



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la Propiedad del Punto Fijo en
Hiperespacios de Continuos.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Rafael Alcaraz Barrera

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Macías Álvarez



2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Sobre la Propiedad del Punto Fijo en Hiperespacios de Continuos"

realizado por **Alcaraz Barrera Rafael**, con número de cuenta **098141917**, quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Sergio Macías Álvarez	
Co-Tutor Propietario	Dra.	Patricia Pellicer Covarrubias	
Propietario	Dra.	María Isabel Puga Espinosa	
Suplente	Dra.	María de Jesús López Toriz	
Suplente	Dr.	Adalberto García Maynez y Cervantes	

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F. a 28 de junio del 2007.
**EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**



M. EN C. AGUSTÍN MONTIVEROS PINEDA

DE
MATEMÁTICAS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

*Para mis ángeles guardianes: Mayte (Q.E.P.D.) y
Paola.*

Agradecimientos.

*“Creative Mathematical work
is not just the privilege of a few geniuses;
it can be a natural activity of any of us
with sufficient desire and freedom.”*

Hassler Whitney.

A la UNAM, por acogerme en sus aulas desde la preparatoria. A la Facultad de Ciencias y sus profesores por la formación que ahí he recibido, no solamente en lo académico. En especial agradezco al Dr. Armando García Martínez y al Dr. Alejandro Garciadiego Dantan, por su apoyo y sus consejos durante mi carrera. Así como a las personas del grupo de Teoría de Continuos y del Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca.

A Sergio, por acompañarme durante toda la carrera y ser fundamental en mi formación como matemático. Además de aconsejarme y ser mi amigo. Te agradezco todas tus enseñanzas, sobre todo, enseñarme a que debo de confiar en mi mismo. Espero no defraudarte.

A mi familia, por siempre apoyarme y aconsejarme. En especial a mis padres, mis hermanos y a los que en camino han decidido serlo.

A mi familia en El Salvador, que han decidido acompañarme en este camino.

A mis amigos no matemáticos, por mostrarme que hay un mundo afuera de las matemáticas, además de compartir conmigo algo más que una cerveza.

A mis amigos y compañeros de la Facultad, con quienes he podido compartir matemáticas, y con quienes he visto otras cosas de esta vida. No se que habría hecho sin su ayuda (no sólo en L^AT_EX). Gracias por confiar en mi.

A quienes vieron como empecé mi aventura y no vieron como terminó, este trabajo es de ustedes.

A tí, que aún cuando me causas conflicto, no me has abandonado y me has dado cosas muy hermosas.

Gracias

Rafael.

Índice general

Agradecimientos.	iii
Introducción.	1
1. Preliminares.	3
1.1. Espacios Métricos.	3
1.2. Continuos.	13
1.3. Hiperespacios.	18
1.4. Propiedad del punto fijo.	23
2. Hiperespacios con la Propiedad del Punto Fijo.	27
2.1. Primeros ejemplos.	27
2.2. Continuos Localmente Conexos.	29
2.3. Continuos Tipo Arco.	33
2.4. Continuos Tipo Círculo.	44
2.5. Límites Inversos de Dendritas.	48
2.6. Dendroides.	57
2.7. Continuos Hereditariamente Indescomponibles.	60
3. Hiperespacios sin la Propiedad del Punto Fijo.	75
3.1. Un primer ejemplo.	75
3.2. Un cono sin la propiedad del punto fijo.	78
3.3. El ejemplo de Nadler y Rogers.	83

4. Preguntas Abiertas.	91
4.1. Sobre 2^X y $C(X)$	91
4.2. Sobre $F_n(X)$ y $C_n(X)$	95
4.3. Sobre algunos otros hiperespacios.	97
Bibliografía.	99

Introducción.

Una de las propiedades topológicas que más ha interesado dentro de la Teoría de los Continuos es la propiedad del punto fijo. A pesar de la sencillez de la propiedad, en algunos casos (en casi todos) es muy difícil determinarla.

La teoría de Hiperespacios tiene sus orígenes en el siglo XX cuando F. Hausdorff y L. Vietoris los definieron. Es posible demostrar que, cuando X es un continuo, sus hiperespacios también son continuos.

Así, de manera natural, podemos plantear las siguientes preguntas:

¿Si X es un continuo, entonces cuándo sus hiperespacios tienen la propiedad del punto fijo?

¿Si X es un continuo con la propiedad del punto fijo, entonces se preservará esta propiedad al tomar hiperespacios?

El presente trabajo, basado principalmente en el Capítulo 6 de las notas del curso sobre la propiedad del punto fijo impartido por el profesor Sam B. Nadler, Jr. en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México en enero del 2004 [30], da respuestas parciales a estas preguntas.

En el primer capítulo daremos algunas herramientas de espacios métricos, continuos e hiperespacios que serán útiles a lo largo del estudio realizado. En el segundo capítulo, veremos algunos continuos tales que sus hiperespacios tienen la propiedad del punto fijo, en algunos casos, podremos dar respuesta afirmativa a la segunda pregunta. En el tercer capítulo veremos que en general, la respuesta a esta esa pregunta es negativa. Incluimos un capítulo con algunas preguntas que permanecen abiertas. Algunos de los teoremas serán expuestos sin demostración, en su caso, siempre habrá una referencia apropiada donde podrán encontrarse dichas demostraciones.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Espacios Métricos.

1.1.1 Definición. Un *espacio métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ es una función que, para cada $x, y, z \in X$ satisface:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (*reflexividad*);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*simetría*);
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualdad del triángulo*).

A la función d la llamamos *función distancia* o *métrica* para el espacio métrico (X, d) .

1.1.2 Ejemplos. Algunos ejemplos de funciones distancia son:

1. Sea $X = \mathbb{R}$ y definimos $d(x, y) = |x - y|$. A d la conocemos como la *métrica usual para $\mathbb{R}$* . [6, Ejemplo 1.C.4, 1]
2. Sea $X = \mathbb{R}^2$ y definimos $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$. A d la llamamos la *métrica del taxista* [6, Ejemplo 1.C.4, 3].

3. Sea X un conjunto no vacío. Dadas x y $x' \in X$ definimos $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ como:

$$d(x, x') = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq x'; \\ 0, & \text{si } x = x'. \end{cases}$$

Esta función d es una métrica y se le conoce como la *métrica discreta* [6, Ejemplo 1.C.4, 5].

1.1.3 Observación. Dado un espacio métrico (X, d) , existe siempre una métrica d' que genera la misma topología que d , con la propiedad de que $d'(x, x') \leq 1$. A esta métrica la conocemos como *métrica acotada*.

1.1.4 Definición. Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Definimos la *bola abierta con centro en x de radio ϵ* , denotada como $B_\epsilon^d(x)$ como el conjunto $B_\epsilon^d(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$.

1.1.5 Definición. Sean X un espacio métrico con métrica d y Y un subconjunto de X . Definimos la *frontera de Y* , denotada como $Fr(Y)$, al conjunto $\{x \in X : \text{para toda } \epsilon > 0, B_\epsilon^d(x) \cap Y \neq \emptyset \text{ y } B_\epsilon^d(x) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}$. Definimos la *cerradura de Y* , denotada por $Cl_X(Y)$ como $Y \cup Fr(Y)$.

1.1.6 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos con métricas d y d' , respectivamente, y $f : X \rightarrow Y$ una función. Dada $x \in X$, decimos que f es una *función continua en x* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta^d(x)) \subset B_\epsilon^{d'}(f(x))$. Decimos que f es *continua* si f es continua en x para toda $x \in X$.

1.1.7 Proposición. Sean X y Y dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para cada abierto V de Y , se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto de X .

Demostración. Supongamos que f es una función continua. Sean V un abierto de Y , $x \in f^{-1}(V)$ y $\epsilon > 0$ tales que $B_\epsilon^{d'}(f(x)) \subset V$. Como f es continua existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta^d(x)) \subset B_\epsilon^{d'}(f(x))$. De donde $x \in B_\delta^d(x) \subset f^{-1}(V)$.

$f^{-1}(B_\epsilon^{d'}(f(x))) \subset f^{-1}(V)$. Por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Ahora, sea V un subconjunto abierto de Y y supongamos que $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X . Tomemos $x \in X$ de tal forma que $f(x) \in V$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^{d'}(f(x)) \subset V$. Observemos que $x \in f^{-1}(B_\epsilon^{d'}(f(x)))$. Como $f^{-1}(B_\epsilon^{d'}(f(x)))$ es abierto en X , existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(f(x))$. Esto implica que $f(x) \in f(B_\delta^d(x)) \subset B_\epsilon^{d'}(f(x))$. Por tanto, f es una función continua.

Q.E.D.

1.1.8 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos. Decimos que una función continua $e : X \rightarrow Y$ es un *encaje de X en Y* , si e es inyectiva y $e^{-1} : e(X) \rightarrow X$ es continua.

1.1.9 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos. Decimos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es *abierta (cerrada)*, si para cualquier abierto (cerrado) U de X se cumple que $f(U)$ es abierto (cerrado) en Y .

1.1.10 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos. Decimos que X es *homeomorfo a Y* si existe una función continua y biyectiva $h : X \rightarrow Y$ tal que $h^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua. A h la llamamos un *homeomorfismo*.

1.1.11 Definición. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{P}$ una propiedad. Decimos que $\mathcal{P}$ es una *propiedad topológica* o un *invariante topológico* si siempre que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ entonces cualquier espacio Y homeomorfo a X la tiene.

1.1.12 Definición. Sean X un espacio topológico y U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X . Decimos que U y V *forman una separación de X* si $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.

1.1.13 Definición. Decimos que un espacio topológico X es *conexo* si no existe una separación de X . Si la separación de X existe diremos que X es *disconexo*.

1.1.14 Lema. Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva y X es conexo, entonces Y es conexo.

Demostración. Sean X un espacio conexo, Y un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Demostraremos que Y es conexo. Supongamos que Y es desconexo. Entonces existen dos subconjuntos abiertos no vacíos, U y V de Y tales que $Y = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como f es una función continua, entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos de X . Como f es suprayectiva, entonces $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Además, dado que $U \cap V = \emptyset$, se tiene que, $\emptyset = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, lo que implica que X no es conexo.

Q.E.D.

1.1.15 Corolario. *La conexidad es una propiedad topológica.*

1.1.16 Definición. Sea X un espacio métrico. Dados dos puntos x y $y \in X$, una *trayectoria de x a y* es una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Un *arco en X* es un encaje $e : [0, 1] \rightarrow X$.

1.1.17 Definición. Decimos que un espacio métrico X es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera x y $y \in X$, existe una trayectoria de x a y y X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos distintos x y $y \in X$ pueden ser unidos por un arco.

1.1.18 Proposición. *Si X es un espacio métrico arcoconexo, entonces X es conexo.* [6, Ejercicio 2.C.5 pág. 53]

1.1.19 Definición. Sean X un espacio métrico y B un subconjunto de X . Una *cubierta para B* es una colección de subconjuntos de X , $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, tal que $B \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$. Una *subcubierta de B* es una subcolección de $\mathcal{C}$ que también es una cubierta de B . Si los elementos de la cubierta $\mathcal{C}$ son abiertos de X entonces la llamaremos *cubierta abierta*.

1.1.20 Definición. Decimos que un espacio métrico X es *compacto* si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

1.1.21 Lema. *Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva y X es compacto, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sean X un espacio métrico y compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva a un espacio métrico Y . Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de Y . Como f es una función continua, $f^{-1}(C_\alpha)$ es un subconjunto abierto de X para toda $\alpha \in \Lambda$. Además, $\{f^{-1}(C_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de X . Como X es compacto, existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^n (f^{-1}(C_{\alpha_i}))$. Como f es suprayectiva, observamos que: $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(C_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(C_{\alpha_i})) \subset \bigcup_{i=1}^n (C_{\alpha_i})$. Por lo tanto, Y es compacto.

Q.E.D.

1.1.22 Corolario. *La compacidad es un invariante topológico.*

1.1.23 Definición. Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de X . Decimos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a $x \in X$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon$.

1.1.24 Definición. Decimos que un espacio métrico X es *compacto por sucesiones*, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de X , existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge a un punto $x \in X$.

1.1.25 Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X . Definimos el *diámetro* de A , denotado por $\text{diám}(A)$ como:

$$\text{diám}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

1.1.26 Definición. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X . Decimos que un número $\lambda > 0$ es un *número de Lebesgue para la cubierta abierta* $\mathcal{U}$, si para cada subconjunto A de X tal que $\text{diám}(A) < \lambda$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$.

1.1.27 Teorema. *Si X es un espacio métrico y compacto por sucesiones, y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X , entonces existe un número de Lebesgue para $\mathcal{U}$ [6, Teorema 3.A.10 pág. 79].*

1.1.28 Lema. *En espacios métricos, es equivalente ser compacto a ser compacto por sucesiones [6, Teorema 3.A.11 pág. 80].*

1.1.29 Teorema. *Sean X y Y dos espacios métricos con métricas d y d' , respectivamente y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es una función continua en $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X convergente a x , la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en $x \in X$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X que converge a x . Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{\delta}^d(x)) \subset B_{\epsilon}^{d'}(f(x))$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_{\delta}^d(x)$. Esto implica que para toda $n \geq N$, $f(x_n) \in B_{\epsilon}^{d'}(f(x))$. Así $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

Ahora supongamos, por el contrario, que f no es continua en $x \in X$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$, $f(B_{\delta}^d(x)) \not\subset B_{\epsilon}^{d'}(f(x))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^d(x)$ tal que $f(x_n) \notin B_{\epsilon}^{d'}(f(x))$. Observemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(x)$.

Q.E.D.

1.1.30 Lema. *Sean X y Y espacios métricos y compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que converge a $x \in X$ se tiene que existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $f(x)$, entonces f es una función continua.*

Demostración. Supongamos que f no es continua en $x \in X$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $f(B_{\frac{1}{n}}^d(x)) \not\subset B_{\epsilon}^{d'}(f(x))$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^d(x)$ tal que $f(x_n) \notin B_{\epsilon}^{d'}(f(x))$. Observemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y que ninguna subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f es continua.

Q.E.D.

1.1.31 Definición. Un subconjunto A de un espacio métrico X es un *retracto* de X , si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para toda $a \in A$. A la función r se le llama *retracción*.

1.1.32 Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos una n -celda como:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

donde $\|\cdot\|$ representa a la norma de $\mathbb{R}^n$ y una n -esfera como:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

donde $\|\cdot\|$ representa a la norma en $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.1.33 Definición. Sean X y Y espacios métricos. Llamaremos *homotopía* a una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$.

1.1.34 Definición. Sean X y Y espacios métricos y f y $g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Decimos que f y g son *homotópicas* si existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$.

1.1.35 Definición. Sean X y Y espacios métricos. Decimos que X es *contraíble con respecto a Y* si toda función continua $f : X \rightarrow Y$ es homotópica a una función constante. Decimos que X es *contraíble* si la función identidad en X es homotópica a una función constante. Si Y es un subespacio de X , decimos que Y es *contraíble con respecto a X* si la función inclusión, $i : Y \rightarrow X$ donde $i(y) = y$ para toda $y \in Y$, es homotópica a una función constante.

1.1.36 Lema. Si X es un espacio métrico contraíble y $Y \subset X$ entonces Y es contraíble en X .

Demostración. Sea $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una función continua tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = c$ para toda $x \in X$ y alguna $c \in X$. Consideremos $H|_{Y \times [0, 1]}$. Para toda $y \in Y$, se cumple que $H(y, 0) = y$ y $H(y, 1) = c$. Por lo tanto, Y es contraíble en X .

Q.E.D.

1.1.37 Definición. Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos no vacíos. Definimos su *producto cartesiano*, denotado por $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ como:

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}.$$

1.1.38 Definición. Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos y consideremos su producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos la función $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow X_m$ dada por $\pi_m((x_n)_{n=1}^{\infty}) = x_m$. A esta función la llamamos la *m-ésima función proyección*.

1.1.39 Definición. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos y para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos la función proyección $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow X_m$. La familia $\mathcal{B} = \{\pi_m^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } X_m, m \in \mathbb{N}\}$ forma una subbase para la *topología producto* en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

1.1.40 Observaciones. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos. Si $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ tiene la topología producto, entonces:

1. Las funciones proyección $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow X_m$ son continuas para toda $m \in \mathbb{N}$ [6, págs. 151 y 152].
2. Las funciones proyección son abiertas para cada $m \in \mathbb{N}$ [6, Ejercicio 6.A.4 pág. 152].

1.1.41 Lema. Sean X un espacio métrico y $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos. Entonces $f : X \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es una función continua si y sólo si $\pi_m \circ f$ es una función continua para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que f es una función continua. Sea $m \in \mathbb{N}$. Como π_m es una función continua entonces $\pi_m \circ f$ es una función continua. Dado que $m \in \mathbb{N}$ es arbitraria, entonces $\pi_m \circ f$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $\pi_m \circ f$ es una función continua, para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea U un subconjunto abierto de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Mostraremos que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X . Por la Observación 1.1.40, se tiene que $\pi_m(U)$ es un conjunto abierto de X_m , para toda $m \in \mathbb{N}$. Llamemos U_m a $\pi_m(U)$. Como

$\pi_m \circ f$ es una función continua entonces $(\pi_m \circ f)^{-1}(U_m)$ es un subconjunto abierto de X . Observemos que $(\pi_m \circ f)^{-1}(U_m) = f^{-1}(\pi_m(U_m)) = f^{-1}(U)$. Por tanto, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X . Por la Proposición 1.1.7, f es una función continua.

Q.E.D.

1.1.42 Teorema. Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos con métricas acotadas. Definimos $\rho : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow [0, \infty)$ como:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

Entonces ρ es una métrica para $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ e induce la topología producto [6, Teorema 6.A.15 pág. 156].

Al siguiente Teorema, se le conoce como el Teorema de Tychonoff. Daremos una versión para productos numerables de espacios métricos.

1.1.43 Teorema. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos y compactos con métricas acotadas. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico y compacto [6, Teorema 6.A.11 pág. 154].

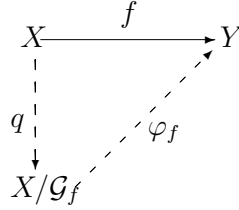
1.1.44 Teorema. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos conexos con métricas acotadas. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico conexo [6, Teorema 6.A.12 pág. 154].

1.1.45 Definición. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una partición de X . Definimos el *espacio cociente* $X/\mathcal{G}$ como el conjunto de los miembros de la partición.

1.1.46 Definición. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una partición de X . Definimos la *función cociente* q como $q : X \rightarrow X/\mathcal{G}$ dada por $q(x) = [x]$ donde $[x]$ denota al elemento de $\mathcal{G}$ que contiene a x .

1.1.47 Definición. Sean X un espacio métrico, $\mathcal{G}$ una partición de X y $q : X \rightarrow X/\mathcal{G}$ la función cociente. A la topología dada por $\mathcal{U} = \{U \subset X/\mathcal{G} : q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ la llamamos *la topología cociente para $X/\mathcal{G}$* [6, Ejercicio 8.A.2 pág. 193].

Consideremos ahora dos espacios métricos X y Y y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. La familia $\mathcal{G}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ forma una partición de X . Consideremos ahora el espacio cociente $X/\mathcal{G}_f$ y a $q : X \rightarrow X/\mathcal{G}_f$ la función cociente. Observemos que si $x \in X$ entonces $q(x) = [x] = f^{-1}(f(x))$. Así podemos definir la siguiente función: $\varphi_f : X/\mathcal{G}_f \rightarrow Y$ dada por $\varphi_f(\chi) = f(q^{-1}(\chi)) = f(x)$ donde $x \in q^{-1}(\chi)$.



1.1.48 Teorema. Sean X y Y espacios métricos. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva y que $X/\mathcal{G}_f$ tiene la topología cociente. Entonces $\varphi_f : X/\mathcal{G}_f \rightarrow Y$ es una función continua y biyectiva.

Demostración. Notemos que si x y $x' \in q^{-1}(\chi)$ donde $\chi \in X/\mathcal{G}_f$, entonces $f(x) = f(x')$. Lo cual implica que existe $y \in Y$ tal que $q^{-1}(\chi) = f^{-1}(y)$. De donde x y $x' \in f^{-1}(y)$. De aquí se sigue que $f(x) = y = f(y')$. Por tanto, φ_f está bien definida.

Veamos ahora que φ_f es continua. Sea U un subconjunto abierto de Y . Entonces $f^{-1}(U)$ es un abierto en X . Dado que $f^{-1}(U) = (\varphi_f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(\varphi_f^{-1}(U))$ y que $X/\mathcal{G}_f$ tiene la topología cociente, se tiene que $\varphi_f^{-1}(U)$ es abierto en $X/\mathcal{G}_f$ y, así, obtenemos lo deseado.

Para ver que φ_f es inyectiva tomemos χ y $\chi' \in X/\mathcal{G}_f$ tales que $\varphi_f(\chi) = \varphi_f(\chi')$. Entonces existen y y $y' \in Y$ tales que $q^{-1}(\chi) = f^{-1}(y)$ y $q^{-1}(\chi') =$

$f^{-1}(y')$ y, para cada $x \in q^{-1}(\chi)$ y para cada $x' \in q^{-1}(\chi')$, se tiene que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$. Como $\varphi_f(\chi) = \varphi_f(\chi')$ se tiene que $y = y'$, por tanto, φ_f es una función inyectiva.

Para ver que φ_f es suprayectiva sólo observemos que $\varphi_f \circ q = f$. Dado que f es suprayectiva se tiene que φ_f es suprayectiva.

Q.E.D.

1.1.49 Teorema. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces φ_f es un homeomorfismo.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto (cerrado) de $X/\mathcal{G}_f$. Dado que φ_f es continua y biyectiva, basta demostrar que $\varphi_f(U)$ es un conjunto abierto (cerrado) de Y . Como U es abierto (cerrado) de $X/\mathcal{G}_f$ se tiene que, $q^{-1}(U)$ es abierto (cerrado) de X . Dado que f es una función abierta (cerrada) $f(q^{-1}(U))$ es un conjunto abierto (cerrado) de Y . Observemos que $f(q^{-1}(U)) = \varphi_f(q(q^{-1}(U))) = \varphi_f(U)$. Por lo tanto, φ_f es un homeomorfismo.

Q.E.D.

1.1.50 Corolario. Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces φ_f es un homeomorfismo [6, Corolario 8.A.7 pág. 195].

1.2. Continuos.

1.2.1 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún continuo X .

1.2.2 Ejemplos. Algunos ejemplos de continuos son:

1. El intervalo $[0, 1]$.
2. La circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

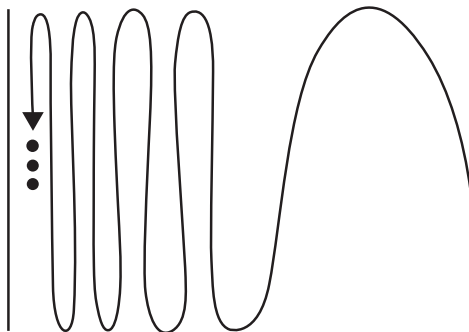


Figura 1.1: Curva sinoidal del topólogo.

3. Las n -celdas y las n -esferas.
4. Sea $\mathcal{S} = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \pi\}$. Entonces $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{S})$ es un continuo. A X lo llamamos la *curva sinoidal del topólogo*.

1.2.3 Corolario. Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de continuos, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo.

Demostración. Como $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de espacios métricos, entonces, por el Teorema 1.1.42, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico. Por el Teorema 1.1.43, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto. Finalmente, por el Teorema 1.1.44, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo.

Q.E.D.

1.2.4 Definición. Sea X un continuo. Decimos que X es *descomponible* si X se puede escribir como una unión de dos subcontinuos propios. A un continuo que no es descomponible lo llamamos *indescomponible*. Decimos que X es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

1.2.5 Definición. Sean X un continuo y $A \subset X$. Decimos que X es *irreducible con respecto a A* si ningún subcontinuo propio de X contiene a A .

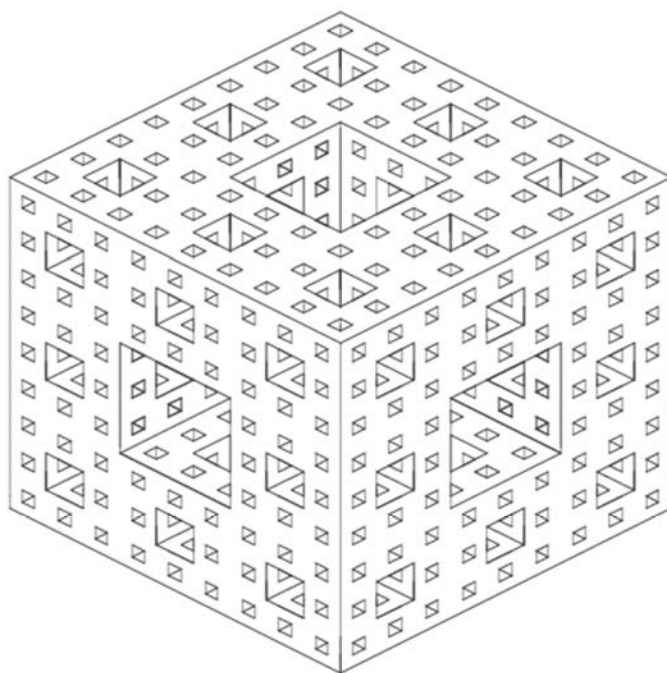


Figura 1.2: La curva universal de Menger.

