



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

DIAGRAMAS EN LA CATEGORÍA DE
ESPACIOS DE FISCHER

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A:
ERICA RUIZ VARGAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALBERTO G. RAGGI CÁRDENAS

MÉXICO, D.F.

JULIO, 2007.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

| | |
|--|----|
| Introducción | 1 |
| Capítulo 1. | |
| Espacios parcialmente lineales | 3 |
| Capítulo 2. | |
| Grupos y espacios de Fischer | 9 |
| Capítulo 3. | |
| Diagramas en la categoría de espacios de Fischer | 23 |
| Capítulo 4. | |
| Diagramas en la categoría S_p | 44 |
| Bibliografía | 76 |

Introducción

Hace más de 30 años, Bernd Fischer empezó su trabajo en grupos generados por una clase de conjugación de 3-transposiciones, i.e., una clase de conjugación de involuciones D tales que $d, e \in D$, tenemos que $[d, e] = 1$ o $\langle d, e \rangle \cong SL_2(2)$. Donde, por involuciones nos referimos a elementos de orden dos.

En este trabajo, usando la geometría de 3-transposiciones, i.e., los espacios de Fischer, estudiaremos los grupos de 3-transposiciones y determinaremos qué espacios tienen diagramas, de acuerdo a la categoría en la que estemos trabajando. Este punto de vista geométrico es básicamente uno bajo el cual un conjunto de generadores de un grupo es visto como una geometría sobre la que el grupo actúa como un grupo de automorfismos. Típicamente, los objetos de la geometría son clases de conjugación.

Como se verá en el capítulo 1, un espacio parcialmente lineal consta de un conjunto de rectas que son conjuntos de tres puntos y además, se pide que, por dos puntos sólo puede pasar a lo más una recta. También estudiaremos al subespacio generado por el conjunto de puntos de espacio y los espacios de Fischer, el cuál es una configuración en la cual todos sus planos son afines o duales afines.

En el capítulo 2, introduciremos los grupos de 3-transposiciones. Estos grupos fueron descubiertos por Fischer al preguntarse ¿qué grupos finitos pueden ser generados por una clase de conjugación de involuciones, el producto de cualesquiera dos cuyo orden sea 1, 2 o 3? La clase descrita es precisamente la llamada clase de conjugación de 3-transposiciones. El grupo que generan es un grupo de 3-transposiciones.

Mientras clasificaba estos grupos, Fischer descubrió tres de los 26 grupos esporádicos, que más tarde fueron conocidos como F_{22} , F_{23} y F_{24} . Por esporádicos nos referimos a que estos grupos no son miembros de las familias naturales infinitas de los grupos simples finitos - los grupos alternantes y los grupos de tipo de Lie.

En el capítulo 3 empezaremos definiendo diagrama y así, en el desarrollo de éste capítulo y del capítulo 4, determinaremos como se mencionó anteriormente, qué espacios tienen diagramas. Comenzaremos trabajando en la categoría de espacios de Fischer y continuaremos con la categoría de espacios simplécticos, esto es espacios que solo contienen planos duales afines. En la primera categoría veremos que los espacios que tienen diagramas corresponden a los diagramas de Dynkin simplemente enlazados. La aportación de este trabajo consiste en demostrar directamente sin el uso de computadora lo mencionado anteriormente, usando construcciones explícitas de estos espacios a través de sus grupos de Coxeter asociados. En la segunda categoría probaremos que todos los espacios tienen diagrama.

Terminaremos el trabajo dando diagramas explícitos para espacios de Fischer.

Capítulo 1

Espacios parcialmente lineales

En este capítulo empezamos introduciendo las definiciones principales que se usarán en el desarrollo de este trabajo. Tales como espacio parcialmente lineal, configuraciones, subconfiguraciones, planos y plano dual afín y afín. Después de haber introducido estas definiciones probaremos unos lemas que se emplearán en los siguientes capítulos, siendo el resultado más importante de este capítulo el establecido en el lema 1.9, que nos describe que la forma en la que en un espacio de Fischer C y $X \subset C_0$, la subconfiguración generada por X es como sigue:

$$\{p \in C_0 \mid \exists p_1, \dots, p_n \in C_0, x_1, \dots, x_n \in X \text{ t.q. } p_1 = x_1, p = p_n, \\ \{p_i, x_{i+1}, p_{i+1}\} \in C_1\}$$

1.1 Definición. Un **espacio parcialmente lineal** de orden 2, $C = (C_0, C_1)$ consiste de un conjunto finito de puntos C_0 y un conjunto de subconjuntos C_1 de C_0 llamados *líneas* tales que:

- Para todo $L \in C_1$ tenemos que $|L| = 3$
- Si L y T son dos líneas y $|L \cap T| \geq 2$ entonces $L = T$

Llamaremos a estos espacios **configuraciones**. Decimos que $a \neq b$ en C_0 son **colineales** si existe $L \in C_1$ tal que $a, b \in L$. Denotaremos por $a \perp b$ el caso en el que a y b sean no colineales. La configuración C es **conexa** si para cualquier par de puntos $a, b \in C_0$ existen L_1, \dots, L_m líneas tales que $a \in L_1$, $b \in L_m$ y $L_1 \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, m - 1$.

De ahora en adelante solo consideraremos configuraciones conexas.

1.2 Definición. Un espacio P es **2-reducido** si para $x, y \in P$ no colineales, existe $z \in P$ tal que z es colineal con x pero no es colineal con y .

1.3 Definición. Una **subconfiguración** D de una configuración C consiste en un subconjunto $D_0 \subset C_0$ con la propiedad de que si una línea en C_1 contiene al menos dos puntos de D_0 entonces $L \subseteq D_1$. Las líneas de D son las *líneas de C contenidas en D_1* .

1.4 Definición. Si $X \subset C$ es la subconfiguración más pequeña de C que contiene a X , la denotamos por $\langle X \rangle$, la subconfiguración **generada por X** , i.e. la intersección de todas las subconfiguraciones que contienen a X .

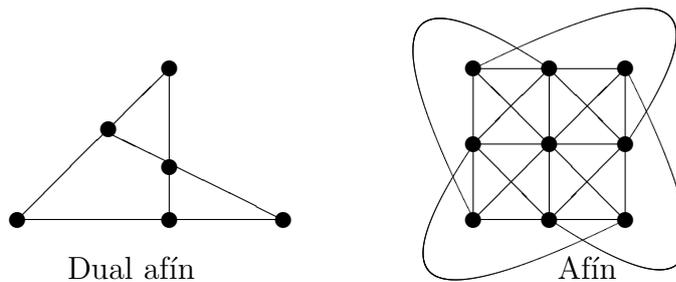
1.5 Definición. Un **plano** de C es la subconfiguración generado por dos líneas con un punto común.

1.6 Definición. Sean X, Y configuraciones. Un **morfismo de configuraciones** $\phi : X \rightarrow Y$ es una función $\phi : X_0 \rightarrow Y_0$ que manda líneas en líneas. Un **isomorfismo** es un morfismo biyectivo cuyo inverso es morfismo.

1.7 Definición. Un **automorfismo** de C es un isomorfismo de C en C . Al conjunto de automorfismos lo denotamos por:

$$\text{Aut}(C) = \{ \sigma : C_0 \rightarrow C_0 \mid \sigma \text{ es automorfismo} \} \subset S_{C_0}$$

Los planos **dual afín** y **afín** son los que se muestran a continuación:



1.8 Definición. Un **espacio de Fischer** es una configuración en la cual todos sus planos son afines o duales afines.

1.9 Lema. *Sea C un espacio de Fischer y $X \subset C_0$. Entonces el conjunto*

$$\left\{ p \in C_0 \mid \exists p_1, \dots, p_n \in C_0, x_1, \dots, x_n \in X \text{ t.q. } p_1 = x_1, p = p_n, \right. \\ \left. \{p_i, x_{i+1}, p_{i+1}\} \in C_1 \right\}$$

es la subconfiguración generada por X .

Demostración.

Denotemos por A al conjunto en cuestión. Primero probemos que $A \subset \langle X \rangle$:

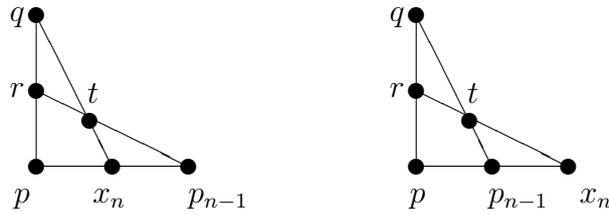
Sea $a \in A$. Demostremos que a está en lo generado por X por inducción en el tamaño n de la sucesión que lo define. Sea $n = 1$, entonces existe $p_1 \in C_0, x_1 \in X$ tales que $p_1 = x_1$ y $a = p_n$, entonces $a \in \langle X \rangle$. Supongamos el resultado válido para $n - 1$ y probémoslo para sucesiones de tamaño n . Si el tamaño de la sucesión es n tenemos que existen $p_1, \dots, p_n \in C_0$ y $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $p_1 = x_1, a = p_n$ y $\{p_{n-1}, x_n, p_n\}$ es una línea. Como $x_n \in X$ y por hipótesis de inducción p_{n-1} está en lo generado por X , como p_n es el tercer punto de la línea, entonces p_n está en $\langle X \rangle$ por ser $\langle X \rangle$ configuración.

Ahora, probemos que $\langle X \rangle \subseteq A$. Como $X \subset A$ es suficiente probar que A es un subespacio de C : Sean p, q dos elementos de A colineales y sea $\{p, q, r\} \in C_1$. Tenemos que probar que $r \in A$. La demostración la haremos por inducción en la longitud mínima n de las sucesiones que terminan en p . Supongamos que $n = 1$ y $\{q_1, \dots, q = q_m \in C_0, y_1, \dots, y_m \in X\}$ es una sucesión para q .

Entonces $\{q_1, \dots, q_m, r \in C_0, y_1, \dots, y_m, p = p_1 \in X\}$ es una sucesión para r . Por lo tanto $r \in A$. Ahora supongamos cierto el resultado para las longitudes menores que n y supongamos también que la longitud de la sucesión que termina en p es n .

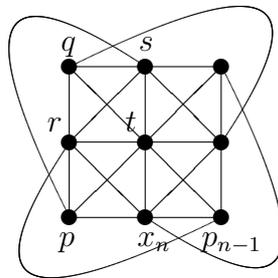
Supongamos que $\{p_1, \dots, p = p_n \in C_0, x_1, \dots, x_n \in X\}$ es una sucesión para p . Consideremos las líneas $\{p, x_n, p_{n-1}\}$ y $\{p, r, q\}$. Si son iguales no hay nada que probar. Entonces supongamos que son diferentes. Tenemos dos casos:

Si el plano generado por ellos es dual afín entonces tenemos dos casos:



Para el primer caso, como $\{q, x_n, t\} \in C_1$, entonces por el caso $n = 1$, t está en el conjunto A , y como, $\{p_{n-1}, t, r\} \in C_1$ entonces, por inducción, también r está en el conjunto A . El caso dos es de forma análoga.

Si el plano generado por ellos es el dual afín considere



Como $\{p_{n-1}, q, t\} \in C_1$, por inducción, t está en el conjunto A . Como $\{x_n, t, s\} \in C_1$, por el caso $n = 1$, s está en el conjunto A y como $\{p_{n-1}, s, r\} \in C_1$ entonces por inducción $r \in A$. □

1.10 Lema. *Sea C un espacio de Fischer. Sea L una línea de C . Si un punto fuera de L es colineal a un punto en L entonces es colineal a al menos dos puntos de L .*

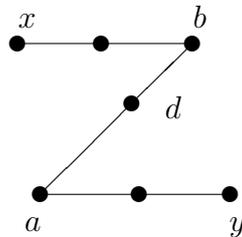
Demostración.

Sea $L = \{a, b, c\}$ y sea $d \notin L$. Supongamos que d es colineal a a y no colineal a c (de otra forma ya tendríamos el resultado). Como C es un espacio de Fischer, entonces se forma un plano dual afín y por lo tanto d es colineal con b , o se forma un plano afín y por lo tanto d es colineal con a, b y c . □

1.11 Lema. *Dados x y y puntos no colineales en una configuración C existe un punto d en la configuración colineal a x y también a y .*

Demostración.

Por inducción en el número mínimo de líneas para conectar x y y , podemos suponer que tenemos lo siguiente:

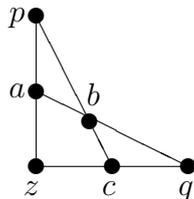


Si x y a o y y b son colineales entonces tenemos lo que se pide. Supongamos entonces x y d son colineales y y y d lo son por el lema 1.10. Entonces d es el punto buscado. \square

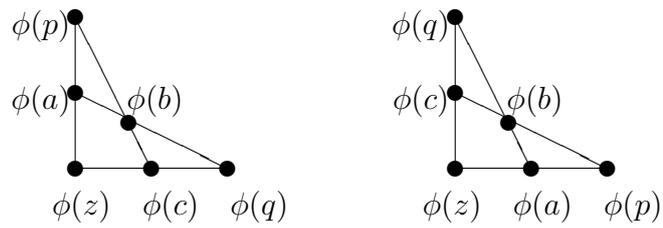
1.12 Lema. Sea F y F' espacios de Fischer conexos. Sea $\phi : F \rightarrow F'$ un morfismo de espacios de Fischer. Sea p y q puntos de F . Si p y q no son colineales entonces $\phi(p)$ y $\phi(q)$ no son colineales o son iguales.

Demostración.

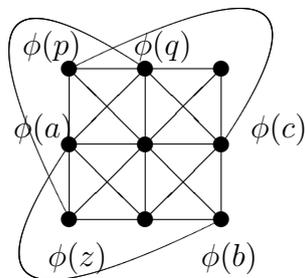
Sea z colineal tanto a p como a q :



ϕ manda líneas en líneas así que tenemos las siguientes posibilidades:



En estos casos podemos notar que $\phi(p)$ y $\phi(q)$ son no colineales. Si tenemos el caso:



En este caso $\{p, b, c\}$ es línea pero $\{\phi(p), \phi(b), \phi(c)\}$ no lo es. \square

Capítulo 2

Grupos y espacios de Fischer

Veremos que hay grupos que pueden definirse con respecto a su relación con un espacio de Fischer, más concretamente, a si contienen un espacio de Fischer. Tales grupos se llaman grupos de 3-transposiciones. Estos grupos fueron presentados por Fischer en *Invent. Math* en su artículo denominado *Finite groups generated by 3-transpositions* en 1971. Él los clasificó y al hacer esto, aparecieron tres grupos simples nuevos.

Empezaremos definiendo $\gamma_x \in S_{C_0}$ para $x \in C_0$.

Se prueba un teorema (2.3) muy útil para el desarrollo del trabajo en cuanto a su utilidad para las demostraciones de teoremas en capítulos siguientes, que nos dice que ser espacio de Fischer es equivalente con que exista G grupo tal que C está contenido en G y con que $\forall a \in C_0$ γ_a manda líneas en líneas.

Por último, en el teorema 2.5 se establece una equivalencia para que un grupo G sea de 3-transposiciones.

2.1 Definición. Sea C un espacio parcialmente lineal de orden 2. Sea G un grupo, decimos que C **está contenido en** G si existe una función inyectiva $i : C_0 \rightarrow G$ tal que:

- a. $i(a)$ es de orden 2 $\forall a \in C_0$,
- b. Si a y b son elementos de C_0 no colineales entonces $i(a)i(b) = i(b)i(a)$,
- c. Si $L = \{a, b, c\}$ es una línea entonces $i(a)i(b)i(a) = i(c)$,

d. G está generado por $i(C_0)$.

2.2 Definición. Para $x \in C_0$, definimos $\gamma_x \in S_{C_0}$ como los siguiente:

$$\gamma_x(y) = \begin{cases} y & \text{si } x \perp y \\ z & \text{si } \{x, y, z\} \text{ línea} \end{cases}$$

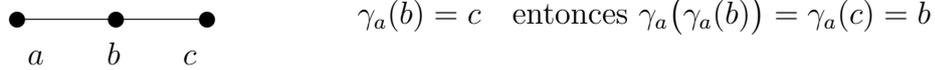
2.3 Teorema. Sea C configuración conexa de al menos dos puntos. Son equivalentes:

- I. C es espacio de Fischer,
- II. Existe G grupo tal que C está contenido en G ,
- III. $\forall a \in C_0$ γ_a manda líneas en líneas.

Demostración.

“III \Rightarrow II” Sea G el grupo generado por $\gamma(C_0)$ dentro de S_{C_0} . Demostremos que G satisface *a-d* de la definición 2.1. El inciso *d* de la definición 2.1 se satisface por la definición de G . Ahora, para probar el inciso *a*, hay que probar que $\gamma_a^2 = 1 \forall a \in C$. Sea $b \in C_0$ tenemos dos casos:

Si a y b son colineales:

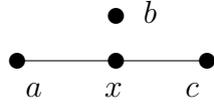


Si a y b son no colineales:



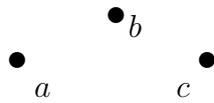
Entonces $\gamma_a^2 = 1$. Por lo tanto se satisface el inciso *a* de la definición 2.1. Ahora supongamos que a y b no son colineales. Hay que probar que $\gamma_a\gamma_b = \gamma_b\gamma_a$. Sea $c \in C_0$. Tenemos varios casos:

Supongamos que c es colineal a a pero no a b , entonces:



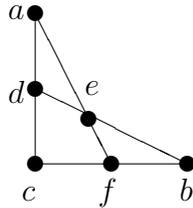
$$\begin{aligned} \gamma_a \gamma_b(c) &= \gamma_a(c) = x \\ \gamma_b \gamma_a(c) &= \gamma_b(x) = x \end{aligned}$$

El caso en el que c es colineal a b pero no colineal a a es similar al anterior. Si c no es colineal ni a a ni a b entonces:



$$\begin{aligned} \gamma_a \gamma_b(c) &= \gamma_a(c) = c \\ \gamma_b \gamma_a(c) &= \gamma_b(c) = c \end{aligned}$$

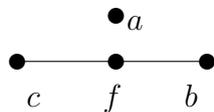
Ahora, supongamos que c es colineal a a y a b , entonces:



$$\begin{aligned} \gamma_b \gamma_a(c) &= \gamma_b(d) = e \\ \gamma_a \gamma_b(c) &= \gamma_a(f) = e \end{aligned}$$

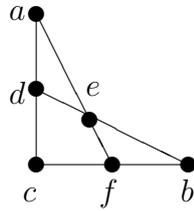
Probemos ahora el inciso c de la definición 2.1, si $l = \{c, f, b\}$ es una línea probemos que $\gamma_c \gamma_f \gamma_c = \gamma_b$. Sea $a \in C_0$. Tenemos los siguientes casos:

Si a no es colineal a ningún punto de la línea l :



$$\begin{aligned} \gamma_c \gamma_f \gamma_c(a) &= a \\ \gamma_b(a) &= a \end{aligned}$$

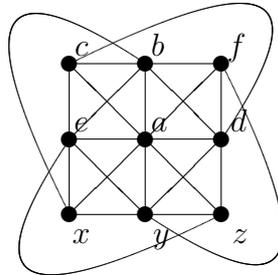
Si a colineal con dos puntos de l , sean estos c y f entonces:



$$\begin{aligned} \gamma_c \gamma_f \gamma_c(a) &= \gamma_c \gamma_f(d) = \gamma_c(d) = a \\ \gamma_b(a) &= a \end{aligned}$$

Los casos en los que a es colineal a f y b , y colineal a c y b son análogos al anterior.

Ahora, para el caso en el que a es colineal con todos los puntos de l :



Tenemos que:

$$\begin{aligned} \gamma_c \gamma_f \gamma_c(a) &= \gamma_c \gamma_f(z) = \gamma_c(e) = x \\ \gamma_b(a) &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto se satisface el inciso c de la definición 2.1. Sólo falta demostrar que γ_a es inyectiva para toda $a \in C$. Supongamos que $\gamma_a(b) = \gamma_a(c)$. Y tenemos los mismos casos anteriores: Si a es colineal a todos, entonces de acuerdo con el dibujo de arriba, $y = \gamma_a(b) = \gamma_a(c) = z$ y esto es una contradicción. Si a es colineal con c pero no colineal a b , entonces $b = \gamma_a(b) = \gamma_a(c) = d$, que tampoco es posible. Finalmente si a no es colineal a ninguno tenemos que $b = \gamma_a(b) = \gamma_a(c) = c$. Por lo tanto γ_a es inyectiva.

“II \Rightarrow III” Supongamos que i es la inclusión. Tenemos que G actúa por conjugación en C_0 :

$$\begin{aligned} G \times C_0 &\longrightarrow C_0 \\ (g, a) &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

y dado que C está contenido en G también actúa por conjugación por elementos de G . Para ver que $gag^{-1} \in C_0$ procedamos por inducción en el tamaño de g . Tenemos que $g = a_1 \cdots a_n$, para $n = 1$ es claro que $gag^{-1} \in C_0$. Supongámoslo válido para $n - 1$ entonces $gag^{-1} = a_1 \cdots (a_n a a_n \cdots a_1$, si $\{a, a_n, x\} \in C_1$ entonces $gag^{-1} = a_1 \cdots (a_{n-1} x a_{n-1} \cdots a_1$ y por hipótesis de inducción $gag^{-1} \in C_0$; si $a \perp a_n$ entonces $gag^{-1} = a_1 \cdots (a_{n-1} a a_{n-1} \cdots a_1$ y por hipótesis de inducción $gag^{-1} \in C_0$.

Es claro que $\gamma_a(g) = aga^{-1}$ ($a \in C_0$), por incisos b y c de la definición 2.1.

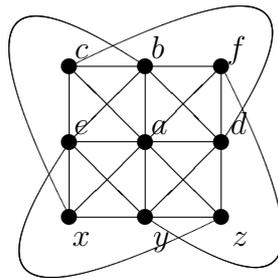
Si $\{a, b, c\} \in C_1$ y $g \in G$ entonces como $gag^{-1}gbg^{-1}gag^{-1} = gcbg^{-1}$ tenemos que $\{gag^{-1}, gbg^{-1}, gcbg^{-1}\} \in C_1$ por lo tanto γ_g manda líneas en líneas.

“I \Rightarrow III” Sea C espacio de Fischer. Sea $a \in C_0$. Demostremos que γ_a manda líneas en líneas. Sea $l = \{c, f, b\}$ línea. Hay varios casos:

Si a no es colineal a ningún punto de l :



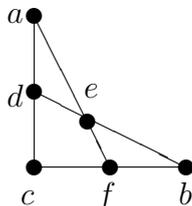
Si a es colineal a todos los puntos de l :



Tenemos que $\gamma_a(\{c, f, b\}) = \{z, y, x\}$.

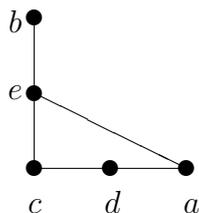
Para el caso en el que a es colineal con dos puntos de l , sean estos c y f

tenemos:

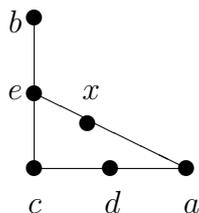


Aquí $\gamma_a(\{c, f, b\}) = \{d, e, b\}$. Los otros dos casos en los que a es colineal a los otros dos puntos de l son análogos al anterior. Por lo tanto, hemos demostrado que γ_a manda líneas en líneas en todos los casos.

