

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

ACATLÁN

**APLICACIÓN DEL CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD EN EL
PROCESO DE RESTAURACIÓN DE SEÑALES CON FILTROS
DIGITALES**

Tesis de
Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas y Computación

PRESENTA:

FLORES GÓMEZ JUAN

Asesor de tesis: MTRA. Nora Del Consuelo Goris Mayans

Santa Cruz Acatlán, a 14 de marzo de 2007.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO DEL EXAMEN PROFESIONAL:

PRESIDENTE: MTRO. VÍCTOR JOSÉ PALENCIA GÓMEZ
VOCAL: FÍS. ESPERANZA GEORGINA VALDÉS MEDINA
SECRETARIO: MTRA. NORA DEL CONSUELO GORIS MAYANS
SUPLENTE: GEORGINA ESLAVA GARCÍA
SUPLENTE: ING. SANDRA ORTÍZ MENDOZA

AGRADEZCO:

A Dios por sostenerme en sus brazos, bendecirme con salud y permitirme llevar a cabo este trabajo de investigación.

A MIS PADRES

Sr. Fidencio Juan Flores De Jesús

Sra. Amalia Gómez Baéz

Quienes me cobijan con su amor y comprensión para darme la oportunidad de cursar una carrera profesional, ya que la mejor herencia que recibo es haber terminado mis estudios.

A mis hermanos por el apoyo y comprensión, en especial a:

Alfredo

José

A la UNAM y en especial a la FES Acatlán por brindarme una formación profesional y ser una casa donde convivir y compartir.

Con profunda admiración y respeto a:

MTRA. NORA DEL CONSUELO GORIS MAYANS

Quien con sus conocimientos y profesionalismo logró proporcionarme una valiosa ayuda en la elaboración de este trabajo.

A mis profesores por su guía constante y en particular al:

MTRO. VÍCTOR JOSÉ PALENCIA GÓMEZ

Por dirigirme al tema de esta tesis y por brindarme su valioso consejo durante la carrera.

INDICE

| | |
|---|----|
| Introducción..... | 1 |
| CAPITULO 1 Control Estadístico de Calidad..... | 7 |
| 1.1 Objetivo de una carta de control | 9 |
| 1.2 Naturaleza de los límites de control..... | 10 |
| 1.3 Tipos de Cartas de Control Estadístico de Calidad..... | 11 |
| 1.3.1 Tipos de cartas para variables | 11 |
| 1.3.2 Tipos de cartas por atributos | 12 |
| 1.3.3 Las cartas de control de suma acumulativa..... | 14 |
| 1.4 Carta de control de suma acumulativa | 15 |
| 1.4.1 La máscara V | 16 |
| 1.4.2 La CUSUM tabular (enfoque algorítmico) | 17 |
| CAPITULO 2 Filtros digitales en el dominio del tiempo | 20 |
| 2.1 Análisis de señales | 22 |
| 2.2 Clasificación de señales | 23 |
| 2.2.1 Señal aleatoria..... | 24 |
| 2.2.2 Señales sinusoidales en tiempo discreto | 25 |
| 2.3 Conceptos fundamentales en el análisis de sistemas discretos de señales | 28 |
| 2.3.1 Teorema de Nyquist-Shannon..... | 28 |
| 2.3.2 Transformada discreta de Fourier | 29 |
| 2.3.3 Transformada inversa de Fourier | 29 |
| 2.3.4 La transformada z | 30 |
| 2.3.5 La relación de la transformada de Fourier y la transformada z..... | 30 |
| 2.3.6 Función delta de Dirac | 32 |
| 2.3.7 Sistemas en reposo..... | 32 |
| 2.3.8 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo LTI..... | 32 |
| 2.3.9 Análisis de señales y sistemas en MATLAB | 39 |
| 2.4 Filtros digitales | 42 |
| 2.4.1 Conceptos técnicos en filtros digitales..... | 42 |
| 2.4.2 Bases teóricas en los filtros..... | 43 |
| 2.4.3 Filtros de Medias Móviles..... | 45 |
| 2.4.4 Filtro de Polo Sencillo | 47 |
| 2.4.5 Implementación y análisis de filtros en MATLAB..... | 49 |
| 2.5 Simulación de ruido para un proceso de filtrado en MATLAB | 53 |

| | |
|---|-----|
| 2.5.1 Pruebas estadísticas para la comprobación de normalidad..... | 54 |
| 2.5.2 El análisis estadístico de los números aleatorios generados en MATLAB | 58 |
| 2.5.3 Conceptos a tomar en cuenta en la generación de números pseudoaleatorios | 59 |
| CAPITULO 3 Aplicación experimental de la metodología propuesta..... | 61 |
| 3.1 Planteamientos para el análisis de la hipótesis propuesta en esta tesis | 64 |
| 3.1.1 Justificación de la señal a usarse en el análisis de la hipótesis propuesta en esta tesis | 65 |
| 3.1.2 Planteamiento general del método CUSUM tabular | 72 |
| 3.1.3 Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis de esta tesis..... | 75 |
| 3.1.4 Identificación de las fuentes de sesgos..... | 77 |
| 3.2 Corridas de cartas CUSUM tabular en filtros digitales con dominio en el tiempo | 78 |
| 3.2.1 Filtro Medias Móviles..... | 78 |
| 3.2.2 Filtro Polo Sencillo | 86 |
| CAPITULO 4 Comparación de modelos | 94 |
| 4.1 Control de calidad “actual” del proceso de filtrado digital | 95 |
| 4.2 Evaluación de la medición del Error Cuadrático Medio (ECM) como método actual en el Control Estadístico de Calidad..... | 96 |
| 4.2.1 Filtro Medias Móviles..... | 97 |
| 4.2.2 Filtro Polo Sencillo | 98 |
| 4.2.3 Observaciones del método de control de calidad ECM | 99 |
| 4.3 El método CUSUM tabular en el control de calidad..... | 99 |
| 4.3.1 Filtro Medias Móviles..... | 100 |
| 4.3.2 Filtro Polo Sencillo | 100 |
| 4.4 Tabla comparativa de métodos de control en filtros digitales..... | 101 |
| Conclusiones..... | 103 |
| A.1 Resultados de las pruebas estadísticas de Normalidad realizadas en STATGRAPHICS..... | 107 |
| A.2 Corridas complementarias del método CUSUM..... | 117 |
| Conclusiones sobre las cartas CUSUM | 121 |
| Bibliografía..... | 123 |
| Documentos electrónicos..... | 125 |

Introducción

El proceso de filtrado digital se realiza a través del modelo “ARMA” este modelo se revisa en la materia de “Series de tiempo I”, la representación frecuencial de un filtro digital se realiza mediante la transformada de Fourier y es un tema de la materia de “Tópicos de Cálculo avanzado” y por último las cartas de Control Estadístico de Calidad se ven en la materia de “Estadística II”. Otras materias como “Modelos y simulación” y “Estadística I” se aplican en el análisis de este trabajo. El procedimiento de filtrado digital, la simulación de un sistema de señales y el Control Estadístico de Calidad involucran los temas anteriores, lo que motivó el desarrollo de esta tesis.

Revisando el tema de filtros digitales llegué a la idea de utilizar las Cartas de Control Estadístico para la evaluación del proceso filtrado digital de una señal. Para esta valoración se requiere de seleccionar una Carta de Control Estadístico adecuada al procedimiento de filtrado digital y que además sea de fácil implementación (esta valoración se analiza en el capítulo 1). Se requiere además la definición de los filtros digitales a utilizarse en el análisis teórico de este problema (esta definición se lleva a cabo en el capítulo 2).

Los primeros dos capítulos de se refieren al marco teórico de los modelos matemáticos que sustentan el análisis del **problema de evaluar los filtros digitales de señales mediante cartas de Control Estadístico.**

En el Capítulo 1 se plantea que las cartas de Control Estadístico de Calidad CUSUM (Suma Acumulada) son herramientas adecuadas para la detección de estados fuera de control estadístico pequeños en un proceso y que se adecuan al procedimiento de restauración de señales. Es decir, si los eventos observados experimentan cambios pequeños no-aleatorios para un atributo de calidad predefinido (este estado requiere un

análisis posterior para buscar alguna causa atribuible y una posible medida de corrección).

En específico, la forma tabular de esta metodología CUSUM resulta particularmente útil si el control estadístico se implementa en computadora. Los parámetros requeridos para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media de un proceso, se toman de una tabla de longitud de corrida promedio para una carta CUSUM con $k = 1/2$.

En el Capítulo 2 se revisa la teoría del “análisis de señales”. Esta teoría plantea los requerimientos para el análisis de un sistema de señales, donde un filtro es como tal, un sistema de señales.

Un uso específico de los filtros digitales es la restauración de una señal (altamente correlacionada) que ha sido alterada de alguna forma. La labor de estos filtros es la de eliminar el ruido no correlacionado (aleatorio) de una señal correlacionada. Con la limitación teórica de no contemplar la posibilidad de la presencia de ruido correlacionado, específicamente un ruido con la misma frecuencia que la señal filtrada, esto debido a que en este modelo matemático dos señales con la misma frecuencia no son distinguibles.

Debido al punto anterior, se realiza una revisión del análisis teórico para un filtro digital. Particularmente se analiza el diseño de los filtros a utilizarse en esta tesis y para esto, los filtros digitales con dominio en el tiempo Medias Móviles (MA o Moving Average en inglés) y Polo Sencillo (AR1 o Auto Regresivo) representan ambos, a los filtros restauradores de señales.

El análisis del sistema de señales se realiza en el ambiente de MATLAB (ver. 4.2). Este ambiente permite el filtrado digital con los filtros Medias Móviles y Polo Sencillo

anteriormente mencionados. Por lo anterior, se realiza una revisión de los puntos básicos requeridos por este programa para el análisis del sistema de señales a revisar.

Para la simulación de un proceso de filtrado digital se requiere de un generador de ruido Gaussiano, por lo que se incluye en este capítulo una introducción a estos generadores y en específico a las pruebas estadísticas para números pseudoaleatorios Gaussianos en STATGRAPHICS 4.10 (1998).

En el Capítulo 3 se describen y justifican los elementos utilizados en las corridas correspondientes a la revisión de la hipótesis de esta tesis. Se justifican las variables utilizadas en los modelos teóricos de filtrado digital de señales y de la metodología CUSUM.

Es conveniente aclarar que el análisis realizado en este trabajo se limita a evaluar estadísticamente el filtrado digital, exclusivamente. Por lo que no se tomarán en cuenta las etapas posteriores a este proceso, sólo se mencionan como posibles causas de sesgo y únicamente se toman en cuenta los requerimientos preestablecidos en el análisis de señales.

Además, la implementación y diseño de filtros digitales no es el propósito de esta tesis, por lo que sólo se toma el filtrado digital como una caja negra, donde el proceso teórico únicamente con ruido aleatorio no excede los límites de una carta CUSUM con media cero y varianza uno.

Los enfoques de las Cartas de Control Estadístico de Calidad y de los filtros digitales con dominio en el tiempo son distintos; por un lado los filtros digitales definen al ruido como una señal indeseable (con la limitación de no poder distinguir entre la señal filtrada y un ruido correlacionado, ambos con la misma frecuencia); por el otro lado el Control Estadístico de Calidad verifica que en un proceso sólo se observen variaciones

debidas a un ruido aleatorio (no correlacionado), detectando el momento en que se ve afectado por una causa no aleatoria (ruido correlacionado).

En el análisis de este trabajo se trata de localizar un corrimiento de la media debido a una señal con la misma frecuencia que la señal filtrada y se denomina este corrimiento como “la detección de una señal (ruido correlacionado) con la misma frecuencia que la señal filtrada”, unificando así los dos enfoques del párrafo anterior.

De acuerdo con el orden de ideas anteriores y teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo, el cual es:

Implementar el Control Estadístico de Calidad en el proceso de restauración de señales con filtros digitales, para la detección de ruido no-aleatorio con la misma frecuencia que la señal filtrada.

Se plantea entonces, la siguiente hipótesis:

“Las Cartas de Control CUSUM pueden detectar el ruido no-aleatorio en la restauración de señales con filtros digitales”.

Para llevar a cabo el análisis de esta hipótesis se revisan las características requeridas por las cartas CUSUM para la verificación del proceso de filtrado en la restauración de señales. Estas características aunadas a la modificación de la metodología CUSUM permitirán el análisis de la metodología que aquí se propone.

Los alcances de este trabajo se limitan a la restauración de señales mediante los filtros digitales Medias Móviles y Polo Sencillo de una señal contaminada con ruido Gaussiano, con media cero y varianza fija uno.

Además, en el método CUSUM (enfoque tabular) la media del proceso se adapta a la señal sinusoidal “ideal” que se pretende recuperar. Adicional al ruido Gaussiano aditivo, el modelo matemático de filtrado digital se altera con un ruido no aleatorio (con la misma frecuencia que la señal filtrada). Se intenta entonces, detectar (en un rango previamente establecido) a este ruido no aleatorio.

Lo anterior para los casos donde el filtro es eficaz, es decir el filtro funciona para restablecer la señal de forma aceptable a una carta de Control Estadístico de Calidad CUSUM teórica, con únicamente ruido aleatorio.

El planteamiento anterior se basa en el hecho de que las herramientas para el análisis de señales no distinguen un “ruido correlacionado” que posee la misma frecuencia que la señal filtrada. Pretendiendo entonces, que el modelo pueda detectar el momento en que un filtro (con sus bases teóricas alteradas), se sale de control estadístico y no sólo conformarse con saber la magnitud de la dispersión del fenómeno, como se hace tradicionalmente en un procedimiento de filtrado únicamente con ruido Gaussiano.

Se revisa y justifica el código de MATLAB (ver. 4.2) utilizado para la simulación de los procesos de filtrado digital Medias Móviles y Polo Sencillo. Así mismo se muestran las gráficas obtenidas de una hoja tabular (Microsoft Excel 97), donde se aplica la metodología CUSUM a los datos obtenidos del proceso de filtrado digital. Para ambos casos se presentan los resultados numéricos y gráficos de las pruebas realizadas.

Se realizan observaciones sobre los resultados obtenidos de las corridas, aplicando el Control Estadístico de Calidad en “los filtros digitales Medias Móviles y Polo Sencillo para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado, con la metodología CUSUM tabular”.

En el Capítulo 4 se desea comparar un método de Control Estadístico de Calidad “actual” con la metodología propuesta en esta tesis.

El análisis de señales no contempla método alguno de Control Estadístico de Calidad en la restauración de señales mediante filtrado digital. Debido a que el modelo de filtrado es alterado fuera de sus bases teóricas y por lo tanto se requiere de justificar un método de Control Estadístico de calidad “actual” para llevar a cabo la comparación de métodos. Se plantea entonces el uso del Error Cuadrático Medio como método “actual” de Control Estadístico de Calidad en el filtrado digital de señales.

Se revisan los resultados de las corridas realizadas en el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta”, pero usando el Error Cuadrático Medio como método de Control Estadístico de Calidad.

Se muestran tablas que resumen los datos obtenidos de ambos métodos ECM y CUSUM. También se adiciona una tabla sobre las ventajas y desventajas de cada modelo.

Este trabajo termina con las conclusiones correspondientes sobre la hipótesis planteada, se mencionan los modelos teóricos que se investigaron, así como los conocimientos que se aplicaron en el análisis de la hipótesis de esta tesis.

Se anexan resultados de las pruebas estadísticas de Normalidad realizadas en STATGRAPHICS 4.10 (1998) para los números aleatorios generados en MATLAB (ver. 4.2). Se anexa el Código en MATLAB (ver. 4.2) utilizado para la simulación del proceso de filtrado. También se agregan corridas complementarias al análisis visto en el capítulo 3, ahora cambiando los valores de las variables de entrada al proceso de filtrado. Estos anexos son de utilidad en caso de consulta o para un análisis posterior.

CAPÍTULO 1 Control Estadístico de Calidad

Se da una señalización de las principales metodologías del Control Estadístico de Calidad, en específico se revisa la metodología CUSUM tabular y se muestran los parámetros requeridos para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media de un proceso.¹

Primero se definen los siguientes conceptos básicos de este modelo estadístico:

Calidad.- Atributos específicos de un producto o proceso que le confieren la capacidad para satisfacer las necesidades establecidas o implícitas.

Análisis de la varianza o análisis de la variación.- Se basa en el estudio de la variabilidad de las observaciones. Esta técnica estadística se utiliza como una forma alternativa en la prueba de hipótesis; permitiendo probar hipótesis de dos colas sobre $\mu = \text{media}$; y en el análisis de regresión; haciendo inferencia sobre la variable dependiente que nos interesa, esto a partir de sus variables independientes.

Control Estadístico de Calidad.- Es una metodología cuyo propósito es determinar si el comportamiento de un proceso mantiene un nivel de calidad aceptable. Una vez definido el atributo a observar en el producto, éste se evalúa y compara con algún estándar.

El Control Estadístico de Calidad involucra el uso del análisis de la variación así como de procedimientos muestrales. A continuación se revisan las bases teóricas de las Cartas de Control Estadístico.

¹ Esta metodología se utiliza, posteriormente, en el análisis de la hipótesis que esta tesis propone.

Cartas de Control Estadístico de Calidad

Se hace una revisión de las bases que forman a las Cartas de Control Estadístico de Calidad y se señalan sus principales metodologías. Lo anterior, con la finalidad de determinar el tipo de carta que permite una detección rápida para cambios pequeños.

El análisis de Control Estadístico de Calidad realiza los siguientes pasos:

1. Se realiza un muestreo de la característica de calidad que se observa y que se ha definido previamente.
2. Se busca la detección de un posible estado fuera de control estadístico en el tiempo del proceso, en el caso de que exista.
3. Se realiza un análisis de las posibles causas, para una posible acción correctiva. Lo último en el caso que así sea factible.

En el paso 2 se puede utilizar alguna de las metodologías que proponen las Cartas de Control Estadístico de Calidad. Existen además, diversas herramientas que ayudan en la resolución de este problema, como son; histogramas, diagramas de Pareto, diagrama causa-efecto, diagrama defecto-concentración, **carta de control**, diagramas de dispersión y la hoja de verificación.

Se elige la carta de control estadístico debido a que una de sus metodologías puede detectar cambios pequeños y además es fácil de implementar en un sistema de señales simulado por computadora. A continuación se revisa el aspecto teórico de este modelo matemático.

2.1 Objetivo de una carta de control

Una carta de Control Estadístico de Calidad es una herramienta que nos ayuda a vigilar el “correcto” funcionamiento de un proceso. Es decir, generalmente se tendrá cierto nivel de eficiencia, lamentablemente y con el paso del tiempo, se puede experimentar alteraciones que afecten el nivel de calidad que se observa.

Por lo tanto es necesaria una metodología adecuada que nos permita diagnosticar la detección de posibles tendencias, con un cierto grado de confianza. Lo que permite en los casos que así sea posible, ejercer alguna medida correctiva.

El análisis estadístico nos ayuda a localizar ciertas tendencias, que pueden alterar el nivel de calidad en un proceso. De manera específica, las Cartas de Control Estadístico de Calidad nos permiten detectar ciertos patrones en el comportamiento de un proceso. Algunos de estos patrones pueden atribuirse a una tendencia natural, mientras que otros patrones nos alertan para realizar un análisis posterior, para buscar alguna causa atribuible y una posible medida de corrección (para alguna fuente de variación que se pueda controlar). Se espera que el proceso experimente sólo cambios aleatorios sin importancia o sin control estadístico, dentro de un rango de calidad predefinido.

Se espera entonces, una variabilidad natural debido a fuentes de variación esencialmente sin importancia o que no se puedan controlar y se supone entonces que un proceso está bajo control estadístico, si éste experimenta sólo variaciones aleatorias o con tendencias propias. A esta varianza natural se define un rango de variación adicional, que permite corrimientos pequeños en la calidad y así como la observación de patrones que nos alerten sobre alguna influencia que afecte la calidad.

Es necesario definir la característica de calidad a vigilar, de esta forma las Cartas de Control Estadístico de Calidad ayudan a detectar corrimientos o patrones, esto al analizar las muestras obtenidas de un proceso.

El tiempo en la detección de corrimientos deberá ser lo más pequeño que sea posible. Es decir, el muestreo nos puede ser muy costoso, por lo tanto debemos definir un tamaño de muestra que permita la detección oportuna de algún corrimiento, en el menor tiempo posible y que sea factible.

2.2 Naturaleza de los límites de control

Las Cartas de Control Estadístico de Calidad se basan en las ideas fundamentales de las pruebas de hipótesis, donde la línea central de la característica de calidad muestreada representa el valor promedio cuando el proceso se encuentra bajo control estadístico y se establecen límites de control para observar la probabilidad de cometer el error de indicar que el proceso está fuera de control estadístico cuando en realidad no lo está.

El rango de error del proceso se define por límites superior e inferior y se espera que todos los puntos muestrales queden dentro de estos límites, si es que se encuentra bajo control estadístico. Como ya se indicó anteriormente, un patrón no natural del proceso puede considerarse como sospecha para un análisis posterior de la causa, lo cual conlleva una acción correctiva que se encuentre dentro de nuestras posibilidades.

Estos límites controlan la hipótesis nula de cometer el error de concluir que el proceso está fuera de control estadístico, cuando en realidad no lo está². La hipótesis alterna será el no encontrar al procedimiento fuera de control estadístico cuando de hecho sí lo está³.

