



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENCAJES DE HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

NORBERTO ORDOÑEZ RAMIREZ

TUTOR:

DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

CO-TUTOR:

DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA



2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Deseo agradecerle a mis padres: Socorro y Raymundo, por haberme enseñado tantas cosas y por siempre estar cuando los necesité.

A mi padre por nunca darse por vencido, por tener siempre fuerzas para salir a delante, por ser siempre un gran ejemplo. Gracias por todo el apoyo y la confianza que me diste.

A mi madre que, aunque no quiera, se preocupa por todos sus hijos.

A Verónica y Alejandro por haber aceptado dirigir esta tesis, por todo el tiempo que me dedicaron y por todos los conocimientos que compartieron conmigo.

A todos los sinodales: Verónica, Alejandro, Gerardo, Jorge y José, por haber revisado y corregido este trabajo.

A todos mis amigos, maestros y personas que, de alguna forma, contribuyeron a la realización de esta tesis.

Agradecimiento especial:

Durante todos los estudios de mi carrera he tenido la fortuna de no estar solo. Siempre existió una personita que me acompañó, que sufrió conmigo todas mis derrotas, que compartió mis alegrías y, sin pedirme nada a cambio, me entregó su amor incondicionalmente. Como no existen palabras para expresarle lo que siento en estos momentos, me restrinjo a decir:

“Muchas gracias *Brenda*”

Índice general

Introducción	ix
1. Definiciones y Propiedades Básicas	1
1.1. Introducción	1
1.2. Continuos e Hiperespacios	1
1.3. n-odos, n-celdas y Teoremas de Encaje	9
2. Modelos de Hiperespacios	17
2.1. Introducción	17
2.2. El Arco	18
2.3. La Circunferencia	18
2.4. El Trío Simple	24
2.5. La Paleta	28
2.6. El Ocho	32
3. Gráficas Finitas	39
3.1. Introducción	39
3.2. Propiedades de las Gráficas Finitas	41
3.3. Árboles	44
3.4. Clasificación en las Gráficas Finitas	47
3.5. Dos Modelos Importantes	57
3.5.1. Modelo para el Hiperespacio $F_2(\mathcal{P})$	59
3.5.2. Modelo para el Hiperespacio $F_2(\Theta)$	65
3.6. Conclusiones del Capítulo	83
4. Dendritas y Dendroides	87
4.1. Dendritas	87
4.2. El Peine Nulo y la Dendrita F_w	88

4.3. Dendroides	94
5. Continuos Localmente Conexos	105

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.

Un hiperespacio es una colección de subconjuntos de un continuo, que al dotarlos de una topología, inducida por una métrica, adquieren una estructura de espacio métrico.

En este trabajo nos enfocaremos al estudio de dos hiperespacios muy particulares:

El primero de ellos lo denotamos por $C(X)$ y consta de la colección de todos los subconjuntos de un continuo que son cerrados, conexos y vacíos, a cada uno de estos elementos se les llama subcontinuo.

El segundo es la colección formada por conjuntos de a lo mas dos puntos, es decir conjuntos de la forma $\{p, q\}$, donde p y q son elementos del continuo X (tenemos la opción de que $p = q$ y en este caso estamos considerando al conjunto $\{p\}$). A este hiperespacio se le denota por $F_2(X)$.

Ahora bien, como muchas cosas en matemáticas, en la Teoría de Continuos surge el problema de construir modelos geométricos que representen los objetos con los que se trabaja. En este, caso al tomar continuos “*sencillos*” y representar sus hiperespacios arriba mencionados, nos damos cuenta que satisfacen ciertas propiedades bajo la relación inclusión. Por ejemplo en algunos casos, para un continuo X , los modelos de $C(X)$ y $F_2(X)$ resultan ser homeomorfos. En otros casos podemos encontrar una copia homeomorfa de uno de los modelos en el otro o simplemente hay continuos para los cuales sus modelos son comparables bajo esta relación.

Con los ejemplos de modelos que se pueden construir de una manera fácil, notamos que el hiperespacio $C(X)$ casi siempre “le gana” a $F_2(X)$, es decir,

regularmente $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$. De este hecho es que surge la pregunta de estudio del presente trabajo:

¿Para qué continuos se puede asegurar la siguiente relación

$$F_2(X) \hookrightarrow C(X)?$$

Capítulo 1

Definiciones y Propiedades Básicas

1.1. Introducción

En el presente capítulo daremos una pequeña introducción al mundo de los hiperespacios de un continuo. Como veremos a cada hiperespacio de un continuo dado, le asignaremos una métrica, con la cual, resultarán ser también un continuo. También estamos interesados en detectar en el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo X , ciertos subconjuntos especiales que llamaremos n -celdas. Veremos que dichos conjuntos existen cuando en X podemos detectar otros subconjuntos especiales, que llamaremos n -odos. Lo anterior lo generalizaremos para así detectar un cubo de Hilbert en el hiperespacio de los subcontinuos de X .

1.2. Continuos e Hiperespacios

Definición 1 *Un **continuo** X es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.*

Un subconjunto no vacío de un continuo X que sea conexo y cerrado recibe el nombre de **subcontinuo** de X .

2 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Los hiperespacios de un continuo X se definen como:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Además, si $n \in \mathbb{N}$, consideramos también los hiperespacios

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$$

y

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Debo mencionar que los hiperespacios $C_n(X)$, para $n > 1$; y los hiperespacios $F_n(X)$, para $n > 2$, no son objeto de estudio de esta tesis, pero los defino ya que me parece importante que el lector tenga conocimiento de su existencia.

De las definiciones anteriores se observan las siguientes propiedades:

1. Todos los hiperespacios son subconjuntos de 2^X .
2. $F_n(X) \subset F_m(X)$ para toda $n \leq m$.
3. $C_n(X) \subset C_m(X)$ para toda $n \leq m$ y $C_1(X) = C(X)$.
4. $F_n(X) \subset C_m(X)$ para toda $n \leq m$.

Ahora bien a 2^X se le llama el hiperespacio de los cerrados de X , a $C(X)$ el hiperespacio de los subcontinuos de X y a $F_n(X)$ se le conoce como el n -ésimo producto simétrico de X .

Como mencionamos en la introducción, este trabajo se enfoca en estudiar cómo están relacionados, bajo encajes, los hiperespacios: $F_2(X)$ ($= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más dos puntos}\}$) y $C(X)$ (que es la colección de todos los subcontinuos de X). En concreto, vamos a estudiar en qué casos existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.

Ejemplo 2 *De manera introductoria consideremos al intervalo $I = [0, 1]$ y vamos a construir una representación geométrica de $C(I)$ y $F_2(I)$.*

Primero construiremos una representación geométrica para el hiperespacio $C(I)$.

Para esto, si $A \in C(I)$ por definición A es un subcontinuo del intervalo I , de donde A es un intervalo de la forma $[a, b]$ donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. Consideremos la función $h : C(I) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida para $A \in C(I)$ como $h(A) = h([a, b]) = (a, b)$. Por ser h un encaje, un modelo para $C(I)$ queda representado por $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, que no es más que el triángulo relleno con vértices en los puntos $(0, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Notemos que, en este modelo, el intervalo I está representado por el punto $(0, 1)$; los subcontinuos de la forma $\{x\}$, por las parejas (x, x) y los subcontinuos de la forma $[0, x]$ donde $x \in [0, 1]$, por el segmento que une al origen con el punto $(0, 1)$ (Figura 1.1). No incluimos la demostración de que h es un encaje, pues nos desviaríamos demasiado de la idea de este ejemplo.

Ahora vamos a construir un modelo para $F_2(I)$.

Para esto, si $A \in F_2(I)$, entonces $A = \{x, y\}$, donde x y y son puntos de I . Consideremos la función $e : F_2(I) \rightarrow C(I)$, que a un elemento $A = \{x, y\}$ de $F_2(I)$ le asigna el punto $e(\{x, y\}) = [\text{mín}\{x, y\}, \text{máx}\{x, y\}]$. Como se satisface que $0 \leq \text{mín}\{x, y\} \leq \text{máx}\{x, y\} \leq 1$, obtenemos que e es suprayectiva. Más adelante (Teorema 64) se demuestra, de una forma más general, que esta función es un homeomorfismo. Por lo tanto el modelo para $F_2(I)$ es el mismo triángulo relleno que representa al hiperespacio $C(I)$ (Figura 1.2).

4 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

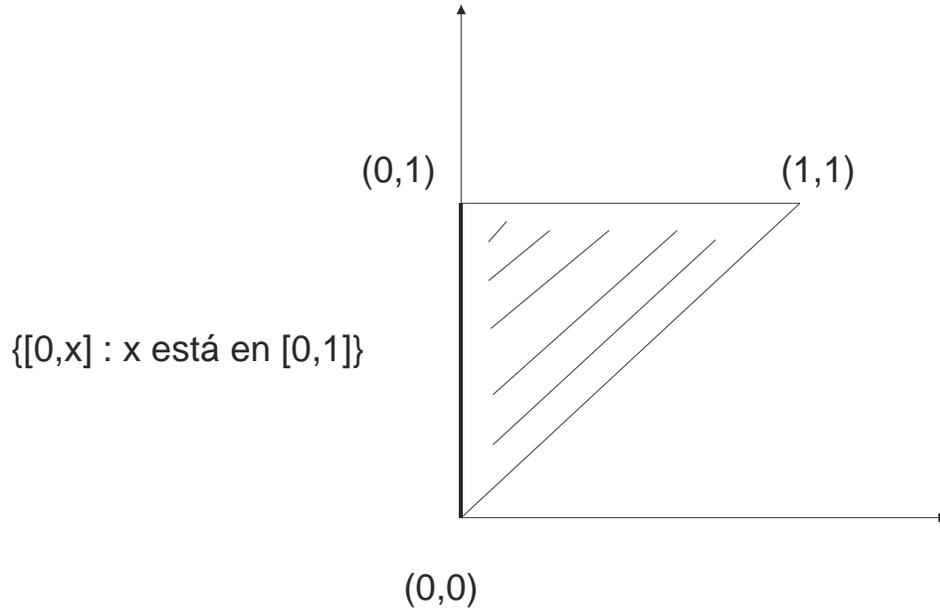


Figura 1.1: Modelo de $C(I)$

Por último notemos que al conjunto de puntos de la forma $\{x, 0\}$, con $x \in [0, 1]$, bajo la función e le asignamos el conjunto de subcontinuos $[0, x]$ con $x \in [0, 1]$. Por lo tanto el conjunto $\{A \in F_2(I) : 0 \in A\}$ está representado por uno de los lados del triángulo que representa a $F_2(I)$, de hecho está representado por el segmento que une al origen con el punto $(0, 1)$.

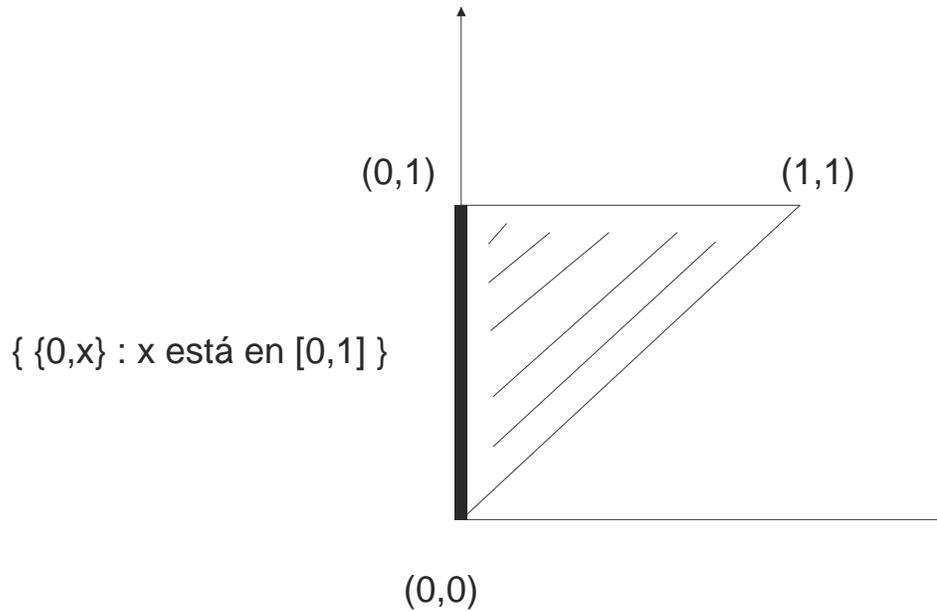
Del Ejemplo 2, tenemos que el intervalo $[0, 1]$ es un continuo que satisface la propiedad que vamos a estudiar en este trabajo.

Ahora supongamos que d es la métrica del continuo X . Si $r > 0$ para un elemento A de 2^X definimos la **nube de radio r con centro en A** como:

$$N(r, A) = \{x \in X : x \in B_r(a) \text{ para algún } a \in A\},$$

donde $B_r(a)$ es la bola abierta en X , de radio r y centro en a .

Definimos, para dos elementos A y B en 2^X , lo siguiente:

Figura 1.2: Modelo de $F_2(X)$.

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En [3, Proposición 2.1] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3 *Para cualesquiera elementos A , B y C de 2^X , se cumple que:*

- (1) $H(A, B)$ está bien definida,
- (2) $H(A, B) \geq 0$,
- (3) $H(A, B) = H(B, A)$,
- (4) $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$,
- (5) H satisface la desigualdad del triángulo, es decir: $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Así, con las propiedades mencionadas en el Teorema 3, tenemos que $(2^X, H)$ es un espacio métrico. A H se le llama la *Métrica de Hausdorff*. Por consiguiente, como todos los hiperespacios son subconjuntos de 2^X , tenemos que todos los hiperespacios también son espacios métricos.

6 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Los siguientes resultados son importantes y se deben tener presente, ya que posteriormente facilitarán la demostración de algunos resultados. En particular serán importantes para probar la continuidad de algunas funciones que definiremos en los hiperespacios $F_2(X)$ y $C(X)$.

Lema 4 *Sea X un continuo. Si $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, si $H(A, B) < \varepsilon$ entonces $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos que $H(A, B) = \delta$. Como $\inf\{\beta > 0 : A \subset N(\beta, B) \text{ y } B \subset N(\beta, A)\} = \delta$, por propiedades de infimo y por tener que $\delta < \varepsilon$, existe $\delta_1 \in \{\beta > 0 : A \subset N(\beta, B) \text{ y } B \subset N(\beta, A)\}$, tal que $\delta_1 < \varepsilon$. Por lo tanto $A \subset N(\delta_1, B)$ y $B \subset N(\delta_1, A)$, pero como $N(\delta_1, B) \subset N(\varepsilon, B)$ y $N(\delta_1, A) \subset N(\varepsilon, A)$, concluimos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. ■

Lema 5 *Supongamos que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ son sucesiones de elementos de 2^X , tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Entonces $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tal que si $s \geq N_1$ y $t \geq N_2$ entonces $H(A_s, A) < \varepsilon$ y $H(B_t, B) < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$ tenemos que $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$, lo cual implica que $A_n \subset N(\varepsilon, A)$, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, $B_n \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, B_n)$. Así $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Por lo tanto $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$, si $n \geq N$. De manera que $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$. ■

A continuación daremos unas definiciones y enunciaremos algunos teoremas que no probaremos, pero que nos ayudarán a demostrar resultados que serán de gran importancia a lo largo de todo el trabajo.

Teorema 6 [3, Corolario 6.13] *Si X es un continuo, entonces los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son continuos.*

Definición 7 Una **función de Whitney** es una función continua $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty)$, que satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\mu(\{p\}) = 0$ para toda $p \in X$;
- (2) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

Teorema 8 [3, Teorema 5.3] Para cualquier continuo X , 2^X admite funciones de Whitney.

Definición 9 Dados $A, B \in 2^X$ con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ es un **arco ordenado** de A a B en 2^X si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.

Teorema 10 [3, Teorema 6.15] Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B si y sólo si toda componente de B intersecta a A .

Teorema 11 [3, Lema 7.2] Sean X un continuo, A un subcontinuo propio de X y K una componente de $X - A$. Entonces $A \cup K$ es un subcontinuo de X que contiene propiamente a A .

Teorema 12 [3, Lema 2.3] Sea X^n el producto topológico de n copias del continuo X . Sea $g : X^n \rightarrow F_n(X)$ la función definida por $g(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces g es continua y suprayectiva.

Teorema 13 [6, Teorema 3.5] Todo continuo localmente conexo es arco conexo.

Teorema 14 [6, Teorema 3.16] Todo conjunto abierto conexo en un continuo localmente conexo es arco conexo.

8 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Con ayuda de los resultados anteriores, estamos listos para demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el hiperespacio $F_n(X)$ es también un continuo.

Lema 15 *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X^n es el producto topológico de n copias del continuo X consigo mismo, entonces X^n es también un continuo.*

Demostración. Por definición debemos probar que $X^n = \prod_{i=1}^n X_i$ (con $X_i = X$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$), es un continuo. Para esto debemos verificar que X^n es no vacío, compacto, conexo y métrico. Por ser X_i no vacío, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces X^n es no vacío.

Como X_i es compacto, conexo y métrico, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces X^n es compacto por [1, Teorema 3.6], conexo por [1, Teorema 3.4.6] y métrico por [1, Teorema 4.12]. Esto termina la demostración de este lema. ■

Teorema 16 *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Como $F_n(X) \subset 2^X$, tenemos que $F_n(X)$ es un espacio métrico. Por el Teorema 12, $F_n(X)$ es la imagen bajo una función continua de un conjunto no vacío, conexo y compacto (ver Lema 15). Por lo tanto $F_n(X)$ es no vacío, conexo y compacto. De lo anterior se tiene que $F_n(X)$ es un continuo. ■

Para concluir con esta sección, en el siguiente teorema demostraremos que, para toda $n > 1$, el hiperespacio $C_n(X)$ es uncontinuo, concluyendo así, que todos los hiperespacios de un continuo son también continuos.

Teorema 17 *Para toda $n > 1$, el hiperespacio $C_n(X)$ es uncontinuo.*

Demostración. Como X es no vacío y por el Teorema 3, tenemos que $C_n(X)$ es no vacío y métrico. Por [3, Ejercicio 4.2], se tiene que $C_n(X)$ es compacto; y por [3, Ejercicio 6.3], se tiene que $C_n(X)$ es arco conexo. Por lo tanto el hiperespacio $C_n(X)$ es un continuo. ■

1.3. n-odos, n-celdas y Teoremas de Encaje

En esta sección vamos a definir unos subcontinuos de un continuo X , los cuales están relacionados con otros subcontinuos del hiperespacio $C(X)$. Debo mencionar que las definiciones y resultados de esta sección son de gran importancia, pues son una herramienta, que en muchas ocasiones, nos va a ayudar a decidir cuando un continuo X satisface que su hiperespacio $F_2(X)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(X)$.

Definición 18 *Se dice que un continuo A es un **n-odo**, si existe un subcontinuo B de A , tal que $A - B$ tiene al menos n componentes. Así, un continuo X contiene un n -odo, si existe un subcontinuo A de X el cual es un n -odo.*

*De manera análoga, se dice que A es un **∞ -odo**, si existe un subcontinuo B de A , tal que $A - B$ tiene una infinidad de componentes. Un continuo X contiene un ∞ -odo, si existe un subcontinuo A de X el cual es un ∞ -odo.*

Definición 19 *Un continuo A es un n -odo simple con vértice p , si A es la unión de n arcos no degenerados pq_1, \dots, pq_n , tal que para cualesquiera $k, j \in \{1, \dots, n\}$, con $k \neq j$, se tiene que $pq_k \cap pq_j = \{p\}$.*

Definición 20 *Una n -celda es una copia homeomorfa del continuo $[0, 1]^n$.*

Observemos que si $\mu = \bigcup_{i=1}^n pq_i$ es un n -odo simple con vértice p , entonces μ es un n -odo, en el sentido de la Definición 18, pues $\{p\}$ y μ son dos subcontinuos de μ , tales que la diferencia $\mu - \{p\} = \bigcup_{i=1}^n (pq_i - \{p\})$ tiene n componentes. Con esto tenemos que un n -odo simple es un caso particular de un n -odo, pero los definimos de una forma independiente pues posteriormente serán de gran importancia.

Es conveniente mencionar que los siguientes resultados no son originales de este trabajo, pero es importante incluir su demostración ya que nos proporcionan una idea intuitiva de la relación que existe entre un continuo X y su hiperespacio $C(X)$. Por tal motivo, al inicio de cada enunciado, incluyo la referencia de donde fueron extraídas las demostraciones.

10 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Teorema 21 [3, Teorema 7.3] *Si X contiene un n -odo, entonces $C(X)$ contiene una n -celda.*

Demostración. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$ y $B - A$ tiene al menos n componentes. Supongamos que K_1, K_2, \dots, K_n son n componentes distintas de $B - A$. Por el Teorema 11, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $A \cup K_i \in C(X)$ y $A \subsetneq A \cup K_i$. Por el Teorema 10, existe un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de A a $A \cup K_i$ tal que $\alpha_i(0) = A$ y $\alpha_i(1) = A \cup K_i$.

Definimos la función $\Psi : [0, 1]^n \rightarrow C(X)$ tal que:

$$\Psi((t_1, \dots, t_n)) = \alpha_1(t_1) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n).$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i(t_i) \in C(X)$ y $A \subset \alpha_i(t_i)$, de donde se sigue que $\alpha_1(t_1) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n)$ es la unión finita de subcontinuos de X , que intersectan a A . Por lo tanto $\Psi((t_1, \dots, t_n))$ es un subcontinuo de X . Esto demuestra que Ψ está bien definida.

Sea $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión en $[0, 1]^n$ tal que el $\lim z_m = z$. Como z_m es un elemento del producto $[0, 1]^n$, podemos pensar que $z_m = (z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)})$ y $z = (z_1, \dots, z_n)$. De manera que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ $\lim z_i^{(m)} = z_i$. Entonces aplicando n veces el Lema 5, obtenemos que $\lim \Psi(Z_m) = \lim(\alpha_1(z_1^{(m)}), \dots, \alpha_n(z_n^{(m)})) = \alpha_1(z_1) \cup \dots \cup \alpha_n(z_n) = \Psi(Z)$. Esto prueba que Ψ es una función continua.

Ahora demostremos que Ψ es inyectiva. Para esto consideremos dos puntos distintos (t_1, \dots, t_n) y (s_1, \dots, s_n) de $[0, 1]^n$. Entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $s_i < t_i$. Por ser α_i un arco ordenado obtenemos que $\alpha_i(s_i) \subsetneq \alpha_i(t_i)$. Tomemos un punto $p \in \alpha_i(t_i) - \alpha_i(s_i)$. Entonces $p \in (A \cup K_i) - \alpha(s_i) \subset (A \cup K_i) - A = K_i$. Notemos que si $i \neq j$, entonces $K_i \cap K_j = \emptyset$. De manera que $p \in K_i - (A \cup K_j)$ para toda $j \in \{1, \dots, n\} - \{i\}$. Así que $p \in K_i - \alpha_j(s_j)$, para toda $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $p \in \alpha_i(t_i)$ y $p \notin A \cup K_j$, para toda $i \neq j$. De manera que $p \in \alpha_i(t_i) - (\alpha_1(s_1) \cup \dots \cup \alpha_n(s_n)) \subset \Psi((t_1, \dots, t_n)) - \Psi((s_1, \dots, s_n))$. Esto demuestra que Ψ es inyectiva.

Como el dominio de Ψ es compacto y su imagen está contenida en un espacio Hausdorff, tenemos que $\Psi : [0, 1]^n \rightarrow \Psi([0, 1]^n)$ es un homeomorfismo. Por lo tanto $C(X)$ contiene una n -celda. ■

El recíproco del Teorema 21 es verdadera y su demostración se puede consultar en [2, Teorema 1.9].

Definición 22 *El cubo de Hilbert*, que lo denotaremos como I^∞ , es el producto topológico de una cantidad numerable de copias del intervalo $[0, 1]$, es decir $I^\infty = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$. De esta forma tenemos que I^∞ es un espacio, conexo, compacto y no vacío.

Dados dos puntos (x_1, x_2, \dots) y (y_1, y_2, \dots) en I^∞ , la siguiente fórmula:

$$d((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

es una métrica que induce la topología producto en I^∞ (ver [1, Páginas 71 y 72]). Por lo tanto el cubo de Hilbert I^∞ es un continuo.

Teorema 23 [3, Teorema 7.4] *Si X contiene un ∞ -odo, entonces $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert.*

Demostración. Sean $A, B \in C(X)$, tales que $A \subset B$ y $B - A$ tiene una infinidad de componentes. Supongamos que K_1, K_2, K_3, \dots , representan una cantidad numerable de componentes distintas de $A - B$.

Por el Teorema 11, si $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \cup K_i \in C(X)$ y $A \subsetneq A \cup K_i$. Por el Teorema 10, dada $n \in \mathbb{N}$, existe un arco ordenado $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de A a $A \cup K_n$ tal que $\alpha_n(0) = A$ y $\alpha_n(1) = A \cup K_n$. De esta manera, si $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\alpha_n(0) = A$ y, por la continuidad de α_n , existe $r_n \in (0, 1]$ tal que $H(\alpha_n(r_n), A) < \frac{1}{n}$, de donde $\alpha_n(r_n) \subset N(\frac{1}{n}, A)$.

Definimos la función $\Psi : I^\infty \rightarrow C(X)$ por $\Psi((t_1, t_2, \dots)) = \alpha_1(t_1 r_1) \cup \alpha_2(t_2 r_2) \cup \dots$.

12 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Afirmación 1. Ψ está bien definida.

Primero veamos que, para todo $z = (t_1, t_2, \dots) \in I^\infty$, $\Psi(z)$ es un continuo. Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(t_n r_n) \in C(X)$ y $A \subset \alpha_1(t_1 r_1) \cap \alpha_2(t_2 r_2) \cap \dots$, tenemos que $\Psi((t_1, t_2, \dots)) = \alpha_1(t_1 r_1) \cup \alpha_2(t_2 r_2) \cup \dots$ es conexo en X .

Ahora veamos que $\Psi(z)$ es cerrado en X . Para esto probaremos que $X - \Psi(z)$ es abierto. Sea un punto $p \in X - \Psi(z)$, entonces $p \notin \alpha_1(t_1 r_1) \cup \alpha_2(t_2 r_2) \cup \dots$, de donde $p \notin A$. Así que existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_{2\varepsilon}(p) \cap B = \emptyset$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$, sabemos que p no pertenece al conjunto cerrado $\alpha_1(t_1 r_1) \cup \dots \cup \alpha_m(t_m r_m)$, podemos elegir δ tal que $0 < \delta < \varepsilon$ y $B_\delta(p) \cap (\alpha_1(t_1 r_1) \cup \dots \cup \alpha_m(t_m r_m)) = \emptyset$. Además, para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $r_k \in [0, 1)$ y $t_k \geq 0$, entonces $0 \leq t_k r_k \leq r_k$. Por lo tanto, dada $n \geq m$, tenemos que $0 \leq t_n r_n \leq r_n$, lo que implica que $\alpha(t_n r_n) \subset \alpha(r_n) \subset N(\frac{1}{n}, A) \subset N(\frac{1}{m}, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

Por la elección de ε , $B_\varepsilon(p) \cap N(\varepsilon, A) = \emptyset$. Así que $B_\delta(p) \cap \alpha_n(t_n r_n) = \emptyset$ para toda $n \geq m$.

Como $B_\delta(p) \cap (\alpha_1(t_1 r_1) \cup \dots \cup \alpha_m(t_m r_m)) = \emptyset$, obtenemos que $B_\delta(p) \cap (\alpha_1(t_1 r_1) \cup \alpha_2(t_2 r_2) \cup \dots) = \emptyset$. Es decir $B_\delta(p) \cap \Psi(z) = \emptyset$.

Por lo tanto $X - \Psi(z)$ es abierto, como $\Psi(Z)$ es conexo, obtenemos que $\Psi(Z) \in C(X)$ para toda $Z \in I^\infty$. Esto prueba que Ψ está bien definida.

Afirmación 2. Ψ es continua.

Sean $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Si $n < m$ como α_n es continua y su dominio es un compacto, tenemos que α_n es uniformemente continua. Por lo tanto existe $\delta_n > 0$ tal que si $|s_n - t_n| < \delta_n$, entonces $H(\alpha_n(t_n), \alpha_n(s_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $\delta = \frac{1}{2^m} \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Tomemos dos elementos $t = (t_1, t_2, \dots)$ y $s = (s_1, s_2, \dots)$ en I^∞ , cuya distancia sea menor que δ . Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n} < \delta.$$

Dada $n \leq m$, tenemos que $\frac{|s_n - t_n|}{2^n} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} < \delta \leq \frac{\delta_n}{2^m}$, de modo que $|s_n - t_n| < \frac{\delta_n}{2^m} < \delta_n$. Así $|s_n - t_n| r_n < s_n r_n < \delta_n$ y, por lo tanto, $|s_n r_n - t_n r_n| < \delta_n$. Por la elección de δ_n , obtenemos que $H(\alpha_n(t_n r_n), \alpha_n(s_n r_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$. De manera que si $n \leq m$

$$\alpha_n(t_n, r_n) \subset N(\varepsilon, \alpha_n(s_n r_n)) \subset N(\varepsilon, \Psi(s)) \text{ y}$$

$$\alpha_n(s_n r_n) \subset N(\varepsilon, \alpha_n(t_n r_n)) \subset N(\varepsilon, \Psi(t)).$$

Ahora si $n > m$, entonces

$$\alpha_n(t_n r_n) \subset \alpha_n(r_n) \subset N(\frac{1}{n}, A) \subset N(\frac{1}{m}, A) \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, \alpha(s_n r_n)) \subset N(\varepsilon, \Psi(s)), \text{ y de igual manera, tenemos que}$$

$$\alpha_n(s_n r_n) \subset \alpha_n(r_n) \subset N(\frac{1}{n}, A) \subset N(\frac{1}{m}, A) \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, \alpha(t_n r_n)) \subset N(\varepsilon, \Psi(t))$$

De esto, podemos concluir que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t_n r_n) = \Psi(t) \subset N(\varepsilon, \Psi(s))$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n(s_n r_n) = \Psi(s) \subset N(\varepsilon, \Psi(t))$. Por lo tanto $H(\Psi(z), \Psi(w)) < \varepsilon$. Esto demuestra la continuidad de Ψ .

Afirmación 3. Ψ es inyectiva.

Sean $t = (t_1, t_2, \dots)$ y $s = (s_1, s_2, \dots)$ dos puntos diferentes de I^∞ . Podemos suponer que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $s_n < t_n$.

Entonces $s_n r_n < t_n r_n$. Como α_n es un arco ordenado $\alpha_n(s_n r_n) \not\subset \alpha_n(t_n r_n)$. Consideremos $p \in \alpha_n(t_n r_n) - \alpha_n(s_n r_n)$. Entonces $p \in A \cup K_n - \alpha_n(s_n r_n) \subset A \cup K_n - A = K_n$. Si $m \neq n$, entonces $K_n \cap K_m = \emptyset$. De manera que $p \in K_n - (A \cup K_m) \subset K_n - \alpha_m(s_m r_m)$. Por lo tanto $p \in \alpha_n(t_n r_n) - (\alpha_1(s_1 r_1) \cup \alpha_2(s_2 r_2) \cup \dots) \subset \Psi(z) - \Psi(w)$. Lo cual demuestra que Ψ es inyectiva.

Por las afirmaciones 2 y 3, tenemos que Ψ es continua e inyectiva. Como el dominio de Ψ es un compacto y su imagen un espacio Hausdorff, tenemos que $\Psi : I^\infty \rightarrow \Psi(I^\infty)$ es un homeomorfismo. Por lo tanto $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. ■

Teorema 24 [3, Teorema 1.2] *Todo continuo se puede encajar en el cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea X un continuo, demostraremos que existe una función continua $f : X \rightarrow I^\infty$ tal que $f : X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.

14 CAPÍTULO 1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Si X consta de un solo punto, el resultado es inmediato. Supongamos que X tiene más de un punto. Tomemos una métrica en X , tal que $d(p, q) \leq 1$, para cualesquiera $p, q \in X$. Esto se puede hacer ya que, por ser X compacto, si d_X es la métrica de X , entonces $\text{diam}(X)$ es finito, por lo que $d = \frac{d_X}{\text{diam}(X)}$ satisface la condición que necesitamos.

Como X es un espacio métrico y compacto, existe un subconjunto denso y numerable $\{p_1, p_2, \dots\}$ en X . Definimos $f : X \rightarrow I^\infty$ por $f(p) = (d(p, p_1), d(p, p_2), \dots)$. Como las funciones $f_{p_i} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, para un punto $p \in X$, como $f(p_i) = d(p, p_i)$, son continuas, tenemos que f es una función continua.

Para ver que f es inyectiva, tomemos dos puntos diferentes p y q en X . Sea $\varepsilon = \frac{d(p, q)}{2} > 0$. Como $\{p_1, p_2, \dots\}$ es denso en X , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \varepsilon$. Notemos que $d(p, p_n) + d(p_n, q) \geq d(p, q) = 2\varepsilon > d(p, p_n) + \varepsilon$, por lo que $d(p_n, q) > \varepsilon$. Por consiguiente $d(p, p_n) < \varepsilon < d(q, p_n)$. Esto demuestra que $d(p, p_n) \neq d(q, p_n)$ y, por lo tanto, $f(p) \neq f(q)$, de esto se tiene que f es inyectiva. Como I^∞ un espacio Hausdorff y X un continuo, tenemos que f es un homeomorfismo en su imagen. ■

Por el Teorema 24 se dice que I^∞ es un *Continuo Universal*, en el sentido que contiene una copia homeomorfa de cualquier continuo.

Teorema 25 Sean X y Y dos continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si X se puede encajar en \mathbb{R}^n y Y contiene una n -celda, entonces existe un encaje $e : X \rightarrow Y$.