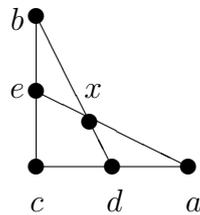
“III \Rightarrow I” Sean $\{c, e, b\}$ y $\{c, d, a\}$ líneas en C con un punto en común c . Tenemos dos casos: Supongamos que a no es colineal con b pero si lo es con c .



Tenemos que $\gamma_b(\{c, d, a\}) = \{e, x, a\}$ es una línea ya que γ_a manda líneas en líneas por hipótesis y tenemos que a es colineal con e .

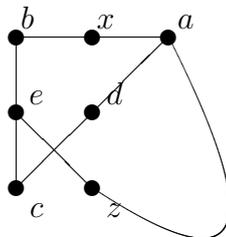


También $\gamma_a(\{c, e, b\}) = \{d, x, b\}$ es línea, por lo tanto nos queda:

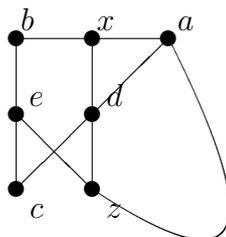


que es un plano dual afín.

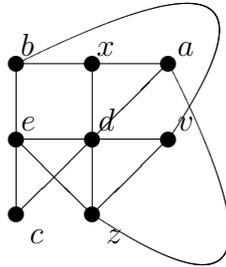
Ahora supongamos que a es colineal a los tres puntos de la recta $\{b, e, c\}$. Sea x el tercer punto de la línea formada por a y b , y z el tercer punto de la línea formada por e y a .



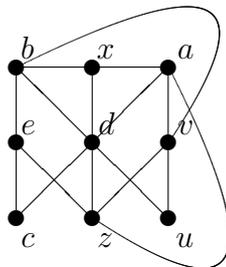
Tenemos que $\gamma_a(\{c, e, b\}) = \{d, z, x\}$ es línea (ya que γ_a manda líneas en líneas):



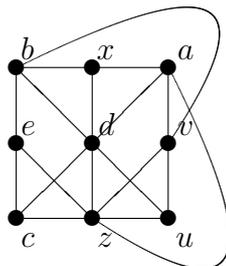
$\gamma_e(\{c, d, a\}) = \{b, v, z\}$ es línea y dado que $\gamma_e(d) = v$ tenemos que $\{e, d, v\}$ es línea:



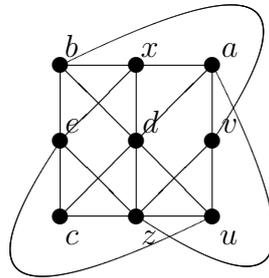
$\gamma_d(\{c, e, b\}) = \{a, v, u\}$ es línea y dado que $\gamma_e(d) = v$ tenemos que $\{e, d, v\}$ es línea:



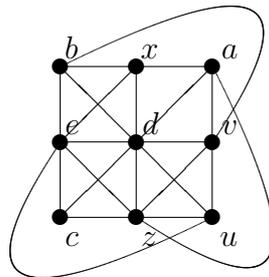
Tenemos que $\gamma_d(\{b, x, a\}) = \{u, z, c\}$ es línea:



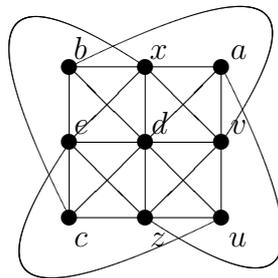
$\gamma_z(\{c, d, a\}) = \{u, x, e\}$ es línea:



$\gamma_z(\{b, x, a\}) = \{v, d, e\}$ es línea:



$\gamma_d(\{e, z, a\}) = \{v, x, c\}$ es línea:



Por lo tanto el plano formado por las líneas $\{c, e, b\}$ y $\{c, d, a\}$ es afín. Entonces, C es de Fischer ya que sus planos son afines o duales afines. \square

2.4 Definición. Un grupo G es de **3-transposiciones** si contiene un espacio de Fischer (en el sentido de la definición 2.1).

2.5 Teorema. G es de 3-transposiciones \Leftrightarrow existe $S \subseteq G$ tal que:

1. $\forall a \in S, o(a) = 2$, donde $o(a)$ es el orden de a ,
2. $G = \langle S \rangle$,
3. ${}^G S = S$,
4. Si $a, b \in S$ entonces $o(ab) \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración.

" \Rightarrow " Sea G de 3-transposiciones. Entonces tenemos un espacio de Fischer F tal que $F \subseteq G$ se satisfacen las condiciones *a.-d.* de la definición 2.1. Entonces existe $i : F_0 \rightarrow G$ inyectiva tal que:

- I. $\forall a \in F_0$ el orden de a $o(a) = 2$,
- II. Si a y b son elementos de F_0 no colineales entonces $i(a)i(b) = i(b)i(a)$,
- III. Si $\{a, b, c\} \in F_1$ entonces $i(a)i(b)i(a) = i(c)$,
- IV. $G = \langle i(C_0) \rangle$.

Sea $S = i(F_0)$ por I se cumple el inciso 1 del teorema y por IV se cumple el inciso 2 del teorema.

Sean $a, b \in F_0$. Si $a = b$ entonces $i(b)i(b) = 1$ por lo que $o(ab) = 1$.

Si a y b son no colineales entonces $(i(a)i(b))(i(a)i(b)) = i(b)i(b) = 1$ por lo tanto $o(ab) = 2$.

Si $\{a, b, c\} \in F_1$ entonces $(i(a)i(b)i(a))(i(b)i(b)i(b)) = i(c)i(c) = 1$ por lo tanto $o(ab) = 3$. Esto demuestra que se satisface el inciso 4 del teorema.

Ahora, sea $g \in G$ y $i(a) \in S$. Probemos que $gi(a)g^{-1} \in S$. Supongamos que $g = i(a_1) \cdots i(a_n)$ y hagámoslo por inducción en n . Si $g = 1$ tenemos que $gi(a)g^{-1} = i(a) \in S$.

Sea $i(a_1) \cdots i(a_n)i(a)i(a_n) \cdots i(a_1) \in^G S$. Si a_n y a_1 son no colineales entonces $i(a_n)i(a) = i(a)i(a_n)$ por lo tanto $i(a_n)i(a)i(a_n) = i(a)$ y de esta forma se obtiene $i(a_1) \cdots (i(a_n)i(a)i(a_n)) \cdots i(a_1) = i(a_1) \cdots (i(a)) \cdots i(a_1) = \cdots = i(a) \in S$.

Si $\{a, a_n, c\} \in F_1$ entonces $i(a_1) \cdots (i(a_n)i(a)i(a_n)) \cdots i(a_1) = i(a_1) \cdots (i(c)) \cdots i(a_1) = \cdots = i(c) \in S$.

“ \Leftarrow ” Por demostrar que G es de 3-transposiciones. Sabemos que existe $S \subseteq G$ tal que se satisfacen las condiciones 1-4 del teorema. Sea $i : S \hookrightarrow G$ la inclusión. Sea $C_0 = S$, con líneas $\{a, b, aba\}$ cuando $o(ab) = 3$. Por demostrar que C es de Fischer. Primero demostremos que es una configuración.

Sea la recta $\{a, b, aba\}$ y sea $\{x, y\} \in \{a, b, aba\}$. Queremos probar que el tercer punto está determinado por los otros dos, o sea que por dos puntos solo pasa a lo más una recta.

Si $x = a, y = b$ entonces $xyx = aba$ por lo tanto el tercer punto está determinado por los otros dos.

Si $x = b, y = a$. Hay que probar que $bab = aba$. Como $o(ab) = 3$ tenemos que $ababab = 1$ entonces $aba = bab$.

Si $x = a, y = aba$ entonces $aabaa = b$.

Si $x = b, y = aba$ entonces $xyx = babab$ pero $ababab = 1$ por lo que $a = bababa$ y por lo tanto $xyx = a$.

Si $x = aba, y = a$ entonces $xyx = abaaaba = ababa = b$.

Si $x = aba, y = b$ entonces $xyx = abababa = 1a = a$.

Por lo tanto tenemos una configuración. Solo resta probar que el espacio es de Fischer, para esto probaremos (por teorema 2.3) que γ_a manda rectas en rectas. Nótese que $\forall a, b \in S, \gamma_a(b) = aba$. Sea $\{a, b, c\}$ recta donde $c = aba$. Probaremos que $\gamma_x(\{a, b, c\})$ es una línea. Tenemos que $\gamma_x(\{a, b, c\}) = \{xax, xbx, xcx\}$ y $xbxaxxbx = xbabx = xcx$. \square

2.6 Definición. Sea C una configuración. Definimos

$$G_0(C) := \langle \gamma_a | a \in C_0 \rangle \subseteq S_{C_0}$$

2.7 Definición. Definimos ahora el grupo dado por generadores y relaciones

$$G_1(C) := \langle C_0 | a^2 \forall a \in C_0, abac \forall \{a, b, c\} \in C_1, abab \forall a, b \in C_0 \text{ no colineales} \rangle$$

Tenemos una función natural $C_0 \rightarrow G_1(C)$ donde $a \mapsto [a]$ =clase de a .

2.8 Teorema. Sea C una configuración conexa. Entonces son equivalentes

- I. C es espacio de Fischer si y sólo si $G_0(C) \subseteq \text{Aut}(C)$, y en este caso $G_0(C)$ tiene la siguiente propiedad universal: Si C está contenido en otro grupo G entonces existe $\Pi : G \rightarrow G_0(C)$ suprayectiva con $\ker \Pi = Z(G)$ (centro de G) y que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & G \\ & \searrow \gamma & \downarrow \Pi \\ & & G_0(C) \end{array}$$

- II. C es espacio de Fischer si y sólo si la función natural $C_0 \rightarrow G_1(C)$ es inyectiva. En este caso $G_1(C)$ tiene la siguiente propiedad universal: Si C esta contenido en otro grupo G entonces existe $\phi : G_1(C) \rightarrow G$ suprayectiva que hace el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & G_1(C) \\ & \searrow & \downarrow \phi \\ & & G \end{array}$$

y $\ker \phi \subseteq Z(G_1(C))$.

Demostración.

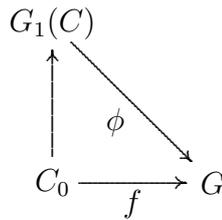
- I. “ \Leftarrow ” Se sigue del teorema 2.3, ya que $G_0(C) \subseteq \text{Aut}(C)$ si y sólo si γ_a manda líneas en líneas para todo a . Ahora, probemos la propiedad universal:

Sea G un grupo que contiene a C entonces G actúa en C_0 por conjugación, por lo tanto tenemos un morfismo $\Pi : G \rightarrow S_{C_0}$ y es fácil ver que $\forall a \in C_0, a \mapsto \gamma_a$. Como $G_0(C)$ está generado por los $\gamma_a \in C_0$ entonces Π es suprayectivo en $G_0(C)$. El kernel de este morfismo es, por definición, los elementos que conmutan con C_0 .

$$\begin{aligned} \ker \Pi &= \{a \in G \mid \Pi(a) = 1\} = \{a \in G \mid \Pi(a)(b) = b \quad \forall b \in C_0\} = \\ &= \{a \in G \mid bab^{-1} = b \quad \forall b \in C_0\} \\ Z(G) &= \{a \in G \mid ab = ba \quad \forall b \in G\} \end{aligned}$$

Como $G = \langle C_0 \rangle$ entonces $\ker \Pi = Z(G)$.

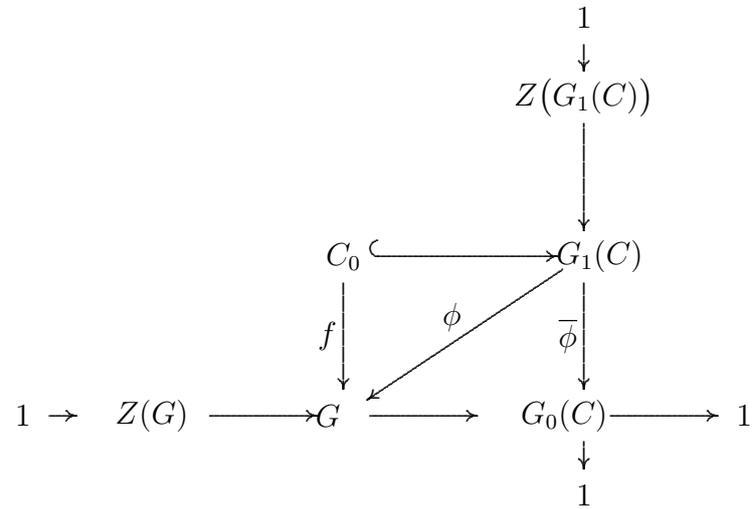
- II. “ \Rightarrow ” Sea C espacio de Fischer. Por teorema 2.3 tenemos que como C es de Fischer entonces existe un grupo G tal que C está contenido en G . Entonces, por la propiedad universal de los grupos dados por generadores y relaciones, existe un único morfismo $\phi : G_1(C) \rightarrow G$ que extiende a f :



Como $C_0 \rightarrow G$ es inyectiva entonces $C_0 \rightarrow G_1(C)$ es inyectiva.

“ \Leftarrow ” Si $C_0 \rightarrow G_1(C)$ es inyectiva entonces C está contenido en $G_1(C)$ y la propiedad universal es clara.

Para demostrar que $\ker \phi \subseteq Z(G_1(C))$ consideremos el siguiente diagrama:



todos los triángulos conmutan, así que si $g \in \ker \phi$, tenemos que $g \in \ker \bar{\phi}$ y $\ker \bar{\phi} = Z(G_1(C))$ por el inciso I, por lo tanto $\ker \phi \subseteq Z(G_1(C))$. □

Capítulo 3

Diagramas en la categoría de espacios de Fischer

En este capítulo se introducen definiciones tales como las de gráfica, diagrama, espacio de tipo simpléctico, representación lineal y universal. El objeto principal de estudio en este capítulo son los diagramas y los resultados más importantes se refieren a éstos. Como el teorema 3.15 que establece que en la categoría de los espacios de Fischer los únicos espacios que pueden tener diagramas son los de tipo simpléctico; así como el teorema 3.21 que dice que las únicas gráficas que pueden ser diagramas son $A_n, D_n, A_\infty, A_\infty^\infty, D_\infty, E_6, E_7, E_8$ (ver [?]), es decir los diagramas de Dynkin simplemente enlazados. Para probar esto son necesarias las definiciones de grupo de Coxeter, sistema de raíces y sistema simple (ver [?]).

3.1 Definición. Una **gráfica** es un conjunto de vértices y un conjunto de aristas, cada arista consiste de dos vértices. Los dos vértices de una arista se llaman adyacentes.

3.2 Definición. Un **morfismo de gráficas** es una función entre vértices que manda vértices adyacentes en vértices adyacentes y no adyacentes en no adyacentes. El mismo punto no se considera adyacente a sí mismo.

3.3 Definición. Si P es un espacio parcialmente lineal denotaremos por P a su **gráfica de colinealidad**, i.e. los vértices son los puntos y las líneas son los pares de puntos colineales. Cualquier conjunto D de puntos de P tiene estructura de gráfica inducida.

Cualquier conjunto Γ de puntos de P tienen una estructura de gráfica inducida. Si Γ es una gráfica inducida y P un espacio parcialmente lineal, decimos que $\Gamma \subset P$ si Γ es una subgráfica inducida de P .

Sea **Fi** la categoría de espacios de Fischer. Los objetos son los espacios de Fischer. Si P y Q son objetos un morfismo es una función que manda líneas en líneas.

Consideremos ahora la categoría **Graph**, los objetos son las gráficas finitas y los morfismos son los morfismos de gráficas definidos anteriormente.

Definimos el funtor de **Fi** \rightarrow **Graph**:

P es la gráfica con los mismos puntos como P y dos puntos son adyacentes si y sólo si son colineales y con los mismos morfismos.

Sea \mathcal{C} una subcategoría plena de **Fi**.

3.4 Definición. Si P es un espacio de Fischer en \mathcal{C} , un **diagrama** para P en \mathcal{C} es un morfismo $\alpha : \Gamma \rightarrow P$ inyectiva donde Γ es una gráfica con la propiedad universal que para todo Q en \mathcal{C} y para todo morfismo inyectivo de gráficas $\beta : \Gamma \rightarrow Q$ existe un un único $\gamma \in \mathcal{C}$ tal que $\gamma \circ \alpha = \beta$:

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{\alpha} & P \\
 & \searrow \beta & \downarrow \gamma \\
 & & Q
 \end{array}$$

3.5 Definición. Un **espacio de tipo simpléctico** es un espacio de Fischer con sólo planos duales afines.

Denotemos por **Sp** a la subcategoría plena de **Fi** de espacios simplécticos.

Aquí vamos a considerar solo espacios conexos, esto es equivalente a que la gráfica de colinealidad sea conexa.

Sea Γ una gráfica y $V = \mathbf{F}_2\Gamma$ un espacio vectorial sobre el campo \mathbf{F}_2 con base Γ . Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbf{F}_2$ una forma bilineal dada en la base por $f(x, y) = 1$ si y sólo si x, y son adyacentes. Sea $q : V \rightarrow \mathbf{F}_2$ la forma cuadrática dada en la base por $q(x) = 1$ y con forma asociada f . Llamamos a esta la **forma cuadrática de la gráfica**.

Una forma cuadrática q es **no degenerada** si $\text{Rad}(q) = 0$ donde $\text{Rad}(q) = \{v \in \text{Rad}(V) | q(v) = 0\}$.

Sea (V, f) espacio con forma bilineal simétrica y $f(a, a) = 0$ para toda a . Sea $\overline{S_p(V)} = V - \{0\}$ el espacio con líneas los conjuntos $\{a, b, c\}$ con $f(a, b) = 1$ y $a + b + c = 0$.

3.6 Definición. Si $q : V \rightarrow \mathbf{F}_2$ es una forma cuadrática en un espacio vectorial V sobre el campo \mathbf{F}_2 y $f : V \times V \rightarrow \mathbf{F}_2$ es la forma bilineal asociada entonces el **espacio cuadrático** $\overline{O(q)}$ definido por q es el subespacio parcialmente lineal cuyos puntos son los vectores $v \in V$ tales que $q(v) = 1$ que no están en el radical de V y las líneas son los conjuntos de tres puntos $\{a, b, c\} \in O(q)$ tales que $a + b + c = 0$ y $f(a, b) = 1$.

3.7 Lema. $\gamma_a(b) = b + f(a, b)a$ y $f(\gamma_a(b), \gamma_a(c)) = f(b, c)$.

Demostración.

Para la primera parte, si a y b no son colineales entonces $\gamma_a(b) = b = b + 0a = b + f(a, b)a$. Si a y b si son colineales entonces $\gamma_a(b) = c = b + a = b + f(a, b)a$.

Para la segunda parte, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\gamma_a(b), \gamma_a(c)) &= f(b + f(a, b)a, c + f(a, c)a) = f(b, c) + f(f(a, b)a, c) + \\ &+ f(b, f(a, c)a) + f(f(a, b)a, f(a, c)a) \\ &= f(b, c) + f(a, b)f(a, c) + f(b, a)f(a, c) + f(a, b)f(a, c)f(a, a) \\ &= f(b, c) \end{aligned}$$

□

3.8 Teorema. $\overline{S_p(V)}$ y $\overline{O(q)}$ son de tipo simpléctico.

Demostración.

Primero probemos que $\overline{S_p(V)}$ es de tipo simpléctico. Empecemos por demostrar que es un espacio parcialmente lineal. Sea $\{u, v, w\}$ línea en $\overline{S_p(V)}$

$(w = u + v)$ y sea $\{x, y, z\}$ otra línea. Ahora supongamos que $x, y \in \{u, v, z\}$ y demostremos que el tercer punto z de la línea $\{x, y, z\}$ está determinado por los otros dos. Como $\{x, y, z\} \in \overline{S_p(V)}$ entonces $z = x + y$. Tenemos los siguientes casos:

Si $x = u, y = v$ entonces $x + y = u + v = w$.

Si $x = u, y = w$ entonces $x + y = u + u + v = v$.

Si $x = v, y = w$ entonces $x + y = v + u + v = u$.

Si $x = v, y = u$ entonces $x + y = v + u = w$.

Si $x = w, y = u$ entonces $x + y = u + v + u = v$.

Si $x = w, y = v$ entonces $x + y = u + v + v = u$.

Por lo tanto el tercer punto está determinado por los otros dos y el espacio $\overline{S_p(V)}$ es parcialmente lineal. Ahora, probemos que es un espacio de Fischer y que sólo contiene planos duales afines. Para mostrar que es de Fischer veamos que γ_a manda líneas en líneas. Por el lema anterior, $\gamma_a(b) = b + f(a, b)a$ y si $\{u, v, w\}$ es línea entonces también lo es $\{\gamma_a(u), \gamma_a(v), \gamma_a(w)\}$ ya que $f(\gamma_a(u), \gamma_a(v)) = f(u, v) = 1$ y $\gamma_a(u) + \gamma_a(v) + \gamma_a(w) = 0$. Por lo tanto el espacio $\overline{S_p(V)}$ es de Fischer.

Si a es colineal con u y v entonces $f(w, a) = f(u, a) + f(v, a) = 1 + 1 = 0$, así que w no es colineal con a . Por lo tanto, $\overline{S_p(V)}$ es un espacio de tipo simpléctico, ya que a es colineal a dos puntos de la recta $\{u, v, w\}$ y no puede ser colineal a tres ya que $f(w, a) = 0$.

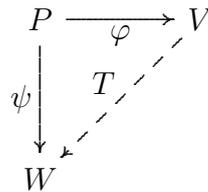
Ahora, veamos que $\overline{O(q)}$ es un subespacio de $\overline{S_p(V)}$. Sean $a, b \in \overline{O(q)}$ y sea $\{a, b, c\}$ recta en $\overline{S_p(V)}$. Por demostrar que $c \in \overline{O(q)}$. Tenemos que $q(a) = q(b) = 1$ y que $f(a, b) = 1$ y $c = a + b$, entonces $q(c) = q(a + b) = q(a) + q(b) + f(a, b) = 1 + 1 + 1 = 1$ por lo tanto $c \in \overline{O(q)}$.

3.9 Definición. Una **representación lineal** de un espacio parcialmente lineal es una función inyectiva $\varphi : P \longrightarrow V - \{0\}$ con V espacio vectorial

sobre \mathbf{F}_2 tal que si $\{a, b, c\}$ es una línea en P entonces $\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) = 0$.

La representación es **plena** si $\text{im}\varphi$ genera V .

La representación $\varphi : P \rightarrow V$ es **universal** si para cualquier representación $\psi : P \rightarrow W$ existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $\psi = T\varphi$.