Decimos que X es *irreducible* si X es irreducible con respecto a $\{p, q\}$ para algún par de puntos p y $q \in X$.

1.2.6 Definición. Sea X un continuo. Decimos que X es *unicoherente* si cada vez que A y B sean subcontinuos de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Decimos que X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

1.2.7 Definición. Sean X un espacio métrico y $p \in X$. Definimos la *componente de p en X* , denotada por C_p , como:

$$C_p = \bigcup \{ A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo} \}.$$

1.2.8 Definición. Sean X un espacio métrico y $p \in X$. Definimos la *casi componente de p en X* , denotada por Q_p , como:

$$Q_p = \bigcap \{ A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es abierto y cerrado en } X \}.$$

1.2.9 Definición. Sean X un continuo y $p \in X$. Definimos la *composante de p en X* , denotada por $\kappa(p)$, como:

$$\kappa(p) = \{ x \in X : \text{existe un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ tal que } p \text{ y } x \in A \}.$$

1.2.10 Teorema del cable cortado. Sean X un espacio métrico y compacto y K y L dos subconjuntos cerrados y no vacíos de X . Si ningún subconjunto conexo de X intersecta a K y a L , entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados y ajenos de X tales que $K \subset X_1$ y $L \subset X_2$ [29, Teorema 5.2 pág. 72].

1.2.11 Teorema de los golpes en la frontera. Sean X un continuo y U un subconjunto abierto, no vacío y propio de X . Si K es una componente de $Cl_X(U)$ entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$ [29, Teorema 5.4 pág. 73].

1.2.12 Definición. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos y compactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ una función continua. Entonces a la sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios métricos y funciones continuas la llamamos *sucesión inversa*. A las funciones f_n^{n+1} las llamamos *funciones de ligadura*.

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \cdots \longleftarrow X_{n-1} \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{f_n^{n+1}} X_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

1.2.13 Definición. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos. Definimos *el límite inverso de $\{X_n, f_n^{n+1}\}$* , denotado como $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ o X_∞ , como el subespacio de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dado por:

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.2.14 Observación. Si $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos, entonces $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un espacio métrico (Teorema 1.1.42).

1.2.15 Teorema. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de continuos, entonces $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un continuo [24, Proposición 2.1.8 pág. 71].

1.2.16 Definición. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X . Definimos *el límite inferior de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$* , denotado por $\liminf A_n$, y *el límite superior de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$* , denotado por, $\limsup A_n$ como:

1. $\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cada } U \text{ abierto en } X \text{ tal que } x \in U, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\}$
2. $\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cada } U \text{ abierto en } X \text{ tal que } x \in U, \text{ existe una subsucesión } \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ de } \{n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tal que } U \cap A_{n_k} \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\}.$

Si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A .

1.2.17 Observaciones. Si X es un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos compactos de X entonces:

1. $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[Cl_X \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right) \right];$

2. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;
3. $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ son subconjuntos cerrados de X ;
4. Si $\{A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\liminf A_n \subset \liminf A_{n_k}$ y $\limsup A_{n_k} \subset \limsup A_n$.

[31, Observación 0.6].

1.3. Hiperespacios.

1.3.1 Definición. Sea X un continuo. Definimos sus *hiperespacios* como los siguientes conjuntos:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto y no vacío en } X\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo en } X\},$$

y para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

1.3.2 Observación. Observemos que $C_1(X) = C(X)$, además:

$$F_n(X) \subset F_{n+1}(X),$$

$$C_n(X) \subset C_{n+1}(X) \text{ y}$$

$$F_n(X) \subset C_n(X).$$

A estos espacios podemos asociarles una métrica, que dependerá de la métrica del continuo X . Así les definimos una topología.

1.3.3 Definición. Sean X un continuo con métrica d , $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Definimos la *bola de radio ϵ con centro en A* , denotada por $N(\epsilon, A)$, como:
 $N(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}.$

1.3.4 Teorema. Sea X un continuo con métrica d . Entonces la función $H_d : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ dada por:

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$$

es una métrica para 2^X . A H_d la llamamos la métrica de Hausdorff inducida por d .

Demostración. Sean A y $B \in 2^X$ tales que $H_d(A, B) = 0$. Entonces, por la definición de H_d , se tiene que $A \subset N(\epsilon, B)$ para toda $\epsilon > 0$. Sea $a \in A$. Entonces existe $b_n \in B$ tal que $d(a, b_n) < \frac{1}{n}$, así la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a a , dado que B es compacto, entonces $a \in B$, con lo que concluimos que $A \subset B$. De manera similar $B \subset A$ y, así, $A = B$.

Por la definición de H_d , es claro que $H_d(A, A) = 0$. Notemos que H_d es una función simétrica, esto implica que $H_d(A, B) = H_d(B, A)$.

Mostraremos ahora la desigualdad del triángulo. Para esto primero probaremos la siguiente afirmación: Para cualesquiera A y $B \in 2^X$ y $\delta > 0$ $A \subset N(H_d(A, B) + \delta, B)$. Como $\delta > 0$, $H_d(A, B) < H_d(A, B) + \delta$. Por la definición de H_d , se tiene que $A \subset N(H_d(A, B) + \delta, B)$. Sean A, B y $C \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Sea $a \in A$. Por la afirmación anterior, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B) + \frac{\epsilon}{2}$. Para esta b , se tiene que existe $c \in C$ tal que $d(b, c) \leq H_d(B, C) + \frac{\epsilon}{2}$. Estos hechos implican que $d(a, c) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \epsilon$. De donde resulta que $A \subset N(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \epsilon, C)$. De manera análoga, tenemos que $C \subset N(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \epsilon, A)$. De aquí se tiene que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \epsilon$. Como ϵ es arbitraria, concluimos que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$. Por lo tanto, H_d es una métrica para 2^X .

Q.E.D.

1.3.5 Teorema. Sean X un continuo y $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X . Entonces $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con respecto a la métrica de Hausdorff si y sólo si $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con respecto a los límites superior e inferior (Definición 1.2.16), [31, Teorema 0.7].

1.3.6 Definición. Sean X un continuo y A y $B \in 2^X$. Un *arco de orden de A a B* es una función continua e inyectiva $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que: $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$ y, para cada s y $t \in [0, 1]$ tales que $s < t$, se cumple que $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$.

El siguiente lema nos dice cuando existe un arco de orden.

1.3.7 Lema. Sean X un continuo y A y $B \in 2^X$. Entonces existe un arco de orden de A a B si y sólo si $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A [31, Teorema 1.8].

1.3.8 Lema. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a X^n con la métrica $D_n : X^n \times X^n \rightarrow [0, \infty)$ dada por $D_n((x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)) = \max\{d(x_1, x'_1), \dots, d(x_n, x'_n)\}$. Entonces la función $f_n : X^n \rightarrow F_n(X)$ dada por $f_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$ es continua y suprayectiva. [24, Teorema 1.8.6, Teorema 1.8.7, págs. 60 y 61].

1.3.9 Teorema. Para cualquier continuo X , 2^X es un continuo.

Demostración. Por el Teorema 1.3.4, 2^X es un espacio métrico. Para ver que 2^X es compacto, por el Lema 1.1.28 basta mostrar que 2^X es compacto por sucesiones. Sea $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de 2^X . Por el Teorema 1.3.5 es suficiente ver que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ converge a A en 2^X con respecto a los límites superior e inferior. Sea $\{U_m\}_{m=1}^\infty$ una base numerable para X [6, Teorema 3.A.6, Corolario 3.A.7, pág. 79]. Sea $\{A_n^1\}_{n=1}^\infty = \{A_n\}_{n=1}^\infty$. Supongamos que hemos definido de manera inductiva a la subsucesión $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$ de $\{A_n\}_{n=1}^\infty$. Definimos $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^\infty$ como sigue:

1. Si $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión $\{A_{n_k}^m\}_{n=1}^\infty$ tal que

$$\limsup A_{n_k}^m \cap U_m = \emptyset,$$

entonces sea $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^\infty$ dicha subsucesión de $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$.

2. Si para cada subsucesión $\{A_{n_k}^m\}_{n=1}^\infty$ de $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$, se tiene que

$$\limsup A_{n_k}^m \cap U_m \neq \emptyset,$$

definimos $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^\infty$ como $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$.

Hemos definido $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Consideremos la subsucesión diagonal $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$. Por construcción, $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$. Mostraremos que $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$ converge. Supongamos que $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$ no es una sucesión convergente. Entonces existe $p \in \limsup A_m^m \setminus \liminf A_m^m$. Sea $U_k \in \{U_m\}_{m=1}^\infty$ tal que $p \in U_k$ y $U_k \cap A_{m_l}^{m_l} = \emptyset$ para alguna subsucesión $\{A_{m_l}^{m_l}\}_{l=1}^\infty$ de $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$ (esto dado que $\liminf A_m$ es un subconjunto cerrado en X , ver Observación 1.2.17). Notemos que $\{A_{m_l}^{m_l}\}_{l=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^{k+1}\}_{n=1}^\infty$. Por lo tanto, $\{A_n^k\}_{n=1}^\infty$ satisface 1, con $k = m$. Esto implica que $\limsup A_m^{k+1} \cap U_k = \emptyset$. Como $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^{k+1}\}_{n=1}^\infty$ y $\limsup A_m^m \subset \limsup A_n^{k+1}$ (Observación 1.2.17), se tiene que $\limsup A_m^m \cap U_k = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $\{A_m^m\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión convergente. Concluimos que 2^X es compacto por sucesiones. Mostraremos que 2^X es arcoconexo. Sea $A_0 \in 2^X$ tal que $A_0 \neq X$. Por el Lema 1.3.7, existe un arco de orden de A_0 a X en 2^X . Así, para cada A y $B \in 2^X \setminus \{X\}$ existe un arco de orden de A a X y de B a X . Consideremos A y $B \in 2^X$, un arco de orden α_A de A a X y un arco de orden α_B de B a X . Notemos que $\alpha_A \cup \alpha_B$ contiene a un arco de A a B . Así, concluimos que existe un arco de A a B para cada A y B en 2^X . Por la Proposición 1.1.18, 2^X es conexo. Así, 2^X es un continuo.

Q.E.D.

1.3.10 Observación. Sea X un continuo. Por el Teorema 1.3.9, 2^X es un continuo. Entonces podemos considerar a 2^{2^X} como $2^{2^X} = \{\mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es compacto y no vacío en } 2^X\}$. A 2^{2^X} le definimos la métrica de Hausdorff, H_{H_d} , inducida por la métrica de Hausdorff H_d para 2^X .

1.3.11 Definición. Sean X un continuo y $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Definimos la *función unión* para 2^X como: $\sigma : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ dada por: $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$, para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$.

1.3.12 Lema. Sean X un continuo y σ la función unión para 2^{2^X} . Entonces σ está bien definida, es continua y suprayectiva. En particular, σ satisface que:

$$H_d(\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2)) \leq H_{H_d}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2), \text{ para cualesquiera } \mathcal{A}_1 \text{ y } \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$$

[31, Lema 1.48].

1.3.13 Teorema. Para cualquier continuo X , $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son continuos para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Observemos que $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son espacios métricos (Teorema 1.3.4). Además, notemos que $C(X)$ también es un continuo arcoconexo [24, Teorema 1.8.10]. Mostraremos ahora que $F_n(X)$ es un continuo para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que X^n es un continuo. Por el Lema 1.3.8 $F_n(X)$ es imagen continua de X^n . Por los Lemas 1.1.14 y 1.1.21, se tiene que $F_n(X)$ es un continuo. Veamos ahora que $C_n(X)$ es un continuo. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $C(X)$ es un continuo, se tiene que $F_n(C(X))$ es un continuo. Consideremos la función unión σ (Definición 1.3.11). Observemos que $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$. Por tanto, $\sigma|_{F_n(C(X))}: F_n(C(X)) \rightarrow C_n(X)$ es una función continua y suprayectiva. Por los Lemas 1.1.14 y 1.1.21, concluimos que $C_n(X)$ es un continuo.

Q.E.D.

1.3.14 Definición. Sean X un continuo. Una *función de Whitney* para $C(X)$ es una función continua $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$ que cumple que:

1. $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$;
2. Si A y $B \in C(X)$ y $A \subset B$ con $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$ y
3. $\mu(X) = 1$.

1.3.15 Observación. Sea X un continuo. Entonces existen funciones de Whitney para $C(X)$. De hecho, las funciones de Whitney existen para cualquier hiperespacio de X [31, 0.50].

1.3.16 Definición. Sean X y Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces definimos sus *funciones inducidas a los hiperespacios* de la siguiente forma:

$$2^f : 2^X \rightarrow 2^Y \text{ como: } 2^f(A) = f(A) \text{ para todo } A \in 2^X,$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$

$$C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y) \text{ como: } C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)},$$

$$F_n(f) : F_n(X) \rightarrow F_n(Y) \text{ como: } F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}.$$

1.3.17 Teorema. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre dos continuos X y Y entonces 2^f , $C_n(f)$ y $F_n(f)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, son funciones continuas.

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Como f es una función continua entre continuos, entonces f es uniformemente continua [6, Teorema 3.A.17 pág. 81]. Sea $\delta > 0$ dada por la continuidad uniforme de f . Entonces $2^f(B_\delta^{H_X}(A)) \subset B_\epsilon^{H_Y}(2^f(A))$. Por tanto, 2^f es una función continua. Como 2^f es continua, se tiene que $C_n(f)$ y $F_n(f)$ son funciones continuas.

Q.E.D.

1.4. Propiedad del punto fijo.

Los resultados de esta sección aun cuando son sencillos son básicos para nuestro estudio. A pesar de su sencillez, a lo largo del texto nos daremos cuenta de su importancia.

1.4.1 Definición. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Un *punto fijo para f* es un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

1.4.2 Definición. Sea X un espacio métrico. Decimos que X *tiene la propiedad del punto fijo*, si cualquier función continua $f : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo.

1.4.3 Teorema. *El intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Definimos los conjuntos $A = \{x \in [0, 1] : x \leq f(x)\}$ y $B = \{x \in [0, 1] : f(x) \leq x\}$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de A que converge a $x_0 \in [0, 1]$. Como $x_n \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \leq f(x_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como f es una función continua se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ (Teorema 1.1.29). Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, se tiene que $x_0 \leq f(x_0)$. Por tanto A es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$. Análogamente B es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$. Observemos que A y B son subconjuntos no vacíos de $[0, 1]$, dado que $0 \in A$ y $1 \in B$. Como $[0, 1]$ es conexo, existe $x \in A \cap B$. Lo cual implica que $f(x) = x$.

Q.E.D.

1.4.4 Teorema. *La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.*

Demostración. Sean X un espacio con la propiedad del punto fijo y $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea $g : Y \rightarrow Y$ una función continua. Notemos que $(h^{-1} \circ g \circ h) : X \rightarrow X$ es una función continua. Como X tiene la propiedad del punto fijo, existe $x \in X$ tal que $h^{-1}(g(h(x))) = (h^{-1} \circ g \circ h)(x) = x$. Aplicando h a este punto se obtiene que $g(h(x)) = h(x)$. Concluimos que $h(x)$ es un punto fijo para g .

Q.E.D.

1.4.5 Teorema. *Si X es un continuo con la propiedad del punto fijo, entonces cualquier retracto de X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean Z un retracto de X , $r : X \rightarrow Z$ una retracción y $f : Z \rightarrow Z$ una función continua. Notemos que $f \circ r : X \rightarrow Z$ es una función continua, en particular $f \circ r : X \rightarrow X$. Como X tiene la propiedad del punto fijo, existe $z \in X$ tal que $(f \circ r)(z) = z$. Notemos que $(f \circ r)(X) \subset Z$.

Entonces $z \in Z$. Como r es una retracción, entonces $r(z) = z$; lo cual implica que $z = (f \circ r)(z) = f(r(z)) = f(z)$. De donde $f(z) = z$. Por tanto, Z tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

1.4.6 Teorema. *Sea X un espacio métrico y compacto. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe una función continua $f_\epsilon : X \rightarrow X_\epsilon$, donde X_ϵ es un subconjunto de X tal que X_ϵ tiene la propiedad del punto fijo y $d(f_\epsilon, Id_X) < \epsilon$ donde Id_X es la función identidad en X . Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Para cada $\epsilon > 0$, consideremos $f_\epsilon \circ f|_{X_\epsilon}$. Como X_ϵ tiene la propiedad del punto fijo, $f_\epsilon \circ f|_{X_\epsilon}$ tiene un punto fijo x_ϵ . Es decir $x_\epsilon = f_\epsilon(f(x_\epsilon))$. Observemos que $d(f_\epsilon, Id_X) < \epsilon$, esto implica que $d(x_\epsilon, f(x_\epsilon)) = d(f_\epsilon(f(x_\epsilon)), f(x_\epsilon)) < \epsilon$ (*). Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon = \frac{1}{n}$. Por hipótesis, existen un subespacio X_n de X con la propiedad del punto fijo y $f_n : X \rightarrow X_n$ una función continua tal que, $d(f_n, Id_X) < \frac{1}{n}$. Entonces existe un punto fijo x_n para $f_n \circ f|_{X_n}$. Aplicando (*) se tiene que $d(x_n, f(x_n)) = d(f_n(f(x_n)), f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Notemos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de elementos de X . Como X es compacto, existe una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ que converge a un punto $x \in X$. Notemos que $d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) < \frac{1}{n_k}$. Esto implica que $d(x, f(x)) = 0$. Por tanto f tiene un punto fijo.

Q.E.D.

Quizá el teorema más conocido, además de ser de los más antiguos acerca de la propiedad del punto fijo, es el Teorema de Brouwer:

1.4.7 Teorema (Brouwer). *Toda n -celda tiene la propiedad del punto fijo [30, Teorema 2.1, pág. 19].*

Capítulo 2

Hiperespacios con la Propiedad del Punto Fijo.

El objetivo de este capítulo es mostrar que los hiperespacios de algunos tipos de continuos tienen la propiedad del punto fijo.

2.1. Primeros ejemplos.

Comenzaremos este capítulo con dos de los ejemplos más conocidos en hiperespacios de continuos, los modelos de $C(X)$ cuando X es un arco y cuando X es S^1 . Los hiperespacios de subcontinuos de ambos continuos tienen la propiedad del punto fijo, como veremos a continuación.

2.1.1 Ejemplo. Si $X = [0, 1]$ entonces $C(X)$ es homeomorfo a una 2-celda. Entonces por el Teorema 1.4.7, $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Observemos que si $A \in C(X)$ entonces A es un punto en $[0, 1]$ o bien $A = [a, b]$ con $0 \leq a < b \leq 1$. Definimos la siguiente función: $h : C(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h([a, b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Notemos que h es una función inyectiva y es continua. Como $C(X)$ es compacto, entonces $Im(h)$ es homeomorfo a $C(X)$. Ahora bien, sean x y $y \in Im(h)$. Entonces existen $a, b \in [0, 1]$, $a \leq b$ tales que $x = \frac{a+b}{2}$, $y = b-a$. Resolviendo el sistema de ecuaciones para a y b se tiene que $a = \frac{2x-y}{2}$, $b = \frac{2x+y}{2}$. Así $Im(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x \text{ y } 2x \leq 2-y\}$.

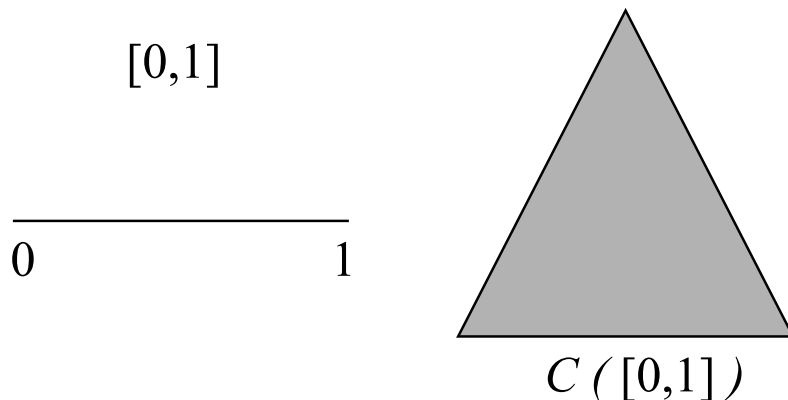


Figura 2.1: El hiperespacio $C(X)$ para $[0, 1]$.

De donde, $Im(h)$ es el triángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$. Por lo tanto, $C(X)$ es homeomorfo a una 2-celda. Notemos que los conjuntos de un solo punto en $[0, 1]$ quedan representados en la base del triángulo y que a $[0, 1]$ le corresponde el punto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 1)$. Observemos que $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. Así tenemos un ejemplo de un continuo con la propiedad del punto fijo tal que $C(X)$ también la tiene.

2.1.2 Ejemplo. Si $X = S^1$, con $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, entonces $C(X)$ es homeomorfo a una 2-celda. Entonces por el Teorema 1.4.7, $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Notemos que si $A \in C(X)$ entonces A tiene tres opciones, A es un punto, un arco, o $A = S^1$. Entonces dado un arco $A \in C(X)$ consideremos su punto medio, denotado por $m(A)$, y la longitud de A denotada por $l(A)$. Definimos $h : C(X) \rightarrow D$ como:

$$h(A) = \begin{cases} (0, 0), & \text{si } A = S^1 \\ (1 - \frac{l(A)}{2\pi}) \cdot m(A), & \text{si } A \text{ es un arco} \\ p, & \text{si } A = \{p\}. \end{cases}$$

Donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. La función h es un homeomorfismo. Observemos que S^1 es un continuo que no tiene la propiedad del punto

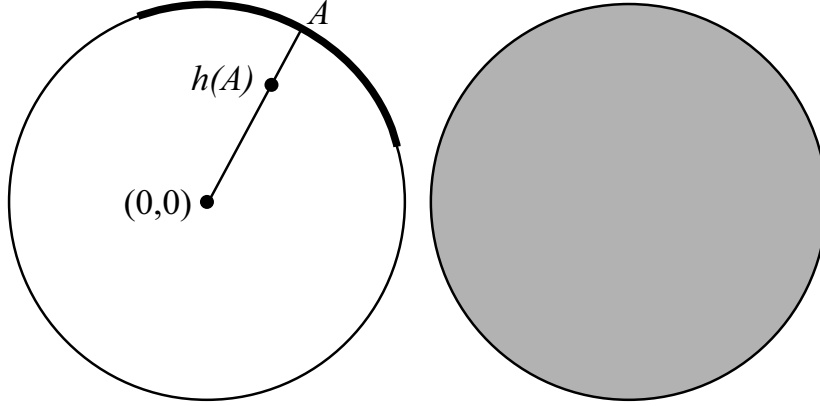


Figura 2.2: El hiperspacio $C(X)$ para S^1 .

fijo, mientras que su hiperspacio $C(X)$ sí la tiene.

2.2. Continuos Localmente Conexos.

En esta sección mostraremos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, los hiperspacios 2^X y $C_n(X)$ de un continuo localmente conexo X tienen la propiedad del punto fijo. Además veremos que $F_n(X)$ también tiene la propiedad del punto fijo si X es un retracto absoluto.

2.2.1 Definición. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es *localmente conexo en p* , si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto conexo $V \subset X$ tal que $p \in V \subset U$. Decimos que un continuo X es *localmente conexo*, si para cada $x \in X$, X es localmente conexo en x .

2.2.2 Definición. Sea K espacio métrico y compacto. Decimos que K es un *retracto absoluto*, denotado como AR , si cada vez que K es encajado en un espacio métrico X , se tiene que si K' es la imagen de K bajo el encaje, entonces K' es un retracto de X .

2.2.3 Definición. Sea K espacio métrico. Decimos que K es un *extensor absoluto*, denotado como AE , si siempre que, para cada subconjunto cerrado A de un espacio métrico X y cualquier función continua $f : A \rightarrow K$, existe una función continua $F : X \rightarrow K$ tal que $F|_A = f$.

2.2.4 Definición. Consideremos $[0, 1] = [0, 1]_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos el *Cubo de Hilbert*, denotado por $\mathcal{Q}$, como $\prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$, con la topología producto que se definió en 1.1.39.

