; para tales efectos, Federico II fundó en 1224 la Universidad de Nápoles.

Federico II supo del trabajo de Fibonacci, a través de los intelectuales de su corte, quienes mantenían correspondencia con Fibonacci desde su regreso a Pisa alrededor del año 1200. Estos intelectuales, incluidos Michele Scotto astrólogo de la corte, Theodorus Physicus filósofo de la corte y Dominicus Hipanus quien sugirió se entrevistara con Fibonacci en Pisa hacia el año 1225.

Juan de Palermo, otro miembro de la corte de Federico II, presentó un número de problemas y retos para el gran matemático Fibonacci. Tres de estos problemas fueron resueltos por Fibonacci, y dio las soluciones en *Flos*, que fueron enviadas a Federico II.

Después de 1228 sólo se conoce un documento que hace referencia a Fi-

²Jordanus de Nemore (1225-1260). Matemático alemán de la edad media también conocido como Jordanus Nemorarius, quien escribió varios libros de aritmética, álgebra y astronomía. Se le considera como el primero en remplazar números por letras en cálculos algebraicos, (Robertson, 1995 b).

bonacci. Este es un reconocimiento por parte de la República de Pisa en 1240, en donde se le otorga un salario a:

...el serio y estudiado Maestro Leonardo Bigollo...

Este salario fue dado a Fibonacci en agradecimiento de los servicios que otorgó a la ciudad, aconsejando en materia de contabilidad y enseñando a los ciudadanos.

Liber abaci, publicado en 1202 después de que Fibonacci regresara a Italia, fue dedicado a Scotto. El libro estaba basado en la aritmética y álgebra que Fibonacci acumuló durante sus viajes. El libro, que fue copiosamente reproducido e imitado, introdujo el sistema indo-arábigo, el sistema decimal y el uso de los numerales árabes en Europa. Ciertamente muchos de los problemas que Fibonacci considera en *Liber abaci*, eran semejantes a aquellos que aparecían en fuentes árabes. La segunda sección de *Liber abaci* contiene una larga sección de problemas que estaban dirigidos a mercaderes. Estaban relacionados con el precio de los bienes, como calcular la ganancia de las transacciones, como convertir entre las diferentes monedas en uso corriente de los países del Mediterráneo, y problemas que fueron originados en China, (Robertson 1995 b).

Uno de los problemas en la tercera sección de *Liber abaci*, lleva a la introducción de los números de Fibonacci y la sucesión de Fibonacci, sucesión por la que se recuerda a Fibonacci hoy en día.

Un cierto hombre puso un par de conejos en un lugar cerrado.
¿Cuántas parejas de conejos pueden ser engendradas por ese par en un año, si se supone que cada mes cada pareja da a luz otra pareja, que desde el segundo mes se volverá productiva?

La sucesión resultante es 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (Fibonacci omitió el primer término en *Liber abaci*). Esta sucesión, en donde cada número es la suma de los dos anteriores, se ha probado extremadamente fructífera y aparece en muchas áreas de las matemáticas y de la ciencia. El *Fibonacci Quarterly* es una revista moderna dedicada al estudio de las matemáticas relacionadas con esta sucesión.

Otro libro de Fibonacci es la *Practica geometraie*, escrito en 1220 y que está dedicado a Dominicus Hispanus, a quien menciona al inicio. Contiene una larga colección de problemas geométricos, arreglados en ocho capítulos basados en *Los Elementos de Euclides* y *En Divisiones*, también de Euclides.

En *Flos*, Fibonacci da una buena aproximación a la raíz de $10x+2x^2+x^3 = 20$, uno de los problemas a los que fue retado a resolver por Juan de Palermo. Este problema no fue inventado por Juan de Palermo, sino que lo tomó del libro de álgebra de Omar Khayyam, donde es resuelto mediante las medias de la intersección del círculo y la hipérbola. Fibonacci prueba que la raíz de la ecuación no es ni entero ni fracción, ni la raíz cuadrada de una fracción.

Liber quadratorum, escrito en 1225, según algunos autores es la pieza más impresionante del trabajo de Fibonacci, sin embargo, no es el trabajo que lo ha hecho famoso. El nombre de la obra significa *el libro de los cuadrados* y es un libro de teoría de números, que junto con otras cosas examina métodos para encontrar tripletes pitagóricos³. Fibonacci nota primeramente, que los cuadrados de los números pueden ser construidos como suma de números impares, esencialmente describiendo una construcción inductiva de la fórmula: $n^2+(2n+1) = (n+1)^2$. Sin embargo, su trabajo en teoría de números fue casi completamente ignorado y desconocido durante la Edad Media, (Robertson 1995).

Se cree que Leonardo de Pisa alias Fibonacci muere en Pisa, Italia, alrededor del año 1250. La influencia posterior de Fibonacci estuvo limitada a su papel en expandir el uso de los numerales indo-arábigos y su problema de los conejos así como la sucesión que lleva su nombre, la cual es el tema central del presente trabajo.

³Un triplete pitagórico es un conjunto de tres números enteros que satisfacen la siguiente relación: $a^2 + b^2 = c^2$.

0.1.2. Leonardo y sus Conejos

Con la publicación de *Liber Abbaci* en 1202 A.C., Fibonacci rompió completamente con la herencia de los matemáticos griegos y romanos en toda Europa. El proceso fue lento pero la ventaja de los diez símbolos indo-arábigos fue clara de forma gradual. La mayoría de los 15 capítulos de *Liber Abbaci* tratan de la introducción de los símbolos por precepto y ejemplo. El libro contiene de igual manera datos curiosos, entre ellos la sucesión de Fibonacci, (Clyde 1975). La sucesión se plantea mediante un problema, quizá el más famoso en *Liber Abbaci*, el cual trata de conejos y cómo se multiplican y suman de una manera muy especial:

Alguien coloca un par de conejos en un cierto lugar, completamente cerrado, para ver cuántas parejas de conejos nacerán en el transcurso de un año, si se supone que cada mes cada par de conejos produce otro par, y los conejos empiezan a reproducirse dos meses después de su propio nacimiento.

Así pues supongamos que la primera pareja de conejos es recién nacida entonces habrá sólo este par de conejos al final del primer mes. Este par da a luz al final del segundo mes, de manera que en el segundo mes habrá dos pares de conejos. De éstos dos pares, la primer pareja es la única que se puede reproducir y dará a luz a otra pareja, de modo que habrá tres parejas al final del tercer mes. Al siguiente mes la segunda pareja da a luz a otro par de conejos, por lo que al final del cuarto mes existirán 5 parejas de conejos. Este proceso continúa hasta que 233 parejas de conejos se encuentran en el lugar al final del año. La sucesión es 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., m , n , $m+n$, ..., 233. Es decir, que el siguiente término es la suma de los dos anteriores, o dicho de otra manera $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, donde cada f_n es un número de Fibonacci.

En 1878, Edouard Lucas nombra a este conjunto de números como la sucesión de Fibonacci, (Lucas 1878). Algunas publicaciones indican que Virgilio utilizó esta estructura al escribir *La Eneida*. Otro escritores incluyendo al astrónomo Johann Kepler (1611), desarrollaron la misma sucesión, en muchos casos sin conocer el trabajo de Fibonacci. La sucesión de Fibonacci es la primera sucesión recursiva conocida. Pasaron setecientos años antes de que tuviera aplicaciones. El genetista Lancelot Hogben ha demostrado cómo dicha sucesión surge naturalmente en la genética; un ejemplo clásico es el árbol genealógico de la abeja macho. Otros ejemplos comunes son el número de pétalos en varias especies de flores, el arreglo de las semillas en

los girasoles, las espirales en las piñas y el arreglo de las hojas a lo largo del tallo. Estos números también aparecen en el análisis neuro-eléctrico, (Clyde 1975). Ahondaremos en algunos de estos temas en las secciones y capítulos siguientes.

0.2. Lucas

Edouard Lucas nace en Amiens, Francia, el 4 de Abril de 1842. Después de estudiar en la Escuela Normal de Amiens, trabajó en el Observatorio de París. Durante la guerra Franco-Prusiana (1870-1871), Lucas sirvió como oficial de artillería y tras ser derrotado junto con el ejército francés se convierte en profesor de matemáticas, primero en el Liceo Saint Louis y posteriormente en el Liceo Charlemagne, ambos en París. Lucas es mejor conocido por sus resultados en teoría de números; en particular por su estudio sobre la *sucesión de Fibonacci* y la sucesión asociada a ésta que lleva el nombre de *Lucas* en su honor. Ambas sucesiones fueron exhibidas de manera más formal en su artículo de 1878 titulado *Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques*⁴, donde trata de dichas sucesiones y muchas de sus propiedades matemáticas, como él mismo comenta al inicio de su artículo:

Este trabajo tiene por objetivo el estudio de las funciones simétricas de raíces de una ecuación de segundo grado, y su aplicación a la teoría de números primos. En primera instancia se indica la analogía completa de estas funciones simétricas con las funciones circulares e hiperbólicas; mostramos enseguida la unión que existe entre estas funciones simétricas y la teoría de determinantes, de combinaciones, de fracciones continuadas, de la divisibilidad, de divisores cuadráticos, de radicales continuos, de la división de la circunferencia, del análisis indeterminado de segundo grado, de los residuos cuadráticos, de la descomposición de grandes números en números primos, etc. Este método es el punto de partida de un estudio más completo, de propiedades de funciones simétricas de raíces de una ecuación algebraica, de grado cualquiera, a coeficientes racionales, en sus relaciones con las teorías de funciones elípticas y abelianas, de residuos potenciales, y del análisis indeterminado de grados superiores, (Lucas 1878).

Este artículo cuenta con 5 secciones: definición de funciones numéricas simplemente periódicas; la relación de las funciones U_n y V_n con las funciones circulares e hiperbólicas; relaciones de recurrencia por el cálculo de valores de las funciones U_n y V_n ; la relación de las funciones U_n y V_n con determinantes; y la relación de las funciones U_n y V_n con las fracciones continuadas. En

⁴Teoría de funciones numéricas simplemente periódicas.

este trabajo Lucas, no se limita a darle nombre a la sucesión de Fibonacci, sino que recapitula varios resultados alrededor de la misma, así como otros tantos relacionados con la sucesión que llevará su nombre y algunas otras sucesiones.

No es de sorprender que varios nombres famosos aparezcan como referencia en el artículo, tales como Pierre de Fermat, Albert Girard, Robert Simson, Jacques Philippe Marie Binet, Gabriel François Lamé, Jean Bernoulli, y Abraham de Moivre. En este trabajo se hace acreedora de su nombre la sucesión de Fibonacci, como se muestra en el siguiente párrafo⁵:

On forme ainsi, pour les premières valeurs de n entières et positives, les séries

n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ,
 u_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ,
 v_n : 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199,

La série des u_n a été considérée pour la première fois par LÉONARD FIBONACCI, de Pise.

Donde n , son los enteros positivos, u_n es la sucesión de Fibonacci, y v_n es la sucesión de Lucas. Pero de igual manera Lucas acuña el término de *sucesiones de Pell*, igualmente famosas en el mundo de las matemáticas⁶:

On a alors les séries

n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, . . .
 U_n : 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, . . .
 V_n : 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, . . .

que nous désignerons sous le nom de SÉRIES DE PELL, en l'honneur du mathématicien de ce nom qui résolut, le premier, un célèbre problème d'analyse indéterminée proposé par FERMAT, et concernant la résolution en nombres entiers, de l'équation indéterminée

$$x^2 - \Delta y^2 = \pm 1.$$

Ambos términos aparecen en la primera sección del artículo bajo la clasificación de *funciones numéricas de segunda especie*, junto con otras sucesiones

⁵Así, se forman para los n primeros enteros positivos, las sucesiones: . . . La sucesión de los u_n fue considerada por primera vez por LEONARDO FIBONACCI, de Pisa.

⁶Se tienen entonces las sucesiones . . . que designaremos con el nombre de sucesiones de PELL, en honor al matemático de este nombre quien resolvió, por primera vez, un célebre problema de análisis indeterminado propuesto por FERMAT, y concerniente a la resolución en números enteros, de la ecuación indeterminada . . .

de primera y tercera especie, (Lucas 1878).

Lucas también generó métodos para ver si un número es primo. En 1876 utilizó este método para demostrar que $2^{127} - 1$ es primo. Este continúa siendo el número primo más grande descubierto, sin la ayuda de una computadora.

Lucas es también conocido por la invención de las torres de Hanoi y otras creaciones matemáticas. Las Torres de Hanoi aparecieron en 1883 bajo el nombre de M. Claus. Nótese que Claus es un anagrama para Lucas. Su trabajo de cuatro volúmenes de matemáticas recreativas *Récréations Mathématiques* (1882-94), se ha convertido en un clásico.

Lucas muere a causa de un raro accidente en un banquete, al caer un plato, donde una de las piezas vuela y corta una de sus mejillas. Fallece el 3 de Octubre de 1891 en París, Francia, de una infección de la piel tan sólo unos días después del funesto accidente, (Robertson 1995 b).

0.3. La proporción áurea

Desde la antigüedad se ha buscado una forma de división perfecta de las cosas, lo que condujo a una fórmula hoy muy conocida. A menudo se oyen o se dicen expresiones tales como: “La regla áurea”, también llamada “proporción divina”, o “número áureo”, o “sección áurea”.

El matemático del renacimiento, Luca Pacioli, la llamaba proporción divina es su trabajo *De divina proportione* de 1509, Leonardo Da Vinci *sección áurea* y para Johannes Kepler representaba *la perfección*, junto al teorema de Pitágoras.

