

Etiquetación de politopos proyectivos.

Sergio Hiroki Koike Quintanar

MATEMÁTICO



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Koike
Quintanar
Sergio Hiroki
55 98 67 65
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
300702820
2. Datos del tutor
Dr
Javier
Bracho
Carpizo
3. Datos del sinodal 1
Dr
Jorge Luis
Arocha
Pérez
4. Datos del sinodal 2
Dr
Ricardo
Strausz
Santiago
5. Datos del sinodal 3
Dr
Juan José
Montellano
Ballesteros
6. Datos del sinodal 4
M en C
José Antonio
Gómez
Ortega
7. Datos del trabajo escrito
Etiquetación de politopos proyectivos
52 p
2007

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción. | iv |
| 1. Nociones generales. | 1 |
| 1.1. Un poco de Álgebra. | 1 |
| 1.2. Politopos abstractos. | 2 |
| 1.2.1. Politopos regulares abstractos. | 7 |
| 1.2.2. Dualidad. | 11 |
| 2. Representación de rotaciones de van Oss. | 13 |
| 2.1. Las isometrías de $\mathbf{SO}(3)$ | 14 |
| 2.2. Ejemplos de representaciones. | 17 |
| 3. El $\{3, 4, 3\}/2$ en \mathbb{P}^3. | 20 |
| 3.1. El dual del $\{3, 4, 3\}/2$ y su etiquetación con S_4 | 22 |
| 3.2. El $\{4, 3, 3\}/2$ y el $\{3, 3, 4\}/2$ | 27 |
| 3.3. La combinatoria. | 30 |
| 4. El $\{3, 3, 5\}/2$ en \mathbb{P}^3. | 35 |
| 4.1. La combinatoria del $\{3, 3, 5\}/2$ | 41 |
| 4.2. El dual del $\{3, 3, 5\}$: El $\{5, 3, 3\}$ | 42 |
| 4.3. Conclusiones. | 48 |

Introducción.

El trabajo principal de esta tesis es dar una etiquetación de los vértices de los politopos regulares de dimensión 4 en el espacio proyectivo, \mathbb{P}^3 , y a partir de esta, construir una manera combinatoria para definirlos, basándonos en los grupos de rotaciones finitos de la esfera, $\mathbf{SO}(3)$, y sus isomorfismos respectivos con algunos grupos de permutaciones. El capítulo 2, desarrolla esta construcción de manera general; es decir, definimos un homeomorfismo entre el grupo de rotaciones de la esfera y el espacio proyectivo. De esta manera, los siguientes capítulos tratan los casos particulares.

En el capítulo 3, nos enfocamos en la construcción del $\{3, 4, 3\}/2$ en el espacio proyectivo, etiquetaremos sus vértices y utilizaremos ésto para construir al $\{4, 3, 3\}/2$ y a su dual, el $\{3, 3, 4\}/2$. Con estas etiquetaciones de los vértices podremos definir a los politopos de manera puramente combinatoria. Finalmente en el capítulo 4, construimos al $\{3, 3, 5\}/2$, y damos una construcción del $\{5, 3, 3\}/2$ con los elementos del grupo alternante de 6 elementos, A_6 , como vértices. Esta construcción nos permite etiquetar a los vértices del $\{5, 3, 3\}/2$; sin embargo, como A_6 no es subgrupo de $\mathbf{SO}(3)$, nos limita las herramientas para dar una construcción combinatoria del resto de las caras del politopo. Aunque esto no demerita lo interesante que resulta ser que podamos dar una etiquetación de los vértices del $\{5, 3, 3\}/2$ con A_6 , siendo que éste, no es subgrupo de $\mathbf{SO}(3)$.

El enfoque que usamos para definir los politopos regulares es relativamente nuevo. Su definición es completamente combinatoria, lo que da pie a mucha más teoría. Cuando Coxeter dio la clasificación completa de los politopos regulares convexos, muchos creían que el trabajo estaba terminado en el área. Sin embargo, de aquella época a la actualidad, la definición de politopo se ha ido refinando hasta la que damos en el capítulo 1. La historia de esta área de las matemáticas data desde mucho antes, cuando los griegos encontraron los cinco poliedros regulares convexos. Luego, Kepler encontró otros poliedros regulares con caras no convexas, en particular el $\{\frac{5}{2}, 5\}$ y el $\{\frac{5}{2}, 3\}$. De este trabajo, Poincot y Cauchy trabajaron por separado con poliedros con figuras verticales no convexas. A mediados del siglo XIX, Schläfli descubrió politopos regulares de dimensión 4. Ya en el siglo XX, Coxeter fue el referente en la investigación de los politopos regulares. Consolidando su trabajo en su famoso libro *Regular Polytopes* [3] de 1948.

A partir de aquí, surgió una revolución y cambio de enfoque en el estudio de los politopos. Coxeter, junto con Petrie, desecharon la noción de planaridad para las caras. Grünbaum construyó polígonos con caras infinitas, para luego generalizarlo a dimensiones más altas. Hacia finales del siglo XX, McMullen, Danzer y Schulte desarrollaron la definición actual de politopo regular abstracto. En México, Javier Bracho, Luís Montejano y Jorge Arocha, en [1] y Javier Bracho en [2], clasificaron los politopos regulares con caras planas del espacio proyectivo. Parte de estos están analizados en este trabajo. Con esta nueva definición, el trabajo se ha diversificado bastante, por lo que el estudio es muy nuevo en esta nueva rama de las matemáticas que combina diversas áreas como son: Algebra, Combinatoria, Topología y Teoría de las Graficas.

Capítulo 1

Nociones generales.

Para empezar nuestro trabajo daremos las nociones generales que facilitarán el entendimiento de éste. Éstas abarcan el Álgebra, la Topología y la Teoría de las gráficas. Desarrollaremos de manera más amplia la teoría de los politopos abstractos, ya que es la teoría básica del trabajo.

1.1. Un poco de Álgebra.

En el trabajo usaremos algunos resultados básicos de grupos de permutaciones, y a continuación daremos una breve idea de las herramientas de álgebra que utilizaremos.

Dado G un grupo, denotamos su operación multiplicativamente y denotamos por e su elemento neutro.

Una *acción*(izquierda) de un grupo G en un conjunto X es una función binaria $* : G \times X \rightarrow X$ que satisface:

- $(gh) * x = g * (h * x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.
- $e * x = x$ para todo $x \in X$.

Del mismo modo, una acción es derecha si la operación esta definida como sigue $* : X \times G \rightarrow X$ y cumple la asociatividad de elementos de G y la invarianza del neutro en X .

Durante el desarrollo del trabajo usaremos algunas acciones para ayudarnos a probar resultados. Hay varios tipos de acciones de grupos; pero, en este trabajo, nos interesaran esencialmente dos.

Definición 1.1. 1. Una acción es *libre* siempre que $g \in G$ cumpla que $g*x = x$ para alguna $x \in X$, entonces $g = e$.

2. Una acción es *transitiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g * x = y$.

1.2. Politopos abstractos.

Esta rama de las matemáticas se basa en la teoría clásica de los politopos desarrollada por Coxeter [3], Schläfli y otros matemáticos. Sin embargo, en un sentido estricto, se separa del estudio geométrico de los politopos, y su enfoque es más bien combinatorio; claro que, sin perder la intuición geométrica que hay de fondo. En [8], McMullen y Schulte desarrollan, de manera muy amplia, el concepto abstracto de los politopos.

En esta sección, usaremos el termino “politopo” en un sentido abstracto; como una estructura combinatoria, más que una geométrica. Por lo que, empezaremos por dar algunas definiciones antes de enfocarnos en el estudio de este termino.

