



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Caracterización por bigráficas de formas  
integrales positivas no simétricas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Yadira Valdivieso Díaz

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Michael Barot Schlatter



2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales**  
**Facultad de Ciencias**  
**P r e s e n t e .**

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**“Caracterización por bigráficas de formas integrales positivas no simétricas”**

realizado por **Valdivieso Díaz Yadira**, con número de cuenta **300524637**, quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

|                         |     |                              |  |
|-------------------------|-----|------------------------------|--|
| Tutor(a)<br>Propietario | Dr. | Michael Barot Schlatter      |  |
| Co-Tutor<br>Propietario | Dr. | Christof Geiss Hahn          |  |
| Propietario             | Dr. | Octavio Mendoza Hernández    |  |
| Suplente                | Dr. | José Antonio de la Peña Mena |  |
| Suplente                | Dr. | Hugo Alberto Rincón Mejía    |  |

Atentamente  
“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”  
Ciudad Universitaria, D.F., a 28 de junio del 2007.  
**EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN  
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

**M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA**

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

FACULTAD DE CIENCIAS  
COMITÉ DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

*“En todo amar y servir” San Ignacio del Loyola*  
*“No es en la ciencia que encontramos la felicidad, sino en su adquisición”*  
*Edgar Allan Poe*



# Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mi familia: Esther, Paco, Liz, Erik y Humberto, por el amor, las sonrisas, la paciencia, el aliento, el apoyo que me brindaron y me siguen brindando. Especialmente quiero agradecer a mi hermano Erik, por su ayuda al resolver mis dudas y al escucharme en el camino a la casa cuando había tenido algún evento destacable a lo largo del día. También, especialmente a Paco, por su apoyo y estímulos que me ha brindado. A mi mamá por escucharme los fines de semana, por preocuparse durante la semana por mi, por sus mails y por supuesto por su papel como mamá que tan bien lo ha desempeñado. A Liz por darme alegría y un tema de conversación con mis amigos. Y finalmente a mi papá, por su cariño y apoyo.

A mi segunda familia, quien me dio una casa donde vivir, quienes también me escucharon cuando llegaba triste o emocionada, quienes me preguntaban que quería comer o si quería un dulce de la tienda.

A mi abuelita, pues gracias a ella, puede realizar varias visitas a Michael mientras mi mamá se encontraba en recuperación; y por supuesto por el gran amor que siempre me ha expresado.

Agradezco muchísimo a mi asesor, Michael, por su paciencia, que sin duda tuvo que tener, por sus consejos, por sus interés en mi persona y sobre todo por su apoyo e impulso académico que me dió a lo largo de este tiempo y que espero me siga dando por dos años más; y quien además, me dió acceso al PAPIIT.

A todas esas personas con quienes pude hablar de cosas totalmente ajenas a las mates: de un buen libro, de una excelente película, de la familia, de los otros amigos, de los novios, de las decepciones amorosas y de esas dudas existenciales que a todos nos llegan. A todos aquellos que estuvieron más cerca de mi el año pasado, apoyándome en momentos complicados. Y claro también aquellos con los que se pudo hablar de mates o de física o de algún

tema interesante.

A los profesores que me dieron clase en la facultad, enseñándome no sólo conocimientos sino dándome además, modelos a seguir.

Agradezco también a mis sinodales por haber dedicado tiempo y esfuerzo en leer esta tesis y hacer importantes observaciones para mi desarrollo como matemática.

Y finalmente agradezco a ese algo que quiero creer siempre está a mi lado y que al menos a mi me gusta pensar vive en “somewhere over the rainbow”.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>7</b>  |
| <b>1. Sistemas de raíces y matrices de Cartan</b>                               | <b>9</b>  |
| 1.1. Sistemas de raíces . . . . .   | 9         |
| 1.2. Matrices de Cartan . . . . .   | 11        |
| <b>2. Formas integrales</b>   | <b>15</b> |
| 2.1. Formas integrales . . . . .  | 15        |
| 2.2. Cuatro maneras equivalentes . . . . .                                      | 16        |
| 2.2.1. Asociación de una matriz a una forma integral . . . . .                  | 16        |
| 2.2.2. Sistemas de raíces y formas integrales . . . . .                         | 17        |
| 2.2.3. Asociación de una bigráfica a una forma integral . . . . .               | 20        |
| 2.3. Ensamblaje de árbol . . . . .  | 21        |
| <b>3. Transformaciones especiales</b>   | <b>25</b> |
| 3.1. Transformaciones de Gabrielov . . . . .                                    | 25        |
| 3.2. La proyección a formas unitarias . . . . .                                 | 26        |
| 3.3. La inversión de signos . . . . .   | 29        |
| <b>4. Formas unitarias positivas</b>  | <b>33</b> |
| 4.1. Resultados esenciales . . . . .  | 33        |
| 4.2. Ciclos y sus restricciones . . . . .                                       | 34        |
| 4.3. Bloques . . . . .  | 35        |
| 4.4. Demostración del Lema ensamblaje . . . . .                                 | 36        |
| <b>5. Formas integrales no simétricas</b>                                       | <b>39</b> |
| 5.1. Formas integrales de tipo Dynkin $\mathbb{B}_n$ y $\mathbb{C}_n$ . . . . . | 39        |
| 5.2. Formas integrales de tipo Dynkin $\mathbb{F}_4$ y $\mathbb{G}_2$ . . . . . | 41        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>6. Ejemplos de formas integrales inducidas por <math>\mathbb{F}_4</math></b> | <b>43</b> |
| 6.1. Diagramas de formas inducidas . . . . .                                    | 44        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>50</b> |

# Introducción

Aún cuando este trabajo no estudia directamente las álgebras de Lie semi-simples, está muy relacionado a ellas, pues las álgebras de Lie tienen asociada una matriz definida positiva con ciertas características y esta a su vez, una forma cuadrática.

Es por esto que los antecedentes históricos de este trabajo datan de 1887-1890, pues en estos años Wilhelm Killing publicó un trabajo, dividido en 4 artículos, en el cual enuncia por primera vez una clasificación de los grupos de Lie semi-simples; sin embargo, esta clasificación se base esencialmente en la descripción de grupos de transformaciones. Pero en la segunda parte del artículo, en las secciones §14-18, hace una lista de varios de los diferentes tipos de sistemas de raíces [10], que posteriormente se harán corresponder a los diagramas de Dynkin.

Años más tarde, en 1894, Élie Cartan en su tesis en París, da la primera prueba completa del trabajo de Killing. Posteriormente, en 1925 [12], Hermann Weyl realiza un trabajo mucho más geométrico que los dos anteriores, definiendo formalmente lo que ahora conocemos como sistema de raíces. Con la ayuda de este trabajo, Bartel Leendert van der Waerden, en 1933 [11], da una solución totalmente geométrica, considerando ahora los ángulos entre cualesquiera dos elementos de un sistema de raíces.

Sin embargo, no fue sino hasta 1946, cuando Eugene Borisovich Dynkin, prueba que un grupo de Lie semi-simple está determinado completamente por su sistema de raíces, lo que reduce su problema ahora a construir bases  $n$ -dimensionales que cumplan con ciertas características. Además, introduce los diagramas de Dynkin, que dependen de una buena base.

En este trabajo, lo que se busca es describir, por medio de bigráficas, un sistema de raíces y que esta descripción no dependa de una base. Es claro que alguna de estas bigráficas es un diagrama de Dynkin. Este trabajo es además el complemento de un trabajo de mi asesor, Michael Barot, sobre la

caracterización de formas cuadráticas por medio de bigráficas [1], en donde se estudian las formas cuadráticas unitarias positivas.

Además, se pretende generalizar la idea de formas inducidas de las formas integrales, pero sólo se hace exhaustivamente para el caso  $\mathbb{F}_4$ , este trabajo se realiza en el último capítulo.

En el primer capítulo, se darán los antecedentes de las formas integrales, que son los sistemas de raíces y las matrices de Cartan. Ya en el segundo capítulo, abordaremos definiciones necesarias para entender el contexto en el que trabajaremos. En el tercer capítulo, describiremos las transformaciones que utilizaremos para demostrar el resultado principal de este trabajo. En el capítulo cuarto, haremos un pequeño resumen de los resultados esenciales de las formas unitarias. Y finalmente en el capítulo quinto, encontraremos los resultados para las formas integrales no simétricas.

# Capítulo 1

## Sistemas de raíces y matrices de Cartan

En este capítulo se introducen los antecedentes de las formas integrales, las cuales son nuestro objeto de estudio y que en capítulos siguientes estudiaremos mucho más a fondo.

Los sistemas de raíces juegan un papel fundamental en la clasificación de grupos semi-simples de Lie y además se relacionan con las formas integrales.

No se incluyen las demostraciones de los resultados de este capítulo, pues son resultados de la teoría general que podemos encontrar en las referencias.

### 1.1. Sistemas de raíces

Cuando hablamos de sistemas de raíces es preciso hablar de espacios euclidianos pues aquí es donde pueden vivir estos sistemas. Un **espacio euclidiano real**  $\mathbb{E}$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  junto con una transformación bilineal simétrica definida positiva  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un ejemplo común de un espacio euclidiano es  $\mathbb{R}^n$ , cuyos elementos son  $n$ -adas  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de números reales, junto con la transformación simétrica bilineal usual  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

Se considerará como espacio euclidiano con la forma bilineal usual. Además, denotaremos por  $e_i$  al vector  $e_i \in \mathbb{R}^n$  con 1 en la coordenada  $i$ -ésima y ceros

en las otras coordenadas.

Cada vector  $\alpha$ , de un espacio euclidiano  $\mathbb{E}$ , determina una reflexión

$$\sigma_\alpha : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

definida por

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha,$$

donde  $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ . La reflexión  $\sigma_\alpha$  deja fijo al plano

$$P_\alpha = \{\beta \in \mathbb{E} \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Obsérvese que  $\langle \_, \alpha \rangle$  es lineal, pero  $\langle \beta, \_ \rangle$  no lo es si  $\beta \neq 0$ .

**Definición 1.1.** Un subconjunto  $\Phi$ , de un espacio euclidiano  $\mathbb{E}$ , es llamado **sistema de raíces** en  $\mathbb{E}$  si satisface los siguientes axiomas:

- (R1)  $\Phi$  es finito, genera a  $\mathbb{E}$  y no contiene al cero.
- (R2) Si  $\alpha \in \Phi$ , los únicos múltiplos de  $\alpha$  en  $\Phi$  son  $\pm\alpha$ .
- (R3) Si  $\alpha \in \Phi$ , la reflexión  $\sigma_\alpha$  deja a  $\Phi$  invariante, es decir,  $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$ .
- (R4) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , entonces  $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ .

Dado un sistema de raíces  $\Phi$ , el **rango de  $\Phi$**  es la dimensión de  $\mathbb{E}$ .