Luca Pacioli (c. 1445-1517) nació en la pequeña localidad de Borgo San Sepolcro. De todas las obras que compuso a lo largo de su vida, Pacioli sólo imprimió dos, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionata* (Venecia, 1494 y 1523) y *De divina proportione* (Venecia, 1509), cuyo tema central es lo que conocemos hoy como “la regla de tres”. Esta última se imprimió en los talleres de Paganus Paganinus, el mismo impresor de la *Summa* y de la traducción de los *Elementos de Euclides* hecha por Pacioli. El manuscrito, como reza al final del mismo, se termina de imprimir el 14 de diciembre de 1498, y cuenta con una colección de dibujos de Leonardo Da Vinci sobre sólidos regulares en perspectiva, que realizó como acompañamiento gráfico y que constituyen las primeras imágenes en perspectiva de los sólidos regulares y sus derivados. Pacioli también fue autor de *Tractatus particularis de computis et scripturis* (1494) donde expone la partida doble, esencial en la contabilidad moderna e incursionó en otros diversos asuntos, tanto en el cálculo de probabilidades como el álgebra, (García 2001).

El símbolo ϕ (“phi”), que representa a la proporción áurea, aparentemente fue utilizado por primera vez por el matemático estadounidense Mark Barr, a los inicios del siglo XX, en conmemoración del escultor griego Phidias (490-430 AC), quien, a saber de algunos historiadores, hizo gran uso de la proporción áurea en sus obras (Livio 2002, pp. 5-6, citado por Weisstein 2005).

La proporción áurea (ϕ), es un número irracional con muchas propiedades. Este puede ser definido como un número que es igual a la suma de la unidad más su propio recíproco: $\phi = \frac{1}{\phi} + 1$. Multiplicando ambos lados de la igualdad, por la misma proporción áurea, se sigue la interesante propiedad de que el cuadrado de la proporción áurea es igual al número en sí mismo más uno: $\phi^2 = \phi + 1$. Como esta ecuación puede ser escrita de la siguiente manera: $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, podemos obtener el valor de la proporción áurea, mediante

la ecuación cuadrática, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, con $a = 1, b = -1, y c = -1$. La proporción áurea, es un número irracional, pero no un número trascendente⁷ (como π o e), ya que es la solución a una ecuación polinomial. Las soluciones a la ecuación cuadrática nos da 1.618 033 989 o 0.618 033 989. La primera solución es la proporción áurea.

Se establece una conexión entre la proporción áurea y los números de Fibonacci (f_n) porque la razón entre cualesquiera dos números de Fibonacci sucesivos, se acerca a un límite, y ése límite es la proporción áurea. Ahora bien los números de Fibonacci, aparecen en la naturaleza; la espiral discernible en la cabeza de una margarita consta de “flores” individuales que representan *números de Fibonacci*⁸. Esto es significativo aquí,

La proporción áurea también puede surgir de dividir un segmento de longitud $1 + X$, en dos subsegmentos de magnitudes X y 1 , de tal modo que la razón $1) a (X$ sea la misma que la razón de X a $1 + X$. Esto fue llamado por Euclides *división en extremo y razón media*, (Smith 1953 citado por Markowsky 1992).

Figura 1: Planteamiento griego de la proporción áurea

La figura muestra un segmento de longitud $1 + X$ dividido en 2 partes. De esta división surge la igualdad $(\frac{1+X}{X}) = \frac{X}{1}$, es decir la ecuación $X^2 - X - 1 = 0$. La raíz positiva de esta ecuación, es exactamente ϕ , es decir la proporción áurea, (Markowsky 1992).

Mucho se ha dicho de la proporción áurea, y la misma se encuentra en varios medios de divulgación científica (o en algunos casos pseudocientífica) como revistas ya sean virtuales o impresas, páginas web, películas y novelas.

A lo largo de los años se han escrito varios artículos de carácter científico cuyo objetivo es desmentir a algunos autores empeñados en encontrar a la proporción áurea en distintas obras monumentales del ser humano. Un autor de gran interés que trata el tema es el matemático Roger Fischler⁹, en su artículo de 1981 titulado *On the Application of the Golden Ratio in the*

⁷Números Trascendentes, son los números que no pueden ser obtenidos mediante el proceso de resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros.

⁸Véase la sección 3.1 filotaxia.

⁹Depto. de Matemáticas, Carlton University, Ottawa K1S 5B6, Canadá.

Visual Arts, donde hace un análisis de los siguientes ejemplos de las artes visuales, a los que se les ha asociado la proporción áurea. El primer ejemplo es interesante ya que nos habla de la obra de Paccioli, quien ya hemos mencionado, y nos dice lo siguiente:

Comúnmente se asevera que Paccioli en su *Divina Proportione* (1509), hace uso de la proporción áurea. De hecho, mientras que en *Divina Proportione* estima de gran valor las propiedades matemáticas de la proporción áurea, en *Architettura*, donde trata del diseño y las proporciones, hace referencia al uso del sistema clásico *Vitruvian*, que es un sistema basado en proporciones simples.

Aquí Fischler hace una aclaración importantísima pues es en la misma *Divina Proportione*, donde se encuentran las ilustraciones de Leonardo Da Vinci, lo que ha llevado a varios autores a relacionar la obra de Da Vinci con la proporción áurea. Este tema es tratado a mayor profundidad en otro artículo de interés, publicado por George Markowsky y en el que ahondaremos más tarde. Por lo pronto Fischler continua con algunos otros ejemplos, en el siguiente párrafo:

En lo que respecta a medidas, se ha dicho que Seurat utilizó la división de la proporción áurea, como base para sus pinturas. Sin embargo, un análisis detallado de sus escritos, bosquejos y pinturas muestra que este no era el caso. Se llevó a cabo un análisis del trabajo del cubista Juan Gris, usando la diagonal del rectángulo áureo, y al parecer la obra coincidió de manera muy cercana. Sin embargo, aún se encuentra en existencia una carta escrita por Gris, donde categóricamente establece, que no utilizó la proporción áurea en sus pinturas. Le Corbusier utilizó la proporción áurea en su Sistema *Modulor* y varios autores afirman que la utilizó en sus pinturas, durante su periodo purista. Pero, Le Corbusier (o más bien Jeanneret, como era conocido en aquella época), tenía escritos y bosquejos preliminares, del periodo al que se hace referencia, mostrando que la base teórica de sus pinturas era realmente el triángulo equilátero.

Como hemos visto, ya en el año de 1981, Fischler desmentía algunos mitos referentes a la proporción áurea en las artes visuales. Casi diez años después de

la publicación de este artículo, otro matemático, George Markowsky, retoma el tema, y no sólo se interesa en desmentir con pruebas históricas algunos de los mitos de la proporción áurea, sino que va más allá intentando dar una prueba más científica, más matemática, de aquellas afirmaciones mal fundamentadas que existen en relación a la proporción áurea, y que no se limitan al campo de las artes visuales.

Markowsky se interesa en el tema al dar una plática de la proporción áurea para el club clásico de la Universidad de Maine. Esta plática terminaría por dar pie al artículo de 1992 *Misconceptions about the Golden Ratio*, que inicia de la siguiente manera:

La proporción áurea . . . ha capturado la imaginación popular y es discutida en muchos libros y artículos. Generalmente, sus propiedades matemáticas se encuentran correctamente establecidas, pero mucho de lo que es presentado referente al arte, arquitectura y literatura, es falso o seriamente malinterpretado. Desafortunadamente, estas afirmaciones referentes a la proporción áurea han alcanzado un estatus de conocimiento popular y son largamente repetidas. Inclusive libros de bachillerato actuales¹⁰, tienen muchas aseveraciones incorrectas referentes a la proporción áurea.

Entre algunas de las falsas concepciones en el arte, que el autor trata de desmentir en base a un marco científico, se encuentran: la gran pirámide de Giza (también conocida como Khufu o Cheops), el Partenón, pinturas de Leonardo Da Vinci como Juan el Bautista, y la *Eneida* de Virigilio. También se opone a que el término proporción áurea se usara desde la antigüedad, que el rectángulo áureo es el rectángulo estéticamente más placentero, y que el cuerpo humano exhibe ϕ .

¹⁰Referencia del autor. Michael Serra, *Discovering Geometry: An Inductive Approach*, Key Curriculum Press, Berkeley, CA, 1989.

0.4. Espiral Logarítmica

La proporción áurea es comúnmente presentada como un rectángulo (Fig. 2), al que usualmente se refiere como *rectángulo áureo*. El rectángulo áureo, es el único con una proporción tal que permite el siguiente algoritmo: del rectángulo áureo se corta un cuadrado, después de este paso (y únicamente si partimos de un rectángulo áureo), nos queda un nuevo rectángulo, más pequeño, pero semejante al original, de modo que repetimos el proceso una y otra vez.

Este diagrama nos ayuda a ver cuál puede ser el valor numérico de ϕ . Digamos que el lado más largo del rectángulo vale ϕ , mientras que el lado más pequeño vale 1, el primer rectángulo que queda, después de retirar el primer cuadrado tiene las siguientes medidas: 1 y $\phi - 1$. Poniendo en ecuación las proporciones de ambos rectángulos obtenemos: $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$, quedando $\phi^2 = \phi + 1$. De donde se derivan las raíces que ya hemos visto antes.

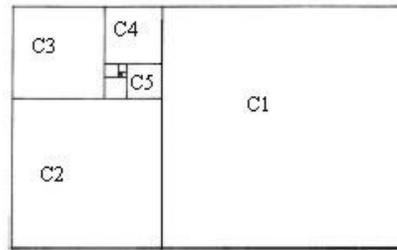


Figura 2: Rectángulo Áureo

Ahora bien, vamos a unir la esquina superior derecha del cuadro $C1$ inscrito en el rectángulo dorado con la esquina inferior derecha de $C2$, posteriormente unimos con la esquina inferior izquierda de $C3$, y ésta última con la esquina superior izquierda de $C4$, la cual se une con la esquina superior derecha de $C5$ y así sucesivamente, de modo que obtenemos una espiral, como la que se muestra en la figura 3

La espiral que encontramos dibujada, es una espiral logarítmica. Una espiral logarítmica es un tipo de espiral que regularmente aparece en la naturaleza. La espiral logarítmica fue descrita por primera vez por René Descartes, y después extensamente descrita por Jacob Bernoulli, quien la llamó *Spira*

mirabilis, “la espiral maravillosa”. La espiral logarítmica mantiene una estrecha relación con la sucesión de Fibonacci, y por ello con otros tipos de fenómenos; por ejemplo, los insectos están acostumbrados a viajar hacia el sol, el cual se encuentra en ángulo constante con respecto a su trayectoria de vuelo y viajar hacia él resulta prácticamente en una línea recta, pero cuando el insecto intenta acercarse a una fuente de luz artificial su trayectoria describe una espiral logarítmica. También se cree que cuatro brazos de La Vía Láctea, son grandes espirales logarítmicas. Los brazos de los ciclones, como los huracanes, son también espirales logarítmicas, mientras que en biología, estructuras aproximadamente iguales a las espirales logarítmicas ocurren frecuentemente, por ejemplo, las telarañas y los caparazones de algunos moluscos. (Wikipedia, 2006).

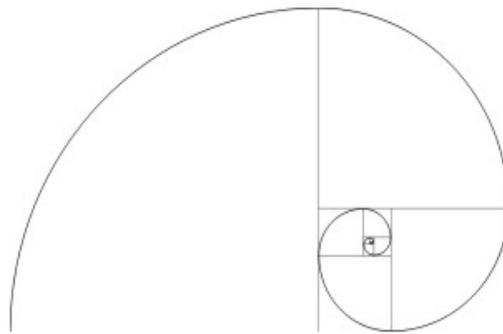


Figura 3: Espiral Logarítmica inscrita en rectángulos áureos.

Capítulo 3

Fenomenología

0.1. Filotaxia

*“Vivimos en una época en que las flores tratan de vivir de flores,
en lugar de crecer gracias a la lluvia y al negro estiércol”*
Ray Bradbury, *Fahrenheit 451*

Se mencionó con anterioridad que existe una conexión en la naturaleza con la proporción áurea mediante los números de Fibonacci (f_n). Para entender esto denominemos al *Ángulo Áureo*, cómo al ángulo que divide 360° precisamente en la sección áurea. Este ángulo juega un papel práctico muy importante en dicha conexión, un buen ejemplo son los patrones encontrados en plantas, durante su desarrollo embrionario y en etapas adultas, que exhiben un patrón en las diferentes etapas del crecimiento. La filotaxia¹ espiral y helicoidal es un arreglo arquetípico estudiado en los patrones de crecimiento de las hojas alrededor del tallo; margaritas, girasoles, piñas y cactus, son algunos de los ejemplos más claros; ramas, hojas y flósculos², pueden constituir los elementos de la sucesión. Espirales análogas se pueden discernir en la flor de una margarita (Fig. 1) la cual consta de flósculos que resultan en los números de Fibonacci. Sin embargo las espirales vistas en ciertas plantas difieren en números de acuerdo a las manecillas del reloj, o al contrario de las manecillas del reloj; de hecho, los número que exhiben son pares consecutivos tomados de la sucesión de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (Dixon, 1983). Un ejemplo de este fenómeno es la flor del girasol la cual se forma por dos espirales opuestas: 55 flósculos en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que los 34 flósculos restantes se encuentran en contra de las manecillas del reloj, sorpresivamente estos números, son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci (Weisstein, 1999). El primero en señalar dicha filotaxia espiral fue el naturalista Charles Bonnet³.

¹Filotaxia. (*phyllotaxis*). El arreglo espacial de las hojas sobre el tallo principal de la planta.

²Flósculo. Cada una de las flores que forman una inflorescencia.

³Charles Bonnet (1720-1793). Filósofo y naturalista suizo. Nació en Francia y partió hacia Suiza por la persecución religiosa del siglo XVI.