Demostración. Como X es un espacio compacto que se puede encajar en \mathbb{R}^n , entonces existe un encaje $e_1 : X \rightarrow [0, 1]^n$. Como Y contiene una n -celda, existe un encaje $e_2 : [0, 1]^n \rightarrow Y$. Entonces la composición $e_2 \circ e_1 : X \rightarrow Y$ es un encaje de X en Y , que termina la demostración de este teorema. ■

Teorema 26 Sea X un continuo que contiene un cubo de Hilbert, entonces para cualquier continuo Y existe un encaje $e : Y \rightarrow X$.

Demostración. Como X contiene un cubo de Hilbert, entonces existe un encaje $e_1 : I^\infty \rightarrow X$. Sea Y cualquier continuo, por el Teorema 24, existe un encaje $e_2 : Y \rightarrow I^\infty$. Entonces la composición $e_2 \circ e_1 : Y \rightarrow X$ es un encaje de X en Y que termina la demostración de este teorema. ■

Capítulo 2

Modelos de Hiperespacios

2.1. Introducción

En este capítulo vamos a empezar a investigar entorno al problema que nos concierne: determinar cuándo el hiperespacio $F_2(X)$ de un continuo X se puede encajar $C(X)$. Comenzaremos abordando el problema considerando los respectivos modelos de $F_2(X)$ y $C(X)$, para algunos continuos sencillos X . Por un modelo de $C(X)$ entenderemos un objeto geométrico que sea homeomorfo a $C(X)$. Lo mismo se entiende para un modelo de $F_2(X)$. En capítulos posteriores, consideraremos otros continuos X que, aunque sencillos, por su estructura no será posible determinar un modelo para sus hiperespacios $F_2(X)$ y $C(X)$. por lo tanto, para dichos continuos, la solución al problema que nos interesa se atacará de forma distinta. Quremos indicar que, en buena medida, las ideas que se presentan para las construcciones de los modelos de los hiperespacios $F_2(X)$ y $C(X)$ para los continuos X que aquí se presentan, son ya conosidas y se pueden consultar en libros como [3, Capítulo III].

Así, dado un continuo X para el que ya tenemos un modelo de $F_2(X)$ y de $C(X)$, estaremos interesados en determinar ciertos subcontinuos especiales de $F_2(X)$ y de $C(X)$. Como veremos, ésto será importante para así poder determinar el modelo de los hiperespacios $F_2(Y)$ y $C(Y)$ de un continuo Y que contenga a X .

2.2. El Arco

En el Ejemplo 2 del Capítulo 1 se construyó el modelo para el hiperespacio $C([0, 1])$, que es el triángulo relleno con vértices en los puntos $(0, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. También se demostró que el modelo de $F_2([0, 1])$ es homeomorfo a $C([0, 1])$ y, por lo tanto, el intervalo $[0, 1]$ satisface la propiedad que estamos estudiando en este trabajo. Esto se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 27 *Para el continuo $[0, 1]$, existe un encaje $e : F_2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$.*

2.3. La Circunferencia

La circunferencia, continuo que denotaremos por la letra S , se define como $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Un modelo para $C(S) = \{A \in 2^S : A \text{ es conexo}\}$ se puede construir de la siguiente manera:

Si $A \in C(S)$, tenemos las siguientes posibilidades: que A sea un arco contenido en S , que A sea un punto de S o que $A = S$. En el primer caso el arco A queda determinado por su longitud $\ell(A)$ y su punto medio $m(A)$. Ahora consideremos la recta L_A que une al punto $m(A)$ con el origen, así como al punto $p(A) \in L_A$ que está a distancia $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ del origen. Notemos que $p(A)$ depende únicamente de $m(A)$ y $\ell(A)$. Tenemos así asignado un punto $p(B)$, para cada arco (no degenerado) B en S .

En el caso en que $A = \{s\}$, con $s \in S$, siguiendo la idea anterior podríamos pensar que el punto medio de A es $m(\{s\}) = s$ y que la longitud de A es $\ell(\{s\}) = 0$. Entonces, al considerar la recta $L_{\{s\}}$ que une a s con el origen y al punto $p(\{s\})$ en $L_{\{s\}}$ y que dista del origen $1 - \frac{\ell(\{s\})}{2\pi} = 1$, tendríamos que $p(\{s\}) = s$. De igual forma, en este caso tenemos nuevamente que $p(A)$ queda determinado únicamente por $m(A)$ y por $\ell(A)$. Por lo tanto, dado un subcontinuo de la forma $\{s\}$, con s en S , lo podemos representar por el punto s .

Cuando $A = S$, tratando de seguir una idea como las anteriores tenemos lo siguiente; $l(S) = 2\pi$. Supongamos que podemos definir $m(S) = r$ para algún $r \in S$. Al considerar la recta R que une a r con el origen y al punto $p(S)$, que por definición $p(S)$ es el punto sobre R que dista del origen $1 - \frac{l(S)}{2\pi} = 1 - \frac{2\pi}{2\pi} = 0$, es decir $p(S) = \bar{0}$. Notemos que esto es independiente de la elección de r , por lo tanto podemos definir $p(S) = (0, 0)$.

De lo anterior concluimos que una representación de $C(S)$ es el disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ y la asignación queda determinada por el homeomorfismo $f : C(S) \rightarrow D$ donde a cada A le asignamos en punto $f(A) = m(A)(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi})$.

Notemos que en este modelo para $C(S)$, los continuos que constan de un solo punto quedan representados por la frontera de D . Ahora fijemos $r = (1, 0)$, diremos que r es extremo izquierdo (respectivamente extremo derecho) de un arco de S , si r es el extremo del subarco que queda a la izquierda (derecha) cuando nos paramos sobre el arco y vemos en la dirección del origen. Si \mathcal{B}_1 es el conjunto de todos los subarcos que tienen como extremo izquierdo a r entonces, para cada $A \in \mathcal{B}_1$, $m(A)$ está en $\{(x, y) \in S : y \geq 0\}$, además, cuando $\ell(A)$ es muy pequeña y distinta de cero, A se parece mucho a $\{r\}$ y, así el número $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ es casi uno, de donde $p(A)$ es un punto muy cercano a r , en el interior de la mitad superior del disco D . Por otro lado, cuando $\ell(A)$ se aproxima mucho a 2π tenemos que $m(A)$ se acerca al $(-1, 0)$ y, además, $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ decrece a cero, de donde $p(A)$ es un punto muy cercano al origen, también en el interior de la parte superior del disco D . De donde se observa que \mathcal{B}_1 queda representado por el conjunto que se ilustra en la Figura 2.1, en la cual se incluye una representación de \mathcal{B}_2 que es el conjunto de subarcos que tienen como extremo derecho a r .

De lo anterior obtenemos que el conjunto $\Lambda = \{A \in C(S) : r \in A\}$ está representado por la región delimitada por \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 (el "corazón relleno" que se muestra en la Figura 2.1).

Hagamos un modelo para el hiperespacio $F_2(S) = \{\{x, y\} : x, y \in S\}$.

Sea $\mathcal{R} = \{\{x, y\} \in F_2(S) : y = -x\}$. Si $A \in F_2(S) - \mathcal{R}$ tenemos que $A = \{x, y\}$. Denotemos por \bar{A} al subarco de S , con longitud menor, que une a x con y (Si A posee un solo punto, entonces $\bar{A} = A$). Siguiendo la misma

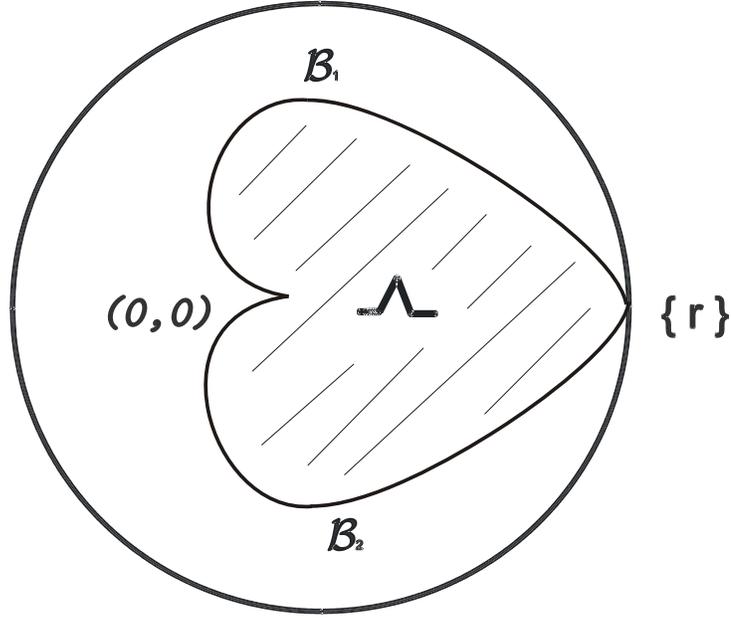


Figura 2.1: Conjunto Λ representado en $C(S)$

notación que utilizamos en el modelo anterior, si $T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|\bar{x}\| \leq 1\}$, entonces podemos definir la función $H : F_2(S) - \mathcal{R} \rightarrow T$, donde a cada $A \in F_2(X)$, le asignamos el punto $H(A) = (1 - \frac{\ell(\bar{A})}{2\pi})m(\bar{A})$. Esta función satisface que $H(F_2(S) - \mathcal{R})$ es el anillo abierto $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < \|\bar{x}\| \leq 1\}$.

Ahora, si $\{x, y\} \in \mathcal{R}$, tenemos que el arco \overrightarrow{xy} tiene la misma longitud que el arco \overrightarrow{yx} , es decir no podemos hablar del arco con menor longitud, pero se cumple que $m(\overrightarrow{xy}) = -m(\overrightarrow{yx})$, de donde también $(1 - \frac{\ell(\{x,y\})}{2\pi})m(\{x, y\}) = -[(1 - \frac{\ell(\{y,x\})}{2\pi})m(\{y, x\})]$. Entonces, mediante la relación H , a un punto de la forma $\{x, -x\}$ le estamos asignando dos puntos antípodas en la circunferencia $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{x}\| = \frac{1}{2}\}$.

Por lo tanto, para poder obtener el modelo de $F_2(S)$, en el conjunto T , debemos identificar los puntos antípodas de la circunferencia $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \frac{1}{2}\}$. Pero es bien conocido que el resultado de esta identificación nos da una banda de Möebius. En la Figura 2.2 se ilustra cómo se obtiene la banda.

Por lo tanto un modelo para $F_2(S)$ es la banda de Möebius (ver Figura

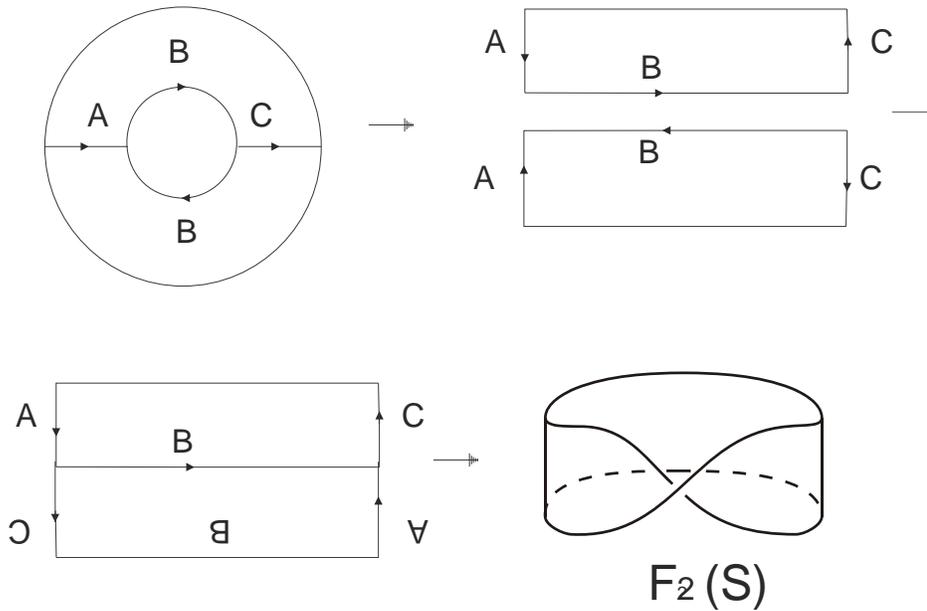


Figura 2.2: Construcción de $F_2(S)$

2.2).

Ahora notemos que los puntos de la forma $\{x, x\}$ con $x \in S$ quedan representados en la orilla de la banda de Möebius.

Sea p un punto fijo en S , Podemos pensar que $p = (1, 0)$. Ahora veremos cómo queda representado el conjunto $\mathcal{B} = \{\{x, p\} \in F_2(S) : x \in S\}$. Si $x = p$ el conjunto $\{p\}$ queda representado por el punto $(1, 0)$ en el anillo T . Si x varía en la semicircunferencia superior de S , entonces el punto medio del arco menor que una a p con x varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianes y su longitud varía de 0 a π (Figura 2.3, Paso I). Entonces el punto $\{x, q\}$ varía desde $(1, 0)$ hasta el punto $(0, \frac{1}{2})$ (Figura 2.3, paso II). Denotemos a este conjunto por \mathcal{B}_1 . De manera análoga, cuando x varía en la semicircunferencia inferior de S , el conjunto $\mathcal{B}_2 = \{\{x, p\} : x \text{ pertenece a la semicircunferencia inferior}\}$ queda representado por el reflejado de \mathcal{B}_1 con respecto al eje de las abscisas X (Figura 2.3, Paso III). Siguiendo la transformación que sufre la unión de estos dos conjuntos al crear la banda de Möebius del conjunto T , obtenemos que \mathcal{B} es una circunferencia que toca a la orilla de $F_2(S)$ en el punto $\{p\}$

(Figura 2.3, Paso IV), y da una vuelta a la banda tocando una sola vez a la circunferencia central (ver Figura 2.3, Paso V).

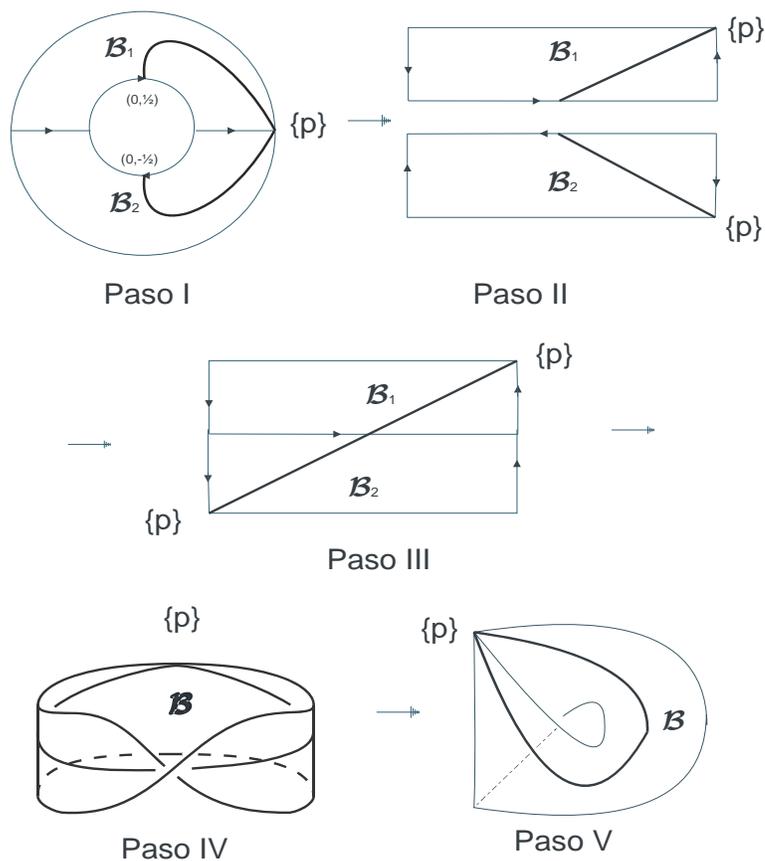


Figura 2.3: $\mathcal{B} = \{\{x, p\} \in F_2(S) : x \in S\}$

Nota 28 En lo que resta de esta sección, si a y b son dos puntos distintos en S , denotaremos por \overrightarrow{ab} al arco que une a a con b y que se obtiene recorriendo S en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Lema 29 Si denotamos por M a la banda de Möbius, p un punto fijo en S y $\mathcal{B} = \{\{x, p\} \in F_2(S) : x \in S\}$, entonces el conjunto $F_2(S) - \mathcal{B} = M - \mathcal{B}$ es conexo por trayectorias.

Demostración. Sean $\{a, b\}, \{c, d\} \in F_2(S) - \mathcal{B}$ dos puntos distintos. Esto quiere decir que $p \notin \{a, b, c, d\}$ y podemos suponer que $a \neq c$. Sean $r, s \in S - \{p\}$ dos puntos tales que el arco $\overrightarrow{sr} \cap \{a, b, c, d\} = \emptyset$ y $p \in \overrightarrow{sr}$. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ una parametrización de \overrightarrow{rs} , es decir α es un encaje tal que $\alpha(0) = r$ y $\alpha(1) = s$. Como $S = \overrightarrow{sr} \cup \overrightarrow{rs}$ y $\overrightarrow{sr} \cap \{a, b, c, d\} = \emptyset$, entonces $a, b, c, d \in \overrightarrow{rs}$. Por lo tanto existen, sin pérdida de generalidad, $t_1, t_2, u_1, u_2 \in [0, 1]$ con $t_1 < t_2$, $u_1 \leq u_2$ tales que $\alpha(t_1) = a$, $\alpha(t_2) = c$, $\alpha(u_1) = b$ y $\alpha(u_2) = d$. Consideremos $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_2(S)$ definida, para $w \in [0, 1]$, como

$$\gamma(w) = \{\alpha((1-w)t_1 + wt_2), \alpha((1-w)u_1 + wu_2)\}.$$

Mostraremos que γ es continua. Sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión en $[0, 1]$ que converge a un punto $w_0 \in [0, 1]$, denotando a $\lambda_n = (1-w_n)t_1 + w_nt_2$, $\lambda_0 = (1-w_0)t_1 + w_0t_2$, $\xi_n = (1-w_n)u_1 + w_nu_2$ y $\xi_0 = (1-w_0)u_1 + w_0u_2$, por la continuidad de α tenemos que $\lim \alpha(\lambda_n) = \alpha(\lambda_0)$ y $\lim \alpha(\xi_n) = \alpha(\xi_0)$.

Aplicando el Lema 5, tenemos que $\lim\{\alpha(\lambda_n), \alpha(\xi_n)\} = \lim(\{\alpha(\lambda_n)\} \cup \{\alpha(\xi_n)\}) = \{\alpha(\lambda_0)\} \cup \{\alpha(\xi_0)\} = \{\alpha(\lambda_0), \alpha(\xi_0)\} = \gamma(w_0)$ Por lo tanto γ es continua.

Como γ satisface que $\gamma(0) = \{\alpha(t_1), \alpha(u_1)\} = \{a, b\}$ y $\gamma(1) = \{\alpha(t_2), \alpha(u_2)\} = \{c, d\}$ y además como $\alpha([0, 1]) \subset S - \overrightarrow{sr}$ tenemos que $\gamma([0, 1]) \subset F_2(S) - \mathcal{B}$. Es decir γ es una trayectoria de $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$, contenida en $F_2(S) - \mathcal{B} = M - \mathcal{B}$. De manera que $F_2(S) - \mathcal{B} = M - \mathcal{B}$ es conexo por trayectorias. ■

Teorema 30 *La banda de Möbius \mathcal{M} , no se puede encajar en el plano.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, como \mathcal{B} es una circunferencia en M tenemos que $G(\mathcal{B})$ es una circunferencia en \mathbb{R}^2 (es decir $G(\mathcal{B})$ es una curva cerrada simple, la cual es topológicamente equivalente a una circunferencia). Sean Λ y Γ el la región acotada y no acotada, respectivamente, que genera $G(\mathcal{B})$.

Por el teorema de la Curva de Jordán (ver [10, Teorema 24.21, Pag. 165]), tenemos que podemos suponer que $G(\mathcal{B})$ es la circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2 , Λ es el disco unitario abierto, centrado en $(0, 0)$ y Γ es $\mathbb{R}^2 - \{G(\mathcal{B}) \cup \Lambda\}$.

Ahora mostraremos que existen dos puntos $x_1, x_2 \in M - \mathcal{B}$, tales que $G(x_1) \in \Lambda$ y $G(x_2) \in \Gamma$. Como \mathcal{B} intersecta sólo en un punto a la orilla de la banda M , podemos elegir un punto y en \mathcal{B} diferente de dicho punto. También elegimos un pequeño disco abierto $D \subset M$, centrado en y y que no intersecte a \mathcal{B} . Por el Teorema de la Invarianza del Dominio (ver [10, Teorema 19.2, Pag. 106]), $G(D)$ es un disco abierto en \mathbb{R}^2 que tiene a $G(y)$ en su interior, entonces $G(D) \cap \Lambda \neq \emptyset$ y $G(D) \cap \Gamma \neq \emptyset$, por lo tanto existen $x_1, x_2 \in D - \mathcal{B} \subset M - \mathcal{B}$ tales que $G(x_1) \in \Lambda$ y $G(x_2) \in \Gamma$.

Por el Lema 29 existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow M - \mathcal{B}$ que une a x_1 con x_2 , entonces $\alpha = G(\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - G(\mathcal{B})$ es una trayectoria que une a p_1 con p_2 . Pero esto es una contradicción pues $G(\mathcal{B})$ separa a los puntos x_1 y x_2 . Esta contradicción nace de suponer que la banda M se puede encajar en \mathbb{R}^2 , por lo tanto el teorema queda demostrado. ■

Teorema 31 *EL hiperespacio $F_2(S)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(S)$.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $e : F_2(S) \rightarrow C(S)$, como el hiperespacio $C(S)$ es homeomorfo al disco unitario D , y éste está contenido en \mathbb{R}^2 , obtenemos que la banda de Möebius se puede encajar en el plano, lo que es una contradicción al Teorema 30. Por lo tanto el hiperespacio $F_2(S)$ no se puede encajar en $C(S)$. ■

El Teorema 31 es de gran importancia, ya que nos proporciona el primer ejemplo de un continuo X para el cual sus hiperespacios $F_2(X)$ y $C(X)$ se pueden construir en \mathbb{R}^3 y además satisface que no existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$. Como se verá a lo largo de este trabajo, podría ser que la circunferencia S sea el único continuo que satisface estas propiedades (Figura 2.4).

2.4. El Trío Simple

Este continuo, que lo denotaremos por la letra T , está formado por la unión de tres arcos que coinciden sólo en un punto, que es un extremo de

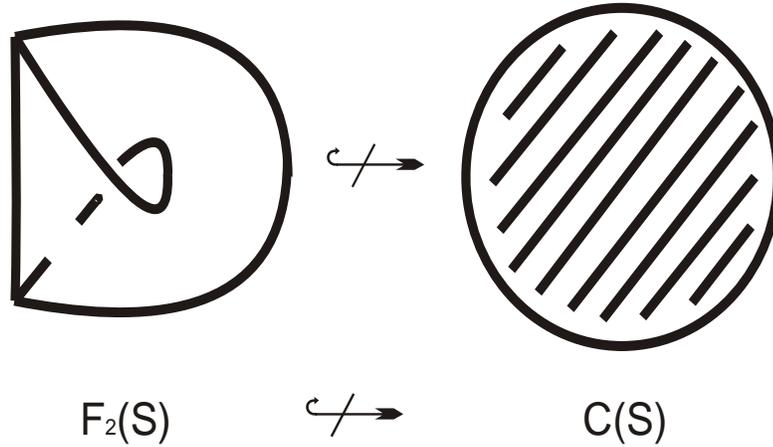


Figura 2.4:

cada arco. En esta sección al tríodo lo pensaremos como el subconjunto de \mathbb{R}^3 , formado por la unión de los tres segmentos convexos que unen a los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ con el punto $(0, 0, 0)$, denotados por L_1, L_2, L_3 , respectivamente. Al origen lo denotaremos con la letra v (ver Figura 2.5).

Construyamos un modelo para el hiperespacio $C(T) = \{A \in 2^T : A \text{ es conexo}\}$

$$\text{Notemos que } C(T) = \{A \in C(T) : v \in A\} \cup \{A \in C(T) : v \notin A\}$$

Si $B \in \{A \in C(T) : v \in A\}$, consideremos $J_i = B \cap L_i$, donde $i = 1, 2, 3$. Notemos que, como $v \in B$, entonces cada $J_i \neq \emptyset$ y es un subcontinuo de L_i que contiene al punto v . Al arco J_i le podemos asignar su longitud $\ell(J_i)$, la cual determina totalmente a J_i . De esta manera a B lo podemos representar por el punto en \mathbb{R}^3 dado por $(\ell(J_1), \ell(J_2), \ell(J_3))$. Notemos que la función $f : \{A \in C(T) : v \in A\} \rightarrow [0, 1]^3$ definida por $f(A) = (\ell(J_1), \ell(J_2), \ell(J_3))$, es inyectiva, pues B está completamente determinado por las longitudes de J_1, J_2 y J_3 . Como las longitudes de cada una de las J_i , varían de 0 a 1, tenemos que $f(\{A \in C(T) : v \in A\})$ es igual al cubo sólido $[0, 1]^3 = E$. Con esto tenemos que la función f es sobre y por lo tanto biyectiva. De esta manera al conjunto $\{A \in C(T) : v \in A\}$ lo podemos representar por el cubo sólido E .

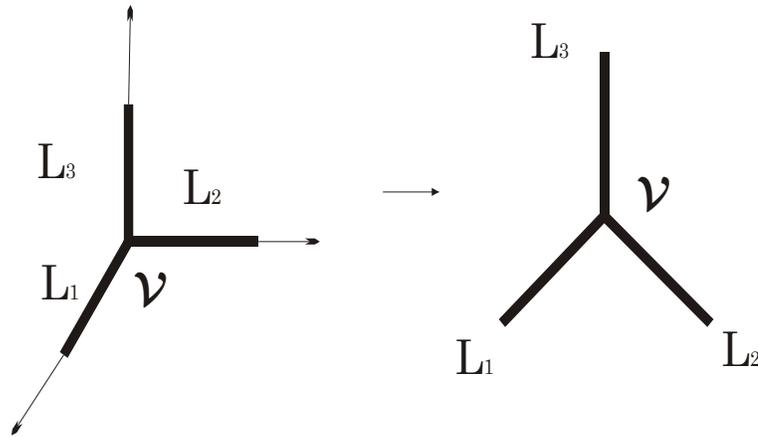
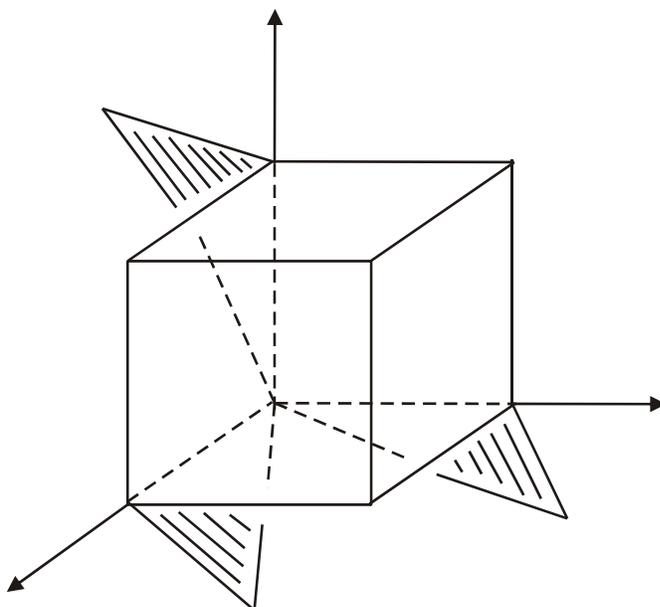


Figura 2.5: El Triodo Simple.

Si $B \in \{A \in C(X) : v \notin A\}$. Entonces $B \subset L_i$ para algún $i = 1, 2, 3$ y por tanto debe ser un subcontinuo de L_i . Como cada L_i es homeomorfo al $[0, 1]$, sabemos, del Ejemplo 2, que al hiperespacio $C(L_i)$ es homeomorfo a un triángulo relleno ∇_i . Notemos que, por ejemplo, en el triángulo ∇_1 están los subcontinuos $A \in L_1$ tales que $v \in A$, los cuales ya estaban representados en E por los puntos de la forma $(\ell(A), 0, 0)$, con $0 \leq \ell(A) \leq 1$, del Ejemplo 2, por la construcción del modelo para $C([0, 1])$, tenemos que tales subcontinuos de L_1 están representados como una orilla del triángulo ∇_1 , de igual forma para ∇_2 y ∇_3 . Por lo tanto para obtener un modelo del hiperespacio $C(T)$ debemos pegar una orilla del triángulo ∇_i con una arista del cubo E . De esta forma tenemos que un modelo del hiperespacio $C(T)$ consiste en un cubo sólido con tres triángulos pegados en sus orillas, como se ilustra en la Figura 2.6.

Para construir un modelo que represente al hiperespacio $F_2(X) = \{\{x, y\} : x, y \in T\}$ notamos lo siguiente:

Para cualesquiera dos puntos $x, y \in T$, existe un único arco xy en T que une a x con y , cuando $x = y$ se entiende que $xy = \{x\}$. Por consiguiente $xy \in C(T)$. Definimos la función $e : F_2(T) \rightarrow C(T)$, donde a un elemento $\{x, y\} \in F_2(T)$ le asignamos el arco $H(\{x, y\}) = xy$. Más adelante, en el Teorema 64, se demuestra que esta función es un encaje.

Figura 2.6: Modelo del Hiperespacio $C(T)$.

Notemos que para cualquier punto $\{x, y\} \in F_2(T)$, se cae en alguno de los siguientes dos casos: (a) el arco xy está totalmente contenido en el arco L_i para algún $i = 1, 2, 3$, o (b) existe j tal que $xy \cap L_j = \{v\}$.

En el caso en que suceda (a), el arco $xy \subset L_i$ para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$, y por lo tanto el arco está en $C(L_i)$, que queda representado por un punto en el triángulo ∇_i , recordemos que ∇_i representa el modelo del hiperespacio $C(L_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Cuando sucede (b), entonces existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $xy \cap L_i \neq \emptyset$ y $xy \cap L_j \neq \emptyset$. Por lo tanto $v \in xy$, de manera que el arco está representado por un punto en el cubo E . Notemos que como xy es un arco, entonces para $s \neq i, j$, $xy \cap L_s = \{v\}$. De manera que $\ell(L_s \cap xy) = 0$, $\ell(L_i \cap xy) \geq 0$ y $\ell(L_j \cap xy) \geq 0$, por lo que el arco xy está representado por el punto (a_1, a_2, a_3) , donde $a_s = 0$ y $a_i, a_j \geq 0$. El conjunto de estos puntos es una de las caras del cubo E , por lo tanto, si variamos s en $\{1, 2, 3\}$, en este caso obtenemos las tres caras del cubo E que se intersectan en el punto $(0, 0, 0)$ (ver Figura 2.7 A). Al modelo de $F_2(T)$ lo podemos deformar para obtener la Figura 2.7

B, la cual tiene la forma de una mesa.

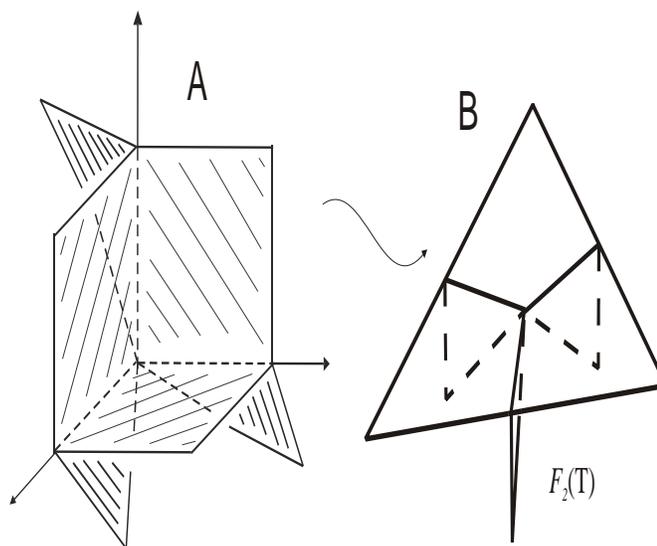


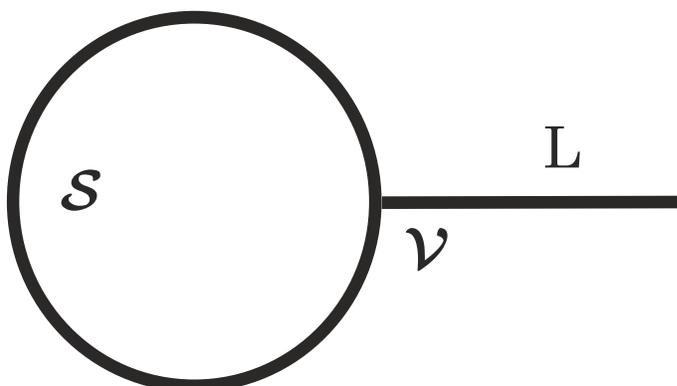
Figura 2.7: Modelo del Hiperespacio $F_2(T)$.

Teorema 32 *Existe un encaje del hiperespacio $F_2(T)$ en $C(T)$.*

Demostración. De la construcción del modelo del hiperespacio $F_2(T)$, tenemos que la función $e : F_2(T) \rightarrow C(T)$ que a un punto $\{x, y\}$ en $F_2(T)$ le asigna el arco $e(\{x, y\}) = xy$, es el encaje que necesitamos. ■

2.5. La Paleta

Este continuo está formado por la unión de una circunferencia S y un arco L , los cuales sólo se intersectan en un extremo del arco L . A este continuo lo denotaremos por la letra P y v al punto de intersección de L con S (Figura 2.8).

Figura 2.8: La paleta P .