2.2.5 Teorema. Si X es un espacio métrico y compacto, entonces X se puede encajar en el Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico y compacto. Por la Observación 1.1.3 podemos suponer que su métrica está acotada por 1. Como X es compacto, entonces X es separable [6, Ejercicio 7, Capítulo 2 Sección I, pág. 75]. Esto implica que existe un subconjunto denso y numerable $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $h : X \rightarrow \mathcal{Q}$ dada por $h(x) = (d(x, x_n))_{n=1}^{\infty}$. Notemos que h es una función inyectiva. Dado que d es una función continua [6, Ejercicio 1.F.11 pág 30] y $\pi_m \circ h$ es continua para toda $m \in \mathbb{N}$, se tiene que h es una función continua (Lema 1.1.41). Sean x y $y \in X$ con $x \neq y$. Como $x \neq y$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{\epsilon}(x) \cap B_{\epsilon}(y) = \emptyset$. Dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto denso y numerable, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_{\epsilon}(x)$. De aquí se tiene que $d(x, x_k) \neq d(y, x_k)$. Por tanto $h(x) \neq h(y)$. Así, tenemos que h es una función inyectiva. Como X es un espacio métrico compacto y $\mathcal{Q}$ es métrico se tiene que h es una función cerrada. Por tanto, h es un encaje.

Q.E.D.

2.2.6 Corolario. Si X es un retracto absoluto compacto y métrico, entonces X se puede encajar en el Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

2.2.7 Teorema (Borsuk). Un espacio métrico y compacto K es un retracto absoluto si y sólo si K es un extensor absoluto.

Demostración. Supongamos que K es un retracto absoluto. Por el Teorema 2.2.5 podemos suponer que K está encajado en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Como K es un retracto absoluto, existe una retracción $r : \mathcal{Q} \rightarrow K$. Sean Y un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de Y y $f : A \rightarrow K$ una función continua. Consideremos $f_i : A \rightarrow [0, 1]_i$ definida como $f_i = \pi_i \circ f$, donde $[0, 1]_i$ es el i -ésimo factor del cubo del Hilbert y π_i es la i -ésima función proyección. Por el Teorema de Extensión de Tietze [6, Teorema 4.B.8 pág. 103], existe una función continua $F_i : Y \rightarrow [0, 1]$ tal que $F_i|_A = f_i$. Consideremos la función $F : Y \rightarrow \mathcal{Q}$ dada por $F(y) = (F_i(y))_{i=1}^\infty$. Esta función está bien definida y es continua. Entonces $r \circ F$ es la extensión deseada.

Supongamos ahora que K es un extensor absoluto. Sean X un espacio métrico y K' una copia de K en X . Consideremos $1_{K'} : K' \rightarrow K'$ la función identidad. Como K es un extensor absoluto, existe una función continua $r : X \rightarrow K'$ tal que $r|_{K'} = 1_{K'}$. Entonces r es la retracción deseada.

Q.E.D.

2.2.8 Definición. Sean X y Y espacios métricos. Decimos que una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ es una ϵ -función si $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \epsilon$ para cada $y \in Y$.

2.2.9 Teorema. *El cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $[0, 1]_n^\infty$ como: $[0, 1]_n^\infty = \{(t_i)_{i=1}^\infty \in \mathcal{Q} : t_i = 0 \text{ para cada } i \geq n+1\}$. Observemos que $[0, 1]_n^\infty$ es una n -celda. Por el Teorema 1.4.7, $[0, 1]_n^\infty$ tiene la propiedad del punto fijo para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $r_n : \mathcal{Q} \rightarrow [0, 1]_n^\infty$ dada por $r_n((t_i)_{i=1}^\infty) = (t_1, t_2, \dots, t_n, 0, 0, \dots)$ para cada $(t_i)_{i=1}^\infty \in \mathcal{Q}$. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, r_n es una $\frac{1}{2^n}$ -función, que además, es una retracción. Por el Teorema 1.4.6, se tiene que $\mathcal{Q}$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.2.10 Corolario. *Si X es un retracto absoluto compacto y métrico, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Como X es un retracto absoluto, entonces podemos encajar a X en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Dado que la propiedad del punto fijo es invariante bajo retracciones (Teorema 1.4.5), se tiene que X tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.2.11 Teorema (Wojdysławski). *Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y, para toda $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ son retracts absolutos [38, Teorema II, Teorema II_m].*

2.2.12 Teorema. *Si X es un retracto absoluto entonces $F_n(X)$ es un retracto absoluto para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean X un retracto absoluto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_n(X)$ es un retracto de vecindad absoluto [20, Teorema 5.1]. Como X es un retracto absoluto, X es contraíble [36, Corolario 1.6.7]. De donde, $F_n(X)$ es contraíble [15, Lema 2.3]. De lo anterior se obtiene que $F_n(X)$ es un retracto de vecindad absoluto y contraíble. Por tanto, $F_n(X)$ es un retracto absoluto [20, Corolario 1.6.7].

Q.E.D.

2.2.13 Teorema. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para cada $n \in \mathbb{N}$. Si X es un retracto absoluto, entonces $F_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.11 se tiene que 2^X y $C_n(X)$ son retracts absolutos para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Corolario 2.2.10 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo. Además, si X es un retracto absoluto, $F_n(X)$ es un retracto absoluto (Teorema 2.2.12). Por el Corolario 2.2.10, $F_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.3. Continuos Tipo Arco.

En esta sección daremos algunos resultados sobre la propiedad del punto fijo en hiperespacios de continuos tipo arco, así como una prueba de que los bloques y niveles de Whitney en $C(X)$, cuando X es un continuo tipo arco, tienen la propiedad del punto fijo.

La demostración del teorema principal de esta sección fue dada originalmente por J. Segal en 1972 [35, Teorema 3, pág. 247]. J. T. Rogers, Jr. en [34, Teorema 4, pág. 233] y J. Krasinkiewicz en [16, Teorema 4.1, pág. 159] dan demostraciones más sencillas a este hecho. A continuación presentaremos la demostración de J. Krasinkiewicz.

La parte principal de dicha demostración se basa en un Teorema de Lokućewski de 1957 (Teorema 2.3.11). Construiremos las herramientas necesarias para llegar a este resultado.

2.3.1 Definición. Decimos que un continuo X es *tipo arco* si para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ -función suprayectiva $f_\epsilon : X \rightarrow [0, 1]$.

Un resultado sencillo pero que nos será de gran ayuda es el hecho de que dada una ϵ -función entre continuos, sus funciones inducidas a los hiperespacios también lo son, a continuación probaremos dicho teorema auxiliados de la siguiente proposición:

2.3.2 Proposición. Sean X y Y dos continuos. Si A y B son subconjuntos de X tales que $f(B) \subset f(A)$ para alguna ϵ -función $f : X \rightarrow Y$, entonces $B \subset N(\epsilon, A)$.

Demostración. Sea $b \in B$. Como $f(B) \subset f(A)$ existe $a \in A$ tal que $f(b) = f(a)$. Lo cual implica que a y $b \in f^{-1}(f(b))$. Dado que f es una ϵ -función se tiene que $\text{diám} f^{-1}(f(b)) < \epsilon$. Así concluimos que $b \in N(\epsilon, A)$. Como b es arbitraria, $B \subset N(\epsilon, A)$.

Q.E.D.

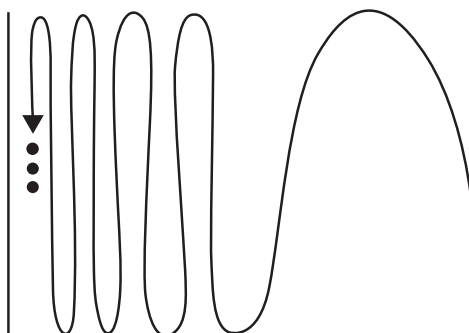


Figura 2.3: La curva sinoidal del topólogo es un continuo tipo arco.

2.3.3 Lema. Sean X y Y dos continuos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una ϵ -función, entonces $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$ es una ϵ -función.

Demostración. Sean $E \in C(Y)$ y A y $B \in C(f)^{-1}(E)$. Tomemos $b \in B$. Notemos que, como A y $B \in C(f)^{-1}(E)$, tenemos que $C(f)(A) = C(f)(B)$. Entonces por la definición de $C(f)$, $f(A) = f(B)$. Por la Proposición 2.3.2 tenemos que $B \subset N(\epsilon, A)$. Análogamente se prueba $A \subset N(\epsilon, B)$. Por lo tanto $H_d(A, B) < \epsilon$ y $C(f)$ es una ϵ -función.

Q.E.D.

2.3.4 Definición. Sean X y Y espacios métricos. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es *universal* si para toda función continua $g : X \rightarrow Y$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = g(p)$.

2.3.5 Propiedades. Las funciones universales cumplen que:

1. Si f es universal entonces f es suprayectiva [14, Ejercicio 21.10 pág 186].
2. Si $f : X \rightarrow Y$ es universal entonces Y tiene la propiedad del punto fijo [14, pág 183].
3. $f : X \rightarrow Y$ es una función universal si y sólo si $h \circ f$ es una función universal para cualquier homeomorfismo h [14, pág 184].

2.3.6 Definición. Sean X y Y espacios métricos. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es *esencial* si f no es homotópica a una función constante. Decimos que f es *inesencial* si f es homotópica a una función constante.

2.3.7 Definición. Sean X un espacio métrico y B^n una n -celda. Una función continua $f : X \rightarrow B^n$ es una función *AH-esencial* (*Alexandroff-Hopf esencial*) si $f|_{f^{-1}(S^{n-1})} : f^{-1}(S^{n-1}) \rightarrow S^{n-1}$ no puede ser extendida a una función continua de X a S^{n-1} .

2.3.8 Observación. f es una función AH-esencial si y sólo si $h \circ f$ es AH-esencial para cualquier homeomorfismo entre n -celdas h [14, pág. 185].

Aplicaremos los siguientes resultados a la demostración del Teorema 2.3.11:

2.3.9 Teorema. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow B^n$ una función continua. Entonces f es AH-esencial si y sólo si f es universal.

Demostración. Supongamos que f no es AH-esencial. Entonces existe una función continua $F : X \rightarrow S^{n-1}$ tal que $F|_{f^{-1}(S^{n-1})} = f|_{f^{-1}(S^{n-1})}$. Sea $h : X \rightarrow B^n$ definida como $h(x) = -F(x)$. Afirmamos que h y f no tienen ningún punto de coincidencia. Supongamos, por el contrario, que existe $p \in X$ tal que $f(p) = h(p)$, entonces $p \in f^{-1}(S^{n-1})$, de donde $f(p) = F(p)$. Ahora bien $h(p) = -F(p)$, de aquí observamos que $F(p) = -F(p)$, lo cual es una contradicción. Así pues, f no es universal.

Supongamos ahora que f no es universal. Entonces existe una función $g : X \rightarrow B^n$ tal que $f(x) \neq g(x)$ para toda $x \in X$. Dado este hecho podemos definir para cada $x \in X$ el rayo que comienza en $g(x)$ que pasa por $f(x)$, denotado por $\overline{g(x)f(x)}$. Sea $h : X \rightarrow S^{n-1}$ la función dada por $h(x) = \overline{g(x)f(x)} \cap S^{n-1}$. Esta función está bien definida, es continua y extiende a $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}$. Así concluimos que f no es AH-esencial.

Q.E.D.

2.3.10 Proposición. Sea X un espacio métrico y compacto tal que, para toda $\epsilon > 0$ existen un espacio X_ϵ y una ϵ -función universal $f : X \rightarrow X_\epsilon$. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sean $g : X \rightarrow X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existen X_n y una $\frac{1}{n}$ -función universal $f_n : X \rightarrow X_n$. Consideremos $(f_n \circ g)$, como f_n es una función universal existe $x_n \in X_n$ tal que: $f_n(x_n) = (f_n \circ g)(x_n) = f_n(g(x_n))$. Como f_n es una $\frac{1}{n}$ -función se tiene que $d(g(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Notemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X . Como X es compacto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x \in X$. Dado que la función g es continua tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_{n_k}) = g(x)$. De aquí obtenemos que $d(g(x), x) = 0$ por lo tanto $g(x) = x$. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Con los resultados anteriores, podemos dar esta prueba del siguiente Teorema de Lokuciewski.

2.3.11 Teorema (Lokuciewski). *Si X es un espacio métrico y compacto. Supongamos que para toda $\epsilon > 0$, existe una ϵ -función AH-esencial $f_\epsilon : X \rightarrow B^{n_\epsilon}$, donde B^{n_ϵ} es una n_ϵ -celda, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Como f_ϵ es una función AH-esencial, por el Teorema 2.3.8, tenemos que f_ϵ es universal. Por la Proposición 2.3.10, tenemos que X tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Para dar una de las aplicaciones del Teorema 2.3.11, necesitamos el concepto de contractibilidad con respecto a la circunferencia.

2.3.12 Definición. Decimos que un espacio X es *contraíble con respecto a la circunferencia*, denotado como X es $cr(S^1)$, si cualquier función continua $f : X \rightarrow S^1$ es inesencial.

2.3.13 Teorema. *Para cualquier continuo X , $C(X)$ es $cr(S^1)$ y unicoherente [30, Teorema 6.5, pág. 69].*

2.3.14 Corolario. Sea X un continuo $cr(S^1)$. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existen una ϵ -función $f_\epsilon : X \rightarrow B^2$ y un subconjunto cerrado $A \subset f_\epsilon^{-1}(S^1)$ tales que, $f_\epsilon|_A : A \rightarrow S^1$ es esencial. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Afirmamos que f_ϵ es una función AH-esencial. Supongamos que esto no es cierto. Entonces $f_\epsilon|_{f_\epsilon^{-1}(S^1)} : f_\epsilon^{-1}(S^1) \rightarrow S^1$ puede extenderse a una función $F : X \rightarrow S^1$. Como X es un continuo $cr(S^1)$ entonces F es homotópica a una función constante. Lo cual implica que, para todo subconjunto cerrado $A \in f_\epsilon^{-1}(S^1)$, se tiene que $F|_A : A \rightarrow S^1$ es homotópica a una función constante. Dado que $F|_A = f_\epsilon|_A$, tenemos que $f_\epsilon|_A$ es homotópica a una función constante. Lo que contradice que $f_\epsilon|_A$ sea esencial. Por tanto f_ϵ es AH-esencial. Por el Teorema 2.3.11 concluimos que X tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.3.15 Lema. Sean $X = A \cup B$, donde A y B son dos continuos, y K y L dos arcos tales que: $K \cup L$ es una curva cerrada simple, $A \cap B = E \cup F$ donde E y F son dos subconjuntos cerrados ajenos y $K \cap L = \{p, q\}$ donde p y q son los puntos extremos de K y L . Si $f : X \rightarrow K \cup L$ es una función continua tal que, $f(A) \subset K$, $f(B) \subset L$, $f(E) = \{p\}$, y $f(F) = \{q\}$, entonces f es una función esencial [16, Proposición 1.3, pág. 156].

Ahora daremos la demostración de Krasinkiewicz del siguiente teorema de Segal.

2.3.16 Teorema (Segal). Si X es un continuo tipo arco, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como X es un continuo tipo arco, entonces existe una ϵ -función suprayectiva $f_\epsilon : X \rightarrow [0, 1]$. Por el Lema 2.3.3, $C(f_\epsilon) : C(X) \rightarrow C([0, 1])$ es una ϵ -función. Como f_ϵ es suprayectiva, existen puntos $x_0, x_1 \in X$ tales que $f_\epsilon(x_0) = 0$ y $f_\epsilon(x_1) = 1$. Sean α un arco de orden de $\{x_0\}$ a X , β un arco de orden de $\{x_1\}$ a X y consideremos $\mathcal{A} = F_1(X) \cup (\alpha \cup \beta)$.

Observemos que $C(f_\epsilon)(\alpha)$ es el único arco de orden en $C([0, 1])$ de $\{0\}$ a $[0, 1]$. Así como $C(f_\epsilon)(\beta)$ es el único arco de orden en $C([0, 1])$ de $\{1\}$ a $[0, 1]$. También $C(f_\epsilon)(F_1(X)) = F_1([0, 1])$. Notemos que, por el Lema 2.3.15, $C(f_\epsilon)|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow Fr(C([0, 1]))$ es una función esencial. Observemos que, por el Teorema 2.3.13, $C(X)$ es contraíble con respecto a la circunferencia. Además, $Fr(C([0, 1]))$ es homeomorfo a S^1 . Con esto se cumplen las condiciones del Corolario 2.3.14. Por lo tanto, $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

A continuación, daremos las herramientas necesarias para demostrar que los bloques y niveles de Whitney de un continuo tipo arco, tienen la propiedad del punto fijo.

2.3.17 Definición. Sean X un continuo y $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Un *nivel de Whitney en $C(X)$* es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ con $t \in [0, 1]$. Un *bloque de Whitney en $C(X)$* es un conjunto de la forma $\mu^{-1}([s, t])$ con $0 \leq s \leq t \leq 1$.

2.3.18 Definición. Sean X y Y dos continuos. Una función continua y suprayectiva $f: X \rightarrow Y$ es *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$.

2.3.19 Teorema. Para cualquier continuo X , cualquier función de Whitney para $C(X)$, $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$ es monótona y abierta.

Demostración. Primero mostraremos que μ es monótona. Sea $t \in [0, 1]$. Notemos que $\mu^{-1}(t) = \mu^{-1}([0, t]) \cap \mu^{-1}([t, 1])$. Afirmamos que $\mu^{-1}([0, t])$ y $\mu^{-1}([t, 1])$ son subconjuntos conexos de $C(X)$.

Consideremos el bloque $\mu^{-1}([0, t])$. Sean $C \in \mu^{-1}([0, t])$ y $x \in C$. Entonces existe un arco de orden γ_C de $\{x\}$ a C (Lema 1.3.7). Observemos que $\mu^{-1}([0, t]) = \bigcup \{\gamma_C : C \in \mu^{-1}([0, t])\} \cup F_1(X)$. Por [6, Ejercicio 2.A.11 (b), pág 49], $\mu^{-1}([0, t])$ es conexo.

Sea $A \in \mu^{-1}([t, 1])$. Por el Lema 1.3.7, existe un arco de orden, α_A , de A a X . Entonces $\mu^{-1}([t, 1]) = \bigcup \{\alpha_A : A \in \mu^{-1}([t, 1])\}$. Por tanto, $\mu^{-1}([t, 1])$ es

un subconjunto arcoconexo de $C(X)$. Por la Proposición 1.1.18, $\mu^{-1}([t, 1])$ es conexo.

Como $C(X)$ es unicoherente (Teorema 2.3.13), se tiene que $\mu^{-1}(t)$ es conexo. Por tanto, μ es una función monótona.

Veamos que μ es una función abierta. Sean $\mathcal{W}$ un subconjunto abierto de $C(X)$ y $t \in \mu(\mathcal{W})$. Observemos que existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $\mu(W) = t$. Sea α un arco de orden de $\{x\} \in F_1(X)$ a X que contiene a W (Lema 1.3.7). Observemos que $\alpha \cap \mathcal{W}$ es un subconjunto abierto de α tal que $W \in \alpha \cap \mathcal{W}$. Como $t = \mu(W)$, se tiene que $t \in \mu(\alpha \cap \mathcal{W}) \subset \mu(\alpha) \cap \mu(\mathcal{W}) \subset \mu(\mathcal{W})$. Por lo tanto, $\mu(\mathcal{W})$ es abierto en $[0, 1]$ y μ es una función abierta.

Q.E.D.

2.3.20 Corolario. Sean X un continuo y $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$, entonces los niveles de Whitney y los bloques de Whitney son continuos.

Demostración. Como μ es una función continua, se tiene que $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([s, t])$, para cualesquiera s y $t \in [0, 1]$ son subconjuntos cerrados de $C(X)$. Como $C(X)$ es compacto, entonces $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([s, t])$ son compactos. Por el Teorema 2.3.19 las funciones de Whitney para $C(X)$ son monótonas. Entonces la imagen inversa de cualquier subconjunto conexo de $[0, 1]$ es un subconjunto conexo de $C(X)$ [24, Lema 2.1.12, pág. 74]. Por tanto, $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([s, t])$ son continuos.

Q.E.D.

2.3.21 Definición. Sea X un espacio métrico, la diagonal, Δ_X , es el subconjunto de $X \times X$ definido como: $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$.

2.3.22 Definición. Sean X un continuo y $\pi : X \times X \rightarrow X$ la función proyección al primer factor X . Decimos que X tiene *semimargen suprayectivo cero* si para cualquier subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $\pi(Z) = X$ entonces $Z \cap \Delta_X \neq \emptyset$.

2.3.23 Observaciones. Es conocido que los continuos tipo arco tienen semimargen suprayectivo cero [8, Teorema 2.6 pág. 109, Teorema 5.2 pág. 123]. Además, un continuo X tiene semimargen suprayectivo cero si y sólo si para cualquier continuo Y , cualquier función continua $f : Y \rightarrow X$ es universal [8, Teorema 5.10 pág. 125]. Así, por la Propiedad 2 de 2.3.5, obtenemos que los continuos con semimargen suprayectivo cero tienen la propiedad del punto fijo.

2.3.24 Definición. Sean X un espacio métrico conexo y A y B subconjuntos cerrados de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Decimos que un subconjunto cerrado H de X *corta débilmente entre A y B en X* si para cualquier subconjunto cerrado conexo C de X tal que $A \cap C \neq \emptyset$ y $B \cap C \neq \emptyset$, se cumple que $C \cap H \neq \emptyset$.

2.3.25 Definición. Sean X un espacio métrico conexo y A y B subconjuntos cerrados de X . Decimos que X *es s -conexo entre A y B* si para cualquier subconjunto cerrado H de X que corta débilmente entre A y B , se tiene que alguna componente K de H corta débilmente entre A y B . Decimos que X es *s -conexo* si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados A y B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces X es s -conexo entre A y B .

2.3.26 Teorema. *Para cualquier continuo X , $C(X)$ es s -conexo.*

Demostración. Sea X un continuo. Entonces existe una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de continuos localmente conexos tal que, $X_n \supset X_{n+1}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X$ [14, Lema 19.1]. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C(X_n)$ es un retracto absoluto (Teorema 2.2.11). Además, por el Teorema 2.3.13, para toda $n \in \mathbb{N}$, $C(X_n)$ es unicoherente. Entonces $C(X_n)$ es s -conexo para toda $n \in \mathbb{N}$ [26, Teorema 1, pág. 87]. Esto implica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C(X_n)$ es s -conexo [26, Corolario 2.1, pág. 90]. Observemos que $C(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C(X_n)$. Por tanto $C(X)$ es s -conexo.

Q.E.D.

2.3.27 Teorema. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$ y $s, t \in [0, 1]$ con $s < t$. Si $\mathcal{H}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$ que corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en el bloque de Whitney $\mu^{-1}([s, t])$ entonces $\mathcal{H}$ corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en $C(X)$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ un subcontinuo de $C(X)$ tal que $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}(s) \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$. Afirmamos que existe una componente $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}([s, t])$ tal que $\mathcal{D} \cap \mu^{-1}(s) \neq \emptyset$ y $\mathcal{D} \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que ninguna componente de $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}([s, t])$ intersecta tanto a $\mu^{-1}(s)$ como a $\mu^{-1}(t)$. Por el Teorema 1.2.10 se tiene que:

$$\mathcal{C} \cap \mu^{-1}([s, t]) = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$$

donde $\mathcal{Z}_1$ y $\mathcal{Z}_2$ son subconjuntos cerrados y ajenos de $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}([s, t])$ tales que:

$$(\mathcal{C} \cap \mu^{-1}(s)) \subset \mathcal{Z}_1 \text{ y } (\mathcal{C} \cap \mu^{-1}(t)) \subset \mathcal{Z}_2.$$

Notemos que $\mathcal{C} = (\mathcal{Z}_1 \cup \{A \in \mathcal{C} : \mu(A) \leq s\}) \cup (\mathcal{Z}_2 \cup \{A \in \mathcal{C} : \mu(A) \geq t\})$. Además, $(\mathcal{Z}_1 \cup \{A \in \mathcal{C} : \mu(A) \leq s\}) \cap (\mathcal{Z}_2 \cup \{A \in \mathcal{C} : \mu(A) \geq t\}) = \emptyset$. Lo que contradice que $\mathcal{C}$ sea un continuo. Por tanto, existe una componente $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}([s, t])$ que intersecta a $\mu^{-1}(s)$ y a $\mu^{-1}(t)$. Como $\mathcal{H}$ corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en el bloque de Whitney $\mu^{-1}([s, t])$, tenemos que $\mathcal{D} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{C} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{H}$ corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en $C(X)$.

Q.E.D.

2.3.28 Teorema. Sea X un continuo. Si $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney para $C(X)$ y $s, t \in [0, 1]$ con $0 \leq s < t \leq 1$, entonces el bloque de Whitney $\mu^{-1}([s, t])$ es s -conexo entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$.