Trabajaremos con un conjunto parcialmente ordenado, (\mathcal{P}, \leq) con un elemento mínimo que denotamos \emptyset y un elemento máximo que denotamos \mathcal{P} . A los elementos de \mathcal{P} les llamaremos *caras* de \mathcal{P} . y diremos que dos caras F y G de \mathcal{P} son *incidentes* si se cumple que

$$F \leq G \text{ ó } G \leq F.$$

A cualquier $F \in \mathcal{P}$ le llamaremos *cara propia* de \mathcal{P} si $F \neq \emptyset$ y $F \neq \mathcal{P}$. En otro caso, será una cara *impropia* de \mathcal{P} . A las cadenas maximales de \mathcal{P} les llamaremos *banderas*; es decir, los subconjuntos maximales de \mathcal{P} que tengan un orden total, y al conjunto de banderas de \mathcal{P} lo denotaremos como $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Para cualesquiera F y G caras incidentes tales que $F \leq G$, llamaremos al conjunto

$$G/F = \{H \in \mathcal{P} : F \leq H \leq G\}$$

una *sección* de \mathcal{P} . Nuestra siguiente definición trata sobre la conexidad de \mathcal{P} .

Definición 1.2. Un conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P} se dice que es *conexo* si \mathcal{P} es un diamante, que más adelante definiremos (Ver figura 1.2), o si para cualesquiera dos caras propias F y G existe una sucesión finita de caras propias

$$F = H_0, H_1, \dots, H_{k-1}, H_k = G$$

de \mathcal{P} tal que H_{i-1} es incidente a H_i para $i = 1, \dots, k$. Se dice que \mathcal{P} es *fuertemente conexo* si cada sección de \mathcal{P} (incluyendo a \mathcal{P}) es conexas.

Definiremos una gráfica que nos será de utilidad en nuestro trabajo, para demostrar la conexidad en los politopos.

Definición 1.3. Definimos al *Diagrama de Hasse*, que denotaremos $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$; como la siguiente gráfica. Consideremos un orden parcial \mathcal{P} . Los vértices serán los elementos de \mathcal{P} . Y diremos que hay una arista entre x y $y \in \mathcal{P}$ si se cumple que

- $x < y$ y
- no existe $z \in \mathcal{P}$ tal que $x < z < y$. (Se acostumbra dibujar la arista hacia arriba de menor a mayor.)

Por ejemplo, consideremos el siguiente orden parcial

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, a, b, c, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\},$$

con la contención como orden. Su diagrama de Hasse es el siguiente:

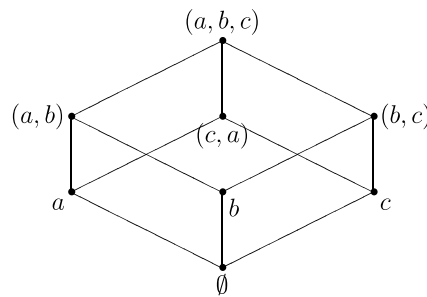


Figura 1.1: El diagrama de Hasse del orden parcial \mathcal{B} .

El diagrama de Hasse es de gran utilidad ya que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1. *Un orden parcial no trivial (con más de dos elementos), que no es un diamante, es conexo si y sólo si su diagrama de Hasse menos la cara mínima y la máxima es conexo. En notación, \mathcal{P} es conexo si y sólo si $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \setminus \{F_{-1}, F_n\}$ es conexo.*

Demostración. \Rightarrow) Sea $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ su diagrama de Hasse y, v y u dos vértices de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \setminus \{F_{-1}, F_n\}$. Es decir, son dos caras propias de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es un politopo conexo, existe una sucesión de caras incidentes $\{v = G_0, G_1, \dots, G_k = u\}$. Entonces, como $G_{i-1} \leq G_i$ o $G_{i-1} \geq G_i$ existe una trayectoria

$$T_i = \{G_{i-1} = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j} = G_i\}$$

en $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \setminus \{F_{-1}, F_n\}$. Uniendo las trayectorias T_i formamos una camino de v a u .

\Leftarrow) Sea \mathcal{P} un politopo abstracto. Sea F y G dos caras propias de \mathcal{P} . Como $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \setminus \{F_{-1}, F_n\}$ es conexo existe una trayectoria $\{F = x_1, \dots, x_k = G\}$, y como $x_i < x_{i+1}$ o $x_i > x_{i+1}$, existe una sucesión $\{F = G_0, \dots, G_k = G\}$, con $x_i = G_i$, de caras incidentes de F a G . \square

Con estas definiciones podemos proseguir a dar la definición de *politopo abstracto*.

Definición 1.4. Un *politopo abstracto* \mathcal{P} es un conjunto parcialmente ordenado con las propiedades P1, P2, P3 y P4 precisadas y comentadas a continuación.

(P1). \mathcal{P} contiene una cara mínima y una cara máxima, que denotaremos como F_{-1} y F_n , respectivamente.

(P2). Cada bandera de \mathcal{P} tiene exactamente $n + 2$ elementos.

Notemos que las propiedades 1 y 2 de la definición 1.4 implican que \mathcal{P} tiene una *función de rango* $rk : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ definida, de manera precisa, de la siguiente forma:

Si F es una cara, $rk(F)$ es el número de elementos de la cadena maximal de F/F_{-1} menos 2. Es decir, si $rk(F) = i$ la cadena maximal de F/F_{-1} tiene exactamente $i + 2$ elementos. De donde se sigue que $rk(F_{-1}) = -1$; ya que la sección $F_{-1}/F_{-1} = \{\emptyset\}$, y $rk(F_n) = n$ porque la cadena maximal de F_n/F_{-1} es una bandera, y por la propiedad 2, tiene $n + 2$ elementos. A las caras de rango i le llamaremos i -caras. Denotaremos como \mathcal{P}_i al conjunto de las i -caras de \mathcal{P} .

Para hacer notar que esta teoría se basa en la teoría clásica geométrica, a las caras de \mathcal{P} de rango 0, 1 y $n - 1$ les llamaremos *vértices*, *aristas* y *facetas*, respectivamente. Y, si F es una cara de \mathcal{P} , la sección F_n/F le llamaremos la *co-cara* de F y si F es un vértice, la *figura vertical* de F .

(P3) (Propiedad del diamante.) Si F y G son caras incidentes de \mathcal{P} , de rangos $i - 1$ e $i + 1$, respectivamente; entonces, existen exactamente 2 i -caras $H \in \mathcal{P}$ tal que $F < H < G$.

Notemos que todas las secciones de rango 1 son isomorfas. Están formadas de una cara mínima y una máxima, y dos elementos propios incomparables por la relación (\leq). A tal orden parcial le llamamos *diamante*, pues su diagrama de Hasse es de la forma siguiente:

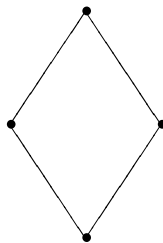


Figura 1.2: El diagrama de Hasse del *diamante*.

(P4). \mathcal{P} es fuertemente conexo.

Ejemplo. A continuación veremos algunos ejemplos para aclarar las propiedades anteriores.

1. Como ejemplos claros de un politopo de rango 2 tenemos a los polígonos geométricos. Los elementos de \mathcal{P} son el vacío, los vértices, las aristas y el polígono. El orden parcial esta dado por lo siguiente: $F \leq G$ si G es incidente a F .

Por otra parte, también tenemos ejemplos que dejan de ser geométricos.

2. Sea $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 1)\}$ con el siguiente orden: $\alpha = (a, b) \leq \beta = (c, d)$ si y solo si $a \leq c$ y $b \leq d$. A tiene una cara mínima, a saber el $(0, 0)$; sin embargo, no tiene una sola cara máxima; ya que los elementos máximos $(2, 3)$ y $(3, 1)$ son incomparables. Por lo tanto A no es politopo abstracto, aunque cumple la propiedad (P2).
3. Sea $B = \{\emptyset, a, b, c, (a, b), (c, c), (a, b, c)\}$ con la contención como orden parcial. B cumple (P1) y (P2). Tiene como cara mínima al vacío, como máxima a la terna (a, b, c) . Sus cadenas maximales tienen 4 elementos. Sin embargo, no cumple (P4); ya que B es desconexo. No hay una sucesión de caras propias entre c y a . Tampoco cumple (P3) porque entre a y (a, b, c) solo existe la cara (a, b) , tal que $a < (a, b) < (a, b, c)$.