Para construir el hiperespacio $C(P)$, notamos que

$$C(P) = \{A \in C(P) : A \subset S\} \cup \{A \in C(P) : A \subset L\} \cup \{A \in C(P) : v \in A\}.$$

Sabemos que al conjunto $\{A \in C(P) : A \subset S\} = C(S)$, lo podemos representar por un disco D y al conjunto $\{A \in C(P) : A \subset L\} = C(L)$, lo podemos representar por un triángulo ∇ .

Veamos cómo podemos representar al conjunto $\{A \in C(P) : v \in A\}$. Cada elemento de este conjunto está formado por la parte que tiene en S ($A \cap S$), y la parte que tiene en L ($A \cap L$). Además $A \cap S$ es un subcontinuo de S que contiene a v . En la Sección 2,3, de este capítulo, mostramos que esta colección se representa por una figura en forma de corazón (relleno, Figura 2.1). Ahora notemos que $A \cap L$ es un subcontinuo de L que contiene a v y a esta colección de subcontinuos la podemos representar en ∇ por un arco (Ejemplo 2, Figura 1.1).

Entonces cada subcontinuo A de P que contenga a v lo podemos representar por la pareja $(A \cap S, A \cap L)$, donde la primera coordenada se representa como un punto en el corazón y la segunda como un punto en una arista del triángulo ∇ . Notemos que los dos conjuntos son independientes, en el sentido que podemos modificar alguno de los dos conjuntos $A \cap S$ o $A \cap L$ sin alterar al otro y seguir teniendo un subcontinuo de P que contiene a v . De manera que la familia de todos esos subcontinuos A , pueden representarse como el

producto de un corazón y un arco. Es decir, como un cilindro relleno en forma de corazón.

Para obtener el modelo del hiperespacio $C(P)$, a este cilindro debemos añadirle los conjuntos que representan a los subcontinuos de P que están contenidos en S y los que están contenidos en L . Los primeros forman un disco. Un subcontinuo que pertenece a este disco y al cilindro en forma de corazón tiene que ser un subcontinuo de S que contiene a v y su intersección con L sólo consta de v . Por lo tanto, dicho subcontinuo tiene que estar representado en un corazón contenido en el disco y también en una de las bases del cilindro. De manera que, para añadir el disco al cilindro, sólo hay que pegar, el corazón del disco que representa al conjunto $\{A \in C(S) : v \in A\}$, en una base del cilindro. Similarmente, el triángulo que representa a los subcontinuos de P contenidos en L , debe pegarse por una arista al cilindro en el arco formado por los puntos de la forma $(\{v\}, A)$, donde A es un subcontinuo de L que contiene a v .

En la Figura 2.9, se muestra el modelo que representa al hiperespacio $C(P)$.

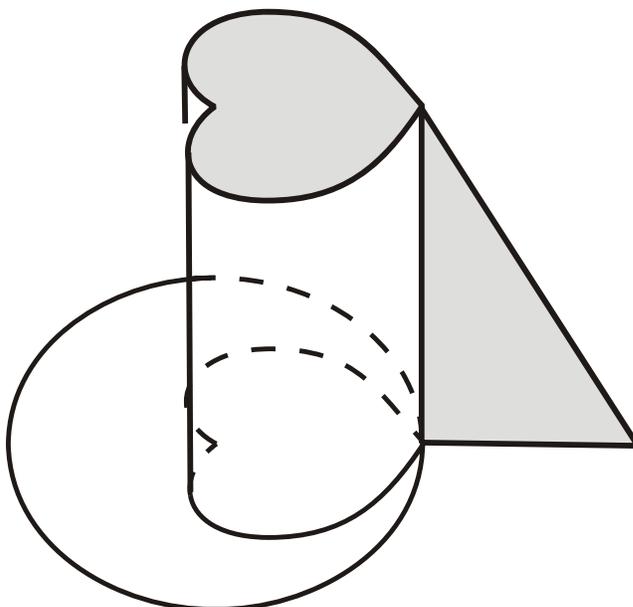
Para construir el modelo del hiperespacio $F_2(P)$, procederemos como en los casos anteriores.

Consideremos la siguiente igualdad:

$$F_2(P) = F_2(S) \cup F_2(L) \cup \{A \in F_2(P) : A \cap S \neq \emptyset \text{ y } A \cap L \neq \emptyset\}.$$

Sabemos que al hiperespacio $F_2(S)$ lo podemos representar por una banda de Möebius M (Figura 2.2), y que a $F_2(L)$ lo podemos representar por un triángulo ∇ (Figura 1.2). Hacemos $\Lambda = \{A \in F_2(P) : A \cap S \neq \emptyset \text{ y } A \cap L \neq \emptyset\}$. Si $A \in \Lambda$, entonces A queda determinado totalmente por $L_A = A \cap L$ y $S_A = A \cap S$, y por lo tanto le podemos asociar la pareja (S_A, L_A) . Notemos que la colección de estas parejas tienen la primera coordenada en la circunferencia S y la segunda coordenada en el arco L . De esta forma a Λ lo podemos representar por la cáscara del cilindro sin tapas $S \times L = C$.

Ahora notemos que:

Figura 2.9: Modelo del Hiperespacio $C(P)$

$$F_2(S) \cap F_2(L) = \{v\}, \quad F_2(L) \cap \Lambda = \{\{v, x\} : x \in L\} \text{ y} \\ F_2(S) \cap \Lambda = \{\{v, x\} : x \in S\}.$$

Recordemos que, en la banda de Möebius, el conjunto $\{\{v, x\} : x \in S\}$, representa una circunferencia (S_1) que toca una sola vez la orilla de M (Figura 2.3). En el cilindro C , éste mismo conjunto se representa por la circunferencia de la base $S \times \{0\}$. De esta forma para acercarnos más al modelo del hiperespacio $F_2(P)$, debemos pegar la banda M con el cilindro C en la circunferencia $S_1 = \{\{x, v\} : x \in S\}$, como se muestra en la Figura 2.10.

Nota 33 *Nótese que esta construcción se puede hacer en \mathbb{R}^3 , sólo hay que acomodar de una forma adecuada a la banda de Möebius. Imaginemos a la banda M en el espacio, como la circunferencia $S_1 = \{\{x, v\} : x \in S\}$ se ve toda, se podría poner en un plano vertical de frente a nosotros, el resto de la banda se empuja para que quede en la parte negativa del plano. El cilindro C se puede acomodar en la parte positiva de este mismo plano de manera que la base $S \times \{0\}$ y la circunferencia S_1 coincidan.*

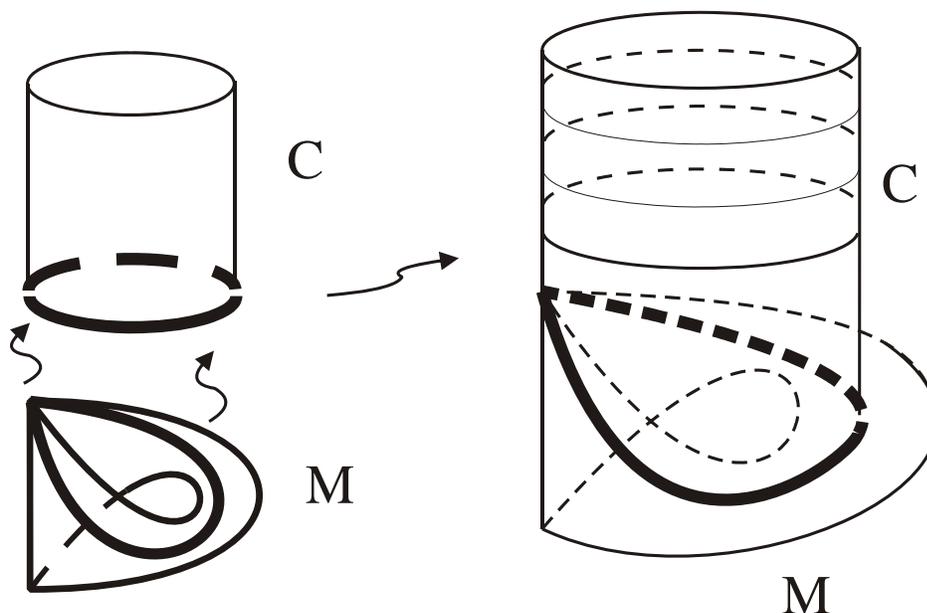


Figura 2.10:

Ahora en $F_2(L)$, el conjunto $\{\{v, x\} : x \in L\}$ representa una arista del triángulo ∇ , y éste en C , representa un arco que une a las dos circunferencias de los extremos. En la Figura 2.11 se muestra la forma de pegado y el modelo final del hiperespacio $F_2(P)$.

Teorema 34 *El hiperespacio $F_2(P)$ se puede encajar en el hiperespacio $C(P)$.*

Demostración. Notemos que el hiperespacio $F_2(P)$ es un continuo encajable en \mathbb{R}^3 . A su vez el hiperespacio $C(P)$ contiene un cilindro sólido en forma de corazón y por lo tanto una copia homeomorfa de $[0, 1]^3$. De esto se concluye, por el Teorema 25, que $F_2(P)$ se puede encajar en $C(P)$. ■

2.6. El Ocho

Al continuo en forma de 8 lo denotaremos por 8 y se construye uniendo dos circunferencias S_1 y S_2 por un único punto v (ver Figura 2.12).

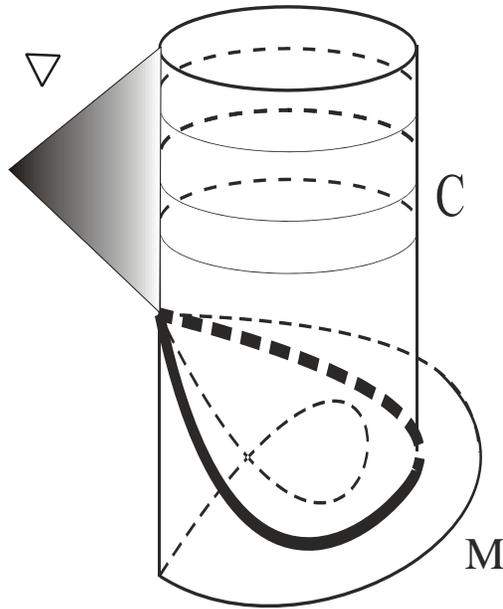


Figura 2.11: Modelo del Hiperespacio $F_2(P)$.

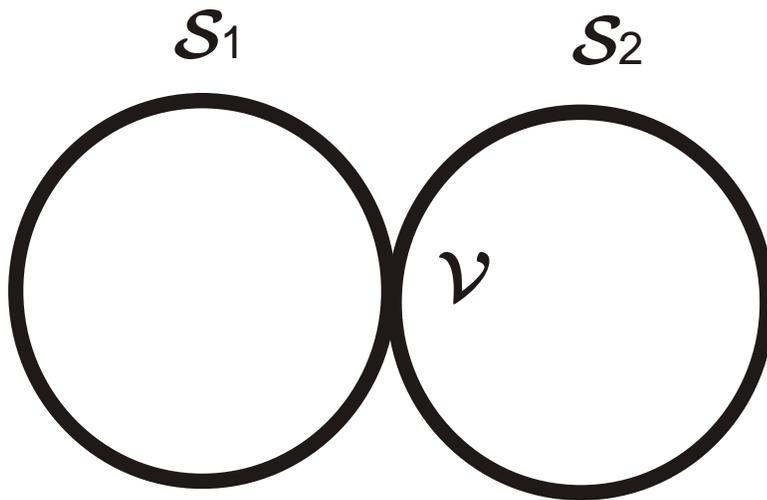


Figura 2.12: Continuo que Tiene la Forma de 8.

Antes de construir el modelo para el hiperespacio $C(8)$, consideraremos los siguientes resultados.

El 4-*odo simple*, continuo que denotaremos por la letra Q , se construye uniendo cuatro arcos L_1, L_2, L_3 y L_4 en un solo punto v , que es un extremo de cada uno de los arcos (ver Figura 2.13 (I)).

Lema 35 *El hiperespacio $C(Q)$ contiene una 4-celda.*

Demostración. Notemos que el siguiente conjunto $Q - \{v\} = (L_1 - \{v\}) \cup (L_2 - \{v\}) \cup (L_3 - \{v\}) \cup (L_4 - \{v\})$, tiene cuatro componentes conexas. De donde Q contiene un 4-odo en el sentido de la Definición 18. Por el Teorema 21, el hiperespacio $C(Q)$ contiene una 4-celda. ■

Lema 36 *El hiperespacio $C(8)$ contiene una 4-celda.*

Demostración. Para demostrar este lema, basta observar que $Q \subset 8$ (ver Figura 2.13 (II)), esto implica que $C(Q) \subset C(8)$. Por el Lema 35 el hiperespacio $C(Q)$ contiene una copia homeomorfa del continuo $[0, 1]^4$, por lo tanto el hiperespacio $C(8)$ contiene una 4-celda. ■

Por el Lema 36, vemos que es imposible construir en \mathbb{R}^3 , un modelo del hiperespacio $C(8)$, y de este hecho podría pensarse que un modelo para el hiperespacio $F_2(8)$ sería muy difícil de construir, pero esto no es así, ya que probaremos que $F_2(8)$ se puede encajar en \mathbb{R}^3 .

Si $\{a, b\}$ es un elemento de $F_2(8)$, puede darse alguno de los siguientes tres casos:

(i) $a, b \in S_1$.

(ii) $a, b \in S_2$.

(iii) $a \in S_1$ y $b \in S_2$ (cuando $b \in S_1$ y $a \in S_2$ es redundante).

De aquí observamos lo siguiente: los elementos de $F_2(8)$ que caen en el caso (i) quedan representados por una banda de Möebius M_1 . Los elementos del caso (ii) quedan representados por otra banda de Möebius M_2 .

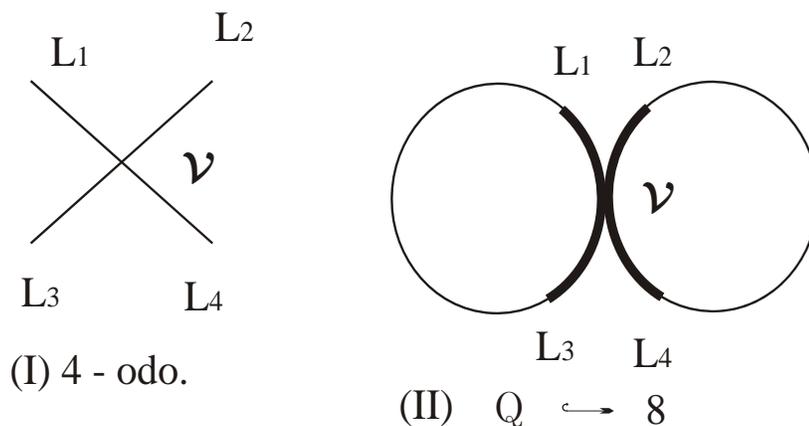


Figura 2.13:

Ahora analicemos a los elementos del caso (iii). Para cada punto $a \in S_1$, podemos variar el punto b sobre la circunferencia S_2 . De manera que los elementos $\{a, b\} \in F_2(8)$ tales que $a \in S_1$ y $b \in S_2$, están representados en $S_1 \times S_2$. En la Figura 2.14 hemos puesto acostada una copia de la circunferencia S_1 y por cada uno de sus elementos debemos poner una circunferencia parada que represente una copia de S_2 .

Al formar esta circunferencia de circunferencias lo que se arma es un toro T . Ahora debemos ver cómo se pegan las bandas M_1 y M_2 con T . Para esto notemos que $M_1 \cap T = \{\{x, v\} : x \in S_1\} = \{v\} \times S_1$. Como ya vimos el conjunto de tales elementos queda representado por una circunferencia en M_1 (Figura 2.3). Por otra parte, ya que construimos al toro T como una circunferencia de circunferencias, podemos pensar que tenemos un arco (S_2) que gira alrededor de una circunferencia acostada (S_1). Cuando variamos sólo a a en S_1 y dejamos fijo a v , podemos pensar que v es un punto fijo del arco que gira alrededor de la circunferencia acostada y entonces los conjuntos de la forma $A = \{a, v\}$ representarán a una circunferencia paralela a la acostada o simplemente lo podemos pensar como $S_1 \times \{v\}$. Por lo tanto M_1 se pega a T uniendo una circunferencia acostada $S_1 \times \{v\}$ en T con la circunferencia dibujada en la banda (Figura 2.15). De manera similar se observa que la intersección de M_2 con T se representa en M_2 por una circunferencia parecida en la banda M_1 y en el toro T se representa como una circunferencia vertical $\{v\} \times S_2$. De esta manera obtenemos un modelo para el hiperespacio $F_2(8)$

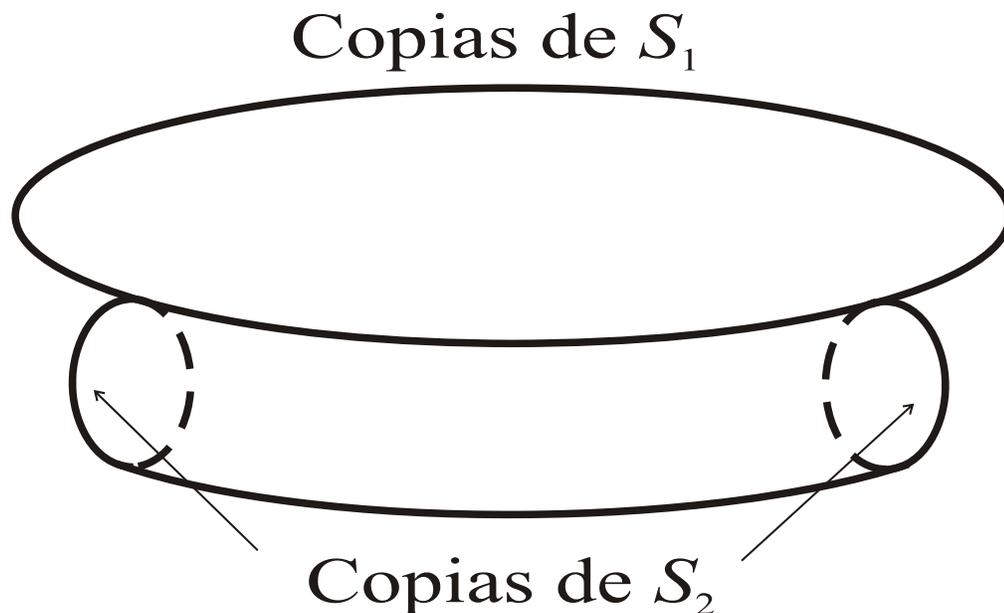


Figura 2.14:

(Figura 2.15).

Es importante observar que esta construcción se puede hacer en \mathbb{R}^3 , ya que sustituyendo el toro T por C , a M_1 por M y a la circunferencia acostada en T por la circunferencia de la orilla en la Nota 33, se obtiene que T y la banda M_1 se pegarán exactamente por su intersección en \mathbb{R}^3 . De esto último, colocando la banda M_2 dentro del toro, se obtiene que T y M_2 también se pegarán por su intersección en \mathbb{R}^3 .

Teorema 37 *El hiperespacio $F_2(8)$ se puede encajar en el hiperespacio $C(8)$.*

Demostración. El hiperespacio $F_2(8)$ es un continuo de \mathbb{R}^3 . Por el Lema 36, el hiperespacio $C(8)$ contiene una 4-celda, por lo tanto, por el Teorema 25, existe un encaje $e = g \circ h : F_2(8) \rightarrow C(8)$. ■

Teorema 38 *El hiperespacio $F_2(Q)$ se puede encajar en el hiperespacio $C(Q)$, donde Q representa el 4-odo.*

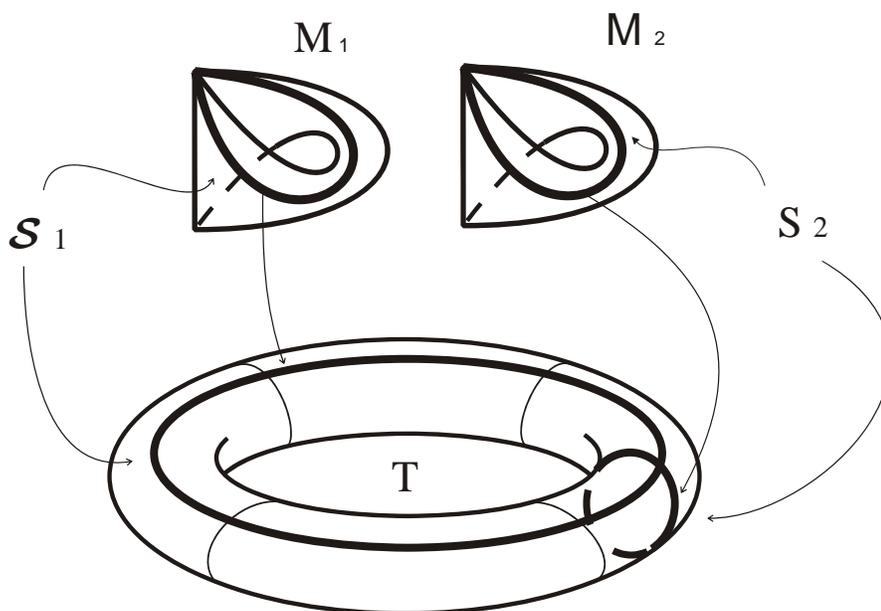


Figura 2.15: Modelo del Hiperespacio $F_2(8)$.

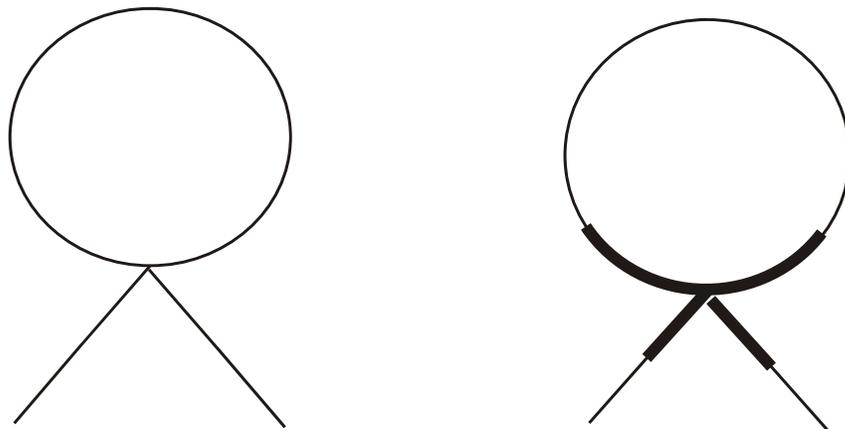
Demostración. Como $Q \subset 8$, tenemos que $F_2(Q) \subset F_2(8)$, esto implica que $F_2(Q)$ es un continuo contenido en \mathbb{R}^3 . Por el Lema 35 el hiperespacio $C(Q)$ contiene una 4-celda, entonces por el Teorema 25, existe un encaje $e : F_2(Q) \rightarrow C(Q)$, terminando así la demostración de éste teorema. ■

Ahora consideremos el siguiente continuo: en \mathbb{R}^2 , a la circunferencia de radio 1 y centro en el punto $(0, 1)$, le unimos los segmentos convexos que unen al punto $(0, 0)$ con el punto $(-1, -1)$ y al punto $(0, 0)$ con el punto $(1, -1)$. Este continuo tiene la forma de una medalla y lo denotaremos por la letra μ (ver Figura 2.16 (I)).

Teorema 39 *El hiperespacio $F_2(\mu)$ se puede encajar en el hiperespacio $C(\mu)$.*

Demostración. Como el continuo Q está contenido en μ (ver Figura 2.16 (II)), tenemos que $C(Q)$ se puede encajar en $C(\mu)$, como por el Lema 35, $C(Q)$ contiene una 4-celda, entonces $C(\mu)$ contiene una 4-celda.

Como $\mu \subset 8$, tenemos que $F_2(\mu) \subset F_2(8) \subset \mathbb{R}^3$, entonces $F_2(\mu)$ puede ser encajado en \mathbb{R}^3 , y por lo tanto, por el Teorema 25, existe un encaje $e_2 : F_2(\mu) \rightarrow C(\mu)$, así concluimos la demostración de este teorema. ■



(I) La Medalla μ

(II) $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mu$

Figura 2.16:

Capítulo 3

Gráficas Finitas

3.1. Introducción

Los siguientes resultados merecen estar en esta parte introductoria, ya que son la justificación del por qué en este capítulo vamos a trabajar con las gráficas finitas.

Lema 40 *Si D es el disco unitario en \mathbb{R}^2 , entonces su hiperespacio $C(D)$ contiene un cubo de Hilbert.*

Demostración. Por el Teorema 23 basta demostrar que D contiene un ∞ -odo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $D_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{x}\| = \frac{1}{n}\}$ y $L = [-1, 1] \times \{(0, 0)\}$. Entonces el conjunto $A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cup L$ es cerrado y conexo por trayectorias en D y por lo tanto un subcontinuo de D (Figura 3.1). Como el conjunto $A - L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n - \{(-\frac{1}{n}, 0), (\frac{1}{n}, 0)\})$ tiene una infinidad de componentes, concluimos que D contiene un ∞ -odo. Esto termina la demostración del lema. ■

Lema 41 *Sea X un continuo contenido en \mathbb{R}^n , donde $n \geq 2$. Si X tiene interior no vacío, entonces el hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert.*

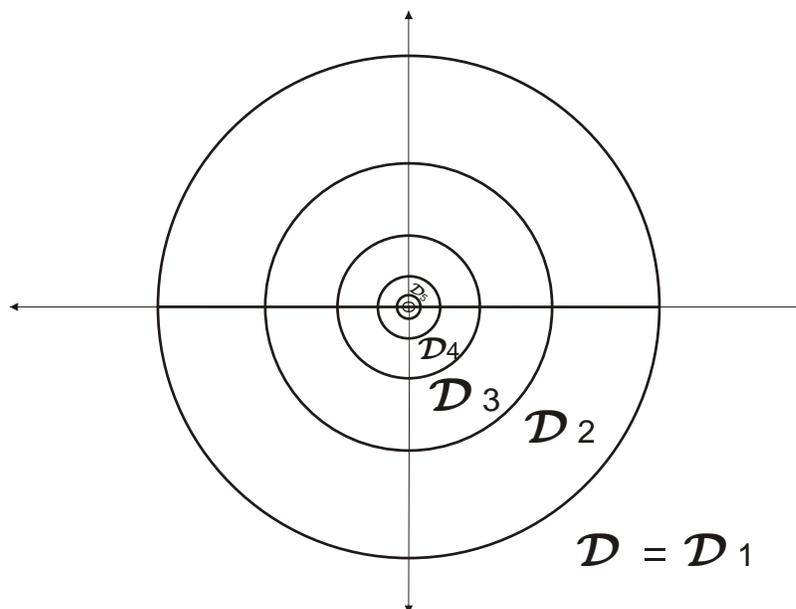


Figura 3.1:

Demostración. Como X tiene interior no vacío, existen un punto x_0 en X y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(x_0) \subset X$. Consideremos $f : D \rightarrow B_\varepsilon(x_0)$ un encaje del disco D en $B_\varepsilon(x_0)$. Si A y L representan los conjuntos definidos en el Lema 40, por ser f un encaje, $f(A)$ y $f(L)$ son subcontinuos de X y además el conjunto $f(A) - f(L)$ tiene una infinidad de componentes conexas. Es decir X contiene un ∞ -odo. Aplicando el Teorema 23 se obtiene que $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. ■

Teorema 42 *Sea X un continuo contenido en \mathbb{R}^n para $n > 2$. Si X tiene interior no vacío, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demostración. Por el Lema 41, el hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert I^∞ . Por el Teorema 16, tenemos que $F_2(X)$ es un continuo, por lo tanto, por el Teorema 26, tenemos que existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$. ■

El Teorema 42 responde la pregunta principal de este trabajo para una infinidad de continuos: todos los que tengan la propiedad de ser “gorditos”,

es decir, todos aquellos continuos que tengan interior no vacío en \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Por este motivo sólo nos enfocaremos al estudio de espacios que sean, en cierta forma, “flaquitos”. Siendo, tal vez, los más sencillos las gráficas finitas.

Ahora bien, el propósito de las siguientes secciones es demostrar que toda gráfica finita G , que no sea la circunferencia, satisface que su hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(G)$. Para esto, vamos a hacer uso de algunos resultados de Teoría de la Dimensión, así como la construcción geométrica, en \mathbb{R}^4 , de dos modelos muy especiales.

3.2. Propiedades de las Gráficas Finitas

Definición 43 *Un espacio topológico X es llamado **espacio de Peano**, si para cualquier punto $x \in X$ y para cualquier vecindad N de x , existe un subconjunto U abierto y conexo de X tal que $p \in U \subset N$.*

Definición 44 *Un continuo X es un **continuo de Peano**, si X es un espacio de Peano.*

Definición 45 *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede poner como una unión finita de arcos, que cumplen que cualesquiera dos de ellos se intersectan en un número finito de puntos (puede ser vacío).*

Ejemplo 46 *El arco, la circunferencia, la paleta, el tríodo simple y el ocho; son ejemplos de gráficas finitas (Figura 3.2).*

Definición 47 *Sea G una gráfica finita, dado un punto p en G , el **orden de p en G** , que lo denotaremos por $\mathcal{O}(p, G)$, lo definimos como el número natural n tal que p tiene una vecindad cerrada homeomorfa a un n -odo simple, de tal forma que el vértice del n -odo simple corresponde al punto p .*

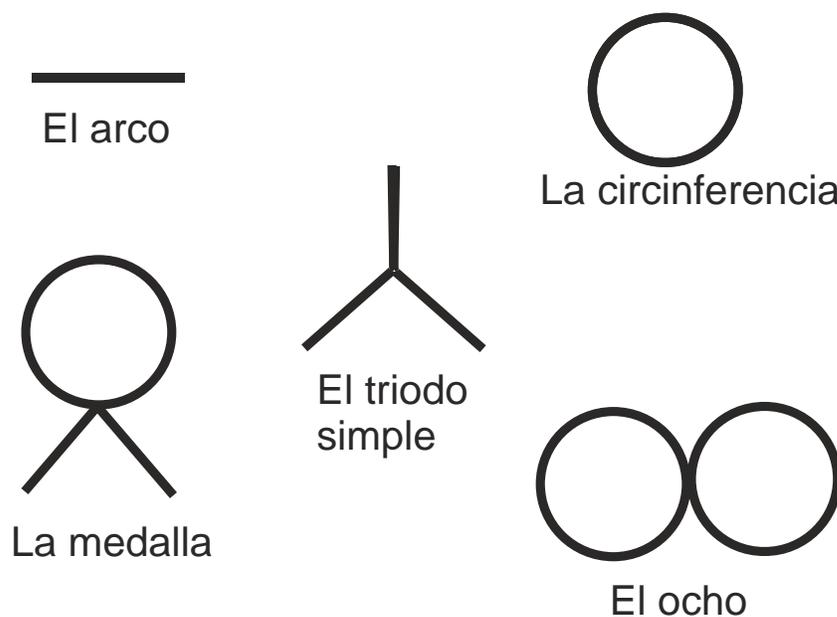


Figura 3.2: Ejemplos de Gráficas Finitas.

Nota 48 Para el caso en que $\mathcal{O}(p, G) = 2$, estaremos entendiendo que p tiene una vecindad que es un arco pero p no se encuentra en la orilla de éste, cuando $\mathcal{O}(p, G) = 1$, estaremos entendiendo que p tiene una vecindad que es un arco y que p es uno de los extremos de él.

Definición 49 Sean G una gráfica finita y p un punto en G , entonces:

- (i) p se llama punto terminal de G , si $\mathcal{O}(p, G) = 1$.
- (ii) p se llama punto ordinario de G , si $\mathcal{O}(p, G) = 2$.
- (iii) p se llama punto de ramificación de G , si $\mathcal{O}(p, G) \geq 3$.

Definición 50 Sea G una gráfica finita. Un lazo en G es una curva cerrada simple que tiene a lo más un punto de ramificación.

Definición 51 Una arista de G es un lazo o un arco no degenerado pq , que une a un par de puntos no ordinarios y tal que todos los puntos del conjunto $pq - \{p, q\}$ son ordinarios. Es decir una arista puede unir a dos puntos terminales, dos puntos de ramificación o un punto de ramificación con un punto ordinario.

Notación 52 Sea X es un continuo y $A \subset X$, a la frontera de A en X la vamos a denotar por ∂A .

La siguiente definición es la generalización de la Definición 47, que mencionaremos en este momento pues es necesaria para la demostración del siguiente lema, pero la recordaremos en el capítulo de continuos localmente conexos, ya que en este juega un papel fundamental.

Definición 53 Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y β un cardinal. Decimos que A es de orden menor o igual que β en X , y escribimos $\text{ord}(A, X) \leq \beta$, si para cualquier $U \in \tau$ tal que $A \subset U$, existe $V \in \tau$ tal que $A \subset V \subset U$ y $|\partial V| \leq \beta$.

Decimos que A es de orden β en X , y escribimos $\text{ord}(A, X) = \beta$, si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y $\text{ord}(A, X) \neq \alpha$ para todo ordinal $\alpha < \beta$.

Nota 54 La Definición 53, es conocida como el **orden de Menger-Urison** ([9, Definición 9.3]), o, equivalentemente, el orden en sentido clásico ([7, p. 229]), es decir, el número de arcos que emanan de p que sólo se intersectan en este punto (Definición 47). Además, si el orden de p es finito en G , entonces el orden de p es igual al número de componentes de $G - \{p\}$ ([4, (2.26), p. 92]).

La demostración del siguiente lema no la incluiremos en este trabajo, pero se puede consultar en [9, Proposición 9.4, Pág. 142].