**Ejemplo 1.1.** Para  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$  y  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$  es un sistema de raíces. Dicho sistema es el de menor rango y una representación geométrica es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \alpha \quad \circ \quad \longrightarrow \alpha \\ -\alpha \qquad \qquad \qquad \alpha \end{array}$$

Dado un sistema de raíces  $\Phi$  en  $\mathbb{E}$ , consideremos el subgrupo  $\mathscr{W}$ , del grupo ortonormal  $O(\mathbb{E})$ , generado por las reflexiones  $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ . Notemos que, por (R3)  $\mathscr{W}$  deja invariante a  $\Phi$ ; y de ello se deriva que, el grupo de Weyl es finito. A este grupo se le llama **grupo de Weyl de  $\Phi$** .

**Definición 1.2.** Un subconjunto  $\Delta$  de  $\Phi$  es una **base** de  $\Phi$  si:

- (B1)  $\Delta$  es una base de  $\mathbb{E}$  como espacio vectorial,
- (B2) cada raíz  $\beta \in \Phi$  puede escribirse como  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  con coeficientes enteros  $k_\alpha$  todos no negativos o todos no positivos.

Los elementos de  $\Delta$  son llamados **raíces simples** de  $\Phi$ . Además, se dice que  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  es una raíz positiva (resp. negativa) si los coeficientes enteros  $k_\alpha$  son positivos (resp. negativos).

Por el axioma (R2) un sistema de raíces  $\Phi$  puede descomponerse como la unión ajena de  $\Phi^+$  y  $\Phi^-$ , que son los conjuntos de raíces positivas y el de raíces negativas, respectivamente. Definimos un **sistema fundamental**  $\Pi \subset \Phi^+$  como sigue:  $\alpha \in \Pi$  si y solo si  $\alpha$  no puede expresarse como suma de dos elementos de  $\Phi^+$ . La existencia del conjunto  $\Delta$ , más no la unicidad, esta expresado en la siguiente proposición:

**Proposición 1.1.** [4, Corolario 5.6, pág. 59] *Sea  $\Pi$  un sistema fundamental de raíces. Entonces cada  $\alpha \in \Phi$  puede expresarse como  $\alpha = \sum n_i \alpha_i$  con  $\alpha_i \in \Pi$  y  $n_i \in \mathbb{Z}$  todos no negativos o todos no positivos.*

**Definición 1.3.** *Un sistema  $\Phi$  de raíces es **irreducible**, si no es la unión de dos subconjuntos propios tales que cada raíz de un conjunto es ortogonal a cualquier raíz del otro.*

## 1.2. Matrices de Cartan, gráficas de Coxeter y diagramas de Dynkin

**Definición 1.4.** *Una **matriz de Cartan** es una matriz cuadrada  $A$ , con entradas enteras que cumplen las siguientes propiedades:*

- (C1) *La entrada  $A_{ii} = 2$  para toda  $i$ .*
- (C2) *La entrada  $A_{ij} \leq 0$  para toda  $i \neq j$ .*
- (C3) *La entrada  $A_{ij} = 0$  si y sólo si la entrada  $A_{ji} = 0$  para toda  $i \neq j$ .*
- (C4) *La forma cuadrática  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , definida para un  $z \in \mathbb{Z}^n$  como  $q(x) = x^t A x$ , es positiva definida.*

**Proposición 1.2.** [4, pág. 71] *Sea  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un conjunto de raíces simples de  $\Phi$ . La matriz  $A$ , con entradas  $A_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  para toda  $1 \leq i, j \leq l$ , cumple las siguientes propiedades:*

1.  $A_{ii} = 2$  para toda  $i$ .
2.  $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$  si  $i \neq j$ .
3. Si  $A_{ij} \in \{-2, -3\}$ , entonces  $A_{ji} = -1$ .

4.  $A_{ij} = 0$  si y solo si  $A_{ji} = 0$ .

Dado un sistema de raíces  $\Phi$ , se tiene la función longitud  $\ell : \Phi \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $\ell(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$ . En los diagramas de Dynkin, que se encuentran en la última parte de este capítulo, podemos observar que si  $\Phi$  es irreducible, puede haber dos distintas longitudes de raíces. En caso de existir dos diferentes longitudes, hablamos de **raíces largas y cortas**.

Dado un conjunto de raíces simples  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  de  $\Phi$ , definimos la **gráfica de Coxeter** de  $\Phi$  como la gráfica con vértices  $1, \dots, l$  y con  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$  aristas entre dos vértices  $i$  y  $j$ . Para poder recuperar la información de la gráfica, en caso de que la longitud de las dos raíces  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  no sean iguales, agregamos una etiqueta en forma de flecha que apunta a la raíz corta. Al resultado de esta figura le llamamos **diagrama de Dynkin** de  $\Phi$ .

**Ejemplo 1.2.** Para  $\mathbb{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ , cuya dimensión es 2, consideremos a  $\Phi = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_1 - e_3), \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}$  un sistema de raíces conocido como  $\mathbb{G}_2$ .

Para  $\mathbb{G}_2$ , una buena base es  $\Delta = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3\}$  y con ella, podemos determinar las raíces positivas que son:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2$  y  $3\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

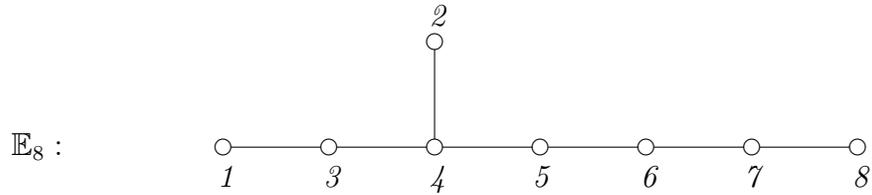
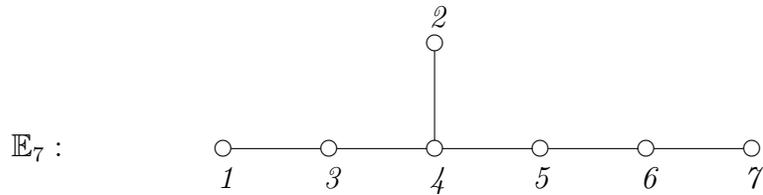
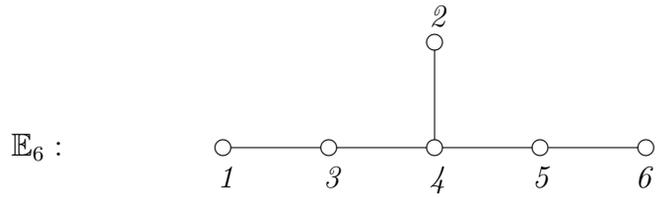
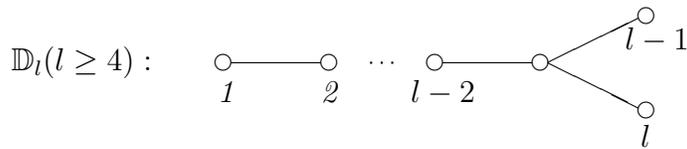
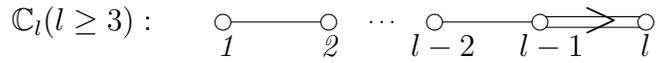
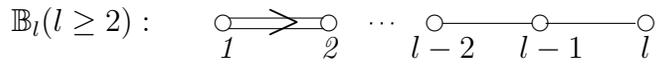
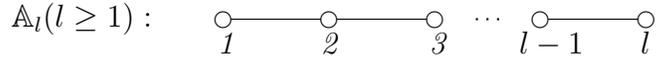
En este sistema, tenemos dos diferentes tipos de longitudes: 1 para las primeras 3 raíces y 3 para las 3 últimas.

Finalmente, la matriz de Cartan asociada a  $\mathbb{G}_2$  y la gráfica de Dynkin son las siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \circ & \longleftarrow & \circ \\ 1 & & 2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema nos habla de la clasificación de los sistemas de raíces de manera geométrica. Sin embargo, la intención principal de este resultado es clasificar a los grupos de Lie semi-simples. La idea de clasificación de los grupos de Lie semi-simples fue dada en 1890 por Killing, pero esta clasificación no es geométrica. Posteriormente, en 1933, van der Waerden dió una clasificación un poco más geométrica; y no fue hasta 1947, cuando Dynkin prueba que un grupo de Lie semi-simple está totalmente determinado por un sistema de raíces, reduciendo el problema a la construcción de bases de espacios euclidianos con características específicas.

**Teorema 1.3.** Si  $\Phi$  es un sistema de raíces irreducible de rango  $l$ , entonces existe un conjunto de raíces simples  $\Delta$  con el que  $\Phi$  tiene asociado uno de los siguientes diagramas de Dynkin (con  $l$  vértices en cada caso):



14 *CAPÍTULO 1. SISTEMAS DE RAÍCES Y MATRICES DE CARTAN*



# Capítulo 2

## Formas integrales

En este capítulo presentaremos por primera vez a las formas integrales, es decir, a nuestro objeto de estudio. Además, veremos las cuatro maneras equivalentes de representar una forma integral las cuales serán utilizadas en este trabajo.

### 2.1. Formas integrales

**Definición 2.1.** Una *forma cuadrática integral* es una función  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  de la forma

$$q(x) = \sum_{i=1}^n q_i x(i)^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x(i)x(j)$$

donde  $q_i, q_{ij}, \frac{q_{ij}}{q_i}$  son enteros; y además  $q_i > 0$  para toda  $i$ .

Decimos que  $q$  es **unitaria** si  $q_i = 1$  para toda  $i$ . Además, decimos que  $q$  es **positiva** si  $q(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$  diferente de cero. En caso  $q$  sea positiva y unitaria se tiene que  $|q_{ij}| \leq 1$  para toda  $i$  y  $j$ . En efecto, en caso contrario, podemos encontrar vectores que contradigan la positividad de la forma integral:

1. si  $q_{ij} \leq -2$ , entonces  $q(e_i + e_j) \leq 0$  con  $e_i$  y  $e_j$  los vectores canónicos de  $\mathbb{Z}^n$ .
2. si  $q_{ij} \geq 2$ , entonces  $q(e_i - e_j) \leq 0$  con  $e_i$  y  $e_j$  los vectores canónicos de  $\mathbb{Z}^n$ .

Dadas dos formas integrales  $q, q' : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , decimos que son  **$\mathbb{Z}$ -equivalentes** si existe una transformación  $\mathbb{Z}$ -invertible  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  tal que  $q' = qT$ .

Las formas cuadráticas integrales son casos particulares de formas cuadráticas enteras, donde sólo se pide  $q_i, q_{ij} \in \mathbb{Z}$ , pero no necesariamente  $\frac{q_{ij}}{q_i} \in \mathbb{Z}$ .

En muchas ocasiones, para definir una forma cuadrática, inicialmente se define lo que es un espacio cuadrático, el cual es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, con una forma bilineal simétrica  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Así, dado un espacio cuadrático  $(B, V)$  se define la forma cuadrática  $q_B : V \rightarrow \mathbb{R}$ , asociada a  $B$ , dada por la igualdad  $q_B(v) = \frac{1}{2}B(v, v)$ .