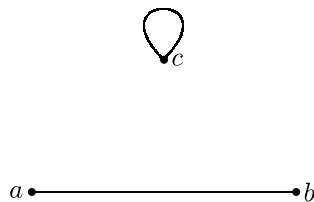


Figura 1.3:

4. Sea $B' = B \cup \{(b, c), (c, a)\}$. B' cumple, al igual que B , (P1) y (P2). Solo que en este ejemplo, además cumple (P4). Sin embargo, sigue sin cumplir (P3); ya que entre c y (a, b, c) hay tres caras, $H_1 = (b, c)$, $H_2 = (c, a)$ y $H_3 = (c, c)$ tal que $c < H_i < (a, b, c)$.
5. Sea $\mathcal{B} = \{\emptyset, a, b, c, (a, b), (b, c), (c, a), (a, b, c)\}$. \mathcal{B} cumple (P1), (P2), (P3) y (P4) por lo que es un politopo abstracto.

Si Ω es una cadena de \mathcal{P} , entonces al conjunto de rangos de Ω le llamaremos el *tipo* de Ω . Por convención, si denotamos $\Omega = \{F, G, H, \dots\}$ el orden de las caras es $F < G < H < \dots$, y su *tipo* lo denotaremos como $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, donde $i_1 < i_2 < \dots < i_m$.

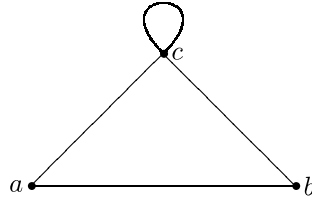


Figura 1.4:

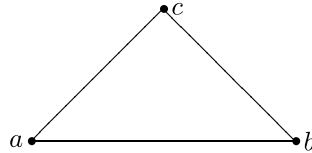


Figura 1.5: \mathcal{B} es un politopo abstracto.

Nuestro siguiente objetivo es definir una manera de comparar diferentes politopos; es decir, saber si son en “esencia” el mismo.

Una aplicación $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ entre los conjuntos de caras de dos politopos \mathcal{P} y \mathcal{Q} es un *homomorfismo* entre los politopos si *preserva la incidencia*. Es decir, si F y $G \in \mathcal{P}$, y $F \leq G$ entonces, $\varphi(F) \leq \varphi(G)$ en \mathcal{Q} . φ es un *isomorfismo* entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} si es una biyección para la cual φ y φ^{-1} son homomorfismos. Decimos que dos politopos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos. En notación

$$\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}.$$

Ejemplo. 1. Consideremos \mathcal{B} del ejemplo 5 y $\mathcal{C} = \{\emptyset, a, b, (a, b)\}$. La inclusión natural $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{B}$ es un homomorfismo entre los politopos \mathcal{B} y \mathcal{C} ; ya que preserva la incidencia de las caras de \mathcal{C} . Sin embargo, no es un isomorfismo ya que no es biyección.

2. Sea $\mathcal{A}_0 = A = \{\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}\}$ dos copias de los naturales que denotaremos como A_1 y A_2 , y cada elemento de \mathcal{A}_0 es un vértice. Diremos que hay una arista entre el 1 de A_1 y el 1 de A_2 , y en general, una arista $\{a, b\}$ si a y $b \in A_i$ con $i = 1, 2$, y $|b - a| = 1$. Denotaremos como \mathcal{A}_1 al conjunto de aristas. Finalmente, $\mathcal{A}_2 = A$, la cara máxima. A este politopo lo denotaremos como \mathcal{A} , y es también conocido como *apeirotopo* de rango 2, o *apeirágono*.

Sea $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ el conjunto de los números enteros menos el cero, el conjunto de vértices. Diremos que hay una arista entre 1 y -1, y entre dos vértices a y b , alguno de ellos distinto de 1 y -1, si $b - a = 1$ o $a - b = 1$, al conjunto de aristas lo denotaremos como \mathcal{Z}_1 . \mathcal{Z}_2 será $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Este politopo lo denotaremos como \mathcal{Z} . Finalmente, si definimos

$$\hat{\varphi} : \mathcal{Z}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$$

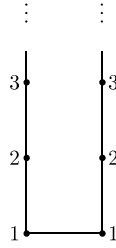


Figura 1.6: El apeirágono.

como

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} x \in A_1 & \text{si } x > 0 \\ -x \in A_2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

$\hat{\varphi}$ induce una función biyectiva $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{A}$, dada por la misma regla de asociación en las caras de \mathcal{Z} . Tenemos que φ es un isomorfismo:

Si dos elementos a y $b \in \mathcal{Z}$ son incidentes, quiere decir que $a = 1$ y $b = -1$ o, $b - a = 1$ o $a - b = 1$. Y como, $\varphi(a) = a$ y $\varphi(b) = b$ ($-a, -b$ respectivamente, si son negativos), tenemos que hay una arista entre el 1 de A_1 y el de A_2 o, $b - a = 1$ o $a - b = 1$ en \mathcal{A} ; por lo tanto, también son incidentes en \mathcal{A} .

Un *automorfismo* de un politopo \mathcal{P} es un isomorfismo de \mathcal{P} en si mismo. Y como:

- La composición de dos isomorfismos $\varphi, \psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es isomorfismo, la composición es asociativa,
- la función identidad $Id : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es un isomorfismo y
- para cada $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ isomorfismo, la inversa también es homomorfismo, por lo que se tiene que $\varphi^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ también es isomorfismo;

podemos concluir que, el conjunto de todos lo automorfismo de \mathcal{P} , operando con la composición, forman un grupo, el *grupo de automorfismos* de \mathcal{P} , que denotaremos como $\Gamma(\mathcal{P})$. Este grupo guarda consigo varias propiedades del politopo; la más importante, la definición de *regularidad* de un politopo.

1.2.1. Politopos regulares abstractos.

Para definir regularidad en los politopos abstractos, necesitamos de algunas definiciones y resultados previos que desarrollaremos en esta sección. Para empezar daremos algunas definiciones y resultados que tiene que ver con las banderas.

Dado un politopo \mathcal{P} diremos que dos banderas de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ son *adyacentes* si una difiere de la otra en exactamente una cara, y si la cara tiene rango igual a i ,

diremos que son i -adyacentes. Por la *propiedad del diamante*, si $n \geq 1$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$ y para cada bandera ϕ de \mathcal{P} existe exactamente una bandera adyacente, que denotaremos como ϕ^j , que difiere de ϕ en la j -cara. Si no existiera, entre F , la $j - 1$ -cara y G , la $j + 1$ -cara de ϕ , solo habría una cara, y si fuera más de una sola bandera adyacente, habría más de dos caras entre F y G .

Diremos que \mathcal{P} es *conexo por banderas* si para cualesquiera dos banderas ϕ y ψ de \mathcal{P} existe una sucesión

$$\phi = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k = \psi$$

tal que ϕ_{i-1} y ϕ_i son adyacentes para $i = 1, \dots, k$. Y \mathcal{P} es *fuertemente conexo por banderas* si cada sección es conexa por banderas.

Teorema 1.1. *La propiedad (P4) es equivalente a decir que \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas.*

Demostración. \Rightarrow) Procederemos a demostrar el teorema por inducción sobre el rango de \mathcal{P} .

Si $n \leq 1$ no hay nada que probar porque \mathcal{P} sólo consta de una arista o un vértice, y en el segundo caso hay dos banderas, una adyacente a la otra.

Sea $n \geq 2$, supongamos que \mathcal{P} es fuertemente conexo. Sean ϕ y ψ dos banderas de \mathcal{P} . Consideremos al conjunto $\Omega = \psi \cap \phi$. Si $\Omega \neq \emptyset$, digamos que $\Omega = \{F_{j_1}, \dots, F_{j_k}\}$ con $k \geq 1$, y j_i denota el rango de F_{j_i} . Sabemos que cada sección $F_{j_i}/F_{j_{i-1}}$ es conexa para $i = 1, \dots, k + 1$, y cada sección es de rango menor a n , por lo que la hipótesis de inducción nos dice que existe una sucesión de banderas adyacentes entre la parte de la sección de ϕ y la de ψ . Juntando las sucesiones de cada sección formamos una sucesión de banderas adyacentes de ϕ a ψ .