Sin embargo, es necesario comprender cómo es que el ángulo áureo interviene prácticamente en la filotaxia de las plantas, como lo indica Robert Dixon en su artículo “*The Mathematics and Computer Graphics of Spirals in Plants*” (Dixon,1983), para ello ahondemos un poco más en los algoritmos necesarios para generar la proporción áurea.

Vimos en secciones anteriores cómo se obtiene la proporción áurea utilizando un rectángulo áureo, pero existen otras formas de obtener ϕ , por ejemplo a partir de un círculo. Para entender esta relación entre ϕ y un círculo, debemos de dividir la circunferencia de un círculo en dos arcos que tengan relación con la proporción áurea, y nuestra pregunta inmediata es ¿Cómo determinamos dichos arcos?, ¿Cuál es el ángulo AD que nos da dos arcos relacionados con ϕ ?, para ello hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} AD &= 360^\circ(1 - 1/\phi) \\ &= 360^\circ(1 - (\phi - 1)) \\ &= 360^\circ(2 - \phi) \\ &= 137.50776\dots^\circ \end{aligned}$$

Este ángulo AD del arco es precisamente el *ángulo áureo* (Weisstein 2004), que ya se había mencionado de manera más general al inicio del capítulo.

Ahora bien, no existen construcciones geométricas exactas para obtener este ángulo, ya que al igual que π es un número irracional, sin embargo podemos obtener una aproximación muy exacta del ángulo áureo mediante el método ilustrado a continuación donde se hace uso del rectángulo $\sqrt{2}$:

Lo interesante de este método es que sugiere una relación entre ϕ y $\sqrt{2}$, ambos números irracionales. Otros 3 métodos pueden ser encontrados en “*Four Approximations for Finding the Golden Section of Circle’s Circumferences from the Square Root Two rectangle*” (Reynolds, 2002).

Por otro lado denotemos los números 1 y 0 de la circunferencia como se muestra en la figura 3. La proporción que existe entre el arco más grande con respecto al pequeño, es la misma que la que existe entre el círculo entero y el arco mayor. El ángulo $137.50776\dots^\circ$ equivale exactamente a ϕ^{-2} vueltas enteras de 1 a 0, mientras la vuelta opuesta de 0 a 1 equivale a $\phi^{-1} = 222,49224\dots^\circ$. Este ángulo nos da el siguiente algoritmo “áureo” del círculo: 0 denota una dirección inicial, 1 denota la dirección después de una vuelta



Figura 1: Observamos la sección apical de una margarita.

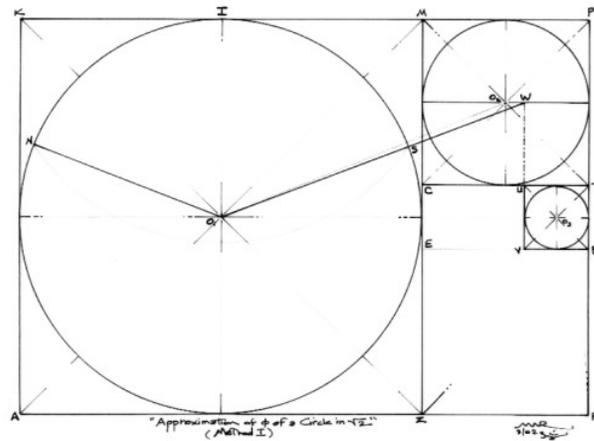


Figura 2: Método para encontrar geoméricamente el ángulo áureo a partir de un rectángulo $\sqrt{2}$

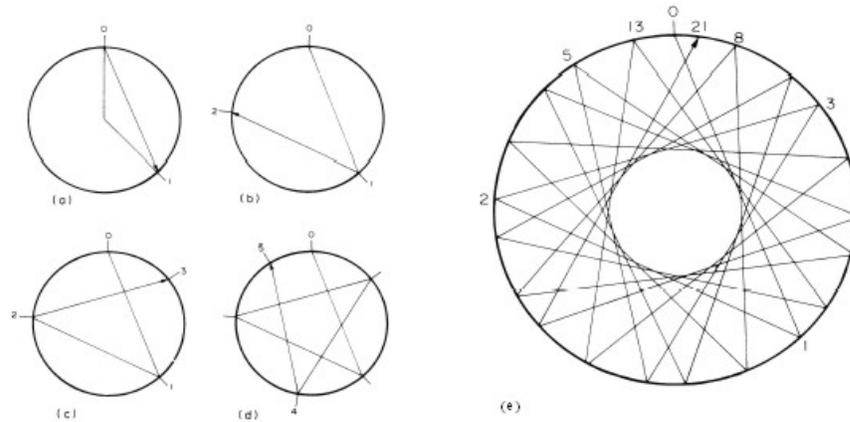


Figura 3: Algoritmo ‘áureo’ del círculo. En d) hay 21 pasos mostrando que el algoritmo se acerca al paso inicial con una división balanceada del círculo.

del ángulo áureo (ϕ^{-2}), 2 denota la dirección después de $2\phi^{-2}$ vueltas, y así sucesivamente. Un patrón interesante surge a partir de esto.

El algoritmo nunca lleva nuevamente a cero, o a ningún otro estado ya obtenido, dada la irracionalidad del ángulo; este patrón se traduce en un efecto adaptativo para las plantas: como el algoritmo nunca regresa a 0, jamás dos hojas estarán una exactamente arriba de la otra, es decir hojas o ramas sucesivas alrededor del tallo encuentran suficiente espacio para obtener sol y crecimiento. Cada estado se aproxima a una división balanceada del círculo, esto nuevamente se traduce en la relación de las plantas con el sol, el espacio y la gravedad. En cualquier etapa la circunferencia entera es dividida en un patrón de tres tamaños de arco (y periódicamente solamente dos): ϕ^{-n} y ϕ^{-n+1} después de $f_{n+2} - 1$ pasos; Aunque el algoritmo nunca regresa a su exacta posición original (i.e. cero), los acercamientos que más se dan son después de 1 paso, 2 pasos, 3 pasos, 8, pasos, ..., que son precisamente los números de Fibonacci, (Dixon 1983).

Otra relación existente entre algunas plantas y nuestra sucesión, es el número de pétalos de una flor, por ejemplo tenemos que las azucenas, iris, y trilliums ⁴ tienen 3 pétalos; colombinas, botones de oro, y rosas silvestres tienen 5 pétalos; albarraz, sanguinaria, y cosmos tienen 8 pétalos; los crisantemos tienen 13 pétalos; las aster 21 pétalos; y las margaritas tienen 34, 55,

⁴Cualquier planta liliacea del género *Trillium*, que presenta tres hojas en lo alto del tallo y una única flor de tres pétalos.



Figura 4: De izquierda a derecha: Iris, Botón de Oro, Sanguinaria, Crisantemo y Aster.

u 89 pétalos, todos números de Fibonacci, (Weisstein 1999).

Si bien estas flores exhiben los números de Fibonacci, y muchas de las propiedades expuestas no sólo son asombrosas y corroboradas por varios autores, es necesario reconocer que no en todos los casos podemos encontrar fuerte evidencia de que la sucesión de Fibonacci está presente en la filotaxia. Cooke en su artículo *Fibonacci Numbers in Phyllotaxis*, opina que ser un elemento de la sucesión de Fibonacci, es una propiedad intrínseca de todos los enteros positivos, si consideramos que a partir de la sucesión de Fibonacci podemos obtener muchas otras sucesiones al ir cambiando los valores iniciales, de modo que llegamos a encontrar a todos los enteros positivos, en alguna de estas sucesiones:

Si restringimos nuestra atención a aquellas sucesiones de Fibonacci⁵, cuyo valor inicial es 1 ó 2, entonces 3 es un término en dos sucesiones⁶:

⁵Aquí el autor se refiere como sucesiones de Fibonacci a cualquier sucesión generada por la recurrencia $x_{n-2} + x_{n-1} = x_n$, aún cuando los valores iniciales cambien, para fines de este documento, al cambiar los valores iniciales en la recurrencia se genera una nueva sucesión con su respectivo nombre. Para nosotros la sucesión de Fibonacci será siempre la que contiene los números 1,1,2,3,5,... y en algunos casos la que comienza por cero.

⁶Nótese que la primer sucesión a la que se refiere Cooke, es la sucesión de Fibonacci y

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...
 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, ...

Mientras 4, es parte de 3 sucesiones:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, ...
 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254, 411, 665, ...
 2, 4, 6, 10, 16, ...

Todos los enteros n mayores que 4 pertenecen al menos a 4 sucesiones de Fibonacci, empezando con el valor inicial 1 ó 2 como sigue:

$1, n, n + 1, 2n + 1, \dots$
 $1, n - 1, n, 2n - 1, \dots$
 $2, n, n + 2, 2n + 2, \dots$
 $2, n - 2, n, 2n - 2, \dots$

Además, todos los enteros impares mayores o iguales a 7, pertenecen al menos a una sucesión dada por:

$1, \frac{1}{2}(n - 1), \frac{1}{2}(n + 1), n, \frac{1}{2}(3n + 1) \dots$

De manera similar todos los enteros pares a partir de 8, pertenecen al menos a la siguiente sucesión:

$2, \frac{1}{2}(n - 2), \frac{1}{2}(n + 2), n, \frac{1}{2}(3n + 2) \dots$

Así, basándose en este análisis, Cooke asegura que cualquier entero positivo puede ser considerado como un elemento de cualquier sucesión tipo Fibonacci⁷, así pues identificar un pequeño conjunto de números de Fibonacci consecutivo, es un criterio necesario pero no suficiente para establecer la operación de la sucesión de Fibonacci en patrones biológicos; y propone que la operación de la sucesión de Fibonacci puede ser visualizada en los patrones biológicos si exhibe dos características:

la segunda es la sucesión de Lucas.

⁷Desde el punto de vista matemático, este análisis de Cooke resulta un interesante arreglo de todos los enteros positivos (\mathbb{Z}^+) en base a la sucesión de Fibonacci.

1. Los objetos biológicos están ordenados en varios grupos exhibiendo diferentes números de Fibonacci.
2. Las transiciones a otros grupos de diferentes números deben de seguir una fórmula recurrente tipo Fibonacci discernible.

Por lo que concluye que únicamente si el patrón exhibe ambas características, se puede sugerir que existe una relación con la sucesión de Fibonacci (Cooke, 2006).

Cabe recalcar que estudiando la filotaxia helicoidal o de verticilo, no se han encontrado pruebas suficientes de que ésta exhiba números de la sucesión de Fibonacci, mientras que en la filotaxia espiral no solamente se muestran un gran número de elementos de la sucesión de Fibonacci, sino que las transiciones muestran fórmulas de Fibonacci discernibles. Algunos de los casos más sorprendentes de este fenómeno son algunas coníferas, el girasol *Helianthus annuus*, el lino *Linum usitatissimum*, y la *Magnolia grandiflora* (Cooke, 2006).

Figura 5: De izquierda a derecha: Girasol, Lino y Magnolia.

Existen muchas otras manifestaciones en la naturaleza relacionadas con las sucesiones recurrentes tipo Fibonacci. Otro fenómeno interesante en las plantas, además de lo que hemos visto de las espirales en algunas flores, es el caso del índice folial, el cual se plantea de la siguiente manera:

Si tomamos el tallo de una planta y desde la base subimos hasta el sitio de los brotes más recientes uniendo con un hilo las hojas que encontremos en el camino, el hilo ascenderá dando vueltas en espiral a lo largo del tallo. Ahora contemos desde la base hasta arriba y también contemos el número de vueltas que da el hilo alrededor del tallo. Llamemos *índice folial* al cociente:

$$\frac{\text{número de vueltas}}{\text{número de hojas}}$$

Volvamos al jardín o a la huerta y dispongámonos a determinar el índice folial de cuanta planta encontremos. Hallaremos plantas con $\frac{1}{2}$ (es decir, dos hojas o brotes por vuelta, contando la inicial), como el maíz, con $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$; este índice folial es muy común y recibe el nombre de *tresbolillo*. También hay bastante plantas con $\frac{3}{8}$ (el manzano y el ciruelo), $\frac{5}{13}$ (el peral) y , claro, con $\frac{13}{34}$, $\frac{21}{55}$ y así subsecuentemente, (Miramontes 1996).

Este caso es realmente interesante pues vemos que el índice folial es el cociente del número de vueltas entre el número de hojas, es decir, es la fracción de vuelta que existe entre dos hoja sucesivas. Por lo que nos encontramos que el índice folial refleja el ángulo entre dos brotes consecutivos, lo que nos lleva a lo siguiente:

Si convertimos esa medida de radianes a medida angular en grados tenemos que el ángulo entre dos hojas consecutivas sólo puede tomar valores en un conjunto discreto de ellos, y esa sucesión se acumula rápidamente en el valor 137.5 grados. En este momento es pertinente aclarar que alrededor del ochenta por ciento de una estimación de 250 000 especies conocidas de plantas siguen este tipo de arquitecturas. El restante 20 por ciento sigue leyes parecidas, basadas en series semejantes a la de Fibonacci pero con condiciones iniciales diferentes, (Miramontes 1996).

En base a lo anterior se dice que las especies que tienen arquitecturas cuyo origen son la sucesión de Fibonacci, la sucesión de Lucas y otras sucesiones tiene *filotaxia regular* (Jean 1983 citado por Miramontes 1996).

Capítulo 4

Formulación Matricial de la sucesión de Fibonacci

Ya hemos visto muchas de las propiedades de la sucesión de Fibonacci y parte de su fenomenología. Este capítulo, cuyo contenido es mucho más analítico, trata de hacer un planteamiento de la sucesión mediante el uso de matrices. De manera muy burda el planteamiento consiste en definir una fórmula de recurrencia que genere la sucesión de Fibonacci, posteriormente se define una matriz de 2×2^1 , mejor conocida como matriz Q de Fibonacci, donde cada una de las entradas representa un número de Fibonacci.