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado de $C(X)$ que corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en el bloque $\mu^{-1}([s, t])$. Por el Teorema 2.3.27, $\mathcal{H}$ corta débilmente a $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en $C(X)$.

Dado que X es s -conexo, existe una componente $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ que corta débilmente a $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en $C(X)$ y, así, $\mathcal{K}$ corta débilmente a $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en el bloque $\mu^{-1}([s, t])$.

Q.E.D.

2.3.29 Observación. Notemos que los Teoremas 2.3.26 y 2.3.27 se pueden demostrar cambiando $C(X)$ por 2^X . El Teorema 2.3.28, lo podemos demostrar para una función de Whitney μ para 2^X , si le agregamos la hipótesis de que sea monótona.

2.3.30 Definición. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica. Decimos que $\mathcal{P}$ es una *propiedad de Whitney*, si para cualquier continuo X con la propiedad $\mathcal{P}$, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cualquier función de Whitney μ para $C(X)$ y para toda $t \in [0, 1]$.

Hosokawa [13, Corolario 3.3] demuestra que tener semimargen suprayectivo cero es una propiedad de Whitney. Entonces, si X es un continuo que tiene semimargen supreyectivo cero, $\mu^{-1}(t)$ tiene semimargen suprayectivo cero para cada $t \in [0, 1]$. Así, por la Observación 2.3.23, los niveles de Whitney tienen la propiedad del punto fijo para toda $t \in [0, 1]$.

2.3.31 Teorema. Sea X un continuo con semimargen suprayectivo cero. Si $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney para $C(X)$ y $0 \leq s < t \leq 1$, entonces el bloque de Whitney $\mu^{-1}([s, t])$ tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sean s y $t \in [0, 1]$ con $s < t$. Consideremos una función continua $f : \mu^{-1}([s, t]) \rightarrow \mu^{-1}([s, t])$ y definimos:

$$\mathcal{H} = \{A \in \mu^{-1}([s, t]) : \mu(A) = \mu(f(A))\}.$$

Ya que $\mu|_{\mu^{-1}([s, t])} : \mu^{-1}([s, t]) \rightarrow [s, t]$ es una función universal [8, Teorema 2.6 y Corolario 5.11]. Entonces existe $A \in \mu^{-1}([s, t])$ tal que $\mu|_{\mu^{-1}([s, t])}(A) = (\mu \circ f)(A) = \mu(f(A))$. Por tanto $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

Mostraremos las siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{H}$ corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en el bloque $\mu^{-1}([s, t])$.

Sea $\mathcal{C}$ un subcontinuo del bloque de Whitney $\mu^{-1}([s, t])$ tal que $\mu^{-1}(s) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ y $\mu^{-1}(t) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Notemos que $\mu(\mathcal{C}) = [s, t]$. Entonces $\mu|_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow [s, t]$ es una función universal [8, Teorema 2.6 y Corolario 5.11]. Esto implica que existe $B \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(B) = \mu(f(B))$. Por tanto, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.3.27, obtenemos que $\mathcal{H}$ corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$ en $C(X)$. Por el Teorema 2.3.26 existe una componente $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ que corta débilmente entre $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$.

2. $X = \bigcup \{A : A \in \mathcal{K}\}$.

Notemos que $\bigcup \{A : A \in \mathcal{K}\} \subset X$. Consideremos $x \in X$. Sea α un arco de orden en $C(X)$ de $\{x\}$ a X . Notemos que α es un subcontinuo de $C(X)$ que intersecta a $\mu^{-1}(s)$ y $\mu^{-1}(t)$. Por lo tanto, $\alpha \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Sea $A \in \alpha \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Notemos que para cada $B \in \alpha$, $x \in B$. Así, $X \subset \bigcup \{A : A \in \mathcal{K}\}$.

3. Existe $A \in \mathcal{K}$ tal que $A \subset f(A)$ o $f(A) \subset A$.

Supongamos que no es cierto. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda $A \in \mathcal{K}$, $f(A) \not\subset N(\epsilon, A)$ y $A \not\subset N(\epsilon, f(A))$. Para cada $A \in \mathcal{K}$, consideremos:

$$[A] = (A \times f(A)) \setminus (N(\epsilon, f(A)) \times N(\epsilon, A)).$$

Por el Lema 3.1 de [13], se tiene que $[A]$ es un subcontinuo de $X \times X$ tal que $\pi([A]) = A$ y $[A] \cap \Delta_X = \emptyset$. Sea $M = \bigcup \{[A] : A \in \mathcal{K}\}$. Notemos que M es un subcontinuo de $X \times X$. Por la Afirmación 2 y dado que $\pi[A] = A$ se tiene que $\pi(M) = X$. Además, como $[A] \cap \Delta_X = \emptyset$, se tiene que $M \cap \Delta_X = \emptyset$. Lo que contradice que X tenga semimargen suprayectivo cero. Por tanto, existe $A \in \mathcal{K}$ tal que $A \subset f(A)$ o $f(A) \subset A$.

Fijemos $A \in \mathcal{K}$ tal que $A \subset f(A)$ o $f(A) \subset A$. Como $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{H}$. Esto implica que $\mu(A) = \mu(f(A))$. Como μ es una función de Whitney se

tiene que $A = f(A)$. Así, el bloque de Whitney $\mu^{-1}([s, t])$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.3.32 Corolario. *Si X es un continuo con semimargen suprayectivo cero entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Observemos que $C(X) = \mu^{-1}([0, 1])$. Como X tiene semimargen suprayectivo cero entonces por el Teorema 2.3.31, $\mu^{-1}([0, 1])$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.3.33 Corolario. *Si X es un continuo tipo arco entonces cada bloque de Whitney tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Como X es tipo arco, X tiene semimargen suprayectivo cero (Observación 2.3.23). Por el Teorema 2.3.31, cualquier bloque de Whitney en $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.3.34 Corolario (Teorema de Segal). *Si X es un continuo tipo arco entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Observemos que los continuos tipo arco tienen semimargen suprayectivo cero (Observación 2.3.23) y que $C(X) = \mu^{-1}([0, 1])$. Por el Corolario 2.3.32, $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.4. Continuos Tipo Círculo.

A continuación, mostraremos que el hiperespacio de subcontinuos de un continuo tipo círculo tiene la propiedad del punto fijo. Este resultado fue demostrado de manera independiente por J. T. Rogers, Jr. en [34, Teorema 4,

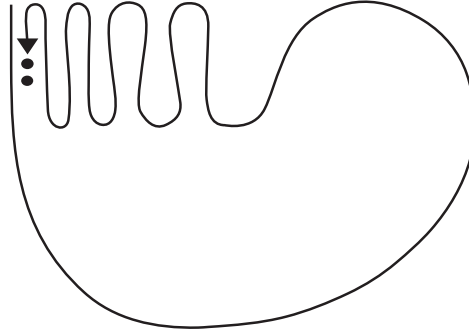


Figura 2.4: El círculo de Varsovia es un continuo tipo círculo.

pág. 233], y por J. Krasinkiewicz en [16, Teorema 4.2, pág. 160]. Presentaremos la demostración dada por J. Krasinkiewicz.

2.4.1 Definición. Decimos que un continuo X es *tipo círculo* si para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ -función suprayectiva $f_\epsilon : X \rightarrow S^1$.

Muchos de los ejemplos que conocemos de continuos tipo círculo, también son continuos tipo arco. A un continuo que es tipo círculo y no es tipo arco lo llamaremos *tipo círculo propio*. Los siguientes teoremas, además de caracterizar a los continuos que cumplen ambas condiciones, dan relaciones entre los continuos tipo círculo y las funciones esenciales e inesenciales.

2.4.2 Lema. Si X es un continuo tipo círculo y, para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ -función $f_\epsilon : X \rightarrow S^1$ inesencial, entonces X es un continuo tipo arco.

Demostración. Como f_ϵ es inesencial existe una función continua $\lambda_\epsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_\epsilon(x) = \exp(\lambda_\epsilon(x))$ para cada $x \in X$ [30, Teorema 5.3]. Notemos que $\lambda_\epsilon(X)$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$. Además, para cada $y \in S^1$, se tiene que $f_\epsilon^{-1}(y) = (\exp(\lambda_\epsilon))^{-1}(y) = \lambda_\epsilon^{-1}(\exp^{-1}(y))$. Lo cual implica que $\text{diám}(\lambda_\epsilon^{-1}(\exp^{-1}(y))) = \text{diám}(f_\epsilon^{-1}(y)) < \epsilon$. Así, λ_ϵ es una ϵ -función. Por lo tanto X es tipo arco.

Q.E.D.

2.4.3 Corolario. Si X es un continuo tipo círculo propio, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ -función $f_\epsilon : X \rightarrow S^1$ es esencial.

2.4.4 Lema. Sean X y Y dos continuos, $\epsilon > 0$ y $f : X \rightarrow Y$ una ϵ -función. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, si $A \subset Y$ y $\text{diám}(A) < \delta$ entonces $\text{diám}(f^{-1}(A)) < \epsilon$.

Demostración. Supongamos que no es cierto. Entonces para cada $\delta = \frac{1}{n}$, existe $A_n \subset Y$ que cumple que $\text{diám}(A_n) < \frac{1}{n}$ y $\text{diám}(f^{-1}(A_n)) \geq \epsilon$. Como $\text{diám}(A) = \text{diám}(Cl_Y(A))$ para cualquier subconjunto A de Y , sin pérdida de generalidad suponemos que cada A_n es cerrado en Y . Sean x_n y $x'_n \in f^{-1}(A_n)$ tales que $d(x_n, x'_n) = \text{diám}(f^{-1}(A_n))$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a $x \in X$ y que $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ converge a $x' \in X$. Observemos que $d(x, x') \geq \epsilon$. Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(A_n) = 0$. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{y\}$ para alguna $y \in Y$. Como f es una ϵ -función, se tiene que $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \epsilon$. Además, x y $x' \in f^{-1}(y)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el resultado es cierto.

Q.E.D.

2.4.5 Teorema. Si X es un continuo tipo círculo e irreducible, entonces es indescomponible o unión de dos continuos indescomponibles.

Demostración. Sea X un continuo tipo círculo irreducible entre p y $q \in X$. Supongamos que X es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, con $p \in A$ y $q \in B$. Afirmamos que $Cl_X(X \setminus A)$ y $Cl_X(X \setminus B)$ son conjuntos conexos. Supongamos que $Cl_X(X \setminus A)$ no es conexo. Entonces existen dos abiertos ajenos y no vacíos U y V tales que $U \cup V = Cl_X(X \setminus A)$. Sean $Y = U \cup A$ y $Z = V \cup A$. Observemos que Y y Z son continuos [29, Proposición 6.3, pág. 88]. Además, $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z = A$. Como p es un punto de irreducibilidad, se tiene que $p \notin A$ [29, Lema 11.5, pág. 198], lo cual es una contradicción. Como $X \setminus A$ es conexo, entonces $Cl_X(X \setminus A)$ es conexo. Análogamente se prueba que $Cl_X(X \setminus B)$ es conexo. Por tanto, podemos suponer que $A = Cl_X(X \setminus B)$ y que $B = Cl_X(X \setminus A)$.

Basta demostrar que A es un continuo indescomponible. Supongamos que A es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios C y D de A tales que $A = C \cup D$. Supongamos que $p \in C$. Esto implica que $B \cap C = \emptyset$. Dado que $p \in C$ y $q \in B$ se tiene que $X \setminus (B \cup C)$ es conexo [29, Teorema 11.8, pág. 199]. Llamemos $F = X \setminus (B \cup C)$. Sea $\epsilon > 0$. Podemos suponer que $2\epsilon < \text{diám}(B)$ y que $2\epsilon < \text{diám}(A)$. Sean $x_1 \in B$ y $x_2 \in C$ con la propiedad de que $B_\epsilon(x_1) \subset B$ y que $B_\epsilon(x_2) \subset C$. Como X es tipo círculo, existe una ϵ -función $f : X \rightarrow S^1$. Notemos que $f(x_1) \in f(B)$ y $f(x_2) \in f(C)$. Sea $\delta > 0$ garantizada por el Lema 2.4.4 para la ϵ que tenemos. Sean A_1 y A_2 dos subconjuntos cerrados y ajenos de S^1 tales que $\text{diám}(A_j) < \delta$ y $f(x_j) \in A_j$ para cada $j \in \{1, 2\}$. Observemos que $S^1 \setminus (A_1 \cup A_2)$ es un abierto de S^1 con dos componentes K y L . Observemos que $f^{-1}(A_1) \subset B$ y que $f^{-1}(A_2) \subset C$. Además, $X = B \cup C \cup F = f^{-1}(S^1) = f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup K \cup L) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup f^{-1}(K) \cup f^{-1}(L)$. Esto implica que $F \subset f^{-1}(K) \cup f^{-1}(L)$ y $F \cap f^{-1}(K) \neq \emptyset$ y $F \cap f^{-1}(L) \neq \emptyset$. Además, $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L) = \emptyset$. Lo que contradice que F sea conexo. Por lo tanto, A es indescomponible.

De manera semejante se demuestra que B es indescomponible.

Q.E.D.

2.4.6 Corolario. *Si X es un continuo tipo arco y tipo círculo, entonces X es indescomponible o unión de dos continuos indescomponibles.*

Demostración. Dado que X es tipo arco, entonces X es irreducible [29, Teorema 12.5, pág. 233]. Por el Teorema 2.4.5, X es indescomponible o unión de dos continuos indescomponibles.

Q.E.D.

Utilizando argumentos similares al Teorema de Punto fijo para el hiperespacio $C(X)$ cuando X es un continuo tipo arco, probaremos el mismo resultado para los continuos tipo círculo.

2.4.7 Teorema. *Si X es un continuo tipo círculo, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Supongamos que X no es un continuo tipo arco. Por el Corolario 2.4.3, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $f_{\epsilon_0} : X \rightarrow S^1$ es una ϵ_0 -función entonces f_{ϵ_0} es esencial. Sea $\epsilon < \epsilon_0$. Como X es tipo círculo propio, entonces existe una función esencial $f_\epsilon : X \rightarrow S^1$. Por el Lema 2.3.3 la función inducida de $f_\epsilon : X \rightarrow S^1$, $C(f_\epsilon) : C(X) \rightarrow C(S^1)$ es una ϵ -función. Observemos que $C(f_\epsilon)(F_1(X)) = F_1(S^1)$ y que $C(f_\epsilon) |_{F_1(X)} : F_1(X) \rightarrow F_1(S^1)$ es esencial. Como $C(X)$ es contraíble con respecto a S^1 (Teorema 2.3.13), $C(f_\epsilon)$ es una ϵ -función AH-esencial [30, Lema 5.11, pág. 55]. Por el Teorema 2.3.11 $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.5. Límites Inversos de Dendritas.

Mostraremos algunos resultados para hiperespacios de límites inversos de dendritas. Obtendremos un ejemplo de un continuo indescomponible X tal que sus hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.

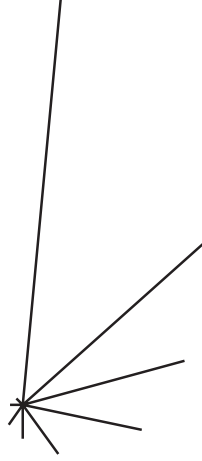
2.5.1 Definición. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no tiene curvas cerradas simples.

2.5.2 Definición. Decimos que un espacio métrico X tiene *forma trivial* (en el sentido de Borsuk), si X es una intersección anidada de retracts absolutos.

2.5.3 Definición. A una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ entre continuos la llamamos *celular* si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ tiene forma trivial.

2.5.4 Observación. Sean X y Y dos continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si f es una función celular, entonces f es monótona.

2.5.5 Definición. Sean X y Y dos continuos. A una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ entre continuos la llamamos *r-función* si existe una función continua $r : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ r = Id_Y$, donde Id_Y es la función identidad en Y .

Figura 2.5: La dendrita F_ω .

2.5.6 Lema. Sean X y Y dos continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ es monótona entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que 2^f es una función monótona. Entonces para todo $A \in 2^Y$, se tiene que $(2^f)^{-1}(A)$ es conexo. En particular, si $y \in Y$, se tiene que $(2^f)^{-1}(\{y\})$ es conexo. Es decir, $(2^f)^{-1}(\{y\})$ es un subcontinuo de 2^X . Sea $A \in (2^f)^{-1}(\{y\})$. Entonces $2^f(A) = \{y\}$. Esto implica que $f(A) = \{y\}$. En consecuencia, para todo $a \in A$, $f(a) = y$. De donde, $A \subset f^{-1}(y)$. Por consiguiente, $A \in 2^{f^{-1}(y)}$. Por tanto, $(2^f)^{-1}(\{y\}) \subset 2^{f^{-1}(y)}$. Consideremos ahora $B \in 2^{f^{-1}(y)}$. Esto implica que $B \subset f^{-1}(y)$. Entonces $f(B) = y$ para toda $b \in B$. Entonces $2^f(\{b\}) = \{y\}$ para toda $b \in B$. De aquí se tiene que $2^f(B) = \{y\}$. Por tanto $B \in (2^f)^{-1}(\{y\})$. Así $(2^f)^{-1}(\{y\}) = 2^{f^{-1}(y)}$. Esto implica que $2^{f^{-1}(y)}$ es conexo. Sea σ la función unión (Definición 1.3.11). Por [31, 1.49], se tiene que $\sigma((2^f)^{-1}(\{y\}))$ es un subcontinuo de X . Consideremos $x \in \sigma((2^f)^{-1}(\{y\}))$, entonces $\{x\} \in (2^f)^{-1}(\{y\})$. De donde, tenemos que $2^f(\{x\}) = \{y\}$. Luego entonces, $f(x) = y$. Con lo que concluimos que $x \in f^{-1}(y)$. Así $\sigma((2^f)^{-1}(\{y\})) \subset f^{-1}(y)$. Sea $x \in f^{-1}(y)$. Entonces $f(x) =$

y . Esto implica que $2^f(\{x\}) = \{y\}$. De donde $\{x\} \in (2^f)^{-1}(\{y\})$. Lo cual implica que $x \in \sigma((2^f)^{-1}(\{y\}))$. En consecuencia, $f^{-1}(y) \subset \sigma((2^f)^{-1}(\{y\}))$. Así $f^{-1}(y) = \sigma((2^f)^{-1}(\{y\}))$. Por tanto, $f^{-1}(y)$ es conexo y así f es una función monótona.

Q.E.D.

2.5.7 Lema. Sean X y Y dos continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces f es monótona si y sólo si $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es monótona para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que f es una función monótona. Sea $A \in C_n(Y)$. Entonces, $f^{-1}(A)$ tiene el mismo número de componentes que A . Sea $B \in (C_n(f))^{-1}(A)$. Notemos que $C_n(f)(B) = f(B) = A$ y $B \subset f^{-1}(A)$. Por el Lema 2 de [4] se tiene que B intersecta a cada componente de $f^{-1}(A)$. Por la Proposición 3 de [4] y por el Lema 1.3.7, existe un arco de orden $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = f^{-1}(A)$. Observemos que para cada $t \in [0, 1]$, $A = f(B) \subset f(\alpha(t)) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$. Esto implica que $\alpha([0, 1]) \subset (C_n(f))^{-1}(A)$. Por tanto, $(C_n(f))^{-1}(A)$ es arcoconexo y, así, $C_n(f)$ es una función monótona.

Supongamos que f no es una función monótona. Entonces existe un punto $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y no vacíos K y L de X tales que $K \cup L = f^{-1}(y)$ y $K \cap L = \emptyset$. Sean $\mathcal{A} = \{A \in (C_n(f))^{-1}(\{y\}) : A \subset K\}$ y $\mathcal{B} = \{B \in (C_n(f))^{-1}(\{y\}) : B \cap L \neq \emptyset\}$. Notemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subconjuntos cerrados y no vacíos de $C_n(X)$ tales que, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (C_n(f))^{-1}(\{y\})$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por tanto $C_n(f)$ no es una función monótona.

Q.E.D.

2.5.8 Teorema. Para cualesquiera dos continuos X y Y y cualquier función continua $f : X \rightarrow Y$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es una función monótona.

2. $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función celular.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ es una función celular.

Demostración. Demostraremos primero que 1 implica 2. Supongamos que f es una función monótona. Sea $B \in 2^Y$. Definimos $\Lambda = (2^f)^{-1}(B)$. Lo que queremos demostrar es que Λ tiene forma trivial. Sea $L = f^{-1}(B)$. Como f es una función continua y suprayectiva, entonces $f(L) = B$ es decir $2^f(L) = B$. Por tanto $L \in \Lambda$ y, así, $\Lambda \neq \emptyset$. Por la continuidad de 2^f , Λ es compacto en 2^X . Consideremos $A \in \Lambda$, con $A \neq L$. Como $A \in \Lambda$, $f(A) = B$ y, por como definimos L , se tiene que $A \subset L$. Consideremos ahora una componente L_1 de L . Entonces $f(L_1) \subset B_1$, donde B_1 es una componente de B . Notemos que $L_1 \subset f^{-1}(B_1) \subset L$. Dado que f es monótona, tenemos que $f^{-1}(B_1)$ es conexo. Además, como L_1 es una componente de L , $L_1 = f^{-1}(B_1)$. Entonces, como $f(A) = B$, $A \cap L_1 \neq \emptyset$. Por lo tanto, cada componente de L intersecta a A . Por el Teorema 1.3.7, existe un arco de orden Γ de A a L . Dado que $f(A) = B = f(L)$ y, como para cada $G \in \Gamma$, $A \subset G \subset L$, obtenemos que $\Gamma \subset \Lambda$. Así, mostramos que Λ es arcoconexo. Por tanto, Λ es un continuo. De aquí tenemos que $C(\Lambda)$ tiene forma trivial ([31, Teorema 1.182]). Sea σ la función unión (Definición 1.3.11). Por el Lema 1.3.12, σ es una función continua. Notemos que $\sigma(C(\Lambda)) = \Lambda$ y que, para cada $E \in \Lambda$, $\sigma(\{E\}) = E$. Por tanto, σ es una r -función de $C(\Lambda)$ a Λ . Como tener forma trivial es un invariante bajo r -funciones ([2, pág. 103]), se tiene que Λ tiene forma trivial. Por tanto 2^f es una función celular.

Ahora probaremos que 1 implica 3. Supongamos que f es una función monótona. Por el Teorema 2.5.7, se tiene que $C_n(f)$ es una función monótona. Sean $B \in C_n(Y)$ y $\Lambda = (C_n(f))^{-1}(B)$. Como $C_n(f)$ es monótona, se tiene que Λ es un subcontinuo de $C_n(X)$. Entonces tenemos que $C(\Lambda)$ tiene forma trivial ([31, Lema 1.182]). Sea $\mathcal{A} \in C(\Lambda)$ y consideremos $\sigma(\mathcal{A})$. Por el Lema 1.3.12, $\sigma : C(\Lambda) \rightarrow 2^X$ es una función continua y $\sigma(\mathcal{A}) \in C_n(X)$ ([22, Lema 7.2, pág. 250]). De hecho $\sigma(\mathcal{A}) \in \Lambda$. Además, para cada $G \in \Lambda$, se tiene que $\sigma(\{G\}) = G$. Entonces σ es una r -función de $C(\Lambda)$ a Λ . Como tener forma

trivial es un invariante bajo r -funciones ([2, pág. 103]), se tiene que Λ tiene forma trivial. Por tanto $C_n(f)$ es función celular.

Demostraremos que 2 implica 1. Notemos que, como 2^f es una función celular, entonces 2^f es una función monótona (Observación 2.5.4). Por el Lema 2.5.6 se tiene que f es monótona.

Veamos que se cumple que 3 implica 1. Como $C_n(f)$ es una función celular, entonces por la Observación 2.5.4 se tiene que $C_n(f)$ es monótona. Por el Lema 2.5.7 obtenemos que f es monótona.

Q.E.D.

La demostración del siguiente resultado puede ser encontrada en [28, Lema 2.2, pág. 751].

2.5.9 Lema. *Sean X y Y dos continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función monótona. Entonces existen continuos localmente conexos X_i y Y_i , para toda $i \in \mathbb{N}$, y una función continua $F : X_1 \rightarrow Y_1$ tales que:*

1. $X_{i+1} \subset X_i$ y $Y_{i+1} \subset Y_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
2. $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = X$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$,
3. $F|_{X_i}$ es una función monótona, para cada $i \in \mathbb{N}$, y
4. $F|_X = f$.