Por lo tanto:

- La sensibilidad o potencia de detección del estado fuera de control estadístico se basa, en gran medida, en el tamaño de la muestra: “entre más grande es la muestra en

² Error estadístico tipo I

³ Error estadístico tipo II

cada período de tiempo, más rápida será la detección de un proceso fuera de control.”(Walpole, 1992:680)

- Una muestra preliminar ayuda a establecer la línea de tendencia central y los límites de control de calidad.

2.3 Tipos de Cartas de Control Estadístico de Calidad

Con el fin de señalar la función principal de las Cartas de Control Estadístico de Calidad se clasifican las cartas, de acuerdo a la característica que vigilan. Estas características de calidad caen, generalmente, dentro de dos categorías, variables y atributos.

2.3.1 Tipos de cartas para variables

Las cartas para variables vigilan un rango preestablecido de una característica de calidad en ciertas unidades de medición. Se ejerce control estadístico de la tendencia central de la característica en control y de su dispersión.

Para este tipo de Cartas de Control Estadístico de Calidad interesa saber si el promedio de la característica de calidad que se observa ha experimentado algún corrimiento en la media del proceso, si la precisión disminuye debido a que existen alteraciones en la variabilidad.

La tabla I.1 muestra el tipo de carta de Control Estadístico de Calidad y la característica de calidad a observar por la metodología.

TABLA I.1: TIPOS DE CARTAS DE CONTROL PARA VARIABLES

| Tipo de carta | Característica de calidad a observar. |
|---------------|--|
| \bar{X} | <p>Vigila la media de una característica de calidad a través del tiempo, dentro de un rango de dispersión específico.</p> <p>Basada en la distribución de la muestra aleatoria \bar{X} y supone normalidad en las observaciones individuales.</p> |
| R | <p>Al igual que la carta anterior se vigila la media de una característica de calidad, pero basada en el rango muestral y controlando tanto la variabilidad como su centro de localización.</p> |
| S | <p>Vigila a S que es un estimador de la varianza de una característica de calidad en el proceso, a través del tiempo.</p> <p>Se supone S un estimador insesgado.</p> |

2.3.2 Tipos de cartas por atributos

La característica a vigilar es si el producto del proceso tiene la calidad requerida o no. Es decir, el producto en lo individual es defectuoso o no, ya que imposibilita el uso del artículo que se entrega.

TABLA I.2: TIPOS DE CARTAS DE CONTROL POR ATRIBUTOS

| Tipo de carta | Característica de calidad a observar |
|---------------|--|
| \bar{p} | <p>Vigila la fracción defectuosa, a través del tiempo.</p> <p>Se involucra una distribución de probabilidad Binomial.</p> |
| λ | <p>Vigila el número de defectos o número de diferencias, a través del tiempo.</p> <p>Se involucra una distribución de probabilidad Poisson.</p> <p>Donde: $U = \frac{\text{número_total_de_defectos}}{n}$ es una estimación insesgada de la esperanza de λ.</p> |

Las Cartas de Control Estadístico de Calidad anteriores son los tipos básicos de control Shewhart. **Su principal desventaja es que son insensibles a corrimientos pequeños en el proceso, del orden 1.5σ o menos (Montgomery, 2005:875).**

2.3.3 Las cartas de control de suma acumulativa

Existen dos enfoques generales para el diseño de límites de control para las cartas de control CUSUM. Estos enfoques vigilan la diferencia acumulada de la media de una característica de calidad y la muestra obtenida del proceso, a través del tiempo, dentro de un rango K de dispersión específico.

TABLA 1.3. ENFOQUES DE LAS CARTAS DE CONTROL CUSUM

| Tipo de carta | Enfoque |
|------------------|--|
| La máscara V | En una forma gráfica. |
| La CUSUM tabular | En una forma tabular y además se puede representar gráficamente. |

Existen diversas variaciones de las Cartas de Control Estadístico CUSUM, como son:

- Mejora de la sensibilidad para cambios grandes.
- **Pruebas unilaterales de suma acumulativa.**
- Diagrama de control del rango secuencial con signo.
- Diagrama de control de suma de corridas.

- Y diagramas de control basados en medias ponderadas como son; diagramas de control de media móvil y de su correspondiente forma geométrica.⁴

En comparación con las Cartas de Control Estadístico de Calidad Shewhart las cartas CUSUM son superiores en las siguientes características:

- Tienen un mejor desempeño en la detección de corrimientos pequeños; aunque tienen problemas en la detección en cambios grandes (Montgomery, 2005:875).
- La forma tabular resulta útil para su implementación en computadora y específicamente las pruebas unilaterales de suma acumulativa (anteriormente citadas).
- Son particularmente eficaces, para muestras de tamaño $n = 1$.
- Toman en cuenta los datos anteriores del proceso y no sólo la muestra actual.

2.4 Carta de control de suma acumulativa

Las Cartas de Control Estadístico Shewhart son mejores en la detección de corrimientos grandes; pero las cartas CUSUM son más rápidas para corrimientos pequeños.

Las cartas CUSUM toman muestras de **tamaño** $n \geq 1$, donde: \bar{X}_j es el promedio de la j -ésima muestra. Si μ_0 es el valor esperado de la media de la característica de calidad en el proceso, se define la siguiente función para la carta CUSUM (Montgomery, 2005:875):

⁴ Véase la referencia (Montgomery 2005) en la bibliografía, para mayores detalles de estos métodos o para el tema pre-control.

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0) \quad (I.1)$$

que se analiza contra el número de muestra i .

Al combinar la información de varias muestras (dos muestras como mínimo), las cartas CUSUM son más eficaces que las cartas de Shewhart en corrimientos pequeños. Como ya se señaló, son particularmente eficientes para muestras de tamaño $n = 1$.

Se espera que el proceso permanezca bajo control estadístico y por lo tanto, la diferencia entre el valor deseado μ_0 y la media muestral, variarán por una constante alrededor de cero. Al igual que en las Cartas de Control Estadístico de Calidad Shewhart, si se observa un patrón en la función podría entonces ser considerado como evidencia de un corrimiento en la media (Montgomery, 2005:876).

A continuación se justifica el enfoque, que se usará para el diseño de los límites de control para las cartas CUSUM y que se utilizan en el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta”:

2.4.1 La máscara V

Este método no se revisa debido a que requiere un tamaño de muestra superior a uno ($n \geq 1$) y la naturaleza del muestreo de señales no permite tomar más de una muestra a la vez. Se recurre, por lo tanto, al método algorítmico el cual sí cumple con este requerimiento y es fácil de implementar en una hoja tabular electrónica. Este último método se ve a continuación:

2.4.2 La CUSUM tabular (enfoque algorítmico)

Se definen las siguientes funciones correspondientes a; S_{sup} una carta de Control Estadístico de Calidad CUSUM unilateral superior y S_{inf} para la carta inferior, en el período i . (Montgomery, 2005:877-878)

$$S_{sup}(i) = \text{máx}[0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + S_{sup}(i-1)] \quad (\text{I.2})$$

$$S_{inf}(i) = \text{máx}[0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_i + S_{inf}(i-1)] \quad (\text{I.3})$$

Inicialmente los valores para $S_{sup} = S_{inf}$ son cero. De esta manera suponemos que no existe acumulación de la suma antes de iniciarse el proceso. Para un procedimiento en tiempo real, es posible reinicializar estos valores a cero cada vez que se localiza un estado fuera de control estadístico, o cuando así sea necesario.

El valor de K define la tolerancia en el corrimiento de la media. Como se puede observar las funciones S_{sup} y S_{inf} acumulan desviaciones que sean mayores a una constante K con respecto al valor deseado μ_0 y la diferencia con el promedio \bar{X}_i de la i -ésima muestra. Si esta acumulación de diferencias llega a superar una constante H , entonces se concluye que está fuera de control estadístico.

Según Montgomery (2005:881) se recomienda que los valores de los parámetros K y H se escojan de la siguiente manera: H se conoce como intervalo de decisión y se define como $H = h\sigma_{\bar{X}}$; se define $K = k\sigma_{\bar{X}}$, donde $\sigma_{\bar{X}}$ es la desviación estándar de la variable muestral, para una CUSUM con $n = l$ y $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_X / \sqrt{l}$.

Es decir, si:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (I.4)$$

se observa que con $n = 1$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{1}} = \sigma_{muestral} \quad (I.5)$$

Por lo anteriormente visto el valor de referencia K , el intervalo H de decisión y el tamaño de la muestra n definen el nivel de calidad a observarse, al indicar la dispersión permitida así como el tamaño de corrida para la detección de un corrimiento.

Según Montgomery (2005:881) **el uso de $h = 4$ o $h = 5$ y $k = 1/2$ mantiene, en general, una buena respuesta en la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ (o σ_x si $n = 1$) para la media del proceso.** Si se requiere de la detección de corrimientos más pequeños o más grandes, se puede hacer uso de $k = \delta / 2$, donde: δ es la magnitud del corrimiento en unidades de desviación estándar⁵.

⁵ Para mayor información acerca de los parámetros, en condiciones diferentes, para la detección de corrimientos en la media de un proceso véase la referencia Montgomery (2005:875-884) en el capítulo correspondiente a este tema.

Según Montgomery (2005:880-881), una Tabla para una Longitud de Corrida Promedio se basa en estudios analíticos previos del desempeño en una carta CUSUM. **La tabla I.4. (de este tipo) con $h = \{4,5\}$ y $k = 1/2$, para detectar un corrimiento de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso:**

*TABLA I.4: LONGITUD DE CORRIDA PROMEDIO PARA UNA CARTA CUSUM
CON $K = 1/2$. FUENTE: (MONTGOMERY, 2005:882)*

| Corrimiento en la media (múltiplo de $\sigma_{\bar{x}}$) | h = 4 | h = 5 |
|--|--------------|--------------|
| 0 | 168 | 465 |
| 0.25 | 74.2 | 139 |
| 0.5 | 26.6 | 38 |
| 0.75 | 13.3 | 17 |
| 1 | 8.38 | 10.4 |
| 1.5 | 4.75 | 5.75 |
| 2 | 3.34 | 4.01 |
| 2.5 | 2.62 | 3.11 |
| 3 | 2.19 | 2.57 |
| 4 | 1.71 | 2.01 |

La tabla I.4 indica que la carta requiere aproximadamente 8.38 y 10.4 muestras (con $h = 5$), para detectar un corrimiento de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media.

Por lo tanto el método de análisis de Control Estadístico de Calidad a usarse en este trabajo es el CUSUM tabular (enfoque algorítmico) y se diseñan los límites de control mediante la tabla I.4.

CAPÍTULO 2 Filtros digitales en el dominio del tiempo

El “Análisis de señales” estudia los modelos matemáticos para describir el comportamiento de un sistema de señales. Donde un modelo matemático describe mediante funciones elementales a un sistema de señales y es utilizado para el tratamiento de la información contenida en una señal.

En particular este modelo matemático tiene una rama de estudio para su tratamiento digital, mediante la discretización de los sistemas de señales.

La revisión teórica de este capítulo se limita al tratamiento digital de señales, en específico la restauración de señales sinusoidales discretas. Se mencionan los requerimientos teóricos, donde así sea necesario.

La convolución explica la respuesta de un sistema de señales en forma matemática, siempre y cuando el sistema de señales sea del tipo Lineal e Invariante en el Tiempo (Linear Time Invariant LTI). Se revisa esta teoría aplicada a sistemas de señales LTI para la restauración de señales.

Para la conmutación entre señales analógicas y digitales se debe de cumplir con el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon. Este teorema garantiza la recuperación de una señal analógica a partir de una digital. Por lo tanto, este teorema es elemental en el Análisis de señales y es un requerimiento que se debe observar en el filtrado digital de una señal.

Básicamente, los filtros se utilizan en la separación de señales y en la restauración de la información contenida en las mismas. En esta tesis no se requiere de la separación de señales, pues teóricamente no existe distinción entre una señal y un ruido, ambos en la

misma frecuencia¹. Interesa entonces, la revisión del uso de los filtros en la restauración de señales.

En la restauración de una señal la función de transferencia minimiza el error del proceso de filtrado. El uso de esta función permite obtener los valores óptimos para filtrar alguna señal que ha sido contaminada de alguna manera, con esto se restaura la señal correlacionada y se anula el ruido no correlacionado. Se revisa por lo tanto, la teoría que sustenta a esta función de transferencia.

Un filtro restaurador de señales con entrada y salida con dominio en el tiempo, tiene características “ideales” que deben observarse. Sin embargo en la práctica lo que obtenemos es una aproximación a estas características, es decir, se obtiene un filtro óptimo.

Según Smith (1999:343) los filtros de Medias Móviles y Polo Sencillo representan los filtros para la restauración de señales. El filtro de Medias Móviles que se revisa se basa en la convolución, mientras que la recursión caracteriza al filtro de Polo Sencillo.

Se agrega la teoría para un generador de números pseudoaleatorios, esta teoría muestra como se lleva a cabo la generación de números Gaussianos. A su vez los números generados de validación estadística y para esto se revisa teóricamente la interpretación de las pruebas que STATGRAPHICS 4.10 (1998) realiza para tal efecto.

Se revisa a continuación el modelo matemático para el Análisis de señales, sus conceptos y definiciones básicas.

¹ Véase el tema “Señales sinusoidales en tiempo discreto” en este capítulo.

2.1 Análisis de señales

El Análisis de señales propone modelos matemáticos para describir el comportamiento de un sistema de señales. Existen diversas formas de modelar este tipo de sistemas y para esto se analizan sus características². Algunos de estos modelos se basan en sistemas de ecuaciones diferenciales o en la convolución. A continuación se revisan los fundamentos teóricos para estos modelos.

Representación de la información en una señal

La información contenida en una señal se presenta de dos formas: en el dominio del tiempo y en el dominio de frecuencia (Smith, 1997:265).

La información representada en el dominio del tiempo describe cuando ocurre un evento y muestra su amplitud. Cada muestra en la señal indica lo que acontece en ese instante y el nivel de ese evento contiene información sobre el tiempo en que ocurre, la duración del evento y su desempeño a través del tiempo. Aun cuando sólo se cuente con una muestra de la señal se conocerá algo acerca del evento que se observa.

Las señales con información en el dominio de frecuencia implican un período en los datos. La información acerca de la señal en un sistema se obtiene a través de la medición de la frecuencia en los datos, la fase y la amplitud del período.

Se puede observar de las representaciones anteriores, que la información en un proceso de Control Estadístico de Calidad tiene dominio en el tiempo, ya que la información de un evento está contenida en la amplitud de la señal y no en su frecuencia. Es decir, el evento es la medición obtenida de una muestra (de algún atributo de calidad en la señal),

² Véase el tema “Análisis de señales y sistemas en MATLAB” en este capítulo.

esta medición se realiza a través del tiempo y nos indica la magnitud del fenómeno, donde cada muestra obtenida indica el nivel de calidad observado en ese momento.

Se puede concluir del párrafo anterior, que las señales con información en el dominio de frecuencia no se adaptan al análisis de la **hipótesis “Las Cartas de Control CUSUM pueden detectar el ruido no-aleatorio en la restauración de señales con filtros digitales” de esta tesis**, ya que la información obtenida del muestreo en el Control Estadístico de Calidad no implica periodicidad en los datos, no requiere de fase ni de observar amplitud alguna en su período.

Definición de una señal

Según Proakins (1998:2) “Una señal se define como una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes.”

Ejemplos de señales: señales de humo, una conversación telefónica, sonido a través del aire, un indicador bursátil, electrocardiograma (ECG), datos muestreados en un proceso entre otros.

2.2 Clasificación de señales

Las señales se clasifican dimensionalmente de la siguiente forma (Proakins, 1998:6-8):

- **Señales multicanal.**- Son señales compuestas, como una señal de aceleración de un terremoto compuesta de tres ondas elásticas elementales que son: ondas primarias y secundarias las cuales se propagan en el interior de las rocas y son longitudinales y transversales, respectivamente; la tercer clase de onda es la onda superficial que se propaga cerca de la superficie terrestre lo que resulta en un vector compuesto de tres señales.

- **Señales multidimensionales.**- Señales de más de una variable, por ejemplo, una imagen en 2 dimensiones donde cada punto $p(x,y)$ es función de dos variables independientes x, y .

Las señales pueden ser continuas o discretas y a su vez se consideran deterministas o aleatorias. Sin embargo, **para el análisis de la hipótesis de esta tesis se recurre sólo al tratamiento de las señales sinusoidales discretas, debido a la naturaleza misma de las señales y de los sistemas digitales.**

Se definen a continuación “señal aleatoria” y los conceptos básicos para su tratamiento.

2.2.1 Señal aleatoria

Una señal aleatoria es aquella señal que no puede describirse con un grado de precisión razonable mediante fórmulas matemáticas explícitas o que es muy complicada para ser de utilidad en la práctica. Se supone entonces que dicha señal evoluciona con el tiempo de forma impredecible.

Por lo tanto, en las señales aleatorias se adecua más un tratamiento estadístico y para su análisis se requieren ciertas características en la señal, que a continuación se señalan:

Estacionalidad, una señal estacionaria es aquella en la cual los estadísticos locales son invariantes durante la duración de la señal. Esto es si la media local estimada y la función de autocorrelación no cambian durante la duración de la señal.

Ruido, se denomina ruido a cualquier perturbación espuria o indeseada que tiende a oscurecer o encubrir la señal transmitida.

Ruido blanco, se denomina “ruido blanco” a una señal aleatoria que tiende a una distribución Normal (con media cero y varianza constante) y donde la función de

autocorrelación y autocovarianza coinciden. El ruido blanco constituye además un proceso estacionario (Taygeta Scientific Inc, 2006).

Las definiciones anteriores se utilizan para describir un sistema de señales que contenga ruido aleatorio (no correlacionado). Cabe aclarar que **los filtros que se revisan en este capítulo se diseñan para eliminar el ruido blanco.**

2.2.2 Señales sinusoidales en tiempo discreto

En un sistema digital de señales la información es analizada en forma discreta. Además, la señal que contiene la información se ajusta en lo general, a una señal sinusoidal. En vista de lo anterior, se manejan en esta tesis solamente señales con comportamiento sinusoidal.

Definición de señal sinusoidal en tiempo discreto

En forma general, se define a una señal sinusoidal de la siguiente manera (Proakins, 1998:15-18):

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta) \quad \text{para} \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (\text{II.1})$$

Donde:

A = Amplitud de la senoide

f = Ciclos por muestra en Hz (Hertzios)

θ = Fase en radianes

n = Variable entera, denominada número de muestra

La frecuencia máxima ocurre para $f = \pm 1/2$ y la señal es constante, si $f = 0$ entonces la señal no tiene repeticiones.

Una señal sinusoidal en tiempo discreto no está definida para instantes entre dos muestras sucesivas. Sin embargo no es correcto suponer que $x(n)$ es igual a cero para n no entero, simplemente la señal $x(n)$ no está definida para valores no enteros de n .

Características de las señales sinusoidales

Las siguientes son las características de una señal sinusoidal en tiempo discreto, según Proakins (1998:15-18):

- Una señal sinusoidal en tiempo discreto $x(n)$ es periódica con período N ($N > 0$) si y sólo si

$$x(n + N) = x(n) \quad (\text{II.2})$$

Para toda n , donde su frecuencia f es un número racional. El valor más pequeño de N para el que se cumple se denomina período fundamental.

- La senoide $\cos(\omega_0 n + \theta)$ tiene la siguiente igualdad en tiempo discreto:

$$\cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2\pi m + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta) \quad (\text{II.3})$$

Resultando que todas las secuencias sinusoidales de la forma:

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.4})$$

Donde si $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi$

Entonces, para $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ (o $-1/2 \leq f \leq 1/2$) las señales son indistinguibles estas, son idénticas.

De este punto se concluye que son indistinguibles aquellas sinusoides en tiempo discreto cuyas frecuencias están separadas por un múltiplo entero de 2π .

- La mayor tasa de oscilación (frecuencia) en una senoide en tiempo discreto se alcanza si $\omega = \pi$ o $\omega = -\pi$, lo que es lo mismo $f = \pm 1/2$.

La amplitud de la senoide sin ninguna alteración, representa el valor “ideal” para el atributo de calidad en la señal, ya que contiene la información del proceso en ese instante.

Tanto la amplitud como la frecuencia se toman como valores constantes en la señal, esto por así ajustarse a los requerimientos para el análisis en el Control Estadístico de Calidad.

Debido a la característica de no-distinción entre señales con la misma frecuencia se impide la detección de un ruido correlacionado cuya frecuencia sea la misma que la señal filtrada. Aun cuando la separación de señales distingue a señales con diferente frecuencia, esto tampoco es útil, ya que el ruido y la señal tienen la misma frecuencia. Por lo tanto, **se descarta el uso de filtros con dominio en frecuencia ya que serían inútiles en el análisis de la hipótesis de esta tesis.**

2.3 Conceptos fundamentales en el análisis de sistemas discretos de señales

Visto el modelado matemático de una señal digital sinusoidal se procede a la revisión de las siguientes definiciones básicas en un sistema de señales. Aun cuando no todos los conceptos teóricos que se revisan son indispensables en el análisis de esta tesis, estos permiten exponer en los términos adecuados el análisis teórico de los sistemas digitales de señales.

2.3.1 Teorema de Nyquist-Shannon

Aunque en la práctica las señales son comúnmente analógicas, es común la digitalización de estas señales para su tratamiento. De ser necesario, estas señales pueden ser regresadas a su estado analógico a través de un filtro de interpolación, siempre que se cumpla con el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon. Por lo tanto, una señal continua (analógica) se puede regenerar a partir de una señal discreta.