Lema 55 *Si X es un continuo tal que $\mathcal{O}(\{x\}, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$, entonces todo subcontinuo de X es un continuo de Peano. De esta forma, todo subcontinuo de una gráfica finita es un continuo de Peano.*

Teorema 56 *Si G es una gráfica finita, entonces G es arco conexa.*

Demostración. Por el Lema 55, G es un continuo de Peano y por lo tanto localmente conexo. El Teorema 13, asegura que todo continuo localmente conexo es arco conexo, por lo tanto G es arco conexo. ■

Teorema 57 *Si G es una gráfica finita, entonces G es localmente arco conexa.*

Demostración. Sean $x \in G$ y U una vecindad abierta de x . Como G es localmente conexa, existe una vecindad V abierta conexa en G tal que $x \in V \subset U$. Por el Teorema 14, V es un abierto arco conexo. Esto demuestra que G es localmente arco conexa. ■

3.3. Árboles

Definición 58 *Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene ningún subconjunto homeomorfo a una circunferencia.*

Definición 59 *Un continuo X es **únicamente arco conexo** si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un único arco en X que une a x con y .*

Notación 60 *Sea X un continuo, si $\varepsilon > 0$ y A es un elemento de 2^X , entonces $B_\varepsilon^H(A)$ denota la bola de radio ε con centro en A , donde H es la métrica de Hausdorff.*

Lema 61 *Sea X un continuo únicamente arco conexo, entonces la función $f : F_2(X) \rightarrow C(X)$, que a un punto $\{x, y\} \in F_2(X)$ le asocia el único arco en X que une al punto x con el punto y , es inyectiva.*

Demostración. Para dos puntos $x, y \in X$, cuando $x \neq y$ denotaremos por xy al único arco en X que une al punto x con el punto y , si $x = y$, pondremos $xy = \{x\}$ que es un arco degenerado. Primero observemos que f está bien definida pues X es únicamente arco conexo y cualquier arco contenido en X es un subcontinuo de X .

Para demostrar que f es inyectiva sean $\{x, y\}, \{z, w\} \in F_2(X)$ tales que $f(\{x, y\}) = f(\{z, w\})$, es decir $xy = zw$. Lo que queremos ver es que $\{x, y\} = \{z, w\}$.

Primero supongamos que $x \neq y$ y $z \neq w$. Como un arco tiene exactamente dos extremos y $xy = zw$, los extremos de xy son los extremos de zw , así que $\{x, y\} = \{z, w\}$.

En el caso en que $x = y$, $\{x\} = xy = zw$, como $z, w \in \{x\}$, tenemos que $z = w = x$, de manera que $\{x, y\} = \{z, w\}$. El caso en que $z = w$ se hace en forma similar. Esto completa la prueba de que f es inyectiva. ■

Lema 62 *Sea X un continuo con métrica d y sean U y V dos conjuntos abiertos de X . Entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{\{u, v\} \in F_2(X) : u \in U \text{ y } v \in V\}$ es un conjunto abierto del hiperespacio $F_2(X)$.*

Demostración. Sea $\{u, v\} \in \mathcal{F}$, podemos suponer que $u \in U$ y $v \in V$. Como U y V son abiertos en X , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \subset U$ y $B_\varepsilon(v) \subset V$. Demostremos que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(\{u, v\}) \subset \mathcal{F}$. Sea $A \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(\{u, v\})$, escribimos $A = \{x, y\}$, donde $x, y \in X$ y podría suceder que $x = y$. Como $A \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(\{u, v\})$, tenemos que $\{u, v\} \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ y $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{u, v\})$.

Si $u = v$, del hecho que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{u, v\}) = N(\frac{\varepsilon}{2}, \{v\})$, concluimos que $A \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u) = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v) \subset U \cap V$. De manera que $x \in U$ y $y \in V$ lo cual implica que $A \in \mathcal{F}$.

En el caso que $u \neq v$ podemos pedir también que ε sea tal que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v) = \emptyset$. En este caso, de la contención $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{u, v\})$ obtenemos, sin pérdida de generalidad, que $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u) \subset U$ y por la elección de ε , se cumple que $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v) \subset V$, de donde obtenemos también que $x \in U$ y $y \in V$, por lo tanto $\{x, y\} \in \mathcal{F}$. Lo cual demuestra que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(\{u, v\}) \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto \mathcal{F} es un conjunto abierto de $F_2(X)$. ■

Teorema 63 *Si X es un continuo localmente conexo y únicamente arco conexo, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demostración. Supongamos que la métrica de X es d . Sea $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$ la función que a un punto $\{x, y\} \in F_2(X)$ le asigna $e(\{x, y\}) = xy$, que es el único arco en X que une al punto x con el punto y , si $x \neq y$ y $xy = \{x\}$, si $x = y$. Como X es únicamente arco conexo y el arco xy es un subcontinuo de X , tenemos que la función e está bien definida.

Por el Lema 61, la función e es inyectiva. Ahora demostremos que e es una función continua.

Sea $\{x, y\}$ un punto de $F_2(X)$ y sea $\varepsilon > 0$, como X es localmente conexo, por el Teorema 14, existen vecindades arco conexas U_x y V_y de x y y , respectivamente, tales que $U_x \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ y $V_y \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$. Por el Lema 62 el conjunto $\mathcal{F} = \{\{a, b\} \in F_2(X) : a \in U_x \text{ y } b \in V_y\}$ es un subconjunto abierto de $F_2(X)$ que contiene al punto $\{x, y\}$. Veamos que $e(\mathcal{F}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(xy)$. Tomemos un punto $\{a, b\} \in \mathcal{F}$ y supongamos que $a \in U_x$ y $b \in V_y$, por el Lema 4, para que ab pertenezca al conjunto $B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(xy)$, debemos verificar que $ab \subset N(\varepsilon, xy)$ y que $xy \subset N(\varepsilon, ab)$.

Como U_x y V_y son vecindades arcoconexas, por tener que $x, a \in U_x$ y $y, b \in V_y$, entonces ax está contenido en U_x y yb está contenido en V_y . Notemos que $ax \cup xy \cup yb$ es un subcontinuo de X que contiene al arco ab . Como además $U_x \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ y $V_y \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$, tenemos que $ax \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{x\})$, $xy \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, xy)$ y $by \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{y\})$. Ahora observemos que $N(\frac{\varepsilon}{2}, \{x\}) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, xy)$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, \{y\}) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, xy)$, esto implica que $ab \subset ax \cup xy \cup yb \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{x\}) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, xy) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, \{y\}) = N(\frac{\varepsilon}{2}, xy)$. Por lo tanto $ab \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, xy)$.

Ahora demostremos que $xy \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, ab)$. Para esto notemos que el arco xy es un subarco del subcontinuo $ax \cup xy \cup yb$. Además como $x \in N(\frac{\varepsilon}{2}, \{a\})$, $y \in N(\frac{\varepsilon}{2}, \{b\})$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, \{a\}) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, \{b\}) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, ab)$, obtenemos que el arco $xy \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \{a\}) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, ab) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, \{b\}) = N(\frac{\varepsilon}{2}, ab)$. Por lo tanto $xy \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, ab)$.

Esto prueba que para toda $\{a, b\} \in \mathcal{F}$, $H(e(\{a, b\}), xy) < \frac{\varepsilon}{2}$, lo cual implica que $e(\mathcal{F}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}^H(xy)$, esto termina la demostración de la continuidad de e .

Por lo tanto, siendo $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$ una función inyectiva y continua cuyo dominio es un espacio compacto y su imagen un espacio Hausdorff, concluimos que e es un encaje, y esto demuestra éste teorema. ■

Ahora bien, si T es un árbol, entonces T es un continuo arco conexo, también, por definición, no contiene curvas cerradas simples. Esto quiere decir que para cualesquiera par de puntos distintos $x, y \in T$ existe un único arco contenido en T , que une a x con y . Por lo tanto, todo árbol es únicamente arco conexo y obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 64 *Sea T un árbol, entonces existe un encaje $e : F_2(T) \rightarrow C(T)$.*

Demostración. Notemos que T es únicamente arco conexo y, por ser gráfica finita, es localmente conexo. Entonces por el Teorema 63, concluimos que existe un encaje $e : F_2(T) \rightarrow C(T)$. ■

3.4. Clasificación en las Gráficas Finitas

Los siguientes dos lemas son resultados de Teoría de Dimensión y no incluiremos su prueba pues nos desviarían demasiado del tema que deseamos abordar en esta sección.

Lema 65 [10, Página 73, Teorema 13.4] *Si X es un continuo y $\dim(X) = n < \infty$, entonces X se puede encajar en el continuo $[0, 1]^{2n+1}$.*

Lema 66 [10, Página 33, Teorema 7.1] Si X es un continuo que es la unión numerable de subconjuntos cerrados de dimensión n , entonces $\dim(X) = n$.

Lema 67 Sea G una gráfica finita, entonces la dimensión del hiperespacio $F_2(G)$ es igual a 2.

Demostración. Para demostrar este lema vamos a aplicar el Lema 65. Como G es una gráfica finita, entonces G es la unión finita de arcos. Es decir existen $n \in \mathbb{N}$ y arcos I_1, \dots, I_n , contenidos en G , tales que $|I_j \cap I_k| \leq 2$ para toda $j, k \in \{1, \dots, n\}$ y $j \neq k$, con la propiedad que $G = I_1 \cup \dots \cup I_n$. Para cualesquiera $j, k \in \{1, \dots, n\}$ definimos A_{jk} como $\{\{x, y\} \in F_2(G) : x \in I_j, y \in I_k\}$.

Primero verifiquemos que $F_2(G) = \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right)$, para esto vamos a probar dos contenciones.

(\subseteq) Sea $B \in F_2(G)$, entonces por definición $B = \{x, y\}$ con $x, y \in G = I_1 \cup \dots \cup I_n$, es decir existen $j_0, k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x \in I_{j_0}$ y $y \in I_{k_0}$, esto implica que $B \in A_{j_0 k_0}$, como $A_{j_0 k_0} \subset \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right) \subset \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right)$, tenemos que $B \in \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right)$. Por lo tanto $F_2(G) \subset \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right)$.

(\supseteq) Por definición, para cualesquiera $j, k \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $A_{jk} \subset F_2(G)$, esto implica que $\bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right) \subset F_2(G)$. Por lo tanto $F_2(G) = \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^n A_{jk} \right)$.

Ahora demostremos que, para cualesquiera $j, k \in \{1, \dots, n\}$, el conjunto A_{jk} es cerrado en $F_2(G)$. Para esto, sea $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos en A_{jk} , tal que $\lim B_n = B$, para algun $B \in F_2(G)$. Mostraremos que $B \in A_{jk}$. Como $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en A_{jk} , podemos suponer que $B_n = \{x_n, y_n\}$ con $x_n \in I_j$ y $y_n \in I_k$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{y_n\}_{n=1}^\infty$

son sucesiones de I_j e I_k , respectivamente. Por lo tanto existen $x \in I_j$ y $y \in I_k$, tales que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Aplicando el Lema 5, tenemos que $B = \lim B_{jk} = \lim(\{x_n\} \cup \{y_n\}) = \{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$. Como $\{x, y\}$ es un elemento de A_{jk} , concluimos que A_{jk} es un subconjunto cerrado de $F_2(G)$.

Notemos que para $j, k \in \{1, \dots, n\}$, si $j = k$, entonces el conjunto A_{jk} es homeomorfo al hiperespacio $F_2(I_k)$. Si $j \neq k$, entonces el conjunto A_{jk} es homeomorfo al producto $I_j \times I_k$, él cual es una 2-celda. Por lo tanto para cualesquiera $j, k \in \{1, \dots, n\}$, el conjunto $A_{jk} = \{\{x, y\} \in F_2(G) : x \in I_j, y \in I_k\}$ es una 2-celda, lo cual implica que $\dim(A_{jk}) = 2$.

Todo esto demuestra que $F_2(G)$ es la unión finita de subconjuntos cerrados de dimensión dos, que son las condiciones que necesitamos para aplicar el Lema 66. Por lo tanto, para toda gráfica finita G , $\dim(F_2(G)) = 2$. ■

Teorema 68 *Si G es una gráfica finita, entonces el hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en el continuo $[0, 1]^5$.*

Demostración. Sea G una gráfica finita, por el Lema 67, $\dim F_2(G) = 2 < \infty$. Por el Lema 16, el hiperespacio $F_2(G)$ es un continuo, entonces tenemos que se satisfacen las condiciones del Lema 65, por lo tanto el hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en el continuo $[0, 1]^5$. ■

Teorema 69 *Sea G una gráfica finita que contiene un 5-odo, entonces existe un encaje $e : F_2(G) \rightarrow C(G)$.*

Demostración. Como G contiene un 5-odo, por el Teorema 21, el continuo $C(G)$ contiene una 5-celda. Por el Teorema 68, el continuo $F_2(G)$ está contenido en $[0, 1]^5$. Por lo tanto, por el Teorema 25 existe un encaje $e : F_2(G) \rightarrow C(G)$, terminando así la demostración de este teorema. ■

Para continuar analizando qué gráficas finitas satisfacen que su hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(G)$, gracias al Teorema 69, sólo debemos preocuparnos de aquellas gráficas que no contienen 5-odos. En esta sección demostraremos que las únicas gráficas que satisfacen esta propiedad, son las que se ilustran en la Figura 3.3.

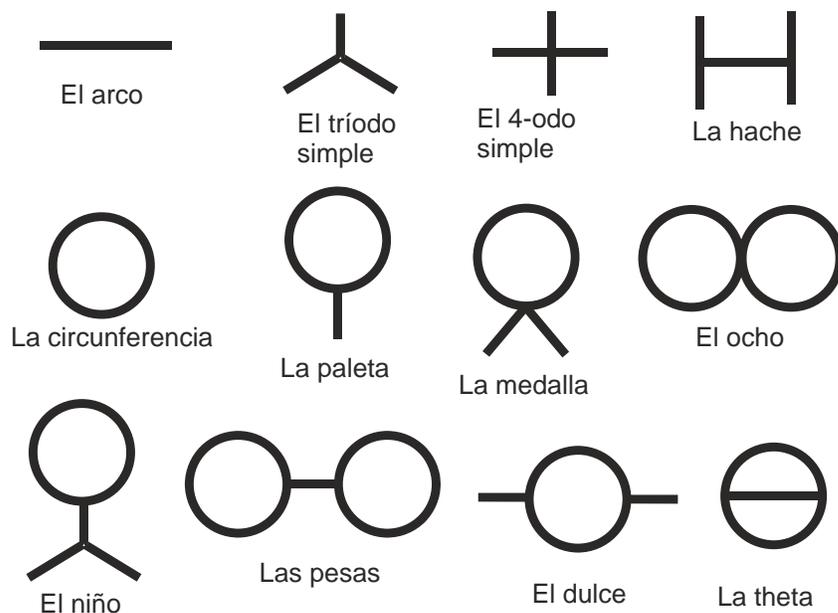


Figura 3.3: Gráficas Finitas que no Contienen 5 – odos.

Corolario 70 Si G es una gráfica finita que tiene un punto de ramificación de orden 5 entonces G contiene un 5-odo.

Demostración. Sea $p \in G$ tal que $\mathcal{O}(p, G) = 5$, entonces por definición de orden, existe una vecindad cerrada de p que es homeomorfa a un 5-odo. Esto es lo que queríamos demostrar. ■

Lema 71 Sea G una gráfica finita, supongamos que G contiene al menos un 4-odo y al menos un 3-odo, los cuales son ajenos, entonces G contiene un 5-odo.

Demostración. Como G contiene un 3-odo y un 4-odo ajenos, como conjuntos, entonces existen subcontinuos A_p , B_p , A_q y B_q tales que:

- (i) $A_p \cap A_q = \emptyset$.
- (ii) $B_p \subset A_p$ y $B_q \subset A_q$

(iii) $A_p - B_p$ tiene por lo menos cuatro componentes y $A_q - B_q$ tiene por lo menos tres componentes.

Abusando un poco de la notación, sean p y q dos puntos en A_p y A_q , respectivamente, por el Teorema 56, G es conexa por arcos, por lo tanto existe un encaje $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$, tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.

Supongamos que $U_{p_1}, U_{p_2}, U_{p_3}$ y U_{p_4} son cuatro componentes de $A_p - B_p$ y que U_{q_1}, U_{q_2} y U_{q_3} son tres componentes de $A_q - B_q$.

Notemos que $\gamma(0) = p \in A_p$ y $\gamma(1) = q \in A_q$. Sea $t_1 = \max\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A_p\}$. Como A_p y A_q son ajenos, entonces $t_1 < 1$ y existe $t_2 = \min\{t \in [t_1, 1] : \gamma(t) \in A_q\}$. Notemos que, por la continuidad de γ y la compacidad de los conjuntos A_p y A_q , t_1 y t_2 están bien definidos. Además por su definición satisfacen que:

- (iv) $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ y;
- (v) $\gamma((t_1, t_2)) \cap A_p = \gamma((t_1, t_2)) \cap A_q = \emptyset$.

Consideremos tres casos:

Caso 1. $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ no pertenecen a ninguna $A_p - B_p$ y $A_q - B_q$, respectivamente.

En este caso tenemos que $\gamma(t_1) \in B_p$ y $\gamma(t_2) \in B_q$. Por la propiedad (v), $\gamma((t_1, t_2))$ no interseca al conjunto $A_p - B_p$ ni al conjunto $A_q - B_q$. Notemos que los conjuntos $\mathcal{A} = A_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup A_q$ y $\mathcal{B} = B_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup B_q$ son dos subcontinuos de G tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{p_4} \cup U_{q_1} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Lo cual demuestra que G contiene un 7-odo y por lo tanto G contiene un 5-odo.

Caso 2. $\gamma(t_1)$ pertenece a $A_p - B_p$ y $\gamma(t_2)$ no pertenece a $A_q - B_q$.

En este caso tenemos que $\gamma(t_2) \in B_q$ y podemos suponer que $\gamma(t_1) \in U_{p_1}$. Por la propiedad (v), el conjunto $\gamma((t_1, t_2))$ no interseca a $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{p_4} \cup (A_q - B_q)$. Notemos que los conjuntos $\mathcal{A} = A_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup A_q$ y $\mathcal{B} = B_p \cup U_{p_1} \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup B_q$ son dos subcontinuos de G tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{p_4} \cup U_{q_1} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Esto demuestra que G contiene un 6-odo y por lo tanto G contiene un 5-odo. Notemos que el caso en que $\gamma(t_1)$

no pertenece a $A_p - B_p$ y $\gamma(t_2)$ pertenece a $A_q - B_q$, es análogo y se puede llegar a la misma conclusión.

Caso 3. $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ pertenecen a $A_p - B_p$ y $A_q - B_q$, respectivamente.

Supongamos que $\gamma(t_1) \in U_{p_1}$ y $\gamma(t_2) \in U_{q_1}$, por la propiedad (v), $\gamma([t_1, t_2])$ no interseca al conjunto $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{p_4} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3}$. Como los conjuntos $\mathcal{A} = A_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup A_q$ y $\mathcal{B} = B_p \cup U_{p_1} \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup U_{q_1} \cup B_q$, son dos subcontinuos de G tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{p_4} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Esto demuestra que G contiene un 5-odo.

Esto termina la demostración de este lema. ■

Lema 72 *Si G es una gráfica finita con al menos dos puntos de ramificación y uno de ellos tiene orden mayor que tres, entonces G contiene un 5-odo.*

Demostración. Sean p y q_0 dos puntos de ramificación, tal que p es de orden mayor que tres. Como $\mathcal{O}(p, G) \geq 4$ y $\mathcal{O}(q, G) \geq 3$, p tiene una vecindad en G que es un n -odo, con $n \geq 4$ y tal que p es el vértice del n -odo, además q tiene una vecindad en G que es un m -odo, con $m \geq 3$ y tal que q es el vértice del m -odo. De aquí se puede obtener un 4-odo y un 3-odo ajenos. Por el Lema 71, G contiene un 5-odo. ■

Lema 73 *Si G es una gráfica finita que tiene por lo menos tres puntos de ramificación, entonces G contiene un 5-odo.*

Demostración. Tomemos p y q dos puntos de ramificación distintos de G , para los cuales exista un encaje $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$, con la propiedad adicional que $\gamma((0, 1))$ no contiene ningún punto de ramificación.

Como $\mathcal{O}(p, G) \geq 3$ y $\mathcal{O}(q, G) \geq 3$, por definición existen subcontinuos A_p, B_p, A_q y B_q tales que

- (i) $A_p \cap A_q = \emptyset$
- (ii) $B_p \subset A_p$ y $B_q \subset A_q$ y

(iii) $A_p - B_p$ y $A_q - B_q$ tienen por lo menos tres componentes.

Supongamos que U_{p_1} , U_{p_2} y U_{p_3} son tres componentes de $A_p - B_p$ y que U_{q_1} , U_{q_2} y U_{q_3} son tres componentes de $A_q - B_q$.

Como $\gamma(0) = p \in A_p$ y $\gamma(1) = q \in A_q$. Sea $t_1 = \max\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A_p\}$. Como A_p y A_q son ajenos, entonces $t_1 < 1$, por lo tanto existe $t_2 = \min\{t \in [t_1, 1] : \gamma(t) \in A_q\}$. Notemos que, por la continuidad de γ y la compacidad de los conjuntos A_p y A_q , t_1 y t_2 están bien definidos. Además por su definición satisfacen que:

- (iv) $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ y
- (v) $\gamma((t_1, t_2)) \cap A_p = \gamma((t_1, t_2)) \cap A_q = \emptyset$.

Consideramos tres casos:

Caso 1. $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ no pertenecen a $A_p - B_p$ y $A_q - B_q$, respectivamente.

En este caso tenemos que $\gamma(t_1) \in B_p$ y $\gamma(t_2) \in B_q$. Por la propiedad (v), $\gamma((t_1, t_2))$ no interseca al conjunto $A_p - B_p$ ni al conjunto $A_q - B_q$. Notemos que los conjuntos $\mathcal{A} = A_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup A_q$ y $\mathcal{B} = B_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup B_q$ son dos subcontinuos de G tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{q_1} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Lo cual demuestra que G con tiene un 6-odo y por lo tanto G contiene un 5-odo.

Caso 2. $\gamma(t_1)$ pertenece a $A_p - B_p$ y $\gamma(t_2)$ no pertenece a $A_q - B_q$.

En este caso tenemos que $\gamma(t_2) \in B_q$ y podemos suponer que $\gamma(t_1) \in U_{p_1}$. Por la propiedad (v), el conjunto $\gamma((t_1, t_2))$ no interseca a $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup (A_q - B_q)$. Notemos que los conjuntos $\mathcal{A} = A_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup A_q$ y $\mathcal{B} = B_p \cup U_{p_1} \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup B_q$ son dos subcontinuos de G tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{q_1} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Esto demuestra que G contiene un 5-odo. Notemos que el caso en que $\gamma(t_1)$ no pertenece a $A_p - B_p$ y $\gamma(t_2)$ pertenece a $A_q - B_q$, es análogo y se puede llegar a la misma conclusión.

Caso 3. $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ pertenecen a alguna componente de $A_p - B_p$ y $A_q - B_q$, respectivamente.

Supongamos que $\gamma(t_1) \in U_{p_1}$ y $\gamma(t_2) \in U_{q_1}$, por la propiedad (v), $\gamma((t_1, t_2))$ no interseca al conjunto $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3}$. Como los conjuntos $\mathcal{A} = A_p \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup A_q$ y $\mathcal{B} = B_p \cup U_{p_1} \cup \gamma([t_1, t_2]) \cup U_{q_1} \cup B_q$, son dos subcontinuos

de G tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $U_{p_2} \cup U_{p_3} \cup U_{p_4} \cup U_{q_2} \cup U_{q_3} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Esto demuestra que G contiene un 4-odo.

Observemos lo siguiente; como G tiene al menos tres puntos de ramificación, entonces podemos tomar un punto de ramificación r de G distinto a p y q . Entonces r no pertenece al arco $\gamma([t_1, t_2])$, pues supusimos que $\gamma((0, 1))$ no contenía puntos de ramificación. Como $\mathcal{O}(r, G) \geq 3$, existen subcontinuos A_r y B_r tales que A_r es una vecindad de r , $B_r \subset A_r$ y $A_r - B_r$ tiene al menos tres componentes conexas. Notemos que podemos pedir que A_r y el 4-odo que construimos antes sean ajenos. Aplicando el Lema 71 obtenemos que G contiene un 5-odo. ■

La prueba del siguiente lema no la incluimos en este trabajo, pero se puede encontrar en [9, Proposición 9,5].

Lema 74 *Sea X un continuo no degenerado, entonces $\mathcal{O}(x, X) \leq 2$ para toda $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Ahora consideremos una gráfica finita G que no contenga 5-odos, entonces por definición G es unión finita de arcos y por lo tanto es un continuo no degenerado. Por los Lemas 73 y 72, G puede tener a lo más dos puntos de ramificación, y en este caso ambos puntos deben de ser de orden 3. Por lo tanto G debe satisfacer alguna de las siguientes posibilidades.

Caso 1. G no tiene puntos de ramificación, por lo tanto para todo $x \in G$ se satisface que $\mathcal{O}(x, G) \leq 2$. Por el Lema 74, G es un arco o una curva cerrada simple (que es topológicamente equivalente a la circunferencia, ver Figura 3.4).

Caso 2. G tiene únicamente un punto ramificación. Si p es el punto de ramificación de G , por el Lema 70, p no puede ser mayor a cuatro. Todas las posibilidades se mencionan en la siguiente tabla (ver Figura 3.5).



Figura 3.4:

$\mathcal{O}(p,G)$	# de Lazos.	La gráfica es:
3	0	El 3-odo simple
3	1	La paleta
4	0	El 4-odo simple
4	1	La medalla
4	2	El ocho

Caso 3. G tiene dos puntos de ramificación, digamos p y q , los cuales tienen orden 3. Como G es conexa por arcos, existe un arco que une a p con q y G queda totalmente determinada por el número de arcos que unen a p con q y el número de lazos existentes en G . Notemos que cuando hay dos o más arcos en G que unen a p con q , si hubiera un lazo, por ser p y q los únicos puntos de ramificación en G , este tendría a p o a q , y el orden del punto contenido en el lazo sería mayor o igual que cuatro, lo cual es una contradicción al Lema 73, pues estamos bajo el supuesto de que G no contiene 5-odos. Por lo tanto todas las posibilidades para G se resumen en la siguiente tabla (ver Figura 3.6).

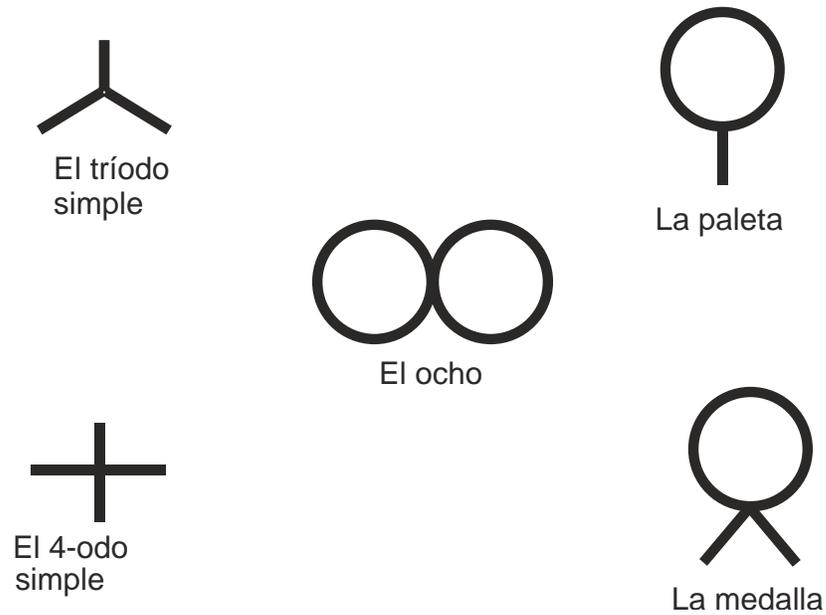


Figura 3.5:

# de arcos que unen a p con q.	# de Lazos.	La gráfica es
1	0	La hache
1	1	El niño
1	2	La pesa
2	0	El dulce
3	0	La theta

La discusión anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 75 *Si G es una gráfica finita. Entonces G no contiene 5-odos, si y sólo si G es homeomorfa a alguna gráfica de la Figura 3.3.*

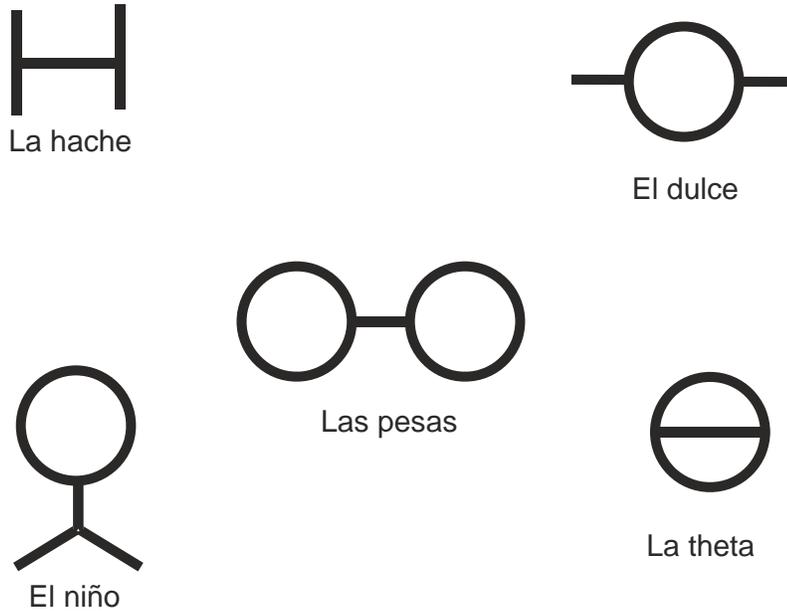


Figura 3.6:

Antes de decir cuales son las gráficas finitas que satisfacen que su hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(G)$, en la siguiente sección vamos a construir dos modelos que serán de gran importancia para éste proposito.

3.5. Dos Modelos Importantes

A continuación construiremos el modelo para el hiperespacio $F_2(G)$, cuando G se sustituye por alguna de las siguientes gráficas finitas:

1. *La Pesa* (\mathcal{P}): gráfica que consta de dos puntos de ramificación de orden tres y que contiene dos lazos.
2. *La Theta* (Θ): gráfica que consta de dos puntos de ramificación de orden tres, para los cuales existen tres arcos que los unen.

El siguiente lema será de gran importancia más adelante.

Lema 76 Sean X y K dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^3 , tales que $K \subset X$, entonces existe un encaje $j : X \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisface las siguientes propiedades.

- (i) $j(K) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\} = \mathbb{R}^4(0)$
- (ii) $j(X - K) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w > 0\} = \mathbb{R}^4(+)$

Demostración. Definimos $j : X \rightarrow \mathbb{R}^4$, para un punto $(a, b, c) \in X$ como $j((a, b, c)) = (a, b, c, d((a, b, c), K))$, donde d es la distancia en \mathbb{R}^4 y $d((a, b, c), K) = \inf\{d((a, b, c), \bar{x}) : \bar{x} \in K\}$.

Como la aplicación $d_K : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida para un punto $\bar{x} \in X$ por $d_K(\bar{x}) = d(\bar{x}, K)$, es una función continua, tenemos que todas las entradas de la función j son continuas, lo cual muestra la continuidad de j .

Ahora notemos que la proyección $P_{xyz} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que a un punto $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ le asocia $P_{xyz}((a, b, c, d)) = (a, b, c)$ es continua y restringida al conjunto $j(X)$, es la función inversa de j . Con esto demostramos que j es un encaje. Verifiquemos que j satisface las condiciones que deseamos.

Si $\bar{a}_0 \in K$, entonces $0 \leq d(\bar{a}_0, K) = \inf\{d(\bar{a}_0, \bar{a}) : \bar{a} \in K\} \leq d(\bar{a}_0, \bar{a}_0) = 0$. Por lo tanto, si $\bar{a}_0 = (a_1, a_2, a_3)$ entonces $j(\bar{a}_0) = (a_1, a_2, a_3, 0)$. Es decir $j(K) \subset \mathbb{R}^4(0)$.

Por último, sea $\bar{x} \in X - K$, esto quiere decir que $\bar{x} \notin K$, por ser K cerrado existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap K = \emptyset$. Entonces para cualquier $a \in K$, $d(\bar{x}, a) \geq \varepsilon$ lo que implica que $d(\bar{x}, K) \geq \varepsilon > 0$. Esto demuestra que $j(X - K) \subset \mathbb{R}^4(+)$. ■

Corolario 77 Sean X y K dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^3 , tales que $K \subset X$, entonces existe un encaje $j : X \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisface las siguientes propiedades.

- (i) $j(K) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\} = \mathbb{R}^4(0)$
- (ii) $j(X - K) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w < 0\} = \mathbb{R}^4(-)$

Demostración. Basta con definir el encaje $j : X \rightarrow \mathbb{R}^4$, para un punto $(a, b, c) \in X$ como $j((a, b, c)) = (a, b, c, -d((a, b, c), K))$. Razonando como en el Lema 76, se concluye que j tiene las propiedades deseadas. ■

El procedimiento que utilizaremos para construir los modelos mencionados será el siguiente: descompondremos al hiperespacio $F_2(G)$ como la unión de dos subconjuntos estratégicos, para los cuales construiremos su modelo y posteriormente, los pegaremos para llegar al modelo final del hiperespacio $F_2(G)$ en \mathbb{R}^4 .

3.5.1. Modelo para el Hiperespacio $F_2(\mathcal{P})$

Denotemos por L el arco con extremos p y q , S_1 el lazo en el punto p y S_2 el lazo en el punto q , recordemos que S_1 y S_2 son homeomorfas a la circunferencia. Sea P_1 la paleta formada por $S_1 \cup L$ y P_2 la paleta formada por $S_2 \cup L$ (ver Figura 3.7).