Ahora bien, los *números de Fibonacci* $f_k = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ con $k = 0, 1, 2$ obedecen la siguiente regla de recursión:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Esta expresión es ya muy conocida, como hemos mencionado con anterioridad; ahora lo que nos interesa es estudiar su representación matricial, sus propiedades, así como los beneficios que ésto conlleva. De esta manera, dicha recursión puede ser escrita en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

$$Q^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir que obtenemos la siguiente igualdad:

¹Por el momento se habla de una matriz de 2×2 pero también se puede dar el caso de una matriz de $n \times n$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} &= Q \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Acabamos de ver la forma en que podemos expresar a los números de Fibonacci en forma matricial, lo que nos gustaría ahora sería verificar que esta forma de escribirlos realmente funcione, para eso evaluemos las matrices para los casos $k = 1, 2, 3$ donde utilizaremos los siguientes números de Fibonacci:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2$$

- **Para** $k = 1$ Utilicemos primero la igualdad

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix}$$

además por la definición de los números de Fibonacci sabemos que $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$, entonces obtenemos:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = Q^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Para $k = 2$**

Siguiendo en la misma dinámica, veamos el ejemplo para $k = 2$

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 + f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo las operaciones matriciales correspondientes se obtiene:

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = Q^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Para $k = 3$** Finalmente calculemos para el caso $k = 3$

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 + f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \end{pmatrix} = Q^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Analicemos un poco lo que hemos estado haciendo, en cada uno de los ejemplos, después de sustituir para los valores $k = 1, 2, 3$, hemos realizado algunas operaciones matriciales con la matriz Q definida con anterioridad. Si intentamos buscar algo en común para todos los casos veremos que el vector de resultados $\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix}$ siempre puede ser obtenido mediante la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = Q^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente se sigue para :

$$\begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} = Q^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si vemos a los vectores resultado, como columnas de una matriz de 2×2 , obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} = \left[Q^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = Q^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero ya sabemos que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces sustituyendo Q en la ecuación de arriba obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} = Q^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q^{k-1} Q^1 = Q^{k-1+1} = Q^k \quad (2)$$

Para $k = 1, 2, 3$.

Esta última expresión (2) contiene una regla de recurrencia e información inicial, y exhibe un contexto lineal de dos dimensiones, así las identidades de Fibonacci pueden ser expresadas mediante álgebra de matrices, lo que permite un camino claro a la generalización.

De esta manera podemos definir a la matriz Q de Fibonacci como:

$$Q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se pueden obtener todos los números de Fibonacci a partir de las potencias de Q .

Proposición 0.1 *Sea*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz Q de Fibonacci, entonces

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde cada f_n es un elemento de la sucesión de Fibonacci.

Demostración. *Por inducción sobre n , $\forall n \geq 1$*

- Para $n = 1$

$$Q^1 = \begin{pmatrix} f_{1+1} & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Supongamos que es cierto para $n = r$

$$Q^r = \begin{pmatrix} f_{r+1} & f_r \\ f_r & f_{r-1} \end{pmatrix}$$

- Para $n = r + 1$ Sea

$$\begin{aligned}
 Q^{r+1} = QQ^r &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{r+1} & f_r \\ f_r & f_{r-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f_{r+1} + f_r & f_r + f_{r-1} \\ f_{r+1} & f_r \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f_{r+2} & f_{r+1} \\ f_{r+1} & f_r \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

■

Las matrices Q dan inmediatamente un número importante de identidades de Fibonacci, incluyendo $(\det Q)^n = \det(Q^n)$ y

$$Q^m Q^{n-1} = Q^{n+m-1}$$

Ya sabemos como funciona la matriz para $k \in \mathbb{N}$. En la siguiente sección analizaremos el comportamiento de la matriz para $k \in \mathbb{Z}$, es decir, para todo k entero.

0.1. Resultados básicos

Hasta el momento sólo hemos considerado los números de Fibonacci para $k \geq 0$, a saber $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, \dots$. Queremos ahora definir los números de Fibonacci f_k para $k \leq 0$, de tal manera que nuestra fórmula de recurrencia básica $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ (o equivalentemente $f_{k-1} = f_{k+1} - f_k$) sea válida ahora para toda $k \in \mathbb{Z}$. En particular f_{-1} debe cumplir que $f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$ así mismo debe ser $f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1$ y $f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} = 1 - (-1) = 2$, etc ...

En general si ya tenemos para cierto $k \geq 0$ $f_{-1}, f_{-2}, f_{-k+1}, f_{-k}, \dots$, el siguiente número de Fibonacci a la izquierda será $f_{-k-1} = f_{-k+1} - f_{-k}$.

Sabemos que la *matriz Q de Fibonacci* se define de la siguiente manera

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si invertimos la matriz Q obtenemos que:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de la misma manera:

$$Q^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien sabemos que la n-ésima potencia de la matriz Q de Fibonacci está definida por Q^k y queremos encontrar Q^{-k} , es decir:

Proposición 0.2 *Sea*

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} f_{-n+1} & f_{-n} \\ f_{-n} & f_{-n-1} \end{pmatrix}$$

donde cada f_{-n} es un elemento de la sucesión de Fibonacci.

Demostración: *Por inducción sobre $n \forall n \geq 0$*

- Para $n = 0$

$$Q^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_0 \\ f_0 & f_{-1} \end{pmatrix}$$

- Supongamos que es cierto para $n = r$

$$Q^{-r} = \begin{pmatrix} f_{-r+1} & f_{-r} \\ f_{-r} & f_{-r-1} \end{pmatrix}$$

- Para $n = r + 1$

$$\text{P.D: } Q^{-(r+1)} = \begin{pmatrix} f_{-r} & f_{-(r+1)} \\ f_{-(r+1)} & f_{-(r+1)-1} \end{pmatrix}$$

Reescribiendo los subíndices:

$$\text{P.D: } Q^{-(r+1)} = \begin{pmatrix} f_{-r} & f_{-r-1} \\ f_{-r-1} & f_{-r-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^{-(r+1)} = Q^{-1}Q^{-r} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-r+1} & f_{-r} \\ f_{-r} & f_{-r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{-r} & f_{-r-1} \\ f_{-r+1} - f_{-r} & f_{-r} - f_{-r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{-r} & f_{-r-1} \\ f_{-r-1} & f_{-r-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Es decir acabamos de demostrar que para encontrar cualquier f_{-k} es suficiente con encontrar la inversa de Q^{-k} .

Por otro lado si calculamos el determinante de Q obtenemos:

$$\det(Q) = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 1 * 0 - 1 * 1 = -1$$

Además de que sabemos que $\det Q = -1$ y $(\det Q)^n = \det(Q^n)$ sabemos que $\det(Q^k) = (-1)^k$, y calculando la inversa de Q obtenemos²:

$$\begin{aligned} Q^k &= \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \\ (Q^k)^{-1} &= \frac{1}{(-1)^k} \begin{pmatrix} f_{k-1} & -f_k \\ -f_k & f_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

²Recuerde que para obtener la inversa de una cierta matriz A de 2×2 es suficiente con realizar los siguientes cálculos:

$$\text{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

entonces tenemos que:

$$\begin{pmatrix} f_{-k+1} & f_{-k} \\ f_{-k} & f_{-k-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)^k} \begin{pmatrix} f_{k-1} & -f_k \\ -f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}$$

A partir de esta igualdad obtenemos la siguiente relación simétrica:

$$f_{-k} = (-1)^{k+1} f_k \quad (3)$$

De las igualdades $\det Q = -1$ y $(\det Q)^n = \det(Q^n)$ también se sigue:

$$\det(Q^k) = (-1)^k = \begin{vmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{vmatrix} = f_{k+1}f_{k-1} - (f_k)^2$$

es decir, obtenemos la siguiente fórmula:

$$f_{k+1}f_{k-1} - (f_k)^2 = (-1)^k \quad (4)$$

Esta fórmula se llama la *identidad de Cassini* debido a su creador el astrónomo italo-francés Jean Domenique Cassini, quien la descubriera en el año de 1680, de manera independiente fue probada en 1753 por el matemático escocés Robert Simson. Esta identidad es un caso particular de la *identidad de Catalan*:

$$f_k^2 - f_{k+r}f_{k-r} = (-1)^{k-r} f_r^2$$

cuando $r = 1$. Esta identidad, al igual que la *superficie de Catalan*, deben su nombre al matemático belga Eugène Charles Catalan.

Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), mejor conocido por sus aportaciones a la astronomía que por su relación con el tema que nos compete (la sucesión de Fibonacci) es uno de los más grandes astrónomos de su época y considerado como el creador de la astronomía francesa. Cassini nació el 8 de junio, en Perinaldo, pueblo ubicado en Liguria en la provincia de Imperia (Italia), que posteriormente formó parte del condado de Niza, y realizó sus estudios en el Colegio Jesuita de Génova; posteriormente fue nombrado profesor de la Universidad de Bolonia en 1651. Sus primeras observaciones fueron del sol y llevadas a cabo con artefacto de su inventiva.

Naturalizado francés, Jean Domenique Cassini, fue el primer director del Observatorio Real de París, y era bien conocido por sus contemporáneos en Inglaterra, incluyendo a Flamsteed, Halley y Hooke; con quienes mantenía una constante correspondencia. De acuerdo a sus contemporáneos, Cassini contaba con un carácter calmado y gentil, una naturaleza cálida y una mente alegre y aguda, logrando así que el rey y su corte se interesaran en su trabajo. Continuó con sus trabajos hasta el año de 1711, cuando queda completamente ciego y muere en el Observatorio de París el 14 de septiembre de 1712, a la edad de 87 años, (Robertson, 1995 a,d,e).

Regresando a nuestro problema, sea q_{ij} el elemento del i -ésimo renglón y la j -ésima columna de Q . Vemos que la entrada q_{21} de la matriz $Q^{k+l} = Q^k Q^l$, nos da la siguiente propiedad $\forall k, l$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{k+l+1} & f_{k+l} \\ f_{k+l} & f_{k+l-1} \end{pmatrix} &= Q^{k+l} \\ &= Q^k Q^l \\ &= \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{l+1} & f_l \\ f_l & f_{l-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{k+1}f_{l+1} + f_k f_l & f_{k+1}f_l + f_k f_{l-1} \\ f_k f_{l+1} + f_{k-1} f_l & f_k f_l + f_{k-1} f_{l-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$f_{k+l} = f_k f_{l+1} + f_{k-1} f_l \quad (5)$$

En este punto es interesante hacer notar que si hacemos $l = 1$, obtenemos la ecuación (1)

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

ya que $f_2 = f_1 = 1$.

Proposición 0.3 Sea f_{j+k+l} la entrada del segundo renglón y la primer columna de la matriz Q^{j+k+l} , entonces:

$$f_{j+k+l} = f_{j+1}f_{k+1}f_{l+1} + f_j f_k f_l - f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1} \quad \forall j, k, l \quad (6)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} Q^{j+k+l} &= Q^j Q^k Q^l \\ Q^{j+k+l} &= Q^j (Q^k Q^l) \\ \begin{pmatrix} f_{j+k+l+1} & f_{j+k+l} \\ f_{j+k+l} & f_{j+k+l-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{j+1} & f_j \\ f_j & f_{j-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{l+1} & f_l \\ f_l & f_{l-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} f_{j+1} & f_j \\ f_j & f_{j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1}f_{l+1} + f_k f_l & f_{k+1}f_l + f_k f_{l-1} \\ f_k f_{l+1} + f_{k-1}f_l & f_k f_l + f_{k-1}f_{l-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que nos queda la matriz:

$$Q^j(Q^k Q^l) = \begin{pmatrix} q_{11}^j(q_{11}^k q_{11}^l) & q_{12}^j(q_{12}^k q_{12}^l) \\ q_{21}^j(q_{21}^k q_{21}^l) & q_{22}^j(q_{22}^k q_{22}^l) \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} q_{11}^j(q_{11}^k q_{11}^l) &= f_{j+1}(f_{k+1}f_{l+1} + f_k f_l) + f_j(f_k f_{l+1} + f_{k-1}f_l) \\ q_{12}^j(q_{12}^k q_{12}^l) &= f_{j+1}(f_{k+1}f_l + f_k f_{l-1}) + f_j(f_k f_l + f_{k-1}f_{l-1}) \\ q_{21}^j(q_{21}^k q_{21}^l) &= f_j(f_{k+1}f_{l+1} + f_k f_l) + f_{j-1}(f_k f_{l+1} + f_{k-1}f_l) \\ q_{22}^j(q_{22}^k q_{22}^l) &= f_j(f_{k+1}f_l + f_k f_{l-1}) + f_{j-1}(f_k f_l + f_{k-1}f_{l-1}) \end{aligned}$$

Entonces igualando las entradas de las matrices obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{j+k+l} &= f_j(f_{k+1}f_{l+1} + f_k f_l) + f_{j-1}(f_k f_{l+1} + f_{k-1}f_l) \\ f_{j+k+l} &= f_j f_{k+1}f_{l+1} + f_j f_k f_l + f_{j-1}f_k f_{l+1} + f_{j-1}f_{k-1}f_l \\ f_{j+k+l} - f_j f_k f_l + f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1} &= f_j f_{k+1}f_{l+1} + f_{j-1}f_k f_{l+1} + f_{j-1}f_{k-1}f_l + f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1} \\ f_{j+k+l} - f_j f_k f_l + f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1} &= f_j f_{k+1}f_{l+1} + f_{j-1}f_k f_{l+1} + f_{j-1}f_{k-1}f_{l+1} \\ f_{j+k+l} - f_j f_k f_l + f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1} &= f_j f_{k+1}f_{l+1} + f_{j-1}f_{k+1}f_{l+1} \\ f_{j+k+l} - f_j f_k f_l + f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1} &= f_{j+1}f_{k+1}f_{l+1} \end{aligned}$$

$$\therefore f_{j+k+l} = f_{j+1}f_{k+1}f_{l+1} + f_j f_k f_l - f_{j-1}f_{k-1}f_{l-1}$$

■

0.2. Fórmula binomial importante

En esta sección daremos una fórmula que contiene como casos particulares a muchas fórmulas bilineares que han sido interesantes en esta teoría.

