UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Aprendizaje implícito del concepto de clases de equivalencia en frisos. Elementos involucrados y su interrelación.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

Con Especialidad en Estadística Matemática

P R E S E N T A:

GABRIELA LUGO GALINDO

DIRECTOR DE TESIS:

M. en A. P. MARÍA DEL PILAR ALONSO REYES

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Lugo
   Galindo
   Gabriela
   55946727
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   098508345

2. Datos del tutor
   M en A. P.
   María del Pilar
   Alonso
   Reyes

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Juan
   Fernández
   Ruiz

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejia

5. Datos del sinodal 3
   M. en C.
   José Antonio
   Flores
   Díaz

6. Datos del sinodal 4
   Act.
   Rubén
   Ugalde
   Franco

7. Datos del trabajo escrito
   Aprendizaje implícito del concepto de clases de equivalencia en frisos. Elementos involucrados y su interrelación.
   62 p
   2007

AGRADECIMIENTOS

Gracias a las facilidades otorgadas al laboratorio de Neuropsicología del Departamento de Fisiología de la Facultad de Medicina de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), bajo la dirección del Dr. Juan Fernández Ruiz.

A M. en A. P. María del Pilar Alonso Reyes por su infinita paciencia.

A Mat. José Benjamin Medina Vera por su gran apoyo.

Aprendizaje implícito del concepto de clases de equivalencia en frisos. Elementos involucrados y su interrelación.

Índice General

Capítulo 1

La memoria y el aprendizaje

1.1 La memoria y el aprendizaje ……1

1.1.1 El sistema nervioso. ……2

1.2 Aprendizaje y memoria implícita: Historia y estado actual……6

1.2.1 Memória explícita.....6

1.2.2 Memoria implícita.....6

1.2.3 Aprendizaje implícito. 7

1.2.4 Historia……7

1.2.5 Resultados encontrados en investigaciones hechas, comparando pacientes amnésicos y normales……..12

1.3 Naturaleza y características de las pruebas, que pueden significar un gran cambio……14

1.3.1 Tinte explícito e implícito de las instrucciones……...14

1.3.2 Pruebas con elementos que ya tienen representación en la memoria……..14

1.3.3 Duración de los efectos……14

1.3.4 Tácticas para evitar el desciframiento explícito……..14

1.3.5 La memoria implícita está muy ligada a las características superficiales del estímulo……...15

1.3.6 El desempeño en las pruebas de memoria implícita no son afectadas por variaciones en la profundidad del proceso de estudio……15

1.3.7 Independencia estocástica entre la habilidad entre evocación y reconocimiento de palabras.....16

1.3.8 El inconsciente y el aprendizaje……..16

1.4 Algunas teorías acerca de la memoria implícita……18

1.4.1 Algunos puntos en los cuales cada aproximación tiene dificultades y a la vez concuerda con otras investigaciones……18

1.5 ¿Memoria o aprendizaje?.....20

1.5.1 ¿Por qué se le denominó memoria implícita?.....20

1.5.2 Aprendizaje implícito y evolución…….....21

1.5.3 Implícito, ¿hasta qué punto? ……...21

1.5.4 ¿Por qué se le denominó aprendizaje implícito?.....22

1.5.5 Algunas de las características que son distinguibles entre el aprendizaje implícito y el explícito……22

Capítulo 2

Base matemática y estadística

2.1 Relación de Equivalencia…….……..24
2.2 Clase de equivalencia…….25
2.3 Clases laterales…….....25
2.4 Grupos……..……..25
2.5 Simetría……..26
2.6 Transformación……..27
2.7 Mapeo…….27
2.8 Isometría…….....…28
2.8.1 Translación……...28
2.8.2 Rotación……...30
2.8.3 Reflexión……..32
2.8.4 Deslizamiento……..34
2.9 Frisos……..34
2.10 Isometrías y Frisos…….39
2.11 Base Estadística…….39

Capítulo 3

Protocolo de la investigación

3.1 Objetivo……..44
3.2 Hipótesis…….44
3.3 Diseño de la prueba……45
3.4 Algunas consideraciones……46
3.5 Resultados …….47
3.5.1 Resultados de la prueba piloto……..47
3.5.2 Resultados de la prueba…….48
3.5.2.1 Análisis de los resultados de los sujetos que realizaron prueba con 20 reactivos……..50
3.5.2.2 Análisis de los resultados de los sujetos que realizaron prueba con 50 reactivos…..…51

3.5.2.3 Análisis de los resultados de los sujetos que realizaron prueba con 100 reactivos……52
3.5.2.4 Análisis de los resultados de los 20 primeros reactivos de los 3 grupos (20,50 y 100)..54
3.5.2.5 Análisis de los resultados de los 50 primeros reactivos de 2 grupos (50 y 100)……56
Conclusiones……...59
Glosario……..60
Bibliografía……...61

Introducción

En los últimos tiempos ha existido una revolución acerca de la manera en que se ha comprendido cómo es que la memoria se expresa. Diversos investigadores se han dado a la tarea de estudiar la memoria y el funcionamiento del cerebro; cada uno de ellos con un enfoque muy particular, lo cual ha enriquecido este estudio.

Una de las motivaciones que llevó a la investigación del aprendizaje implícito en los años sesentas es que las personas en algunas ocasiones resuelven problemas, toman decisiones o llegan a conclusiones no usando cierto tipo de estándares, conscientes, y procesos racionales que se asumen deben usarse.

Cuando a las personas se les ve resolviendo problemas complejos, no siempre se emplean las mejores formas para resolverlos, y más aún, a muchas de estas formas no se les encuentra una lógica bien establecida.

Día a día las personas trabajan con algoritmos que no les fueron enseñados y con algoritmos que han adquirido y/o modificado. No en todas las ocasiones se sabe cómo es que se está trabajando, sin embargo, se logran las metas o el propósito para el cual se está utilizando tal o cual algoritmo.

En otras ocasiones, las personas emplean justificaciones de su comportamiento, aunque en realidad hay una diferencia entre ello y lo que realmente están haciendo. ¿Qué es lo que pasa?, ¿qué es lo que hay detrás de este comportamiento?

De manera muy gruesa se puede describir a este aprendizaje (aprendizaje implícito) como la habilidad de aprender sin estar consciente de ello y no se puede expresar esta habilidad de manera consciente

En el **capítulo 1** se verán algunas de las investigaciones que se han hecho acerca del aprendizaje implícito, cómo es que ellas han influido en la construcción del concepto y funcionamiento general del sistema nervioso en cuanto a memoria y aprendizaje.

En el **capítulo 2** se verá la base matemática de la construcción de los frisos y las pruebas estadísticas que se emplearon para evaluar el experimento que se llevó a cabo.

En el **capítulo 3** se verá el experimento que se corrió y los resultados que se obtuvieron del mismo, así como las conclusiones a las que se llegó.

Capítulo 1

La memoria y el aprendizaje

1.1 La memoria y el aprendizaje

La memoria es la capacidad de recordar información que originalmente se iniciaron por la llegada de señales sensoriales[1].

El aprendizaje es el proceso de adquisición de conocimiento acerca del mundo[2].

El aprendizaje puede ser medido por medio de proveer al sujeto de experiencias repetidas y observando progresivamente el cambio en el desempeño.

La curva de aprendizaje se puede observar tanto en intentos como en tiempo.

Existen dos tipos de paradigmas de aprendizaje[3] :

- *No asociativo:* Donde el sujeto es expuesto una y otra vez al mismo estímulo y así se aprende acerca de las propiedades del estímulo.
- *Asociativo:* El organismo aprende acerca de la relación entre un estímulo y otro o acerca de la relación del estímulo con el comportamiento del organismo.

[1] Guyton, 1975, *Fisiología humana*
[2] Kandel, 2000, *Principles of neural sciences*
[3] Kandel, 2000, *Principles of neural sciences*

Algunos puntos que se han encontrado en respecto al a memoria son[4] :

- La memoria tiene etapas y está continuamente cambiando
- La memoria a largo plazo puede ser representada por cambios físicos o plásticos en el cerebro.
- Los cambios físicos de la memoria son localizados en múltiples regiones del sistema nervioso.
- Distintos tipos de memoria (que se verán en este capítulo, más adelante) involucran circuitos neuronales distintos.

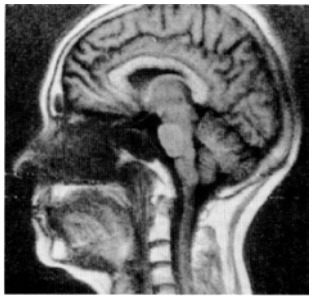
1.1.1 El sistema nervioso

En el punto anterior se trató acerca de la definición de la memoria y el aprendizaje. Primero debemos comprender cómo es que los cambios que ocurren a nuestro alrededor son captados por nosotros, es por ello que hablaremos un poco acerca del sistema nervioso, parte medular para la memoria y el aprendizaje.

La forma en que los que percibimos a través de nuestros sentidos es transmitido a nuestro cerebro es la siguiente. La médula espinal y los ganglios, que pertenecen a las raíces dorsales de los nervios espinales, son directamente responsables de recoger las aferencias del cuerpo, excluyendo una gran parte de la cabeza. Las fibras aferentes o sensoriales penetran a la médula espinal por medio de las raíces dorsales de los nervios espinales, mientras que las fibras eferentes o motoras salen por las raíces ventrales. Además de originar las respuestas reflejas espinales, la información que se origina en las terminaciones nerviosas sensoriales es transmitida al tronco encefálico o cerebral y al cerebelo, en donde se incorpora a varios circuitos, incluyendo aquellos donde se efectúan respuestas motoras. La información sensorial se transmite hacia el tálamo y de ahí a la corteza cerebral, en donde se convierte en parte de la experiencia consciente, con posibilidad de una reacción de conducta inmediata o tardía. Los impulsos originados en varios niveles del encéfalo desde la corteza cerebral hasta el bulbo, excitan o inhiben a las neuronas motoras de la médula espinal.

Probablemente la mayor parte de los procesos de la memoria ocurran en la corteza cerebral, en los complicados pliegues de la superficie de los hemisferios aumentan enormemente la superficie, y por tanto, el volumen de la corteza cerebral; cerca de dos terceras partes de la corteza cerebral penetran en los surcos[5]. Sin embargo, se sabe que prácticamente todas las zonas del sistema nervioso central pueden participar en el fenómeno de la memoria. De hecho, hay experiencias que demuestran que incluso la médula espinal puede llegar a adaptarse acorde a experiencias

El sistema nervioso se clasifica en sistema nervioso central (médula y encéfalo) y sistema nervioso periférico.



[4] Kandel, 2000, *Principles of neural sciences*
[5] Barr, Kiernan, 1994, El sistema nervioso humano. Un punto de vista anatómico

- *Médula espinal:* Conduce los estímulos en forma de impulsos nerviosos de la periferia al encéfalo por medio de los funículos posteriores; conduce los estímulos del encéfalo a la periferia por medio de los funículos anteriores. La médula es una vía para los reflejos, pueden ser simples o con participación de estructuras superiores del sistema nervioso central.

- *Médula oblongada* (bulbo raquídeo): Sirve de puente entre los órganos con los que se relaciona por medio de las fibras nerviosas.

- *Mesencéfalo:* Tiene como función la conexión entre distintos centros nerviosos y los colículos (tubérculos); están relacionados con los impulsos visuales y auditivos.

- *Tálamo:* Funciona como estación de relevo y de interpretación de los impulsos, es decir, cuando recibe los impulsos sensitivos los relaciona y los envía al cerebro, con excepción de los impulsos olfatorios. Por medio del tálamo hacemos conscientes las sensaciones dolorosas.

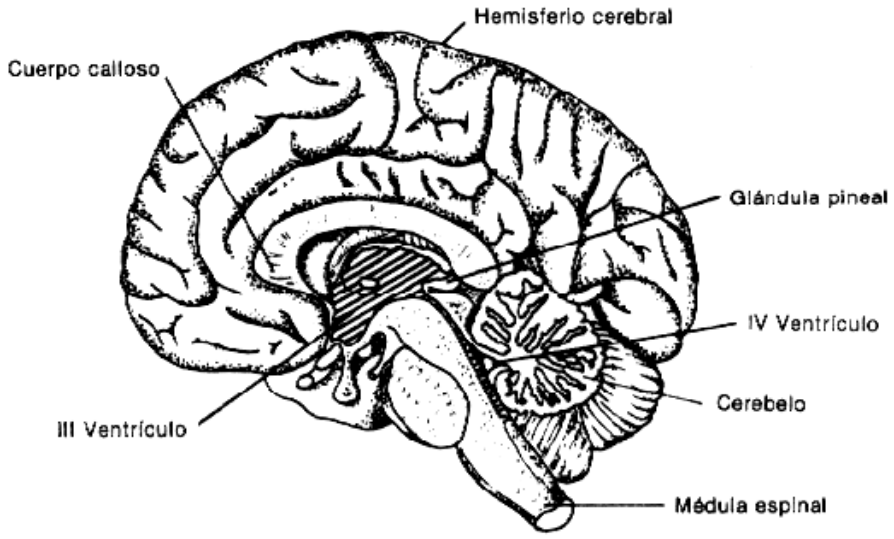
- *Hipotálamo:* Lleva a cabo funciones como la regulación del sistema nerviosos vegetativo y de las vísceras, estimula la glándula hipófisis para que libere las hormonas que regulan a otras glándulas o el metabolismo de los hidratos de carbono, proteínas, grasas, iones y órganos sexuales: controla la temperatura del cuerpo y regula el apetito, la sed, el sueño y el estado de alerta.

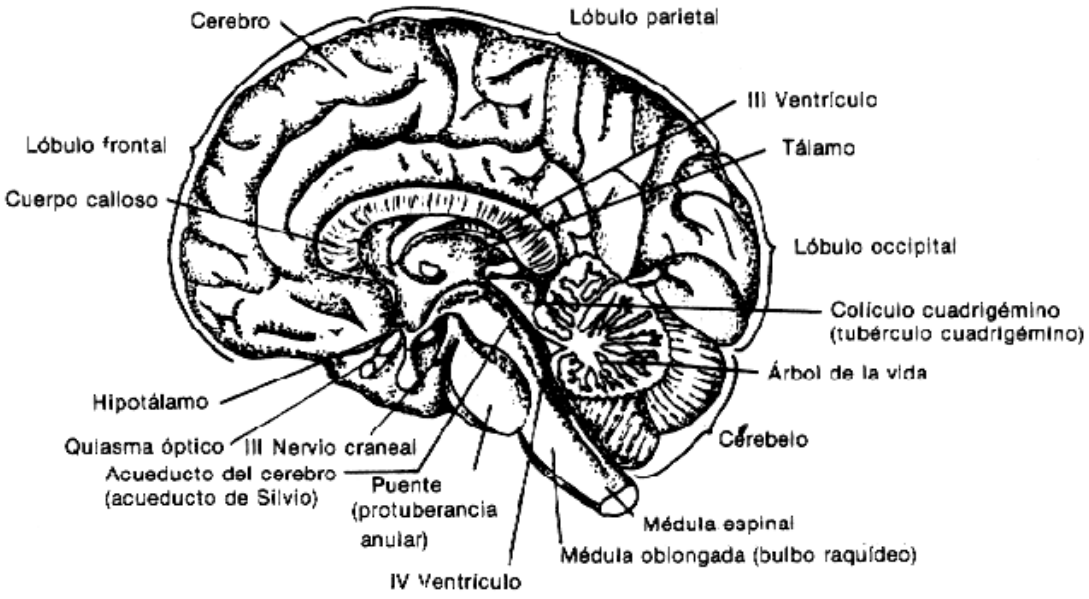
- *Cerebelo:* Tiene como funciones mantener el equilibrio, la postura, el tono muscular y ayuda a la coordinación de los movimientos finos.

- *Cerebro*
    - *Área motora:* Se encuentra en el lóbulo frontal, adelante del surco central (cisura de Rolando).
    - *Área sensitiva:* Atrás del surco central en el lóbulo parietal y nos permite reconocer el tamaño, la forma, peso y textura de los objetos, la posición de nuestro cuerpo e integrar los estímulos sensitivos.
    - *Área visual:* Lóbulo occipital
    - *Área auditiva:* Lóbulo temporal
    - *Área del olfato:* Lóbulo temporal
    - *Área del gusto:* En la profundidad del surco lateral (cisura de Silvio)
    - *Centro del lenguaje:* Surco central (cisura de Rolando) en el lóbulo frontal.

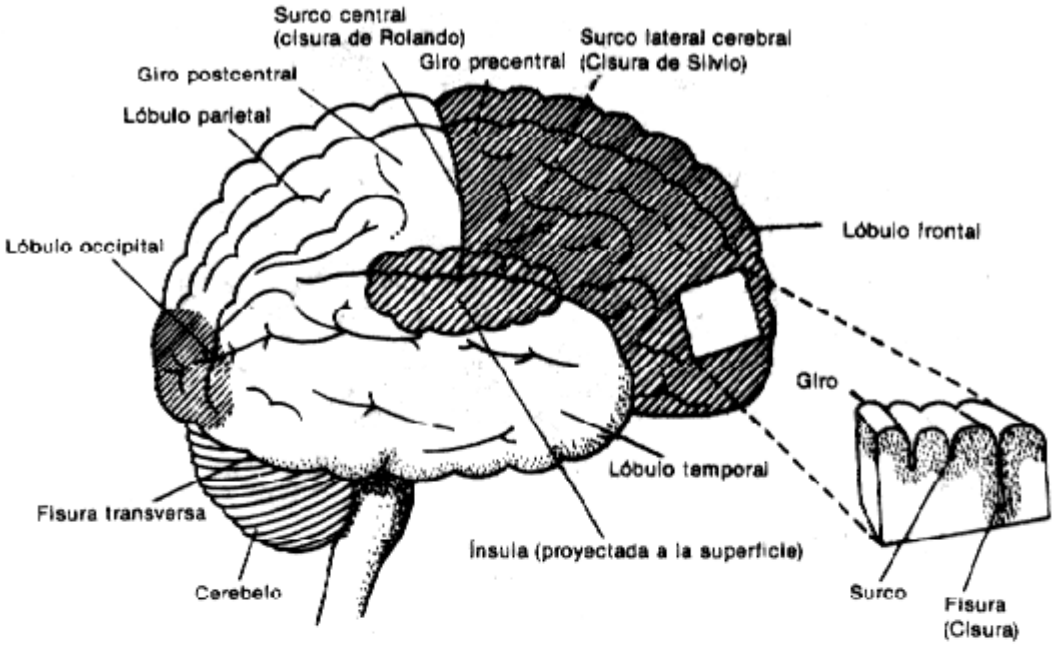
- *Meninges y líquido cerebroespinal:* Las meninges son membranas que cumplen la función de proteger el sistema nervioso central. El líquido cerebroespinal protege, ya que mantiene "flotando" al sistema nervioso y de esta manera evita los daños que se producirían en golpes o sacudidas.

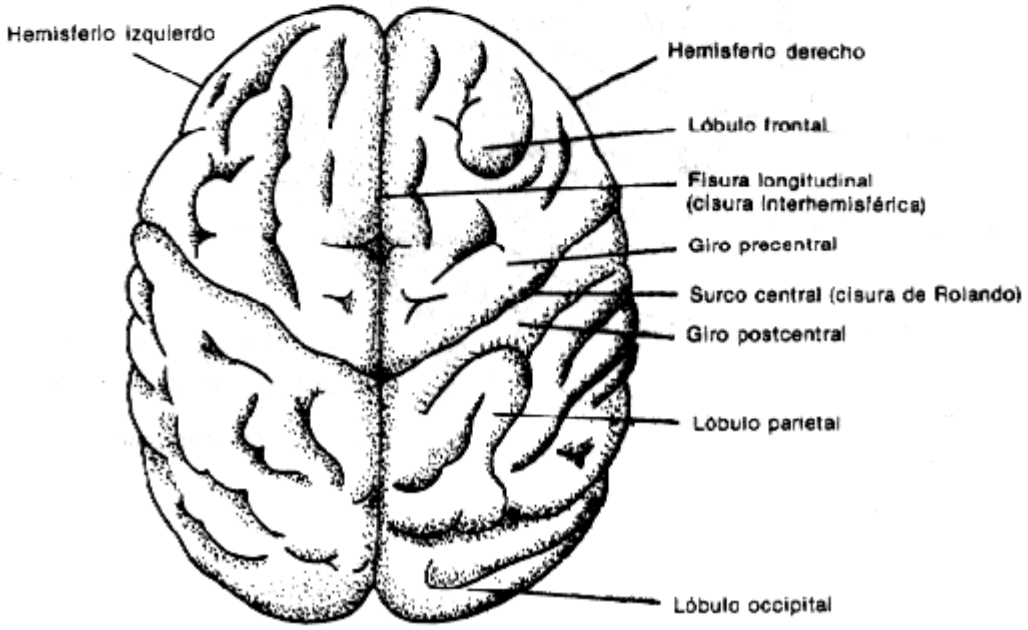
- *Sistema nervioso periférico:* se constituye de estructuras que ponen en contacto al sistema nervioso central con otras estructuras del cuerpo y con el medio ambiente. Puede dividirse en: sistema nervioso somático y sistema nervioso vegetativo. El sistema nervioso somático está formado por los nervios espinales (raquídeos) y los nervios craneales.





