



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS RESULTADOS DE CUASINÚCLEOS  
EN DIGRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ADA CINTIA ROSAS TAVERA

TUTOR:

MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ



2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

**A DIOS** que me da la vida, las fuerzas para seguir, el valor para levantarme después de caer, la sabiduría para cambiar cada vez que es necesario y sobre todo el amor, pues sin él nada sería...

**A MIS PADRES** que me inculcaron buenos hábitos, aunque no los haya mantenido del todo en mi personalidad, que me apoyaron **INCONDICIONALMENTE** hasta el fin, que creyeron en mí aún cuando yo no lo hice y que nunca me exigieron más de lo que podía dar...

**A MIS HERMANOS** que se sacrificaron tanto para que este trabajo se culminara, siempre supieron lo importante que era para mí alcanzar este objetivo, aunque no lo crean, valoro todo el apoyo que me brindaron, sobre todo las veces que me tranquilizaron y estimularon cuando más lo necesité...

**A MIS AMIGOS** que soportaron mi actitud distante y a veces grosera, ellos me comprenden por ser "ñoña". Permanecerán en mi mente y mi corazón pues mermaron mis depresiones con todos aquellos momentos alegres que compartimos...

**A LA UNAM** por darme la oportunidad de desarrollar mis capacidades y reafirmar mi verdadera vocación. No te defraudaré...

**A MIS PROFESORES** que tal vez no conocí a fondo pero puedo asegurar que algo bueno aprendí de cada uno de ellos...

**A MIS SINODALES** por su dedicación, su guía y su tiempo que para mí es tan valioso como la vida...

**ESPECIALMENTE A MI ASESORA: LAURA PASTRANA RAMÍREZ.** Nunca me cansaré de agradecerte todo tu apoyo y entrega para conmigo. Somos tan parecidas que nos entendemos a la perfección. ¡Te quiero mucho!, ¡Eres mi maestra preferida y el ejemplo a seguir! Pero sobretodo, mi amiga...

**SIEMPRE DEJÉ LO MEJOR AL ÚLTIMO. ABELARDO VELA PONCE DE LEÓN:** Formas parte de mi vida, por eso no podías faltar. Eres mi luz espiritual y mi apoyo. A tu lado concluyo feliz esta etapa de mi vida. Comparto mi alegría y te doy gracias por todo el amor que me das. Te amo...

# Índice

Agradecimientos.....	2
Introducción.....	4
Preliminares.....	8
0.1. Definiciones Básicas.....	8
0.1.1. Tipos de Digráficas.....	14
0.2. Aplicaciones de Teoría de Digráficas en Núcleos....	18
0.3. Teoremas Básicos de Teoría de Digráficas.....	22
<b>1. Debilidad en Cuasinúcleos.....</b>	<b>48</b>
1.1. Debilidad en Cuasinúcleos.....	50
<b>2. Número de Cuasinúcleos de una Digráfica.....</b>	<b>69</b>
2.1. Número de Reyes en torneos.....	72
2.2. Número de Cuasinúcleos de una Digráfica.....	77
2.3. Cuasinúcleos Ajenos.....	102
<b>3. Cuasinúcleos en la Digráfica de Líneas.....</b>	<b>106</b>
3.1. Núcleos en la Digráfica de Líneas.....	108
3.2. Cuasinúcleos en la Digráfica de Líneas.....	118
3.2.1. Número de Cuasinúcleos en la Digráfica de Líneas....	122
3.3. Cuasinúcleos ajenos en las Digráficas de Líneas.....	140
Conclusiones.....	141
Glosario de Simbología.....	143
Bibliografía.....	144

# Introducción

Fue gracias al brillante matemático, Leonardo Eüler, que surgió la Teoría de las Gráficas. En 1736, el ilustre matemático construyó la primera representación de una gráfica al utilizarla como modelo matemático.

En este trabajo estudiaremos un tipo especial de gráficas, las digráficas o gráficas dirigidas. En una digráfica  $D$  puede existir un conjunto  $\mathcal{A}$  de vértices que sea independiente en  $D$ , es decir, para cualquier par de vértices distintos  $u$  y  $v$  en  $\mathcal{A}$ ,  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$  y absorbente a la vez, es decir,  $\forall u \in V(D) - \mathcal{A}, \exists v \in \mathcal{A}$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ . El nombre del conjunto que satisface las propiedades anteriores es un núcleo y forma parte de nuestro estudio en esta tesis. Los matemáticos más destacados en el área de núcleos en digráficas, son Claude Berge, Víctor Neumann, Hortensia Galeana, D. König, Von Neumann y M. Richardson, entre otros.

Para iniciar nuestra investigación estudiamos en preliminares algunas aplicaciones sobre el concepto de núcleo en una digráfica, éstas fueron proporcionadas primeramente por Von Neumann y Morgenstern [15] en 1944 y después por Berge y Rao [4] en 1977.

Posteriormente, analizamos algunos teoremas básicos relacionados con núcleos, seminúcleos y cuasinúcleos. A mediados del siglo XX, Berge [2] y König [11], establecieron las condiciones necesarias para la existencia de núcleos en una digráfica, por ejemplo: las digráficas transitivas y las digráficas simétricas tienen núcleo, el cual es un conjunto independiente máximo y absorbente mínimo.

Los investigadores descubrieron que las subdigráficas inducidas de las digráficas originales heredaban ciertas propiedades de éstas, es decir, si una propiedad se manifestaba en la digráfica total, de igual forma se conservaba en cada subdigráfica inducida de ésta, por ejemplo: la existencia de ciclos dirigidos. Las propiedades de transitividad y simetría también son hereditarias

en las subdigráficas inducidas de la digráfica original. Existe una familia de digráficas en donde la digráfica original y todas sus subdigráficas inducidas contienen núcleo, nos referimos al conjunto de digráficas núcleo perfectas. Veremos la demostración de que toda digráfica sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta. Es posible definir un conjunto que sea núcleo localmente, es decir, un conjunto independiente y absorbente únicamente en cierta subdigráfica inducida, se trata de los seminúcleos, aunque no cualquier seminúcleo sea núcleo, ambos conceptos están ligados y aportaron grandes avances en la teoría de núcleos. En 1971, Neumann Lara [12] demostró que toda digráfica es núcleo perfecta si y sólo si sus subdigráficas inducidas contienen seminúcleo no vacío, resultado que veremos en preliminares al igual que el teorema de Richardson [13] sobre la existencia de núcleos en las digráficas sin ciclos dirigidos.

El concepto principal de nuestra investigación son los conjuntos de vértices independientes y cuasiabsorbentes. Un conjunto de vértices  $\mathcal{A}$  es cuasiabsorbente si cualquier vértice de su complemento se encuentra a distancia dos de él. El nombre común de un conjunto que satisface la propiedad de independencia y cuasiabsorbencia es cuasinúcleo. Observemos que todo núcleo cumple la definición de cuasinúcleo, pero no cualquier cuasinúcleo es núcleo debido a que dicho conjunto no siempre es absorbente, sin embargo, es relativamente más fácil encontrar un cuasinúcleo que un núcleo en una digráfica. A mediados del siglo XX, Chvátal y Lovász [5] demostraron que toda digráfica contiene un cuasinúcleo.

En el capítulo 1, estudiaremos la debilidad de un cuasinúcleo, es decir, el número de vértices que no son absorbidos por este conjunto (observemos que todo núcleo tiene debilidad nula por ser un conjunto absorbente). Fue Philippe Vincke [14], quien encontró una cota superior para dichos conjuntos mediante el número de tercias intransitivas de la digráfica, es decir, subdigráficas de la digráfica donde no se satisface la propiedad de transitividad.

En el capítulo 2, nos dedicaremos a estudiar el número de cuasinúcleos de una digráfica. Como resultado del teorema sobre cuasinúcleos de Chvátal y Lovász [5], comenzaremos con los torneos, es decir, las digráficas completas y asimétricas, afirmando que todo torneo tiene un cuasinúcleo. Por definición de torneo, cada conjunto de vértices independiente maximal (en este tipo de digráficas) es de cardinalidad 1. Por lo tanto, cada cuasinúcleo de un torneo es unitario; a esta clase de cuasinúcleo se le conoce como rey. En 1996, H. Jacob

y H. Meyniel, en [9] probaron que todo torneo de grado exterior mínimo distinto de cero, tiene al menos tres reyes distintos. Los investigadores se preguntaron si cualquier digráfica podría cumplir estas condiciones. Finalmente demostraron que toda digráfica con grado mínimo exterior no nulo, contiene al menos 3 cuasinúcleos distintos si no contiene núcleo, esto lo veremos en el teorema 2.2 [capítulo 2].

Fue gracias a Gregory Gutin, Khee Meng Koh, Eng Guan Tay y Anders Yeo, quienes en [8] enunciaron las condiciones suficientes y necesarias para determinar cuándo una digráfica contiene exactamente un cuasinúcleo o dos cuasinúcleos distintos. Para esto, manejaron el concepto de pozo (se trata de vértices con grado exterior igual a cero). Entre los teoremas que demostraron se encuentran: toda digráfica con un solo cuasinúcleo contiene un núcleo y toda digráfica fuertemente conexa (de orden al menos tres y distinta de un ciclo dirigido de longitud cuatro) contiene al menos tres cuasinúcleos diferentes.

Finalmente, Gutin, Meng, Guan y Yeo, también en [8] mencionaron una conjetura sobre cuasinúcleos ajenos que permanece abierta y se refiere a que toda digráfica sin pozos contiene al menos dos cuasinúcleos ajenos. El equipo de matemáticos demostró la conjetura únicamente para digráficas núcleo perfectas y digráficas con cuasinúcleos de cardinalidad a lo más dos. Todo esto lo veremos en el capítulo 2.

Concluimos la tesis con el capítulo 3, dedicado a determinar el número de cuasinúcleos en la digráfica de líneas correspondiente a una digráfica  $D$ , por medio de esta última, aplicando los resultados vistos en el capítulo 2. En 1982, Matús Harminc en [10] demostró que toda digráfica tiene el mismo número de núcleos que su digráfica de líneas correspondiente. El tema central del capítulo, es comparar el número de cuasinúcleos en la digráfica de líneas con respecto al de la digráfica original. Por esta razón, usaremos el resultado de Matús y el de Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón [6], la digráfica de líneas contiene al menos el número de cuasinúcleos de la digráfica original, siempre y cuando la digráfica original tenga ingrado mínimo no nulo. Después de analizar la demostración de dicho teorema, veremos algunas familias de digráficas que satisfacen la igualdad en el mismo.

Debido a que no toda digráfica cumple la igualdad del teorema de Galeana, Pastrana y Rincón, dirigimos nuestra investigación hacia descubrir en qué casos se da la desigualdad estricta del teorema mencionado. Para esto definimos un cuasinúcleo por flechas, el cual es un conjunto de flechas que satisface la propiedad de independencia por flechas y cuasiabsorbencia por flechas. parecido al concepto de cuasinúcleo, solo que en el primero son

flechas como su nombre lo dice y en el segundo son vértices de la digráfica en cuestión. En el capítulo referido, estableceremos una equivalencia entre los cuasinúcleos por flechas de una digráfica  $D$  y los cuasinúcleos de la digráfica de líneas de  $D$ . Además demostramos que el conjunto de flechas cuyos vértices finales forman un cuasinúcleo de  $D$  siempre es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ , el recíproco de esta afirmación no es verdadera, por esta razón existen digráficas que satisfacen la desigualdad estricta del teorema de Galeana, Pastrana y Rincón.

Llegamos a la siguiente conclusión: si una digráfica  $D$  de exgrado mínimo mayor a cero contiene un cuasinúcleo por flechas cuyos vértices finales no es cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $D$  satisface la desigualdad estricta del teorema de Galeana, Pastrana y Rincón. Sin embargo, aún no descubrimos qué condiciones debe presentar la digráfica para que exista el cuasinúcleo por flechas mencionado.

Los resultados obtenidos hasta ahora son: toda digráfica de ingrado mínimo al menos 1 tiene un único cuasinúcleo si y sólo si su digráfica de líneas tiene un solo cuasinúcleo. Demostramos además que si una digráfica contiene dos cuasinúcleos ajenos, entonces su digráfica de líneas correspondiente contiene dos cuasinúcleos ajenos.

# Preliminares

## 1. Definiciones Básicas.

Una **gráfica**, denotada con la letra  $G$ , está constituida por los siguientes dos conjuntos:

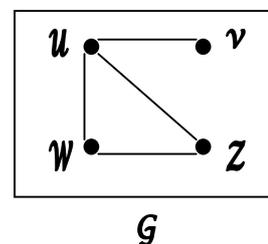
$V(G)$ : es un conjunto finito de objetos, no vacío, cuyos elementos los denominaremos puntos o vértices de la gráfica  $G$  y denotaremos comúnmente con letras como  $u, v, w, x, y, z$  entre otras.

Para denotar que un vértice  $u$  está contenido dentro de la gráfica  $G$ , escribiremos:  $u \in V(G)$ .

$A(G)$ : es el conjunto de parejas no ordenadas de elementos distintos del conjunto de vértices correspondiente a la gráfica  $G$ , dichas parejas las llamaremos aristas.

Si dos vértices distintos  $u, v$  contenidos en  $V(G)$  son los elementos de una arista de  $G$ , entonces diremos que  $u$  y  $v$  son **vértices adyacentes** en la gráfica  $G$  y son los extremos de la arista en cuestión. Para denotar que dos vértices distintos  $u$  y  $v$  son adyacentes en la gráfica  $G$ , utilizaremos la expresión:  $(u, v) = (v, u) \in A(G)$ .

Ejemplo: Sea  $G$  la gráfica conformada por  $V(G) = \{u, v, w, z\}$  y  $A(G) = \{(u, v), (u, w), (z, w), (u, z)\}$ . La representación en el plano de dicha gráfica  $G$  se muestra en el dibujo de la derecha:



Definimos a continuación un tipo de gráfica, se trata de la gráfica dirigida cuyo nombre común es **digráfica** y su notación es  $D$ .

Una digráfica  $D$  está formada por el par:  $(V(D), F(D))$ , donde:

**$V(D)$ :** es un conjunto finito de objetos, no vacío, cuyos elementos nombraremos vértices de la digráfica  $D$ . Al igual que en gráficas, usaremos las mismas letras para denotar los elementos de dicho conjunto, como son:  $u, v, w, x, y, z$ .

Si el vértice  $u$  pertenece al conjunto  $V(D)$ , lo denotaremos con:  $u \in V(D)$ .

**$F(D)$ :** es el conjunto de pares ordenados de elementos distintos de vértices en la digráfica  $D$ , estos elementos son denominados flechas y denotados igual que en las gráficas, solamente que en este caso la flecha  $(u, v)$  es distinta a la flecha  $(v, u)$ .

Si dos vértices distintos  $u$  y  $v$  contenidos en  $V(D)$ , son los extremos de la flecha  $(u, v)$  contenida en  $F(D)$ , entonces diremos que  $u$  y  $v$  son vértices adyacentes en la digráfica  $D$ . Esta vez tenemos dos tipos de adyacencia:

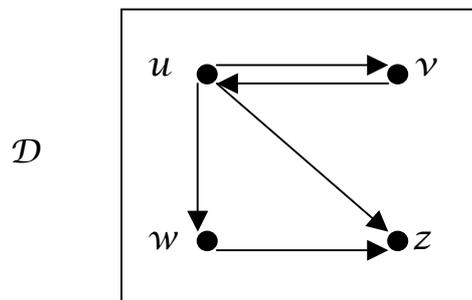
- Si  $(u, v) \in F(D)$ , entonces  $D$  tiene una flecha que parte del vértice  $u$  y termina en el vértice  $v$ , se dice que  $v$  es adyacente desde  $u$ .
- Si  $(v, u) \in F(D)$ , entonces hay una flecha en  $D$ , cuyo inicio está en el vértice  $v$  y  $u$  es el vértice terminal de dicha flecha.

Si  $(v, u) \in F(D)$ , entonces diremos que  $v$  es **vértice inicial** de la flecha  $(v, u)$ , así mismo,  $u$  es el **vértice terminal** de dicha flecha.

Otra forma de expresar que  $(v, u) \in F(D)$ , es diciendo que  $v$  domina a  $u$  en la digráfica  $D$ , debido a la dirección de la flecha.

El **orden de una digráfica**  $D$ , es la cardinalidad de  $V(D)$ , es decir, el número de vértices de la digráfica  $D$ .

Sea  $D$  la digráfica tal que  $V(D) = \{u, v, w, z\}$  y  $F(D) = \{(u, v), (v, u), (u, w), (w, z), (u, z)\}$ . La representación en el plano de la digráfica  $D$  es:



Notemos que la flecha  $(w, z) \in F(D)$ , donde  $w$  es su vértice inicial, mientras que  $z$  es el vértice terminal, sin embargo,  $w$  es vértice terminal de la flecha  $(u, w) \in F(D)$ .

Dados  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  subconjuntos de  $V(D)$ , el conjunto de flechas que tienen como vértice inicial un elemento del conjunto  $\mathcal{A}$  y como vértice terminal un vértice contenido en el conjunto  $\mathcal{B}$  es:

$$\mathbf{f}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_D = \{(a, b) \in F(D) \mid a \in \mathcal{A} \text{ y } b \in \mathcal{B}\}$$

En lo sucesivo, cuando sea implícita la digráfica en la cual se está trabajando, usaremos la notación  $\mathbf{f}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  omitiendo el subíndice  $D$ , a menos que trabajemos con digráficas distintas.

En adelante estudiaremos únicamente propiedades en digráficas, o bien, gráficas dirigidas, razón suficiente para mencionar los conceptos próximos:

Sea  $D$  una digráfica y  $u \in V(D)$  arbitrario:

$\Gamma^-_D(u) = \Gamma^-(u) = \{v \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\}$ , a cada elemento de este conjunto le diremos **vecino interior** del vértice  $u$  o **invecino** de  $u$  en la digráfica  $D$ .

$\Gamma^+_D(u) = \Gamma^+(u) = \{v \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$ , es el conjunto de los **vecinos exteriores** o **exvecinos** del vértice  $u$  en la digráfica  $D$ .

$\delta^-_D(u) = \delta^-(u) = |\Gamma^-_D(u)|$ , denota el **grado interior** o **ingrado** del vértice  $u$  en la digráfica  $D$ .

$\delta^+_D(u) = \delta^+(u) = |\Gamma^+_D(u)|$ , se le conoce como el **grado exterior** o **exgrado** de  $u$  en la digráfica  $D$ .

Una **subdigráfica** de la digráfica  $D$ , es resultado de extraer un subconjunto de los vértices de  $D$  y un subconjunto de flechas que relacionan a los vértices extraídos, es decir,  $D'$  es una subdigráfica de  $D$  si:

$$V(D') \subseteq V(D) \text{ y}$$

$$F(D') \subseteq F(D) \text{ tal que } (u, v) \in F(D') \text{ si } \{u, v\} \subset V(D').$$

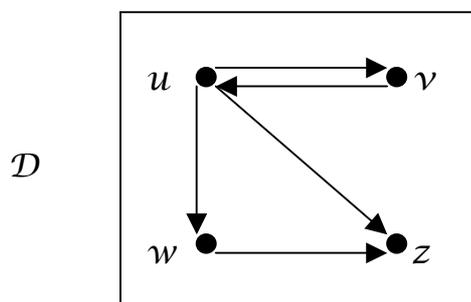
$D'$  es una **subdigráfica inducida** de la digráfica  $D$ , si ocurre:

$$V(D') \subseteq V(D) \text{ y}$$

$$(u, v) \in F(D') \text{ si y sólo si } (u, v) \in F(D) \text{ y } \{u, v\} \subset V(D').$$

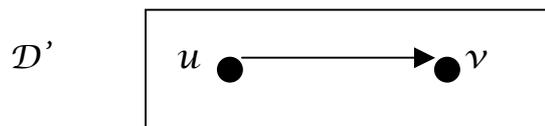
Denotaremos a  $D'$  como  $D[V(D')]$ . Las subdigráficas inducidas más pequeñas de toda digráfica  $D$  son las digráficas triviales constituidas por un solo vértice; por otro lado, la subdigráfica inducida más grande de cualquier digráfica  $D$  es ella misma.

Observemos la digráfica  $D$  con  $V(D) = \{u, v, w, z\}$ ,  $F(D) = \{(u, v), (v, u), (u, w), (w, z), (u, z)\}$ , cuya representación geométrica se muestra en seguida y ejemplifiquemos las definiciones anteriores:

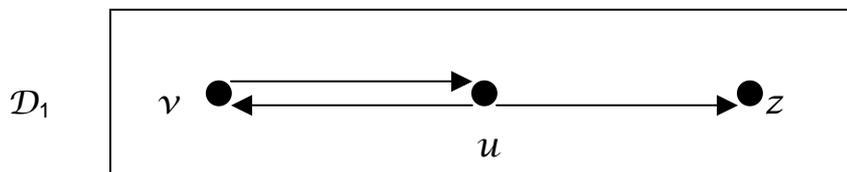


$\delta^-(u) = \delta^-(v) = \delta^-(w) = 1$ , pues  $\Gamma^-(u) = \{v\}$ ,  $\Gamma^-(v) = \{u\} = \Gamma^-(w)$ . Por otro lado, como  $\nexists x \in V(D)$ , tal que  $(z, x) \in F(D)$ , entonces  $\Gamma^+(z) = \emptyset$ , es decir,  $\delta^+(z) = 0$ .

Un ejemplo de una subdigráfica de  $D$  es la digráfica  $D'$  tal que  $V(D') = \{u, v\}$  y  $F(D') = \{(u, v)\}$ , su representación en el plano es:



En cambio, una subdigráfica inducida de  $D$  es  $D_1$  tal que  $V(D_1) = \{u, v, z\}$  y  $F(D_1) = \{(u, v), (v, u), (u, z)\}$ , a  $D_1$  la denotaremos con  $D[\{u, v, z\}]$ . Diremos que  $D_1$  es la subdigráfica inducida por el conjunto de vértices  $\{u, v, z\} \subset V(D)$ . Su representación en el plano es:



Dos **digráficas**  $D_1$  y  $D_2$  son **isomorfas** si existe una función biyectiva

$$f: V(D_1) \rightarrow V(D_2)$$

tal que  $\forall \{u, v\} \subset V(D)$ ,  $(u, v) \in F(D_1)$  si y sólo si  $(f(u), f(v)) \in F(D_2)$ .

Un **camino no dirigido** o **semicamino**  $C$  de una digráfica  $D$ , está formado por la sucesión alternada de vértices y flechas, de la forma  $C = (x_0, \hat{h}_1, x_1, \hat{h}_2, x_2, \dots, \hat{h}_n, x_n)$  en donde  $x_i$  pertenece al conjunto de vértices en  $D$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ .

$1, 2, \dots, n\}$  y  $\hat{h}_{i+1} \in \{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_i)\}$  es un elemento de  $F(D)$  con  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Podemos denotar al camino no dirigido  $C$  omitiendo las flechas, es decir,  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Un **camino dirigido**  $C$  de una digráfica  $D$  es la sucesión alternada de vértices y flechas, de la forma  $C = (x_0, \hat{h}_1, x_1, \hat{h}_2, x_2, \dots, \hat{h}_n, x_n)$  donde  $x_i$  pertenece al conjunto de vértices en  $D$ ,  $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  y  $\hat{h}_{i+1} = (x_i, x_{i+1})$  es un elemento de  $F(D)$  con  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Otra forma de describir al camino dirigido  $C$  es omitiendo las flechas, es decir,  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sobreentendiendo que las flechas  $\hat{h}_{i+1} = (x_i, x_{i+1}) \in F(C) \subseteq F(D)$ .

La **longitud de un camino dirigido** se determina mediante el número de flechas que éste contenga.

Tipos de caminos dirigidos:

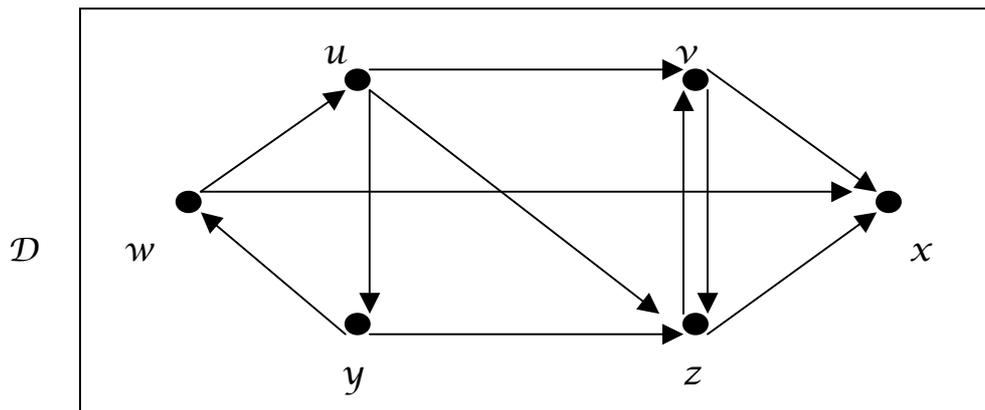
- Un camino dirigido  $C = (x_0, \dots, x_n)$  es una **trayectoria dirigida** en  $D$  si se cumple que  $x_i \neq x_j \forall i \neq j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Si la trayectoria dirigida empieza en el vértice  $x_0$  y termina en  $x_n$ , nos referiremos a ella como una  $x_0x_n$  – trayectoria dirigida de la digráfica  $D$ .
- Le llamaremos **ciclo dirigido** al camino dirigido  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$  de longitud mayor o igual a dos, si satisface que  $x_i \neq x_j \forall i \neq j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , es decir,  $C$  es la unión entre la trayectoria dirigida  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  y la flecha  $(x_{n-1}, x_n = x_0)$ .

A cada ciclo dirigido de longitud  $n$  con  $n \in \mathbf{N}$  (números naturales), le llamaremos  $n$ -ciclo. El ciclo dirigido más pequeño es un 2-ciclo dirigido y está formado por una flecha simétrica.

Definamos la **distancia entre dos vértices** en una digráfica  $D$ . Sea  $u \in V(D)$ . Si  $v \in V(D)$  ( $u$  no necesariamente distinto de  $v$ ), entonces la distancia de  $u$  a  $v$  se denota por  $d(u, v)$  y es igual a la mínima longitud de las  $uv$  – trayectorias dirigidas contenidas en  $D$ . Las trayectorias dirigidas más pequeñas son las de longitud cero, constituidas por un solo vértice en  $D$ .

Dado  $u \in V(D)$  y  $\mathcal{A} \subseteq V(D)$ , definimos  $d(u, \mathcal{A}) = \min \{d(u, v) \mid v \in \mathcal{A}\}$ .  
 Notemos que si  $u \in \mathcal{A}$ , entonces  $d(u, \mathcal{A}) = d(u, u) = 0$

En la digráfica que presentamos en el dibujo de abajo ejemplificaremos los distintos tipos de camino dirigido:



Un camino dirigido contenido en la digráfica  $D$ , es  $C = (u, y, w, u, v, x)$  y es de longitud 5, mientras que  $\mathcal{T} = (y, w, u, v, x)$  es una trayectoria dirigida de longitud 4, tal que  $\mathcal{T} \subset C$ .

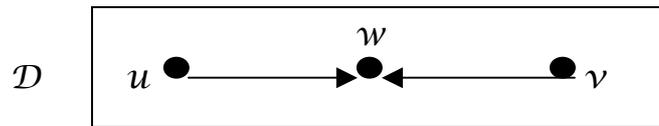
$\{(v, z), (z, v)\}$  es una flecha simétrica en  $D$  y forma un ciclo dirigido de longitud dos, a saber,  $C_1 = (v, z, v)$ ; por otro lado,  $C_2 = (u, y, w, u)$  es un ciclo dirigido de longitud 3, contenido en el camino dirigido  $C$ .

Notemos que  $d(w, u) = 1 \neq 2 = d(u, w)$ , pues  $(u, w) \notin F(D)$ ; en cambio  $d(v, z) = 1 = d(z, v)$  ya que  $\{(z, v), (v, z)\} \subset F(D)$ .

### 1.1 Tipos de digráficas.

$D$  es una **digráfica conexa** si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  existe al menos un camino no necesariamente dirigido el cual empieza en uno de los vértices mencionados y termina en el otro.

Ejemplo de una digráfica conexa:



El camino no dirigido  $C = (u, w, v, w, u)$  conecta todos los vértices de  $D$ , ya que contiene todos los caminos dirigidos y no dirigidos en  $D$ , como son:  $C_1 = (u, w)$ ,  $C_2 = (u, w, v)$ ,  $C_3 = (w, v)$ . Por lo tanto  $D$  es una digráfica conexa.

Una **digráfica fuertemente conexa**  $D$  es aquella que contiene tanto un  $uv$  - camino dirigido como un  $\nu u$  - camino dirigido para cualquier par de vértices  $u$  y  $\nu$  en  $V(D)$ . Toda digráfica  $C_n$  isomorfa a un  $n$ -ciclo dirigido es fuertemente conexa  $\forall n \geq 2$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , ya que es posible ir de un vértice a otro por el ciclo dirigido.

A cada subdigráfica inducida de una digráfica  $D$ , que sea fuertemente conexa y máximo por contención con dicha propiedad en la digráfica, le llamaremos **componente fuertemente conexa** de  $D$ .

Cualquier **digráfica**  $D$  es **completa** si para todo par de vértices  $u \neq \nu$  contenidos en  $V(D)$ , existe al menos una flecha que los relaciona. La digráfica completa más pequeña es la de orden 1 y se denota como  $K_1$ .

Si  $(u, \nu) \in F(D)$  y  $(\nu, u) \notin F(D)$ , entonces diremos que  $(u, \nu)$  es una **flecha asimétrica** en  $D$ .

Si  $(u, \nu) \in F(D)$  y  $(\nu, u) \in F(D)$ , entonces diremos que  $(u, \nu)$  es una **flecha simétrica** en  $D$ .

Sea una digráfica  $D$ , si  $\forall (u, \nu) \in F(D)$  se tiene que  $(u, \nu)$  es una flecha simétrica en  $D$ , entonces a  $D$  se le conoce como una **digráfica simétrica**. La digráfica simétrica más pequeña es un 2-ciclo.

Si toda flecha de una digráfica  $D$  es asimétrica, entonces le llamaremos a  $D$  **digráfica asimétrica**.

El **complemento de una digráfica**  $D$ , se denota por  $\bar{D}$  y es la digráfica tal que  $V(\bar{D}) = V(D)$  y  $F(\bar{D}) = \{(u, v) \notin F(D), \text{ con } \{u, v\} \subset V(D)\}$ , es decir,  $F(D) \cap F(\bar{D}) = \emptyset$ .

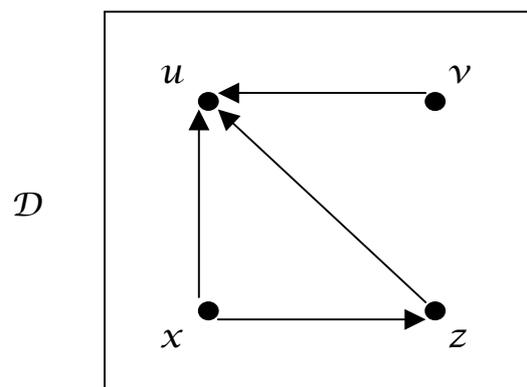
La digráfica  $D_1$  que satisface:  $V(D_1) = V(\bar{D}) = V(D)$  y  $F(D_1) = F(\bar{D}) \cup F(D)$  es completa y simétrica.

Siendo  $D$  una digráfica cualquiera, la digráfica  $D^-$  es la **digráfica dual** de  $D$  si  $V(D) = V(D^-)$  y  $\forall u \neq v$ , con  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  si  $(u, v) \in F(D)$ , entonces  $(v, u) \in F(D^-)$ .

Una digráfica  $D$  satisface la **propiedad de transitividad** en  $V(D)$ , si para cualquier terna de vértices distintos  $u, v$  y  $w$ , con  $\{u, v, w\} \subset V(D)$  y  $\{(u, v), (v, w)\} \subset F(D)$  se cumple que  $(u, w) \in F(D)$ .

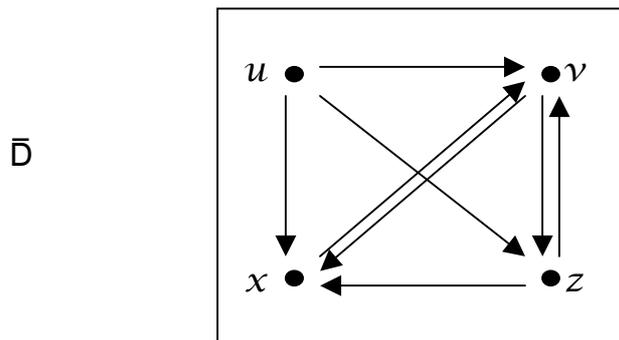
Toda digráfica que satisfaga la propiedad anterior será llamada **digráfica transitiva**.

Ejemplo de una digráfica transitiva:



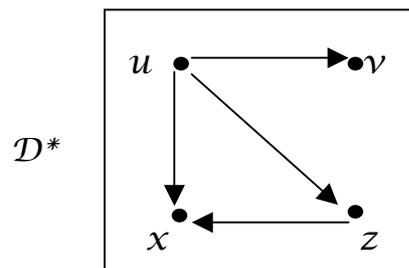
Observemos que  $\{(x, z), (z, u)\} \subset F(D)$  y  $(x, u) \in F(D)$ , es decir,  $D$  satisface la definición de digráfica transitiva, puesto que no existe ninguna otra trayectoria dirigida de longitud 2 en  $D$ , entonces  $D$  es transitiva.

Construyamos el complemento de  $D$  y posteriormente su digráfica dual:



Como  $\{(x, v), (v, z)\} \subset F(\bar{D})$  y  $(x, z) \notin F(\bar{D})$ , entonces la digráfica  $\bar{D}$  no es transitiva.

Veamos a continuación la digráfica dual de  $D$ :



Observemos que  $D^*$  es una digráfica transitiva pues  $\{(u, z), (z, x)\} \subset F(D)$  y  $(u, x) \in F(D)$ .

Definamos ahora algunos tipos de subconjuntos de una digráfica  $D$ . Sea  $\mathcal{A} \subseteq V(D)$ :

$\mathcal{A}$  es un **conjunto independiente** en la digráfica  $D$  si  $\forall u \neq v$ , ambos vértices contenidos en el conjunto  $\mathcal{A}$ , entonces  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$ .

El conjunto formado por un solo vértice en cualquier digráfica es un conjunto independiente de cardinalidad mínima.

Un **conjunto absorbente**  $\mathcal{A}$  satisface:  $\forall u \in V(D) - \mathcal{A}, \exists v \in \mathcal{A}$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ .

$V(D)$  es el conjunto máximo en cardinalidad de  $D$  que cumple con ser absorbente.

Diremos que el conjunto  $\mathcal{A}$  es **cuasiabsorbente** si  $\forall u \in V(D) - \mathcal{A}$ , se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- $\exists v \in \mathcal{A}$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ .
- $\exists w \in V(D) - \mathcal{A}$ , con  $u \neq w$  y  $\exists v \in \mathcal{A}$  tales que  $\{(u, w), (w, v)\} \subseteq F(D)$  formando una trayectoria dirigida en  $D$ .

Fijémonos en la digráfica dual  $D^*$  del ejemplo anterior:  $\{v, z\}$  y  $\{v, x\}$  son conjuntos independientes de  $D^*$ , sin embargo, solo  $\{v, x\}$  es absorbente en  $D^*$  ya que  $\{(u, x), (z, x)\} \subset F(D^*)$ . Por otro lado,  $\{v, z, x\}$  es un conjunto cuasiabsorbente en  $D^*$ , pero no es independiente pues  $(z, x) \in F(D^*)$ , por lo tanto, la propiedad de independencia no implica necesariamente la absorbencia y viceversa.

## 2. Aplicaciones de Teoría de Digráficas en núcleos.

Comenzaremos con algunas aplicaciones en la teoría de digráficas, las cuales se refieren a problemas cuya solución propondremos usando las definiciones que acabamos de mencionar, como son: digráfica transitiva, conjuntos independientes, etc.

MOTIVACION 1 (Von Neumann, Morgenstern [15]):

Supongamos que un grupo de personas se dispone a elegir una “situación”, dentro de un conjunto de varias opciones, con el propósito de complacer a cada miembro del grupo al momento de escoger. Para esto, se establece la preferencia de cada individuo con relación a las opciones

presentes. Sea  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  el conjunto de personas y la serie de situaciones elegibles lo representaremos con  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ .

Diremos que  $p_k$  prefiere que se elija a  $x_i$  en vez de  $x_j$ , y lo denotamos como  $x_i \geq_{p_k} x_j$ , lo cual representa la preferencia individual para los elementos de  $\mathcal{P}$  y expresa que a la persona número  $k$  le satisface más la situación  $x_i$  que la situación  $x_j$  con  $i \neq j$ ,  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\{n, m\} \in \mathbf{N}$  fijos.

Es claro que la preferencia individual arriba expuesta no necesariamente es la más eficiente, por ello fijaremos nuestra atención en la preferencia efectiva en la cual diremos que  $x_i$  es efectivamente preferible a  $x_j$  si existe un subconjunto de  $\mathcal{P}$  que es capaz de forzar la preferencia de  $x_i$  sobre  $x_j$ , es decir, la mayor parte de los miembros de  $\mathcal{P}$  prefieren la situación  $x_i$  más que  $x_j$ ; esta preferencia la denotaremos como  $x_i > x_j$  con  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ .

Notemos que esta última relación no es transitiva, ya que la preferencia efectiva depende de la preferencia individual y cada individuo determina distintos resultados en cada par de situaciones sin dejarse llevar por las decisiones de las demás personas, por lo que  $x_i > x_j$  y  $x_j > x_p$  no implica que  $x_i > x_p$  pues no sabemos cual de estas dos situaciones prefiere cada miembro.

Apliquemos las definiciones básicas vistas en la sección anterior:

Sea  $D$  la digráfica formada por  $V(D) = \mathcal{X}$ , el conjunto de vértices de  $D$  y

$$F(D) = \{ (x_i, x_j) / x_i > x_j \text{ con } x_i, x_j \in \mathcal{P}; \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \}$$

Si consideramos un conjunto independiente  $\mathcal{A} \subset V(D)$ , entonces cada elemento de  $\mathcal{A}$  es una solución al problema dentro de  $D[\mathcal{A}]$ , como  $F(D) \neq \emptyset$ , debe existir al menos un vértice fuera del conjunto  $\mathcal{A}$ ; recordemos que  $F(D)$  representa la preferencia efectiva entre los elementos de  $V(D)$ , por esta razón, necesitamos encontrar un subconjunto de  $\mathcal{A}$  que supere en preferencia efectiva con respecto a los vértices fuera de  $\mathcal{A}$ , es decir, necesitamos un conjunto de vértices, el cual sea independiente y absorbente. Dicho conjunto será llamado núcleo en lo sucesivo, en otras palabras:

Un **Núcleo** en una digráfica  $D$ , es un conjunto de vértices independiente y absorbente en una digráfica.

Sea  $\mathcal{N}$  un núcleo de la digráfica  $D$  expuesta anteriormente.

**AFIRMACIÓN:** La mejor elección está contenida dentro del conjunto  $\mathcal{N}$ , es decir, la solución al problema expuesto en la motivación 1 está dentro del núcleo de la digráfica formada por  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{X}$ , ya que  $\forall x_i \in V(D) - \mathcal{N}, \exists x_j \in \mathcal{N}$  tal que  $(x_i, x_j) \in F(D)$  es decir  $x_j > x_i$  o bien, cada vértice de  $V(D)$  que no está contenido en  $\mathcal{N}$  es aventajado en preferencia efectiva por al menos un elemento de  $\mathcal{N}$ ; además, por ser  $\mathcal{N}$  un conjunto independiente, no existe preferencia efectiva entre cualquier par de elementos de  $\mathcal{N}$  por lo tanto, la mejor elección debe tomarse dentro de  $\mathcal{N}$ .

MOTIVACIÓN 2 (Claude Berge, Rao [4]):

Fue Claude Berge [2] quien denominó núcleo al conjunto independiente y absorbente. Precisamente veremos a continuación una aplicación expuesta por él mismo junto con Rao, donde el núcleo vuelve a contener la solución.

Consideremos  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un conjunto de propiedades dadas, con las cuales podemos aplicar la relación de implicación, la cual denotaremos por  $p_i \rightarrow p_j$ , con  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .

Construyamos la digráfica  $D$  que represente la información anterior:

$$V(D) = \mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \text{ y}$$

$$F(D) = \{(p_i, p_j) / p_i \rightarrow p_j \text{ es una proposición verdadera con } \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Si queremos demostrar que no hay otra implicación verdadera entre los elementos de  $\mathcal{P}$  que no esté contenida en  $F(D)$  entonces podemos aplicar la Teoría de Digráficas, pero el verdadero problema está en encontrar la forma más práctica de demostrar la completud de  $F(D)$ , para esto se necesita proporcionar un contraejemplo por cada proposición falsa. Se puede reducir el número de casos si consideramos que la relación en curso es transitiva así como su contrapositiva. Vamos a averiguar ¿cuál es el menor número de implicaciones falsas que necesitamos probar para mostrar la completud de  $F(D)$ ?

**AFIRMACIÓN:** El mínimo número de contraejemplos que es necesario proporcionar es el mismo que la cardinalidad del núcleo mínimo de  $\bar{D}$  (el complemento de  $D$ ).

Veamos a continuación que  $\bar{D}$  es una digráfica transitiva:

Sea  $\{x, y, z\} \subset V(\bar{D}) = V(D)$ . Si  $\{(x, y), (y, z)\} \subset F(\bar{D})$ , esto quiere decir que  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$  son propiedades falsas. Para que  $x \rightarrow y$  sea falsa, es necesario que  $x$  sea una propiedad verdadera y  $y$  sea falsa, sin embargo, para que  $y \rightarrow z$  sea falsa,  $y$  debe ser verdadera y  $z$  falsa, esto hace inconsistente a  $F(\bar{D})$ , ya que  $y$  no puede ser una propiedad verdadera y falsa a la vez, por consiguiente  $\bar{D}$  no puede contener trayectorias dirigidas de longitud 2. En conclusión,  $\bar{D}$  es transitiva. Por otro lado,  $\bar{D}$  tiene núcleo igual al conjunto de vértices de exgrado cero de  $\bar{D}$ , el cual es mínimo ya que los vértices escogidos deben estar en cada núcleo  $\bar{D}$  de lo contrario no serían absorbidos por nadie, además estos vértices terminales absorben a cada vértice que se encuentra dentro de la trayectoria en la cual es terminal, por ser  $\bar{D}$  transitiva. Por lo tanto  $\bar{D}$  tiene núcleo y es mínimo siempre que  $\bar{D}$  tenga vértices terminales o de exgrado cero.

Basta demostrar la falsedad de la proposición formada por el primero y último vértice de cada trayectoria de longitud máxima para demostrar la falsedad de las flechas restantes que existen entre los vértices intermedios de dicha trayectoria, ya que toda implicación satisface la propiedad de transitividad, es decir, la falsedad satisface la propiedad de transitividad en la digráfica, por lo que daremos un contraejemplo por cada vértice del núcleo mínimo de  $\bar{D}$  y con esto demostraremos que  $D$  representa una teoría completa.

Ahora estudiaremos una definición dual al núcleo, la cual se refiere a un conjunto de vértices independiente, pero esta vez, en vez de ser absorbente, será dominante, es decir:

$$\forall u \in V(D - \mathcal{N}), \exists v \in \mathcal{N} \text{ tal que } (v, u) \in F(D). \quad (\text{Prop. de dominio})$$

En conclusión, Una **solución** de una digráfica  $D$  es un conjunto de vértices independiente y dominante en  $D$ .

### MOTIVACIÓN 3:

Sea  $D$  una digráfica tal que  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es el conjunto de sitios o locaciones dadas y  $F(D) = \{(v_i, v_j) \mid \text{es posible trasladarse del sitio } v_i \text{ al sitio } v_j, \text{ (diremos que } v_i \text{ y } v_j \text{ están comunicados) con } \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$ .

Deseamos encontrar un conjunto  $S \subset V(D)$  desde el cual sea posible llegar a los sitios restantes; además, cada sitio  $v_i$  tiene asignado un peso ( $w(v_i)$ ) por lo que cada  $S$  que se encuentre tendrá asignado también un peso ( $w(S)$ ) obtenido mediante la suma de los pesos de cada uno de sus elementos.

El objetivo real de la motivación 3, es encontrar el conjunto  $S$  de peso mínimo. Para esto aplicaremos la Teoría de Digráficas tomando una Solución en  $D$  (o bien, un núcleo en la digráfica dual de  $D$ ), la cual denotaremos con  $S'$ , notemos que este conjunto satisface la primera condición del problema pues  $\forall v_i \in V(D) - S', \exists v_j \in S'$  con  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $(v_j, v_i) \in F(D)$  por definición de  $S'$ . Ahora consideremos  $C = \{S \mid S \text{ es solución de } D\}$ .