Teorema 0.1 *Si $a + b = c + d$, entonces*

$$f_a f_b - f_c f_d = (-1)^r (f_{a-r} f_{b-r} - f_{c-r} f_{d-r}) \quad \text{para } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Considerando la entrada q_{21} de la matriz asociada a $Q^{j+k}Q^{l-1} = Q^jQ^{k+l-1}$ se lee:

$$\begin{aligned} Q^{j+k}Q^{l-1} &= \begin{pmatrix} f_{j+k+1} & f_{j+k} \\ f_{j+k} & f_{j+k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_l & f_{l-1} \\ f_{l-1} & f_{l-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{j+k+1}f_l + f_{j+k}f_{l-1} & f_{j+k+1}f_{l-1} + f_{j+k}f_{l-2} \\ f_{j+k}f_l + f_{j+k-1}f_{l-1} & f_{j+k}f_{l-1} + f_{j+k-1}f_{l-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Q^jQ^{k+l-1} &= \begin{pmatrix} f_{j+1} & f_j \\ f_j & f_{j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+l} & f_{k+l-1} \\ f_{k+l-1} & f_{k+l-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{j+1}f_{k+l} + f_jf_{k+l-1} & f_{j+1}f_{k+l-1} + f_jf_{k+l-2} \\ f_jf_{k+l} + f_{j-1}f_{k+l-1} & f_jf_{k+l-1} + f_{j-1}f_{k+l-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces como $(q^{j+k}q^{l-1})_{21} = (q^jq^{k+l-1})_{21}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{j+k}f_l + f_{j+k-1}f_{l-1} &= f_jf_{k+l} + f_{j-1}f_{k+l-1} \\ f_{j+k}f_l - f_jf_{k+l} &= -f_{j+k-1}f_{l-1} + f_{j-1}f_{k+l-1} \\ f_{j+k}f_l - f_jf_{k+l} &= (-1)[f_{j+k-1}f_{l-1} - f_{j-1}f_{k+l-1}] \end{aligned} \quad (7)$$

Entonces por la ecuación 7 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_{j+k}f_l - f_jf_{k+l} &= (-1)(f_{j+k-1}f_{l-1} - f_{j-1}f_{k+l-1}) = (-1)^2(f_{j+k-2}f_{l-2} - f_{j-2}f_{k+l-2}) \\ &= (-1)^3(f_{j+k-3}f_{l-3} - f_{j-3}f_{k+l-3}) = \dots = (-1)^r(f_{j+k-r}f_{l-r} - f_{j-r}f_{k+l-r}) \quad \text{para } r \geq 0 \end{aligned}$$

Pero también:

$$\begin{aligned} (-1)^{-1}(f_{j+k-1}f_{l-1} - f_{j-1}f_{k+l-1}) &= (-1)^0(f_{j+k}f_l - f_jf_{k+l}) = (-1)^1(f_{j+k+1}f_{l+1} - f_{j+1}f_{k+l+1}) \\ &= (-1)^2(f_{j+k+2}f_{l+2} - f_{j+2}f_{k+l+2}) = \dots = (-1)^r(f_{j+k+r}f_{l+r} - f_{j+r}f_{k+l+r}) \quad \text{para } r \geq 0 \end{aligned}$$

y como $(-1)^r = (-1)^{-r} \quad \forall r \in \mathbb{Z}$ llegamos a que,

$$f_{j+k}f_l - f_jf_{k+l} = (-1)^r(f_{j+k-r}f_{l-r} - f_{j-r}f_{k+l-r})$$

Ahora bien tomando $j = c$, $l = b$ y $d = k + b = k + l$ obtenemos:

$$f_a f_b - f_c f_d = (-1)^r(f_{a-r}f_{b-r} - f_{c-r}f_{d-r}) \quad \forall r \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

■

Muchas identidades bilineales son casos particulares de la ecuación (8) que acabamos de demostrar. Por ejemplo veremos que la ecuación (5) es únicamente un caso particular de la ecuación (8), cuando toma los siguientes valores:

$$a = k - l, \quad b = -1, \quad c = k - 1, \quad d = r = -l$$

Sean $j, k, l, \in \mathbb{Z}$ y tomemos $a = k$, $b = -l - 1$, $c = k - 1$, $d = -l$ y $r = -l \quad \therefore \quad a + b = k - l - 1 = k - 1 - l = c + d$, además como $f_{-1} = 1, f_0 = 0$ y por 8

$$f_k f_{-l-1} - f_{k-1} f_{-l} = (-1)^{-l}(f_{k+l} f_{-1} - f_{k-l-1} f_0) = (-1)^l f_{k+l}$$

pero también sabemos que $f_{-k} = (-1)^{k+1} f_k$, de donde se sigue:

$$\begin{aligned} f_k f_{-l-1} - f_{k-1} f_{-l} &= f_k (-1)^{l+2} f_{l+1} - f_{k-1} (-1)^{l+1} f_l \\ &= (-1)^{l+2} (f_k f_{l+1} + f_{k-1} f_l) \end{aligned}$$

y como $(-1)^l = (-1)^{l+2}$, entonces

$$f_{k+l} = f_k f_{l+1} + f_{k-1} f_l$$

que es exactamente la ecuación (5) ■

La recurrencia básica de la ecuación (1) es fácilmente recuperada con el siguiente ejemplo:

$$a = k+, b = 1, c = k, d = 2, r = 2$$

Primero vemos que $k+1+1 = k+2$, por lo que se cumple que $a+b = c+d$. Análogamente como en el ejemplo anterior sustituimos los valores en (8) para llegar a la ecuación (1) $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, por 8:

$$f_a f_b - f_c f_d = (-1)^r (f_{a-r} f_{b-r} - f_{c-r} f_{d-r})$$

sustituyendo los valores:

$$f_{k+1} f_1 - f_k f_2 = (-1)^2 (f_{k-1} f_{-1} - f_{k-2} f_{2-2})$$

Recuerde que $f_{-1} = (-1)^2 f_1 = f_1$ y $(-1)^2 = 1$ entonces:

$$f_{k+1} f_1 - f_k f_2 = f_{k-1} f_1 - f_{k-2} f_0$$

Por otro lado $f_0 = 0$ y $f_2 = f_1 = 1$, sustituyendo tenemos:

$$f_{k+1} - f_k = f_{k-1}$$

despejando f_{k+1}

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

que es justo la ecuación (1) ■

Hay muchas colecciones accesibles de fórmulas como estas de Fibonacci y *Lucas* en MathWorld (Weisstein, Abril 2006), denotadas respectivamente como 'Eric' y 'Ron'. La colección de Eric es la más sofisticada.

0.3. La proporción áurea en términos matriciales

Ya vimos *grosso modo* en los capítulos anteriores, cómo es la relación existente entre la proporción áurea y los números de Fibonacci, lo que nos interesa en este momento es ver cómo se da esta relación, cuando escribimos a la sucesión de Fibonacci en términos matriciales.

Empecemos por ver qué pasa al momento de obtener los eigenvalores (o valores propios) de la matriz Q de Fibonacci. La matriz simétrica

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\det Q = 1 * 0 - 1 * 1 = -1 \quad \text{y} \quad \text{tr} Q = 1 + 0 = 1$$

tiene eigenvalores reales λ_{\pm} , donde

$$\det Q = \lambda_+ \lambda_- = -1 \quad \text{y} \quad \text{tr} Q = \lambda_+ + \lambda_- = 1 \quad (9)$$

Entonces la ecuación característica $\lambda^2 - \lambda \text{tr} Q + \det Q = 0$ es igual a $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, utilizando la fórmula general para la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si hacemos $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ obtenemos las siguientes raíces:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Entonces la ecuación característica $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ es $\lambda^2 = \lambda + 1$, tiene raíces:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{5} \right)$$

Los eigenvectores ortogonales de Q , $(y, x)^T$ tienen $y = \lambda_{\pm}$. Como habíamos visto de manera intuitiva, el método de potencias nos da el eigenvector de Q como:

$$\lambda_+ = (f_{k+1}/f_k)_{k \rightarrow \infty} \quad (10)$$

esta última expresión es lo que llamamos ‘proporción áurea’ (ϕ).

La proporción áurea ϕ , es un número irracional porque está representado como una *fracción continuada*

$$Q = [1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

(Weisstein, 1999). Esto significa que la convergencia $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ está dada por la siguiente ecuación cuadrática recursiva:

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}},$$

si hacemos $x_1 = 1$, tiene la siguiente solución:

$$x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

donde f_n , es el n-ésimo número de Fibonacci. Como resultado tenemos:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}},$$

i.e. nuestra ecuación (10), la cual fue probada por primera vez por el matemático escocés Robert Simson en 1753, quien en el mismo año probara la identidad de Cassini (4), como ya habíamos mencionado con anterioridad. De hecho si tomamos esta identidad y la dividimos entre $f_k f_{k-1}$, en ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{k+1}f_{k-1} - (f_k)^2 &= (-1)^k \\ \frac{f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2}{f_k f_{k-1}} &= \frac{(-1)^k}{f_k f_{k-1}} \\ \frac{f_{k+1}f_{k-1}}{f_k f_{k-1}} - \frac{(f_k)^2}{f_k f_{k-1}} &= \frac{(-1)^k}{f_k f_{k-1}} \\ \frac{f_{k+1}}{f_k} - \frac{f_k}{f_{k-1}} &= \frac{(-1)^k}{f_k f_{k-1}} \end{aligned} \tag{11}$$

Y si sumamos sobre k y utilizamos la definición de la ecuación (10) obtenemos la siguiente serie infinita:

$$\phi = \lambda_+ = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{f_k f_{k-1}} \quad (12)$$

la cual nos demuestra la relación que existe entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea.

Durante el resto del documento nos referiremos a la proporción áurea, mediante el símbolo ϕ .

0.3.1. La Línea Áurea

Para llegar a la *Línea Áurea* iteremos $\lambda > 0$ ($\lambda = \lambda_{\pm}$), y usando que $\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}$ obtenemos:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} < \lambda_+ < \frac{f_k}{f_{k-1}} \quad \text{donde } k = 3, 5, 7 \dots$$

y por la ecuación 11, la diferencia entre $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ y $\frac{f_k}{f_{k-1}}$ es de $\frac{(-1)^k}{f_k f_{k-1}}$, con esto queremos decir que las cotas inferiores y superiores de la desigualdad anterior difieren en $(f_k f_{k-1})^{-1}$. En la gráfica siguiente podemos ver como surge rápidamente una línea, en el cuadrante positivo del plano (x,y), de los puntos con coordenadas enteras $(x, y) = (f_k, f_{k+1})$ para $k \geq 0$.

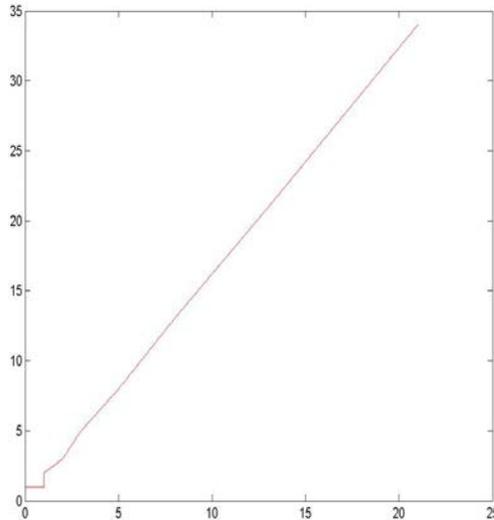


Figura 1: Gráfica de $(x, y) = (f_k, f_{k+1})$ cuando $k \geq 0$

Veamos la misma gráfica resaltando los puntos $(x, y) = (f_k, f_{k+1})$, como podemos ver la densidad de los puntos es mayor

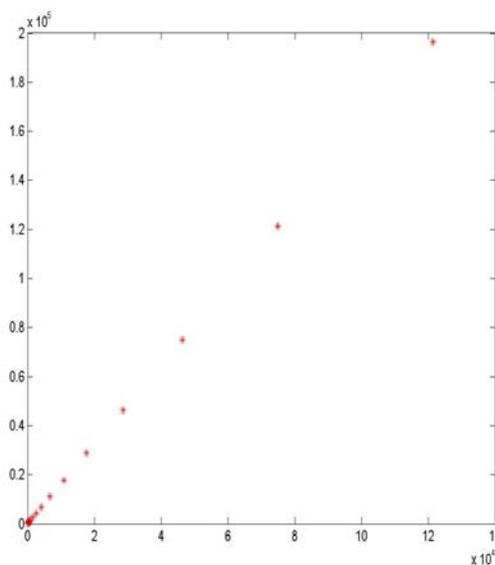


Figura 2: Gráfica de $(x, y) = (f_k, f_{k+1})$ cuando $k \geq 0$

Habíamos visto que

$$\lambda_+ = \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_{k \rightarrow \infty}$$

y acabamos de definir $(x, y) = (f_k, f_{k+1})$, entonces podemos decir que:

$$\lambda_+ = \left(\frac{y}{x} \right)_{k \rightarrow \infty}$$

$y = \lambda_+ x$, a lo que llamamos línea áurea, la cual es un espacio generado por el eigenvalor de la matriz Q.

0.4. Series de matrices Q de Fibonacci

En la siguiente sección encontraremos propiedades muy interesantes de las series³ de las Q matrices de Fibonacci.