Recordemos que en el capítulo 1, donde hablamos de sistemas de raíces, mencionamos también una forma bilineal simétrica. Ahora, con la definición de formas cuadráticas integrales, podemos redefinir lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\beta, \alpha) &:= q(\beta + \alpha) - q(\beta) - q(\alpha) \\ &= (\beta + \alpha)^t A(\beta + \alpha) - \beta^t A\beta - \alpha^t A\alpha \\ &= \beta^t A\alpha + \alpha^t A\beta. \end{aligned}$$

que será nuestra forma bilineal simétrica, donde  $A$  es la matriz asociada a la forma cuadrática  $q$ . De donde podemos observar fácilmente una relación entre la forma bilineal y la forma cuadrática:

$$(\beta, \beta) = 2q(\beta).$$

## 2.2. Cuatro maneras equivalentes

Para este trabajo, es útil manejar varios lenguajes para estudiar el mismo objeto. Es por ello que, en esta sección, describiremos cuatro maneras equivalentes de ver a una forma cuadrática.

### 2.2.1. Asociación de una matriz a una forma integral

Ya sabemos que a cada sistema de raíces podemos asociarle una matriz de Cartan. Ahora lo que buscamos es asociar a cada forma integral una matriz **casi-Cartan**, que cumple las propiedades (C1) y (C2) de una matriz de Cartan (ver definición 1.2).

Cada forma cuadrática integral positiva  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  tiene asociada una matriz casi-Cartan  $M_q^0$  dada por  $(M_q^0)_{ij} = \frac{2q_{ij}}{q_i}$ . Notemos que la matriz  $M_q^0$  no es simétrica, sin embargo la matriz  $M_q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)M_q^0$  si lo es. La entrada de la matriz  $M$  en el lugar  $(r, s)$  es:

$$\begin{aligned} M_{rs} &= \sum_{k=1}^n \text{diag}(q_1, \dots, q_n)_{rk} M_{ks}^0 \\ &= q_r M_{rs}^0 \\ &= q_r \frac{2q_{rs}}{q_r} \\ &= 2q_{rs}. \end{aligned}$$

Para este trabajo, consideraremos sólo las matrices simétricas. El conjunto de todas estas matrices, al que llamaremos **matrices integrales**, está descrito de la siguiente manera:

$$\text{MI}(n) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} \mid M = M^t \text{ y } \frac{2M_{rs}}{M_{rr}} \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.1)$$

**Ejemplo 2.1.** Consideremos la siguiente forma cuadrática integral  $q : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

La matriz  $M_q$ , asociada a  $q$ , de acuerdo con nuestra definición es la siguiente:

$$M_q = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

### 2.2.2. Sistemas de raíces y formas integrales

Ahora que ya tenemos los conceptos de sistemas de raíces y formas integrales, hablaremos de cómo éstos se relacionan. Para ello enunciaremos una proposición, cuya demostración se encuentra en [3].

Para una matriz  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  casi-Cartan y para cada  $i = \{1, \dots, n\}$  definimos un automorfismo  $s_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , dada por  $s_i(e_j) = e_j - A_{ij}e_i$ , donde

$\{e_i, \dots, e_j\}$ , nuevamente es la base canónica de  $\mathbb{Z}^n$ . Nombremos  $\mathscr{W}_A$  al grupo generado por  $s_1, \dots, s_n$ .

**Proposición 2.1.** *Las siguientes condiciones para una matriz casi-Cartan  $A$  son equivalentes:*

1. *La forma cuadrática  $q$ , asociada a  $A$ , es positiva (ver 1.2).*
2. *El grupo de Weyl  $\mathscr{W}_A$  es finito.*
3. *Existe un sistema de raíces  $\Phi$  y un subconjunto linealmente independiente  $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \Phi$  tal que  $A_{ij} = \langle \beta_i, \beta_j \rangle$  (es el producto interno usual).*
4. *La matriz simétrica de  $A$  es equivalente a una matriz Cartan  $A^0$ .*

Con esta proposición y la Proposición 1.2, podemos asegurar que dada cualquier forma integral  $q$ , los coeficientes  $q_i \in \{1, \lambda\}$  para algún  $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ .

Para las formas unitarias positiva  $q$ , podemos describir el sistema de raíces como sigue.

**Proposición 2.2.** *Si  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma unitaria positiva, entonces*

$$\Phi = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid q(x) = 1\}$$

*es un sistema de raíces en  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $\Phi$  es un subconjunto del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Por otro lado, es necesario definir la reflexión  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en términos de  $q$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\beta) &= \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \\ &= \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \\ &= \beta - \frac{2(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta))}{2q(\alpha)} \alpha. \end{aligned}$$

(R1) Notemos además que los vectores canónicos son raíces de  $q$ , es decir que  $\Phi$  genera a nuestro espacio euclidiano, pues estamos suponiendo que  $q$

es unitario. Además es claro que  $0 \notin \Phi$ . Sólo falta ver que  $\Phi$  es finito; para ello, recordemos que para todo escalar  $c$ , se tiene:

$$\begin{aligned} c = q(x) &= c_1^2(x_1 + \lambda_{12}x_2 + \cdots + \lambda_{1n}x_n)^2 \\ &+ c_2^2(x_2 + \lambda_{23}x_3 + \cdots + \lambda_{2n}x_n)^2 \\ &\vdots \\ &+ c_n^2x_n^2. \end{aligned}$$

De donde podemos concluir que cada sumando debe ser menor igual que  $c$ , y por ello  $x_n \leq \sqrt{\frac{c}{c_n^2}}$ . Inductivamente, podemos encontrar una cota para cada  $x_i$ , pero éstos son números enteros. Por lo tanto, el conjunto  $\Phi$  tiene que ser finito. Como lo anterior es cierto para cualquier escalar, en particular, también lo es para  $c = 1$ .

(R2) Para verificar este axioma, supongamos que existe  $r\alpha \in \Phi$  para algún  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $1 = q(r\alpha)$ . Como se cumple que  $q(r\alpha) = r^2q(\alpha)$ , entonces  $r \pm 1$ .

(R3) Para ver que este axioma se cumple, necesitamos probar que  $q(\sigma_\alpha(\beta)) = q(\beta)$ ; pues con ello, comprobamos que  $\Phi$  es invariante bajo  $\sigma_\alpha$ . En efecto,

$$\begin{aligned} q(\sigma_\alpha(\beta)) &= q\left(\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}, \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\beta, \beta) - \frac{1}{2}\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\alpha, \beta) - \frac{1}{2}\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\beta, \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\right)^2(\alpha, \alpha) \\ &= q(\beta). \end{aligned}$$

(R4) Por último, si  $\alpha$  y  $\beta$  son elementos de nuestro sistema de raíces  $\Phi$ , entonces  $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(q(\alpha+\beta) - q(\alpha) - q(\beta))}{2q(\alpha)} = q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta)$ , que es entero. □

**Observación 2.1.** *Para las formas integrales que no son unitarias, el sistema de raíces asociado a una forma cuadrática no es sencillo de dar, pues no*

basta con restringirse a aquellos elementos que cumplan las propiedades de longitud.

En nuestro lenguaje, las proposiciones 13.2 y 13.3 de [4, pág. 396 y 397] se traduce así:

**Proposición 2.3.** *Si  $q$  es conexa (ver definición 2.2) y denotamos  $m = \min q_i$  y  $M = \max q_i$  entonces*

$$\Phi = \{ \alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \ell(\alpha) = M \text{ ó } \ell(\alpha) = m \frac{(e_i, e_i)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \}$$

es un sistema de raíces.

### 2.2.3. Asociación de una bigráfica a una forma integral

**Definición 2.2.** *Dada una forma cuadrática integral  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , asociamos una bigráfica  $B_q$  con vértices  $1, \dots, n$ . Al vértice  $i$  se le asigna la etiqueta  $q_i$  y entre  $i$  y  $j$  hay  $\left\lfloor \frac{q_{ij}}{\max\{q_i, q_j\}} \right\rfloor$  aristas que se dibujan llenas si  $q_{ij} < 0$  y punteadas si  $q_{ij} > 0$ . Además, para esta misma bigráfica  $B_q$ , definimos  $[i, j]_B = -\frac{q_{ij}}{\max\{q_i, q_j\}}$ ; y decimos que, una forma integral  $q$  es conexa si y sólo si  $B_q$  lo es.*

Dada una forma integral  $q$  es de tipo Dynkin  $\Delta_q$  si es  $\mathbb{Z}$ -equivalente a una forma integral  $p$  tal que  $B_p = \Delta_q$ .

Como en este trabajo nos interesan principalmente las formas integrales positivas, sólo las etiquetas 1, 2 y 3 ocurrirán. Para simplificar el dibujo de la bigráfica  $B_q$ , se suprimirán las etiquetas  $q_i = 1$  (ver ejemplo 2.2).

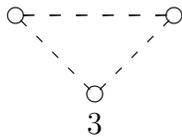
**Ejemplo 2.2.** *Consideremos a dos formas integrales  $q, p : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  definidas como sigue:*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1,$$

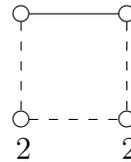
$$p(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_3x_1.$$

Con la convención anterior, las bigráficas asociadas a  $q$  y  $p$  son:

$B_p$  :



$B_q$  :



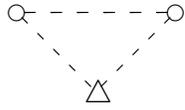
A partir de la representación anterior, en éste trabajo utilizaremos una nueva convención en la que sustituiremos un vértice y su etiqueta por: un cuadrado si la etiqueta es 2 ó un triángulo si la etiqueta es 3 (ver ejemplo 2.3). En caso de presentar sólo vértices circulares lo llamaremos **dato simétrico** y si al menos uno de los vértices es un cuadrado o un triángulo entonces lo llamaremos **dato asimétrico**.

Esta nueva convención tiene dos razones: la primera es para simplificar lo más posible los diagramas, la segunda es asemejar los diagramas de las formas integrales no-simétricas y los de las formas unitarias(simétricas) para trabajarlos de manera similar.

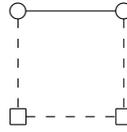
Con esta relación se podría pensar que se pierde información; sin embargo, podemos recuperar nuestra forma integral  $q$ , puesto que sabemos ya la relación entre un triángulo, un círculo o un cuadrado y su respectiva etiqueta. Esto es,  $q_i$  es el valor de la etiqueta en el vértice  $i$ , mientras que  $q_{ij} = -\text{máx}\{q_i, q_j\}[i, j]_q$ .

**Ejemplo 2.3.** Tomando las mismas formas integrales  $p$  y  $q$  del ejemplo 2.2, con la nueva convención, tendremos ahora:

$B_p :$



$B_q :$



## 2.3. Ensamblaje de árbol

En seguida, describiremos una construcción de lo que es un ensamblaje de árbol, el cual nos servirá para caracterizar las formas cuadráticas integrales positivas. Para ello definiremos primero lo que es un bloque.