Corte sagital del encéfalo





Vista lateral derecha del cerebro y vista superior

- Papel del tálamo y otros centros cerebrales bajos en la interpretación de sensaciones.

  Cuando se han destruido porciones importantes de la corteza sensitiva, los animales son capaces de grados imprecisos de interpretación de la sensación. Se ha señalado, la localización aproximada y la interpretación de muchas sensaciones somestésicas[6] puede lograrse por el tálamo y otras zonas

[6] Somestésica: Área encargada de la apreciación de las diferencias de peso. discriminación espacial, localización táctil, apreciación de tamaño y forma, semejanzas o diferencias de temperatura y todos los aspectos de la sensación que requieren comparación y juicio.

relacionadas. En el caso de la visión, no se necesita corteza cerebral para interpretar la intensidad de la luz se necesita para interpretar las formas y los colores de los objetos. En el caso de la audición, un animal puede saber la dirección de dónde proviene el sonido sin tener corteza cerebral, aunque, en general, no puede interpretar el sentido más fino del sonido.

Por tanto, cuando se afirma que un tipo particular de sensación es interpretado en una región determinada de la corteza cerebral, ello significa simplemente que a esta parte de la corteza le corresponden las sutilezas del sentido más que la interpretación total. De hecho, sería totalmente imposible que la corteza cerebral operara sin que previamente se elaborara la información en las regiones más bajas del encéfalo.

1.2 Aprendizaje y memoria implícita: Historia y estado actual

A continuación se verá un poco de historia respecto a los experimentos y razonamientos realizados respecto al aprendizaje y la memoria implícita, así como ideas relacionadas e ellas.

En la presente tesis se realizó un análisis de los términos relacionados con aprendizaje implícito y aquellos razonamientos que llevaron a la construcción de estos conceptos.

La memoria es revelada por la facilitación o cambio en un desempeño que es atribuible a una información adquirida en episodios pasados. [7]

1.2.1 Memoria explícita

Se refiere a la recolección consciente de información en experiencias previas, las cuales se expresan por pruebas en las cuales se le muestran al sujeto una serie de palabras, figuras o algunos otros elementos que deberán ser recordados. Posteriormente se le aplicará la prueba que consistirá en recordar o reconocer elementos [8]

La memoria explícita puede definirse como aquella memoria accesible al recuerdo intencional e incluye hechos, listas de informaciones, fórmulas, relaciones, etc. Se la denomina declarativa porque la información que almacena puede recuperarse explícitamente de forma verbal (por proposiciones) o no verbal (por imágenes).

1.2.2 Memoria implícita

Esta memoria es revelada cuando experiencias pasadas facilitan la ejecución en una tarea que no requiere recolección consiente o intencional de experiencias[9]. Schacter la define como la facilitación en el cambio de desempeño que es atribuible a la información o habilidades adquiridas en un episodio anterior[10], aunque los sujetos no sean capaces de recordarlo. Otros nombres que se le dan al concepto

[7] Schacter, 1987, On the relation between memory and consciousness Dissociable interactions and conscious experience.
[8] Graf y Schacter, 1985, Implicit and explicit memory of new associations in normal and amnesic subjects
[9] Graf y Schacter, 1985, Implicit and explicit memory of new associations in normal and amnesic subjects
[10] Schacter, 1993, Implicit memory: A Selective Review

de memoria implícita son memoria sin conciencia (memory without awareness) y memoria no declarativa.

Por otra parte, Reber la define como residuos de experiencia pasada que puede ser medida mediante pruebas indirectas, en donde el sujeto no tiene la idea de esa experiencia pasada.

Tulving divide a la memoria en dos:

- *Memoria declarativa:* Que implica la recordación de experiencias personales y actos explícitos.
- *Memoria reflexiva:* Que implica las reglas y procedimientos que reflejan hábitos y disposiciones.

1.2.3 Aprendizaje implícito

De manera muy general se puede describir a este aprendizaje como la habilidad de aprender sin estar consciente de ello y no se puede expresar esta habilidad de manera consciente.

Se debe hacer una aclaración respecto al término "sin estar consciente de ello", a lo que se refiere es a que se está estudiando la percepción subliminal que causa el estímulo en el individuo. El estímulo puede ser presentado en un punto visual en el que el sujeto no está poniendo atención o presentado de manera muy breve; este cambio en la presentación del estímulo pude hacer que se cambie la forma en que se procese el estímulo.

1.2.4 Historia

La primera referencia clara que se tiene respecto a la **memoria implícita** es de Descartes en su libro "Las pasiones del alma", en el año 1649 en el cual se expone que ciertas experiencias aversivas en la infancia quedarán fijadas en el cerebro sin ningún resto de ellas posteriormente.

En 1704 Gottfried Wilhelm Leibniz desarrolla una doctrina que hace referencia a la **memoria implícita** en la cual enfatiza la importancia de las percepciones "desapercibidas" (insensible) o "inconscientes", ideas de las cuales no estamos conscientes y que sin embargo influyen en nuestro comportamiento.

El primer filósofo después de Leibniz que discute sistemáticamente el fenómeno de la memoria implícita fue el filósofo francés conocido por su apellido Maine de Biran, que en 1804, en su tratado titulado "La influencia de los hábitos en la facultad de pensar" analiza el papel de los hábitos en el pensamiento y desempeño humanos, él sostiene que después de un número suficiente de repeticiones, **un hábito** puede ser ejecutado automáticamente e inconscientemente sin apreciación en el acto mismo o de los episodios previos en los cuales el hábito fue aprendido. La repetición también proporcionaba al individuo prontitud en la ejecución y facilitación. Junto con las ideas anteriores, Maine de Biran tenía en su sistema la división de la memoria en tres tipos: *Mecánica, sensitiva y representativa,* lo cual representa la primera articulación clara de lo que nosotros llamaríamos un sistema múltiple de memoria interpretando las diferencias entre memoria implícita y explícita.

El único filósofo que en el siglo XIX discutió sistemáticamente las expresiones de la memoria implícita fue Johann Friedrich Herbart, quien en 1816 introduce la noción de "ideas suprimidas", las cuales son

incapaces de sobrepasar umbral de la percepción consciente, sin embargo pueden influir el pensamiento consciente.

En el siglo XIX hubo varios pensadores que se preocuparon acerca de los procesos inconscientes en la mente. Un psicólogo con una gran cantidad de material al respecto fue William Carpenter quien nombraba el término cerebración inconsciente para referirse a la actividad mental que ocurría sin percepción. Él se apoyaba en observaciones en las que experiencias recientes podían ser expresadas sin consciencia de estas mismas.

En 1870 Ewald Hering introduce la idea de la memoria orgánica o inconsciente. Critica a escritores anteriores y sus análisis acerca de la memoria consciente o explícita: "La palabra "memoria" es usualmente entendida como pensamiento lo cual no significa algo más que nuestra facultad de reproducir intencionalmente ideas o una serie de ideas". Recalca la idea de tomar en cuenta la memoria inconsciente. Sus ideas tienen mucho en común con las de Maine de Biran.

Al final del siglo XIX diversos estudios de la memoria implícita emergen de distintas áreas: investigación psicológica, neurología, psiquiatría, filosofía y psicología experimental.

- *Investigación psicológica*.

Algunas pruebas que se usaron para documentar el fenómeno de la memoria implícita fueron mirada en la bola de cristal y la escritura automática. En ellas el sujeto no hace referencia explícita a eventos en el pasado, ellos reportaban lo que veían en el cristal o escribían lo que venía a su mente.
En estudios de escritura automática, muchos investigadores describen los conocimientos adquiridos en el pasado que emergen sin que los sujetos se den cuenta de que los poseen y parecen estar fuera de sus personalidades conscientes.

- *Neurología.*

En 1845, el psiquiatra Robert Dunn describió el caso de una mujer que después de casi ahogarse y un largo periodo de inconsciencia se convirtió en amnésica. En ese estado, la mujer aprendió a confeccionar vestidos, aunque aparentemente ella no recordaba cómo se hacían; cada día comenzaba el trabajo en donde se había quedado. Dunn no discutió las implicaciones teóricas de sus observaciones.

Quizá el primer investigador en documentar el fenómeno de la memoria implícita en casos neurológicos y delinear sus implicaciones teóricas fuera Sergei Korsakoff en 1889. Al describir el síndrome amnésico que ahora lleva su nombre él describe que el paciente no está consciente de que preserva huellas de impresiones que recibió, estos trazos existen y tienen una influencia en un sentido y otro en el curso de las ideas, al menos en una actividad intelectual inconsciente.

Korsakoff argumentaba que los pacientes amnésicos retenían una memoria débil que podía afectar su desempeño de manera inconsciente, pero no de manera lo suficientemente fuerte como para introducirse en la memoria consciente.

Veinte años después Claparède (1911/1951) reportó observaciones que fueron similares a las de Korsakoff, él las interpretó en términos de una desconexión entre el ego y la huella de la memoria. Al mismo tiempo, Schneider (1912) reporta experimentos en los cuales él

demuestra que los pacientes amnésicos requieren progresivamente menos información a través de las pruebas para identificar figuras fragmentadas, a pesar de que los pacientes no recordaran de manera consciente haber visto las imágenes antes.

- *Psiquiatría.*

Muchas observaciones relacionadas con memoria implícita fueron reportadas a fines de los años de 1880 y principios de los 1990 por Pierre Janet y por Sigmund Freud, parcialmente con colaboración de Joseph Breuer. Los fenómenos más críticos fueron observados en pacientes que sufrían amnesia histérica como resultado de un trauma emocional. Estos pacientes no podían recordar sus eventos traumáticos, sin embargo sus memorias eran expresadas indirectamente de distintas maneras. Janet concluyó que la histeria era atribuible a un proceso patológico de disociación que interfería en la habilidad para sintetizar memorias en el consciente personal. Freud llegó a conclusiones parecidas a las de Janet.

El psiquiatra americano Morton Price definió en su libro "El inconsciente", en 1914, la importancia de la memoria implícita demostrando que las experiencias que no son disponibles por el consciente o por recolección voluntaria influyen en la percepción y el desempeño de la vida diaria.

- *Filosofía*

El filósofo en contribuir mayoritariamente al análisis del **aprendizaje implícito** fue Henri Bergson. En su libro "En materia y memoria", de 1911, él argumenta que "el pasado sobrevive bajo dos distintas formas: primero, en los mecanismos motores y segundo, en las recolecciones independientes". El aprendizaje motor se refiere a los hábitos y habilidades que no hacen referencia a eventos pasados, la segunda forma se refiere a la recolección de eventos pasados.

- *Psicología experimental*

La psicología experimental no prestó mucha atención al fenómeno de la memoria implícita a finales del siglo XIX y principios del XX, con algunas excepciones como Ebbinghaus quien en 1885 sostenía que no todos los efectos de la memoria eran expresados en la percepción consciente. Las pruebas que Ebbinghaus practicaba era el darle una serie de ítems al sujeto para que los memorizara; después de un periodo de 24 horas, el sujeto no recordaba conscientemente lo que había estudiado. Al sujeto se le hacía reaprender nuevamente las listas estudiadas. Éste método fue usado para estudiar transferencia y analizar aprendizaje.

En Outline of Psychology, en 1924, William McDougall llegó a ser el primer investigador en usar el término implícito y explícito con referencia a las diferentes formas en que la memoria puede ser expresada. La distinción que él hace entre una y otra es que la manera explícita envuelve la recolección consciente de eventos pasados y **la implícita, cambios en el comportamiento que son atribuibles a eventos recientes que no se pueden recolectar de manera consciente.**

Dos filósofos sociales que también se cuestionaron acerca da los hechos alrededor del aprendizaje implícito están Michael Polanyi, quien argumentó que la importancia del conocimiento tácito, conocimiento cuyo origen y contenido epistémico no eran simplemente parte de la conciencia ordinaria (Polanyi, 1958) y Friedrich von Hayek (1962), quien mostró una especulación respecto a la necesidad de

reglas profundas o otras representaciones mentales ricas para sostener un cierto tipo de "supraconsciente" que no es disponible a la inspección ordinaria consciente.

Para mediados de los años setenta se fueron caracterizando las situaciones en donde mediante una inducción neutral donde se adquiriera información compleja del ambiente, independientemente de la atención del sujeto.

Un problema al que se ha enfrentado el estudio de la memoria y el aprendizaje implícito es que algunos de los estudios que se han hecho están basados en observaciones empíricas, algunas anecdóticas, las cuales fueron hechas sin controlar las condiciones clínicas o con una gran falta de rigor metodológico.

Gracias a varios experimentos se ha logrado ver que los sistemas con los que trabaja la memoria implícita son distintos a los de la memoria explícita. Durante mucho tiempo se creyó que el fenómeno de la **memoria implícita** era producido por huellas de la memoria que eran débiles como para acceder el umbral necesario para la memoria explícita.

Algunos de los estudios que se han hecho acerca de la memoria implícita de los años cincuenta a la fecha son en 5 áreas: ahorro durante el aprendizaje (saving during relearning), efectos de los estímulos codificados subliminalmente, aprendizaje y condicionamiento sin percepción, repetition priming, y aprendizaje preservado en pacientes amnésicos.

- *Ahorro durante el aprendizaj*e:
  En estos experimentos, el sujeto realice una acción que perfecciona después de varias ejecuciones, posteriormente (no inmediatamente) se le pida el sujeto que vuelva a realizar la acción y se observa que el sujeto llega al nivel de perfeccionamiento anterior, pero con menos intentos, esto se realiza sin que el sujeto sepa exactamente cómo es que llegó a éste perfeccionamiento.

- *Efectos de los estímulos codificados subliminalmente:*
  Existe una gran controversia acerca de esta rama del aprendizaje implícito, sin embargo existen experimentos que proporcionan evidencia acerca de que estímulos que no son percibidos de manera consciente, y por consecuencia no pueden ser explícitamente recordados, influyen en el desempeño en pruebas que no requieren recolección consciente del estímulo subliminal. Tal es el caso de la prueba de historia imaginada y producciones fantásticas.

  Dentro de esta misma rama están los experimentos en los cuales se le muestran al sujeto figuras de manera muy rápida, esto con el fin de que no haya una percepción consciente. Posteriormente se le realiza una prueba al sujeto donde tiene que elegir entre figuras "nuevas" y figuras que ya le fueron mostradas, se ha encontrado que el sujeto prefiere las anteriormente mostradas.

  En el campo auditivo, un estudio hecho por Eich [11], en el cual usó una prueba de atención dividida en donde se empleaban palabras homófonas en un canal no atendido junto con palabras intencionadas para sesgar a la interpretación de la palabra homófona de baja frecuencia. Los sujetos posteriormente mostraron memoria explícita a los homófonos en un test de reconocimiento sí/no. Empero, cuando se les pedía que deletrearan las palabras, los sujetos daban el deletreo de las palabras de baja frecuencia más frecuentemente que en condiciones basales. De ese modo demostrando memoria implícita de información no atendida.

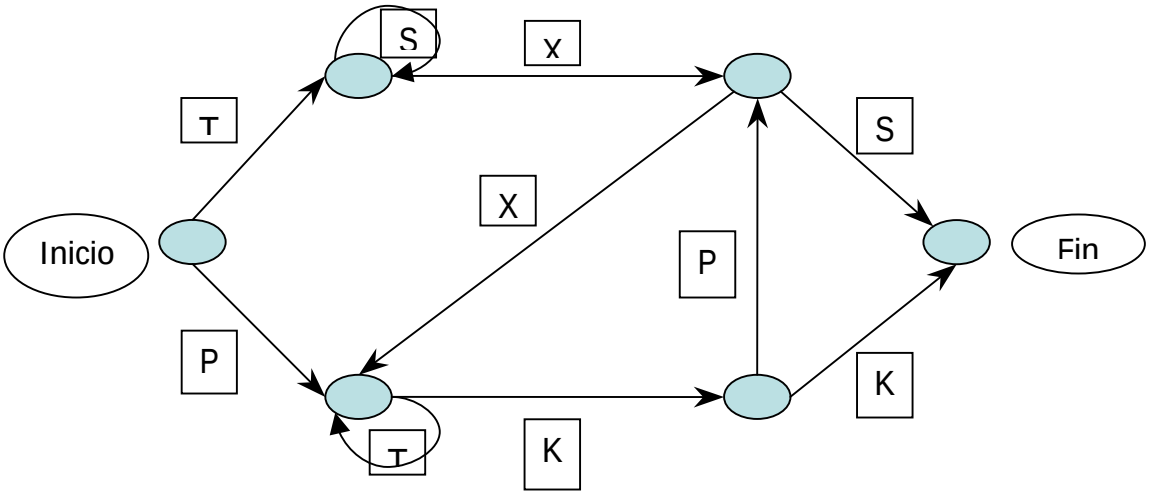
[11] Eich, 1984, Memory for unattended events: Remembering with or without awarness

- *Aprendizaje y condicionamiento sin percepción:*
  En estudios de aprendizaje sin percepción, los sujetos aprenden reglas o eventualidades sin percepción de aprendizaje y de hecho sin memoria explícita de ellos.

  Muchos investigadores reportan que los sujetos que no fueron concientes del la respuesta de reforzamiento dada por la respuesta de reforzamiento con el incremento de acertividad a través de las pruebas, pero por otra parte se tiene el problema de la escasez de métodos apropiados para determinar el nivel de conciencia de los sujetos ante estos reforzamientos.

  Experimentos como los de Reber y sus colegas, aportan evidencia del aprendizaje sin consciencia, de reglas; ellos llaman a esto aprendizaje implícito. Los experimentos que ellos han realizado son con base en gramáticas artificiales, en donde miden qué tanto el sujeto puede llegar a aplicar la gramática artificial, sin estar consciente de la misma.

  Un ejemplo de gramática artificial es la siguiente:



  Donde se consideran palabras válidas aquellas que se forman por los caminos que señala el diagrama, ejemplos de palabras válidas son: tsxs y ptkpx; un ejemplo de palabra no válida es xxk, ya que aunque parcialmente sigue un camino del diagrama, no comienza ni con t ni con p.

  La prueba consiste en mostrarle al sujeto palabras formadas por la gramática y posteriormente mostrarle otras palabras y solicitarle que las califique como correctas e incorrectas, tomando en cuenta las que ya observó.

- *Repetition priming effects*
  Se designa con el término **priming al efecto facilitador del tratamiento de un estímulo como consecuencia del resultado de su representación previa**. Este, según Schacter se encuentra dentro del fenómeno de memoria implícita, y la definición que da a priming directo es la del fenómeno en el cual la exposición a una palabra u objeto en una lista, facilita su subsecuente identificación cuando pistas degradadas son proporcionadas. Este fenómeno ha sido observado en una variedad de pruebas en las que no se hace explícita referencia a anteriores episodios. Los más comunes son las pruebas de decisión léxica, identificación de palabras y complementación de palabras con base en fragmentos de las mismas.

- *Prueba de decisión léxica:* Se le pregunta al sujeto si es legal o ilegal una cierta palabra, esto se apoya en una construcción de modelo, que determina qué palabras son legales o no, con base en que las palabras que se puedan construir con base en el modelo, son las que son legales y las demás ilegales.
- *Identificación de palabras o identificación perceptual:* Se le muestra un estímulo al sujeto por poco tiempo, y después se le pide que lo identifique, se ha encontrado que es más fácil identificar aquellos que se mostraron con anterioridad.
- *Prueba de completación de palabras:* Se da una parte de la palabra al sujeto y se le pide que la termine, la tendencia es a completarlo con palabras expuestas en una lista previamente estudiada.
- *Lectura de un texto transformado.*
- *Libre asociación.*

Estos estudios se emplean, en su gran mayoría, para entender el acceso léxico y representación.

Varios investigadores que han estado estudiando para distinguir entre las diversas modalidades y los componentes específicos que rigen la organización léxica mediante el examen de los efectos en las modalidades auditiva y visual, encontrando que el priming es casi nulo en identificación y desempeño, posteriormente a una presentación auditiva.