Sea  $S^* \in C$  tal que  $w(S^*) \leq w(S) \forall S \in C$ , entonces  $S^*$  es el conjunto que buscamos.

Puede que sea más fácil resolver el problema si tomamos un núcleo en  $D^-$  (digráfica dual de  $D$ ) de peso mínimo, ya que todo núcleo de  $D^-$  es solución de  $D$  y viceversa.

Es claro que todo subconjunto de vértices en  $D$  es independiente si y sólo si lo es en  $D^-$  por definición de esta última, aún más, todo subconjunto absorbente en  $D$  es dominante en  $D^-$ , esto ocurre debido a la diferencia entre  $D$  y  $D^-$  en la dirección de sus flechas.

## 3. Teoremas Básicos de Teoría de Digráficas.

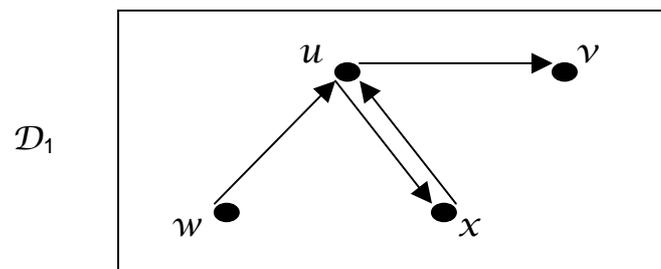
Los siguientes resultados serán aplicados y mencionados en los próximos capítulos. Empezaremos con lo referente a núcleos, estos teoremas y lemas nos ayudarán a descubrir cuando una digráfica tiene núcleo. Antes conoceremos la definición formal de núcleo en una digráfica.

**Núcleo** en una digráfica  $D$ : Subconjunto de vértices de  $V(D)$ , independiente y absorbente en  $D$ , comúnmente denotado por la letra  $\mathcal{N}$ .

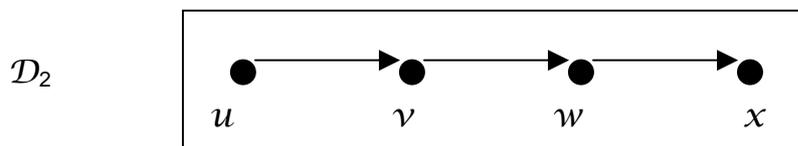
Explícitamente  $\mathcal{N} \subset V(D)$  es núcleo de la digráfica  $D$  si satisface las condiciones siguientes:

- Para cualquier par de vértices  $u \neq v$ , contenidos en el conjunto  $\mathcal{N}$ ,  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$ . (Propiedad de independencia)
- $\forall u \in V(D - \mathcal{N}), \exists v \in \mathcal{N}$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ . (Absorbencia)

Veamos algunos ejemplos de núcleos con las digráficas ilustradas en seguida:

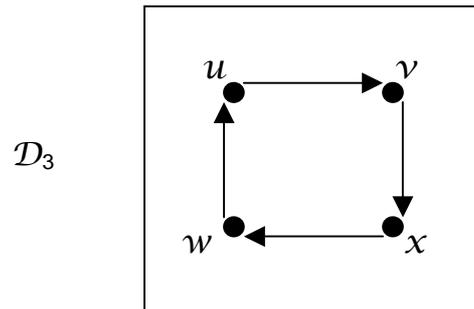


Observemos que  $v$  debe de estar contenido en cada núcleo de  $D_1$  pues nadie lo puede absorber, esto implica que  $u$  no pertenece a ningún núcleo de  $D_1$  de lo contrario se contradice la independencia del núcleo, sin embargo,  $u$  es el único vértice que absorbe a  $w$ , por lo tanto  $w$  debe estar contenido en el núcleo al igual que  $x$ , en conclusión,  $\{v, w, x\}$  es un núcleo de  $D_1$  y es único por lo antes expuesto.



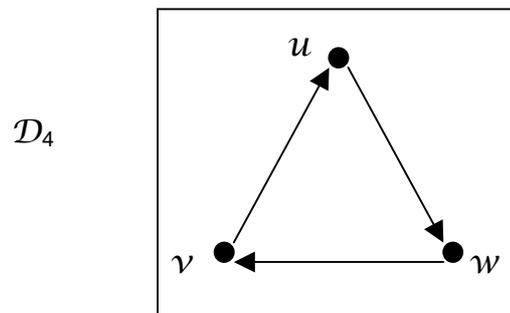
En el caso de  $D_2$ ,  $x$  debe de estar contenido en cada núcleo de  $D_2$ , por esta razón  $\{x, v\}$  es núcleo de  $D_2$  y también es único. Notemos que  $D_2$  es una trayectoria dirigida y construimos el núcleo tomando los vértices alternados empezando por el vértice que debía estar contenido en cada núcleo.

Veamos qué pasa con los ciclos dirigidos:



La digráfica  $D_3$  es un ciclo dirigido de longitud par y contiene dos núcleos distintos, a saber,  $\{u, x\}$ ,  $\{v, w\}$ , ya que ambos conjuntos son independientes y absorbentes a la vez.

Veamos la digráfica  $D_4$ :



Notemos que  $D_4$  es un ciclo dirigido de longitud impar descrito por  $(u, w, v, u)$  y el conjunto independiente máximo es de cardinalidad 1 ya que todos los vértices son adyacentes entre sí, pero ninguno de ellos absorbe a su vértice consecutivo dentro del ciclo. Por lo tanto,  $D_4$  no tiene núcleo.

En conclusión, no todas las digráficas tienen núcleo. Por otra parte, el hecho de que lo tenga no implica que sea único.

Es hora de estudiar algunos resultados sobre núcleos.

LEMA 1 (Berge [2]): Si  $S \subseteq V(D)$  es núcleo de  $D$ , entonces  $S$  es independiente máximo y absorbente mínimo.

DEMOSTRACIÓN:

Como  $S$  es un núcleo de  $D$ , entonces  $\forall v \in V(D) - S, \exists vS$  - flecha en  $D$ , es decir,  $S \cup \{v\}$  no es independiente.

Entonces  $S$  es independiente máximo.

Por otro lado, como  $S$  es independiente,  $\forall \{u, v\} \subset S, (u, v) \notin F(D)$  y además  $(v, u) \notin F(D)$ , por lo que  $S - v$  no es absorbente  $\forall v \in S$ .

Por lo que  $S$  es absorbente mínimo.

$\therefore$  Todo núcleo de  $D$  es absorbente mínimo e independiente máximo ●

Antes de enunciar el próximo teorema, definamos la **función característica** en un subconjunto de vértices arbitrario  $S$  de una digráfica  $D$  como sigue:

$\phi_s: V(D) \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\forall x \in V(D)$ , ocurre uno de los siguientes casos:

- $\phi_s(x) = 1$  si  $x \in S$ .
- $\phi_s(x) = 0$  si  $x \notin S$ .

TEOREMA 1 (Berge [2]):  $S \subseteq V(D)$  es núcleo de  $D$  si y sólo si  $\forall x \in V(D)$ ,

$$\phi_s(x) = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Demostremos primero una implicación del teorema, es decir, si  $S$  es un núcleo de la digráfica  $D$ , entonces  $\phi_s(x) = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \}$ ,  $\forall x \in V(D)$ :

Sea  $x \in V(D)$  arbitrario. Tenemos dos casos:

CASO 1 :  $x \in S$ , es decir,  $\phi_s(x) = 1$  por definición de función característica definida en  $S$ . Como  $S$  es un conjunto independiente,  $\forall y \neq x$ , si  $y \in S$ , entonces  $(x, y) \notin F(D)$  y  $(y, x) \notin F(D)$ , o bien, si  $y \in \Gamma^+(x)$ , entonces  $y \notin S$ , por lo cual  $\phi_s(y) = 0$  y  $\max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \} = 0$ , por ser  $y$  arbitrario.

Por lo tanto  $\phi_s(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \}$ .

CASO 2 :  $x \notin S$  si y sólo si  $\phi_s(x) = 0$ , como  $S$  es absorbente,  $\exists y \in S$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ , es decir,  $y \in \Gamma^+(x)$  pero  $y \in S$  implica que  $\phi_s(y) = 1$ , por lo que  $\max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \} = 1$ .

Por consiguiente  $\phi_s(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \}$ .

$\therefore \forall x \in V(D)$ ,  $\phi_s(x) = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \} \dots (1)$

Supongamos ahora que  $\phi_s(x) = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \}$ , para cualquier elemento  $x \in V(D)$ .

P. D.  $S$  es núcleo de  $D$ :

(a)  $S$  es independiente:

Sea  $u \in S$  arbitrario, por definición de la función característica y por hipótesis  $\phi_s(u) = 1 = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(u) \}$ , esto ocurre solamente si  $\max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(u) \} = 0$ , es decir,  $\forall y \in \Gamma^+(u)$   $\phi_s(y) = 0$ , lo que significa que,  $y \notin S$ .

Entonces  $S$  es un conjunto independiente de  $D$ .

(b)  $S$  es absorbente:

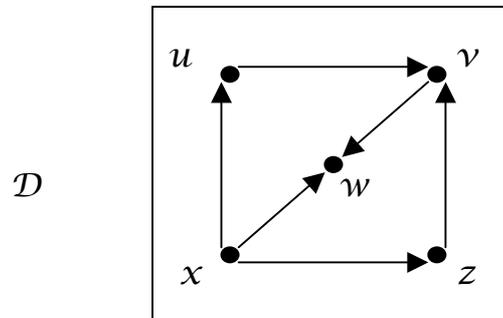
Sea  $u \in V(D) - S$  arbitrario, aplicando la función característica obtenemos:  $\phi_S(u) = 0 = 1 - \max \{ \phi_S(y) / y \in \Gamma^+(u) \}$ , como el rango de la función característica es  $\{1, 0\}$ , entonces  $\max \{ \phi_S(y) / y \in \Gamma^+(u) \} = 1$ , esto implica que  $\exists y \in \Gamma^+(u)$  tal que  $\phi_S(y) = 1$ , es decir,  $y \in S$  con  $(u, y) \in F(D)$ .

Por lo cual  $S$  es un conjunto absorbente en  $D$ .

Por (a) y (b)  $S$  es núcleo de  $D \dots (2)$

$\therefore$  Por (1) y (2) se demuestra el teorema 1 ●

Veamos un ejemplo:



El conjunto  $S = \{u, w, z\}$  es núcleo de la digráfica  $D$ , tenemos que:

$$\phi_S(u) = \phi_S(w) = \phi_S(z) = 1$$

por definición de la función  $\phi_S$ . Como  $\Gamma^+(u) = \{v\}$  y  $v \notin S$ , entonces  $\phi_S(v) = 0$ , es decir,  $\max \{ \phi_S(y) / y \in \Gamma^+(u) \} = 0$ . Por lo tanto  $\phi_S(u) = 1 - \max \{ \phi_S(y) / y \in \Gamma^+(u) \}$ , lo mismo ocurre con  $z \in S$ , además  $\Gamma^+(w) = \emptyset$ , razón por la cual se satisface el teorema para el conjunto  $S$ .

Veamos lo que pasa con los vértices fuera de  $S$ :

$v \notin S$ , es decir,  $\phi_s(v) = 0$  y  $\Gamma^+(v) = \{w\}$  tal que  $\phi_s(w) = 1$ , por lo que  $\max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(v) \} = 1$ , por lo tanto  $\phi_s(v) = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(v) \} = 0$ .

$x \notin S$ , por lo cual,  $\phi_s(x) = 0$ , esta vez  $\Gamma^+(x) = S$ , por lo que  $\max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \} = 1$ , en conclusión,  $\phi_s(x) = 1 - \max \{ \phi_s(y) / y \in \Gamma^+(x) \} = 0$ .

$\therefore$  Por el teorema anterior,  $S$  es un núcleo de la digráfica  $D$ .

En los lemas siguientes veremos familias de digráficas con al menos un núcleo.

LEMA 2 (Berge [2]): Si  $D$  es una digráfica simétrica, entonces  $D$  tiene núcleo.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $Q \subseteq V(D)$  un conjunto independiente máximo.

**AFIRMACIÓN:**  $Q$  es núcleo de  $D$ .

Basta demostrar que  $Q$  es un conjunto absorbente en  $D$  lo cual es cierto pues  $\forall v \in V(D) - Q$ ,  $Q \cup \{v\}$  no es independiente por ser  $Q$  independiente máximo, por lo que  $\exists vQ$  - flecha o  $\exists Qv$  - flecha en  $D$ . Como  $D$  es simétrica,  $\exists vQ$  - flecha si y sólo si  $\exists Qv$  - flecha en  $D$ , en conclusión,  $Q$  es absorbente en  $D$  y es núcleo de la misma.

$\therefore$  Toda digráfica simétrica tiene núcleo ●

LEMA 3: Si la digráfica  $D$  tiene exgrado mínimo distinto de cero, es decir,  $\forall x \in V(D)$ ,  $\delta^+(x) \geq 0$ , entonces  $D$  contiene un ciclo dirigido.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica tal que  $\forall x \in V(D)$ ,  $\delta^+_D(x) \geq 0$ . Tomemos una trayectoria dirigida  $\mathcal{T} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  de longitud máxima. Por hipótesis  $\delta^+_D(x_n) \geq 0$ , es decir,  $\exists u \in V(D)$  tal que  $(x_n, u) \in F(D)$ , además  $u = x_i$  para alguna  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , de lo contrario,  $\mathcal{T} \cup (x_n, u)$  es una trayectoria

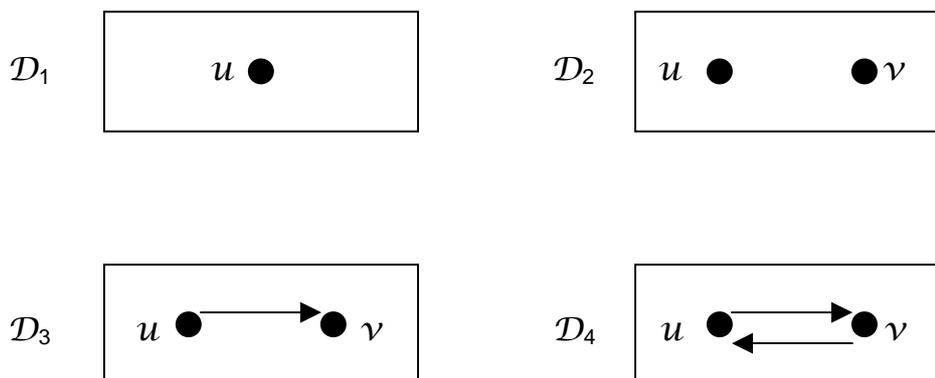
dirigida de longitud mayor que  $\mathcal{T}$ . Esto implica que  $(u = x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_i)$  es un ciclo dirigido contenido en la digráfica  $D$ .

$\therefore D$  contiene un ciclo dirigido ●

Observemos que las propiedades de simetría y transitividad son hereditarias, es decir, dichas propiedades se preservan en cada subdigráfica inducida de la digráfica original; lo mismo ocurre con la existencia de ciclos dirigidos. Von Neumann [15], demostró que toda digráfica sin ciclos dirigidos contiene núcleo. Gracias a que la no existencia de ciclos dirigidos es una propiedad hereditaria, podemos definir una familia de digráficas en las cuales la existencia de núcleo se preserva en cada subdigráfica inducida; nos referimos a las digráficas núcleo perfectas, cuya definición es:

**Digráfica núcleo perfecta:** es aquella que contiene un núcleo al igual que todas sus subdigráficas inducidas.

Las digráficas núcleo perfectas más pequeñas se presentan a continuación:



$D_1$  es la digráfica trivial y claramente es núcleo perfecta ya que  $\{u\}$  es el núcleo.

El núcleo de  $D_2$  es  $V(D_2) = \{u, v\}$  por ser independiente y absorbente, como las subdigráficas inducidas propias de  $D_2$  son isomorfas a  $D_1$ , entonces  $D_2$  es núcleo perfecta.

Al igual que  $D_2$ ,  $D_3$  tiene orden 2, esta vez  $\{\nu\}$  es el núcleo ya que todo conjunto unitario es independiente, aparte  $(u, \nu) \in F(D_3)$ . Las subdigráficas inducidas propias de  $D_3$  son isomorfas a  $D_1$ , por lo tanto  $D_3$  es núcleo perfecta.

Las subdigráficas inducidas propias de  $D_4$  son isomorfas a  $D_1$ . Por otro lado,  $D_4$  es una digráfica simétrica y por el lema 2 tiene núcleo, de hecho  $\{u\}$  y  $\{\nu\}$  son dos núcleos distintos de  $D_4$  por ser conjuntos independientes y absorbentes. En conclusión,  $D_4$  es núcleo perfecta.

Es claro que no toda digráfica es núcleo perfecta pues existen digráficas sin núcleo o tienen núcleo pero contienen una subdigráfica inducida propia sin núcleo, por ejemplo, si la digráfica contiene un ciclo inducido de longitud impar, como se probará en el teorema 4.

TEOREMA 2 (Von Neumann [15]): Toda digráfica  $D$  sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta y por lo tanto tiene un único núcleo.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica sin ciclos dirigidos.

Por la contrapositiva del lema 3,  $\exists \nu \in V(D)$  tal que  $\delta^+(\nu) = 0$ . Sean

$$\mathcal{X}_0 = \{\nu \in V(D) / \delta^+(\nu) = 0\}$$

$$\mathcal{Y}_0 = \{u \in V(D) / \exists u\mathcal{X}_0 - \text{flecha en } D\}$$

Consideremos la digráfica  $D_1 = D - (\mathcal{X}_0 \cup \mathcal{Y}_0)$ , la cual es subdigráfica inducida de  $D$ . Por el lema 3,  $D_1$  no contiene ciclos dirigidos, es decir,  $\exists \nu \in V(D_1)$  tal que  $\delta^+_{D_1}(\nu) = 0$ . Definamos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{X}_1 = \{\nu \in V(D_1) / \delta^+_{D_1}(\nu) = 0\}$$

$$\mathcal{Y}_1 = \{u \in V(D_1) / \exists u\mathcal{X}_1 - \text{flecha en } D_1\}$$

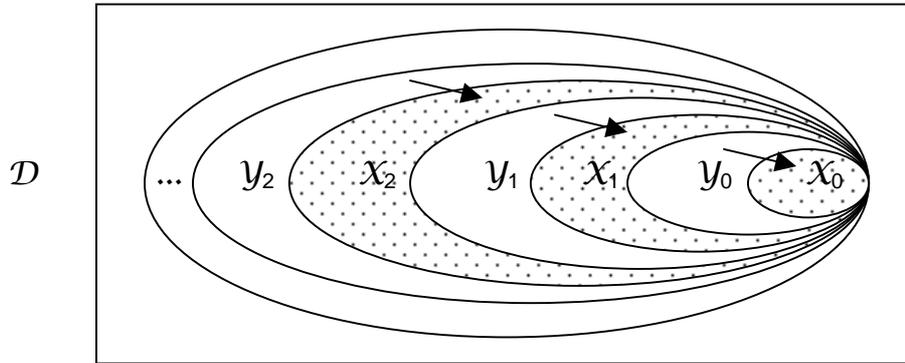
De la misma forma definamos la subdigráfica  $D_2 = D_1 - (\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{Y}_1)$  inducida de  $D$ , tal que no contiene ciclos dirigidos, entonces es posible definir:

$$\mathcal{X}_2 = \{\nu \in V(D_2) / \delta^+_{D_2}(\nu) = 0\} \neq \emptyset$$

$$Y_2 = \{ u \in V(D_2) - X_2 / \exists uX_2 - \text{flecha en } D_2 \}$$

Sea  $D_3$  la subdigráfica inducida por  $V(D_2) - (X_2 \cup Y_2)$ .

Ilustremos la construcción de los conjuntos que hemos definido:



Continuando con este procedimiento, como  $D$  es finita,  $\exists n \in \mathbf{N}$  tal que  $X_n = \emptyset$ , esto implica que  $Y_n = \emptyset$  pues  $\Gamma^-_{D_n}(X_n = \emptyset) = \emptyset$ , es decir,  $D_n = \emptyset$ : de lo contrario, por ser  $D_n$  subdigráfica inducida de  $D$ , no contiene ciclos dirigidos, así que por el lema 3,  $\exists v \in V(D_n)$  tal que  $\delta^+_{D_n}(v) = 0$ , esto contradice que  $X_n = \emptyset$ . Por lo tanto,  $X_n = \emptyset$  si y sólo si  $D_n = \emptyset$ .

Sea  $n_0 = \min \{ n \in \mathbf{N} / X_n = \emptyset = Y_n \}$ , denotemos con  $\mathcal{N}$  a la unión de las  $X_i$  con  $i < n_0$ .

**AFIRMACIÓN:**  $\mathcal{N}$  es núcleo de  $D$ .

P. D.  $\mathcal{N}$  es absorbente en  $D$ .

$V(D) = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n$  por construcción, esto implica que  $\mathcal{N}$  absorbe a todo  $V(D) - \mathcal{N}$ , pues  $\forall k < n_0$ ,  $X_k$  absorbe a los vértices de  $Y_k$  por definición de  $Y_k$ .

Entonces  $\mathcal{N}$  es absorbente en  $D$ .

Veamos ahora que  $\mathcal{N}$  es independiente.

Sabemos que todo vértice de  $\mathcal{X}_i$  es de exgrado cero en  $D_i$ , es decir, cada  $\mathcal{X}_i$  es independiente en  $D_i \forall i < n_0$ . Como  $D_i$  es subdigráfica inducida de  $D$ ,  $\forall i \in \mathbf{N}$  (en particular  $\forall i < n_0$ ), entonces cada  $\mathcal{X}_i$  es un conjunto independiente en  $D$ ,  $\forall i < n_0$ .

Sean  $i \neq j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n_0 - 1\}$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $i < j$ , los vértices de  $\mathcal{X}_i$  son de exgrado cero en  $D_i$ , mientras que  $\mathcal{X}_j \subset V(D_i)$  pues ningún vértice de  $\mathcal{X}_j$  tiene exgrado cero en  $D_i$ , de lo contrario  $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$ , lo cual es imposible por definición de  $\mathcal{X}_i \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ , por consiguiente  $\nexists \mathcal{X}_i \mathcal{X}_j$  - flecha en  $D$ ,  $\forall i < j < n_0$  y  $\nexists \mathcal{X}_j \mathcal{X}_i$  - flecha en  $D$  debido a que  $\mathcal{X}_j \cap \mathcal{Y}_i = \emptyset$  por definición de  $D_j$  y  $\mathcal{Y}_i = \Gamma^{-}_{D_i}(\mathcal{X}_i)$ .

Consecuentemente,  $\mathcal{N}$  es independiente en  $D$ , en otras palabras,  $D$  tiene núcleo y es único por construcción.

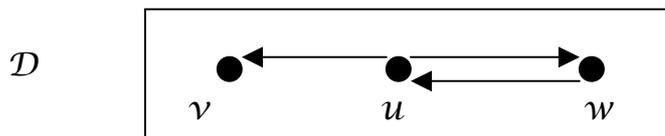
Como toda subdigráfica inducida de  $D$  no tiene ciclos dirigidos, entonces se puede aplicar el procedimiento anterior para encontrar su núcleo respectivo, es decir, toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

$\therefore D$  es núcleo perfecta ●

Veremos ahora un resultado de Víctor Neumann Lara [12], quien introdujo la definición de núcleo local, estamos hablando de un seminúcleo cuya definición proporcionamos en seguida:

Dado  $S \subseteq V(D)$ ,  $S$  es un **seminúcleo** de  $D$  si es un conjunto independiente en la digráfica y  $\forall u \in S$ , tal que  $(u, v) \in F(D)$ , para algún vértice  $v \in V(D - S)$ ,  $\exists w \in S$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ , ( $w$  no necesariamente distinto de  $u$ ). El conjunto vacío es el seminúcleo de menor cardinalidad en cualquier digráfica. Observemos que todo núcleo es seminúcleo por ser independiente y absorbente.

Observemos la siguiente digráfica:



$\{w\}$  satisface las propiedades de un seminúcleo de  $D$ , sin embargo no es núcleo de  $D$  ya que  $(v, w) \notin F(D)$ , por lo tanto, no todo seminúcleo es núcleo, sin embargo,  $\{v, w\}$  es núcleo y seminúcleo de  $D$  puesto que es un conjunto independiente y absorbente en la digráfica  $D$ .

Ahora demostraremos algunos resultados sobre seminúcleos que se relacionan con núcleos y digráficas núcleo perfectas. El seminúcleo es otra herramienta para encontrar núcleos en una digráfica.

LEMA 4 (Berge [2]): Sea  $D$  una digráfica. Si  $\forall \mathcal{A} \subseteq V(D)$ ,  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ,  $D[\mathcal{A}]$  tiene seminúcleo no vacío, entonces  $D$  tiene núcleo.

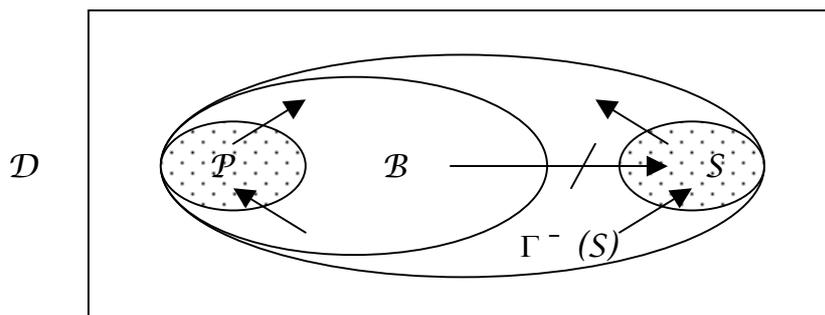
DEMOSTRACIÓN:

Sea  $S$  un seminúcleo máximo de  $D$  con  $S \neq \emptyset$ .

CASO 1: Si  $S$  es absorbente en  $D$ , entonces  $S$  es el núcleo que buscamos, puesto que todo seminúcleo es un conjunto independiente.

CASO 2: Si  $S$  no es absorbente en  $D$ , entonces  $\mathcal{B} = \{v \in V(D) - S \mid \nexists vS \text{ - flecha en } D\} \neq \emptyset$ . Consideremos la subdigráfica inducida  $D[\mathcal{B}]$  la cual es no vacía por hipótesis del caso actual y contiene un seminúcleo no vacío  $\mathcal{P}$  por hipótesis.

Veamos a continuación la representación de la digráfica  $D$ :



Para lo siguiente consideremos el hecho de que  $S$  y  $P$  son seminúcleos de  $D$  y  $D[\mathcal{B}]$  respectivamente, además son conjuntos independientes.

Afirmamos que  $S \cup \mathcal{P}$  es seminúcleo de  $D$ .

P. D.  $S \cup \mathcal{P}$  es independiente en  $D$ .

$\nexists S\mathcal{P}$  – flecha en  $D$ , por definición de  $S$ , de lo contrario existe una flecha de  $\mathcal{P}$  hacia un elemento de  $S$  en  $D$ , por ser  $S$  seminúcleo máximo de  $D$ . Ésto contradice la definición de  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ , misma razón por la cual  $\nexists \mathcal{P}S$  – flecha en  $D$ .

Por lo cual  $S \cup \mathcal{P}$  es independiente en  $D$ .

P. D.  $S \cup \mathcal{P}$  satisface la segunda condición de la definición de seminúcleo.

Sea  $u \in (S \cup \mathcal{P})$  tal que  $(u, v) \in F(D)$  para algún  $v \in V(D) - (S \cup \mathcal{P})$ . Recordemos que  $S$  y  $\mathcal{P}$  son seminúcleos en  $D$  y  $D[\mathcal{B}]$  respectivamente, por lo que faltaría ver solamente el caso en que  $u \in \mathcal{P}$  y  $v \in V(D) - (S \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{B})$ : como  $V(D) - (S \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{B}) = \Gamma^-(S)$ , entonces  $\exists w \in S$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ .

Así que  $S \cup \mathcal{P}$  es seminúcleo de  $D$ .

Como  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  por hipótesis, esto implica que

$$|S \cup \mathcal{P}| > |S|$$

lo cual es una CONTRADICCIÓN, pues  $S$  es un seminúcleo máximo de  $D$ . La contradicción surgió de suponer que  $S$  no es un conjunto absorbente en  $D$ .

$\therefore D$  tiene un núcleo ●

TEOREMA 3 (Neumann Lara [12]):  $D$  es una digráfica núcleo perfecta si y sólo si todas sus subdigráficas inducidas tienen seminúcleo no vacío.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica tal que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo, incluyendo ella misma. Sabemos que todo núcleo es seminúcleo, por lo tanto toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío . . . (1)

Demostremos la otra implicación del teorema 3:

Sea  $D$  una digráfica tal que todas sus subdigráficas inducidas de  $D$  tienen seminúcleo no vacío. Por el lema anterior  $D$  tiene núcleo y como todas las subdigráficas inducidas de las subdigráficas inducidas de  $D$  son también subdigráficas inducidas de  $D$ , entonces todas ellas contienen un seminúcleo no vacío.

$\therefore$  Toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo, es decir,  $D$  es núcleo perfecta . . . (2)

$\therefore$  De (1) y (2) queda demostrado el teorema 3 ●

Antes de pasar al siguiente teorema, necesitamos ver algunas definiciones previas y el lema 5.

Una **componente fuertemente conexa** es **terminal**, si contiene a todos sus vecinos exteriores, en caso de que existan.

Dada una digráfica  $D$ , la **digráfica de condensación** (denotada por  $D^*$ ), es aquella tal que cada vértice representa una componente fuertemente conexa de  $D$ . Dadas  $C_1 \neq C_2$  con  $\{C_1, C_2\} \subseteq V(D^*)$ , si existe el conjunto de vértices distintos  $\{u, v\} \subset V(D)$  con  $u \in V(C_1)$  y  $v \in V(C_2)$  en  $D$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ , entonces  $\{C_1, C_2\} \subset V(D^*)$  y  $(C_1, C_2) \in F(D^*)$ .

LEMA 5: Sea  $D$  una digráfica y  $C$  un camino dirigido cerrado de longitud  $k$  en  $D$ , con  $k \geq 3$ . Si  $C$  es de longitud impar, entonces contiene un ciclo dirigido de longitud impar en  $D$ .

DEMOSTRACIÓN:

Por inducción sobre  $k \geq 3$ .

Sea  $D$  una digráfica y  $C$  un camino dirigido cerrado de longitud  $k = 3$  en  $D$ . Esto implica que  $C$  es precisamente un ciclo dirigido de longitud 3.

Luego entonces, si  $k = 3$ , entonces  $C$  satisface el lema 5.

**HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:** Supongamos que todo camino dirigido cerrado de longitud  $k$  impar, satisface el lema 5,  $\forall k < n \in \mathbf{N}$ .

P. D. Para  $k = n$ .

Sea  $D$  una digráfica y  $C = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$  un camino dirigido cerrado de longitud  $n$ , con  $3 \leq k = n$ . Tenemos dos casos.

- Si  $C$  es un ciclo dirigido, entonces terminamos la demostración del lema 5.
- Si  $x_i = x_j$  con  $i \neq j$  y  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $C = C' \cup C''$  donde  $C' = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, x_1)$  y  $C'' = (x_i = x_j, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i)$ . Como  $C$  es de longitud impar, entonces  $C'$  y  $C''$  son de distinta paridad. Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $C'$  es de longitud impar, como  $C' \subset C \subset D$ , entonces la longitud de  $C'$  es menor a  $n$  y por hipótesis de inducción  $C'$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar, luego entonces  $C$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

$\therefore$  Todo camino dirigido cerrado de longitud impar al menos 3, contiene un

ciclo dirigido de longitud impar ●

**LEMA 6:** Toda digráfica fuertemente conexa  $D$  contiene un camino dirigido cerrado  $\beta$ , tal que  $V(\beta) = V(D)$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa.

Consideremos un camino dirigido cerrado  $\beta' = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$  que contiene el mayor número de vértices distintos en  $D$ .

- Si  $V(\beta') = V(D)$ , entonces hemos terminado.
- Si  $V(\beta') \neq V(D)$ , entonces  $\exists v \in V(D)$ , tal que  $v \notin V(\beta')$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, entre  $x_1$  y  $v$ ,  $\exists C_1$ , un  $v x_1$  – camino dirigido en  $D$  y  $\exists C_2$ , un  $x_1 v$  – camino dirigido en  $D$ . Esto implica que  $\beta = \beta'$

$\cup C_1 \cup C_2$  es un camino dirigido cerrado, tal que  $V(\beta') \subset V(\beta)$  pues  $\nu \in V(\beta)$ . CONTRADICCIÓN, ya que supusimos que  $\beta$  contenía el mayor número de vértices distintos en  $D$ .

Por lo tanto  $D$  contiene un camino dirigido cerrado  $\beta$ , tal que  $V(\beta) = V(D)$  ●

LEMA 7: Toda digráfica contiene una componente fuertemente conexa terminal.

DEMOSTRACIÓN:

Si toda digráfica fuera fuertemente conexa, entonces no habría nada que demostrar, ya que ella misma sería la componente fuertemente conexa terminal.

Sea  $D$  una digráfica que no es fuertemente conexa. Supongamos que  $D$  no contiene alguna componente fuertemente conexa terminal, es decir, para cualquier componente fuertemente conexa  $C$  de  $D$ ,  $\exists u \in V(C)$  y  $\exists \nu \in V(D - C)$  tal que  $(u, \nu) \in F(D)$ , dicho de otra forma,  $\Gamma^+(C) - C \neq \emptyset$

Consideremos la digráfica de condensación de  $D$ . Como  $\Gamma^+_{D'}(C) - C \neq \emptyset$  para cualquier componente fuertemente conexa en  $D$ , entonces  $\delta^+_{D'}(C) > 0$ ,  $\forall C \in V(D')$ , esto implica que  $D'$  contiene un ciclo dirigido  $\beta^* = (C_0, C_1, \dots, C_n = C_0)$ , por el lema 3. Dicho ciclo dirigido, es una componente fuertemente conexa en  $D'$  o está contenida en una de ellas. Como cada  $C_i$  es una componente fuertemente conexa, entonces por el lema 6,  $C_i$  contiene un camino dirigido cerrado  $\beta_i$  tal que  $V(\beta_i) = V(C_i)$  con  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  $D'$  contiene el ciclo dirigido  $\beta^*$  y por definición de  $D' \exists x_i \in V(C_i)$  y  $x_{i+1} \in V(C_{i+1})$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

$\therefore \beta = (x_0, \beta_0, x_0) \cup (x_0, x_1) \cup (x_1, \beta_1, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n = x_0, \beta_n, x_n = x_0)$  es un camino dirigido cerrado tal que  $V(\beta) = V(C_0) \cup V(C_1) \cup \dots \cup V(C_n)$ .

$\therefore V(\beta)$  es una componente fuertemente conexa de  $D$  o está contenida en una de ellas. CONTRADICCIÓN, pues supusimos que  $C_0, C_1, \dots, C_n$  eran componentes fuertemente conexas de  $D$ .

$\therefore$  D tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal ●

TEOREMA 4 (Richardson): Cualquier digráfica D sin ciclos dirigidos de longitud impar es núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN:

Haciendo uso del teorema 3, basta probar que toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo no vacío.

Sea H una subdigráfica inducida de D. Como la no existencia de ciclos dirigidos impares es una propiedad hereditaria, entonces H no contiene ciclos dirigidos impares.

P. D. H contiene un seminúcleo no vacío.

Sea  $\mathcal{X}_1$  una componente fuertemente conexa de H, tal que  $\Gamma^+(V(\mathcal{X}_1)) \subseteq V(\mathcal{X}_1)$ , dicha componente fuertemente conexa existe por el lema anterior (en particular si H fuera fuertemente conexa, entonces  $\mathcal{X}_1 = H$ ).

Si  $|\mathcal{X}_1| = 1$ , entonces  $V(\mathcal{X}_1) = \{v\}$  es seminúcleo de H pues  $V(\mathcal{X}_1)$  es independiente en H por ser unitario y  $\Gamma^+_H(V(\mathcal{X}_1)) = \emptyset \subseteq V(\mathcal{X}_1)$  ya que  $\nexists (v, v) \in F(H)$ .

Si  $|\mathcal{X}_1| > 1$ , entonces sean  $x \neq y$  dos vértices arbitrarios contenidos en  $V(\mathcal{X}_1)$ . Por ser  $\mathcal{X}_1$  una componente fuertemente conexa de H,  $\exists xy$  – trayectoria dirigida y  $\exists yx$  – trayectoria dirigida contenidas en  $\mathcal{X}_1$ .

A continuación veremos que todas las trayectorias dirigidas de  $x$  a  $y$  deben ser de la misma paridad:

Supongamos lo contrario, sea  $\mathcal{T}_1$  una  $xy$  – trayectoria dirigida de longitud par en H y  $\mathcal{T}_2$  una  $xy$  – trayectoria dirigida de longitud impar en H, como  $\{x, y\} \subseteq V(\mathcal{X}_1)$  y  $\mathcal{X}_1$  es una componente fuertemente conexa de H, entonces H contiene una  $yx$  – trayectoria dirigida  $\mathcal{T}_3$ . Tenemos dos casos posibles:

- Si  $\mathcal{T}_3$  es de longitud par, entonces  $C = \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar. Por el lema 5,  $C$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual contradice nuestra hipótesis.
- Si  $\mathcal{T}_3$  es de longitud impar, entonces  $C' = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_3$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar, por el lema 5,  $C'$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual contradice nuestra hipótesis.

$\therefore$  Si  $x$  y  $z$  son dos vértices distintos de  $\mathcal{X}_1$ , entonces todas las  $xz$  – trayectorias dirigidas contenidas en  $H$  son de la misma paridad.

Sea  $y \in V(\mathcal{X}_1)$ . Consideremos el conjunto  $S = \{ w \in V(\mathcal{X}_1) / \exists yw \text{ – trayectoria dirigida de longitud par en } H \}$ . Es claro que la trayectoria de longitud cero que comienza y termina en  $y$ , asegura que  $y \in S$ . Por consiguiente  $S \neq \emptyset$ .

**AFIRMACIÓN:**  $S$  es un seminúcleo de  $H$ .

(i) Independencia de  $S$  en  $H$ :

Supongamos que existen dos vértices distintos,  $u$  y  $v$  contenidos en el conjunto  $S$  tales que  $(u, v) \in F(H)$ . Como  $u \in S$ ,  $\exists yu$  – trayectoria dirigida  $\mathcal{T}_1 = (y = x_1, x_2, \dots, x_n = u)$  de longitud par en  $H$ . Tenemos dos casos:

- Si  $\mathcal{T}_1 \cup (u, v)$  es una trayectoria dirigida de longitud impar que va de  $y$  a  $v$ , entonces obtenemos una CONTRADICCIÓN, aclaramos antes que no puede haber dos trayectorias dirigidas distintas con los mismos extremos y diferente paridad; recordemos que  $v \in S$ , es decir,  $\exists yv$  – trayectoria dirigida de longitud par.
- Si  $\mathcal{T}_1 \cup (u, v)$  no es una trayectoria dirigida en  $H$ , entonces  $v = x_i$  para alguna  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Consideremos  $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ , la  $yv$  – trayectoria dirigida de  $H$  contenida en  $\mathcal{T}_1$ . Como  $v \in S$ ,  $\mathcal{T}_2$  es de longitud par. Sea  $C = (v = x_i, \mathcal{T}_1, u)$  un camino dirigido contenido en  $H$ , el cual es de longitud par por definición de  $\mathcal{T}_1$ , ya que  $\mathcal{T}_2 \cup C = \mathcal{T}_1$ . Esto implica que  $C \cup (u, v)$  es un camino

dirigido de longitud impar el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar por el lema 5, esto contradice las hipótesis.

$\therefore S$  es independiente en  $H$ .

(ii) “Absorbencia local” de  $S$  en  $H$ , es decir, si  $\exists S\nu$  – flecha en  $H$  para algún  $\nu \in V(H - S)$ , entonces  $\exists u \in S$ , tal que  $(\nu, u) \in F(H)$ :

Veremos que  $S$  es seminúcleo en  $\mathcal{X}_1$ :

Supongamos que  $\exists w \in S$  tal que  $(w, \nu) \in F(H)$ , para algún  $\nu \in V(\mathcal{X}_1 - S)$ . Por ser  $\mathcal{X}_1$  fuertemente conexa,  $\exists \nu w$  – trayectoria dirigida  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{X}_1$ , por lo que  $\mathcal{T}_1 \cup (w, \nu)$  es un ciclo dirigido en  $H$ . Como  $H$  no contiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces  $\mathcal{T}_1$  es una trayectoria dirigida de longitud impar.

- Si  $\mathcal{T}_1 = (\nu, w)$ , entonces  $\exists \nu S$  – flecha en  $H$ .
- Supongamos ahora que  $\mathcal{T}_1 = (\nu = x_1, x_2, \dots, x_n = w)$ , con  $n > 2$ . Como  $\mathcal{X}_1$  es fuertemente conexa y  $\nu \notin S$ , entonces  $\mathcal{X}_1$  contiene una  $\nu$  – trayectoria dirigida  $\mathcal{T}_2 = (\nu = y_1, y_2, \dots, y_m = \nu)$  de longitud impar, observemos los próximos dos subcasos:

(a) Si  $\mathcal{T}_2 \cup (\nu = x_1, x_2)$  es una  $\nu x_2$  – trayectoria dirigida, entonces es de longitud par, así que  $x_2 \in S$  por definición de  $S$ . Por lo tanto,  $\exists \nu S$  – flecha en  $H$ .

(b) Si  $\mathcal{T}_2 \cup (\nu = x_1, x_2)$  no es una  $\nu x_2$  – trayectoria dirigida, entonces  $x_2 = y_i$  para alguna  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ . Notemos que  $C = (y_i = x_2, \mathcal{T}_2, \nu = x_1, x_2 = y_i)$  es un ciclo dirigido y es de longitud par en  $H$  por hipótesis, esto implica que  $(x_i = y_2, \mathcal{T}_2, \nu)$  es una trayectoria dirigida de longitud impar, por lo mismo  $(\nu, \mathcal{T}_2, x_i = y_2)$  es de longitud par, por consiguiente  $x_i = y_2 \in S$  por definición de  $S$ . Por lo tanto,  $\exists \nu S$  – flecha en  $H$ .

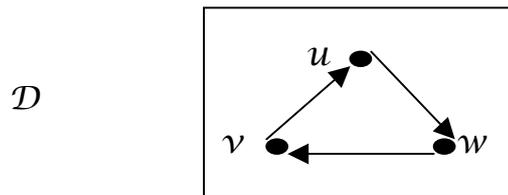
$\therefore S$  es seminúcleo de  $\mathcal{X}_1$ .

Como consecuencia obtenemos que  $S$  es seminúcleo de  $H$  pues  $S \subseteq V(\mathcal{X}_1)$  y  $\Gamma^+(V(\mathcal{X}_1)) \subseteq V(\mathcal{X}_1)$  por definición de  $\mathcal{X}_1$ . Recordemos que  $\mathcal{X}_1$  es subdigráfica inducida de  $H$ .

Por lo tanto, toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío. Por el lema 4,  $D$  tiene núcleo.

$\therefore$  Por el teorema 3,  $D$  es núcleo perfecta ●

Todo seminúcleo es un conjunto independiente al igual que todo núcleo y es absorbente solo localmente, es decir, en una determinada subdigráfica inducida de la digráfica original. Nótese además, que cada vértice de exgrado cero es un seminúcleo no vacío en la digráfica en cuestión. Dicho concepto es bastante útil para mostrar la existencia de un núcleo en una digráfica. Sin embargo, no cualquier digráfica tiene seminúcleo no vacío. Como muestra observemos el ejemplo siguiente:



Todo conjunto independiente máximo de  $D$  es de cardinalidad 1, sin embargo, ninguno de este tipo es seminúcleo.

Veremos ahora otro conjunto parecido al núcleo, se trata de un conjunto independiente pero es menos estricto en cuestión de absorbencia.

Dada una digráfica  $D$ , el conjunto  $Q \subseteq V(D)$  es un **cuasinúcleo** de  $D$  si satisface las siguientes dos condiciones:

- (1) Para cualesquiera  $u$  y  $v$ , vértices distintos contenidos en el conjunto  $Q$ ,  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$ . (propiedad de independencia)

(2)  $\forall u \in V(D) - Q$ , se cumple uno de los dos casos siguientes:

- $\exists v \in Q$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ , o
- $\exists w \in V(D) - Q$ , con  $u \neq w$  y  $\exists v \in Q$  tales que  $\{(u, w), (w, v)\}$  es un subconjunto de  $F(D)$ .