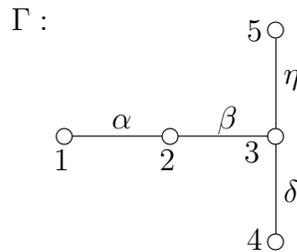
**Definición 2.3.** Para dos números naturales  $m$  y  $m'$ , con  $m + m' > 0$ , denotemos por  $F_{m,m'}$  a la bigráfica con  $m + m'$  vértices descritos como:  $(1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, m')$ . Para un par  $\{(1, i), (2, j)\}$  se dibuja una arista llena; y los pares  $\{(1, i), (1, i')\}$  y  $\{(2, j), (2, j')\}$  con  $i \neq i'$  y  $j \neq j'$ , aristas punteadas. A la bigráfica resultante  $F_{m,m'}$  la llamamos **bloque**.

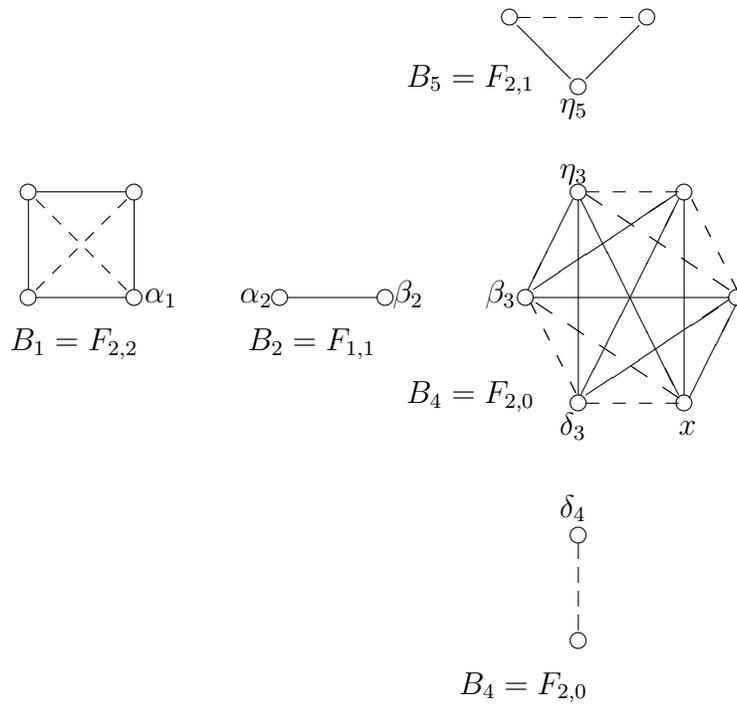
Para definir un ensamblaje de árbol, consideremos una gráfica  $\Gamma$  con vértices  $1, \dots, t$ . Sean  $B_1, \dots, B_t$  bloques y  $\sigma_i : \Gamma_i \rightarrow (B_i)_o$  funciones inyectivas,

donde  $\Gamma_i$  denota el conjunto de aristas en  $\Gamma$  terminando en  $i$  y  $(B_i)_o$  el conjunto de vértices de  $B_i$ . Con esta información, definimos el **ensamblaje de bigráficas**  $B_1, \dots, B_t$  que es la bigráfica obtenida, de la unión disjunta de  $B_1, \dots, B_t$ , identificando  $\sigma_i(\alpha)$  con  $\sigma_j(\alpha)$  para cada arista  $\alpha = \{i, j\}$  de  $\Gamma$ . Los puntos identificados son llamados **nodos**; y si  $\Gamma$  es un árbol, le llamamos **ensamblaje de árbol de bigráficas de tipo  $\mathbb{A}$** .

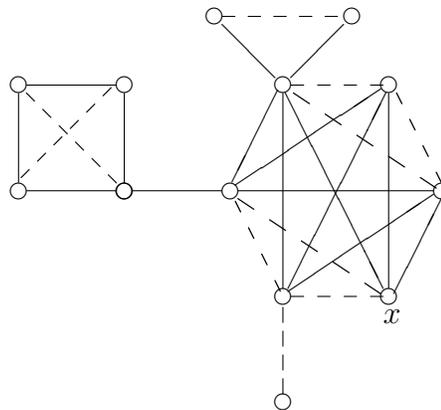
Consideremos ahora un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{A}$ . Sea  $x$  un vértice del ensamblaje que no sea nodo; entonces, si cambiamos todos los demás por cuadrados, a esta bigráfica la llamaremos de tipo  $\mathbb{B}$ . Pero si en lugar de cambiar todos los demás vértices por cuadrados, sólo cambiamos el vértice  $x$  por un cuadrado, a la bigráfica resultante la llamaremos de tipo  $\mathbb{C}$ . En los dos últimos casos, al vértice  $x$  lo llamaremos **vértice distinguido**.

**Ejemplo 2.4.** *En este ejemplo, construimos los tres tipos de ensamblaje de árbol que anteriormente definimos. La primera gráfica nos determina como estos 5 bloques se unirán. Más adelante se verá que estos ensamblajes corresponde a una forma cuadrática de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n$  ó  $\mathbb{C}_n$ .*





$B(\text{tipo } \mathbb{A}) :$





# Capítulo 3

## Transformaciones especiales

En este capítulo, describiremos las transformaciones que utilizaremos para demostrar el resultado principal de este trabajo. También estudiaremos las relaciones que existen entre ellas.

### 3.1. Transformaciones de Gabrielov

Primero hablaremos de las transformaciones que utilizaremos para decir cuando dos formas integrales son equivalentes. Estas transformaciones son llamadas transformaciones de Gabrielov (ver Gabrielov). Recordemos que  $\text{MI}(n)$  denota a las matrices integrales (ver 2.1).

**Definición 3.1.** *Una transformación de Gabrielov es una función*

$$\mu^{ij} : \text{MI}(n) \rightarrow \text{MI}(n)$$

tal que  $\mu^{ij}(M) = T^t M T$ , donde  $T = \mathbf{1} + \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} \mathbb{E}^{ij}$  y  $(\mathbb{E}^{ij})_{rs} = \delta^{ri} \delta^{sj}$ .

Más adelante, se demostrará que la función  $\mu^{ij} : \text{MI}(n) \rightarrow \text{MI}(n)$  está bien definida. Es decir, que  $\mu^{ij}(M)$  es nuevamente una matriz integral. Para ello, primero calculemos la entrada de  $M' = T^t M T$  en el lugar  $(r, s)$ :

$$\begin{aligned} (\mu^{ij}(M))_{rs} &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n T_{ar} M_{ab} T_{bs} \\ &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \left( \delta_{ar} - \frac{2M_{ij}}{M_{ii}} \delta_{ai} \delta_{rj} \right) M_{ab} \left( \delta_{bs} - \frac{2M_{ij}}{M_{ii}} \delta_{bi} \delta_{sj} \right). \end{aligned}$$

Así la entrada de la matriz  $M'$  en el lugar  $(r, s)$  queda de la siguiente manera:

$$(\mu^{ij}(M))_{rs} = \begin{cases} M_{rs} & \text{si } r \neq j \text{ y } s \neq j, \\ M_{rj} + \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} M_{ri} & \text{si } r \neq j \text{ y } s = j, \\ M_{jj} & \text{si } r = j \text{ y } s = j. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Lema 3.1.** *La función  $\mu^{ij} : \text{MI}(n) \rightarrow \text{MI}(n)$  está bien definida.*

*Demostración.* Primero veamos que la matriz  $M' = \mu^{ij}(M)$  es simétrica. En efecto, esto ocurre pues  $M'^t = (T^t M T)^t = T^t M T$ .

Es claro, por (3.1), que las entradas de las matrices  $M'$  y  $M$  coinciden en la diagonal.

Por último,  $\frac{2M'_{rs}}{M'_{rr}}$  es entero para toda  $r$  y  $s$ ; pues si  $r = s$  y  $s = j$  (o si  $s \neq j$ ), entonces  $M'_{rs} = M_{rs}$ . Por lo que  $\frac{2M'_{rs}}{M'_{rr}} = \frac{2M_{rs}}{M_{rr}}$ ; y en caso contrario tenemos, que  $\frac{2M'_{rj}}{M'_{rr}} = \frac{2(M_{rj} + M_{ri} \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}})}{M_{rr}} = \frac{2M_{rj}}{M_{rr}} + \frac{2M_{rj}}{M_{rr}} \left( \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} \right)$ , lo cual es entero, pues  $M$  es integral.  $\square$

## 3.2. La proyección a formas unitarias

Un paso fundamental, para este trabajo, es relacionar las formas integrales positivas con las formas unitarias. Esto se logra gracias a la función  $\pi$ , que enseguida definiremos. La función  $\pi$  nos permite proyectar las formas integrales a las formas unitarias, lo cual nos facilitará el trabajo de clasificación. Para ello, introduciremos a los siguientes subconjuntos de  $\text{MI}(n)$ .

**Definición 3.2.** *Para  $\lambda \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$  definimos:*

$$\text{MIS}(n)_\lambda := \{M \in \text{MI}(n) \mid \frac{M_{i,i}}{2} \in \{1, \lambda\} \forall i\},$$

$$\text{MIS}(n) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}} \text{MIS}(n)_\lambda.$$

**Observación 3.1.** *Notemos que el conjunto  $\text{MIS}(n)_1$ , al que renombraremos como  $\text{MU}$ , es el que corresponde al conjunto de matrices que conciernen a las formas unitarias, pues*

$$\text{MU}(n) = \{M \in \text{MI}(n) \mid \frac{M_{i,i}}{2} = 1 \ \forall i\}.$$

Así que, tenemos la siguiente relación:

$$\text{MU}(n) \subset \text{MIS}(n) \subset \text{MI}(n).$$

**Definición 3.3.** La función de proyección  $\pi : \text{MIS}(n) \rightarrow \mathbb{Z}^{n \times n}$ , asigna a cada matriz  $M \in \text{MIS}(n)$  la matriz  $N := \pi(M)$ , donde  $N_{rs} = \frac{2M_{rs}}{\max\{M_{rr}, M_{ss}\}}$ .

**Lema 3.2.**  $\text{Im } \pi \subset \text{MU}(n)$ .

*Demostración.* Sea  $N = \pi(M)$ . Notemos que  $N_{rr} = \frac{2M_{rr}}{\max\{M_{rr}, M_{rr}\}} = 2$ . Además,  $N \in \text{MI}(n)$ , pues  $N_{rs} = \frac{2M_{rs}}{M_{rr}}$  (respectivamente  $N_{rs} = \frac{2M_{rs}}{M_{ss}}$ ) si  $M_{rr} \geq M_{ss}$  (resp. si  $M_{rr} < M_{ss}$ ).  $\square$

El siguiente resultado es central en este trabajo, pues nos describe la forma en que actúan las transformaciones de Gabrielov en las formas integrales. Este efecto resulta similar al que se observa en las bigráficas de las formas integrales positivas.