Algunos estudios han comparado repetition priming en palabras reales y en no-palabras (palabras creadas mediante gramáticas artificiales), y encontrado no priming o muy bajo priming en no palabras que en palabras reales; sin embargo un priming robusto se ha presentado en algunas pruebas bajo condiciones experimentales.

Existen estudios han mostrado que el priming en identificación de palabras ocurre para palabras similares morfológicamente pero no para palabras visualmente similares ni para palabras fonéticamente similares.

Investigaciones en pacientes amnésicos han visto que los pacientes muestran excelente retención cuando se les pide completar raíces de palabras de tres letras, de palabras presentadas recientemente, a pesar de su inhabilidad de recordar la aparición de palabras, en las pruebas de reconocimiento sí/no.

1.2.5 Resultados encontrados en investigaciones hechas, comparando pacientes amnésicos y normales

Gracias a las investigaciones hechas en pacientes amnésicos y normales se ha visto diferencias y semejanzas en los resultados de las pruebas referentes a memoria implícita y explícita. Se ha visto, de esta manera diferencias entre revocación implícita y reconocimiento. Estas maneras son:

- Algunos estudios han mostrado que el procesamiento y tipo de estudio afecta el priming y el recordar; por ejemplo: En un estudio realizado por Graf y Mandler [12] se encontró disociación en la forma de manipulación de la información, en un estudio donde las preguntas eran las mismas,

[12] Graf, Mandler, 1982, Simulationg amnesic symptoms in normal subjects

y sólo las instrucciones cambiaban. A los sujetos se les decía que usaran las ramas (stems) para tratar de recordar una lista de palabras estudiadas, muchos items eran recordados usando procesos de estudio elaborado que pno usando procesos de estudio no elaborado. Sin embargo, cuando a los sujetos se les daba la instrucción de escribir la primera palabra que les viniera a la mente, en respuesta del test de ramas, no hubo diferencias en este tipo de estudio.

- Existe diferencia entre memoria explícita e implícita dependiendo el tipo de estímulo que se esté empleando. Por ejemplo, Jacoby y Dallas [13] encontraron que cambiando la modalidad de la presentación de auditivo a visual, se veía atenuado el priming en identificación (identification) de palabras, pero tenía poco o ningún efecto en reconocimiento.

  Existen estudios han mostrado que en la **modalidad visual**, los efectos del priming en decisiones léxicas, complementación y pruebas de lectura son sensiblemente más altas que en pruebas donde se cambia la superficie de información.

  Larry Jacoby and Mark Dallas [14] encontraron resultados similares en priming después de una amplia codificación o estudio (concentrándose en el significado y en las asociaciones) y de codificación superficial (concentrándose en las letras de la palabra). Un resultado interesante es que resultados mejores en un codificación profundo implica mejores resultados en memoria implícita que un codificación superficial.

  Sin embargo el efecto del priming puede ser fácilmente eliminado. Si las personas oyen palabras durante el estudio de la prueba pero no ven una versión impresa de la misma, un pequeño o nulo priming es observado en la prueba visual. Estudios muestran que el priming es también reducido cuando las personas ven las palabras durante la fase del estudio y posteriormente se les aplica una prueba auditiva en la cual ellos tratan de identificar las palabras que están enmascaradas por ruido.

- Existe evidencia que dice que la retención entre memoria implícita y explícita es distinta. En pruebas de identificación de palabras, el priming persiste por días o semanas, así mismo en memoria de reconocimiento (recognition memory) decae con la misma tardanza. Para el caso de pruebas donde se completan palabras de palabras y decisión léxica, se ha probado que el fenómeno decae en minutos y horas por encima de cuando se recuerda de manera explícita.

- Estudios recientes indican que manipulaciones de interferencia retroactiva y preactiva que significativamente dañan reconocimiento y recuerdo explícito no influencian efectos fundamentales en pruebas donde se pide que se completen palabras.

- Diferencia estadística acerca de la independencia entre priming y recuerdo (remembering), mediante los test de reconocimiento y completación de palabras (word-stem completition), deletreo de palabras homófonas (homophone spelling) y lectura invertida de espejo. En estos experimentos, el éxito en la memoria explícita estaba no correlacionado con los test de memoria implícita.

[13] Jacoby, Dallas, 1981, On the relationship between autobiographical memory and perceptual learning
[14] Jacoby, Dallas, 1981, On the relationship between autobiographical memory and perceptual learning

1.3 Naturaleza y características de las pruebas, que pueden significar un gran cambio

1.3.1 Tinte explícito e implícito de las instrucciones

Los estudios han revelado que existen diferencias entre los pacientes amnésicos con respecto a sus controles en pruebas cuando la prueba tiene instrucciones explícitas, pero, cuando ésta se realiza con tiente implícito el desempeño de ambos grupos no difiere significativamente.

1.3.2 Pruebas con elementos que ya tienen representación en la memoria

Un punto que se ha discutido acerca de los experimentos hechos con anterioridad es que el material que se ha usado para las pruebas consiste en pruebas, cuyos items están integrados por palabras con representaciones en la memoria, como palabras comunes, modismos o pares altamente asociados. En últimas fechas varios investigadores se han preguntado cuando los pacientes amnésicos muestran priming y memoria implícita normal para información nueva que no tenía una representación preexistente como las no palabras o pares no asociados. Los resultados no han sido muy uniformes.

1.3.3 Duración de los efectos

La duración que se ha mostrado en el efecto del priming ha sido dispar según varios estudios hechos en pacientes amnésicos, la razón puede ser la forma en que la memoria implícita es evaluada y la naturaleza de la información.

Varios estudios han hallado una memoria implícita sustanciosa cuando el reconocimiento explícito está a niveles de suerte y el del recuerdo explícito es muy bajo, en relación con esto se sugiere que de manera implícita se expresa información inaccesible de manera explícita.

La durabilidad del periodo de retención en la memoria implícita es menos afectada que el de la memoria explícita, para algunos casos. Jacoby y Dallas [15] y Tulving at al (1982), usando identificación perceptual y prueba donde se completan palabras, se dieron cuenta que los efectos del priming persistían con poco cambio a través de los días y los meses, mientras que la memoria de reconocimiento disminuía a través del mismo tiempo. Sin embargo, ésta interpretación ha sido cuestionada por Richardson-Klavehn y Bjork (1988); ellos enfatizan que la escala en la cual se están midiendo las pruebas implícitas y explícitas no son fácilmente comparables, dada la variabilidad que se puede presentar.

1.3.4 Tácticas para evitar el desciframiento explícito

En algunos casos las pruebas implícitas pueden ser descifradas de manera explícita. Se ha visto que con práctica extensa en algún aprendizaje implícito los sujetos desarrollan algún conocimiento explícito[16].

[15] Jacoby, Dallas, 1981, On the relationship between autobiographical memory and perceptual learning
[16] Jackson & Jackson,1995, Do Measures of Explicit Learning Actually Mesure What is Being Learnt in the Serial Reaction Time Task? A Critique of Current Methods

Algunas de las tácticas empleadas para evitar esto es, disfrazando el hecho de que artículos previamente presentados aparecen en una prueba mostrando una tarea de memoria implícita como una tarea de relleno múltiple durante un intervalo de retención y probando solamente una pequeña proporción de artículos previamente estudiados. Resultados encontrados en estos estudios sugieren que los sujetos no usan deliberadamente estrategias de memoria explícita en estudios de memoria implícita y que también es posible prevenir que la memoria explícita influencie la prueba de memoria implícita.

Existe la posibilidad de confundir memoria implícita con memoria explícita involuntaria, la cual aparece mayormente en experimentos con sujetos normales, en los cuales se permite una codificación del material.

Algunas veces, el estímulo puede influir en la prueba en el momento en que se aplica, ya sea el caso de la prueba de completar palabras, pero no siempre es tan inmediato, ya sea el caso de la impresión que se manifiesta de una persona, después de haber estado expuesto a palabras hostiles.

1.3.5 La memoria implícita está muy ligada a las características superficiales del estímulo.

El desempeño se reduce cuando se cambia la modalidad entre aprendizaje y prueba; esto es que si, por ejemplo, el aprendizaje se realizó de manera visual, y la prueba se realiza de manera auditiva, se nota una disociación del aprendizaje[17].

1.3.6 El desempeño en las pruebas de memoria implícita no son afectadas por variaciones en la profundidad del proceso de estudio

Jacoby y Dallas [18], midieron el desempeño de memoria implícita y explícita siguiendo un estudio que requería un proceso elaborativo (ejemplo: Contestar preguntas acerca del significado de las palabras) o un proceso no elaborativo (ejemplo: Decidir si una palabra contenía o no una particular letra). Ellos encontraron que en el desempeño de reconocimiento sí/no fue más alto siguiendo un proceso elaborativo que uno no elaborativo; sin embargo el desempeño de la memoria implícita no fue afectado por la manipulación del tipo de estudio. Graf et al, en 1982, reportaron un comportamiento similar empleando completación de palabras como un índice de memoria implícita y libre asociación como índice de memoria explícita. Similarmente Schacter y McGlynn [19] encontraron que el desempeño de memoria implícita (medida por un test de asociación libre) fue invariante a través de varios tipos de prueba. Sin embargo, el desempeño de la memoria explícita (medida por un test de recordación por pista) fue significativamente afectada.

Mediante estas tres características (ligada al estímulo superficial, durabilidad en el periodo de retención y el desempeño en las pruebas de memoria implícita no son afectadas por variaciones en la profundidad del proceso de estudio) se ha establecido la independencia funcional de la memoria explícita e implícita.

[17] Berry & Dienes, 1993, *Implicit learning: Theorical and empirical issues*
[18] Jacoby, Dallas, 1981, On the relationship between autobiographical memory and perceptual learning
[19] Scahcter, McGlynn, 1987, Implicit memory : Effects of elaboration depend on unitizaton

Tulving ha argumentado que la independencia estocástica es más fuerte. La independencia estocástica entre dos medidas ocurre cuando la probabilidad de un suceso en una medida tiene la misma ya sea que haya éxito o fracaso en la otra medida.

1.3.7 Independencia estocástica entre la habilidad entre evocación y reconocimiento de palabras

Un número de estudios han reportado que el éxito en el desempeño en test de memoria implícita no está correlacionado con el éxito o error en pruebas de memoria explícita; un ejemplo de estas pruebas son aquellas en donde a los sujetos se les solicita que memoricen una cadena de letras formadas por una gramática finita y posteriormente se les pide que clasifiquen nuevas cadenas diciendo si están construidas acorde a la regla gramatical o no. Típicamente los sujetos pueden clasificar mejor las palabras de lo que pueden dar un reporte de aquellas que aprendieron.

1.3.8 El inconsciente y el aprendizaje

Dentro de los procesos cognitivos que se realizan de manera inconsciente se pueden hacer cuatro grandes grupos:

- Aprendizaje implícito
- Percepción sin conciencia o conocimiento
- Memoria implícita
- Procesamiento automático

Para establecer la relación entre estos cuatro términos se deben tomar en cuenta la percepción consciente y ver si el recordatorio es consciente o no lo es.

- *Percepción sin conciencia o conocimiento.* Un estímulo que no es conscientemente percibido por el sujeto, muestra influencia en su comportamiento.

- *Memoria implícita*. Un estímulo que es conscientemente percibido por el sujeto, influencia su comportamiento.
- *Procesamiento automático*. Los sujetos, típicamente perciben los estímulos y las relaciones que existen entre ellos y la acción, pero posteriormente se olvidan de las relaciones.

- *Aprendizaje implícito*. Los sujetos usualmente no están conscientes de las relaciones desde un principio.

En los casos de procesamiento automático y aprendizaje implícito, el aprendizaje de las relaciones se muestra en posteriores desempeños.

- Procesamiento automático. En algunas ocasiones en el aprendizaje, al practicar una y otra vez con ello, y habiendo ya obtenido las reglas de manera consciente, éstas se pierden gradualmente; un ejemplo claro de esto es el aprendizaje de un segundo lenguaje, donde después de un tiempo la producción se convierte en automática y sin reglas. Shiffrin y Schneider (1977) han argumentado la distinción teórica entre procesos automáticos y controlados. De acuerdo con ellos, los procesos controlados están limitados en su capacidad,

requieren atención y pueden ser usados de manera flexible cuando se cambian las circunstancias. En contraste, los procesos automáticos no están sujetos a limitaciones de capacidad, no requieren atención y son difíciles de modificar, una vez que se han aprendido. Schneider y Shiffrin encontraron, en un experimento que realizaron un estudio en donde los sujetos buscaban letras en particular entre otras letras presentadas brevemente; al principio los sujetos se desempeñan de manera pobre; los sujetos hacen muchos errores y responden lentamente; después de 1500 intentos el desempeño se mejora dramáticamente y es en este momento en que el sujeto puede responder sin tener en consideración otras alternativas. En un segundo experimento Schneider y Shiffrin revirtiendo las letras buscadas y las no buscadas y encontraron que esto tuvo un efecto marcadamente adverso en el desempeño. En los primeros 600 intentos en la segunda fase, fue peor que al principio del experimento; después de 2100 intentos no fue tan bueno como el final de la primera fase. Varios investigadores, basándose en estos resultados han remarcado criterios para la automatización. Primeramente, el proceso es rápido, por segundo paso, es inevitable e imparable; por tercer paso, es in obtenible al consciente y finalmente, esto no reduce la capacidad de desempeñar otras tareas (ej. Manejar y escuchar el radio) La automatización se puede reducir cuando la memoria se tiene que hacer cargo de varias tareas.

Existen tareas en las cuales, aunque se realice la “misma tarea”, ésta no necesariamente se realiza de manera mas rápida, tal sea el caso de sumar de dos en dos. Se ha argumentado que en realidad se reestructura la tarea empleando estrategias categóricas. Por ejemplo, en algunos experimentos los sujetos pueden utilizar estrategias para distinguir entre los items de la prueba como un grupo, y los items del background como un grupo, en lugar de identificar cada uno por separado. Sin embargo, Cheng, Schneider y Shiffrin (1985) admiten que algunos de sus descubrimientos pueden ser atribuidos como el uso de categorías; sin embargo, ellos argumentan que sus más dramáticos resultados no pueden ser explicados en términos de reestructuración. Ellos también se refieren al estudio hecho por Schneider y Fisk (1982) mostrando que después de una extensa práctica uno después de extensa práctica una tarea controlada y una tarea automática pueden ser desempeñadas como por separado, no obstante este no era el caso en dos pruebas de proceso de control. Esto nos puede indicar que los procesos automáticos pueden ser desempeñados sin un coste grande.

Una de las teorías acerca de la automatización, según Logan (1988), dice que la práctica incrementa la base de conocimientos que permite la fácil recopilación de la información relevante y rápida acción. En ausencia de práctica, la tarea para ser respondida adecuadamente necesita de pensamiento y aplicación de reglas; después de prolongada práctica. Un ejemplo de éste proceso es cuando los niños aprenden a sumar números de un sólo dígito. Inicialmente es un proceso complicado; mediante la práctica simplemente se busca la respuesta en la memoria, y entre más práctica se tenga, más rápida será la respuesta.

1.4 Algunas teorías acerca de la memoria implícita

Estas son: Activación, procesamiento y sistemas múltiples de memoria.

- *Activación:* Sostiene que los efectos en la memoria implícita son atribuibles a la activación temporal de representaciones preexistentes o estructuras de conocimientos. La representación aparece en el test implícito sin información contextual y no contribuye al recuerdo explícito del episodio.

- *Procesamiento:* Busca entender las diferencias entre memoria implícita y explícita explicando la naturaleza y las relaciones entre la codificación y diferencias entre los tests explícitos e implícitos. Se hace una distinción entre la conceptualización y el modo en que se manejan los datos. En la conceptualización se busca una manera para elaborar, organizar y construir; en el modo de manejar los datos son iniciados y guiados por la información presentada en el test. En memoria implícita y explícita puede haber ambos tipos, sin embargo se dice que es más común que exista conceptualización en la memoria explícita y manejo de datos en la implícita.

- *Sistemas múltiples de memoria:* Intenta explicar el fenómeno mediante diferencias entre implícito y explícito mediante diferentes sistemas. Por ejemplo: Squire y Cohen [20] argumentan que la recolección explícita es una propiedad soportada por el sistema declarativo de memoria que está involucrado en la formación de nuevas representaciones de datos. En contraste la memoria implícita se atribuye al sistema procedimental en el cual se modifican las operaciones procedimentales. La diferencia entre la memoria episódica y semántica ha sido reflejada en la disociación entre las pruebas implícitas y explícitas. En el sistema **episódico** se recuerdan eventos recientes y en la memoria **semántica** es vista como la responsable del desempeño en pruebas como completar palabras, decisión léxica, que requiere el uso de conocimientos de palabras y conceptos.

1.4.1 Algunos puntos en los cuales cada aproximación tiene dificultades y a la vez concuerda con otras investigaciones

- En la activación algunas veces se emplean representaciones preexistentes, en las cuales no se emplea algún proceso elaborativo y en otras ocasiones el priming decae rápidamente, tanto en sujetos normales como amnésicos. También es congruente con el hallazgo de priming de representaciones previas y priming no normal en no palabras o (unrelated paired associates) en pacientes amnésicos.

- En la conceptualización y procesamiento de datos, el problema es manejar los casos de efecto de priming en representaciones preexistentes en pacientes amnésicos y las diferencias entre nuevas y viejas representaciones en sujetos normales. El problema está en que se ha argumentado que un proceso de estudio elaborativo no debe afectar el desempeño de manejo de datos de memoria implícita, como es la prueba de completar palabras. En esta teoría no es claro por qué el manejo de datos puede ser asociado con recolección de experiencias pasadas, dado que la recolección se asocia a recolección consciente.

- En el sistema de memoria múltiple.

[20] Squire, Cohen, 1984, Human memory and amnesia

La **memoria procedimental** puede definirse como aquella que permite un aprendizaje elaborado a través de la ejecución de una tarea, este tipo de memoria tiene un carácter mas bien "implícito"

La memoria procedimental es lenta, progresiva e inflexible que se manifiesta en tiempos de reacción o por reducción de errores.

La memoria declarativa designa el recuerdo explícito de informaciones mientras que la memoria procedimental se define como el conocimiento de un "saber hacer" que se adquiere progresivamente a través de la repetición de la tarea.

La motivación de la visión **procedimental** declarativa se debe a fenómenos observados en sujetos amnésicos, de esta manera se hace la diferenciación, ya que no pueden recordar episodios pasados. También se ha sugerido que la memoria procedimental es responsable de los efectos de priming.

Existe evidencia que también disocia el priming con las habilidades aprendidas, pero no explica la dificultad de los pacientes amnésicos en el priming de no palabras, ya que el priming debería ser para información nueva o vieja. Inclusive, pacientes amnésicos han mostrado memoria implícita en situaciones donde es improbable que se esté empleando el sistema procedimental, por ejemplo aprender nuevo vocabulario, aunque no exista una recolección explícita.

Algunos proponen que existe una distinción el fenómeno de priming postulando que el desenvolvimiento en pruebas de completación e identificación depende de la activación del sistema de memoria semántica, sin embargo el recordar explícitamente y el reconocimiento depende de la memoria episódica.

Ciertos estudios dicen que se puede desasociar el priming del aprendizaje procedimental. Por ejemplo, los pacientes con demencia del tipo Alzheimer (DTA) podían adquirir habilidades procedimentales, pero mostraban un priming bastante deteriorado. Por el contrario, los pacientes con enfermedad de Huntington no adquirían las capacidades procedimentales, pero mostraban un priming satisfactorio. Estos datos sugerían que el mismo priming y el aprendizaje procedimental no podían ser sustentados completamente por el mismo sistema de memoria subyacente.

Schwartz y Hashtroudi consideraban que existían dos clases de memoria implícita: una que sustentaba el aprendizaje procedimental producido cuando los aspectos invariables de la tarea se extraían durante la práctica, y la otra, sustentando el priming que parecía depender más de las características del estímulo específico, que de las regularidades entre los estímulos diferentes.

Tulving y Schacter comunicaban que el priming se sustentaba por un sistema de conjuntos perceptivos de representación perceptiva independiente del sistema de memoria procedimental. Estos sistemas de representación intervenìan en un nivel presemántico y su acceso era inflexible y muy específico.