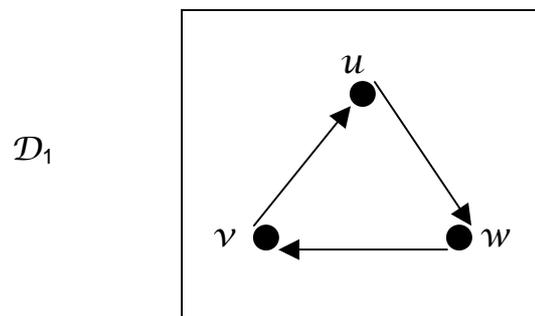
(propiedad de cuasiabsorbencia)

En pocas palabras, un cuasinúcleo: es un conjunto de vértices independiente y cuasiabsorbente en la digráfica referida.

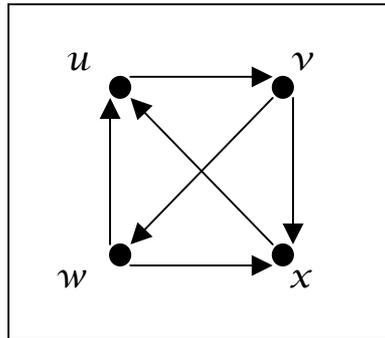
En lo sucesivo denotaremos al cuasinúcleo con la letra  $Q$ .

Diremos que un **vértice**  $u \in V(D)$  es **cuasiabsorbido** por algún conjunto  $\mathcal{A} \subseteq V(D - u)$  si y sólo si  $\exists v \in \mathcal{A}$ , tal que  $d(u, v) \leq 2$ .

Veamos algunos ejemplos de cuasinúcleos en las próximas digráficas:



En particular escogimos este ejemplo debido a que la digráfica no contiene seminúcleo ni núcleo como lo vimos anteriormente. En cambio, contiene tres cuasinúcleos distintos, a saber:  $\{u\}$ ,  $\{v\}$ ,  $\{w\}$ , ya que cada uno de ellos es independiente por ser conjunto unitario, además  $\{(u, w), (w, v), (v, u)\} = F(D_1)$ , lo que demuestra la segunda propiedad de cuasinúcleo. Por lo tanto  $D_1$  contiene 3 cuasinúcleos distintos.

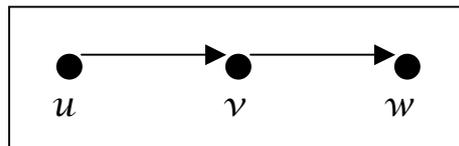
$D_2$ 

$\{x\}$ ,  $\{v\}$  y  $\{u\}$  son conjuntos independientes en  $D_2$ , aún más:

$\{x\}$  es cuasinúcleo de  $D_2$  ya que  $\{(u, v), (v, x), (w, x)\} \subset F(D_2)$ .

$\{v\}$  es cuasinúcleo de  $D_2$  pues  $\{(u, v), (w, u), (x, u)\} \subset F(D_2)$ .

$\{u\}$  es cuasinúcleo de  $D_2$  debido a que  $\{(v, x), (x, u), (w, u)\} \subset F(D_2)$ .

 $D_3$ 

$\{w\}$ ,  $\{u, w\}$  son dos cuasinúcleos distintos de  $D_3$ , y  $\{u, w\}$  es núcleo de  $D_3$ . Observemos que todo núcleo es cuasinúcleo por ser independiente y absorbente a la vez. A pesar de que no todo cuasinúcleo es núcleo, toda digráfica tiene cuasinúcleo; este resultado fue proporcionado por Chvátal y Lovász en [6] a mediados del siglo XX.

Llegó el momento de presentar los teoremas básicos referentes a los cuasinúcleos de una digráfica:

TEOREMA 5 (Chvátal y Lovász [5]): Toda digráfica tiene cuasinúcleo.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica cualquiera.

Demostraremos este teorema por Inducción sobre  $|V(D)| = p$

Sea  $V(D) = \{x\}$ , es decir,  $p = 1$ , en este caso  $\{x\}$  es un cuasinúcleo de  $D$  pues es absorbente e independiente, por lo tanto, para  $p = 1$  se satisface el teorema.

**HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:** Supongamos que el teorema se cumple para  $p \leq n$ , es decir, si  $D'$  es una digráfica tal que  $|V(D')| \leq n$ , entonces  $D'$  contiene un cuasinúcleo.

P. D. para  $p = n + 1$ :

Sean  $D$  una digráfica de orden  $n + 1$  y  $v \in V(D)$  arbitrario.

Consideremos la subdigráfica  $D_1 = D - (\{v\} \cup \Gamma^-(v))$ .

Si  $D_1 = \emptyset$ , entonces  $\{v\}$  es cuasinúcleo de  $D$ .

Si  $D_1 \neq \emptyset$ , entonces  $|V(D_1)| < n + 1$ . Por hipótesis de Inducción  $D_1$  contiene un cuasinúcleo, sea  $Q_1 \subseteq V(D_1)$  dicho conjunto. Por definición de  $D_1$  tenemos que  $\nexists Q_1 v$  – flecha en  $D$ . Analicemos los siguientes casos:

**CASO 1:** Si  $\nexists vQ_1$  – flecha en  $D$ , entonces  $Q_1 \cup \{v\}$  es independiente en  $D$ , además,  $\forall x \in V(D) - (Q_1 \cup \{v\})$ ,  $x$  es cuasiabsorbido por  $Q_1 \cup \{v\}$ :

- Si  $x \in D_1$ , entonces es cuasiabsorbido por  $Q_1$ , por definición de  $D_1$ .
- Si  $x \in V(D) - V(D_1)$ , entonces  $x \in \Gamma^-(v)$ , por definición de  $D - D_1$ , por consiguiente,  $x$  es absorbido por  $v$ .

**CASO 2:** Si  $\exists vQ_1$  – flecha en  $D$ , entonces  $Q_1$  es un cuasinúcleo de  $D$  ya que  $Q_1$  es cuasinúcleo de  $D_1$ , además  $D - D_1 = \Gamma^-(v) \cup \{v\}$  y  $\Gamma^-(v)$  es cuasiabsorbido por  $Q_1$  gracias a que  $\exists vQ_1$  – flecha en  $D$ .

En cualquiera de los dos casos,  $D$  tiene cuasinúcleo.

$\therefore$  Toda digráfica tiene cuasinúcleo ●

**TEOREMA 6:** Toda digráfica transitiva tiene núcleo.

**DEMOSTRACIÓN:**

Sea  $D$  una digráfica transitiva, por el teorema anterior sabemos que  $D$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ , el cual es un conjunto independiente.

Si  $Q$  es absorbente, entonces terminamos la demostración.

Supongamos que  $Q$  no es un conjunto absorbente en  $D$ . Esto implica que el conjunto  $S = \{x \in V(D) \mid \nexists xQ \text{ -- flecha en } D\}$  es no vacío en  $D$ . Por definición de cuasinúcleo,  $\forall v \in S, \exists u \in V(D) - Q$  y  $\exists w \in Q$  tal que  $\{(v, u), (u, w)\} \subseteq F(D)$ . Como  $D$  es una digráfica transitiva, entonces  $(v, w) \in F(D)$ , esto contradice la definición de  $S$ . Por lo tanto  $Q$  es absorbente. En conclusión,  $Q$  es núcleo de  $D$ .

$\therefore$  Toda digráfica transitiva  $D$  tiene núcleo ●

TEOREMA 7 (König [11]): Si  $D$  es una digráfica transitiva, entonces  $\forall S \subseteq V(D)$ ,  $S$  es núcleo de  $D$  si y sólo si  $S$  es un conjunto absorbente mínimo. Aún más, todos los conjuntos absorbentes mínimos de  $D$  son de la misma cardinalidad.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica transitiva, por el teorema anterior,  $D$  tiene núcleo.  
Sea  $S \subseteq V(D)$  un núcleo de  $D$ . Por el lema 1,  $S$  es absorbente mínimo.

Supongamos ahora que  $S \subseteq V(D)$  es un conjunto absorbente mínimo de  $D$ .

P. D.  $S$  es un núcleo de  $D$ :

Supongamos que existe  $u \neq v$ , con  $\{u, v\} \subset S$  tales que  $(u, v) \in F(D)$ , como  $S$  es absorbente mínimo,  $\exists w \in V(D) - S$  tal que  $(w, u) \in F(D)$  de lo contrario el conjunto  $S - u$  es un conjunto absorbente mínimo más pequeño que  $S$  lo cual contradice las hipótesis, por lo tanto, con las flechas  $\{(w, u), (u, v)\}$  obtenemos la trayectoria dirigida  $\mathcal{T} = (w, u, v)$  en  $D$ , como  $D$  es transitiva entonces  $(w, v) \in F(D)$ , es decir,  $v$  absorbe a cada vecino de  $u$  y al mismo  $u$ , por consiguiente  $S - u$  es un conjunto absorbente en  $D$  tal que  $|S - u| < |S|$  CONTRADICCIÓN, pues  $S$  era absorbente mínimo, por lo tanto  $S$  es un conjunto independiente.

$\therefore S$  es núcleo de  $D$  si y sólo si es absorbente mínimo. . . (1)

Demostremos ahora la segunda parte del teorema 7:

Sea  $D$  una digráfica transitiva. Consideremos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos conjuntos absorbentes mínimos distintos en  $D$ . Por (1),  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son núcleos de  $D$ , luego entonces  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  es un conjunto independiente de vértices en  $D$ . Es claro que  $\mathcal{A} - \mathcal{B} \neq \emptyset$  y  $\mathcal{B} - \mathcal{A} \neq \emptyset$  de lo contrario estaríamos contradiciendo la minimalidad de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con relación a la propiedad de absorbencia en  $D$ . Consideremos entonces  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{A}$  es absorbente mínimo, entonces  $\mathcal{A}'$  debe absorber a  $\mathcal{B}'$ , por lo cual el conjunto de flechas  $\mathbf{F}(\mathcal{B}', \mathcal{A}') \neq \emptyset$ . De igual forma,  $\mathcal{B}$  es absorbente mínimo en  $D$ , esto implica que  $\mathcal{B}'$  debe absorber a  $\mathcal{A}'$ , por consiguiente  $\mathbf{F}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \neq \emptyset$ .

**AFIRMACIÓN 1:** Si  $(a, b) \in \mathbf{F}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \subseteq F(D)$ , entonces  $(a, b)$  es una flecha simétrica en  $D$ .

Supongamos que  $\exists (u, v) \in \mathbf{F}(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$  tal que  $(u, v)$  es una flecha asimétrica en  $D$ . Como  $\mathcal{A}$  es núcleo por (1), entonces  $v \notin \mathcal{A}$ , en particular  $v \notin \mathcal{A}'$  no obstante,  $\exists w \in \mathcal{A}$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ . Notemos que  $w \in \mathcal{A}'$ , de lo contrario  $w \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  contradice la independencia de  $\mathcal{B}$ . Como  $D$  es una digráfica transitiva y  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ , entonces  $(u, w) \in F(D)$ , esto contradice la independencia de  $\mathcal{A}$  en  $D$ . Por lo tanto, toda  $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$  – flecha en  $D$  es simétrica.

Lo mismo ocurre con las  $\mathcal{B}'\mathcal{A}'$  – flechas en  $D$ , de lo contrario se contradice la independencia de  $\mathcal{B}$  en  $D$ .

$\therefore$  Todas las  $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$  – flechas y las  $\mathcal{B}'\mathcal{A}'$  – flechas son simétricas en  $D$ .

**AFIRMACIÓN 2:**  $\forall u \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ , existe un único vértice  $v \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ , tal que  $(v, u) \in F(D)$ .

Sea  $u \in \mathcal{B}'$  tal que  $(v, u) \in F(D)$  con  $v \in \mathcal{A}'$ . Supongamos que  $\exists w \neq v \in \mathcal{A}'$  tal que  $(w, u) \in F(D)$ . Por la afirmación anterior,  $(v, u)$  y  $(w, u)$  son flechas simétricas en  $D$ , esto implica que  $\{(v, u), (u, w)\} \subseteq F(D)$ . Como  $D$  es

transitiva, entonces  $(v, w) \in F(D)$ , CONTRADICCIÓN, ya que  $\mathcal{A}$  es un conjunto independiente en  $D$ , el cual contiene a  $v$  y  $w$ . La contradicción surgió de suponer que un vértice de  $\mathcal{B}'$  absorbía a dos vértices distintos de  $\mathcal{A}'$ .

Lo mismo ocurre con los vértices de  $\mathcal{A}'$ , de lo contrario se contradice la independencia de  $\mathcal{B}$  en  $D$ .

$\therefore$  Cada vértice de  $\mathcal{A}'$  ( $\mathcal{B}'$  respectivamente) absorbe uno y solo un vértice de  $\mathcal{B}'$  ( $\mathcal{A}'$  respectivamente) en  $D$ .

$\therefore$  Por afirmaciones 1 y 2, terminamos de demostrar el teorema 7 ●

TEOREMA 8: Los cuasinúcleos de cualquier digráfica transitiva son de la misma cardinalidad.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica transitiva. Por el teorema 5, se tiene que  $D$  tiene un cuasinúcleo y se sigue del teorema 6 que  $Q$  es núcleo de  $D$ , además, todo cuasinúcleo de una digráfica transitiva es núcleo.

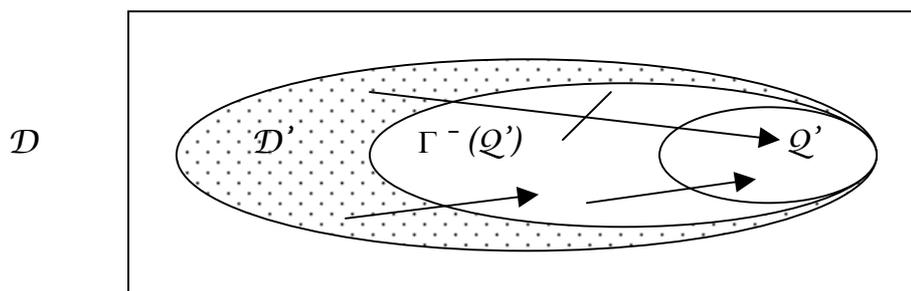
$\therefore$  Por el teorema anterior, todos los cuasinúcleos de una digráfica transitiva tienen la misma cardinalidad ●

# Capítulo 1

## Debilidad en Cuasinúcleos

Ya estudiamos los conceptos de cuasinúcleo y núcleo, es claro, que todo núcleo es cuasinúcleo, pero el sentido contrario de esta afirmación no siempre es cierta, esto ocurre debido a que el cuasinúcleo no necesariamente es absorbente, es decir, pueden existir vértices en el complemento del cuasinúcleo, los cuales se encuentran a distancia dos del conjunto referido. Es posible encontrar un cuasinúcleo que absorba el mayor número de vértices, minimizando así la cardinalidad del conjunto de vértices a distancia 2 del cuasinúcleo, a la cardinalidad de dicho conjunto le llamaremos la debilidad del cuasinúcleo.

Dicho de otra forma, la debilidad de un cuasinúcleo es el número de vértices fuera de éste, los cuales no son absorbidos por él. La debilidad puede variar entre dos cuasinúcleos distintos, todo depende de su absorbencia. En conclusión, el objetivo principal de este capítulo es encontrar una cota superior de la debilidad mínima para cada cuasinúcleo  $Q$  de la digráfica  $D$  que sea de debilidad mínima, sabemos que toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo  $Q'$  por el teorema 5 de preliminares, cuya debilidad se puede determinar mediante la digráfica  $D' = D - (\Gamma^-(Q') \cup Q')$  que se ilustra a continuación:



De tal forma que el orden de  $D'$ , o bien,  $|V(D')|$  es igual a la debilidad de  $Q'$ .

Por esta razón, si  $D' = \emptyset$ , entonces  $Q'$  tiene debilidad cero, es decir,  $Q'$  es un conjunto absorbente en  $D$ , por lo tanto es núcleo de  $D$ . Si la digráfica  $D$  no tiene núcleo, entonces ningún cuasinúcleo de  $D$  tiene debilidad cero.

En 1976, Philippe Vincke en [14] proporcionó una cota superior para la debilidad de los cuasinúcleos de debilidad mínima. En el teorema 1.1 de este capítulo, veremos cómo Vincke encontró dicha cota al analizar el conjunto de vértices que no son absorbidos por un cuasinúcleo de debilidad mínima y descubrió así que dichos vértices están relacionados por tercias entre ellos, cuyas adyacencias no satisfacen la propiedad de transitividad.

Posteriormente Vincke demostró otros resultados sobre cuasinúcleos de debilidad mínima: en el teorema 1.2, establece un orden para los cuasinúcleos distintos con respecto a su debilidad. Con esto concluimos que mientras más absorbente sea el cuasinúcleo, menor será su debilidad, de tal forma que el cuasinúcleo de debilidad mínima debe ser un conjunto independiente máximo, este resultado lo veremos en el teorema 1.3. Finalmente, Philippe V. estudió las digráficas completas en donde demuestra que todo vértice de máximo grado interior es un cuasinúcleo de debilidad mínima.

## 1.1. Debilidad en Cuasinúcleos.

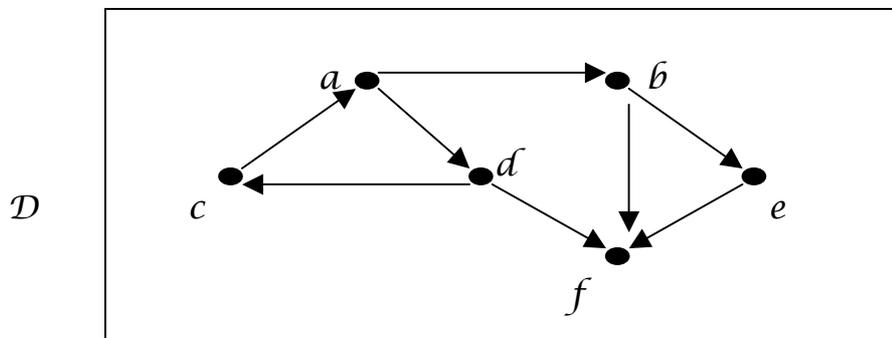
Sea  $D$  una digráfica, diremos que  $\{x, y, z\}$  es una **tercia intransitiva** de  $D$  si se tiene:  $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq F(D)$  y  $(x, z) \notin F(D)$ , a  $z$  le llamaremos **vértice terminal** de la terciá intransitiva  $\{x, y, z\}$ .

$\{x, y, z\}$  es denominado **triángulo intransitivo** de la digráfica  $D$  si las terciás  $\{x, y, z\}$ ,  $\{y, z, x\}$  y  $\{z, x, y\}$  son intransitivas en  $D$ .

Sea  $Q$  un cuasinúcleo de  $D$  y  $B = \{x \in (V(D) - Q) \mid d(x, Q) = 2\}$  el conjunto de vértices de  $V(D) - Q$  que están a distancia dos de  $Q$ . Definamos la **debilidad de un cuasinúcleo**  $Q$ , denotada por  $f_D(Q)$ , como la cardinalidad del conjunto  $B$ , es decir,  $f_D(Q) = |B|$ .

Todo núcleo tiene debilidad cero por ser absorbente.

Veamos la siguiente digráfica  $D$  para aclarar las definiciones arriba expuestas:



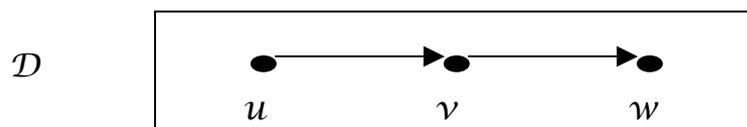
$\{a, d, c\}$  es un triángulo intransitivo contenido en  $D$  ya que  $(a, c) \notin F(D)$ ,  $(c, d) \notin F(D)$  y  $(d, a) \notin F(D)$ , es decir,  $\{a, d, c\}$ ,  $\{d, c, a\}$ ,  $\{c, a, d\}$  son terciás intransitivas de  $D$ .  $\{c, a, b\}$ ,  $\{a, b, e\}$ ,  $\{a, b, f\}$  y  $\{a, d, f\}$  son terciás intransitivas de  $D$  por mencionar otras, mientras que  $\{b, e, f\}$  no lo es debido a que  $(b, f) \in F(D)$  con  $\{(b, e), (e, f)\} \subset F(D)$ .

$\{c, f\}$  es cuasinúcleo de  $D$  pues  $\{(a, d), (d, f), (b, f), (e, f)\} \subset F(D)$  implica que  $\{c, f\}$  es cuasiabsorbente, mientras que  $(c, f) \notin F(D)$  y  $(f, c) \notin F(D)$  muestra su independencia. El vértice  $a$  es el único a distancia dos de  $\{c, f\}$ , por lo tanto  $B = \{a\}$  y  $f_D(\{c, f\}) = 1$ .

$\{a, f\}$  es un conjunto independiente y es núcleo de  $D$  ya que  $(c, a) \in F(D)$  y  $f$  absorbe a los vértices restantes, en conclusión,  $\{a, f\}$  es un cuasinúcleo de  $D$  de debilidad cero.

Por teorema de Chvátal y Lovász, sabemos que toda digráfica tiene cuasinúcleo, por esta razón siempre existe un cuasinúcleo de debilidad mínima independientemente de la digráfica que se considere.

En la siguiente digráfica ejemplificamos el hecho de que si bien toda digráfica tiene cuasinúcleo, no todo cuasinúcleo es de debilidad mínima:



$\{w\}$  es cuasinúcleo de  $D$  sin embargo no es de debilidad mínima puesto que existe un cuasinúcleo que lo contiene y tiene debilidad nula, a saber,  $\{u, w\}$ . Notemos que el vértice  $u$  es el único que se encuentra a distancia dos de  $\{w\}$ , no obstante  $\{w\} \cup \{u\}$  es un conjunto independiente en  $D$ , como  $\{w\}$  ya era cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $\{w, u\}$  es un cuasinúcleo y núcleo de  $D$  por ser absorbente ya que  $V(D) - \{w, u\} = \{v\}$  con  $(v, w) \in F(D)$ .

Antes de enunciar el teorema 1.1, definimos la función  $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ , tal que  $\lfloor x \rfloor = \max \{z \in \mathbf{Z} / z \leq x\}$ , en donde  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{Z}$  denotan los números reales y enteros respectivamente. Por ejemplo:  $\lfloor 2.345 \rfloor = 2$ .

**TEOREMA 1.1:** Sea  $D$  una digráfica, si  $Q$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D$  y  $p$  el número de tercias intransitivas de  $D$ , entonces

$$0 \leq f_D(Q) \leq \lfloor p/3 \rfloor$$

aún más, esta cota es óptima en el sentido de que para toda  $p$ , existe una digráfica  $D$  con exactamente  $p$  tercias intransitivas.

DEMOSTRACIÓN:

Por inducción sobre  $|V(D)|$ .  
Es claro que cuando  $|V(D)| = 1$  se cumple el teorema ya que  $Q = V(D)$  es de debilidad mínima y además:

$$0 = f_D(Q) \leq \lfloor p/3 \rfloor = 0$$

*HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:* Supongamos que el teorema es válido para toda digráfica  $D'$  de orden menor que  $n$ , es decir,  $D'$  tiene un cuasinúcleo  $Q'$  de debilidad mínima tal que:

$$f_{D'}(Q') \leq \lfloor p'/3 \rfloor$$

donde  $p'$  es el número de tercias intransitivas de  $D'$ .

Sea  $D$  una digráfica de orden  $n$ .

CASO 1: Supongamos que  $\exists x \in V(D)$  tal que  $x$  no es vértice terminal de ninguna tercia intransitiva de  $D$ .

Consideremos la subdigráfica  $D - x$ , sea  $p'$  el número de tercias intransitivas de  $D - x$ . Sabemos que  $p' \leq p$  por lo que

$$\lfloor p'/3 \rfloor \leq \lfloor p/3 \rfloor \quad \dots (1)$$

Por hipótesis,  $x$  no es vértice terminal de ninguna tercia intransitiva en  $D$ , por otro lado,  $D - x$  tiene menor cardinalidad que  $D$  y por hipótesis de inducción, contiene un cuasinúcleo  $Q'$  de debilidad mínima tal que

$$f_{D-x}(Q') \leq \lfloor p'/3 \rfloor \quad \dots (2)$$

Subcaso 1. a) Si  $\exists xQ'$  - flecha en  $F(D)$ , entonces  $Q = Q'$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$  pues  $Q'$  lo era en  $D - x$ , aparte  $x$  está a distancia uno de  $Q' = Q$  y no es vértice terminal de

ninguna tercia intransitiva, de manera que  $Q$  cuasiabsorbe a todo invecino de  $x$ , por lo tanto:

$$f_D(Q) = f_{D-x}(Q') \quad \dots (3)$$

uniendo las desigualdades (1), (2) y (3) obtenemos lo siguiente:

$$f_D(Q) = f_{D-x}(Q') \leq \lfloor p'/3 \rfloor \leq \lfloor p/3 \rfloor \quad \dots (4)$$

Subcaso 1. b) Si  $Q'$  no absorbe a  $x$  en  $D$  y no existe una  $Q'x$  - flecha en  $F(D)$ , dicho de otra forma, si  $(Q' \cup x)$  es independiente, entonces  $(Q' \cup x) = Q$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$  porque  $x \in Q$  y  $(D - x) - Q' = D - Q$ , además  $x$  no es vértice terminal de ninguna tercia intransitiva, luego entonces se cumple de nuevo la desigualdad (4)

Subcaso 1. c) Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, es decir, si solamente existen  $Q'x$  - flechas entre  $Q'$  y  $x$  en  $D$ , entonces  $x$  está a distancia dos de  $Q'$  en  $D$ , veamos cual es la razón, recordemos que  $Q'$  es cuasinúcleo de  $D - x$  y consideremos  $P = \{ \nu \in Q' / (\nu, x) \in F(D) \}$ , notemos que  $\forall \nu \in P, \forall z$  tal que  $(z, \nu) \in F(D)$  tenemos que  $(z, x) \in F(D)$ , pues  $\{(z, \nu), (\nu, x)\} \subset F(D)$  y  $x$  no es vértice terminal de ninguna tercia intransitiva, esto implica que  $Q = (Q' - P) \cup \{x\}$  es cuasinúcleo de  $D$ , por hipótesis del subcaso actual se tiene que  $(Q' - P) \cup \{x\}$  es independiente, por otra parte  $x$  absorbe a  $P$  y a todo invecino de los vértices de  $P$ , además de que  $Q'$  es cuasinúcleo de  $D - x$  y es de debilidad mínima puesto que  $Q'$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D - x$ . Obtenemos entonces la siguiente desigualdad:

$$f_D((Q' - P) \cup \{x\}) \leq f_{D-x}(Q')$$

De donde se sigue la desigualdad (4)

Reuniendo las desigualdades (1), (2), (3) y (4) en cada uno de los subcasos (1. a), (1. b) y (1. c) obtenemos la desigualdad que se muestra enseguida:

$$f_D(Q) \leq \lfloor p/3 \rfloor$$

CASO 2: Supongamos ahora que todo vértice de  $D$  es terminal de al menos una terna intransitiva.

Sea  $Q$  un cuasinúcleo de  $D$ , sabemos que existe por el teorema 6 [preliminares].

Definamos algunos subconjuntos de  $V(D)$  a partir de  $Q$ , como sigue:

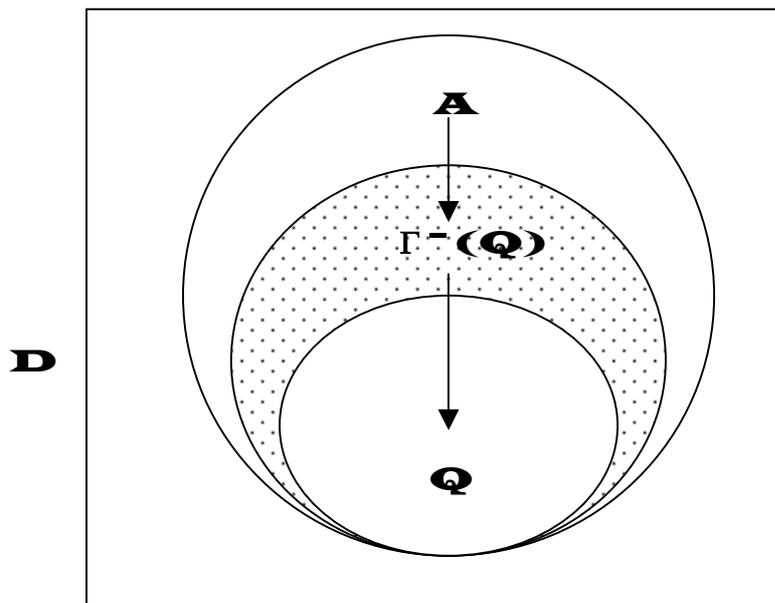
$V(D) = Q \cup \Gamma^-(Q) \cup A$ , en donde  $|A|$  es la debilidad de  $Q$  y tal conjunto está definido como sigue:

$$A = \{v \in V(D - Q) / \text{no existe una } vQ \text{ - flecha en } D\}$$

$$= \{v \in V(D - Q) / d(v, u) \geq 2 \forall u \in Q\}$$

$$= \{v \in V(D - Q) / \text{ toda } vQ \text{ - trayectoria dirigida en } D \text{ es de longitud } \geq 2\}$$

En este caso  $D$  tendría la forma que se muestra en el dibujo:



Recordemos que  $\Gamma^-(Q) = \{v \in V(D - Q) / \exists w \in Q \text{ con } (v, w) \in F(D)\}$ . Fijémonos en  $D[A]$ , es decir, la subdigráfica inducida por los vértices de  $A$  y sea  $Q'$  un cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D[A]$ , a partir del cual definiremos los siguientes conjuntos:

$$E = \{ \nu \in Q / \exists \nu Q' \text{ - flecha en } D \} \subset Q.$$

$$F = \{ \nu \in \Gamma^-(Q) / \exists \nu((Q - E) \cup Q') \text{ - flecha en } D \} \subset \Gamma^-(Q)$$

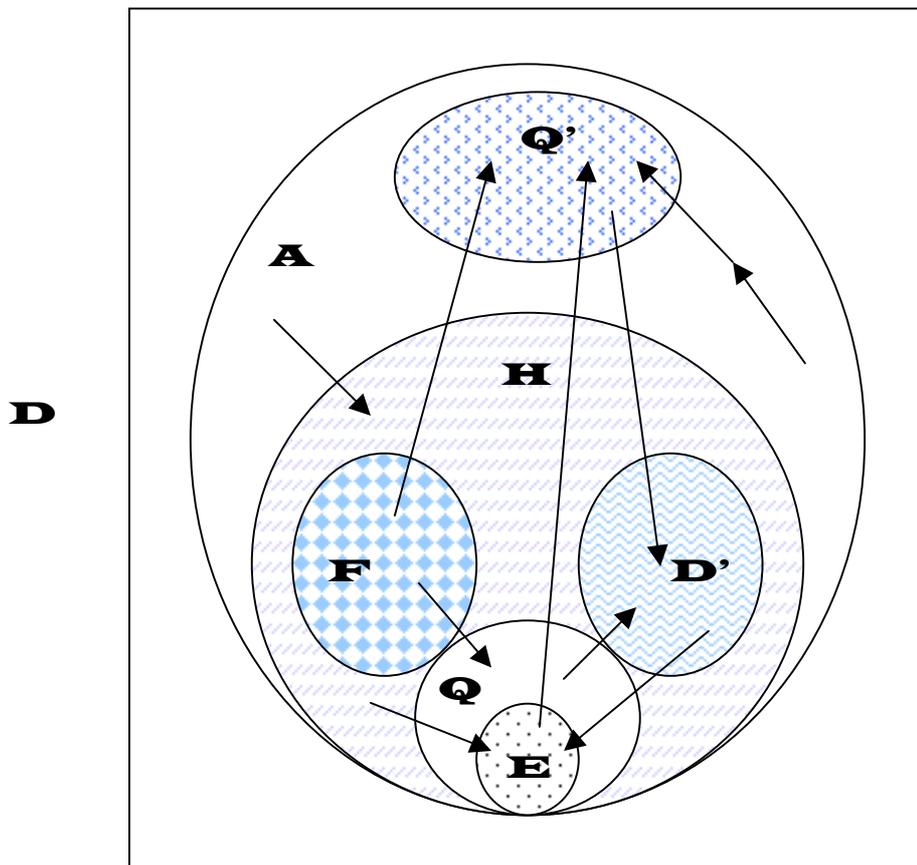
$$H = \{ \nu \in \Gamma^-(Q) / \nexists \nu((Q - E) \cup Q') \text{ - flecha en } D \}$$

$$\cap \{ \nu \in \Gamma^-(Q) / \nexists ((Q - E) \cup Q')\nu \text{ - flecha en } D \} \subset \Gamma^-(Q)$$

$$D' = \Gamma^-(Q) - (F \cup H) \subset \Gamma^-(Q).$$

En conclusión,  $\Gamma^-(Q) = F \cup H \cup D'$ .

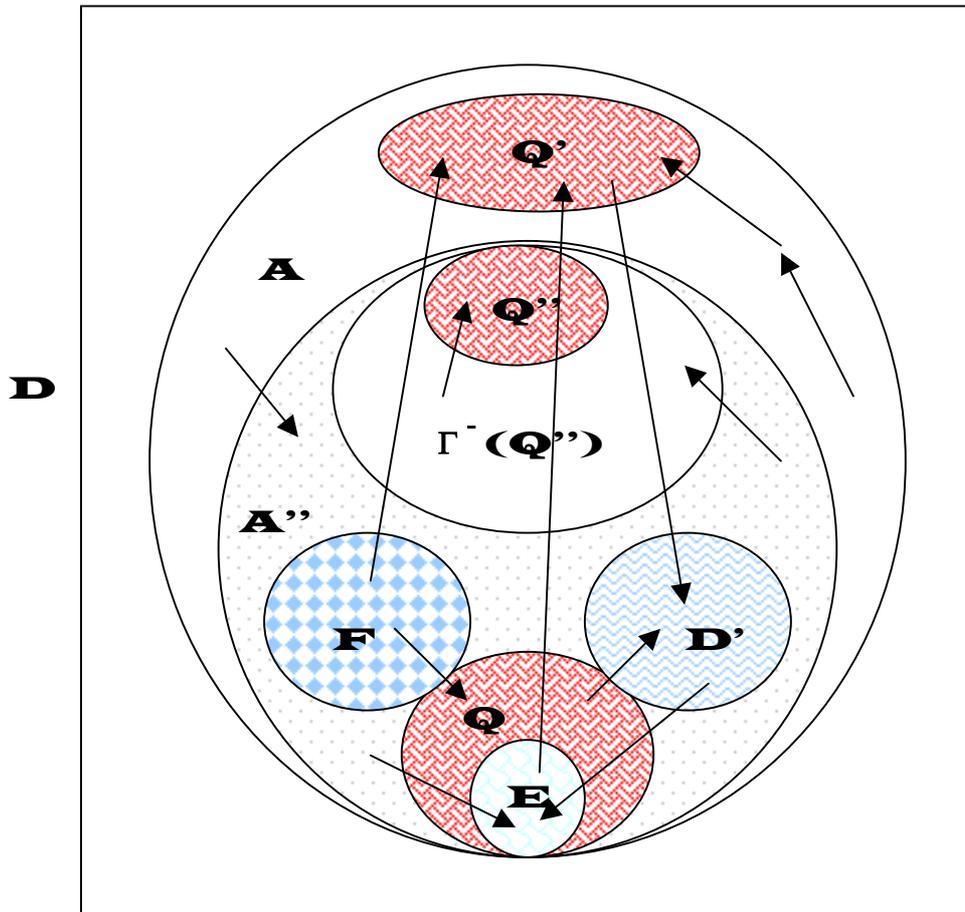
Estos conjuntos se ilustran en la figura siguiente:



Prosigamos definiendo algunos subconjuntos de  $V(H)$  considerando la subdigráfica inducida  $D[H]$ : sea  $Q''$  un cuasinúcleo de dicha subdigráfica,  $\Gamma^-(Q'') \subset V(H)$  y

$$\begin{aligned} A'' &= \{ v \in V(H - Q'') / \nexists v Q'' \text{ - flecha en } D \} \\ &= \{ v \in V(H - Q'') / d(v, u) \geq 2 \forall u \in Q'' \} \\ &= \{ v \in V(H - Q'') / \text{ toda } v Q'' \text{ - trayectoria dirigida en } D \text{ es de longitud } \geq 2 \} \end{aligned}$$

La representación más detallada de la digráfica  $D$  se muestra a continuación en donde  $V(H) = Q'' \cup (\Gamma^-(Q'')) \cup A''$ , como se muestra en el dibujo:



No olvidemos que  $\Gamma^-(Q) = H \cup F \cup D' = Q'' \cup \Gamma^-(Q'') \cup A'' \cup F \cup D'$ .

En esta figura, remarcamos con un mismo color y textura a los conjuntos  $(Q - E)$ ,  $Q'$  y  $Q''$  pues pretendemos demostrar que la unión de éstos satisface las condiciones del teorema, es decir, se trata de un cuasinúcleo de debilidad mínima en la digráfica, el cual satisface la cota expuesta en el teorema y en la desigualdad (4).

**AFIRMACIÓN:**  $Q^* = ((Q - E) \cup Q' \cup Q'')$  es cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D$  tal que

$$f_D(Q^*) \leq \lfloor p/3 \rfloor \dots (5)$$

donde  $p$  es el número de tercias intransitivas de  $D$ .

Veremos primero que  $Q^*$  es cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$ :

(i) Independencia de  $Q^*$  en  $D$ :

Por construcción sabemos que  $(Q - E)$ ,  $Q'$  y  $Q''$  son subconjuntos independientes de  $V(D)$ ,  $(Q - E) \cup Q'$  es un conjunto independiente en  $D$  pues no existe una  $wQ'$  – flecha en  $F(D)$ , con  $w \in (Q - E)$ , por definición de  $E$ , y no existe una  $w(Q - E)$  – flecha en  $F(D)$ , con  $w \in Q'$ , debido a que  $Q' \cap \Gamma^-(Q) = \emptyset$ , recordemos que  $Q' \subset A$  y estos son los vértices que están a distancia dos de  $Q$ .

Sabemos además que  $Q'' \cup ((Q - E) \cup Q')$  es un conjunto independiente en  $D$  por definición de  $H$ , recordemos que  $Q'' \subset H$ .

Por lo tanto  $Q^*$  es independiente en  $D$ .

(ii) Cuasiabsorbencia de  $Q^*$  en  $D$ :

Recordemos que  $Q'$  es cuasinúcleo de  $D[A]$  y  $Q''$  lo es en  $D[H]$ , es decir, que son cuasiabsorbentes en las subdigráficas inducidas correspondientes. Por otro lado,  $F$  está a distancia uno de  $((Q - E) \cup Q')$ , por definición de  $F$ . De la misma forma los elementos de  $E$  son absorbidos por  $Q'$ , por construcción de  $E$ . Resta analizar a los elementos de  $D'$ , recordemos que  $D' \subset \Gamma^-(Q) \dots (*)$

Concluiremos (ii) con el análisis de los siguientes dos posibles casos:

- Si  $\forall w \in D' \exists u \in (Q - E)$  tal que  $(w, u) \in F(D)$ , entonces  $D'$  es cuasiabsorbido por  $(Q - E)$ .
- Si  $\exists w \in D'$  tal que  $\forall u \in (Q - E) (w, u) \notin F(D)$ , entonces existe  $y \in E \subset Q$  tal que  $(w, y) \in F(D)$ , esto por (\*). Ahora, como ya dijimos antes, los vértices de  $E$  son absorbidos por  $Q'$ , por lo que  $\exists z \in Q'$  tal que  $(y, z) \in F(D)$ , es decir,  $w \in D'$  es cuasiabsorbido por  $Q' \cup (Q - E)$ .

Por lo tanto  $Q^*$  es cuasiabsorbente en  $D$ .

(iii) Debilidad mínima de  $Q$  en  $D$ :

En este análisis, es muy importante estudiar con detalle a los vértices de  $V(D) - Q^*$ , en particular, los que están a distancia dos de  $Q^*$ . Por el inciso (ii) sabemos que  $E, F, \Gamma^-(Q')$  y  $\Gamma^-(Q'')$  son absorbidos por  $Q^*$ , además  $Q'$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D[A]$ , así que no son los vértices de estos conjuntos sino los que pertenecen a  $A''$  y  $D'$  los vértices que están a distancia dos de  $Q^*$  y pueden causarnos problemas en la debilidad, en resumen:

$$f_D(Q^*) \leq f_{D[A]}(Q') + |A''| + |D'| \quad \dots (6)$$

Analicemos la situación de la siguiente manera:

$$\lfloor p'/3 \rfloor \leq \lfloor p/3 \rfloor - \lfloor t/3 \rfloor \quad \dots (7)$$

donde  $p'$  es el número de tercias intransitivas de  $D[A]$ ,  $t$  es el número de tercias intransitivas que tienen al menos un vértice fuera de  $A$  y  $p$  es el total de tercias intransitivas en  $D$ . La desigualdad no necesariamente es estricta debido a que pueden existir vértices fuera de  $A$  que se encuentran en distintas tercias intransitivas con vértices de  $A$  y pueden formar otras tercias intransitivas fuera de  $A$ . Terminaremos de demostrar el teorema probando la siguiente desigualdad:

$$t \geq 3(|A''| + |D'|) \quad \dots (8)$$

esto significa que  $\forall u \in (A'' \cup D')$  se tiene que  $u$  está contenido en al menos tres tercias intransitivas distintas, además dos tercias intransitivas distintas no pueden contener un mismo vértice de  $(A'' \cup D')$ :

Sea  $u \in (A'' \cup D')$  arbitrario. Observemos los siguientes dos casos:

CASO 1. Si  $u \in A''$ .

Por definición de  $A''$  sabemos que  $u$  está a distancia dos de  $Q''$  en  $D[H]$ , es decir,  $\exists v \in \Gamma^-(Q'')$ .  $\exists w \in Q''$  tales que  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ , pero  $(u, w) \notin F(D)$  porque  $u \in A''$ , esto implica que  $\{u, v, w\}$  es una terna intransitiva en  $D$ , la cual contiene al vértice  $u$ .

$A'' \subset H \subset \Gamma^-(Q)$  implica que  $\exists x \in Q$  tal que  $(u, x) \in F(D)$ , podemos afirmar que  $x \notin (Q - E)$ , de lo contrario  $x \in F$ , lo cual es imposible por definición de los conjuntos  $F$  y  $H$ , pues  $F \cap H = \emptyset$ , por lo tanto  $x \in E \subset Q$  y se sigue de la definición de  $E$  que  $\exists y \in Q'$  tal que  $(x, y) \in F(D)$ , es decir,  $\{u, x, y\}$  es una terna intransitiva que contiene a  $u$ , ya que  $(u, y) \notin F(D)$  por definición de  $H$ . Por otra parte, sabemos por hipótesis que  $u$  es vértice terminal de al menos una terna intransitiva en  $D$ , es decir,  $\exists \{u_1, u_2\} \subset V(D)$  tal que  $\{u_1, u_2, u\}$  es una terna intransitiva en  $D$ .

Por lo tanto  $u$  está contenido en al menos tres ternas intransitivas distintas, a saber,  $\{u, x, y\}$ ,  $\{u, v, w\}$  y  $\{u_1, u_2, u\}$  y son distintas debido a que los vértices mencionados fueron tomados de conjuntos ajenos diferentes, además  $u$  es vértice terminal de una sola terna de las tres que mencionamos. Por lo tanto, todo vértice de  $A''$  pertenece al menos a tres ternas intransitivas distintas en  $D$ .

CASO 2. Si  $u \in D'$ .

Como  $D' \subset \Gamma^-(Q')$ , entonces  $\exists x \in Q$  tal que  $(u, x) \in F(D)$ . Podemos afirmar que  $x \notin (Q - E)$  de lo contrario  $u \in F$  CONTRADICCIÓN, pues por construcción  $F \cap D' = \emptyset$ , luego entonces  $x \in E$  y por definición del mismo conjunto sabemos que  $\exists y \in Q'$  tal que  $(x, y) \in F(D)$  y además  $(u, y) \notin F(D)$ , de lo contrario  $u \in F$  lo cual es imposible como ya argumentamos antes. Por esta razón  $\{u, x, y\}$  es una terna intransitiva que contiene a  $u$ . Por otro lado, por definición de  $D'$ ,  $\exists v \in (Q - E) \cup Q'$  tal que  $(v, u) \in F(D)$ .  $(v, x) \notin F(D)$ , de lo contrario  $v \in F$ , contradiciendo que  $v \in Q' \subset A'$  y  $A' \cap F = \emptyset$ , por definición de estos conjuntos. Por lo tanto  $\{v, u, x\}$  es una terna intransitiva en  $D$  que contiene a  $u$  y es distinta de  $\{u, x, y\}$ , pues aún cuando  $v = y$ , estamos

utilizando distintas trayectorias en cada tercia, por definición de triángulo intransitivo.