Si el muestreo de una señal continua $x_a(t)$ (el índice a indica que la señal es analógica) se realiza en una tasa F_s superior a dos veces la frecuencia máxima F_{max} , entonces es posible recuperar la señal a partir de las muestras obtenidas. En otras palabras, la condición $F_s > 2F_{max}$ garantiza que todas las componentes sinusoidales de la señal continua corresponderán con las componentes en frecuencia de tiempo discreto, en el intervalo fundamental.

Sea ($F_{max} = B$) la frecuencia más alta contenida en la señal analógica $x_a(t)$ y si la señal se muestrea a una velocidad de $F_s > (2F_{max} = 2B)$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras mediante la siguiente función de interpolación según Proakins (1998:28-31):

$$g(t) = \frac{\text{sen}(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \quad (\text{II.5})$$

Donde $x_a(t)$ se expresa de la siguiente forma:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \quad (\text{II.6})$$

Donde: $x_a(n/F_s) = x_a(nT)$ equivale a $x(n)$ y son muestras de $x_a(t)$.

2.3.2 Transformada discreta de Fourier

Esta transformada convierte una señal muestreada en la información espectral de la imagen de esa señal. Se define esta transformada con la siguiente ecuación: (Irrázaval, 1999:128-132).

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn / N} \quad (\text{II.7})$$

Donde N es el tamaño de la señal.

2.3.3 Transformada inversa de Fourier

La transformada inversa de Fourier regresa la función $X(k)$ a la función $x(n)$ que es la señal de muestreo inicial.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn / N} \quad (\text{II.8})$$

Donde N es el tamaño de la señal.

Se utiliza un algoritmo de la transformada de Fourier (y de su correspondiente transformada inversa) en el tratamiento digital de señales. Esto por ser un algoritmo rápido que permite el proceso de señales en tiempo real y con un tiempo de procesamiento menor al de la transformada z que se define a continuación.

2.3.4 La transformada z

Se define la transformada z de una secuencia $x(n)$ con la función:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad (\text{II.9})$$

Donde $r_2 < |z| < r_1$ es la región de convergencia para $X(z)$.

La variable compleja z se expresa en forma polar como:

$$z = re^{j\omega}; \text{ Donde: } r = |z| \text{ y } \omega = \angle z$$

La función de transferencia que describe el comportamiento de un sistema de señales está expresada a través de la transformada z^3 . A su vez, la transformada z está relacionada con la transformada de Fourier.

2.3.5 La relación de la transformada de Fourier y la transformada z

Sustituyendo $z = re^{j\omega}$ en la ecuación II.9 y dentro de la región de convergencia de $X(z)$ se obtiene:

³ La función de transferencia se define más adelante es este mismo capítulo.

$$X(z) \Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} \quad (\text{II.10})$$

$X(z)$ se interpreta como la transformada de Fourier (de tiempo discreto) de $x(n)r^{-n}$. El factor de ponderación r^{-n} crece con n si $r < 1$, decae si $r > 1$ y converge para $|z| = 1$.

Entonces:

$$X(z) \Big|_{z=re^{j\omega}} \equiv X(\omega) \quad (\text{II.11})$$

Y a la vez:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (\text{II.12})$$

La ecuación II.12 es la definición de la transformada de Fourier de tiempo discreto. Por lo tanto, es igual a la transformada z de la función evaluada sobre la circunferencia unidad generada por $|z| = 1$ (Proakins, 1998:269).

Se puede entonces, utilizar el algoritmo de la transformada de Fourier en vez de usar directamente la transformada z .

2.3.6 Función delta de Dirac

Según Proakins (1998:45-46), se define la función delta de Dirac (o **impulso unitario**) de la siguiente forma:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Esta función sirve para hacer el muestreo de una señal analógica obteniendo un tren de pulsos a intervalos fijos. Este muestreo se conoce como “respuesta al impulso”, para sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI).

2.3.7 Sistemas en reposo

Se dice que un sistema está en reposo si no hay la acumulación de muestras a la entrada del sistema y la respuesta al sistema antes de acumularse alguna muestra es igual a cero (Proakins, 1998:58).

Esta característica es de vital importancia en los sistemas de señales que se revisan enseguida.

2.3.8 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo LTI

El análisis de filtros digitales se basa en los sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI). Por lo tanto se define a continuación este tipo de sistemas:

Sistema invariante en el tiempo.- Es aquel sistema cuyas características no cambian con el tiempo a la entrada y salida. Es decir, la salida es la misma que corresponde a una entrada sólo que se obtiene una salida retardada por un desplazamiento en el tiempo igual al que se retarde la entrada.

Describiendo la salida $y(n)$ de un sistema T excitado por una señal $x(n)$ en reposo como (Proakins, 1998:63-65):

$$y(n) = T[x(n)] \quad (\text{II.14})$$

Entonces un sistema en reposo T es invariante en el tiempo o invariante a desplazamientos si y sólo si:

$$\begin{array}{c} T \\ x(n) \rightarrow y(n) \end{array}$$

Implica que

$$\begin{array}{c} T \\ x(n-k) \rightarrow y(n-k) \end{array} \quad (\text{II.15})$$

Un sistema lineal.- Es aquel que cumple con el principio de superposición, el cual exige que la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales sea igual a la correspondiente suma ponderada de las salidas de cada una de las señales de entrada. Es decir, un sistema es lineal si y sólo si: (Proakins, 1998:65)

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] \quad (\text{II.16})$$

Un sistema Lineal e Invariante en el Tiempo cumple con las definiciones anteriores (II.15) y (II.16).

De manera general, esta la salida se describe como:

$$y(n, k) = T[x(n, k)] \quad (\text{II.17})$$

2.3.8.1 La respuesta de un sistema LTI con entradas arbitrarias

La convolución determina la respuesta de un sistema Lineal e Invariante en el Tiempo (LTI) en reposo a cualquier señal de entrada. Esto se explica al definir los siguientes conceptos:

La respuesta de un sistema a un impulso unitario

Antes de definir formalmente la convolución definamos primero la respuesta de un sistema a un impulso unitario (Proakis, 1998:73-77) en el instante $n = k$ mediante la función $h(n, k)$, $-\infty < k < \infty$, lo que es igual:

$$y(n, k) \equiv h(n, k) \quad (\text{II.18})$$

A su vez es equivalente a:

$$y(n, k) \equiv T[\delta(n - k)] \quad (\text{II.19})$$

Donde $T[\delta(n - k)]$ es la transformación del sistema de la función delta de Dirac⁴ de muestreo.

⁴ Anteriormente vista en este capítulo.

Convolución discreta

La siguiente es una definición válida de la convolución para el campo digital según Proakins (1998:87):

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad (\text{II.20})$$

Lo que es lo mismo:

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (\text{II.21})$$

Se asume que $h[n] = 0$ para $n < 0$. En el caso de que esto no fuera así, el intervalo inferior de la ecuación II.20 se puede poner como $-\infty$. Cuando la salida de un sistema depende de las muestras pasadas se habla entonces de casualidad en el sistema, se define a continuación este concepto.

Sistema causal

Un sistema es causal según Proakins (1998:68-69), cuando su salida depende de las muestras pasadas y presentes de la señal de entrada más no de las muestras futuras. Es decir, la salida del sistema en un instante de tiempo n_0 depende sólo de los valores de $x(n)$ para $n \leq n_0$.

En lo general, un sistema LTI es causal si y sólo si su respuesta impulsional es cero para aquellos valores negativos de la variable independiente n .

Se asume causalidad para los sistemas digitales que se verán de aquí en adelante.

Algoritmo para la Convolución

La convolución entre $x(k)$ y $h(k)$ se realiza a través del siguiente algoritmo definido por Proakins (1998:77):

1. Se refleja $h(k)$ con respecto de $k = 0$ y se obtiene $h(-k)$.
2. Se desplaza $h(-k)$ n_0 a la derecha o izquierda, dependiendo si n_0 es positivo o negativo, para obtener $h(n_0-k)$.
3. Se multiplica $x(k)$ y $h(n_0-k)$ obteniendo la secuencia producto $v_{n_0}(k)$ equivalente a $x(k)h(n_0-k)$.
4. Se suman todos los valores de la secuencia producto $v_{n_0}(k)$ y se obtiene el valor a la salida en el instante $n = n_0$.

En lugar de usar la convolución se utiliza la transformada z para describir un sistema de señales y como ya se revisó, el algoritmo de la transformada de Fourier reemplaza la transformada z en la descripción de un proceso de filtrado digital.

2.3.8.2

Propiedades de los sistemas lineales

Vistos los sistemas LTI, se procede a describir las propiedades de estos sistemas.

Una ecuación lineal que describe el comportamiento de un sistema lineal se explica mediante la siguiente función:

$$y_k = bx_k + ay_{k-1} \quad (\text{II.22})$$

Donde: x es la señal de entrada y la variable y es la señal de salida; a y b se llaman coeficientes o pesos de la función.

El índice k denota la posición dentro de una secuencia ordenada, se asume casualidad en el vector inicial $k = 0$ y $y = 0$ para todas las salidas anteriores a este índice.

A continuación se ejemplifican matemáticamente las características de un sistema lineal mediante la tabla II.1.

TABLA II.1: EJEMPLO DE PROPIEDADES EN SISTEMAS LINEALES DISCRETO.

FUENTE (STEARNS, 2003:71-85)

| Propiedad | Propiedad existente | Propiedad no existente |
|--------------------|----------------------------|------------------------------|
| Linealidad | $y_k = bx_k + ay_{k-1}$ | $y_k = b x_k + ay_{k-1}$ |
| Realizable | $y_k = bx_k + ay_{k-1}$ | $y_k = bx_k + ay_{k+1}$ |
| Causalidad | $y_k = bx_k + ay_{k-1}$ | $y_k = bx_{k+1} + ay_{k-1}$ |
| Recursividad (IRR) | $y_k = bx_k + ay_{k-1}$ | $y_k = bx_k + ax_{k-1}$ |
| Estabilidad | $y_k = bx_k + 0.9y_{k-1}$ | $y_k = bx_k + 1.1y_{k-1}$ |
| Adaptabilidad | $y_k = b_k x_k + ay_{k-1}$ | $y_k = bx_k + ay_{k-1}$ |

Definiciones de la tabla II.1:

Sistemas realizables.- Una operación lineal es realizable dado que el valor actual y_k de la señal de salida es computada en términos de sus propios valores anteriores y no en términos de ningún valor futuro de y .

Recursividad.- Una operación lineal es recursiva cuando la salida y está dada en términos de sus propios valores anteriores así como los valores de entrada. Un sistema lineal recursivo es también conocido como un sistema de Respuesta al Impulso Infinito (siglas en inglés IIR). En cambio, si los valores pasados de y no aparecen en la parte derecha de la ecuación entonces la ecuación lineal es no recursiva.

Estabilidad.- Un sistema lineal es estable si la magnitud de su respuesta a una entrada no crece sin cota alguna, es decir, el sistema no tendrá una respuesta infinita a una entrada finita.

Sistemas adaptables.- En algunos casos los pesos de la función a y b son constantes. Sin embargo, para algunos sistemas de señales estos pesos cambian a través del tiempo, pero en cambio se vuelven funciones de k , en este caso, la ecuación lineal describe un sistema de procesamiento de señales llamado variante en el tiempo o adaptable.

2.3.9 Análisis de señales y sistemas en MATLAB

Se procede a la revisión práctica de los conceptos anteriormente vistos y para esto existen diversas herramientas especializadas en el Análisis de señales. En el caso específico de MATLAB (ver. 4.2) el manejo de señales y de filtros se realiza con un grupo de herramientas llamado Signal Processing Toolbox⁵. **El tipo de filtros que se utilizan en MATLAB (ver. 4.2) está basado en señales Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)** con entrada y salida simple.

La forma en que MATLAB (ver. 4.2) representa un sistema de señales es a través de los modelos; **Función de transferencia**, state-space (espacio estado), zero-pole-gain (ganancia cero polos), second-order section (sección de segundo orden).

⁵ Caja de herramientas para procesamiento de señales.

Sólo se revisan los sistemas de señales descritos por medio de la función de transferencia, ya que esto es suficiente para el diseño de los filtros digitales Medias Móviles y Polo Sencillo.

En todas las herramientas de análisis, MATLAB (ver. 4.2) supone que la señal tiene un muestreo según la tasa de Nyquist-Shannon (que está regida por el teorema del mismo nombre anteriormente visto en este capítulo).

2.3.9.1 Notaciones técnicas para caracterizar una señal en MATLAB

Se requieren los siguientes parámetros:

A = Amplitud de la senoide

F = Frecuencia en ciclos por segundo Hertzios (Hz)

θ = Fase en radianes

x(t) = Muestra de la senoide en el tiempo t

Estas notaciones describen las señales sinusoidales que se usan en el Análisis experimental de esta tesis.

2.3.9.2 Representación de señales en MATLAB

Se realiza la representación de señales según The MathWorks Inc. (1993:I-4) a través de vectores numéricos, donde las señales multicanal o multidimensionales son adecuadas a una representación a través de arreglos.

El análisis teórico de esta tesis se limita sólo a datos muestreados de señales con una dimensión. Los datos son representados por un vector y puede ser de tamaño “uno a n ” o de tamaño “ n a uno”, donde n es el número de muestras en la secuencia.

Para MATLAB (ver. 4.2) las señales están contenidas en vectores fila. El operador ‘ (apóstrofe) transpone un vector fila en un vector columna. Este operador permite conmutar entre vectores columna y vectores fila, esta opción permite mejorar la visualización y exportación de los datos.

Además, el terminar un comando con ; (punto y coma) en MATLAB (ver. 4.2) permite realizar la operación sin necesidad de mostrar los datos obtenidos. Lo que ayuda a mantener la pantalla libre de datos no indispensables.

Ejemplo en MATLAB (ver. 4.2) para la generación de señales sinusoidales en el tiempo:

Se utilizan las siguientes órdenes para generar una señal sinusoidal en el tiempo con una frecuencia de muestreo a 1000 Hz (F_s):

```
Fs = 1000; % Fs es la frecuencia de muestreo.  
t = 0:1/Fs:1.;
```

Se generan 1001 elementos en un vector fila, desde el tiempo cero hasta un segundo en lapsos de un milisegundo.

Una vez generado el vector temporal t se puede obtener la senoide de la siguiente manera:

```
y = sin(2*pi*50*t);
```

El vector y contiene las muestras de una senoide a 50Hz.

2.4 Filtros digitales

Los filtros digitales son ampliamente utilizados para el tratamiento de señales ya que tienen ventajas en el manejo teórico sobre los filtros analógicos. Un filtro digital es un sistema de señales (LTI) al cual se aplican todos los conceptos referentes a estos sistemas de señales y que anteriormente se revisaron. A continuación se explica brevemente la teoría para el diseño de filtros digitales.

2.4.1 Conceptos técnicos en filtros digitales

Los siguientes conceptos se utilizan en el vocabulario del diseño de filtros por lo que se explican brevemente.

Banda de paso.- Frecuencias que son aceptadas y es importante observar las fluctuaciones que tiene el filtro, lo ideal es que no existan fluctuaciones en esta banda de paso.

Banda de corte.- Frecuencias que son bloqueadas.

Banda de transición.- Frecuencias entre los dos conceptos anteriores.

Transición rápida.- Significa que la banda de transición es corta.

Frecuencia de corte.- La división entre la banda de paso y la banda de transición.

Como se vio anteriormente, una señal tiene representación con dominio en el tiempo o con dominio en la frecuencia, estas representaciones son “las dos caras de la misma moneda”. Pues ambas representaciones, poseen la misma información acerca de la señal que representan. Cabe mencionar que de la información filtrada en alguno de los dominios destruye generalmente, la información representada por el otro dominio.

Los filtros digitales al ser tratados como un sistema de señales, en general siguen las convenciones de un sistema de señales con dominio en la frecuencia. Esto, aun cuando el sistema tenga tratamiento con dominio en el tiempo. Por lo tanto, se habla en términos de frecuencias aun cuando el filtro se trabaje con dominio en el tiempo.

2.4.2 Bases teóricas en los filtros

Básicamente los filtros se utilizan para la separación de señales y/o en la restauración de las mismas. Se exponen a continuación, los conceptos “ideales” para los filtros digitales.

La respuesta al impulso⁶

La transformada de Fourier Inversa de la respuesta al impulso produce el kernel de un filtro ideal. Según Smith (1999:285) esta función esta dada por la siguiente ecuación:

$$h(n) = \frac{\sin(2\pi f_c n)}{n\pi} \quad (\text{II.23})$$

Donde f_c es la frecuencia de corte del filtro.

Esta función se conoce como función *sinc*, donde $h(n)$ es la transformada de Fourier Inversa del un Filtro “ideal”⁷ Pasa Bajas (FPB).

Cada filtro está restringido a un sistema lineal y tiene una respuesta frecuencial, una respuesta al impulso y otra a la función escalón. Cada representación contiene la información completa sobre un filtro vista en diferente forma. De estas representaciones se deriva la forma en que un filtro reacciona bajo diferentes circunstancias.

⁶ La función de respuesta al impulso unitario se revisó anteriormente en este capítulo.

⁷ Se toman funciones teóricamente exactas en el tratamiento de señales, para mayor información consúltese (Proakins, 1998:1-118)

La respuesta al impulso se obtiene como una salida de un sistema si la entrada es un impulso⁸. La función de respuesta a la función escalón es la salida al sistema si la entrada es la función escalón. La función escalón es igual a la integral de la función impulso, entonces, la respuesta a la función escalón es la integral de la respuesta a la función impulso.

Por lo tanto, la respuesta a la función escalón se obtiene de la integración discreta de la respuesta a la función impulso. La respuesta en frecuencia se obtiene usando la DFT (transformada discreta de Fourier) de la respuesta a la función impulso y se puede realizar la gráfica en escala lineal o logarítmica (en dB = decibeles).

Para el diseño de un filtro que remueva el ruido en una señal, con información representada en el dominio del tiempo, la respuesta a la función escalón es un parámetro requerido y de poca importancia para la función de respuesta a la frecuencia. Esto debido a que la respuesta a la función escalón en el dominio del tiempo tiene un mal desempeño en el dominio de frecuencia.

Parámetros ideales para filtros con dominio en el tiempo

La función escalón es la manera más pura de representar la división entre dos regiones similares e indica cuando un evento inicia o cuando termina. Esta función muestra la diferencia entre dos regiones que parecen similares. La respuesta a la función escalón describe como las líneas de división son modificadas por el filtro.

Los parámetros a evaluar en un filtro con dominio en el tiempo a través de su función de respuesta al escalón unitario son:

⁸ Véase la función delta de Dirac previamente definida en este capítulo.

Velocidad de transición (risetime).- La duración de la respuesta a la función escalón debe ser más corta que el espacio entre eventos para poder distinguir los eventos en una señal. Por lo tanto, la respuesta a la función escalón debe ser lo más rápida posible.

La forma para especificar la velocidad de transición de una señal es contando el número de muestras entre el 10% y el 90% de los niveles de amplitud.

No es posible siempre obtener una velocidad de transición rápida, esto debido al proceso de reducción de ruido, a las limitaciones inherentes de un sistema de adquisición de datos y a los procedimientos usados para evitar la sobreposición entre bloques de datos, entre otras causas.

Estabilidad de la transición.- Se debe eliminar la inestabilidad en la transición (o **overshoot**), ya que esto modifica la amplitud de las muestras de la señal y es una distorsión de la información contenida en el dominio del tiempo.

Fase lineal o simetría entre la mitad superior y la mitad inferior de la función escalón.- Se desea, comúnmente, que la mitad superior de la respuesta a la función escalón sea simétrica con la mitad inferior de la función escalón. Esta simetría se conoce como fase lineal, debido a que la respuesta frecuencial tiene una fase igual a una línea recta.

No obstante los parámetros anteriores, en el análisis de la hipótesis de esta tesis, sólo se utiliza la función de transferencia para obtener un filtro “óptimo”. Por lo que los parámetros anteriores sólo sirven como referencia a un “filtro ideal”.

2.4.3 Filtros de Medias Móviles

Este filtro es sencillo de implementar, es un filtro óptimo para la reducción de ruido aleatorio blanco y tiene una respuesta aguda a la función escalón.

Este filtro está basado en la Convolución donde las funciones involucradas son: La función de respuesta al impulso unitario y la señal de entrada al sistema de señales y se obtiene un filtro con Respuesta al Impulso Finito (FIR son las siglas en inglés). A continuación se revisa el modelo matemático de este tipo de filtros.

El filtro de Medias Móviles promedia un número M de muestras de la señal de entrada como filtro de cada punto en la señal de salida. La ecuación según Smith (1999:277-278) es la siguiente:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j] \quad (\text{II.24})$$

La señal de entrada es $x[i]$ y la señal de salida $y[i]$, donde M es el número de puntos usados en el promedio móvil.

Esta ecuación únicamente utiliza los puntos de un muestreo de un lado de la señal para calcular la señal de salida. Otra opción es utilizar un grupo de muestras en forma simétrica alrededor del punto de salida.

La respuesta en frecuencia de un filtro digital es periódica, del análisis de las series de Fourier sabemos que cualquier función periódica puede expresarse como una combinación lineal de exponentes complejas. Por lo tanto, la respuesta deseada de un filtro digital FIR puede ser expresada por las series de Fourier.