Notemos que se cumple la igualdad:

$$F_2(P) = F_2(P_1) \cup F_2(P_2) \cup \{\{x, y\} \in F_2(P) : x \in S_1, y \in S_2\}$$

En la Sección 3 del Capítulo 2, demostramos que un modelo para el hiperespacio $F_2(P_i)$ se construye pegando un lado de un triángulo ∇_i con un arco que a las circunferencias de los extremos de la cáscara de un cilindro $C_i = L \times S_i$ y esto ocurre para cada $i \in \{1, 2\}$; y por último a una de las circunferencias de los extremos del cilindro C_i se le añade una banda de Möbius M_i , por una circunferencia que sólo toca en un punto a la orilla de la banda M_i y le da una vuelta entera (Figura 2.3). Es importante resaltar que en el cilindro C_1 la circunferencia a la que se le añade la banda M_1 está dada por el conjunto $\{\{x, p\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1\}$ y que en el cilindro C_2 , la circunferencia, a la que se le añade la banda M_2 , está dada por el conjunto $\{\{y, q\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in S_2\}$.

Analicemos cómo se debe de pegar el hiperespacio $F_2(P_1)$ con el hiperespacio $F_2(P_2)$. Para esto notemos que

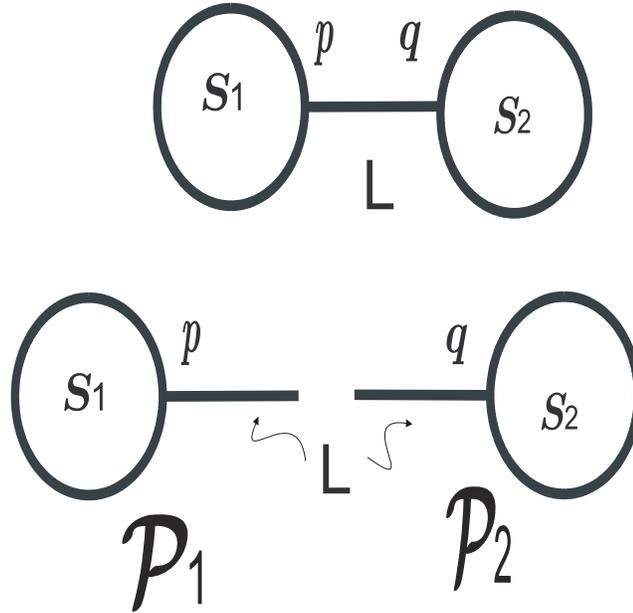


Figura 3.7:

$$\begin{aligned}
 F_2(P_1) \cap F_2(P_2) &= \\
 \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x, y \in L \cup S_1\} \cap \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x, y \in L \cup S_2\} &= \\
 \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x, y \in (L \cup S_1) \cap (L \cup S_2)\} &= \\
 \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x, y \in L\} &= F_2(L)
 \end{aligned}$$

Como éste conjunto en $F_2(P_1)$ y en $F_2(P_2)$ representa el triángulo ∇_1 y ∇_2 , respectivamente, entonces para acercarnos más al modelo de $F_2(\mathcal{P})$, debemos identificar estos dos triángulos en uno solo. Para tener una idea más clara de cómo se realiza este pegado notemos que las bandas de Möebius M_1 y M_2 y los cilindros C_1 y C_2 , cumplen lo siguiente:

$$(i) \quad M_1 \cap M_2 = F_2(S_1) \cap F_2(S_2) = \emptyset$$

$$(ii) \ C_1 \cap C_2 = \\ \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in L, y \in S_1\} \cap \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in L, y \in S_2\} = \\ \{p, q\}.$$

Esta última igualdad, en otras palabras nos dice que, los cilindros C_1 y C_2 se intersectan únicamente en un punto, a saber el punto $\{p, q\}$, el cual está sobre la circunferencia del extremo del cilindro C_1 determinada por el conjunto $\{\{x, q\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1\} = \gamma_1$, y sobre la circunferencia del extremo del cilindro C_2 determinada por el conjunto $\{\{y, p\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in S_2\} = \gamma_2$. Por lo tanto el conjunto $\gamma_1 \cup \gamma_2$ es un subconjunto cerrado de $F_2(P_1) \cup F_2(P_2)$, el cual consta de las dos circunferencias, de los extremos de los cilindros que no tienen añadida la banda de Möebius, que se intersectan sólo en el punto $\{p, q\}$ y tiene la forma de un ocho. Notemos que la base de los triángulos ∇_1 y ∇_2 representan los singulares de $F_2(L)$. Por otro lado la orilla del triángulo ∇_1 que comparte el vertice $\{p, q\}$, representa el conjunto $\{\{q, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in L\}$, y este conjunto es la recta por la cual el cilindro C_2 se une con el triángulo ∇_2 . De igual forma, la orilla del triángulo ∇_2 que comparte el vertice $\{p, q\}$, representa el conjunto $\{\{p, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in L\}$, y este conjunto es la recta por la cual el cilindro C_1 se une con el triángulo ∇_1 .

En la Figura 3.8 se muestra como deben pegarse estos dos hiperespacios.

Lo último que debemos observar es que el modelo para $F_2(P_1) \cup F_2(P_2)$ se puede construir en \mathbb{R}^3 , identificando lo siguiente: la circunferencia $\gamma_1 = \{\{x, q\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1\}$ con la circunferencia contenida en el plano XZ de radio $\frac{1}{2}$ y centro en el punto $(0, 0, \frac{1}{2})$, la circunferencia $\gamma_2 = \{\{y, p\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in S_2\}$ con la circunferencia contenida en el plano XY de radio 1 con centro en el punto $(-1, 0, 0)$ y el punto $\{p, q\}$ con el punto $(0, 0, 0)$. Como se muestra en la Figura 3.9. Al modelo de $F_2(P_1) \cup F_2(P_2)$ colocado de esta manera en \mathbb{R}^3 lo denotaremos por \mathcal{B} .

Ahora debemos construir un modelo para $\Gamma = \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1, y \in S_2\}$. Esto no es difícil pues en la Sección 2.6, del Capítulo 2, al construir el modelo para el hiperespacio $F_2(8)$, demostramos que este conjunto lo podemos representar por el toro $T = S_1 \times S_2$. Recordemos también que en esa parte de éste trabajo concluimos que a la circunferencia

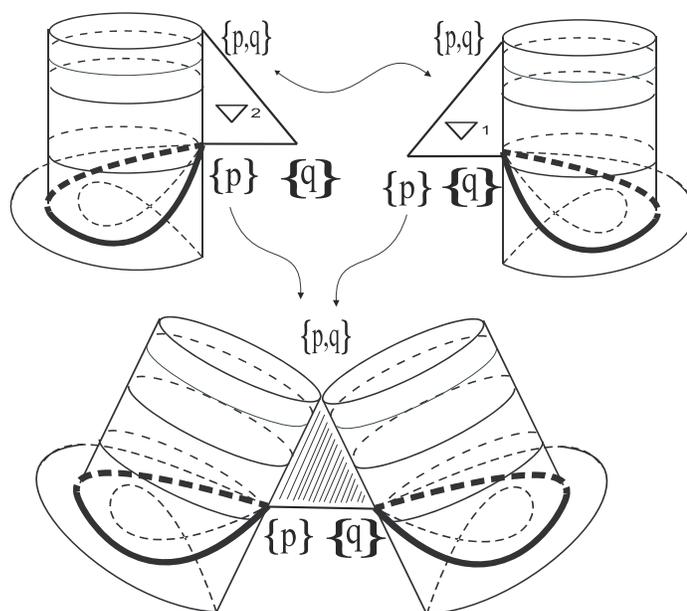
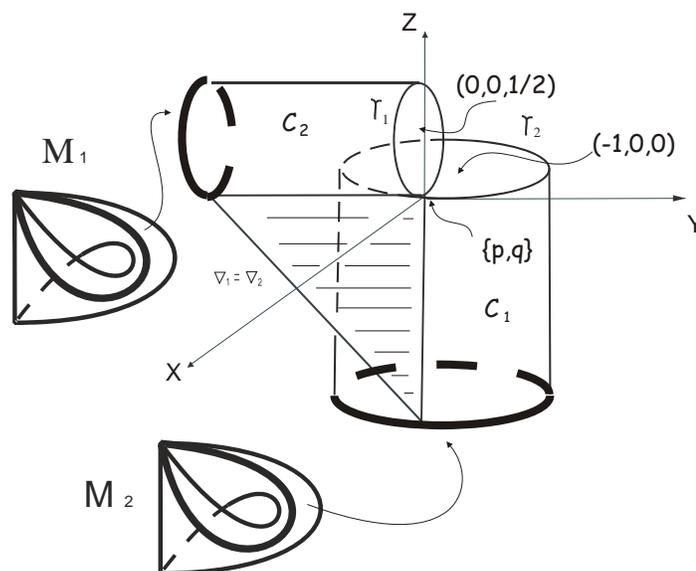


Figura 3.8:

Figura 3.9: Modelo de $F_2(P_1) \cup F_2(P_2)$.

$\{\{x, q\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1\}$ la podemos representar en el toro T , por el conjunto $S_1 \times \{q\}$, y a la circunferencia $\{\{y, p\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in S_2\}$ la podemos representar en el toro T por el conjunto $\{p\} \times S_2$.

También debemos observar que al toro T lo podemos colocar en \mathbb{R}^3 identificando lo siguiente: la circunferencia $\gamma_1 = \{\{x, q\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1\}$ con la circunferencia contenida en el plano XZ de radio $\frac{1}{2}$ y centro en el punto $(0, 0, 1/2)$, la circunferencia $\gamma_2 = \{\{y, p\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in S_2\}$ con la circunferencia contenida en el plano XY de radio 1 con centro en el punto $(0, 0, -1)$ y por ultimo a el punto $\{p, q\}$ lo podemos identificar con el punto $(0, 0, 0)$, como se muestra en la Figura 3.10 (notese que esta figura se esta observando desde abajo del plano XZ) Al modelo para el conjunto Γ colocado en \mathbb{R}^3 de esta forma lo denotaremos por Λ .

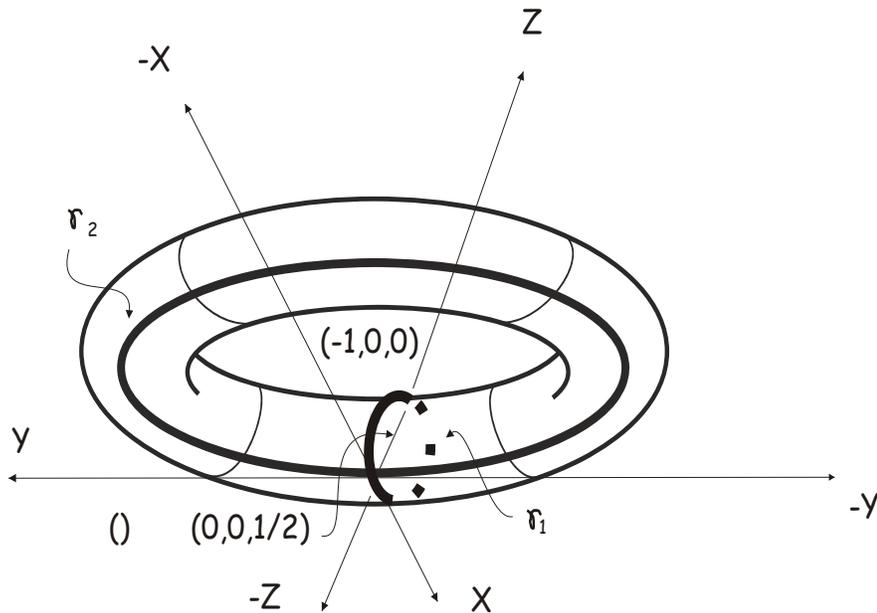


Figura 3.10: El Conjunto Γ .

Para finalizar el modelo de $F_2(\mathcal{P})$ notemos que:

$$[F_2(P_1) \cup F_2(P_2)] \cap \Gamma = [F_2(P_1) \cap \Gamma] \cup [F_2(P_2) \cap \Gamma] =$$

$$\{\{x, q\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1\} \cup \{\{y, p\} \in F_2(\mathcal{P}) : y \in S_2\} = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

Es decir, para obtener el modelo final de $F_2(\mathcal{P})$, sólo debemos pegar el modelo de $F_2(P_1) \cup F_2(P_2)$ con el modelo de Γ , por su intersección (Figura 3.11, recordemos que, en ésta figura, el toro lo estamos observando desde abajo del plano XY).

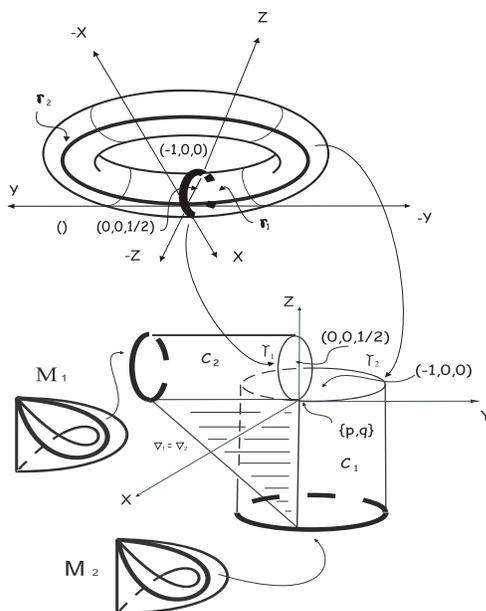


Figura 3.11: Modelo del Hiperespacio $F_2(\mathcal{P})$

El siguiente Teorema demuestra que el hiperespacio $F_2(\mathcal{P})$ se puede encajar en \mathbb{R}^4 .

Teorema 78 *El hiperespacio $F_2(\mathcal{P})$ se puede construir en \mathbb{R}^4 .*

Demostración. Denotemos por D_1 a la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y centro en el punto $(1, 0, \frac{1}{2})$, y por D_2 a la circunferencia de radio 1 con centro en el

origen. Recordemos que $F_2(\mathcal{P}) = \mathcal{B} \cup \Lambda$, donde $\mathcal{B} = F_2(P_1) \cup F_2(P_2)$ (Figura 3.9) y $\Lambda = \{\{x, y\} \in F_2(\mathcal{P}) : x \in S_1, y \in S_2\}$ (Figura 3.10).

Como \mathcal{B} y $D_1 \cup D_2$ son dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^3 , tales que $D_1 \cup D_2 \subset \mathcal{B}$, por el Lema 76, existe un encaje $j_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

- (i) $j_1(D_1 \cup D_2) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\} = \mathbb{R}^4(0)$
- (ii) $j_1(\mathcal{B} - (D_1 \cup D_2)) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w > 0\} = \mathbb{R}^4(+)$

Análogamente, como Λ y $D_1 \cup D_2$ son dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^3 , tales que $D_1 \cup D_2 \subset \Lambda$, por el Corolario 77, existe un encaje $j_2 : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$, que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $j_2(D_1 \cup D_2) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\} = \mathbb{R}^4(0)$
- (2) $j_2(\Lambda - (D_1 \cup D_2)) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w < 0\} = \mathbb{R}^4(-)$

Por la definición de j_1 y j_2 (ver demostración del Teorema 76 y Corolario 77), tenemos que $j_1(D_1 \cup D_2) = j_2(D_1 \cup D_2) = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^4(0)$.

Definimos $H : F_2(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ como:

$$H(x) = \begin{cases} j_1(x), & \text{si } x \in \mathcal{B}, \\ j_2(x), & \text{si } x \in \Lambda. \end{cases}$$

Como $\mathcal{B} \cap \Lambda = D_1 \cup D_2$ y para cualquier $x \in D_1 \cup D_2$ tenemos que $j_1(x) = j_2(x)$, entonces H está bien definida. Como $H|_{\mathcal{B}} = j_1$ y $H|_{\Lambda} = j_2$, tenemos que H es continua en \mathcal{B} y Λ los cuales son dos cerrados y por último observamos $H|_{\mathcal{B} \cap \Lambda} = j_1 = j_2$ que es continua, así obtenemos que H es continua. Como $j_1(\mathcal{B} - (D_1 \cup D_2)) \subset \mathbb{R}^4(+)$ y $j_2(\Lambda - (D_1 \cup D_2)) \subset \mathbb{R}^4(-)$; y estos dos conjuntos son ajenos, entonces H es un encaje que pega al conjunto \mathcal{B} y Λ por su intersección. Con esto se demuestra que el hiperespacio $F_2(\mathcal{P})$ se puede encajar en \mathbb{R}^4 . ■

3.5.2. Modelo para el Hiperespacio $F_2(\Theta)$

Denotaremos por Θ a la gráfica finita que tiene dos puntos de ramificación de orden tres y en la cual existen tres arcos que unen al los puntos de

ramificación.

La gráfica finita Θ se puede representar en \mathbb{R}^2 por la circunferencia unitaria $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ y unión el segmento $L = [-1, 1] \times \{0\}$. Si denotamos por p al punto $(-1, 0)$ y por q al punto $(1, 0)$ tenemos la siguiente igualdad:

$$F_2(\Theta) = F_2(S) \cup F_2(L) \cup \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A} = \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in S, y \in L\}$.

En el Ejemplo 2 del Capítulo 1 demostramos que al hiperespacio $F_2(L)$ lo podemos representar por un triángulo ∇ . Recordemos también, que en el triángulo ∇ los conjuntos $L_1 = \{\{x, p\} : x \in L\}$ y $L_2 = \{\{y, q\} : y \in L\}$, están representados por dos de sus lados que comparten el vértice común $\{p, q\}$. En la Figura 3.12, tenemos el modelo del hiperespacio $F_2(L)$, en el cual el conjunto L_1 está representado por la recta de color verde y L_2 está representado por la recta de color azul.

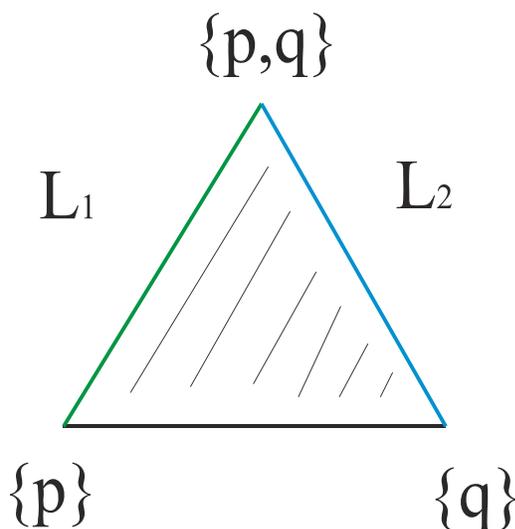


Figura 3.12:

Ahora construyamos un modelo para el conjunto \mathcal{A} , el cual posteriormente uniremos con el triángulo ∇ .

Para construir el modelo del conjunto \mathcal{A} consideremos, en \mathbb{R}^3 , el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$, que es homeomorfo al cilindro $S \times L$. Definimos la función $f : S \times L \rightarrow \mathcal{A}$, que a un punto $(s, l) \in S \times L$ le asocia el punto en \mathcal{A} dado por $f((s, l)) = \{s, l\}$.

Notemos que f es suprayectiva. Además la función f es continua, ya que si $\{(s_n, l_n)\}$ es una sucesión de puntos en $S \times L$, que converge a un punto (s, l) de $S \times L$, entonces $\lim f((s_n, l_n)) = \lim(\{s_n, l_n\}) = \lim(\{s_n\} \cup \{l_n\})$, así aplicando el Lema 5, tenemos que $\lim(\{s_n\} \cup \{l_n\}) = \{s\} \cup \{l\} = \{s, l\} = f((s, l))$, lo cual demuestra la continuidad de la función f .

Observemos que $S \cap L = \{(-1, 0), (1, 0)\}$, si denotamos por $p = (1, 0)$ y por $q = (-1, 0)$, entonces $S \cap L = \{p, q\}$. Si $(s_1, l_1), (s_2, l_2) \in S \times L$ y son tales que $f((s_1, l_1)) = f((s_2, l_2))$, como $s_1, s_2 \in S$ y $l_1, l_2 \in L$, entonces la última igualdad se tiene si y sólo si, $s_1 = s_2$ y $l_1 = l_2$; o $s_2 = l_1$ y $s_1 = l_2$, y en este caso se tiene que $s_1, s_2, l_1, l_2 \in S \cap L$. Si suponemos sin pérdida de generalidad, que $s_1 = p$ y $s_2 = q$, obtenemos que la función f es inyectiva en todos los puntos de $S \times L$, excepto en los puntos (p, q) y (q, p) , y en este caso $f((p, q)) = f((q, p)) = \{p, q\}$. Entonces, como el dominio de f es un compacto y su imagen es un espacio Hausdorff, tenemos que f es casi un homeomorfismo.

Por lo tanto identificando el punto (p, q) con el punto (q, p) del cilindro $S \times L$, como se ilustra en la Figura 3.13 y denotando por C al espacio que resulta de esta identificación, tenemos que la función $f : C \rightarrow \mathcal{A}$ definida para un punto $(s, l) \in C$ como $f((s, l)) = \{s, l\}$, es un homeomorfismo. Por lo tanto el conjunto C es el modelo del conjunto que andábamos buscando.

Para acercarnos al modelo del hiperespacio $F_2(\Theta)$, debemos pegar adecuadamente el modelo del hiperespacio $F_2(L)$, que es el triángulo ∇ representado en la Figura 3.12, con el modelo de \mathcal{A} que es el conjunto \mathcal{C} representado en la Figura 3.13. Este pegado lo debemos hacer por su intersección que es $L_1 \cup L_2$ ya que:

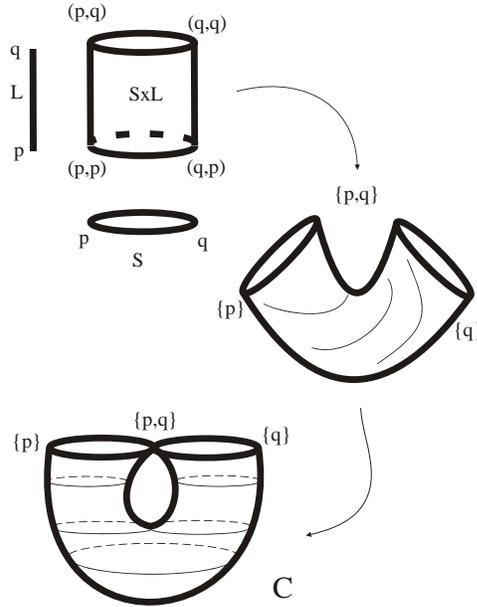


Figura 3.13:

$$\begin{aligned}
 F_2(L) \cap \mathcal{A} &= \{ \{x, y\} \in F_2(\Theta) : x, y \in L \} \cap \{ \{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in S, y \in L \} \\
 &= \{ \{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in L \cap S, y \in L \cap L \} \\
 &= \{ \{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in \{p, q\}, y \in L \} \\
 &= \{ \{p, y\} \in F_2(\Theta) : y \in L \} \cup \{ \{q, y\} \in F_2(\Theta) : y \in L \} \\
 &= L_1 \cup L_2
 \end{aligned}$$

Como ya sabemos cómo queda representado el conjunto $L_1 \cup L_2$ en el triángulo ∇ , entonces debemos determinar como están representados los conjuntos L_1 y L_2 en \mathcal{C} .

Para esto notemos que $L_1 = \{ \{x, p\} \in F_2(\Theta) : x \in L \}$ es imagen bajo la función f del conjunto $\{ (p, x) \in S \times L : x \in L \} \subset \mathcal{C}$, de igual forma $L_2 = \{ \{x, q\} \in F_2(\Theta) : x \in L \}$ es imagen bajo la función f del conjunto $\{ (q, x) \in S \times L : x \in L \} \subset \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} y \mathcal{A} son homeomorfos, basta con que encontremos a los conjuntos $\{ (p, x) \in S \times L : x \in L \}$ y $\{ (q, x) \in S \times L : x \in L \}$ en \mathcal{C} , para tener la representación de L_1 y L_2 en \mathcal{A} .

Ahora observemos que el conjunto $\{(p, x) \in S \times L : x \in L\}$ está representado en el cilindro $S \times L$ por la recta que une al punto (p, p) con el punto (p, q) . La recta de color verde de la Figura 3.14 representa este conjunto en el cilindro $S \times L$.

De igual forma el conjunto $\{(q, x) \in S \times L : x \in L\}$ está representado en el cilindro $S \times L$ por la recta que une al punto (q, p) con el punto (q, q) . La recta de color azul de la Figura 3.14 representa este conjunto en el cilindro $S \times L$.

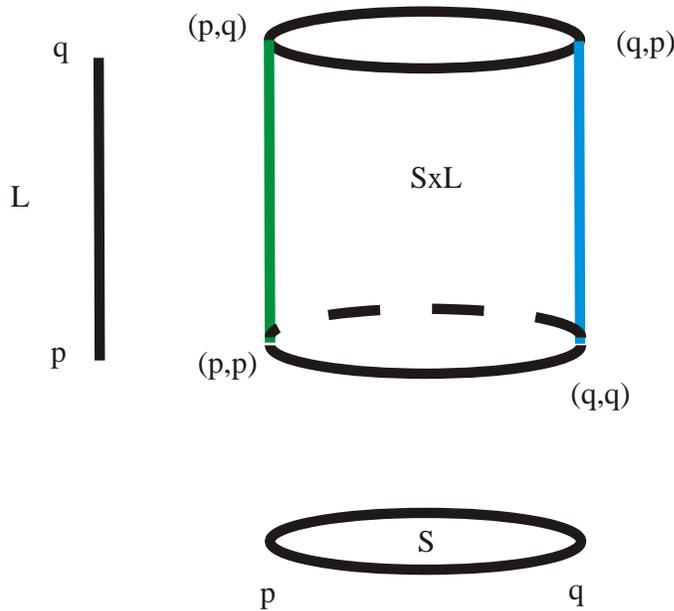


Figura 3.14:

De esta forma, siguiendo las transformaciones que sufren la recta verde y la recta azul cuando se identifica el punto (p, q) con el punto (q, p) en el cilindro $S \times L$, tenemos que el conjunto $L_1 \cup L_2$ queda representado en \mathcal{A} por el conjunto verde unión el conjunto azul como se ilustra en la Figura 3.15. Notemos que $L_1 \cup L_2$ es un arco en \mathcal{A} que une al punto $\{p, p\}$ con el punto $\{q, q\}$ y que contiene al punto $\{p, q\}$.

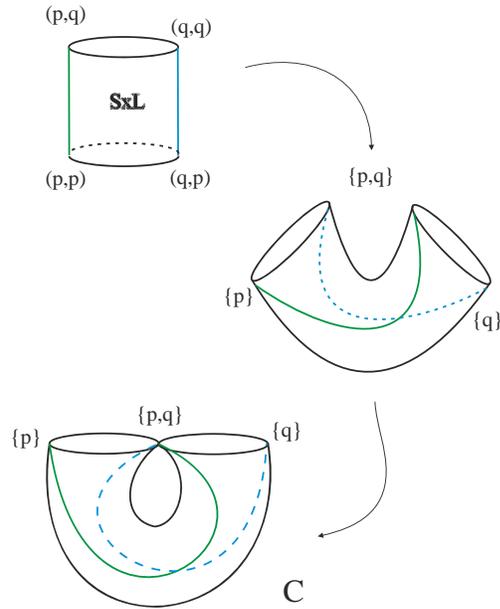


Figura 3.15:

Por lo tanto, para pegar adecuadamente el modelo del hiperespacio $F_2(L)$ con el modelo del conjunto \mathcal{A} , debemos de identificar la recta de color verde y la recta de color azul del triángulo ∇ con la recta de color verde y la recta de color azul del conjunto C , respectivamente, como se indica en la Figura 3.16.

Una forma de realizar esta identificación en \mathbb{R}^3 es la siguiente: en el triángulo ∇ , denotemos por l al segmento que une al punto $\{p, q\}$ con el punto medio del lado opuesto al vértice $\{p, q\}$ del triángulo ∇ (en la Figura 3.17 (a), la recta l está representada por la recta de color rosa). Ahora en \mathbb{R}^3 podemos deformar el triángulo ∇ hasta obtener la Figura 3.17 (b).

Ahora cortemos la Figura 3.17 (b) por la recta l , para obtener de esta forma una descomposición del triángulo ∇ (ver Figura 3.18). A la componente que contiene al conjunto verde lo denotaremos por Z y a la componente que contiene al conjunto azul lo denotaremos por W .

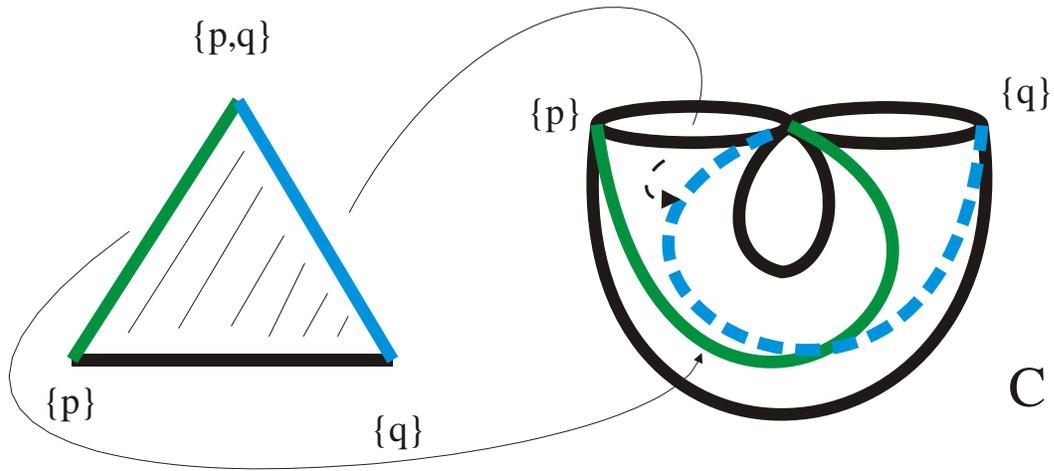


Figura 3.16:

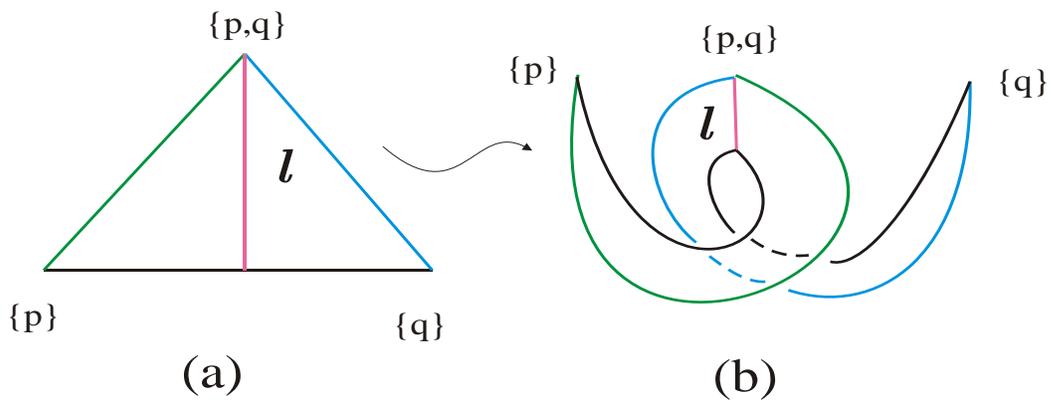


Figura 3.17:

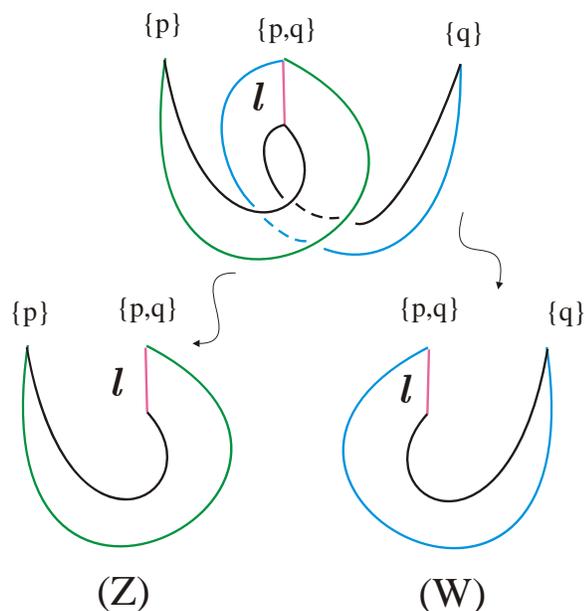


Figura 3.18:

Por otro lado al conjunto C , que representa el modelo para \mathcal{A} , le podemos unir el segmento l , de tal forma que el extremo $\{p, q\}$ de la recta l coincida con el punto $\{p, q\}$ del conjunto C , siendo este punto el único lugar donde C y L se intersectan. Esto se ilustra en la Figura 3.19.

De la descomposición del triángulo ∇ de la Figura 3.18, consideremos la componente Z . La recta l de esta componente la podemos identificar con la recta l de la Figura 3.19, y como se ilustra en la Figura 3.20, ir acomodando el conjunto verde de la componente Z sobre el conjunto verde del modelo C .

Con lo anterior hemos realizado una parte del pegado del modelo del hiperespacio $F_2(L)$ con el modelo del conjunto \mathcal{A} ; para concluir esta tarea, sólo debemos pegar la componente W de la Figura 3.18 con el conjunto C de la Figura 3.19, identificando los colores correspondientes, pero esto ya es tarea fácil, pues dando la vuelta al conjunto C y a la componente W , como se ilustra en la Figura 3.21, tenemos que este pegado se efectúa como el anterior.