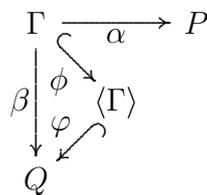
3.10 Definición. Una representación es **simpléctica** si existe una forma bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbf{F}_2$ tal que $f(\varphi(a), \varphi(b)) = 1$ si y sólo si a y b son puntos colineales de P .

De la definición 3.4 si P es 2-reducido (ver definición ??) entonces esta definición puede ser dada como sigue:

3.11 Lema. Sea \mathcal{C} una subcategoría plena de **Fi**. Un **diagrama** para un espacio de Fischer 2-reducido P , es una subgráfica Γ de P tal que si Q es un espacio de Fischer que contiene a Γ entonces el subespacio generado por Γ en Q es isomorfo a P . Entonces, esta definición y la definición 3.4 son equivalentes.

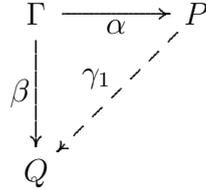
Demostración.

Primero, probemos que esta nueva definición implica la definición 3.4. Sea $\langle \Gamma \rangle \leq Q$. Tenemos que $\langle \Gamma \rangle = P$ porque el espacio generado por Γ es P y además Γ está contenido en P . Entonces tenemos lo siguiente



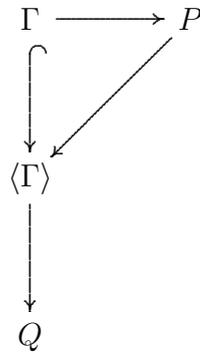
Tomemos γ igual a la composición de $\phi\varphi$. Por lo anterior, tenemos entonces

que existe $\gamma : P \rightarrow Q$ que hace que el diagrama anterior conmute. Falta demostrar que esta γ es única para que se satisfaga la definición de diagrama dada en 3.4. Sea $\gamma_1 : P \rightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta



Demostremos que $\gamma_1 = \gamma$. Sea $a \in P$, entonces existen $p_1, \dots, p_n, \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \Gamma$ tales que $p_1 = x_1, p_n = a$ y $\{p_i, x_{i+1}, p_{i+1}\}$ es una línea. Por inducción en n : Si $n = 1$ entonces para $a \in \Gamma$ tenemos $\gamma_1(a) = \beta(a) = \gamma(a)$. Supongámoslo válido para $n - 1$ y demostrémoslo para n . Tenemos que $\{p_{n-1}, x_n, p_n = a\}$ es línea y que $\{\gamma(p_{n-1}), \gamma(x_n), \gamma(a)\}$, entonces para la línea $\{\gamma_1(p_{n-1}), \gamma_1(x_n), \gamma_1(a)\}$, por hipótesis de inducción $\gamma(p_{n-1}) = \gamma_1(p_{n-1})$ y además $\gamma(x_n) = \gamma_1(x_n)$ por lo tanto $\gamma(a) = \gamma_1(a)$. Esto prueba que γ es única.

Ahora probemos que ser diagrama de acuerdo a la definición 3.4 es equivalente con la nueva definición. Por definición 3.4 tenemos



En este caso solo basta probar que γ es inyectiva: Sean $x, y \in P$ no colineales y $\gamma(x) = \gamma(y)$. Como P es 2-reducido existe $z \in P$ tal que z es colineal con x pero no es colineal con y . Entonces $\gamma(z)$ es colineal con $\gamma(x)$ y no es colineal con $\gamma(y)$, o es igual a $\gamma(y)$. Por lo tanto $\gamma(z) = \gamma(y) = \gamma(x)$ y esto es una contradicción. \square

3.12 Teorema. Para cualquier gráfica Γ hay un espacio de tipo simpléctico P y un morfismo de gráficas $\varphi : \Gamma \rightarrow P$ inyectivo.

Demostración.

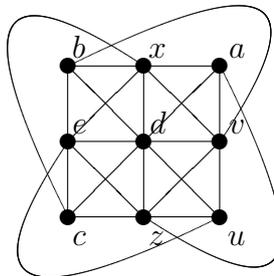
Sea $V = \mathbf{F}_2\Gamma$. El subespacio parcialmente lineal P de $\overline{S_p(V)}$ (o de $\overline{O(q)}$) generado por Γ resuelve el problema (o el mismo $\overline{S_p(V)}$ o $\overline{O(q)}$). \square

3.13 Lema. Para un morfismo $\phi : P \rightarrow Q$ de espacios de Fischer:

- a. La imagen de un plano afín en P es un plano afín en Q .
- b. La imagen inversa de un plano afín de Q (contenido en la imagen de ϕ) contiene un plano afín en P .

Demostración.

1. Sea Π plano afín en P . Consideremos la línea $l = \{b, e, c\}$ y el punto a colineal a los tres puntos de la línea l . Entonces $\{b, x, a\}$, $\{c, d, a\}$ y $\{e, z, a\}$ son las líneas conectando cada punto de l con a .



Como ϕ manda líneas en líneas $l' = \{\phi(b), \phi(c), \phi(e)\}$ es línea en Q y también lo son $\{\phi(b), \phi(x), \phi(a)\}$, $\{\phi(c), \phi(d), \phi(a)\}$ y $\{\phi(e), \phi(z), \phi(a)\}$. Entonces tenemos que el punto $\phi(a)$ es colineal a los tres puntos de la línea l' y por lo tanto generan a un plano afín en Q .

2. Sea l'_1 y l'_2 dos líneas de un plano afín Π' en $\text{im}(\phi)$. Entonces hay dos diferentes líneas que se intersectan, l_1 y l_2 en P cuyas imágenes son l'_1 y l'_2 . El plano generado en P por l_1 y l_2 no puede ser dual afín porque

en ese caso la imagen de dos puntos no colineales de P serían colineales en Q . Por lo tanto tenemos un plano afín en la imagen inversa de Π . \square

3.14 Corolario. Si $\phi : P \longrightarrow Q$ es un epimorfismo de espacios de Fischer entonces P no es de tipo simpléctico si y sólo si Q no es de tipo simpléctico.

Demostración.

Supongamos que P no es de tipo simpléctico, entonces tenemos que P contiene al menos un plano afín, y por lema 3.13 los planos afines en P dan en planos afines en Q , por lo tanto Q no es de tipo simpléctico.

Inversamente, si Q no es de tipo simpléctico entonces contiene un plano afín y su imagen inversa contiene un plano afín por lema 3.13. Por lo tanto P no es de tipo simpléctico. \square

3.15 Teorema. En una subcategoría plena de \mathbf{Fi} que contiene \mathbf{Sp} los únicos espacios que pueden tener diagramas son los de tipo simpléctico.

Demostración.

Sea Γ un diagrama para un espacio P . Por teorema 3.12 para cualquier Γ hay un espacio de tipo simpléctico Q y un morfismo $\varphi : \Gamma \longrightarrow Q$. Entonces por definición de diagrama, existe un morfismo de espacios de Fischer $\phi : P \longrightarrow Q$ tal que $\phi|_{\Gamma} = \varphi$ y por lema 3.13, P no puede tener planos afines. \square

3.16 Teorema. Sea Γ una gráfica. Si existe un espacio P en una subcategoría plena C de \mathbf{Fi} que contiene \mathbf{Sp} tal que $\Gamma \subset P$ y el subespacio generado por Γ en P tiene un plano afín, entonces Γ no es un diagrama en C .

Demostración.

Si Γ es un diagrama para un espacio Q en C entonces por la definición de diagrama existe un morfismo suprayectivo de Q al subespacio generado por Γ en P . Por lema 3.13 la imagen inversa de un plano afín de Q contiene un plano afín en P y esto contradice el teorema 3.15. \square

Sea V un espacio vectorial sobre el campo \mathbf{F}_3 y sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbf{F}_3$

una forma bilineal y simétrica. Considere el espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ y el espacio parcialmente lineal $P = P(f)$ con el conjunto de puntos

$$P = P(f) = \{[v] \in P(V) \mid f(v, v) = 1\}$$

y líneas los conjuntos $\ell = \{x, y, z\}$ de tres puntos $x, y, z \in P$ tales que existen $u \in x, v \in y, w \in z$ con $f(u, v) \neq 0$ y $w = u + f(u, v)v$.

Veamos que P es un espacio parcialmente lineal:

Sea $\{x, y, z\}$ línea entonces existen $u \in x, v \in y, w \in z$ con $w = u + f(u, v)v$. Sea $\{a, b, c\}$ otra línea tal que $a, b \in \{x, y, z\}$. Demostremos que el tercer punto de la recta está determinado por los otros dos. Como $\{a, b, c\}$ es línea, entonces existen $u' \in a, v' \in b, w' \in c$ con $w' = u' + f(u', v')v'$. Tenemos los siguientes casos:

Si $a = x$ y $b = y$ entonces tomemos $u' = u$ y $v' = v$, de esta forma tenemos que $w' = u + f(u, v)v = w$.

Si $a = x$ y $b = z$ entonces tomemos $u' = u$ y $v' = w$, de esta forma tenemos que $w' = u + f(u + f(u, v)v, v)(u + f(u, v)v) = u + f(u, u)(u + f(u, v)v) + f(u, v)f(v, u)(u + f(u, v)v) = u + u + f(u, v)v + f(u, v)f(u, v)u + f(u, v)f(u, v)f(u, v)v = \lambda v$, donde $0 \neq \lambda \in \mathbf{F}_3$.

Si $a = y$ y $b = z$ entonces tomemos $u' = v$ y $v' = w$, de esta forma tenemos que $w' = v + f(v, (u + f(u, v)v))(u + f(u, v)v) = v + f(v, u)(u + f(u, v)v) + f(v, v)f(v, u)(u + f(u, v)v) = v + f(v, u)u + f(v, u)f(u, v)v + f(u, v)u + f(u, v)f(u, v)v = \lambda u$.

Si $a = y$ y $b = x$ entonces tomemos $u' = v$ y $v' = u$, de esta forma tenemos que $w' = v + f(v, v)u$.

Si $a = z$ y $b = x$ entonces tomemos $u' = w$ y $v' = u$, de esta forma tenemos que $w' = u + f(u, v)v + f((u + f(u, v)v), u)u = u + f(u, v)v + f(u, u)u + f(v, u)f(u, v)u = f(u, v)v$.

Si $a = z$ y $b = y$ entonces tomemos $u' = w$ y $v' = v$, de esta forma tenemos que $w' = u + f(u, v)v + f((u + f(u, v)v), v)v = u + f(u, v)v + f(u, v)v + f(u, v)f(u, v)v = u$.

Estos espacios $P(f)$ se llaman \mathbf{F}_3 espacios.

Recordemos que para cualquier $x \in P$, habíamos definido γ_x como la permutación de puntos de P dada por

$$\gamma_x(y) = \begin{cases} y & \text{para } x, y \text{ no colineales} \\ z & \text{para } \{x, y, z\} \text{ línea} \end{cases}$$

De la definición tenemos que si $u \in x, v \in y$ entonces $\gamma_y(x) = [u + f(u, v)v]$.

3.17 Teorema. Los \mathbf{F}_3 espacios $P(f)$ son espacios de Fischer.

Demostración.

Para la demostración probemos que γ_a ($\forall a \in P$) manda rectas en rectas. Sea $\{x, y, z\}$ línea y $u \in x, v \in y, w \in z, r \in a$, donde $w = u + f(u, v)v$. Tenemos que:

$$\gamma_a(x) = [u + f(r, u)r], \quad \gamma_a(y) = [v + f(r, v)r], \quad \gamma_a(z) = [w + f(r, w)r].$$

Ahora, tenemos que $f(\gamma_r(u), \gamma_r(v)) = f(u, v)$ por lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(u + f(r, u)r, v + f(r, v)r) &= f(u, v) + f(r, u)f(r, v) + f(r, v)f(u, r) + \\ &+ f(r, u)f(r, v)f(r, r) = \\ &= f(u, v) + 3f(r, u)f(r, v) = \\ &= f(u, v) \end{aligned}$$

Entonces, basta ver que el tercer punto es de la recta:

$$\begin{aligned} \gamma_r(u) + f(\gamma_r(u), \gamma_r(v))\gamma_r(v) &= [u + f(r, u)r + f(u + f(r, u)r, v + f(r, v)v) \\ &\quad (v + f(r, v)r)] \\ &= [\gamma_r(u) + f(u, v)\gamma_r(v)] = [\gamma_r(u + f(u, v)v)] = \\ &= [\gamma_r(w)] = \gamma_a(z) \end{aligned}$$

y esto si es de la forma $z = [u + f(u, v)v]$. □

Sea ahora Γ una gráfica y sea $V = \mathbf{F}_3\Gamma$ el espacio vectorial con base los

vértices de Γ . Definamos una forma bilineal y simétrica $f : V \times V \longrightarrow \mathbf{F}_3$ dada en la base por:

$$f(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ 1 & \text{si } u, v \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Sea Q el \mathbf{F}_3 -espacio $P(f)$ dado por la forma bilineal. Entonces tenemos:

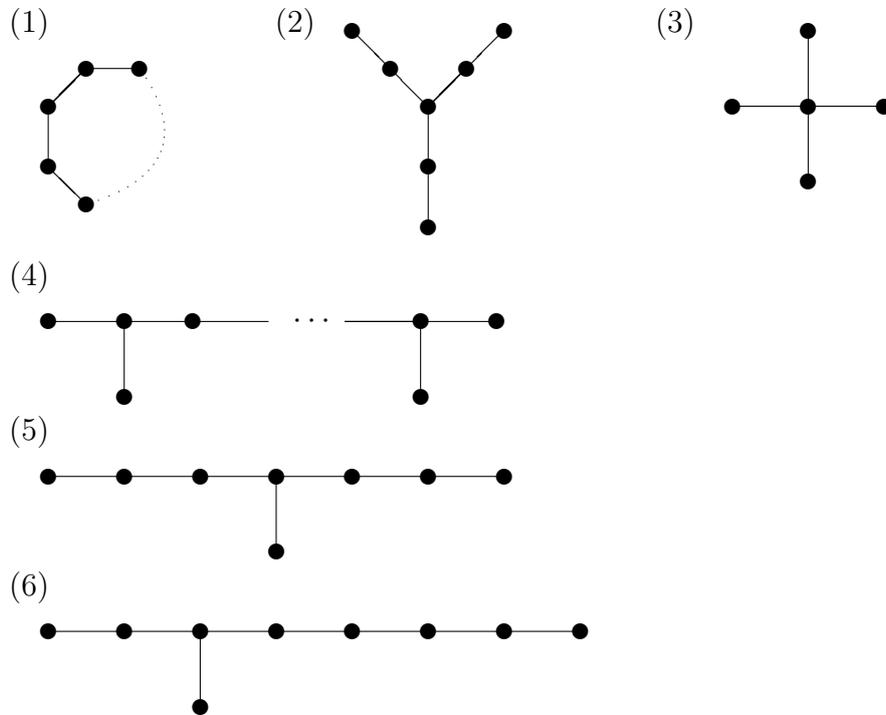
3.18 Teorema. Cualquier gráfica Γ es una subgráfica inducida de un \mathbf{F}_3 -espacio Q .

Demostración.

Por lo mencionado anteriormente, $P(f)$ es tal espacio del cual Γ es subgráfica inducida. □

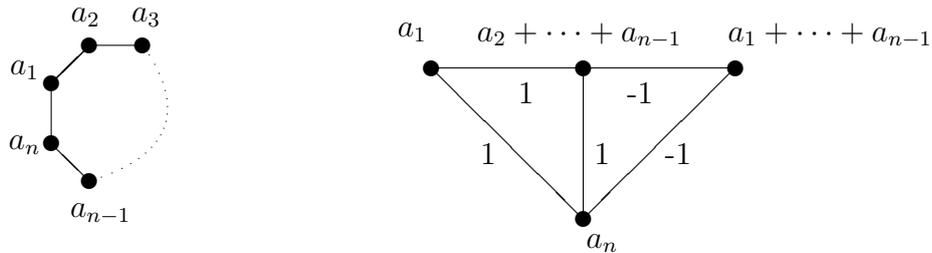
Denotaremos con P_Γ el subespacio de $Q = P(f)$ generado por Γ .

3.19 Teorema. Si Γ es una de las siguientes gráficas entonces el espacio P_Γ generado por Γ en el \mathbf{F}_3 -espacio $Q = P(f)$ contiene un plano afín.



Demostración.

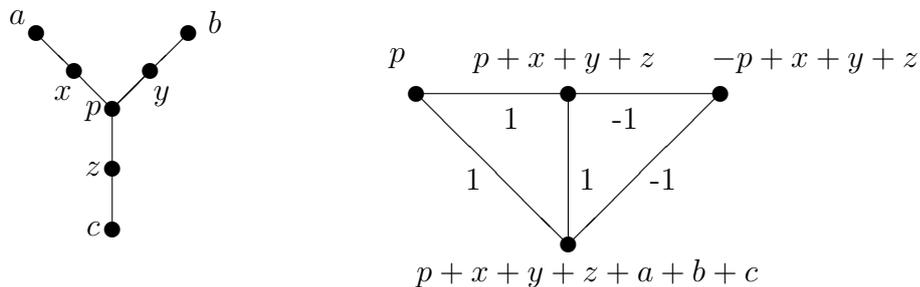
En los primeros tres casos mostramos en el espacio P_Γ una línea ℓ y un punto, que no está en ℓ , colineal con los tres puntos de la línea ℓ . Nótese que en lo siguiente a $[a_i]$ lo denotamos simplemente por a_i para simplificar la escritura.



Veamos que efectivamente $a_1 + \dots + a_{n-1}$ es el tercer punto de la recta: $a_1 + f(a_1, a_2 + \dots + a_{n-1})(a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_1 + \dots + a_{n-1}$.

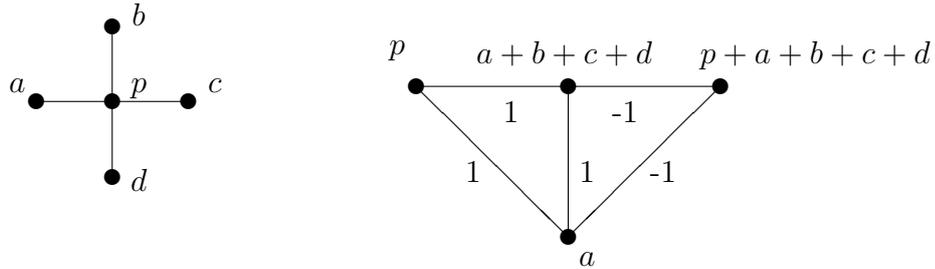
Sólo falta verificar que $a_i + \dots + a_\ell \in P_\Gamma$. Por inducción en $\ell - i$: Si $\ell - i = 0$ entonces $a_i \in P_\Gamma$. Supongamos que $a_i + \dots + a_{\ell-1} \in P_\Gamma$. Tenemos que por un argumento similar al anterior, $a_i + \dots + a_{\ell-1} + a_\ell$ es el tercer punto de la recta y por lo tanto está en P_Γ . Este argumento puede extenderse a los siguientes casos por lo que omitiré esa prueba. Tenemos que $f(a_1, a_n) = 1, f(a_1, a_2 + \dots + a_{n-1}) = 1, f(a_2 + \dots + a_{n-1}, a_1 + \dots + a_{n-1}) = 1, f(a_2 + \dots + a_{n-1}, a_n) = 1, f(a_1 + \dots + a_{n-1}, a_n) = 1$. Los número al lado de las líneas que unen los vértices de figura (1 o -1) denotan estos valores de f evaluados en los vértices correspondientes.

Ahora, para la gráfica número 2:



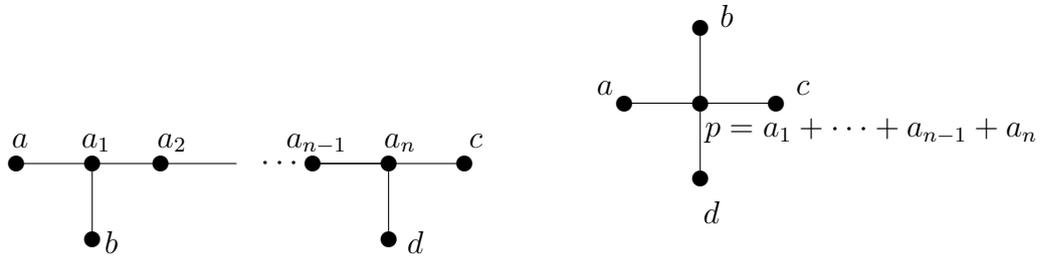
Tenemos que $p + f(p, p+x+y+z)(p+x+y+z) = p+(1+1+1+1)(p+x+y+z) = -p + x + y + z$ y esto verifica que éste es el tercer punto que está en P_Γ .

Para la gráfica 3 tenemos:

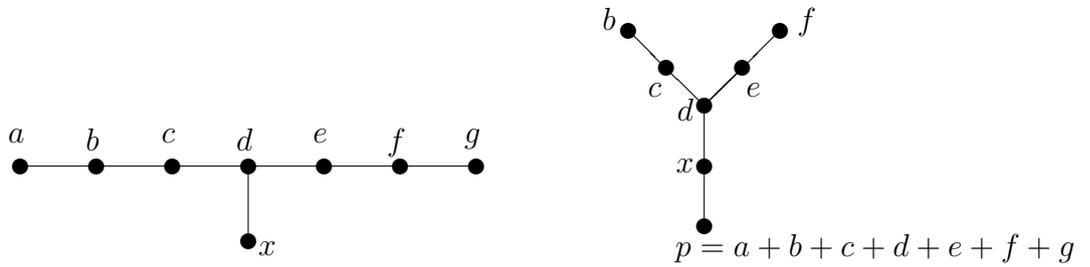


Tenemos que $p + f(p, a + b + c + d)(a + b + c + d) = p + (4)(a + b + c + d) = p + a + b + c + d$ y esto verifica que éste es el tercer punto que está en P_Γ .

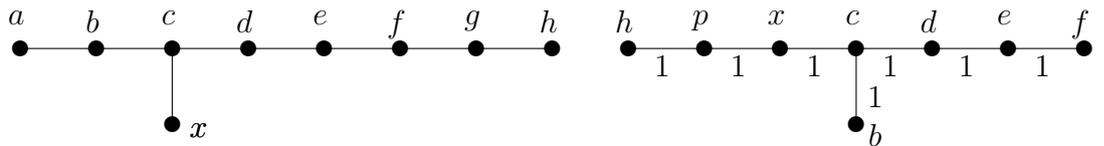
Ahora, los últimos tres casos los vamos a reducir a los anteriores. El cuarto al tercero, el quinto al segundo y finalmente, el sexto al quinto.



Tenemos que $f(a, p) = 1$, $f(b, p) = 1$, $f(c, p) = 0$ y $f(p, p) = 1$.