Existen filtros que realizan una función similar al filtro de Medias Móviles, estos filtros son: Gauss(Gaussian), Blackman, y Medias Móviles de múltiples pasadas (multiple-pass moving average). Estos filtros son usados cuando ambos, dominios frecuencial y temporal, son requeridos en forma simultanea.

2.4.4 Filtro de Polo Sencillo

Los filtros se clasifican, al igual que los sistemas lineales LTI, en los filtros recursivos y son aquellos cuya salida y está dada en términos de sus propios valores anteriores así como en los valores de entrada. Un filtro lineal recursivo es también conocido como un filtro de Respuesta al Impulso Infinito (IIR son las siglas en inglés). Un representante de estos filtros recursivos es el filtro de Polo Sencillo:

Un filtro de Polo Sencillo pasa bajas (sólo pasa frecuencia bajas) suaviza las esquinas de la función escalón de entrada. Es decir un filtro pasa bajas de Polo Sencillo cuya entrada es una función escalón suaviza los niveles agudos. Este filtro remueve corriente directa (DC), suprime ruido de alta frecuencia, picos en la senoide, suaviza, etc.

Este filtro es fácil de programar, los coeficientes de un filtro de Polo Sencillo pasa bajas se puede obtener de la siguiente manera:

$$a_0 = 1 - x \tag{II.25}$$

$$b_1 = x \tag{II.26}$$

La respuesta del filtro está controlada por el parámetro x , donde x , es un valor entre cero y uno.

Físicamente el parámetro x es el monto que decae la señal entre dos muestras adyacentes.

Ejemplo: $x = .86$ implica que el valor de cada muestra en la salida es 0.86 el valor de la muestra anterior.

Mientras más grande sea el parámetro x será más lento el decaimiento. El filtro se vuelve inestable si el parámetro x es superior a uno, es decir, para cualquier muestra diferente de cero en la entrada crecerá la señal de salida hasta causar un sobre flujo.

Otra forma de calcular un filtro de Polo Sencillo es cuando el valor de x es especificado directamente o calculándolo por los requerimientos del filtro. Esto es tomando el número de segundos para que un circuito Resistencia Capacitor decaiga un 36.8% de su valor final, donde d , es el número de muestras que toma al filtro recursivo en decaer a este mismo nivel. Se usa la siguiente ecuación:

$$x = e^{-1/d} \quad (\text{II.27})$$

Por ejemplo, un nivel de decaimiento entre muestras de $x = 0.86$ corresponde a una constante en tiempo de $d = 6.63$ muestras.

Por último, para el diseño del filtro, existe también una relación entre el parámetro a y -3dB de frecuencia de corte f_c de un filtro digital con un valor entre cero y 0.5, con la siguiente fórmula:

$$x = e^{-2\pi f_c} \quad (\text{II.28})$$

Las tres forma anteriores permiten obtener los coeficientes a y b de un filtro de Polo Sencillo, mediante un tiempo constate, una frecuencia de corte o simplemente eligiendo x en forma directa.

Por otro lado, este filtro carece de habilidad para separar una banda de frecuencias de otra teniendo por lo tanto, un desempeño pobre en el dominio de frecuencias, pero un buen desempeño en el dominio del tiempo.

Sin embargo y a pesar de los métodos de diseño anteriormente vistos, el diseño de este tipo de filtros se realizará a través de la función de transferencia y de esta forma se calculan los coeficientes óptimos para un filtro de Polo Sencillo. A continuación se revisa el diseño de estos filtros.

2.4.5 Implementación y análisis de filtros en MATLAB

Estos filtros están restringidos a sistemas lineales (LTI) y **el criterio de optimización está basado en la minimización del Error Cuadrático Medio (ECM)**. Los filtros óptimos se determinan teniendo en cuenta los estadísticos de segundo orden, autocorrelación y correlación cruzada en un proceso estacionario.

Los filtros se implementan básicamente como, respuesta al impulso FIR por convolución y en forma recursiva a los filtros IIR. Ambos filtros anteriores se pueden realizar mediante el concepto siguiente.

Filtros y función de transferencia

La transformada z (definida como $Y(z)$ para la salida de un filtro digital $y(n)$) está relacionada con la transformada z $X(z)$ de la entrada $x(n)$. Esto tiene representación en MATLAB (ver. 4.2) mediante la ecuación siguiente (The MathWorks Inc., 1999:C1-15):

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(nb + 1)z^{-nb}}{a(1) + a(2)z^{-1} + \dots + a(na + 1)z^{-na}} X(z) \quad (\text{II.29})$$

Donde $H(z)$, es la función de transferencia del filtro⁹. Las constantes $a(i)$ y $b(i)$ son los coeficientes y el orden del filtro es igual al orden máximo de na y nb .

⁹ Esta función se utiliza en el diseño de los filtros para el análisis de la hipótesis que esta tesis propone.

En MATLAB (ver. 4.2) los coeficientes inician en uno (en lugar de iniciar con cero) esto debido a los estándares propios de indexado de vectores en MATLAB.

Clasificación de filtros a través de los coeficientes de la función de transferencia

Los siguientes criterios son utilizados en MATLAB (The MathWorks Inc., 1999:C1-15):

- Si $nb = 0$, significa que b es un escalar, por lo tanto, el filtro es de respuesta infinita al impulso (IIR) también conocido como filtro recursiva (AR) o todo-polos.
- Si $na = 0$, significa que a es un escalar, por lo tanto, el filtro es de respuesta finita al impulso (FIR) o filtro no recursivo o de Medias Móviles (MA) o todo-ceros.
- Si tanto na como nb son más grandes que cero el filtro es conocido como filtro autoregresivo de Medias Móviles (ARMA por sus siglas en inglés).

Suponemos un sistema con coeficientes $na > nb$, para asegurar una entrada acotada y salida acotada “Bounded Input Bounded Output (BIBO)”. De no ser así, la salida puede crecer sin cota alguna haciendo imposible el tratamiento del sistema de señales.¹⁰

Para comprender de dónde viene la función de transferencia se puede reconstruir el sistema de ecuaciones en diferencias que lo generó, para esto, se asume que $a(1) = 1$, simplificando algebraicamente y obteniendo la transformada inversa z , se obtiene en términos de entradas y salidas anteriores a $y(n)$:

¹⁰ Véase el radio de convergencia en la definición de la relación entre la transformada z y la transformada de Fourier.

Filtros digitales en el dominio del tiempo

$$y(n) = b(1)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(nb+1)x(n-nb) - a(1)y(n-1) - a(2)y(n-1) + \dots \\ \dots - a(na+1)y(n-na) \quad (\text{II.30})$$

Ésta es la representación en el dominio del tiempo de un filtro digital, iniciando en $y(1)$ y asumiendo condiciones iniciales en cero:

$$\begin{aligned} y(1) &= b(1)x(1) \\ y(2) &= b(1)x(2) + b(2)x(1) - a(2)y(1) \\ y(3) &= b(1)x(3) + b(2)x(2) + b(3)x(1) - a(2)y(2) - a(3)y(1) \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &= \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Un filtro de esta forma es implementado con la función *filter(b,a,x)* en MATLAB (ver. 4.2).

Funciones de filtrado en MATLAB

Se revisa ahora el planteamiento práctico de los filtros digitales, para esto se utilizan dos funciones de filtrado en MATLAB (ver. 4.2); para Polo Sencillo se usa la función *filter*(), calculando los coeficientes de la función de transferencia con la función *arburg*(). Para Medias Móviles se utiliza la función *medfilt1*() de MATLAB (ver. 4.2).

Por ejemplo un filtro de Polo Sencillo se caracteriza por los siguientes coeficientes:

```
b = 1; % numerador
a = [1 -0.9]; % denominador
```

Donde los vectores *a* y *b* representa los coeficientes de un filtro en la forma de la función de transferencia. Estos coeficientes son calculados por la función *arburg*() para cada secuencia de muestras de la señal filtrada.

Se usa la función *arburg*() debido a que muestra un mejor desempeño. No obstante; todas las funciones de MATLAB (ver. 4.2) disponibles para este cálculo arrojan resultados muy similares entre sí. Por lo que no hay mucha diferencia en utilizar otra función de MATLAB (ver. 4.2) para este cálculo.

Para aplicar este filtro a los datos se ejecuta el siguiente comando:

```
y = filter(b,a,x);
```

El filtro entrega tantas salidas como muestras hay en la entrada es decir el tamaño de y es igual al tamaño de x y si el primer elemento de a es diferente de uno el filtro divide los coeficientes por $a(1)$ (normaliza la función) antes de implementar la ecuación en diferencias (esta normalización facilita el análisis al estandarizar los argumentos de las señales analizadas).

Por otro lado, para un filtro de Medias Móviles se usa la función `medfilt1()` de MATLAB (ver. 4.2) ejemplo:

```
y = medfilt1(x_n);
```

Por default la función realiza el cálculo para promediar 3 muestras contiguas.

2.5 Simulación de ruido para un proceso de filtrado en MATLAB

Existen generadores de ruido aleatorio que ayudan a simular la contaminación de una señal. Estos generadores de ruido aleatorio permiten realizar un análisis teórico de un sistema digital de señales y de esta manera llevar a cabo la simulación de un proceso de filtrado digital de señales.

MATLAB (ver. 4.2) cuenta con un grupo de funciones que generan números aleatorios de distribuciones de probabilidad y que son de utilidad para el análisis teórico de sistemas de señales digitales. Estos números generados son en realidad números pseudoaleatorios.

2.5.1 Pruebas estadísticas para la comprobación de normalidad

Un generador de números pseudoaleatorios Normales tiene un buen grado de utilidad en una simulación para el análisis de un sistema digital de señales, siempre y cuando la secuencia que genera pasa las pruebas estadísticas para una distribución Normal.

En este caso se utiliza el programa STATGRAPHICS 4.10 (1998) para comprobar la secuencia de números con distribución Normal generados por MATLAB (ver. 4.2). Estas pruebas según STATGRAPHICS ® Centurion XV User Manual (1999) son las siguientes:

El primer paso a seguir en el análisis de una secuencia de números aleatorios, es localizar la distribución a la cual podría pertenecer esta secuencia. En STATGRAPHICS 4.10 (1998) la opción *Distribution Fitting (Uncensored Data)* del menú *Describe* realiza la labor de verificación para 45 distribuciones de probabilidad.

Estas pruebas están basadas en una función de distribución empírica (Empirical Distribution Function EDF) calculada a partir de las muestras.

Para todas estas pruebas se siguen las siguientes hipótesis:

$H_0 =$ *Los datos son muestras independientes de una distribución en específico.*

$H_1 =$ *Los datos no son muestras independientes de una distribución en específico.*

Las pruebas que realiza son; Ji-cuadrada para bondad de ajuste, Kolmogorov-Smirnov D, Kuiper V, Cramer Von Mises W^2 , Watson U^2 y Anderson-Darling A^2 .

No obstante lo anterior, no es necesario tomar en cuenta estas pruebas para localizar la distribución cuando ya se conoce la distribución de donde proviene la secuencia de números. En el caso de este trabajo en particular, sólo se revisan las pruebas correspondientes a la prueba de bondad de ajuste (*Goodness-of-fit*) de la lista de opciones tabulares (*Tabular Options*) en STATGRAPHICS 4.10 (1998). Esto para tener un mayor detalle sobre como los números aleatorios generados en MATLAB (ver. 4.2) se adecuan a una distribución Normal.

La prueba Kolmogorov-Smirnov D. Este estadístico calcula la distancia máxima entre la distribución de frecuencias acumuladas de las muestras y la distribución de frecuencias acumuladas de una distribución Normal teórica. Este cálculo es un método no paramétrico que prueba la bondad de ajuste entre un muestreo de datos y una distribución Normal.

Primero se evalúa la distribución de frecuencias acumuladas para cada valor:

$$z_{(i)} = \hat{F}(x_{(i)}) \quad (\text{II.32})$$

Entonces se calcula la máxima distancia de la distribución de frecuencias acumuladas empírica sobre la distribución de frecuencias acumuladas de la distribución teórica analizada:

$$D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\} \quad (\text{II.33})$$

Y la máxima distancia de la distribución de frecuencias acumuladas empírica bajo la distribución de frecuencias acumuladas de la distribución teórica analizada:

$$D^- = \max_i \left\{ z_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right\} \quad (\text{II.34})$$

El estadístico de Kolmogorov es el más grande de las dos distancias (II.33 y II.34).

$$D = \max(D^+, D^-) \quad (\text{II.35})$$

Anderson-Darling A^2 .- Este estadístico compara una función de distribución de frecuencias acumuladas empírica con una distribución de frecuencias acumuladas Normal teórica.

Esta prueba utiliza el estadístico:

$$A^2 = -n - \frac{\sum \left((2i-1) \ln(z_{(i)}) + (2n+1-2i) \ln(1-z_{(i)}) \right)}{n} \quad (\text{II.36})$$

Pruebas para Normalidad

Aparte de las pruebas anteriores STATGRAPHICS 4.10 (1998) realiza 4 diferentes pruebas diseñadas para determinar si los datos podrían venir de una distribución Normal. Para cada una de las pruebas se utilizan las siguientes hipótesis:

$H_0 =$ Los datos son muestras independientes de una distribución Normal.

$H_1 =$ Los datos no son muestras independientes de una distribución Normal.

Se calcula un estadístico el cual se compara con una distribución adecuada y se asocia un valor-p (o P-value en inglés) a cada una de las pruebas realizadas; donde un valor-p pequeño implica el rechazo de la hipótesis nula, es decir “los datos no son muestras independientes de una distribución Normal”.

En forma manual los estadísticos son comparados contra tablas previamente calculadas, no obstante lo anterior, no es del interés de este trabajo la forma en que el programa STATGRAPHICS 4.10 (1998) calcula los valores de estas tablas, por lo que sólo se mencionan algunas tablas de comparación para las pruebas.

Las pruebas que realiza STATGRAPHICS 4.10 (1998) son las siguientes:

La prueba Ji-cuadrada bondad de ajuste.- Compara las frecuencias de los datos muestreados con las frecuencias esperadas de una distribución Normal.

Para esto se dividen los rangos de los datos en un grupo de *k-equiprobables* clases, donde:

$$k = \text{mín} \{100, \text{ceiling}(3.7653(n-1)^{0.4})\} \quad (\text{II.37})$$

Donde la función *ceiling()* redondea el valor del argumento dado al entero más próximo en dirección positiva, es decir se redondea el argumento al entero más a la derecha en la recta numérica aunque este sea negativo.

Se calcula el número de observaciones O_i dentro de cada clase y las frecuencias esperadas E_i basadas en una distribución Normal.

El estadístico para la Ji-cuadrada se calcula con:

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (\text{II.38})$$

y se compara con una distribución Ji-cuadrada con (k-3) grados de libertad.

Las opciones restantes son; la prueba Shapiro-Wilk (estadístico W), la prueba de asimetría estandarizada (Skewness), la prueba para Kurtosis estandarizada. Para el análisis de la hipótesis que esta tesis propone se omiten las pruebas no descritas y sólo se realizan las pruebas descritas anteriormente. Esto debido a que son las pruebas automáticamente realizadas en la opción de bondad de ajuste de STATGRAPHICS 4.10 (1998).

2.5.2 El análisis estadístico de los números aleatorios generados en MATLAB

La opción en STATGRAPHICS 4.10 (1998) para realizar este análisis es *Distribution Fitting (Uncensored Data)* del menú *Describe*.

En el caso específico de los números pseudoaleatorios generados en MATLAB (ver. 4.2) (por la función *randn()*) son números Gaussianos (con media cero y desviación estándar uno), por lo que no es necesario tomar en cuenta las pruebas correspondientes para localizar la distribución de los datos, puesto que ya se conoce la distribución de donde proviene la secuencia de números aleatorios.

Al seleccionar *Distribution Fitting (Uncensored Data)* del menú de STATGRAPHICS 4.10 (1998) el programa concluye automáticamente que los números aleatorios generados en MATLAB (ver. 4.2) por la función *randn()*, tiene **distribución Normal** con **media = 0.043748** (alrededor de cero) y una **desviación estándar = 1.00214** (alrededor de uno), donde los parámetros para la media y desviación estándar de la distribución se estiman usando máxima verosimilitud.

La prueba de bondad de ajuste

Para tener un mayor detalle sobre como los números aleatorios generados en MATLAB (ver. 4.2) se adecuan a una distribución Normal se recurre a la prueba de bondad de ajuste *Goodness-of-fit* de la lista de opciones tabulares (*Tabular Options*) en STATGRAPHICS 4.10 (1998), donde:

- La prueba Ji-cuadrada (*Chi-Square*) arroja un valor de 23.7831 y un **valor-p = 0.303688**.
- El valor estimado de la prueba *Kolmogorov DN* es de 0.0260262 y un **valor-p = 0.878622**.
- El valor estimado para *Anderson-Darling A²* es de 0.257374 y un **valor-p = 0.719**.

Conclusión del análisis estadístico en STATGRAPHICS 4.10 (1998) de los números aleatorios generados en MATLAB (ver. 4.2)

Dado que el valor más pequeño de los valores-p de las pruebas anteriores es más grande o igual a 0.1 se concluye que: **no se puede rechazar la hipótesis de que la secuencia de números aleatorios generada por MATLAB (ver. 4.2) tienda a una distribución Normal, con un grado de confianza superior al 90%.**¹¹

2.5.3 Conceptos a tomar en cuenta en la generación de números pseudoaleatorios

- La mayoría de los algoritmos generadores de números pseudoaleatorios se basan en números distribuidos uniformemente entre cero y uno.

¹¹ Vea anexo I para verificar las pruebas estadísticas de las secuencias aleatorias

- Se utilizan algunas transformaciones para convertir números pseudoaleatorios distribuidos uniformemente a la distribución que se requiera.
- Los generadores de números pseudoaleatorios comúnmente utilizan un número para inicializar la secuencia que generan. Este número de inicio se conoce como semilla (seed en inglés).
- Para una semilla dada el generador de números pseudoaleatorios genera exactamente la misma secuencia de números.

Probablemente la transformación más importante es la de Box-Muller. Esta transformación toma números aleatorios con distribución uniforme y genera una secuencia nueva de números aleatorios con distribución Normal. Esta transformada tiene dos formas, la forma básica y la polar. La forma polar forma parte de los llamados métodos de rechazo según Weisstein (1999).

Repetición de secuencia de números aleatorios en MATLAB

Es necesario que los experimentos puedan ser reconstruidos, en el caso de que se necesite corroborar los resultados o para análisis posteriores. Esto se resuelve al inicializar la semilla del generador de números aleatorios. MATLAB (ver. 4.2) tiene una función para este propósito y se ve en el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta”.

CAPÍTULO 3 Aplicación experimental de la metodología propuesta

Una vez planteado el sustento teórico de esta tesis, se procede con la siguiente:

Hipótesis.- Las Cartas de Control CUSUM pueden detectar el ruido no-aleatorio en la restauración de señales con filtros digitales.

Se plantean los siguientes requerimientos para el análisis de la hipótesis anterior:

- Para el filtrado digital de una señal se requieren las definiciones de la señal de entrada al filtro, del ruido Gaussiano, del ruido no aleatorio y de los argumentos necesarios para un filtrado óptimo de la señal.
- Por parte del Control Estadístico de Calidad se requiere de los argumentos necesarios para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ (o σ_x) para la media del proceso de filtrado.

Las siguientes herramientas se utilizan en el análisis de la hipótesis propuesta:

- Se utiliza STATGRAPHICS (ver. 4.10) para la verificación estadística de la señal aleatoria.
- Se utiliza MATLAB (ver. 4.2) para el diseño y análisis del sistema digital de señales así como del filtrado óptimo correspondiente.
- Los datos son evaluados en una hoja tabular (Microsoft Excel 97) con el fin de aplicar la metodología CUSUM tabular.

Con el propósito de evaluar la hipótesis de esta tesis, específicamente las Cartas de Control Estadístico CUSUM tabulares poseen características adecuadas como son:

- Algoritmo fácil de implementar en sistemas de cómputo.
- Detectan corrimientos pequeños de la media.
- Manejan un tamaño de muestra $n = 1$.
- Su representación tabular resulta conveniente al diseño del experimento.

Se limita el análisis de la hipótesis con las siguientes justificaciones:

- Los filtros digitales con dominio en el tiempo realizan el proceso de recuperación de una señal que ha sido alterada de alguna forma. Sin embargo estos filtros no distinguen señales con la misma frecuencia solamente separan el ruido no correlacionado de la señal de entrada. **Por este motivo se implementa el método de Control Estadístico de Calidad para detectar un ruido cuya frecuencia es igual a la frecuencia de la señal filtrada.**
- Convenientemente el diseño del filtro se lleva a cabo por una herramienta en MATLAB (ver. 4.2), la cual obtiene los parámetros de un “filtro óptimo”.
- Para el caso del Control Estadístico de Calidad tomamos el proceso de filtrado como una caja negra. Es decir, no interesa como el sistema realiza el procedimiento sólo interesa la entrada y salida del sistema.

- Se elige un filtro que en presencia de únicamente ruido aleatorio (no correlacionado) no excede los límites para una carta CUSUM que trata de detectar corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ (o σ_x) para la media del proceso de filtrado y este filtro se considera un filtro "eficiente".
- Esperamos tener ruido aleatorio Gaussiano y en un rango otra señal sinusoidal con la misma frecuencia que la señal filtrada, contaminando el filtrado digital de la señal.
- Convenientemente se tratan de detectar un corrimiento de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ (o σ_x) para la media del proceso de filtrado.