**Proposición 3.3.** Sea  $M \in \text{MIS}(n)_2$  y  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ .

- a) Si  $M_{ii} = M_{jj}$ , entonces  $\pi \circ \mu^{ij}(M) = \mu^{ij} \circ \pi(M)$ .
- b) Para toda  $k$ , si  $M_{ii} = M_{kk}$ , entonces:  $(\pi \circ \mu^{ij}(M))_{kj} = (\mu^{ij} \circ \pi(M))_{kj}$ .
- c) Si  $M_{rr} = M_{ss}$  para toda  $r, s \neq 1$ , entonces  $\pi \circ \mu^{ij}(M) = \mu^{ij} \circ \pi(M)$  para toda  $i \neq 1$ .
- d) Si  $M_{rr} = M_{ss}$  para toda  $r, s \neq 1$ , entonces la desigualdad  $M_{ii} < M_{jj}$ , implica que:

$$(\pi \circ \mu^{ij}(M))_{kj} = N_{kj} + \kappa \frac{-2N_{ij}}{N_{ii}} N_{ki},$$

$$\text{donde } \kappa = \frac{M_{jj} \max\{M_{ii}, M_{kk}\}}{M_{ii} \max\{M_{jj}, M_{kk}\}}.$$

*Demostración.* Sea  $M \in \text{MI}(n)$  y  $N = \pi(M)$ . Expresemos las entradas de  $M' = \pi \circ \mu^{ij}(M)$  y  $N' = \mu^{ij} \circ \pi(M)$  en términos de  $N$ :

$$\begin{aligned}
N'_{rs} &= (\mu^{ij} \circ \pi(M))_{rs} \\
&= (\mu^{ij}(N))_{rs} \\
&= \begin{cases} N_{rs} & \text{si } r \neq j \text{ y } s \neq j, \\ N_{rj} + \frac{-2N_{ij}}{N_{ii}} N_{ri} & \text{si } r \neq j \text{ y } s = j, \\ N_{jj} & \text{si } r = j \text{ y } s = j. \end{cases} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M'_{rs} &= (\pi \circ \mu^{ij}(M))_{rs} \\
&= \begin{cases} N_{rs} & \text{si } r \neq j \text{ y } s \neq j, \\ \frac{2(M_{rj} + \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} M_{ri})}{\max\{M_{rr}, M_{ss}\}} & \text{si } r \neq j \text{ y } s = j, \\ N_{jj} & \text{si } r = j \text{ y } s = j. \end{cases} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Para el caso a), por los cálculos anteriores, sólo falta verificar la igualdad en las entradas de las matrices  $M'$  y  $N'$  en el lugar  $(j, s)$ . Como  $M_{ii} = M_{jj}$ , se tiene que  $M_{ii} = \max\{M_{jj}, M_{ii}\}$ ; y por ello

$$M'_{js} = \frac{2M_{js}}{\max\{M_{jj}, M_{ss}\}} + \frac{2M_{is}}{\max\{M_{jj}, M_{ss}\}} \left( \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} \right) = N'_{js}.$$

Por lo tanto  $M' = N'$ .

En el caso b), consideremos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $M_{ii} = M_{kk}$ . Entonces, nuevamente podemos escribir  $M_{ii} = \max\{M_{kk}, M_{ii}\}$ . Por lo que

$$M'_{kj} = \frac{2M_{jk}}{\max\{M_{jj}, M_{kk}\}} - \frac{2M_{ij}}{\max\{M_{jj}, M_{kk}\}} \frac{2M_{ik}}{M_{ii}} = N'_{kj}.$$

Para el caso c), si  $i, j > 1$ , entonces  $M_{ii} = M_{jj}$ ; y por a), se cumple la igualdad. Si  $i > 1, j=1$  entonces por b), tiene c).

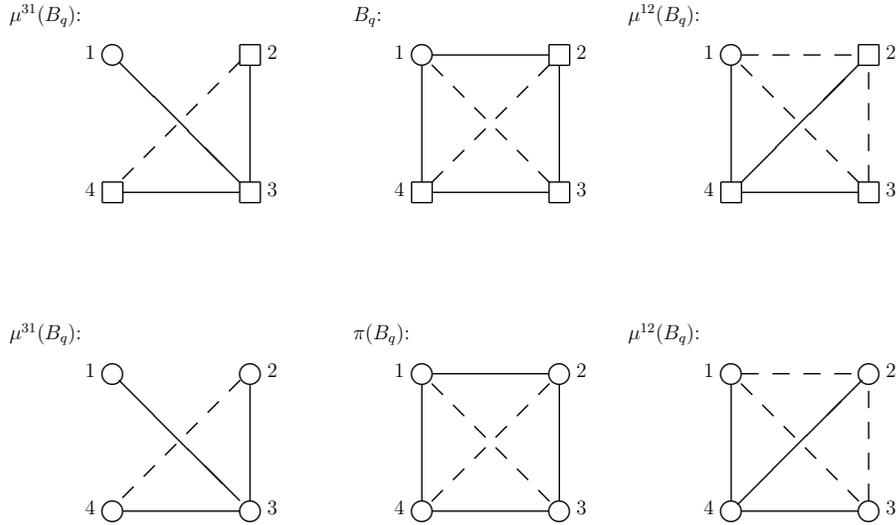
Finalmente, para el caso d), observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\kappa \frac{-2N_{ij}}{N_{ii}} N_{ik} &= \kappa (-N_{ij}) N_{ik} \\
&= \left( \frac{M_{jj} \max\{M_{ii}, M_{kk}\}}{M_{ii} \max\{M_{jj}, M_{kk}\}} \right) \left( \frac{-2M_{ij}}{\max\{M_{ii}, M_{jj}\}} \right) \left( \frac{2M_{ki}}{\max\{M_{kk}, M_{ii}\}} \right) \\
&= \left( \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} \right) \left( \frac{2M_{ki}}{\max\{M_{kk}, M_{jj}\}} \right).
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que  $\kappa \frac{-2N_{ij}}{N_{ii}} N_{ik} = \left(\frac{-2M_{ij}}{M_{ii}}\right) \left(\frac{2M_{ki}}{\max\{M_{kk}, M_{jj}\}}\right)$ ; y con ello, la igualdad que buscábamos.  $\square$

**Observación 3.2.** *El último inciso, de la proposición 3.3, describe de manera general la parcial conmutatividad entre la función de proyección y las transformaciones de Gabrielov. En nuestro caso, podemos observar que  $\kappa$  puede tomar dos valores: si  $i \neq 1$ , entonces  $\kappa = 1$  (caso  $\mathbb{B}_n$ ); y si  $i = 1$ , entonces  $\kappa = 2$  (caso  $\mathbb{C}_n$ ).*

**Ejemplo 3.1.** *En este ejemplo, se observa el comportamiento de las transformaciones de Gabrielov y la proyección en los casos c) (lado izquierdo del dibujo) y d) (lado derecho del dibujo). En el primer caso, el comportamiento de las transformaciones de Gabrielov, de la proposición 3.3, es tal como en las formas unitarias. En cambio, en el segundo caso, el comportamiento es distinto: las aristas que en el caso unitario se eliminan, corresponden a aristas en el caso  $\mathbb{C}_n$  que sólo cambian de signo.*



### 3.3. La inversión de signos

Finalmente, definamos la siguiente función, la cual tiene la propiedad de conmutar con las transformaciones de Gabrielov.

**Definición 3.4.** Para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se define la función

$$\vartheta^k : \mathbb{Z}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{Z}^{n \times n}, \quad \vartheta^k(M) = I_{n;k} M I_{n;k}$$

donde  $I_{n;k} = \mathbf{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$  con la entrada  $-1$  en el lugar  $k$ .

**Observación 3.3.** Al calcular la entrada de la matriz  $\vartheta^k(M)$  en el lugar  $(r, s)$  se tiene:

$$\begin{aligned} (\vartheta^k(M))_{rs} &= \begin{cases} M_{rs} & \text{si } r \neq k \text{ y } s \neq k, \text{ ó } r = s \\ -M_{rs} & \text{si } r = k \text{ ó } s = k \text{ y } r \neq s \end{cases} \\ &= (-1)^{\delta_{kr}} (-1)^{\delta_{ks}} M_{rs} \\ &= \varepsilon_k^{rs} M_{rs}, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_k^{rs} = (-1)^{\delta_{kr} + \delta_{ks}}$ .

**Lema 3.4.** Si  $M$  una matriz del conjunto  $\text{MI}(n)$ , entonces

$$\mu^{ij} \circ \vartheta^k(M) = \vartheta^k \circ \mu^{ij}(M).$$

*Demostración.* Vamos a verificar la entrada de ambas matrices en el lugar  $(r, s)$  para los tres diferentes casos.

Si  $r = s$ , entonces

$$(\mu^{ij} \circ \vartheta^k(M))_{rr} = (\vartheta^k(M))_{rr} = M_{rr} = (\mu^{ij}(M))_{rr} = (\vartheta^k \circ \mu^{ij}(M))_{rr}.$$

Si  $r, s \neq j$ , obtenemos

$$(\mu^{ij} \circ \vartheta^k(M))_{rs} = (\vartheta^k(M))_{rs} = \varepsilon_k^{rs} M_{rs} = \varepsilon_k^{rs} (\mu^{ij}(M))_{rs} = (\vartheta^k \circ \mu^{ij}(M))_{rs}.$$

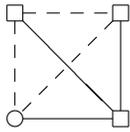
Finalmente, si  $s = j$ , se tiene las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (\mu^{ij} \circ \vartheta^k(M))_{rj} &= \varepsilon_k^{rj} M_{rj} + \frac{-2\varepsilon_k^{ij} M_{ij}}{\varepsilon_k^{ii} M_{ii}} \varepsilon_k^{ri} M_{ri} \\ &= \varepsilon_k^{rj} M_{rj} + \frac{-2(-1)^{\delta_{ki}} (-1)^{\delta_{kj}} M_{ij}}{(-1)^{\delta_{ki}} (-1)^{\delta_{ki}} M_{ii}} (-1)^{\delta_{kr}} (-1)^{\delta_{ki}} M_{ri} \\ &= \varepsilon_k^{rj} M_{rj} + (-1)^{\delta_{kj}} (-1)^{\delta_{kr}} \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} M_{ri} \\ &= \varepsilon_k^{rj} M_{rj} + \varepsilon_k^{rj} \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} M_{ri} \\ &= \varepsilon_k^{rj} \left( M_{rj} + \frac{-2M_{ij}}{M_{ii}} M_{ri} \right) \\ &= (\vartheta^k \circ \mu^{ij}(M))_{rj}. \end{aligned}$$

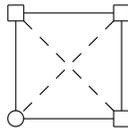
□

**Ejemplo 3.2.** Usando el Lema 3.4, podemos dar una nueva forma de ver el ejemplo 3.1 cuando aplicamos la función  $\mu^{41}$ . De la proposición 3.3 se tiene que  $(\mu^{ij}(M))_{is} = (\vartheta^j(M))_{is}$  en el caso  $\mathbb{C}_n$ .

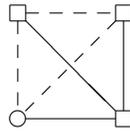
$\mu^{41}(B_q)$ :



$B_q$ :



$\vartheta_1(B_q)$ :





# Capítulo 4

## Caracterización de las formas unitarias positivas de tipo Dynkin $\mathbb{A}_n$

En este capítulo, resumiremos el trabajo realizado para caracterizar las formas unitarias positivas de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$  por medio de bigráficas, que nos resulta importante para nuestro trabajo, pues por medio de las transformaciones descritas en el capítulo anterior y la relación entre ellas, nos es posible trasladar la información del dato asimétrico al dato simétrico, para luego utilizar los resultados de las formas unitarias positivas y llegar así a la caracterización de las formas integrales no simétricas.