Estudios neuropsicológicos parecían apoyar la idea de la presencia, entre otros, de un sistema perceptivo de la forma visual de las palabras y de un sistema perceptivo de la forma visual de los objetos. Cooper et al comprobaron que un paciente aléxico obtenía unos efectos de priming importantes con identificación perceptiva, lo cual indicaba que el sistema de forma visual de las

palabras sustentaba los efectos de priming. Otros trabajos realizados mediante la técnica PET parecían apoyar la existencia de un sistema presemántico de la forma visual de las palabras.

1.5 ¿Memoria o aprendizaje?

- Aprendizaje implícito y explícito. El término de aprendizaje implícito fue acuñado por Reber (1967) es usado para describir la adquisición de conocimientos abstractos complejos que toman lugar sin la conciencia de que él o ella están aprendiendo. Este tipo de conocimiento no es medible por reporte verbal. En cambio el aprendizaje explícito es el proceso en el cual el sujeto y el conocimiento es verbalmente reportable. El trabajo de Reber junto con el de otros investigadores sugiere que el aprendizaje implícito y explícito pueden estar desasociados funcionalmente. El término neutral de aprendizaje implícito fue escogido simplemente para diferenciar del proceso de aprendizaje explícito, del cual ya se habían hecho estudios de categorización, como es el caso de Bruner, Goodnow y Austin.

- Memoria implícita y explícita. Términos acuñados por Graf y Schacter. Describe un concepto que se refiere a la memoria que es revelada cuando experiencias pasadas facilitan el desempeño en una tarea que no requiere recolección consciente o intencional de esas experiencias. En cambio la memoria explícita es revelada en las tradicionales pruebas como (free recall and recognition) y estas pruebas hacen una deliberada recolección del aprendizaje en el episodio. Se ha encontrado independencia en el desempeño de tareas de memoria implícita y explícita, gracias a estudios hechos, comparando pruebas en sujetos sanos y sujetos amnésicos.

  Tulving y Schacter, gracias a los estudios hechos en pacientes amnésicos, los cuales no mostraron memoria episódica reciente, han tenido la posición de que como el priming parece no relacionado con la recolección consciente, entonces no depende del sistema de memoria episódica.

- Aprendizaje procedimental y declarativo[21]. El aprendizaje procedimental se refiere a la adquisición de desempeño en una habilidad. Esto involucra el cómo se realiza una nueva tarea y adquisición de la habilidad. El conocimiento declarativo se refiere a aquel conocimiento que es directamente accesible al recuerdo consciente.

1.5.1 ¿Por qué se le denominó memoria implícita?

Este término guarda cierta semejanza con dos términos en literatura psicológica: memoria inconsciente[22] [23] y memoria inconsciente o memoria sin conciencia [24] [25]. Estos dos términos han sido usados para describir el fenómeno referido como memoria implícita. La principal razón por la que Graf y Schacter adoptaron el término memoria implícita en lugar de memoria inconsciente es debido a la ambigüedad

[21] Cohen, Squirre, 1980, Presented learning and retention of pattern-analizyng skill in amnesia: Dissociationof “knowing how” and “knowing that”
[22] Freud, Breuer, 1966, Studies on hysteria
[23] Prince, 1914, The unconscious
[24] Eriksen, 1960, Discrimination and learning without awarness: A methodological survey and evaluation
[25] Jacoby, Whiterspoon, 1982, Remembering without awarness

que tienen los dos términos. Los términos inconsciente y sin estar enterado, tienen un largo número de significados e implicaciones, muchos de los cuales no aplican al fenómeno que interesa.

1.5.2 Aprendizaje implícito y evolución

Según los estudios en evolución que se han llevado a cabo, hay cuatro observaciones que hacer entre ésta y el aprendizaje implícito, estas son:

- La consciencia y el conocimieto de los fenómenos han entrado a la escena de la filogenia, ya que éstos son mucho más profundos y primitivos que el (awareness). Los procesos involucrados en el aprendizaje implícito, que operan independientemente de la consciencia, son más primitivos y básicos que los que son dependientes, en cierta medida, en consciencia y control consciente. El argumento se debe a que hay cercanos puntos entre un típico experimento en aprendizaje implícito y uno de condicionamiento clásico. Además, este paralelo conceptual puede ser mostrado para sostener, aún en la superficie el experimento de aprendizaje implícito que parece ser de inducción abstracta y el experimento condicionante una asociación simple.

- Uno de los estándares heurísticos en la teoría evolutiva es que la filogenia más vieja y las estructuras más viejas mostrará información de clases de propiedades diferentes de las más recientemente evolucionadas. Es decir que las estructuras más viejas tienden a ser más robustas y menos inclinadas a interrumpir su función, comparadas con las nuevas.

- Las funciones, evolutivamente más viejas, del inconsciente cognitivo deben mostrar una más cercana distribución en la población que las más recientemente aparecidas explícita y consciente. Esto se debe a que las estructuras y funciones siguen permaneciendo.

- Deberá haber una relación clara y razonable entre el punto a lo largo del árbol filogenético en donde una propiedad particular o función desarrollada en el grado en el cual estamos concientes de su forma y contenido.

Haxher y Zacks argumentaron que el proceso de codificación fue un primitivo y fundamental proceso cognitivo y que es relativamente no afectado por variables como edad, nivel de desempeño, IQ, y estado afectivo, que normalmente son considerados en el impacto de los procesos cognitivos.

1.5.3 Implícito, ¿hasta qué punto?

El problema de determinar hasta qué punto algo fue aprendido de manera consciente o inconsciente va más allá de un problema teórico o epistemológico. Esto dependerá mucho de la manera en que se mida.

Para resolver el problema epistemológico, se podría utilizar la inecuación:
A > B, donde A es la información disponible para el sistema de procesamiento inconsciente y B es la disponible para el sistema consciente.

1.5.4 ¿Por qué se le denominó aprendizaje implícito?

Dando una mirada a los años sesenta cuando Reber comenzó a trabajar con el fenómeno del aprendizaje implícito, él se vio un poco renuente a definir al fenómeno como inconsciente; el término se emplea para varias cuestiones, que en sí distan mucho de parecerse. Por otra parte los términos de aprendizaje incidental y aprendizaje sin awareness, que han sido empleados, son en sí diferentes fenómenos. El término aprendizaje implícito fue escogido simplemente para diferenciar del fenómeno del estudio de aprendizaje explícito que se estaba haciendo por parte de Brunerm Goodnow y Austin en áreas como formación de conceptos y categorización, entre otros.

1.5.5 Algunas de las características que son distinguibles entre el aprendizaje implícito y el explícito son:

- Tiende a ser inflexible, inaccesible concientemente y ligado al tipo de material con el que se aprendió. Un número de estudios han demostrado que el desempeño en las pruebas implícitas, pero no explícitas varía cuando se cambia la modalidad entre aprendizaje y prueba.
- Se le suele asociar más con condiciones incidentales que con condiciones intencionales de aprendizaje.
- Se han hecho estudios acerca de la retención y se ha encontrado que la memoria implícita es menos afectada que la memoria explicita, en algunas situaciones.
- El desempeño en las pruebas de memoria implícita no es afectado por variaciones en la profundidad del procesamiento del estudio. Por ejemplo, Jacoby y Dallas[26], midieron el desempeño de la memoria implícita y explicita siguiendo una tarea de estudio que requería un proceso elaborativo o un proceso no elaborativo. Ellos encontraron que una prueba de desempeño de reconocimiento si/no fue mayor seguida de pruebas de estudio elaborativo que no elaborativas, en cambio, el desempeño de la memoria implícita no fue afectado por una manipulación de la tarea de estudio.

Existen algunas pruebas para ver que el aprendizaje que está teniendo el sujeto es implícito, algunas de ellas son:

- *Reportes verbales*. Consiste en ver si el sujeto es capaz de describir verbalmente el conocimiento que adquirió. Los reproches que se le hacen a este tipo de pruebas es que no se está basando en el tipo de conocimiento en el que se desarrolló la prueba.
- *Tests de opción forzada (forced-choice tests).*
- *Tests subjetivos*.

El aprendizaje implícito cuenta con la cualidad de ser robusto, esto se puede apreciar en tres aspectos:

- Tiempo: Existen algunas indicaciones que muestran aprendizaje implícito después de algún tiempo, lo cual nos habla de una retención del aprendizaje.

[26] Jacoby, Dallas, 1981, On the relationship between autobiographical memory and perceptual learning

- Permanencia en desórdenes psicológicos. En algunos trastornos psicológicos el aprendizaje de manera implícita se mantiene intacto aún cuando el explícito esté afectado.
- "Se ha sugerido que el almacenamiento y recuperación del conocimiento implícito debe ser menos afectado por pruebas secundarias que el conocimiento explícito".

Capítulo 2

Base Matemática y Estadística

2.1 Relación de Equivalencia

Sea S un conjunto con una relación, se dice que esta relación es de equivalencia si satisface los siguientes tres puntos:

- Todo elemento de S está relacionado consigo mismo. (reflexividad)
- Si x está relacionado con w, entonces w está relacionado con x, para x y w cualesquiera dos elementos de S. (simetría)
- Si x está relacionado con w, y w con z, entonces x está relacionado con z, para cualesquiera x, w y z en S. (Transitividad)

La igualdad es una relación de equivalencia, la amistad no lo es ya que no necesariamente es transitiva. Cada relación de equivalencia en S induce una partición del conjunto S. Ésta es el conjunto de los subconjuntos que contienen a algún elemento x de ese junto con los elementos que estén relacionados con x; al conjunto de todos los elementos que están relacionados con x se le llama la clase de equivalencia de x.

Por ejemplo tomando a los enteros se puede tomar como relación de equivalencia “ser de la misma paridad”. Esta relación nos parte a los enteros en pares e impares (una es la clase de equivalencia de 0 y la otra es la clase de equivalencia de 1).

2.2 Clases de equivalencia

Formalmente se tiene que para cada x en S, la colección de elementos que están relacionados con x es la clase de equivalencia de x.

Un ejemplo de clase de equivalencia surge con la relación de la nacionalidad: Si sólo se pudiera tener una nacionalidad, entonces, si yo soy x, y w es mi compatriota; y a su vez z es compatriota de w, entonces z y yo somos compatriotas.

Ser compatriotas es una relación de equivalencia; y la partición mundial en naciones estaría dada por dicha relación; como la de los representantes en las competencias mundiales.

2.3 Clases laterales

Sea H un subgrupo de un grupo G, es decir H es un subconjunto de G que es grupo a su vez, con las operaciones inducidas por las de G, se define la clase lateral izquierda a H con a en G como el conjunto { ah : h está en H } (de manera equivalente se define la clase lateral derecha).

Ejemplo: los enteros pares forman grupo, el grupo 2Z:

La clase de 1 es 2Z+1, el conjunto de los impares.
La clase de 0 es 2Z, el conjunto de los números pares.

Como se vio en la primera parte, las simetrías forman grupo. Sin embargo no es la estructura de grupo la que se presenta comúnmente en el entorno, sino que es la acción del grupo sobre los cuerpos o las particiones que genera a partir de relaciones de equivalencia.

2.4 Grupos

Un grupo es un conjunto G en el que está definida una operación, es decir una función:

$$* : GxG \rightarrow G$$

La cual cumple con las siguientes propiedades:

1. **Cerradura:** El resultado de operar dos elementos de G es un elemento de G. $g * h \in G$ para cualesquiera $g, h \in G$
2. **Asociatividad:** Se dice que nuestro conjunto G tiene la propiedad asociativa, si para todos elementos β, α, γ en G, $\beta * (\alpha * \gamma) = (\beta * \alpha) * \gamma$
3. **Existencia del neutro**: Existe un elemento $i \in G$ tal que al operarlo con cualquier otro no afecta a este último.
   $g * i = i * g = g$
4. **Existencia de inverso para cada elemento dado**:
   Para cada $g \in G$, existe $b \in G$ tal que *g*b=i=b*g*

2.5 Simetría

Definición 2.1
La distancia de un punto P a otro punto Q es la longitud del segmento de recta entre dos puntos, la cual se define como:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$, donde $P = (a_1, a_2)$ y $Q = (b_1, b_2)$

Definición 2.2
La distancia de un punto P a una recta L es la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

Definición 2.3
Un objeto F es simétrico respecto a un punto O si para cada punto P en F, también P' pertenece a F, donde O es el punto medio del segmento PP'. El punto O es un centro de simetría.

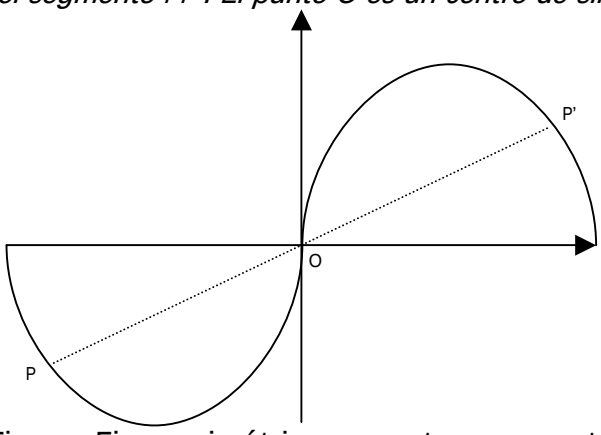


Figura. Figura simétrica respecto a un punto

Definición 2.4
Un objeto F es simétrico respecto a una recta L, si para cada punto P en F, también P' pertenece a F, donde L corta perpendicularmente al segmento PP' en su punto medio. La recta L es un eje de simetría.

Figura. Figura simétrica respecto a una recta

Definición 2.5
Un objeto F es simétrico respecto a un plano Π si para cada punto P en F, también P' pertenece a F, donde Π es el plano perpendicular PP' por el punto medio. El plano Π es un plano de simetría.

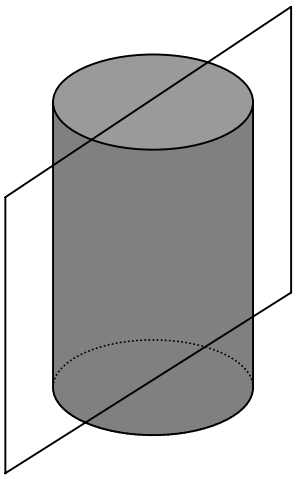


Figura. Figura simétrica respecto a un plano

Una simetría es un movimiento rígido que deja las figuras viéndose exactamente igual que como comenzaron.

La acción de no hacer nada, es una simetría y se le llama simetría trivial.

Cuando se combinan dos simetrías en una figura, se obtiene otra simetría de la misma figura.

Se dice que α es la inversa de β si $\alpha\beta = 1$ y $\beta\alpha = 1$, es decir, si haciendo β y posteriormente α, tiene el efecto de no hacer nada.

2.6 Transformación

Una transformación rígida del plano en el plano es una función que respeta las distancias entre puntos. A las transformaciones rígidas también se les conoce como isometrías por respetar las medidas.

Una transformación en el plano es una correspondencia uno a uno de un conjunto de puntos en el plano en él mismo.

En esta tesis nos referiremos a las transformaciones que mandan líneas en líneas. Una transformación f con esta propiedad es llamada una colinealidad. Así mismo trataremos aquellas transformaciones que preservan simetrías.

2.7 Mapeo

Se dice que se hace un mapeo en un conjunto de puntos, cuando para cada punto P existe un punto Q tal que $f(P) = Q$. Se dice que un mapeo f es sobre (o suprayectivo) si para cada punto P existe un punto Q tal que $f(Q) = P$, un mapeo f se dice que es inyectivo si $f(R) = f(S)$ implica que $R = S$. Entonces una transformación es un mapeo de puntos tal que es inyectivo y suprayectivo.
El conjunto de todas las transformaciones de un conjunto X forma un grupo. El conjunto de todas las transformaciones colineales forman un grupo

Una transformación en el plano es una correspondencia uno a uno, de un conjunto de puntos del plano, en sí mismo. Para una transformación dada f, esto significa que para cada punto P hay un único punto Q tal que $f(P) = Q$, e inversamente, para cada punto R hay un único punto S tal que $f(S) = R$.
Las transformaciones a las que se refiere esta tesis serán aquellas en las que una línea recta es transformada a una línea recta, estas transformaciones son llamadas colineales.

Un movimiento rígido del plano es cualquier clase de movimiento de todos los puntos en el plano tal que:

- La distancia relativa entre los puntos sea la misma

La más sencilla de los movimientos rígidos es aquel en el cual no se hace ningún movimiento, es decir no se hace nada.

2.8 Isometría

Una isometría es una transformación del plano en el plano tal que preserva las distancias.

Las isometrías son: identidad, traslación, rotación, reflexión y deslizamiento.

Una isometría es una colinealidad que preserva distancia, y al preservar distancias preserva también puntos medios, segmentos, rayos, triángulos, ángulos y perpendicularidad. Una isometría es una simetría para un conjunto s de puntos si $\alpha(S) = S$

Sea S un conjunto de puntos. El conjunto de simetrías para s es no vacío, ya que en él se encuentra la identidad i.

Supongamos que α y β son simetrías de S. Entonces $\beta\alpha(S) = \beta(\alpha(S)) = \beta(S) = S$. Entonces el conjunto de simetrías tiene la propiedad de cerradura. Si α es una simetría para S, entonces α y α^{-1} son transformaciones y $\alpha^{-1}(S) = \alpha^{-1}(\alpha(S)) = i(S) = S$. Entonces el conjunto de simetrías también tiene la propiedad inversa.

El conjunto de todas las simetrías de un conjunto de puntos forma un grupo.

2.8.1 Traslación

Al aplicar una traslación todo se mueve en la misma dirección.

La traslación es un mapeo que tiene ecuaciones de la siguiente forma:

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

Teorema 2.1

Dados los puntos P y Q, existe una única traslación que lleva de P a Q llamada $\tau_{(P,Q)}$

Teorema 2.2

Suponga que A,B,C son puntos no colineales. Entonces $\tau_{(A,B)} = \tau_{(C,D)}$ si y sólo si $CABD$ es un paralelogramo.

La composición de dos traslaciones nos da por resultado otra traslación. Sea $\tau_{(A,B)}$ de la siguiente manera:

$$x' = x + b1$$
$$y' = y + b2$$

Y sea $\tau_{(Y,Z)}$ de la siguiente manera:

$$x' = x + z1$$
$$y' = y + z2$$

Al aplicar $\tau_{(A,B)}$ y posteriormente $\tau_{(Y,Z)}$, obtenemos:

$$x' = (x + b1) + z1 = x + (b1 + z1)$$
$$y' = (y + b2) + z2 = y + (b2 + z2)$$

Lo cual corresponde a la ecuación de una traslación.

Siendo $\tau_{(A,B)}$ de la siguiente manera:

$$x' = x + b1$$
$$y' = y + b2$$

Su inverso es de la siguiente manera:

$$x' = x - b1$$
$$y' = y - b2$$

Las traslaciones del plano en el plano forman un grupo bajo la composición.

En general, una colinealidad α es una dilatación si ℓ ll[27] $\alpha(\ell)$ para toda línea ℓ. Una traslación es una dilatación. Cuando una colinealidad envía un par de líneas paralelas a un par de líneas paralelas, una dilatación envía cada línea a una línea paralela dada. Por ejemplo, si vemos una rotación de 90º es una colinealidad pero no una dilatación.

Una traslación es una dilatación. Si $P \neq Q$, entonces $\tau(P,Q)$ no fija algún punto, y fija aquellas líneas que sean paralelas a PQ.

Entonces las dilataciones forman un grupo $\mathcal{D}$ de transformaciones, llamado el grupo de dilataciones. Entonces el producto de dos traslaciones es una traslación.

Las traslaciones forman un grupo abeliano. Las dilataciones forman un grupo.

[27] Paralela a

2.8.2 Rotación

Se deja fijo un punto y todo lo demás se rota alrededor de éste punto. El punto alrededor del cual se rota se llama rotocentro.

Una forma de medir la magnitud de una rotación es en fracciones de un giro completo.

La rotación por el ángulo θ en torno al origen en R^2, es una función de la siguiente manera:

$$R_\theta(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-ysen\theta\\ xsen\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}$$

Ahora comprobaremos que las rotaciones en torno al origen forman un grupo conmutativo.

1. *Cerradura.* Sean $\theta y \phi$ dos ángulos, la rotación de ϕ seguida de θ

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & -sen\phi\\ sen\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi-sen\theta sen\phi & -\cos\theta sen\phi-sen\theta\cos\phi\\ sen\theta\cos\phi+\cos\theta sen\phi & -sen\theta sen\phi+\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

   Y por identidades trigonométricas de suma de ángulos tenemos que:

$$\cos\theta\cos\phi-sen\theta sen\phi=\cos(\theta+\phi) \quad \text{y} \quad sen\theta\cos\phi+\cos\theta sen\phi=sen(\theta+\phi)$$

   Con lo cual podemos ver que corresponde a la matriz de rotación por el àngulo $\theta+\phi$

2. *Asociatividad.* Dado que la multiplicación es asociativa, el producto de rotaciones también es asociativa.