Como se revisa en el capítulo “Filtros digitales en el dominio del tiempo”, un sistema de procesamiento de señales se describe a través de la convolución. En el caso de ruido blanco la función de transferencia (convolucionada con una señal aleatoria) minimiza el error entre la señal de salida de filtrado y la señal de entrada, reduciendo con esto el ruido no correlacionado en la señal.

Esta función de transferencia en un sistema de señales dado, determina el tipo de filtro que se genera ya sea de Medias Móviles (MA), autoregresivo (AR) o una combinación de los dos anteriores llamado ARMA. Este último filtro no se tomará en cuenta, ya que en general los filtros de Polo Sencillo (AR) y Medias Móviles (MA) representan ambos, a los filtros con dominio en el tiempo en el proceso de recuperación de una señal.

Según el método científico experimental y una vez delimitado el problema a:

- El Control Estadístico de Calidad, en específico, la metodología de CUSUM tabular para detectar corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ para la media del proceso de filtrado. Definiendo la amplitud de una función sinusoidal como la media del atributo “ideal” de calidad del filtrado digital.
- Los filtros digitales que se usan son; Medias Móviles y Polo Sencillo. Para Medias Móviles sólo se requieren promediar n-puntos alrededor de una muestra y se usa la función de transferencia para el filtro de Polo Sencillo.
- Y una vez planteada la hipótesis de trabajo; **“Las Cartas de control CUSUM pueden detectar el ruido no-aleatorio en la restauración de señales con filtros digitales”**.

Se procede entonces a la determinación de las variables involucradas, al diseño del experimento y al análisis de resultados.

3.1 Planteamientos para el análisis de la hipótesis propuesta en esta tesis

La metodología aquí propuesta pretende detectar cuando el procedimiento de filtrado digital de una señal se ve alterado por causas no aleatorias. Esta causa “no aleatoria” es una señal altamente autocorrelacionada, involucrada en el proceso de filtrado.

El diseño del experimento requiere de la justificación de las variables a utilizar como son:

- El tipo de “señal ideal” su amplitud y frecuencia.

- El ruido no aleatorio con la misma frecuencia que la señal filtrada. Debe ser por lo tanto, la misma “señal ideal” con alguna amplitud que permita su detección.
- El rango de inserción para la señal no aleatoria se calcula según los requerimientos de la carta CUSUM.
- Los parámetros de la carta CUSUM para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ para la media del proceso de filtrado.

3.1.1 Justificación de la señal a usarse en el análisis de la hipótesis propuesta en esta tesis

Las señales generalmente se representan a través de funciones sinusoidales. Por lo tanto se define una función de este tipo como entrada al sistema. La amplitud de esta señal sinusoidal en un tiempo n_0 , indica el valor "ideal" para el filtro.

Se supone una señal sinusoidal de acuerdo con la fórmula II.1:

$$x(n) = A \cos(2\pi fn + \theta) \quad \text{Para} \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (\text{III.1})$$

3.1.1.1 Frecuencia y amplitud de la señal a usarse en el análisis de la hipótesis propuesta en esta tesis

Los valores de frecuencia y amplitud de la función de la señal denominada “ideal” pueden cambiar según convenga al análisis, puesto que sólo representa un valor “ideal” a recuperar en el proceso de filtrado. Para esto, la integridad de la información en la señal se garantiza con el teorema de Nyquist-Shannon¹.

¹ Véase capítulo “Filtros digitales en el dominio del tiempo”.

Con el respaldo del teorema Nyquist-Shannon no se tiene mayor problema al proponer los siguientes valores para el muestreo de la señal:

- La unidad como la amplitud de la senoide.
- Se toma una frecuencia de 50 Hz.

Una vez fijada la señal sinusoidal “ideal”, se propone el siguiente modelado.

3.1.1.2 Modelado en MATLAB de la señal a usarse en el análisis de la hipótesis de esta tesis

Para la señal “ideal” la tasa mínima de muestreo es de 50 Hz (hertzios), según el teorema de Nyquist-Shannon.

Sin embargo, esto no es suficiente puesto que no se tienen suficientes muestras de donde inferir un dato en la señal. Se requiere por lo tanto, de una frecuencia de muestreo suficiente para inferir sobre la información de la señal.

Según la tabla I.4 para $h = 5$ se requiere de 10.4 datos y siendo la frecuencia de Nyquist-Shannon igual a $Frec_muestreo = Fs$, se tiene que:

$$(tabla I.4)(frec_Nyquist) = 10.4 * 50Hz = 520Hz \quad (III.2)$$

Se usa una tasa de muestreo de 520 Hz equivalente a 16 muestras por cada repetición de la senoide, lo cual cumple con los requerimientos anteriormente señalados.

Aplicando las justificaciones anteriores:

| | |
|------------------------|----------|
| Amplitud | 1 |
| Fase | $-\pi/2$ |
| Frecuencia | 50 Hz |
| Frecuencia de muestreo | 520 Hz |
| Número de muestras | 512 |

Usando los valores anteriores obtenemos la siguiente señal:

$$x(n) = \cos\left(2\pi 50n - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi 50n) \quad (\text{III.3})$$

Haciendo un muestreo a 520 Hz y simplificando:

$$x(n) = \sin\left(\frac{5\pi}{26} n\right) \quad (\text{III.4})$$

En MATLAB (ver. 4.2) obtenemos la siguiente representación de 512 muestras, de la señal sinusoidal definida anteriormente:²

```
% muestreo a: (tabla I.4) x Frec_Nyquist-Shannon/2 = 10.4 x 50 Hz = 520 Hz  
% desde t=0 hasta t=511 por 1 milisegundo:  
Fs = 520;  
t = 0:1/Fs:0.984615384; % 512x(1/Fs)  
x = sin(2*pi*50*t);
```

² Véase ejemplo de representación de señales capítulo “Filtros digitales en el dominio del tiempo”.

3.1.1.3 Ruido aleatorio a usarse en el análisis de la hipótesis de esta tesis

Se supone una señal contaminada con ruido Gaussiano, con comportamiento $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma)$ (Distribución Normal con Media μ y desviación estándar σ).

Para poder generar los mismos números aleatorios en todas las pruebas se establecerá la semilla del generador de números aleatorios con una distribución Normal Estándar, con la siguiente orden:

```
randn('seed',0)
```

El control de la varianza (σ^2), se hace de la siguiente forma según The MathWorks Inc. (1988:xiv).

```
 $\sigma * \text{randn}(1, M) \sim N(\mu, \sigma)$ 
```

Donde M = tamaño del vector que se genera ($1 \times M$).

Usando la función $size(V)$ (tamaño del vector V) en MATLAB (ver. 4.2) obtenemos:

```
% desviación estándar de 1
% para general señal con ruido:
randn('seed',0);
ruido = randn(size(t));
x_n = x + ruido; % senoide más ruido
```

Donde el ruido tiene distribución Normal con media cero y varianza uno, este ruido se adiciona a la señal de entrada.

3.1.1.4 Ruido no aleatorio a usarse en el análisis de la hipótesis de esta tesis

La señal “no aleatoria” tiene la misma frecuencia que la señal que se quiere recuperar. Por lo tanto, se contamina la señal con un bloque de 11 muestras contiguas debido a que la tabla I.4 indica que se requieren de 10.4 muestras para detectar un corrimiento de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado (para $h = 5$ y $k = 1/2$).

Usando la función III.4, se obtiene la función equivalente:

$$x_k(n) = A \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{26} n\right) \quad (\text{III.5})$$

De la función II.5. se establece:

- La constante A es la amplitud mínima o máxima a usarse en el análisis de la hipótesis de esta tesis.

- La cota inferior de la constante A , es aquella amplitud mínima requerida para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ para la media del proceso de filtrado.
- Por otro lado, la amplitud máxima depende del desempeño del filtro digital y de la precisión específica requerida.

Se define entonces, la amplitud máxima como el estado donde se detecta un corrimiento de la media del proceso, sin exceder las capacidades del proceso de filtrado digital.

Se utilizan las siguientes variables para controlar la amplitud de la señal que representa el “ruido no aleatorio” con la misma frecuencia que la señal filtrada.

| | | |
|------------------------------|----------|---|
| <i>alt_inf_ma = 2.1;</i> | <i>%</i> | <i>alteración de amplitud inferior MA</i> |
| <i>alt_sup_ma = 2.5;</i> | <i>%</i> | <i>alteración de amplitud superior MA</i> |
| <i>alt_inf_arburg = 1.8;</i> | <i>%</i> | <i>alteración de amplitud inferior arburg</i> |
| <i>alt_sup_arburg = 2.5;</i> | <i>%</i> | <i>alteración de amplitud superior arburg</i> |

3.1.1.5 Código en MATLAB de las señales de entrada al proceso de filtrado digital

La señal de entrada incluye:

- La señal sinusoidal “ideal”.
- El ruido aleatorio no correlacionado (distribución Normal media cero y varianza uno).

- Se adiciona el ruido no aleatorio (misma señal “ideal” con alguna amplitud) que se pretende detectar en el rango 50-61.

Se designa las variables:

- $x_{n_alt_inf}$ y $x_{n_alt_sup}$ que son ruido con la amplitud inferior mínima y amplitud superior, respectivamente.
- Y para el filtro $ma()$ = Medias Móviles y $arburg()$ = Polo Sencillo.

Donde las señales sinusoidales tienen la misma frecuencia que la señal filtrada.

El código para la señal con ruido aleatorio, la señal con alteraciones inferior y superior (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado) y para los filtros Medias Móviles y Polo Sencillo (correspondientes a cada señal sinusoidal x) es el siguiente:

```
% variables para señales alteradas en el rango 50-61 (equivalente a 10.4
muestras)
x_alt_inf_ma = x;
x_alt_sup_ma = x;
x_alt_inf_ma(50:61) = x(50:61) + (alt_inf_ma .* x(50:61));
x_alt_sup_ma(50:61) = x(50:61) + (alt_sup_ma .* x(50:61));
x_r_alt_inf_ma = x_alt_inf_ma + ruido;
x_r_alt_sup_ma = x_alt_sup_ma + ruido;
x_alt_inf_arburg = x;
x_alt_sup_arburg = x;
x_alt_inf_arburg(50:61) = x(50:61) + (alt_inf_arburg .* x(50:61));
x_alt_sup_arburg(50:61) = x(50:61) + (alt_sup_arburg .* x(50:61));
x_r_alt_inf_arburg = x_alt_inf_arburg + ruido;
x_r_alt_sup_arburg = x_alt_sup_arburg + ruido;
```

3.1.2 Planteamiento general del método CUSUM tabular

Se propone la siguiente hipótesis para el método CUSUM:

3.1.2.1 Hipótesis de la carta CUSUM

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1$$

$$\therefore \mu_1 = \mu_0 + r\sigma$$

(III.6)

Donde:

- Se supone que la media μ_l varía con respecto a la media μ en r veces la varianza ($r\sigma$). Es decir, la dispersión en la variación de la media del proceso de filtrado no supera r -veces la desviación estándar de un filtro teórico, lo cual nos indica que la media del proceso no se ha movido.
- La media μ_l del proceso es la señal sinusoidal “ideal”, de entrada al sistema de filtrado digital. Por lo tanto, **esta media varía con la señal “ideal”**.

3.1.2.2 El rango para la detección de corrimientos a usarse en el análisis de la hipótesis propuesta en esta tesis

El análisis del Control Estadístico de Calidad fija un valor “ideal” y constante para el atributo de calidad que el proceso debe tener, así como los límites para los cuales la calidad ya no es aceptable.

Se define un rango en la alteración de los datos, que sea aceptable. Esto determina el valor de los parámetros H y K de la carta de control estadístico CUSUM. De forma conveniente se usaran los valores para $k = 1/2$ y $h = 5$ de la tabla I.4³ (para observar desviaciones de una unidad de magnitud para la media en estado fuera de control estadístico).

³ Como se propone en el capítulo “Control Estadístico de Calidad”

Por lo anteriormente visto se plantean los siguientes puntos:

- Ahora el filtro digital tendrá una señal “ideal” afectada por dos causas⁴ que son ruido blanco y por una fuente no aleatoria con la misma frecuencia que la señal filtrada.
- **La media o esperanza es entonces la recuperación de la señal sinusoidal sin ruido:**

$$\mu(t) = A \operatorname{sen}(2\pi ft + \theta) \quad (\text{III.7})$$

- Se usa una senoide de entrada al sistema de la siguiente forma:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi ft + \theta) + N(0, \sigma^2) \quad (\text{III.8})$$

- **Por otro lado el filtro es un estimador de la señal sinusoidal, por lo que utilizaremos:**

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \text{filtro}(t) \quad (\text{III.9})$$

- El tamaño de la muestra es $n = I$ y por lo tanto, la media de las muestras es igual al valor muestral.
- **Los límites inferior y superior requeridos para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$, para la media del proceso de filtrado, se mueven junto con la media, ya que la senoide “ideal” es la media que deseamos obtener.**

⁴ Tradicional sólo existe el ruido blanco, véase el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta”

- Se encontrarán con una precisión de un dígito decimal a los límites inferior y superior de la amplitud de la señal, necesarios para la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ para la media del proceso de filtrado.

3.1.2.3 Tamaño del retardo (memoria de almacenamiento)

La metodología del diseño de filtros digitales requiere del “tamaño del retardo” (o “memoria de almacenamiento”). Para esto se supone un almacenamiento en memoria de 2^n y se adapta este tamaño en el análisis de la hipótesis propuesta, de la siguiente manera: **Se supone que se almacenan 512 datos y que todos ellos son analizados.**

3.1.3 Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis de esta tesis

A continuación se enumeran los pasos a seguir:

1. Según el punto anterior, se hace un muestreo de 512 datos a una tasa de 520 Hz de una señal sinusoidal (con amplitud uno y frecuencia 50Hz), se adicionan datos aleatorios (con distribución Normal media cero y varianza uno) para encubrir la información contenida en la señal⁵ y a la vez se mantienen los datos de la señal sinusoidal “ideal” como referencia a la media del proceso de filtrado.
2. Se utilizan los filtros digitales Medias Móviles y Polo Sencillo para tratar de recuperar la información en la señal sinusoidal.
3. Se utiliza la metodología CUSUM tabular en un filtro con sólo ruido no correlacionado, se usan los valores $k = 1/2$ y $h = 5$ para observar desviaciones la detección de corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ para la media del proceso de filtrado, con $n = 1$ (puesto que sólo tenemos una realización en el muestreo de la señal).

⁵ Véase código en MATLAB. III.2 Señal de entrada; senoide más ruido con distribución Normal con media cero y varianza uno.

Esta prueba “piloto” es un parámetro de referencia para el paso 5 y se considera un “filtro eficiente” a aquel filtro digital cuyo proceso no muestre corrimiento alguno de la media del atributo de calidad para este paso.

4. Posteriormente se introducirá en la señal de entrada⁶ (del filtro digital) un ruido no aleatorio en el rango 50-61.

Este ruido no aleatorio es la misma señal “ideal” de entrada, esto para que se tenga la misma frecuencia entre el ruido no aleatorio y la señal “ideal” en el proceso de filtrado.

5. Por el método de prueba y error (usando las amplitudes obtenidas en el paso 3 como referencia), en la metodología CUSUM tabular modificada se localiza la amplitud mínima y máxima para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado.

La amplitud máxima para detectar ruido no aleatorio está ligada al desempeño del filtro, él recupera en forma eficiente la señal original, por lo que arbitrariamente se asigna una amplitud máxima.

6. Se analizan los datos obtenidos en el paso anterior, para probar la validez de la hipótesis que esta tesis propone.

Si la metodología planteada funciona correctamente, las cartas CUSUM indicarán el momento en que se altera el proceso de filtrado por una causa “no aleatoria”.

⁶ Véase código en MATLAB. III.4 Variables de entrada a los filtros digitales

3.1.4 Identificación de las fuentes de sesgos

La identificación de las causas posibles de error en un experimento es un requerimiento para su análisis estadístico y así se tenga información suficiente para identificar las fuentes que provocan el error, en caso de que el análisis falle.

A continuación se enuncian las partes en un análisis de un sistema de señales donde se conoce existen errores en la precisión de la información.

- La precisión de los datos está relacionada en forma proporcional a la frecuencia del evento que se observa y a la frecuencia de muestreo. Es decir, la tasa de muestreo y la frecuencia de la señal determinan la precisión de los datos obtenidos.

El análisis de señales determina como tasa mínima de muestreo a la tasa de Nyquist-Shannon y adicionalmente esta tasa de muestreo aumenta de acuerdo al requerimiento de la carta CUSUM para detectar un corrimiento en la media del proceso de filtrado.

Por lo que **una tasa de muestreo mal calculada puede deshabilitar el uso de la metodología propuesta en la detección precisa de un corrimiento de la media del proceso de filtrado.**

- Los errores de truncamiento y/o redondeo en los cálculos son otra posible causa de error. Esto debido a que el tratamiento digital de señales trunca o redondea los datos en las operaciones que se calculan.
- Es preciso tener en cuenta que el generador de números aleatorios entrega en realidad números pseudoaleatorios. La potencia de este generador de números pseudoaleatorios es otra posible causa de sesgo en la evaluación del desempeño de recuperación de la señal que realiza el filtro digital.

Un generador de números pseudoaleatorios que no pase las correspondientes pruebas estadísticas interfiere en el análisis de los datos.

- Aun cuando un filtro es diseñado en forma óptima, su salida deberá además explicar estadísticamente la mayoría de la señal “ideal”. Puesto que los errores a la salida del filtro limitan la detección de un corrimiento en la media del proceso.

Todo esto se relaciona en forma directa a la metodología de Control Estadístico de Calidad propuesto.

3.2 Corridas de cartas CUSUM tabular en filtros digitales con dominio en el tiempo

Una vez definidos los datos de la señal de entrada al filtro digital y bajo el supuesto de que los filtros recuperan la señal en forma eficiente, se procede de manera individual a cada filtro de la siguiente manera:

3.2.1 Filtro Medias Móviles

El orden de un filtro de Medias Móviles está directamente relacionado con la precisión. Pero un orden “grande” afecta además, el tiempo de procesamiento. Es decir, un filtro de Medias Móviles de orden muy grande tiene un alto costo en el tiempo de procesamiento. Por lo tanto, el orden deberá elegirse conforme a la factibilidad del problema en específico.

El código del filtro Medias Móviles para MATLAB (ver. 4.2)⁷ es:

```
ma3 = medfilt1(x_n);  
ma3_alt_inf = medfilt1(x_r_alt_inf_ma);  
ma3_alt_sup = medfilt1(x_r_alt_sup_ma);
```

3.2.1.1 Prueba piloto para el Filtro Medias Móviles: CUSUM tabular sólo con ruido Gaussiano

Realizando una prueba piloto del filtro (usando únicamente ruido aleatorio⁸), se obtiene la carta CUSUM (ver figura III.1):

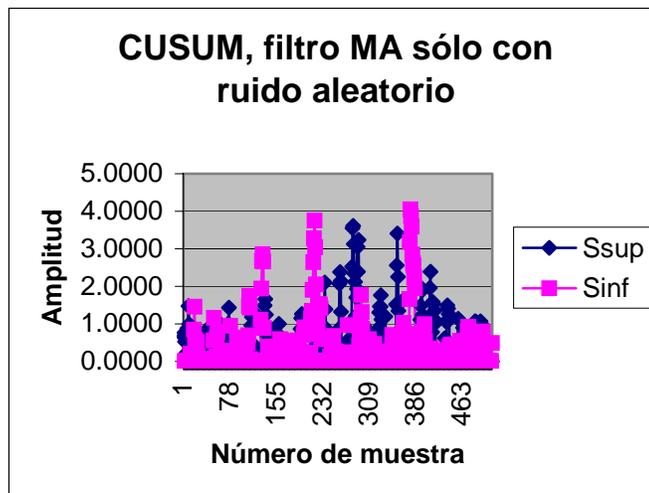


FIGURA III.1: GRÁFICA CUSUM TABULAR CON RUIDO GAUSSIANO. FILTRO MEDIAS MÓVILES

⁷ Paso 2 para el filtro Medias Móviles, del tema “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta” en este capítulo.

⁸ Paso 3 para el filtro Medias Móviles, del tema “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta” en este capítulo.

Observaciones sobre la gráfica CUSUM:

- Un (Error Cuadrático Medio) ECM = 15.2064
- La Suma Acumulada máxima es de 3.6101 para la suma superior y de 4.0525 para la suma inferior.
- No se observan falsas alarmas y por lo tanto no hay problemas para $h = 5$, como referencia para detectar corrimientos en la media de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado.
- **Se concluye que para la función *medfilt1*() de MATLAB (ver. 4.2) es suficiente con el orden por default de 3 para un filtro que se considera “eficiente”.**

Estos datos establecen una corrida de control y a través de estos números se obtiene un estimado para la detección de dispersión causada por ruido no aleatorio y que se observa con el análisis del método CUSUM tabular.

3.2.1.2 Amplitudes inferior y superior en el ruido no aleatorio encontradas para la detección de un corrimiento en la media del proceso para el Filtro Medias Móviles

Alterando la amplitud del ruido no aleatorio⁹ (por el método de prueba y error) se obtienen los siguientes valores mínimo y máximo, para la detección de un corrimiento en la media del proceso para el Filtro Medias Móviles:

Observaciones:

- Se encuentra 2.5 para una amplitud máxima de detección en el ruido “no aleatorio”.
- Se encuentra 2.1 para una amplitud mínima de detección en el ruido “no aleatorio”.