### 4.1. Resultados esenciales

Para una forma unitaria positiva  $q$ , recordemos que la bigráfica  $B_q$  asociada a  $q$ , no presenta etiquetas pues  $q_i = 1$ ; por lo que estamos hablando siempre de un dato simétrico. Todas las demostraciones de los resultados presentados en esta sección se encuentran en [1].

El siguiente teorema es el que nos da el título de este capítulo, es decir, es un resultado que caracteriza a las formas unitarias de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ .

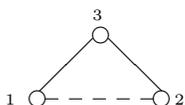
**Teorema 4.1.** *Sea  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma unitaria. Entonces,  $q$  es positiva de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$  si y sólo si  $B_q$  es un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{A}_n$ .*

## 4.2. Ciclos y sus restricciones

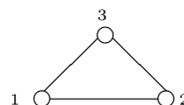
**Definición 4.1.** El **marco** de una bigráfica  $B$  es una gráfica  $\Phi(B)$  que es obtenida, a partir de  $B$ , cambiando las aristas punteadas por aristas llenas. Además, toda subgráfica completa  $C$  de  $B$  es un **ciclo** si es conexa y todo vértice está conectado con exactamente otros dos vértices.

**Ejemplo 4.1.** En el siguiente ejemplo, podemos observar del lado izquierdo al ciclo más pequeño; y en algunos casos, suele ser el único ciclo permitido dentro de una gráfica. En el lado derecho se encuentra al marco de dicho ciclo.

$B$ :



$\Phi(B)$ :



**Definición 4.2.** Decimos que una forma unitaria  $q$  satisface la **condición de ciclo**, si para cada ciclo  $C$  en  $B_q$  el número de aristas punteadas en  $C$  es impar. Supongamos ahora que dos formas unitarias  $q, q' : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  tienen el mismo marco; entonces, decimos que  $q$  y  $q'$  son **ciclo-equivalentes** si para cada ciclo  $C$  en  $\Phi$ , el número de pares  $i < j$  tal que  $q_{i,j} \neq q'_{i,j}$  es par (ver ejemplo 4.2).

**Ejemplo 4.2.** En este ejemplo, podemos observar dos bigráficas que son ciclo equivalentes y además cumplen la condición de ciclo.



El siguiente resultado es importante, pues indica cuando podemos detectar que dos formas unitarias son  $\mathbb{Z}$ -equivalentes. Para su demostración son necesarios los resultados 4.3 y 4.4.

**Teorema 4.2.** *Sea  $p : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma unitaria positiva y  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma unitaria tal que  $\Phi(B_q) = \Phi(B(p))$ . Entonces es equivalente:*

- (a)  $q$  y  $p$  son  $\mathbb{Z}$ -equivalentes.
- (b)  $q$  es positiva.
- (c)  $q$  satisface la condición de ciclo.

**Lema 4.3.** *Si  $q$  es una forma unitaria positiva, entonces  $q$  satisface la condición de ciclo.*

La demostración de este lema consiste en construir un vector  $v$ , con la propiedad  $q(v) \leq 0$ , si  $B_q$  contiene un ciclo con un número par de aristas.

**Proposición 4.4.** *Para dos formas unitarias  $q, p : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I)  $p$  y  $q$  tienen el mismo marco y son ciclo equivalentes;
- (II)  $q = Tp$  para una función  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , composición de funciones inversión de signo:  $\vartheta^{i_1}, \dots, \vartheta^{i_k}$ .

### 4.3. Bloques

Para una bigráfica  $B_q$  asociada a una forma integral  $q$ , decimos que  $q'$  es una **restricción** de  $q$  si  $B_{q'}$  es isomorfa a una subbigráfica inducida de  $B_q$ . Escribiremos  $B^{(x)}$  a la subbigráfica de  $B$  dada por los puntos de  $B \setminus \{x\}$ .

Dada  $B$  una bigráfica conexa, decimos que  $B$  es bloque si  $B^{(x)}$  es conexa para toda  $x \in B$ . Decimos además que  $B$  es completa si para cualquier par de vértices  $i, j$  hay una arista.

La siguiente proposición resulta importante para la clasificación de las formas unitarias de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ , pues es el primer acercamiento a este resultado .

**Proposición 4.5.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para una bigráfica  $B$ .*

- i)  $B$  es un bloque y  $q(B)$  es positiva de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ .
- ii)  $\Phi(B)$  es una gráfica completa y  $q(B)$  satisface la condición de ciclo.

iii)  $B$  es isomorfa a  $F_{m,m'}$  para algún  $m \geq 1, m' \geq 0$  con  $m + m' = n$ .

**Teorema 4.6.** Sea  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma unitaria positiva de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ . Entonces, toda restricción conexas de  $q$  tiene tipo  $\mathbb{A}_m$  para algún  $m \leq n$ .

### 4.4. Demostración del Lema ensamblaje

El lema, que se demostrará en esta sección, es muy importante, pues con él, podemos caracterizar los ensamblajes de árbol de tipo  $\mathbb{A}$ ; y con ello, demostrar el teorema principal de este capítulo. Un primer acercamiento al resultado de este lema, se ve descrito en el Lema 4.7, pues describe un caso particular.

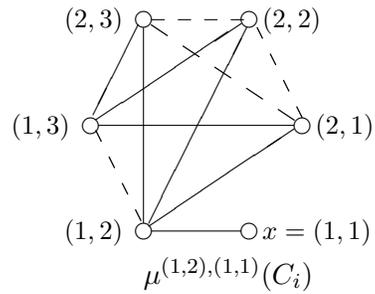
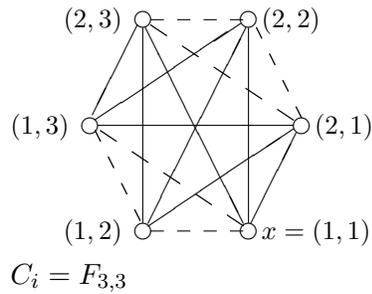
A lo largo de esta sección, denotaremos por  $A(n)$  a la gráfica de Dynkin con vértices  $1, \dots, n$  y aristas entre los vértices  $i$  e  $i + 1$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ .

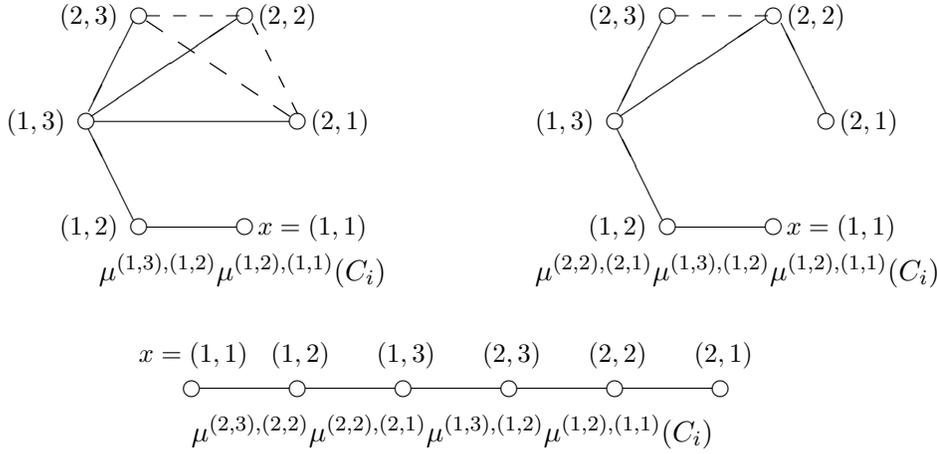
**Lema 4.7.** Sea  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma unitaria positiva de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ . Entonces  $B_q$  es un ciclo si y sólo si  $B_q$  es isomorfa a  $F_{3,0}$  o a  $F_{2,1}$ .

La demostración de este lema, al igual que la del Lema 4.3, son constructivas, pues sólo hace falta ver como actúan las transformaciones de Gabrielov en diferentes casos.

**Lema 4.8.** Sea  $B$  un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{A}$ . Sea  $x$  un vértice de  $B$  el cual no es nodo. Entonces existe una sucesión de transformaciones de Gabrielov  $\mu^{ij}$ ,  $i \neq x$ , con composición  $\mu$  tal que  $\mu(B)$  es isomorfa a  $A(n)$  y  $x$  corresponde al vértice 1 de  $A(n)$ .

**Ejemplo 4.3.** Antes de empezar con la demostración, del Lema 4.8, mostraremos el principal argumento de esta demostración, de manera gráfica.





*Demostración del Lema 4.8.* Sea  $B$  un ensamblaje de árbol de tipo  $A$  y  $t$  el número de bigráficas que lo componen. Haremos la demostración por inducción sobre  $t$ . Si  $t = 1$ , denotemos los puntos de  $C_1$  de las siguiente manera:

$$x = (1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, m').$$

Notemos que la bigráfica  $\mu^{(1,2)(1,1)}(C_1)$  es isomorfa al ensamblaje de árbol de las bigráficas  $F_{m-1,m'}$  y  $F_{1,1}$ ; y de manera inductiva, podemos observar que  $\mu^{(2,m')(2,m'-1)} \dots \mu^{(2,2)(2,1)} \mu^{(1,m)(1,m-1)} \dots \mu^{(1,2)(1,1)}(C_1)$  es isomorfa a  $A(n)$  con  $x$  en el vértice 1.

Decimos que  $\mu^{ij}$  evita a  $x$  si  $i \neq x$ .

Sea  $t > 1$  y supongamos que  $x$  pertenece a  $C_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Consideremos los nodos  $h_1, \dots, h_s$  de  $B$  en  $C_i$ . Ahora, para cada  $h_j$  denotaremos como  $B_{h_j}$  al ensamblaje de árbol conexo de los  $C'_j$ s con  $i \neq j$  que contenga a  $h_j$ . Por hipótesis de inducción, existe una sucesión de transformaciones de Gabrielov con composición  $\mu_j$  que evitan a todos los puntos de  $C_i$ ; en particular al nodo  $h_j$  y a  $x$ , tal que  $B_{h_j}$  es isomorfa a  $A(n_j)$  y  $h_j$  es el vértice 1 de  $A(n_j)$ . La bigráfica  $\mu_1 \dots \mu_s B$  es  $C_i = F_{m,m'}$  unida a las  $A(n_1), \dots, A(n_j)$ , identificando  $h_j \in C_i$  con  $1 \in A(n_j)$  para cada  $j$ . Abreviaremos la bigráfica resultante con la notación  $B_1 = F_{m,m'}[h_1, n_1] \dots [h_s, n_s]$ .

Si  $s > 1$  denotemos los vértices de  $A(n_j)$  por  $1(j), \dots, n_j(j)$ . Para simplificar notación, definamos  $\mu_{\rho(j),y} = \mu^{n_j(j),y} \dots \mu^{2(j),y} \mu^{1(j),y}$  con  $y \in C_i \setminus \{h_j\}$ .