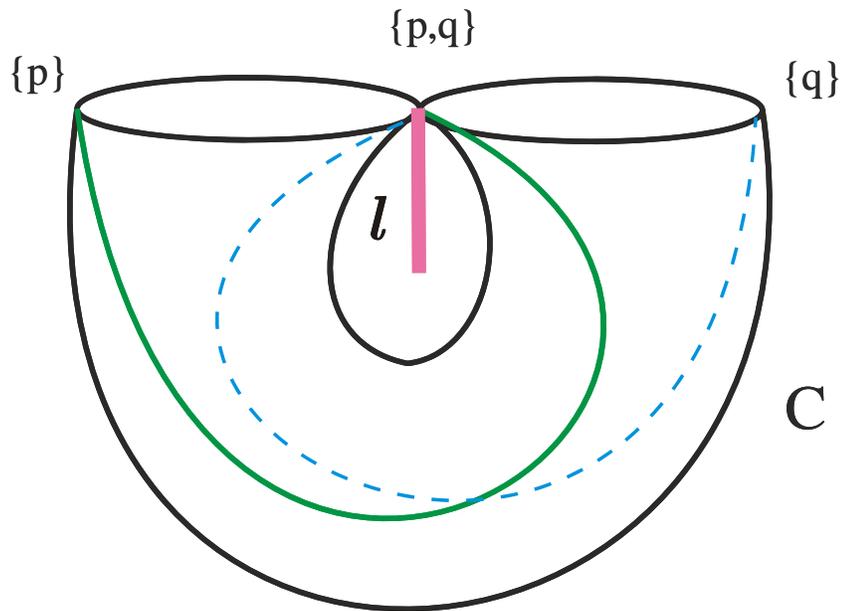


Figura 3.19:

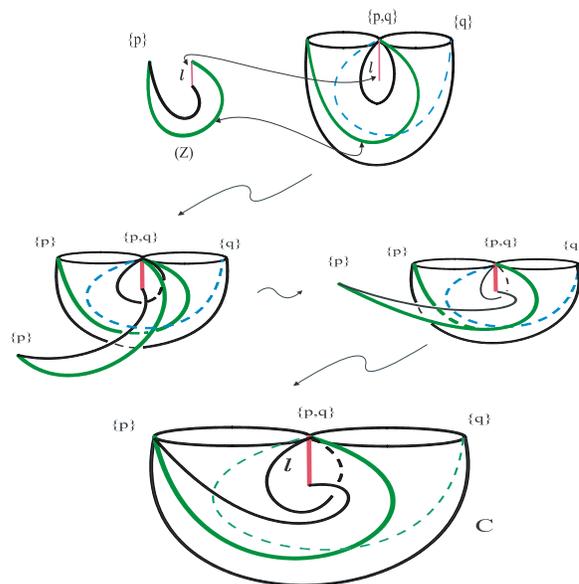


Figura 3.20:

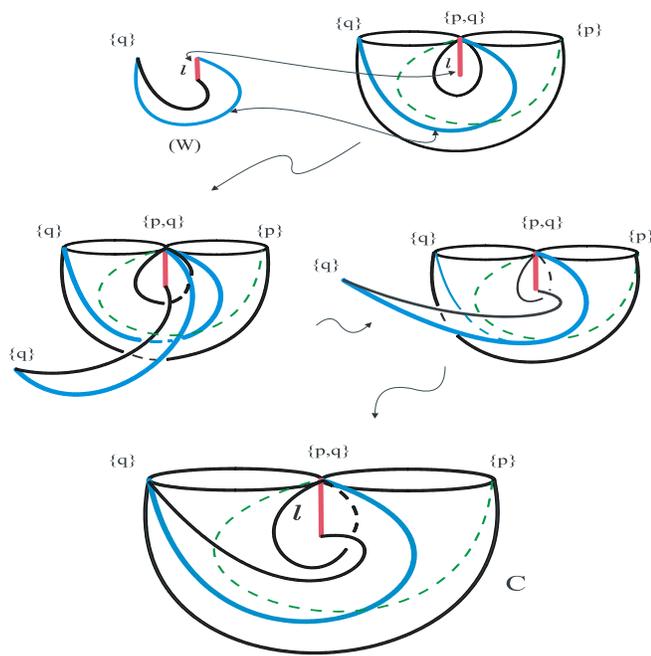


Figura 3.21:

De esta forma el modelo que representa al conjunto $\mathcal{A} \cup F_2(L)$ lo podemos construir en \mathbb{R}^3 , y el modelo final se ilustra en la Figura 3.22. De ahora en adelante el modelo de $\mathcal{A} \cup F_2(L)$ lo denotaremos por la letra \mathcal{B} .

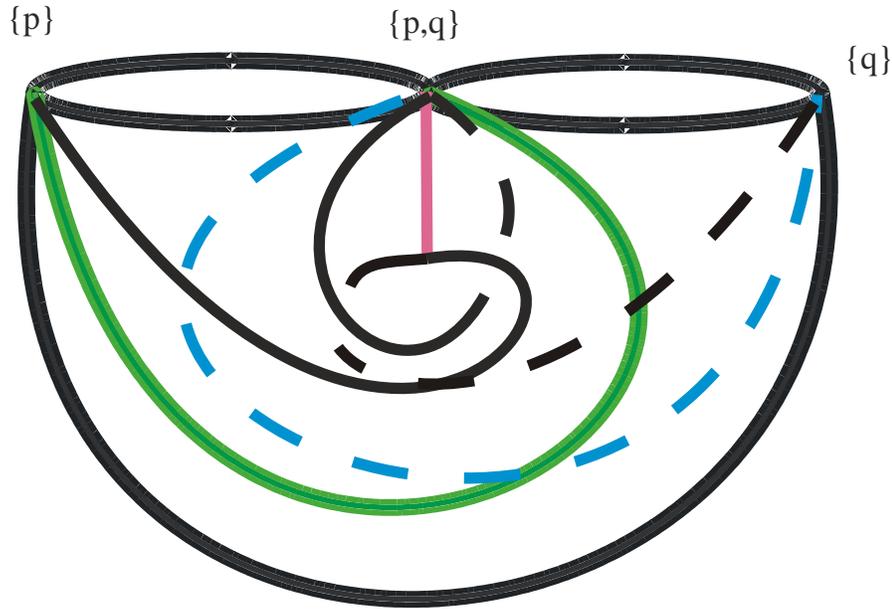


Figura 3.22: Modelo del Conjunto \mathcal{B} .

Por otra parte, recordemos que en la Sección 1 del Capítulo 2, demostramos que al hiperespacio $F_2(S)$ lo podemos representar por una banda de Möbius M . Entonces para terminar el modelo del hiperespacio $F_2(\Theta)$, debemos pegar adecuadamente la banda M con el conjunto \mathcal{B} ; y como estos dos conjuntos se pegan por su intersección, para hallar ésta consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 F_2(L) \cap F_2(S) &= \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x, y \in L\} \cap \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x, y \in S\} \\
 &= \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x, y \in L \cap S\} \\
 &= \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x, y \in \{p, q\}\} \\
 &= \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(S) \cap \mathcal{A} &= \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x, y \in S\} \cap \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in S, y \in L\} \\
&= \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in S, y \in S \cap L\} \\
&= \{\{x, y\} \in F_2(\Theta) : x \in S, y \in \{p, q\}\} \\
&= \{\{x, p\} \in F_2(\Theta) : x \in S\} \cup \{\{x, q\} \in F_2(\Theta) : x \in S\}
\end{aligned}$$

Si al conjunto $\{\{x, p\} \in F_2(\Theta) : x \in S\}$ lo denotamos por S_1 y al conjunto $\{\{x, q\} \in F_2(\Theta) : x \in S\}$ lo denotamos por S_2 , tenemos que la banda M y el conjunto \mathcal{B} , se pegan por el conjunto $S_1 \cup S_2$. Por lo tanto debemos analizar cómo está representado el conjunto $S_1 \cup S_2$ en M y en \mathcal{B} . Para no desviarnos tanto, analizaremos primero como está representado $S_1 \cup S_2$ en el conjunto \mathcal{B} .

Primero observemos que $S_1 \cup S_2 \subset \mathcal{A}$ y \mathcal{A} es homeomorfo al conjunto C (Figura 3.13), donde el homeomorfismo está dado por la función $f : C \rightarrow \mathcal{A}$, donde $f((s, l)) = \{s, l\}$. Ahora notemos que los conjuntos $S_1 = \{\{x, p\} \in F_2(\Theta) : x \in S\}$ y $S_2 = \{\{x, q\} \in F_2(\Theta) : x \in S\}$ son la imagen bajo la función f de los conjuntos $\{(x, p) \in S \times L : x \in S\}$ y $\{(x, q) \in S \times L : x \in S\}$, respectivamente. Ahora para tener una idea más clara de como es el conjunto $S_1 \cup S_2$, vamos a retroceder un poco más; notemos que los conjuntos $\{(x, p) \in S \times L : x \in S\}$ y $\{(x, q) \in S \times L : x \in S\}$ están representados por la circunferencia inferior y la circunferencia superior, respectivamente, del cilindro $S \times L$. En la Figura 3.23 (a), el conjunto $\{(x, p) \in S \times L : x \in S\}$ está representado por la circunferencia de color rojo, y el conjunto $\{(x, q) \in S \times L : x \in S\}$ está representado por la circunferencia de color café.

Siguiendo la transformación que sufren las circunferencias roja y café, cuando en el cilindro $S \times L$ identificamos el punto (p, q) con el punto (q, p) , tenemos que el conjunto $S_1 \cup S_2$ está representado en \mathcal{C} por dos circunferencias que se tocan en un sólo punto (Figura 3.23 (b)).

Cuando al conjunto \mathcal{C} le pegamos el triángulo ∇ , notamos que las circunferencias que representan al conjunto $S_1 \cup S_2$ no sufren cambio alguno, es decir el conjunto $S_1 \cup S_2$ está representado en \mathcal{B} por la unión de las circunferencias roja y café que se ilustran en la Figura 3.24.

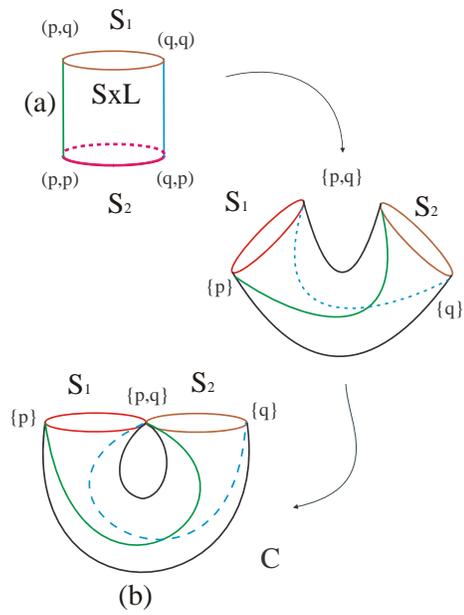


Figura 3.23:

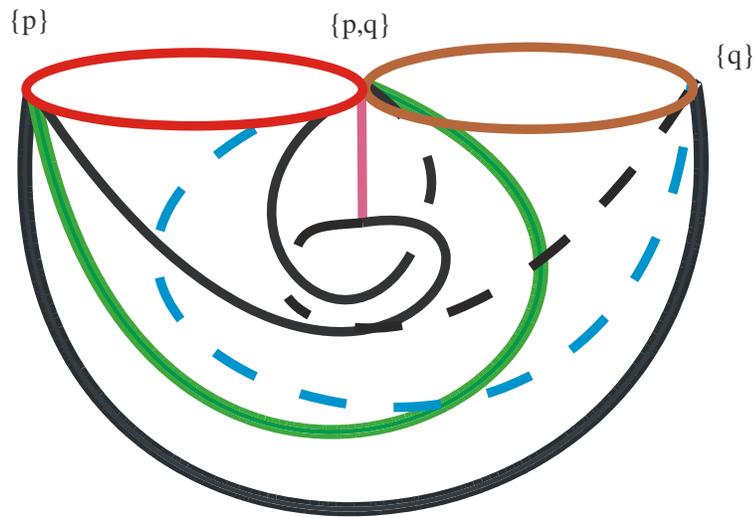


Figura 3.24:

Por otro lado, para determinar como está representado el conjunto $S_1 \cup S_2$ en el conjunto $F_2(S)$, regresaremos a la construcción de la banda M.

Recordemos que mediante la función $h : F_2(S) \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$, la cual a un punto $A \in F_2(S)$ le asignaba el punto $(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi})m(A)$ (donde $\ell(A)$ es la longitud del arco menor que une a los puntos de A y $m(A)$ es el punto medio del arco menor que une a los puntos de A), teníamos que en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$ sólo debíamos identificar los puntos antípodas de la circunferencia $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \frac{1}{2}\}$, para obtener de esta forma el modelo del hiperespacio $F_2(S)$, el cual resulta ser la banda de Möbius (Figura 3.25).

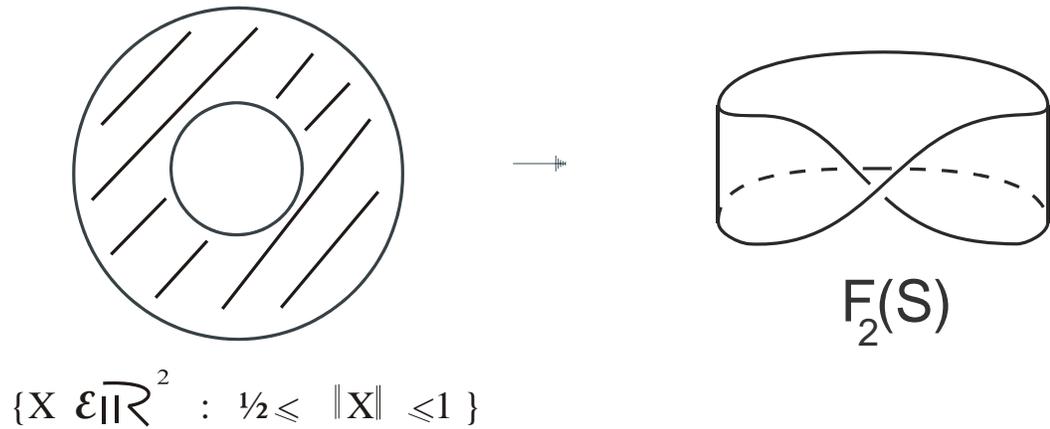


Figura 3.25:

También recordemos que al fijar el punto $q \in S$, el conjunto $\{\{x, q\} \in F_2(\Theta) : x \in S\} = S_2$ está representado en $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$ por dos curvas, α_1 y α_4 , que unen al punto $q = (1, 0)$ con los puntos $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{-1}{2})$, respectivamente, y que además satisfacen que α_1 está contenida en el primer cuadrante y α_4 está contenida en el cuarto cuadrante. En la Figura 3.26 (a), las curvas α_1 y α_4 están iluminadas de color café.

De manera similar, al fijar el punto $p \in S$, el conjunto $\{\{x, p\} \in F_2(\Theta) : x \in S\} = S_1$ está representado en $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$ por dos curvas, α_2 y α_3 que unen al punto $p = (-1, 0)$ con los puntos $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{-1}{2})$, respectivamente, y que además satisfacen que α_2 está contenida en el segundo

cuadrante y α_3 está contenida en el tercer cuadrante. En la Figura 3.26 (b), las curvas α_2 y α_3 están iluminadas de color rojo.

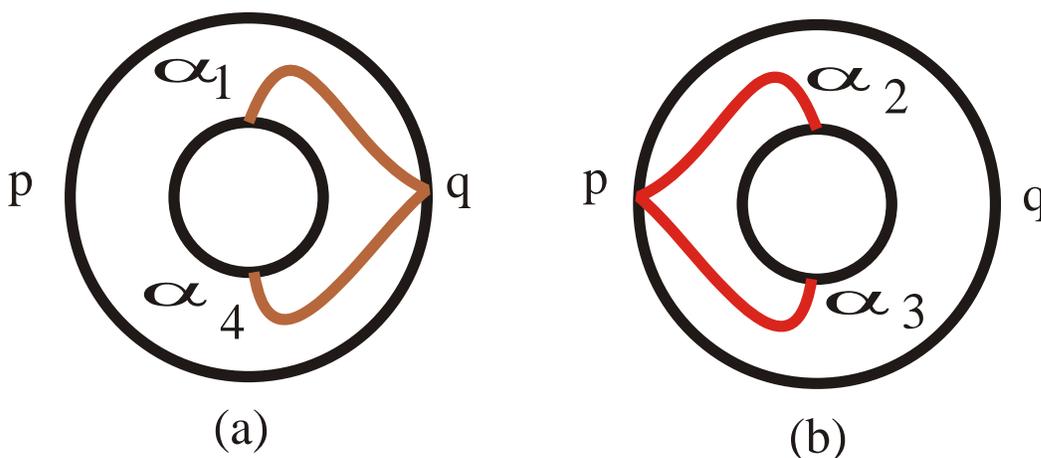


Figura 3.26:

Ahora siguiendo las transformaciones que sufren las curvas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$, cuando identificamos los puntos antípodas de la circunferencia $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \frac{1}{2}\}$ para obtener la banda M , tenemos que el conjunto $S_1 \cup S_2$ está representado en la banda M por las circunferencias roja y café, las cuales se tocan en un solo punto, como se ilustra en la Figura 3.27.

Ya estamos listos para finalizar el modelo del hiperespacio $F_2(\Theta)$, lo único que debemos hacer es identificar las circunferencias S_1 y S_2 del conjunto \mathcal{B} con las circunferencias S_1 y S_2 de la banda M como se ilustra en la Figura 3.28.

Este pegado lo haremos en \mathbb{R}^4 de la siguiente manera: de la banda de Möbius M , consideremos sólo el conjunto $S_1 \cup S_2$. Como se observa en la Figura 3.29, este conjunto, está formado por dos circunferencias con formas peculiares que sólo se intersectan en un punto.

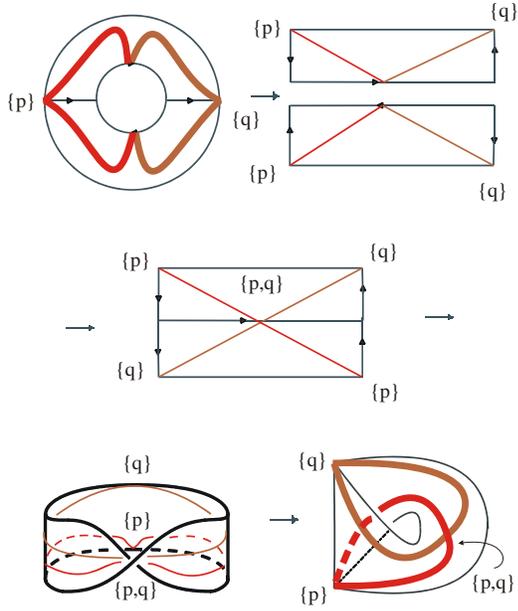
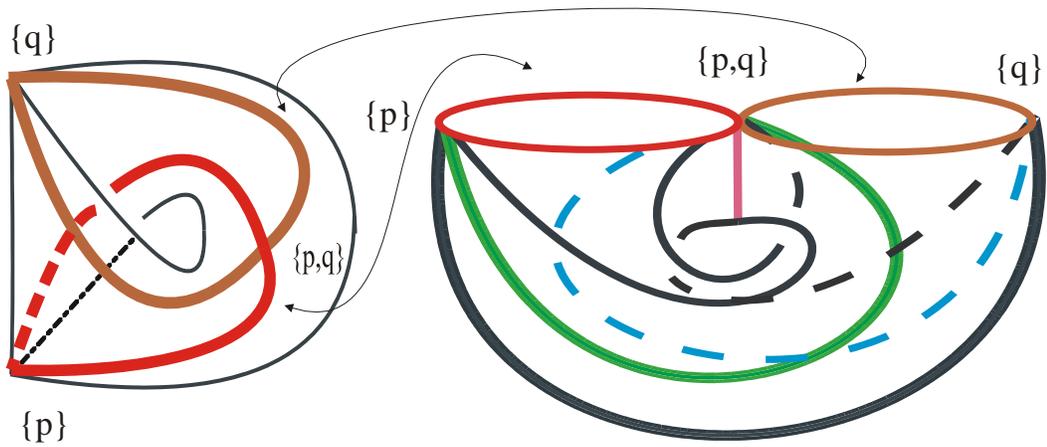


Figura 3.27:

Figura 3.28: Modelo del Hiperespacio $F_2(\Theta)$.

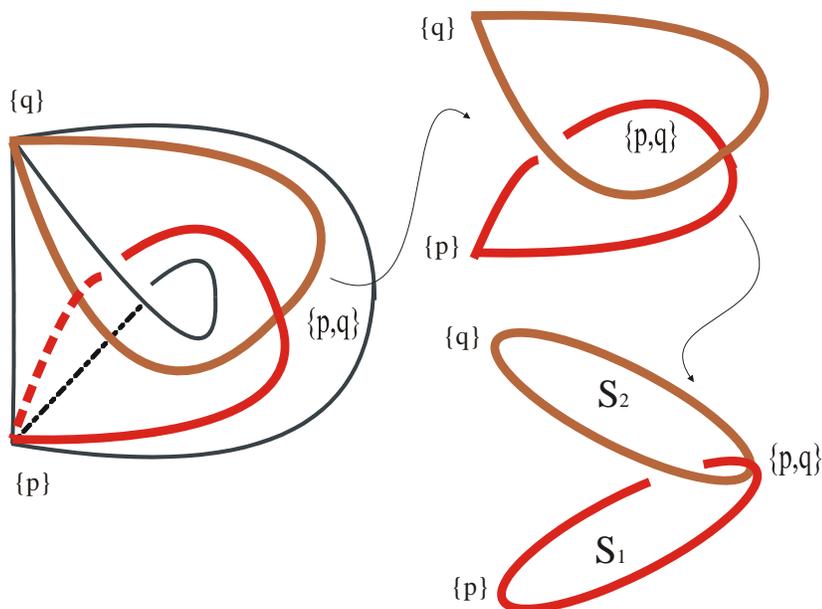


Figura 3.29:

Ahora tomemos al conjunto $S_1 \cup S_2$, recortado, y vayamos abriendo la circunferencia S_2 (que es la circunferencia de color café) y la circunferencia S_1 (que es la circunferencia de color rojo), como se muestra en la Figura 3.30, hasta que el conjunto $S_1 \cup S_2$ de la banda M coincida con el conjunto $S_1 \cup S_2$ del conjunto \mathcal{B} .

Esto último demuestra la siguiente proposición:

Proposición 79 *El modelo para el conjunto $F_2(L) \cup \mathcal{A}$ y el modelo para el hiperespacio $F_2(S)$ se pueden acomodar en \mathbb{R}^3 con la propiedad de que el conjunto $S_1 \cup S_2 \subset F_2(L) \cup \mathcal{A}$ y $S_1 \cup S_2 \subset F_2(S)$ coincide en ambos modelos.*

Con esto estamos listos para demostrar que el hiperespacio $F_2(\Theta)$ se puede construir en \mathbb{R}^4 .

Teorema 80 *El hiperespacio $F_2(\Theta)$ está contenido en \mathbb{R}^4 .*

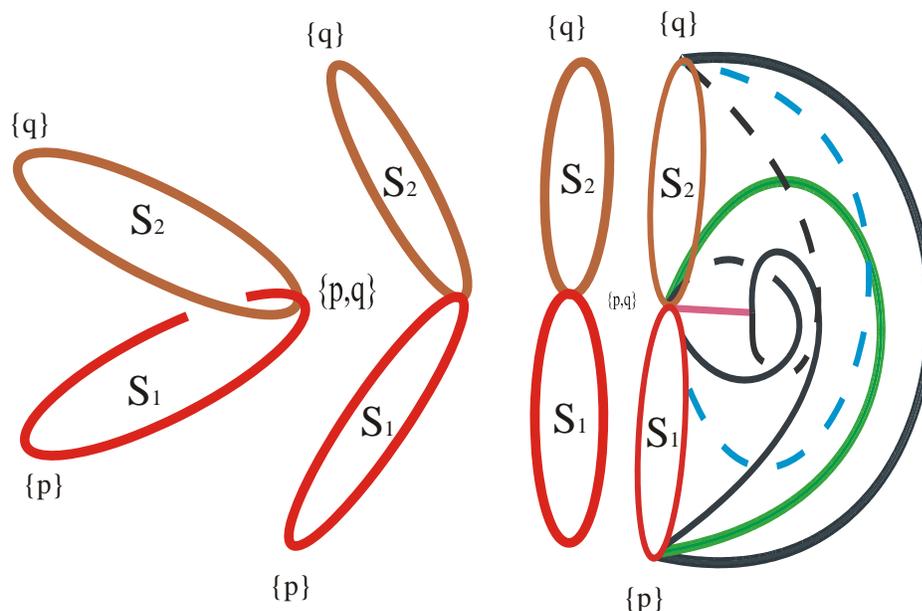


Figura 3.30:

Demostración. Por la discusión anterior basta demostrar que \mathcal{B} y M se pueden encajar en \mathbb{R}^4 de tal forma que su intersección sea $S_1 \cup S_2$.

Por la Proposición 79 podemos suponer que \mathcal{B} y M están en \mathbb{R}^3 de tal forma que el conjunto $S_1 \cup S_2$ de \mathcal{B} coincide con el conjunto $S_1 \cup S_2$ de M .

Como $S_1 \cup S_2$ y \mathcal{B} son dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^3 tales que $S_1 \cup S_2 \subset \mathcal{B}$, entonces se satisfacen las condiciones del Lema 76, y por lo tanto existe un encaje $j_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

- (i) $j_1(S_1 \cup S_2) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\} = \mathbb{R}^4(0)$
- (ii) $j_1(\mathcal{B} - (S_1 \cup S_2)) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w > 0\} = \mathbb{R}^4(+)$.

También como $S_1 \cup S_2$ y M son dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^3 tales que $S_1 \cup S_2 \subset M$, entonces se satisfacen las condiciones del Corolario 77, y por lo tanto existe un encaje $j_2 : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

- (1) $j_2(S_1 \cup S_2) \subset \mathbb{R}^4(0)$
- (2) $j_2(M - (S_1 \cup S_2)) \subset \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w < 0\} = \mathbb{R}^4(-)$

Notemos que por la definición de los encajes j_1 y j_2 (ver la demostración del Lema 76 y el Corolario 77), tenemos que $j_1(S_1 \cup S_2) = j_2(S_1 \cup S_2) = S_1 \cup S_2 \subset \mathbb{R}^4(0)$.

Definimos $H : F_2(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}^4$ como:

$$H(\bar{x}) = \begin{cases} j_1(x) & \text{si } x \in \mathcal{B} \\ j_2(x) & \text{si } x \in M \end{cases}$$

Como $\mathcal{B} \cap M = S_1 \cup S_2$ y para cualquier $x \in S_1 \cup S_2$ tenemos que $j_1(x) = j_2(x)$, entonces H está bien definida. Como $H|_{\mathcal{B}} = j_1$ y $H|_M = j_2$, tenemos que H es continua en \mathcal{B} y M , los cuales son dos cerrados. Por último observamos $H|_{\mathcal{B} \cap M} = j_1 = j_2$, que es continua, así concluimos que H es continua. Como $j_1(\mathcal{B} - (S_1 \cup S_2)) \subset \mathbb{R}^4(+)$ y $j_2(M - (S_1 \cup S_2)) \subset \mathbb{R}^4(-)$; y estos dos conjuntos son ajenos, entonces H es un encaje que pega al conjunto \mathcal{B} y M por su intersección. Con esto se demuestra que el hiperespacio $F_2(\Theta)$ se puede encajar en \mathbb{R}^4 . ■

3.6. Conclusiones del Capítulo

Recordemos que en la Sección 3.4, de este Capítulo, demostramos que las gráficas finitas que no contienen 5-odos, son las que están representados en la Figura 3.3. Ahora observemos que, en el Teorema 69, demostramos que si G es una gráfica finita que contiene un 5-odo entonces su hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(G)$. Por lo tanto, para terminar de clasificar las gráficas finitas que satisfacen esta propiedad, sólo debemos enfocarnos a las gráficas finitas que no contienen 5-odos.

Ahora de las gráficas finitas que no contienen 5-odos, en el Capítulo 2 demostramos que el arco, el 3-odo simple, la paleta, el ocho, el 4-odo simple y la medalla (ver Teoremas 27, 32, 34, 37, 38 y 39), satisfacen que su hiperespacio $F_2(G)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(G)$, siendo la Circunferencia S , la única gráfica finita, que hasta el momento sabemos que su hiperespacio $F_2(S)$ no se puede encajar en su hiperespacio $C(S)$ (Teorema 31).

Por lo tanto sólo nos falta analizar qué sucede con la hache, el niño, las pesas, el dulce y la theta.

Para este análisis recordemos que hemos denotado a la Hache, el Niño, las Pesas, el Dulce y la Theta por las letras H , \mathcal{N} , \mathcal{P} , \mathcal{D} y Θ , respectivamente. Notemos que la H se puede representar en \mathbb{R}^2 por la unión de los segmentos $L_1 = [-1, 1] \times \{0\}$, $L_2 = \{-1\} \times [-1, 1]$ y $L_3 = \{1\} \times [-1, 1]$. Consideremos los siguientes resultados.

Lema 81 *El hiperespacio $C(H)$ contiene una 4-celda.*

Demostración. De la representación de H en \mathbb{R}^2 como la unión de los segmentos L_1 , L_2 y L_3 , tenemos que L_1 es un subcontinuo de H y que la diferencia $H - L_1 = \{-1\} \times (0, 1] \cup \{-1\} \times [-1, 0) \cup \{1\} \times (0, 1] \cup \{1\} \times [-1, 0)$ tiene cuatro componentes. Esto demuestra que H es un 4-odo, aplicando el Teorema 21, concluimos que el hiperespacio $C(H)$ contiene una 4-celda. ■

Lema 82 *Los hiperespacios $C(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{P})$, $C(\mathcal{D})$ y $C(\Theta)$ contienen una 4-celda.*

Demostración. Como H esta contenida en \mathcal{N} , \mathcal{P} , \mathcal{D} y Θ (ver Figura 3.31), tenemos que el hiperespacio $C(H)$ está contenido en cada uno de los hiperespacios $C(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{P})$, $C(\mathcal{D})$ y $C(\Theta)$. Por el Lema 81, $C(H)$ contiene una 4-celda, por la transitividad de la contención concluimos que los hiperespacios $C(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{P})$, $C(\mathcal{D})$ y $C(\Theta)$ contienen un 4-celda. ■

Ahora observemos que H y \mathcal{N} son subgráficas de \mathcal{P} (Figura 3.32 (a)) y que \mathcal{D} es una subgráfica de Θ (Figura 3.32 (b)), por los Teoremas 78 y 80, tenemos que los hiperespacios $F_2(\mathcal{P})$ y $F_2(\Theta)$ se pueden construir en \mathbb{R}^4 , entonces los hiperespacios $F_2(H)$, $F_2(\mathcal{N})$, $F_2(\mathcal{P})$, $F_2(\mathcal{D})$ y $F_2(\Theta)$ se pueden encajar en el continuo $[0, 1]^4$, esto nos da la pauta para demostrar el siguiente teorema.

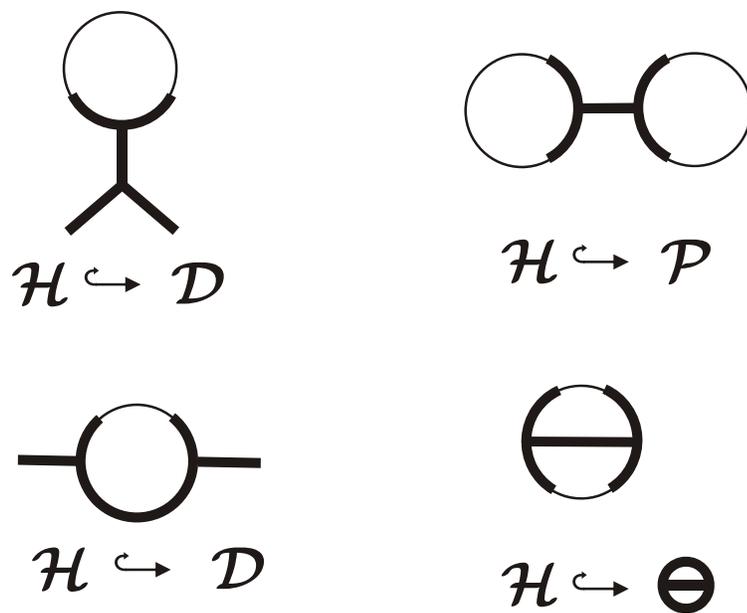


Figura 3.31:

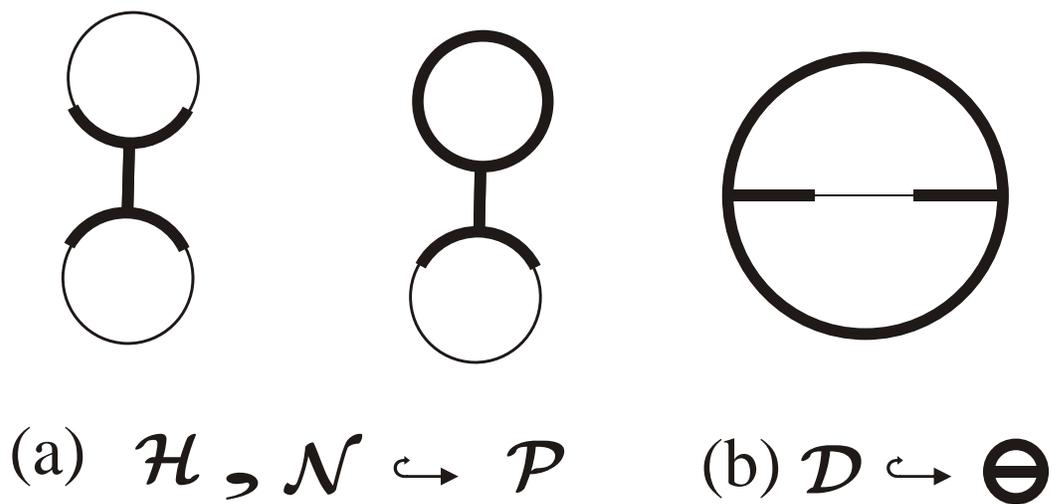


Figura 3.32:

Teorema 83 *Los hiperespacios $F_2(H)$, $F_2(\mathcal{N})$, $F_2(\mathcal{P})$, $F_2(\mathcal{D})$ y $F_2(\Theta)$ se pueden ser encajados en los hiperespacios $C(H)$, $C(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{P})$, $C(\mathcal{D})$ y $C(\Theta)$, respectivamente.*

Demostración. Sabemos que los continuos $F_2(H)$, $F_2(\mathcal{N})$, $F_2(\mathcal{P})$, $F_2(\mathcal{D})$ y $F_2(\Theta)$ están encajados en el continuo $[0, 1]^4$. Por el Lema 81 el hiperespacio $C(H)$ contiene una 4-celda. De igual forma por el Lema 82, los hiperespacios $C(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{P})$, $C(\mathcal{D})$ y $C(\Theta)$ contienen una 4-celda. Por lo tanto, por el Teorema 25 existen encajes $e_1 : F_2(H) \rightarrow C(H)$, $e_2 : F_2(\mathcal{N}) \rightarrow C(\mathcal{N})$, $e_3 : F_2(\mathcal{P}) \rightarrow C(\mathcal{P})$, $e_4 : F_2(\mathcal{D}) \rightarrow C(\mathcal{D})$ y $e_5 : F_2(\Theta) \rightarrow C(\Theta)$, esto termina la demostración de este teorema. ■

Por lo tanto, gracias al Teorema 83 y al análisis que se realizó en el Capítulo 2, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 84 *La única gráfica finita para la cual su hiperespacio $F_2(G)$ no se puede encajar en su hiperespacio $C(G)$ es la Circunferencia.*

Capítulo 4

Dendritas y Dendroides

4.1. Dendritas

Definición 85 Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

El propósito de los siguientes resultados es demostrar que las dendritas satisfacen las condiciones del Teorema 63.