Lo anterior con $h = 5$ como referencia para detectar corrimientos en la media de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado.

3.2.1.3 Comparación del comportamiento gráfico del proceso de filtrado digital para el Filtro Medias Móviles

Con la finalidad de observar el comportamiento de un filtro al verse alterado por un ruido no aleatorio en el rango 50-61, se obtienen las gráficas mostradas en la figura III.2.

⁹ Localización de la amplitud mínima y máxima para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado, en el paso 5 del tema “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta” en este capítulo.

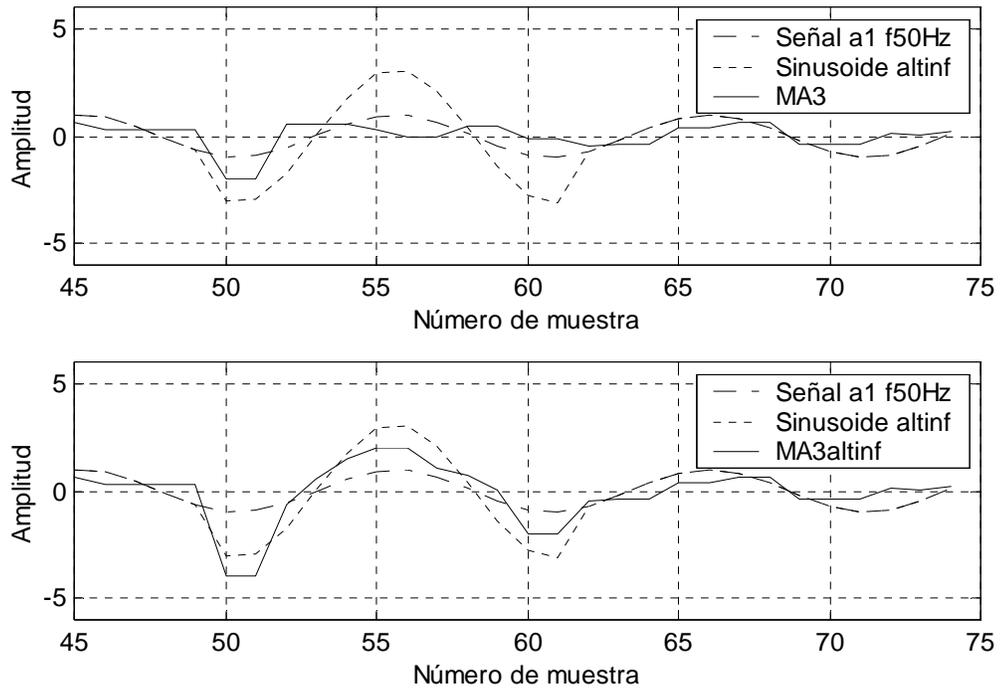


FIGURA III.2: COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE FILTROS MEDIAS MÓVILES (MA3): FILTRO PILOTO VS FILTRO CON RUIDO NO ALEATORIO (PARA UNA AMPLITUD MÍNIMA DE DETECCIÓN DE UN CORRIMIENTO EN LA MEDIA DEL PROCESO EN EL RANGO 50-61).

Observaciones:

- Se observa como el filtro sigue la tendencia que le marca la alteración de la señal correlacionada, lo cual implica alteraciones “no aleatorias” en la información que la señal contiene.

3.2.1.4 CUSUM tabular de la amplitud mínima de detección para el proceso de filtrado con ruido no aleatorio para el Filtro Medias Móviles

De los valores localizados para la amplitud mínima y máxima del ruido no aleatorio (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado), se obtiene la carta CUSUM (ver figura III.3) para la amplitud mínima de detección de un corrimiento en la media del proceso con el filtro Medias Móviles.

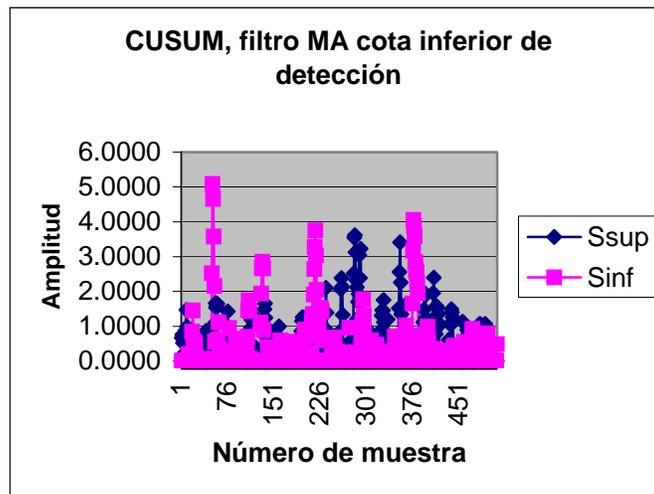


FIGURA III.3: GRÁFICA CUSUM TABULAR CON SEÑAL SINUSOIDAL COMO RUIDO NO ALEATORIO (AMPLITUD = 2.1). FILTRO MEDIAS MÓVILES.

Observaciones sobre la gráfica CUSUM:

- Un (Error Cuadrático Medio) ECM = 15.7026
- La Suma Acumulada máxima es de 3.6101 para la suma superior y de 5.0874 para la suma inferior.

- Se detecta un estado fuera de control estadístico para la suma inferior, se procede de la siguiente forma:

Se detecta $h = 5.0874$ para el punto 50 y se inicializa $Sinf = 0$

Los niveles quedan por debajo de cinco para $Ssup$ y $Sinf$. Las sumas acumuladas máximas son de 3.6101 para la suma superior y de 4.0525 para la suma inferior.

3.2.1.5 CUSUM tabular para la amplitud máxima de detección en el proceso de filtrado con ruido no aleatorio para el Filtro Medias Móviles

De los valores localizados para la amplitud mínima y máxima del ruido no aleatorio (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado), se obtiene la carta CUSUM (ver figura III.4) para la amplitud máxima de detección de un corrimiento en la media del proceso con el filtro Medias Móviles.

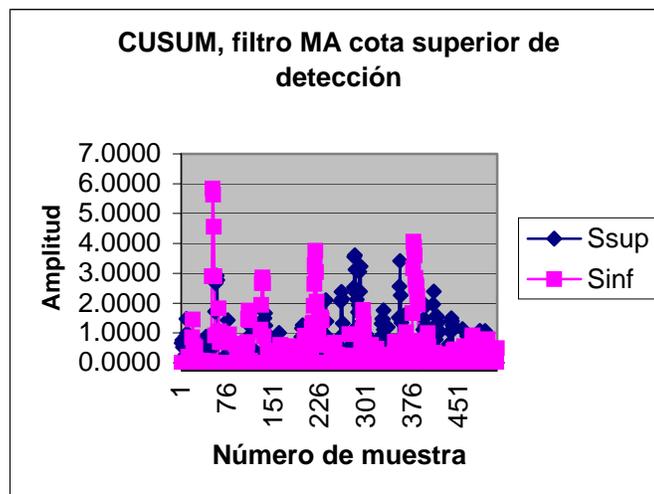


FIGURA III.4: GRÁFICA CUSUM TABULAR CON SEÑAL SINUSOIDAL COMO RUIDO NO ALEATORIO (AMPLITUD = 2.5). FILTRO MEDIAS MÓVILES.

Observaciones sobre la gráfica CUSUM:

- Un (Error Cuadrático Medio) $ECM = 15.9951$
- La Suma Acumulada máxima es de 3.6101 para la suma superior y de 5.8356 para la suma inferior.
- Se detectan estados fuera de control estadístico para la suma inferior, se procede de la siguiente forma:

Se detecta $h = \{5.8356, 5.6332\}$ para los puntos $\{50,51\}$ y se inicializa $Sinf = 0$.

Los niveles quedan por debajo de cinco para $Ssup$ y $Sinf$, las sumas acumuladas máximas son de 3.6101 para la suma superior y de 4.0525 para la suma inferior.

3.2.1.6 Observaciones para el filtro de Medias Móviles

- No se detectan falsas alarmas en el corrimiento de la media de proceso de filtrado en la corrida de control (con únicamente ruido aleatorio).
- De la corrida de control se logran estimar los valores para amplitud mínima y máxima del ruido no aleatorio (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado), para los procesos de filtrado en los cuales se adiciona el ruido no aleatorio.
- **Con amplitud mínima de 2.1 en el ruido “no aleatorio” se pueden detectar corrimientos de la media del proceso de filtrado en forma correcta para $h = 5$.**

Por lo tanto no hay problemas en el análisis de Control Estadístico de Calidad con $h = 5$, como referencia para detectar corrimientos en la media de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado.

3.2.2 Filtro Polo Sencillo

Los coeficientes para la función de transferencia de este filtro se calculan por medio de diversas funciones en MATLAB (ver. 4.2). Sin embargo, resulta tener mejores resultados la función *arburg*(). No obstante, todas las funciones calculan coeficientes similares en las corridas realizadas.

El código del filtro Polo Sencillo para MATLAB (ver. 4.2) es:¹⁰

```
%    Polo Sencillo
[a_arburg,e_arburg] = arburg(x_r,1);
arburg_1 = filter(a_arburg,arburg_ord,x_r);
[a_arburg_alt_inf,e_arburg_alt_inf] = arburg(x_r_alt_inf_arburg,arburg_ord)
arburg_1_alt_inf = filter(a_arburg_alt_inf,arburg_ord,x_r_alt_inf_arburg);
[a_arburg_alt_sup,e_arburg_alt_sup] = arburg(x_r_alt_sup_arburg,arburg_ord)
arburg_1_alt_sup = filter(a_arburg_alt_sup,1,x_r_alt_sup_arburg);
```

3.2.2.1 Prueba piloto para el Filtro Polo Sencillo: CUSUM tabular sólo con ruido Gaussiano

Realizando una prueba piloto del filtro (usando únicamente ruido aleatorio¹¹), se obtiene la carta CUSUM (ver figura III.5).

¹⁰ Paso 2 tema “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta”.

¹¹ Paso 3 tema “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta”.

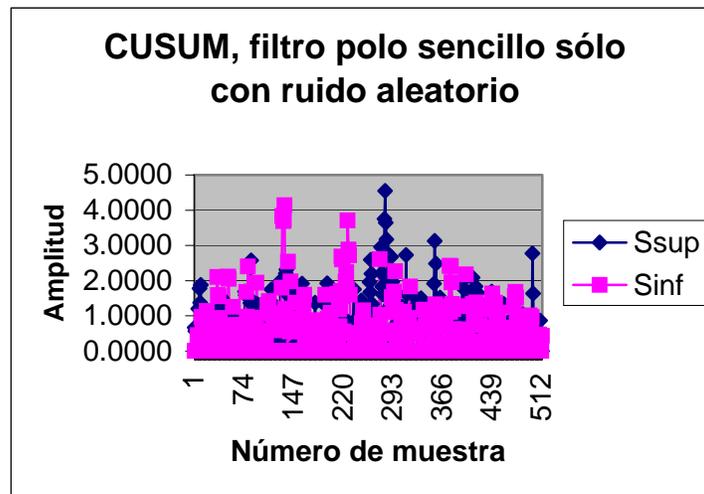


FIGURA III.5: GRÁFICA CUSUM TABULAR CON RUIDO GAUSSIANO. FILTRO POLO SENCILLO

Observaciones sobre la gráfica CUSUM:

- Un (Error Cuadrático Medio) ECM = 23.7546
- La Suma Acumulada máxima es de 4.5448 para la suma superior y de 4.1429 para la suma inferior.
- No se observan falsas alarmas y por lo tanto no hay problemas para $h = 5$, como referencia para detectar corrimientos en la media de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado.
- **Se concluye que los coeficientes calculados por la función $arburg()$, son óptimos para la función $filter()$ y se considera un filtro “eficiente”.**

Estos datos establecen una corrida de control y a través de estos números se obtiene un estimado para la detección de dispersión causada por ruido no aleatorio y que se observa con el análisis del método CUSUM tabular.

3.2.2.2 Amplitudes inferior y superior en el ruido no aleatorio encontradas para la detección de un corrimiento en la media del proceso para el Filtro Polo Sencillo

Alterando la amplitud del ruido no aleatorio¹² (por el método de prueba y error) se obtienen los siguientes valores mínimo y máximo, para la detección de un corrimiento en la media del proceso para el Filtro Polo Sencillo:

Observaciones:

- Se usa 2.5 para una amplitud máxima de detección en el ruido “no aleatorio” en forma arbitraria.
- Se encuentra 1.8 para una amplitud mínima de detección en el ruido “no aleatorio”.

Lo anterior con $h = \{5\}$ como referencia para detectar corrimientos en la media de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso de filtrado.

3.2.2.3 Comparación del comportamiento gráfico del proceso de filtrado digital para el Filtro Polo Sencillo

Con la finalidad de observar el comportamiento de filtro al verse alterado por un ruido no aleatorio en el rango 50-61, se obtienen las gráficas mostradas en la figura III.6.

¹² Localización de la amplitud mínima y máxima para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado, en el paso 5 del tema “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta” en este capítulo.

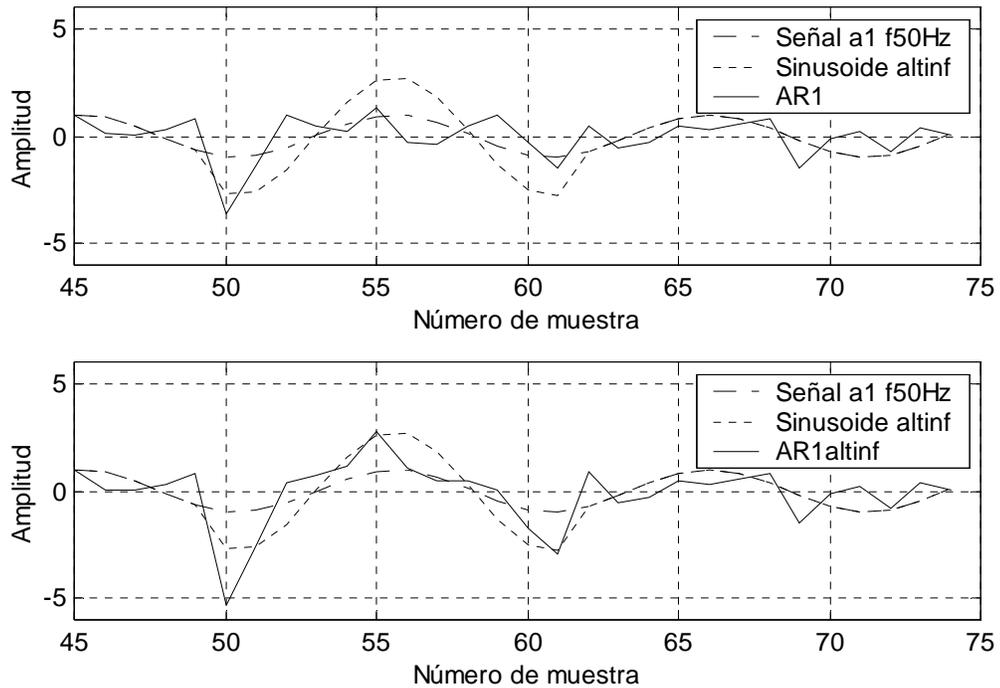


FIGURA III.6: COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE FILTROS DE POLO SENCILLO: FILTRO PILOTO VS FILTRO CON RUIDO NO ALEATORIO (PARA UNA AMPLITUD MÍNIMA DE DETECCIÓN DE UN CORRIMIENTO EN LA MEDIA DEL PROCESO, EN EL RANGO 50-61).

Observaciones:

- Se observa como el filtro sigue la tendencia que le marca la alteración de la señal correlacionada, lo cual implica alteraciones “no aleatorias” en la información que la señal contiene.

3.2.2.4 CUSUM tabular de la amplitud mínima de detección para el proceso de filtrado con ruido no aleatorio para el Filtro Polo Sencillo

De los valores localizados para la amplitud mínima y máxima del ruido no aleatorio (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado) se obtiene la carta CUSUM (ver figura III.7) para la amplitud mínima de detección de un corrimiento en la media del proceso con el filtro Polo Sencillo.

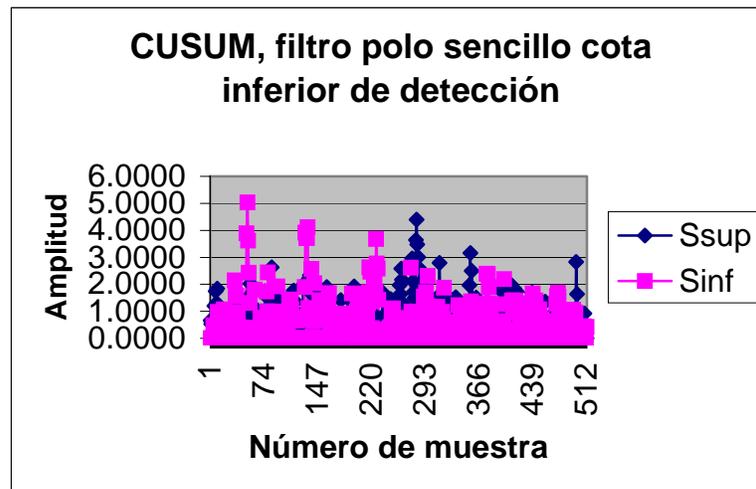


FIGURA III.7: GRÁFICA CUSUM TABULAR CON SEÑAL SINUSOIDAL COMO RUIDO NO ALEATORIO. AMPLITUD = 1.8. FILTRO POLO SENCILLO.

Observaciones sobre la gráfica CUSUM:

- Un (Error Cuadrático Medio) ECM = 24.3474
- La Suma Acumulada máxima es de 4.402 para la suma superior y de 5.0324 para la suma inferior.

- Se detecta un estado fuera de control estadístico para la suma inferior, se procede de la siguiente forma:

Se detecta $h = 5.0324$ para el punto 50 y se inicializa $Sinf = 0$.

Los niveles quedan por debajo de 4 para $Ssup$ y $Sinf$, las sumas acumuladas máximas son de 4.402 para la suma superior y de 4.1155 para la suma inferior.

3.2.2.5 CUSUM tabular de la amplitud máxima de detección para el proceso de filtrado con ruido no aleatorio para el Filtro Polo Sencillo

De los valores localizados para la amplitud mínima y máxima del ruido no aleatorio (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado), se obtiene la carta CUSUM (ver figura III.8) para la amplitud máxima de detección de un corrimiento en la media del proceso con el filtro Polo Sencillo:

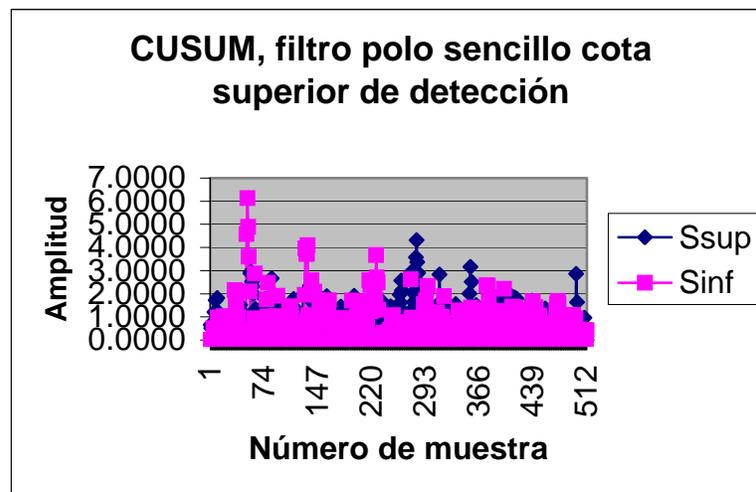


FIGURA III.8: GRÁFICA CUSUM TABULAR CON SEÑAL SINUSOIDAL COMO RUIDO NO ALEATORIO (AMPLITUD = 2.5). FILTRO POLO SENCILLO.

Observaciones sobre la gráfica CUSUM:

- Un (Error Cuadrático Medio) $ECM = 24.8009$
- La Suma Acumulada máxima es de 4.3119 para la suma superior y de 6.1342 para la suma inferior.
- Se detecta un estado fuera de control estadístico para la suma inferior, se procede de la siguiente forma:

Se detecta $h = 6.1342$ para el punto 50, se inicializa $Sinf = 0$.

Los niveles quedan por debajo de cinco para $Ssup$ y $Sinf$, las sumas acumuladas máximas son de 4.3119 para la suma superior y de 4.5838 para la suma inferior.

3.2.2.6 Observaciones para el filtro de Polo Sencillo

- No se detectan falsas alarmas en el corrimiento de la media de proceso de filtrado en la corrida de control sin la senoide (con únicamente ruido aleatorio).
- De la corrida de control se logran estimar los valores para amplitud mínima y máxima del ruido no aleatorio (para la detección de un corrimiento en la media del proceso de filtrado), para los procesos de filtrado en los cuales se adiciona el ruido no aleatorio.

- **Con amplitud de 1.8 o superior en el ruido “no aleatorio”, se pueden detectar corrimientos de la media del proceso de filtrado en forma correcta para $h = 5$.**

Por lo tanto no hay problemas en el análisis de Control Estadístico de Calidad con $h = 5$, como referencia para detectar corrimientos en la media de alrededor de una $\sigma_{\bar{X}}$ en la media del proceso de filtrado.