Reduciremos al caso cuando  $s = 1$ . Observemos que la bigráfica  $\mu_{\rho(1),n_2(2)} \mu_{\rho(2),h_1} B_1$  es  $F_{m-1,m'}[h_2, n_2 + n_1] \dots [h_s, n_s]$ . De manera inductiva, obtenemos una sucesión de transformaciones de Gabrielov con composición  $\mu'_1$  tal que  $B_2 = \mu'_1 B_1 = F_{u,u'}[h_s, v]$  donde  $u + u' = m + m' - s + 1$  y  $v = n_1 + \dots + n_s$ .

Ahora, ya que reducimos a el caso en que  $s = 1$ , obtendremos el caso en que  $u = 2$ . Consideremos  $y$  un vértice de  $F_{u,w'}[h_s, v]$  con  $y \neq x, h_s$ . Si consideramos la bigráfica  $T_{v(s),y}T_{\rho(s),y}B_2$  ésta es isomorfa a  $F_{u-1,w'}[h_s, v+1]$ . Nuevamente, si continuamos con este proceso de manera inductiva obtendremos una sucesión de transformaciones de Gabrielov que evitan a  $x$  con composición  $S_2$  tal que  $B_3 = S_2B_2$  es isomorfa a  $F_{w,w'}[h_s, u+v-2]$ , donde  $w + w' = 2$  y los dos puntos de  $F_{w,w'}$  son  $x$  y  $h_s$ . Si  $[x, h_s]_{B_3} = -1$  (resp.  $[x, h_s] = 1$ ) entonces  $B_3$  (resp.  $\mu^{xh_s}B_3$ ) es isomorfa a  $A(n)$ . □

# Capítulo 5

## Caracterización de formas integrales de tipo Dynkin $\mathbb{B}_n$ , $\mathbb{C}_n$ , $\mathbb{F}_4$ o $\mathbb{G}_2$

Este capítulo está dedicado a las formas integrales no simétricas. En la primera sección se manejan las formas cuadráticas de tipo Dynkin  $\mathbb{B}_n$  o  $\mathbb{C}_n$ ; mientras que en la segunda sección, trabajamos las formas cuadráticas de tipo Dynkin  $\mathbb{F}_4$  o  $\mathbb{G}_2$ .

### 5.1. Formas integrales de tipo Dynkin $\mathbb{B}_n$ y $\mathbb{C}_n$

En esta sección veremos que el comportamiento de las formas cuadráticas de tipo Dynkin  $\mathbb{B}_n$  y  $\mathbb{C}_n$  es semejante al de aquellas de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ . Esto quiere decir que, así como un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{A}$  corresponde a una forma cuadrática de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ , así también un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{B}$  ( resp.  $\mathbb{C}$ ) corresponde a una forma cuadrática de tipo  $\mathbb{B}_n$  (resp.  $\mathbb{C}_n$ ). Este resultado está descrito en el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.** *Sea  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma cuadrática. Entonces,  $q$  es una forma de tipo Dynkin  $\mathbb{B}_n$  ó  $\mathbb{C}_n$  si y sólo si  $B_q$  es un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{B}$  ó  $\mathbb{C}$  respectivamente.*

Ahora que ya tenemos en mente cual es nuestro resultado principal hablaremos de la base fundamental de su demostración, que es el siguiente lema.

**Lema 5.2.** *Sea  $B$  un ensamblaje de árbol de bloques  $C_1, \dots, C_n$ , con  $C_n$  de tipo  $\mathbb{B}$  ó  $\mathbb{C}$ . Sea  $x$  un vértice distinguido de  $B$ . Entonces, existe una sucesión de transformaciones de Gabrielov  $\mu^{y_i z_i}$ ,  $z_i \neq x$ , con composición  $\mu$  tal que  $\mu(B)$  es isomorfo a  $\mathbb{B}_n$  ó  $\mathbb{C}_n$  y  $x$  corresponde al vértice 1 de  $\mathbb{B}_n$  ó  $\mathbb{C}_n$ , respectivamente.*

*Demostración del lema 5.2.* Sean  $B$  un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{B}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) y  $x$  el vértice distinguido de  $B$ . Consideremos a  $\pi(B)$ , sabemos que es un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{A}$  y  $x$  no es un nodo. Así, por Lema 4.8, sabemos que existe una sucesión de transformaciones con composición  $\mu$  que evitan a  $x$  tal que  $\mu(\pi(B))$  es isomorfa a  $\mathbb{A}_n$  y  $x$  corresponde al vértice 1 de  $\mathbb{A}_n$ , es decir,  $\mu \circ \pi(B) = \mathbb{A}_n$ .

Puesto que todas las transformaciones  $\mu^{y_i z_i}$  evitan a  $x$ , éstas corresponden al inciso c) del Lema 3.3. De esta manera  $\pi \circ \mu(B) = \mathbb{A}_n$ ; por lo que  $\mu(B)$  es isomorfa a  $\mathbb{B}_n$  (resp.  $\mathbb{C}_n$ ).  $\square$

*Demostración del Teorema 5.1.* Sea  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma cuadrática de tipo Dynkin  $\mathbb{B}_n$  (resp.  $\mathbb{C}_n$ ). Entonces  $q$  es  $\mathbb{Z}$ -equivalente a  $q'$ , tal que  $B_{q'} = \mathbb{B}_n$  (resp.  $\mathbb{C}_n$ ). Ahora, vamos a demostrar que esta equivalencia no sólo es  $\mathbb{Z}$ -equivalente sino que además es de transformaciones de Gabrielov. Consideremos una función  $f : q^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n \rightarrow q'^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n$ , donde  $f(v) = v'$ ,  $\text{conv}' = (\mathbf{1} + \frac{-2(M_q)_{ij}}{(M_q)_{ii}} \mathbb{E}^{ij})v$  para algún  $i$  y  $j$ . Sabemos que  $q(v) = q'(v')$ , notemos además que la función  $f$  es una inclusión, pues si  $v \in q^{-1}(1)$ , entonces  $v' \in (q')^{-1}(1)$ ; y es claro que, si  $v \in \mathbb{N}^n$  entonces también tenemos que  $v' \in \mathbb{N}^n$ . Así, concluimos la siguiente desigualdad

$$|q^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n| < |q'^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n|. \quad (5.1)$$

Consideramos  $f^{-1} : q'^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n \rightarrow q^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n$  dada por  $f^{-1}(v') = v$ , donde  $v = (\mathbf{1} - \frac{-2(M_q)_{ij}}{(M_q)_{ii}} \mathbb{E}^{ij})v'$ . Notemos que el vector  $e_j + \frac{-2(M_q)_{ij}}{(M_q)_{ii}} e_i \notin q^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n$ . Por lo tanto, de 5.1 se tiene que

$$|q^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n| < |q'^{-1}(c) \cap \mathbb{N}^n| \leq |q'^{-1}(c)| = |q^{-1}(c)|. \quad (5.2)$$

En particular, obtenemos que

$$|q^{-1}(1) \cap \mathbb{N}^n| + |q^{-1}(2) \cap \mathbb{N}^n| \leq |q^{-1}(1)| + |q^{-1}(2)| = n$$

Si consideramos  $\pi(B_q)$  y  $\pi(B_{q'})$ , tenemos que  $\pi(B_{q'}) = \mathbb{A}_n$ . Sólo falta ver que las transformaciones de Gabrielov, con composición  $\mu$ , no afectan al tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$  bajo  $\pi$ . Si el tipo Dynkin es  $\mathbb{B}_n$ . Entonces la conmutatividad con  $\pi$  siempre se da, entonces  $\pi(B_{q'}) = \mu \circ \pi(B_q)$ ; y por el Teorema 4.1, puesto que  $\pi(B_q)$  es de tipo Dynkin  $\mathbb{A}_n$ , se sigue que  $B_q$  es un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{B}_n$ .

Ahora, en caso  $q$  sea de tipo Dynkin  $\mathbb{C}_n$ , tenemos dos casos para las transformaciones de Gabrielov. Si la transformación  $\mu^{ij}$  no evita a  $x$ , entonces  $\mu^{ij}$  actúa como la función identidad en  $\pi(q)$ . Por otro lado, si  $\mu^{ij}$  evita a  $x$ , por el Lema 5.2, tenemos la conmutatividad con  $\pi$ . De esta manera,  $\pi(B_{q'}) = \mu \circ \pi(B_q)$ ; de el Teorema 4.1, se sigue que  $B_q$  es un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{C}_n$ .

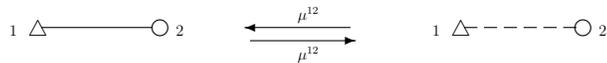
Recíprocamente, sea  $B_q$  un ensamblaje de árbol de tipo  $\mathbb{B}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ). Por el Lema 5.2, sabemos que existe una sucesión de transformaciones de Gabrielov, con composición  $\mu$ , tal que  $\mu(B_q)$  es isomorfa a  $\mathbb{B}_n$  (resp.  $\mathbb{C}_n$ ).  $\square$

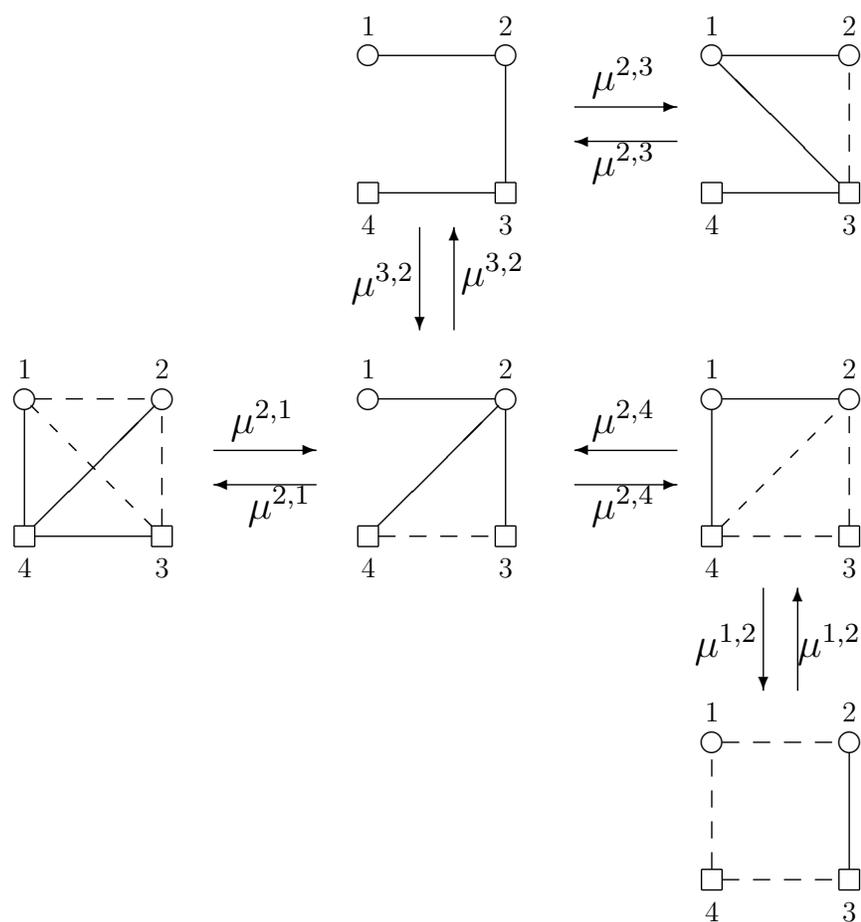
## 5.2. Formas integrales de tipo Dynkin $\mathbb{F}_4$ y $\mathbb{G}_2$

Puesto que hay muy pocas formas integrales de tipo Dynkin  $\mathbb{F}_4$  y  $\mathbb{G}_2$ , describiremos todas las bigráficas equivalentes.