3. Existencia del neutro. La rotación por ángulo 0 corresponde a la matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

   Que es el neutro para el producto de matrices.

4. *Conmutatividad*

   La rotación de ϕ seguida de θ:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & -sen\phi\\ sen\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi-sen\theta sen\phi & -\cos\theta sen\phi-sen\theta\cos\phi\\ sen\theta\cos\phi+\cos\theta sen\phi & -sen\theta sen\phi+\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

   La rotación de θ seguida de ϕ:

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -sen\phi\\ sen\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & -sen\phi\\ sen\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\theta-sen\phi sen\theta & -\cos\phi sen\theta-sen\phi\cos\theta\\ sen\phi\cos\theta+\cos\phi sen\theta & -sen\phi sen\theta+\cos\phi\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

   Obteniendo la matriz de rotación por el ángulo $\theta+\phi$

Un medio giro resulta ser una involución[28], esto es, una rotación de 180º. Entonces un medio giro es un caso especial de rotación.

Si $P=(a,b)$, entonces un medio giro σ_P alrededor del punto P es un mapeo con ecuaciones:

$$x' = -x + 2a$$
$$y' = -y + 2b$$

Un medio giro es una involución. El punto medio entre los puntos $\sigma_P(A)$ es P. Un medio giro fija A si y sólo si $A=P$. Un medio giro σ_P fija la línea ℓ si y sólo si P está sobre ℓ.

El producto de tres medios giros es un medio giro. En particular, si puntos P,Q,R son no colineales, entonces $\sigma_P\sigma_Q\sigma_R = \sigma_T$ donde $PQRT$ es un paralelogramo.

Dados tres cualesquiera puntos, no necesariamente distintos puntos, A,B,C,D entonces el cuarto es determinado de manera única por la ecuación $\tau_{A,B} = \sigma_D\sigma_C$.

$$\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q\sigma_R \text{ para cualesquiera } P,Q,R \text{ puntos.}$$

La unión de las traslaciones y los medios giros forman un grupo H.

El resultado de hacer una traslación de una traslación, da como resultado otra traslación, con respecto a la figura original.

El resultado de realizar una traslación y posteriormente una rotación es una rotación.

El conjunto de las rotaciones y traslaciones es un conjunto cerrado, es decir una traslación o una rotación de una rotación o traslación, es una traslación o una rotación, es decir equivaldría a realizar alguno de los elementos sobre el conjunto.

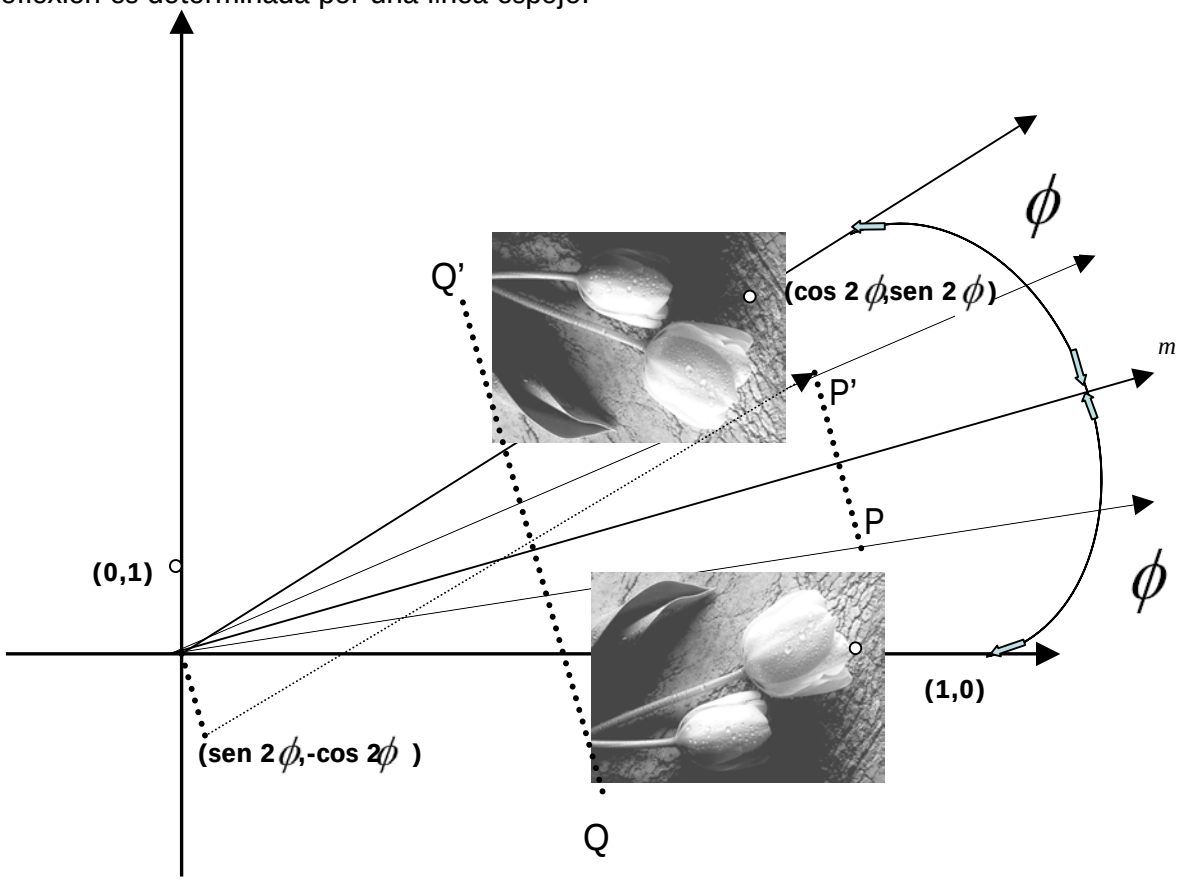
Si nos enfocamos únicamente en las traslaciones, también se puede ver que este conjunto es cerrado, no así el conjunto de las rotaciones.

En general, se dice que una transformación α fija un conjunto de puntos fijos S de puntos si $\alpha(P) = P$ para cada punto P en S. Es de tomar en cuenta la diferencia entre un conjunto invariante o un conjunto fijo y un conjunto de puntos fijos.

[28] Involución: Transformación que es su propio inverso

2.8.3 Reflexión

Una reflexión es determinada por una línea espejo.



La línea de reflexión es la línea m . Para ver qué es lo que pasa con los puntos bajo la acción de la reflexión de m , tomemos a P como el punto (1,1) y veamos los efectos de la reflexión en (1,0) y (0,1). Podemos expresar la reflexión de la siguiente manera:

$$\sigma_m(P) = x\sigma_m(1,0) + y\sigma_m(0,1)$$

Sea ϕ el ángulo que forma m con el eje X. El reflejado de (1,0) bajo σ_m forma el ángulo 2ϕ con el eje X, sus coordenadas son $(\cos\ 2\phi,\ sen\ 2\phi)$

Dado que la reflexión invierte el sentido de los ángulos, entonces la acción de σ_m sobre (0,1) es:

$$(sen\ 2\phi, -\cos\ 2\phi)$$

De esta manera podemos expresar la transformación σ_m de la siguiente manera:

$$\sigma_m(x,y) = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & sen2\phi \\ sen2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\phi + ysen2\phi \\ xsen2\phi + y\cos 2\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Reflexión σ_m es una involución[29] que intercambia los semiplanos de m. La reflexión σ_m fija el punto P si y sólo si P si está sobre m. La reflexión σ_m, fija la línea ℓ de puntos fijos, si y sólo si $\ell = m$. La reflexión σ_m fija la línea ℓ si y sólo si $\ell = m$ o ℓ perpendicular a m.

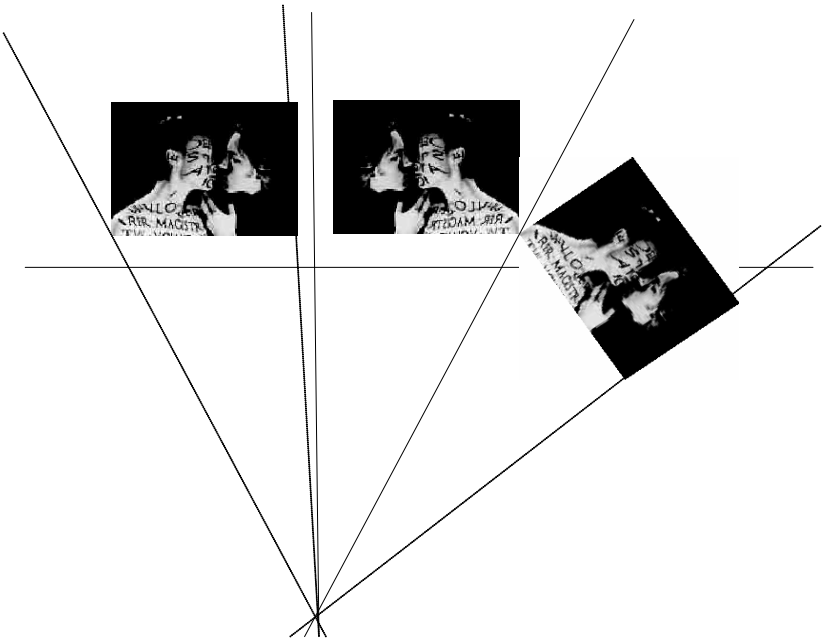
La distancia de un punto al espejo es la misma que la distancia de la imagen del punto al espejo. Esto tiene por consecuencia que la reflexión preserva distancias entre los puntos. Esto se puede demostrar, calculando la distancia entre dos puntos cualesquiera y calculando la distancia de los mismos bajo la transformación.

La matriz de la rotación tiene determinante 1, mientras que el determinante de la matriz de reflexión es -1. Esto nos dice que al componer dos reflexiones la matriz del producto de la misma será de 1, por lo cual, la composición de reflexiones no produce una reflexión.

Teorema 2.3
El conjunto de rotaciones en R^2 en torno a (0,0) y reflexiones respecto a una recta por (0,0), forman un grupo bajo la composición.

En el caso de dos reflexiones hechas con líneas espejo paralelas, el resultado es una traslación.

En el caso en donde las líneas espejo se intercepten, el resultado es una rotación.



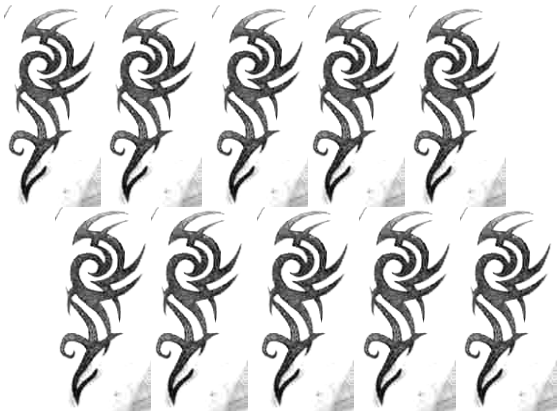
Ejemplo de dos reflexiones seguidas

[29] Dado que el inverso de una reflexión es ella misma; esto se puede ver al hacer la multiplicación de la matriz de la reflexión con ella misma

2.8.4 Deslizamiento

Es una reflexión de espejo, seguida de una traslación paralela a la línea espejo.

La rotación de una reflexión es siempre una reflexión o un deslizamiento.



Ejemplo de deslizamiento

2.9 Frisos

Se comenzará con la definición. Un friso es un patrón formado por la repetición de una figura o motivo, una y otra vez.

Para crear un friso debemos trazar una recta y observar 2 reglas:

1. Usar un patrón recortado con una base marcada, en cada tramo de longitud AB igual a la base del recorte.
2. Si el patrón se usa en un lado de la recta, no es válido volverlo a usar con otra posición en ese mismo lado en ese tramo, pues equivaldría a tener otro patrón. La base debe permanecer pegada a la línea.

Un friso es una repetición de un patrón con traslaciones simétricas en una dirección. La repetición de patrones puede ser una simetría por rotación, por reflexión o por deslizamiento. Independientemente del tema del friso, considerando únicamente las simetrías bajo las cuales los patrones son invariantes, hay 7 patrones de friso.

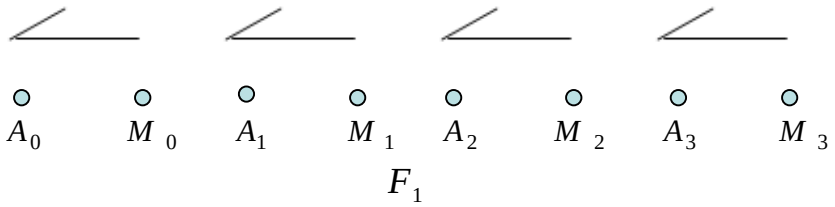
Como ya se mencionó anteriormente, la propiedad esencial de los frisos es que están compuestos de "pequeñas traslaciones". Podemos llamar AB la longitud de traslación $\tau_{(A,B)}$ y decir que $\tau_{(A,B)}$ es más corto que $\tau_{(C,D)}$, si $AB < CD$.

Teorema 2.4

Si P es un punto de simetría para un conjunto S de puntos y α es una simetría de S, entonces $\alpha(P)$ es un punto de simetría de S. Si ℓ es una línea de simetría del conjunto S de puntos y α es una simetría de S, entonces $\alpha(\ell)$ es una línea de simetría de S.

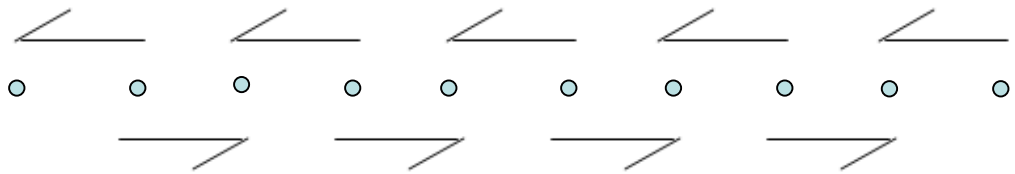
Un grupo de isometrías que fija una línea dada c y cuya traslación forma un grupo infinito cíclico es un grupo de friso con centro en c. Sea τ una traslación diferente a la identidad que fije una línea dada c. Nosotros debemos determinar todos los grupos de F, frisos con centro en c cuyas traslaciones forman un grupo infinito cíclico generado por τ. Habrá siete de ellos. Para cada grupo, nosotros debemos dar un patrón de friso teniendo su grupo y su grupo de simetrías.

Comenzaremos por escoger un punto A en la línea c. Si el grupo F contiene medios giros, entonces A es escogido para ser el centro de uno de esos medios giros; si F no contiene medios giros, pero sí contiene reflexiones en línea perpendicular a c, entonces A es escogido para ser intersección de una de esas líneas y c; de otra manera, el punto A es escogido para ser un punto en c. Sea $A_i = \tau^i(A)$. Entonces $A_0 = A$. Desde que $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$ entonces cada traslación en F debe de poner cada A_i en algún A_j. Sea M el punto medio entre A y A_1, y sea $M_i = \tau^i(M)$. Entonces M_i es el punto medio de A_i y A_{i+1} ,y también el punto medio de A_0 y A_{2i+1}.



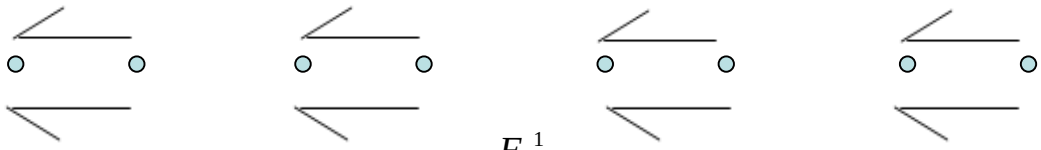
Una posibilidad para F es que sea justamente el grupo generado por τ. Sea $F_1 =< \tau >$. Un patrón de friso teniendo F_1 como su grupo de simetría no tiene puntos de simetría ni tiene líneas de simetría, y no es fijado por un deslizamiento.

Otras, además de las traslaciones, las simples isometrías que fijan c son los medios giros con centro en c. Suponga que F contiene un medio giro. Entonces σ_A está en F por la opción de A. También, σ_M está en F como σ_M es el producto $\tau\sigma_A$ .Por el primer teorema, entonces F contiene un medio giro para cada A_i y para cada M_i. Ahora supongamos que P es el centro de uno de los medios giros de F. Entonces la traslación $\sigma_P\sigma_A$ está en F. Entonces $\sigma_P\sigma_A(A) = A_n$ para alguna n. Entonces $\sigma_P(A) = A_n$, y P es el punto intermedio entre A y A_n. Por consecuencia F contiene exactamente aquellos medios giros que tiene centro en A_i y aquellos giros que tienen centro en M_i. Sea $F_2 =< \tau, \sigma_A >$. Ya que $\tau\sigma_A$ es una involución, entonces $\tau\sigma_A = \sigma_A\tau^{-1}$ .Así que cada elemento en F_2 es de la forma τ^i o $\sigma_A\tau^i$. Cada elemento en F_2 es de la forma $\sigma_A^j\tau^i$ .también, $F_2 =< \sigma_A, \sigma_M >$ donde $\sigma_M\tau = \sigma_A$. Un patrón de friso teniendo a F_2 es un grupo de simetrías que tiene un punto de simetría pero que no tiene una línea de simetría.



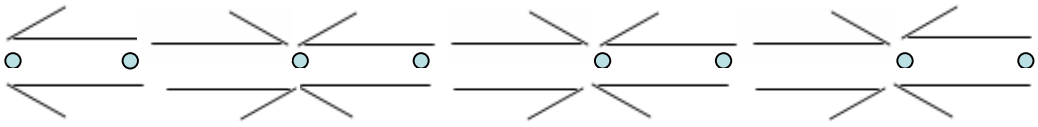
F_2

Si F contiene únicamente isometrías pares, entonces F debe de ser uno de F_1 o F_2. La otra posibilidad es que F sea obtenido por aumentar F_1 o F_2 con isometrías impares. Se considerará primeramente adicionar reflexiones. Recapitulando sea que σ_ℓ fija c si y sólo si $\ell = c$ o ℓ es paralela a c. Sea F_1^1 el generado por σ_c y por τ. Dado que $\tau\sigma_c = \sigma_c$, entonces F_1^1 es abeliano y cada elemento es de la forma $\sigma_c^j \tau^i$. Si $n \neq 0$, entonces F_1^1 contiene el deslizamiento con eje c que toma A a A_n. Un patrón de friso teniendo F_1^1 así como su grupo de simetría no tiene ningún punto de simetría y el centro es una línea de simetría.



F_1^1

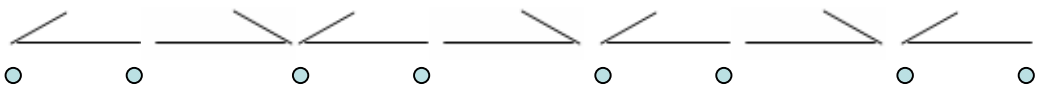
Sea $F_2^1 =< \tau, \sigma_c, \sigma_A >$.Dado que σ_c conmuta tanto con τ como con σ_A, entonces cada elemento de F_2^1 es de la forma, $\sigma_c^k \sigma_A^j \tau^j$ .Si $n \neq 0$, entonces F_2^1 contiene el deslizamiento $\sigma_c \tau^n$ con eje c que toma A a A_n. También F_2^1 contiene $\tau^{2i}\sigma_A\sigma_c$, que es la reflexión en la línea perpendicular a c en A_i, y F_2^1 contiene $\tau^{2i+1}\sigma_A\sigma_c$, que es una reflexión en línea perpendicular a c en M_i. Si a es una línea perpendicular a c en A, entonces $F_2^1 =< \tau, \sigma_A, \sigma_c >$. Un patrón de friso F_2^1 así como su grupo de simetría es aquel que tiene un punto de simetría y el centro es una línea de simetría.