CAPÍTULO 4 Comparación de modelos

Se procede en este capítulo a la comparación de un método de Control Estadístico de Calidad “actual” con la metodología propuesta en esta tesis.

La hipótesis que esta tesis propone se refiere a la detección de ruido no aleatorio en un proceso de restauración de señales con filtros digitales. Con la finalidad de verificar esta hipótesis se plantea que las Cartas de Control Estadístico de Calidad detectan una señal correlacionada (ruido no aleatorio) aun con la misma frecuencia que la señal filtrada (denominada como media del atributo de calidad).

Sobre los filtros digitales se señalan los siguientes puntos:

- Trabajan bajo el supuesto de que sólo existe ruido no correlacionado contaminando la señal que se desea recuperar.
- **No contemplan método alguno de control estadístico, esto debido a que el filtro se diseña para ser óptimo**, es decir se obtiene un filtro que dentro de un margen de error es eficiente al proceso de restauración de la señal.
- **No distinguen entre dos señales con la misma frecuencia, suponen únicamente ruido aleatorio (no correlacionado)** y solamente diferencian una señal altamente correlacionada de un ruido blanco.

Con el propósito de experimentar sobre la hipótesis que esta tesis propone se adiciona un ruido “no aleatorio” al proceso de restauración de señales mediante filtros digitales, lo cual altera el desempeño del filtro. Por lo tanto, **el proceso de restauración de la señal ya no mantiene el supuesto de que sólo existe ruido no correlacionado en el filtro.**

Se piensa entonces en la metodología de Control Estadístico de Calidad como un proceso que detecta en un filtro, una alteración causada por un ruido no aleatorio y correlacionado¹. Por lo que se plantea lo siguiente:

No se puede evitar una alteración en el desempeño del filtro provocada por un ruido no aleatorio con la misma frecuencia que la señal filtrada. Esto debido a que el filtro no distingue entre señales con la misma frecuencia² y por lo tanto no se puede diferenciar lo que es ruido de lo que es señal.

Por lo anterior, el Análisis de señales no toma en cuenta una metodología para distinguir entre señales con la misma frecuencia. Actualmente como medida de control de un filtro sólo se mide el error causado por la dispersión de todo el proceso de filtrado. Esta medición no distingue a un ruido “no aleatorio”, específicamente si este tiene la misma frecuencia que la señal filtrada.

4.1 Control de calidad “actual” del proceso de filtrado digital

Actualmente no existe un Control Estadístico de Calidad para un filtro digital. El procedimiento de restauración de una señal implica que se calculen los coeficientes de un filtro óptimo y sólo se mida el error obtenido de la diferencia entre la señal de salida y la señal estimada del filtro digital.

Un filtro es diseñado de acuerdo a los requerimientos de cada caso y no existe un Control Estadístico de Calidad una vez diseñado el filtro en específico, sólo se aspira a conocer el error de dispersión en el proceso.

¹ Para este caso en específico, la señal tiene la misma frecuencia que la señal filtrada.

² Véanse las características de las señales sinusoidales en el capítulo “Filtros digitales en el dominio del tiempo”.

Por lo tanto para el proceso de filtrado digital se propone comparar, como método “actual”, al Error Cuadrático Medio (ECM) y al Control Estadístico de Calidad CUSUM tabular.

4.2 Evaluación de la medición del Error Cuadrático Medio (ECM) como método actual en el Control Estadístico de Calidad

Se utilizan las mismas condiciones y variables que en el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta”³, se cambia el método de detección de corrimientos en la media del proceso de filtrado por el método del Error Cuadrático Medio (ECM), pero se usan los valores de amplitud mínima y máxima obtenidos con las cartas CUSUM en ese capítulo.

A continuación se muestran los valores obtenidos de la medición del Error Cuadrático Medio (ECM) como método de Control Estadístico de Calidad. Se procede de manera individual a cada tipo de filtro, de la siguiente manera:

³ Pasos del tema: “Definición de los pasos a seguir en el análisis de la hipótesis propuesta”.

4.2.1 Filtro Medias Móviles

El Error Cuadrático Medio (obtenido en las corridas del método CUSUM) sobre la dispersión observada en el filtro de Medias Móviles se muestra en la tabla IV.1.

TABLA IV.1: MEDICIONES DEL ERROR CUADRÁTICO MEDIO, FILTRO DE MEDIAS MÓVILES.

| ECM únicamente con ruido blanco (prueba piloto) | ECM para la corrida con amplitud mínima de detección. | ECM para la corrida con amplitud máxima de detección. |
|---|---|---|
| 15.2064 | 15.7026 | 15.9951 |

Observaciones:

Comparando el valor ECM obtenido en el filtro de “control” en el caso ruido blanco (prueba piloto) y los valores ECM donde se contamina la señal en el rango 50-61 con un ruido no aleatorio (con la misma frecuencia que la señal filtrada) se obtiene la tabla IV.2.

TABLA IV.2: OBSERVACIONES SOBRE LA MEDICIÓN DEL ERROR CUADRÁTICO MEDIO, FILTRO DE MEDIAS MÓVILES.

| Para una corrida con amplitud mínima de detección | Para una corrida con amplitud máxima de detección |
|---|---|
| Un aumento en el ECM de 0.4962 | Un aumento en el ECM de 0.7887 |

4.2.2 Filtro Polo Sencillo

El Error Cuadrático Medio (obtenido en las corridas del método CUSUM) sobre la dispersión observada en el filtro de Polo Sencillo se muestra en la tabla IV.3.

TABLA IV.3: MEDICIONES DEL ERROR CUADRÁTICO MEDIO, FILTRO POLO SENCILLO.

| ECM únicamente con ruido blanco (prueba piloto) | ECM para corrida con amplitud mínima de detección | ECM para corrida con amplitud máxima de detección |
|---|---|---|
| 23.7546 | 24.3474 | 24.8009 |

Observaciones:

Comparando el valor ECM obtenido en el filtro de “control” en el caso ruido blanco (prueba piloto) y los valores ECM donde se contamina la señal en el rango 50-61 con un ruido no aleatorio (con la misma frecuencia que la señal filtrada) se obtiene la tabla IV.4.

TABLA IV.4: OBSERVACIONES SOBRE LA MEDICIÓN DEL ERROR CUADRÁTICO MEDIO EN EL FILTRO DE MEDIAS MÓVILES.

| Para una corrida con amplitud mínima de detección | Para una corrida con amplitud máxima de detección |
|---|---|
| Un aumento en el ECM de 0.5928 | Un aumento en el ECM de 1.0463 |

4.2.3 Observaciones del método de control de calidad ECM

De los datos obtenidos anteriormente se infieren los siguientes puntos:

- La adición del ruido no aleatorio en el filtro incrementa el error en el proceso de filtrado.
- Aun cuando se puede verificar el procedimiento en períodos pequeños, para verificar sobre algún aumento del ECM, esto consume aun más tiempo de procesamiento.
- El aumento o disminución de error se puede atribuir al cálculo de los coeficientes de filtro o al ruido inherente a la inferencia sobre la información en la señal.

Además, este aumento en el error no implica que la dispersión sobrepase o no a los límites de dispersión de calidad permitidos, puesto que ni siquiera existe una observación de estos límites en esta metodología.

Por los puntos anteriores **no se considera un procedimiento adecuado para el Control Estadístico de Calidad puntual.**

4.3 El método *CUSUM* tabular en el control de calidad

A continuación se resumen los valores obtenidos en la implementación del Control Estadístico de Calidad, para la detección de señales no aleatorias para los siguientes filtros⁴:

⁴ Estos datos ya se analizaron en el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta” por lo que solamente se resumen las cualidades del análisis.

4.3.1 Filtro Medias Móviles

La tabla IV.5 puntualiza los logros alcanzados en la detección de ruido no aleatorio en el filtrado digital con Medias Móviles:

TABLA IV.5 OBSERVACIONES SOBRE LA CUSUM TABULAR INDIVIDUAL, FILTRO DE MEDIAS MÓVILES.

| Para una corrida con amplitud mínima de detección en el método CUSUM | Para una corrida con amplitud máxima de detección en el método CUSUM |
|--|---|
| <p>Con ruido sinusoidal no aleatorio con amplitud de 2.1 se detecta $h = 5.0874$ en el punto 50 de la gráfica y para la suma inferior <i>Sinf</i>.</p> <p>Inicializando $Sinf = 0$</p> <p>los niveles quedan por debajo de cinco para <i>Ssup</i> y <i>Sinf</i>.</p> | <p>Con ruido sinusoidal no aleatorio con amplitud de 2.5 se detectan $h = 5.8356$ y 5.6332 en los puntos 50 y 51 respectivamente; de la gráfica y para la suma inferior <i>Sinf</i>.</p> <p>Inicializando $Sinf = 0$</p> <p>Los niveles quedan por debajo de cinco para <i>Ssup</i> y <i>Sinf</i>.</p> |

Por lo tanto, se detectan correctamente los corrimientos en la media de proceso de filtrado para $h = 5$.

4.3.2 Filtro Polo Sencillo

La tabla IV.6 puntualiza los logros alcanzados en la detección de ruido no aleatorio en el filtrado digital con Polo Sencillo:

TABLA IV.6: OBSERVACIONES SOBRE LA CUSUM TABULAR INDIVIDUAL, FILTRO DE MEDIAS MÓVILES.

| Para una corrida con amplitud mínima de detección en el método CUSUM | Para una corrida con amplitud máxima de detección en el método CUSUM |
|--|--|
| <p>Con ruido sinusoidal no aleatorio con amplitud de 1.8 se detecta $h = 5.0324$ en el punto 50 de la gráfica y para la suma inferior S_{inf}.</p> <p>Inicializando $S_{inf} = 0$</p> <p>los niveles quedan por debajo de cinco para S_{sup} y S_{inf}.</p> | <p>Con ruido sinusoidal no aleatorio con amplitud de 2.5 se detecta $h = 6.1342$ en el punto 50 de la gráfica y para la suma inferior S_{inf}.</p> <p>Inicializando $S_{inf} = 0$</p> <p>los niveles quedan por debajo de cinco para S_{sup} y S_{inf}.</p> |

Por lo tanto, se detectan correctamente los corrimientos en la media de proceso de filtrado para $h = 5$.

4.4 Tabla comparativa de métodos de control en filtros digitales

La tabla IV.7 compara el método de Control Estadístico de Calidad “CUSUM modificado” y “el método tradicional de Control Estadístico de Calidad en filtros digitales (ECM)”. Esto sólo para el caso particular de las corridas realizadas para el análisis de la hipótesis que esta tesis propone.

TABLA IV.7: COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE CALIDAD; ERROR CUADRÁTICO MEDIO Y CUSUM TABULAR INDIVIDUAL CUANDO SE CONOCE LA SEÑAL IDEA.

| Método | Ventaja | Desventaja |
|---|---|---|
| Error Cuadrático Medio. | <i>No aplica.</i> | <ul style="list-style-type: none"> • No distingue entre señales con la misma frecuencia. • No especifica puntualmente donde se detecta la señal no aleatoria. |
| CUSUM tabular individual conociendo la señal “ideal”. | <ul style="list-style-type: none"> • Distingue entre señales con la misma frecuencia. • Específica puntualmente donde se detecta la señal no aleatoria. | Se requiere conocer el comportamiento “ideal” de la señal de salida al sistema de señales. |

Conclusiones

Las Cartas de Control Estadístico de Calidad infieren sobre un rango donde se observa una dispersión debida únicamente a causas aleatorias, para un atributo de calidad en un proceso. Esta condición se traslada a filtro digital de señales, tomando el filtro como una inferencia de la señal y así analizarlo bajo condiciones teóricamente no previstas por los sistemas digitales de señales. Este enfoque de las cartas CUSUM permite la verificación de ruido no aleatorio, cuando este ruido no pueda ser separado por un filtro de frecuencias.

En la práctica, generalmente se supone que el ruido es clasificado como aleatorio o determinista y en el caso de que el ruido sea aleatorio sólo se evalúa su desempeño de acuerdo a sus niveles de dispersión. Pero si existen ambos ruido aleatorio y no aleatorio, entonces no se toma en consideración qué información es alterada por uno o por otro.

La evaluación de los efectos de la no aleatoriedad de un ruido en el desempeño de un filtro digital, puede ser de ayuda en el caso de que los datos sean de uso delicado, este caso puede darse en un electrocardiograma (ECG). Además de los alcances teóricos que se puedan lograr al implementar esta metodología en el análisis de señales.

El análisis realizado en el capítulo “Aplicación experimental de la metodología propuesta” **se lograron detectar corrimientos de alrededor de una $\sigma_{\bar{x}}$ para la media del proceso de filtrado digital de los filtros Medias Móviles y Polo Sencillo¹, por lo que se comprueba la hipótesis de esta tesis.** Esto usando la tabla de Longitudes de Corrida Promedio I.4 ($H = 5$, $K = 1/2$), realizando una corrida piloto por medio de la cual

¹ Véanse “Observaciones para el filtro de M. A.” y “Observaciones para el filtro de Polo Sencillo”.

se verifica que bajo un planteamiento meramente teórico el filtro digital no rebasa los límites para la detección de un corrimiento en la media del proceso y siempre que el ruido correlacionado con la misma frecuencia que la señal filtrada permita detectar un corrimiento en la media del proceso de filtrado.

Actualmente no existe un Control Estadístico de Calidad para filtros digitales debido a que teóricamente no se contempla la presencia de “ruido correlacionado” en la misma frecuencia que la señal filtrada. Por lo que **se propone la implementación del Control Estadístico de Calidad en el proceso de restauración de señales con filtros digitales, para la detección de ruido no-aleatorio con la misma frecuencia que la señal filtrada (de acuerdo con el objetivo de esta tesis).**

Esta metodología podría apoyar a los sistemas de señales al permitir la detección puntual de la salida de los límites de control que se especifiquen, al indicar en un filtro digital de señales, donde los datos pueden ser no confiables, es decir donde los datos obtenidos no sólo tienen la influencia de ruido aleatorio. Esto aplicando la metodología propuesta en esta tesis la cual parte de una corrida “piloto” con sólo ruido aleatorio en el filtro y aplicando una carta CUSUM apropiada a cada caso.

Actualmente existe un gran número de programas que ayudan en el diseño y análisis de señales. Por ejemplo, MATLAB (ver. 4.2) tiene un bloque de herramientas especializadas en el tratamiento de señales. Estas herramientas permiten el diseño de los filtros y el análisis teórico de un sistema de señales digitales, por lo que **se puede agregar la metodología CUSUM al análisis de señales sin mayores complicaciones.**

Conclusiones

La aplicación de la metodología CUSUM tabular en un filtro digital de señales, tiene las siguientes bondades:

- El algoritmo de las cartas CUSUM facilita la modificación de la metodología para una media ideal que varíe en el tiempo.
- Permite ampliar el manejo a todos y cada uno de los datos que arroje el filtro y no sólo a una serie de muestras. Dado que un tamaño de muestra grande nos permite la detección de corrimientos pequeños y además el muestreo no es destructivo.
- Costos bajos debido a que sólo se tienen como costos la cantidad de memoria y el tiempo del proceso. Afortunadamente los computadores actuales manejan estos costos sin mayor complicación, por lo que el análisis de la metodología propuesta se puede implementar a un bajo costo.

El análisis realizado en este trabajo de tesis sobre la metodología CUSUM se limita a señales sinusoidales con frecuencia y amplitud constantes:

- Se requiere por lo tanto, de un análisis teórico más profundo para ampliar la hipótesis de esta tesis, ya sea con diferentes señales y/o con niveles de ruido diferentes a los aquí propuestos.
- Para inferir correctamente sobre el desplazamiento que se espera observar de un procedimiento de filtrado digital se requiere de un análisis completo del fenómeno (Generalmente se realizan simulaciones para poder determinar los valores correctos de detección, este trabajo no abarca este dilema).
- En el aspecto práctico los microprocesadores DSP (Procesador Digital de señales) son utilizados ampliamente en dispositivos que requieren filtrado en tiempo real. Se

Conclusiones

puede buscar la implementación del algoritmo de las cartas CUSUM a estos dispositivos en los casos que así se requiera.

Como egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación encontré que no sólo se requiere de la aplicación racional del conocimiento adquirido en la licenciatura, sino de la aplicación de estos conocimientos a otros modelos matemáticos. Intentando fortalecer estos modelos matemáticos para alguna condición que teóricamente no se contemple en el modelo, pero que puedan llegar a aplicarse en forma práctica a algún problema en específico.

Para la realización de este trabajo de tesis se requirió de una investigación sobre filtros digitales y de la aplicación de los conocimientos adquiridos en esta investigación para la simulación de un proceso de filtrado digital para restaurar una señal sinusoidal usando los filtros Medias Móviles y Polo Sencillo.

A.1 Resultados de las pruebas estadísticas de Normalidad realizadas en STATGRAPHICS

Uncensored Data - ruido

Analysis Summary

Data variable: ruido

512 values ranging from -2.8728 to 3.2069

Fitted normal distribution:

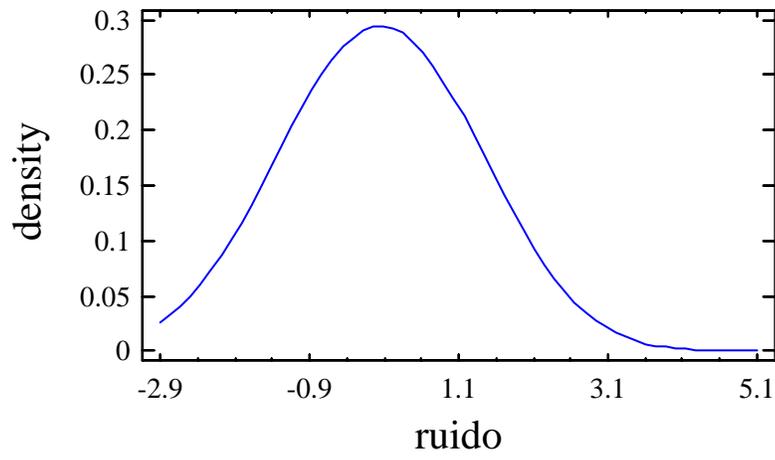
mean = 0.043748

standard deviation = 1.00214

The StatAdvisor

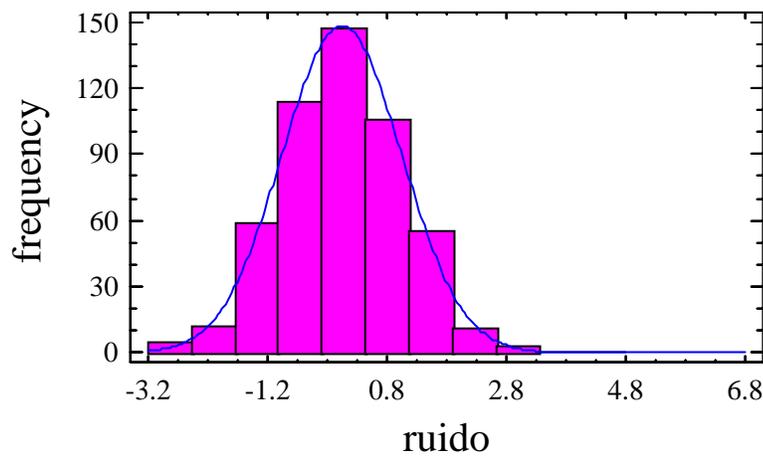
This analysis shows the results of fitting a normal distribution to the data on ruido. The estimated parameters of the fitted distribution are shown above. You can test whether the normal distribution fits the data adequately by selecting Goodness-of-Fit Tests from the list of Tabular Options. You can also assess visually how well the normal distribution fits by selecting Frequency Histogram from the list of Graphical Options. Other options within the procedure allow you to compute and display tail areas and critical values for the distribution. To select a different distribution, press the alternate mouse button and select Analysis Options.

Density Trace for ruido



1

Histogram for ruido



¹ Las gráficas permiten el análisis visual de los datos.

Goodness-of-Fit Tests for ruido**Chi-Square Test**

| Lower Limit | Upper | Observed | Expected | |
|-------------|------------|-----------|-----------|------------|
| Limit | Limit | Frequency | Frequency | Chi-Square |
| at or below | -1.69162 | 19 | 21.33 | 0.26 |
| -1.69162 | -1.3422 | 22 | 21.33 | 0.02 |
| -1.3422 | -1.10906 | 18 | 21.33 | 0.52 |
| -1.10906 | -0.925743 | 30 | 21.33 | 3.52 |
| -0.925743 | -0.770207 | 19 | 21.33 | 0.26 |
| -0.770207 | -0.632185 | 22 | 21.33 | 0.02 |
| -0.632185 | -0.505948 | 28 | 21.33 | 2.08 |
| -0.505948 | -0.387901 | 13 | 21.33 | 3.26 |
| -0.387901 | -0.275574 | 20 | 21.33 | 0.08 |
| -0.275574 | -0.167131 | 28 | 21.33 | 2.08 |
| -0.167131 | -0.0611104 | 18 | 21.33 | 0.52 |
| -0.0611104 | 0.043748 | 18 | 21.33 | 0.52 |
| 0.043748 | 0.148607 | 13 | 21.33 | 3.26 |
| 0.148607 | 0.254628 | 21 | 21.33 | 0.01 |
| 0.254628 | 0.36307 | 22 | 21.33 | 0.02 |
| 0.36307 | 0.475397 | 30 | 21.33 | 3.52 |
| 0.475397 | 0.593444 | 23 | 21.33 | 0.13 |
| 0.593444 | 0.719681 | 20 | 21.33 | 0.08 |
| 0.719681 | 0.857703 | 15 | 21.33 | 1.88 |
| 0.857703 | 1.01324 | 27 | 21.33 | 1.51 |
| 1.01324 | 1.19656 | 23 | 21.33 | 0.13 |
| 1.19656 | 1.4297 | 20 | 21.33 | 0.08 |
| 1.4297 | 1.77912 | 21 | 21.33 | 0.01 |
| Above | | 22 | 21.33 | 0.02 |
| 1.77912 | | | | |

Chi-Square = 23.7831 with 21 d.f. P-Value = 0.303688

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.0200317
 Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.0260262
Estimated overall statistic DN = 0.0260262
Approximate P-Value = 0.878622

| EDF Statistic | Value | Modified Form | P-Value |
|----------------------|-----------|---------------|---------|
| Kolmogorov-Smirnov D | 0.0260262 | 0.589624 | >0.10* |
| Anderson-Darling A^2 | 0.257374 | 0.257754 | 0.7190* |

*Indicates that the P-Value has been compared to tables of critical values specially constructed for fitting the currently selected distribution. Other P-values are based on general tables and may be very conservative.