La serie de la Q matriz de Fibonacci consta de la siguiente expresión:

$$(I - \xi Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k Q^k, \quad \text{donde} \quad \det(I - \xi Q) = 1 - \xi - \xi^2 \quad (13)$$

este determinante es exactamente la ecuación característica o polinomio característico que obtuvimos en la sección 1.3. Las entradas q_{21} y $q_{1,2}$ nos dan:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k f_k = \frac{\xi}{1 - \xi - \xi^2} \quad \text{para} \quad |\xi| < \frac{1}{\lambda_+} \approx 0,618 \quad (14)$$

¿Cómo obtenemos éste resultado?, el lado izquierdo lo obtenemos al desarrollar $\sum_k \xi^k Q^k$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k Q^k &= \xi^0 Q^0 + \xi^1 Q^1 + \xi^2 Q^2 + \dots + \xi^k Q^k \\ &= \xi^0 \begin{pmatrix} f_1 & f_0 \\ f_0 & f_{-1} \end{pmatrix} + \xi^1 \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} + \dots + \xi^k \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomemos las entradas q_{21} o q_{12} indistintamente, de cada una de las matrices anteriores, entonces obtenemos la siguiente sucesión:

$$f_0 \xi^0 + f_1 \xi^1 + f_2 \xi^2 + f_3 \xi^3 + \dots$$

Esta suma se parece a la siguiente sucesión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

y vamos a resolverla de manera similar.

³Aquí el lector debe de ser cuidadoso de no confundir una serie con una sucesión. Una serie es una suma infinita de números mientras que una sucesión es una función que a cada natural le asocia un número.

En esta ocasión nos interesa sólo el caso donde $|\xi| < 1$, puesto que si $|\xi| \geq 1$ los términos individuales no tienden a cero. Esta sucesión es manejable porque sus sumas parciales

$$S_k = f_0\xi^0 + f_1\xi^1 + f_2\xi^2 + f_3\xi^3 + \dots + f_k\xi^k$$

pueden calcularse en términos sencillos. Vamos a multiplicar S_k por ξ y ξ^2 obteniendo tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} S_k &= f_0 + \xi f_1 + \xi^2 f_2 + \xi^3 f_3 + \dots + \xi^k f_k \\ \xi S_k &= \xi f_0 + \xi^2 f_1 + \xi^3 f_2 + \dots + \xi^k f_{k-1} + \xi^{k+1} f_k \\ \xi^2 S_k &= \xi^2 f_0 + \xi^3 f_1 + \dots + \xi^k f_{k-2} + \xi^{k+1} f_{k-1} + \xi^{k+2} f_k \end{aligned}$$

restando y factorizando términos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} S_k(1 - \xi - \xi^2) &= \xi f_1 - \xi^{k+1} f_k - \xi^{k+1} f_{k-1} - \xi^{k+2} f_k \\ &= \xi f_1 - \xi^{k+1} (f_k + f_{k-1}) - \xi^{k+2} f_k \\ &= \xi f_1 - \xi^{k+1} (f_{k+1}) - \xi^{k+2} f_k \end{aligned}$$

o bien:

$$S_k = \frac{\xi f_1 - \xi^{k+1} f_{k+1} - \xi^{k+2} f_k}{1 - \xi - \xi^2}$$

Pudimos eliminar las potencias intermedias pues sabemos que $f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \therefore f_{k+1} - f_k - f_{k-1} = 0$. Ahora bien, el

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k = 0, \quad \text{puesto que } |\xi| < 1$$

Se sigue que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi f_1 - \xi^{k+1} f_{k+1} - \xi^{k+2} f_k}{1 - \xi - \xi^2} = \frac{\xi}{1 - \xi - \xi^2}$$

■

Desarrollando en series de Taylor alrededor del cero de esta función obtenemos:

$$f_{k+1} = \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-r}{r} \quad (15)$$

De $(I - \xi Q^k)^{-1}$ obtenemos de la misma manera para una k fija:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^{n-1} f_{nk} = \frac{f_k}{1 - \xi l_k + \xi^2 (-1)^k} \quad (16)$$

usando la ecuación 4, y donde

$$l_k = \text{tr}(Q^k) = f_{k+1} + f_{k-1} \quad (17)$$

En esta última ecuación acabamos de definir los *números de Lucas*; tema en el que profundizaremos en el siguiente capítulo.

Las sucesiones de la ecuación 16 convergen para $|\xi| < \lambda_+^{-k}$. Por ejemplo para $k = 2$:

$$f_2 + \xi f_4 + \xi^2 f - 6 + \dots = \frac{1}{1 - 3\xi + \xi^2} \quad \text{para } |\xi| < \frac{1}{\lambda_+^2} \approx 03,82$$

■

0.5. Sumas binomiales

Una propiedad algebraica interesante de la matriz Q de Fibonacci es que $Q^2 = Q + I$. Recordemos que:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Q^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por lo que:}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y} \\ Q + I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De manera mas general $Q^k = a_k Q + b_k I$ para algún (a_k, b_k) . De hecho si reemplazamos la la ecuación $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ (1) en la ecuación:

$$Q^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

obtenemos:

$$Q^k = \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}$$

Descomponiendo esta matriz nos queda:

$$\begin{aligned} Q^k &= \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k & f_k \\ f_k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{k-1} & 0 \\ 0 & f_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= f_k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f_{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= f_k Q + f_{k-1} I \end{aligned}$$

\therefore

$$Q^k = f_k Q + f_{k-1} I \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

Entonces generalizando y usando la fórmula del binomio⁴ nos queda:

$$Q^{kn} = (f_k Q + f_{k-1} I)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} Q^r \quad (19)$$

Tomando la entrada q_{21} de Q^{kn} :

$$f_{kn} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} f_r \quad (20)$$

Retomemos la ecuación 18 : $Q^k = f_k Q + f_{k-1} I$ y usando que⁵ $f_{-k} = (-1)^{k+1} f_k$, llegamos a que:

$$Q^{-k} = (-1)^{k+1} (f_k Q - f_{k+1} I)$$

Análogamente se sigue que:

$$Q^{-kn} = (-1)^{kn} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k+1})^{n-r} (-1)^r Q^r,$$

⁴ $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

⁵Ver la ecuación 3.

utilizando nuevamente la ecuación 3:

$$f_{kn} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k+1})^{n-r} (-1)^{r+1} f_r. \quad (21)$$

Para una pequeña generalización, tomemos la ecuación 19.

$$Q^{kn} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} Q^r$$

y multipliquémosla por Q^p .

$$\begin{aligned} Q^{kn} Q^p &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} Q^r Q^p \\ Q^{kn+p} &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} Q^{r+p} \end{aligned}$$

Tomando la entrada q_{21} :

$$f_{kn+p} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} f_{r+p}$$

de modo que nos queda: f_{kn+p} en lugar de f_{kn} y f_{r+p} en sustitución de f_r .

De manera similar para Q^{-p} para la ecuación 21 obtenemos f_{kn+p} y $(-1)^{r+p+1} f_{r+p}$ en lugar de f_{kn} y $(-1)^{r+1} f_r$ respectivamente.

(Jhonson,2004)

■

0.6. Un poco de historia

Al parecer el término *matriz Q* tiene su origen en la tesis de maestría de Charles H. King *Some properties of the Fibonacci numbers* del año de 1960, según cita Vern Hoggatt en su artículo *A primer on the Fibonacci sequence, Part II* del *Fibonacci Quarterly* No. 2, 1963. Desde entonces numerosos artículos escritos por Hoggatt, por sus alumnos y por otros colaboradores han aparecido en el *Fibonacci Quarterly*, donde el método de las matrices Q se convirtió en la herramienta central para el análisis de la sucesión de Fibonacci. Vern Hoggatt mantuvo una intensa correspondencia donde planteó ideas e hizo innumerables sugerencias para investigaciones futuras referentes al tema. Por ejemplo H. W. Gould atribuye gran cantidad de ideas creativas durante 20 años, a la correspondencia que mantenía con Hoggatt:

Su contagioso entusiasmo por la investigación y las propiedades de los números infectaron a todo aquél que lo conoció o mantuvo correspondencia con él, y a mi parecer Vern dio un gran impulso para la popularización del método de las matrices Q. Desde 1962 Vern escribió muchas cartas referentes al uso de las matrices Q para estudiar polinomios de Fibonacci y otros sistemas relacionados. Él era muy modesto con respecto a llevarse el crédito por las ideas y en ocasiones me mostraba algún método y después decía “pero esto probablemente lo conoces muy bien”. Algunas veces así era; la mayoría de las veces no. (Gould, 1981)

Al parecer el uso de las matrices Q para generar los números de Fibonacci aparece por primera vez en un breve comentario del Profesor Joel L. Brenner con el título *Luca's Matrix*. Este comentario apareció en marzo de 1951 en el *American Mathematical Monthly* en las páginas 221 y 222:

La n -ésima potencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix},$$

Donde u_n es un número de Fibonacci. De manera más general, la n -ésima potencia de $\begin{pmatrix} a-b & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} & -abu_n \\ u_n & -abu_{n-1} \end{pmatrix},$$

Donde $u_n = \frac{a^n - b^n}{ab}$ es un número de Lucas. De estos hechos podemos deducir parte de la teoría general. Las sucesiones $u_n = A_1 u_{n-1} + \dots + A_r u_{n-r}$ tienen propiedades que pueden ser rápidamente obtenidas del estudio de la matriz de dimensión r , que generaliza la matrices anteriores. (Brenner, 1951 citado por Gould, 1981).

Poco antes de 1951, ya existía la inquietud por relacionar matrices con la sucesión de Fibonacci, por ejemplo, así se muestra en el comentario *Some properties of Fibonacci sequences* de David Devol del *American Mathematical Monthly* No. 58, 1951 donde se muestra la relación de matrices con la recurrencia básica de la sucesión:

Al definir las sucesiones de Fibonacci con la propiedad $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, muchas relaciones entre los términos pueden ser fácilmente obtenidas por la manipulación de una matriz de 2×2 , cuyos elementos son términos de la sucesión. (Devol 1951, citado por Gould, 1981)

Existen referencias aún anteriores, por ejemplo en 1949 J. Sutherland Frame utiliza matrices para estudiar fracciones continuadas. Y en el libro de Hans Scherdtfeger *Geometry of Complex numbers, Mathematical Expositions, No. 13*, hace referencia a un artículo de 1920 de Jacobsthal donde se discuten polinomios de Fibonacci y métodos matriciales. Aún así, existen referencias más antiguas como la especie de polinomio de Fibonacci introducido en 1883 por Catalan. Sin embargo, no es completamente claro cuándo, en las páginas de la historia, fue utilizada por primera vez una matriz para esta clase de trabajo.

Capítulo 5

Formulación Matricial de la sucesión de Lucas

La formulación matricial de la sucesión de Lucas es prácticamente análoga a la formulación matricial de la sucesión de Fibonacci puesto que, los números $l_k = \text{tr}(Q^k)$ de la ecuación ?? obedecen la siguiente regla de recurrencia:

$$l_{k+1} = l_k + l_{k-1} \quad \text{con} \quad l_0 = 2 \quad \text{y} \quad l_1 = 1,$$

Por lo que la fórmula análoga a la ?? es:

$$\begin{pmatrix} l_{k+1} & l_k \\ l_k & l_{k-1} \end{pmatrix} = Q^k \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Estos son los números de Lucas $l_k = 2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots$ obsérvese que

$$l_k = f_{k+1} + f_{k-1} \quad (2)$$

Procediendo como en la deducción de la ecuación ?? obtenemos¹:

$$l_{k+l} = f_k l_{l+1} + f_{k-1} l_l \quad \forall k, l \quad (3)$$

Nótese que como $l_0 = 2$ obtenemos la ecuación 2:

¹También podemos obtener este resultado en términos de combinaciones.

$$\begin{aligned}
l_{k+0} &= f_k l_{0+1} + f_{k-1} l_0 \\
l_k &= f_k l_1 + f_{k-1} l_0 \\
&= f_k + 2f_{k-1} \\
&= f_{k+1} - f_{k-1} + 2f_{k-1} \\
&= f_{k+1} + f_{k-1}
\end{aligned}$$

Tomando determinantes de la ecuación 1:

$$\left| \begin{pmatrix} l_{k+1} & l_k \\ l_k & l_{k-1} \end{pmatrix} \right| = |Q^k| \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right|$$

entonces:

$$l_{k+1}l_{k-1} - l_k^2 = (-1)^k [(1)(-1) - (2)(2)] = (-1)^k (-5) = 5(-1)^{k+1} \quad (4)$$

Ahora bien sean $L_k = \begin{pmatrix} l_{k+1} & l_k \\ l_k & l_{k-1} \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces reescribiendo la ecuación 1:

$$\begin{aligned}
L_k &= Q^k X \\
L_k X^{-1} &= Q^k X X^{-1}
\end{aligned}$$

por lo que nos queda:

$$L_k X^{-1} = Q^k$$

pero

$$X^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} X$$

entonces

$$\begin{aligned}
L_k \left(\frac{1}{5} X \right) &= Q^k \\
5Q^k &= L_k X
\end{aligned}$$

Por lo que al invertir la ecuación 1 obtenemos:

$$5 \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{k+1} & l_k \\ l_k & l_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sea $l_{i,j}$ el i -ésimo renglón y la j -ésima columna de una matriz del tipo L_k . Usando la recurrencia básica de l_k y viendo la entrada $l_{1,2}$ de lo anterior obtenemos la ecuación inversa a la ecuación 2:

$$5f_k = l_k + 2l_{k-1} = l_{k+1} - l_{k-1} + 2l_{k-1} = l_{k+1} + l_{k-1}$$

Entonces:

$$5f_k = l_{k+1} + l_{k-1} \quad (6)$$

■

0.1. Fórmula Bilineal

Para una la reducción de la fórmula bilineal asociada a la sucesión de Lucas, recordemos que definimos la siguiente matriz en la ecuación 1:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Y como habíamos visto con anterioridad esta matriz satisface:

$$X^{-1} = \frac{1}{5}X \quad \text{y} \quad QX = XQ \quad (7)$$

Entonces si $a + b = c + d$, obtenemos no sólo que $Q^a Q^{b-1} = Q^c Q^{d-1}$, sino también que:

$$5Q^a Q^{b-1} = Q^c X Q^{d-1} X$$

Esto es muy fácil de verificar ya que:

$$\begin{aligned} 5Q^{a+b-1} &= (Q^{c+d-1} X) X \\ &= (Q^c Q^{d-1} X) X \\ &= Q^c X Q^{d-1} X \end{aligned}$$

por lo que:

$$5Q^a Q^{b-1} = Q^c X Q^{d-1} X,$$

de donde se obtiene para $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ la siguiente ecuación:

$$5f_a f_b - l_c l_d = (-1)^r (5f_{a-r} f_{b-r} - l_{c-r} l_{d-r}) \quad (8)$$

que es análoga a la ecuación ??