Finalmente recordemos que por hipótesis  $u$  debe ser terminal de al menos una tercia intransitiva en  $D$ , por lo que  $\exists \{u_1, u_2\} \subset V(D)$  tal que  $\{u_1, u_2, u\}$  es una tercia intransitiva de  $D$  que contiene a  $u$ , y  $(u_1, u) \notin F(D)$ , como ya dijimos antes, no importa que  $x = u_1$ ,  $y = u_2$  ó  $v = u_2$ , pues obtendríamos un triángulo intransitivo en  $D$  y aún así se cumple la desigualdad (8).

Por lo tanto todo vértice de  $(A'' \cup D')$  está contenido en al menos tres tercias intransitivas de  $D$ , basta con que el orden de los vértices cambie para que las tercias intransitivas sean diferentes, aún más, si contienen vértices distintos entre sí.

Por lo tanto, la desigualdad

$$t \geq 3(|A''| + |D'|) \dots (8)$$

se satisface y junto con las desigualdades

$$f_D(Q^*) \leq f_{D[A]}(Q') + |A''| + |D'| \dots (6)$$

$$\lfloor p/3 \rfloor \leq \lfloor p/3 \rfloor - \lfloor t/3 \rfloor \dots (7)$$

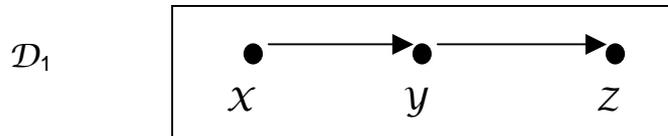
Entonces hemos demostrado que existe  $Q^*$  un cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D$  tal que

$$f_D(Q^*) \leq \lfloor p/3 \rfloor \dots (5)$$

donde  $p$  es el número de tercias intransitivas de  $D$  ●

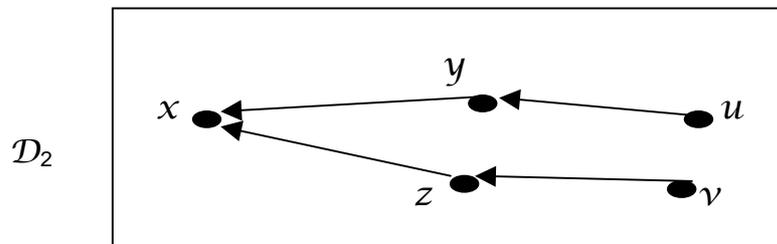
Falta exhibir que  $\forall p \in \mathbb{N}$ , existe una digráfica  $D$  que contiene exactamente  $p$  tercias intransitivas. Esta cuestión la demostraremos por construcción:

Si  $p = 1$ , mostramos a continuación una digráfica que satisface el teorema.



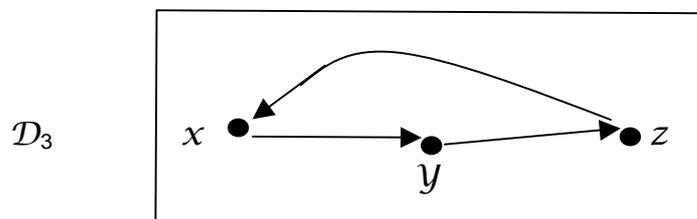
$\{x, y, z\}$  es la única terna intransitiva de  $\mathcal{D}_1$  pues  $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq F(\mathcal{D}_1)$  pero  $(x, z)$  no está contenida en la digráfica y  $\{x, z\}$  es el cuasinúcleo de  $\mathcal{D}_1$  de debilidad  $0 < p = 1$ .

Si  $p = 2$ , entonces una digráfica que satisface el teorema es:



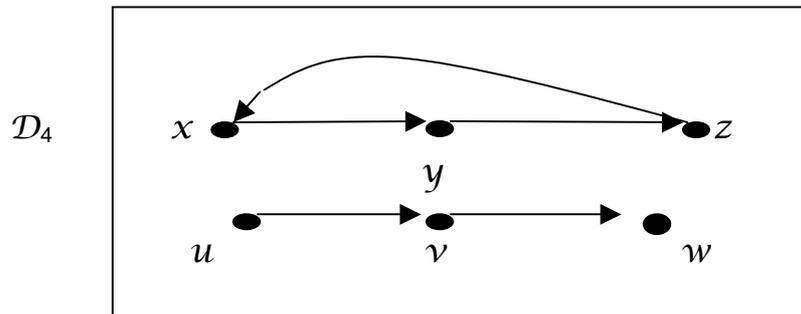
$\{u, y, x\}$  y  $\{v, z, x\}$  son las únicas ternas intransitivas de  $\mathcal{D}_2$  por lo siguiente:  $\{(u, y), (y, x), (v, z), (z, x)\} \subseteq F(\mathcal{D}_2)$  mientras que  $(u, x) \notin F(\mathcal{D}_2)$ ,  $(v, x) \notin F(\mathcal{D}_2)$ .  $\{x, u, v\}$  es el cuasinúcleo de esta digráfica y tiene debilidad nula tal que  $0 < p = 2$ .

Para  $p = 3$  mostramos a continuación  $\mathcal{D}_3$ :



Notemos que  $D_3$  es un triángulo intransitivo  $\{x, y, z\}$ , en este caso  $\{x\}$ ,  $\{y\}$  y  $\{z\}$  son los únicos cuasinúcleos de  $D_3$  y todos tienen debilidad  $1 < p = 3$ .

En el caso en que  $p = 4$  escogimos a  $D_4$ .



Como podemos observar, el triángulo intransitivo  $D_3$  está contenido en  $D_4$  y le agregamos la terna intransitiva  $\{u, v, w\}$  la cual es una copia de  $D_1$ . Los cuasinúcleos de debilidad mínima de  $D_4$  son  $\{u, w, x\}$ ,  $\{u, w, y\}$ ,  $\{u, w, z\}$ , su debilidad es  $1 < 4$ .

Es importante remarcar que la digráfica que contiene exactamente  $p$  ternas intransitivas no es necesariamente única y podría ser desconexa, por ejemplo  $D_p$  puede ser la unión ajena de  $p$  digráficas isomorfas a  $D_1$ , es decir, las componentes conexas de  $D_p$  serían ternas intransitivas de la forma de  $D_1$ , pero los modelos que estamos mostrando tienen un cierto patrón con el fin de formar triángulos intransitivos minimizando el orden de  $D_p$ , por lo que  $D_5$  contendrá a  $D_4$  como subdigráfica inducida y le agregaremos una trayectoria de longitud dos que tenga como vértice terminal a  $z$ .

Si de  $D_6$  se trata, lo definiremos como la unión de dos triángulos intransitivos cuya intersección será vacía.

¿Cómo saber si  $D_p$  está constituida solamente de triángulos intransitivos? La respuesta depende de  $p$  con respecto a los múltiplos de 3. Para entender con precisión la situación expuesta, describamos de forma general cómo está constituida esta familia de digráficas:

$D_p$  contiene exactamente:

- $\lfloor p/3 \rfloor$  triángulos intransitivos.

- $p - 3 \lfloor p/3 \rfloor$  tercias intransitivas ajenas.

donde  $p - 3 \lfloor p/3 \rfloor = 0$  si y sólo si  $p$  es múltiplo de 3 y en este caso  $D_p$  es la unión ajena de  $p/3$  triángulos intransitivos.

Descubramos el cuasinúcleo  $Q$  de debilidad mínima en  $D_p$ :

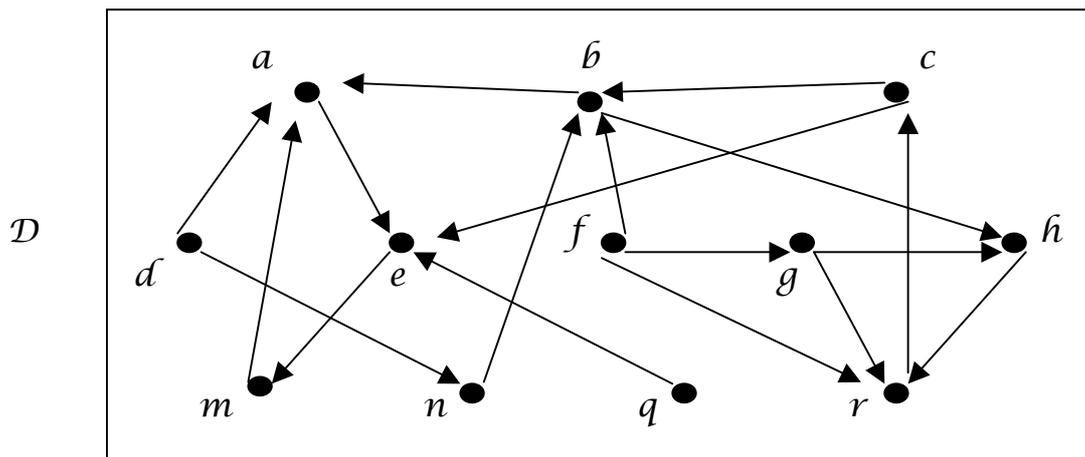
Cada triángulo intransitivo no está conectado con los vértices restantes de la digráfica, por esta razón, debemos incluir en  $Q$  un solo vértice por cada triángulo intransitivo de  $D_p$ , puesto que cada par de vértices es adyacente entre sí, si ambos vértices están incluidos dentro del mismo triángulo intransitivo. Por otro lado, tomamos los vértices de exgrado cero o terminales y los vértices iniciales de cada tercia intransitiva que no está involucrada en ningún triángulo intransitivo (en el caso de  $D_2$  sólo hay un terminal pues comparte dos tercias intransitivas distintas) para asegurar que  $Q$  sea cuasiabsorbente y de debilidad mínima.

Por lo tanto  $Q$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D_p$  tal que

$$f_{D_p}(Q) = \lfloor p/3 \rfloor$$

Queda demostrado el teorema 1.1 ●

Ejemplifiquemos con una digráfica el CASO 2 de la demostración anterior, donde encontraremos un cuasinúcleo de debilidad mínima.



Empezaremos fijando un cuasinúcleo de  $D$ , elijamos  $Q = \{m, n, q, r\}$  por ser un subconjunto independiente y cuasiabsorbente de  $V(D)$ , tal afirmación es cierta: por un lado, no hay flechas entre los vértices de  $Q$  y por el otro, el conjunto  $\Gamma^-(Q) = \{d, e, f, g, h\}$  y  $\{a, b, c\} \subset \Gamma^-(\Gamma^-(Q))$ .

Definamos ahora los conjuntos como sigue:

$A = \{a, b, c\}$  son los vértices a distancia dos de  $Q$  por lo que

$$f_D(Q) = |A| = 3$$

$Q' = \{a, c\}$  es un cuasinúcleo de  $D[A]$

$E = \{m, r\} \subset Q$ , son los vértices de  $Q$  que tienen flecha hacia  $Q'$  en  $D$ .

$F = \{d\} \subset \Gamma^-(Q' \cup Q - E)$

$H = \{f, g, h\}$  es máximo tal que  $H \cup Q' \cup Q - E$  es independiente en  $D$ .

$D' = \{e\} = \Gamma^-(Q) - (F \cup H)$

$Q'' = \{h, f\}$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D[H]$ .

$\Gamma^-(Q'') = \{g\}$

$A'' = \emptyset$  implica que  $Q''$  tiene debilidad cero.

Llegó la hora de construir el cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$ .

$Q^* = \{n, q, a, c, f, h\} = (Q - E) \cup Q' \cup Q''$  cuya debilidad esta determinada por  $|A''| + |D'| = 1$ .

Por otra parte,  $D$  tiene 21 tercias intransitivas, es decir,  $p = 21$ , el teorema se cumple pues

$$f_D(Q^*) = 1 \leq 7 = \lfloor p/3 \rfloor$$

En el teorema 1.2 compararemos la debilidad de dos cuasinúcleos distintos pero no ajenos, como ocurre en  $\{h, f\}$  y  $\{h\}$  del ejemplo que estamos tratando, pretendemos con esto argumentar con mayor detalle el motivo de nuestra elección de  $Q''$ , un cuasinúcleo de debilidad mínima de  $D[H]$ .

TEOREMA 1.2: Si  $Q_1$  y  $Q_2$  son dos cuasinúcleos distintos de una digráfica  $D$  tal que  $Q_1 \subsetneq Q_2$ , entonces:

$$f_D(Q_2) < f_D(Q_1)$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $x \in Q_2$  tal que  $x \notin Q_1$ , es claro, que  $Q_2$  es de mayor cardinalidad que  $Q_1$ . Definamos los conjuntos  $A$  y  $B$  como sigue:

$$A = \{ x \in V(D) - Q_2 / \text{ toda } x \text{ } Q_2\text{-trayectoria dirigida en } D \text{ es de longitud } \geq 2 \}$$

$$B = \{ x \in V(D) - Q_1 / \text{ toda } x \text{ } Q_1\text{-trayectoria dirigida en } D \text{ es de longitud } \geq 2 \}$$

Si  $Q_1 \subsetneq Q_2$ , entonces  $A \subsetneq B$ .

Como  $Q_2$  es independiente en  $D$ , entonces  $x$  no puede ser adyacente a ningún vértice de  $Q_1$ , es decir,  $x$  está a distancia dos de  $Q_1$ , recordemos que  $Q_1$  es cuasinúcleo de  $D$ , en particular es cuasiabsorbente en  $D$ .

Pero  $x \in Q_2$  implica

$$f_D(Q_2) < f_D(Q_1)$$

∴ El teorema 1.2 queda demostrado ●

Volviendo al ejemplo anterior y siguiendo el esquema del teorema 1.2 tenemos  $Q_1 = \{\hat{h}\} \subset \{\hat{h}, f\} = Q_2$  implica que  $A = \emptyset \subset \{f\} = B$ , es decir,

$$f_D(Q_2) = f_D(\{\hat{h}, f\}) = 0 < 1 = f_D(\{\hat{h}\}) = f_D(Q_1)$$

Por lo tanto, la mejor elección de  $Q''$  es  $\{\hat{h}, f\}$  de lo contrario  $Q^*$  no sería de debilidad mínima pues el vértice  $f \in H$  no es cuasiabsorbido por  $(Q - E) \cup Q'$ , por definición de  $H$ . La razón por la cual  $Q''$  debe ser independiente máximo en  $D[H]$  al igual que  $Q^*$  en  $D$ , es aún más contundente con el siguiente teorema.

Aún más, como vimos en el ejemplo anterior al teorema 1.1, si  $\exists v \in V(D)$  tal que  $\nexists vQ$  – flecha en  $D$  y  $\forall u \in Q, (u, v) \notin F(D)$ , entonces  $Q \cup \{v\}$  es un conjunto independiente y un cuasinúcleo de  $D$  puesto que  $Q$  ya era cuasinúcleo de  $D$ , además  $Q \cup \{v\}$  tienen debilidad menor que la de  $Q$ , razón por la cual si el cuasinúcleo no es independiente máximo entonces es posible que esté contenido en un cuasinúcleo de debilidad mínima.

TEOREMA 1.3: Todo cuasinúcleo  $Q$  de debilidad mínima en una digráfica  $D$  es un subconjunto independiente máximo de  $V(D)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que  $\exists S \subset V(D)$  tal que  $S$  es independiente en  $D$  y  $Q \not\subset S$ . Como  $Q$  es cuasinúcleo de  $D$ , en particular es cuasiabsorbente en  $D$ , esto implica que  $S$  es cuasiabsorbente en  $D$  por definición de  $S$ , en consecuencia  $S$  es cuasinúcleo de  $D$  por ser independiente en  $D$ , aplicando el teorema 1.2 obtenemos:

$$f_D(S) < f_D(Q)$$

pero  $Q$  es un cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$ . CONTRADICCIÓN!

Por lo tanto  $Q$  es independiente máximo en  $D$  ●

Para finalizar este capítulo, analizaremos un caso especial de digráficas, en esta ocasión se trata de las digráficas completas en donde cada par de vértices es adyacente por medio de al menos una flecha. Encontremos cuasinúcleos de debilidad mínima, no sin antes establecer que  $\Delta^-(D)$  representa el ingrado máximo de la digráfica  $D$ .

TEOREMA 1.4: Si  $D$  es una digráfica completa, entonces todo vértice de ingrado máximo es cuasinúcleo de debilidad mínima en  $D$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $x \in V(D)$  tal que

$$\delta^-_D(x) = \Delta^-(D)$$

Si  $x$  es absorbente en  $D$ , entonces queda demostrado el teorema, por ser  $\{x\}$  núcleo de  $D$ , es decir, tiene debilidad cero.

Si  $\exists y \in V(D)$  tal que  $(y, x) \notin F(D)$  y  $\nexists yx$  – trayectoria dirigida de longitud dos en  $D$ , entonces  $(x, y) \in F(D)$  por ser  $D$  un digráfica completa. Por otro lado  $\forall z \in V(D)$  con  $(z, x) \in F(D)$ , tenemos que  $(z, y)$ , ya que  $D$  completa y supusimos que  $y$  no es cuasiabsorbido por  $x$ , lo anterior implica que

$$\delta^-_D(x) < \delta^-_D(y)$$

pues cada vecino de  $x$  lo es de  $y$ , aparte  $(x, y) \in F(D)$  contradice las hipótesis sobre  $x$ .

$\therefore \{x\}$  es cuasinúcleo de  $D$ .

Todo cuasinúcleo de una digráfica completa  $D$  es de cardinalidad 1 debido a que en  $D$  todos los vértices son adyacentes entre sí.

Si  $\exists y \in V(D)$ , tal que  $\{y\}$  es otro cuasinúcleo en  $D$ , entonces

$$f_D(\{x\}) = |V(D)| - |1 + \delta^-_D(x)| \leq |V(D)| - |1 + \delta^-_D(y)| = f_D(\{y\})$$

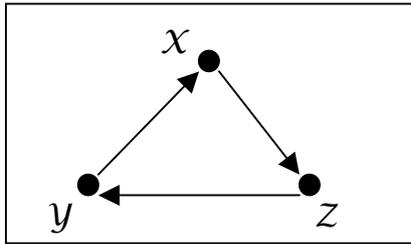
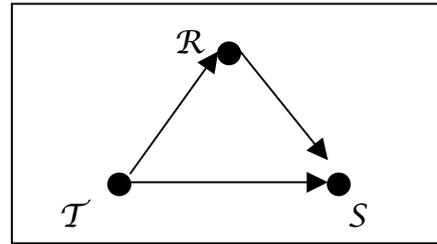
como  $x$  tiene grado interior máximo en  $D$

$$\delta^-_D(y) \leq \delta^-_D(x)$$

Por lo tanto  $\{x\}$  es de debilidad mínima.

En conclusión, Todo vértice de ingrado máximo de una digráfica completa es cuasinúcleo de debilidad mínima ●

Observemos las digráficas completas  $D^*$  y  $D^{**}$  que se muestran a continuación y comparemos:

 $\mathcal{D}^*$  $\mathcal{D}^{**}$ 

En relación a los ingrados,  $\delta^-(\mathcal{D}^*) = 1$  mientras que  $\delta^-(\mathcal{D}^{**}) = 2$ . Si de cuasinúcleos se trata,  $\{x\}$ ,  $\{y\}$ ,  $\{z\}$  son los cuasinúcleos de  $\mathcal{D}^*$  y todos tienen debilidad 1,  $\{S\}$  es el único cuasinúcleo de  $\mathcal{D}^{**}$  y es núcleo pues tiene debilidad cero. En el siguiente capítulo estudiaremos el número de cuasinúcleos de una digráfica y demostraremos que si  $D$  tiene un único cuasinúcleo, entonces es de debilidad cero y por consiguiente es núcleo de  $D$ .

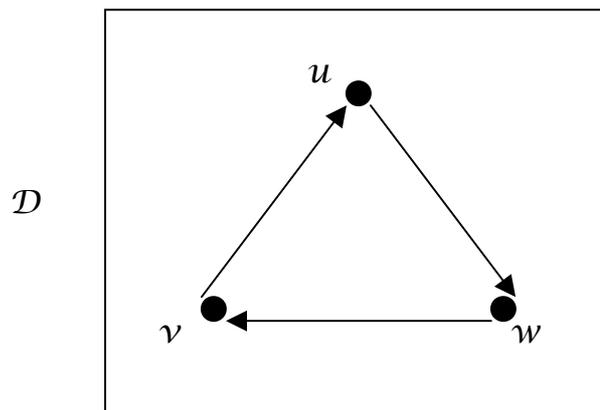
## Capítulo 2

### Número de cuasinúcleos de una digráfica

Chvátal y Lovász demostraron en [5] que toda digráfica contiene un cuasinúcleo. El siguiente paso sería averiguar si existe alguna digráfica con más de un cuasinúcleo, es decir, nos gustaría determinar ¿cuántos cuasinúcleos puede tener una digráfica?. Existen digráficas en las cuales, cada vértice es un cuasinúcleo, por lo que tiene tantos cuasinúcleos distintos como vértices. Es el caso de un subconjunto de las digráficas completas asimétricas.

De aquí en adelante nos referiremos a las digráficas completas asimétricas con la palabra torneo.

Por ejemplo, a continuación podemos observar el ciclo dirigido de longitud tres, el cual es un torneo de orden tres y cada uno de sus vértices es un cuasinúcleo de la digráfica:



El origen de estas investigaciones, fue gracias a Chvátal y Lovász, quienes en [5], introdujeron la definición de rey en un torneo, el cual se refiere a un vértice  $v$  de la digráfica que cuasiabsorbe a los vértices restantes, es decir, cualquier otro vértice de la digráfica es inicial de una trayectoria dirigida de longitud a lo más dos, que termina en  $v$ , y con esto demostraron que todo torneo, con exgrado mínimo distinto de cero, tiene tres reyes distintos, es decir, tiene 3 cuasinúcleos distintos. (teorema 2.1).

La pregunta natural sería: ¿Toda digráfica sin núcleo tendrá tres cuasinúcleos distintos? Fue precisamente en [9] donde H. Jacob y H Meyniel, demostraron que toda digráfica sin núcleo contiene al menos tres cuasinúcleos distintos, además de mostrar una familia de torneos que contienen exactamente tres cuasinúcleos distintos, veremos la demostración de dicho teorema (teorema 2.2) en este capítulo.

Es necesario observar que aunque una digráfica contenga más de un cuasinúcleo distinto, la intersección de esta familia de conjuntos puede ser no vacía. En enero de 2001, el equipo formado por Gregory Gutin, Khee Meng Koh, Eng Guan Tay y Anders Yeo, trabajaron en [8] el concepto de pozo, el cual se refiere a cada vértice que tenga exgrado cero en la digráfica a la que pertenece. Observaron que el conjunto de pozos de una digráfica representa un papel importante al determinar el número de cuasinúcleos distintos, pues todo cuasinúcleo debe contener el conjunto de pozos, de lo contrario no sería cuasiabsorbente. También estudiaron el número de cuasinúcleos en algunas digráficas como son: las que contienen un único cuasinúcleo, las que contienen exactamente dos y consecuentemente las que contienen al menos tres cuasinúcleos distintos.

La condición necesaria y suficiente para que una digráfica tenga un solo cuasinúcleo es que el conjunto de pozos sea absorbente. Lo más importante en este tipo de digráficas es que el cuasinúcleo resulta ser el único núcleo de la misma. Este resultado lo trataremos en el teorema 2.3.

Si de tener dos cuasinúcleos distintos se trata, hay dos tipos de digráficas que presentan esta propiedad, ya sea que la digráfica tenga pozos o no. Si  $D$  no tiene pozos, entonces contiene un 2-ciclo o un 4-ciclo dirigido  $\beta$  cuya digráfica inducida es bipartita y cada conjunto de la bipartición es cuasiabsorbente en  $D$ , además cualquier vértice de  $\beta$  no tiene flechas hacia ningún elemento fuera de este ciclo dirigido, esto asegura que no habrá conjunto de vértices en  $D$  que pueda cuasiabsorber a los vértices de  $\beta$  [teorema 2.4]. En cambio, si  $D$  tiene pozos, entonces  $D[V(D) - (\Gamma^-(S) \cup S)]$  contiene dos cuasinúcleos distintos,  $Q$  y  $R$ , según el teorema 2.4, tales que al unirle el

conjunto de pozos obtenemos dos cuasinúcleos diferentes en la digráfica  $D$ , como muestra el teorema 2.6.

Como consecuencia de los tres teoremas anteriores, Gutin, Meng, Guan y Yeo, demostraron en [8] que las digráficas fuertemente conexas de orden al menos 3, tienen al menos tres cuasinúcleos si no son isomorfas a un ciclo dirigido de longitud 4, como veremos en el teorema 2.5.

Finalmente, dedicamos un espacio en este capítulo para los cuasinúcleos ajenos, cabe señalar que dos cuasinúcleos distintos no necesariamente son ajenos, basta que la digráfica tenga un pozo para descartar la existencia de cuasinúcleos ajenos en ella.

En esta última sección, veremos cómo Gutin, Meng, Guan y Yeo [8] enunciaron una conjetura la cual afirma que toda digráfica sin pozos contiene un par de cuasinúcleos disjuntos. Estos investigadores únicamente mostraron la conjetura para las digráficas núcleo perfectas y digráficas con cuasinúcleos de a lo más dos vértices.

## 2.1. Número de Reyes en Torneos.

Un **Torneo** es una digráfica  $D$  tal que para cualquier par de vértices distintos,  $u$  y  $v$ , contenidos en  $V(D)$  se tiene sólo uno de los siguientes casos:

- $(u, v) \in F(D)$ .
- $(v, u) \in F(D)$ .

En otras palabras, un torneo es una digráfica completa asimétrica.

Denominaremos **rey** a un vértice  $u$  de un torneo  $D$  tal que  $\forall v \in V(D - u)$ , se satisface uno de los dos incisos siguientes:

1.  $(v, u) \in F(D)$ .
2.  $\exists w \in V(D - u)$ , tal que  $\{(v, w), (w, u)\} \subset F(D)$ , con  $w \neq v$ .

En conclusión, un rey es un cuasinúcleo compuesto por un solo vértice.

TEOREMA 2.1 (Jacob, Meyniel [9]): Si  $D$  es un torneo tal que todo vértice tiene exgrado distinto de cero, entonces  $D$  tiene al menos tres reyes.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  un torneo tal que  $\forall u \in V(D)$ ,  $\delta^+(u) > 0$ .

Por el teorema de Chvátal y Lovász,  $D$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ . Como  $D$  es un torneo, cada par de vértices son adyacentes, esto implica que cualquier conjunto independiente máximo en un torneo es de cardinalidad 1, por lo tanto  $Q$  es rey en  $D$ , es decir,  $\exists v \in V(D)$  tal que  $Q = \{v\}$ .

Por hipótesis  $\delta^+(v) > 0$ , esto implica que la subdigráfica inducida  $D_1 = D[V(D) - (\Gamma^-(v) \cup \{v\})]$  es no vacía y se sigue nuevamente del Teorema de Chvátal y Lovász que  $D_1$  contiene un cuasinúcleo  $Q'$ . Ahora bien,  $D_1$  al igual que todas las subdigráficas inducidas de los torneos, es un torneo, de manera que  $Q'$  es rey de  $D_1$ , es decir,  $\exists w \in V(D_1)$  tal que  $\{w\} = Q'$ . Nótese que  $w \neq v$  por construcción de  $D_1$  y  $(v, w) \in F(D)$ , debido a que  $D$  es un torneo, esto

implica que  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $D$ , sin embargo  $(w, v) \notin F(D)$  ya que  $w \in V(D_1) = V(D) - (\Gamma^{-}(v) \cup \{v\})$ .

P. D.  $\{w\} = Q'$  es rey de  $D$ .

Basta demostrar que  $Q'$  es cuasiabsorbente en  $D$ , ya que todo conjunto unitario es independiente.

Sea  $u \in V(D) - Q'$  y nótese que  $V(D) = V(D_1) \cup \Gamma^{-}(v) \cup \{v\}$ .

Si  $u \in V(D_1)$ , entonces hemos terminado puesto que  $Q'$  es cuasinúcleo de  $D_1$ .

Si  $u = v$ , entonces  $u$  es absorbido por  $w \in Q'$ , pues  $(v = u, w) \in F(D)$ , como se demostró líneas arriba.

Si  $u \in \Gamma^{-}(v)$ , como  $(v, w) \in F(D)$ , entonces  $u$  es cuasiabsorbido por  $w \in Q'$ .

Por lo tanto  $\{w\}$  es cuasiabsorbente en  $D$ .

Lo anterior implica que  $Q'$  es rey de  $D$  y distinto de  $Q = \{v\}$ .

Consideremos ahora la subdigráfica inducida  $D_2 = D[(V(D) - (\Gamma^{-}(w) \cup \{w\}))]$ . Se sigue de la hipótesis ( $\delta_D^+(w) > 0$ ) que,  $D_2 \neq \emptyset$  y nuevamente por el teorema 5 [preliminares],  $D_2$  tiene un cuasinúcleo  $Q''$ , el cual es rey en dicha subdigráfica inducida, es decir,  $\exists z \in V(D_2)$  tal que  $Q'' = \{z\}$ , puesto que  $D_2$  es un torneo. Por construcción de  $D_2$ ,  $w \neq z$  y  $(w, z) \in F(D)$ , siguiendo un análisis completamente análogo al que se hizo para  $Q'$ .

P. D.  $\{z\} = Q''$  es rey de  $D$ .

Basta demostrar que  $Q''$  es cuasiabsorbente en  $D$  ya que todo conjunto unitario es independiente.

Sea  $u \in V(D) - Q''$ . Por construcción de  $D_2$  tenemos que  $V(D) = V(D_2) \cup \Gamma^{-}(w) \cup \{w\}$ .

Si  $u \in V(D_2)$ , entonces hemos terminado puesto que  $Q''$  es cuasinúcleo de  $D_2$ . Si  $u = w$ , entonces  $u$  es absorbido por  $z \in Q''$ , pues  $(w = u, z) \in F(D)$ . Si  $u \in \Gamma^{-}(w)$ , como  $(w, z) \in F(D)$ , entonces  $u$  es cuasiabsorbido por  $z \in Q''$ .

Así que  $\{z\}$  es cuasiabsorbente en  $D$ .

Por consiguiente,  $Q''$  es rey de  $D$  y es distinto de  $\{w\}$ .

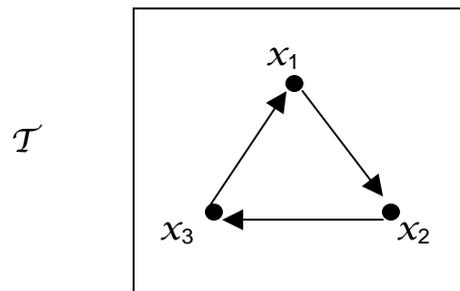
Recordemos que  $v \in \Gamma^-(w)$ , esto implica que  $z \neq v$  por definición de  $Q''$ .

En conclusión obtenemos tres reyes distintos en la digráfica  $D$ , a saber  $\{w\}$ ,  $\{v\}$  y  $\{z\}$ .

$\therefore$  Todo torneo de exgrado mínimo mayor que cero, tiene al menos tres

reyes distintos ●

Veremos a continuación una familia de torneos, los cuales se caracterizan por tener únicamente tres reyes distintos. Esta familia es infinita ya que  $\forall n \geq 3$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) existe un torneo  $D$  de orden  $n$  con exactamente 3 reyes distintos. El torneo más pequeño contenido en la familia referida se puede apreciar en la ilustración de abajo:



$T$  es un ciclo dirigido de longitud 3, por esta razón se le conoce como  $C_3$ .  $\{x_1\}$  es un rey de  $T$  pues  $(x_3, x_1) \in F(T)$  y  $\{(x_2, x_3), (x_3, x_1)\} \subset F(T)$ , de la misma forma  $\{x_3\}$  y  $\{x_2\}$  son reyes de  $T$ , observemos que esta digráfica satisface el teorema 2.1 pues cada vértice tiene un vecino exterior.

Entonces, para  $n = 3$ , existe un torneo  $T$  que contiene 3 reyes distintos  $\{x_1\}$ ,  $\{x_2\}$  y  $\{x_3\}$ .

Veamos porqué para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n \geq 3$ , existe un torneo  $T$  de orden  $n$  y exgrado mínimo no nulo, el cual contiene exactamente 3 reyes distintos. Esta familia de torneos se define recursivamente como sigue:

$$T_3 = C_3$$

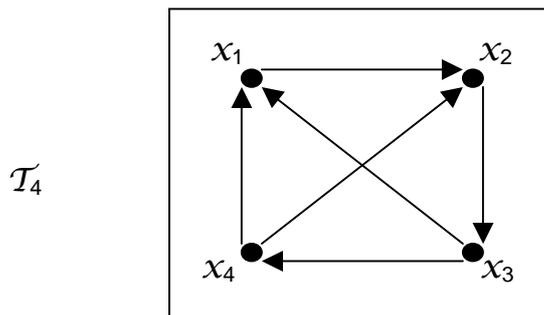
$$T_{n+1} = T_n \cup \{x_{n+1}\}, \text{ donde } x_{n+1} \notin V(T_n), \text{ tal que}$$

$$V(T_{n+1}) = V(T_n) \cup \{x_{n+1}\} \text{ y}$$

$$F(T_{n+1}) = F(T_n) \cup \{(x_{n+1}, y) / y \in V(T_n - x_n)\} \cup \{(x_n, x_{n+1})\} \text{ con } n \geq 3.$$

Observemos que efectivamente  $\delta^+(T_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  ya que  $T_3$ , o bien, el ciclo dirigido de longitud 3 (isomorfo al torneo  $T$  que mostramos en el ejemplo anterior), está contenido en cualquier  $T_n, \forall n \geq 3$ , de tal manera que  $\{x_1, x_2, x_3\}$  forman el ciclo dirigido  $C_3$ , razón por la cual cada uno tiene exgrado mayor que cero, además  $\delta^+(x_i) > 0, \forall i \in \{4, 5, \dots, n\}$  debido a que  $(x_i, x_j) \in F(T) \forall j < i - 1$  con  $i \in \{4, 5, \dots, n\}$ .

Usando a  $T = T_3$  como base, dibujemos la digráfica  $T_4$ :



$T_4$  satisface las hipótesis del teorema 2.1 pues:

$$\forall x \in V(T_4), \delta^+_{T_4}(x) > 0$$

luego entonces tiene al menos tres reyes distintos, a saber:  $\{x_1\}$ ,  $\{x_2\}$  y  $\{x_3\}$ , quienes eran reyes de  $T_3$ , como  $(x_4, x_1) \in F(T_4)$ ,  $\{x_1\}$  es rey de  $T_4$ ,  $(x_4, x_2)$ ,  $(x_2, x_3) \in F(T_4)$  implica que  $\{x_2\}$  y  $\{x_3\}$  también son reyes de  $T_4$ .

Observemos que  $\{x_4\}$  solo cuasiabsorbe a  $x_2$  y  $x_3$  por consiguiente  $T_4$  solo tiene 3 reyes diferentes.

Generalicemos la demostración para  $T_n$  arbitraria:

Como  $\delta^+(T_n) > 0$ , entonces por el teorema 2.1, deducimos que  $T_n$  tiene al menos tres reyes diferentes  $\forall n \geq 3$ .

Demostraremos que  $\{x_1\}$ ,  $\{x_2\}$  y  $\{x_3\}$  son los únicos reyes en cualquier torneo de este tipo.

(a)  $x_1$  es cuasinúcleo de  $T_n$ .

Por construcción de  $T_n$ ,  $(x_i, x_1) \in F(T_n)$ ,  $\forall i \in \{3, 4, \dots, n\}$ . Como  $\{(x_2, x_3), (x_3, x_1)\} \subset F(T)$ , entonces  $x_1$  es cuasiabsorbente en  $T_n$ .

Podemos concluir que  $x_1$  es rey de  $T_n$ .

(b)  $x_2$  es cuasinúcleo de  $T_n$ .

Por construcción de  $T_n$ ,  $(x_i, x_2) \in F(T_n)$ ,  $\forall i \in \{1, 4, 5, \dots, n\}$ . Como  $\{(x_3, x_1), (x_1, x_2)\} \subset F(T)$ , entonces  $x_2$  es cuasiabsorbente en  $T_n$ .

Luego entonces,  $x_2$  es rey de  $T_n$ .

(c)  $x_3$  es cuasinúcleo de  $T_n$ .

Por construcción de  $T_n$ ,  $(x_i, x_3) \in F(T_n) \forall i \in \{2, 5, 6, \dots, n\}$ . Como  $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_4, x_2)\} \subset F(T)$ , entonces  $x_3$  es cuasiabsorbente en  $T_n$ .

Obtenemos entonces que  $x_3$  es rey de  $T_n$ .

$\therefore \{x_1\}$ ,  $\{x_2\}$  y  $\{x_3\}$  son reyes de  $T_n$ .

Sea  $x_i \in V(T_n)$  con  $i \in \{4, 5, \dots, n\}$ . Notemos que  $x_i$  no es cuasinúcleo de  $T_n$ , debido a que  $x_i$  no cuasiabsorbe a  $x_1$ , puesto que  $\Gamma^+(x_1) = \{x_2\}$  y  $\Gamma^+(x_2) = \{x_3\}$ .

Por lo cual  $\{x_1\}$ ,  $\{x_2\}$  y  $\{x_3\}$  son los únicos reyes de  $T_n$ ,  $\forall n \geq 3$ .

$\therefore \forall n \in \mathbf{N}$ , existe un torneo  $T$  de orden  $n$  y exgrado mínimo distinto de cero, el cual contiene exactamente 3 reyes distintos ●

## 2.2. Número de Cuasinúcleos de una Digráfica.

Estudiemos a continuación la generalización del teorema 2.1, realizada por H. Jacob y H. Meyniel en [9].

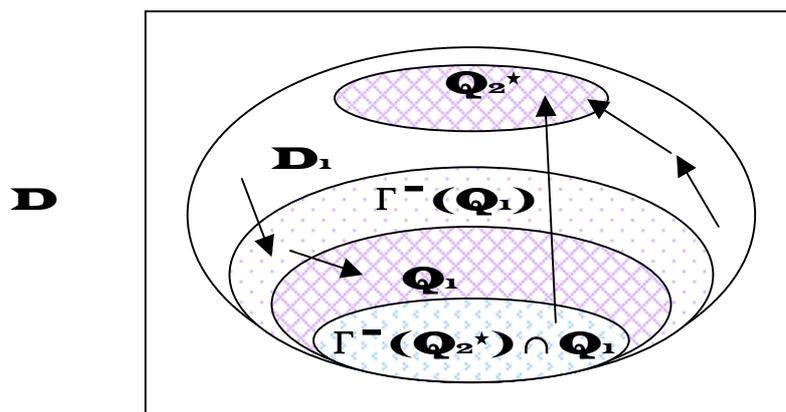
En el siguiente teorema usaremos la notación:  $\mathbf{F}(A, B)$  para referirnos al conjunto de flechas cuyos vértices iniciales pertenecen al conjunto  $A$  y cuyos vértices terminales pertenecen al conjunto  $B$ .

TEOREMA 2.2: Toda digráfica sin núcleo tiene al menos 3 cuasinúcleos distintos.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica que no tiene núcleo,  $Q_1$  un cuasinúcleo de  $D$ , el cual existe como consecuencia del Teorema de Chvátal y Lovász y definamos la subdigráfica inducida  $D_1 = D[V(D) - (Q_1 \cup \Gamma^-(Q_1))]$ , la cual es no vacía de lo contrario  $Q_1$  sería núcleo de  $D$ . Consideremos en  $D_1$  un cuasinúcleo  $Q_2^*$ .

La estructura de la digráfica  $D$  se muestra en la figura siguiente:



**AFIRMACIÓN:**  $Q_2 = Q_2^* \cup (Q_1 - \Gamma^-(Q_2^*))$  es un cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $Q_1$ .

(i) Independencia de  $Q_2$  en  $D$ .

$Q_2^*$  y  $Q_1$  son conjuntos independientes en  $D$  por construcción. Como  $Q_2^* \subseteq V(D_1)$ , entonces no existe una  $Q_2^*Q_1$  – flecha en  $D$ , es decir,  $Q_2^* \cap \Gamma^-(Q_1) = \emptyset$  por definición de  $D_1$ , esto implica que  $\mathbf{F}(Q_2^*, (Q_1 - \Gamma^-(Q_2^*))) = \emptyset$ , además  $\mathbf{F}((Q_1 - \Gamma^-(Q_2^*)), Q_2^*) = \emptyset$ .

$\therefore Q_2$  es independiente en  $D$ .

(ii) Cuasiabsorbencia de  $Q_2$  en  $D$ .

Sea  $u \in V(D) - Q_2$ . Consideremos que  $V(D) = (V(D_1) - Q_2^*) \cup \Gamma^-(Q_1) \cup (Q_1 \cap \Gamma^-(Q_2^*)) \cup Q_2$ .

Si  $u \in (V(D_1) - Q_2^*)$ , entonces hemos terminado pues  $Q_2^* \subset Q_2$  es cuasinúcleo de  $D$ . Si  $u \in \Gamma^-(Q_1)$ , entonces  $\exists v \in Q_1$ , tal que  $(u, v) \in F(D)$ , tenemos dos subcasos:

- Si  $v \in Q_1 - \Gamma^-(Q_2^*)$ , entonces  $u$  es absorbido por  $Q_2$ .
- Si  $v \in Q_1 \cap \Gamma^-(Q_2^*)$ , entonces  $\exists w \in Q_2^*$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ , por consiguiente  $u$  es cuasiabsorbido por  $w \in Q_2^* \subset Q_2$ .

Si  $u \in (Q_1 \cap \Gamma^-(Q_2^*))$ , entonces  $\exists w \in Q_2^*$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ , por consiguiente  $u$  es absorbido por  $w \in Q_2^* \subset Q_2$ .

$\therefore Q_2$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

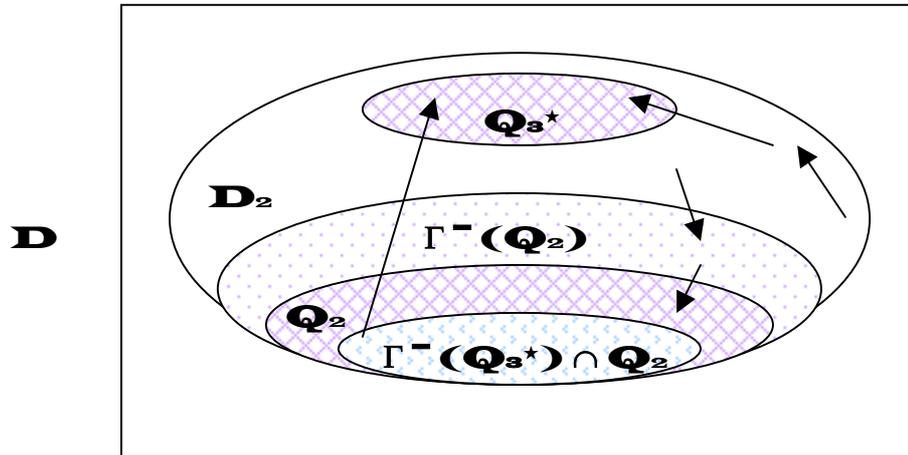
Notemos que  $D_1 \neq \emptyset$ , de lo contrario  $Q_1$  sería núcleo de  $D$ , lo cual contradice las hipótesis, por lo cual  $Q_2^* \neq \emptyset$ .  $Q_1 \cap Q_2^* = \emptyset$ , por definición de  $D_1$ ,

Por lo tanto  $Q_1 \neq Q_2$ .

Sea  $D_2 = D - (Q_2 \cup \Gamma^-(Q_2))$ , sabemos que  $D_2 \neq \emptyset$ , de lo contrario  $Q_2$  sería núcleo de  $D$ , contradiciendo la hipótesis.

Sea  $Q_3^*$  un cuasinúcleo de  $D_2$ .

Veamos la estructura de  $D$  con respecto a  $Q_2$ :



**AFIRMACIÓN:**  $Q_3 = Q_3^* \cup (Q_2 - \Gamma^-(Q_3^*))$  es cuasinúcleo de  $D$  y es distinto de  $Q_1$  y  $Q_2$ .

(i) Independencia de  $Q_3$  en  $D$ .

$Q_3^*$  y  $Q_2$  son conjuntos independientes en  $D$  por construcción. Como  $Q_3^* \subseteq V(D_2)$ , entonces no existe una  $Q_3^*Q_2$  – flecha en  $D$ , es decir,  $Q_3^* \cap \Gamma^-(Q_2) = \emptyset$  por definición de  $D_2$ , esto implica que  $F(Q_3^*, (Q_2 - \Gamma^-(Q_3^*))) = \emptyset$ , además  $F((Q_2 - \Gamma^-(Q_3^*)), Q_3^*) = \emptyset$ .

$\therefore Q_3$  es independiente en  $D$ .