2.5.10 Teorema. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función monótona de un continuo X a un continuo localmente conexo Y , entonces $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ y $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ son funciones universales para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Probaremos el resultado para 2^f . Sea $g : 2^X \rightarrow 2^Y$ una función continua. Consideremos X_j , Y_j y F como en el Lema 2.5.9. Como Y es un continuo localmente conexo, por el Teorema 2.2.11, se tiene que 2^Y es un retracts absoluto. Por el Teorema 2.2.7, existe una función continua $G : 2^{X_1} \rightarrow 2^Y$ que extiende a g . Por el Lema 2.5.9, dado $j \in \mathbb{N}$, se tiene que X_j y Y_j son continuos localmente conexos y $F|_{X_j} = F_j$ es una función monótona

de X_j a Y_j . Por el Teorema 2.2.11, 2^{X_j} y 2^{Y_j} son retracts absolutos. Por el Lema 2.5.8, se tiene que $2^{F_j} : 2^{X_j} \rightarrow 2^{Y_j}$ es una función celular. Por [27, Corolario 3.10 pág. 233] se tiene que 2^{F_j} es una función universal. Dado que $G|_{2^{X_j}} : 2^{X_j} \rightarrow 2^{Y_j}$, existe $A_j \in 2^{X_j}$ tal que $2^{F_j}(A_j) = G(A_j)$. Observemos que, para toda $j \in \mathbb{N}$, se cumple que $X_j \subset X_1$, $A_j \in 2^{X_1}$ y que $2^F(A_j) = G(A_j)$. Notemos que $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ es una sucesión de elementos de 2^{X_1} . Como 2^{X_1} es compacto, existe una subsucesión $\{A_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ convergente a alguna $A \in 2^{X_1}$. Como $2^F(A_{j_k}) = G(A_{j_k})$ y 2^F y G son funciones continuas, entonces $2^F(A) = G(A)$. Dado que $A_{j_k} \in 2^{X_{j_k}}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y, como $\bigcap \{X_{j_k} : k \in \mathbb{N}\} = X$, se tiene que $A \in 2^X$. Esto implica que $G(A) = g(A)$. Además, $F|_X = f$. Así obtenemos que $2^F(A) = 2^f(A)$. Por tanto, $2^f(A) = g(A)$ y 2^f es una función universal.

De manera semejante se prueba que $C_n(f)$ es universal, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

2.5.11 Corolario. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función monótona de un continuo X a un continuo localmente conexo Y y $g : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces existe un subcontinuo $A \in C(X)$ tal que $f(A) = g(A)$.

Demostración. Notemos que $C(g) : C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función continua. Además como f es monótona y Y es localmente conexo, por el Teorema 2.5.10, $C(f)$ es una función universal. Como $C(f)$ es universal, existe $A \in C(X)$ tal que $C(f)(A) = C(g)(A)$. De donde, $f(A) = g(A)$.

Q.E.D.

2.5.12 Teorema. Sea $X = \varprojlim \{X_m, f_m^{m+1}\}$, donde X_m es un continuo localmente conexo para cada $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un subcontinuo Y_{m+1} de X_{m+1} tal que $f_m^{m+1}|_{Y_{m+1}} : Y_{m+1} \rightarrow X_m$ es monótona. Entonces tanto 2^X como $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean j y $k \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$. Consideremos Y_{j+1} el subcontinuo de X_{j+1} tal que $f_j^{j+1}|_{Y_{j+1}} : Y_{j+1} \rightarrow X_j$ es una función monótona.

Notemos que $Z_{j+2} = (f_{j+1}^{j+2} |_{Y_{j+2}})^{-1}(Y_{j+1})$ es un subcontinuo de Y_{j+2} [24, Lema 2.1.12, pág. 74]. Además, Z_{j+2} cumple que $f_j^{j+2} |_{Z_{j+2}}: Z_{j+2} \rightarrow X_j$ es monótona. Sea $Z_{j+3} = (f_{j+2}^{j+3} |_{Y_{j+3}})^{-1}(Z_2)$. Observemos que Z_{j+3} es un subcontinuo de Y_{j+3} [24, Lema 2.1.12, pág. 74]. Además, Z_{j+3} tiene la propiedad de que $f_j^{j+3} |_{Z_{j+3}}: Z_{j+3} \rightarrow X_j$ es monótona. Siguiendo este procedimiento, podemos construir un subcontinuo Z_k de X_k tal que $f_j^k |_{Z_k}: Z_k \rightarrow X_j$ es una función monótona. Por el Teorema 2.5.10 se tiene que $2^{f_j^k |_{Z_k}}: 2^{Z_k} \rightarrow 2^{X_j}$ y $C_n(f_j^k |_{Z_k}): C_n(Z_k) \rightarrow C_n(X_j)$ son funciones universales. Además, $2^{f_j^k |_{Z_k}} = 2^{f_j^k} |_{2^{Z_k}}$ y $C_n(f_j^k |_{Z_k}) = C_n(f_j^k) |_{C_n(Z_k)}$. Lo cual implica que $2^{f_j^k} |_{2^{Z_k}}$ y $C_n(f_j^k) |_{C_n(Z_k)}$ son funciones universales. Entonces cada $2^{f_j^k}: 2^{X_k} \rightarrow 2^{X_j}$ y $C_n(f_j^k): C_n(X_k) \rightarrow C_n(X_j)$ son funciones universales [12, Proposición 5, pág. 433]. Por el Teorema 2.2.11, 2^{X_m} y $C_n(X_m)$ son retracts absolutos para cada $m \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\varprojlim \{2^{X_m}, 2^{f_m^{m+1}}\}$ y $\varprojlim \{C_n(X_m), C_n(f_m^{m+1})\}$ tienen la propiedad del punto fijo [12, Corolario 1, pág. 437]. Como $\varprojlim \{2^{X_m}, 2^{f_m^{m+1}}\}$ es homeomorfo a 2^X y $\varprojlim \{C_n(X_m), C_n(f_m^{m+1})\}$ es homeomorfo a $C_n(X)$ [24, Teorema 2.3.4, pág. 102], se tiene que 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.5.13 Definición. Sean X y Y dos continuos. Una función continua y suprayectiva $f: X \rightarrow Y$ es *casi monótona* si para cualquier subcontinuo K de Y , con interior no vacío, $f^{-1}(K)$ tiene solamente un número finito de componentes y si L es una componente de $f^{-1}(K)$ entonces $f(L) = K$.

2.5.14 Definición. Sean X y Y dos continuos. Una función continua y suprayectiva $f: X \rightarrow Y$ es *ligera* si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto totalmente desconexo.

2.5.15 Lema. Si $f: X \rightarrow D$ es una función casi monótona de un continuo localmente conexo X a una dendrita D , entonces existe un subcontinuo Z de X tal que $f|_Z: Z \rightarrow D$ es monótona.

Demostración. Sabemos que existen un continuo M , una función monótona $m: X \rightarrow M$ y una función ligera e interior $l: M \rightarrow D$ tales que $f = l \circ m$

[37, Teorema 8.4, pág. 153]. Además, existe una dendrita E contenida en M tal que $l|_E$ es un homeomorfismo entre D y E [37, Teorema 2.4, pág. 188]. Consideremos $Z = m^{-1}(E)$. Observemos que $f|_Z: Z \rightarrow D$ es monótona.

Q.E.D.

2.5.16 Teorema. Sea $X = \varprojlim \{D_m, f_m^{m+1}\}$ el límite inverso de una sucesión inversa de dendritas D_m con funciones de ligadura $f_m^{m+1}: D_{m+1} \rightarrow D_m$ casi monótonas. Entonces 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Observemos que por el Lema 2.5.15, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un subcontinuo Z_{m+1} de D_{m+1} tal que $f_m^{m+1}|_{Z_{m+1}}: Z_{m+1} \rightarrow D_m$ es una función monótona. Así, se cumplen las hipótesis del Teorema 2.5.12. Por tanto, 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

2.5.17 Corolario. Sea $X = \varprojlim \{D_m, f_m^{m+1}\}$ el límite inverso de una sucesión inversa de dendritas D_m con funciones de ligadura $f_m^{m+1}: D_{m+1} \rightarrow D_m$ abiertas y suprayectivas. Entonces 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como las funciones abiertas entre continuos localmente conexos son casi monótonas [29, Corolario 13.24, pág. 289], entonces por el Teorema 2.5.16, se tiene que 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

2.5.18 Corolario. Sea $X = \varprojlim \{I_m, f_m^{m+1}\}$ el límite inverso de una sucesión inversa tal que $I_m = [0, 1]$ con funciones de ligadura $f_m^{m+1}: I_{m+1} \rightarrow I_m$ abiertas y suprayectivas. Entonces 2^X y $C_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$.

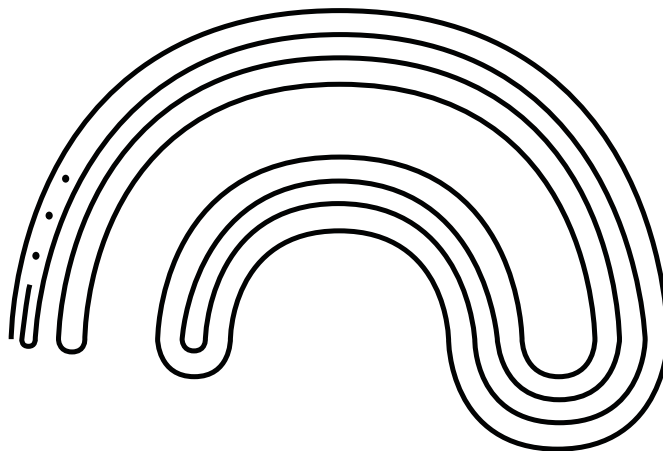


Figura 2.6: El continuo de Knaster.

Demostración. Notemos que $[0, 1]$ es una dendrita. Así se cumplen las hipótesis del Teorema 2.5.17. Por tanto, 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

2.5.19 Ejemplo. Consideremos a X como $\varprojlim \{X_m, f_m^{m+1}\}$. Donde $X_m = [0, 1]$ y f_m^{m+1} esta dada por

$$f_m^{m+1}(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. A X lo conocemos como *el continuo de Knaster*. Notemos que $f_m^{m+1} : X_{m+1} \rightarrow X_m$ es una función abierta y suprayectiva para cada $m \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 2.5.18, 2^X y para toda $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo. Observemos que este continuo es tipo arco. Así,

tenemos un ejemplo de un continuo tipo arco tal que 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, X es indescomponible [19, pág. 204]. Aquí tenemos un ejemplo de un continuo indescomponible, tal que 2^X y $C_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.

2.6. Dendroides.

En esta sección analizaremos los hiperespacios de los dendroides. Obtendremos resultados afirmativos acerca de la propiedad del punto fijo para los hiperespacios de dendroides suaves y abanicos. El resultado está basado, principalmente, en resultados obtenidos por J. Fugate en [10] y [11].

2.6.1 Definición. Decimos que un continuo X es un *dendroide* si X es arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

2.6.2 Propiedades. Algunas propiedades de los dendroides:

1. Son hereditariamente descomponibles [21, pág. 11].
2. Cualquier subcontinuo de un dendroide es un dendroide [21, pág. 11].
3. Tienen dimensión 1 [21, pág. 12].
4. Tienen la propiedad del punto fijo [30, Teorema 3.4, pág. 33].

2.6.3 Definición. Sean X un dendroide y $p \in X$. Decimos que X es *suave en el punto p* , si siempre que $\{x_i\}_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión convergente a un punto $x \in X$, entonces la sucesión $\{px_i\}_{n=1}^{\infty}$, donde $p \in X$ y px_i es el arco de p a x_i , converge al arco px . Un dendroide que es suave en algún punto $p \in X$ lo llamamos un *dendroide suave*.

2.6.4 Definición. Decimos que un continuo X es una *gráfica*, si X es la unión de un número finito de arcos tales que, dos a dos son disjuntos o se intersectan solamente en sus puntos extremos.

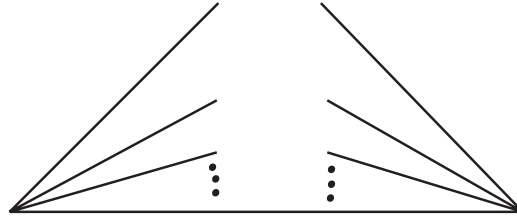


Figura 2.7: Un dendroide no suave.

2.6.5 Definición. Decimos que un continuo X es un *árbol*, si X es una gráfica sin curvas cerradas simples.

2.6.6 Teorema. Si X es un dendroide suave, entonces 2^X , $C_n(X)$ y $F_n(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tienen la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sean X un dendroide suave y $\epsilon > 0$. Entonces existen un árbol X_ϵ y una retracción $r_\epsilon : X \rightarrow X_\epsilon$ tal que $d(r_\epsilon(x), x) < \epsilon$ para cada $x \in X$ [11, Teorema 2]. Consideremos las funciones inducidas a los hiperespacios $2^{r_\epsilon} : 2^X \rightarrow 2^{X_\epsilon}$, $C_n(r_\epsilon) : C_n(X) \rightarrow C_n(X_\epsilon)$ y $F_n(r_\epsilon) : F_n(X) \rightarrow F_n(X_\epsilon)$. Notemos que por el Teorema 2.2.13, 2^{X_ϵ} , $C_n(X_\epsilon)$ y $F_n(X_\epsilon)$ tienen la propiedad del punto fijo. Además, $2^{r_\epsilon} : 2^X \rightarrow 2^{X_\epsilon}$, $C_n(r_\epsilon) : C_n(X) \rightarrow C_n(X_\epsilon)$ y $F_n(r_\epsilon) : F_n(X) \rightarrow F_n(X_\epsilon)$ son ϵ -retracciones y se tiene que $H_d(2^{r_\epsilon}(A), A) < \epsilon$, $H_d(C_n(r_\epsilon)(A), A) < \epsilon$ y $H_d(F_n(r_\epsilon)(A), A) < \epsilon$.

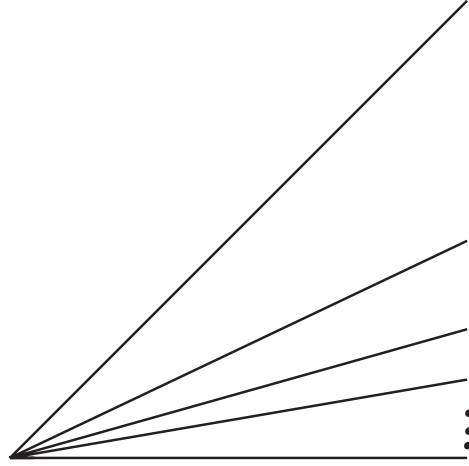


Figura 2.8: El abanico armónico.

Como ϵ es arbitraria, por el Teorema 1.4.6, se tiene que 2^X , $C_n(X)$ y $F_n(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

2.6.7 Definición. Un *abanico* es un dendroide X para el cual existe un único punto $p \in X$ que es un punto extremo de tres o más arcos en X que sólo se intersectan en p .

Como consecuencia de [10, Teorema 1] y con la misma demostración que la del Teorema 2.6.6, tenemos:

2.6.8 Teorema. Si X es un abanico, entonces 2^X , $C_n(X)$ y $F_n(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tienen la propiedad del punto fijo.

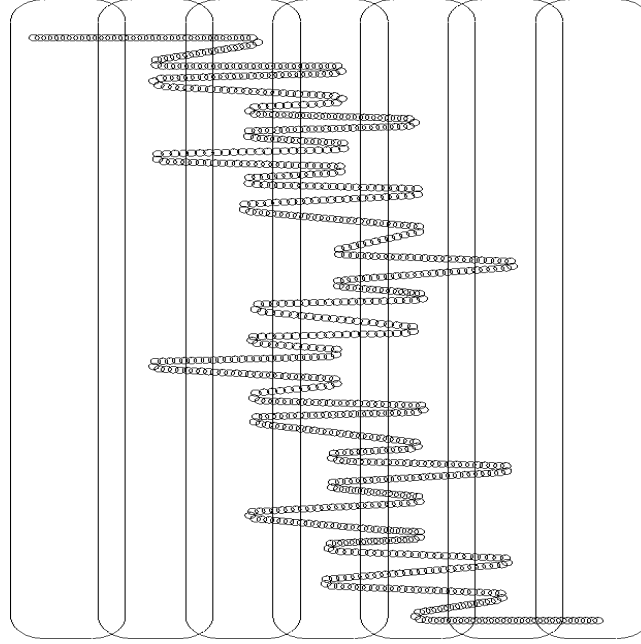


Figura 2.9: Un bosquejo del Pseudoarco. Un continuo hereditariamente indescomponible.

2.7. Continuos Hereditariamente Indescomponibles.

En esta sección mostraremos que $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo cuando X es un continuo hereditariamente indescomponible. Cabe resaltar que este teorema es dado por la estructura del hiperespacio $C(X)$. Aplicaremos un teorema de G. S. Young [39] acerca de la propiedad del punto fijo en continuos únicamente arcoconexos y contraíbles.

2.7.1 Definición. Decimos que un continuo X es *únicamente arcoconexo* si X es arcoconexo y para cualesquiera p y $q \in X$, con $p \neq q$, existe un único arco en X tal que p y q son sus puntos extremos.

2.7.2 Lema. Si X es un espacio métrico y arcoconexo tal que, toda sucesión

monotona de arcos está contenida en un arco, entonces X tiene la propiedad del punto fijo [39, Teorema 2 pág. 880].

2.7.3 Teorema. *Si X es un continuo arcoconexo que no tiene la propiedad del punto fijo, entonces X contiene:*

1. *Un subcontinuo N_1 tal que existe una función continua y suprayectiva $f : N_1 \rightarrow S^1$, tal que la imagen de ningún subconjunto cerrado propio de N_1 llena a S^1 y con la propiedad de que a lo más existe $y \in S^1$ tal que $f^{-1}(y)$ es no degenerado y éste es conexo o;*
2. *Un subcontinuo N_2 que contiene a un subconjunto R , que es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$ y que es denso en N_2 pero, tiene interior vacío relativo a N_2 o;*
3. *Un subcontinuo N_3 que es la unión de un conjunto R , que es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$ y un subcontinuo B . Además, existe una función continua $f : N_3 \rightarrow E$ donde $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}\}$ (a E lo conocemos como el arete hawaiano) tal que f es inyectiva en $N_3 \setminus B$, $f(B) = \{(0, 0)\}$ y tal que la imagen bajo f de ningún subconjunto cerrado propio de N_3 llena a E .*

Demostración. Como X no tiene la propiedad del punto fijo, por el Lema 2.7.2, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de arcos en X tal que $A_n \subset A_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está contenida en ningún arco. Sea $x \in A_1$ un punto que no es extremo. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, x divide a A_n en dos arcos A'_n y A''_n tales que $A'_n \subset A'_{n+1}$. Si X contiene una curva cerrada simple, entonces X contiene un continuo N_1 como en 1. Supongamos que X no contiene curvas cerradas simples. Entonces A'_n o A''_n no está contenido en un arco. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a es un punto extremo de A_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, podemos suponer que $A_{n+1} \setminus A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $B = \limsup Cl_X(A_{n+1} \setminus A_n)$. Afirmamos que B es conexo. Supongamos que no es cierto. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y

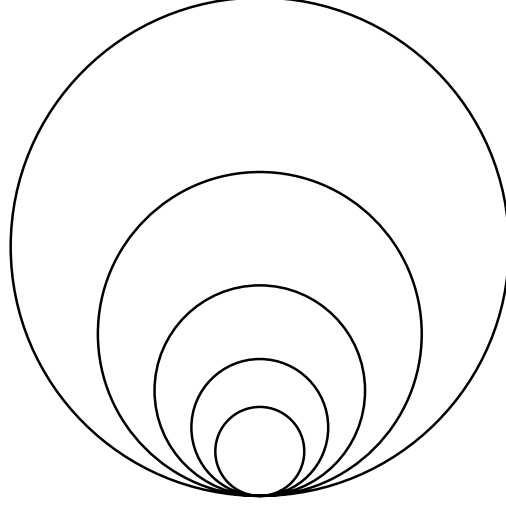


Figura 2.10: El arete Hawaiano.

no vacíos U y V tales que $B = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Para algún $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $Cl_X(A_{k+1} \setminus A_k) \subset U$ o $Cl_X(A_{k+1} \setminus A_k) \subset V$. Por inducción se tiene que, para toda $n > k$, $Cl_X(A_{n+1} \setminus A_n) \subset U$ o $Cl_X(A_{n+1} \setminus A_n) \subset V$. Además, $Cl_X(A_{n+2} \setminus A_{n+1}) \cap Cl_X(A_{n+1} \setminus A_n) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, B es conexo. Sea $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Observemos que R es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$.

Existen cuatro relaciones posibles entre R y B :

1. $R \cap B = \emptyset$. Entonces existen dos puntos $x \in B$ y $y \in R$ y un arco α de x a y tales que $\{x\} = \alpha \cap B$ y $\{y\} = \alpha \cap R$. Además, y separa a R en dos subconjuntos conexos R' y R'' , donde $R'' \cup \{y\}$ es un arco de a a y y $R' \cup \{y\}$ es homeomorfo a $[0, \infty)$. Sea $N_1 = \alpha \cup R' \cup B$. Observemos que la colección dada por B y $\{\{x\} : x \in N_1 \setminus B\}$ es una descomposición semicontinua superiormente [29, Definición 3.5 pág. 38], tal que $N_1/\mathcal{G}$ es homeomorfo a S^1 . Definimos $f : N_1 \rightarrow S^1$ como $f = h \circ \rho$ donde h es un homeomorfismo entre $N_1/\mathcal{G}$ y S^1 y ρ es la función cociente. Notemos que f satisface las condiciones de 1.

2. $R \cap B \neq \emptyset$ pero $R \cap B$ está contenida en un arco β . Consideremos $R' = R \setminus \beta$ y $N_1 = R' \cup B$. Observemos que la colección $\mathcal{G}$ dada por B y $\{\{x\} : x \in N_1 \setminus B\}$ es una descomposición semicontinua superiormente, tal que $N_1/\mathcal{G}$ es homeomorfo a S^1 . Definiendo $f : N_1 \rightarrow S^1$ como en el párrafo anterior, obtenemos que f cumple con las condiciones de 1.

3. Supongamos ahora que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{n=k}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n) \subset B$.

Consideremos $R' = \bigcup_{n=k}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)$ y $N_2 = B$. Sea U un abierto de X tal que $U \cap B \neq \emptyset$. Sea $x \in U \cap B$. En particular, $x \in U$. Esto implica que $U \cap Cl_X(A_{n+1} \setminus A_n) \neq \emptyset$ para una infinidad de índices. De aquí se tiene que $U \cap (A_{n+1} \setminus A_n) \neq \emptyset$ para una infinidad de índices. Entonces $U \cap (\bigcup_{n=k}^{\infty} A_{n+1} \setminus A_n) \neq \emptyset$. Por tanto, R' es denso en B . Veamos que R' tiene interior vacío con respecto a N_2 . Supongamos, por el contrario, que R' tiene interior no vacío. Entonces existe un abierto V relativo a B tal que $x \in V \subset Int_{N_2}(R')$. Esto implica que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $x \in Cl_X(A_{k'+1} \setminus A_{k'})$. Entonces existe una subsucesión $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $V \cap Cl_X(A_{n_j+1} \setminus A_{n_j}) \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por tanto R' tiene interior vacío. Así, se satisfacen las condiciones de 2.

4. Ningún arco de R contiene a $R \cap B$. Además, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{n=k}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n) \subset B$. Entonces $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ donde $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos abiertos tal que $I_n \neq I_j$ y $I_n \cap I_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los puntos extremos de I_n pertenecen a B para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $N_3 = B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Notemos que la colección $\mathcal{H}$ dada por B y $\{\{x\} : x \in I_n\}$ es semicontinua superiormente. Además, $N_3/\mathcal{H}$ es homeomorfo al Arete Hawaiano E . Sea $g : N_3 \rightarrow E$ definida como $h \circ \rho$ donde ρ es la función cociente y h es un homeomorfismo entre $N_3/\mathcal{H}$ y E . Así, g satisface las condiciones de 3.

Q.E.D.