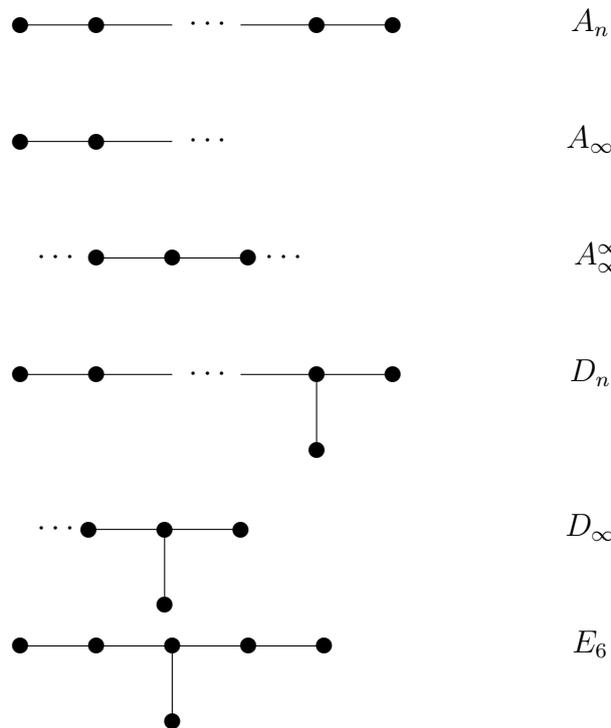


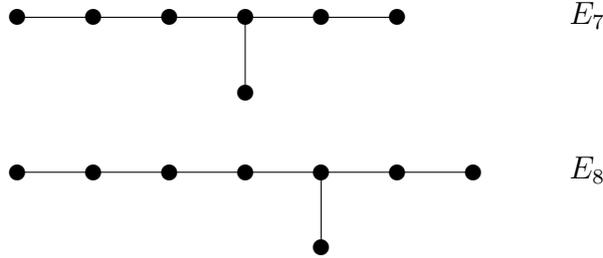
Con $f(b, c) = 1, f(c, d) = 1, f(f, e) = 1, f(e, d) = 1, f(d, x) = 1, f(x, p) = 1$
 y $f(p, p) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 2 = 1$.



Donde $p = a + b + c + d + e + f + g$ y $f(p, p) = 2 + 3 + \dots + 3 + 2 = 1$. \square

3.20 Lema. Si Γ es una gráfica conexa que no contiene una de las gráficas (1) – (6) del teorema 3.19, entonces es una de las siguientes gráficas:





Demostración.

Como Γ no contiene una gráfica de tipo (1), (3) o (4) entonces Γ es una gráfica conexa que no contiene circuitos con a lo más un vértice de valencia 3. Si no hay tal vértice, entonces Γ es A_n, A_∞ o A_∞ . Si si lo hay, entonces las obstrucciones (2), (5) y (6) obliga a Γ a que sea D_n, D_∞, E_6, E_7 o E_8 . Estos son los llamados diagramas de Dynkin simplemente enlazados. \square

Como consecuencia del lema 3.20 tenemos lo siguiente:

3.21 Teorema. Sea \mathcal{C} una subcategoría plena de **Fi** que contiene a **Sp**. Las únicas gráficas que pueden ser diagramas en \mathcal{C} son $A_n, D_n, A_\infty, A_\infty^\infty, D_\infty, E_6, E_7, E_8$.

Demostración.

Sea Γ diagrama en \mathcal{C} , por teorema 3.16 no existe P espacio tal que $\langle \Gamma \rangle$ contiene un plano afín. Ahora, por teorema 3.19 Γ no puede contener ninguna de las gráficas (1) – (6) que se muestran en dicho teorema, por lo tanto, por teorema 3.20, Γ tiene que ser uno de los diagramas de Dynkin simplemente enlazados. \square

En lo que sigue, verificaremos que estos diagramas de Dynkin simplemente enlazados si son diagramas en la categoría de espacios de Fischer. A continuación introducimos las siguientes definiciones que se necesitarán en lo que sigue de este trabajo (ver [?], [?]):

3.22 Definición. Un **sistema de Coxeter** es un par (G, S) donde G es un grupo y S una familia de elementos de G , donde $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$ para $s_i, s_j \in S$

con $i \neq j$ y la matriz de Coxeter $M = (m_{ij})$. G es un **grupo de Coxeter** si G es el grupo generado por S con relaciones $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$.

3.23 Definición. Un **sistema de raíces** es un subconjunto finito Σ de $V^\#$ que cumple con

1. Es invariante por $W(\Sigma) := \langle r_v | v \in \Sigma \rangle$,
2. Es tal que $|\langle v \rangle \cap \Sigma| \leq 2$ para cada $v \in V$.

Nótese que $\langle v \rangle \cap \Sigma = \{v, -v\}$ para $v \in V$, debido a que $r_v v = -v$ y $|\langle v \rangle \cap \Sigma| \leq 2$.

3.24 Definición. Un **sistema positivo** P es un subconjunto P de Σ tal que $P = \Sigma^+ = \Sigma \cap V^+$ para algún ordenamiento de V . Un **sistema simple** Π , es un subconjunto Π de Σ si Π es linealmente independiente y cada $v \in \Sigma$ puede ser escrita

$$v = \sum_{x \in \Pi} a_x x \quad \text{con} \quad 0 \leq a_x \in F \quad \text{o bien} \quad 0 \geq a_x \in F, \forall x \in \Pi.$$

3.25 Lema. Sea Γ una gráfica, G el grupo de Coxeter de Γ y P la clase de conjugación Γ en G . Si G es un grupo de 3-transposiciones con clase de 3-transposiciones P entonces Γ es un diagrama para P en **Fi**.

Demostración.

Sea Q un espacio de Fischer y sea $\varphi : \Gamma \rightarrow Q$ morfismo de gráficas. Considere el grupo de transvecciones

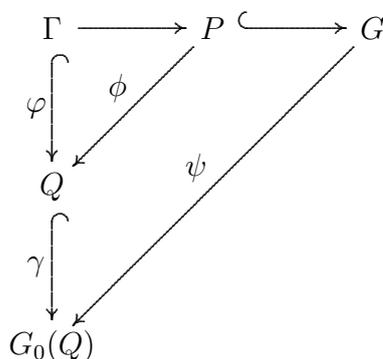
$$G_0(Q) = \langle \gamma_a | a \in Q \rangle$$

y la función inyectiva $\gamma : Q \rightarrow G_0(Q)$ tal que $a \mapsto \gamma_a$.

Como G es un grupo de Coxeter, es de la forma

$$G = \langle s_i | (s_i, s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$$

la función $\gamma\varphi$ da un morfismo de grupos $\psi : G \rightarrow G_0(Q)$ donde $s_i \mapsto \gamma_{\varphi(s_i)}$ que restringido a Γ es $\gamma\varphi$.



La restricción $\phi = \psi|_P$ da un morfismo de espacios de Fischer $\phi : P \rightarrow Q$. Para ver que se factoriza como morfismo de espacios de Fischer basta demostrar que $\psi(P) \subseteq \gamma(Q)$. Sea $gsg^{-1} \in P$, donde $g = s_1 \cdots s_n$ con $s_i \in \Gamma$. Como ψ es morfismo de grupos tenemos lo siguiente

$$\psi(gsg^{-1}) = \psi(s_1)\psi(s_2) \cdots \psi(s_n)\psi(s)\psi(s_n) \cdots \psi(s_1)$$

ψ hace conmutar el diagrama y los elementos están en Γ , entonces

$$\psi(gsg^{-1}) = \gamma_{\varphi(s_1)}\gamma_{\varphi(s_2)} \cdots (\gamma_{\varphi(s_n)}\gamma_{\varphi(s)}\gamma_{\varphi(s_n)}) \cdots \gamma_{\varphi(s_1)}$$

Probemos que la expresión anterior es igual a $\gamma_{\gamma_{\varphi(s_1)} \cdots \gamma_{\varphi(s_n)}}(\varphi(s))$ por inducción en n . De un resultado anterior, sabemos que $\gamma_a\gamma_b\gamma_a = \gamma_c$ donde c es el tercer punto de la recta si $\{a, b, c\}$ es recta, o $c = b$ si no están conectados. Entonces tenemos que

$$\gamma_{\varphi(s_n)}\gamma_{\varphi(s)}\gamma_{\varphi(s_n)} = \gamma_{\gamma_{\varphi(s_n)}}(s)$$

$\gamma_{\varphi(s_n)} \in Q$ y $\gamma_{\gamma_{\varphi(s_n)}}(s) \in \gamma(Q)$. Y por inducción tenemos el resultado. Por lo tanto $\psi(P) \subseteq \gamma(Q)$ y como γ es inyectiva, definimos $\phi = \gamma^{-1}\psi|_P$ y de esta forma tenemos que el diagrama conmuta ya que

$$\phi(s) = \gamma^{-1}(\psi(s)) = \gamma^{-1}\gamma_{\varphi(s)} = \varphi(s)$$

Como $\phi|_{\Gamma} = \varphi$ entonces $\gamma \rightarrow P$ tiene la propiedad universal de los diagramas. Y como Γ genera P , Γ es un diagrama para P . □

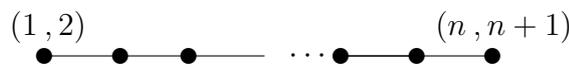
3.26 Teorema. En la categoría de **Fi** las gráficas que son diagramas son $A_n, D_n, A_\infty, A_\infty^\infty, D_\infty, E_6, E_7, E_8$.

Demostración.

Por teorema 3.21, sólo tenemos que verificar que estas gráficas son diagramas en **Fi**. Para esto hay que verificar que los grupos de Coxeter de estas gráficas son grupos de 3-transposiciones con clase de 3-transposiciones la clase de conjugación de la gráfica.

Empecemos por A_n :

Sea $G = \langle s_1, \dots, s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} \rangle$ donde $m_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$, $m_{ij} = 2 \Leftrightarrow |j - i| \geq 2$ y $m_{ij} = 3 \Leftrightarrow |i - j| = 1$. Sea Γ



Y sea $S = {}^G \Gamma = \{(i, i + 1) | i = 1, \dots, n\}$ Tenemos que $G \cong S_{n+1}$ (ver [?]) donde $s_i \mapsto (i, i + 1)$. Sea $S = \{(i, j) | i \neq j\}$. Probemos que G es de 3-transposiciones, probando que satisface las condiciones 1. – 4. dadas en el teorema ??:

1. Todas las transposiciones son de orden 2.
2. Sabemos que S_n está generado por las transposiciones por lo tanto $G = \langle S \rangle$.
3. Tenemos que $\{gsg^{-1} | g \in G, s \in S\} = S$.
4. Si $s_i = (i, k)$ y $s_j = (i, l)$ entonces $o(s_i s_j) = 3$.
 Si $s_i = (i, k)$ y $s_j = (l, m)$ entonces $o(s_i s_j) = 2$.
 Si $s_i = (i, k) = s_j$ entonces $o(s_i s_j) = 1$.

Por lo tanto G es de 3-transposiciones.

Para D_n :

Sea $G_2 = \langle s_1, \dots, s_{n-1}, s'_n \rangle$ donde $s'_n = (1 \dots e)(n - 1, n)(1 \dots e) = (n - 1, n)(1 \dots 1ee)$. Tenemos el morfismo suprayectivo $\phi : C(D) \rightarrow G_2$ tal que $t_i \mapsto s_i$. Demostraremos que esto es un isomorfismo, pero primero demostraremos las propiedades 1. – 4. dadas en el teorema ??. Sea Γ



y sea

$$S = {}^G \Gamma = \langle (i, j), (l, k)(1 \cdots e1 \cdots e1 \cdots) \rangle$$

donde la primer e está ubicada en el lugar l y la segunda en el lugar k .

1. Sea $(i, j) = s \in S$ entonces $o(s) = 2$. Si $s = (l, k)(1 \cdots e1 \cdots e1 \cdots)$ entonces

$$\begin{aligned} (l, k)(1 \cdots e1 \cdots e1 \cdots)(l, k)(1 \cdots e1 \cdots e1 \cdots) &= (1 \cdots e1 \cdots e1 \cdots 1)^2 = \\ &= (1 \cdots 1) \end{aligned}$$

por lo tanto $o(s) = 2$.

2. ${}^G S = S$ porque así definimos la S .
3. El caso cuando s_i, s_j para $i, j \leq n - 1$ ya se vio en la demostración para A_n . Tenemos que $s_{n-1}s'_n = (n - 1, n)(1 \cdots ee)(n - 1, n) = (1 \cdots ee)$ por lo tanto $(s_{n-1}s'_n)^2 = (1 \cdots ee)(1 \cdots ee) = (1 \cdots 1)$. Un cálculos similar muestra que $o(s_{n-2}s_n) = 3$.
4. Se verifica también que $\langle S \rangle = G$.

Esto prueba que es de 3-transposiciones y sólo basta mostrar que ϕ es un isomorfismo. Como ϕ es suprayectiva, basta mostrar que $|G| \leq 2^{n-1}n!$ para tener el isomorfismo.

Sea $H = \langle s_2, \dots, s_n \rangle$. Veamos cuáles son las clases laterales izquierdas de H . Como s_1 conmuta con s_3, \dots, s_n entonces $s_1H = s_3H = \dots$. Las clases laterales son entonces las siguientes:

$$\begin{aligned} &H \\ &s_1H \\ &\vdots \\ & s_n s_{n-1} \cdots \cdots s_1 H \\ & s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots \cdots s_1 H \\ & s_{n-2} s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots \cdots s_1 H \\ &\vdots \\ & s_1 \cdots \cdots s_{n-2} s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots \cdots s_1 H \end{aligned}$$

En total tenemos $2n$ clases laterales. Probemos que efectivamente son todas:

$s_j s_i \cdots s_1 H$ si $j > i + 1$, s_j conmuta y de esta forma $s_j H = H$.

Si $j = i - 1$: $s_{i-1} s_i s_{i-1} \cdots s_1 H = s_i s_{i-1} s_i s_{i-2} \cdots s_1 H = s_i s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 H$.

Si $j = i$: $s_i s_i \cdots s_1 H = s_{i-1} \cdots s_1 H$.

Si $j = i - 2$: $s_{i-2} s_i s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 H = s_i s_{i-2} s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 H = s_i s_{i-1} s_{i-2} s_{i-1} s_{i-3} \cdots s_1 H = s_i \cdots s_1 H$.

Similarmente para $j \geq i - 2$.

Si $j = i + 1$: $s_{i+1} s_i \cdots s_1 H$.

Si $j < i - 1$: $s_i s_{i+1} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i-1} s_i s_{i-1} \cdots s_1 H = s_i s_{i+1} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+1} s_i s_{i-1} s_i s_{i-2} \cdots s_1 H = s_i s_{i+1} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+1} s_i s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 H$.

Si $j = i - 1$: $s_{i-1} s_i \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_1 H$.

Si $j = i + 1$: $s_i s_{i+1} s_i s_{i+2} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+1} s_{i+2} s_{i+1} s_i \cdots s_1 H = s_i s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+2} s_{i+1} s_i \cdots s_1 H = s_i s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+2} s_{i+1} s_i \cdots s_1 H$.

Si $j = i + 2$: $s_i s_{i+2} s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_1 H = s_i s_{i+1} s_{i+2} s_{i+1} s_{i+3} \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_1 H = s_i \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+1} s_{i+2} s_{i+1} s_i \cdots s_1 H = s_i \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+2} s_{i+1} s_{i+2} s_i \cdots s_1 H = s_i \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_{i+2} s_{i+1} s_i \cdots s_1 H$.

Esto demuestra que efectivamente son todas las clases laterales. Con esto, hemos probado que $[G : H] = 2n$ por lo tanto $|G| \leq 2^{n-1} n!$ y por lo tanto ϕ es isomorfismo.

Para A_∞ :

Nótese que $A_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ y sea $S_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{S_n}$. Es claro que $\beta_{n+1}|_{A_n} = \beta_n$, por lo tanto definimos

$$\beta = \cup \beta_n : A_\infty \hookrightarrow S_\infty$$

Ahora sea Q un espacio de Fischer y sean $\alpha : A_\infty \rightarrow Q$ morfismo de gráficas y $\alpha_n = \alpha|_{A_n} = A_n \rightarrow Q$. Por el caso anterior, hemos probado que A_n es diagrama para $\overline{S_n}$ por lo que existe $\gamma_n : \overline{S_n} \rightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A_n & \xhookrightarrow{\beta_n} & \overline{S_n} \\
 \alpha_n \downarrow & \nearrow \gamma_n & \\
 & & Q
 \end{array}$$

donde γ_n es único tal que el diagrama conmuta. Por unicidad tenemos que $\gamma_{n+1}|_{\overline{S_n}} = \gamma_n$ así que podemos definir $\gamma : S_\infty \rightarrow Q$ como $\gamma = \cup \gamma_n$ y tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A_\infty & \xhookrightarrow{\beta} & S_\infty \\
 \alpha \downarrow & \nearrow \gamma & \\
 & & Q
 \end{array}$$

La unicidad de γ se da porque si tuviéramos otro $\gamma' : S_\infty \rightarrow Q$ tal que el diagrama anterior conmute, entonces $\gamma'|_{\overline{S_n}} = \gamma_n$ por unicidad de γ_n . Por lo tanto $\gamma = \gamma'$.

El caso A_∞ se obtiene de forma similar al anterior, llegando a que A_∞ es diagrama para el espacio de Fischer $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \overline{S_n}$.

Dado que la cardinalidad de \mathbf{N} y \mathbf{Z} es la misma, es fácil ver que los espacios de Fischer $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{S_n}$ y $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \overline{S_n}$ son isomorfos. Por lo tanto, un mismo espacio de Fischer puede tener más de un diagrama.

El caso D_∞ también se procede de forma similar a lo anterior por lo que se omite la demostración. Para los casos E_6, E_7 y E_8 , primero vamos a construir un sistema de raíces para cada caso. Después obtendremos el sistema simple correspondiente, verificando que se cumplan las condiciones de la definición 3.24. De acuerdo a [?] y [?], tendríamos entonces una descripción explícita de los grupos de Coxeter asociados a E_6, E_7 y E_8 , por el siguiente teorema:

3.27 Teorema. (W, R) es un sistema de Coxeter. Donde $W = \langle r_v | v \in \Sigma \rangle$, R es un conjunto de reflexiones y Σ es un sistema de raíces

$$\Sigma = \{v \in V^\# | Q(v) = 1 \text{ y } \langle v \rangle \text{ es el centro de algún miembro de } R\}$$

V es un espacio de dimensión n con una forma cuadrática Q tal que (V, Q) posee una base ortonormal.

Una vez hecho esto, hay que demostrar que efectivamente son grupos de 3-transposiciones, entonces se demostrará que las propiedades 1–4 del teorema ?? se satisfacen.

Para E_8 :

Denotemos por $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ la base estándar de \mathbf{R}^n . Sea $V = \mathbf{R}^8$. Empecemos con el látiz L' que consiste de todos los $\sum c_i \varepsilon_i$ con c en los enteros y $\sum c_i$ par. Entonces sea $L = L' + \mathbf{Z}(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i)$.

Definamos Φ como el conjunto de todos los vectores de distancia al cuadrado 2 en L . Entonces Φ consiste de las raíces:

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (i < j), \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i \quad \text{número par de signos +}$$

Efectivamente para $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ se tiene que la distancia $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y para los del tipo $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i$:

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i \right| = \left(\sqrt{\frac{1+\dots+1}{4}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{8}{2}} \right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

Sea $f_i \in \{-1, 1\}$ tenemos que

$$\left(\frac{f_1}{2}, \dots, \frac{f_8}{2} \right) = \frac{1}{2}(1, \dots, 1) + \left(\frac{f_1 - 1}{2}, \dots, \frac{f_8 - 1}{2} \right)$$

entonces $\sum \left(\frac{f_i - 1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum f_i - 4$.

Estas raíces son $2^7 + 4 \binom{8}{2} = 128 + 112 = 240$.

Comprobemos que se trata de un sistema de raíces: $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ es raíz. Sea $\lambda(\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$. La longitud tiene que ser 2 entonces $|\lambda(\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j)| = \lambda^2(2)$ por lo tanto $\lambda = \pm 1$.

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i$ es raíz. Sea $\lambda \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i$. Tenemos que la longitud es $\lambda^2 2$ por lo tanto $\lambda = \pm 1$.

Ahora, hay que probar que $r_v(v_i)$ es otra raíz. Recordemos que $r_v(v_i)$ denota una reflexión con centro v dada por:

$$r_v(v_i) = v_i - 2 \frac{\langle v_i, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Hay varios casos:

Sea $v = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ y $v_i = \pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_m$, entonces

$$r_v(v_i) = (\pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_l) - 2 \frac{\langle \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_m \rangle}{2} (\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$$

Si i, j, l, m todos son distintos se tiene que $r_v(v_i) = v_i$.

Si $i = l$:

$$r_v(v_i) = (\pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_l) - (\pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_j) = \pm\varepsilon_m - (\pm\varepsilon_j)$$

Si $i = l, j = m$:

$$r_v(v_i) = (\pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_m) - 2(\pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_m) = -(\pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_m)$$

Ahora si $v_i = \left(\pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2}\right)$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ entonces:

$$\begin{aligned} r_v(v_i) &= \\ &= \frac{1}{2} (sgn_{v_i}(1), \dots, sgn_{v_i}(8)) \\ &- \frac{1}{2} \left\langle (sgn_{v_i}(1), \dots, sgn_{v_i}(8)), (\dots, sgn_v(i), \dots, sgn_v(j), \dots) \right\rangle (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \\ &= \frac{1}{2} (sgn_{v_i}(1), \dots, sgn_{v_i}(8)) - \frac{1}{2} [sgn_{v_i}(i) + sgn_{v_i}(j)sgn_v(j)] (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Donde $sgn_v(i)$ denota el signo de v en el lugar i . Si $sgn_{v_i}(i) = sgn_{v_i}(j)sgn_v(j)$ entonces $r_v(v_i) = \left(\pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2}\right)$ con el signo cambiado en los lugares i y j . Si $sgn_{v_i}(i) \neq sgn_{v_i}(j)sgn_v(j)$, entonces $r_v(v_i)$ también resulta del tipo $\left(\pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2}\right)$.

Si ahora $v = \left(\pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2}\right)$ y $v_i = \left(\pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2}\right)$ entonces:

$$\begin{aligned} r_v(v_i) &= \\ &= \frac{1}{2} (sgn_{v_i}(1), \dots, sgn_{v_i}(8)) \\ &- \frac{1}{8} \left\langle (sgn_{v_i}(1), \dots, sgn_{v_i}(8)), (sgn_v(1), \dots, sgn_v(8)) \right\rangle (sgn_v(1), \dots, sgn_v(8)) \end{aligned}$$

Hay varios casos, dependiendo en cuantos signos difieren v y v_i . Si difieren en 6 o en 2 se tiene que $r_v(v_i)$ queda del tipo $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, y si difieren en 8 en

4 queda del tipo $\left(\pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2}\right)$ y todos cambian de signo.