(ii) Cuasiabsorbencia de  $Q_3$  en  $D$ .

Sea  $u \in V(D) - Q_3$ . Consideremos  $V(D) = (V(D_2) - Q_3^*) \cup \Gamma^-(Q_2) \cup (Q_2 \cap \Gamma^-(Q_3^*)) \cup Q_3$ .

Si  $u \in (V(D_2) - Q_3^*)$ , entonces hemos terminado pues  $Q_3^* \subset Q_3$  es cuasinúcleo de  $D$ . Si  $u \in \Gamma^-(Q_2)$ , entonces  $\exists v \in Q_2$ , tal que  $(u, v) \in F(D)$ , tenemos dos subcasos:

- Si  $v \in Q_2 - \Gamma^-(Q_3^*)$ , entonces  $u$  es absorbido por  $Q_3$ .
- Si  $v \in Q_2 \cap \Gamma^-(Q_3^*)$ , entonces  $\exists w \in Q_3^*$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ , por consiguiente  $u$  es cuasiabsorbido por  $w \in Q_3^* \subset Q_3$ .

Si  $u \in (Q_2 \cap \Gamma^-(Q_3^*))$ , entonces  $\exists w \in Q_3^*$  tal que  $(v, w) \in F(D)$ , por consiguiente  $u$  es cuasiabsorbido por  $w \in Q_3^* \subset Q_3$ .

$\therefore Q_3$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

Notemos que  $D_2 \neq \emptyset$  de lo contrario  $Q_2$  es núcleo de  $D$  contradiciendo la hipótesis, por lo cual  $Q_3^* \neq \emptyset$ .  $Q_2 \cap Q_3^* = \emptyset$ , por definición de  $D_2$ .

Por lo tanto  $Q_2 \neq Q_3$ .

Observemos que  $Q_1 \subset Q_2$  o  $Q_1 \cap \Gamma^-(Q_2) \neq \emptyset$ , en cualquiera de los dos casos obtenemos que  $Q_1 \cap V(D_2) = \emptyset$ , por lo tanto  $Q_3 \neq Q_1$ .

$\therefore$  Toda digráfica sin núcleo tiene al menos 3 cuasinúcleos distintos ●

Antes de demostrar el siguiente resultado definamos el concepto de pozo, el cual utilizaremos en los próximos teoremas.

Consideremos una digráfica  $D$  arbitraria.

Sea  $x \in V(D)$ , se dice que  $x$  es un **pozo** de  $D$  si tiene grado exterior nulo en  $D$ , es decir:

$$\delta^+_D(x) = 0$$

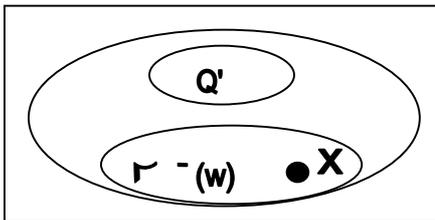
Es claro que todo pozo, en el caso de existir, debe estar contenido en cada núcleo y cuasinúcleo de la digráfica a la cual pertenece, de lo contrario no sería absorbido. En virtud del siguiente lema, podemos concluir que el conjunto de pozos de una digráfica es la intersección de los cuasinúcleos de ésta, razón por la cual la existencia de pozos es la clave para determinar el número de cuasinúcleos distintos en una digráfica, sobre todo si se trata de conjuntos ajenos.

LEMA 2.1: Si  $x$  es un vértice de una digráfica  $D$ , tal que  $x$  no es pozo en  $D$ , entonces  $D$  contiene un cuasinúcleo  $Q$  que no contiene a  $x$ .

## DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica,  $x \in V(D)$  tal que  $\delta^+_D(x) > 0$ , es decir,  $\exists w \neq x \in V(D)$  tal que  $(x, w) \in F(D)$ , observemos los siguientes casos:

Si  $\Gamma^-(w) = V(D) - w$ , entonces  $\{w\}$  es absorbente en  $D$  y por ser independiente es un cuasinúcleo de  $D$  que no contiene a  $x$  ya que  $w \neq x$ , luego entonces se cumple el lema 2.1.



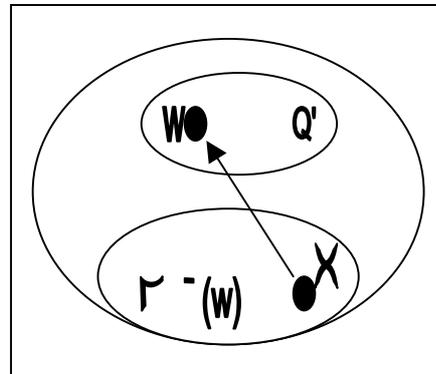
Si  $\Gamma^-(w) \neq V(D) - w$ , entonces consideremos la subdigráfica inducida por  $V(D - \Gamma^-(w))$ , sea  $Q'$  un cuasinúcleo de dicha subdigráfica. El dibujo de la izquierda muestra la estructura de  $D$ .

Tenemos tres posibilidades, las cuales ilustraremos con los dibujos siguientes:

CASO 4.1: Si  $w \in Q'$ , entonces  $(Q' \cup \{w\}) = Q'$  es independiente en  $D$  pues lo es en una subdigráfica inducida de  $D$ .

Sea  $u \in V(D) - Q'$ . Si  $u \in \Gamma^-(w)$ , entonces  $u$  es cuasiabsorbido por  $w \in Q'$ . Si  $u \in V(D) - (\Gamma^-(w) \cup Q')$ , entonces  $u$  es cuasiabsorbido por  $Q'$  por definición de  $Q'$ .

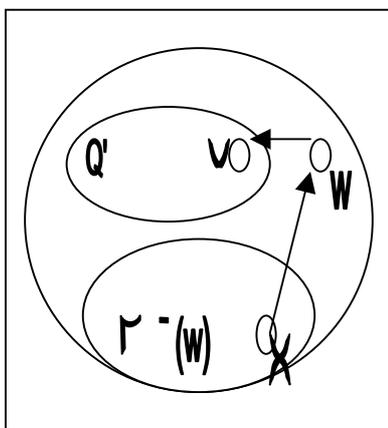
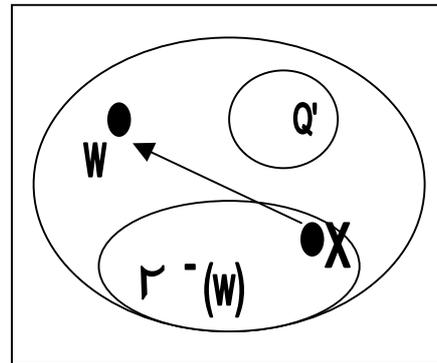
Notemos que  $x \in \Gamma^-(w)$ , por lo tanto  $x \notin Q'$ .



CASO 4.2: Si  $w \notin Q'$  y  $\nexists wQ'$  - flecha en  $D$ , entonces  $Q' \cup \{w\}$  es un conjunto independiente en  $D$  debido a que  $Q' \cap \Gamma^-(w) = \emptyset$  por construcción

de  $Q'$ , por consiguiente,  $Q' \cup \{w\}$  es independiente en  $D$ .

Sea  $u \in V(D) - (Q' \cup \{w\})$ . Si  $u \in V(D) - (Q' \cup \Gamma^-(w))$ , entonces  $u$  es cuasiabsorbido por  $Q'$  por definición de  $Q'$ . Si  $u \in \Gamma^-(w)$ , entonces  $u$  es absorbido por  $w$ . Como  $x \in \Gamma^-(w)$ , entonces  $x \notin Q' \cup \{w\}$ .



CASO 4.3: Si  $Q' \cup w$  no es independiente, entonces  $\exists wQ'$  – flecha en  $D - \Gamma^-(w)$  ya que  $Q' \cap \Gamma^-(w) = \emptyset$ , por definición de  $Q'$ . Esto implica que  $\exists v \in Q'$  tal que  $(w, v) \in F(D)$ .

Sea  $u \in V(D) - Q'$ . Si  $u \in V(D) - (Q' \cup \Gamma^-(w))$ , entonces es cuasiabsorbido por  $Q'$  por definición de  $Q'$ . Si  $u \in \Gamma^-(w)$ , como  $(w, v) \in F(D)$  con  $v \in Q'$ , entonces  $u$  es cuasiabsorbido por  $Q'$ . Como  $x \in \Gamma^-(w)$  y  $Q' \cap \Gamma^-(w) = \emptyset$ , entonces  $x \notin Q'$ .

$\therefore$  Por (4.1), (4.2) y (4.3), si  $x$  no es pozo de  $D$ , entonces  $D$  contiene un cuasinúcleo que no contiene a  $x$  ●

Nos apoyaremos en el lema 2.1 para descubrir el conjunto de digráficas que tienen exactamente un cuasinúcleo, para lograr esto, necesitamos una digráfica con al menos un pozo. Este resultado es un ejemplo donde el cuasinúcleo y el núcleo son el mismo conjunto.

TEOREMA 2.3:  $D$  tiene exactamente un cuasinúcleo  $Q$  si y sólo si  $Q$  es núcleo de  $D$  y es el conjunto de pozos de  $D$ .

## DEMOSTRACIÓN:

Sea  $Q$  el único cuasinúcleo de  $D$ , demostremos primero que si esto ocurre entonces  $D$  contiene pozos y el conjunto de pozos es absorbente en  $D$ , es decir, es un núcleo de la digráfica:

Por el lema anterior, como  $Q$  es el único cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $Q$  es el conjunto de pozos de  $D$ . Recordemos que el conjunto de pozos está contenido en la intersección de los cuasinúcleos de toda digráfica.

Por otro lado, sea  $w \in V(D)$  tal que

$$\delta^+_D(w) > 0$$

ya sabemos que  $w \in V(D - Q)$ . Si  $\nexists wQ$  - flecha en  $D$ , entonces  $(Q \cup w)$  es un subconjunto independiente de  $V(D)$ , recordemos que  $Q$  consiste solo de pozos, es decir,  $\mathbf{r}(Q, V(D - Q)) = \emptyset$

Como  $Q$  es cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $(Q \cup w)$  también lo es, esto contradice la unicidad de  $Q$  como cuasinúcleo en  $D$ . La contradicción surge de suponer que  $w$  esta a distancia dos de  $Q$ . En consecuencia, todo vértice de  $D$  que no es pozo domina al menos a un pozo en  $D$ , esto implica que  $Q$  es absorbente en  $D$ , por lo tanto,  $Q$  es un núcleo de  $D$ .

$\therefore$  Si  $Q$  es el único cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $Q$  es núcleo de  $D$  y sólo contiene pozos . . . (1)

Supongamos ahora que el conjunto de pozos de  $D$  es un núcleo de  $D$ .

P. D. El único cuasinúcleo de  $D$  es el conjunto de pozos:

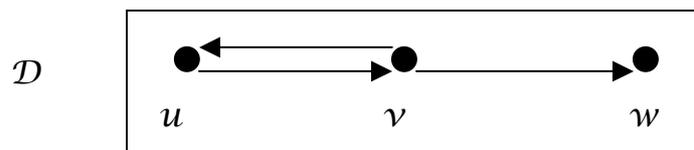
Sea  $S$  el conjunto de pozos de  $D$  tal que  $S$  es un núcleo de  $D$ , por lo que es un cuasinúcleo de  $D$ . Por definición de pozo,  $\forall u \in S, \delta^+_D(u) = 0$ , esto quiere decir que  $u$  no es vértice inicial de ninguna flecha en  $D$ , por lo que  $u$  debe estar en cada cuasinúcleo  $Q$  de  $D$  de lo contrario  $Q$  no sería cuasiabsorbente, por lo tanto, cualquier cuasinúcleo  $Q$  contiene al conjunto  $S$ . Por el lema 1 [preliminares], como  $S$  es núcleo de  $D$ , entonces es un conjunto independiente máximo, en conclusión,  $S$  es el único cuasinúcleo de  $D$  . . . (2)

∴ Por (1) y (2),  $D$  tiene un único cuasinúcleo si y sólo si el conjunto de pozos es núcleo de  $D$  ●

OBSERVACIÓN 1: Dada una digráfica  $D$ , si  $D$  contiene un núcleo  $\mathcal{N}$  el cual consiste sólo de pozos, entonces  $\mathcal{N}$  es el conjunto de pozos de  $D$  y el único núcleo.

En efecto, por el teorema anterior, todo núcleo es cuasinúcleo a la vez, por lo tanto  $\mathcal{N}$  es el único núcleo de  $D$  de lo contrario  $D$  tendría dos cuasinúcleos distintos.

OBSERVACIÓN 2: El hecho de que un núcleo sea único en la digráfica, no implica necesariamente que éste contenga solamente pozos, observemos la siguiente digráfica:



$\{u, w\}$  es el único núcleo de  $D$ , a pesar de ello,  $D$  no satisface el teorema anterior puesto que  $u$  no es pozo ya que  $(u, v) \in F(D)$ , la falla está en que  $u$  no domina ningún pozo de  $D$ . De hecho,  $w$  es el único pozo en  $D$  y es un cuasinúcleo en esta digráfica, pero  $\{u, w\}$  es otro cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $\{w\}$ , es decir,  $D$  contiene dos cuasinúcleos distintos.

A continuación veremos una forma de encontrar subdigráficas con un solo cuasinúcleo, resultado que utilizaremos frecuentemente en las demostraciones de los próximos teoremas. Antes definamos lo siguiente:

La **biorientación** de una digráfica  $D$  resulta de sustituir algunas flechas simétricas de  $D$  por flechas asimétricas (la sustitución es arbitraria, usualmente se usa según convenga). Toda biorientación está contenida en la digráfica original.

LEMA 2.2: Si  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos  $R$  y  $Q$ , entonces  $D$  satisface los siguientes incisos:

(a) Si  $\exists x \in R, z \in Q$  con  $(x, z) \in F(D)$  y  $\Gamma^-(z) \neq V(D) - z$ , entonces  $Q - z$  es el único cuasinúcleo de  $D - \Gamma^-(z)$ .

(b)  $\{Q, R\}$  es el conjunto de cuasinúcleos de cada biorientación de  $D$  donde  $Q$  y  $R$  tienen al menos un vértice que no es pozo.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica con exactamente dos cuasinúcleos diferentes, a saber,  $Q$  y  $R$ .

Demostremos primero el inciso (a) del lema actual.

Tomemos  $x \in R, z \in Q$  tal que  $(x, z) \in F(D)$  y  $\Gamma^-(z) \neq V(D) - z$ .

Observemos que si  $\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k\}$  es la familia de cuasinúcleos de la subdigráfica  $D - \Gamma^-(z)$ , entonces  $\{R_1', R_2', R_3', \dots, R_k'\}$  es la familia de cuasinúcleos de  $D$  siempre y cuando:

- $R_i' = R_i \cup z$ , si  $\nexists zR_i$  - flecha en  $D$ . Por definición de  $D - \Gamma^-(z)$ ,  $\nexists R_i z$  - flecha en  $D$ , por lo que  $(R_i \cup z)$  es un conjunto independiente en  $D$  y es cuasiabsorbente puesto que  $z$  absorbe a  $\Gamma^-(z)$  y  $R_i$  es cuasiabsorbente en  $D - \Gamma^-(z)$ .
- $R_i' = R_i$ , si  $\exists zR_i$  - flecha en  $D$ , es decir,  $z$  es absorbido por  $R_i$  y además  $R_i$  cuasiabsorbe a  $\Gamma^-(z)$  por medio de  $z$ .

Pero  $D$  solo tiene dos cuasinúcleos distintos por hipótesis, por lo que  $i = \{1, 2\}$ . Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que  $Q = R_1'$  y  $R = R_2'$ , es decir,  $R_1 = (Q - z)$  y  $R_2 = (R - z)$  son los únicos conjuntos que pueden ser cuasinúcleos de  $D - \Gamma^-(z)$ , pero  $x \in R$  y  $(x, z) \in F(D)$ , o bien,  $x \in \Gamma^-(z)$  implica que  $(R - z) \not\subseteq D - \Gamma^-(z)$ , como esta digráfica debe tener cuasinúcleo, queda demostrado que  $(Q - z)$  es el único cuasinúcleo de  $D - \Gamma^-(z)$ . . . (\*)

Demostremos ahora el inciso (b). Sea  $D'$  una biorientación de  $D$  donde  $Q$  y  $R$  contienen al menos un vértice que no es pozo, o bien, vértices de grado exterior no nulo. Notemos que los cuasinúcleos de  $D'$  son también cuasinúcleos de  $D$  ya que  $F(D') \subset F(D)$  de tal manera que conjuntos independientes en  $D'$  lo son también en  $D$ . Como  $D$  solo tiene dos cuasinúcleos distintos por hipótesis,

$D'$  no debe tener más de dos cuasinúcleos, observemos que  $Q$  y  $R$  son los únicos candidatos de lo contrario hallaríamos un tercer cuasinúcleo en  $D$  distinto de  $Q$  y  $R$  contradiciendo nuestras hipótesis. Recordemos ahora el lema 4, tanto  $Q$  como  $R$  contienen al menos un vértice que no es pozo, por esta razón, ninguno de los dos puede ser el único cuasinúcleo en  $D'$ . Por lo tanto  $\{Q, R\}$  es el conjunto de cuasinúcleos de  $D'$ . . . (\*\*)

∴ Por (\*) y (\*\*) hemos demostrado el lema 2.2 ●

En el teorema 2.3 trabajaremos con digráficas sin pozos, donde encontraremos cuasinúcleos ajenos de la misma cardinalidad. En un caso particular logramos encontrar dos núcleos ajenos en la digráfica si ésta contiene un 2-ciclo inducido  $\beta$  tal que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  y  $V(D - \beta) \subset \Gamma^-(\beta)$ .

Necesitaremos definir la orientación de una digráfica, OJO!, no la confundamos con la orientación de una grafica.

Sea  $D$  una digráfica cualquiera. Una **orientación** de  $D$  se obtiene de sustituir cada flecha simétrica de  $D$  por una flecha asimétrica (la dirección es arbitraria, usualmente se determina según convenga). Toda orientación está contenida en cada biorientación de la digráfica  $D$ .

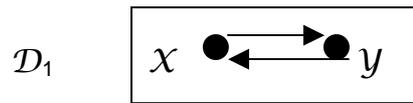
TEOREMA 2.4: Si el exgrado mínimo de una digráfica  $D$  es mayor que cero, o bien, si  $D$  no tiene pozos, entonces  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos si y sólo si  $D$  contiene un 2-ciclo o un 4-ciclo inducido  $\beta$  tal que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ , y todo vértice contenido en  $V(D - \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ .

DEMOSTRACIÓN:

Por el teorema 2.3, si  $D$  no tiene pozos, entonces  $D$  debe tener al menos dos cuasinúcleos distintos. Demostraremos primero un sentido de la demostración, es decir, si  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos, entonces  $D$  contiene un 2-ciclo o un 4-ciclo inducido  $\beta$  tal que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ , y todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ .

Esta demostración la realizaremos por inducción sobre  $|V(D)|$ . Notemos que la digráfica más pequeña en relación al orden que satisface las hipótesis y no contiene pozos es un 2-ciclo por lo que:

$|V(D)| = 2$ , como se muestra en el dibujo:



es la digráfica de menor orden que satisface las hipótesis del teorema además de las conclusiones ya que como afirmamos antes, esta digráfica es un 2-ciclo inducido y ambos vértices tienen exgrado  $1 \neq 0$ .

$\therefore |V(D)| = 2$  satisface el teorema.

**HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:** Supongamos que toda digráfica  $D'$  de orden menor que  $n$ , que no contiene pozos presenta las características descritas en el teorema.

Sea  $D$  una digráfica sin pozos tal que  $|V(D)| = n$ . Sabemos por hipótesis que  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos, sean  $Q_1$  y  $Q_2$  dichos subconjuntos de  $V(D)$ . Lo primero que remarcaremos es que estos cuasinúcleos de  $D$  son ajenos. Recordemos que  $D$  no tiene pozos, esto también se interpreta con la siguiente desigualdad:

$$\delta^+(D) > 0$$

Por consecuencia de lo anterior y el lema 2.1,  $\forall u \in V(D) \exists Q$  un cuasinúcleo de  $D$  tal que  $u \notin Q$ . Por lo cual  $Q = Q_1$  ó  $Q = Q_2$  y por la misma razón  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ , pues si  $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ , entonces  $\exists x \in Q_1 \cap Q_2$ . Como  $x$  no es pozo de  $D$ , entonces  $\exists Q_3$  tal que  $x \notin Q_3$ , esto contradice que  $D$  solo tiene dos cuasinúcleos distintos.

Debido a que la consecuencia del teorema 2.4 incluye dos casos distintos en la estructura de la digráfica, realizaremos la demostración por partes apoyándonos en las siguientes afirmaciones:

**Afirmación A:** Si  $F(Q_i, Q_j) \neq \emptyset$  con  $i \neq j \in \{1, 2\}$ , entonces  $\forall u \in Q_i \subset V(D)$  existe una flecha de  $u$  a  $Q_j$  en  $D$ .

**En efecto:**

Sea  $x \in Q_i$  y  $w \in Q_j$  tal que  $(x, w) \in F(D)$  con  $i \neq j \in \{1, 2\}$ , supongamos que  $\exists u \in Q_i$  tal que  $\nexists u Q_j$  – flecha en  $D$ , en particular  $(u, w) \notin F(D)$  esto

implica que  $\Gamma^{-}(\omega) \neq V(D) - \omega$ , aplicando el lema 2.2(a),  $Q_j - \omega$  es el único cuasinúcleo de  $D - \Gamma^{-}(\omega)$  y por el teorema 2.3 afirmamos que  $Q_j - \omega$  es núcleo de  $D - \Gamma^{-}(\omega)$ , notemos que  $\omega \in V(D) - \Gamma^{-}(\omega)$  pero ningún vértice de  $Q_j - \omega$  lo absorbe debido a que  $\omega \in Q_j$  y este conjunto es independiente en  $D$ , esto es una contradicción, de suponer que  $u$  estaba a distancia dos de  $Q_j$  el cual es un cuasinúcleo de  $D$  por hipótesis.

$\therefore \forall u \in Q_i, \mathbf{F}(u, Q_j) \neq \emptyset$ , con  $\{i, j\} = \{1, 2\}$

**Afirmación B:**  $\mathbf{F}(Q_1, Q_2) \neq \emptyset$  y  $\mathbf{F}(Q_2, Q_1) \neq \emptyset$ .

**En efecto:**

Es claro que  $Q_1 \cup Q_2$  no es independiente de lo contrario sería el tercer cuasinúcleo de  $D$  lo cual contradice nuestras hipótesis, además, son cuasinúcleos ajenos en  $D$ , por consiguiente, debe cumplirse al menos uno de los dos casos, ya sea  $\mathbf{F}(Q_1, Q_2) \neq \emptyset$  ó  $\mathbf{F}(Q_2, Q_1) \neq \emptyset$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{F}(Q_1, Q_2) \neq \emptyset$

Demostremos el otro caso suponiendo lo contrario, es decir, supongamos que  $\nexists Q_2 Q_1$  - flecha en  $D$ .  $Q_1$  es cuasiabsorbente en  $D$ , luego entonces,  $\forall u \in Q_2, \exists z \in V(D - Q_1)$  y  $\exists \omega \in Q_1$  tal que  $\{(u, z), (z, \omega)\} \subset F(D)$ .

Si ocurre lo anterior, demostraremos que  $\exists z \in V(D) - Q_1$  y es único tal que  $\forall u \in Q_2, \{(u, z), (z, \omega)\} \subset F(D)$ .

Si  $\exists x \in Q_2$  tal que  $(x, z) \notin F(D)$ , entonces  $\Gamma^{-}(z) \neq V(D)$ , por el lema 2.2(a) afirmamos que  $Q_1 - z$  es el único cuasinúcleo y núcleo de  $D - \Gamma^{-}(z)$ , por el teorema 2.3. Como  $(x, z) \notin F(D)$ ,  $x \in V(D) - \Gamma^{-}(z)$  y  $\mathbf{F}(Q_2, Q_1) = \emptyset$ , entonces  $\nexists x(Q_1 - z)$  - flecha en  $D$ . CONTRADICCIÓN, ya que  $Q_1 - z$  es núcleo de  $D - \Gamma^{-}(z)$ .

Por lo tanto  $Q_2 \subset \Gamma^{-}(z)$ .

Sea  $D'$  una orientación de  $D$  donde  $(u, z) \in F(D')$ ,  $\forall u \in Q_2$ , es decir,

$$\Gamma^{+}_{D'}(z) \cap Q_2 = \emptyset \dots (*)$$

Si  $\exists (a, \hat{b}) \in (Q_1, Q_2)$ , entonces  $(z, \hat{b}) \notin F(D')$ , o bien,  $\Gamma^{-}(\hat{b}) \neq V(D')$ , pues  $\hat{b} \in Q_2$ , por el lema 2.2(a) y el teorema 2.3,  $Q_2 - \hat{b}$  es el único cuasinúcleo y

núcleo de  $D' - \Gamma^{-1}(\hat{b})$  pero  $z \notin Q_2$  y no es absorbido por  $Q_2 - \hat{b}$  por (\*),  
CONTRADICCIÓN.

Por lo tanto  $F(Q_2, Q_1) \neq \emptyset$

**Afirmación C:** Si  $a \neq \hat{b} \in Q_1$  y  $c \neq \hat{d} \in Q_2$ , entonces sólo una de las flechas:  
 $(a, c)$  y  $(\hat{d}, \hat{b})$ , pertenece a  $F(D)$ .

**En efecto:**

Supongamos que  $\{(a, c), (\hat{d}, \hat{b})\} \in F(D)$ .

CASO C<sub>1</sub>:  $(c, \hat{b}) \notin F(D)$ , esto implica que  $\Gamma^{-1}(\hat{b}) \neq V(D)$ , por el lema 2.2(a) y el teorema 2.3:  $Q_1 - \hat{b}$  es núcleo de  $D - \Gamma^{-1}(\hat{b})$  y consiste solo de pozos, pero  $a \in (Q_1 - \hat{b})$  y  $(a, c) \in F(D)$  por hipótesis, en pocas palabras,  $Q_1 - \hat{b}$  contiene un vértice que no es pozo. CONTRADICCIÓN.

CASO C<sub>2</sub>:  $(c, \hat{b}) \in F(D)$ , sea  $D'$  una orientación de  $D$  que contiene el conjunto de flechas  $\{(a, c), (\hat{d}, \hat{b}), (c, \hat{b})\}$ , por esta razón  $(\hat{b}, c) \notin F(D')$ , es decir,  $\Gamma^{-1}(c) \neq V(D')$ , por lema 2.2(a) y teorema 2.3,  $Q_2 - c$  es el único cuasinúcleo y núcleo de  $D' - \Gamma^{-1}(c)$  el cual contiene únicamente pozos en esta digráfica, pero  $\hat{d} \in (Q_2 - c)$  y  $(\hat{d}, \hat{b}) \in F(D')$  por construcción de  $D'$ , contradiciendo que  $Q_2$  no tiene vértices de exgrado distinto de cero.

Por lo tanto  $|\{(a, c), (\hat{d}, \hat{b})\} \cap F(D)| \leq 1$ .

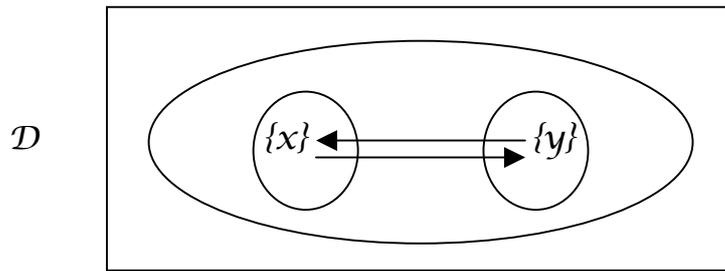
**Afirmación D:**  $D[Q_1 \cup Q_2]$  es un 2-ciclo o contiene un 4-ciclo inducido.

**En efecto:**

Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  los cuasinúcleos de  $D$ .

Supongamos que uno de ellos es de cardinalidad 1, sin pérdida de generalidad diremos que  $|Q_1| = 1$ .

CASO D<sub>1</sub>: Si  $|Q_2| = 1$ , entonces  $D[Q_1 \cup Q_2]$  es un 2-ciclo por afirmación B y la digráfica  $D$  tiene la forma que se muestra en la figura siguiente, donde  $Q_1 = \{x\}$  y  $Q_2 = \{y\}$ :



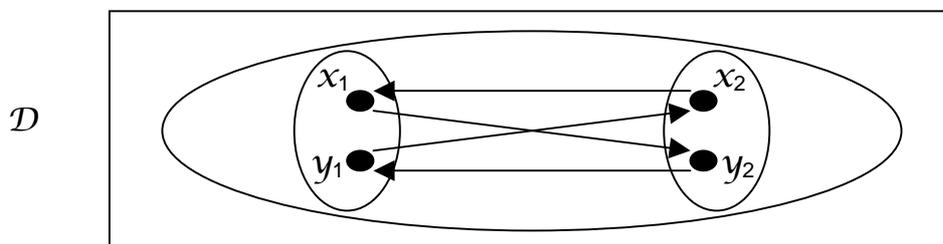
CASO  $D_2$ : Si  $|Q_2| \geq 2$ ,  $Q_1 = \{x\}$ , entonces  $(u, x) \in F(D) \forall u \in Q_2$  por afirmación B y por ser  $x$  el único elemento de  $Q_1$ , en particular  $\exists a \in Q_2$  tal que  $(a, x) \in F(D)$ , por otra parte  $(x, Q_2) \neq \emptyset$  como  $Q_2$  contiene al menos dos vértices distintos  $\exists b \neq a \in Q_2$  tal que  $(x, b) \in F(D)$ .

Consideremos  $D'$  una orientación de  $D$  que contiene a  $(a, x)$  y  $(x, b)$  en  $F(D')$ , por lo que  $(b, x) \notin F(D')$ , es decir,  $\Gamma^-(x) \neq V(D)$ , por lema 2.2(a) y teorema 2.3,  $Q_1 - x$  es núcleo de  $D - \Gamma^-(x)$ , pero  $Q_1 - x = \{x\} - x = \emptyset$  mientras que  $b \in V(D - \Gamma^-(x)) \neq \emptyset$ , CONTRADICCIÓN, pues no existen núcleos vacíos en digráficas no vacías. La contradicción surge de suponer que  $|Q_1| = 1$  y  $|Q_2| \geq 2$  era posible en  $D$ . Por lo tanto  $|Q_1| = 1$  si y sólo si  $|Q_2| = 1$ .

Sean entonces  $Q_1$  y  $Q_2$  de cardinalidad mayor o igual que 2. Por afirmación B,  $\exists x_1 \in Q_1$  y  $\exists x_2 \in Q_2$  tal que  $(x_2, x_1) \in F(D)$ ,  $\exists y_1 \neq x_1 \in Q_1$  tal que  $(y_1, x_2) \in F(D)$  y  $\exists y_2 \neq x_2 \in Q_2$  tal que  $(y_2, y_1)$ , además,  $(x_1, y_2) \in F(D)$ , también por afirmación C, de tal forma que  $(x_1, y_2, y_1, x_2, x_1)$  es un 4-ciclo de  $D$  y es inducido pues  $\{x_i, y_i\} \subset Q_i$ , recordemos que  $Q_i$  es un conjunto independiente en  $D$  con  $i = 1, 2$ . La existencia de las flechas restantes entre  $Q_1$  y  $Q_2$  contradicen la afirmación C.

$\therefore D[Q_1 \cup Q_2]$  es un 2-ciclo o contiene un 4-ciclo inducido.

En este caso la digráfica  $D$  presenta la estructura ilustrada a continuación:



**Afirmación E:** Si  $D[Q_1 \cup Q_2]$  contiene un 4-ciclo inducido  $\beta = (a, \bar{b}, c, \bar{d}, a)$ , donde  $\{a, c\} \subset Q_1$  y  $\{\bar{b}, \bar{d}\} \subset Q_2$  entonces

$$\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$$

**En efecto:**

Supongamos lo contrario y sin pérdida de generalidad, es decir, supongamos que  $\exists x \in V(D - \beta)$  tal que  $(a, x) \in F(D)$ .

CASO E<sub>1</sub>: Si  $(x, c) \notin F(D)$ , entonces  $\Gamma^-(c) \neq V(D)$ , por lema 2.2(a) y teorema 2.3:  $Q_1 - c$  es núcleo de  $D - \Gamma^-(c)$ , pero  $a \in Q_1 - c$  y  $(a, x) \in F(D)$ . CONTRADICCIÓN, pues  $a$  no es pozo.

CASO E<sub>2</sub>: Si  $(x, c) \in F(D)$ , consideremos  $D'$  una orientación de  $D$  que contiene  $\{(a, x), (\bar{d}, a), (x, c)\}$ , es decir,  $(c, x) \notin F(D')$  o bien  $\Gamma^-(x) \neq V(D')$  entonces por lema 2.2(a) y teorema 2.3,  $Q_2 - x$  es núcleo de  $D' - \Gamma^-(x)$  y consiste solo de pozos, pero  $\bar{d} \in Q_2$  y  $(\bar{d}, a) \in F(D)$  contradiciendo el hecho de que  $Q_2$  no tiene vértices de exgrado mayor a cero.

$$\therefore \Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$$

**Afirmación F:** Si  $D[Q_1 \cup Q_2]$  contiene un 4-ciclo inducido  $\beta = (a, \bar{b}, c, \bar{d}, a)$ , donde  $\{a, c\} \subset Q_1$  y  $\{\bar{b}, \bar{d}\} \subset Q_2$ , entonces  $\forall u \in V(D - \beta)$ ,  $u$  es absorbido por al menos dos vértices consecutivos de  $\beta$

**En efecto:**

Sea  $x \in V(D - \beta)$  arbitrario. Si  $x$  no domina a ningún vértice de  $V(\beta)$ , entonces consideremos la subdigráfica inducida por  $V(D - \Gamma^-(x) \cup \{x\})$ , por ser una digráfica de orden menor que  $D$  satisface la hipótesis de inducción, veremos a continuación el por qué, para empezar veremos que  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$  tiene exactamente dos cuasinúcleos disjuntos, a saber,  $Q_1 - \Gamma^-(x)$  y  $Q_2 - \Gamma^-(x)$  pues  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$  no tiene pozos.

Tomemos primero un cuasinúcleo  $Q$  en esta subdigráfica inducida de  $D$ , supongamos que  $Q$  es distinto de  $Q_1 - \Gamma^-(x)$  y de  $Q_2 - \Gamma^-(x)$ .

Si  $x$  domina un vértice de  $Q$ , entonces  $Q$  es cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $Q_1$  y  $Q_2$ . CONTRADICCIÓN, pues  $D$  solo tiene dos cuasinúcleos distintos.

Si  $x$  no domina ningún vértice de  $Q$ , entonces  $Q \cup \{x\}$  es cuasinúcleo de  $D$  distinto de  $Q_1$  y  $Q_2$ . CONTRADICCIÓN, nuevamente por la misma razón.

Por lo tanto  $Q$  debe ser  $Q_1 - \Gamma^-(x)$  ó  $Q_2 - \Gamma^-(x)$  de lo contrario formaríamos un tercer cuasinúcleo de  $D$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $Q = Q_1 - \Gamma^-(x)$  es el único cuasinúcleo de  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$ , por el teorema 2.3,  $Q$  es también núcleo de  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$  y consiste solo de pozos, recuerde la afirmación E, es decir,  $\{a, c\} \subset Q_1 - \Gamma^-(x)$  y  $\{b, d\} \subset Q_2 - \Gamma^-(x)$  CONTRADICCIÓN, pues  $a$  y  $c$  no son pozos en  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$

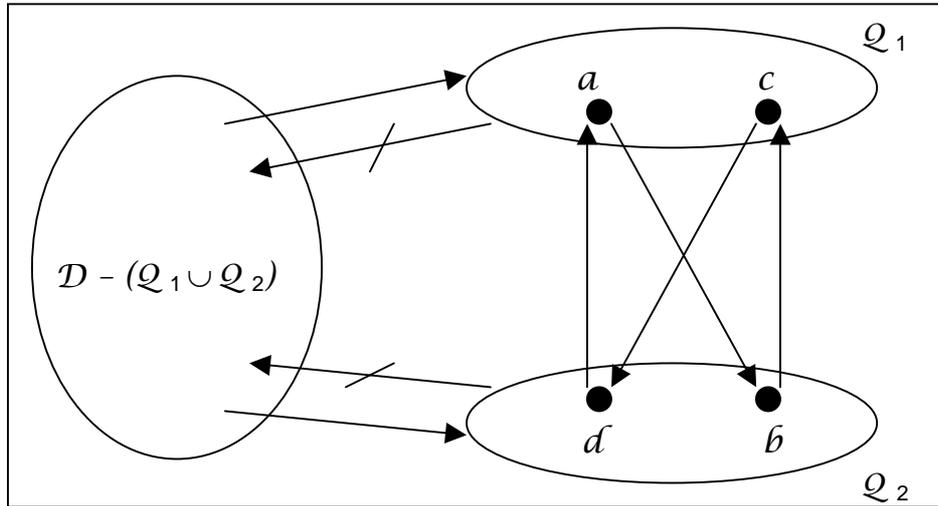
Por consiguiente,  $Q_1 - \Gamma^-(x)$  y  $Q_2 - \Gamma^-(x)$  son dos cuasinúcleos distintos de  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$  y son los únicos de lo contrario  $D$  tendría más de dos cuasinúcleos distintos.

Si  $\exists w \in V(D)$  tal que  $w$  es un pozo de  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$ , como  $D$  no tiene pozos por hipótesis, entonces  $w$  domina al menos un vértice de  $\Gamma^-(x)$  debido a que  $w \notin \Gamma^-(x)$ , por definición de  $w$ . Por otro lado  $w$  debe estar contenido en  $Q_1 - \Gamma^-(x)$  y en  $Q_2 - \Gamma^-(x)$ , esto contradice que  $Q_1$  y  $Q_2$  son disjuntos, por lo tanto  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$  satisface el teorema 2.4, es decir,  $D[Q_1 - \Gamma^-(x) \cup Q_2 - \Gamma^-(x)]$  es un 2-ciclo o contiene un 4-ciclo inducido  $\beta$  tal que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  y  $\forall u \in V(D - \beta \cup \Gamma^-(x) \cup \{x\})$ ,  $u$  domina al menos dos vértices consecutivos de  $\beta$ , todo esto en  $D - \Gamma^-(x) \cup \{x\}$ , si  $\beta = \{a, b, c, d, a\}$ , entonces  $Q_1 - \Gamma^-(x) = \{a, c\}$  y  $Q_2 - \Gamma^-(x) = \{b, d\}$ , esto implica además que  $\{x, a, c\}$  y  $\{b, d, x\}$  son conjuntos independientes y por lo mismo son dos cuasinúcleos de  $D$ , pero ya habíamos argumentado que  $D$  no podía tener cuasinúcleos con vértices en común pues sería una contradicción, recuerde que  $D$  solo tiene 2 cuasinúcleos distintos, en consecuencia,  $D - \Gamma^-(x)$  tiene a lo más dos cuasinúcleos y  $x$  pertenece a  $\Gamma^-(\beta)$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $(x, a) \in F(D)$ , si  $x$  no domina a  $b$  ni a  $d$ , entonces  $\{x, d, b\}$  sería otro cuasinúcleo de  $D$  y tendría intersección no vacía con  $Q_2$  no olvidemos que cualquier par de cuasinúcleos distintos en  $D$  son ajenos.

Por lo tanto  $x$  domina a dos vértices consecutivos de  $V(\beta)$  en  $D$ , como  $x$  es arbitrario, queda demostrada la afirmación E.

En este caso la digráfica  $D$  puede representarse como la ilustración de abajo:



**Afirmación G:** Si  $D[Q_1 \cup Q_2]$  es un 2-ciclo  $\beta$ , entonces  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ , y todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ .

**En efecto:**

Supongamos que  $\exists x \in V(\beta) \exists z \in V(D - \beta)$  tal que  $x$  domina a  $z$  en  $D$ .

Sea  $\beta = (x, y, x)$  tal que  $Q_1 = \{x\}$  y  $Q_2 = \{y\}$ , consideremos a  $D'$  una orientación de  $D$  donde  $\{(y, x), (x, z)\} \subset F(D')$ . Note que  $Q_1$  y  $Q_2$  son los únicos candidatos a ser cuasinúcleos también de  $D'$ , de lo contrario  $D$  tendría más de dos cuasinúcleos, esto ocurre debido a que todo cuasinúcleo de  $D'$  es cuasinúcleo de  $D$ , recuerde que toda orientación de  $D$  resulta de restarle flechas a  $F(D)$ .

Considerando  $D' - (\Gamma^-(x) \cup \{x\})$  y  $Q$  su cuasinúcleo correspondiente, obtenemos lo siguiente:

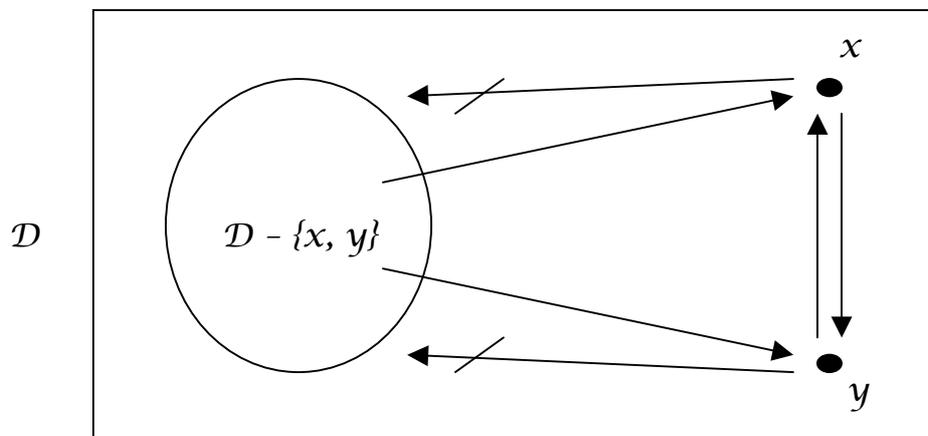
- Si  $x$  domina algún vértice de  $Q$ , entonces  $Q$  es cuasinúcleo de  $D'$ .
- Si  $x$  no domina ningún vértice de  $Q$ , entonces  $Q \cup \{x\}$  es un cuasinúcleo de  $D'$  por ser independiente y contener a  $Q$  que ya era cuasinúcleo de  $D'$ .

Esto implica que  $D'$  tiene tres cuasinúcleos contradiciendo que  $D'$  solo tiene dos cuasinúcleos por hipótesis de inducción, además  $D$  solo tiene dos cuasinúcleos por hipótesis.

Por lo tanto  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ .

Es claro que cada vértice fuera de  $\beta$  debe dominar a ambos vértices de  $\beta$  de lo contrario formaría otro cuasinúcleo en  $D$  contradiciendo nuestras hipótesis.

En seguida ilustramos la estructura de  $D$  con las condiciones descritas en la hoja anterior:



Por afirmaciones D, E, F y G queda demostrada la estructura de  $\beta$ .

Prosigamos a demostrar el sentido contrario del teorema, es decir, supongamos que  $D$  es una digráfica sin pozos la cual contiene un 2-ciclo o un 4-ciclo inducido  $\beta$  donde  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  y todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ , Demostraremos que  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos distintos.

Si  $\beta = (x, y, x)$  es decir que  $\beta$  es un 2-ciclo en  $D$ , entonces por hipótesis todo vértice fuera de  $\beta$  domina a ambos vértices de  $\beta$  por lo tanto  $\{x\}$  y  $\{y\}$  son dos cuasinúcleos disjuntos y núcleos en  $D$ .  $D$  no tiene otro cuasinúcleo pues  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  por hipótesis, es decir,  $\nexists v \in V(D)$  con  $x \neq v \neq y$  tal que  $(x, v)$  ó  $(y, v) \in F(D)$ . Por lo tanto el teorema se cumple en este caso.

Si  $\beta = (a, b, c, d, a)$  es un 4-ciclo inducido de  $D$  tal que todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina al menos dos vértices consecutivos de  $\beta$  y  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ , entonces  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$  son dos cuasinúcleos disjuntos de  $D$  por lo siguiente: Como  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ , entonces  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$  son independientes y todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ , es decir, puesto que  $v$  domina al menos a un vértice de  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$ ,  $\forall v \in V(D - \beta)$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $(v, a) \in F(D)$ , entonces  $(v, b)$  ó  $(v, d)$ , es decir  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$  son cuasiabsorbentes, por lo tanto son cuasinúcleos de  $D$ , en particular son núcleos. Pero  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  implica que ningún vértice fuera de  $\beta$  puede cuasiabsorber a algún vértice de  $\beta$  por lo que todo cuasinúcleo de  $D$  debe contener al menos un vértice de  $\beta$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $a \in Q$ .  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D$  arbitrario, de aquí se deduce que  $b, d$  no están contenidos en  $Q$ , no obstante, ambos vértices deben alcanzar a  $Q$  por medio de una trayectoria de longitud a lo más dos, debido a que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$ ,  $c \in Q$ , y  $b \in Q$  si y sólo si  $d \in Q$  por lo tanto  $Q_1 = \{a, c\}$  y  $Q_2 = \{b, d\}$  son los únicos cuasinúcleos de  $D$ .