2.7.4 Teorema (Young). *Si X es un continuo contraíble y únicamente arcoconexo, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Para probar el resultado, veremos que X no contiene subcontinuos homeomorfos a los descritos en el Teorema 2.7.3. Supongamos que X contiene un subcontinuo N tal que cumple las condiciones de 1 del Teorema 2.7.3. Como X es únicamente arcoconexo, X no contiene curvas cerradas simples. Sea $f : N \rightarrow S^1$ como en el Teorema 2.7.3. Podemos afirmar que existe $s \in S^1$ tal que $f^{-1}(s)$ es un subcontinuo no degenerado B de N . Además, afirmamos que $N = R \cup B$ donde R es una imagen continua e inyectiva de $[0, \infty)$ y $R \cap B$ es la imagen de 0. Sea $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una homotopía tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p$ para algún punto $p \in X$ y para toda $x \in X$. Observemos que H es una función uniformemente continua [6, Teorema 3.A.17 pág. 81]. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquiera par de puntos x y $y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$, entonces $d(H(x, t), H(y, t)) < \epsilon$ para toda $t \in [0, 1]$. Consideremos un punto $y \in B \setminus R$ tal que $y \neq p$. Afirmamos que $H(\{y\} \times [0, 1]) \cap R$ es conexo. Supongamos que no es cierto. Entonces existen dos subconjuntos K y L tales que $H(\{y\} \times [0, 1]) \cap R = K \cup L$ y K y L están separados. Entonces existe un arco A_1 contenido en R que va de un punto $l \in L$ a un punto $k \in K$. También existe un arco A_2 contenido $H(\{y\} \times [0, 1])$ de l a algún punto $k' \in K$. Esto implica que $A_1 \cup A_2$ contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción. Sea e el punto extremo de R . Notemos que $e \in B$. Observemos que es posible que $e \notin H(\{y\} \times [0, 1])$. Lo que no es posible es que, para algún $x \in R$, $H(\{y\} \times [0, 1])$ contenga al conjunto $R_x = \{z \in R : x \in ez\}$ donde ez es el arco que va de e a z . Supongamos que esto no es cierto. Entonces $R_x \subset H(\{y\} \times [0, 1])$. Como $Cl_X(R_x) = R_x \cup B$ se tiene que $B \subset H(\{y\} \times [0, 1])$. Como $H(\{y\} \times [0, 1])$ es un subconjunto cerrado en X y $R_x \subset H(\{y\} \times [0, 1])$ entonces $B \subset Cl_X(R_x) \subset H(\{y\} \times [0, 1])$. Notemos que $H(\{y\} \times [0, 1])$ es un continuo localmente conexo [6, Teorema 9.B.3 pág. 228]. Sea U un abierto conexo relativo a $H(\{y\} \times [0, 1])$ tal que $e \in U$ y $x \notin U$. Sea $x' \in R_x \cap U$. Entonces existe un arco de x' a e contenido en U ,

llamémoslo $x'e$. También existen arcos de x a x' y de e a x' en R , llamémoslos xx' y ex' , respectivamente. Observemos que $x'e \cup ex \cup xx'$ contiene una curva cerrada simple, lo que contradice la unicidad de arcos en X . Así concluimos que $R_x \setminus \{x\} \subset R \setminus H(\{y\} \times [0, 1])$ para algún $x \in R$. Además, dicho x pertenece a $H(\{y\} \times [0, 1])$. Si $z \in R_x$ entonces $H(\{z\} \times [0, 1])$ contiene al arco xz . De otra forma, $xz \cup H(\{z\} \times [0, 1]) \cup H(\{y\} \times [0, 1])$ contiene una curva cerrada simple.

Llamemos d a la distancia en X . Sea $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. Para cada ϵ_n existe $\delta_n > 0$ correspondiente a la continuidad uniforme de H . Sea $x_n \in R_x$ tal que $d(x_n, y) < \delta_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $d(H(\{x_n\}, t), H(\{y\}, t)) < \epsilon_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $t \in [0, 1]$. Consideremos $z \in R_x$ fijo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z \in xx_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde xx_n es el arco que va de x a x_n en R . Entonces $z \in H(\{x_n\} \times [0, 1])$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $d(z, H(\{y\} \times [0, 1])) < \epsilon_n$. Por tanto, $z \in H(\{y\} \times [0, 1])$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X no contiene un subcontinuo N que cumpla las condiciones de 1 del Teorema 2.7.3.

Con modificaciones al argumento, la prueba es similar para los subcontinuos del tipo 2 y 3 del Teorema 2.7.3.

Q.E.D.

2.7.5 Proposición. Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y A y B dos subcontinuos de X . Entonces $A \cap B \neq \emptyset$ si y sólo si $A \subset B$ o $B \subset A$.

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente indescomponible. Sean A y B dos subcontinuos de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Notemos que $A \cup B$ es un subcontinuo indescomponible de X . Esto implica que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Notemos que si $A \subset B$ o $B \subset A$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$.

Q.E.D.

2.7.6 Lema. Sea X un continuo indescomponible. Si $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = X$ entonces $X \in \mathcal{A}$

Demostración. Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$ un homeomorfismo. Por hipótesis, tenemos que $\bigcup h([0, 1]) = \bigcup \mathcal{A} = X$. Sea $\mathcal{G} = \{t \in [0, 1] : \bigcup h([0, t]) = X\}$. Observemos que $1 \in \mathcal{G}$. Además, si $0 \in \mathcal{G}$ entonces $X = \bigcup h([0, 0]) = \bigcup h(\{0\}) = h(0)$. Lo cual implica que $X \in \mathcal{A}$. Supongamos que $0 \notin \mathcal{G}$. Sea $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \bigcup h([0, t]) = X\}$. Notemos que $t_0 > 0$. Notemos que $\bigcup h([0, t_0]) = X$. Sea $t \in (0, t_0)$. De aquí se tiene que $\bigcup h([0, t]) = (\bigcup h([0, t])) \cup (\bigcup h([t, t_0])) = X$. Dado que X es indescomponible se tiene que $\bigcup h([t, t_0]) = X$. Consideremos una sucesión creciente $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0, t_0)$ que converge a t_0 . Como $t_n \in (0, t_0)$, se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\bigcup h([t_n, t_0]) = X$. Como h y la función unión, $\bigcup$, son funciones continuas, entonces $h(t_0) = \bigcup h([t_0, t_0]) = X$. Lo cual implica que $X \in \mathcal{A}$.

Q.E.D.

2.7.7 Lema. Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y A_0 y $A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subset A_1$. Si $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ de A_0 a A_1 entonces $\mathcal{A}$ es un arco de orden.

Demostración. Para cada $A \in \mathcal{A} \setminus A_0$, sea $\mathcal{A}(A_0, A)$ el subarco de $\mathcal{A}$ que va de A_0 a A . Notemos que $\mathcal{A}(A_0, A_0) = \{A_0\}$. Sea $\alpha = \{\bigcup \mathcal{A}(A_0, A) : A \in \mathcal{A}\}$. Probaremos las siguientes afirmaciones:

1. α es un continuo;
2. A_0 y $A_1 \in \alpha$;
3. $\alpha = \mathcal{A}$; y
4. α es un arco de orden.

Demostremos primero 1. Sea $f : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A})$ definida como $f(A) = \mathcal{A}(A_0, A)$. Notemos que f es una función continua. Sea σ la función unión (Definición 1.3.11) y consideremos $\sigma|_{C(\mathcal{A})} : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ [14, Ejercicio 11.5 (3), pág. 91]. Notemos que $\sigma|_{C(\mathcal{A})} \circ f : \mathcal{A} \rightarrow C(X)$ es una función continua. Además, $(\sigma|_{C(\mathcal{A})} \circ f)(A) = \bigcup \mathcal{A}(A_0, A)$ y $(\sigma|_{C(\mathcal{A})} \circ f)(\mathcal{A}) = \alpha$. Por lo tanto, α es un continuo.

Ahora probaremos 2. Como $\{A_0\} = \bigcup \mathcal{A}(A_0, A_0)$, se tiene que $A_0 \in \alpha$. Demostraremos que $A_1 \in \alpha$. Sean $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} : A_1 \subset \bigcup \mathcal{A}(A_0, A)\}$ y $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} : \bigcup \mathcal{A}(A_0, A) \subset A_1\}$. Observemos que $A_0 \in \mathcal{N}$ ya que $A_0 \subset A_1$, y que $A_1 \in \mathcal{M}$. Además, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subconjuntos cerrados en $\mathcal{A}$. Queremos demostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. Consideremos $A \in \mathcal{A}$ y $Z = \bigcup \mathcal{A}(A_0, A)$. Por [14, Ejercicio 11.5 (3), pág. 91], Z es un subcontinuo de $C(X)$. Claramente, $A_0 \in Z$. Dado que $A_0 \subset A_1$, se tiene que $Z \cap A_1 \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente indescomponible, por el Lema 2.7.5, $Z \subset A_1$ o $A_1 \subset Z$. En el primer caso $A \in \mathcal{N}$. En el segundo $A \in \mathcal{M}$. Por tanto, $\mathcal{A} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. Como $\mathcal{A}$ es conexo se tiene que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Sea $C \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Entonces, $\bigcup \mathcal{A}(A_0, C) \subset A_1 \subset \bigcup \mathcal{A}(A_0, C)$. Por tanto, $A_1 = \bigcup \mathcal{A}(A_0, C)$. Así, $A_1 \in \alpha$.

Veamos que 3 se cumple. Por 1 y 2, basta probar que $\alpha \subset \mathcal{A}$. Sea $Y \in \alpha$. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $Y = \bigcup \mathcal{A}(A_0, B)$. Esto implica que Y es un subcontinuo de X . De donde se obtiene que Y es un continuo indescomponible. Dado que Y es indescomponible y $\mathcal{A}(A_0, B)$ es un arco en $C(Y)$ cuya unión es Y , se tiene que $Y \in \mathcal{A}(A_0, B) \subset \mathcal{A}$ (Lema 2.7.6). Por tanto, $\alpha \subset \mathcal{A}$ y $\alpha = \mathcal{A}$.

A continuación demostraremos 4. Sean E y E' en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un arco, $\mathcal{A}(A_0, E) \subset \mathcal{A}(A_0, E')$ o bien $\mathcal{A}(A_0, E') \subset \mathcal{A}(A_0, E)$. Lo cual implica que $\bigcup \mathcal{A}(A_0, E) \subset \bigcup \mathcal{A}(A_0, E')$ o bien $\bigcup \mathcal{A}(A_0, E') \subset \bigcup \mathcal{A}(A_0, E)$. Por lo tanto, α es una cadena. De donde α es un arco de orden.

Q.E.D.

2.7.8 Proposición. *Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y A_0 y $A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Si $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ de A_0 a A_1 entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, donde $\mathcal{A}_0$ es un arco de orden de A_0 a $\bigcup \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_1$ es un arco de orden de A_1 a $\bigcup \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup \mathcal{A}$. Entonces Y es un subcontinuo indescomponible de X y $A_0 \cup A_1 \subset Y$. Además, por el Lema 2.7.6, $Y \in \mathcal{A}$. Como $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ se tiene que $Y \neq A_0$ y $Y \neq A_1$.

Entonces $\mathcal{A}(A_0, Y)$ y $\mathcal{A}(Y, A_1)$ son arcos de orden de A_0 a Y y de A_1 a Y , respectivamente, y $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A_0, Y) \cup \mathcal{A}(Y, A_1)$.

Q.E.D.

2.7.9 Lema. Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Si A y $B \in C(X)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$.

Demostración. Sean A y $B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente indescomponible, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Si $A \neq B$ y $A \subset B$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $A = B$. El otro caso es análogo.

Q.E.D.

2.7.10 Proposición. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Si K y $L \in C(X)$ son tales que $K \subset L$ y $K \neq L$ entonces existe un único arco de K a L en $C(X)$.

Demostración. Como $K \subset L$, por el Teorema 1.3.7, existe un arco de orden $\mathcal{A}$ de K a L . Sea $\mathcal{B}$ otro arco en $C(X)$ de K a L . Por el Lema 2.7.7, sabemos que $\mathcal{B}$ es un arco de orden. Sea $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Notemos que $\mu(\mathcal{A}) = [\mu(K), \mu(L)] = \mu(\mathcal{B})$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = \mu(B)$. Notemos que $A \cap B \neq \emptyset$. Por el Lema 2.7.9, tenemos que $A = B$. Por lo tanto, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Q.E.D.

2.7.11 Proposición. Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y A_0 y $A_1 \in C(X)$. Si $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ entonces existe un único arco de A_0 a A_1 en $C(X)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos arcos en $C(X)$ de A_0 y A_1 . Queremos demostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Como $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, por la Proposición 2.7.8, se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ donde $\mathcal{A}_0$ es un arco de orden de A_0 a $\bigcup \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_1$ es un

arco de orden de A_1 a $\bigcup \mathcal{A}$. Además, se tiene que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$, donde $\mathcal{B}_0$ es un arco de orden de A_0 a $\bigcup \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$ es un arco de orden de A_1 a $\bigcup \mathcal{B}$. Observemos que $\bigcup \mathcal{A}$ y $\bigcup \mathcal{B}$ son subcontinuos de X y $(\bigcup \mathcal{A}) \cap (\bigcup \mathcal{B}) \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente indescomponible, se tiene que $\bigcup \mathcal{A} \subset \bigcup \mathcal{B}$ o $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \mathcal{A}$. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A} \subset \bigcup \mathcal{B}$. Si $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{B}$ entonces tenemos el resultado deseado. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A} \neq \bigcup \mathcal{B}$. Entonces existe un arco de orden $\mathcal{C}$ de $\bigcup \mathcal{A}$ a $\bigcup \mathcal{B}$. Por la Proposición 2.7.10 observamos que $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{C} = \mathcal{B}_0$ y que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{C} = \mathcal{B}_1$. Esto implica que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Entonces como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos en $C(X)$ con los mismos puntos extremos, se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Q.E.D.

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Caracterización de Kelley.

2.7.12 Teorema. *Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si $C(X)$ es únicamente arcoconexo.*

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente indescomponible. Sean A_0 y $A_1 \in C(X)$ tales que, $A_0 \neq A_1$. Si $A_0 \subset A_1$ o $A_1 \subset A_0$ entonces, por la Proposición 2.7.10, existe un único arco en $C(X)$ de A_0 a A_1 . Si $A_0 \not\subset A_1$ y $A_1 \not\subset A_0$, por la Proposición 2.7.5, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Entonces, por la Proposición 2.7.11, existe un único arco en $C(X)$ de A_0 a A_1 . Así, concluimos que $C(X)$ es únicamente arcoconexo.

Supongamos ahora que X no es hereditariamente indescomponible. Entonces existe un subcontinuo descomponible Y de X . Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $A \cup B = Y$ y $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $p \in A \cap B$. Notemos que existe un arco de orden en $C(Y)$ de $\{p\}$ a Y que pasa por A . Llamemos a dicho arco α y llamemos β a un arco de orden en $C(Y)$ de $\{p\}$ a Y que pasa por B . Observemos que $A \in \alpha \setminus \beta$. Lo cual implica que $\alpha \neq \beta$. Por tanto, $C(X)$ no es únicamente arcoconexo.

Q.E.D.

2.7.13 Teorema. *Para cualquier continuo X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. 2^X es contraíble;
2. $C(X)$ es contraíble;
3. $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$;
4. $F_1(X)$ es contraíble en 2^X .

Demostración. Supongamos que 2^X es contraíble. Entonces existe una función continua $h : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$, tal que, para cada $A \in 2^X$, $h(A, 0) = A$ y $h(A, 1) = X$. Definimos $\mathcal{F} : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^{2^X}$ como:

$$\mathcal{F}(A, t) = \{h(A, s) : 0 \leq s \leq t\} = h(\{A\} \times [0, t])$$

y $K : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ como:

$$K(A, t) = \sigma(\mathcal{F}(A, t))$$

donde σ es la función unión (Definición 1.3.11). Observemos que, como h es una función continua, se tiene que $\mathcal{F}$ está bien definida y es una función continua. Además, $\mathcal{F}(2^X \times [0, 1]) = 2^{2^X}$. Por el Teorema 1.3.12, σ es continua. Por tanto, K también es continua, además:

$$K(A, 0) = \sigma(\mathcal{F}(A, 0)) = h(A, 0) = A, \text{ para cada } A \in 2^X;$$

$$K(A, 1) = \sigma(\mathcal{F}(A, 1)) = \bigcup \{h(A, s) : 0 \leq s \leq 1\} = X, \text{ para cada } A \in 2^X.$$

Fijemos $A \in 2^X$, definimos $\alpha_A = \{K(A, t) : t \in [0, 1]\} = K(\{A\} \times [0, 1])$. Observemos que $K(A, t_1) \subset K(A, t_2)$ si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Lo cual implica que α_A es una cadena de A a X . Además, α_A es un subcontinuo de 2^X . Por tanto, α_A es un arco de orden de A a X , o bien $\alpha_A = \{X\}$ [14, Lema 14.7, pág. 113]. Notemos que si $A \in C(X)$ entonces $\alpha_A \subset C(X)$. Sea $g = K|_{C(X) \times [0, 1]} : C(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$. Esta función es continua y cumple que $g(A, 0) = A$

y $g(A, 1) = X$, para toda $A \in C(X)$. Con esto concluimos que $C(X)$ es contraíble.

Supongamos que $C(X)$ es contraíble. Por el Lema 1.1.36, $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$.

Ahora supongamos que $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$. Considerando a $C(X)$ contenido en 2^X , por el Lema 1.1.36 tenemos que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X .

Supongamos ahora que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X . Entonces existe una homotopía $H : F_1(X) \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $H(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $H(\{x\}, 1) = K$ para algún $K \in 2^X$. Sean $\mathcal{G} : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^{2^X}$ dada por $\mathcal{G}(A, t) = \{H(\{a\}, t) : a \in A\} = H(F_1(A) \times \{t\})$ y $f : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ dada por $f(A, t) = \bigcup \mathcal{G}(A, t)$. Afirmamos que $\mathcal{G}$ es una función continua. Notemos que f cumple lo siguiente:

$$f(A, 0) = \bigcup \mathcal{G}(A, 0) = \bigcup \{\{a\} : a \in A\} = A, \text{ para toda } A \in 2^X \text{ y}$$

$$f(A, 1) = \bigcup \mathcal{G}(A, 1) = \bigcup \{H(\{a\}, 1) : a \in A\} = K, \text{ para toda } A \in 2^X.$$

Ahora demostraremos que $\mathcal{G}$ es continua. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que, si $H_d(\{x\}, \{y\}) < \delta$ y $|t_1 - t_2| < \delta$ entonces $H_d(H(\{x\}, t_1), H(\{y\}, t_2)) < \epsilon$. Sean A y $B \in 2^X$ tales que $H_d(A, B) < \delta$, y t_1 y $t_2 \in [0, 1]$ tales que $|t_2 - t_1| < \delta$. Lo que queremos demostrar es que $H_{H_d}(\mathcal{G}(A, t_1), \mathcal{G}(A, t_2)) < \epsilon$. Para esto, mostraremos que $\mathcal{G}(B, t_2) \subset N_{H_d}(\epsilon, \mathcal{G}(A, t_1))$. Sea $H(\{b\}, t_2) \in \mathcal{G}(B, t_2)$. Como $H_d(A, B) \leq \delta$, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \delta$. Entonces $H_d(\{a\}, \{b\}) < \delta$. Esto implica que $H_d(H(\{a\}, t_1), H(\{b\}, t_2)) < \epsilon$. Así, $\mathcal{G}(B, t_2) \subset N_{H_d}(\epsilon, \mathcal{G}(A, t_1))$. Análogamente mostramos que $\mathcal{G}(A, t_1) \subset N_{H_d}(\epsilon, \mathcal{G}(B, t_2))$. Lo cual implica que $H_d(H(\{x\}, t_1), H(\{y\}, t_2)) < \epsilon$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es una función continua. Por las propiedades que cumplen $\mathcal{G}$ y f y, dado que f es la composición de dos funciones continuas, se tiene que f es la homotopía deseada. Así, 2^X es contraíble.

Q.E.D.

2.7.14 Lema. Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, dada $t \in [0, 1]$, $\{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$ es una partición de X .

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$. Observemos que ningún elemento de la colección $\{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$ es vacío. Mostraremos que dados B y $C \in \{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$, entonces $B \cap C = \emptyset$. Sean B y $C \in \{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$, con $B \neq C$, y supongamos que $B \cap C \neq \emptyset$. Esto implica que $B \cup C$ es un subcontinuo descomponible de X . Lo que contradice que X sea hereditariamente indescomponible. Probaremos ahora que $X = \bigcup \{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$. Claramente $\bigcup \{A : A \in \mu^{-1}(t)\} \subset X$. Sea $x \in X$. Como X es hereditariamente indescomponible, por el Teorema 2.7.12, existe un único arco de orden α de $\{x\}$ a X en $C(X)$. Dada la conexidad de α y la continuidad de μ , se tiene que $\alpha \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$. Sea $A \in \alpha \cap \mu^{-1}(t)$. Como α es un arco de orden, se tiene que $x \in A$. Lo cual implica que $x \in \bigcup \{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$. Por lo tanto, $\{A : A \in \mu^{-1}(t)\}$ es una partición de X .

Q.E.D.

2.7.15 Teorema. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.

Demostración. Por el teorema 2.7.13 basta mostrar que $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$. Sea $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Consideremos $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times [0, 1]$. Por el Lema 1.3.7, existe un arco de orden α en $C(X)$ de $\{x\}$ a X . Además, como X es hereditariamente indescomponible, por el Teorema 2.7.12, dicho arco α es único. Como μ es una función continua, existe $A_{x,t} \in \mu^{-1}(t)$ tal que $x \in A_{x,t}$. Por la Proposición 2.7.10, $A_{x,t}$ es único. Definimos $h : F_1(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $h(\{x\}, t) = A_{x,t}$. Notemos que, para cada $\{x\} \in F_1(X)$, se cumple que $h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h(\{x\}, 1) = X$. Para demostrar que h es la homotopía deseada, debemos probar que es continua. Sea $\{(\{x_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $F_1(X) \times [0, 1]$ que converge a $(\{x\}, t)$. Por el Lema 1.1.30, basta probar que existe una subsucesión $\{h(\{x_{n_k}\}, t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{h(\{x_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$

que converge a $h(\{x\}, t)$. Como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión $\{h(\{x_{n_k}\}, t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{h(\{x_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $B \in C(X)$. Como $x_{n_k} \in h(\{x_{n_k}\}, t_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x \in B$. Además, se tiene que $\mu(h(\{x_{n_k}\}, t_{n_k})) = t_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que, μ es continua y, por el Lema 2.7.14, $\mu(B) = t$. Entonces $h(\{x\}, t) = B$. Así, h es una función continua. Por tanto, $C(X)$ es contraíble.

Q.E.D.

2.7.16 Corolario. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Por el Teorema 2.7.12, $C(X)$ es únicamente arcoconexo. Por el Teorema 2.7.15, $C(X)$ es contraíble. Así, $C(X)$ cumple las hipótesis del Teorema de Young (Teorema 2.7.4). Por lo tanto, $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Capítulo 3

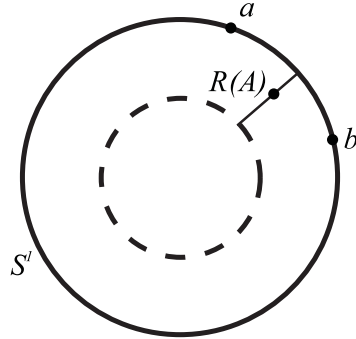
Hiperespacios sin la Propiedad del Punto Fijo.

En 1952, B. Knaster en [9], plantea la siguiente pregunta: ¿Si X es un continuo con la propiedad del punto fijo, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo? Hasta ese momento, todos los ejemplos conocidos daban respuesta afirmativa a dicha pregunta. A partir de la respuesta parcial de Segal (Teorema 2.3.16) vista en el capítulo anterior, se desató un gran interés en la respuesta de esta pregunta.

En este capítulo mostraremos que la respuesta a la pregunta de Knaster es negativa. Mencionaremos los resultados obtenidos por R. J. Knill en 1967 [18], así como las observaciones hechas por J. T. Rogers, Jr. en 1972 [33]. Ese mismo año, S. B. Nadler, Jr. y J. T. Rogers, Jr. en [32], dan la respuesta negativa a esta pregunta. Mostraremos un bosquejo de su demostración.

3.1. Un primer ejemplo.

Comenzaremos con un ejemplo de un continuo tal que, uno de sus hiperespacios no tiene la propiedad del punto fijo.

Figura 3.1: La relación R .

3.1.1 Ejemplo. Si $X = S^1$ entonces $F_2(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más dos puntos}\}$ es homeomorfo a una banda de Möbius. Sea $A \in F_2(X)$. Notemos que si A tiene exactamente dos puntos éstos podrían ser antípodas. En caso contrario sean $l(A)$ la longitud del arco más pequeño que contiene a A y $M(A)$ el punto medio de dicho arco. En caso de que A contenga puntos antípodas, observemos que existen dos arcos A_1 y A_2 de igual longitud cuyos extremos son los puntos de A . Llamemos $l(A)$ la longitud de A_1 y A_2 y consideremos $M(A_1)$ y $M(A_2)$ los puntos medios de tales arcos. Tomemos la siguiente relación $R : F_2(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $R(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})M(A)$. Observemos que R no es una función, dado que si A consiste de dos puntos antípodas entonces A tiene dos imágenes. Además, observemos que $Im(R) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|(a, b)\| \leq 1\}$ donde $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathbb{R}^2$ (Figura 3.1). Consideremos la siguiente relación de equivalencia en $Im(R)$: dados (x, y) y (x', y') decimos que $(x, y) \sim (x', y')$ si $x = x'$ y $y = y'$ o si $\|(x, y)\| = \frac{1}{2}$ entonces $(x, y) \sim (-x, -y)$. Con esta relación de equivalencia los puntos antípodas quedan relacionados.