F_2^1

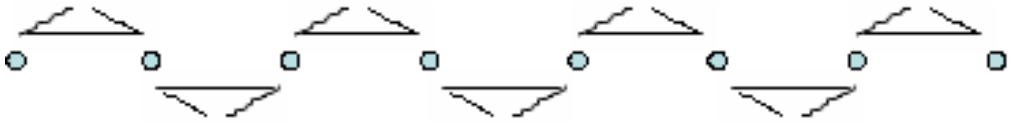
Suponga que F no contiene un medio giro pero que contiene la reflexión sobre la línea a que es perpendicular con c. En este caso se supone que A está en a. Entonces F contiene $\tau^{2i}\sigma_a$, que es la reflexión en la línea perpendicular a c en A_i y F contiene $\tau^{2i+1}\sigma_a$, que es la reflexión en la línea perpendicular a c en M_i. Asumamos que F contiene otra reflexión σ_1. Entonces $\ell \neq c$ como el medio giro $\sigma_c\sigma_A$ no está en F. Entonces ℓ es perpendicular a c. Entonces F contiene la traslación $\sigma_\ell\sigma_a$, que debe tomar A a A_n para alguna n. Entonces

$\sigma_\ell(A) = A_n$ para alguna n con $n \neq 0$, y ℓ es perpendicular a c para algún A_i o para algún M_i. Por lo tanto F debe de contener exactamente aquellas reflexiones en líneas perpendiculares a c en A_i para cada i y esas reflexiones en líneas perpendiculares a c en M_i para cada i. Ahora se está considerando todos los posibles casos de adición de reflexiones para F_1. Sea, $F_1^2 =< \tau, \sigma_a >$ donde a es perpendicular a c en A. Ya que $\tau\ \sigma_a = \sigma_a \tau^{-1}$, entonces cada elemento de F_1^2 es de la forma $\sigma_a \tau^i F_1^2$ no contiene σ_c pero no contiene las reflexiones en líneas que son perpendiculares a c en A_i o M_i. Un patrón de friso teniendo a F_1^2 y su grupo de simetría no tiene punto de simetría, tiene línea de simetría, pero el centro no es línea de simetría.



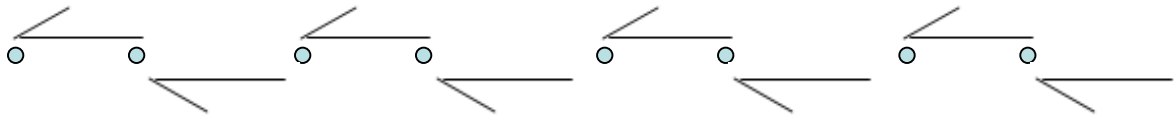
F_1^2

Ahora, supóngase que F contiene un medio giro y la reflexión en una línea q. Si $q \neq c$, q es perpendicular a c en A_i, o q es perpendicular a c en M_i, entonces estamos de regreso en F_2^1. Para obtener algo nuevo, se deberá suponer que q no contiene a ningún A_i, ni a ningún M_i. Dado que $\sigma_q(A)$ debe ser el centro de el medio giro en F por el primer teorema (con $a = \sigma_q$) la única posibilidad posible es que q es la perpendicular bisectora de AM_i para algún i. Debido a que los medios giros en F, la segunda parte del teorema entonces requiere que F contenga una reflexión en la perpendicular bisectora de AM_i para cada i. Por lo tanto, en particular, F contiene σ_p donde p es bisector perpendicular de AM. Si la línea a es perpendicular a c en A, entonces F no puede contener ambos, σ_p y σ_a como la traslación $\sigma_p \sigma_a$ debe de tomar a A y M, que es imposible. También, ya que $\sigma_p \sigma_a = \sigma_p \sigma_c \sigma_A$, entonces F no puede contener tanto a σ_p como a σ_c. Ahora consideraremos la posibilidad de agregar todas las reflexiones a F_2. Sea $F_2^2 =< \tau, \sigma_A, \sigma_p >$, donde p es la bisectriz perpendicular de AM. Note que F_2^2 contiene el deslizamiento $\sigma_p \sigma_a$ con eje c que lleva A a M. Sea $\zeta = \sigma_p \sigma_A$. Dado que $\tau = \zeta^2$ y $\sigma_p = \zeta \sigma_A$, entonces $F_2^2 =< \zeta, \sigma_A >$. F_2^2 no contiene σ_c. Un patrón de friso que contiene F_2^2 y su grupo de simetría tiene un punto de simetría, una línea de simetría pero su centro no es una línea de simetría.



F_2^2

Hemos considerado todas las posibilidades para F que no necesariamente contienen un deslizamiento. Ahora supongamos que F contiene un deslizamiento a. Entonces a tiene como eje c y a^2 es la traslación que fija c. Tenemos dos casos $a^2 = \tau^{2n}$ y $a^2 = \tau^{2n+1}$ para algún entero n. Suponga que $a^2 = \tau^{2n}$ .Ya que a y τ conmutan, entonces $(a\tau^n)^2$ es la identidad. Entonces la isometría involutoria impar $a\tau^{-n}$ debe ser σ_c. Por lo tanto $a = \sigma_c \tau^{-n}$. En este caso F contiene σ_c y $\sigma_c \tau^m$ para cada entero m, si F no contiene un medio giro, entonces hemos regresado a F_1^1. Si F no contiene un medio giro, entonces hemos regresado a F_2^1 .Ahora supongamos que $a^2 = \tau^{2n+1}$. Entonces $(\tau^{-n}a)^2$ es τ. Sea $\zeta = \tau^{-n}a$. Entonces ζ es una simetría impar cuyo cuadrado es τ. Por lo tanto ζ debe ser el único deslizamiento con eje en c que lleva A a M. Desde que $\zeta^{2m} = \tau^m$ y $\zeta^{2m+1} = \tau^m\zeta$, los deslizamientos en F son exactamente aquellos de la forma $\tau^m\zeta$. Sea $F_1^3 =< \zeta >$ donde ζ es el deslizamiento con eje en c tal que $\zeta^2 = \tau$. Un patrón de friso conteniendo F_1^3 así como su grupo de simetría no tiene un punto de simetría, ni línea de simetría, pero es fijado por un deslizamiento.



F_1^3

Suponga que F contiene isometrías además de ser generado por un deslizamiento ζ con eje en c donde $\zeta^2 = \tau$. Dado que el cuadrado de la traslación $\sigma\zeta$ es τ, entonces $\sigma_c\zeta$ no está en $< \tau >$. Entonces σ_c no puede estar en F. Si F contiene σ_l con l perpendicular a c, entonces F contiene un medio giro $\sigma_\ell\zeta$ .Si F contiene un medio giro, entonces F debe contener σ_A.

En este caso F contiene σ_A y el deslizamiento ζ con centro en c tal que $\zeta^2 = \tau$. Por lo tanto F es F_2^2. Se han corrido todas las posibilidades. El grupo F debe ser uno de los siete grupos dados anteriormente y así se tiene un teorema.

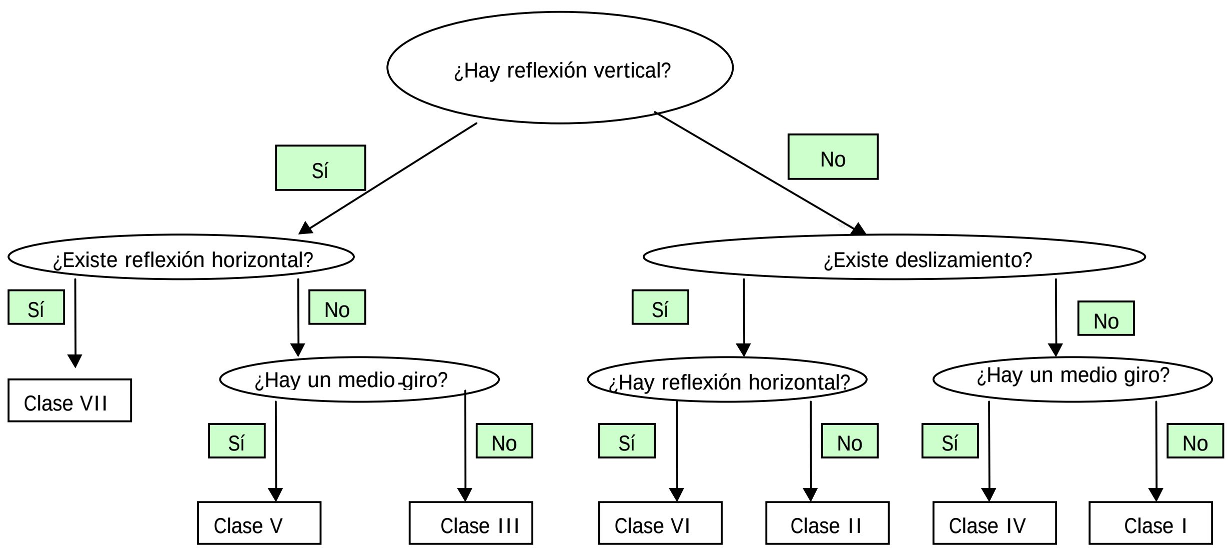
Teorema 2.5

Sea F un grupo de frisos con centro en c cuyas traslaciones forman el grupo generado por la traslación τ. Si F contiene medios giros, supongamos que F contiene σ_A ; si F contiene una reflexión en una línea perpendicular a c, supongamos F contiene σ_A con a perpendicular a c. Sea ζ el deslizamiento con eje c tal que $\zeta^2 = \tau$. Entonces F es uno de los siete distintos grupos definidos a continuación:

Grupos de frisos	Ejemplo
$F_1 =< \tau >$	F F F F F F F F F F F F F F F F F F F F F
$F_1^1 =< \tau , \sigma_c >$	D D D D D D D D D D D D D D D D D D
$F_1^2 =< \tau , \sigma_a >$	A A A A A A A A A A A A A A A A A A A
$F_1^3 =< \zeta >$	DMD W DMD W DMD W DMD W DMD W DMD W DMD W DMD W
$F_2 =< \tau , \sigma_A >$	S S S S S S S S S S S S S S S S S S S S
$F_2^1 =< \tau , \sigma_A , \sigma_c >$	I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I
$F_2^2 =< \zeta , \sigma_A >$	MM MM MM MM MM MM MM MM MM

2.10 Isometrías y frisos

Ya tenemos el concepto de isometría y el de friso. La manera en que se relacionan para el experimento es mediante la clasificación de ellos, existen 7 formas de formar frisos en base de las isometrías



2.11 Base estadística

La prueba que se empleó para poder comprobar estadísticamente los resultados de la prueba que llevó a cabo fue una prueba ANDEVA.

A los sujetos se les aplicaron 20, 50 y 100 reactivos.

Los factores que se manejaron para la prueba fueron número de muestras y tiempo que se le da al sujeto para contestar.

Tiempo. Factor A / Muestras. Factor B	Sin muestras	8 muestras	16 muestras
4 segundos	$Y_{111}, Y_{112}, ..., Y_{11n}$	$Y_{121}, Y_{122}, ..., Y_{12n}$	$Y_{131}, Y_{132}, ..., Y_{13n}$
8 segundos	$Y_{211}, Y_{212}, ..., Y_{21n}$	$Y_{221}, Y_{222}, ..., Y_{22n}$	$Y_{231}, Y_{232}, ..., Y_{23n}$

La prueba de éste experimento se puede describir mediante el modelo:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Con:

$i = 1,2$ (tiempo) (en este caso a=2)

$j = 1,2,3$ (muestras) (en este caso b=3)

$k = 1,2,..., n$

En donde μ es el efecto medio general, τ_i es el efecto i-ésimo nivel del factor renglón A, β_j es el efecto del j-ésimo nivel del factor columna B, $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j y ε_{ij} es el componente de error aleatorio. Inicialmente se supone que ambos factores son fijos y que los efectos de tratamiento se definen como desviaciones de la media general. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{2} \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^{3} \beta_j = 0$. Se supone que los efectos de interacción son fijos y que se definen de la manera $\sum_{i=1}^{2} (\tau\beta)_{ij} = 0$. Hay un total de 3*2*n observaciones porque se realizan n réplicas.

En el caso particular del experimento, el número n varió por cada celda.

En este caso, al tratarse de un diseño factorial de 2 factores, tanto los factores (o tratamientos) de renglón como de columna tienen la misma importancia. Específicamente el interés consiste en probar hipótesis acerca de la igualdad de los efectos de tratamiento de renglón (tiempo), es decir:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2$$

Vs

H_1 : Al menos una $\tau_i \neq 0$

Y de la igualdad de los efectos de tratamiento de columna (número de muestras)

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

Vs

H_1 : Al menos una $\beta_j \neq 0$

También es interesante determinar si los tratamientos de renglón y columna interaccionan. Matemáticamente se expresa:

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$$

Vs

$$H_1 : \text{Al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

La forma en que se pueden probar las hipótesis, empleando análisis de varianza bifactorial es:

Sea $Y_{i..}$ el total de las observaciones bajo el i-ésimo nivel del factor A, $Y_{.j.}$ el total de las observaciones bajo el j-ésimo nivel de factor B, $Y_{ij.}$ el total de las observaciones de la ij-ésima celda, e y... el total de las observaciones. Se definen $\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{.j.}$, $\overline{Y}_{ij.}$ y $\overline{Y}_{...}$ como los promedios de renglón, columna, celda y general, respectivamente.

$$\overline{Y}_{i..} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad \overline{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{2n} \qquad i = 1,2$$

$$\overline{Y}_{.j.} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad \overline{Y}_{.j.} = \frac{Y_{.j.}}{2n} \qquad j = 1,2,3$$

$$\overline{Y}_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad \overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{...}}{2n} \qquad i = 1,2;\ j = 1,2,3$$

$$\overline{Y}_{...} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad \overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{3 * 2 * n} \qquad j = 1,2,3$$

La suma total de cuadrados corregida puede expresarse mediante:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=}^{n}((Y_{i..} - \overline{Y}_{...}) + (Y_{.j.} - \overline{Y}_{...}) + (\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}((Y_{i..} - \overline{Y}_{...}) + (Y_{.j.} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}))^2$$

$$= bn\sum_{i=1}^{2}(\overline{Y}_{...} - \overline{Y})^2 + an\sum_{j=1}^{3}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2 + n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2$$

Porque los seis productos cruzados del segundo miembro de la ecuación son iguales a cero. Se observa que la suma total de cuadrados se ha descompuesto en una suma de cuadrados debida a los "renglones" o al factor A (SS_A), en una suma de cuadrados debida a las interacciones entre A y B (SS_{AB}), y en una suma de cuadrados debida al error (SS_E). Analizando el último término del miembro

derecho de la ecuación anterior es posible observar que es necesario tener al menos réplicas donde n sea mayor o igual a 2, para obtener la suma de cuadrados del error.

Resumiendo podemos expresarlo de la siguiente manera:

$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} - \frac{Y_{...}^{2}}{abc}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y^2_{i...}}{bn} - \sum_{i=1}^{a}\frac{Y^2_{....}}{abn}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y^2_{..j.}}{an} - \sum_{i=1}^{a}\frac{Y^2_{....}}{abn}$$

$SS_E = SS_T - SS_{AB} - SS_A - SS_B = SS_T - SS_{Subtotales}$

$$SS_{Subtotales} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y^2_{.ij.}}{n} - \frac{Y^2_{....}}{abn}$$

$SS_{AB} = SS_{Subtotales} - SS_A - SS_B$

Los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados son:

Efecto	Grados de libertad
A (tiempo)	$a - 1 = 2 - 1 = 1$
B (muestras)	$b - 1 = 3 - 1 = 2$
Interacción AB	$(a - 1)(b - 1) = 2$
Error	$ab\,(n - 1)n^*$
Total	$abn - 1$

Esta descomposición del total en $abn - 1$ grados de libertad para la suma de cuadrados se puede justificar como sigue: Los efectos principales de A (tiempo) y B (muestras) tienen 2 y 3 niveles respectivamente, por lo tanto tienen 2-1 y 3-1 grados de libertad como se muestra. Los grados de libertad de la interacción simplemente corresponden a los grados de libertad de cada celda) los cuales son iguales a $abn - 1$ menos los grados de libertad de los dos efectos principales A y B; en otras palabras, $ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$. Dentro de cada una de las ab celdas hay $n - 1$ grados de libertad entre las n réplicas, por lo tanto, hay $ab\,(n - 1)$ grados de libertad del error. Se observa que la suma de los grados de libertad de los términos del miembro derecho de la ecuación resumen es igual al total de los grados de libertad.

Cada suma de cuadrados dividida entre sus grados de libertad produce una media de cuadrados. Los valores esperados de las medias de los cuadrados son:

$$E(MS_A) = E\left(\frac{SS_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an\sum_{i=1}^{b}\beta_i^2}{b-1}$$

$$E(MS_{AB}) = E\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$$

$$E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2$$

Tomando en cuenta que ya que las hipótesis nulas consisten en que no hay efectos por tratamiento de renglón, columna ni interacción, entonces MS_A , MS_B , MS_{AB} y MS_E son estimadores de σ^2 . Sin embargo, si existen diferencias entre los tratamientos de renglón, entonces MS_A será mayor que MS_E; de una manera similar, si hay efectos de tratamiento de columna o interacción, las medias de los cuadrados correspondientes serán mayores que MS_E. Por lo tanto, para probar el significado de ambos efectos principales, así como de su interacción, simplemente deben dividirse las medias de cuadrados correspondientes entre la media de cuadrados del error. Valores grandes de estas razones implican que los datos no concuerdan con las hipótesis nulas.

Si reconsidera que el modelo lineales adecuado y que los términos del error ε_{ijk} son independientes con distribuciones normales con varianza constante σ^2 , entonces las razones de las medias de los cuadrados MS_A /MS_E , MS_B /MS_E y MS_{AB} /MS_E tienen distribución F con $a-1$, $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad en el numerador, respectivamente, y $ab(n-1)$ grados de libertad en el denominador. Las regiones críticas corresponden al extremo superior de la distribución F .

Capítulo 3

Protocolo de la investigación

3.1 Objetivo

Como ya se vio en el capitulo anterior, el grupo de frisos, genera un conjunto de clases de equivalencia en cuanto a las formas geométricas en las que se acomodan las figuras que conforman al friso.

La idea del experimento es la de investigar si de forma implícita los sujetos pueden encontrar la forma en la que está partido el conjunto de frisos.

3.2 Hipótesis

1. El concepto de clases de equivalencia puede ser adoptado por los sujetos de manera implícita.
2. Mediante pruebas de reacción serial se buscará ver si el tiempo influye para que el sujeto adquiera el concepto de clase de equivalencia, sin que pierda su carácter de implícito.

3.3 Diseño de la prueba.

Primera parte
Se preguntará al sujeto:

- Nombre
- Fecha de nacimiento
- Escolaridad (medido en años a partir de primer año de primaria)
- Lateralidad (derecho o zurdo)
- ¿Ha tenido algún problema neurológico? (epilepsia, desmayo, accidente con pérdida de conocimiento)
- ¿Usa lentes? ¿Cuál es su graduación?
- Campo de estudios o afinidades.

Segunda parte
Dependiendo la modalidad de la prueba que le haya tocado al sujeto se le mostrará o no una serie de frisos dándole la única indicación al sujeto de: "A continuación aparecerán en la pantalla una serie de figuras, están divididas en grupos los cuales podrás distinguir porque son de distintos colores, te pido que solamente las observes". Enseguida aparecerán en bloques, los frisos muestra.

Es muy importante no dar indicaciones extra ni información acerca del objetivo al sujeto antes de que termine completamente la prueba, ya que eso podría interferir en el carácter implícito de la prueba.

Tercera parte
Se le dará al sujeto la indicación: "Van a aparecer parejas de figuras, necesito que con las teclas 1 y 2 de la parte numérica del teclado, elijas la opción sí (con el número 1), si crees que pertenecen al mismo grupo o no (con el número 2), si crees que son de distinto grupo. La figura sólo aparecerá por unos momentos.". Posteriormente aparecerán las parejas que el sujeto tendrá que clasificar, el número de ellas variará dependiendo de la modalidad de la prueba.

Cuarta parte
Se le preguntará al sujeto: "¿De qué manera contestaste la prueba?"

Número de reactivos	Número de ejemplos por cada clase	Tiempo por reactivo
20	48 (8 de cada clase) [30]	4 segundos
		8 segundos
	96 (16 de cada clase)	4 segundos
		8 segundos
	Sin ejemplos	4 segundos
		8 segundos
50	48	4 segundos
		8 segundos
	96	4 segundos
		8 segundos

[30] Dentro de los ejemplos que se le proporcionaron al sujeto no se incluyó el de la clase formada por traslación, ya que se consideró que esto obviaría la lógica de la prueba.