Lema 86 Si X es una dendrita entonces:

- (i) X es conexo por arcos.
- (ii) X es localmente arco conexo.
- (iii) X es únicamente arco conexa.

Demostración. Para demostrar (i) recordemos que el Teorema 13 dice que todo continuo localmente conexo es conexo por arcos. Por lo tanto, como X es una dendrita y por definición es localmente conexa, entonces X es conexa por arcos.

Verifiquemos (ii). Si X es una dendrita, para demostrar que X es localmente arco conexa, sea $x \in X$ y U_x una vecindad abierta de x . Como X es localmente conexa, existe una vecindad abierta y conexa V_x en X tal que

$x \in V_x \subset U_x$. Por el Teorema 14, tenemos que todo abierto conexo en un continuo localmente conexo es arco conexo, por lo tanto V_x es una vecindad arco conexas de x . Esto demuestra que X es localmente arco conexas.

Por último verifiquemos que X es únicamente arco conexo. Para esto supongamos que existen dos puntos distintos p y q en X para los cuales existen encajes $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow X$ tales que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = q$ y $\alpha_1((0, 1)) \neq \alpha_2((0, 1))$. Entonces podemos suponer que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\alpha_1(t_0) \notin \alpha_2((0, 1))$. Por la continuidad de α_1 y la compacidad de $[0, 1]$, existen

$$\begin{aligned} t_1 &= \max\{t \in (0, t_0) : \alpha_1(t) \in \alpha_2([0, 1])\}, \\ t_2 &= \min\{t \in (t_0, 1) : \alpha_1(t) \in \alpha_2([0, 1])\}, \\ t_3 &= \min\{t \in (t_0, 1) : \alpha_2(t) \in \alpha_1([0, 1])\} \text{ y} \\ t_4 &= \min\{t \in (t_0, 1) : \alpha_2(t) \in \alpha_1([0, 1])\}. \end{aligned}$$

Podemos suponer, que $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_3)$ y $\alpha_1(t_2) = \alpha_2(t_4)$. Entonces $\beta_1 = \alpha_1|_{[t_3, t_4]} : [t_3, t_4] \rightarrow X$ y $\beta_2 = \alpha_2|_{[t_1, t_2]} : [t_1, t_2] \rightarrow X$ son encajes tales que $\beta_1(t_1) = \beta_2(t_1)$ y $\beta_1(t_2) = \beta_2(t_2)$, esto implica que el conjunto $\beta_1([t_1, t_2]) \cup \beta_2([t_3, t_4])$ es una curva cerrada simple contenida en X , lo cual no puede suceder pues X es una dendrita. Con esto concluimos la demostración de este lema. ■

Teorema 87 *Si X es una dendrita entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demstración. Por la parte (iii) del Lema 86, sabemos que X es únicamente arcoconexas, y por definición, X es localmente conexa. Por lo tanto, por el Teorema 63, existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$. ■

4.2. El Peine Nulo y la Dendrita F_w

En esta sección caracterizaremos a dos continuos que serán de gran importancia para clasificar algunos continuos que estudiaremos más adelante. También demostraremos que estos continuos son ∞ -odos.

Definición 88 *Un continuo Y es un peine Nulo, si existen:*

- (a) Un arco contenido en Y con extremos q y q_1 .
- (b) Una sucesión de puntos distintos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en el arco qq_1 .
- (c) Una sucesión de puntos distintos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en la diferencia $Y - qq_1$.

Que satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) $Y = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n q_n\right) \cup qq_1$
- (2) $p_n \rightarrow q$, $q_n \rightarrow q$ y $p_n q_n \rightarrow \{q\}$, cuando $n \rightarrow \infty$.
- (3) $qq_n \subset qq_m$, para toda $n < m$.
- (4) $p_n q_n \cap p_m q_m = \emptyset$, para toda $n \neq m$.
- (5) $qq_1 \cap p_n q_n = \{q_n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 4.1).

Lema 89 *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X . Si existe un punto $p \in X$ tal que $\lim A_n = \{p\}$, entonces $A = \{p\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ es un subconjunto compacto de X .*

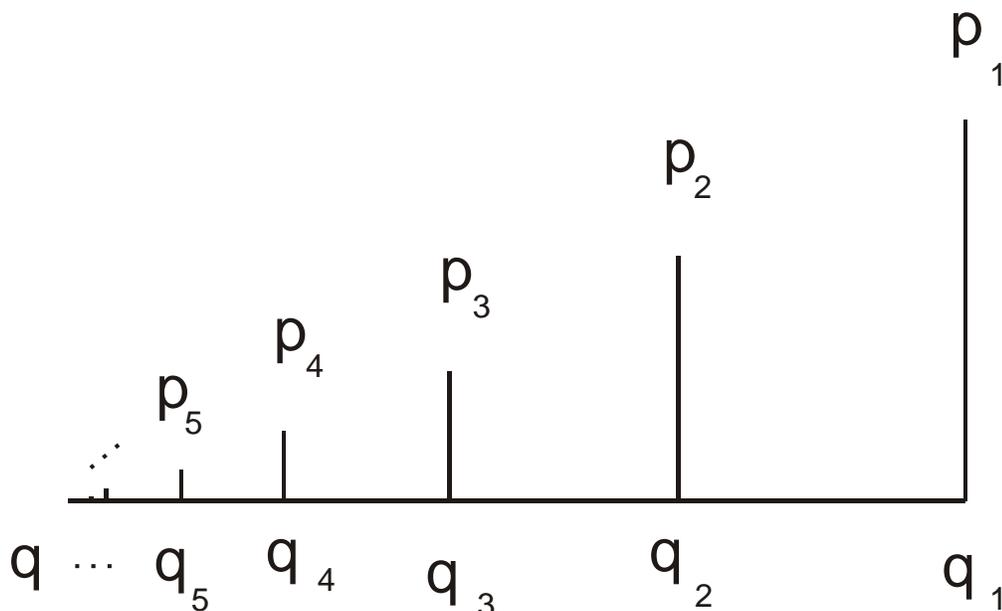


Figura 4.1: El peine Nulo

Demostración. Sea $\{U_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$ una cubierta de subconjuntos abiertos de X para A y sea $\alpha_0 \in I$ tal que $p \in U_{\alpha_0}$. Por ser U_{α_0} un abierto en X , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset U_{\alpha_0}$. Como $\lim A_n = \{p\}$, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$, $H(A_n, \varepsilon) < \varepsilon$. Por definición que para cualquier $n \geq N$, $A_n \subset N(\varepsilon, \{p\}) = B_\varepsilon(p)$.

Para toda $k \in \{1, \dots, N-1\}$, el conjunto A_k es cerrado en X y por lo tanto un compacto. Como $A_k \subset A$ y siendo $\{U_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$ una cubierta de subconjuntos cerrados de X para A , tenemos que $\{U_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de subconjuntos cerrados de X para A_k .

Por lo tanto para toda $k \in \{1, \dots, N-1\}$, existe un subconjunto finito I_k de I tal que $A_k \subset \bigcup_{\alpha \in I_k} U_\alpha$.

Entonces $I_0 = I_1 \cup \dots \cup I_{N-1} \cup \{\alpha_0\}$, es un subconjunto finito de I tal que $A \subset \bigcup_{\alpha \in I_0} U_\alpha$. Esto demuestra que A es compacto y termina la demostración

de este lema. ■

Lema 90 *Si Y es un peine Nulo, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = (\bigcup_{m \neq n} p_m q_m) \cup \{q\}$ es un compacto en Y .*

Demostración. Por la propiedad (2) de la Definición 88, tenemos que $\{p_m q_m\}_{m \neq n}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de Y , que convergen a $\{q\}$. Por el Lema 89, obtenemos que el conjunto A_n es un subconjunto compacto de Y . ■

Lema 91 *Siguiendo la notación de la Definición 88, para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $p_n q_n - \{q_n\}$ es abierto y cerrado en $Y - qq_1$.*

Demostración. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ el arco $p_n q_n$ es un cerrado en Y y se tiene que $p_n q_n \cap qq_1 = \{q_n\}$. Entonces $p_n q_n \cap (Y - qq_1) = p_n q_n - \{q_n\}$ es un cerrado en $Y - qq_1$.

Por otro lado, por la Definición 88, tenemos que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n q_n \cup qq_1$ y que para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_m q_m \cap qq_1 = \{q_m\}$. De manera que $Y - qq_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{q_n\})$.

Sea $B_n = A_n \cap (Y - qq_1) = [\bigcup_{m \neq n} (p_m q_m \cup \{q\})] \cap [\bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{q_n\})] = \bigcup_{m \neq n} (p_m q_m - \{q_m\})$.

Por el Lema 90, A_n es un cerrado en X , lo cual implica que B_n es un cerrado en $Y - qq_1$, por lo tanto el complemento de B_n en $Y - qq_1$ es abierto en $Y - qq_1$, y éste es igual a $(X - B_n) \cap (Y - qq_1) = (p_n q_n \cup qq_1) \cap (Y - qq_1) = p_n q_n - \{q_n\}$. Por lo tanto $p_n q_n - \{q_n\}$ es abierto en $Y - pq_1$, y el lema queda demostrado. ■

Teorema 92 *Si Y es un peine Nulo entonces Y es un ∞ -odo.*

Demostración. Seguimos la notación de la Definición 88. Por la propiedad (5), tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_n q_n \cap q q_1 = \{q_n\}$, por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{q_n\}) \subset Y - q q_1$. Ahora por la propiedad (4) de la Definición 88, los conjuntos $p_n q_n - \{q_n\}$ y $p_m q_m - \{q_m\}$ son ajenos si $n \neq m$. Por el Lema 91, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $p_n q_n - \{q_n\}$ es un conjunto conexo abierto y cerrado del espacio $Y - q q_1$, y por lo tanto una componente de $Y - p q_1$. Entonces como Y y $q q_1$ son dos subcontinuos de Y tales que la diferencia $Y - q q_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{q_n\})$ contiene una infinidad de componentes, concluimos que Y es un ∞ -odo. ■

Definición 93 Una continuo Y es una **dendrita** F_w , si existe un punto $p \in Y$, una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y y una sucesión de arcos $\{p q_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada arco $p q_n$ une al punto p con el punto q_n , tales que:

$$(1) Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} p q_n.$$

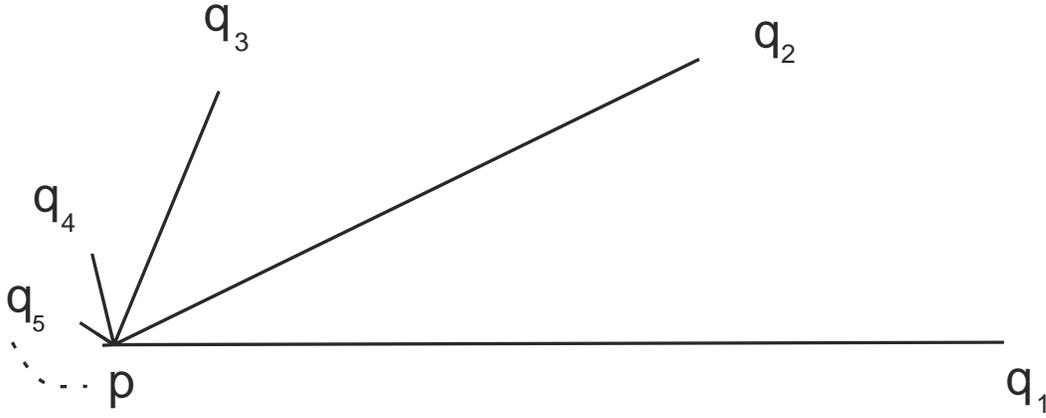
$$(2) p q_n \rightarrow \{p\}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

$$(3) p q_n \cap p q_m = \{p\} \text{ para toda } n \neq m \text{ (Ver Figura 4.2).}$$

Lema 94 Si Y es una dendrita F_w , entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = \bigcup_{m \neq n} p q_m$ es un compacto en Y .

Demostración. Por la propiedad (2), de la Definición 93, tenemos que $\{p q_m\}_{m \neq n}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X . Por el Lema 89, tenemos que el conjunto $\{p\} \cup \left(\bigcup_{m \neq n} p q_m \right) = \bigcup_{m \neq n} p q_m = A_n$ es un subconjunto compacto de X . ■

Lema 95 Usamos la notación de la Definición 93. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $p q_n - \{p\}$ es abierto y cerrado en $Y - \{p\}$

Figura 4.2: Dendrita F_w .

Demostración. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, pq_n es un cerrado en X , además por la propiedad (3), de la Definición 93 tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $pq_n \cap \{p\} = \{p\}$. Entonces $pq_n \cap (Y - \{p\}) = pq_n - \{p\}$ es un cerrado en $Y - \{p\}$. Por otro lado, por el Lema 94, A_n es cerrado en Y , de manera que $Y - A_n$ es abierto en X , pero $Y - A_n = (\bigcup_{m=1}^{\infty} pq_m \cup \{p\}) - (\bigcup_{n \neq m} pq_m) = pq_n - \{p\}$.

Hemos demostrado que $pq_n - \{p\}$ es abierto en Y , como $(pq_n - \{p\}) \cap (Y - \{p\}) = pq_n - \{p\}$, tenemos que $pq_n - \{p\}$ es cerrado en $Y - \{p\}$ y el lema queda demostrado. ■

Teorema 96 Si Y es una dendrita F_w , entonces Y es un ∞ -odo.

Demostración. Usamos la notación de la Definición 93. Por la propiedad (3), tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $pq_n \cap \{p\} = \{p\}$. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} (pq_n - \{p\}) \subset Y - \{p\}$. Por la propiedad (3) de la Definición 93, los conjuntos $pq_n - \{p\}$ y $pq_m - \{p\}$ son ajenos si $n \neq m$. Por el Lema 95, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $pq_n - \{p\}$ es un abierto, conexo y cerrado del espacio $Y - \{p\}$, y por lo tanto una componente de $Y - \{p\}$. Entonces Y y $\{p\}$ son dos subcontinuos de Y tales que la diferencia $Y - \{p\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (pq_n - \{p\})$ contiene una infinidad de componentes. Concluimos que Y es un ∞ -odo. ■

4.3. Dendroides

En esta sección demostraremos que los dendroides, continuos que definiremos más adelante, satisfacen que su hiperespacio $F_2(X)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(X)$. Esto lo haremos de la siguiente manera: primero consideraremos a los dendroides que son localmente conexos, demostraremos que son dendritas y entonces, el Teorema 87, nos proporcionará automáticamente lo que queremos. Después, apoyándonos en un resultado de [11], demostraremos que los dendroides que no son localmente conexos contienen un peine Nulo o una dendrita F_w , de manera que contienen un ∞ -odo y entonces aplicando el Teorema 23 y el Teorema 26, podremos concluir lo que deseamos.

Definición 97 *Un continuo X es **unicoherente** si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 98 *Un continuo es **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.*

Definición 99 *Un continuo X es un **dendroide** si es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

Lema 100 *Si X es un dendroide, entonces X es únicamente arco conexo.*

Demostración. Sean dos puntos distintos $a, b \in X$. Supongamos que A_1 y A_2 son dos arcos en X que unen al punto p con el punto q , entonces $A_1 \cup A_2$ es un subcontinuo de X . Lo que debemos demostrar es que $A_1 = A_2$. Para esto notemos que $\{a, b\} \subset A_1$ y $\{a, b\} \subset A_2$, por lo tanto $\{a, b\} \subset A_1 \cap A_2$. Como X es hereditariamente unicoherente, tenemos que $A_1 \cap A_2 \in C(X)$. Como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, tenemos que $A_1 \cap A_2$ es un subarco de A_1 que contiene al conjunto de sus dos puntos extremos $\{a, b\}$, de modo que $A_1 \cap A_2 = A_1$. Análogamente se demuestra que $A_1 \cap A_2 = A_2$. Por lo tanto $A_1 = A_2$, lo cual demuestra este lema. ■

Lema 101 *Si X es un dendroide, entonces X no contiene curvas cerradas simples.*

Demostración. Si X es un dendroide que contiene curvas cerradas simples, entonces X no es únicamente arco conexo, lo cual es una contradicción al Lema 100. Por lo tanto X no contiene curvas cerradas simples. ■

Teorema 102 *Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.*

Demostración. Vamos a demostrar las dos implicaciones:

(\Leftarrow) Sea X un dendroide localmente conexo. Por el Lema 101 tenemos que X no contiene curvas cerradas simples. Por lo tanto concluimos que X es una dendrita.

(\Rightarrow) Si X es una dendrita, entonces X es un continuo localmente conexo y por el Teorema 13 tenemos que X es arco conexo. Entonces sólo nos resta demostrar que X es hereditariamente unicoherente.

Para esto sean A y B dos subcontinuos de X y supongamos que $A \cap B$ es desconexo. Como $A \cap B$ es cerrado en X , entonces existen dos cerrados no vacíos H y K tales que $A \cap B = H \cup K$ y $H \cap K = \emptyset$. Como X es un espacio normal, existen dos abiertos U y V en X tales que $H \subset U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $A \cap (X - (U \cup V))$ y $B \cap (X - (U \cup V))$ son compactos en X . Además $A \cap (X - (U \cup V)) \cap B = (A \cap B) - (U \cup V) = \emptyset$. Así que, de nuevo por la normalidad de X podemos concluir que existen abiertos W y Z tales que $(A - (U \cup V)) \subset W$, $(B - (U \cup V)) \subset Z$ y $W \cap Z = \emptyset$.

Tenemos entonces que $U \cup V \cup W$ es abierto y $A \subset U \cup V \cup W$. Sea G la componente conexa de $U \cup V \cup W$ que contiene a A . Como X es localmente conexo podemos concluir que G es abierto y así, por el Teorema 14, G es arco conexo.

Análogamente tenemos que F es la componente conexa de $U \cup V \cup Z$ que contiene a B , entonces F es arco conexo. Sean p un punto en H y q un punto

en K . Como $H \cap K = \emptyset$, tenemos que $p \neq q$. Como $p \in H \subset A \subset G$ y $q \in K \subset A \subset G$, entonces existe un arco $A_1 \subset G$ que une a p con q . Luego como $p \in H \subset B \subset F$ y $p \in K \subset B \subset F$, entonces existe un arco $A_2 \subset F$ que une a p con q .

Si tuvieramos que $A_1 = A_2$, tendríamos que $A_1 = A_2 \subset G \cap F \subset (U \cup V \cup W) \cap (U \cup V \cup Z) \subset U \cup V$; pero $U \cup V$ es desconexo, así que $A_1 = A_2 \subset U$ o $A_1 = A_2 \subset V$, pero $p \in H \cap A_1 \subset U \cap A_1$ y $q \in K \cap A_1 \subset V \cap A_1$, lo cual es una contradicción. Por lo que $A_1 \neq A_2$.

Como A_1 y A_2 son dos arcos distintos que comienzan y terminan en los mismos puntos concluimos que $A_1 \cup A_2$ contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción pues X es una dendrita. Por lo tanto $A \cap B$ es conexo. Así obtenemos que X es un dendroide. ■

Teorema 103 *Si X es un dendroide localmente conexo, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demostración. Sea X un dendroide localmente conexo, entonces por el Lema 102, X es una dendrita. El Teorema 87 asegura que para toda dendrita X , existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$. Por lo tanto este teorema queda demostrado. ■

Antes de estudiar a los dendroides que no son localmente conexos, consideraremos las siguientes definiciones y resultados.

Definición 104 *Sea X un dendroide, un **semipeine** en X es un subcontinuo Y de X que contiene:*

- (a) un arco $A \subset Y$,
- (b) dos puntos $r, q \in A$ con $r \neq q$,

(c) una sucesión de puntos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $Y - A$,

(d) una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en A ,

Tales que:

$$(i) Y = A \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n q_n : n \in \mathbb{N}\}},$$

$$(ii) r_n \rightarrow r, q_n \rightarrow q,$$

(iii) $r_1 q_1, r_2 q_2, \dots$, son arcos ajenos dos a dos,

(iv) $r_n q_n \cap A = \{q_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 4.3, donde A es el arco que une a r con q).

Teorema 105 *Si X es un dendroide que contiene un semipeine, entonces X contiene un peine Nulo.*

Demostración. Supongamos que la métrica de X es d . Sea Y un subcontinuo de X que satisface las condiciones de la Definición 104. Podemos encontrar un arco no degenerado kk_1 , contenido en A y con extremos k y k_1 , y una subsucesión de puntos distintos $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$, tal que $k_n \rightarrow k$ y además $kk_n \subset kk_m$, para cualesquiera $n > m$.

Como la sucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$, entonces podemos considerar la subsucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ que corresponde a los mismos índices, y por lo tanto $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen lo siguiente:

$$(i) s_n \rightarrow r, k_n \rightarrow k,$$

(ii) $s_1 k_1, s_2 k_2, \dots$, son arcos ajenos dos a dos,

$$(iii) s_n k_n \cap kk_1 = \{k_n\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

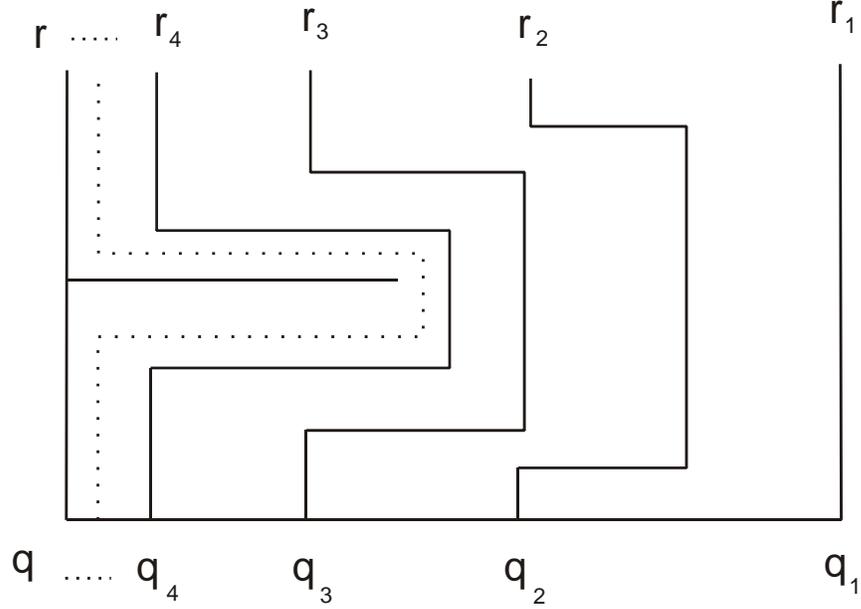


Figura 4.3: Ejemplo de un Semipeine.

Afirmación 1. Existe un subconjunto W en Y para el cual se tiene lo siguiente:

- (a) Existe un arco no degenerado contenido en W con extremos k y k_1 .
- (b) Existe una sucesión de puntos distintos $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en el arco kk_1 .
- (c) Existe una sucesión de puntos distintos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en la diferencia $W - kk_1$.

Demostración. Para cada $n > 1$ sea $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow X$ un encaje tal que $\alpha_n([0, 1]) = s_n k_n$, y $\alpha_n(0) = k_n$. Entonces por continuidad para toda $n > 1$, existe $t_n > 0$ tal que $\alpha_n([0, t_n]) \subset B_{\frac{1}{n}}(k_n)$. Denotemos $p_n = \alpha_n(t_n)$ para toda $n > 1$.

$$\text{Definimos: } W = \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} p_n k_n \right) \cup k k_1.$$

Para obtener (b), recordemos que el arco $kk_1 \subset A$, lo cual implica, por la propiedad (iii), que $p_n k_n \cap k k_1 = \alpha_n([0, t_n]) \cap k k_1 \subset r_n k_n \cap A = \{k_n\}$, para toda $n > 1$, entonces $p_n k_n \cap k k_1 = \{k_n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para obtener

(c), si $n \in \mathbb{N}$, entonces $p_n \in W - kk_1$, esto implica que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ está contenida en el conjunto $W - kk_1$. Esto termina la demostración de la *Afirmación 1*.

Afirmación 2. El conjunto W satisface lo siguiente:

- (1) $W = (\bigcup_{n=2}^{\infty} p_n k_n) \cup kk_1$
- (2) $p_n \rightarrow k, k_n \rightarrow k, p_n k_n \rightarrow \{k\}$, cuando $n \rightarrow \infty$.
- (3) $kk_n \subset kk_m$ para cualesquiera $n < m$.
- (4) $p_n k_n \cap p_m k_m = \emptyset$, para toda $n \neq m$.
- (5) $kk_1 \cap p_n k_n = \{k_n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La propiedad (1) se tiene por definición ya que $W = (\bigcup_{n=2}^{\infty} p_n k_n) \cup kk_1$.

Veamos que se satisface (2). Notemos que, por la elección de la sucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos automáticamente que $k_n \rightarrow k$. Ahora demostremos que $\lim p_n k_n = \{k\}$. Para esto sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\lim k_n = k$ podemos elegir $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $d(k, k_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Vamos a demostrar que $H(p_n k_n, \{k\}) < \varepsilon$ si $n \geq N$, es decir debemos verificar que $p_n k_n \subset N(\varepsilon, \{k\})$ y $\{k\} \subset N(\varepsilon, p_n k_n)$.

Sea $n \geq N$, entonces por construcción de la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos que $p_n k_n \subset B_{\frac{1}{n}}(k_n)$. De donde, si $x \in p_n k_n$, entonces $d(x, k) \leq d(x, k_n) + d(k_n, k) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto $p_n k_n \subset B_{\varepsilon}(k) = N(\varepsilon, \{k\})$. Por otro lado, por la elección de N , tenemos que si $n \geq N$, entonces $d(k, k_n) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, lo cual demuestra que $\{k\} \subset N(\varepsilon, p_n k_n)$. De las contenciones $p_n k_n \subset N(\varepsilon, \{k\})$ y $\{k\} \subset N(\varepsilon, p_n k_n)$, y por el Lema 4, concluimos que $H(p_n k_n, \{k\}) < \varepsilon$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Lo cual demuestra que $p_n k_n \rightarrow \{k\}$. Una consecuencia de este resultado es que $p_n \rightarrow k$, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $p_n \in p_n k_n \rightarrow \{k\}$. Esto termina la demostración de que se satisface la propiedad (2).

Notemos que la propiedad (3) se cumple por la elección de la sucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para obtener (4) observemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $p_n k_n \subset r_n k_n$, y como los arcos $r_1 k_1, r_2 k_2, \dots$, son ajenos dos a dos se tiene que si $n \neq m$, entonces $p_n k_n \cap p_m k_m \subset r_n k_n \cap r_m k_m = \emptyset$. Esto demuestra

(4).

Por último, recordemos que la propiedad (5) se demostró inmediatamente después de definir el conjunto W . Esto termina la demostración de la *Afirmación 2*.

Afirmación 3. W es un subcontinuo de Y .

Demostración. Por construcción, el conjunto W es no vacío y conexo por arcos. Por (2) de la *Afirmación 2*, tenemos que $\{p_m k_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de cerrados en X , que converge al punto $\{k\}$. Por el Lema 89, tenemos que el conjunto $A_n = (\bigcup_{m=1}^{\infty} p_m k_m) \cup \{k\}$ es un cerrado en X . Ahora como kk_1 es un subconjunto cerrado de Y , tenemos que $kk_1 \cup A_n = kk_1 \cup [(\bigcup_{m=1}^{\infty} p_m k_m) \cup \{k\}] = W$ es un subconjunto cerrado de Y . Por lo tanto siendo, X compacto, concluimos que W es compacto. Esto termina la demostración de la *Afirmación 3*.

De las *Afirmaciones 1, 2 y 3*, concluimos que W satisface las condiciones de la Definición 88, es decir, W es un peine Nulo contenido en X . Así este teorema queda demostrado. ■

Definición 106 Sea X un dendroide, una *semiescoba* en X es un subcontinuo Y de X que contiene:

- (a) un arco $A \subset Y$,
- (b) dos puntos $r, p \in X$ con $r \neq p$,
- (c) una sucesión de puntos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y - A$.

tales que:

$$(i) Y = A \cup \overline{\bigcup \{pr_n : n \in \mathbb{N}\}},$$

$$(ii) r_n \rightarrow r,$$

$$(iii) pr_n \cap pr_m = \{p\}, \text{ si } n \neq m,$$

(iv) $pr_n \cap A = \{p\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 4.4, donde A es el arco que une a p con q).

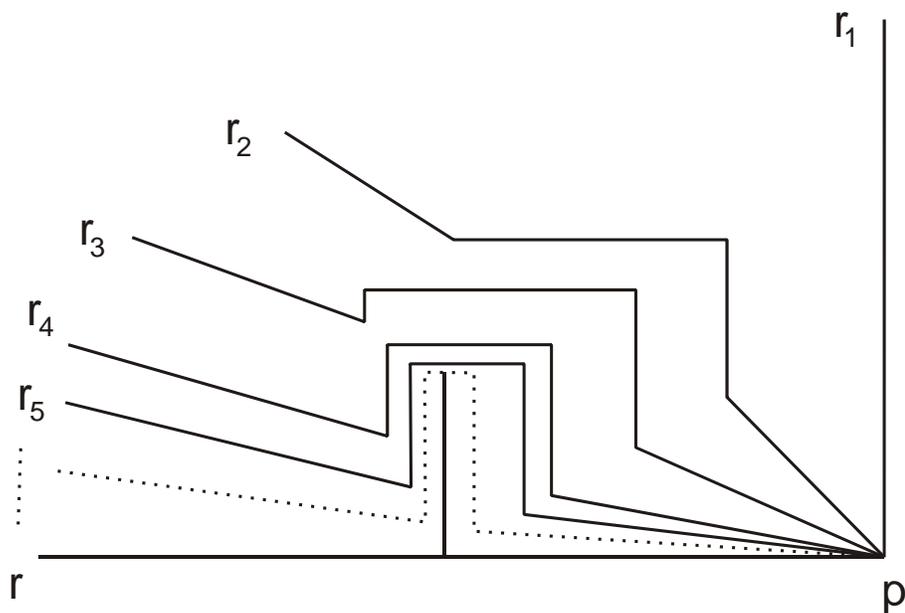


Figura 4.4: Ejemplo de Una Semiescoba.

Teorema 107 *Si X es un dendroide que contiene una semiescoba, entonces X contiene una copia topológica de F_w .*

Demostración. Supongamos que la métrica de X es d . Sea Y una semi-escoba en X y siguiendo la notación de la Definición 106, probaremos lo siguiente.

Afirmación 1. Existe un conjunto W en X , un punto $p \in W$, una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en W y una sucesión de arcos $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada arco pq_n une al punto p con el punto q_n .

Demostración. Tomemos como p al punto r que nos proporciona la Definición 106. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow X$ un encaje tal que $\alpha_n([0, 1]) = pr_n$ y $\alpha(0) = p$. Por la continuidad de α_n , para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que $\alpha_n([0, t_n]) \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$. Denotemos por q_n al punto $\alpha_n(t_n)$, para toda $n > 1$.

Definimos $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n$.

Con esto hemos construido una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en W y una sucesión de arcos $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$, también contenida en W , donde cada arco pq_n une al punto p con el punto q_n . Esto termina la demostración de la *Afirmación 1*.

Afirmación 2. El conjunto W satiface lo siguiente.

- (1) $W = (\bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n)$,
- (2) $q_n \rightarrow p$ y $pq_n \rightarrow \{p\}$, cuando $n \rightarrow \infty$,
- (3) $pq_n \cap pq_m = \{p\}$, para cualesquiera $n \neq m$.

Demostración. La propiedad (1) se tiene por definición ya que $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n$.

Veamos que se satisface (2). Primero demostremos que $\lim pq_n = \{p\}$. Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Vamos a demostrar que $H(pq_n, \{p\}) < \varepsilon$, si $n \geq N$, es decir debemos verificar que $pq_n \subset N(\varepsilon, \{p\})$ y $\{p\} \subset N(\varepsilon, pq_n)$.

Sea $n \geq N$, entonces por construcción de la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos que $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$. De donde si, $x \in pq_n$, entonces $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto $pq_n \subset B_{\varepsilon}(p) = N(\varepsilon, \{p\})$. Por otro lado, como para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene

que $p \in pq_n$ entonces $\{p\} \subset N(\varepsilon, pq_n)$. De las contenciones $pq_n \subset N(\varepsilon, \{p\})$ y $\{p\} \subset N(\varepsilon, pq_n)$, concluimos que $H(pq_n, \{p\}) < \varepsilon$, lo cual demuestra que $pq_n \rightarrow \{p\}$.

Una consecuencia de este resultado es que $q_n \rightarrow p$, ya que, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $q_n \in pq_n \rightarrow \{p\}$. Esto termina la demostración de que se satisface la propiedad (2).