Si $v_i = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ entonces:

$$\begin{aligned} r_v(v_i) &= (0, \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(i), \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(j), \dots) \\ &- \frac{1}{4} \left\langle (\dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(i), \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(j), \dots), (\operatorname{sgn}_v(1), \dots, \operatorname{sgn}_v(8)) \right\rangle (\operatorname{sgn}_v(1), \dots, \operatorname{sgn}_v(8)) \\ &= (0, \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(i), \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(j), \dots) \\ &- \frac{1}{4} (\operatorname{sgn}_v(i) + \operatorname{sgn}_v(j) \operatorname{sgn}_{v_i}(j)), (\operatorname{sgn}_v(1), \dots, \operatorname{sgn}_v(8)) (\operatorname{sgn}_v(1), \dots, \operatorname{sgn}_v(8)) \end{aligned}$$

Si $\operatorname{sgn}_v(j) = -\operatorname{sgn}_{v_i}(j)$ entonces $r_v(v_i) = (0, \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(i), \dots, \operatorname{sgn}_{v_i}(j), \dots)$

y si $\operatorname{sgn}_v(j) = \operatorname{sgn}_{v_i}(j)$ entonces $r_v(v_i)$ queda del tipo $\left(\pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2}\right)$.

Esto comprueba que efectivamente $r_v(v_i)$ es otra raíz en todos los casos. Por lo tanto tenemos un sistema de raíces.

Sea el sistema simple Δ dado por:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$$\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$$

$$\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$$

$$\alpha_6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_4$$

$$\alpha_7 = \varepsilon_6 + \varepsilon_5$$

$$\alpha_8 = \varepsilon_7 + \varepsilon_6$$

Para ver que los α_i son linealmente independientes calculemos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \dots = \frac{1}{2} \neq 0$$

Por lo tanto los α_i son linealmente independientes. Solamente resta probar que todo elemento se puede escribir como combinación lineal de las α_i ya sea todos positivos o todos negativos. Para esto multipliquemos un vector $v \in \Phi$ por la matriz del cambio de base y comprobemos que obtenemos otro $w \in \Phi$ con todos positivos o todos negativos.

La matriz del cambio de base es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sgn_v(8) \\ \frac{1}{4}(sgn_v(1) + \dots + sgn_v(7) + 5sgn_v(8)) \\ \frac{1}{4}(-sgn_v(1) + \dots + sgn_v(7) + 5sgn_v(8)) \\ \frac{1}{4}(sgn_v(3) + \dots + sgn_v(7) + 5sgn_v(8)) \\ \frac{1}{4}(sgn_v(4) + \dots + sgn_v(7) + 4sgn_v(8)) \\ \frac{1}{4}(sgn_v(5) + \dots + sgn_v(7) + 3sgn_v(8)) \\ \frac{1}{4}(sgn_v(6) + \dots + sgn_v(7) + 2sgn_v(8)) \\ \frac{1}{4}(sgn_v(7) + sgn_v(8)) \end{pmatrix}$$

Si $sgn_v(8)$ es positivo entonces todos son positivos, y si es negativo, entonces todos son negativos.

Ahora, sea $v = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$. Si el $sgn_v(j) = sgn_v(i)$ y es positivo, sumamos la fila i de A con la j y de esta forma obtenemos que todos los términos son positivos. Si $sgn_v(j) = -sgn_v(i)$ y es negativo entonces nos quedan todos negativos.

Si tenemos que v es de la forma $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ entonces Av es un vector con todas los términos negativos.

Para E_7 :

Empezando por el sistema de raíces de tipo E_8 . V lo generado por α_i ($1 \leq 7$). Sea Φ el conjunto de 126 raíces de E_8 en V :

$$\begin{aligned} & \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq 6), \quad \pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8) \\ & \pm\frac{1}{2}\left(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 \pm\varepsilon_i\right) \quad \text{número impar de signos } - \end{aligned}$$

Primero hay que checar que es sistema de raíces. Por el caso anterior, hemos probado que si v es raíz y λv también lo es, entonces $\lambda = \pm 1$. Sólo basta ver que $r_v(w)$ es otra raíz ($v, w \in \Phi$):

El caso $v = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ y $w = \pm\varepsilon_l \pm \varepsilon_k$ con $i, j, l, k \in \{1, \dots, 6\}$ ya se probó en la demostración para E_8 .

Si $v = \pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)$ y $w = \pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)$ entonces $r_v(w) = w$.

Si $v = \frac{1}{2}(sgn_v(1), \dots, sgn_v(6), sgn_v(7), -sgn_v(7))$ y $w = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ entonces para el casi $j \leq 6$ esto ya se probó en E_8 . Para $w = \varepsilon_7 - \varepsilon_8$:

$$\begin{aligned} r_v(w) &= (\varepsilon_7 - \varepsilon_8) - \frac{1}{4}(2sgn_v(7))(sgn_v(1), \dots, sgn_v(6), sgn_v(7), -sgn_v(7)) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}sgn_v(1), \dots, \frac{1}{2}sgn_v(7), -\frac{1}{2}sgn_v(7)\right) \end{aligned}$$

Sea $w = \frac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 \pm \varepsilon_i)$ entonces:

$$\begin{aligned} r_v(w) &= \frac{1}{2}(sgn_w(1), \dots, sgn_w(7), -sgn_w(7)) \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\langle (sgn_w(1), \dots, sgn_w(7), -sgn_w(7)), (sgn_v(1), \dots, sgn_v(7), -sgn_v(7)) \right\rangle \\ &\quad (sgn_v(1), \dots, sgn_v(7), -sgn_v(7)) \end{aligned}$$

Aquí hay varios casos: Si los signos de los vectores en el producto interno difieren en 6 o 4 entonces $r_v(w) = w$ y si difieren en 2 o en 8 $r_v(w)$ da un vector de la forma $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$.

Si $v = \varepsilon_7 - \varepsilon_8$ y $w = \frac{1}{2}(sgn_v(1), \dots, sgn_v(7), -sgn_v(7))$ entonces:

$$\begin{aligned} r_v(w) &= \frac{1}{2}(sgn_w(1), \dots, sgn_w(7), -sgn_w(7)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle (\varepsilon_7 - \varepsilon_8), (sgn_v(1), \dots, sgn_v(7), -sgn_v(7)) \right\rangle (\varepsilon_7 - \varepsilon_8) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}sgn_w(1), \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Si $v = \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ y $w = \frac{1}{2}(sgn_v(1), \dots, sgn_v(7), -sgn_v(7))$ el caso ya se analizó en E_8 .

Por lo tanto tenemos un sistema de raíces. Ahora sea el sistema simple Δ el formado por los α_i con $1 \leq i \leq 7$. Ya vimos que son linealmente independientes por lo que falta comprobar que todo elemento se puede escribir como combinación lineal de las α_i ya sea todos positivos o todos negativos. Procedemos igual que en el caso de E_8 . Los del tipo $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ya se verificaron en E_8 por lo que faltan los casos cuando $v = \varepsilon_7 - \varepsilon_8$ y cuando $v = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 \pm \varepsilon_i)$. En lo primero, tenemos que para Av todas las entradas son negativas y la última se elimina, es decir es 0. Para lo segundo, nos queda como en el caso para E_8 pero aquí con un número impar de signos - y la última entrada 0. Por lo tanto tenemos un sistema de raíces.

Para E_6 :

Empezando por el sistema de raíces de tipo E_8 . V lo generado por α_i ($1 \leq 6$). Sea Φ el conjunto de 72 raíces de E_8 en V :

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq 5)$$

$$\pm \frac{1}{2} \left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 \pm \varepsilon_i \right) \quad \text{número impar de signos } -$$

Primero hay que checar que es sistema de raíces. Por el caso anterior, hemos probado que si v es raíz y λv también lo es, entonces $\lambda = \pm 1$. Sólo basta ver que $r_v(w)$ es otra raíz ($v, w \in \Phi$):

El caso $v = \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ y $w = \pm \varepsilon_l \pm \varepsilon_k$ con $i, j, l, k \in \{1, \dots, 6\}$ ya se probó en la demostración para E_8 .

Si $v = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ y $w = \pm \frac{1}{2} \left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 \pm \varepsilon_i \right)$:

$$\begin{aligned} r_v(w) &= \frac{1}{2} (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8)) \\ &- \frac{1}{2} \left\langle (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8)), \right. \\ &\quad \left. (\dots, sgn_v(i) = 1, \dots, sgn_v(j), \dots, 0) \right\rangle (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Si $sgn_w(i) = -sgn_w(j)sgn_w(j)$ entonces $r_v(w)$ es igual a

$$\frac{1}{2} (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8))$$

y si $sgn_w(i) = -sgn_w(j)sgn_w(j)$ entonces $r_v(w)$ es igual a

$$\frac{1}{2} (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8))$$

pero cambian de signo el lugar i y el j , la última parte queda igual.

Si $w = \frac{1}{2} (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8))$ y $v = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ el caso ya se analizó en E_8 .

Si $w = \frac{1}{2} (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8))$

y $v = \frac{1}{2} (sgn_w(1), \dots, -sgn_w(8), -sgn_w(8), sgn_w(8))$ el resultado es el mismo que lo obtenido en el caso de E_7 . Por lo tanto, Φ es un sistema de raíces.

Por último sea el sistema simple Δ el formado por los α_i con $1 \leq i \leq 6$. Ya vimos que son linealmente independientes por lo que falta comprobar que todo elemento se puede escribir como combinación lineal de las α_i ya sea todos positivos o todos negativos. Procedemos igual que en el caso de E_8 . Los del tipo $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ya se verificaron en E_8 por lo que falta el caso cuando

$v = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 \pm \varepsilon_i)$: Tenemos que Av nos queda como en el caso para E_8 pero aquí con un número impar de signos - y las dos últimas entradas son 0. Por lo tanto tenemos un sistema de raíces.

Para los casos E_8, E_7 y E_6 falta por demostrar que efectivamente son grupos de 3-transposiciones. En cada caso, sea $\Gamma = \{r_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ y sea $S =^G \Gamma = \{r_\alpha | \alpha \in \Phi\}$. Las propiedades 1 – 3 del teorema ?? se satisfacen por las propiedades de los sistemas de Coxeter. Resta probar la condición 4, esto es que $r_\alpha r_\beta$, con $\alpha, \beta \in \Phi$ tiene orden $o(r_\alpha r_\beta) \in \{1, 2, 3\}$:

Sea $\alpha = \varepsilon_\pm \varepsilon_j$ y $\beta = \varepsilon_k \pm \varepsilon_l$. Hay varios casos:

Si $i = k$ y $j \neq l$: Tenemos que:

$$(r_\alpha r_\beta)^3 = (r_\alpha r_\beta r_\alpha)(r_\beta r_\alpha r_\beta) = r_{r_{\alpha(\beta)}} r_{r_{\beta(\alpha)}}$$

Entonces:

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha = \beta - \alpha$$

$$r_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \beta = \alpha - \beta = -r_\alpha(\beta)$$

pero $r_\gamma = r_{-\gamma}$ por lo tanto $(r_\alpha r_\beta)^3 = 1$ cuando $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$.

Si $\alpha = \beta$ entonces $(r_\alpha r_\beta) = 1$.

Ahora, cuando $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$:

$$r_\alpha(\beta) = \beta + \alpha = r_\beta(\alpha)$$

por lo tanto $(r_\alpha r_\beta)^3 = 1$.

Ahora, $o(r_\alpha r_\beta) = 2$ si y sólo si $r_\alpha r_\beta r_\alpha r_\beta = 1$ si y sólo si $r_{r_{\alpha(\beta)}} = r_\beta$ si y sólo si $r_\alpha(\beta) = \pm \beta$, para que esto suceda necesitamos que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Esto pasa en los siguientes casos: Cuando $\alpha = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ y $\beta = \varepsilon_l \pm \varepsilon_m$ y $sgn_\alpha(j) = -sgn_\beta(j)$.

Si $\beta = \frac{1}{2}(sgn_\beta(1), \dots, sgn_\beta(8))$ entonces

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}(sgn_\beta(i) + sgn_\beta(j)sgn_\alpha(j))$$

Si $sgn_\beta(i) = -sgn_\beta(j)sgn_\alpha(j)$ entonces $o(r_\alpha r_\beta) = 2$ y cuando $sgn_\beta(i) = sgn_\beta(j)sgn_\alpha(j)$ entonces $o(r_\alpha r_\beta) = 3$.

Ahora, cuando $\alpha = \frac{1}{2}(sgn_\alpha(1), \dots, sgn_\alpha(8))$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{4} \langle (sgn_\alpha(1), \dots, sgn_\alpha(8)), (sgn_\beta(1), \dots, sgn_\beta(8)) \rangle$$

Si los signos de α y β difieren en 6, el producto interno nos da -1 y por lo tanto $o(r_\alpha r_\beta) = 3$. Si difieren en 2 el producto interno nos da 1 y por lo tanto $o(r_\alpha r_\beta) = 3$. Si difieren en 4, $o(r_\alpha r_\beta) = 2$ y si difieren en todas o ninguna el orden es 1. Por lo tanto $o(r_\alpha r_\beta) \in \{1, 2, 3\}$.

Esto prueba que E_8 , E_7 y E_6 son grupos de 3-transposiciones. \square

Capítulo 4

Diagramas en la categoría S_p

En este capítulo el resultado principal es que a diferencia de los espacios de Fischer, en la categoría S_p , todos los espacios tienen diagrama (ver [?]). Para esto, definiremos conceptos tales como coclique, polo y daremos unos resultados de esto (ver [?]), además veremos qué significa que un espacio tenga la propiedad de Desargues y la propiedad de Reye y algunos resultados.

Para un espacio dual afín, consideremos el espacio vectorial

$$\mathbf{F}_2P = \left\{ \sum \lambda_i v_i \mid v_i \in P, \lambda_i \in \mathbf{F}_2 \right\}$$

y $L = \langle a + b + c \mid \{a, b, c\} \text{ línea} \rangle \subset \mathbf{F}_2P$.

El subconjunto P de \mathbf{F}_2P es base de \mathbf{F}_2P y $q(a) = 1$ para toda $a \in P$. La forma simpléctica bilineal que denotaremos ahora por $\langle, \rangle : \mathbf{F}_2P \times \mathbf{F}_2P \rightarrow \mathbf{F}_2$ está dada en la base P por:

$$\langle a, b \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } a, b \text{ son colineales} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

4.1 Teorema. L está contenido en $\text{Rad}(q)$, el radical dado por la forma simpléctica bilineal.

Demostración.

Tenemos que $x \in \text{Rad}(q)$ si $x \in \text{Rad}(\mathbf{F}_2P)$ y $q(x) = 0$. Sea $l = a + b + c$ con

$\{a, b, c\}$ línea y sea $x \in P$ entonces

$$\langle x, l \rangle = \langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle + \langle x, c \rangle$$

Si $x \in l$ entonces dos términos son iguales a 1 y el otro es igual a cero, por lo tanto $\langle x, l \rangle = 0$. Si $x \notin l$ entonces es colineal a dos puntos o a ninguno por lo tanto $\langle x, l \rangle = 0$. Esto prueba que $l \in \text{Rad}(\mathbf{F}_2P)$ ya que P es base y l genera L . Ahora, tenemos que

$$q(l) = q(a + b + c) = q(a) + q(b + c) + \langle a, b + c \rangle = q(a) + q(b + c)$$

ya que $\langle a, b + c \rangle = 1 + 1 = 0$ entonces

$$q(l) = q(a) + q(b + c) = q(a) + q(b) + q(c) + \langle b, c \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$$

Por lo tanto L está contenido en $\text{Rad}(q)$. □

4.2 Teorema. Sea P un espacio reducido dual afín. Entonces la composición $\phi : P \longrightarrow U$

$$P \longrightarrow \mathbf{F}_2P \longrightarrow \mathbf{F}_2P/L = U$$

es la representación universal de P . Además q induce una forma cuadrática en \mathbf{F}_2P/L tal que $q(\phi(a)) = 1$ para todo $a \in P$, la forma simpléctica bilineal asociada es 1 si a, b colineales y 0 si no lo son.

Demostración.

Sea $q \in \mathbf{F}_2P/L$ dado por $q(\phi(a)) = q(a + L) = q(a)$. Probemos que está bien definida. Si $x + L = y + L$ entonces $x + y \in L$ por lo tanto $0 = q(x + y) = q(x) + q(y) + \langle x, y \rangle$, pero como $x = y + l$ con $l \in L$ tenemos que $\langle x, y \rangle = \langle y + l, y \rangle = 0$ y de esta forma obtenemos que $q(x) = q(y)$ y por lo tanto está bien definida.

Ahora, denotemos como \bar{x} a $x + L$, tenemos que

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = q(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}) + q(\bar{y}) = q(x + y) + q(x) + q(y) = \langle x, y \rangle$$

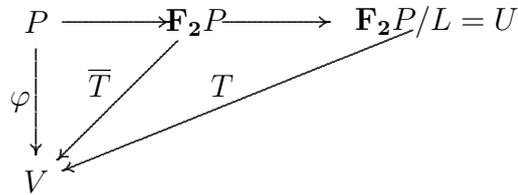
Por lo tanto q es la forma bilineal asociada al cociente. P es reducido, entonces $a, b \in P$, $a \neq b$ y no colineales, entonces existe $c \in P$ tal que $\langle c, a \rangle = 1$ y $\langle c, b \rangle = 0$. Si a, b son colineales entonces $\langle \phi(a), \phi(b) \rangle = \langle a, b \rangle = 1$ por lo tanto $\phi(a) \neq \phi(b)$. Entonces tenemos $\langle \phi(c), \phi(a) \rangle = 1$ y $\langle \phi(c), \phi(b) \rangle = 0$, por

lo tanto $\phi(a) \neq \phi(b)$ y por lo tanto ϕ es inyectiva. La propiedad universal es obtenida por la propiedad universal del cociente. El resto del teorema se verifica directamente de la definición de ϕ :

Tenemos que $\bar{T}|_P = \varphi$. Ahora, mostremos que $\bar{T}(l) = 0$ para todo l generador de L . Tenemos que

$$\bar{T}(a + b + c) = \bar{T}(a) + \bar{T}(b) + \bar{T}(c) = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) = 0$$

Por lo tanto existe el morfismo T .



Para ver que es único sea T' otro morfismo de $U \rightarrow V$, entonces

$$T'(a + L) = T'(\phi(a)) = \varphi(a) = T(a + L)$$

y dado que coinciden en los generadores tenemos que $T' = T$. □

Sean $a, b \in P$ y sea la relación de equivalencia:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^\perp = b^\perp$$

donde $a^\perp = \{b \in P \mid b \text{ no colineal con } a\}$. Definimos ahora

$$P^* = P / \sim$$

$\{x, y, z\}$ es línea en P^* , si existen $a \in x, b \in y$ y $c \in z$ tales que $\{a, b, c\}$ es línea en P .

Nótese que si $\{x, y, z\}$ es línea en P^* con $a \in x, b \in y$, entonces $\{a, b\}$ son colineales. Además si $\{a, b, c\}$ es línea en P entonces $c \in z$.

Puede verificarse que si P es dual afín entonces también lo es P^* y que

$$\begin{aligned} \pi : P &\longrightarrow P^* \\ a &\longmapsto [a] \end{aligned}$$

es un morfismo de espacios duales afines.

4.3 Lema. P^* es reducido.

Demostración.

Sean $x, y \in P^*$ no colineales y distintos con $[a] = x$ y $[b] = y$, entonces $a^\perp \neq b^\perp$. Entonces supongamos que b^\perp no está contenido en a^\perp , por lo tanto existe un $z \in b^\perp$ tal que $z \notin a^\perp$, por lo que $z \in P$ es colineal con a y no lo es con b y por lo tanto $[z]$ es colineal con x y no colineal con y en P^* . Por lo tanto P^* es reducido. \square

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbf{F}_2 y P un espacio dual afín. Consideremos el espacio $V \times P$ cuyas líneas son:

$$\{(u, a), (v, b), (w, c) \mid u + v + w = 0 \text{ y } \{a, b, c\} \text{ línea}\}.$$

Es fácil verificar que $V \times P$ es un espacio dual afín si P lo es. Definimos

$$\gamma_{(z,d)}(u, a) = \begin{cases} (u + z, \gamma_d(a)) & \text{si } d, a \text{ son colineales} \\ (u, a) & \text{otro caso} \end{cases}$$

4.4 Teorema. Sea P un espacio de tipo simpléctico, entonces existe un espacio vectorial V tal que $P \cong V \times P^*$.

Demostración.

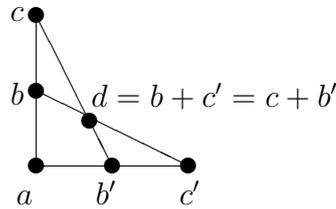
Para esta demostración ver [?]. \square

4.5 Teorema. Un espacio parcialmente lineal P tiene representación simpléctica si y sólo si todos sus planos son duales afines.

Demostración.

Supongamos que $\varphi : P \rightarrow V$ es una representación simpléctica de P con forma bilineal y $f : V \times V \rightarrow \mathbf{F}_2$. Escribamos $\varphi(a) = a$ y $f(u, v) = \langle u, v \rangle$. Sea $L_1 = \{a, b, c\}$ y $L_2 = \{a, b', c'\}$ dos líneas que se intersectan en P . Entonces tenemos $0 = \langle c, 0 \rangle = \langle c, (a+b'+c') \rangle = 1 + \langle c, b' \rangle + \langle c, c' \rangle$ y supongamos que $\langle c, b' \rangle = 1$ y $\langle c, c' \rangle = 0$.

Entonces $0 = \langle 0, c' \rangle = \langle (a+b+c), c' \rangle = 1 + \langle b, c' \rangle$ por lo tanto b y c' son colineales. Ahora, como $0 = a+a = b+c+b'+c'$ tenemos $b+c' = c+b'$ por lo tanto el plano generado por L_1 y L_2 es el dual afín:



Supongamos ahora que P tiene sólo planos duales afines. Ahora, por teorema 4.4, $P \cong V \times P^*$ con V un espacio vectorial y P^* es un espacio reducido. Entonces por teorema 4.2 P^* tiene una representación simpléctica en $\Pi : P \hookrightarrow \mathbf{F}_2 P^*/L^* = W$. Sea $\varphi : P \cong V \times P^* \hookrightarrow V \times \mathbf{F}_2 P^*/L^*$ y $f : (V \times W) \times (V \times W) \rightarrow \mathbf{F}_2$ dado por $f((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \langle w_1, w_2 \rangle$ donde \langle, \rangle es la forma de P^* dada en 4.2.

$$P \xrightarrow[\cong]{\alpha} V \times P^* \xrightarrow{1 \times \Pi} V \times W$$

donde α es isomorfismo y $\Pi(x) = x + L$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(\varphi(a), \varphi(b)) &= f((1 \times \Pi)\alpha(a), (1 \times \Pi)\alpha(b)) = \\ &= f((1 \times \Pi)(u, x), (1 \times \Pi)\alpha(v, y)) = \\ &= f((u, \Pi(x)), (v, \Pi(y))) = \\ &= \langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = 1 \end{aligned}$$

para x, y colineales en P . Si no son colineales entonces es igual a 0. □

4.6 Corolario. Cualquier espacio parcialmente lineal con sólo espacios duales afines tiene una representación simpléctica universal.

Demostración.