	Sin ejemplos	4 segundos
		8 segundos
100	48	4 segundos
		8 segundos
	96	4 segundos
		8 segundos
	Sin ejemplos	4 segundos
		8 segundos

3.4 Algunas consideraciones

La importancia de que se le diga al sujeto que únicamente tiene que observar las figuras que se le mostrarán es debido a que se ha encontrado en diversas pruebas que el desempeño cambia según las instrucciones que se le den al sujeto [31]

Se decidió incluir la pregunta directa "¿Cómo resolviste la prueba?" siguiendo las recomendaciones de Jackson y Jackson (1995) respecto a la eliminación de sujetos que presentaran aprendizaje explícito como medida de control para medir realmente el aprendizaje implícito. Cabe destacar que las respuestas verbales no siempre reflejan el conocimiento que tenga el individuo respecto a la prueba[32], e inclusive puede proporcionar una impresión distorsionada acerca de lo que la gente sabe. También no hay correlación entre el desempeño de la gente en ciertas tareas y su habilidad de responder preguntas escritas[33]. Sin embargo existen estudios que han mostrado que con una práctica extensa, la gente desarrolla algún conocimiento explícito, esto muestra que el entrenamiento da la oportunidad de demostrar que ellos conocen, en lugar de simples preguntas verbales acerca de la prueba.

Respecto al protocolo

Se quiere dejar clara la construcción del protocolo dado que en la literatura se presentan diversas controversias respecto a puntos de vista sesgados en las investigaciones. Así mismo mediante el diseño de experimento planteado aquí es posible averiguar cuál o cuáles son los factores que influyen en la clasificación.

Se han tomado en cuenta factores que en un principio pudieran sonar subjetivos como el número máximo de reactivos a aplicar, tomando en cuenta que las personas al realizar una tarea por cierto tiempo pierden la concentración en ella en aras de terminarla de manera pronta.

También se ha tratado de evitar ambigüedades en la interpretación de los resultados, como se han encontrado en las pruebas de gramáticas artificiales.

[31] Reber, *Implicit learning and tacit knowledge*
[32] Berry, Dienes, *Implicit learning: Theorical and empirical issues*
[33] Berry y Bradbent, 1984; 1987; 1988

3.5 Resultados

3.5.1 Resultados de la prueba piloto

Se realizó una prueba piloto la cual consistió en:

Etapa 1
Recolección de datos del sujeto.

Etapa 2
Se le dieron al sujeto las instrucciones: "Necesito que observe las siguientes figuras. Están divididas en 4 grupos, los cuales podrá identificar porque cada grupo es de distinto color. Lo único que necesito es que observe las figuras".

Etapa 3
Se le mostraron al sujeto pantallas con 5 frisos, 8 pantallas en total, de las cuales 2 pertenecen a cada clase; las figuras de cada clase aparecieron de distinto color. Cada pantalla apareció por espacio de 15 segundos para continuar inmediatamente con otra.

Etapa 4
Al finalizar la exposición de las clases se le dan al sujeto las instrucciones: "De las parejas de figuras que se le van a presentar necesito que indique cuáles cree que pertenezcan al mismo grupo".

La presentación de las parejas de frisos a clasificar (sí- pertenecen al mismo grupo; no- pertenecen a distintos grupos) es en bloques de 5 parejas, sin límite de tiempo para contestar. En número total de reactivos fueron 20.

Esta prueba se enfocaba sólo en 4 clases de equivalencia, ninguna de ellas era la clase que realiza traslación únicamente.

La prueba no tenía retroalimentación, es decir, el sujeto contestaba los reactivos sin saber a lo largo de toda la prueba si está bien o mal.

Los resultados de la prueba piloto fueron:

Promedio de respuestas incorrectas	Varianza	Número de sujetos entrevistados
7	11.2695	41

Las hipótesis que se manejaron en esta prueba fueron:

Ho: Los sujetos contestan de manera aleatoria Vs Ha: La probabilidad de acertar es mayor a .5

Dado que se le dan al sujeto dos respuestas las hipótesis anteriores son equivalentes a:

Ho: $\mu = 10$. (El promedio de errores es 10) Vs Ha: $\mu < 10$. (El promedio de errores es menor a 10)

Al realizar la prueba se encontró que se rechazaba la hipótesis nula con $p < 0.01$.

3.5.2 Resultados de la prueba

Se empleará la siguiente nomenclatura para identificar a las variables involucradas en el estudio:

ACIERTOS: Variable independiente, número de aciertos en la prueba. Suma del número de éxitos obtenidos en la prueba.

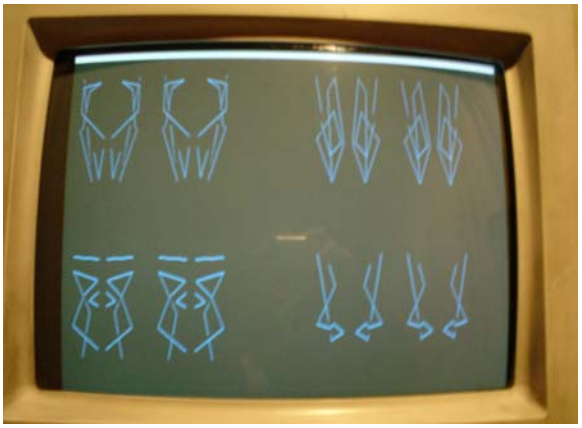
TIEMPO: Variable dependiente, tiempo que se le dio al sujeto para contestar cada reactivo. 4 u 8 segundos.

NÚMERO: Número de frisos ejemplo de cada categoría. 0, 8 ó 16.

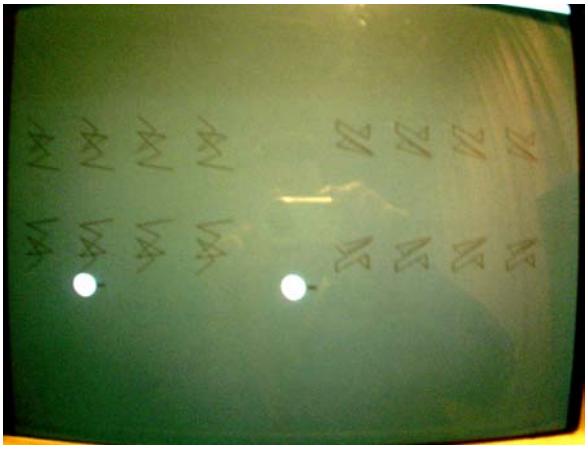
Las posibles respuestas dentro de la prueba son: Sí, No y la ausencia de la respuesta. Cada reactivo tiene dos opciones de calificación, 1 cuando el sujeto contesta correctamente y 0 cuando la respuesta que da es incorrecta o en caso de que el sujeto no haya contestado el reactivo.

Para poder considerar el grado de aprendizaje, se consideró que el sujeto podía contestar cada reactivo correctamente con una probabilidad de 0.5.

Pantalla de recolección de datos



Tipo de pantalla que se mostró al sujeto para desplegar los ejemplos de clases de frisos



Tipo de pantalla que se aplicó para la prueba

El número de sujetos a los cuales se les aplicó la prueba fue el siguiente:

Reactivos	Con muestras / sin muestras	Tiempo	Muestras	Número de sujetos
20	Sin	4	0	5
		8	0	5
	Con	4	8 de cada clase	2
		4	16 de cada clase	5
		8	8	1
		8	16	4
50	Sin	4	8	4
		8	8	5
	Con	4	8	4
		4	16	5
		8	8	5
		8	16	4
100	Sin	4	8	2
		8	8	4
	Con	4	8	3
		4	16	6
		8	8	2
		8	16	6

3.5.2.1 Análisis de los resultados de los sujetos que realizaron prueba con 20 reactivos

Los sujetos que realizaron la prueba con veinte reactivos fueron 22, obteniendo un promedio de 10,5 respuestas correctas y una varianza de 7.136, generando un intervalo de confianza al 95% de (9.58, 11.957) respuestas correctas.

	Casos	Media	Intervalo de confianza		Varianza	Desv. Standard
			-95.000%	95.000		
ACIERTOS	22	10.772	9.588	11.957	7.136	2.671

Se probó un modelo $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, donde τ_i mide el tiempo que se le da al sujeto para contestar cada reactivo y β_j mide el número de muestras de los frisos

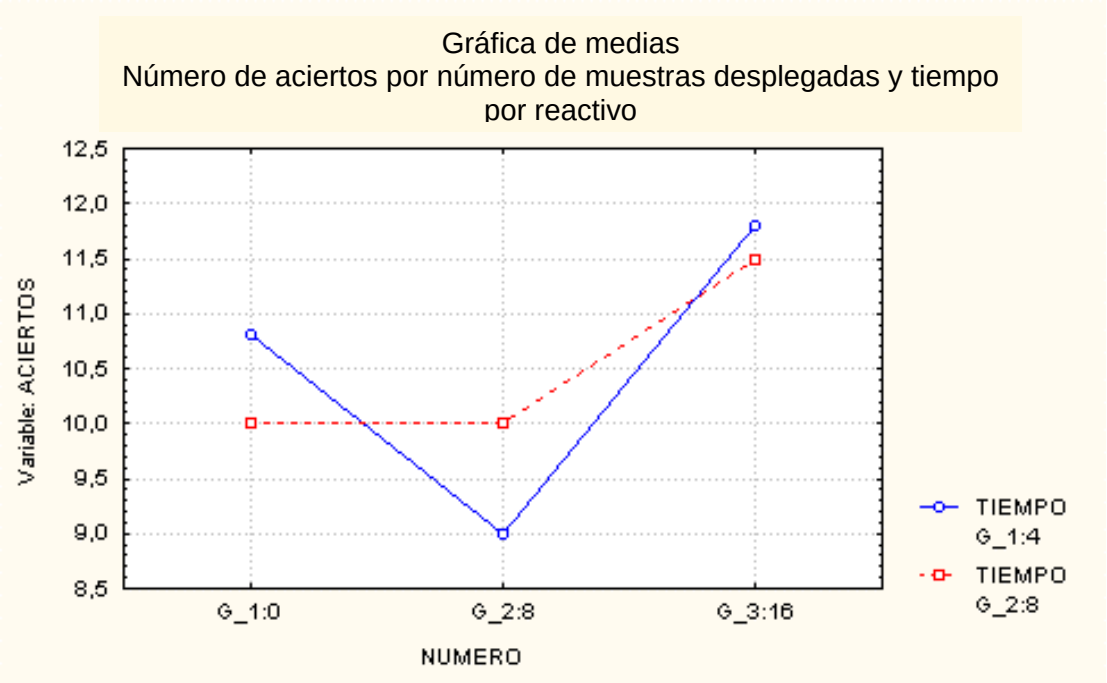
ANDEVA						
Fuente de variación 1-Tiempo 2-Número	**G.L. Efectos**	**Cuadrados medios**	**G.L. Error**	**Cuadrados medios**	**F**	**Nivel p**
1	1	0.004	16	8.287	0.0005	0.982
2	2	6.264	16	8.287	0.7558	0.485
12	2	0.862	16	8.287	0.1040	0.901

La tabla indica a través de la prueba F y del nivel p para cada tratamiento e interacción lo siguiente:

1. No tiene relación importante o significativa el tiempo entre los grupos
2. Lo mismo sucede para la variable número de muestras de frisos.
3. La relación conjunta entre tiempo y número de frisos no presenta una correlación significativa con la variable respuesta, que es contestar acertadamente.

Examinando las pruebas, se observa que estadísticamente no hay diferencia entre los grupos, ya sea examinándolos por la variable tiempo o por la variable número (número de muestras de los frisos).
La media de 10.77 aciertos, representa el 54% de respuestas bien contestadas dentro de la prueba, en promedio.

Se encontró que la media de aciertos es muy cercana a 10, y dentro del intervalo de confianza de la misma se encuentra el 10, por lo cual se puede pensar que no existe un aprendizaje por parte de los sujetos.



3.5.2.2 Análisis de los resultados de los sujetos que realizaron prueba con 50 reactivos

	Casos	Media	Intervalo de confianza		Varianza	Desv. Standard
			-95.000%	95.000		
ACIERTOS	27	28.740	26.876	30.604	22.199	4.711

Se probó un modelo $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, donde τ_i mide el tiempo que se le da al sujeto para contestar cada reactivo y β_j mide el número de muestras de los frisos

Los sujetos que realizaron la prueba con cincuenta reactivos fueron 27, obteniendo un promedio de 28.74 respuestas correctas y una varianza de 22.19, generando un intervalo de confianza de (26.8,30.6) respuestas correctas.

ANDEVA						
Fuente de variación **1. Tiempo** **2. Número**	**G.L. Efectos**	**Cuadrados medios**	**G.L. Error**	**Cuadrados medios**	**F**	**Nivel p**
1	1	35.779	21	21.388	1.672	0.209
2	2	31.090	21	21.388	1.453	0.256
12	2	17.646	21	21.388	0.825	0.451

La tabla indica a través de la prueba F y del nivel p para cada tratamiento e interacción lo siguiente:

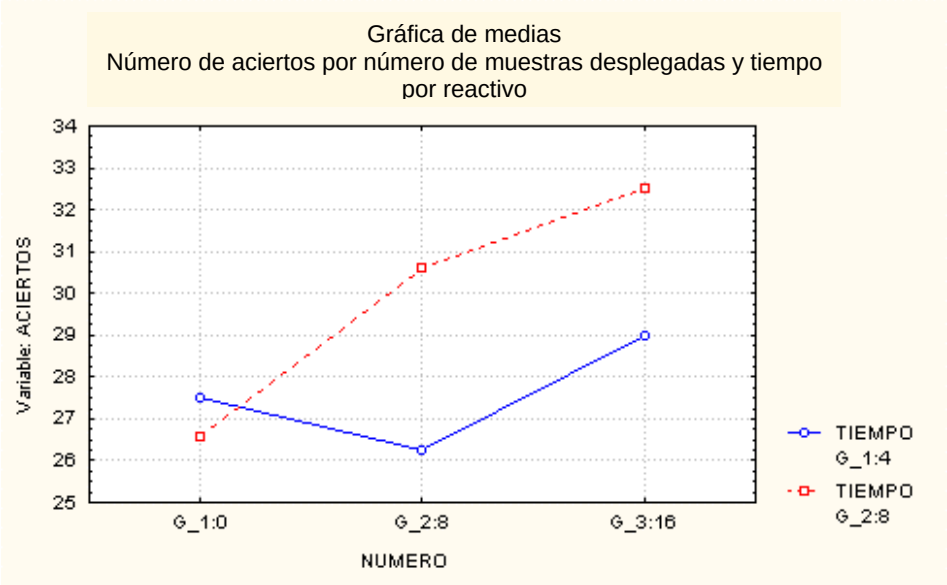
1. No tiene relación importante o significativa el tiempo entre los grupos.
2. Lo mismo sucede para la variable número de muestras de frisos.
3. La relación conjunta entre tiempo y número de frisos no presenta una correlación significativa con la variable respuesta

Examinando las pruebas, se ve que estadísticamente no hay diferencia entre los grupos, ya sea examinándolos por la variable tiempo o por la variable número (número de muestras de los frisos).

Comparando con respecto al nivel p de los sujetos que realizaron la prueba con 20 reactivos, el nivel disminuye.

La media de 28.74 aciertos, representa el 57.4% de respuestas bien contestadas dentro de la prueba, en promedio.

Al examinar el intervalo de confianza de la media, se observa que 25 (número que se esperaría con p = 0.5 de acierto / error) no se encuentra en dicho intervalo, con lo cual se puede decir que el índice de aciertos es mayor.



3.5.2.3 Análisis de los resultados de los sujetos que realizaron prueba con 100 reactivos

	Casos	Media	Intervalo de confianza		Varianza	Desv. Standard
			-95.000%	95.000		
ACIERTOS	23	57.739	53.517	61.960	95.292	9.761

Se probó un modelo $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, donde τ_i mide el tiempo que se le da al sujeto para contestar cada reactivo y β_j mide el número de muestras de los frisos.

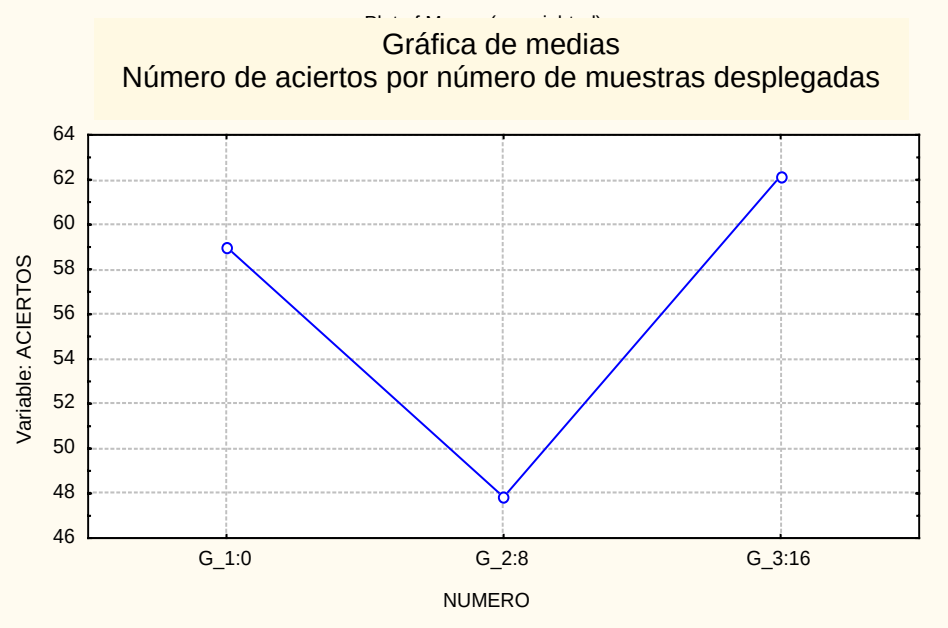
Los sujetos que realizaron la prueba con cien reactivos fueron 23, obteniendo un promedio de 57.73 respuestas correctas y una varianza de 95.29, generando un intervalo de confianza de (53.51,61.96) respuestas correctas.

ANDEVA						
Fuente de variación 1. Tiempo 2 Número	**G.L. Efectos**	**Cuadrados medios**	**G.L. Error**	**Cuadrados medios**	**F**	**Nivel p**
1	1	107.188	17	68.441	1.566	0.227
2	2	353.935	17	68.441	5.171	0.018
12	2	43.212	17	68.441	0.631	0.543

La tabla indica a través de la prueba F y del nivel p para cada tratamiento e interacción lo siguiente:

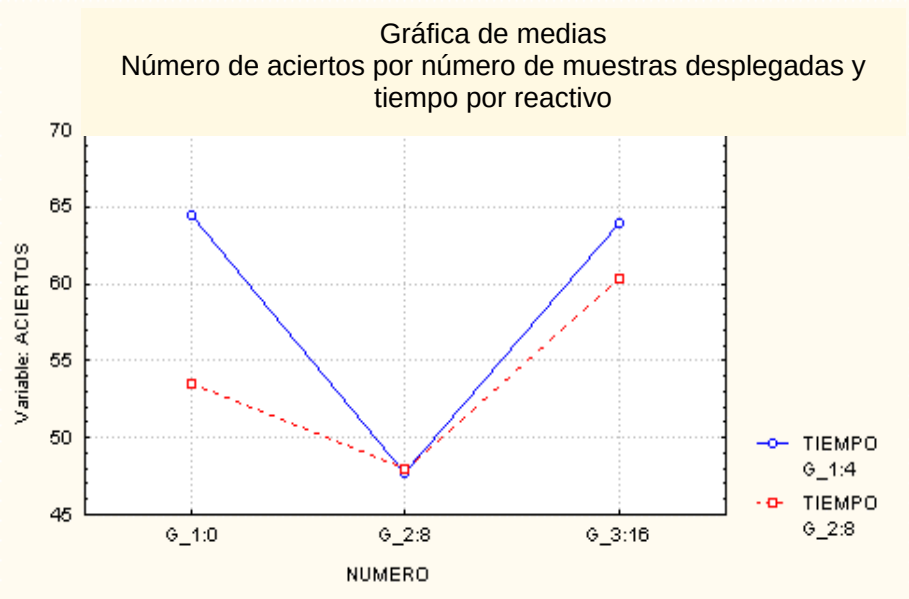
1. No tiene relación importante o significativa el tiempo entre los grupos.
2. En el caso del número de muestras, esta variable sí es significativa al 0.017.
3. La relación entre tiempo y número de frisos no presenta una correlación significativa con la variable respuesta, que es contestar acertadamente.

Se analizó la media de cada uno de las diferentes opciones dentro del número de ejemplos de cada clase.



El grupo que no contó con muestras tuvo un promedio de 59 aciertos de 100 reactivos, el grupo al cual se le mostraron 8 ejemplos de cada clase, su promedio fue de 48 (el más bajo) y finalmente el grupo al cual se le mostraron 16 ejemplos de cada clase, obtuvo un promedio de aciertos de 62 (el más alto).