Consideremos todos los puntos con segunda coordenada 0 en $Im(R)$. Si su primera coordenada es positiva, les asociaremos una flecha b (1 Figura 3.2). Si su primera coordenada es negativa, les asociaremos una flecha a (1 Figura 3.2). A los puntos de la circunferencia interior de $Im(R)$ les asociaremos una flecha c (1 Figura 3.2) en sentido contrario de las manecillas del reloj. Observemos

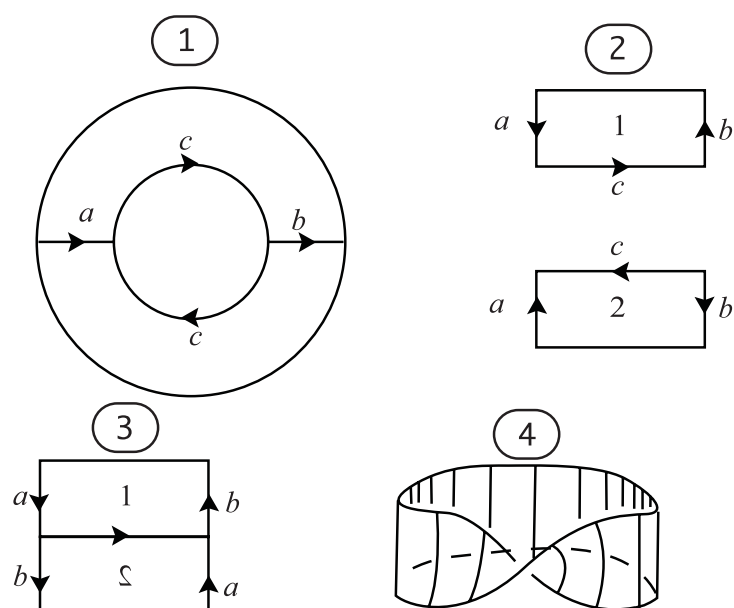


Figura 3.2: Pasos para construir la Banda de Möbius.

que las imágenes de los conjuntos que contienen puntos antípodos son los que hemos asociado con las flechas c . Identificando estos puntos tendremos ya un modelo para $F_2(S^1)$. Si hacemos un corte por la flecha a y la flecha b , obtendremos el dibujo 2 de la Figura 3.2. Ahora identificando los puntos antípodas obtendremos el dibujo 3 de la Figura 3.2. Por último identifiquemos las flechas a y b (4 Figura 3.2). El resultado de dicha identificación es una banda de Möbius. Así tenemos un modelo para $F_2(X)$. La banda de Möbius no tiene la propiedad del punto fijo, así $F_2(S^1)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Observemos que S^1 no tiene la propiedad del punto fijo tampoco.

3.2. Un cono sin la propiedad del punto fijo.

El primer ejemplo de un continuo cuyo cono no tiene la propiedad del punto fijo fue dado por S. Kinoshita [17] en 1953. El Ejemplo que mostramos fue presentado en [18] por R. J. Knill en 1967, con modificaciones hechas por R H Bing en 1969 [1].

Como veremos a continuación, la construcción de la función no es sencilla. Además de ser construída en pasos, nos auxiliaremos de una función, en principio, discontinua.

3.2.1 Definición. Sea X un espacio métrico. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $X \times [0, 1]$ determinanda por $(x, t) \sim (y, s)$ si y sólo si $(x, t) = (y, s)$ o $s = t = 1$. Definimos el *Cono Topológico sobre X* , denotado por $Cono(X)$, como el espacio cociente $(X \times [0, 1]) / \sim$. Al punto $X \times \{1\}$ lo llamamos *el vértice de $Cono(X)$* y al conjunto de puntos $X \times \{0\}$ lo llamamos *la base de $Cono(X)$* .

3.2.2 Definición. Sea X un espacio métrico y compacto. Por el Teorema 2.2.5, podemos considerar a X encajado en el Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Sea $v \in \mathcal{Q} \times [0, 1]$ tal que $v = (\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, 1)$ donde $x_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definimos *el Cono Geométrico sobre X* , denotado por $G(X)$, como:

$$G(X) = \{t \cdot v + [1 - t] \cdot x : x \in X \text{ y } 0 \leq t \leq 1\}.$$

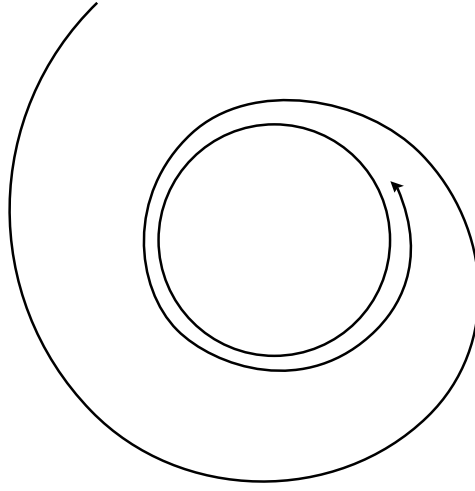


Figura 3.3: La espiral a la circunferencia.

Al punto v lo llamamos *el vértice de $G(X)$* y al subconjunto $X \times \{0\}$ lo llamamos *la base de $G(X)$* .

3.2.3 Teorema. *Si X es un espacio métrico y compacto, entonces $\text{Cono}(X)$ y $G(X)$ son homeomorfos.*

Demostración. Consideremos $f : X \times [0, 1] \rightarrow G(X)$ dada por $f(x, t) = tv + (1-t)x$. Observemos que f está bien definida, es una función continua y es suprayectiva. Dado que $G(X)$ es métrico y X es compacto, por el Teorema 1.1.50, $X/\mathcal{G}_f$ es homeomorfo a $G(X)$. Además, observemos que $f(x, t) = f(x', t')$ si y sólo si $(x, t) = (x', t')$ o $t = t' = 1$. Esto implica que la partición generada por f es la misma que la asociada a $\text{Cono}(X)$. Por tanto, $\text{Cono}(X)$ es homeomorfo a $G(X)$.

Q.E.D.

3.2.4 Definición. Definimos *la espiral a la circunferencia* (Figura 3.3) como $X = S^1 \cup \Lambda$ donde $\Lambda = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = 1 + \frac{1}{1+\theta}, \theta \geq 0\}$.

Observemos que este continuo no tiene la propiedad del punto fijo. Este hecho se da porque la circunferencia interior es un retracto de X . Consideremos la proyección radial $r : X \rightarrow S^1$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Notemos que r

está bien definida y es continua. Además, $r(s) = s$ para toda $s \in S^1$. Así vemos que S^1 es un retracto de X . Dado que S^1 no tiene la propiedad del punto fijo, por el Teorema 1.4.5, entonces X no la tiene.

Ahora definiremos la función sin puntos fijos en el cono sobre la espiral a la circunferencia.

3.2.5 Teorema. *Si X es la espiral a la circunferencia, entonces $\text{Cono}(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.3, podemos trabajar con el cono geométrico. Consideremos a X encajado en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cilíndricas de la siguiente forma:

$$S^1 = \{(r, \theta, z) : r = z = 1\};$$

$$\Lambda = \{(r, \theta, z) : z = 1, r = 1 + \frac{1}{1+\theta}, \theta \geq 0\}.$$

Tomemos al vertice del cono, v , como $v = (0, 0, 0)$. Sea $s_0 = (2, 0, 1)$, el punto extremo de la espiral. Denotamos al segmento de recta de v a s_0 como $\overline{vs_0}$. Denotamos por L_{z_0} a todos los puntos de $\text{Cono}(X)$ con la misma coordenada z_0 . A L_{z_0} lo llamamos el z_0 -nivel del $\text{Cono}(X)$. Al conjunto de los puntos del cono entre las coordenadas z_0 y z_1 , con $z_0 < z_1$, lo llamaremos un bloque del $\text{Cono}(X)$ y lo denotaremos por B_{z_0, z_1} .

Definimos primero una función $f_{S^1} : \text{Cono}(S^1) \rightarrow \text{Cono}(S^1) \cup \overline{vs_0}$ como sigue:

$$f_{S^1}(r, \theta, z) = \begin{cases} (1 - 3z) \cdot s_0, & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{1}{3}; \\ (3z - 1, \theta + z - \frac{2}{3}, 3z - 1), & \text{si } \frac{1}{3} \leq z \leq \frac{2}{3}; \\ (-3z + 3, \theta + z - \frac{2}{3}, -3z + 3), & \text{si } \frac{2}{3} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Esta función actúa geométricamente de la siguiente forma:

$$f_{S^1}(v) = s_0, f_{S^1}(L_{\frac{1}{3}}) = \{v\}, f_{S^1}(L_{\frac{2}{3}}) = L_1, f_{S^1}(B_{\frac{1}{3}, 1}) = \text{Cono}(S^1).$$

Además, la imagen del bloque $f_{S^1}(B_{0, \frac{1}{3}}) = v\vec{s}_0$. Observemos también que, el bloque $B_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}$, bajo f_{S^1} , gira en el sentido de las manecillas del reloj. El bloque $B_{\frac{2}{3}, 1}$, bajo f_{S^1} , rota en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Finalmente, esta función no tiene puntos fijos. Los lugares donde la primera y la tercera coordenadas coinciden son en $z = \frac{1}{4}$ y en $z = \frac{3}{4}$. En estos puntos siempre hay una rotación. Notemos también que f_{S^1} es continua por pedazos y que en $z = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{2}{3}$ está bien definida. Por tanto f_{S^1} es continua.

Ahora definiremos una función del $Cono(\Lambda)$ en el $Cono(\Lambda)$. Hemos considerado al $Cono(X)$ en coordenadas cilíndricas. Entonces $r = z(1 + \frac{1}{1+\theta})$ para toda $(r, \theta, z) \in Cono(X)$. Definimos R como $R = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : \theta \geq 0 \text{ y } 0 \leq z \leq 1\}$. Sea $\alpha : R \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por:

$$\alpha(\theta, z) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{1}{3}; \\ \max\{0, \theta + z - \frac{2}{3}\}, & \text{si } \frac{1}{3} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Esta función, nos dará la coordenada θ de la función que definiremos sobre el $Cono(X)$. Ésta es una función continua salvo en el conjunto $H = \{(\theta, \frac{1}{3}) : \theta > \frac{1}{3}\}$. Observamos este hecho haciendo aproximaciones verticales a un punto en H . Sin embargo, esto no afectará la función que deseamos construir sobre el $Cono(\Lambda)$, lo cual explicaremos posteriormente.

Sea $T \subset R$ el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Ahora definimos $\beta : R \rightarrow [0, 1]$ como:

$$\beta(\theta, z) = \begin{cases} (-3z + 1), & \text{si } (\theta, z) \in R \setminus T \text{ y } 0 \leq z \leq \frac{1}{3}; \\ (3z - 1), & \text{si } (\theta, z) \in R \setminus T \text{ y } \frac{1}{3} \leq z \leq \frac{2}{3}; \\ (-3z + 3), & \text{si } (\theta, z) \in R \setminus T \text{ y } \frac{2}{3} \leq z \leq 1; \\ 3 \max\{|\theta - \frac{1}{3}|, |z - \frac{1}{3}|\}, & \text{si } (\theta, z) \in T. \end{cases}$$

La función β será la función coordenada z en la función sobre el $Cono(X)$. Esta función es continua. Sean D el triángulo con vértices en $(0, \frac{1}{3})$, $(0, \frac{2}{3})$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, y E el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En las rectas horizontales dentro de E , $\beta(\theta, z) = 1 - 3\theta$, dado que $\theta \leq z \leq \frac{1}{3}$. En las rectas horizontales en $T \setminus E$ (es decir $z = z_0 > \frac{1}{3}$), β cambia continuamente su fórmula en los puntos (z_0, θ_0) , donde $\theta_0 = -z_0 + \frac{2}{3}$. Cambia de $\beta(\theta, z_0) = 1 - 3\theta$

si $\theta < \theta_0$ a $\beta(\theta, z_0) = 3z_0 - 1$ si $\theta \geq \theta_0$. Notemos que β coincide con la primer y tercer coordenada de f_{S^1} salvo en el interior de $D \cup E$.

Definimos $f_R : R \rightarrow R$ como $f_R(\theta, z) = (\alpha(\theta, z), \beta(\theta, z))$. Esta función no tiene puntos fijos en R . Observamos que los puntos donde θ permanece fijo bajo α son de la forma $(0, z)$ con $0 \leq z \leq \frac{2}{3}$ y los puntos de la forma $(\theta, \frac{2}{3})$ para toda θ . Notemos que si $0 \leq z \leq \frac{2}{3}$ entonces $(0, z) \in T$. Así, $\beta(0, z) = 3|0 - \frac{1}{3}| = 1$. Para cada θ , $\beta(\theta, \frac{2}{3}) = 1$. Esto implica que en estos puntos los valores z cambian a 1 bajo β . Así, f_R no tiene puntos fijos. Además, f_R es continua en $R \setminus H$ y, también, se tiene que:

$$\lim_{(\theta, z) \rightarrow (0, 0)} f_R(\theta, z) = (0, 1).$$

Notemos que estas coordenadas corresponden a la segunda y tercera coordenadas de $f_{S^1}(v) = (2, 0, 1)$.

Sea $\varphi : R \rightarrow \text{Cono}(\Lambda)$ definida como $\varphi(\theta, z) = (z(1 + \frac{1}{1+\theta}), \theta, z)$. Esta función es suprayectiva. Así que tiene inversa por la derecha. Llamemos a dicha inversa ψ . Definimos $g_\Lambda : \text{Cono}(\Lambda) \rightarrow \text{Cono}(\Lambda)$ como $g_\Lambda = \varphi \circ f_R \circ \psi$. Sea $M = \{(r, \theta, \frac{1}{3}) \in \text{Cono}(\Lambda) : \theta \geq \frac{1}{3}\}$. Observemos que $H = \psi(M)$ (recordemos que H es el conjunto donde f_R es discontinua). Como $f_R(H) = \{(0, 0)\}$ y $\varphi(0, 0) = v$ se tiene que $g_\Lambda(M) = \{v\}$. Con esto hemos eliminado las discontinuidades de α en la función en el $\text{Cono}(X)$.

Veamos ahora que g_Λ no tiene puntos fijos. Sea $B = \{(\theta, z) \in R : z = 0\}$. Notemos que $\varphi : R \setminus B \rightarrow \text{Cono}(\Lambda) \setminus \{v\}$ manda a los puntos de coordenadas (z, θ_0) , con $\theta_0 \neq 0$, al correspondiente nivel L_z . Además, φ manda linealmente al conjunto $\{(z, 0) : 0 \leq z \leq 1\}$ a $v\vec{s}_0$. Así obtenemos que $\varphi : R \setminus B \rightarrow \text{Cono}(\Lambda) \setminus \{v\}$ es un homeomorfismo. Además, $\varphi(B) = \{v\}$. Dado que f_R no tiene puntos fijos, entonces φ no tiene puntos fijos en $\text{Cono}(\Lambda) \setminus \{v\}$. Como $f_R(B) = (0, 1)$ tenemos que:

$$g_\Lambda(v) = \varphi \circ f_R(\psi(v)) = \varphi(0, 1) = (2, 0, 1) = s_0.$$

Por tanto, g_Λ no tiene puntos fijos.

Definimos ahora $F : \text{Cono}(X) \rightarrow \text{Cono}(X)$ como:

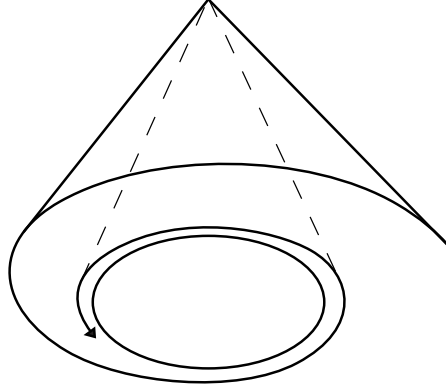


Figura 3.4: Cono sobre la espiral a la circunferencia.

$$F(x) = \begin{cases} f_{S^1}(x), & \text{si } x \in \text{Cono}(S^1); \\ g_\Lambda(x), & \text{si } x \in \text{Cono}(\Lambda). \end{cases}$$

La función F es continua. Notemos que $\varphi(T) \cap \text{Cono}(S^1) = \{v\}$. Esta observación es importante dado que $\varphi(T)$ es compacto y los puntos donde α y β no coinciden con las coordenadas de f_{S^1} están en T . Así, g_Λ es continua. Dado que f_{S^1} y g_Λ no tienen puntos fijos, F no tiene puntos fijos.

Q.E.D.

Así, tenemos un ejemplo de un continuo X que no tiene la propiedad del punto fijo tal que, $\text{Cono}(X)$ tampoco la tiene. Este resultado nos será útil en la siguiente sección.

3.3. El ejemplo de Nadler y Rogers.

En esta sección expondremos los resultados obtenidos por J. T. Rogers, Jr. en 1972 [33]. Rogers da el primer ejemplo de un continuo X tal que $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Esto lo hace utilizando el Teorema 3.2.5

y definiendo un homeomorfismo entre $C(X)$ y $Cono(X)$ cuando X es la espiral que converge a la circunferencia. Ese mismo año S. B. Nadler, Jr. y J. T. Rogers, Jr., en [32], demuestran que si X es la espiral que converge al disco unitario, entonces su $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Esto, construyendo una retracción al hiperespacio de subcontinuos de la espiral que converge a la circunferencia. Este resultado muestra la utilidad del Teorema 1.4.5, que apesar de su sencillez, es la herramienta fundamental de la demostración.

3.3.1 Teorema. *Si X es la espiral que converge a la circunferencia dada por $X = S^1 \cup \Lambda$ donde $\Lambda = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = 1 + \frac{1}{1+\theta}, \theta \geq 0\}$. Entonces $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$.*

Demostración. Consideremos a X encajado en $\mathbb{R}^2$. Para realizar esta demostración introducimos la siguiente notación:

- $l(A)$ denota la longitud de arco, para todo arco A en X .
- Sean x y $y \in X$ tales que $x \neq y$. Si x y $y \in S^1$, xy denota el arco de x a y que va en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Si x y $y \in \Lambda$, xy denota al único arco de x a y .
- Para cada $x \in \Lambda$, xS^1 denota al subcontinuo de X irreducible de x a S^1 .
- Sea $r : X \rightarrow S^1$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, la proyección radial.
- Para cada $x \in \Lambda$, sea $x_{2\pi}$ el punto más cercano a x en Λ tal que $r(xx_{2\pi}) = S^1$.

Sea V_x el segmento de recta vertical en $\mathbb{R}^3$ de $(x, 0)$ a $(x, l(xx_{2\pi}))$. Notemos que $l(xx_{2\pi}) > 2\pi$ para cada $x \in \Lambda$. Sea $Y = (\bigcup \{V_x : x \in \Lambda\}) \cup (S^1 \times [0, 2\pi])$. Observemos que Y es homeomorfo a $X \times [0, 2\pi]$. Para cada $x \in S^1$, sea $\mathcal{A}_x = \{xy : y \in S^1\}$. Sea $\alpha_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \{x\} \times [0, 2\pi]$ definida como $\alpha_x(xy) =$

$(x, l(xy))$ para cada $xy \in \mathcal{A}_x$. Ahora definimos $\alpha : C(S^1) \setminus \{S^1\} \rightarrow S^1 \times [0, 2\pi)$ como $\alpha(xy) = \alpha_x(xy)$ para toda $xy \in C(S^1) \setminus \{S^1\}$. Esta función es un homeomorfismo entre $C(S^1) \setminus \{S^1\}$ y $S^1 \times [0, 2\pi)$. Para cada $x \in \Lambda$, sean $\mathcal{B}_x^1 = \{xy : y \in xx_{2\pi}\}$ y $\mathcal{B}_x^2 = \{xy : y \in xx_{2\pi}S^1 \cap \Lambda\} \cup \{xS^1\}$. Observemos que $\mathcal{B}_x^1$ y $\mathcal{B}_x^2$ son arcos en $C(X)$ tales que $\mathcal{B}_x^1 \cap \mathcal{B}_x^2 = \{xx_{2\pi}\}$. Para cada $x \in \Lambda$, definimos los subarcos de V_x , V_x^1 y V_x^2 , como $V_x^1 = \{x\} \times [0, 2\pi]$ y $V_x^2 = \{x\} \times [2\pi, l(xx_{2\pi})]$. Para cada $x \in \Lambda$, sea $\beta_x^1 : \mathcal{B}_x^1 \rightarrow V_x^1$ dada por $\beta_x^1(xy) = (x, \frac{2\pi}{l(xx_{2\pi})} \cdot l(xy))$ donde $xy \in \mathcal{B}_x^1$. Esta función es un homeomorfismo entre $\mathcal{B}_x^1$ y V_x^1 . Consideremos ahora $\mathcal{B}^1 = \bigcup \{\mathcal{B}_x^1 : x \in \Lambda\}$ y $V^1 = \bigcup \{V_x^1 : x \in \Lambda\}$. Sea $\beta^1 : \mathcal{B}^1 \rightarrow V^1$ el homeomorfismo dado por $\beta^1(xy) = \beta_x^1(xy)$ para cada $xy \in \mathcal{B}^1$. Ahora consideremos $\mathcal{B}^2 = \bigcup \{\mathcal{B}_x^2 : x \in \Lambda\}$ y $V^2 = \bigcup \{V_x^2 : x \in \Lambda\}$. Construiremos un homeomorfismo entre $\mathcal{B}^2$ y V^2 . Para esto, sean $\varphi_1 : \mathcal{B}^2 \rightarrow \Lambda \times [1, 2]$ dado por $\varphi_1(xy) = (x, \frac{2l(xy)}{l(xx_{2\pi}) + l(xy)})$ para cada $xy \in \mathcal{B}^2$ y $\varphi_1(xS^1) = (x, 2)$, para cada $xS^1 \in \mathcal{B}^2$. Notemos que φ_1 es un homeomorfismo. Definimos $\varphi_2 : V^2 \rightarrow [1, 2]$ como $\varphi_2(x, t) = (x, \frac{t-2\pi}{l(xx_{2\pi})-2\pi} + 1)$ para cada $(x, t) \in V^2$. La cual, también, es un homeomorfismo. Sea $\beta^2 : \mathcal{B}^2 \rightarrow V^2$ dada por $\beta^2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Claramente, β^2 es el homeomorfismo entre $\mathcal{B}^2$ y V^2 que deseábamos. Observemos, además, que $\beta^1 = \beta^2$ en $\mathcal{B}^1 \cap \mathcal{B}^2$, ya que, para cada $x \in \Lambda$, tenemos que:

$$\beta^2(xx_{2\pi}) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(xx_{2\pi})) = \varphi_2^{-1}((x, 1)) = (x, 2\pi) \text{ y } \beta^1(xx_{2\pi}) = \beta_x^1(xx_{2\pi}) = (x, 2\pi).$$

Finalmente, definimos el homeomorfismo $\beta : C(X) \setminus C(S^1) \rightarrow \bigcup \{V_x : x \in \Lambda\}$ como:

$$\beta(A) = \begin{cases} \beta^1(A), & \text{si } A \in \mathcal{B}^1; \\ \beta^2(A), & \text{si } A \in \mathcal{B}^2. \end{cases}$$

Ahora definimos $f : C(X) \setminus \{S^1\} \rightarrow Y \setminus (S^1 \times \{2\pi\})$ como:

$$f(A) = \begin{cases} \alpha(A), & \text{si } A \in C(X) \setminus \{S^1\}; \\ \beta(A), & \text{si } A \in C(X) \setminus C(S^1). \end{cases}$$

Notemos que f es una función continua.

Consideremos ahora a Z como el espacio cociente $Y/(S^1 \times \{2\pi\})$ donde v es el punto obtenido al identificar $S^1 \times \{2\pi\}$. Sea $q : Y \rightarrow Z$ la siguiente función cociente:

$$q(y) = \begin{cases} \{y\}, & \text{si } y \in Y \setminus (S^1 \times \{2\pi\}); \\ v, & \text{si } y \in S^1 \times \{2\pi\}. \end{cases}$$

Observemos que, para cada $x = (x, 0) \in \Lambda$, $q(V_x)$ es el segmento de recta de $x = q(x)$ a $q(x, l(xx_{2\pi}))$. Definimos $h : C(X) \rightarrow Z$ como:

$$h(A) = \begin{cases} q \circ f(A), & \text{si } A \neq S^1; \\ v, & \text{si } A = S^1. \end{cases}$$

Esta función es un homeomorfismo. Ahora, mostraremos que Z es homeomorfo a $G(X)$. Por el Teorema 3.2.3, tendremos el resultado deseado. Consideremos a $G(X)$ como el cono geométrico sobre X con vértice en $(0, 0, 2\pi)$. Sea $\gamma : \Lambda \rightarrow [\pi, 2\pi)$ un homeomorfismo. Consideremos cada segmento de recta $\overline{vx} \in G(X)$ con $x \in \Lambda$. Llamemos p_x al punto en $\overline{vx}$ que se encuentra a altura $\gamma(x)$. Sea $e = (2, 0) \in \Lambda$ y denotemos por t_e a la altura de $q(e, l(ee_{2\pi}))$. En particular, $t_e > 2\pi$. Sea $\lambda : \Lambda \rightarrow (2\pi, t_e]$ un homeomorfismo tal que, para cada $x \in \Lambda \setminus \{e\}$, $\lambda(x)$ es estrictamente menor que la tercer coordenada de $q(x, l(xx_{2\pi}))$. Denotemos por z_x al punto de $q(V_x)$ a altura $\lambda(x)$.