En la prueba del teorema 4.2 la condición que implica la inyectividad de la representación simpléctica universal $\varphi : P \longrightarrow U$ es que el espacio P es reducido. Ahora, en nuestro caso, P no es necesariamente reducido pero sabemos que P tiene una representación simpléctica (inyectiva). Por lo tanto, de la propiedad universal de φ , φ también es inyectiva. \square

Sea Γ una gráfica y sea $\mathbf{F}_2\Gamma$ el espacio \mathbf{F}_2 -vectorial con base los vértices de Γ . Definamos una forma bilineal simpléctica f en $\mathbf{F}_2\Gamma$ dada en la base por $f(x, y) = 1$ si x, y son adyacentes y $f(x, y) = 0$ en otro caso ($f(x, x) = 0$).

Ahora consideremos el espacio parcialmente lineal con puntos los vectores no cero de $\mathbf{F}_2\Gamma$ y líneas los subconjuntos $\{x, y, z\}$ tales que $f(x, y) = 1$ y $x + y + z = 0$.

Definamos $C(\Gamma)$ como el subespacio parcialmente lineal de $\mathbf{F}_2\Gamma$ generado como subespacio parcialmente lineal por Γ . Note que $C(\Gamma)$ y $\mathbf{F}_2\Gamma - \{0\}$ son de tipo simpléctico.

4.7 Lema. Sea P un espacio de tipo simpléctico. Si $P \subset V$ es una representación de P y hay una subgráfica $\Gamma \subset P$ tal que:

- I. Γ genera el espacio parcialmente lineal P ,
- II. Γ es una base del espacio vectorial V .

Entonces $P \subset V$ es la representación universal de P .

Demostración.

Por corolario 4.6, existe una representación universal $P \longrightarrow U$. Entonces existe una única función lineal $T : U \longrightarrow V$ tal que $T|_P$ es la inclusión $P \subseteq V$ y $T(\Gamma) = \Gamma$. Por lo tanto, por II, Γ es linealmente independiente en U y por (i), como P genera a U como espacio vectorial por lo tanto Γ también es base de U , por lo tanto las dos representaciones son equivalentes. \square

Una consecuencia de este lema es el siguiente teorema:

4.8 Teorema. La representación $C(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{F}_2\Gamma$ es la representación universal de $C(\Gamma)$.

□

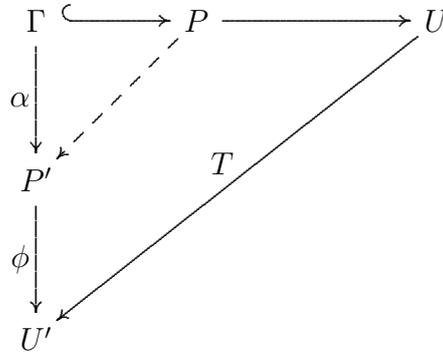
4.9 Teorema. Sea P un espacio parcialmente lineal de tipo simpléctico y supongamos que $\Gamma \subset P$ es una gráfica inducida de P tal que Γ genera P como espacio parcialmente lineal. Entonces Γ es un diagrama para P en la categoría \mathbf{S}_p si y sólo si existe una representación lineal $P \longrightarrow V$ tal que Γ es una base del espacio vectorial V .

Demostración.

Supongamos primero que Γ es un diagrama para P en \mathbf{S}_p . Sea $P \subset U$ la representación universal de P y considere la representación $C(\Gamma) \subset \mathbf{F}_2\Gamma$. De la definición de diagrama existe un morfismo de espacios parcialmente lineales $\varphi : P \longrightarrow C(\Gamma)$ tal que $\varphi|_\Gamma$ es la identidad en Γ . Ahora como $P \subset U$ es universal, existe una única función lineal $T : U \longrightarrow \mathbf{F}_2\Gamma$ tal que $T|_\Gamma$ es también la función identidad en Γ . Entonces como Γ genera U y Γ es base de $\mathbf{F}_2\Gamma$ entonces Γ es base para U .

Supongamos ahora que P tiene representación $P \subset U$ tal que Γ es base de U . Por lema 4.7 esta representación es universal. Sea $\alpha : \Gamma \longrightarrow P'$ un morfismo de gráficas con P' espacio de tipo simpléctico y considere la representación universal $P' \subset U'$. Como U es representación universal, tenemos $T : U \longrightarrow U'$ tal que $T|_\Gamma = \alpha$. Como α es morfismo de gráficas, a, b son adyacentes si y sólo si $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son puntos colineales en P' . Por lo tanto si f y f' son las formas bilineales de U y U' respectivamente, entonces para cualquier $a, b \in \Gamma$, $f(a, b) = f'(\alpha(a), \alpha(b))$ y por lo tanto $\forall x, y \in U$ tenemos que $f(x, y) = f'(T(x), T(y))$. Ahora veamos que $T(P) \subset P'$. Como Γ genera P entonces para cualquier $x \in P$ existe una sucesión x_1, \dots, x_n de puntos en Γ tal que $f(x_1 + \dots + x_i, x_{i+1}) = 1$ y $x = x_1 + \dots + x_n$. Entonces $T(x) = T(x_1 + \dots + x_{n-1}) + T(x_n)$. Supongamos inductivamente que $T(x_1 + \dots + x_{n-1}) \in P'$. Pero $T(x_n)$ está también en P' y como $f(x_1 + \dots + x_{n-1}, x_n) = 1$ tenemos que $f'(T(x_1 + \dots + x_{n-1}), T(x_n)) = 1$ por lo tanto $T(x) \in P'$. Finalmente de la definición de líneas en la representación universal, la restricción $T|_P : P \longrightarrow P'$ es morfismo de espacios

parcialmente lineales y $T|_P$ extiende a α .

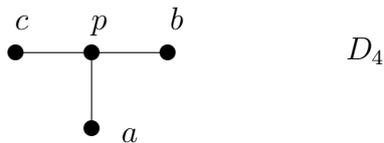


□

4.10 Definición. Decimos que un espacio tiene la **propiedad de Reyé** si cualquier par de puntos no colineales tienen más de 4 puntos colineales a ambos.

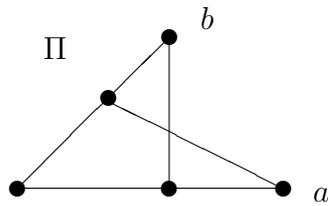
4.11 Definición. Decimos que un espacio tiene la **propiedad de Desargues** si cualquier par de puntos no colineales tienen exactamente 4 puntos colineales a ambos.

4.12 Lema. Un espacio simpléctico y conexo P tiene la propiedad de Reyé si y sólo si P contiene una subgráfica inducida del diagrama de Dynkin D_4 .

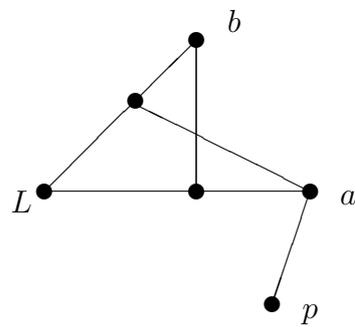


Demostración.

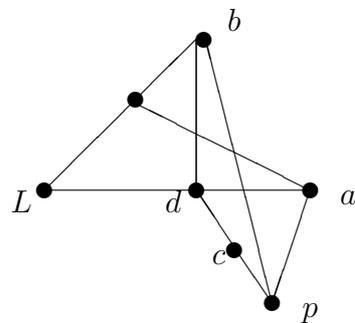
Supongamos primero que P tiene la propiedad de Reyé y sean a, b dos puntos no colineales en P . Entonces existe un plano dual afín Π en P que contiene a a y b , por conexidad.



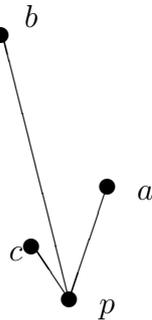
Como a y b tienen ya 4 puntos en Π colineales a ambos, entonces existe un quinto punto $p \in P$ colineal a a y a b . Sea L una línea de Π que contiene a a pero no b .



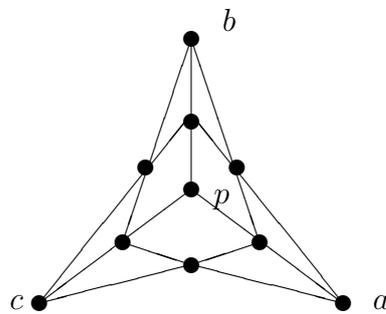
Entonces p es colineal con un punto de $a \neq d \in L$.



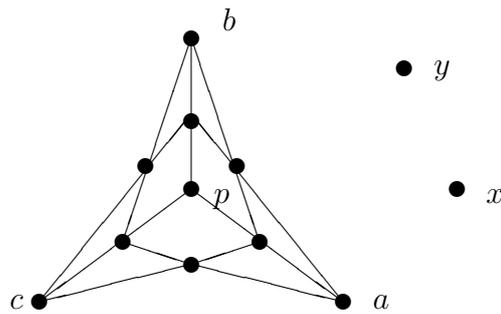
Si c es el tercer punto de la línea por p y d tenemos en P una subgráfica inducida $\{p, a, b, c\} = D_4$.



Ahora, supongamos que P contiene la gráfica D_4 , entonces P contiene las 9 líneas siguientes que se obtienen de completar los planos duales afines correspondientes:

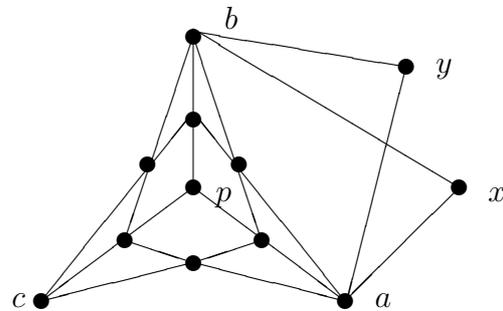


Denotemos por \clubsuit a la configuración anterior. En esta, podemos notar que para dos puntos no colineales a, b , se tienen más de 4 puntos colineales a ambos. Sólo falta demostrar que esto sucede para cualesquiera par de puntos que nos tomemos. Sean x, y dos puntos no colineales

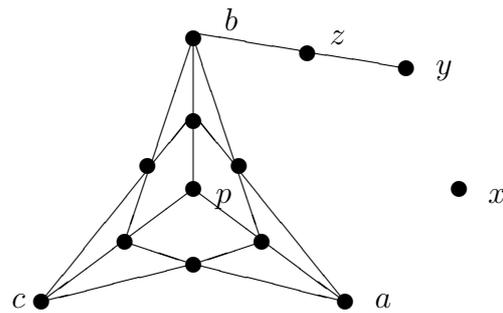


Demostremos que estos dos puntos tienen más de cuatro puntos colineales a ambos. Supongamos primero que x y y están conectados a dos puntos de la gráfica D_4 , digamos a b y a a . En este caso, es claro que se tienen más de 4

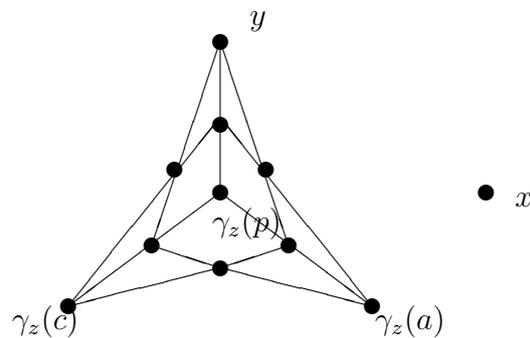
puntos colineales tanto a x como a y .



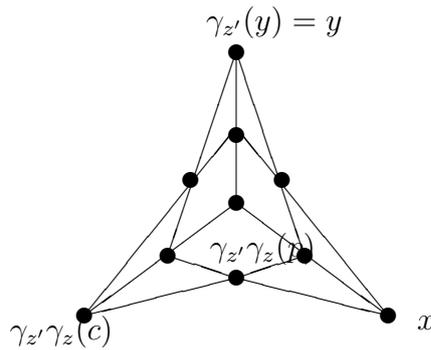
Ahora, supongamos que y está conectado a solamente un punto de D_4 , digamos a b y que x no está conectado a b . Si y es colineal con b entonces tenemos lo siguiente:



Entonces, calculemos $\gamma_z(\clubsuit)$. Tenemos que $\gamma_z(b) = y$ y $\gamma_z(x) = x$, por lo tanto, $\gamma_z(\clubsuit)$ es de la siguiente forma:

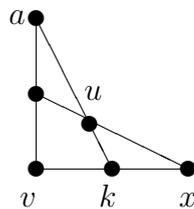


Tenemos que $\gamma_z(a) = a$. Hay dos casos: Si a está conectado con x o si no lo está. Para el caso en que a y x están conectados, calculamos $\gamma_{z'}(a)$, donde z' es el tercer punto de la línea que une a a y x . Entonces, $\gamma_{z'}(a) = x$ y así nos queda lo siguiente:



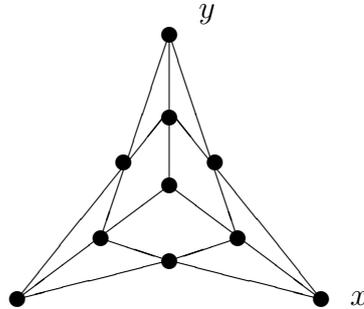
Aquí ya tenemos que hay más de 4 puntos colineales a x y y .

Si x no es colineal con a , entonces consideremos lo siguiente: Sea v un punto conectado con a y con x entonces, nótese que sólo pueden darse los casos en los que y está conectado a u y a v o a ninguno de los dos, ya que si y estuviera conectado a sólo uno, digamos a u entonces como y no está conectado con a sí lo está con el tercer punto de la recta que contiene a a y a u , llamemos a este punto k . Como y no está conectado con x pero si está conectado con k entonces debe estar también conectado al tercer punto de la recta que contiene a x y a k que es v .



Si u y v están conectados con y , entonces ya tenemos más de 4 puntos colineales tanto a x como a y . Si ni u ni v están conectados con y , entonces

calculemos $\gamma_u\gamma_v(a) = x$ y $\gamma_u\gamma_v(y) = y$, por lo tanto nos queda:



Y en este caso, hay más de 4 puntos colineales tanto a x como a y .

Como a, b, c son puntos simétricos y x y y son simétricos. Los demás casos son iguales. □

Como se puede ver en la demostración anterior, se acaba de probar que un espacio tienen la propiedad de Reye si y sólo si existen a, b puntos no colineales con más de 4 puntos colineales a ambos.

Para los teoremas siguientes denotaremos la forma bilineal f por \langle, \rangle y sean P un espacio dual afín conexo y reducido, $P \subset U$ la representación universal de P , y $q = q(P) : U \rightarrow \mathbf{F}_2$ la forma cuadrática definida por P y

$$\langle x, y \rangle = q(x + y) + q(x) + q(y) \quad (x, y \in U)$$

4.13 Definición. Un subconjunto $C \subset P$ es un **coclique** si $\langle a, b \rangle = 0$ para todo $a, b \in C$.

4.14 Definición. Un punto $p \in P$ es un **polo** de un coclique $C \subset P$ si $\langle p, c \rangle = 1$ para todo $c \in C$.

4.15 Lema. Si $C = \{a, b, c\} \subset P$ coclique con 3 puntos y $p \in P$ es polo de C entonces $a + b + c \in P$.

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle p, a \rangle = 1 & \quad \text{entonces } p + a \in P \\ \langle p + a, b \rangle = 1 & \quad \text{entonces } p + a + b \in P \end{aligned}$$

$$\langle p + a + b, c \rangle = 1 \quad \text{entonces } p + a + b + c \in P$$

y por último

$$\langle p + a + b + c, p \rangle = 1 \quad \text{por lo tanto } a + b + c \in P.$$

□

4.16 Lema. Sea $l = \{a, a', a''\}$ línea de P y

$$l^\perp = \{s \in P \mid \langle s, a \rangle = \langle s, a' \rangle = \langle s, a'' \rangle = 0\}$$

Si $c \in P$ tal que $\langle c, a \rangle = 1$ entonces existe $d \in P$ tal que $\langle d, a \rangle = 0$ y $\langle d, s \rangle = \langle c, s \rangle$ para toda $s \in l^\perp$.

Demostración.

Como en un plano dual afín si un punto es colineal a otro en una recta entonces debe ser colineal a otro más, así c debe ser colineal con a' o a'' . Sin pérdida de generalidad $\langle c, a' \rangle = 1$. Entonces sea $d = c + a'$

$$\langle d, a \rangle = \langle c + a', a \rangle = 1 + 1 = 0$$

$$\langle d, s \rangle = \langle c + a', s \rangle = \langle c, s \rangle$$

□

4.17 Lema. Sea $\{a_1, \dots, a_n\} \subset P$ coclique y l, l' líneas en P tales que:

$$a_1 \in l \quad \text{y} \quad a_i \in l^\perp \quad i > 1,$$

$$a_2 \in l' \quad \text{y} \quad a_i \in l'^\perp \quad i > 2.$$

Entonces existe una línea $l'' \in P$ tal que $a_2 \in l''$ y $a_i \in l''^\perp$ para $i \neq 2$.

Demostración.

Si $a_1 \in l^\perp$ definamos $l'' = l'$ y tenemos el resultado.

Supongamos que $a_1 \notin l^\perp$. Entonces existe $c \in l'$ tal que $\langle c, a_1 \rangle = 1$ entonces por 4.16, existe $d \in P$ tal que $\langle d, a_1 \rangle = 0$ y $\langle d, s \rangle = \langle c, s \rangle$ para toda $s \in l^\perp$. Como $a_2 \in l^\perp$ tenemos que $\langle d, a_2 \rangle = \langle c, a_2 \rangle = 1$ y en este caso definamos entonces $l'' = \{a_2, d, a_2 + d\}$ y tenemos que $\langle a_i, d \rangle = \langle a_i, c \rangle = 0$ porque $a_i \in l'^\perp$ para $i > 2$. □

4.18 Lema. Sea $C = \{a, b, c\} \in P$ coclique tal que $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$. Entonces existe l línea en P tal que uno de los puntos de C cae en l y los otros dos en l^\perp .

Demostración.

Como $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$ entonces existe $p \in P$ tal que $\langle p, a + b + c \rangle = 1$. Si se da el caso en el que uno de ellos, por ejemplo a es tal que $\langle p, a \rangle = 1$ y $\langle p, b \rangle = \langle p, c \rangle = 0$ entonces tomando $l = \{p, a, p + a\}$ se tiene lo que se quería.

Si lo que tenemos es que $\langle p, a \rangle = \langle p, b \rangle = \langle p, c \rangle = 1$, por el lema 4.15 tenemos que $a + b + c \in P$ y como P reducido existe $q \in P$ tal que $\langle q, a \rangle = 0$ y $\langle q, a + b + c \rangle = 1$ por lo tanto $\langle q, b \rangle = 1$ y $\langle q, c \rangle = 0$ (o $\langle q, c \rangle = 1$ y $\langle q, b \rangle = 0$) y tomamos $l = \{q, b, q + b\}$ (en este caso tomamos $l = \{q, c, q + c\}$). \square

4.19 Teorema. Si $C = \{a_1, a_2, a_3\}$ coclique y $a_1 + a_2 + a_3 \notin \text{Rad}(U)$ entonces existen líneas $l_1, l_2, l_3 \in P$ tales que $a_i \in l_i$ y $a_i \in l_j^\perp$ para $i \neq j$.

Demostración.

De 4.18 existe $l_1 \in P$ tal que $a_1 \in l_1$ y $a_2, a_3 \in l_1^\perp$. Por el hecho de que es reducido, existe $u \in P$ tal que $\langle u, a_2 \rangle = 1$ y $\langle u, a_3 \rangle = 0$. Sea $l = \{a_2, u, a_2 + u\}$. Entonces como en 4.17 tenemos $a_1 \in l_1$ y $a_2, a_3 \in l_1^\perp$ y $a_2 \in l$ y $a_3 \in l^\perp$. Por lo tanto existe l_2 tal que $a_2 \in l_2$ y $a_1, a_3 \in l_2^\perp$. Lo mismo con a_3 para obtener de esta manera l_3 tal que $a_3 \in l_3$ y $a_2, a_1 \in l_3^\perp$. \square

4.20 Teorema. Sea $a \in P$ y

$$\Gamma_a = \{b \in P, b \neq a \mid \langle a, b \rangle = 0\}$$

Entonces Γ_a es subespacio conexo de P .

Demostración.

Sean $b, c \in \Gamma_a$, si $\langle b, c \rangle = 1$ tenemos lo que se pide. Entonces supongamos que $\langle b, c \rangle = 0$. Demostraremos que existe $u \in \Gamma_a$ tal que $\langle u, b \rangle = \langle u, c \rangle = 1$. Sea $p \in P$ tal que $\langle p, b \rangle = \langle p, c \rangle = 1$. Si $p \in \Gamma_a$ tome $u = p$ y tenemos lo que se pide.

Supongamos que $p \notin \Gamma_a$, entonces $\langle a + b + c, p \rangle = 1$ y por lo tanto $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$. Por el teorema 4.19 existe l línea tal que $a \in l$ y $b, c \in l^\perp$. Aplicando lema 4.16 a l y a p , $\langle p, a \rangle = 1$, tenemos que existe $u \in P$ tal que $\langle u, a \rangle = 0$

y $\langle u, s \rangle = \langle p, s \rangle$ para todo $s \in l^\perp$. Por lo tanto tenemos el punto $u_i \in \Gamma_a$ tal que $\langle u, b \rangle = \langle u, c \rangle = 1$. \square

4.21 Teorema. Sea a, b colineales en P . Entonces

$$P_{a,b} = \{c \in P(c \neq a, c \neq b) | \langle c, a \rangle = \langle c, b \rangle = 0, a + b + c \notin \text{Rad}(U)\}$$

es conexo.

Demostración.

Sea $c, d \in P_{a,b}$ con $c \neq d$, $\langle c, d \rangle = 0$. Probemos que existe $z \in P_{a,b}$ tal que $\langle z, c \rangle = \langle z, d \rangle = 1$.

Como $\{a, b, c\}$ es coclique y $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$, por teorema 4.19, existe $l \in P$ tal que $c \in l$ y $a, b \in l^\perp$. Si $d \notin l^\perp$ existe $c \neq z \in l$ tal que $\langle z, d \rangle = 1$ y por lo tanto z es el punto buscado.

Si $d \in l^\perp$, considere el coclique $\{a, b, d\}$. Por teorema 4.19, existe l' con $b \in l'$ y $a, d \in l'^\perp$. Aplicamos ahora el lema 4.17 con $\{a_1, \dots, a_n\} = \{c, b, a, d\}$ efectivamente tenemos que se cumple que $c \in l$ y $b, a, d \in l^\perp$ y que $b \in l'$ y $a, d \in l'^\perp$. Entonces obtenemos l'' tal que $b \in l''$ y $c, a, d \in l''^\perp$. Como Γ_a es conexo, existe z con $\langle z, a \rangle = 0$ y $\langle z, c \rangle = \langle z, d \rangle = 1$.