$\therefore$  queda demostrado el teorema 2.4 ●

El teorema 2.5 es resultado de los teoremas 2.3 y 2.4, ya que al prohibir las características de las digráficas expuestas en sus hipótesis podemos encontrar otra familia de digráficas que contienen tres cuasinúcleos distintos.

TEOREMA 2.5: Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa de orden al menos 3 ( $D \not\cong C_4$ ), entonces  $D$  tiene al menos tres cuasinúcleos distintos.

DEMOSTRACIÓN:

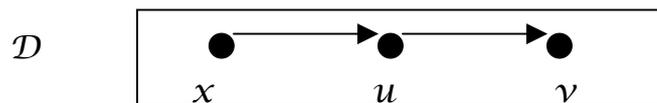
Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa, como  $|V(D)| \geq 3$ , entonces

$$\delta^+(D) > 0$$

es decir,  $D$  no tiene pozos, por consiguiente no cumple las hipótesis del teorema 2.3 y no tiene un único cuasinúcleo. Puesto que  $|V(D)| \geq 3$ ,  $D$  no es un 2-ciclo, aparte,  $D$  es distinto de un 4-ciclo dirigido. Si  $D$  contiene un 4-ciclo inducido  $\beta$  que contiene dos cuasinúcleos disjuntos, por ser  $D$  fuertemente conexa  $\beta$  tiene exvecinos fuera de él, esto contradice las hipótesis del teorema 2.4, entonces  $D$  no tiene únicamente dos cuasinúcleos diferentes.

Por lo tanto  $D$  tiene al menos tres cuasinúcleos distintos ●

OBSERVACIÓN 3: El hecho de que el conjunto de pozos deba estar contenido en cualquier núcleo o cuasinúcleo existente, no implica necesariamente que éste sea el conjunto independiente máximo de cada digráfica. Ilustremos la observación con un ejemplo sencillo:



$\{v\}$  es el conjunto de pozos y también un cuasinúcleo de  $D$ , pero  $\{x, v\}$  es otro cuasinúcleo y además es el único núcleo de  $D$ .

En seguida conoceremos las características de las digráficas con exactamente dos cuasinúcleos distintos a pesar de tener pozos.

TEOREMA 2.6: Sea  $D$  una digráfica cualquiera,  $S$  el conjunto de pozos de  $D$ ,  $H$  la subdigráfica inducida de  $D$ , tal que  $H = D - S - \Gamma^-(S)$ .  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos distintos si y sólo si se cumple alguno de los siguientes casos:

- (a)  $H$  contiene un 2-ciclo  $\beta$  tal que  $|\Gamma^+(\beta) \cap \Gamma^-(S)| \leq 1$ , ningún vértice de  $\beta$  domina algún vértice de  $V(H) - V(\beta)$  y cada vértice fuera de  $V(\beta)$  domina ambos vértices de  $\beta$ .
- (b)  $H$  contiene un 4-ciclo inducido  $\beta$ , en el cual, ningún vértice de  $\beta$  domina un vértice de  $V(D) - V(\beta)$  y cada vértice de  $V(H) - V(\beta)$  domina al menos dos vértices adyacentes de  $\beta$ .
- (c)  $|V(H)| \geq 2$ , tal que  $\exists x \in V(D)$ , un pozo de  $H$  que absorbe a cada vértice de  $H - x$  y  $\exists Q$  un núcleo de  $H - x$ , que contiene solamente pozos de  $H - x$ ; además, no hay flechas de  $Q$  a  $\Gamma^-(S)$ .
- (d)  $|V(H)| = 1$

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica cualquiera, veremos primero que si  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos, entonces  $D$  cumple con alguno de los incisos del teorema.

Por teorema 2.4, si  $D$  no tiene pozos, entonces  $D$  satisface alguno de los incisos (a) ó (b) pues  $S \cup \Gamma^-(S) = \emptyset$  implica que  $H = D$ .

Si  $V(H) = \emptyset$ , entonces  $D$  satisface el teorema 2.3, contradiciendo nuestras hipótesis puesto que  $D$  tiene sólo dos cuasinúcleos distintos. Por lo tanto  $V(H) \neq \emptyset$ .

**AFIRMACIÓN:** Si  $S \neq \emptyset$ , entonces  $H$  tiene a lo más un pozo.

Supongamos lo contrario, es decir, sean  $x \neq t \in V(H)$  tal que

$$\delta^+_H(x) = 0 = \delta^+_H(t)$$

Puesto que  $V(H) \cap S = \emptyset$ ,  $x$  y  $t$  son vecinos interiores de  $\Gamma^-(S)$ , o bien,  $x$  y  $t$  están a distancia dos de  $S$ .

Consideremos las subdigráficas inducidas  $H$ ,  $H - x$ ,  $H - t$ , sean  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  sus cuasinúcleos respectivos. Notemos que  $\nexists HS$  - flecha en  $D$  de lo contrario  $H \cap \Gamma^-(S) \neq \emptyset$  contradiciendo la definición de  $H$ ,  $\nexists SH$  - flecha en  $D$  debido a que  $S$  es el conjunto de vértices de exgrado cero en  $D$ . De aquí deducimos que  $Q_1 \cup S$ ,  $Q_2 \cup S$  y  $Q_3 \cup S$  son cuasinúcleos distintos de  $D$  ya que los  $Q_i$  ya eran cuasinúcleos en subdigráficas inducidas de  $H$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$ , mientras que  $S$  cuasiabsorbe a  $\Gamma^-(S) \cup \{x, t\}$ . Como  $\{x, t\} \subset Q_1$ ,  $x \notin Q_2$  y  $\{t\} \subset Q_3$ , entonces  $D$  tiene 3 cuasinúcleos distintos. CONTRADICCIÓN.

Por lo tanto  $H$  tiene a lo más un pozo.

Supongamos que  $H$  tiene exactamente un pozo, llamémosle  $x$ . Si  $H$  tiene sólo un vértice, entonces el inciso (d) del teorema 2.6 se satisface.

Si  $H$  tiene al menos dos vértices. Consideremos las subdigráficas inducidas  $H$  y  $H - x$  donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son sus cuasinúcleos respectivos. Tengamos presente que  $\exists v \in \Gamma^-(S)$  tal que  $(x, v) \in F(D)$  de lo contrario  $x$  sería pozo de  $D$ , es decir,  $x \in S$ , esto contradice que  $x \in V(H)$  y  $V(H) \cap S = \emptyset$  por definición de  $H$ . Como entre  $H$  y  $S$  no puede haber flechas por construcción

de ambos conjuntos,  $Q_1 \cup S$  y  $Q_2 \cup S$  son dos cuasinúcleos diferentes de  $D$ , pues  $x \in Q_1 - Q_2$  por ser pozo en  $H$ . Siendo así,  $Q_2$  debe ser el único cuasinúcleo de  $H - x$  de lo contrario  $D$  tendría más de dos cuasinúcleos distintos. Por teorema 2.3,  $Q_2$  es núcleo de  $H - x$  y es también el conjunto de pozos de  $H - x$ , pero  $x$  era el único pozo de  $H$ , como consecuencia obtenemos que  $\forall u \in Q_2, (u, x) \in F(D)$  es decir, todo vértice de  $Q_2$  domina a  $x$  por lo cual  $\{x\}$  es cuasinúcleo de  $H$ , pero éste debe ser único en  $H$ , de lo contrario  $D$  tendría más de dos cuasinúcleos distintos, en conclusión,  $\{x\}$  es núcleo de  $H$  y todo vértice de  $H - x$  lo domina, recordemos que  $x$  es el único pozo de  $H$ .

Supongamos que  $\exists w \in Q_2, \exists z \in \Gamma^-(S)$  tal que  $(w, z) \in F(D)$  y consideremos la subdigráfica inducida  $H - x - w$ ,  $Q_3$  un cuasinúcleo de dicha subdigráfica.  $Q_3 \cup S$  es cuasinúcleo de  $D$  pues  $x$  y  $w$  están a distancia dos de  $S$  y  $Q_3$  es un cuasinúcleo de  $H - x - w$ ,  $Q_1 \cup S$  y  $Q_2 \cup S$  son cuasinúcleos distintos de  $D$  tal que  $w \notin Q_1$  pues  $(w, x) \in F(D)$  y  $w \notin Q_3$  por construcción, esto implica que  $D$  contiene tres cuasinúcleos distintos. CONTRADICCIÓN.

Por lo tanto  $D$  cumple el inciso (c).

Veamos lo que sucede si  $H$  no tiene pozos. recordemos que estamos suponiendo que  $D$  tiene dos cuasinúcleos y tiene al menos un pozo. Por el teorema 2.3  $H$  tiene al menos dos cuasinúcleos distintos, ya demostramos que todo cuasinúcleo  $Q$  de  $H$  satisface que  $Q \cup S$  es cuasinúcleo de  $D$ , por esta razón  $H$  satisface el teorema 2.4, llamémosles  $Q_1$  y  $Q_2$  a los únicos cuasinúcleos de  $H$  tal que  $H[Q_1 \cup Q_2]$  es un 2-ciclo o contiene un 4-ciclo inducido  $\beta$  como se describe en el teorema 2.4.

Si  $\beta = (x, w, x)$  y demostramos que a lo más un vértice de  $\beta$  domina un vértice de  $\Gamma^-(S)$ , entonces  $H$  satisface el inciso (a).

Supongamos que tanto  $x$  como  $w$  dominan un vértice de  $\Gamma^-(S)$ , Si  $H$  tiene orden 2, es decir,  $V(H) = \{x, w\}$ , entonces  $S \cup \{x\}$ ,  $S \cup \{w\}$  y  $S$  son tres cuasinúcleos distintos de  $D$ . CONTRADICCIÓN.

Luego entonces  $V(H) \neq \{x, w\}$ , sea  $Q_4$  un cuasinúcleo de  $H - x - w$ , sin embargo  $S \cup \{x\}$ ,  $S \cup \{w\}$  y  $S \cup Q_4$  son tres cuasinúcleos distintos de  $D$ . Esto contradice nuestras hipótesis. De suponer que ambos vértices de  $\beta$  dominaban un vértice de  $\Gamma^-(S)$ .

En este caso  $H$  satisface las condiciones del inciso (a).

Si  $\beta = (a, \bar{b}, c, \bar{d}, a)$ , entonces  $\{a, c\}$  y  $\{\bar{b}, \bar{d}\}$  son los únicos cuasinúcleos de  $H$ , supongamos que  $\exists x \in V(\beta)$  tal que  $x$  domina un vértice de  $\Gamma^-(S)$ . Sin pérdida de generalidad digamos que  $x = a$ , Consideremos la subdigráfica inducida por  $V(H - a)$ ,  $\{\bar{b}, c\} \subset V(H - a)$  pero  $(\bar{b}, c) \in F(H - a)$  implica que  $\bar{b}$  no es pozo en  $H - a$ , por el lema 2.2,  $\exists Q$  otro cuasinúcleo de  $H - a$  que no contiene al vértice  $\bar{b}$ , esto implica que  $Q \cup S$ ,  $\{a, c\} \cup S$  y  $\{\bar{b}, \bar{d}\} \cup S$  son 3 cuasinúcleos distintos en  $D$ , CONTRADICCIÓN. Ésta surge de suponer que ningún vértice de  $\beta$  domina un vértice de  $\Gamma^-(S)$ .

En conclusión  $H$  presenta las características descritas en el inciso (b).

Por lo tanto si  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos diferentes, entonces cumple alguno de los incisos (a), (b), (c) o (d) . . . (\*)

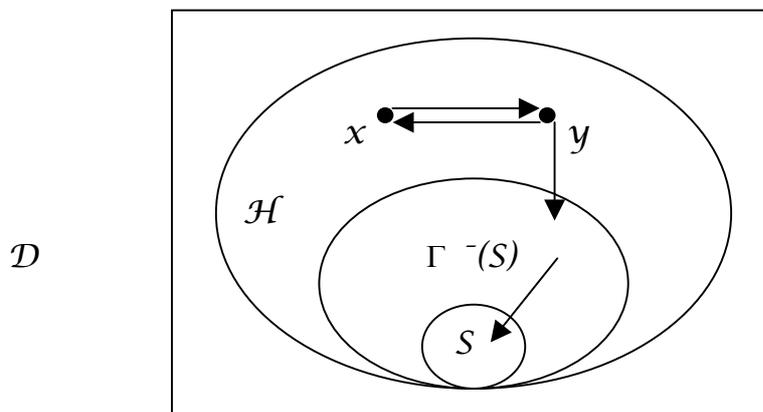
Demostraremos ahora el otro sentido del teorema en cuestión, suponiendo que  $D$  satisface alguno de los incisos mencionados en el teorema y demostraremos que  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos distintos.

Sea  $D, S, \Gamma^-(S)$  y  $H$  según las hipótesis del teorema.

- Supongamos que  $H$  contiene un 2-ciclo  $\beta = (x, w, x)$  tal que a lo más uno de sus vértices tiene flecha hacia  $\Gamma^-(S)$ ,  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  en  $H$  y todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina ambos vértices de  $\beta$ .
  1. Si  $S = \emptyset$ , entonces  $\Gamma^-(S) = \emptyset$  y  $D = H$  por lo tanto  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos distintos  $\{x\}, \{w\}$  por teorema 2.4.
  2. Si  $S \neq \emptyset$ , entonces  $H \neq \emptyset$  satisface el teorema 2.4, es decir,  $\{x\}, \{w\}$  son sus dos únicos cuasinúcleos, por lo que  $\{x\} \cup S$  y  $\{w\} \cup S$  son los únicos cuasinúcleos de  $D$ , puesto que  $S$  esta contenido en todo cuasinúcleo de  $D$  y cualquier cuasinúcleo de  $D$  es ajeno a  $\Gamma^-(S)$ . Por otro lado,  $\Gamma^+(\beta) \cap \Gamma^-(S)$  tiene cardinalidad a lo más 1 por hipótesis, por esta razón, todo cuasinúcleo de  $D$  debe contener al menos un vértice de  $\beta$  para conservar la cuasiabsorbencia.

$\therefore$  Si  $D$  satisface el inciso (a), entonces  $S \cup \{x\}$ ,  $S \cup \{w\}$  son los únicos cuasinúcleos de  $D$  . . . (1)

La digráfica es semejante a la figura siguiente:

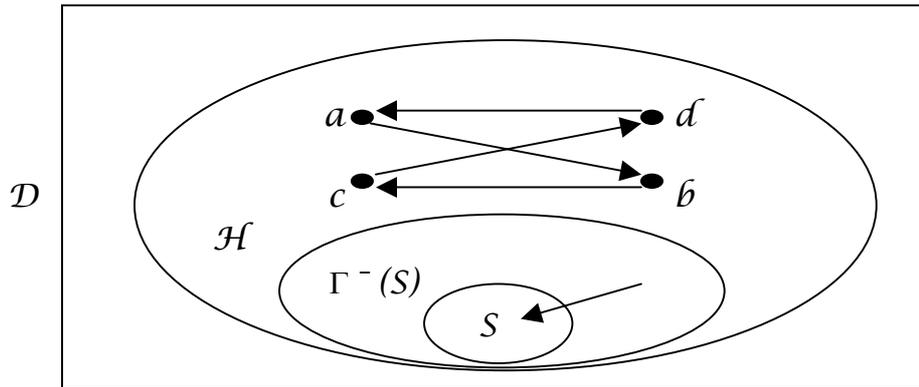


- Si  $H$  contiene un 4-ciclo  $\beta = (a, b, c, d, a)$  tal que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(\beta) = \emptyset$  en  $H$  y todo vértice de  $V(D - \beta)$  domina al menos a dos vértices consecutivos de  $\beta$ .

1. Si  $S = \emptyset$ , entonces  $D = H$  y por lo tanto cumple el teorema 2.4.
2. Si  $S \neq \emptyset$ , entonces  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$  son los únicos cuasinúcleos de  $H$  de tal forma que  $\{a, c\} \cup S$  y  $\{b, d\} \cup S$  son los únicos cuasinúcleos de  $D$  puesto que  $\Gamma^+(\beta) \cap V(D - \beta) = \emptyset$ , es decir, no existe ningún vértice fuera de  $\beta$  que absorba o cuasi absorba a algún vértice de  $\beta$ .

$\therefore$  Si  $D$  satisface el inciso (b), entonces  $D$  tiene solo dos cuasinúcleos distintos . . . (2)

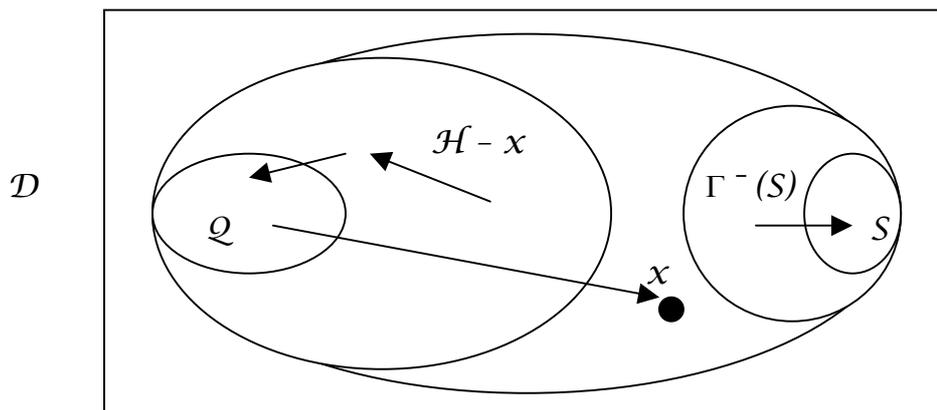
A continuación mostramos la ilustración de  $D$  en este caso:



- Si  $H$  tiene orden mayor o igual a dos,  $\exists x \in V(H)$  un pozo y núcleo de  $H$ , el conjunto de pozos  $Q$  en  $H - x$  es no vacío y también es núcleo de esta subdigráfica inducida, además,  $(Q, \Gamma^{-}(S)) = \emptyset$ . Como  $x \notin \Gamma^{-}(S)$  por construcción,  $x$  es vecino interior de  $\Gamma^{-}(S)$  de lo contrario  $x$  sería pozo de  $D$ , o bien,  $x \in S$ , contradiciendo la definición de  $x$  el cual pertenece a  $V(H) = V(D - S)$ , esto implica que  $\{x\} \cup S$  es un cuasinúcleo de  $D$ . Como  $(S, Q) = \emptyset$  y  $Q$  es el único cuasinúcleo de  $H - x$ , entonces  $Q \cup S$  es cuasinúcleo de  $D$  el cual no contiene a  $x$ .

$\therefore D$  con las características descritas en (c) tiene exactamente dos cuasinúcleos distintos ... (3)

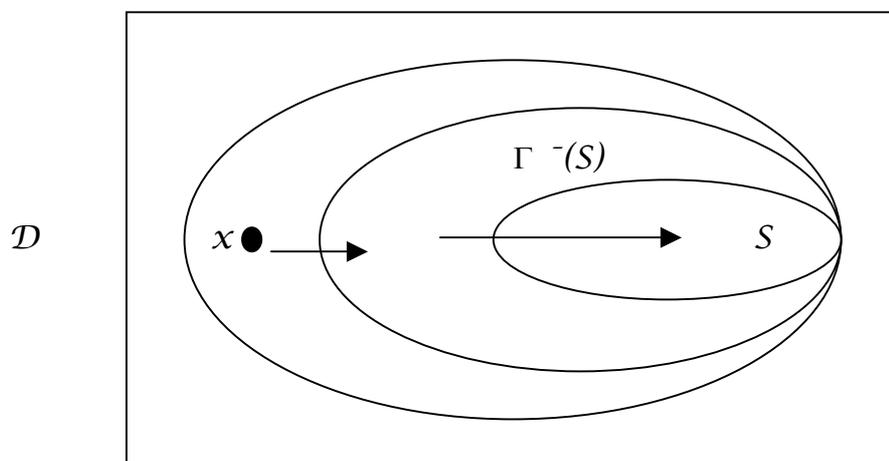
La digráfica  $D$  según este último inciso tiene la forma siguiente:



- Si  $|V(H)| = 1$ , sea  $V(H) = \{x\}$ , entonces  $x$  es pozo de  $H$ , como ya argumentamos en el caso anterior  $\exists u \in \Gamma^{-}(S)$  tal que  $(u, x) \in F(D)$ , es decir,  $x$  está a distancia dos de  $S$ , luego entonces  $S$  es cuasinúcleo de  $D$ , como  $\nexists Sx$  – flecha en  $D$  por definición de  $S$ , como consecuencia,  $S \cup \{x\}$  es un conjunto independiente y cuasinúcleo de  $D$ .

$\therefore$  Si  $|V(H)| = 1$ , entonces  $D$  tiene solo dos cuasinúcleos . . . (4)

Esta digráfica es el caso más sencillo de las hipótesis como se muestra en la figura de abajo:



De (1), (2), (3) y (4) deducimos que  $D$  tiene exactamente dos cuasinúcleos distintos. . . (\*\*)

$\therefore$  Por (\*) y (\*\*), queda demostrado el teorema 2.6 ●

### 2.3. Cuasinúcleos Ajenos.

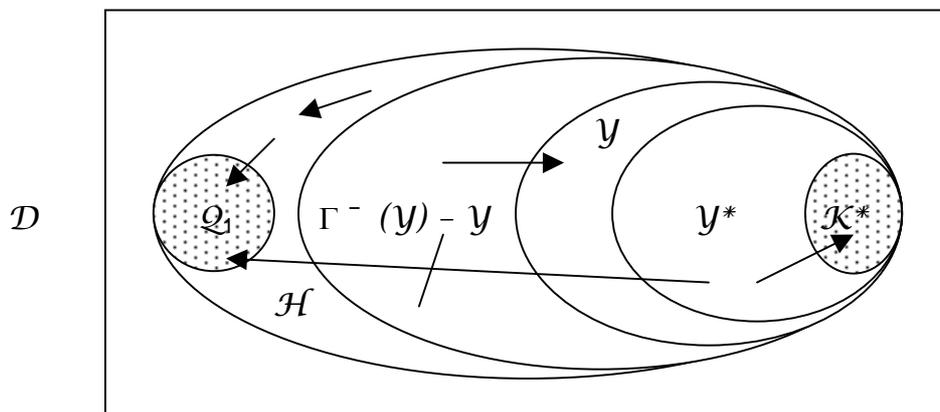
El que dos cuasinúcleos sean distintos no implica que sean ajenos, por ejemplo en el inciso (d) del teorema anterior el conjunto de pozos es un cuasinúcleo de  $D$  y al unirle el único vértice de  $H$  obtenemos otro cuasinúcleo en  $D$ . En el teorema 2.4 encontramos exactamente dos cuasinúcleos ajenos

con la condición de que la digráfica no tuviera pozos. Posteriormente presentaremos otro tipo de digráfica que contiene dos cuasinúcleos ajenos, antes demostraremos un lema que nos será de gran ayuda.

LEMA 2.3: Sea  $D$  una digráfica, si  $\exists Y \subset V(D)$  tal que la subdigráfica inducida  $D[Y]$  es núcleo perfecta, entonces existe un cuasinúcleo  $Q$  en  $D$  donde  $Q \subset V(D) - (\Gamma^{-}(Y) - Y)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la subdigráfica  $H$  inducida por  $V(D) - \Gamma^{-}(Y)$ , sea  $Q_1$  un cuasinúcleo de  $H$ ,  $Y^*$  el conjunto de vértices de  $Y$ , los cuales no dominan ningún vértice de  $Q_1$ , como  $D[Y]$  es núcleo perfecta,  $Y^* \subset Y$ , entonces  $Y^*$  tiene núcleo cuyo nombre será  $K^*$ . La representación de  $D$  se muestra en seguida:



**AFIRMACIÓN:**  $Q = Q_1 \cup K^*$  es cuasinúcleo de  $D$  y  $Q \subset V(D) - (\Gamma^{-}(Y) - Y)$ .

En efecto,  $\nexists Q_1 K^*$  - flecha en  $D$  puesto que  $Q_1 \cap \Gamma^{-}(Y) = \emptyset$  y  $Q_1 \subset H$ , además  $\nexists K^* Q_1$  - flecha en  $D$  por definición de  $K^* \subset Y^*$ , es decir,  $Q$  es independiente. Por otro lado,  $Q_1$  y  $K^*$  son cuasiabsorbentes por construcción en  $H$  y  $Y^*$  respectivamente,  $Y - Y^*$  es absorbido por  $Q_1$  de lo contrario sería un conjunto vacío por definición de  $Y^*$ , por esta razón,  $\forall u \in \Gamma^{-}(Y)$ ,  $u$  está a distancia dos de  $Q_1$  o  $K^*$  a menos que sea absorbido directamente por  $K^*$ .

$\therefore \exists Q$  un cuasinúcleo de  $D$  tal que  $Q \cap V(D) - (\Gamma^-(Y) - Y) = \emptyset$  ●

COROLARIO 2.1: Toda digráfica núcleo perfecta sin pozos tiene dos cuasinúcleos ajenos.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica núcleo perfecta sin pozos,  $K$  un núcleo de  $D$ , consideremos  $Y = \Gamma^+(K) - K$ , es claro que  $K \subset (\Gamma^-(Y) - Y)$ , por el teorema de Chvátal y Lovász existe un cuasinúcleo de  $D$  el cual es ajeno a  $K$ , por el lema anterior.

$\therefore D$  tiene dos cuasinúcleos ajenos ●

El siguiente resultado es útil para encontrar cuasinúcleos ajenos considerando conjuntos de orden a lo más dos.

COROLARIO 2.2: Si  $D$  es una digráfica tal que  $S = \{x, y\}$  es un conjunto de vértices distintos que satisface:  $\Gamma^+(\{x\}) - S \neq \emptyset \neq \Gamma^+(\{y\}) - S$ , entonces existe un cuasinúcleo de  $D$  ajeno a  $S$ .

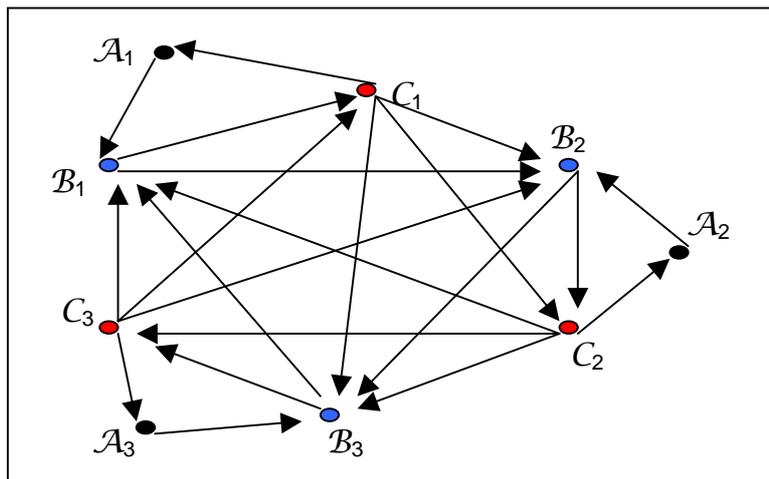
DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica con las características descritas en el corolario 2.2 tal que  $\exists u \in \Gamma^+(\{x\}) - S$ ,  $\exists v \in \Gamma^+(\{y\}) - S$  (no necesariamente  $u \neq v$ ), la subdigráfica de  $D$  inducida por  $\{u, v\}$  es núcleo perfecta, pues toda digráfica de orden menor o igual a dos lo es, además  $S \subset V(D) - (\Gamma^-(\{u, v\}) - \{u, v\})$  por construcción de dicho conjunto.

$\therefore D$  contiene un cuasinúcleo ajeno a  $S$  ●

Observemos que si  $S$  fuera cuasinúcleo de  $D$  según el corolario anterior, entonces  $D$  tendría dos cuasinúcleos ajenos. La razón por la cual se toma un conjunto  $S$  de orden dos es porque al aumentar el número de vértices en  $S$  el corolario no es cierto.

En el siguiente dibujo mostramos un ejemplo de una digráfica donde no hay dos cuasinúcleos ajenos si consideramos a  $S$  de orden 3 aún cuando satisface las hipótesis del corolario tratado.



Notemos que  $Q = \{A_1, A_2, A_3\}$  es un cuasinúcleo de  $D$  de cardinalidad 3, sin embargo, la subdigráfica inducida por  $V(D) - Q$  es una digráfica completa por lo que su conjunto independiente máximo es unitario, pero ninguno de estos conjuntos es cuasiabsorbente en  $D$  ya que absorben a lo más dos vértices de  $Q$ , por ejemplo,  $A_2$  está a distancia 3 de  $B_1$ . Por esta razón,  $D$  no contiene otro cuasinúcleo ajeno de  $Q$ . Aparte  $D$  contiene al menos dos cuasinúcleos ajenos de cardinalidad 2, por ejemplo:  $\{A_1, B_3\} \neq \{B_1, A_2\}$ .

## Capítulo 3

### Cuasinúcleos en la digráfica de líneas

Dada una digráfica  $D$ , es posible definir una nueva digráfica, a la que denotaremos con  $L(D)$ , a partir de  $D$ , tal que el conjunto de flechas de  $D$  es el conjunto de vértices de  $L(D)$ . Dos vértices de  $L(D)$  son adyacentes si sus flechas asociadas en  $D$  forman una trayectoria dirigida de longitud dos. La digráfica  $L(D)$  se conoce como digráfica de líneas de  $D$ .

En el capítulo anterior estudiamos el número de cuasinúcleos de una digráfica, usaremos esos resultados para determinar ahora los cuasinúcleos de la digráfica de líneas a partir de la digráfica original.

Comenzaremos demostrando en el lema 3.1, que el conjunto de flechas cuyos vértices finales forman un conjunto de vértices independiente en la digráfica original, es un conjunto independiente de vértices en la digráfica de líneas.

Matús Harminc [10] se dedicó a estudiar la relación entre el número de núcleos de una digráfica y el número de núcleos de su digráfica de líneas correspondiente. Fue en 1982 cuando demostró que toda digráfica tiene el mismo número de núcleos que su digráfica de líneas, veremos este resultado en el teorema 3.1.

Aunque no toda digráfica contiene un núcleo, el teorema de Matús, abrió paso a nuevos resultados, por ejemplo, el tema de gran interés en nuestro caso es referente a cuasinúcleos. Por el teorema de Chvátal y Lovász [5], tanto la digráfica original como su digráfica de líneas, tienen al menos un cuasinúcleo. La cuestión es descubrir si  $L(D)$  tiene el mismo número de cuasinúcleos que  $D$ . Los matemáticos: Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Rincón Mejía [6], demostraron que  $L(D)$  contiene al menos el número de cuasinúcleos que la digráfica  $D$ , poniendo como condición que esta última tenga ingrado mínimo

distinto de cero, trataremos este resultado en el teorema 3.2 y posteriormente veremos la razón por la cual es imposible prescindir del ingrado mínimo no nulo como hipótesis.

Veremos algunos ejemplos de digráficas que satisfacen la igualdad del teorema 3.2, sin embargo, existen digráficas en las cuales la digráfica de líneas tiene más cuasinúcleos distintos que la digráfica original.

El objetivo principal de este capítulo es buscar las condiciones necesarias para que  $D$  satisfaga la desigualdad estricta del teorema 3.2. Iniciaremos definiendo un cuasinúcleo por flechas en una digráfica  $D$ . Mediante este concepto, veremos que el conjunto de flechas cuyos vértices finales forman un cuasinúcleo en  $D$ , es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ . Luego demostraremos que los vértices finales de un cuasinúcleo por flechas no necesariamente forman un cuasinúcleo de  $D$ . Estos dos resultados nos serán útiles para demostrar que toda digráfica contiene tantos cuasinúcleos por flechas distintos como cuasinúcleos distintos hay en su digráfica de líneas correspondiente, de tal forma que si la digráfica contiene un cuasinúcleo por flechas cuyos vértices finales no son un cuasinúcleo en  $D$ , entonces  $D$  satisface la desigualdad estricta del teorema 3.2. No obstante, queda abierta la pregunta: ¿qué condiciones debe satisfacer la digráfica para que ésta contenga un cuasinúcleo por flechas cuyos vértices finales no forman un cuasinúcleo?

Utilizamos los teoremas vistos en el capítulo 2 para demostrar que  $D$  tiene un único cuasinúcleo si y sólo si  $L(D)$  tiene un único cuasinúcleo pidiendo como condición extra la misma que usaron Galeana, Pastrana y Rincón. Este resultado lo expondremos en el teorema 3.3.

En la última sección del capítulo 3, retomamos el tema de cuasinúcleos ajenos, donde mostraremos en el lema 3.6, que si  $D$  tiene ingrado mínimo al menos 1 y contiene dos cuasinúcleos ajenos, entonces  $L(D)$  contiene dos cuasinúcleos ajenos.

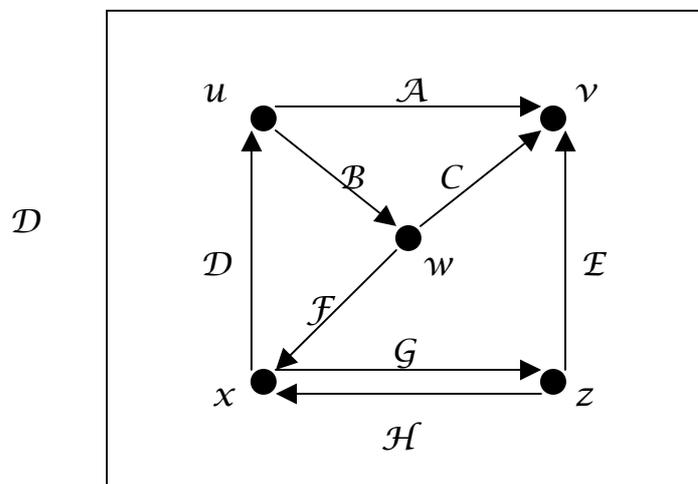
### 3.1. Núcleos en la digráfica de líneas.

Sea  $D$  una digráfica. Definimos su **digráfica de líneas**, denotada con  $L(D)$ , como sigue:

- $V(L(D)) = F(D)$ .
- $F(L(D)) = \{(u, v) \mid u = (u_1, u_2) \in F(D), v = (v_1, v_2) \in F(D) \text{ donde } \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \subseteq V(D) \text{ y } u_2 = v_1\}$ .

Observemos que todo subconjunto de flechas  $\mathcal{A}$  de  $D$ , es un subconjunto de vértices de  $L(D)$ , es decir,  $\mathcal{A}$  puede ser un conjunto de flechas o un conjunto de vértices según la digráfica referida, para que sea explícita la naturaleza de los elementos de  $\mathcal{A}$ , usaremos  $\mathcal{A}_v$  para representar al subconjunto de vértices de  $L(D)$ , el cual es el subconjunto de flechas  $\mathcal{A}$  de  $D$ .

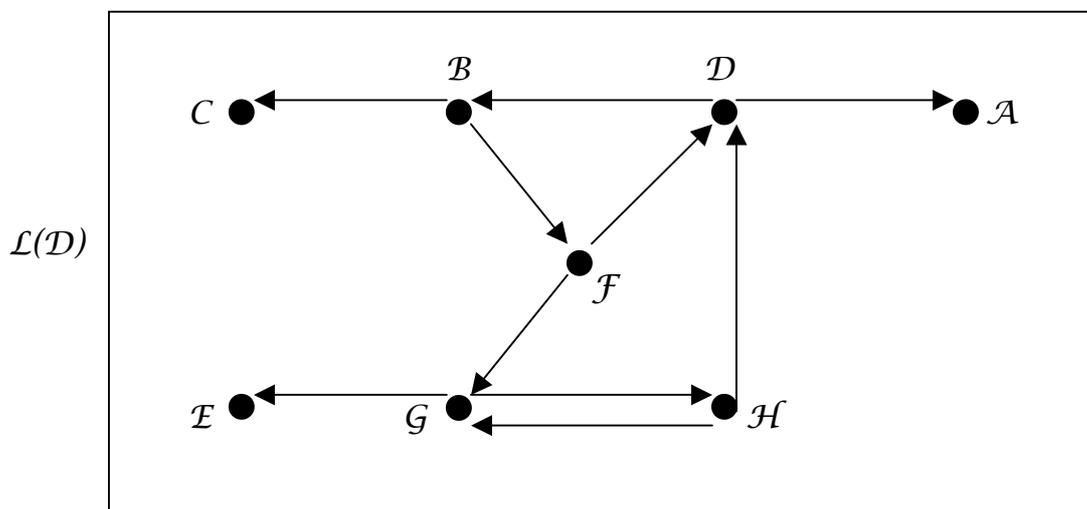
Ejemplo: Observemos la digráfica  $D$  que se muestra en seguida:



Observemos que la flecha  $B = (u, w)$  es adyacente a la flecha  $C = (w, v)$  en la digráfica  $D$ , es decir, forman la trayectoria dirigida de longitud 2  $(u, w, v)$  contenida en  $D$  por lo cual  $(B, C) \in F(L(D))$ , esto ocurre con cada

trayectoria dirigida de longitud dos, contenida en  $D$ . Por otro lado  $\{\nu\}$  es el conjunto de pozos, es decir,  $\nu$  es el único vértice de exgrado cero en  $D$  y debe estar contenido en cualquier cuasinúcleo de  $D$ , de hecho  $\{\nu\}$  es un cuasinúcleo de  $D$  ya que  $\{(u, \nu), (c, \nu), (x, z), (z, \nu)\} \subset F(D)$ , es decir,  $\{\nu\}$  es independiente y cuasiabsorbente en  $D$ .  $\{\nu, x\}$  es cuasinúcleo y núcleo de  $D$ . Como  $x$  es el único vértice que no es adyacente con  $\nu$ ,  $\{x, \nu\}$  es el único conjunto independiente de  $D$  tal que  $\{\nu\} \subset \{x, \nu\}$ . En conclusión  $D$  tiene solo dos cuasinúcleos distintos.

Obtengamos la digráfica de líneas de la digráfica anterior:

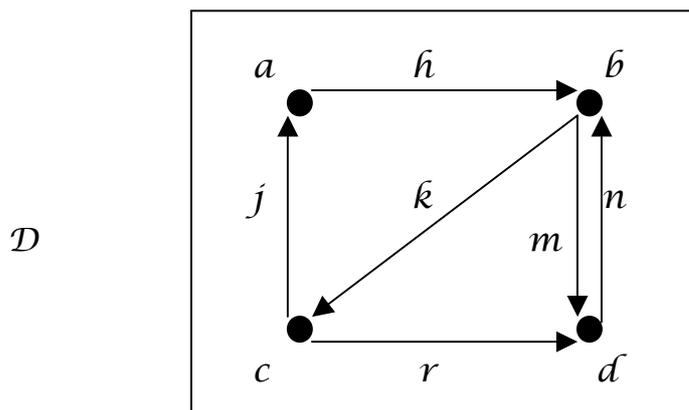


$\{A, C, E\}$  es el conjunto de pozos y un cuasinúcleo de  $\mathcal{L}(D)$ , notemos que  $\nu \in V(D)$  es vértice terminal en cada una de las flechas correspondientes de  $A, B$  y  $C$  en  $D$ . Por otro lado,  $\{A, C, E, F, H\}$  es cuasinúcleo y núcleo de  $\mathcal{L}(D)$  donde  $x \in V(D)$  es vértice terminal de las flechas  $F$  y  $H$  en  $D$ , podríamos pensar que  $\mathcal{L}(D)$  tiene el mismo número de cuasinúcleos que  $D$  pero no es cierto pues  $\{A, C, E, F\}$  y  $\{A, C, E, H\}$  son cuasinúcleos de  $\mathcal{L}(D)$  distintos a los anteriores, en conclusión,  $\mathcal{L}(D)$  tiene 4 cuasinúcleos distintos.

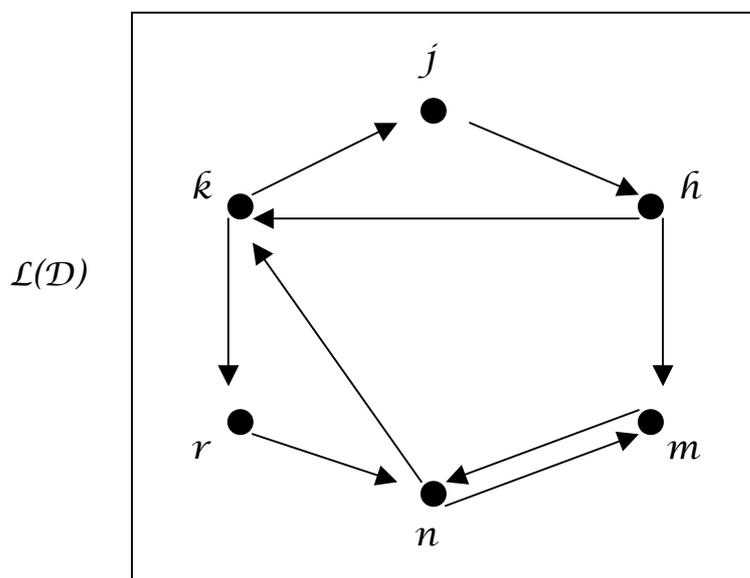
Definamos ahora la función  $f : P(V(D)) \rightarrow P(F(D))$  donde  $P(V(D))$  es el conjunto potencia de  $V(D)$ , es decir, contiene todos los subconjuntos de  $V(D)$  incluyendo este último, de la misma forma  $P(F(D))$  es el conjunto potencia de  $F(D)$ , la regla de correspondencia se describe en seguida:

$$\forall \mathcal{A} \subseteq V(D), f(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in V(L(D)) = F(D) / v \in \mathcal{A}\}$$

A continuación aplicaremos la función  $f$  a un conjunto de vértices para ejemplificar su definición. Veamos la digráfica  $D$  cuya representación se muestra en el dibujo siguiente:



Ahora veamos la digráfica de líneas de  $D$ :



Aplicando la función  $f$  al conjunto  $\{a, d\} \subseteq V(D)$  obtenemos:

$$f(\{a, d\}) = \{j = (c, a), m = (b, d), r = (c, d)\} \subset V(L(D)) = F(D).$$

OBSERVACIÓN: Por definición de  $L(D)$ , toda trayectoria dirigida de longitud 2 en  $D$ , es una trayectoria dirigida de longitud 1 en  $L(D)$ . En conclusión, Toda trayectoria dirigida de longitud  $k$  en  $D$ , es una trayectoria dirigida de longitud  $k - 1$  en  $L(D)$ . Por ejemplo:  $\mathcal{T} = (a, \hat{h}, \hat{b}, \hat{k}, c, r, d)$  es una trayectoria dirigida de longitud 3 en  $D$ , tal que  $\mathcal{T}' = (\hat{h}, \hat{k}, r)$  es una trayectoria dirigida de longitud 2 en  $L(D)$ .

En el siguiente lema, veremos que  $D$  contiene el mismo número de ciclos inducidos que  $L(D)$ . Recordemos que un ciclo inducido es una subdigráfica inducida de  $D$ , isomorfa a un ciclo dirigido.

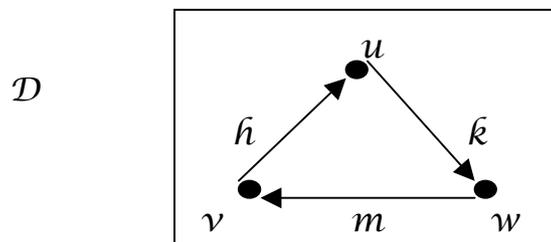
LEMA 3.1: La digráfica de líneas de todo ciclo dirigido de longitud  $n$ , es un ciclo dirigido de longitud  $n$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $C_n = (x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, x_{n-1}, e_n, x_n = x_0)$  un ciclo dirigido de longitud  $n$ . Como  $\{e_i = (x_{i-1}, x_i), e_{i+1} = (x_i, x_{i+1})\} \subseteq F(C_n), \forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , por definición de digráfica de líneas, de tal forma que  $(e_i, e_{i+1}) \in F(L(C_n)) \forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , además  $(e_n, e_1) \in F(L(C_n))$ , pues  $\{en = (x_{n-1}, x_n = x_0), e_1 = (x_0, x_1)\} \subset F(D)$ , por esta razón,  $L(C_n)$  es un camino dirigido cerrado de longitud  $n$ , aún más,  $e_i \neq e_j$  si y sólo si  $i \neq j$  con  $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n - 1\}$  por definición de  $C_n$ . Por lo tanto  $L(C_n)$  es un ciclo dirigido de longitud  $n$ .