0.2. Series para la sucesión de Lucas

Antes de desarrollar las series relacionadas con la sucesión de Lucas, vamos a obtener algunas propiedades que posteriormente nos serán de gran utilidad:

Utilizando la ecuación 2 $l_k = f_{k+1} + f_{k-1}$, tenemos que podemos reescribir una matriz de Lucas donde nos queda lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} l_{k+1} & l_k \\ l_k & l_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+2} + f_k & f_{k+1} + f_{k-1} \\ f_{k+1} + f_{k-1} & l_{k+1} - l_k \end{pmatrix}$$

Igualando entrada por entrada y utilizando nuevamente la ecuación 2 obtenemos:

$$\begin{aligned} l_{k+1} &= f_{k+2} + f_k = f_{k+1} + f_k + f_k = f_{k+1} + 2f_k \\ l_k &= f_{k+1} + f_{k-1} = f_{k+1} + f_{k+1} - f_k = 2f_{k+1} - f_k \\ l_k &= f_{k+1} + f_{k-1} = f_k + f_{k+1} + f_{k+1} = 2f_{k+1} + f_k \\ l_{k-1} &= l_{k+1} - l_k = f_{k+1} + 2f_k - f_{k+1} - f_{k-1} = 2f_k - f_{k-1} \end{aligned}$$

Regresando a nuestras series, recordemos que $(I - \xi Q)^{-1} = \sum_k \xi^k Q^k$ y multiplicando por $(1, 2)^T$, y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \sum_k \xi^k Q^k (1, 2)^T &= \xi^0 Q^0 (1, 2)^T + \xi^1 Q^1 (1, 2)^T + \dots + \xi^k Q^k (1, 2)^T \\ &= \xi^0 \begin{pmatrix} f_1 & f_0 \\ f_0 & f_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \xi^1 \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots + \xi^k \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \xi^0 \begin{pmatrix} f_1 + 2f_0 \\ f_0 + 2f_{-1} \end{pmatrix} + \xi^1 \begin{pmatrix} f_2 + 2f_1 \\ f_1 + 2f_0 \end{pmatrix} + \dots + \xi^k \begin{pmatrix} f_{k+1} + 2f_k \\ f_k + 2f_{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomando la entrada 12 y las igualdades que acabamos de desarrollar obtenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k Q^k(1, 2)^T = \xi^0 l_0 + \xi^1 l_1 + \xi^2 l_2 + \dots + \xi^k l_k$$

Ahora bien vamos a obtener la suma de esta sucesión, de la misma manera que lo hicimos para la ecuación ???. Es decir, multiplicándola por ξ y ξ^2 y restando las sumas obtenidas de la suma original, entonces nos queda:

$$\begin{aligned} R_k &= \xi^0 + \xi^1 l_1 + \xi^2 l_2 + \dots + \xi^k l_k \\ \xi R_k &= \xi l_0 + \xi^2 l_1 + \dots + \xi^k l_{k-1} + \xi^{k+1} l_k \\ \xi^2 R_k &= \xi^2 l_0 + \dots + \xi^k l_{k-2} + \xi^{k+1} l_{k-1} + \xi^{k+2} l_k \end{aligned}$$

Análogamente a la ecuación ??? los términos intermedios se eliminan quedando lo siguiente:

$$\begin{aligned} R_k(1 - \xi - \xi^2) &= \xi^0 l_0 + \xi l_1 - \xi l_0 - \xi^{k+1} l_k - \xi l_{k-1} - \xi^{k+2} l_k \\ &= \xi^0 l_0 + \xi l_1 - \xi l_0 - \xi^{k+1} (l_k + l_{k-1}) - \xi^{k+2} l_k \\ &= \xi^0 l_0 + \xi l_1 - \xi l_0 - \xi^{k+1} l_{k+1} - \xi^{k+2} l_k \\ &= \xi^0 l_0 + \xi(l_1 - l_0) - \xi^{k+1} l_{k+1} - \xi^{k+2} l_k \end{aligned}$$

Sustituyendo $\xi^0 = 1$, $l_0 = 2$ y $l_1 = 1$ nos queda:

$$\begin{aligned} R_k(1 - \xi - \xi^2) &= 2 + \xi(1 - 2) - \xi^{k+1} l_{k+1} - \xi^{k+2} l_k \\ R_k(1 - \xi - \xi^2) &= 2 - \xi - \xi^{k+1} l_{k+1} - \xi^{k+2} l_k \\ R_k &= \frac{2 - \xi - \xi^{k+1} l_{k+1} - \xi^{k+2} l_k}{1 - \xi - \xi^2} \end{aligned}$$

Recordemos que $\lim_{k \rightarrow 0} \xi^k = 0$ puesto que $|\xi| < 1$, se sigue que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k Q^k(1, 2)^T = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 - \xi - \xi^{k+1}l_{k+1} - \xi^{k+2}l_k}{1 - \xi - \xi^2} = \frac{2 - \xi}{1 - \xi - \xi^2}$$

\therefore

$$l_0 + \xi l_1 + \xi^2 l_2 + \dots = \frac{2 - \xi}{1 - \xi - \xi^2} \quad (9)$$

0.2.1. Sumas Binomiales

La suma binomial de la ecuación ?? para Fibonacci:

$$f_{kn} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} f_r$$

se generaliza de igual manera para Lucas tomando $f_{kn} = l_{kn}$, $f_r = l_r$; verificarlo es muy sencillo. Sabemos por la ecuación ?? que:

$$Q^{kn} = (f_k Q + f_{k-1} I)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} Q^r$$

ahora bien vamos a obtener la traza de dicha expresión, ya que por la ecuación ?? sabemos que $l_k = \text{tr}(Q^k)$, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q^{kn}) &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} \text{tr}(Q^r) \\ l_{kn} &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (f_k)^r (f_{k-1})^{n-r} l_r \end{aligned}$$

Mientras que para la ecuación ?? también se generaliza para Lucas con $(-1)^{n+1} = (-1)^r$.

■

0.3. Generalización de valores iniciales

Una generalización de los números de Fibonacci esta definida por $1 = G_1 = G_2 = \dots = G_{c-1}$, y la relación de recurrencia:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-c}$$

Estos números son las sumas de diagonales sucesivas de un triángulo de Pascal, empezando con la columna más a la izquierda y moviéndose $c - 1$ pasos hacia arriba y un paso a la derecha. El caso $c = 2$ equivale al caso de los números de Fibonacci. Esta generalización para los números de Fibonacci es, en muchos casos, una generalización de los resultados previamente expuestos tanto para Fibonacci como para Lucas, por lo que en esta sección nos dedicaremos simplemente a enumerarlos.

Considere $g_{k+1} = g_k + g_{k-1}$ para todo (g_0, g_1) . Entonces:

$$\begin{pmatrix} g_{k+1} & g_k \\ g_k & g_{k-1} \end{pmatrix} = Q^k \begin{pmatrix} g_1 & g_0 \\ g_0 & g_1 - g_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

que generaliza la ecuación ?? y 4 como:

$$g_{k+1}g_{k-1} - g_k^2 = g_{k+3}g_{k-1} - g_{k+1}^2 = (-1)^k (g_1^2 - g_0g_1 - g_0^2) \quad (11)$$

De la misma manera la generalización de la ecuación ?? y de la ecuación 3 es:

$$g_{k+l} = f_k g_{l+1} + f_{k-1} g_l \quad (12)$$

y para la ecuación ?? es:

$$g_{j+k+l} = f_{j+1} f_{k+1} g_{l+1} + f_j f_k g_l - f_{j-1} f_{k-1} g_{l-1}$$

Operando en $(g_1, g_0)^T$ con $(I - \xi Q)^{-1}$ obtenemos:

$$g_0 + \xi g_1 + \xi^2 g_2 + \dots = \frac{g_0 + (g_1 - g_0)\xi}{1 - \xi - \xi^2} \quad (13)$$

Comparando con la ecuación ??:

$$g_k = g_0 f_{k+1} + (g_1 - g_0) f_k = g_0 f_{k-1} + g_1 f_k \quad (14)$$

que es la entrada 21 de la ecuación 10 y un caso especial de la ecuación 12. La generalización de la ecuación ?? y la ecuación ?? es:

$$g_k = \frac{g_0(\lambda_+^{k-1} - \lambda_-^{k-1}) + g_1(\lambda_+^k - \lambda_-^k)}{(\lambda_+^k - \lambda_-^k)}$$

Nótese que cambiando k por $-k$ en la ecuación 10 y procediendo como se hizo con Fibonacci obtenemos:

$$g_{-k} = (-1)^k (g_0 f_{k+1} - g_1 f_k) \quad (15)$$

consistente con la ecuación 14 más la ecuación ??.

De la entrada 21 de $Q^{j+k}Q^{l-1} = Q^jQ^{k+l-1}$, con la ecuación 10, la reducción de la fórmula que generaliza las ecuaciones ?? y ?? involucran:

$$G_{jk} = f_{j+k}g_l - f_jg_{k+l}$$

y es también válido para $f \rightarrow g$ o de hecho $f \rightarrow h \neq g$ al combinar

$$h_0G_{j-1,k,l} + h_1G_{jkl}$$

Así, como en la ecuación ??: si $a, b, c, d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y $a + b = c + d$ entonces:

$$g_a h_b - g_c h_d = (-1)^r (g_{a-r} h_{b-r} - g_{c-r} h_{d-r}) \quad (16)$$

donde $r = a, b, c, d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Operando con potencias Q en $(g_1, g_0)^T$, obtenemos fácilmente las generalizaciones de la ecuación ?? y de la ecuación ??.

Para Lucas tenemos $g_0 = 2, g_1 = 1$, y por la ecuación 15

$$l_{-k} = (-1)^k l_k \quad (17)$$

Y la base para Fibonacci y Lucas es:

$$g_k = (g_1 - \frac{1}{2}g_0)f_k + \frac{1}{2}g_0l_k \quad (18)$$

(Jhonson,2004)

■

Capítulo 6

Discusión y Perspectivas

Como hemos visto la sucesión de Fibonacci tiene propiedades matriciales asombrosas, pero entonces la pregunta inmediata es, ¿cuál es la utilidad de expresar a la sucesión de Fibonacci en términos de matrices? Pues bien, la ventaja de expresar a Fibonacci en forma matricial, es la gran cantidad de sucesiones que podemos generar a partir de esta formulación, simplemente al cambiar los valores iniciales de las matrices Q , como hemos visto al momento de generar la sucesión de Lucas. Pero esto no termina con la sucesión de Lucas, podemos seguir cambiando los valores iniciales y encontrar nuevas sucesiones. Algunas de las sucesiones que podemos generar a partir de lo anterior son las siguientes:

- **Tribonacci** t_k , donde $t_k = 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24$, se genera a partir de la siguiente regla de recurrencia:

$$t_{k+1} = t_k + t_{k-1} + t_{k-2} \quad \text{donde} \quad t_0 = t_1 = 0, t_2 = 1$$

y se representa matricialmente como:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donde:

$$M^k = \begin{pmatrix} t_{k+2} & t_{k+1} + t_k & t_{k+1} \\ t_{k+1} & t_k + t_{k-1} & t_k \\ t_k & t_{k-1} + t_{k-2} & t_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- **Trucas** u_k donde $u_k = tr(M^k)$, sigue la siguiente recurrencia:

$$u_k = t_{k+1} + 2t_k + 3t_{k-1} \quad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} + u_k & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k + u_{k-1} & u_k \\ u_k & u_{k-1} + u_{k-2} & u_{k-1} \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por mencionar algunos casos interesantes. De esta manera podemos continuar cambiando los valores iniciales y obtener tantas otras sucesiones como lo es una recurrencia general de n términos para Fibonacci, Lucas, polinomios de Fibonacci, sucesiones relacionadas con Fibonacci que involucran identidades hiperbólicas, de senos y cosenos e incluso se puede llegar a las sucesiones de multinacci, Fibonacci módulo m y mapas caóticos.

Pero las matrices Q de Fibonacci no sólo cuentan con estas propiedades sino también tienen aplicaciones prácticas. Ya en los años sesentas se observó que los eigenvalores de una matriz Q de Fibonacci aparecen como impedancia¹ imagen de una red de dos puertos²(Basin, 1963).