Si $\Omega = \emptyset$, como \mathcal{P} es fuertemente conexo, consideremos una sucesión de caras incidentes G_0, \dots, G_k , con $G_0 \in \phi$ y $G_k \in \psi$. Por cada $i = 1, \dots, k - 1$ existe una bandera ϕ_i tal que $\{G_{i-1}, G_i\} \subset \phi_i$. Definimos a $\phi_0 = \phi$ y $\phi_k = \psi$. Entonces, como $\phi_{i-1} \cap \phi_i \neq \emptyset$, existe una sucesión de banderas adyacentes de ϕ_{i-1} a ϕ_i . Uniendo cada una de las sucesiones tenemos una sucesión de banderas adyacentes de ϕ a ψ .

\Leftarrow) Supongamos ahora que \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas. Sean F y G cualesquiera caras propias no incidentes de \mathcal{P} . Consideremos banderas ϕ y ψ tal que $F \in \phi$ y $G \in \psi$. Sea $\phi = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k = \psi$ una sucesión de banderas adyacentes. Y construimos la siguiente sucesión: Sea $F = F_0$, consideremos el vértice y la arista de ϕ como F_1 y F_2 . Si ϕ_1 es 1-adyacente, entonces consideremos el vértice que está en ϕ_1 como F_3 . En cambio, si ϕ_1 es 0-adyacente, F_3 es la arista en ϕ y en ϕ_1 . Y continuamos de este modo, cambiando vértice por arista si ϕ_i es 0-adyacente o 1-adyacente a ϕ_{i-1} , el último vértice o arista esta en ψ . Esto nos da la sucesión de caras propias incidentes que buscamos, para cualesquiera dos caras de cualquier sección de \mathcal{P} . \square

Ahora, tenemos una manera distinta de definir un politopo abstracto usando la adyacencia de las banderas. Por otra parte, el siguiente resultado nos habla de la invarianza de la adyacencia bajo isomorfismos.

Lema 1.1. Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos politopos de rango n , y sea $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ un isomorfismo. Entonces φ preserva la adyacencia. Es decir, $\varphi(\phi^j) = (\varphi(\phi))^j$ para toda bandera de \mathcal{P} y para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Demostración. Supongamos que existe una bandera ϕ tal que $\varphi(\phi^j) \neq (\varphi(\phi))^j$ para alguna j . Como φ es un isomorfismo, es una biyección que preserva la incidencia. Si consideramos F y $F' \in \mathcal{P}$ las caras en donde difieren las banderas ϕ y ϕ^j respectivamente, éstas son incidentes a una $(j - 1)$ -cara, que denotaremos como G_{j-1} , y a una $(j + 1)$ -cara, que denotaremos como G_{j+1} . Por lo que $\varphi(F)$ y $\varphi(F')$ son incidentes a $\varphi(G_{j-1})$ y a $\varphi(G_{j+1})$. Notemos que $\varphi(\phi^j)$ y $(\varphi(\phi))^j$ coinciden al menos en todas las i -caras, donde $i \neq j$, y por la propiedad del *diamante*, $\varphi(\phi^j) = (\varphi(\phi))^j$. \square

De acuerdo con nuestra definición, los *automorfismos* de un politopo son permutaciones del conjunto de caras de \mathcal{P} ; pero más importante es la *acción* de $\Gamma(\mathcal{P})$ en el conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ de todas las banderas de \mathcal{P} .

Proposición 1.2. Para cada politopo \mathcal{P} , el grupo $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Demostración. Supongamos que $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ fija una bandera ϕ . Por el lema 1.1, $\varphi(\phi^j) = (\varphi(\phi))^j = \phi^j$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Por lo que φ deja invariante cualquier bandera adyacente a ϕ , y por el teorema 1.1, φ fija cualquier bandera de \mathcal{P} ; es decir, $\varphi = Id$ \square

Con esto, podemos proceder a la definición de regularidad en los politopos abstractos.

Definición 1.5. Un politopo abstracto \mathcal{P} es *regular* si su grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en el conjunto de banderas $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

En general, probar que el grupo de automorfismo es transitivo puede ser complicado por lo que el siguiente resultado facilita el estudio de los politopos regulares.

Teorema 1.2. Un politopo \mathcal{P} de rango n es regular si y sólo si, para alguna bandera ϕ de \mathcal{P} , y para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$, existe un automorfismo ρ_j de \mathcal{P} tal que $\rho_j(\phi) = \phi^j$ y además, el automorfismo resulta ser involutivo. Es decir, $\rho^2 = Id$.

Demostración. \Rightarrow) Sea ϕ una bandera de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es regular, $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo, por lo que existe ρ_j tal que $\rho_j(\phi) = \phi^j$. Como $(\phi^j)^j = \phi$, tenemos que $\rho_j(\rho_j(\phi)) = \rho_j(\phi^j)$. Ya que ρ_j fija las caras $j - 1$ y $j + 1$ de la bandera ϕ , por la propiedad P3, $\rho_j(\phi^j) = (\rho_j(\phi))^j = (\phi^j)^j = \phi$. Por lo que ρ_j es una involución.

\Leftarrow) Consideremos a ϕ una bandera de \mathcal{P} tal que la condición se satisface. Sea ψ una bandera de \mathcal{P} . Necesitamos encontrar un automorfismo φ tal que $\varphi(\phi) = \psi$. Como \mathcal{P} es politopo, el Teorema 1.1 nos dice que existe una sucesión $\phi = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k = \psi$ de banderas adyacentes. Ahora, procederemos probar el resultado por inducción sobre k . Para $k = 0$ el problema es trivial. Supongamos cierto el resultado para $0 \leq i < k$. Entonces, por hipótesis de inducción, existe un automorfismo ξ tal que $\xi(\phi) = \phi_{k-1}$, y ϕ_{k-1} es j -adyacente a ϕ_k para alguna j . Por lo que

$$\psi = \phi_{k-1}^j = (\xi(\phi))^j = \xi(\phi^j) = \xi(\rho_j(\phi)).$$

Lo que implica que $\varphi = \xi \circ \rho_j$. Por lo tanto, \mathcal{P} es regular. \square

Notemos que con el teorema anterior, ρ_j existe para una bandera si y sólo si existe para cada bandera de \mathcal{P} . Por lo que sólo necesitamos considerar una bandera

$$\phi = \{F_{-1}, F_0, \dots, F_n\}$$

para probar la regularidad de un politopo \mathcal{P} . A esta bandera la llamaremos la *bandera base* de \mathcal{P} .

A los automorfismos $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ los llamaremos los *generadores* de $\Gamma(\mathcal{P})$ con respecto a la bandera ϕ .

Una definición más débil que la regularidad, es la noción de *equivelar*, que daremos a continuación. Con ella podemos justificar la notación de Schläfli para un politopo. Recordemos que los diamantes de un politopo \mathcal{P} (es decir, las secciones de rango 1), son todas del mismo tipo. Sin embargo, esto no es cierto para secciones de rango mayor, por lo que, los politopos que cumplan esta propiedad son especiales, de donde surge la noción de *equivelar*.

Para $n \geq 2$ e $i = 1, \dots, n - 1$, sea F una $(i - 2)$ -cara y G una $(i + 2)$ -cara de \mathcal{P} incidente con F . Escribiremos como $p_i(F, G)$ al número de i -caras de \mathcal{P} en la sección G/F . Si el número sólo depende de i , y no de las caras F y G que hallamos escogido, entonces escribimos p_i en vez de $p_i(F, G)$, y llamaremos a \mathcal{P} un politopo *equivelar*, con *símbolo de Schläfli* $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$. Cuando $n = 1$ escribiremos el símbolo $\{\}$.

Si consideramos un politopo equivelar \mathcal{P} de rango n . Para obtener su símbolo de Schläfli, consideremos las secciones G/F tal que el $rk(G) - 1 = i = rk(F) +$

2, para cada $i = 1, \dots, n - 1$. Si G/F es isomorfo a un p_i -gono. Entonces, el símbolo de Schläfli del politopo es $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$. Con el diagrama de los polígonos podemos construir el símbolo de Schläfli de cualquier politopo equivelar.

Un polígono de n lados tiene n vértices y n aristas, y en cada vértices inciden dos aristas, por lo que el diagrama de Hasse debe de ser como se muestra en la figura 1.7.