La media de 57.73 aciertos, representa el 58% de respuestas bien contestadas dentro de la prueba.
Al examinar el intervalo de confianza de la media, el número de 50 aciertos (número que se esperaría con p = 0.5 de acierto / error) no se encuentran en dicho intervalo, con lo cual se puede decir que el índice de aciertos es mayor.



3.5.2.4 Análisis de los resultados de los 20 primeros reactivos de los 3 grupos (20,50 y 100).

Ya que los primeros 20 reactivos de los 3 grupos son los mismos, se hizo un análisis del conjunto de todos los primeros reactivos.

Se probó un modelo $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, donde τ_i mide el tiempo que se le da al sujeto para contestar cada reactivo y β_j mide el número de muestras de los frisos

	Casos	Media	Intervalo de confianza		Varianza	Desv. Standard
			-95.000%	95.000		
ACIERTOS	72	10,986	10,386	11,586	6,520	2,553

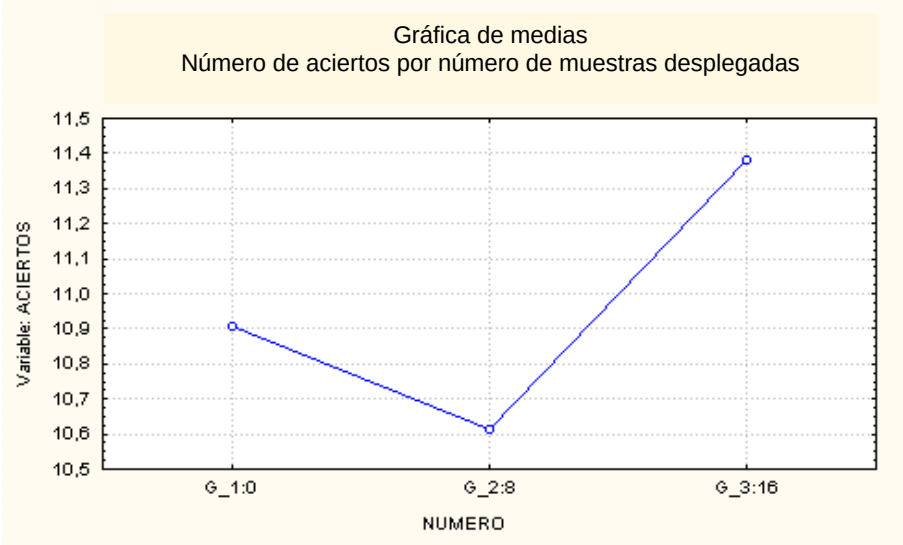
En conjunto el número de sujetos que realizaron la prueba en total fueron 72, obteniendo un promedio (en los primeros 20 reactivos) de 10.98 respuestas correctas y una varianza de 6.52, generando un intervalo de confianza de (10.38,11.58) respuestas correctas.

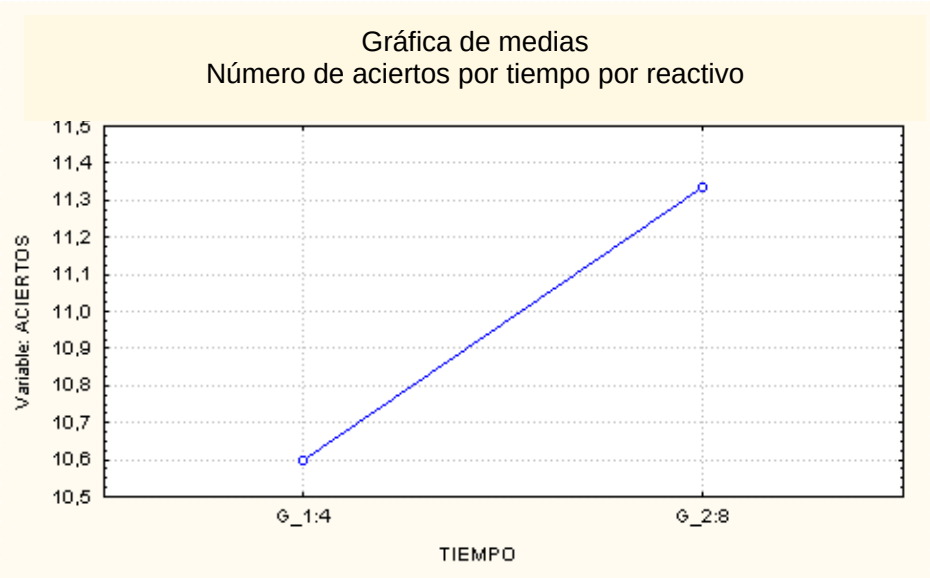
ANDEVA						
Fuente de variación 1. Tiempo 2. Número	**G.L. Efectos**	**Cuadrados medios**	**G.L. Error**	**Cuadrados medios**	**F**	**Nivel p**
1	1	9.076	66	6.249	1.452	0.232
2	2	3.545	66	6.249	0.567	0.569
12	2	18.847	66	6.249	3.015	0.055

La tabla indica a través de la prueba F y del nivel p para cada tratamiento e interacción lo siguiente:

1. No tiene relación importante o significativa el tiempo entre los grupos.

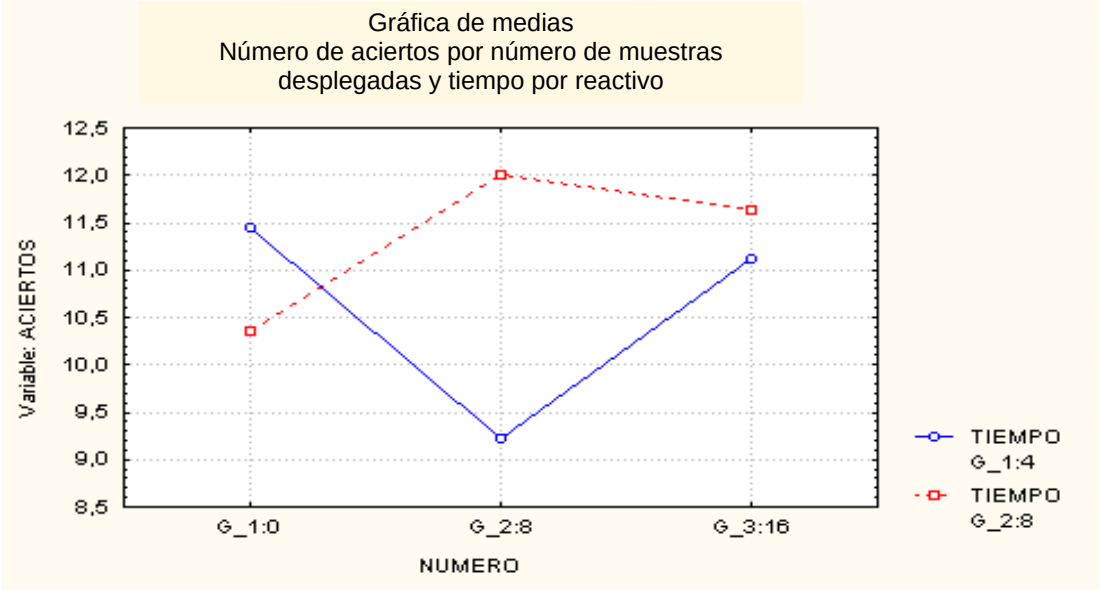
2. Lo mismo sucede para la variable número de muestras de frisos.
3. Sin embargo, la relación conjunta entre tiempo y número de frisos presenta una correlación significativa con la variable respuesta, con un nivel de 0.055.





En la primera gráfica se aprecia que el grupo que obtuvo mayor cantidad de aciertos fue aquel que contó con mayor número de muestras.

En la segunda gráfica se aprecia que el grupo que obtuvo mayor cantidad de aciertos fue aquel que contó con más tiempo para contestar los reactivos.



El comportamiento de los sujetos a los cuales no se les mostró ejemplos de las clases de equivalencia de frisos, tuvo un cambio con respecto a los que sí se les mostró, ya que para este grupo, a los sujetos a los cuales se les dio 4 segundos para contestar cada reactivo, en promedio, tuvo mejor desempeño que aquellos a los cuales se les dio 8 segundos.

Observando el intervalo de confianza, vemos que no se encuentra el 10.

3.5.2.5 Análisis de los resultados de los 50 primeros reactivos de 2 grupos (50 y 100)

Tanto el grupo de 50 reactivos como el de 100 reactivos comparten los primeros 50 reactivos. Se analizaron los resultados en conjunto para estos reactivos.

Se probó un modelo $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, donde τ_i mide el tiempo que se le da al sujeto para contestar cada reactivo y β_j mide el número de muestras de los frisos

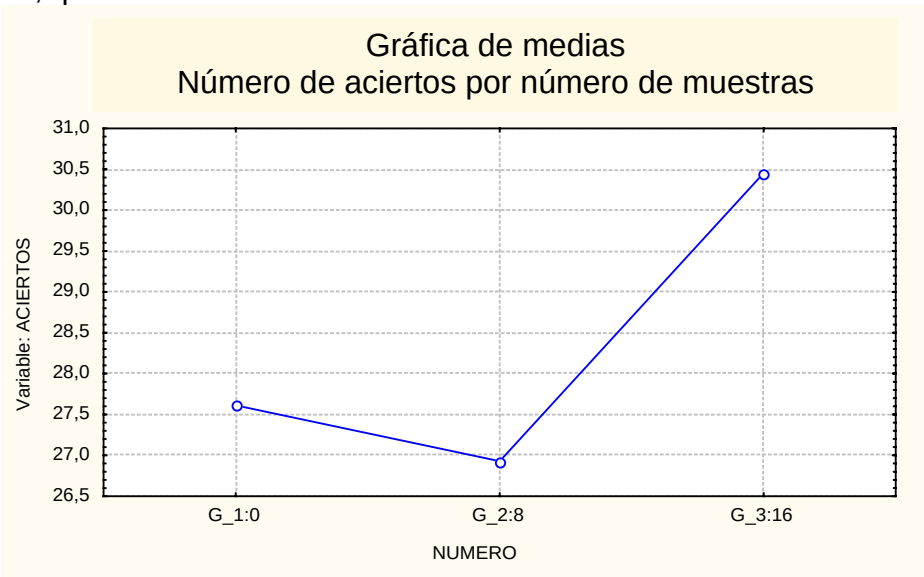
	Casos	Media	Intervalo de confianza		Varianza	Desv. Standard
			-95.000%	95.000		
ACIERTOS	50	28,52	27,091	29,948	25,275	5,027

Los sujetos que realizaron los primeros cincuenta reactivos fueron 50, obteniendo un promedio de 28.52 respuestas correctas y una varianza de 25.27, generando un intervalo de confianza de (27.09, 29.94) respuestas correctas.

ANDEVA						
Fuente de variación 1. Tiempo 2. Número	**G.L. Efectos**	**Cuadrados medios**	**G.L. Error**	**Cuadrados medios**	**F**	**Nivel p**
1	1	2.428	44	23.194	0.104	0.747
2	2	62.612	44	23.194	2.699	0.078
12	2	37.471	44	23.194	1.615	0.210

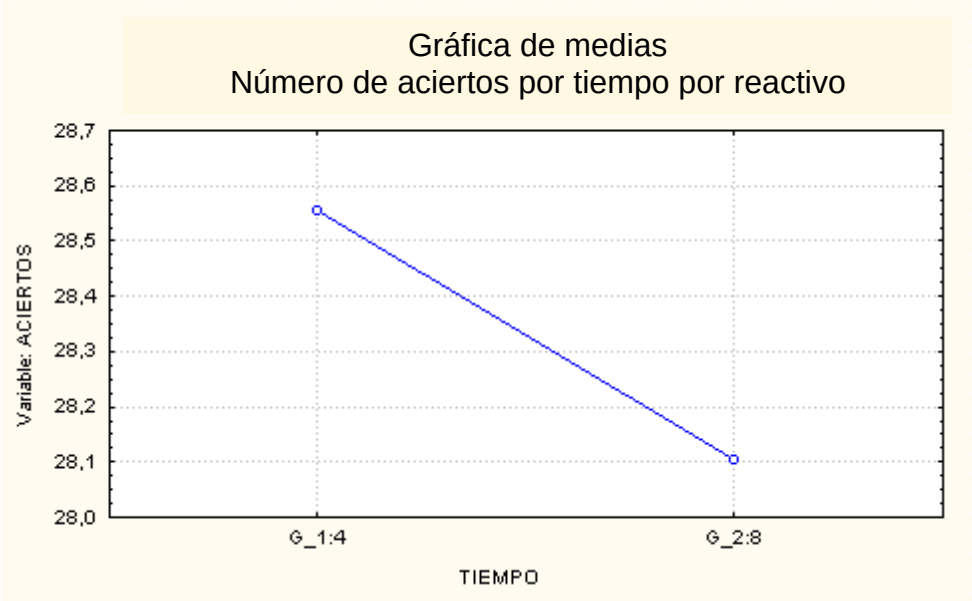
La tabla indica a través de la prueba F y del nivel p para cada tratamiento e interacción lo siguiente:

1. No tiene relación importante o significativa el tiempo entre los grupos.
2. En el caso de la variable número de muestras, encontramos que es significativo al 0.078
3. La relación conjunta entre tiempo y número de frisos no presenta una correlación significativa con la variable respuesta, que es contestar acertadamente.

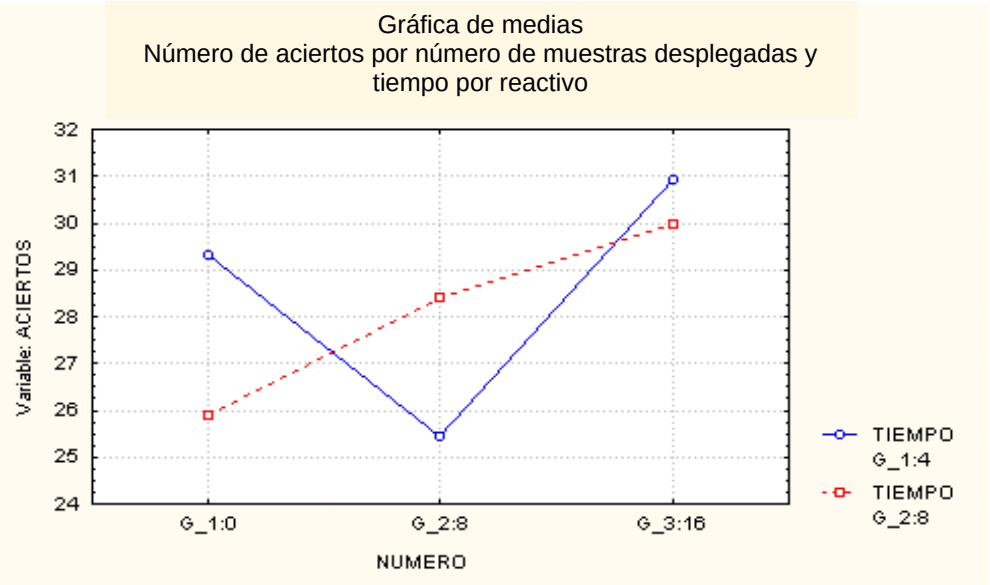


Ejemplos	ACIERTOS
0	27.611
8	26.928
16	30.454

El grupo que obtuvo el mayor número de aciertos en promedio fue aquel que tuvo 16 ejemplos por clase.



Al observar la gráfica, y comparándola contra los resultados de los primeros 20 aciertos, se aprecia que la tendencia cambia, al tener un mejor desempeño aquellos sujetos que tuvieron 4 segundos para contestar cada reactivo. Un punto que podría haber importado en este caso fue el factor tiempo, ya que los sujetos a los cuales se les dio 8 segundos por reactivo podrían haber presentado cansancio a la prueba, dado el tiempo que ya llevaban contestando la misma.



En esta gráfica nuevamente se observa que dentro del grupo que no tuvo muestras de las clases, los que contestaron mejor la prueba, en promedio, son aquellos que contaron con 4 segundos por reactivo, contra aquellos que contaron con 8 segundos.

Conclusiones

Se vio que el comportamiento entre los sujetos que contaron con ejemplos de cada clase y los que no contaron con estos ejemplos, es muy distinta. El hecho de que a los sujetos se les de un tiempo reducido para reaccionar ante los nuevos estímulos puede crear una rápida idea y conceptualización de estos. De esta manera, el sujeto está usando más un sentido intuitivo que un razonamiento.

Por otra parte, se observa que en general, aquellos sujetos que contaron con mayor número de muestras de cada clase (16 por cada clase), tuvieron mayor número de aciertos.

Una consideración que se debe de tener es que las pruebas no pueden ser muy extensas, dado que el sujeto pierde concentración e interés en la misma, lo cual puede reflejar resultados erróneos. Dentro de mi apreciación personal al analizar los datos y al aplicar algunas de las pruebas de 100 reactivos es que los sujetos de estas pruebas pierden interés al llegar a los últimos reactivos y no saber cuándo acabará la prueba.

La prueba significó todo un reto, en el sentido de documentarla para medir el concepto de aprendizaje y aplicarlo a ella.

Glosario

- *Epistemológico:* Teoría del conocimiento
- *Memoria semántica:* La intrincada red de conceptos, asociaciones y hechos que constituyen nuestro conocimiento general del mundo (Schacter 1996)
- *Léxico:* Perteneciente o relativo al léxico o vocabulario de una lengua o región. Caudal de voces o modismos de un autor.
- *Algoritmo:* Método y notación de las distintas formas del cálculo
- *Automatizar:* Hacer autómata a una persona, a un gremio, a una institución, quitándole su autonomía o libertad de pensamiento y acción.
- *Conciencia:* Capacidad del ser humano de conocer sus propios procesos psíquicos y todos aquellos fenómenos que están dentro de su órbita cognoscitiva y que se encuentran por tanto bajo el control de la razón.
- *Grupo abeliano:* Se dice que G es un grupo abeliano si su operación binaria es conmutativa.

Bibliografía

Libros

- Barr, Kiernan, 1994, El sistema nervioso humano. Un punto de vista anatómico, Harla, México, quinta edición.

- Berry, Dienes, 1993, *Implicit learning: Theorical and empirical issues*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Reino Unido.

- Fraleigh, 1987, *Álgebra abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, México.

- Guyton, 1975, *Fisiología humana*, Ed. Interamericana, México, cuarta edición.

- Kandel, 2000, *Principles of neural sciences*, Ed. Mc Graw Hill, E.E.U.U., cuarta edición.

- Reber, 1993, *Implicit learning and tacit knowledge: An Essay on the Cognitive Unconscious*, Ed. Oxford University press, E.E.U.U..

- Schacter, 1997, *Searching for the memory: The brain, the Mind, and the past*, Ed. Perseus Books, E.E.U.U.

- Vergara Patricia, 2000, *Efecto de la taurina sobre las alteraciones de memoria cerebrales causadas por la exposición a ozono*, Impreso por el autor (tesis de maestría), México.

- Farmer David W., 1995, *Groups and symmetry: A guide to Discovering Mathematics*, Ed. American Mathematical Society, E.E.U.U.

- Martin, 1982, Transformation geometry: An Introduction to Symetry, Ed. Springer Verlag, E.E.U.U.

- Montgomery, 1991, *Diseño y Análisis de Experimentos*, Ed. Grupo Editorial Iberoamericana, México.

- Varios, 1997, *Diccionario Porrúa de la lengua española*, Ed. Porrúa, México, decimosegunda edición.

Revistas

- Cleermans et al,1998, Implicit learning: news from the front, *Trends in Cognitive Sciences*, Vol 2, No. 10.
- Galacho, 1982, El repertorio de la matemática, *Limen*, Argentina.
- Green, Shank, 1993, On the existence of independent explicit and implicit learning systems: An examination of some evidence, *Memory & Cognition*, 21 (3), 305-317.
- Jackson, Jackson, 1995, Do Measures of Explicit Learning Actually Mesure What is Being Learnt in the Serial Reaction Time Task? A Critique of Current Methods, *Psyque*, Reino Unido, vol 2-20.
- Schacter D.L., 1987, Implicit memory: History and current status*, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13: 501-518.
- Schacter et al, 1993, Implicit memory: A selective review ,*Neuroscience*, número 159 82.

Paginas de Internet

- www.joma.org/vol1-2/framecss/rintel/Math/frieze.html
- www.joma.org/vol1-2/framecss/rintel/Math/seven.html
- www.maf.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/Frisos/Frisos.html