En la figura 5.2 podemos observar los 6 diagramas que se pueden obtener por transformaciones de Gabrielov. Además, podemos ver la sucesión de transformaciones de Gabrielov que se necesitan para pasar de un diagrama a otro.

En el caso de las formas cuadráticas integrales de tipo Dynkin  $\mathbb{G}_2$ , solo tenemos dos diagramas equivalentes, que se ven a continuación:





# Capítulo 6

## Ejemplos de formas integrales inducidas por $\mathbb{F}_4$

En este capítulo analizaremos a las formas integrales inducidas de tipo Dynkin  $\mathbb{F}_4$ . Para ello, consideramos el sistema de raíces correspondiente al tipo Dynkin; pero como estamos hablando de formas integrales, este sistema tuvo que modificarse por medio de un cambio de base, para así no modificar la integrabilidad de la forma cuadrática. En la siguiente tabla, se hace una lista sólo de las raíces positivas de  $\mathbb{F}_4$  en la base canónica.

| Raíces positivas cortas | Raíces positivas largas |
|-------------------------|-------------------------|
| (1,2,3,2)               | (2,3,4,2)               |
| (1,1,1,0)               | (1,3,4,2)               |
| (0,1,1,0)               | (1,2,4,2)               |
| (0,0,1,0)               | (1,2,2,0)               |
| (1,2,3,1)               | (1,1,2,0)               |
| (0,0,0,-1)              | (0,1,2,0)               |
| (0,1,2,1)               | (0,-1,-2,-2)            |
| (1,1,2,1)               | (-1,-1,-2,-2)           |
| (1,2,2,1)               | (-1,-2,-2,-2)           |
| (-1,-1,-1,-1)           | (-1,0,0,0)              |
| (0,-1,-1,-1)            | (-1,-1,0,0)             |
| (0,0,-1,-1)             | (0,-1,0,0)              |

Recordemos que una forma cuadrática integral  $q$  de tipo Dynkin  $\mathbb{F}_4$ , es  $\mathbb{Z}$ -equivalente a una forma cuadrática integral  $q'$  tal que  $B_q = \mathbb{F}_4$ . Además, a su

vez  $\mathbb{F}_4$  tiene asociado un sistema de raíces, denotado por  $\Phi_q$ , que llamaremos **sistema de raíces asociado a  $q$** . Esta asociación no funciona en general para cualquier tipo Dynkin; un ejemplo de ello, es una forma integral de tipo Dynkin  $\mathbb{G}_2$ . En este caso, la forma cuadrática es una función  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , pero el sistema de raíces es un subconjunto de  $\mathbb{Z}^3$ . Por esto, en adelante, trabajaremos únicamente con formas cuadráticas de tipo Dynkin  $\mathbb{F}_4$ .

**Definición 6.1.** Sean  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma cuadrática,  $M_q$  la matriz casi-Cartan asociada,  $\alpha = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$  con  $r \leq n$  un subconjunto del sistema de raíces  $\Phi_q$ . La forma cuadrática  $q_\alpha : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , dada por

$$q_\alpha(y_1, \dots, y_r) = q\left(\sum_{j=1}^r y_j \alpha_{i_j}\right)$$

es la **forma cuadrática inducida por  $\alpha$** .

A continuación, enunciaremos una proposición que nos permite considerar sólo a las formas cuadráticas inducidas por  $\Phi^+$ , pues estas son equivalentes a las formas cuadráticas inducidas por  $\Phi$ .

**Proposición 6.1.** Sea  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma cuadrática,  $\Phi_q = \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$  el sistema de raíces asociado a  $q$  y  $\alpha = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}\} \subset \Phi_q^+$ . Entonces:

$$q_\alpha = T^1 \dots T^n q'_\alpha$$

donde  $\alpha' = \{\varepsilon_1 \alpha_{i_1} \dots \varepsilon_n \alpha_{i_n}\} \subset \Phi_q$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  y  $T^i = \mathbf{1}$  si  $\varepsilon_i = 1$  o  $T = \vartheta^i$  si  $\varepsilon_i = -1$ .

*Demostración.* Sean  $q_{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}} = A^t M_q A$  y  $q_{\varepsilon_1 \alpha_{i_1} \dots \varepsilon_n \alpha_{i_n}} = B^t M_q B$ . Notemos que  $B = \mathbf{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) A$ . Por lo que:

$$q_\alpha = T^1 \dots T^n q'_\alpha.$$

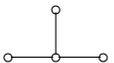
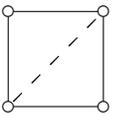
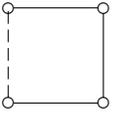
Con lo que queda demostrado la proposición. □

## 6.1. Diagramas de formas inducidas

En las siguientes tablas, se hace una lista de todas las formas inducidas, tomando sólo en cuenta las raíces positivas del sistema de raíces de  $\mathbb{F}_4$ . En la

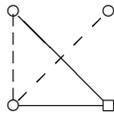
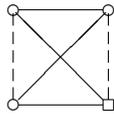
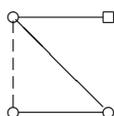
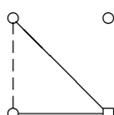
primera columna, se presenta el diagrama correspondiente a la forma inducida; en la columna de en medio, se encuentra un ejemplo de las raíces que se pueden tomar para inducir ese diagrama. Finalmente, en la última columna se encuentra el determinante de la matriz que resulta de poner a las raíces de la columna de en medio como columnas.

En esta tabla se observan aquellas formas inducidas que resultan de tomar sólo raíces cortas del sistema de raíces de tipo Dynkin  $F_4$ .

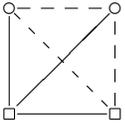
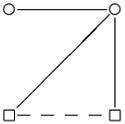
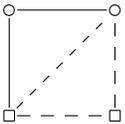
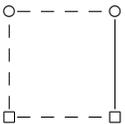
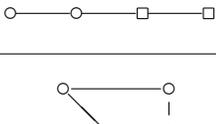
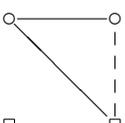
| Diagrama  | Ejemplo   | Determinante de A |
|---|---|-------------------|
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$   | 1                 |
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$   | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   | -2                |

46CAPÍTULO 6. EJEMPLOS DE FORMAS INTEGRALES INDUCIDAS POR  $\mathbb{F}_4$

Para los siguientes diagramas, se consideraron tres raíces cortas y una larga. Como se verá, ninguno de los diagramas es de Dynkin (como en el caso anterior).

| Diagrama  | Ejemplo  | Determinante de A |
|---|--|-------------------|
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 1                 |
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  | 1                 |
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 1                 |
|   | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  | -2                |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | -2                |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | -2                |

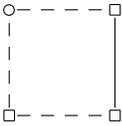
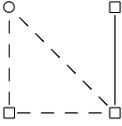
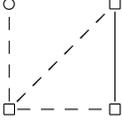
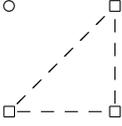
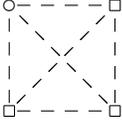
Para las formas inducidas, que corresponden a los siguientes diagramas, se consideraron dos raíces cortas y dos largas. Con estos diagramas, es posible observar, que no basta con considerar transformaciones  $\mathbb{Z}$ -equivalentes para preservar el tipo de Dynkin, sino además se deben considerar dos raíces cortas y dos raíces largas. Además, en los caso en el que el determinante de la matriz es 1, la forma inducida también es una transformación  $\mathbb{Z}$ -equivalente.

| Diagrama  | Ejemplo  | Determinante de A |
|---|--|-------------------|
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 1                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | 1                 |

48CAPÍTULO 6. EJEMPLOS DE FORMAS INTEGRALES INDUCIDAS POR  $\mathbb{F}_4$

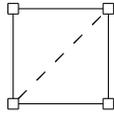
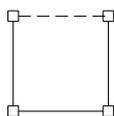
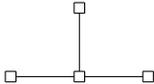
| Diagrama | Ejemplo  | Determinante de A |
|----------|--|-------------------|
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$    | -2                |
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$    | -2                |
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$    | -2                |
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   | -4                |
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | -2                |
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | -2                |
|          | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 3                 |

En la siguiente tabla, consideramos únicamente las formas cuadráticas inducidas, tomando una raíz corta y tres largas.

| Diagrama  | Ejemplo  | Determinante de A |
|---|--|-------------------|
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$    | -2                |
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$    | -2                |
|    | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$    | -2                |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$    | -2                |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   | -4                |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ | 4                 |
|  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   | 4                 |
|  | $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$    | 3                 |

50CAPÍTULO 6. EJEMPLOS DE FORMAS INTEGRALES INDUCIDAS POR  $\mathbb{F}_4$

En esta última tabla, se encuentran los cuatro diagramas de las formas inducidas, al tomar únicamente raíces largas. Notemos que, salvo por los vértices, son los mismos diagramas que al tomar sólo raíces cortas.

| Diagrama  | Ejemplo  | Determinante de A |
|---|--|-------------------|
|    | $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$        | -4                |
|    | $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$     | -4                |
|   | $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$    | -4                |
|  | $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ | 8                 |

# Bibliografía

- [1] M. Barot. *A Characterization of positive unit forms*. Bol, Soc. Mat. Mexicana(3) Vol.5 (1999).
- [2] M. Barot, D. Kussin, H. Lenzing. *The Lie algebra associated to a unit form*. Journal of Algebra 296 (2006).
- [3] M. Barot, C. Geiss, A. Zelevinsky. *Cluster algebras of finite type and positive symmetrizable matrices*
- [4] R. Carter. *Lie Algebra of Finite and Affine Type*. Cambridge University Press (2005).
- [5] N. Bourbaki. *Lie groups and lie algebras* Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [6] E. Dynkin. *Classification of simple Lie groups*. Uspekhi Mat. Nauk, vol 2(1947).
- [7] A. Gabrielov. *Dynkin diagrams of unimodal singularities*. Fuctional Anal. Appl. 8 (1974) 1-6.
- [8] J. E. Humphreys *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [9] J. E. Humphreys *Reflection groups and coxeter groups*. Cambridge University (1990).
- [10] W. Killing. *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformations-gruppen*. Math. Ann. 31 (1888) y 33 (1888).
- [11] B.L. van der Waerden. *Die Klassifikation der einfach Lieschen Gruppen*. Math. Z., 37 (1933) 446-462.

- [12] H. Weyl. *Theorie der Darstellung kontinuierlicher haldeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I.* Math. Z. 23 (1925). no.1 271-309.