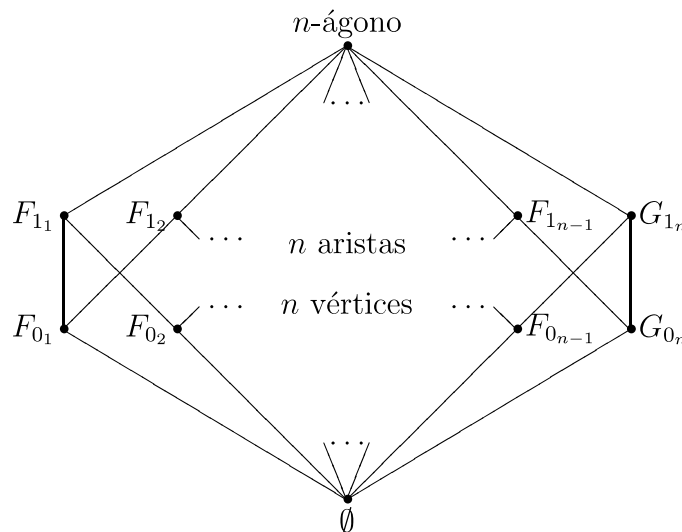


Figura 1.7: El diagrama de Hasse de un n -ágono.

1.2.2. Dualidad.

Diremos que una biyección $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es una *dualidad* si δ y δ^{-1} invierten la *incidencia*. Es decir, si $F \leq G$ en \mathcal{P} , entonces $\delta(F) \geq \delta(G)$. Y llamaremos a \mathcal{Q} el *dual* de \mathcal{P} . Si \mathcal{P} es un politopo isomorfo a \mathcal{Q} y existe una dualidad entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} , entonces diremos que \mathcal{P} es *autodual*.

Ejemplo. Sea $B = \{a, b, c\}$.

Consideremos el politopo $\mathcal{B} = \{\emptyset, a, b, c, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$ con la contención como orden, y \mathcal{B}^* el conjunto de los complementos de las caras de \mathcal{B} en B . Es decir, $\mathcal{B}^* = \{(a, b, c), (b, c), (c, a), (a, b), c, a, b, \emptyset\}$ con el siguiente orden: $a \preceq b$ si $b \subseteq a$. La función identidad induce una función biyectiva $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ tal que, si $F \leq G$ en \mathcal{B} , tenemos que $\delta(F) \succeq \delta(G)$. Por lo tanto, \mathcal{B} es dual a \mathcal{B}^* . Y además $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^*$. Por lo que \mathcal{B} es autodual.

Notemos que en el ejemplo anterior el orden de \mathcal{B} lo invertimos para formar \mathcal{B}^* , esta función induce una dualidad en cualquier politopo \mathcal{P} . Aunque no siempre \mathcal{P} resulta ser autodual.

Para terminar las nociones generales definiremos una gráfica que usaremos a lo largo del trabajo:

Sea \mathcal{P} un politopo abstracto. Definimos a la gráfica $G = Sk^1(\mathcal{P})$, que llamaremos el 1-esqueleto de \mathcal{P} , de la siguiente manera: $V(Sk^1(\mathcal{P})) = F_0$; es decir, el conjunto de vértices de \mathcal{P} , y $E(Sk^1(\mathcal{P})) = F_1$, el conjunto de aristas de \mathcal{P} .

Capítulo 2

Representación de rotaciones de van Oss.

En este capítulo desarrollaremos la herramienta básica que vamos a necesitar a lo largo del trabajo. Una de ellas, y la más importante, es la *Representación de rotaciones de van Oss*.

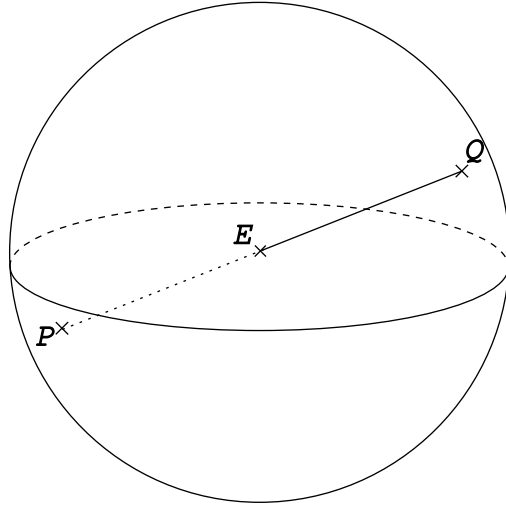
El matemático griego C. Stephanos desarrollo una forma de representar una rotación P con eje por el origen de \mathbb{R}^3 , por un punto $p \in \mathbb{R}^3$. Después, el profesor S. L. van Oss de la Universidad de Leiden redescubrió la representación de Stephanos en una forma modificada:

Consideremos una bola de radio $\frac{\pi}{2}$ con centro en el origen, que denotaremos como \mathbb{B}^3 . A cada punto $p \in \mathbb{B}^3$ le asociamos una rotación P con eje en misma dirección de p y con ángulo de rotación igual al doble de la distancia de p al origen. De esta manera, las rotaciones de ángulo π están representadas por puntos en la frontera de la bola de radio $\frac{\pi}{2}$, y como no hay manera de diferenciar dos rotaciones de π en direcciones opuestas, éstas son las mismas. Por tanto, estamos construyendo una equivalencia entre los puntos de la frontera que son antípodas (ver figura 1.1). Es decir, estamos construyendo una correspondencia continua uno a uno entre las rotaciones con eje en el origen y todos los puntos del espacio proyectivo de dimensión 3, \mathbb{P}^3 . Si denotamos como $\mathbf{SO}(3)$ al grupo de todas las rotaciones en el origen de \mathbb{R}^3 , con la composición como operación, podemos concluir que $\mathbf{SO}(3)$ es homeomorfo a \mathbb{P}^3 .

Tomemos como convención que para R y $P \in \mathbf{SO}(3)$, $RP = P \circ R$. En $\mathbf{SO}(3)$, visto en la *representación de van Oss*, existe una métrica dada en la siguiente

Definición 2.1. La distancia entre P y Q , $d(P, Q)$, es igual al valor absoluto de la mitad del ángulo de rotación de PQ^{-1} .

Observemos que está distancia no corresponde a la distancia en \mathbb{R}^3 cuando representamos rotaciones con van Oss; pero resulta que sí corresponde con la

Figura 2.1: $P \sim Q$ son rotaciones de π .

métrica estándar de \mathbb{P}^3 . Así que la *representación de van Oss* sólo servirá para visualizar a $\mathbf{SO}(3)$.

2.1. Las isometrías de $\mathbf{SO}(3)$.

En esta sección trataremos las propiedades y herramientas que obtenemos de la representación de van Oss, y que nos ayudaran a lo largo de este trabajo. Hemos observado que la distancia entre dos puntos de \mathbb{P}^3 representados por rotaciones de $\mathbf{SO}(3)$ es igual a la mitad del ángulo de la rotación del cociente que obtenemos de estas dos rotaciones.

Sea Q y $R \in \mathbf{SO}(3)$. Definimos la siguiente operación $R_r : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ como:

$$R_r(Q) = QR.$$

Al multiplicar por la izquierda, conviene tomar el inverso. Sea entonces $R_l : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ definida como:

$$R_l(Q) = R^{-1}Q.$$

Es claro que estas dos operaciones son homeomorfismos pues $R_r^{-1} = (R^{-1})_r$ y $R_l^{-1} = (R^{-1})_l$. Y además, son isometrías: Dadas $P, Q \in \mathbf{SO}(3)$, puesto que

$$PR(QR)^{-1} = PQ^{-1}.$$

Entonces,

$$d(R_r(P), R_r(Q)) = PQ^{-1},$$

y análogamente se demuestra que R_l es isometría^a.

Ahora, como R puede obtenerse de la identidad por una variación continua de elementos de $\mathbf{SO}(3)$, que en la representación de van Oss consiste en moverse radialmente del origen al punto correspondiente a R , las operaciones R_r (R_l) son *isometrías* que preservan la orientación de \mathbb{P}^3 .