$\therefore L(C_n)$  es isomorfo a  $C_n \bullet$

Ejemplifiquemos el lema anterior con  $C_3 = (u, w, v, u)$ , un ciclo dirigido de longitud 3.



Por definición de  $L(C_3)$  tenemos lo siguiente:

Como  $\{\hat{k} = (u, w), m = (w, v)\} \subseteq \mathcal{F}(D)$ , entonces  $(\hat{k}, m) \in F(L(C_3))$ .

Como  $\{m = (w, v), \hat{h} = (v, u)\} \subseteq \mathcal{F}(D)$ , entonces  $(m, \hat{h}) \in F(L(C_3))$ .

Como  $\{\hat{h} = (v, u), \hat{k} = (u, w)\} \subseteq \mathcal{F}(D)$ , entonces  $(\hat{h}, \hat{k}) \in F(L(C_3))$ .

Notemos que  $\{\hat{h}, \hat{k}, m\}_x = F(C_3)$  tal que  $\{(\hat{k}, m), (m, \hat{h}), (\hat{h}, \hat{k})\}$  forman el ciclo dirigido  $C = (\hat{k}, m, \hat{h}, \hat{k})$  isomorfo a  $C_3$ .

Es posible relacionar un conjunto independiente de vértices  $Q$  de  $D$  con un conjunto de flechas  $\mathcal{A}$  en la misma digráfica, debido a que  $\mathcal{A}_x \subseteq V(L(D))$ . Es el caso de  $f(Q) = \{(a, b) \in V(L(D)) = F(D) \mid b \in Q\}$ , el cual es un conjunto de flechas en  $D$ , tal que  $f(Q)_x \subseteq V(L(D))$ .

LEMA 3.2: Si  $Q$  es un conjunto independiente de vértices en la digráfica  $D$ , entonces  $f(Q)_x$  es independiente en  $L(D)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $Q$  un conjunto independiente de vértices en  $D$ . Tomemos dos vértices distintos  $u$  y  $v$  en  $f(Q) = \{(a, b) \in V(L(D)) = F(D) \mid b \in Q\} \subset V(L(D))$ , tal que  $\{u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)\} \subseteq F(D)$  y  $\{u_2, v_2\} \subseteq Q$ , por definición de  $f(Q)$ . Como  $Q$  es independiente en la digráfica  $D$ ,  $(u_2, v_2) \notin F(D)$  y  $(v_2, u_2) \notin F(D)$ .

Demostremos que  $f(Q)_x$  es un conjunto independiente en  $L(D)$ , suponiendo lo contrario:

- Si  $(u, v) \in F(L(D))$ , entonces el vértice final de la flecha  $u = (u_1, u_2)$ , es el vértice inicial de  $v = (v_1, v_2)$  en  $D$ , es decir,  $u_2 = v_1$  y existe la trayectoria dirigida de longitud dos  $\mathcal{T} = (u_1, u_2 = v_1, v_2)$  en  $D$ , esto implica que  $(u_2, v_2) \in F(D)$ , contradiciendo la independencia de  $Q$  en  $D$ .  
 $\therefore (u, v) \notin F(L(D))$ .
- Si  $(v, u) \in F(L(D))$ , entonces el vértice final de la flecha  $v = (v_1, v_2)$ , es el vértice inicial de  $u = (u_1, u_2)$  en  $D$ , es decir,  $v_2 = u_1$  y existe la trayectoria dirigida de longitud dos  $\mathcal{T}' = (v_1, v_2 = u_1, u_2)$  en  $D$ , esto

implica que  $(v_2, u_2) \in F(D)$ , CONTRADICCIÓN, ya que  $Q$  es un conjunto independiente en  $D$ , el cual contiene tanto a  $v_2$  como a  $u_2$  por hipótesis.

$$\therefore (v, u) \notin F(L(D)).$$

Por lo tanto  $f(Q)_L$  es un conjunto independiente en  $L(D)$  ●

A continuación veremos el teorema de Matús Harminc [10] sobre el número de núcleos entre la digráfica  $D$  y su digráfica de líneas  $L(D)$  correspondiente, para esto definiremos dos familias de conjuntos:

Denotaremos con la letra  $\mathcal{K}$ , a la familia de núcleos de la digráfica  $D$ .

$\mathcal{L}$  representará de aquí en adelante, a la familia de núcleos contenidos en la digráfica de líneas de  $D$ , es decir, en  $L(D)$ .

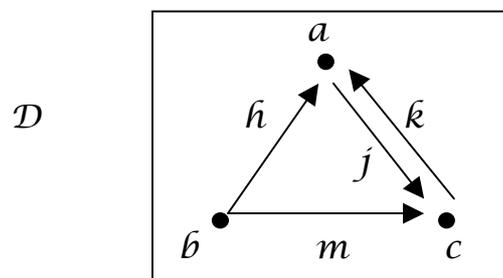
Usaremos también la función  $f$  como en el lema anterior, además de la función  $g$  cuya definición es la siguiente:

$g : V(L(D)) \rightarrow V(D)$  tal que  $\forall \mathcal{A}_L \subseteq V(L(D))$ ,  $g(\mathcal{A}_L) = x(\mathcal{A}_L) \cup \gamma(\mathcal{A}_L)$   
donde

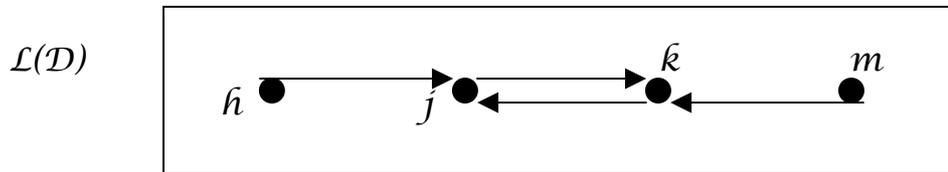
$$x(\mathcal{A}_L) = \{v \in V(D) / \exists \hat{h} = (a, v) \in \mathcal{A} \text{ con } a \in V(D)\}.$$

$$\gamma(\mathcal{A}_L) = \{v \in V(D) / \delta^-_D(v) = 0 \text{ y } \forall u \in x(\mathcal{A}_L), (v, u) \notin F(D)\}$$

Veamos un ejemplo: Sea  $D$  la digráfica representada en el dibujo de abajo:



La digráfica de líneas de  $D$ , se muestra a continuación:



Aplicando la función  $\varrho$  al conjunto  $\{\hat{h}, m\} \subset V(L(D))$  obtenemos:

$$\varrho(\{\hat{h}, m\}) = \times(\{\hat{h}, m\}) \cup \gamma(\{\hat{h}, m\}) = \{a, c\}$$

donde  $\times(\{\hat{h}, m\}) = \{a, c\}$  y  $\gamma(\{\hat{h}, m\}) = \emptyset$ .

TEOREMA 3.1 (Matús Harminc [10]): Toda digráfica satisface  $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$ .

DEMOSTRACIÓN:

Demostraremos primero que  $|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{L}|$ , para cualquier digráfica  $D$ .

Sea  $D$  una digráfica cualquiera,  $\mathcal{N} \subseteq V(D)$  un núcleo de  $D$ .

P. D.  $f(\mathcal{N})_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ :

(i) Independencia de  $f(\mathcal{N})_{\mathcal{L}}$  en  $L(D)$ .

Por el lema 3.2,  $f(\mathcal{N})_{\mathcal{L}}$  es independiente en  $L(D)$  pues  $\mathcal{N}$  lo es en la digráfica original.

(ii) Absorbencia de  $f(\mathcal{N})_{\mathcal{L}}$  en  $L(D)$ .

Sea  $\hat{h} = (a, b) \in V(L(D)) - f(\mathcal{N})_{\mathcal{L}}$  arbitrario. Por definición de  $f(\mathcal{N})_{\mathcal{L}}$ ,  $b \notin \mathcal{N}$ , pero  $\mathcal{N}$  es núcleo de la digráfica  $D$ , por lo cual  $\exists \hat{k} = (b, c) \in$

$F(D)$ , con  $c \in \mathcal{N}$ , esto implica que  $(\hat{h}, \hat{k}) \in F(L(D))$  y  $\hat{k} \in f(\mathcal{N})_c$ , es decir,  $f(\mathcal{N})_c$  es absorbente en  $L(D)$ .

Por (i) y (ii),  $f(\mathcal{N})_c$  es núcleo de  $L(D)$ , es decir,  $f(\mathcal{N})_c \in \mathcal{L}$ .

P. D.  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  es inyectiva. Donde  $f$  es una restricción de la función  $f$ :

Sean  $\mathcal{N}, \mathcal{N}^*$  dos núcleos distintos de  $\mathcal{K}$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathcal{N} - \mathcal{N}^* \neq \emptyset$ , sea  $v \in \mathcal{N} - \mathcal{N}^*$  arbitrario. Como  $\mathcal{N}^*$  es un núcleo de  $D$ ,  $\exists u \in \mathcal{N}^*$  tal que  $\hat{h} = (v, u) \in F(D)$  y  $\hat{h} \in f(\mathcal{N}^*)$ ,  $\mathcal{N}$  es un conjunto independiente en  $D$ , esto implica que  $u \notin \mathcal{N}$  y  $\hat{h} \notin f(\mathcal{N})$ , dicho de otra forma,  $\hat{h} \in f(\mathcal{N}^*) - f(\mathcal{N})$ , o bien,  $f(\mathcal{N}) \neq f(\mathcal{N}^*)$ , en conclusión,  $f$  es una función inyectiva.

Por lo tanto,  $|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{L}| \dots (*)$

Probemos ahora que toda digráfica satisface  $|\mathcal{K}| \geq |\mathcal{L}|$ :

Sea  $D$  una digráfica arbitraria y  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ .

P. D.  $g(\mathcal{N}) = \chi(\mathcal{N}) \cup \gamma(\mathcal{N}) \in \mathcal{K}$ :

(i) Independencia de  $g(\mathcal{N})$  en  $D$ :

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos de  $g(\mathcal{N})$ . Tenemos tres casos:

- Si  $\{u, v\} \subseteq \chi(\mathcal{N})$ , entonces  $\exists \hat{h} = (a, u) \in F(D)$ , con  $a \in V(D)$  y  $\exists \hat{k} = (b, v) \in F(D)$ , con  $b \in V(D)$  y  $\{\hat{h}, \hat{k}\} \subset \mathcal{N}$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $\exists t = (v, u) \in F(D)$  con  $t \in V(L(D))$ . Por definición de  $L(D)$ ,  $(\hat{k}, t) \in F(L(D))$ .

(a) Si  $t = \hat{h}$ , entonces  $(\hat{k}, \hat{h}) \in F(L(D))$ . Hemos llegado a una CONTRADICCIÓN, pues  $\{\hat{h}, \hat{k}\} \subset \mathcal{N}$ .

(b) Si  $t \neq \hat{h}$ , como  $\mathcal{N}$  es independiente en  $L(D)$ ,  $t \notin \mathcal{N}$ , pero  $\mathcal{N}$  es un conjunto absorbente en  $L(D)$ , por consiguiente  $\exists m \in \mathcal{N}$  tal que  $(t, m) \in F(L(D))$ , por esta razón, el vértice inicial de la flecha  $m$  en  $D$  es  $u$ , es decir,  $m = (u, c)$ . Observemos que  $\hat{h} = (a, u)$  y  $m$

$= (u, c)$ , forman una trayectoria dirigida de longitud dos en  $D$ , por definición de  $L(D)$ ,  $(\hat{h}, m) \in F(L(D))$ .  
 CONTRADICCIÓN, pues  $\{\hat{h}, m\} \subseteq \mathcal{N} \dots (1)$

Si  $\{u, v\} \subseteq \Upsilon(\mathcal{N})$ , entonces por definición de  $\Upsilon(\mathcal{N})$ ,  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D) \dots (2)$

Si  $u \in \times(\mathcal{N})$  y  $v \in \Upsilon(\mathcal{N})$ , entonces  $g(\mathcal{N})$  es independiente por definición de  $\Upsilon(\mathcal{N})$ , ya que  $\delta^-_D(v) = 0$  implica que  $(u, v) \notin F(D)$  y como  $u \in \times(\mathcal{N})$ ,  $(v, u) \notin F(D) \dots (3)$

De (1), (2) y (3) obtenemos que  $g(\mathcal{N})$  es un conjunto independiente en la digráfica  $D$ .

(ii) Absorbencia de  $g(\mathcal{N})$  en  $D$ :

Consideremos  $v \in V(D) - g(\mathcal{N})$  arbitrario.

- Si  $\delta^-_D(v) > 0$ , entonces  $\exists \hat{h} = (a, v) \in F(D)$ . Como  $F(D) = V(L(D))$ , entonces  $\hat{h} \in V(L(D)) - \mathcal{N}$ , con  $v \notin g(\mathcal{N})$  y  $\hat{h} \notin \mathcal{N}$ . Como  $\mathcal{N}$  es núcleo de  $L(D)$ , entonces  $\exists \hat{k} \in \mathcal{N}$  tal que  $(\hat{h}, \hat{k}) \in F(L(D))$  con  $\hat{k} = (v, \hat{b})$  y  $\hat{b} \in \times(\mathcal{N})$ , esto implica que  $\times(\mathcal{N})$  absorbe a  $v$ .
- Si  $\delta^-_D(v) = 0$  pero  $v$  es adyacente a algún vértice de  $\times(\mathcal{N})$ , entonces  $\times(\mathcal{N})$  es absorbente.

Por lo anterior,  $g(\mathcal{N})$  es absorbente en  $D$ .

Por (i) y (ii),  $g(\mathcal{N})$  es núcleo de  $D$ , es decir,  $g(\mathcal{N}) \in \mathcal{K}$ .

P. D.  $g' : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  es inyectiva, donde  $g'$  es una restricción de la función  $g$ :

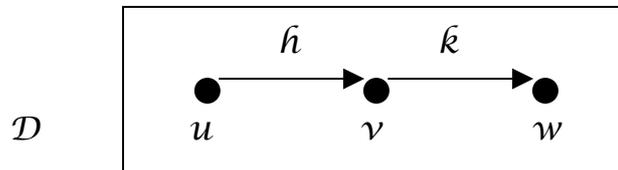
Sean  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{N}^*$  dos núcleos distintos contenidos en  $\mathcal{L}$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathcal{N} - \mathcal{N}^* \neq \emptyset$ , tomemos un vértice  $\hat{h} = (a, \hat{b})$  de esta diferencia de conjuntos contenida en  $V(L(D))$ . Por definición de la función  $g$ ,  $\{a, \hat{b}\} \subset V(D)$  y  $\hat{b} \in \times(\mathcal{N})$  pues  $\hat{h} \in \mathcal{N}$ . Como  $\mathcal{N}^*$  es núcleo de  $L(D)$ ,  $\exists \hat{k} \in \mathcal{N}^*$  tal que  $(\hat{h}, \hat{k}) \in F(L(D))$ , por consiguiente  $\hat{k} = (\hat{b}, c)$  con  $c \in V(D)$ , es decir,

$c \in \times(\mathcal{N}^*) \subset \mathcal{g}(\mathcal{N}^*)$  y  $\hat{k} \notin \mathcal{N}$  ya que  $\mathcal{N}$  es independiente en  $L(D)$ , esto implica que  $c \notin \times(\mathcal{N})$ , pero  $\delta^{-D}(c) > 0$  pues  $(\hat{b}, c) \in F(D)$ , por lo tanto  $c \notin \Upsilon(\mathcal{N}) \cup \times(\mathcal{N})$ , en conclusión  $\exists c \in \mathcal{g}(\mathcal{N}^*) - \mathcal{g}(\mathcal{N})$ , en otras palabras,  $\mathcal{g}(\mathcal{N}) \neq \mathcal{g}(\mathcal{N}^*)$ , o bien, la función  $\mathcal{g}$  es inyectiva.

En conclusión,  $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{K}|$  en cualquier digráfica  $D \dots (**)$

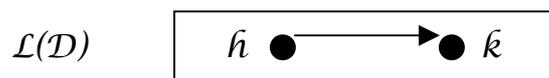
$\therefore$  Por (\*) y (\*\*) queda demostrado el teorema 3.1 ●

Veamos un ejemplo de una digráfica  $D$  donde se satisface el teorema anterior.



Observemos que  $\{w, u\}$  es el único núcleo de  $D$  pues  $w$  debe estar contenido en todo núcleo de  $D$  ya que tiene exgrado cero, es decir, no es absorbido por nadie. Como  $\hat{k} = (v, w) \in F(D)$ , entonces  $v$  no está contenido en ningún núcleo de  $D$ . Debido a que  $u$  no es absorbido por  $w$ , entonces  $u$  debe estar contenido en todo núcleo de  $D$ . Por lo tanto  $D$  tiene un solo núcleo.

Veamos la representación de  $L(D)$ .



Por el teorema 3.1,  $f(\{w, u\}) = \{\hat{k}\}$  es núcleo de  $L(D)$  y es único ya que  $(\hat{h}, \hat{k}) \in F(D)$ , implica que  $\hat{h}$  y  $\hat{k}$  no pueden estar contenidos en un mismo núcleo de  $L(D)$ . Por otro lado,  $\{\hat{h}\}$  no es absorbente en  $L(D)$  debido a que  $(\hat{k}, \hat{h}) \notin F(L(D))$ . Además,  $\mathcal{g}(\{\hat{k}\}) = \times(\{\hat{k}\}) \cup \Upsilon(\{\hat{k}\}) = \{w, u\}$ , donde:  $\times(\{\hat{k}\}) = \{w\}$  y  $\Upsilon(\{\hat{k}\}) = \{u\}$ .

En conclusión, las digráficas  $D$  y  $L(D)$  expuestas en el ejemplo anterior, contienen un solo núcleo cada una.

## 3.2. Cuasinúcleos en la digráfica de líneas.

Inspirados en el teorema 3.1, demostrado por Matús, los investigadores se preguntaron si ocurría lo mismo con relación a los cuasinúcleos de una digráfica. El siguiente teorema es una herramienta muy importante para alcanzar el objetivo principal de esta tesis. Recordemos que deseamos encontrar el número de cuasinúcleos en la digráfica de líneas a partir de los cuasinúcleos de la digráfica original.

TEOREMA 3.2 (Galeana, Pastrana, Rincón [2]): Si el ingrado mínimo de  $D$  es al menos 1, entonces el número de cuasinúcleos de  $D$  es menor o igual al número de cuasinúcleos de  $L(D)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica tal que  $\forall x \in V(D), \delta^-(x) \geq 1$ . Consideremos un cuasinúcleo  $Q$  en  $D$  arbitrario.

P. D.  $f(Q)_L$  es un cuasinúcleo en  $L(D)$ :

(i)  $f(Q)_L$  es un conjunto independiente en  $L(D)$ .

Como  $Q$  es cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $Q$  es un conjunto independiente en  $D$ . Por el lema 3.2,  $f(Q)_L$  es independiente en  $L(D)$ .

Así que  $f(Q)_L$  es un conjunto independiente en  $L(D)$ .

(ii)  $f(Q)_L$  es cuasiabsorbente en  $L(D)$ .

Sea  $u \in V(L(D)) - f(Q)_L$  arbitrario, con  $u = (u_1, u_2) \in F(D)$ . Como  $u \notin f(Q)_L$ , entonces  $u_2 \notin Q$ . Puesto que  $Q$  es cuasiabsorbente en  $D$ , tenemos dos subcasos:

- $\exists w_2 \in Q$  tal que  $w = (u_2, w_2) \in F(D)$ , entonces  $(u, w) \in F(L(D)) = V(L(D))$ , con  $w \in f(Q)_L$ , por definición de  $L(D)$ .
- $\exists w_2 \in Q$  y  $\exists w_3 \in V(D) - Q$  tal que  $\{t = (u_2, w_3), s = (w_3, w_2)\} \subseteq F(D)$ , entonces  $\{(u, t), (t, s)\} \subseteq F(L(D)) = V(L(D))$ , con  $s \in f(Q)_L$ .

Luego entonces  $f(Q)_\varepsilon$  es un conjunto cuasiabsorbente en  $L(D)$ .

Por (i) y (ii),  $f(Q)_\varepsilon$  es cuasinúcleo de  $L(D)$ .

Demostremos ahora que si  $Q$  y  $R$  son dos cuasinúcleos distintos en la digráfica  $D$ , entonces  $f(Q)_\varepsilon$  y  $f(R)_\varepsilon$  son dos cuasinúcleos distintos en  $L(D)$ .

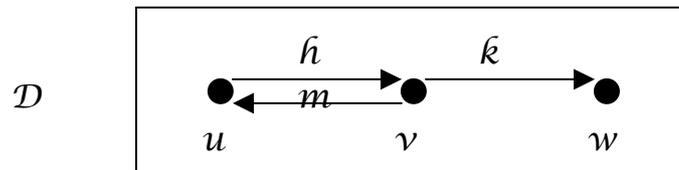
P. D. La función  $f$  es inyectiva:

Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  dos cuasinúcleos distintos de  $D$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $Q_1 - Q_2 \neq \emptyset$ , sea  $u \in Q_1 - Q_2$ , como  $\delta^-(u) \geq 1$ , entonces  $\exists v \in V(D)$  tal que  $(v, u) \in F(D)$ , pero  $u \notin Q_2$  implica que  $(v, u) \in f(Q_1) - f(Q_2)$ , es decir,  $f(Q_1) \neq f(Q_2)$ .

Consecuentemente la función  $f$  es inyectiva.

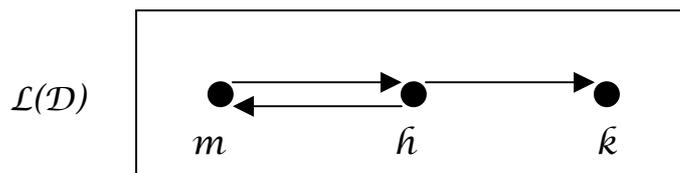
∴ El número de cuasinúcleos de  $D$  es menor o igual al número de cuasinúcleos de  $L(D)$  ●

Observemos la digráfica  $D$  expuesta en el siguiente dibujo:



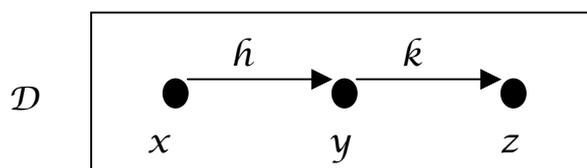
Los cuasinúcleos de  $D$  son  $\{w\}$  y  $\{w, u\}$ , ya que  $w$  debe estar en cada cuasinúcleo de  $D$  por ser pozo de  $D$ . Notemos que  $\{w\}$  es cuasinúcleo de  $D$  pues  $\{(u, v), (v, w)\} \subset F(D)$ . Como  $\{w, u\}$  es un conjunto independiente en  $D$  y contiene a  $w$ , entonces es otro cuasinúcleo de  $D$ . Por lo tanto  $D$  tiene dos cuasinúcleos distintos.

En seguida mostramos la digráfica de líneas correspondiente a la digráfica anterior:

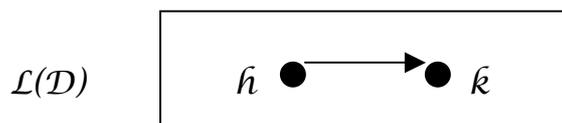


Por el lema 3.1,  $f(\{w\}) = \{\hat{k}\}$  y  $f(\{w, u\}) = \{\hat{k}, m\}$  son dos cuasinúcleos distintos de  $L(\mathcal{D})$ . Esta vez,  $\mathcal{D}$  es isomorfa a  $L(\mathcal{D})$ , por lo tanto,  $\mathcal{D}$  tiene el mismo número de cuasinúcleo que  $L(\mathcal{D})$ .

El que cada vértice de la digráfica  $\mathcal{D}$  deba tener grado interior distinto de cero no se puede suprimir, veamos el siguiente ejemplo:



$\mathcal{D}$  tiene dos cuasinúcleos, a saber,  $\{z\}$  y  $\{x, z\}$ , observemos a  $L(\mathcal{D})$

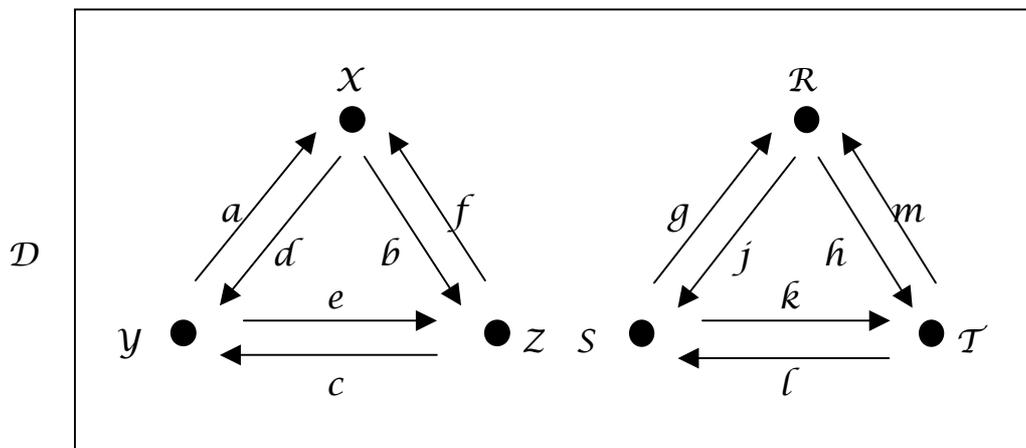


$L(\mathcal{D})$  solo tiene un único cuasinúcleo, a saber  $f(\{z\}) = \{\hat{k}\} = f(\{x, z\})$ , por esta razón es imprescindible la hipótesis del ingrado mayor o igual a 1 en cada vértice.

Veamos un ejemplo de digráfica  $\mathcal{D}$ , la cual satisface las hipótesis del teorema 3.2, de tal forma que tanto  $L(\mathcal{D})$  contiene más cuasinúcleos que  $\mathcal{D}$ .

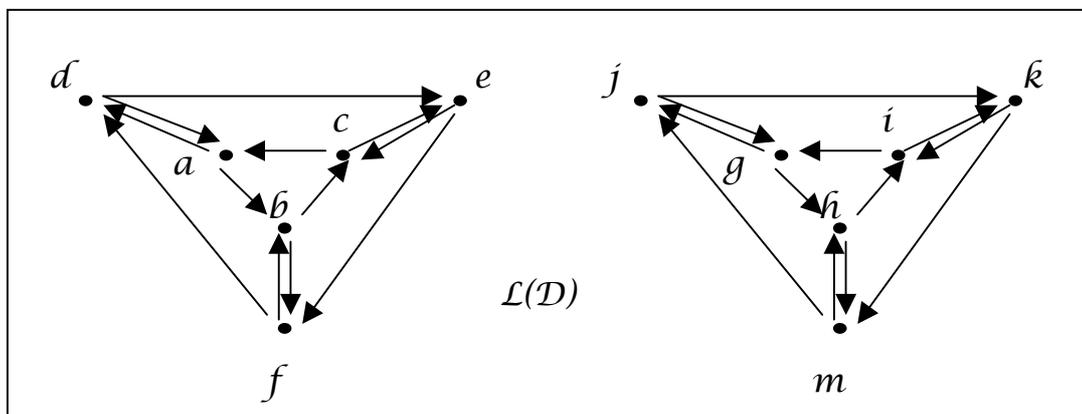
Si  $\mathcal{D}$  es la unión ajena de  $n$  componentes conexas, todas ellas isomorfas a la digráfica completa simétrica de orden tres, es decir,  $K_3$ , entonces  $L(\mathcal{D})$  tiene al menos  $n$  cuasinúcleos más que  $\mathcal{D}$ . Centremos nuestra atención en las flechas simétricas de  $\mathcal{D}$  y veamos el caso en el que  $n = 2$ , o bien,  $\mathcal{D} = K_3 \cup K_3$ .

La representación de la digráfica  $\mathcal{D}$  es la siguiente:



$\{X, R\}, \{X, S\}, \{X, T\}, \{Y, R\}, \{Y, S\}, \{Y, T\}, \{Z, R\}, \{Z, S\}, \{Z, T\}$  son los únicos cuasinúcleos de  $D$ , es decir,  $D$  tiene 9 cuasinúcleos distintos. No pueden estar dos vértices de la misma componente conexa contenidos en un mismo cuasinúcleo de  $D$  pues romperían su independencia, además, cada vértice de cualquier componente conexa es cuasiabsorbente en dicha componente a la cual pertenece.

Construyamos ahora  $L(D) = L(K_3) \cup L(K_3)$



Por el teorema 3.1,  $f(\{X, R\}) = \{a, f, g, m\}$ ,  $f(\{X, S\}) = \{a, f, j, l\}$ ,  $f(\{X, T\}) = \{a, f, k, h\}$ ,  $f(\{Y, R\}) = \{d, c, g, m\}$ ,  $f(\{Y, S\}) = \{d, c, j, l\}$ ,  $f(\{Y, T\}) = \{d, c, k, h\}$ ,  $f(\{Z, R\}) = \{e, b, g, m\}$ ,  $f(\{Z, S\}) = \{e, b, j, l\}$ ,  $f(\{Z, T\}) = \{e, b, k, h\}$ , son cuasinúcleos de  $L(D)$ .

Por otro lado, los conjuntos de la forma  $\{u, v\} \subseteq V(L(D))$ , donde  $u \in \{a, b, c, d, e, f\}$  y  $v \in \{g, h, i, j, k, m\}$ , son cuasinúcleos de  $L(D)$  ya que todo vértice de cualquier componente fuertemente conexa de  $L(D)$  es cuasinúcleo en dicha componente.

Tan solo con estos conjuntos de cuasinúcleos de  $L(D)$  superamos el número de cuasinúcleos de  $D$  en más de  $n = 2$ . Observemos que  $L(D)$  tiene la misma cantidad de componentes conexas que  $D$ , y además

$$|V(K_3)| = \text{número de cuasinúcleos distintos de } K_3.$$

mientras que en  $L(D)$  tenemos

$$|V(L(K_3))| < \text{número de cuasinúcleos distintos de } L(K_3)$$

como  $K_3$  es una digráfica completa y simétrica, entonces  $L(D)$  tiene el doble de vértices en cada componente conexa isomorfa a  $L(K_3)$  por lo que el número de cuasinúcleos de  $L(D)$  aumenta al menos el doble siendo  $n = 2$ , recordemos que estamos analizando un caso particular.

### 3.2.1 Número de cuasinúcleos en la digráfica de líneas.

En esta sección analizaremos algunos casos donde se da la igualdad del teorema 3.2, por otra parte, veremos algunas digráficas que satisfacen la desigualdad estricta del mismo teorema, pero antes necesitamos demostrar los siguientes dos lemas.

LEMA 3.3: Sea  $D$  una digráfica tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ . Si  $Q$  es el conjunto de pozos de  $D$ , entonces  $f(Q)_L$  es el conjunto de pozos de  $L(D)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica y  $Q$  es conjunto de pozos de  $D$ . Consideremos  $\hat{h} = (a, b) \in V(L(D))$  arbitrario.

- Si  $b \in Q$ , entonces  $\hat{h} \in f(Q)$ . Sabemos que  $\delta^+_D(b) = \delta^+_{L(D)}(\hat{h})$ , como  $Q$  es el conjunto de pozos de  $D$ ,  $\delta^+_D(b) = 0$ , entonces  $\delta^+_{L(D)}(\hat{h}) = 0$ , es decir,  $\hat{h}$  es pozo de  $L(D)$ .

- Si  $\hat{b} \notin Q$ , entonces  $\hat{h} \notin f(Q)$ . Como  $Q$  es el conjunto de pozos y no contiene a  $\hat{b}$ , entonces  $\delta^+_{D}(\hat{b}) > 0$ , esto implica que el exgrado de  $\hat{h}$  es mayor que cero en  $L(D)$ , es decir,  $\hat{h}$  no es pozo de  $L(D)$ .

$\therefore f(Q)_{\mathcal{L}}$  es el conjunto de pozos de  $L(D)$  ●

LEMA 3.4: Sea  $D$  una digráfica tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ ,  $\mathcal{N} \subseteq F(D)$ . Si  $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$  es el conjunto de pozos de  $L(D)$ , entonces  $\{\nu \in V(D) \mid \nu \text{ es vértice terminal de alguna } \hat{h} \in \mathcal{N}\}$  es el conjunto de pozos de  $D$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica de exgrado mínimo no nulo,  $\mathcal{N}$  el conjunto de pozos de  $L(D)$ . Consideremos  $\nu \in V(D)$  arbitrario. Por hipótesis  $\delta^-(D)(\nu) \geq 1$ , tenemos dos casos:

- Si  $\nu$  es vértice terminal de alguna flecha  $\hat{h} \in F(D)$ , con  $\hat{h} \in \mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ , entonces  $\delta^+_{L(D)}(\hat{h}) = 0 = \delta^+_{D}(\nu)$ , es decir,  $\nu$  es pozo de  $D$ .
- Si  $\nu$  es vértice terminal de alguna flecha  $\hat{h} \in F(D)$ , con  $\hat{h} \notin \mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ , entonces  $\delta^+_{L(D)}(\hat{h}) > 0$ , esto implica que  $\delta^+_{D}(\nu) > 0$ , es decir,  $\nu$  no es pozo de  $D$ .

$\therefore \{\nu \in V(D) \mid \nu \text{ es vértice terminal de alguna } \hat{h} \in \mathcal{N}\}$  es el conjunto de

pozos de  $D$  ●

En el siguiente teorema veremos un caso especial del teorema 3.2 en donde la digráfica de líneas contiene el mismo número de cuasinúcleos que la digráfica original.

TEOREMA 3.3: Toda digráfica  $D$  cuyo ingrado mínimo es al menos 1, tiene un único cuasinúcleo si y sólo si  $L(D)$  tiene un único cuasinúcleo.

DEMOSTRACIÓN:

Demostremos primero que toda digráfica con un único cuasinúcleo y grado interior no nulo satisface que su digráfica de líneas contiene un único cuasinúcleo.

Sea  $D$  una digráfica tal que  $\forall x \in V(D), \delta^-(x) \geq 1$ ,  $Q$  el único cuasinúcleo de  $D$ .

P. D.  $L(D)$  tiene un solo cuasinúcleo.

Por el teorema 2.3 [capítulo 2],  $Q$  es núcleo de  $D$  y consiste sólo de pozos. Por el teorema 3.1,  $f(Q)$  es cuasinúcleo de  $L(D)$ . Por el lema 3.3,  $f(Q)$  es el conjunto de pozos de  $L(D)$ . Por el teorema 2.3 [capítulo 2],  $f(Q)$  es núcleo de  $L(D)$ . Por la observación 1 [capítulo 2],  $f(Q)$  es el único núcleo de  $L(D)$  y por el teorema 2.3 [capítulo 2],  $L(D)$  tiene un único cuasinúcleo, además  $f(Q)$  es un conjunto independiente máximo en  $L(D)$  por ser núcleo en esta digráfica.

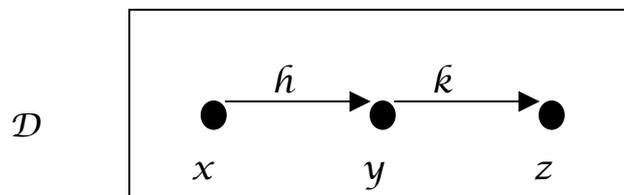
Por lo tanto,  $L(D)$  contiene un único cuasinúcleo . . . (1)

Demostremos ahora el otro sentido del teorema. Sea  $D$  una digráfica cuyo ingrado mínimo es distinto de cero y  $L(D)$  tiene un único cuasinúcleo  $Q$ , por el teorema 2.3 [capítulo 2],  $Q$  esta compuesto solamente por los pozos de  $L(D)$  y es el único núcleo de esta digráfica. Por el teorema 3.2,  $D$  tiene a lo más un cuasinúcleo. Como toda digráfica contiene un cuasinúcleo por el teorema de Chvátal Lovász [5], entonces  $D$  contiene un único cuasinúcleo.

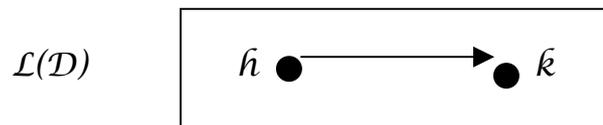
Por consiguiente, si  $L(D)$  contiene un solo cuasinúcleo, entonces  $D$  contiene un solo cuasinúcleo . . . (2)

∴ Por (1) y (2), queda demostrado el teorema 3.3 ●

No podemos eliminar la condición del ingrado mínimo distinto de cero de lo contrario el teorema no necesariamente se cumple para cualquier digráfica, de aquí el siguiente ejemplo:



Observemos que  $\delta_D^-(\hat{h}) = 0$ , es decir,  $D$  no satisface las hipótesis del teorema 3.3.



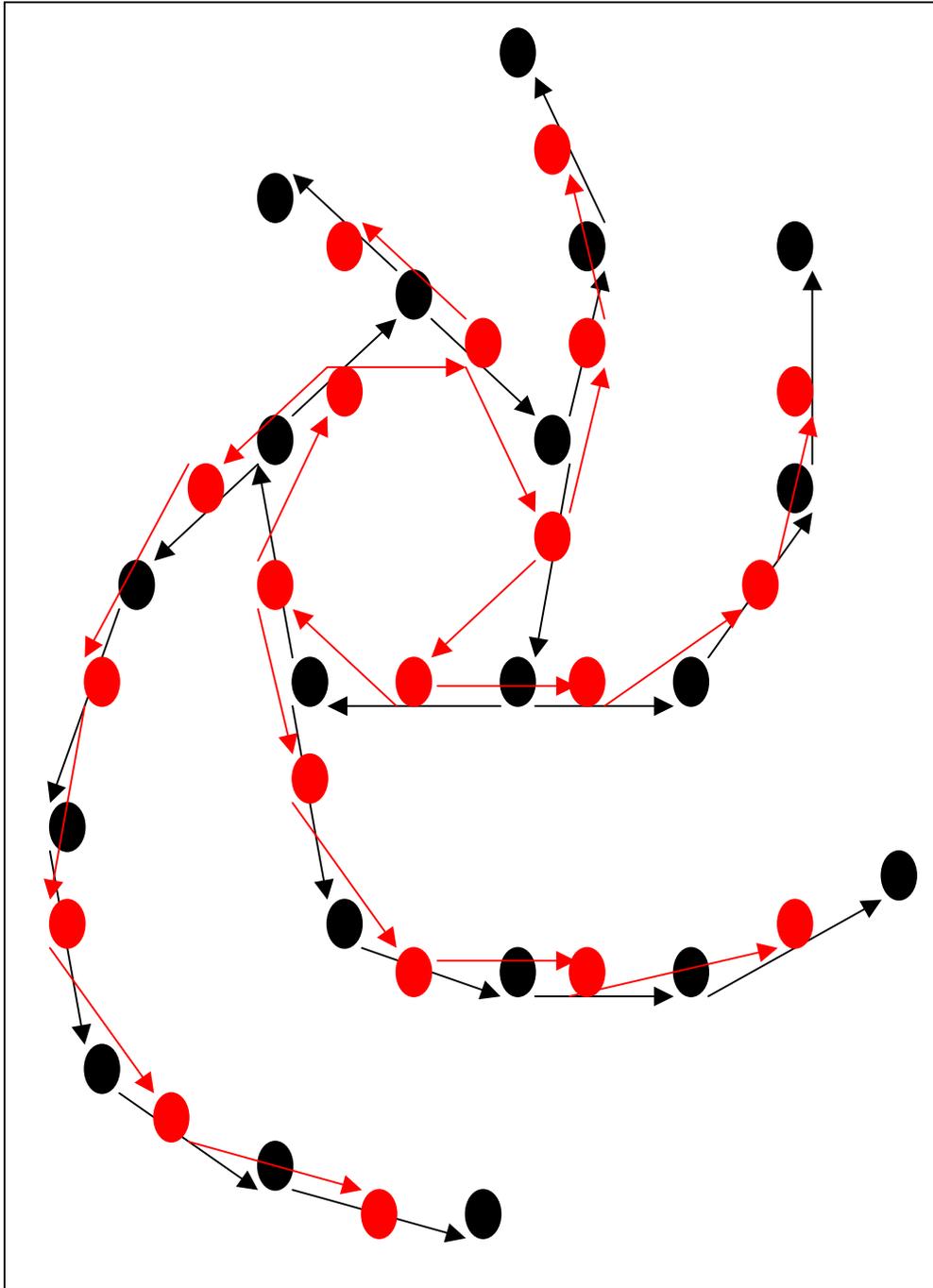
$\{\hat{k}\}$  es el único cuasinúcleo y núcleo de  $L(D)$  mientras que  $\{x, z\}$  y  $\{z\}$  son dos cuasinúcleos distintos de  $D$ , por esta razón, si  $L(D)$  tiene un único cuasinúcleo, entonces no necesariamente  $D$  tiene un solo cuasinúcleo.

Concluimos entonces que el teorema 3.3 es cierto solamente si  $\delta_D^-(D) \geq 1$ .

Veamos ahora otros ejemplos de digráficas con ingrado mínimo distinto de cero, donde la digráfica de líneas tiene el mismo número de cuasinúcleos que la digráfica original. Es claro que toda digráfica  $D$  isomorfa a su digráfica de líneas cumple con dicha propiedad. Es el caso de los ciclos dirigidos  $C_n = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Por el lema 3.1, sabemos que  $L(C_n) = C_n$ . Por lo tanto,  $C_n$  tiene el mismo número de cuasinúcleos que  $L(C_n)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

Conozcamos otra familia de digráficas, las cuales también son isomorfas a sus digráficas de líneas correspondientes y satisfacen el teorema 3.2.

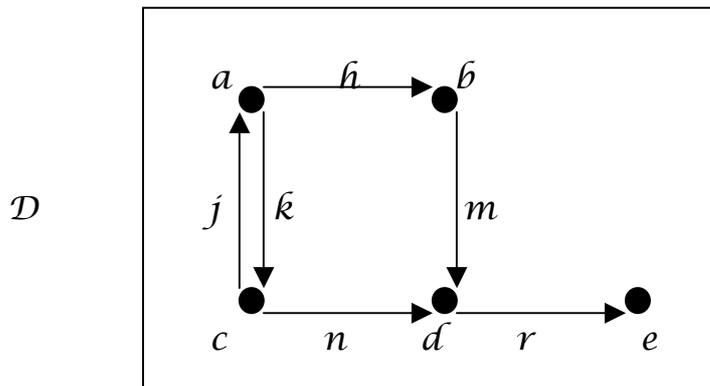
En el dibujo siguiente podemos apreciar la representación de dos digráficas superpuestas, una de color negro ( $D_1$ ) y la otra de color gris ( $D_2$ ). Observemos que  $D_2$  es la digráfica de líneas correspondiente a  $D_1$  y ambas son digráficas isomorfas. Lo que pretendemos mostrar aquí es que cualquier digráfica de este tipo cumple con las propiedades anteriores, sin importar la longitud del ciclo dirigido que contienen y la longitud de las trayectorias dirigidas que parten de los vértices del ciclo dirigido. Recordemos que estamos considerando sólo digráficas finitas.



Existen otros ejemplos de digráficas isomorfas a su digráfica de líneas, sin embargo, lo que realmente nos interesa, es saber si existe una digráfica que

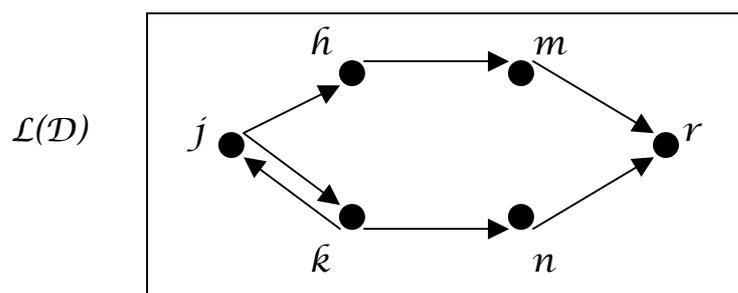
contenga al menos dos cuasinúcleos distintos y satisfaga la igualdad del teorema 3.2, sin ser isomorfa a su digráfica de líneas correspondiente.

Presentamos a continuación un ejemplo:



Los cuasinúcleos de la digráfica  $\mathcal{D}$  son:  $\{e, b\}$ ,  $\{e, c\}$ ,  $\{e, a\}$  y  $\{e, b, c\}$ .

Observemos que como  $e$  es pozo de  $\mathcal{D}$ , debe pertenecer a cualquier cuasinúcleo de  $\mathcal{D}$ , de lo contrario no sería cuasiabsorbido por nadie. Como  $(d, e) \in F(\mathcal{D})$ , entonces  $d$  no puede estar contenido en ningún cuasinúcleo, de hecho, los conjuntos de vértices que son independientes y contienen a  $e$  son precisamente los cuasinúcleos de  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}$  contiene solo 4 cuasinúcleos distintos. Veamos en seguida la digráfica de líneas de  $\mathcal{D}$ .