The StatAdvisor

This pane shows the results of tests run to determine whether ruido can be adequately modeled by a normal distribution. The chi-square test divides the range of ruido into nonoverlapping intervals and compares the number of observations in each class to the number expected based on the fitted distribution. The **Kolmogorov-Smirnov test** computes the maximum distance between the cumulative distribution of ruido and the CDF of the fitted normal distribution. In this case, the **maximum distance is 0.0260262**. The other EDF statistics compare the empirical distribution function to the fitted CDF in different ways.

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0.10, we can not reject the idea that ruido comes from a normal distribution with 90% or higher confidence.

Comentario acerca de la salida anterior

El programa entrega los resultados en inglés no obstante, los fundamentos teóricos y la interpretación de resultados (de las pruebas realizadas en STATGRAPHICS 4.10 (1998)) se revisan en el capítulo 2. Se agrega esta salida debido a que adicionalmente a la interpretación escrita de resultados, estos se muestran además en forma gráfica y tabular, lo que es de utilidad en caso de requerirse un análisis más profundo.

A2. Código en MATLAB para la simulación del proceso de filtrado

```
clf reset
clc

arburg_ord = 1;
ruido_desv_stnd = 1;

alt_inf_ma = 2.1;    % alteracion de amplitud inferior MA
alt_sup_ma = 2.5;    % alteracion de amplitud superior MA
alt_inf_arburg = 1.8;% alteracion de amplitud inferior AR
alt_sup_arburg = 2.5;% alteracion de amplitud superior AR

% muestreo: (tabla I.4)xFrec_nyquist/2 = 10.4 x 50 = 520 Hz
% desde t=0 hasta t=511 por 1 milisegundo:
Fs = 520;
t = 0:1/Fs:0.984615384;    % 512x(1/Fs)
x = sin(2*pi*50*t);
% desviacion estandard de 1
% para general señal con ruido:
randn('seed',0);
ruido = ruido_desv_stnd * randn(size(t));
x_r = x + ruido;% senoide más ruido
```

Anexos

```
% análisis en señal alterada, 50-61 equivalente a 10.4
x_alt_inf_ma = x;
x_alt_sup_ma = x;
x_alt_inf_ma(50:61) = x(50:61) + (alt_inf_ma .* x(50:61));
x_alt_sup_ma(50:61) = x(50:61) + (alt_sup_ma .* x(50:61));
x_r_alt_inf_ma = x_alt_inf_ma + ruido;
x_r_alt_sup_ma = x_alt_sup_ma + ruido;
x_alt_inf_arburg = x;
x_alt_sup_arburg = x;
x_alt_inf_arburg(50:61) = x(50:61) + (alt_inf_arburg .*
x(50:61));
x_alt_sup_arburg(50:61) = x(50:61) + (alt_sup_arburg .*
x(50:61));
x_r_alt_inf_arburg = x_alt_inf_arburg + ruido;
x_r_alt_sup_arburg = x_alt_sup_arburg + ruido;

% filtros
% medias moviles
ma3 = medfilt1(x_r);
ma3_alt_inf = medfilt1(x_r_alt_inf_ma);
ma3_alt_sup = medfilt1(x_r_alt_sup_ma);
```

```

% polo sencillo
[a_arburg,e_arburg] = arburg(x_r,1)
pause % a 1 -.194 e 1.3356
arburg_1 = filter(a_arburg,arburg_ord,x_r);
[a_arburg_alt_inf,e_arburg_alt_inf] =
arburg(x_r_alt_inf_arburg,arburg_ord)
pause % a 1 -.2204 e 1.4095
arburg_1_alt_inf =
filter(a_arburg_alt_inf,arburg_ord,x_r_alt_inf_arburg);
[a_arburg_alt_sup,e_arburg_alt_sup] =
arburg(x_r_alt_sup_arburg,arburg_ord)
pause % a 1 -.2371 e 1.4542
arburg_1_alt_sup =
filter(a_arburg_alt_sup,1,x_r_alt_sup_arburg);

% graficas de comparativos señales vs filtros
subplot(2,1,1);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_inf_ma(45:74),' : ',45:74,ma3(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altinf','MA3')
subplot(2,1,2);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_inf_ma(45:74),' : ',45:74,ma3_alt_inf(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altinf','MA3altinf')
pause

```

```

subplot(2,1,1);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_sup_ma(45:74),' : ',45:74,ma3(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altsup','MA3')
subplot(2,1,2);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_sup_ma(45:74),' : ',45:74,ma3_alt_sup(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altsup','MA3altsup')
pause

```

```

subplot(2,1,1);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_inf_arburg(45:74),' : ',45:74,arburg_1(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altinf','AR1')
subplot(2,1,2);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_inf_arburg(45:74),' : ',45:74,arburg_1_alt_inf
(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altinf','AR1altinf')
pause

```

```
subplot(2,1,1);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_sup_arburg(45:74),':',45:74,arburg_1(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altsup','AR1')
subplot(2,1,2);
plot(45:74,x(45:74),'-
.',45:74,x_alt_sup_arburg(45:74),':',45:74,arburg_1_alt_sup
(45:74))
axis([45 75 -6 6])
xlabel('Numero de muestra');ylabel('Amplitud');grid;
legend('Señal a1 f50Hz','Sinusoide altsup','AR1altsup')

%clc
```

Comentario acerca del código anterior

En esencia, el código se examina paso a paso en el capítulo 3. El código se adiciona a esta tesis en forma completa ya que es de utilidad en caso de requerirse un análisis más profundo.

A3. Corridas complementarias del método CUSUM

Además de las corridas analizadas en el capítulo 3, se anexan a continuación resultados cambiando los valores de las variables involucradas en el proceso. Es decir, se modifica el punto de inserción al inicio, en medio y al final de la señal y a cambiar las amplitudes del ruido no-aleatorio. Se toman los valores de la tabla I.4 para cero, una, dos y tres $\sigma_{\bar{x}}$ cambiando la desviación estándar del ruido aleatorio y la amplitud de la señal “ideal”.

El procedimiento de los filtros digitales se toma como una caja negra, donde las cartas CUSUM miden la dispersión y verifican alguna causa asignable a algún aumento. En el caso de esta tesis la causa del aumento en la varianza se atribuye a una señal con la misma frecuencia que la señal en el proceso de filtrado y es la causa que se desea verificar.

En las tablas se muestran los parámetros utilizados tanto en el proceso de filtrado como en la metodología CUSUM y se indican los ajusten requeridos para el análisis. Los resultados se muestran en las tablas A3.1, A3.2 y A3.3.

| TABLA A3.1: OBSERVACIONES PARA CARTAS CUSUM PARA UNA SENAL IDEAL CON AMPLITUD UNO, FRECUENCIA 50 Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL RUIDO DE UNO. | | | | | | | |
|--|--|------------|---|--------------------|----------------|-------------------|---|
| Tabla I.4 | | Parámetros | | Ruido no aleatorio | Tipo de filtro | Detección | Conclusiones |
| Múltiplo de σ_x | Tamaño de Muestra/ Frecuencia de muestreo | k | h | Rango de inserción | | Número de muestra | |
| 0 | 465/23250Hz | 0.5 | 5 | 1-465 | Medias móviles | 218 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.20 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 218 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.20 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 700-1164 | Medias móviles | 1131 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.23 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 740 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.30 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 930-1394 | Medias móviles | 1354 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.14 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 948 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.26 en el ruido no-aleatorio |
| 1 | 465/520Hz | 0.5 | 5 | 1-11 | Medias móviles | 3 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.27 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 2 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.30 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 250-260 | Medias móviles | 261 | La CUSUM requiere una amplitud de 1.8 y 12 muestras |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 261 | La CUSUM requiere una amplitud de 2.3 y 12 muestras |
| | | 0.5 | 5 | 501-512 | Medias móviles | 508 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.90 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 506 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.03 en el ruido no-aleatorio |
| 2 | 465/201Hz | 0.5 | 5 | 1-5 | Medias móviles | 8 | La CUSUM requiere una amplitud de 5 y 8 muestras |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 1 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 5.60 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 250-254 | Medias móviles | 252 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 4.70 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 252 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 5.01 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 507-512 | Medias móviles | 512 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 9.90 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 509 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 5.19 en el ruido no-aleatorio |
| 3 | 465/129Hz | 0.5 | 5 | 1-3 | Medias móviles | 5 | La CUSUM requiere una amplitud de 7 y 5 muestras |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 1 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 9.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 250-252 | Medias móviles | 252 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 17.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 250 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 9.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | 509-512 | Medias móviles | 510 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 9.10 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 5 | | Polo sencillo | 510 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 10.00 en el ruido no-aleatorio |

| TABLA A3.2: OBSERVACIONES PARA CARTAS CUSUM PARA UNA SEÑAL IDEAL CON AMPLITUD UNO, FRECUENCIA 50 Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL RUIDO DE DIEZ. | | | | | | | |
|---|--|------------|----|--------------------|----------------|-------------------|--|
| Tabla I.4 | | Parámetros | | Ruido no aleatorio | Tipo de filtro | Detección | Conclusiones |
| Múltiplo de σ_x | Tamaño de Muestra/ Frecuencia de muestreo | k | h | Rango de inserción | | Número de muestra | |
| 0 | 465/23250Hz | 0.5 | 52 | 1-465 | Medias móviles | 218 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 50 | | Polo sencillo | 217 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 52 | 700-1164 | Medias móviles | 922 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 50 | | Polo sencillo | 1015 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 52 | 930-1394 | Medias móviles | 1352 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 50 | | Polo sencillo | 1015 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.00 en el ruido no-aleatorio |
| 1 | 10.4/520Hz | 0.5 | 50 | 1-11 | Medias móviles | 2 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 33.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 54 | | Polo sencillo | 2 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 33.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 50 | 250-260 | Medias móviles | 261 | La CUSUM requiere una amplitud de 19 y 12 muestras |
| | | 0.5 | 54 | | Polo sencillo | 250 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 5.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 50 | 501-512 | Medias móviles | 506 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 20.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 54 | | Polo sencillo | 506 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 29.00 en el ruido no-aleatorio |
| 2 | 4.01/201Hz | 0.5 | 50 | 1-5 | Medias móviles | 7 | La CUSUM requiere una amplitud de 85 y 7 muestras |
| | | 0.5 | 58 | | Polo sencillo | 8 | La CUSUM requiere una amplitud de 45 y 8 muestras |
| | | 0.5 | 50 | 250-254 | Medias móviles | 254 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 33.50 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 58 | | Polo sencillo | 252 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 33.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 50 | 507-512 | Medias móviles | 507 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 40.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 58 | | Polo sencillo | 508 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 36.00 en el ruido no-aleatorio |
| 3 | 465/101Hz | 0.5 | 51 | 1-3 | Medias móviles | 1 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 105.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 63 | | Polo sencillo | 8 | La CUSUM requiere una amplitud de 55 y 8 muestras |
| | | 0.5 | 51 | 250-252 | Medias móviles | 252 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 148.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 63 | | Polo sencillo | 253 | La CUSUM requiere una amplitud de 34 y 4 muestras |
| | | 0.5 | 51 | 509-512 | Medias móviles | 510 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 62.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 63 | | Polo sencillo | 510 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 62.00 en el ruido no-aleatorio |

| TABLA A3.3: OBSERVACIONES PARA CARTAS CUSUM PARA UNA SEÑAL IDEAL CON AMPLITUD DIEZ, FRECUENCIA 9 Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL RUIDO ALEATORIO DE UNO. | | | | | | | |
|---|--|------------|------|--------------------|----------------|-------------------|--|
| Tabla I.4 | | Parámetros | | Ruido no aleatorio | Tipo de filtro | Detección | Conclusiones |
| Múltiplo de σ_x | Tamaño de Muestra/ Frecuencia de muestreo | k | h | Rango de inserción | | Número de muestra | |
| 0 | 465/4185Hz | 0.5 | 5 | 1-465 | Medias móviles | 217 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.04 en el ruido no-aleatorio |
| | | 9.72 | 6.3 | | Polo sencillo | 471 | La CUSUM requiere una amplitud de 0.3 y 471 muestras |
| | | 0.5 | 6 | 700-1164 | Medias móviles | 948 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.04 en el ruido no-aleatorio |
| | | 9.72 | 6 | | Polo sencillo | 1169 | La CUSUM requiere una amplitud de 0.3 y 470 muestras |
| | | 0.5 | 6 | 930-1394 | Medias móviles | 1356 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.03 en el ruido no-aleatorio |
| | | 9.72 | 8.5 | | Polo sencillo | 931 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 3.00 en el ruido no-aleatorio |
| 1 | 10.4/94Hz | 0.5 | 7.4 | 1-11 | Medias móviles | 7 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.40 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 31 | | Polo sencillo | 10 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 7.4 | 250-260 | Medias móviles | 261 | La CUSUM requiere una amplitud de 0.3 y 12 muestras |
| | | 0.5 | 31 | | Polo sencillo | 262 | La CUSUM requiere una amplitud de 0.7 y 13 muestras |
| | | 0.5 | 7.4 | 501-512 | Medias móviles | 508 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.24 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 31 | | Polo sencillo | 509 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.15 en el ruido no-aleatorio |
| 2 | 4.01/36Hz | 0.5 | 11.9 | 1-5 | Medias móviles | 7 | La CUSUM requiere una amplitud de 3 y 7 muestras |
| | | 0.5 | 6 | | Polo sencillo | 2 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.54 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 11.9 | 250-254 | Medias móviles | 254 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.51 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 6 | | Polo sencillo | 252 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.51 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 11.9 | 507-512 | Medias móviles | 512 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 2.57 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 6 | | Polo sencillo | 509 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 0.55 en el ruido no-aleatorio |
| 3 | 2.01/18Hz | 0.5 | 30.4 | 1-3 | Medias móviles | 5 | La CUSUM requiere una amplitud de 0.77 y 5 muestras |
| | | 0.5 | 18.4 | | Polo sencillo | 5 | La CUSUM requiere una amplitud de 1 y 5 muestras |
| | | 0.5 | 30.4 | 250-252 | Medias móviles | 253 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.00 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 18.4 | | Polo sencillo | 254 | La CUSUM requiere una amplitud de 0.75 y 5 muestras |
| | | 0.5 | 30.4 | 509-512 | Medias móviles | 512 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.20 en el ruido no-aleatorio |
| | | 0.5 | 18.4 | | Polo sencillo | 512 | La CUSUM detecta a partir de una amplitud de 1.60 en el ruido no-aleatorio |

A3.1 Conclusiones sobre las cartas CUSUM

Las cartas CUSUM detectan el ruido no-aleatorio, de la siguiente forma:

- A una varianza mayor de la unidad se pueden requerir ajustes para h y k , además de un aumento en la amplitud del ruido no-aleatorio y en algunos casos un rango de detección mayor al previsto.
- Para una frecuencia de muestreo alta (tamaño de muestra grande) se pueden detectar corrimientos más pequeños.
- Para una frecuencia de muestreo baja (tamaño de muestra cercana a dos) se requieren valores grandes en la amplitud del ruido no-aleatorio

Valores de muestreo por debajo de la frecuencia de Nyquist-Shannon no son permitidos por la teoría del análisis de señales y frecuencias de muestreo superiores sirven para experimentar sobre los valores de muestreo de la tabla I.4 (más de dos muestras por repetición de la señal). Es decir la señal de entrada al filtro se muestrea con la frecuencia de Nyquist-Shannon y el tamaño de muestra para algún corrimiento de la tabla I.4. La frecuencia de muestreo cambia entonces según el tamaño de corrimiento que se quiera experimentar y de igual forma varía el rango de inserción del ruido no-aleatorio.

En lo general se concluye de las corridas realizadas lo siguiente:

- **Una vez estabilizada la media y varianza de los procesos de filtrado se lograron utilizar las carta CUSUM para detectar la causa del corrimiento (señal no-aleatoria).**

- **Las corridas mostradas en las tablas A3.1, A3.2 y A3.3 detectan corrimientos en la media para un ruido no-aleatorio con inserción al inicio, a la mitad y al final de la señal.**
- **La alteración del lugar de inserción provoca cambios en la amplitud de detección y/o en el rango de inserción del ruido no-aleatorio, pues se requiere mayor o menor acumulación en las sumas causadas por el ruido.**
- **Si el muestreo es mayor a la tasa mínima de Nyquist-Shannon se pueden detectar corrimientos más pequeños, pues los filtros mostraron disminución de la varianza de la señal. Este fenómeno se ajusta a las predicciones de la tabla I.4 que indica un tamaño de muestra mayor (frecuencia de muestreo mayor) para detectar corrimiento menores en la media, siempre y cuando la varianza entregada en el proceso disminuya de igual manera.**
- **El filtro sigue la tendencia del ruido no-aleatorio y la CUSUM acumula las diferencias causadas por esta alteración, por lo tanto si la alteración es menor entonces la acumulación es también menor y no es detectable después de un límite inferior, pues el ruido en la señal supera a las alteraciones causadas por el ruido no-aleatorio.**

La hipótesis de esta tesis sólo pretende experimentar sobre el uso de las cartas CUSUM en la detección de un ruido no-aleatorio. Sin embargo el precisar los valores apropiados para provocar los corrimientos, requieren de un número grande de simulaciones. Por lo consecuente se deja la revisión a fondo para un análisis posterior que precise un nivel de confianza alta acerca del rango de detección, valores para k y h , para algún corrimiento en específico.

Bibliografía

Baena, Guillermina. Octubre 2000. Tesis en 30 días. 18ª reimpresión. México D. F. Editores Mexicanos Unidos. 134 p.

D'Agostino, R. B. Y Stephens. c1986. Goodness-of-fit techniques. New York. Marcel Dekker, Inc. p. 208-388

González, Susana. c1990. Manual de redacción e investigación documental. 4 ed. México. Trillas. p. 168-172

Hsu, Hwei P. 1987. Análisis de Fourier. Ed Addison-Wesley Iberoamericana. p. 145-179

Hsu, Hwei P. 1993. Analog and digital communications. New York. Ed McGraw-Hill. p. 13

Irarrázaval, Pablo. 1999. Análisis de señales. Ed McGraw-Hill. p. 1-44

Mercado, H. Salvador. 1998. Cómo hacer una tesis. Sexta reimpresión de la segunda edición. Ed LIMUSA, México D. F.

Montgomery, C. Douglas. c1997. Introduction to Statistical Quality Control, 3 ed. New York. John Wiley & Sons, Inc, p. 193-203

Montgomery, C. Douglas. C2005. Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería, 2 ed. México Limusa Wiley. p. 797-804

Proakins, John G. c1998. Tratamiento digital de señales. Madrid. México. Prentice Hall.
p. 1-118

Thode, C. Henry, Jr. c2002. Testing for normality. New York. USA. Marcel Dekker.
Inc. p. 9-96

Stearns, Samuel D. c2003. Digital signal processing with examples in MATLAB. Boca
Raton, Florida. CRC PRESS. p. 1-60

Walker, Melissa. C2002. Cómo escribir trabajos de investigación. España. Editorial
Gedisa. p. 243-252

Walpole, Ronald E. c1992. Probabilidad y estadística. 3 ed. México. McGraw Hill.
p. 677-714

Documentos electrónicos

The MathWorks Inc. US. c1988-1993. Signal processing Toolbox, User's guide. Ver. 4.2. s.e. Disponible en

http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/signal/signal_tb.pdf. Consultado 9 junio 2006.

STATGRAPHICS ® Centurion XV User Manual. Disponible en

<http://www.statvision.com/documents.htm>. Consultado 9 junio 2006.

Smith, Steven W. c1999. California Technical Publishing. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. 2ª edic. USA. San Diego, CA. Disponible en

<http://www.dspguide.com/>. Consultado 11 julio 2005. p. 261-349

Taygeta Scientific Inc. Disponible en <http://www.taygeta.com/random/gaussian.html>. Consultado 9 junio 2006.

Weisstein, Eric W. C1999 CRC Press LLC, c1999-2006 Wolfram Research, Inc. Box-Muller Transformation. Disponible en

<http://mathworld.wolfram.com/Box-MullerTransformation.html>. Consultado 11 julio 2005.