Propiedad 2.1. Sean Q y R en $\mathbf{SO}(3)$. Entonces

$$Q_r \circ R_r = (RQ)_r, \quad Q_l \circ R_r = R_r \circ Q_l, \quad Q_l \circ R_l = (RQ)_l.$$

Demostración. Sea P una rotación en $\mathbf{SO}(3)$. Entonces $((P)R)Q = P(RQ)$. También tenemos que $Q^{-1}(PR) = (Q^{-1}P)R$. Por último, $Q^{-1}(R^{-1}P) = (Q^{-1}R^{-1})P = (RQ)^{-1}P$. \square

Así que tenemos que el producto de dos *operaciones derechas (izquierdas)* es una *operación (izquierda)*, y *operaciones* de tipos opuestos conmutan. Por otra parte, las multiplicaciones por la derecha (izquierda) resultan ser una acción de $\mathbf{SO}(3)$ en sí mismo. Además toda *acción derecha* diferente de la identidad es distinta a cualquier *acción izquierda*.

Teorema 2.1. Sean R y $Q \in \mathbf{SO}(3)$. Si $R_r = Q_l$, entonces son la identidad.

Demostración. Supongamos que existen R y Q rotaciones tal que $R_r = Q_l$. Entonces, aplicando estas operaciones a la identidad tenemos que $R = Q^{-1}$. Consideremos $P \in \mathbf{SO}(3)$, entonces

$$PR = R_r(P) = Q_l(P) = Q^{-1}P = RP.$$

Así que R conmutaría con cualquier rotación $P \in \mathbf{SO}(3)$, por lo que tiene que ser la identidad. \square

Para acabar de entender las isometrías que preservan la orientación de \mathbb{P}^3 , usando el homeomorfismo con $\mathbf{SO}(3)$, primero veremos cómo son las que fijan a la identidad; es decir, al origen en la representación de van Oss.

Lema 2.1. Sea $Q \in \mathbf{SO}(3)$. La operación $Q_l \circ Q_r$ fija a la identidad. Además, esta operación se ve como la rotación Q en la representación de van Oss.

Demostración. $Q_l \circ Q_r$ fija la identidad dado que

$$Q_l \circ Q_r(\text{Id}) = Q^{-1}\text{Id}Q = \text{Id}.$$

^aCoxeter, en [4], a las *operaciones* R_r o R_l les llama *giros derechos o izquierdos* respectivamente; ya que, geoméricamente son giros de tornillo (traslación seguida de rotación sobre el mismo eje).

Ahora, queremos demostrar que la función

$$Q_l \circ Q_r(P) = Q^{-1}PQ$$

se ve en la representación de van Oss como la rotación Q .

Sea $Q \in \mathbf{SO}(3)$. Consideremos a la rotación Q como una rotación de la esfera, que denotaremos como \mathbb{S}^2 , de ángulo α en un punto $q \in \mathbb{S}^2$. Sea $P \in \mathbf{SO}(3)$ otra rotación con ángulo β en un punto $p \in \mathbb{S}^2$. Queremos demostrar que $Q^{-1}PQ$ es la rotación en el punto $Q(p) \in \mathbb{S}^2$ con ángulo β .

Consideremos el triángulo formado por p , q y r , que es la intersección de las rectas que definen los ángulos $\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\beta}{2}$ en q y p respectivamente. Y diremos que γ es ángulo $\angle qrp$ (Ver figura 1.2). Sea R la rotación en el punto r con ángulo 2γ .

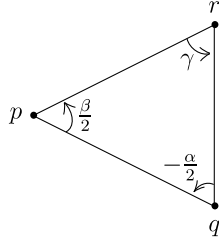


Figura 2.2:

Un resultado de geometría nos dice que, dado un triángulo ABC con ángulos μ_1 , μ_2 y μ_3 en los puntos A , B y C respectivamente, la composición de las tres rotaciones en los puntos A , B y C del doble de sus ángulos respectivos es la identidad. Aplicado a nuestro problema, tenemos que $Q^{-1}PR = Id$ (es Q^{-1} ya que tomamos el ángulo negativo). Es decir,

$$R^{-1} = Q^{-1}P.$$

Si consideramos, ahora al triángulo que definen los puntos q , r y p' , que es la intersección de las rectas que definen los ángulos $-\gamma$ y $\frac{\alpha}{2}$ en r y q respectivamente, el ángulo en el punto p' es $\beta/2$, pues este triángulo es el reflejado de pqr en qr . Definimos a P' la rotación en el punto p' de ángulo β (ver figura 1.3). Entonces, aplicando de nuevo el teorema,

$$Id = R^{-1}QP' = Q^{-1}PQP',$$

por lo que

$$P'^{-1} = Q^{-1}PQ.$$

Dado que la orientación del ángulo de la rotación P'^{-1} es la misma que la del ángulo de la rotación P , tenemos que $Q_l \circ Q_r(P) = Q^{-1}PQ$ es la rotación de β

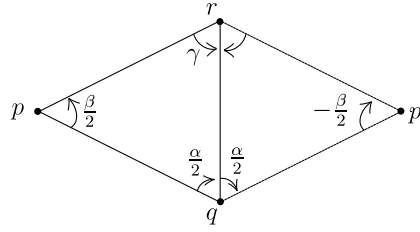


Figura 2.3:

en $p' = Q(p)$. Por lo tanto, $Q_l Q_r$ se ve en la representación de van Oss como la rotación Q . \square

Con este resultado podemos probar el siguiente

Teorema 2.2. *Cualquier isometría que preserve la orientación se puede expresar como el producto de transformaciones izquierdas y derechas.*

Demostración. Supongamos, que además de las transformaciones izquierdas y derechas, existen otro tipo de *isometría* que preserve la orientación. Consideremos σ una *isometría* de \mathbb{P}^3 que preserve la orientación, y supongamos que a la identidad la manda a R . Entonces $(R^{-1})_r \circ \sigma$ deja a la identidad invariante. Por lo que tiene que ser forzosamente una rotación, que además de dejar fija la identidad debe dejar fija a una rotación, digamos Q . Es decir, por el lema anterior, tiene que ser de la forma $Q^{-1}XQ$, con $X \in \mathbf{SO}(3)$. Por lo que $(R^{-1})_r \circ \sigma = Q_l \circ Q_r$ de donde se sigue que

$$\sigma = R_r \circ Q_l \circ Q_r = Q_l \circ (QR)_r.$$

\square

Más aún, su representación es única.

Supongamos que existen $Q_l \circ R_r = Q'_l \circ R'_r$. Lo que implica que

$$(R^{-1}R')_r = R'_r(R^{-1})_r = (Q'^{-1})_l Q_l = (QQ'^{-1})_l,$$

por lo que están obligadas a ser la identidad. Por lo tanto,

$$Q'_l = Q_l \text{ y } R'_r = R_r.$$

2.2. Ejemplos de representaciones.

Veamos algunos ejemplos de la *Representación de rotaciones de van Oss*.

1. Consideremos un polígono regular de n lados en \mathbb{R}^3 con centro en el origen. El grupo de rotaciones del polígono consta de rotaciones de ángulos múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$ cuyo eje, para todas las rotaciones, es perpendicular al polígono. Por ejemplo, en un hexágono regular. Los elementos del grupo de rotaciones son:
Rotaciones en $\pm\frac{2\pi}{6}$, en $\pm\frac{2\pi}{3}$, una de π y la identidad. Ver figuras 1.4 y 1.5.

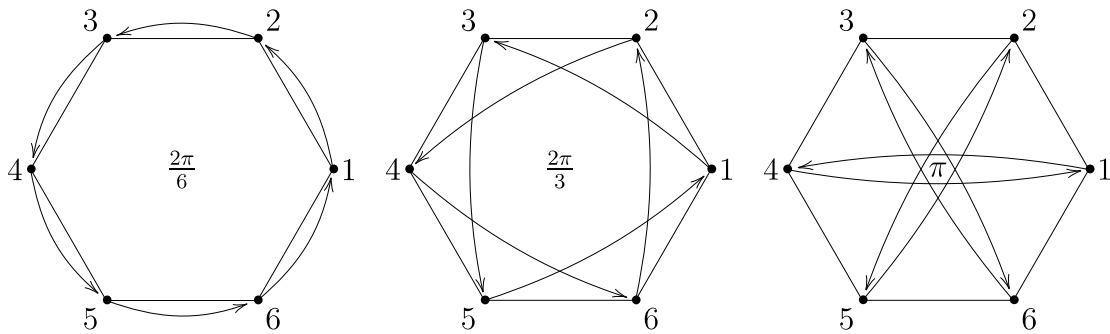


Figura 2.4: Las diferentes rotaciones del hexágono.