Notemos que la propiedad (3) se cumple ya que, por (iii) de la Definición 106, tenemos que para cualesquiera $n \neq m$, $pq_n \cap pq_m = \alpha_n([0, t_n]) \cap \alpha_m([0, t_m]) \subset pr_n \cap pr_m = \{p\}$, entonces $pq_n \cap pq_m = \{p\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto termina la demostración de la *Afirmación 2*.

Afirmación 3. W es un subcontinuo de X .

Demostración. Por construcción el conjunto W es no vacío y conexo por arcos. Por la propiedad (2) de la *Afirmación 2*, tenemos que $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cerrados en X que converge al punto $\{p\}$. Por el Lema 89, obtenemos que $\{p\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n = W$ es compacto en X . Esto termina la demostración de la *Afirmación 3*.

De las *Afirmaciones 1, 2 y 3*, obtenemos que W es un subcontinuo de X que satisface las condiciones de la Definición 93, es decir, W es una copia topológica de F_w . ■

La demostración del siguiente teorema no la incluiremos en este trabajo, pero su prueba se puede consultar en [11, Teorema 6.10, p. 62].

Teorema 108 *Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si X no contiene ni semipeines ni semiescobas.*

Lema 109 *Sea X un dendroide no localmente conexo, entonces X contiene un semipeine o una semiescoba.*

Demostración. Como X no es localmente conexo, por el Lema 102, tenemos que X no puede ser una dendrita. Esto quiere decir que X no satisface el Teorema 108. Por lo tanto X contiene un semipeine o una semiescoba. ■

Teorema 110 *Sea X un dendroide no localmente conexo, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demostración. Por ser X un dendroide no localmente conexo por el Lema 109, X contiene un semipeine o una semiescoba.

En el caso en X contiene un semipeine, el Teorema 105 asegura que X contiene un peine Nulo. Por otro lado, el Teorema 92 nos dice que todo peine Nulo es un ∞ -odo. Esto demuestra que X contiene un ∞ -odo.

Cuando X contiene una semiescoba, el Teorema 107 asegura que X contiene una copia topológica de F_w . Por otro lado, el Teorema 96 nos dice que toda dendrita F_w es un ∞ -odo. Esto demuestra que X contiene un ∞ -odo.

Lo anterior implica que todo dendroide no localmente conexo X contiene un ∞ -odo. Recordemos que en el Teorema 23 demostramos que si un continuo X contiene un ∞ -odo, entonces su hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Por último, como $F_2(X)$ es un continuo, por el Teorema 26, tenemos que si X es un dendroide no localmente conexo, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$. Esto termina la demostración de este teorema. ■

Notemos que los resultados de esta sección se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema 111 *Si X es un dendroide, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demostración. Cuando X es un dendroide localmente conexo, el resultado se tiene por el Teorema 103. Cuando X es un dendroide no localmente conexo, entonces el resultado se sigue del Teorema 110. ■

Capítulo 5

Continuos Localmente Conexos

En este capítulo vamos a trabajar con los continuos localmente conexos, para esto vamos a introducir algunas definiciones y probaremos varios resultados que facilitarán la clasificación de estos continuos.

Nota 112 *Recordemos que todo continuo localmente conexo es conexo por arcos (Teorema 13).*

Teorema 113 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es localmente arco conexo.*

Demostración. Sea x un punto en X y U_x una vecindad abierta en X tal que $x \in U_x$. Por ser X localmente conexo existe un abierto y conexo V_x en X tal que $x \in V_x \subset U_x$. El Teorema 14 asegura que todo abierto y conexo en un continuo localmente conexo es arco conexo, por lo tanto V_x es arco conexo. Esto demuestra que X es localmente arco conexo. ■

Recordemos la definición de orden de Menger-Urysohn (Definición 53).

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Sea β un cardinal. Decimos que A es de **orden menor o igual** que β en X , y escribimos $ord(A, X) \leq \beta$, si para cualquier $U \in \tau$ tal que $A \subset U$, existe $V \in \tau$ tal que $A \subset V \subset U$ y $|\partial V| \leq \beta$.

Decimos que A es de orden β en X , y escribimos $ord(A, X) = \beta$, si $ord(A, X) \leq \beta$ y $ord(A, X) \neq \alpha$ para toda $\alpha < \beta$. En el caso en que $A = \{p\}$ para algún punto $p \in X$, vamos a escribir simplemente $ord(p, X)$, en lugar de la expresión $ord(\{p\}, X)$.

Definición 114 Sea X un continuo, entonces el conjunto de puntos en X que tienen orden mayor o igual a tres lo denotaremos por $\mathcal{O}(X)$.

Lema 115 Sea X un continuo localmente conexo para el cual todo arco L de X satisface que $|L \cap \mathcal{O}(X)| < \infty$. Entonces para cualquier arco pr con extremos p y r , se tiene que existe un subarco de L con extremos p y q tal que $pq \subset pr$ y $(pq - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$.

Demostración. Sea $L = pr$ un arco con extremos p y r . Podemos suponer que $(pr - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) \neq \emptyset$ pues de lo contrario no hay nada que demostrar. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un encaje tal que $\alpha([0, 1]) = pr$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = r$. Como $|pr \cap \mathcal{O}(X)| < \infty$, por ser α continua y $[0, 1]$ compacto, tenemos que existe $s = \min\{t \in (0, 1] : \alpha(t) \in \mathcal{O}(X)\}$. Tomemos $q = \alpha(\frac{s}{2})$, entonces obtenemos que el arco $\alpha([0, \frac{s}{2}]) = pq \subset pr$ y además tenemos que $(pq - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$, esto termina la demostración del lema. ■

Definición 116 Un espacio topológico Hausdorff (X, τ) es **completamente normal** si y sólo si para cualesquiera dos conjuntos $A, B \subset X$ tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U_A y V_B tales que $A \subset U_A$ y $B \subset V_B$.

Lema 117 Sea X un continuo, entonces X es completamente normal.

Demostración. Como X es un continuo, entonces X es un espacio métrico. Por [8, p. 134], tenemos que todo espacio métrico es completamente normal. Por lo tanto X es completamente normal. ■

Nota 118 Si X es un continuo y $x \in X$, es el vértice de un tríodo simple contenido en X , por la Nota 54, tenemos que $\text{ord}(x, X) \geq 3$.

Lema 119 Sea X un continuo localmente conexo para el cual todo arco L de X satisface que $|L \cap \mathcal{O}(X)| < \infty$. Si existe un punto $p \in X$, tal que para cualquier vecindad U de p y para cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe un m -odo simple μ_p , con vértice p contenido en U tal que $(\mu_p - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$, entonces existe una sucesión de arcos $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

- (1) $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$, para toda $n \in \mathbb{N}$,
- (2) $pq_k \cap pq_j = \{p\}$, para cualesquiera $k < j$,
- (3) $(pq_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que la métrica de X es d . Vamos a construir, por inducción, una sucesión de arcos que satisfacen las condiciones de este lema.

Para la base de inducción, para $m = 1$, consideremos $B_1(p)$, que es un abierto en X . Como X es localmente arco conexo, existe un abierto y conexo por arcos V_1 en X , tal que $p \in V_1 \subset B_1(p)$. Por ser X no degenerado, existe un punto $q_1 \in V_1 - \{p\}$. Sea pq_1 un arco que una al punto p con el punto q_1 , tal que $pq_1 \subset V_1$. Por el Lema 115, podemos suponer que $(pq_1 - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Notemos que el arco pq_1 , por construcción, satiaface las condiciones (1) y (3); y por vacuidad la condición (2).

Supongamos que para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$, existen arcos pq_1, \dots, pq_{n-1} tales que:

- (1) $pq_k \subset B_{\frac{1}{k}}(p)$, para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$,
- (2) $pq_k \cap pq_j = \{p\}$, para cualesquiera $k < j$ con $k, j \in \{1, \dots, n-1\}$,
- (3) $(pq_k - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$, para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Para construir el enesimo arco, consideremos $B_{\frac{1}{n}}(p)$, que es una vecindad de p . Entonces, por hipótesis para n , existe un n -odo simple $\mu_p = pr_1 \cup \dots \cup pr_n$, con vértice p contenido en $B_{\frac{1}{n}}(p)$ tal que $(\mu_p - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Como el conjunto $pq_1 \cup \dots \cup pq_{n-1}$ es un $(n-1)$ -odo simple con vértice p ,

ajeno al conjunto $\mathcal{O}(X)$, y μ_p es un n -odo simple con vértice p , ajeno al conjunto $\mathcal{O}(X)$, entonces existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $pr_k \cap pq_j = \{p\}$ para toda $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Renombremos al arco pr_k como pq_n , para terminar el paso inductivo, debemos demostrar que el arco pr_k satisface (recordemos que las condiciones que vamos a mencionar, los arcos pq_1, \dots, pq_{n-1} , ya las satisfacen):

- (1) $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$,
- (2) $pq_n \cap pq_j = \{p\}$, para toda $j \in \{1, \dots, n-1\}$,
- (3) $(pq_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$.

Entonces, la parte (1) se tiene, pues el arco $pq_n \subset \mu_p \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$. La parte (2) se tiene gracias a la elección del arco $pr_k = pq_n$, ya que el arco pq_n es tal que $pr_n \cap pq_j = \{p\}$, para toda $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Por último, la parte (3) se tiene pues el arco $pq_n \subset \mu_p$ y el n -odo simple μ_p es tal que $(\mu_p - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$.

Así terminamos la demostración del paso inductivo y la prueba de este lema. ■

Lema 120 *Sea X un continuo localmente conexo, si existe un punto $p \in X$ y una sucesión de arcos $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:*

- (1) $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$, para toda $n \in \mathbb{N}$,
 - (2) $pq_k \cap pq_j = \{p\}$, para cualesquiera $k < j$,
- entonces X contiene una copia topológica del continuo F_w .

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n$. De esto notemos que tenemos lo siguiente; existe un punto $p \in Y$, una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y y una sucesión de arcos $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada arco pq_n une al punto p con el punto q_n .

Afirmación 1. $pq_n \rightarrow \{p\}$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Si $n \geq N$, entonces el arco $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p) \subset B_{\varepsilon}(p) = N(\varepsilon, \{p\})$, así también se tiene que $\{p\} \subset N(\varepsilon, pq_n)$. Esto demuestra que para toda $n \geq N$, $H(\{p\}, pq_n) < \varepsilon$ y termina la demostración de esta afirmación.

Afirmación 2. El conjunto Y es un subcontinuo de X .

Demostración. Como Y es conexo, no vacío y no degenerado, sólo basta demostrar que Y es compacto. Por la *Afirmación 1*, tenemos que $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados en X que convergen al punto p , entonces por el Lema 89, tenemos que el conjunto $(\bigcup_{n=1}^{\infty} pq_n) \cup \{p\} = Y$ es compacto.

Para terminar la prueba de que Y es el la copia topológica del continuo F_w que andamos buscando (ver Definición 93), sólo debemos mencionar que, por la propiedad (2) de las hipótesis, tenemos que $pq_k \cap pq_j = \{p\}$, para cualesquiera $k < j$. ■

Lema 121 Sean X un continuo localmente conexo, pq un arco, que une al punto p con el punto q , tal que $(pq - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$; y U una vecindad abierta y arco conexa de p , tal que $q \notin U$. Si $r \in U - \{pq\}$, entonces todo arco $pr \subset U$, que una al punto p con el punto r , satisface que $pq \cap pr = \{p\}$.

Demostración. Sea un arco $pr \subset U$, que una al punto p con el punto r y supongmos que $|pq \cap pr| > 1$. Consideremos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un encaje tal que $\gamma([0, 1]) = pr$, $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = r$. Por la continuidad de γ y por la compacidad de $[0, 1]$, tenemos que existe $t_0 = \max\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in pq\}$. Como $r \notin pq$ y $|pq \cap pr| > 1$, tenemos que $0 < t_0 < 1$. Por lo tanto el conjunto $pq \cup \gamma([t_0, 1])$ es un tríodo simple en X con vértice $\gamma(t_0) \in pq$. Por la Nota 118, sabemos que $\text{ord}(\gamma(t_0), X) \geq 3$ y esto contradice el hecho que $(pq_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Por lo tanto $pq \cap pr = \{p\}$. ■

Nota 122 Sean X un continuo y $p \in X$, si $\text{ord}(p, X) = \infty$, esto quiere decir lo siguiente: para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto U_n en X tal que $p \in U_n$ y para cualquier abierto V en X tal que $p \in V \subset U_n$, se tiene que $|\partial V| > n$.

Lema 123 Sea X un continuo localmente conexo para el cual todo arco L de X satisface que $|L \cap \mathcal{O}(X)| < \infty$. Si existe un punto $p \in X$ tal que $\text{ord}(p, X) = \infty$, entonces para cualquier vecindad abierta U de p y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un n -odo simple μ_p , con vértice p contenido en U tal que $(\mu_p - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$.

Demostración. Sea U una vecindad abierta de p , por ser X localmente arco conexo, podemos suponer que U es arco conexo. Vamos a demostrar, por inducción, que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un n -odo simple con las propiedades requeridas.

Para la base de inducción, para $n = 1$, por ser X no degenerado, existe un punto $q_1 \in U - \{p\}$. Sea pq_1 un arco que una al punto p con el punto q_1 , tal que $pq_1 \subset V_1$. Por el Lema 115, podemos suponer que $(pq_1 - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Entonces el arco pq_1 es un 1-odo simple con vértice p , tal que $pq_1 \subset U$ y $(pq_1 - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Esto termina la base de inducción.

Supongamos que existe, para $n - 1$, un $(n - 1)$ -odo simple $\mu = pq_1 \cup \dots \cup pq_{n-1}$, contenido en U con vértice p tal que $(\mu - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Por la Nota 122, para el número natural n , existe una vecindad abierta U_n de p , tal que para cualquier abierto V tal que $p \in V \subset U_n$, entonces $|\partial V| > n$. Podemos suponer lo siguiente:

- (a) $q_k \notin U_n$, para toda $k \in \{1, \dots, n - 1\}$.
- (b) U_n es arco conexo.

Razón. Sea $r = \min\{d(p, q_k) : k \in \{1, \dots, n - 1\}\}$, por ser X localmente arco conexo, existe una vecindad abierta W de p arco conexo, tal que $W \subset B_r(p) \cap U_n$. Si V es una vecindad abierta de p tal que $V \subset W$, entonces $V \subset U_n$, lo cual implica que $|\partial V| > n$. Entonces podemos trabajar con U_n como W que satisface (a) y (b).

Sea $j \in \mathbb{N}$, tal que $\overline{B_{\frac{1}{j}}(p)} \subset U_n$ y para toda $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, sea $r_k \in pq_k - \{p, q_k\}$ tal que $pr_k \subset B_{\frac{1}{j}}(p)$. Notemos que los conjuntos $A = \bigcup_{k=1}^{n-1} (pr_k - \{r_k\})$ y $B = \bigcup_{k=1}^{n-1} (r_kq_k - \{r_k\})$ son tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces por el Lema 117, como X es completamente normal, existen dos abiertos ajenos M y N , tales que $A \subset M$ y $B \subset N$. Consideremos $M_n = M \cap B_{\frac{1}{j}}(p)$, que es una vecindad abierta de p tal que $A \subset M_n \subset U_n$, por lo tanto $|\partial M_n| > n$. Ahora vamos a demostrar que existe $q_n \in \partial M_n$ tal que $q_n \notin \mu$.

Si $x \in A$, entonces $x \in M_n$, así x no puede estar en ∂M_n . Si $x \in B$, tenemos que $x \in N$, que es un abierto ajeno a M_n , por lo tanto $x \notin \partial M$. Observemos que, para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$, para cualquier vecindad U_k de r_k , existen $s_k \in pr_k$ y $t_k \in r_kq_k$ tales que $s_k, t_k \in U_k$. Esto demuestra que $\{r_1, \dots, r_{n-1}\} \subset \partial M_n$. Como $|\partial M_n| > n$, tenemos que existe $q_n \in \partial M_n$ tal que $q_n \notin \mu$. Como $q_n \in \partial M_n \subset \overline{B_{\frac{1}{j}}(p)} \subset U_n$, tenemos que, por ser U_n arco conexo, existe un arco pq_n , que une al punto p con el punto q_n , contenido en U_n , por el Lema 115, podemos suponer que $(pq_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Adicionalmente, como $q_k \notin U_n$, para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$, por el Lema 121, tenemos que el arco pq_n es tal que $pq_n \cap pq_k = \{p\}$, para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Con esto, obtenemos que $\mu_n = \mu \cup pq_n$ es un n -odo simple con vértice p , que por construcción satisface que $\mu_n \subset U$ y $(\mu_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Esto termina la demostración del paso inductivo y así mismo la demostración de este lema. ■

Lema 124 *Sea X un continuo localmente conexo para el cual todo arco L de X satisface que $|L \cap \mathcal{O}(X)| < \infty$. Si $|\mathcal{O}(X)| = \infty$ entonces existe un punto $p \in X$ tal que para cualquier vecindad abierta U de p y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un n -odo simple μ_p , con vértice p contenido en U tal que $(\mu_p - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$.*

Demostración. Como $|\mathcal{O}(X)| = \infty$, existe un punto p en X y una sucesión de puntos ajenos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\lim r_n = p$. Sea U una vecindad abierta de p , por ser X localmente arco conexo, podemos suponer que U es arco conexa. Vamos a demostrar, por inducción, que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un n -odo simple con las propiedades requeridas.

Para la base de inducción, para $n = 1$, como $\lim r_n = p$, existe una $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $r_{N_1} \in U$. Tomamos $q_1 = r_{N_1}$, como U es arco conexa, podemos tomar pq_1 un arco que una al punto p con el punto q_1 , tal que $pq_1 \subset U$. Por el Lema 115, podemos suponer que $(pq_1 - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Entonces el arco pq_1 es un 1-odo simple con vértice p , tal que $pq_1 \subset U$ y $(pq_1 - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Esto termina la base de inducción.

Supongamos que existe, para $n - 1$, un $(n - 1)$ -odo simple $\mu = pq_1 \cup \dots \cup pq_{n-1}$, contenido en U con vértice p tal que $(\mu - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Sea $U_n \subset U$, una vecindad abierta y arco conexa de p , tal que $q_k \notin U_n$, para toda $k \in \{1, \dots, n - 1\}$. Como $\lim r_n = p$, existe una $N_n \in \mathbb{N}$, tal que $r_{N_n} \in U_n$. Tomamos $q_n = r_{N_n}$ y observemos que $q_n \notin \mu$ ya que $q_n = r_{N_n} \in \mathcal{O}(X)$ y $(\mu - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Como U es arco conexa, podemos tomar pq_n un arco que una al punto p con el punto q_n , tal que $pq_n \subset U_n$. Por el Lema 115, podemos suponer que $(pq_1 - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Adicionalmente, como $q_k \notin U_n$, para toda $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, por el Lema 121, tenemos que el arco pq_n es tal que $pq_n \cap pq_k = \{p\}$, para toda $k \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Con esto, obtenemos que $\mu_n = \mu \cup pq_n$ es un n -odo simple con vértice p , que por construcción satisface que $\mu_n \subset U$ y $(\mu_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Esto termina la demostración del paso inductivo y así mismo la demostración de este lema. ■

Teorema 125 *Sea X un continuo localmente conexo para el cual todo arco L de X satisface que $|L \cap \mathcal{O}(X)| < \infty$. Si X satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- (i) *Existe un punto $p \in X$ tal que $\text{ord}(p, X) = \infty$.*
- (ii) *$|\mathcal{O}(X)| = \infty$.*

Entonces X contiene una copia topológica del continuo F_w .

Demostración. En el caso (i) y en el caso (ii), por los Lemas 123 y 124, respectivamente, tenemos que existe un punto $p \in X$, tal que para cualquier vecindad U de p y para cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe un m -odo simple μ_p , con vértice p contenido en U tal que $(\mu_p - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$. Por el Lema 119, existe una sucesión de arcos $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

- (1) $pq_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p)$, para toda $n \in \mathbb{N}$,
- (2) $pq_k \cap pq_j = \{p\}$, para cualesquiera $k < j$,
- (3) $(pq_n - \{p\}) \cap \mathcal{O}(X) = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, cuando X satisface la condición (i) o la condición (ii), por el Lema 120, tenemos que X contiene una copia topológica del continuo F_w .

■

Lema 126 *Sea X es un continuo localmente conexo. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos distintos en X , tal que $\lim x_n = x$, para alguna $x \in X$, entonces existe una sucesión de subconjuntos abiertos y arco conexos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:*

- (1) $x_n \in V_n \subset B_{\frac{1}{n}}(x_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $V_n \cap V_m = \emptyset$, para cualesquiera $n < m$.

Demostración. Vamos a construir los elementos de la sucesión por inducción.

Para $n = 1$, como los conjuntos $A_1 = \{x_1\}$ y $B_1 = \{x_2, x_3, x_4, \dots\} \cup \{x\}$, son tales que $\overline{A_1} \cap B_1 = A_1 \cap \overline{B_1} = \emptyset$. Por ser X completamente normal (Lema 117), existen dos abiertos ajenos M_1 y N_1 , tales que $A_1 \subset M_1$ y $B_1 \subset N_1$. Como X es localmente arco conexo, existe un abierto arco conexo V_1 , tal que $x_1 \in V_1 \subset M_1 \cap B_1(x_1)$. Entonces, el abierto V_1 por construcción, satisface (1) y por vacuidad satisface (2). Esto demuestra la base de inducción.

Supongamos que existen $n - 1$ abiertos V_1, \dots, V_{n-1} en X , tales que:

- (1) $x_k \in V_k \subset B_{\frac{1}{k}}(x_k)$, para toda $k \in \{1, \dots, n - 1\}$.
- (2) $V_k \cap V_j = \emptyset$, para cualesquiera $k < j$ con $k \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Notemos que los conjuntos $A_n = \{x_n\}$ y $B_n = \{x\} \cup \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}$, son tales que $\overline{A_n} \cap B_n = A_n \cap \overline{B_n} = \emptyset$. Por ser X completamente normal, existen dos abiertos ajenos M_n y N_n , tales que $A_n \subset M_n$ y $B_n \subset N_n$. Como X es localmente arco conexo, existe un abierto arco conexo V_n , tal que $x_n \in V_n \subset M_n \cap B_{\frac{1}{n}}(x_n)$. Entonces, el abierto V_n por construcción, satisface (1). Si $k < n$, entonces $V_k \subset B_n \subset N_n$, y como $V_n \subset M_n$, por ser M_n y N_n ajenos, obtenemos que para cualquier $k < n$, $V_n \cap V_k = \emptyset$, esto prueba que V_n satisface (2). Con esto terminamos la prueba del paso inductivo.

Tomando la sucesión de abiertos arcoconexos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, que obtenemos de la construcción anterior, terminamos la prueba del lema. ■

Nota 127 *Sea $x \in X$ tal que $\text{ord}(x, X) \geq 3$, esto quiere decir por definición que $\text{ord}(x, X) \not\leq 2$ y esto implica que existe un abierto U tal que $x \in X$ y para cualquier abierto V tal que $x \in V \subset U$, entonces $|\partial V| \geq 3$.*

Lema 128 *Sea X un continuo localmente conexo. Si L es un arco en X y existe un punto $x \in L$, que no es extremo de L , tal que $\text{ord}(x, X) \geq 3$, entonces para todo abierto U tal que $x \in U$, existe una vecindad abierta V de x tal que $V \subset U$ y $\partial V \cap (X - L) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea U_x un abierto que contiene a x y que satisface las condiciones del la Nota 127. Supongamos lo contrario a la afirmación de este lema, entonces existe un abierto W_x de X tal que para cualquier abierto W de X con $x \in W \subset W_x$, se tiene que $\partial W \subset L$. Tomemos $V_x = W_x \cap U_x$, consideremos un encaje $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha([0, 1]) = L$ y sea $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\alpha(t_0) = x$, como x no es punto extremo de L tenemos que $0 < t_0 < 1$. Por continuidad existen $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tal que $x \in \alpha([t_1, t_2]) \subset V_x$, y podemos suponer que $0 < t_1 < t_0 < t_2 < 1$.

Notemos que los conjuntos $B = \alpha([0, t_1]) \cup \alpha((t_2, 1])$ y $A = \alpha((t_1, t_2))$ son tales que $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$ y además $x \in A$. Como X es completamente normal podemos encontrar dos abiertos ajenos M y N tales que $A \subset M$ y $B \subset N$. De esto se tiene que $A \subset M \cap V_x$ y como $M \cap V_x$ es un abierto tal que $x \in M \cap V_x$ y $M \cap V_x \subset V_x$, entonces $\partial(M \cap V_x) \geq 3$, por otro lado $M \cap V_x \subset W_x$ lo cual implica que $\partial(M \cap V_x) \subset L$. Ahora notemos que si $y \in B$, entonces $y \in N \subset X - M$, lo cual implica que $y \notin \partial(M \cap V_x)$. De igual forma, si $y \in A$, entonces $y \in M \cap V_x$, lo cual demuestra que $y \notin \partial(M \cap V_x)$, entonces sumando esto con lo anterior, tenemos que $\partial(M \cap V_x) \subset \{\alpha(t_1), \alpha(t_2)\}$, lo que es una contradicción. Así concluimos la demostración de este lema. ■

Teorema 129 *Si X es un continuo localmente conexo para el cual existe un arco L tal que $|L \cap \mathcal{O}(X)| = \infty$, entonces X contiene un ∞ -odo.*

Demostración. Como $|L \cap \mathcal{O}(X)| = \infty$, entonces existe un punto $p \in L$ y una sucesión de puntos distintos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $\lim x_n = p$ y $x_n \in L \cap \mathcal{O}(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que, para toda $n \in \mathbb{N}$, el punto x_n no es extremo de L . Por el Lema 126, existe una sucesión de subconjuntos abiertos y arco conexos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

- (1) $x_n \in V_n \subset B_{\frac{1}{n}}(x_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $V_n \cap V_m = \emptyset$, para cualesquiera $n < m$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como el $\text{ord}(x, X) \geq 3$ por el Lema 128, existe una vecindad abierta U_n de x tal que $U_n \subset V_n$ (podemos suponer además que $\overline{U_n} \subset V_n$), y existe un punto $q_n \in \partial U_n - L$. Como $q_n \in \partial U_n \subset \overline{U_n} \subset V_n$, por ser V_n arco conexo, existe $x_n q_n$ un arco contenido en V_n , que une el punto x_n con el punto q_n . Consideremos un encaje $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha_n([0, 1]) = x_n q_n$, $\alpha_n(0) = q_n$ y $\alpha_n(1) = x_n$. Por la continuidad de α_n y la compacidad de $[0, 1]$, existe $t_0^n = \min\{t \in [0, 1] : \alpha_n(t) \in L\}$, como $q_n \notin L$, tenemos que $t_0^n > 0$. De esta forma, si $\alpha_n(t_0^n) = p_n$, el arco $p_n q_n = \alpha_n([0, t_0^n])$ es no degenerado y satisface que $p_n q_n \cap L = \{p_n\}$.

Afirmación 1. $\lim p_n q_n = \{p\}$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim x_n = p$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier $n \geq N$, $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$. Además podemos suponer que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $x \in p_n q_n$, como por construcción $p_n q_n \subset V_n$, y por (1), $V_n \subset B_{\frac{1}{n}}(x_n)$, entonces $d(x, p) \leq d(x, x_n) + d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Esto demuestra que el arco $p_n q_n \subset B_\varepsilon(p) = N(\varepsilon, \{p\})$. Análogamente obtenemos que $\{p\} \subset N(\varepsilon, p_n q_n)$, para toda $n \geq N$. Por lo tanto para toda $n \geq N$, $H(p_n q_n, \{p\}) < \varepsilon$, esto termina la demostración de esta afirmación.

Afirmación 2. El conjunto $A = L \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n q_n)$ es un subcontinuo de X .

Demostración. Por la *Afirmación 1*, tenemos que $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X tales que $\lim p_n q_n = \{p\}$, entonces por el Lema 89, obtenemos que $\{p\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n q_n)$ es un compacto de X . Como L es un compacto de X , obtenemos que $\{p\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n q_n) \cup L = A$ es un subconjunto compacto de X . Para terminar la demostración de esta afirmación, sólo falta mencionar que, por construcción, el conjunto A es conexo y no vacío.

Afirmación 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $p_n q_n - \{p_n\}$ es un abierto y cerrado en el espacio $A - L$.

Demostración. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ el arco $p_n q_n$ es un cerrado en X y se tiene que $p_n q_n \cap L = \{p_n\}$. Entonces $p_n q_n \cap (A - L) = p_n q_n - \{p_n\}$ es un cerrado en $A - L$.

Como $A = (\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n q_n) \cup L$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_n q_n \cap L = \{p_n\}$, entonces $A - L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{p_n\})$.

Sean $A_n = (\bigcup_{n \neq m} p_m q_m) \cup \{p\}$ y $B_n = A_n \cap (Y - q q_1) = [\bigcup_{m \neq n} (p_m q_m \cup \{p\})] \cap [\bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{p_n\})] = \bigcup_{m \neq n} (p_m q_m - \{p_m\})$.

Por el Lema 90, A_n es un cerrado en X , lo cual implica que B_n es un cerrado en $A - L$, por lo tanto el complemento de B_n en $A - L$ es abierto en $A - L$, y éste es igual a $(X - B_n) \cap (A - L) = (p_n q_n \cup L) \cap (A - L) = p_n q_n - \{p_n\}$. Por lo tanto $p_n q_n - \{p_n\}$ es abierto en $A - L$.

Por construcción para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $p_n q_n - \{p_n\} \subset V_n$ y como por (2) tenemos que $V_n \cap V_m = \emptyset$, para cualesquiera $n < m$. Entonces los conjuntos $p_n q_n - \{p_n\}$ y $p_m q_m - \{p_m\}$ son ajenos si $n \neq m$. Por la *Afirmación* (3), para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $p_n q_n - \{p_n\}$ es un conexo abierto y cerrado del espacio $Y - q q_1$, y por lo tanto una componente de $Y - p q_1$. Entonces como A y L son dos subcontinuos de X tales que la diferencia $A - L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n q_n - \{p_n\})$ contiene una infinidad de componentes, concluimos que X contiene un ∞ -odo. ■

Nota 130 Recordemos que en el Capítulo III de este trabajo, se realizó un análisis completo para las gráficas finitas y se demostró que cualquier gráfica finita G , que no sea la circunferencia, satisface que su hiperespacio $F_2(X)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(X)$.

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [9, Teorema 9, p.144].

Teorema 131 Un continuo X es una gráfica finita si y sólo si X satisface las siguientes dos condiciones:

- (a) $ord(x, X) < \infty$ para toda $x \in X$.
- (b) $ord(x, X) \leq 2$ excepto para un número finito de puntos en X .

Con los resultados anteriores, estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente Teorema:

Teorema 132 *Si X es un continuo localmente conexo y no es gráfica finita, entonces X contiene un ∞ -odo.*

Demostración. Si X es un continuo localmente conexo que no es una gráfica finita; por el Teorema 131, obtenemos que X satisface alguna de las dos condiciones:

- (a) Existe un punto $p \in X$ tal que $ord(p, X) = \infty$.
- (b) Para una infinidad de puntos $x \in X$, se tiene que $ord(x, X) \geq 3$.

Ahora observemos que si para algún arco L de X , se tiene que L contiene una infinidad de puntos de orden mayor igual a tres de X , entonces por el Lema 129, obtenemos que X contiene un ∞ -odo.

Por lo tanto podemos suponer que X es un continuo localmente conexo que no contiene algún arco con una infinidad de puntos de orden mayor o igual a tres. Como, además estamos suponiendo que X no es una gráfica finita, entonces X debe satisfacer la condición (a) o la condición (b) y por el Teorema 125, obtenemos que X contiene una copia topológica del continuo F_w . Por el Teorema 96, el continuo F_w es un ∞ -odo, y con esto terminamos la prueba de este teorema. ■

Teorema 133 *Si X es un continuo localmente conexo y no es gráfica finita, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 132 tenemos que X contiene un ∞ -odo. Ahora recordemos que en el Teorema 23, demostramos que si un continuo X contiene un ∞ -odo, entonces su hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Por último, como $F_2(X)$ es un continuo, por el Teorema 26 tenemos si X es un continuo localmente conexo y no es gráfica finita, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \rightarrow C(X)$. Esto termina la demostración de este teorema. ■

Por ultimo observemos que los resultados que hemos obtenido a lo largo del trabajo se pueden resumir en el siguiente Teorema:

Teorema 134 *La circunferencia es el único continuo localmente conexo para el cual su hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en su hiperespacio $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 133, sabemos que todo continuo localmente conexo, que no sea gráfica finita, satisface que su hiperespacio $F_2(X)$ se puede encajar en su hiperespacio $C(X)$. Ahora en lo que respecta a las gráficas finitas, el Teorema 84, nos dice que la única gráfica finita para la cual su hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en su hiperespacio $C(X)$ es la circunferencia.

Esto termina la demostración de este Teorema. ■

Bibliografía

- [1] A. García M., *Introducción a la Topología de Conjuntos*, Serie Sociedad Matemática Mexicana, Trillas, México 1971.
- [2] A. Illanes, Cells and Cubes in Hyperspaces, *Fund. Math.*, 130 (1988), 5765.
- [3] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [4] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Providence, RI, 1942, reprinted with corrections 1971.
- [5] J. Dugunji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1989.
- [6] J. Hocking, *Topology*, Addison Wesley, 1961.
- [7] J. J. Charatonik, *On ramifications points in the classical sence*, *Fund. Math.* 51 (1962), 229-252.
- [8] Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach, J.r., *Counter Examples in Topology*, Dover, 1970.
- [9] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, Besel and Hong Kong, 1992.
- [10] S. B. Nadler, Jr., *Dimension theory: an Introduction whit Exercises*, Sociedad Matemática Mexicana, Número 18, 2002.
- [11] V. Martínez, *El Hiperespacio de Continuos con la Topología Producto*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 1998.