También en la Finanzas existen aplicaciones de la sucesión de Fibonacci. Desde hace tiempo el comportamiento de los mercados financieros ha sido motivo de estudio y no son pocos quienes lo caracterizan de errático y aleatorio, mientras que otros han tratado de explicarlo mediante modelos probabilísticos basados en funciones de distribución. A mediados del siglo XX el analista financiero norteamericano Ralph Nelson Elliot, propuso que en la práctica el movimiento del mercado no es uniforme, sino que se produce mediante oscilaciones a la alza y a la baja, al igual que el ánimo de los inversores. Elliot observó el carácter repetitivo al que se ajustaba el comportamiento bursátil y llegó a la conclusión de que el mercado sigue un movimiento de cinco ondas de avance, seguidas de tres de corrección.

Así en las fases alcistas, el mercado sube en una sucesión de tres ondas, para continuar bajando en otras sucesiones de dos. Por tanto, un ciclo sencillo comprende cinco ondas. En las fases bajistas, ocurre justamente lo contrario, es decir, se producen tres ondas a la baja, interrumpidas por dos ondas correctoras al alza. De esta forma, cualesquiera de las tendencias sigue ocho etapas, cinco en la tendencia principal y tres correctoras. Este análisis es conocido como la teoría de las ondas de Elliot. Dentro de esta teoría, se utiliza la sucesión de Fibonacci para el análisis de las correcciones que se

¹Impedancia. Mide la oposición de un circuito o de un componente eléctrico al paso de una corriente eléctrica alterna sinusoidal. El concepto de impedancia generaliza la ley de Ohm en el estudio de circuitos en corriente alterna (AC) y se mide en ohmios.

²Red de dos puertos. Una red cuyas características se especifican para cuatro terminales que actúan, dos como entrada y otras dos como salida. La red puede tener otras terminales. También se le conoce como *red de dos pares de terminales* por su traducción del inglés.

producen en las diferentes ondas llamados retrocesos de Fibonacci. Se les llama de esta manera pues los números de Fibonacci, como hemos visto en repetidas ocasiones, tienen la propiedad de que el cociente entre cada número y el siguiente de la sucesión es siempre 1.618 (un 61.8% de su valor) o que la proporción que hay entre cada número y el segundo posterior de la sucesión es siempre del 38.2%. Basado en esto se pueden establecer objetivos de corrección del 38.2% y del 61.8%, y se les utiliza para determinar cuánto ha repuntado o retrocedido un precio respecto de su tendencia subyacente. (Ruiz, 1999).

Con lo que respecta a la Filotaxia se han logrado grandes avances en años recientes. Nuevos experimentos intentan explicar los arreglos espirales caracterizados por los números de Fibonacci, los cuales se manifiestan en girasoles, hojas de jitomate y flores de la *Arabidopsis*, y ponen firmemente a las auxinas en el centro de la investigación. Las auxinas³ están implicadas en varios aspectos del desarrollo de la planta, incluyendo la embriogénesis, el desarrollo de las raíces, y la diferenciación vascular. Recientemente las auxinas han mostrado que pueden inducir la formación de hojas y flores en el meristemo apical⁴. Como activador de la iniciación orgánica, las auxinas pueden jugar un papel determinante en la posición de los órganos y por ende de la filotaxia, (Reinhardt, 2003).

Como podemos ver, después de ocho siglos, Fibonacci sigue a la vanguardia incursionando en campos tan disímiles como lo son la electrónica, la genética, las finanzas, las matemáticas y el arte, entre muchos otros. Las aplicaciones y avances con lo que respectan a Fibonacci, ya sea en su forma matricial o en el desarrollo de su sucesión, no terminan aquí sino por el contrario, abren el camino a nuevas discusiones y desde luego a la investigación.

³Auxinas. Son un grupo de sustancias que controlan el crecimiento de las plantas (a menudo llamadas hormonas vegetales o fitohormonas). Juegan un papel esencial en la coordinación de la mayoría de procesos de crecimiento de la vida de la planta, en especial en los relacionados con los tallos. Las auxinas determinan el crecimiento de la planta por alargamiento de sus células, en todos los niveles, desde las células, los órganos y la planta entera. Su representante más abundante en la naturaleza es el ácido indolacético (IAA), derivado del aminoácido triptófano.

⁴Meristemo apical. Es una población de células en el extremo del eje naciente. Produce los órganos laterales, el tejido del tallo y se regenera si mismo. En la mayoría de las plantas sus sistemas se desarrollan en el meristemo apical

Bibliografía

- [1] Andries Lopes, Frederico José. *Os números de Fibonacci e a Bolsa de Valores*. Revista Electrónica de Economía N.3 Instituto Vianna Júnior Faculdade de Ciências Económicas Vianna Júnior.
- [2] Aranda Morondo, Ricardo. *Charles H. Dow*. Recuperado el 10 de noviembre de 2006, desde: <http://www.eumed.net/coursecon/economistas/Dow.htm>
- [3] Bartholot, Raymonde. *CASSINI, Jean Dominique*. Recuperado el 10 de Agosto 2006 desde: http://www.obs-nice.fr/Cassini/biocassini_english.html. Última actualización 26 Febrero 2001.
- [4] Basin, S. L. *The Appearance of Fibonacci Numbers and the Q Matrix in Electrical Network Theory*. Mathematics Magazine, Vol. 36, No. 2 (Mar, 1963), pp. 84-97
- [5] Clarke, M.L. *Virgil and the Golden Section*. The Classical Review, New Ser., Vol. 14, No.1. (Mar,.1964), pp.43-45.
- [6] Clyde A, Bridger. *Leonardo, His Rabbits, and Other Curiosa*. The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 6, No.1. (Feb., 1975), pp. 14-20.
- [7] Cook, Alan. *Review author: An Astronomical Patriarch*. Desde JSTOR: Notes and Records of the Royal Society of London: Vol. 51, No. 2, p-335-337, Recuperado el 10 de Agosto, 2006.
- [8] Cooke, Todd J. *Do Fibonacci numbers reveal the involvement of geometrical imperatives or biological interactions in phyllotaxis?*. Botanical Journal of Linnean Society, 2006, 150, 3-24.

- [9] Dixon, Robert. *The Mathematics and Computer Graphics of Spirals in Plants*. Leonardo, Vol. 16, No. 2. (Spring, 1983), pp.86-90.
- [10] Duckworth, George E. *Mathematical Symmetry in Vergil's Aeneid*. Transactions and Proceedings of the American Philological Association, Vol. 91. (1960), pp. 184-220.
- [11] Fischler, Roger. *On the Application of the Golden Ratio in the Visual Arts*. Leonardo, Vol. 14, No. 1. (Winter, 1981), pp.31-32.
- [12] García Cruz, Juan Antonio. *Las Matemáticas de Luca Paccioli*. Seminario de Orotava de Historia de la Ciencia, año X La Oratava-Las Palmas de Gran Canaria 2001. Recuperado el 25 Agosto de 2006 desde: <http://webpages.u11.es/users/jagcruz/Articulos/pacioli.pdf>
- [13] Giulini, Anna. *Control of phyllotaxis by the cytokinin-inducible response regulator homologue ABPHYL1*. Nature, Vol. 430 (Aug, 2004), pp. 1031-1034
- [14] Gould, H. W. *A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem* The Fibonacci Quarterly, 1981, Vol. 19 , pp. 250-257.
- [15] Insua Cabanas, Mercedes; Fernández Ibáñez, Isabel; Rodríguez García, J. Dios. *La proporción áurea en la Sala de Armas del Arsenal de Ferrol*. Recuperada el 25 de Agosto de 2006 desde: <http://www.ingegraf.es/ingegraf/pdf/titulos/COMUNICACIONES>
- [16] Johnson, R.C. *Matrix methods for Fibonacci and related sequences.*, disponible en: <http://www.dur.ac.uk/bob.johnson/fibonacci/>. Última actualización Diciembre 3 2004.
- [17] Kelley L. Ross, Ph.D. *The Golden Ratio and the Fibonacci Numbers*. Recuperado el 25 de Agosto desde: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>. Última actualización Junio 1998.
- [18] Knott, Ron. *Fibonacci and Golden Ratio Formulae*. Recuperado el 10 de Agosto de 2006, desde: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibFormulae>. Última actualización Agosto 4 2006.

- [19] Knott, Ron. *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, Recuperado el 25 de Agosto de 2006 desde: <http://friesian.com/golden.htm> .Última actualización 1999.
- [20] Knott, Ron. *Who was Fibonacci, 1998*. Recuperado el 10 de Octubre de 2006 desde: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html>. Última actualización 25 Julio 2005.
- [21] Kuhlemeier, Cris. *Auxin and Phyllotaxis*. TRENDS in Plant Science. Vol. 6, (May, 2001), pp. 187-188.
- [22] Lankham, Isaiah. *Some Common Mathematical Symbols And Abbreviations with History* Abril 7, 2005, pp. 4. Recuperado el 23 de Octubre de 2006 desde: http://www.math.ucdavis.edu/~issy/teaching/common_math_symbols.pdf
- [23] Lucas, Edouard. *Theorie des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques*. American Journal of Mathematics, Vol. 1, No. 2. (1878), pp. 184-196.
- [24] Markowsky, George. *Misconceptions about the Golden Ratio*. The College Mathematics Journal, Vol. 23, No.1.(Jan.,1992),pp.2-19.
- [25] Martínez C, Vicent. *Diccionario de Botánica*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2006 desde: <http://www.botanical-online.com/spanishglossary1.htm> Última actualización octubre 2006.
- [26] Martínez Ruiz. *El papel del Análisis Técnico en la Filosofía del Inversor Medio (I)*. Boletín de Estudios Económicos. Volumen LIV Agosto 1999 No. 167.
- [27] Miramontes, Pedro. *La geometría de las formas vivas*. Ciencias, 42, 1996 pp. 12-19.
- [28] Reinhardt et al. *Regulation of phyllotaxis by polar auxin transport*. Nature, Vol. 426, (Nov, 2003), pp. 255-260.
- [29] Reynolds, Mark A. *Four Approximations for Finding the Golden Section of a Circle's Circumference from the Square Root Two Rectangle*. Nexus

- Network Journal, vol. 4, no. 4 (Autumn 2002). Recuperado el 18 de Septiembre desde: <http://www.nexusjournal.com/GA-v4n4.html>
- [30] Robertson, Edmund F and O’Connorr, J.J. a *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 15 de Agosto de 2006 desde: <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Catalan.html> Última actualización Agosto de 1995.
- [31] Robertson, Edmund F and O’Connorr, J.J. b *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 10 de Octubre de 2006 desde: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/7Ehistory/Biographies/Fibonacci.html>. Última actualización Agosto 1995.
- [32] Robertson, Edmund F and O’Connorr, J.J. c *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 10 Octubre de 2006 desde: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/7Ehistory/Biographies/Lucas.html>. Última actualización Agosto 1995.
- [33] Robertson, Edmund F and O’Connorr, J.J. d *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 15 de Agosto de 2006 desde: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Simson.html>. Última actualización Agosto de 1995.
- [34] Robertson, Edmund F and O’Connorr, J.J. e *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 15 de Agosto de 2006 desde: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cassini.html>. Última actualización Agosto de 1995.
- [35] Roskill, Mark. *Discover France- George Pierre Seurat*. Recuperado el 27 de septiembre de 2007 desde: <http://www.discoverfrance.net/France/Art/Seurat/Seurat.html>
- [36] Sarmiento, Fausto O. *Diccionario de Ecología*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2006 desde: <http://www.ensayistas.org/critica/ecologia/diccionario/f.htm> Última actualización Octubre 2001.
- [37] Serge, Lang. *Algebra Lineal*. Trad. Lara Aparicio, Miguel. Sistemas Técnicos de Edición., S.A. de C.V.,1986.

- [38] Spivak, Michael. *Calculus, Cálculo infinitesimal segunda edición*. Reverté Ediciones, S.A. de C.V.,1998.
- [39] Weisstein, Eric W. *Catalan's Identity*. Recuperado el 15 de Agosto de 2006 desde MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CatalansIdentity.html> Última actualización 12 de Agosto de 2006.
- [40] Weisstein, Eric W. *Golden Angle*. Recuperado el 18 de Septiembre desde MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GoldenAngle.html> Última actualización Agosto 2005.
- [41] Weisstein, Eric W. *Golden Ratio*. Recuperado el 25 de Agosto de 2006 desde MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html> Última actualización 17 de Abril de 2006.
- [42] Weisstein, Eric W. *Phyllotaxis*. Recuperado el 19 de Septiembre desde MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Phyllotaxis.html>
- [43] Wikipedia. *Charles Bonnet*. Recuperado el 16 de Octubre de 2006 desde: http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Bonnet Última actualización 14 de Agosto de 2006.
- [44] Wikipedia. *Generating Function* Recuperado el 16 de Octubre de 2006 desde: http://en.wikipedia.org/wiki/Generating_function Última actualización 14 de Agosto de 2006.
- [45] Wikipedia. *Martin Ohm*. Recuperado el 16 de Octubre de 2006 desde: http://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Ohm Última actualización 3 Agosto 2006.
- [46] Wikipedia. *Logarithmic Spiral*. Recuperado el 16 de Octubre de 2006 desde: http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral Última actualización 7 Octubre de 2006.
- [47] Willem. *The wave principle of Elliot*. Recuperado el 11de Noviembre desde: <http://www.home.zonnet.nl/LeonardEuler/fiboe3.html>

■ Otros Sitios:

- [48] *Análisis Técnico*. Recuperado el 10 de Noviembre de 2006, desde <http://spanish.fxstreet.com/privateresources/content/109040/content.asp?menu=knowledge>
- [49] *ArteHistoria-Genios de la pintura*. Recuperado el 27 de septiembre de 2006 desde: <http://www.artehistoria.com/frames.htm?http://www.artehistoria.com/genios/pintores/2115.htm>
- [50] *Leonardo Pisano Fibonacci*. Recuperado el 21 de Septiembre de 2006 desde: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Fibonacci.html>
- [51] *Real Academia Española*. Recuperado desde: <http://www.rae.es/>