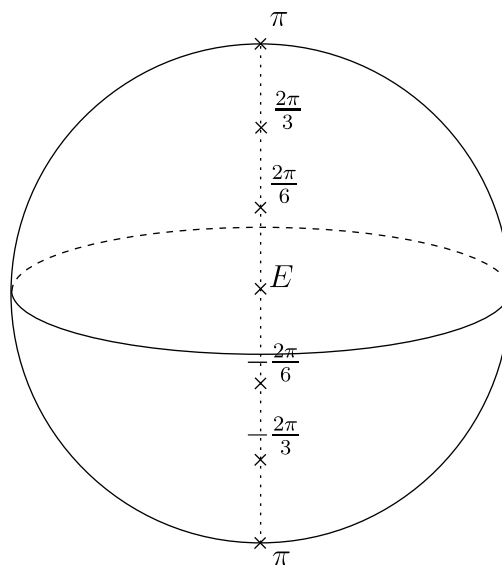


Figura 2.5: La representación de van Oss de las rotaciones del hexágono.

2. Consideremos un prisma rectangular de un polígono regular de n lados en \mathbb{R}^3 con centro en el origen. Tenemos, además de las rotaciones sobre el eje que pasa por los centros de los polígonos opuestos (en múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$), rotaciones de π con ejes perpendiculares a éste. Sin embargo, su posición varía según sea un polígono de número de lados pares o impares. Si es par, está en los centros de los rectángulos opuestos y en vértices opuestos. Si es impar, está en el centro de un rectángulo y la arista opuesta a éste. Por

ejemplo, un prisma de un pentágono. Los elementos de su grupo son: dos rotaciones de $\pm \frac{2\pi}{5}$ y dos de $\pm \frac{4\pi}{5}$ con eje en los pentágonos opuestos, y cinco rotaciones de π sobre cada centro de los rectángulos. Ver figura 1.6.

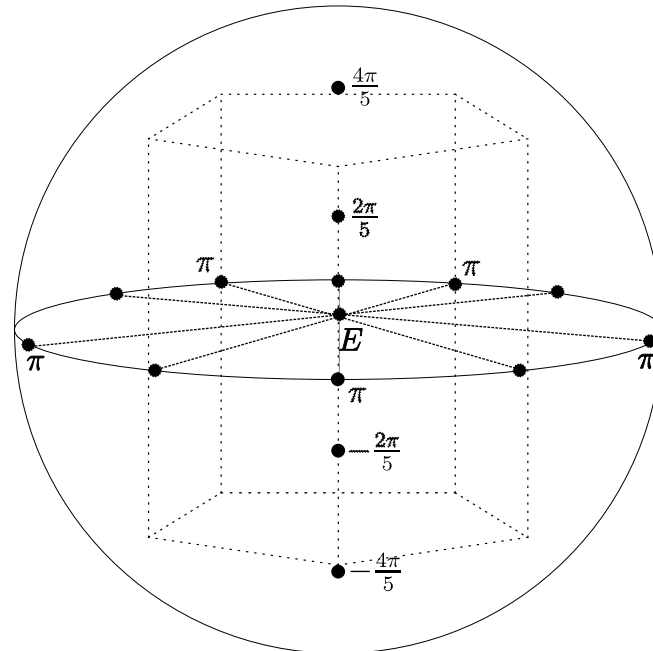


Figura 2.6: La representación de van Oss de las rotaciones del prisma de un pentágono.

En los siguientes capítulos desarrollaremos ampliamente algunos ejemplos más complejos que los vistos anteriormente: Como, por ejemplo, los grupos de rotaciones del tetraedro, $\{3, 3\}$, y del dodecaedro, $\{5, 3\}$.

Capítulo 3

El $\{3, 4, 3\}/2$ en \mathbb{P}^3 .

En este capítulo construiremos al $\{3, 4, 3\}/2$, que es un politopo de rango 4 que vive naturalmente en el espacio proyectivo, con los elementos del grupo de rotaciones del tetraedro, que, siguiendo a Coxeter, lo denotaremos como \mathfrak{T}_{12} , y le daremos una etiquetación a sus vértices con elementos del grupo alternante de 4 elementos, A_4 . Con estos elementos, también construiremos al $\{4, 3, 3\}/2$ y al $\{3, 3, 4\}/2$. Veremos que los puntos de la representación de van Oss de los elementos del grupo de rotaciones del cubo son los vértices del $\{3, 4, 3\}/2$ y su dual. Demostraremos que el dual de este politopo es él mismo. Y le daremos una etiquetación a los vértices del dual con los elementos impares del grupo simétrico de orden 4, S_4 .

Consideremos un tetraedro regular. Observemos que el grupo de rotaciones de éste, consta de ocho rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$, 4 en los centros de las caras y 4 en los vértices, tres rotaciones de π en los puntos medios de aristas no adyacentes y la identidad. Notemos que una rotación de $\frac{2\pi}{3}$ en un vértice resulta ser el inverso de la rotación de $\frac{2\pi}{3}$ en su cara opuesta.

Ahora, etiquetemos los vértices del tetraedro con los índices $\{1, 2, 3, 4\}$. Notemos que en un vértice fijo a , una rotación P de $\frac{2\pi}{3}$ sobre dicho vértice permuta cíclicamente al conjunto de vértices restantes $\{b, c, d\}$ y deja fijo el vértice a . De la misma forma lo hace una rotación Q en el centro de una cara $\{b, c, d\}$. Entonces, en términos de permutaciones de los índices, P y Q son ciclos de periodo 3 que dejan fijo a a ; es decir, la etiqueta de P , es $p = (bcd)$ y la de Q , es $q = (bdc)$. Usaremos la notación de ciclos para las permutaciones. Un ejemplo de estas rotaciones se puede apreciar en la figura 1.1. En total, son ocho ciclos distintos, que son el total de ciclos de periodo 3 que tiene A_4 .

Por otra parte una rotación R de π en el punto medio de la arista (a, b) , también es una rotación de π en el punto medio de la arista (c, d) . Por lo que la rotación R se aplica en las etiquetas de los vértices como la permutación $(ab)(cd)$.

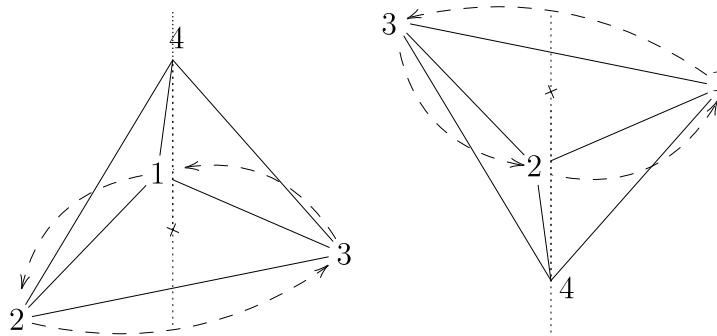


Figura 3.1: Las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ del tetraedro.

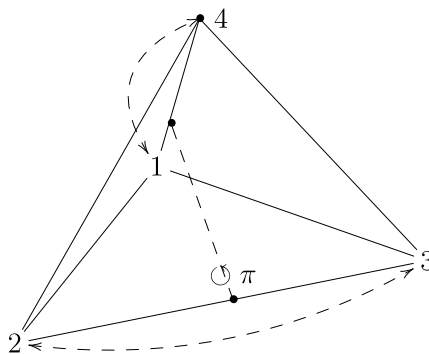


Figura 3.2: Las rotaciones de $\frac{\pi}{2}$ del tetraedro.

Finalmente, A_4 consta de ocho ciclos de periodo 3, tres parejas de trasposiciones y la identidad. Por lo que

$$\mathfrak{I}_{12} \cong A_4.$$

Por la representación de van Oss, las ocho rotaciones del tetraedro, de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ en vértices y caras, están a distancia $\frac{\pi}{3}$ de la identidad, mientras que las 3 rotaciones de π están a distancia $\frac{\pi}{2}$. Notemos que, en A_4 , si tomamos por pares los cocientes por la derecha nos dan como resultado una pareja de trasposiciones o un ciclo de periodo 3. Lo que significa, por el isomorfismo entre \mathfrak{I}_{12} y A_4 , que la distancia entre dos puntos de \mathfrak{I}_{12} en la representación de van Oss es $\frac{2\pi}{3}$ o $\frac{\pi}{2}$, entendida como segmento en el espacio proyectivo.