Si $\langle z, b \rangle = 0$ entonces z es el punto que funciona. Si $\langle z, b \rangle = 1$ entonces aplicando lema 4.16 para l'' y $b \in l''$ tenemos que existe z' tal que $\langle z', b \rangle = 0$ y $\langle z', b \rangle = \langle z, s \rangle$ para $s \in l''^\perp$. Entonces, en particular $\langle z', c \rangle = \langle z', d \rangle = 1$ y $\langle z', a \rangle = 0$, por lo tanto $z' \in P_{a,b}$. \square

4.22 Teorema. Sea $\{a, b, c, d\}$ un coclique de 4 puntos en P tal que $a + b + c \in P$ y $a + b + d \notin \text{Rad}(U)$. Entonces $a + b + d \in P$.

Demostración.

Como $c, d \in P_{a,b}$ por teorema 4.21 existe $p \in P_{a,b}$ tal que $\langle p, c \rangle = \langle p, d \rangle = 1$. Entonces $p + c$ y $p + d$ están en P . Ahora, como $\langle a + b + c, p + c \rangle = 1$ tenemos que $a + b + p \in P$ y como $\langle a + b + p, p + d \rangle = 1$ tenemos que $a + b + d \in P$. \square

4.23 Lema. Para cualquier $v \in U$, $v \neq 0$, existe coclique $C \subset P$ tal que $v = \sum_{a \in C} a$.

Si $v \in \overline{O(q)}$ (ver definición ??) entonces $v = \sum_{a \in C} a$ con C coclique con número impar de términos.

Demostración.

Podemos escribir $v = \sum_{a \in C} a$ con $|C|$ minimal. Si tuviéramos que existen $a, a' \in C$ tales que $\langle a, a' \rangle = 1$ entonces $a + a' \in P$. Por lo tanto C es coclique (se contradice la minimalidad).

Ahora, si $q(v) = 1$ tenemos que

$$1 = q(v) = q\left(\sum_{a \in C} a\right) = \sum_{a \in C} q(a)$$

por lo tanto $|C|$ impar. \square

4.24 Lema. Si $C \subset P$ coclique con $|C| = n$, $n > 3$ entonces $\forall m$ con $0 < m < n$, existe coclique $C' \subset C$ con $|C'| = m$ tal que $\sum_{a' \in C'} a' \notin \text{Rad}(U)$.

Demostración.

Sea $\{a_1, \dots, a_{m+1}\} \subset C$ y sea $b = a_1 + \dots + a_m$ y $c = a_1 + \dots + a_{m-1} + a_{m+1}$. Si $b, c \in \text{Rad}(U)$ entonces $b + c \in \text{Rad}(U)$, i.e. $a_m + a_{m+1} \in \text{Rad}(U)$. Por lo tanto $\forall d \in P$ tendríamos que $\langle a_m, d \rangle = \langle a_{m+1}, d \rangle$ lo cual contradice que P es reducido. \square

4.25 Lema. Supongamos que P tiene la propiedad de Reye. Si a, b son no colineales entonces existe un tercer punto $c \in P$ tal que $a + b + c \in P$ y $\{a, b, c\}$ es coclique.

Demostración.

Considere un punto colineal con a y b y un plano Π generado por a, b, p . Como tiene la propiedad de Reye, existe un punto $q \notin \Pi$ colineal con a y b . Si p y q son colineales tomemos $c = p + q$ y de esta forma $a + b + p + q \in P$. Si no, tomemos $c = p + q + a$. \square

4.26 Teorema. Sea P con la propiedad de Reye y $P \subset U$ la representación universal de P . Considere $q : U \rightarrow \mathbf{F}_2$ la forma cuadrática dada por P . Entonces $P = O(q)$, el espacio cuadrático dado por q .

Demostración.

“ \subseteq ” Como P no tiene puntos aislados, $P \cap \text{Rad}(U) = \emptyset$ y de la definición, tenemos $q(a) = 1$ para toda $a \in P$ por lo tanto $P \subseteq O(q)$.

“ \supseteq ” Sea $v \in O(q)$. Procedamos por inducción en el número de elementos de un coclique con el que podemos escribir a v . Considere primero el caso donde $v = a + b + c \in O(q)$ con $\{a, b, c\} \subset P$ un coclique. Por el lema 4.25 el par $\{a, b\}$ puede ser completado al coclique $\{a, b, d\} \subset P$ con $a + b + d \in P$. Entonces por el teorema 4.22 tenemos que $v = a + b + c \in P$.

De lema 4.23 escribimos $v = a_1 + \cdots + a_n$ con n impar y $C = \{a_1, \dots, a_n\}$ un coclique en P . Supongamos que $\forall m$ con $3 \leq m < n$, si $u = b_1 + \cdots + b_m \in O(q)$ y b_1, \dots, b_m es coclique en P entonces $u \in P$.

De lema 4.24, tomando $m = n-2$, hay un coclique $C' \subset C$, $C' = \{a_1, \dots, a_{n-2}\}$ tal que $a = a_1 + \cdots + a_{n-2} \notin \text{Rad}(U)$. Entonces $a \in O(q)$ ya que $1 = q(a) = n-2$, entonces por inducción $a \in P$ y por lo tanto $\{a, a_{n-1}, a_n\}$ es coclique en P y $v = a + a_{n-1} + a_n$, por lo tanto, por la base de la inducción (el caso con tres puntos), se tiene que $v \in P$. \square

4.27 Teorema. Sea P un espacio reducido conexo simpléctico con la propiedad de Reye y sea $P \rightarrow U$ la representación universal de P . Si una subgráfica inducida D de P es tal que:

1. D contiene como subgráfica a D_4 ,
2. D conexa,
3. D es base del espacio vectorial U .

Entonces D es diagrama para P en \mathbf{S}_p .

Demostración.

Primero demostraremos que $C(D)$ es conexa y reducida. Sea $a, b \in C(D)$. Sabemos que existen $c, d \in D$ tales que a y c pueden estar conectados por un camino al igual que b y c . Entonces por II, $C(D)$ es también conexa. Ahora, supongamos que a y b son no colineales. Como $a, b \in P$ y P reducido entonces existe $c \in P$ tal que $\langle c, a \rangle \neq \langle c, b \rangle$. Entonces $\langle c, (a + b) \rangle = \langle c, a \rangle + \langle c, b \rangle = 1$. Pero como D es base de U existe d tal que $\langle d, (a + b) \rangle = 1$, por lo tanto $\langle d, a \rangle \neq \langle d, b \rangle$ con $d \in C(D)$.

Note que por lema 4.7, la restricción de la representación universal $P \rightarrow U$

a $C(D) \subset U$ es también la representación universal de $C(D)$, $C(D) \hookrightarrow U$.

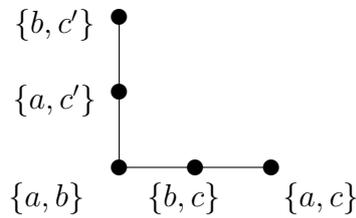
Como D genera $C(D)$ y D es base de U entonces $C(D)$ y P definen la misma forma cuadrática en el espacio vectorial U . Entonces tenemos que los espacios P y $C(D)$ que satisfacen las hipótesis del teorema 4.26 y con la misma forma cuadrática q . Por lo tanto $P = O(q) = C(D)$ y por lo tanto por teorema 4.9, D es diagrama para P . \square

4.28 Definición. Sea Ω un conjunto. Definimos $T(\Omega)$ como el espacio parcialmente lineal con puntos $\{a, b\} \in \Omega$, $a \neq b$ y las líneas los conjuntos de 3 puntos de la forma $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\} \in T(\Omega)$.

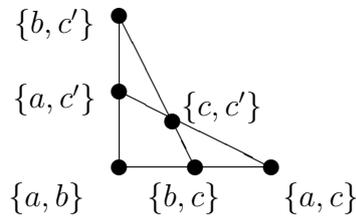
4.29 Lema. $T(\Omega)$ es de tipo simpléctico conexo con la propiedad de Desargues y reducido excepto para $|\Omega| = 4$.

Demostración.

Es un espacio parcialmente lineal ya que el tercer punto de una recta en $T(\Omega)$ es siempre la diferencia simétrica de los otros dos puntos, de esta forma, tenemos que dos puntos determinan al tercero. Ahora, considere las rectas $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ y $\{\{a, b\}, \{b, c'\}, \{a, c'\}\}$ que se intersectan en el punto $\{a, b\}$. Veamos que lo que generan es un plano dual afín.



Tenemos que $\{a, c'\}$ está unido con $\{a, c\}$ y el tercer punto de esa recta es $\{c, c'\}$, y también $\{b, c'\}$ está unido con $\{b, c\}$ siendo el tercer punto de la línea $\{c, c'\}$. Por lo tanto se forma el siguiente plano dual afín:



$T(\Omega)$ tiene la propiedad de Desargues ya que si tomamos $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ dos puntos no colineales tenemos que los puntos colineales a ambos son: $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$ y $\{b, d\}$, los cuales son exactamente 4.

Ahora probemos que es reducido excepto para $|\Omega| = 4$. Para los casos $|\Omega| = 1$ y $|\Omega| = 2$ no hay nada que probar ya que no tenemos línea. Si $|\Omega| = 3$ se forma una línea y no hay nada que probar ya que no hay otros puntos. Para $|\Omega| = 4$ tenemos que se forma un espacio dual afín y por lo tanto no es reducido. Para $|\Omega| > 4$ considere dos puntos no colineales $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ y un punto $e \in \Omega$ tal que $e \notin \{a, b, c, d\}$, entonces el punto $\{a, e\} \in T(\Omega)$ es colineal a $\{a, b\}$ pero no lo es a $\{c, d\}$. Por lo tanto $T(\Omega)$ es reducido. \square

4.30 Teorema. Si P tiene la propiedad de Desargues entonces P es isomorfo al espacio $T(\Omega)$.

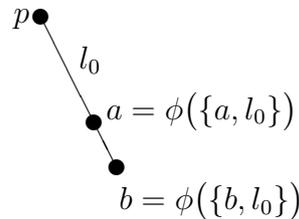
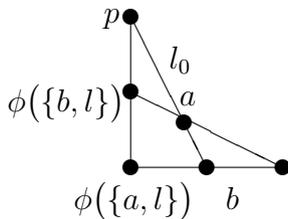
Demostración.

Sea p un punto de P y $l_0 = \{p, a, b\}$ línea de P . considere el conjunto Ω' de líneas que pasan a través de p y el espacio $T(\Omega)$ donde $\Omega = \{a, b\} \cup \Omega'$. Note que los puntos de $T(\Omega)$ son de 3 tipos:

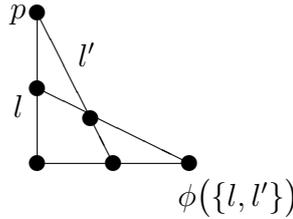
1. $\{a, b\}$
2. $\{x, l\}$ con $x \in \{a, b\}$, $l \in \Omega$
3. $\{l, l'\}$ con $l, l' \in \Omega'$

Definamos la función $\phi : T(\Omega) \longrightarrow P$:

1. $\phi(\{a, b\}) = p$
2. $\phi(\{x, l_0\}) = x$
 $\phi(\{x, l\}) = t$ para $l \neq l_0$, donde t es el único punto de la línea l que no es colineal con x .



3. $\phi(\{l, l'\}) = t$ donde t es el único punto en el plano generado por l y l' tal que $t \neq p$ y t no colineal con p .



Probemos que ϕ es biyectiva. Consideremos la partición $T(\Omega) = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ donde T_i es el conjunto de puntos de tipo i , y la partición $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ donde $P_1 = \{p\}$, P_2 el conjunto de puntos de P colineales a p y P_3 el conjunto de puntos de P no colineales a p .

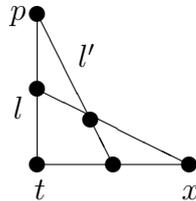
Como $\phi(T_i) \subset P_i$ solo tenemos que probar que las restricciones respectivas son biyectivas:

Para $i = 1$: $\phi|_{T_1}$ es supreyectiva e inyectiva.

Para $i = 2$: Sea $y \in P_2$. Entonces hay una línea $l \in \Omega'$ tal que $y \in l$ y por definición de ϕ tenemos que $\phi(\{a, l\}) = y$ o $\phi(\{b, l\}) = y$. Por lo tanto $\phi|_{T_2}$ es suprayectiva.

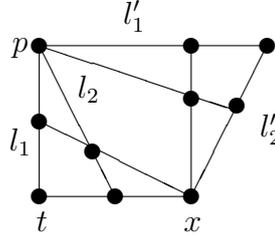
Si $y = \phi(\{x, l\}) = \phi(\{x', l'\})$ entonces como p y y están en l, l' entonces $l = l'$ y $x = x'$.

Para $i = 3$: Sea $x \in P_3$. como P es conexo hay un punto $t \in P$ colineal con p y x . En el plano generado por p, x, t hay dos líneas l, l' tales que $\phi(\{l, l'\}) = x$



Por lo tanto $\phi|_{T_3}$ es suprayectiva. Por otro lado, si $\phi(\{l_1, l_2\}) = \phi(\{l'_1, l'_2\})$

entonces los planos generados por l_1, l_2 y l'_1, l'_2 contienen p y x , dos puntos no colineales.



De la propiedad de Desargues los planos son iguales, ya que de otra forma se tendrían 4 puntos colineales tanto a p como a x . Por lo tanto $\phi|T_3$ es inyectiva.

Hemos probado que ϕ es biyectiva. Ahora probemos que ϕ manda líneas en líneas:

Note que hay tres tipos de líneas en $T(\Omega)$:

1. $\{\{a, b\}, \{a, l\}, \{b, l\}\}$
2. $\{\{x, l\}, \{x, l'\}, \{l, l'\}\}$
3. $\{\{l, l'\}, \{l, l''\}, \{l', l''\}\}$

Para las líneas del primer tipo, de la definición de ϕ tenemos que $\phi(L) = l$. Para las líneas del tipo 2 y 3 considere lo siguiente:

Sean l, l', l'' tres líneas en Ω' y sea u (respectivamente v y w) el sexto punto del plano generado por l, l' (respectivamente l, l'' y l', l'').

Sea $l = \{p, r, s\}$. Entonces en la definición de u y v podemos etiquetar los puntos de l' y l'' para que $l' = \{p, r', s'\}$ y $l'' = \{p, r'', s''\}$ donde $\{r, r', u\}$, $\{s, s', u\}$ son líneas y $\{r, r'', v\}$, $\{s, s'', v\}$ son líneas también. Para el caso 2 en el que no aparece l'' tomemos $l'' = l_0$. Supongamos que $x = a$, entonces

$$\{\phi(\{x, l\}), \phi(\{x, l'\}), \phi(\{l, l'\})\} = \{s, s', u\}$$

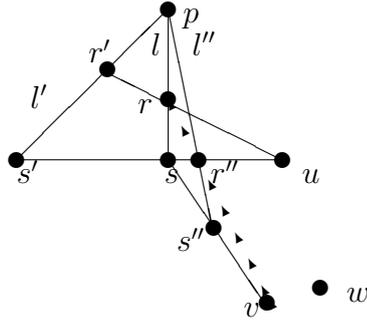
Si $x = b$ tenemos que

$$\{\phi(\{x, l\}), \phi(\{x, l'\}), \phi(\{l, l'\})\} = \{r, r', u\}$$

Y también

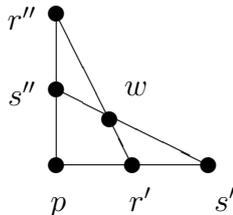
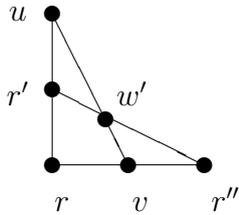
$$\{\phi(\{l, l'\}), \phi(\{l, l''\}), \phi(\{l', l''\})\} = \{u, v, w\}$$

Ya se tenía que $\{s, s', u\}$ y $\{r, r', u\}$ son líneas, por lo tanto solo falta demostrar que $\{u, v, w\}$ es línea.



Primero note que como p y u no son colineales, los puntos u y r'' tampoco lo son, porque si lo fueran p y u tendrían más de 4 puntos colineales a ambos.

Sea w' el sexto punto del plano generado por las líneas $\{r, r', u\}$ y $\{r, r'', v\}$. Como u y r'' no son colineales, $\{u, v, w'\}$ y $\{r, r'', w'\}$ son líneas. Entonces la línea $\{r, r'', w'\}$ pertenece al plano generado por l' y l'' , por lo tanto $w = w'$.



□

Sea C una configuración. Recordemos que en el conjunto $C \times \mathbf{F}_2^n$ definimos

las líneas como las tripletas $\{(a, x), (b, y), (c, z)\}$ tales que $\{a, b, c\}$ es una línea en C y $x + y + z = 0$ en \mathbf{F}_2^n .

4.31 Lema. Sea C una configuración y $l = \{p, q, r\}$ una línea en C . Si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ es base de \mathbf{F}_2^n entonces, en $C \times \mathbf{F}_2^n$, el conjunto

$$D := \{(p, 0), (q, 0), (p, x_1), \dots, (p, x_n)\}$$

genera la configuración $l \times \mathbf{F}_2^n$.

Demostración.

Sea $E = \langle D \rangle$. sólo tenemos que probar que $l \times \mathbf{F}_2^n \subset E$. Como $(p, 0), (q, 0) \in E$, por definición de líneas en $C \times \mathbf{F}_2^n$ tenemos que $(r, 0) \in E$. Ahora, como $(r, 0), (p, x_j) \in E$ con $(1 \leq j \leq n)$, tenemos también que $(q, x_j) \in E$. Similarmente, $(r, x_i) \in E$ para $(1 \leq i \leq n)$. Entonces también $(p, x_i + x_j) \in E$, etc. Finalmente, para toda $x, y, z \in \mathbf{F}_2^n$ tenemos que $(p, x), (q, y), (r, z) \in E$. \square

4.32 Lema. Sea C un espacio conexo y D un conjunto de puntos que generan a C . Entonces $D \times \mathbf{F}_2^n$ generan la configuración $C \times \mathbf{F}_2^n$.

Demostración.

Sea (c, x) cualquier punto de $C \times \mathbf{F}_2^n$. Como $c \in \langle D \rangle$, existe una sucesión $s_1, \dots, s_k \in C$, $d_1, \dots, d_k \in D$ tal que $s_1 = d_1$ y $\{s_i, s_{i+1}, d_{i+1}\} \in D$ es recta. Entonces

$$(s_1, 0), (s_2, 0), \dots, (s_{k-1}, 0), (s_k, x) = (c, x)$$

es una sucesión en $C \times \mathbf{F}_2^n$ tal que $(s_i, 0)$ y $(s_{i+1}, 0)$ son colineales $(1 \leq i \leq k-2)$ y $(s_{k-1}, 0)$ y (s_k, x) son también colineales. Cada tercer punto de la línea por $(s_i, 0)$ y $(s_{i+1}, 0)$ es $(d_{i+1}, 0)$ y este punto pertenece a $D \times \mathbf{F}_2^n$, $(1 \leq i \leq k-2)$. Para $k = i-1$ el tercer punto de la línea por $(s_{k-1}, 0)$ y (s_k, x) es (d_k, x) que también está en $\langle D \times \mathbf{F}_2^n \rangle$, i.e. $(c, x) \in \langle D \times \mathbf{F}_2^n \rangle$. \square

4.33 Teorema. Sea C un espacio de Fischer conexo y sea D una subgráfica inducida conexa que genera C . Sea p cualquier punto en D , $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base para \mathbf{F}_2^n y

$$D' = (D \times \{0\}) \cup \{(p, x_1), \dots, (p, x_n)\}.$$

Entonces D' genera la configuración $C \times \mathbf{F}_2^n$.

Demostración.

Como $\langle D \times \mathbf{F}_2^n \rangle = C \times \mathbf{F}_2^n$ por lema 4.32 sólo tenemos que probar que $\langle D' \rangle = \langle D \times \mathbf{F}_2^n \rangle$ y como $D' \subset D \times \mathbf{F}_2^n$ tenemos que probar nada más que $D \times \mathbf{F}_2^n \subset \langle D' \rangle$.

Entonces sea (q, x) con $q \neq p$ cualquier punto de $D \times \mathbf{F}_2^n$ (ya que si fueran iguales tenemos el resultado). Como D es conexo, hay una sucesión de puntos $q_1, q_2, \dots, q_s \in C$, $r_1, \dots, r_s \in D$ tales que $p = q_1$ y $q_s = q$ donde $q_i \in D$, tal que q_i y q_{i+1} son colineales para $(1 \leq i \leq s-1)$. Sea $l_1 = \{q_1, q_2, r_1\}$ línea en C . Entonces por lema 4.31, $\langle (q_1, 0), (q_2, 0), (r_1, x) \rangle = l_1 \times \mathbf{F}_2^n$. Ahora como (q_1, x_i) y $(q_2, 0)$ pertenecen a D' , entonces, (r_1, x_i) pertenece a $\langle D' \rangle$ y por lo tanto $l_1 \times \mathbf{F}_2^n \subset \langle D' \rangle$. En particular, $(q_2, x) \in \langle D' \rangle$. Por lo tanto, por inducción, $(q, x) \in \langle D' \rangle$. \square

4.34 Teorema. Sea Γ un diagrama para una configuración conexa C y sea p un punto de Γ . Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base para el espacio vectorial \mathbf{F}_2^n . Entonces

$$\Gamma' = (\Gamma \times \{0\}) \cup (\{p\} \times B) \subset C \times \mathbf{F}_2^n$$

es un diagrama para la configuración $C \times \mathbf{F}_2^n$.

Demostración.

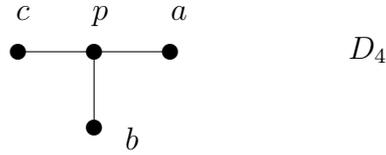
Por definición Γ' genera $C(\Gamma')$ en $C \times \mathbf{F}_2^n$ y por teorema 4.33, Γ' genera $C \times \mathbf{F}_2^n$ en $\mathbf{F}_2\Gamma \times \mathbf{F}_2^n$. Nótese que \mathbf{F}_2^n es la representación universal de C por teoremas 4.8 y 4.9. Ahora, como Γ' es base para $\mathbf{F}_2\Gamma \times \mathbf{F}_2^n$, los espacios vectoriales $\mathbf{F}_2\Gamma'$ y $\mathbf{F}_2\Gamma \times \mathbf{F}_2^n$ son isomorfos. Por lo tanto, por teorema 4.9, Γ' es diagrama para $C(\Gamma') = C \times \mathbf{F}_2^n$. \square

4.35 Teorema. En la categoría \mathbf{S}_p todos los espacios finitos tienen diagramas.

Demostración.

Tenemos varios casos:

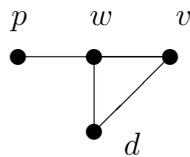
- a. “ P reducido y con la propiedad de Reyé”:
Sea U la representación universal de P . Sólo necesitamos encontrar una subgráfica inducida de P que satisfaga 1 – 3 del teorema 4.27. Por lema 4.12, P contiene D_4



Veamos primero que los vértices $\{p, a, b, c\}$ son linealmente independientes en la representación universal U de P :

Sea $r = \lambda_1 p + \lambda_2 c + \lambda_3 b + \lambda_4 a = 0$. Tenemos que $\langle r, p \rangle = 0 = 0 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$. Por otro lado, $\langle r, a \rangle = 0 = \lambda_1 + 0 + 0 + 0 = \lambda_1$, por lo tanto $\lambda_1 = 0$. Si dos términos fueran igual a 1, digamos si $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, entonces $\lambda_4 = 0$ y $0 = r = a + b$ por lo tanto $a = -b$ y esto no se puede dar. Por lo tanto $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ y de esta forma tenemos que $\{p, a, b, c\}$ son linealmente independientes.