Ahora, describiremos un homeomorfismo g de $G(X)$ a Z . Para cada $x \in \Lambda$, g manda a xv a Z como sigue: $g(x) = x$; g manda linealmente al segmento de recta xp_x en el segmento de recta xz_x en $q(V_x)$; g manda al segmento de recta p_xv en una espiral S_{z_x} que comienza en $z_x = g(p_x)$ y termina en v y es asintótica a la espiral S_{z_e} , cuando $x = e$, g manda a p_ev en la espiral S_{z_e} . Hemos descrito un homeomorfismo $g : \bigcup \{xv : x \in \Lambda\} \rightarrow Z \setminus q(S^1 \times [0, 2\pi))$. Observemos que $G(S^1) = q(S^1 \times [0, 2\pi])$, así, $g : G(S^1) \rightarrow q(S^1 \times [0, 2\pi])$ es la función identidad. De esta forma, describimos un homeomorfismo g de $G(X)$ a Z . Por tanto, $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$.

Q.E.D.

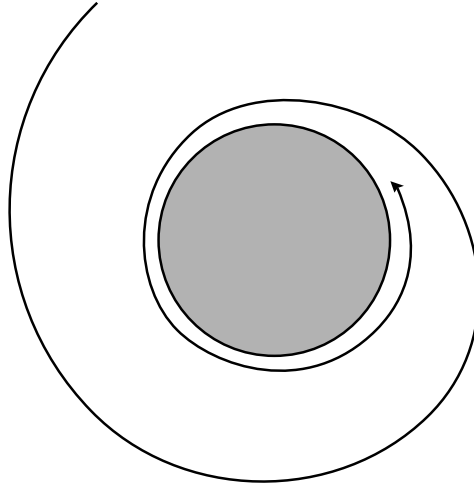


Figura 3.5: La espiral que converge al disco unitario.

3.3.2 Teorema. *Si X es la espiral a la circunferencia, se tiene que $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Como el $\text{Cono}(X)$ es homeomorfo a $C(X)$ (Teorema 3.3.1) y el $\text{Cono}(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo (Teorema 3.2.5), entonces, por el Teorema 1.4.4, $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Observemos que el Ejemplo 3.3.2, no da una respuesta a la pregunta de Knaster de 1952. Sin embargo, este es el primer ejemplo de un hiperespacio sin la propiedad del punto fijo.

3.3.3 Definición. Definimos la *espiral que converge al disco unitario* (Figura 3.5) definida como $X = D \cup Z$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$ y Z es el continuo de la Definición 3.2.4. Este continuo tiene la propiedad del punto fijo. [30, Ejercicio 2.7 pág. 27]

3.3.4 Teorema. *Si X es la espiral que converge al disco unitario, entonces $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Consideremos a X como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la topología heredada por la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ y Λ como en la Definición 3.2.4. Observemos que para cada $A \in Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D))$, $A \cap Z$ es un subcontinuo de Z . Sea $f : Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D)) \rightarrow C(Z)$ definida como $f(A) = A \cap Z$. Notemos que f es una función y que $f(A) = A$ para cada $A \in C(Z)$. Lo que queremos demostrar es que f es una retracción. Para lograr esto sólo falta ver la continuidad de f . Observemos que para cada $A \in Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D))$, $f(A) \subset A$. Además, para cada $A \in Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D))$, $f(A) = A$ o $f(A) = (A \cap \Lambda) \cup S^1$. Geométricamente observamos que, para cualquier punto en $x \in \Lambda$, el punto más cercano a x en D pertenece a S^1 . Sean A_1 y $A_2 \in Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D))$. Si A_1 y $A_2 \in C(Z)$ entonces $H_d(f(A_1), f(A_2)) = H_d(A_1, A_2)$. En caso de que A_1 y A_2 sean tales que $f(A_1) = (A_1 \cap \Lambda) \cup S^1$ y $f(A_2) = (A_2 \cap \Lambda) \cup S^1$ se tiene que $H_d(f(A_1), f(A_2)) \leq H_d(A_1, A_2)$. Si $f(A_1) = A_1$ y $f(A_2) = (A_2 \cap \Lambda) \cup S^1$, entonces $H_d(f(A_1), f(A_2)) < H_d(A_1, A_2)$. Esto implica que f es continua y, por lo tanto, es una retracción de $Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D))$ a $C(Z)$.

Sea $\mathcal{F} = \{A \in C(D) : S^1 \subset A\}$. Notemos que $(C(S^1) \cup \mathcal{F}) \subset Cl(C(Y) \setminus C(D))$. Sea $k : C(S^1) \cup \mathcal{F} \rightarrow C(S^1)$ dada por $k = f|_{C(S^1) \cup \mathcal{F}}$. Observemos que $g(A) = f(A)$ para cada $A \in C(S^1) \cup \mathcal{F}$. Como $C(S^1)$ es homeomorfo a una 2-celda podemos extender a k de forma continua a una función $g : C(D) \rightarrow C(S^1)$ [19, pág. 339]. Notemos que g es una retracción de $C(D)$ a $C(S^1)$.

Dado que $Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D)) = (C(X) \setminus C(D)) \cup C(S^1) \cup \mathcal{F}$ se tiene que $C(D) \cap Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D)) = C(S^1) \cup \mathcal{F}$. Definimos $r : C(X) \rightarrow C(Z)$ como:

$$r(A) = \begin{cases} f(A), & \text{si } A \in Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D)) \\ g(A), & \text{si } A \in C(D). \end{cases}$$

Dado que f es una retracción de $Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(D))$ a $C(Z)$, que g es continua en $C(D)$ y que $g(C(D)) = C(S^1) \subset C(Z)$ tenemos que r es una retracción de $C(X)$ a $C(Z)$. Por el Teorema 1.4.5 y el Corolario 3.3.2, $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Q.E.D.

Con este resultado concluimos que la respuesta a la pregunta de Knaster es negativa.

Capítulo 4

Preguntas Abiertas.

Las siguientes preguntas fueron tomadas de [30] y [31]. Estas preguntas permanecen aún sin respuesta. Haremos algunas observaciones a éstas.

4.1. Sobre 2^X y $C(X)$.

Las primeras preguntas, quizá, son las más naturales que podríamos plantear. A lo largo del trabajo hemos tratado de responder a dichas cuestiones. Aún cuando hemos dado algunas respuestas parciales, estas preguntas no han sido contestadas en su totalidad.

4.1.1 Pregunta. *¿Si X es un continuo, cuándo 2^X tiene la propiedad del punto fijo?*

4.1.2 Pregunta. *¿Si X es un continuo, cuándo $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo?*

Hemos notado a lo largo de nuestro estudio, que para continuos como los hereditariamente indescomponibles y los localmente conexos, su hiperespacio de subcontinuos tiene la propiedad del punto fijo. Dichos espacios podríamos colocarlos en una posición diametralmente opuesta.

Precisar condiciones necesarias y suficientes para que un continuo X sea tal que, $C(X)$, o bien 2^X tengan la propiedad del punto fijo, es una tarea difícil. No obstante se ha dado respuesta parcial a esta pregunta en distintos casos.

4.1.3 Pregunta. *¿Para cualquier continuo X son los siguientes enunciados equivalentes?*

1. 2^X tiene la propiedad del punto fijo;
2. $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Notemos que en todos los casos expuestos donde 2^X tiene la propiedad del punto fijo, $C(X)$ también la tiene. Por el contrario, hemos visto casos donde $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo y no se ha determinado si 2^X la tiene. Un contraejemplo a la pregunta 4.1.3 da respuesta afirmativa a la siguiente pregunta:

4.1.4 Pregunta. *¿Existe un continuo X tal que 2^X o $C(X)$ tengan la propiedad del punto fijo y el otro hiperespacio no la tenga?*

A continuación, expondremos preguntas que tienen que ver con ciertas clases de continuos.

4.1.5 Definición. Decimos que un continuo X es *tipo árbol*, si para cada $\epsilon > 0$ existen un árbol T y una ϵ -función suprayectiva $f_\epsilon : X \rightarrow T$.

4.1.6 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo árbol, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

Notemos que si X es un árbol, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Por el hecho anterior, intuimos que la respuesta es afirmativa.

La siguiente pregunta está relacionada con la Sección 2.6.

4.1.7 Pregunta. *¿Si D es un dendroide, entonces $C(D)$ tiene la propiedad del punto fijo?*

La demostración de Teoremas 2.6.6 y 2.6.8 está basada, principalmente, en los resultados obtenidos por Fugate en [10] y [11]. Dichos resultados afirman la existencia de ϵ -retracciones a árboles cuando X es un dendroide suave o un abanico. La siguiente pregunta, plantea esos hechos para cualquier dendroide.

4.1.8 Pregunta. *Si X es un dendroide entonces ¿existen $\epsilon > 0$, un árbol X_ϵ contenido en X y una retracción $r_\epsilon : X \rightarrow X_\epsilon$ tal que $d(r_\epsilon(x), x) < \epsilon$?*

Si la respuesta es afirmativa, tendríamos una prueba para la pregunta 4.1.7. La cual sería parecida a la de los Teoremas 2.6.6 y 2.6.8.

A continuación, plantearemos cuestiones exclusivamente referentes a 2^X , cuando X es un continuo que pertenece a una clase en particular de continuos. Éstas, surgen por el hecho de que conocemos que los hiperespacio $C(X)$ para estas clases de continuos tienen la propiedad del punto fijo. No obstante, no se conocen los resultados acerca de 2^X .

4.1.9 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo arco, entonces tiene 2^X la propiedad del punto fijo?*

4.1.10 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo círculo, entonces tiene 2^X la propiedad del punto fijo?*

4.1.11 Pregunta. *¿Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces tiene 2^X la propiedad del punto fijo?*

4.1.12 Pregunta. *¿Si X es un dendroide entonces tiene 2^X la propiedad del punto fijo?*

4.1.13 Pregunta. *¿Si X es la espiral que converge al disco unitario, entonces tiene 2^X la propiedad del punto fijo?*

En el Teorema 3.3.4, mostramos que si X es la espiral que converge al disco entonces $C(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo. S. B. Nadler Jr. conjetura que la respuesta a la pregunta 4.1.13 es negativa [31, 7.11].

A continuación presentamos problemas que cuestionan acerca del hiperespacio $C(X)$, cuando X es construido a partir de continuos de cierta clase.

4.1.14 Pregunta. *¿Si X es el producto cartesiano de continuos tipo círculo, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.15 Pregunta. *¿Si X es el producto cartesiano de continuos tipo arco, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.16 Pregunta. *¿Si X es el cono topológico sobre un continuo tipo arco, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.17 Pregunta. *¿Si X es el cono topológico sobre un continuo tipo círculo, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.18 Pregunta. *¿Si X es el cono topológico sobre un continuo hereditariamente indescomponible, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.19 Definición. Sea X un espacio métrico. Definimos la *suspensión topológica sobre X* , como el espacio cociente obtenido de $X \times [-1, 1]$ al identificar $X \times \{1\}$ y $X \times \{-1\}$ a diferentes puntos.

4.1.20 Pregunta. *¿Si X es la suspensión topológica sobre un continuo tipo arco, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.21 Pregunta. *¿Si X es la suspensión topológica sobre un continuo tipo círculo, entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.1.22 Pregunta. *¿Si X es la suspensión topológica de un continuo hereditariamente indescomponible entonces tiene $C(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.2. Sobre $F_n(X)$ y $C_n(X)$.

En el trabajo, hemos visto algunos casos donde $F_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo, así como $C_n(X)$. No obstante, existen aun muchos problemas abiertos para estos hiperespacios.

4.2.1 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo arco, entonces tiene $F_n(X)$ la propiedad del punto fijo para $n \geq 3$?*

La respuesta para el caso $n = 2$ es afirmativa [30, Ejercicio 6.24 pág. 88].

4.2.2 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo arco, entonces tiene $C_n(X)$ la propiedad del punto fijo para $n \geq 2$?*

4.2.3 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo círculo con la propiedad del punto fijo, entonces tiene $F_n(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.2.4 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo círculo con la propiedad del punto fijo, entonces tiene $C_n(X)$ la propiedad del punto fijo para $n \geq 2$?*

4.2.5 Pregunta. *¿Si X es un continuo hereditariamente indescomponible con la propiedad del punto fijo, entonces tiene $F_n(X)$ la propiedad del punto fijo para $n \geq 2$?*

4.2.6 Pregunta. *¿Si X es un continuo hereditariamente indescomponible con la propiedad del punto fijo, entonces tiene $C_n(X)$ la propiedad del punto fijo para $n \geq 2$?*

4.2.7 Pregunta. *¿Existe un continuo X de dimensión 1 con la propiedad del punto fijo tal que $F_n(X)$ no tenga la propiedad del punto fijo para alguna $n \in \mathbb{N}$?*

4.2.8 Pregunta. *¿Existe un continuo X de dimensión 1 con la propiedad del punto fijo tal que $C_n(X)$ no tenga la propiedad del punto fijo para alguna $n \in \mathbb{N}$?*

4.2.9 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo árbol con la propiedad del punto fijo, entonces tiene $F_n(X)$ la propiedad del punto fijo para alguna $n \in \mathbb{N}$?*

4.2.10 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo árbol con la propiedad del punto fijo, entonces tiene $C_n(X)$ la propiedad del punto fijo para alguna $n \in \mathbb{N}$?*

4.2.11 Pregunta. *¿Existe un continuo X tal que $F_n(X)$ tenga la propiedad del punto fijo para alguna $n \in \mathbb{N}$ y que $F_m(X)$ no la tenga para alguna m ?*

En particular, sería interesante saber:

4.2.12 Pregunta. *¿Existe un continuo X tal que $F_2(X)$ tenga la propiedad del punto fijo pero $F_3(X)$ no la tenga?*

4.2.13 Pregunta. *¿Existe un continuo X tal que $C_n(X)$ tenga la propiedad del punto fijo para alguna $n \in \mathbb{N}$ y que $C_m(X)$ no la tenga para alguna m ?*

También sería interesante saber:

4.2.14 Pregunta. *¿Existe un continuo X tal que $C_2(X)$ tenga la propiedad del punto fijo pero $C_3(X)$ no la tenga?*

En relación al Lema 1.8.6 y al Corolario 1.8.7 de [24], podemos plantear la siguiente pregunta.

4.2.15 Pregunta. *¿Existe una relación entre la propiedad del punto fijo para el producto cartesiano X^n y la propiedad del punto fijo para $F_n(X)$?*

4.2.16 Pregunta. *¿Si X es un continuo tal que $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo, entonces tiene $C_n(X)$ la propiedad del punto fijo?*

La siguiente pregunta plantea que, el hecho de que $F_n(X)$ tenga la propiedad del punto fijo, sea una condición necesaria para que $C_n(X)$ tenga la propiedad del punto fijo para un continuo X .

4.2.17 Pregunta. *¿Si X es un continuo tal que $F_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces tiene $C_n(X)$ la propiedad del punto fijo?*

Sabemos que la otra implicación es falsa ya que si $X = S^1$, $C_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo [Teorema 2.2.13], pero $F_2(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo (Ejemplo 3.1.1).

4.2.18 Pregunta. ¿Si X es un continuo tal que $F_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces tiene 2^X la propiedad del punto fijo?

4.3. Sobre algunos otros hiperespacios.

En esta sección plantearemos problemas referentes a hiperespacios que no han sido estudiados en el presente trabajo.

4.3.1 Definición. Dado un continuo X , definimos $F_\infty(X)$, como $F_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es finito}\}$. Notemos que $F_\infty(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$.

4.3.2 Pregunta. ¿Para algún continuo X , tiene $F_\infty(X)$ la propiedad del punto fijo?

4.3.3 Definición. Sea X un continuo. Definimos su *hiperespacio suspensión*, denotado por $HS(X)$ como: $HS(X) = C(X)/F_1(X)$, dotado con la topología cociente.

Observemos que $HS(X)$ no es propiamente un hiperespacio. De hecho hemos construido un nuevo espacio apartir de ciertos hiperespacios. En relación a $HS(X)$ tenemos el siguiente teorema.

4.3.4 Teorema. Si X es un continuo tipo arco, entonces su hiperespacio suspensión $HS(X)$ tiene la propiedad del punto fijo [30, Teorema 6.14 pág. 76].

4.3.5 Pregunta. ¿Si X es un continuo tipo círculo con la propiedad del punto fijo, entonces tiene su hiperespacio suspensión $HS(X)$ la propiedad del punto fijo?

En [7, 4.2] F. Corona-Vázquez y R. Escobedo, muestran dos ejemplos que dan respuesta afirmativa a la Pregunta 4.3.5.

La siguiente pregunta fue contestada de manera negativa en [7]. El ejemplo mostrado es la espiral que converge al disco unitario (Definición 3.3.3).

4.3.6 Pregunta. *¿Si X es un continuo con la propiedad del punto fijo, entonces tiene su hiperespacio suspensión $HS(X)$ la propiedad del punto fijo?*

4.3.7 Pregunta. *¿Si X es un continuo tipo círculo y $f : HS(X) \rightarrow HS(X)$ es una función homotópica a la identidad en $HS(X)$, entonces tiene f un punto fijo?*

Bibliografía

- [1] R H Bing, *The elusive fixed point property*, Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 119 - 132.
- [2] K. Borsuk, *Theory of Shape*, Monografie Mat., volumen 59, Polish Sci. Publ., Warsaw, Poland, 1967.
- [3] J. Bustamante, R. Escobedo y F. Macías Romero, *A fixed point theorem for Whitney Blocks*, Topology Appl., 125 (2002), 315-321.
- [4] J. J. Charatonik, A. Illanes y S. Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Houston Math., 28 (2002), 781-805.
- [5] J. J. Charatonik, *Bosquejo de la Historia de la Teoría de los Continuos*, Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 31, Sociedad Matemática Mexicana, (2006), 225-264.
- [6] C. Christenson y W. Voxman, *Aspects of topology*, Segunda Edición BSC Associates, Moscow, Idaho, USA, 1988.
- [7] F. Corona-Vázquez y R. Escobedo, *Hyperspace Suspension and the Fixed Point Property*, Houston Math., por aparecer.
- [8] R. Escobedo, *El Márgen de los Continuos*, Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 31, Sociedad Matemática Mexicana, (2006), 103-128.

-
- [9] H. Fast y S. Swierczkowski, *The New Scottish Book*, Wrocław, 1946-1958.
- [10] J. B. Fugate, *Retracting fans onto finite fans*, Fund. Math., 71 (1971), 113-125.
- [11] J. B. Fugate, *Small retractions of smooth dendroids onto trees*, Fund. Math., 71 (1971), 255-262.
- [12] W. Holsztyński, *Universal mappings and fixed point theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. No. 15 (1967), 433-438.
- [13] H. Hosokawa, *The span of Hyperspaces*, Houston Math., 25 (1) (1999), 35-41.
- [14] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker Inc. New York, 1999.
- [15] A. Illanes, S. Macías y S. B. Nadler, Jr., *Symmetric products and Q -manifolds*, Geometry and Topology in Dynamics, Contemporary Math. Series of Amer. Math. Soc., Vol. 246, Providence, R I, (1999), 137-141.
- [16] J. Krasinkiewicz, *On the hyperspaces of snake-like and circle-like continua*, Fund. Math., 83 (1974), 155-164.
- [17] S. Kinoshita, *On some contractible continua without the fixed point property*, Fund. Math., 40 (1953), 96-98.
- [18] R. J. Knill, *Cones, products and fixed points*, Fund. Math., 60 (1967), 35-46.
- [19] K. Kuratowsky, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, New York, 1968.
- [20] J. W. Jaworowski, *Symmetric products of ANR's*, Math. Ann., 192 (1971), 173-176.

-
- [21] S. Macías, *Sobre la estructura de los Dendroides Suaves*, Aportaciones Matemáticas Serie Comunicaciones 10, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.
- [22] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. 109 (2001), 237-256.
- [23] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, Topology Proc., 25 (2000), 255-276.
- [24] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2005.
- [25] S. Macías *On the n -fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat., 41(61) (2006), 335-343.
- [26] M. M. Marsh, *s -connected spaces and the fixed point property*, Topology Proc., 8 (1983), 85-97.
- [27] S. B. Nadler, Jr., *Universal mappings and weakly confluent mappings*, Fund. Math., 110 (1980), 221-235.
- [28] S. B. Nadler, Jr., *Induced universal maps and some hyperespaces with the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc., 100 (1987), 749-754.
- [29] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics Vol. 158, Marcel Dekker Inc. New York, 1992.
- [30] S. B. Nadler, Jr., *The fixed point property for continua*, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 30, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [31] S. B. Nadler, Jr., *Hyperepaces of Sets. A text with research questions*, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

-
- [32] S. B. Nadler, Jr. y J. T. Rogers, Jr., *A Note on hyperspaces and the fixed point property*, Colloq. Math., 25 (1972), 255-257.
 - [33] J. T. Rogers, Jr., *The cone = hyperspace property*, Can. J. Math., 24 (1972), 279-285.
 - [34] J. T. Rogers, Jr., *Hyperspaces of arc-like and circle-like continua*, Topology Conference, Lecture Notes in Mathematics, 375 (1974), 231-235.
 - [35] J. Segal, *A fixed point theorem for the hyperspace of a snake-like continuum*, Fund. Math., 50 (1962), 237-248.
 - [36] J. van Mill, *Infinite-dimensional topology*, North Holland, Amsterdam. 1989.
 - [37] G. T. Whyburn, *Analitic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 28, Amer. Math Soc., Providence, R.I., 1942.
 - [38] M. Wojdisławsky, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math., 32 (1939), 184-192.
 - [39] G. S. Young. *Fixed-point theorems for arcwise connected continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 880-884.

Índice alfabético

- arco, 6
 - de orden, 20
- bloque de Whitney, 38
- bola abierta, 4
- casi componente, 16
- cerradura, 4
- compacidad, 6
 - por sucesiones, 7
- componente, 16
- composante, 16
- conexidad, 5
 - s -conexo, 40
 - únicamente arcoconexo, 60
 - arcoconexo, 6
 - local, 29
 - por trayectorias, 6
- cono
 - geométrico, 79
 - topológico, 78
- continuidad, 4
- continuo, 13
 - únicamente arcoconexo, 60
 - árbol, 58
 - abanico, 59
- dendrita, 48
- dendroide, 57
- dendroide suave, 57
- descomponible, 14
- gráfica, 57
- hereditariamente indescomponible,
 - 14
- hereditariamente unicoherente, 16
- indescomponible, 14
- irreducible, 16
- Knaster, 57
- localmente conexo, 29
- subcontinuo, 13
- tipo árbol, 92
- tipo arco, 33
- tipo círculo, 45
- unicoherente, 16
- contractibilidad, 9
 - respecto a S^1 , 36
- corte débil, 40
- cubierta, 6
 - abierta, 6
- cubo de Hilbert, 30
- diámetro, 7
- diagonal, 39

- espacio
 - cociente, 11
 - contraíble, 9
 - métrico, 3
 - métrico acotado, 4
 - producto, 10
- extensor
 - absoluto, 30
- forma trivial, 48
- frontera, 4
- función
 - ϵ -función, 31
 - r -función, 48
 - abierta, 5
 - AH-esencial, 35
 - casi monótona, 54
 - celular, 48
 - cerrada, 5
 - cociente, 11
 - de ligadura, 16
 - de Whitney, 22
 - encaje, 5
 - esencial, 35
 - homeomorfismo, 5
 - homotopía, 9
 - inducida, 23
 - ligera, 54
 - monótona, 38
 - proyección, 10
 - unión, 21
 - universal, 34
- hiperespacios, 18
- límite
 - inferior, 17
 - superior, 17
- límite inverso, 17
- métrica, 3
 - acotada, 4
 - de Hausdorff, 19
- número de Lebesgue, 7
- nivel de Whitney, 38
- producto cartesiano, 10
- propiedad
 - de Whitney, 42
 - del punto fijo, 23
 - topológica, 5
- retracto, 8
 - absoluto, 29
- semimargen supreyectivo cero, 39
- separación, 5
- sucesión inversa, 16
- teorema
 - Borsuk, 30
 - de los golpes en la frontera, 16
 - del cable cortado, 16
 - Lokuciewski, 36
 - Segal, 37, 44
 - Tychonoff, 11
 - Wojdysławski, 32
- trayectoria, 6