Por el teorema 3.2,  $\{r, h\}$ ,  $\{r, k\}$ ,  $\{r, j\}$  y  $\{r, h, k\}$  son cuasinúcleos de  $\mathcal{D}$  y  $r$  es pozo en  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ , esto implica que ni  $n$  ni  $m$  pueden estar contenidos en ningún cuasinúcleo de  $\mathcal{D}$  por ser adyacentes a  $r$ , como son los únicos

conjuntos de vértices que son independientes en  $L(D)$  y contienen a  $r$ , entonces son los únicos cuasinúcleos de  $L(D)$ . Por lo tanto  $L(D)$  contiene 4 cuasinúcleos distintos.

Entonces la digráfica mostrada en el ejemplo anterior satisface la igualdad del teorema 3.2 sin ser isomorfa a su digráfica de líneas.

Veremos a continuación que  $\forall n \geq 3$  ( $n \in \mathbf{N}$ ), existe una digráfica que no es isomorfa a su digráfica de líneas y satisface la igualdad del teorema 3.2.

Se trata de  $D_n$  tal que

$$V(D_n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\} \cup \{u\} \text{ y}$$

$$F(D_n) = \{e_i = (x_{i-1}, x_i) / i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \text{ donde } x_{n-1} = x_0\} \cup \{\hat{h} = (x_0, u), \hat{k} = (x_1, u)\}.$$

Observemos que el ingrado mínimo de estas digráficas siempre es 1, ya que  $\forall x_i \in V(D)$ ,  $\delta^-(x_i) = 1$  con  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ , mientras que  $\delta^-(u) = 2$ .

Por otro lado, el número de pozos de  $L(D_n)$  es exactamente la suma de los ingrados de los pozos de  $D_n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ . En esta familia de digráficas,  $L(D_n)$  tiene solo dos pozos, pues el único pozo de  $D_n$  es  $u$  y  $\delta^-(u) = 2 \forall n \in \mathbf{N}$ .

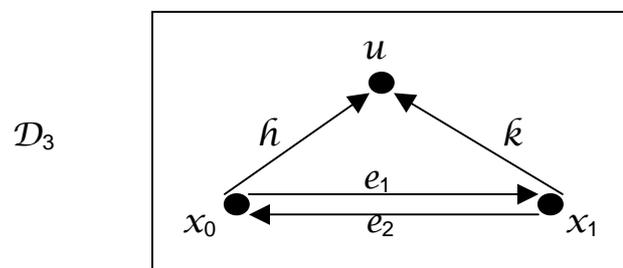
Presentamos a continuación la digráfica más pequeña de este tipo:

Se trata de  $D_3$ , donde

$$V(D_3) = \{x_0, x_1\} \cup \{u\} \text{ y}$$

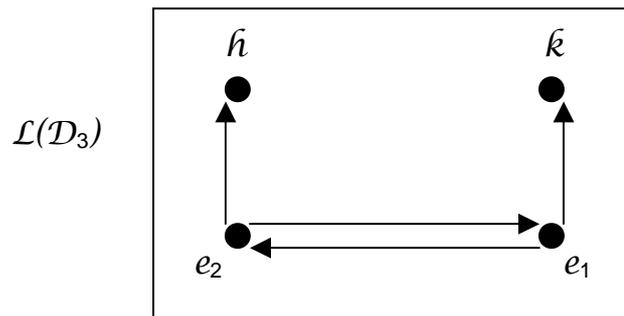
$$F(D_3) = \{e_i = (x_{i-1}, x_i) / i \in \{1, 2\} \text{ donde } x_2 = x_0\} \cup \{\hat{h} = (x_0, u), \hat{k} = (x_1, u)\}.$$

Observemos su representación geométrica en seguida:

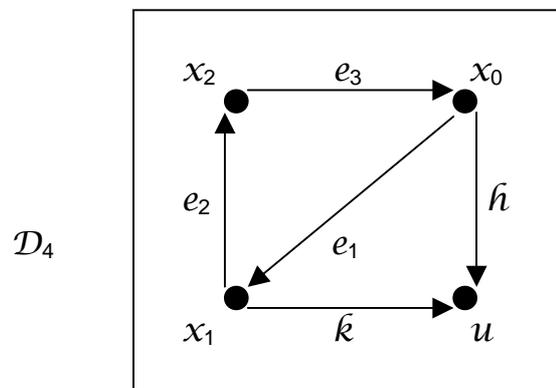


Como  $u$  es pozo de  $D_3$ , debe intersectar cada cuasinúcleo de  $D_3$ , de hecho es cuasinúcleo y núcleo de  $D_3$ , ya que  $\{\hat{h} = (x_0, u), \hat{k} = (x_1, u)\} \in F(D_3)$ , por esta misma razón es el único cuasinúcleo de  $D_3$ , recordemos el teorema 2.3, [capítulo 2]. Por lo tanto  $D_3$  tiene un solo cuasinúcleo.

A continuación podemos apreciar la digráfica de líneas de  $D_3$ :



Por teorema 3.3,  $\mathcal{L}(D_3)$  contiene un único cuasinúcleo, a saber  $\{\hat{h}, \hat{k}\}$ . Veamos el caso en el cual  $n = 4$ :



Los cuasinúcleos de la digráfica arriba expuesta son:  $\{u, x_2\}$  y  $\{u\}$ . Como  $u$  es pozo de  $D_4$ , debe estar contenido en cualquier cuasinúcleo de  $D_4$  de lo contrario no sería cuasiabsorbido por nadie. Además  $\{u\}$  es un conjunto independiente por ser unitario y es un cuasinúcleo de  $D_4$ , puesto que  $\{(x_2, x_0), (x_0, u), (x_1, u)\} \subset F(D_4)$ .

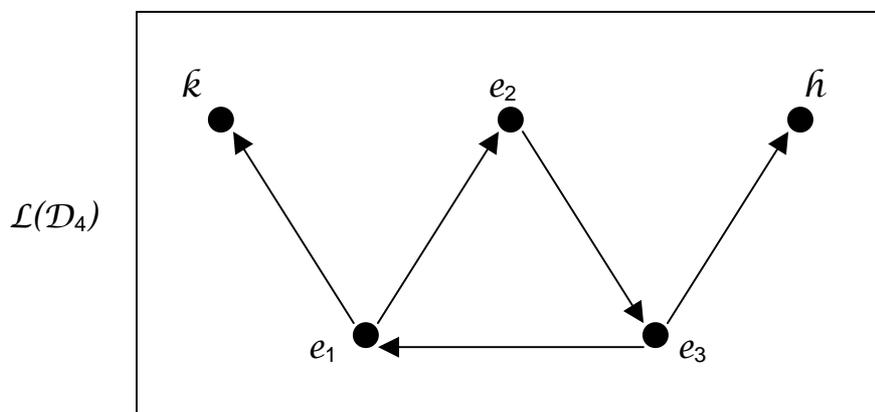
Por otro lado, como  $\{x_2, u\}$  es un conjunto independiente de vértices en  $D_4$ , entonces es un cuasinúcleo de  $D_4$  ya que contiene a  $\{u\}$  el cual es cuasiabsorbente en  $D_4$ .

Puesto que  $x_2$  es el único vértice no adyacente a  $u$  en  $D_4$ , entonces  $\{u\}$  y  $\{x_2, u\}$  son los únicos conjuntos independientes de  $D_4$ .

Por lo tanto  $D_4$  tiene solo dos cuasinúcleos distintos.

OBSERVACIÓN 3.1:  $\{x_2, u\}$  es núcleo de  $D_4$  pues  $u$  absorbe a  $\{x_0, x_1\} = V(D_4) - \{x_2, u\}$ , por medio de las flechas  $\{(x_0, u), (x_1, u)\} \subset F(D_4)$ .

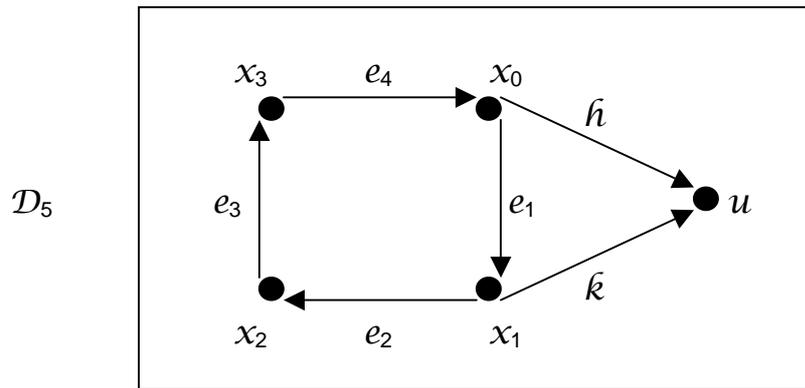
Veamos ahora la digráfica de líneas correspondiente a la digráfica anterior:



Por el teorema 3.2,  $f(\{u\}) = \{k, h\}$  y  $f(\{x_2, u\}) = \{k, h, e_2\}$  son cuasinúcleos de  $L(D_4)$ . Observemos que  $\{k, h\}$  es el conjunto de pozos de  $L(D_4)$ , por lo que, está contenido en la intersección de todos los cuasinúcleos de dicha digráfica. Como  $e_2$  es el único vértice de  $L(D_4)$  que no es adyacente a  $h$  ni a  $k$ , entonces  $\{k, h, e_2\}$  es el único conjunto independiente de vértices de  $L(D_4)$  distinto de  $\{k, h\}$ . Por lo tanto  $L(D_4)$  contiene exactamente dos cuasinúcleos distintos al igual que  $D_4$ .

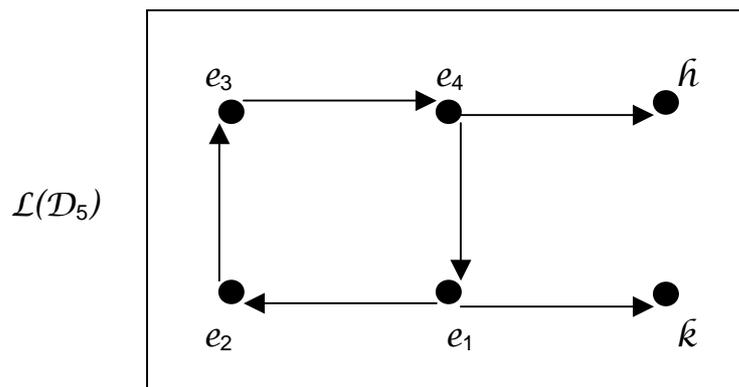
OBSERVACIÓN 3.2: Por teorema 3.1,  $\{k, h, e_2\}$  es núcleo de  $L(D_4)$ .

Si  $n = 5$ , conozcamos la representación geométrica de  $D_5$ :



Los cuasinúcleos de  $\mathcal{D}_5$  son  $\{x_3, u\}$ ,  $\{x_2, u\}$ . En este caso  $u$  es el único pozo de  $\mathcal{D}_5$ , razón por la cual  $\Gamma^-(u) = \{x_0, x_1\}$  no interseca ningún cuasinúcleo de  $\mathcal{D}_5$ . Como  $V(\mathcal{D}_5) - \{u, x_2, x_3\} = \{x_0, x_1\}$  y  $(x_2, x_3) \in F(\mathcal{D}_5)$ , entonces  $\{u, x_2, x_3\}$  no es independiente en  $\mathcal{D}_5$ .

Observemos la representación de  $L(\mathcal{D}_5)$  a continuación:



Por el teorema 3.2,  $\{\hat{k}, \hat{h}, e_2\}$  y  $\{\hat{h}, \hat{k}, e_3\}$  son cuasinúcleos de  $L(\mathcal{D}_5)$ . Como  $\{\hat{h}, \hat{k}\}$  es el conjunto de pozos de  $L(\mathcal{D}_5)$ , entonces  $\Gamma^-(\{\hat{h}, \hat{k}\}) = \{e_4, e_1\}$  no interseca ningún cuasinúcleo de  $L(\mathcal{D}_5)$ . Notemos que  $V(L(\mathcal{D}_5)) - \{\hat{h}, \hat{k}, e_2, e_3\} = \{e_1, e_4\}$  y  $(e_2, e_3) \in F(L(\mathcal{D}_5))$  implica que  $\{\hat{h}, \hat{k}, e_2, e_3\}$  no es independiente en  $L(\mathcal{D}_5)$ . Por lo tanto  $L(\mathcal{D}_5)$  contiene solo dos cuasinúcleos distintos al igual que  $\mathcal{D}_5$ .

En conclusión,  $D_n$  ( $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ) se constituye por un ciclo dirigido  $C = (x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, x_{n-2}, e_{n-1}, x_{n-1} = x_0)$  de longitud  $n - 1$  y un pozo  $u$ , el cual es adyacente desde los dos primeros vértices de  $C$ .

Demostremos ahora que  $L(D_n)$  tiene el mismo número de cuasinúcleos que  $D_n$ ,  $\forall n \geq 3$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

Consideremos la digráfica  $D_{n'}$ , con  $n' \in \mathbf{N}$ . Por definición de  $D_{n'}$ ,  $u \in V(D_{n'})$  es el único pozo de  $D_{n'}$ . Como  $\{\hat{h} = (x_0, u), \hat{k} = (x_1, u)\} \in F(D_{n'}) \forall n' \in \mathbf{N}$ , entonces  $\{\hat{h}, \hat{k}\} \subset F(D_{n'})$ , por esta razón,  $\{x_0, x_1\}$  no interseca ningún cuasinúcleo de  $D_{n'}$ . Por otro lado, por el lema 3.3,  $f(\{u\}) = \{\hat{h}, \hat{k}\}$  es el conjunto de pozos de  $L(D_{n'})$ . Como  $\{(e_1, \hat{k}), (e_{n'-1}, \hat{h})\} \subset F(L(D_{n'}))$ ,  $\forall n' \in \mathbf{N}$ , entonces  $\{e_1, e_{n'-1}\}$  no interseca ningún cuasinúcleo de  $L(D_{n'})$ .

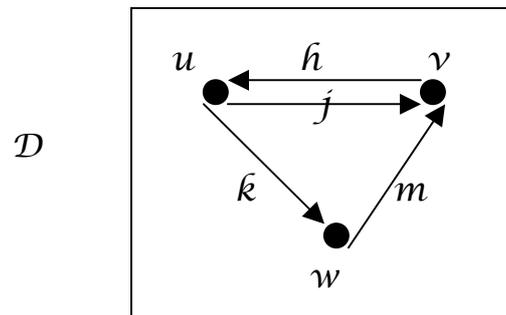
Observemos que la digráfica  $D_{n'} - u = C = L(D_{n'}) - \{\hat{h}, \hat{k}\}$ , por lo que tienen el mismo número de cuasinúcleos distintos. Recordemos que  $C = (x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, x_{n'-2}, e_{n'-1}, x_{n'-1} = x_0)$  es un ciclo dirigido de longitud  $n' - 1$  y es una subdigráfica inducida de  $D_{n'}$ .

Sea  $\mathcal{A} \subset V(D_{n'} - u)$ , la familia de cuasinúcleos de  $D_{n'} - u$ , los cuales no contienen a  $x_0$ , ni a  $x_1$ ;  $\mathcal{B} \subset V(L(D_{n'})) - \{\hat{h}, \hat{k}\}$  es la familia de cuasinúcleos de  $L(D_{n'}) - \{\hat{h}, \hat{k}\}$ , los cuales no contienen a  $e_1$  ni a  $e_{n'-1}$ . Por la afirmación del párrafo anterior,  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ , ya que estamos quitando dos vértices consecutivos en cada familia. Como  $u$  debe intersecar todos los cuasinúcleos de  $D_{n'}$ , entonces  $D_{n'}$  tiene  $|\mathcal{A}|$  cuasinúcleos distintos. Como  $\{\hat{h}, \hat{k}\}$  interseca cada cuasinúcleo de  $L(D_{n'})$ , entonces  $L(D_{n'})$  tiene  $|\mathcal{B}|$  cuasinúcleos distintos.

Por lo tanto,  $D_n$  tiene el mismo número de cuasinúcleos que  $L(D_n)$ ,  $\forall n \geq 3$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

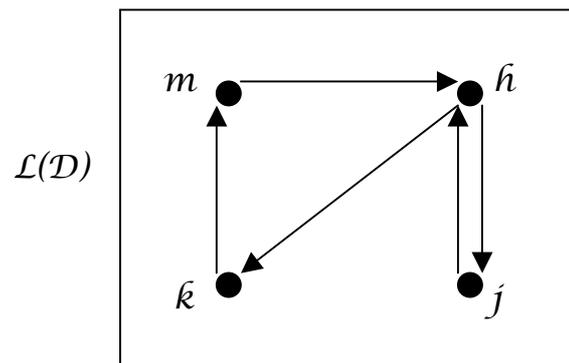
Demostramos así que la familia de digráficas de la forma  $D_n$ , satisface la igualdad del teorema 3.2.

Es probable que existan más digráficas con la propiedad expuesta en el teorema 3.2. Sin embargo, deseamos saber qué características debe cumplir una digráfica para que satisfaga la desigualdad estricta del teorema 3.2. Es claro que existen digráficas de este tipo empezando por la digráfica siguiente:



Cada vértice de  $\mathcal{D}$  es un cuasinúcleo de  $\mathcal{D}$ , es decir,  $Q_1 = \{u\}$ ,  $Q_2 = \{v\}$  y  $Q_3 = \{w\}$  son los cuasinúcleos de  $\mathcal{D}$  y son los únicos ya que cada par de vértices distintos de  $\mathcal{D}$  está relacionado por al menos una flecha en  $F(\mathcal{D})$ . Por lo tanto  $\mathcal{D}$  tiene solamente 3 cuasinúcleos distintos.

Observemos la digráfica  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ :



Por el teorema 3.2,  $f(\{v\}) = \{j, m\}$ ,  $f(\{u\}) = \{h\}$  y  $f(\{w\}) = \{k\}$  son cuasinúcleos de  $\mathcal{D}$ . Por otro lado,  $\{j, k\} \neq f(Q_i) \forall i \in \{1, 2, 3\}$ , no obstante,  $\{j, k\}$  es un cuasinúcleo de  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  debido a que  $\{(k, j), (j, k)\} \cap F(\mathcal{L}(\mathcal{D})) = \emptyset$ , mientras que  $\{(m, h), (h, j)\} \subset F(\mathcal{L}(\mathcal{D}))$ . Observemos que el conjunto  $\mathcal{A} = \{v \in V(\mathcal{D}) \mid v \text{ es vértice terminal de } \hat{h} \text{ ó } \hat{j} \text{ en } \mathcal{D}\} = \{w, v\}$  no es un conjunto independiente de vértices en  $\mathcal{D}$ , ya que  $(w, v) \in F(\mathcal{D})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}$  satisface la desigualdad estricta del teorema 3.2.

En adelante, estudiaremos esta clase de digráficas para intentar encontrar las condiciones suficientes para que se de la desigualdad estricta del teorema 3.2, para esto veremos a continuación algunas definiciones.

Sea una digráfica  $D$ .

Consideremos  $\{\hat{h}, \hat{k}\} \subseteq F(D)$ , con  $\hat{h} = (u, v)$ ,  $\hat{k} = (w, x)$ . Un  **$\hat{h}\hat{k}$  – camino dirigido por flechas**  $\mathcal{T}$  es un camino dirigido en  $D$  tal que  $\mathcal{T} = (u = x_0, \hat{h} = e_1, v = x_1, e_2, x_2, \dots, e_{n-1}, w = x_{n-1}, e_n = \hat{k}, x = x_n)$ . Observemos que  $\hat{h}$  es la flecha inicial de  $\mathcal{T}$ , mientras que  $\hat{k}$  es la flecha terminal de  $\mathcal{T}$ .

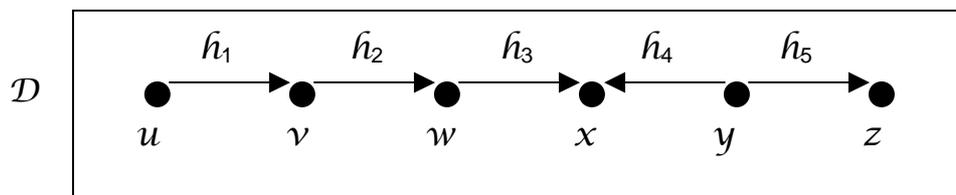
Diremos que  $\mathcal{A} \subseteq F(D)$  es un **cuasinúcleo por flechas** de  $D$  si cumple:

- Si  $\{\hat{h}, \hat{k}\} \subseteq \mathcal{A}$ , entonces no existe un  $\hat{h}\hat{k}$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 y no existe un  $\hat{k}\hat{h}$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 en  $D$ .  
(Propiedad de independencia por flechas)
- $\forall \hat{h} = (u, v) \in F(D) - \mathcal{A}$ , existe  $\hat{k} = (w, x) \in \mathcal{A}$ , tal que  $D$  contiene un  $vwx$  – camino dirigido de longitud a lo más 2, el cual contiene a  $\hat{k}$ .  
(Propiedad de cuasiabsorbencia por flechas)

En otras palabras  $\mathcal{A}$  es un cuasinúcleo por flechas si satisface las siguientes dos condiciones:

- Si  $\{\hat{h}, \hat{k}\} \subseteq \mathcal{A}$ , entonces el vértice terminal de  $\hat{h}$  ( $\hat{k}$  respectivamente) no es vértice inicial de  $\hat{k}$  ( $\hat{h}$  respectivamente) en  $D$ .
- $\forall \hat{h} \in F(D) - \mathcal{A}$ , existe  $\hat{k} \in \mathcal{A}$  tal que el vértice terminal de  $\hat{h}$  está a distancia a lo más 1 del vértice inicial de  $\hat{k}$ .

Veamos un ejemplo de cuasinúcleo por flechas en la digráfica que mostramos en seguida:



$\mathcal{A} = \{h_3, h_4, h_5\}$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ , ya que no existe un  $h_i h_j$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 y no existe un  $h_j h_i$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 en  $D$ ,  $\forall \{i, j\} \subset \{3, 4, 5\}$ , además,  $\mathcal{T} = (\nu, w, x)$  es un  $\nu x$  – camino dirigido de longitud 2 en  $D$ , el cual contiene un  $wx$  – camino dirigido de longitud menor a 2 en  $D$ , con  $\{h_1 = (u, \nu), h_2 = (\nu, w)\} = F(D) - \mathcal{A}$ .

Por lo tanto,  $\mathcal{A}$  es un cuasinúcleo por flechas en  $D$ .

Observemos que el conjunto de flechas, las cuales tienen en común el vértice terminal (inicial respectivamente), es un conjunto independiente por flechas.

LEMA 3.5: Dada una digráfica  $D$  de ingrado mínimo distinto de cero. Si  $Q \subseteq V(D)$  es un cuasinúcleo de  $D$ , entonces  $f(Q)$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ , donde

$$f(Q) = \{h = (a, b) \in F(D) \mid b \in Q\}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea una digráfica  $D$  y  $Q \subseteq V(D)$  un cuasinúcleo de  $D$ .

P. D.  $f(Q) = \{h = (a, b) \in F(D) \mid b \in Q\}$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ .

(a) Si  $\{h, k\} \subseteq f(Q)$ , entonces el vértice terminal de  $h$  ( $k$  respectivamente) no es vértice inicial de  $k$  ( $h$  respectivamente) en  $D$ .

Sean  $h = (a, b)$  y  $k = (c, d)$  dos elementos distintos de  $f(Q)$ . Como  $Q$  es cuasinúcleo de  $D$  y  $\{b, d\} \subseteq Q$ , entonces  $(b, d) \notin F(D)$  y  $(d, b) \notin F(D)$ .

Por lo tanto, el vértice terminal de  $h$  ( $k$  respectivamente) no es vértice inicial de  $k$  ( $h$  respectivamente) en  $D$ , de lo contrario  $c = b$  y  $d = a$ , contradiciendo la independencia de  $Q$  en  $D$ .

(b)  $\forall h \in F(D) - f(Q)$ , existe  $k \in f(Q)$  tal que el vértice terminal de  $h$  está a distancia a lo más 1 del vértice inicial de  $k$ .

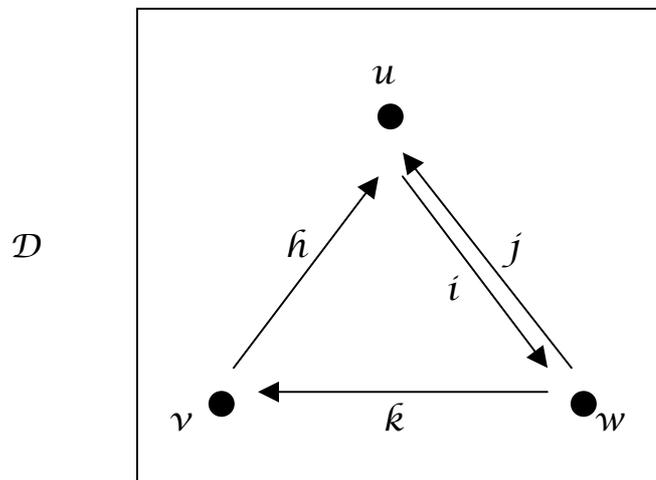
Sea  $\hat{h} = (u, v) \in F(D) - f(Q)$ , es decir,  $v \notin Q$  por definición de  $f(Q)$ . Como  $Q$  es cuasinúcleo de  $D$ , tenemos dos subcasos:

- $\exists x \in Q$  tal que  $e = (v, x) \in F(D)$ , entonces  $e$  es un  $vx$  – camino dirigido de longitud 1 en  $D$ , con  $e \in f(Q)$ , es decir, el vértice terminal de  $\hat{h}$  es inicial de  $e \in f(Q)$ .
- $\exists y \in V(D) - Q$  y  $\exists x \in Q$  tal que  $\{e_1 = (v, y), e_2 = (y, x)\} \subseteq F(D)$ , entonces  $(v, e_1, y, e_2, x)$  es un  $vx$  – camino dirigido de longitud 2 en  $D$ , donde  $d(v, y) = 1$ , con  $e_2 = (y, x) \in f(Q)$ .

Por lo tanto,  $\forall \hat{h} \in F(D) - f(Q)$ , existe  $\hat{k} \in f(Q)$  tal que el vértice terminal de  $\hat{h}$  está a distancia a lo más uno del vértice inicial de  $\hat{k}$ .

$\therefore$  Por (a) y (b),  $f(Q)$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$  ●

La siguiente cuestión es: ¿los vértices finales de un cuasinúcleo por flechas de  $D$  forman siempre un cuasinúcleo de  $D$ ? No necesariamente, de aquí el siguiente ejemplo:



$\mathcal{A} = \{k, j\}$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$  ya que la longitud mínima de los  $jk$  – caminos dirigidos por flechas contenidos en  $D$  es 3 y la de los  $kj$  –

caminos dirigidos por flechas contenidos en  $D$  es 4, además  $C = (u, i, w, j, u)$  es un  $uu$  – camino dirigido de longitud 2 contenido en  $D$ , el cual contiene a  $\hat{j} = (w, u)$ ,

Sin embargo,  $B = \{\nu \in V(D) / \hat{h} = (u, \nu) \in \mathcal{A}\} = \{u, \nu\}$  no es cuasinúcleo de  $D$  pues  $\hat{h} = (\nu, u) \in F(D)$ .

Luego entonces, los vértices finales de un cuasinúcleo por flechas de  $D$  no siempre forman un cuasinúcleo de  $D$ .

Denotemos con  $C_f$  a la familia de cuasinúcleos por flechas de una digráfica  $D$ .

$\mathcal{Q} = \{\mathcal{A} \subseteq C_f / B = \{\nu \in V(D) / \hat{h} = (u, \nu) \in \mathcal{A}\} \text{ es un cuasinúcleo de } D\}$ .

$\mathcal{P} = \{\mathcal{A} \subseteq C_f / B = \{\nu \in V(D) / \hat{h} = (u, \nu) \in \mathcal{A}\} \text{ no es un cuasinúcleo de } D\}$ .

Es claro que  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \emptyset$

Explícitamente,  $(C_f) = \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$ .

TEOREMA 3.4: Sea  $D$  una digráfica tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ . Si  $\mathcal{A}$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ , entonces  $\mathcal{A}_c$  es un cuasinúcleo en  $L(D)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $\mathcal{A} \subseteq F(D)$ , un cuasinúcleo por flechas de  $D$ , es decir, para cualquier pareja de elementos distintos  $\hat{h}$  y  $\hat{k}$  en  $\mathcal{A}$ , no existe un  $\hat{h}\hat{k}$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 y no existe un  $\hat{k}\hat{h}$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 en  $D$ , además,  $\forall \hat{h} = (u, \nu) \in F(D) - \mathcal{A}$ , existe  $\hat{k} = (w, x) \in \mathcal{A}$ , tal que  $D$  contiene un  $\nu x$  – camino dirigido de longitud a lo más 2, el cual contiene a  $\hat{k}$ .

Por definición de  $L(D)$ ,  $\mathcal{A}_c \subseteq V(L(D))$ .

P. D.  $\mathcal{A}_c$  es un cuasinúcleo en  $L(D)$ .

(a) Independencia de  $\mathcal{A}_c$  en  $L(D)$ .

Sean  $\hat{h}, \hat{k}$  dos elementos distintos de  $\mathcal{A}_x$ .

Por definición de cuasinúcleo por flechas, no existe un  $\hat{h}\hat{k}$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 y no existe un  $\hat{k}\hat{h}$  – camino dirigido por flechas de longitud 2 en D.

Por definición de digráfica de líneas,  $(\hat{h}, \hat{k}) \notin F(L(D))$  y  $(\hat{k}, \hat{h}) \notin F(L(D))$ .

Por lo cual,  $\mathcal{A}_x$  es independiente en  $L(D)$  . . . (1)

(b) Cuasiabsorbencia de  $\mathcal{A}_x$  en  $L(D)$ .

Sea  $\hat{h} \in V(L(D)) - \mathcal{A}_x$ .

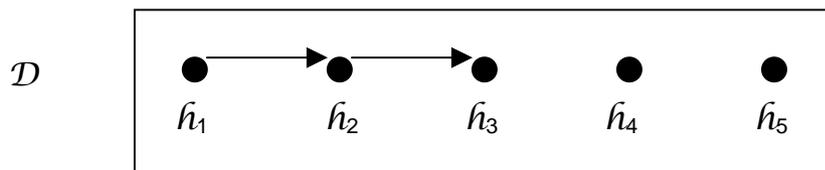
Por definición de cuasinúcleo por flechas,  $\forall \hat{h} = (u, v) \in F(D) - \mathcal{A}$ , existe  $\hat{k} = (w, x) \in \mathcal{A}$ , tal que D contiene un  $v\hat{k}$  – camino dirigido de longitud a lo más 2, el cual contiene a  $\hat{k}$ , es decir, D contiene un  $u\hat{k}$  – camino dirigido de longitud a lo más 3, el cual es un  $\hat{h}\hat{k}$  – camino dirigido por flechas en D de longitud a lo más 3.

Por definición de digráfica de líneas, existe un  $\hat{h}\hat{k}$  – camino dirigido por flechas de longitud a lo más 2 en  $L(D)$ , con  $\hat{k} = (w, x) \in \mathcal{A}_x \subseteq V(L(D))$ .

Lo anterior implica que  $\mathcal{A}_x$  es cuasiabsorbente en  $L(D)$  . . . (2)

Por (1) y (2),  $\mathcal{A}_x$  es un cuasinúcleo en  $L(D)$  ●

Obtengamos la digráfica de líneas del ejemplo anterior la cual se muestra en la siguiente ilustración:



$\mathcal{A}_\ell = \{\hat{h}_3, \hat{h}_4, \hat{h}_5\}$  es un cuasinúcleo de  $L(D)$ , ya que no existen flechas entre  $\hat{h}_3, \hat{h}_4$  y  $\hat{h}_5$ , es decir,  $\mathcal{A}_\ell$  es independiente en  $L(D)$ . Por otro lado,  $\hat{h}_1$  y  $\hat{h}_2$  son cuasiabsorbidos por  $\hat{h}_3$  mediante las flechas  $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$  y  $(\hat{h}_2, \hat{h}_3)$  contenidas en  $F(L(D))$ , como  $\{\hat{h}_1, \hat{h}_2\} = V(L(D)) - \mathcal{A}_\ell$ , entonces  $\mathcal{A}_\ell$  es un conjunto cuasiabsorbente en  $L(D)$ . Por lo tanto  $\mathcal{A}_\ell$  es un cuasinúcleo de  $L(D)$ .

COROLARIO 3.1: Sea  $D$  una digráfica de ingrado mínimo distinto de cero. Si  $(C_f) = \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$ , con  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , entonces  $L(D)$  contiene más cuasinúcleos distintos que  $D$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$ , tal que  $\delta^-(D) \geq 1$  y  $(C_f) = \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$ , con  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Por el lema 3.5, el conjunto de flechas cuyos vértices terminales forman un cuasinúcleo en  $D$ , es un cuasinúcleo por flechas en  $D$ . Por el teorema 3.4, el número de cuasinúcleos por flechas de  $D$  es menor o igual al número de cuasinúcleos de  $L(D)$ . Como los vértices finales de los elementos de un cuasinúcleo por flechas en  $D$ , no siempre forman un cuasinúcleo de  $D$  y  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  en  $D$ .

$\therefore L(D)$  contiene más cuasinúcleos distintos que  $D$  ●

La cuestión es averiguar cuáles son las características de las digráficas que satisfacen el corolario 3.1.

LEMA 3.6: Sea  $D$  una digráfica tal que  $\delta^-(D) \neq 0$ . Si  $\mathcal{A}$  es un cuasinúcleo por flechas de  $D$ , entonces  $\mathcal{B} = \{\nu \in V(D) / \hat{h} = (u, \nu) \in \mathcal{A}\}$  es un conjunto cuasiabsorbente en  $D$ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica tal que  $\delta^-(D) \neq 0$ .

Consideremos un cuasinúcleo por flechas  $\mathcal{A}$  de  $D$  y  $\mathcal{B} = \{\nu \in V(D) / \hat{h} = (u, \nu) \in \mathcal{A}\}$ .

Sea  $u \in V(D) - \mathcal{B}$ . Como  $\delta^-_D(u) \neq 0$  (por hipótesis), entonces  $\exists \hat{h} = (x, u) \in F(D)$ . Por definición de  $u$ ,  $\hat{h} \notin \mathcal{A}$ . Por definición de  $\mathcal{A}$ ,  $\exists \hat{k} = (y, \nu) \in \mathcal{A}$  tal que  $\exists u\nu$  - camino dirigido de longitud a lo más 2 en  $D$ , el cual contiene a  $\hat{k}$ . Como  $\hat{k} \in \mathcal{A}$ , entonces  $\nu \in \mathcal{B}$ , es decir,  $u$  está a distancia a lo más dos de  $\nu \in \mathcal{B}$ .

$\therefore \mathcal{B}$  es un conjunto cuasiabsorbente en  $D$  ●

OBSERVACIÓN 3. 3: Si un cuasinúcleo por flechas  $\mathcal{A}$  de  $D$  y  $\mathcal{B} = \{v \in V(D) / \hat{h} = (u, v) \in \mathcal{A}\}$  no es un cuasinúcleo en  $D$ , entonces  $\mathcal{B}$  no es un conjunto independiente de vértices en  $D$ .

En conclusión, los vértices terminales de cada conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ , no es un conjunto independiente en  $D$ .

### 3.3 Cuasinúcleos ajenos en la digráfica de líneas

En el capítulo 2, enunciamos una conjetura de Gutin, Meng, Guan y Yeo [8], la cual afirma que toda digráfica sin pozos contiene al menos dos cuasinúcleos ajenos. Recordemos que esta conjetura solo ha sido demostrada para digráficas núcleo perfectas y digráficas con cuasinúcleos de cardinalidad a lo más 2. Ya sabemos que toda digráfica con al menos dos cuasinúcleos ajenos carece de pozos. Entonces veremos que la digráfica de líneas contiene el mismo número de cuasinúcleos ajenos que su digráfica original, si  $D$  contiene dos cuasinúcleos ajenos.

LEMA 3.7: Dada una digráfica  $D$  donde  $\delta^-(D) > 0$ . Si  $D$  contiene dos cuasinúcleos ajenos, entonces  $L(D)$  contiene dos cuasinúcleos ajenos.

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $D$  una digráfica,  $Q$  y  $R$  dos cuasinúcleos ajenos de  $D$ , por lo cual,  $D$  no tiene pozos, es decir, el grado exterior mínimo es distinto de cero, además  $f(Q)$  y  $f(R)$  son dos cuasinúcleos en  $L(D)$  por el teorema 3.2. Supongamos que  $\exists u \in V(L(D))$  tal que  $u \in f(Q) \cap f(R)$  con  $u = (a, \hat{b}) \in F(D)$ , donde  $\hat{b} \in Q$  y  $a \in V(D) - Q$  pues  $Q$  es independiente, sin embargo, por definición de  $f(R)$ ,  $\hat{b} \in R$  y  $a \in V(D) - R$ , esto quiere decir que  $R \cap Q \neq \emptyset$  CONTRADICCIÓN. Ésta surgió al suponer que  $f(Q)$  y  $f(R)$  no eran ajenos.

$\therefore L(D)$  tiene dos cuasinúcleos ajenos ●

## Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis, es el estudio de cuasinúcleos. El resultado fundamental otorgado por Chvátal y Lovász [5] fue que toda digráfica contiene un cuasinúcleo. Con base a esto, observamos que si la digráfica contiene pozos y el conjunto de vértices de este tipo es un conjunto absorbente, entonces el cuasinúcleo de la digráfica es único. Si la digráfica no contiene pozos, entonces contiene al menos dos cuasinúcleos distintos.

Además, vimos las condiciones necesarias para que la digráfica contenga exactamente dos cuasinúcleos diferentes.

Retomando las observaciones anteriores, pudimos concluir que una digráfica tiene al menos tres cuasinúcleos distintos si es fuertemente conexa, de orden al menos 3 y no isomorfa a un 4-ciclo dirigido.

Notamos a la vez que si la digráfica no tiene núcleo entonces contiene al menos tres cuasinúcleos distintos. Es el caso de los torneos con exgrado no nulo.

Así que proporcionamos una familia de torneos que contienen exactamente tres reyes o cuasinúcleos de cardinalidad 1.

Hasta ahora no existe algoritmo que determine la cantidad exacta de cuasinúcleos en cualquier digráfica que contenga más de 3 cuasinúcleos distintos, sin embargo, también existen torneos donde cada vértice es rey, es decir, existen digráficas que contienen tantos cuasinúcleos distintos como vértices.

Abordamos también la existencia de cuasinúcleos ajenos en digráficas sin pozos. En este ámbito, mencionamos la conjetura: Toda digráfica sin pozos contiene al menos dos cuasinúcleos ajenos. Gregory Gutin, Khee Meng Koh, Eng Guan Tay y Anders Yeo [8], la demostraron sólo para digráficas núcleo perfectas y para digráficas con cuasinúcleos de cardinalidad a lo más 2. Es claro que toda digráfica sin pozos contiene al menos dos cuasinúcleos distintos, pero eso no necesariamente implica que sean ajenos.

Una vez estudiado el número de cuasinúcleos en una digráfica, nos enfocamos en su digráfica de líneas correspondiente. Basándonos en el teorema de Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón [6]: Toda

digráfica  $D$  con  $\delta^-(D) > 0$  tiene al menos el número de cuasinúcleos distintos que su digráfica de líneas correspondiente; tratamos de encontrar las condiciones necesarias para que una digráfica satisfaga, ya sea la igualdad o desigualdad estricta del teorema mencionado.

Para el primer caso, mencionamos que toda digráfica tiene un único cuasinúcleo si y sólo si su digráfica de líneas contiene sólo un cuasinúcleo; es decir, la digráfica satisface la igualdad del teorema para número de cuasinúcleos igual a uno. Es claro que toda digráfica isomorfa a su digráfica de líneas satisface la igualdad del teorema. Es el caso de los ciclos dirigidos.

En cuanto a las digráficas que satisfacen la desigualdad estricta del teorema señalado, definimos un cuasinúcleo por flechas para luego demostrar que si la digráfica contiene un cuasinúcleo por flechas cuyo conjunto de vértices terminales no es un cuasinúcleo de la digráfica referida, entonces ésta contiene menos cuasinúcleos distintos con respecto a su digráfica de líneas. Falta determinar la estructura de la digráfica para que contenga dicho cuasinúcleo por flechas ya que esta situación no siempre se da.

Finalmente, un nuevo paso hacia la investigación podría ser el resolver las siguientes dudas:

¿Si el conjunto de vértices terminales de todo cuasinúcleo por flechas de una digráfica es un cuasinúcleo de ella, entonces la digráfica referida contiene el mismo número de cuasinúcleos que su digráfica de líneas?

¿Tendrá toda digráfica tantos cuasinúcleos por flechas como cuasinúcleos distintos tiene su digráfica de líneas?

# Glosario de Simbología

Símbolo	Concepto	Página
$G$	Gráfica	8
$V(G)$	Conjunto de vértices de la gráfica $G$	8
$A(G)$	Conjunto de aristas de la gráfica $G$	8
$D$	Digráfica	9
$V(D)$	Conjunto de vértices de la digráfica $D$	9
$F(D)$	Conjunto de flechas de la digráfica $D$	9
$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_D$	Subconjunto de $F(D)$	10
$\Gamma^-_D(u)$	Invecinos de $u$	10
$\Gamma^+_D(u)$	Exvecinos de $u$	11
$\delta^-_D(u)$	Ingrado de $u$	11
$\delta^+_D(u)$	Exgrado de $u$	11
$D[\mathcal{A}]$	Digráfica inducida	11
$d(u, v)$	Distancia entre $u$ y $v$	13
$\mathbf{N}$	Números Naturales	13
$\bar{D}$	Complemento de $D$	16
$D^-$	Digráfica dual	16
$w(u)$	Peso de $u$	22
$\phi_s$	Función característica	25
$D^*$	Digráfica de condensación	35
$f_D(Q)$	Debilidad del cuasinúcleo $Q$	50
$\mathbf{R}$	Números reales	51
$\mathbf{Z}$	Números enteros	51
$\lfloor x \rfloor$	Mayor parte entera, menor o igual a $x$	51
$\Delta^-(D)$	Ingrado máximo de $D$	66
$L(D)$	Digráfica de líneas	106
$\mathcal{A}_L$	Conjunto de vértices de $L(D)$	108
$P(V(D))$	Conjunto potencia de $V(D)$	109
$f$	Función de $D$ a $L(D)$	109
$g$	Función de $L(D)$ a $D$	109
$K_3$	Digráfica completa de 3 vértices	120
$C_f$	Familia de los cuasinúcleos por flechas	137

## Bibliografía

- [1] Berge Claude. *The Theory of Graphs and its Applications*. Methuen & Co. Ltd. (1964), Cap. 5.
- [2] Berge Claude. *Graphs and Hypergraphs*. North Holland. New York, 1973. Chapter 14.
- [3] Berge Claude y Duchet P. *Perfect Graphs and Kernels*. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 16 (1988) 16-72.
- [4] Berge Claude y Ramachandra Rao A. *A Combinatorial Problem in Logic*. Discrete Math. 17 (1977) 23-26.
- [5] Chvátal V. y Lovász L. *Every Directed Graph has a Semi-Kernel*. Lecture Notes in Math 411 Springer-Verlag, Berlin (1974).
- [6] Galeana Sánchez Hortensia, Pastrana Ramírez Laura y Rincón Mejía Hugo A. *Semi-Kernels, Quasi-Kernels and Grundy Functions in the Line Digraph*. SIAM J. Discrete Mathematics, 4 (1991) 80-83.
- [7] Ghoshal J., Laskar R. y Pillone D. *Strong Bondage and Strong Reinforcement Numbers of Graphs*. To appear in Congr. Numer.
- [8] Gutin Gregory, Khee Meng Koh, Eng Guan Tay y Anders Yeo. *On the Number of Quasi-kernels in Digraphs*. (January, 2001).
- [9] H. Jacob, H. Meyniel. *About Quasi-Kernels in a Digraph*. Discrete Mathematics. Université Pierre et Marie, France (Received 21 October 1991, revised 10 November 1992).
- [10] Harminc Matús. *Solutions and Kernels of a Directed Graph*. Mathematics. Slovaca (1982).

[11] König D. *Theorie der Endlichen Undendlichen Graphen*. Reprinted from Chelsea Publishing Company (1950).

[12] Neumann Lara Víctor. *Seminúcleos de una Digráfica*. Anales del Instituto de Matemáticas 2. Universidad Nacional Autónoma de México (1971).

[13] Richardson M. *On Weakly Ordered Systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 113-116.

[14] Vincke Philippe. *Quasi-kernels in a Digraph*. Discrete Mathematics 20 (1977) 187-192.

[15] Von Neumann J. y Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton (1944).