Ahora, sea $\mathcal{F} = \{F \text{ subgráfica} \mid F \text{ conexa, que contiene } D_4 \text{ y linealmente independiente de } P\}$ familia. Sea $\{F_\alpha\}$ una cadena. Tenemos que $\bigcup F_\alpha$ es conexa y subgráfica induce de P . Por lo tanto, por Zorn \mathcal{F} tiene elementos maximales. Sea D maximal. Entonces se satisfacen los incisos 1 y 2 de teorema 4.27. Para probar 3, solo basta probar que genera a U . Sea V el subespacio vectorial de U generado por D . Como P genera U basta ver que $P \subset V$. Sea $p \in P$. Si p es colineal con un punto $d \in D$ entonces por la maximalidad de D se sigue que $p \in V$. Supongamos entonces que p no es colineal con ningún punto de D . Sea $d \in D$ y $v \in P$ tales que v es colineal con p y d .



Considere la línea $L = \{v, p, w\} \in P$. entonces d y w son colineales por lo tanto v y w están en V y por lo tanto $v + w = p \in V$.

- b. “ P reducido y con la propiedad de Desargues”:

En este caso, sabemos de 4.30 que $P \cong T(\Omega)$, i.e. el espacio parcialmente lineal cuyos puntos son las parejas $\{a, b\} \in \Omega$, donde Ω es un conjunto y $a \neq b$. Y con líneas los conjuntos de 3 puntos de la forma $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$.

Sea $\mathbf{F}_2\Omega$ el espacio vectorial sobre \mathbf{F}_2 con base Ω , sea $v = \sum_{a \in \Omega} \lambda_a a$ y consideremos el subespacio

$$U = \{v \in \mathbf{F}_2\Omega \mid |\{\lambda_a \mid \lambda_a = 1\}| \text{ es par}\}$$

Entonces $\{a, b\} \longrightarrow a + b$ da una representación de $T(\Omega)$ en U . Sea $u \in \Omega$ fijo y

$$D = \{\{u, a\} \mid u \neq a, a \in \Omega\} \subseteq T(\Omega)$$

conexa. La subgráfica D de $T(\Omega)$ genera $T(\Omega)$ como un espacio parcialmente lineal proque $\{a, b\} = \{u, a\} + \{u, b\}$. Hay que probar que D es base de U . Para probar que genera considere lo siguiente, sea $x \in U$ tal que $x = \sum_{a \in \Omega} \lambda_a a$ entonces

$$x = \sum_a \lambda_a a = \sum_a \lambda_a (a + u)$$

ya que $\sum \lambda_a = 0$ porque $x \in U$ y $a + u \in D$. Por lo tanto D genera U como espacio vectorial. Ahora, para ver que es linealmente independiente, tenemos que

$$\sum \lambda_a (a + u) = 0 = \sum_{a \neq u} \lambda_a a + \sum \lambda_a u$$

como Ω es base cada $\lambda_a = 0$. Entonces D es linealmente independiente y por lo tanto D es base de U . Entonces por teorema 4.9 D es diagrama para $T(\Omega)$ y por teorema 4.8 es la representación universal.

c. “Caso general. P finito”:

Sea P un espacio conexo simpléctico. Por teorema 4.4 sabemos que $P \cong P^* \times V$ con P^* un espacio reducido y V un espacio vectorial sobre \mathbf{F}_2 . En teorema 4.34, si D^* es diagrama para P^* , p un punto de D^* y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V entonces

$$D = \{(D^* \times \{0\}) \cup (\{p\} \times B)\} \subset P^* \times V$$

es diagrama para P . □

Como una aplicación de los teoremas 4.27, 4.26 y 4.30 y haciendo uso de que las formas cuadráticas están clasificadas, daremos diagramas explícitos para todos los espacios simplécticos.

Si P tiene la propiedad de Desargues entonces un diagrama es tomar la gráfica completa en $|\Omega| - 1$ por teorema 4.35 inciso II.

Ahora, consideremos $P \cong P^* \times V$, P^* reducido. Daremos explícitamente diagramas para P^* y por teorema 4.34 también serán diagramas para $P^* \times V$. Supongamos que P es reducido y con la propiedad de Reye y $P \hookrightarrow U$ la representación universal. Por teorema 4.26 $P \cong \overline{O(q)}$.

4.36 Lema. Sea $rad(U) \leq U$ y $U = rad(U) \oplus U_0$ entonces $\dim(rad(U)) \leq 1$ y si $rad(U) = \mathbf{F}_2 u$ con $u \neq 0$ entonces $q(u) = 1$.

Demostración.

Demostraremos que no existe $0 \neq v \in rad(U)$ tal que $q(v) = 0$. Supongamos que si existe y llegaremos a una contradicción. Sea $0 \neq v \in rad(U)$ y tal que $q(v) = 0$. Sea $a \in P$ y $b = a + v$, entonces como $a = b - v$ se tiene que $b \notin rad(U)$, entonces

$$q(b) = q(a) + q(b) + \langle a, b \rangle = q(a) + 0 + 0 = 1$$

por lo que $b \in P$, de esta forma $\langle a, b \rangle = \langle a, a + v \rangle = 0 + 0 = 0$. Sin embargo para toda $c \in P$ se tiene $\langle a, c \rangle = \langle a + v, c \rangle = \langle b, c \rangle$ y esto contradice que P es reducido.

Por otro lado, $q : rad(U) \longrightarrow \mathbf{F}_2$ es lineal

$$q(u + v) = q(u) + q(v) + \langle u, v \rangle = q(u) + q(v)$$

y por lo anterior es inyectiva. □

4.37 Lema. I. Son isomorfos

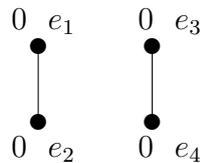


II. Son isomorfos

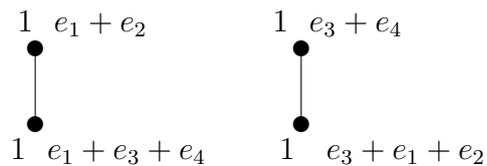


Demostración.

Para ambos incisos solo basta mandar la base original en otra base que cumpla con lo que queremos. Para el primer inciso si:

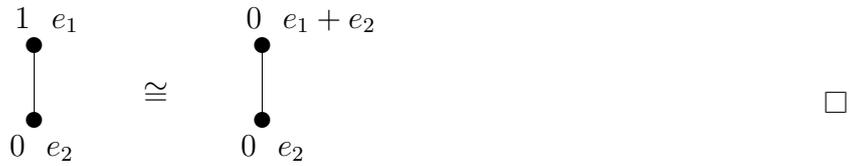


entonces escogemos la nueva base como sigue:



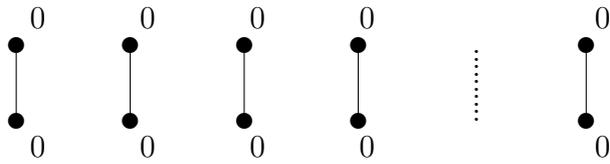
Se verifica que $e_1 + e_2$, $e_3 + e_4$, $e_1 + e_3 + e_4$, $e_3 + e_1 + e_2$ son linealmente independientes.

Para el segundo inciso, de forma similar al caso anterior tenemos lo siguiente:

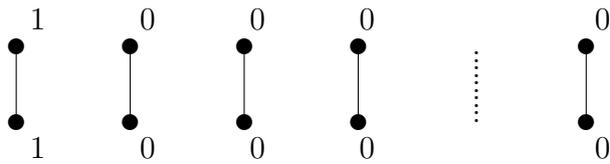


Por el lema 4.36, entonces tenemos dos casos:

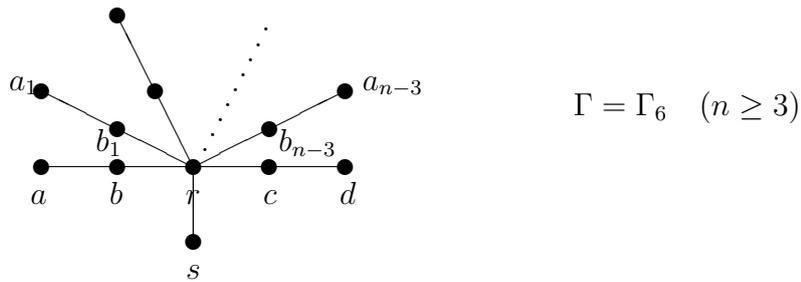
Si $rad(U) = 0$: Entonces U es no degenerada y por [?] existe base de U de la forma



o de la forma



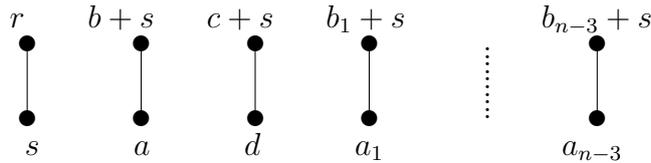
Para el primer caso la forma cuadrática es q^+ y para el segundo es q^- . En el primer caso, consideremos



Sea $\mathbf{F}_2\Gamma$. Sea $P = C(\Gamma)$ el espacio parcialmente lineal generado por Γ en $\mathbf{F}_2\Gamma$. Entonces, por teorema 4.5 $P \subset U$ es la representación universal. P es conexo, reducido (la forma cuadrática q definida por P en U es no degenerada) y de tipo simpléctico.

Además, Γ satisface los incisos 1 al 3 del teorema 4.27, por lo tanto Γ es diagrama para $C(\Gamma)$. Pero por teorema 4.26 tenemos que $C(\Gamma) = O(q)$.

Viendo la base hiperbólica Σ_6 de $\mathbf{F}_2\Gamma$:

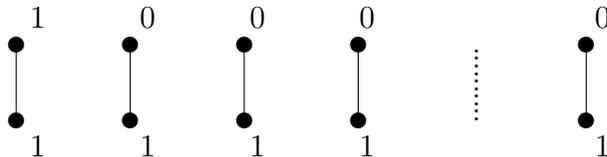


Efectivamente tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle s, r \rangle &= 1 & \langle a, b+s \rangle &= 1+0=1 \\ \langle d, c+s \rangle &= 1+0=1 & \langle a_1, b_1+s \rangle &= 1+0=1 \\ & \dots\dots & \langle a_{n-3}, b_{n-3}+s \rangle &= 1+0=1 \end{aligned}$$

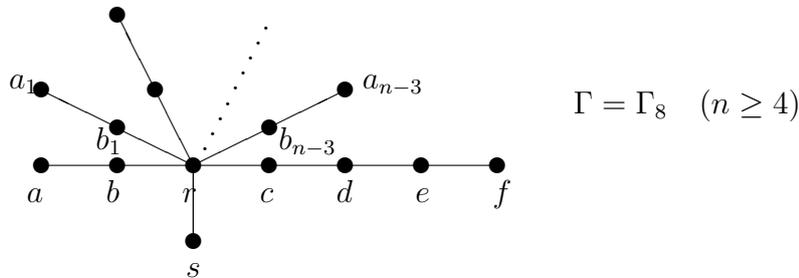
y también que $\langle s, a \rangle = \langle s, b+s \rangle = \dots = 0$, etc.

Ahora, como $q(s) = q(r) = q(a) = q(d) = q(a_1) = \dots = q(a_{n-3}) = q(b_1) = \dots = q(b_{n-3}) = 1$ y $q(b+s) = 1+1=0 = q(c+s) = q(b_1+s) = \dots = q(b_{n-3}+s)$. Para la base hiperbólica se tiene que:



Y por lema 4.37 uno concluye que $q = q^-$, por lo tanto Γ_6 es diagrama para $\overline{O^-(2n, 2)}$.

Para el segundo caso, consideremos

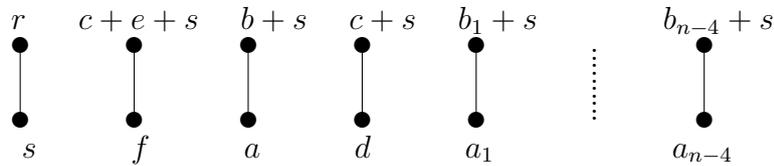


$$\Gamma = \Gamma_8 \quad (n \geq 4)$$

Al igual que en el caso anterior, sea $\mathbf{F}_2\Gamma$. Sea $P = C(\Gamma)$ el espacio parcialmente lineal generado por Γ en $\mathbf{F}_2\Gamma$. Entonces, por teorema 4.5 $P \subset U$ es la representación universal. P es conexo, reducido (la forma cuadrática q definida por P en U es no degenerada) y de tipo simpléctico.

Además, Γ satisface los incisos 1 al 3 del teorema 4.27, por lo tanto Γ es diagrama para $C(\Gamma)$. Pero por teorema 4.26 tenemos que $C(\Gamma) = O(q)$.

Viendo la base hiperbólica Σ_8 de $\mathbf{F}_2\Gamma$:

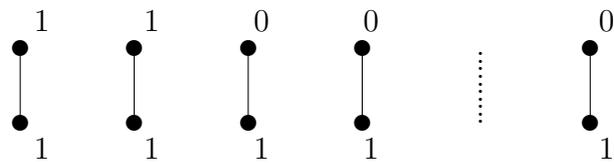


Efectivamente tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle s, r \rangle &= 1 & \langle f, c + e + s \rangle &= 1 + 0 = 1 \\ \langle a, b + s \rangle &= 1 + 0 = 1 & \langle d, c + s \rangle &= 1 + 0 = 1 \\ \langle a_1, b_1 + s \rangle &= 1 + 0 = 1 & \vdots & \\ & & \langle a_{n-4}, b_{n-4} + s \rangle &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

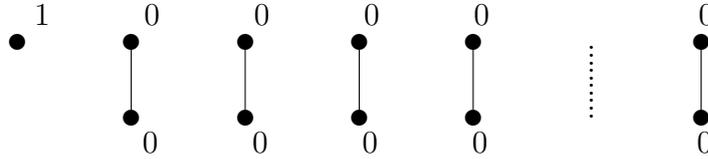
y también que $\langle s, f \rangle = \langle s, b + s \rangle = \dots = 0$, etc.

Ahora, como $q(s) = q(r) = q(f) = q(a) = q(d) = q(a_1) = \dots = q(a_{n-3}) = q(b_1) = \dots = q(b_{n-3}) = 1$, $q(b + s) = 1 + 1 = 0 = q(c + s) = q(b_1 + s) = \dots = q(b_{n-3} + s)$ y $q(c + e + s) = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1$. Para la base hiperbólica se tiene que:



Y por lema 4.37 uno concluye que $q = q^+$, por lo tanto Γ_8 es diagrama para $O^+(2n, 2)$.

Si $\underline{rad}(U) = \mathbf{F}_2u$: Entonces $q(u) = 1$ y por [?] existe base de la forma



Ahora, probemos que $\overline{O(q)} \cong \overline{Sp(2n, 2)}$. Sea $v \in \overline{Sp(2n, 2)}$ y sea $f : \overline{Sp(2n, 2)} \rightarrow \overline{O(q)}$ dada por

$$f(v) = \begin{cases} v & \text{si } q(v) = 1 \\ u + v & \text{si } q(v) = 0 \end{cases}$$

Probemos que se tiene una biyección. Sea $w \in \overline{O(q)}$, entonces $w \notin \text{rad}(U)$ y $q(w) = 1$. Definimos $g : \overline{O(q)} \rightarrow \overline{Sp(2n, 2)}$ como

$$g(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \in U_0 \\ v & \text{si } w = v + u, \text{ con } v \in U_0 \end{cases}$$

Nótese que para el caso en el que $g(w) = w$ tenemos que $q(w) = 1$ y para el caso en el que $g(w) = v$ tenemos que $q(v) = q(w + u) = 1 + 1 = 0$.

Entonces, comprobemos que una función es la inversa de la otra. Si $q(v) = 1$ entonces, $g(f(v)) = g(v) = v$ porque $v \in U_0$. Si $q(v) = 0$, entonces $g(f(v)) = g(u + v) = v$ porque $v \in U_0$. Si $w \in U_0$, entonces $f(g(w)) = f(w) = w$ porque por definición $q(w) = 1$. Si $w \notin U_0$, entonces $w = v + u$ y $f(g(w)) = f(g(v + u)) = f(v) = u + v = w$. Por lo tanto se tiene una biyección.

Ahora solo falta probar que tanto f como g mandan rectas en rectas. Sea $\{a, b, c\}$ recta en $\overline{O(q)}$. Demostremos que $\{g(a), g(b), g(c)\}$ es recta. Hay varios casos:

Si $a, b \in U_0$ entonces $c = (a+b) \in U_0$ y $\langle a, b \rangle = 1$ por lo tanto $\{g(a), g(b), g(c)\} = \{a, b, c\}$ que es recta.

Si $a \in U_0$ y $b \notin U_0$ es de la forma $b = b_1 + u$ con $b_1 \in U_0$. Entonces $c = (a + b_1) + u \notin U_0$ y de esta manera $g(a) = a$, $g(b) = b_1$ y $g(c) = a + b_1$ por lo tanto $\{g(a), g(b), g(c)\} = \{a, b_1, a + b_1\}$ que es recta.

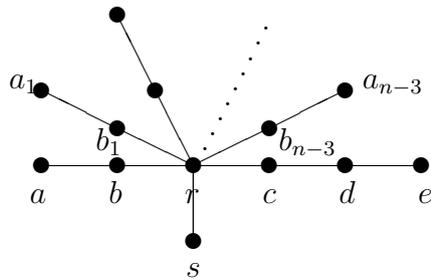
Si $a, b \notin U_0$, entonces $a = a_1 + u$, $b = b_1 + u$ con $a_1, b_1 \in U_0$ por lo que $g(a) = a_1$, $g(b) = b_1$ y $g(c) = a_1 + b_1 = c$ por lo tanto $\{g(a), g(b), g(c)\} = \{a_1, b_1, c\}$ que es recta. Los casos restantes son similares a los anteriores.

Ahora probemos que si $\{a, b, c\}$ es recta en $\overline{Sp(2n, 2)}$ entonces $\{f(a), f(b), f(c)\}$ también es recta. Tenemos varios casos: Si $q(a) = q(b) = 1$, entonces para $c = a + b$ tenemos que $q(c) = q(a + b) = q(a) + q(b) + \langle a, b \rangle = 1 + 1 + 1 = 1$ por lo que $f(a) = a$, $f(b) = b$ y $f(c) = c$ por lo tanto $\{f(a), f(b), f(c)\} = \{a, b, c\}$ que es recta.

Si $q(a) = q(b) = 0$ entonces para $c = a + b$ tenemos que $q(c) = q(a) + q(b) + \langle a, b \rangle = 0 + 0 + 1 = 1$ entonces nos queda que $f(a) = a + u$, $f(b) = b + u$ y $f(c) = c$ por lo tanto $\{f(a), f(b), f(c)\} = \{a + u, b + u, c = a + u + b + u\}$ que es recta.

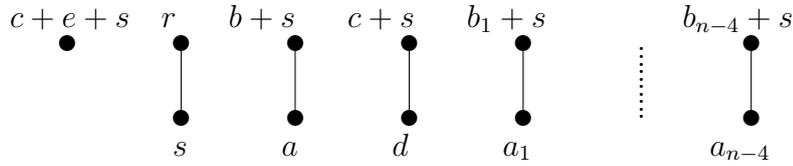
Si $q(a) = 1$ y $q(b) = 0$ entonces para $c = a + b$ tenemos que $q(c) = q(a) + q(b) + \langle a, b \rangle = 1 + 0 + 1 = 0$ entonces nos queda que $f(a) = a$, $f(b) = b + u$ y $f(c) = c + u$ por lo tanto $\{f(a), f(b), f(c)\} = \{a, b + u, c + u = a + b + u\}$ que es recta. Los casos restantes son similares.

Entonces, considere el diagrama



$$\Gamma = \Gamma_7 \quad (n \geq 3)$$

Y considere también la base Σ_7 del espacio vectorial $\mathbf{F}_2\Gamma$ de dimensión impar $2n + 1$:



Similarmente al caso anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \langle s, r \rangle &= 1 & \langle a, b + s \rangle &= 1 + 0 = 1 \\ \langle d, c + s \rangle &= 1 + 0 = 1 & \langle a_1, b_1 + s \rangle &= 1 + 0 = 1 \\ \dots\dots\dots & & \langle a_{n-4}, b_{n-4} + s \rangle &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

y también que $\langle s, a \rangle = \langle s, b + s \rangle = \dots = 0$, etc.

Además $q(s) = q(r) = q(a) = q(d) = q(a_1) = \dots = q(a_{n-3}) = q(b_1) = \dots = q(b_{n-3}) = 1$, $q(b + s) = 1 + 1 = 0 = q(c + s) = q(b_1 + s) = \dots = q(b_{n-3} + s)$ y $q(c + e + s) = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1$. Pero en este caso el radical es $(0, c + e + s)$ y como $q(c + e + s) = 1$ entonces q también es no degenerada. Como antes, Γ_7 es diagrama para $C(\Gamma_7) = O(q) = \overline{Sp(2n, 2)}$. \square

Por lo tanto, hemos sacado los diagramas explícitos para todos los espacios duales afines.

Bibliografía

- [As] Michael Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, 1988.
- [As2] Michael Aschbacher, *3-Transposition groups*, Cambridge University Press, 1997.
- [Hu] James E. Humphreys, *Reflection Groups And Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [Ru] Erica Ruiz, *Grupos de Coxeter*, Tesis, 2004.
- [Su] Michio Suzuki, *Group Theory I*, Springer-Verlag, 1982.
- [Ha] J.I. Hall, *Some 3-transposition groups with normal 2-subgroups*, London Math. Soc., 112-136, 1989.
- [Ca1] Humberto Cárdenas, Emilio Lluís, Alberto G. Raggi-Cárdenas, Rodolfo San Agustín, *Diagrams in categories of partial linear spaces of order two*, Instituto de Matemáticas UNAM, 2002.
- [Ca2] Humberto Cárdenas, Emilio Lluís, Alberto G. Raggi-Cárdenas, Rodolfo San Agustín, *Diagrams for symplectic type configurations*, Communications in Algebra, 1999.
- [Ca3] Humberto Cárdenas, Emilio Lluís, Alberto G. Raggi-Cárdenas, Rodolfo San Agustín, *Diagrams in the category of Fischer spaces*, Journal of Algebra, 1999.
- [Ca4] Humberto Cárdenas, Emilio Lluís, Alberto G. Raggi-Cárdenas, Rodolfo San Agustín, *Partial linear spaces with dual affine planes*, Communications in Algebra, 2002.

[Fi] B. Fischer, *Finite groups generated by 3-transpositions*, Invent. Math. 13 (1971).