Si dibujamos una arista entre dos puntos de la representación de van Oss de \mathfrak{I}_{12} cuando el cociente es una rotación de $\frac{2\pi}{3}$, lo que obtenemos es el dibujo de la gráfica del $\{3, 4, 3\}/2$.

Las 8 rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ forman un cubo (Ver figura 1.3), y las rotaciones de π están en el plano polar de la identidad justo en la dirección del centro de las caras de este cubo, y como el cociente de cualquier rotación de $\frac{2\pi}{3}$ con una rotación de π es, de nuevo, una rotación de $\frac{2\pi}{3}$, existe una arista entre cualquier rotación de π y de $\frac{2\pi}{3}$. De esta manera, definimos a las 2-caras del $\{3, 4, 3\}/2$ como todos los triángulos que se forman y las 3-caras son las regiones en que estos triángulos parten a \mathbb{P}^3 , que resultan ser octaedros. Por lo que formamos un politopo que denotaremos como $\{3, 4, 3\}/2$. Ver figura 1.4.

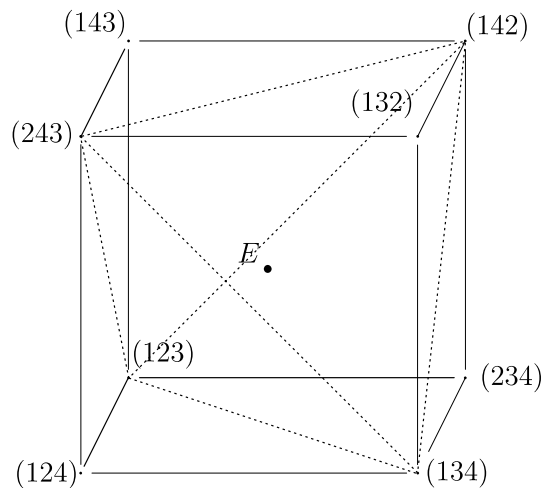


Figura 3.3: El cubo que definen las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ con sus etiquetas.

3.1. El dual del $\{3, 4, 3\}/2$ y su etiquetación con S_4 .

A continuación construiremos el dual del $\{3, 4, 3\}/2$ con elementos del grupo octaédrico, que es el grupo de rotaciones del cubo, y lo denotaremos como \mathfrak{D}_{24} . Para facilitarnos el trabajo, primero probaremos que \mathfrak{D}_{24} es isomorfo al grupo de simetrías de cuatro elementos S_4 .

Consideremos un cubo. El grupo de rotaciones de éste consta de seis rotaciones de $\frac{\pi}{2}$, una por cada cara. Ocho rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ en cada vértice; como son ocho vértices hay ocho rotaciones en $\frac{2\pi}{3}$. Tres rotaciones de π con eje en los centros de las caras, una por cada pareja de caras opuestas. Y seis rotaciones de π en los puntos medios de aristas opuestas. Hay doce aristas, por lo que son seis parejas de aristas opuestas. En total, el grupo consta de 24 rotaciones distintas.

Ahora, etiquetemos los vértices del cubo de la siguiente manera: Como hay dos tetraedros inscritos en un cubo, etiquetemos los vértices de éstos

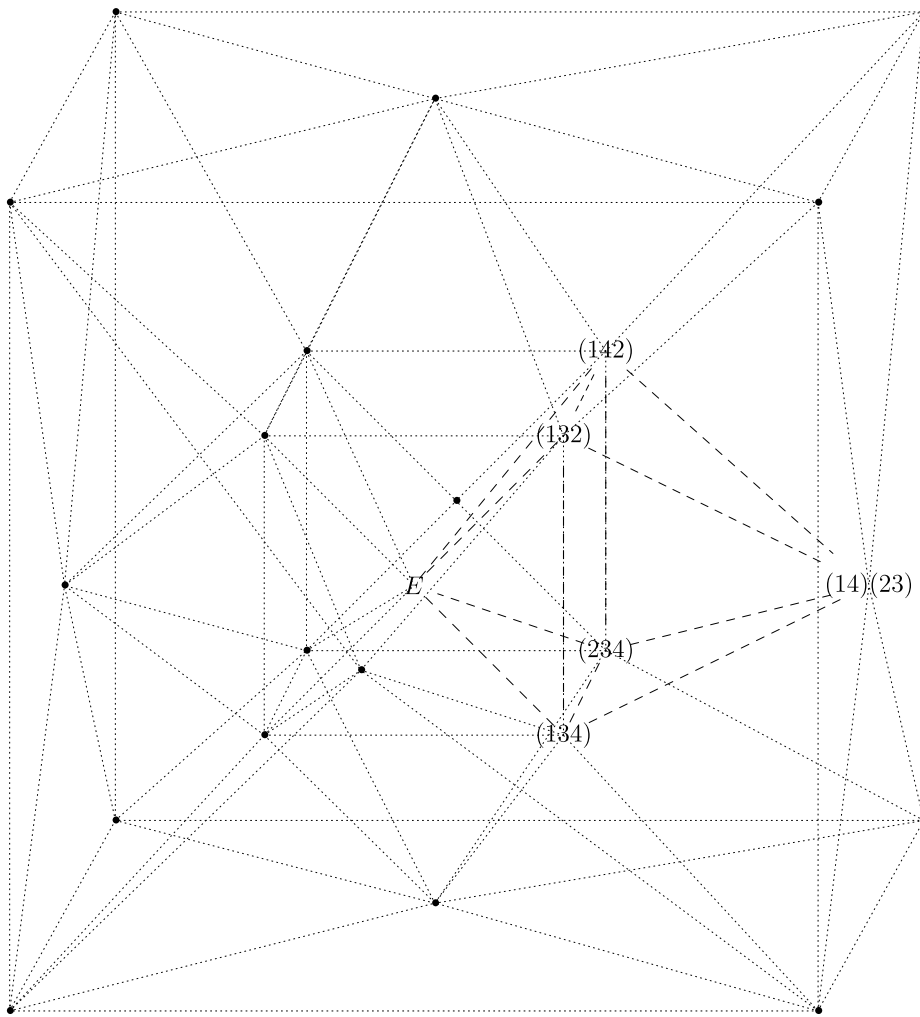


Figura 3.4: El $\{3, 4, 3\}$ en \mathbb{P}^3 etiquetado con los elementos de \mathfrak{S}_{12} .

con los índices $\{1, 2, 3, 4\}$ de tal forma que vértices opuestos tengan el mismo índice, tal como se ve en la figura 1.5. Otra manera de verlo es coloreando las cuatro parejas de antípodas.

Con esta etiquetación de los vértices obtenemos una acción de \mathfrak{D}_{24} en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ que da el isomorfismo con S_4 .

Cada rotación de $\frac{\pi}{2}$ sobre una cara permuta cíclicamente todos los vértices, de tal manera, que obtenemos los siguientes ciclos de periodo cuatro, y a cada rotación de $\frac{\pi}{2}$ en las caras le corresponde un ciclo de periodo 4.

$$(1234), (1324), (1423), (1432), (1243), (1342) \quad (3.1)$$

Las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ en los vértices dejan dos vértices fijos (que son vértices opuestos por lo que deja fijo uno de los cuatro índices). Por lo tanto, los ocho

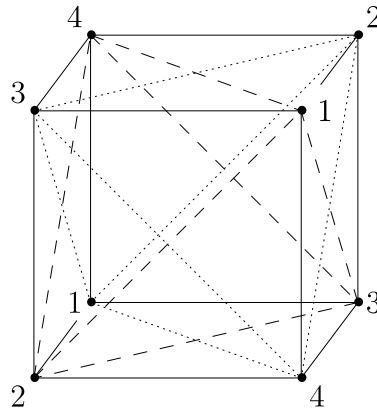


Figura 3.5:

ciclos de periodo 3 de S_4 etiquetan las ocho rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$.

$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243) \quad (3.2)$$

Las rotaciones de π con eje en los centros de las caras son los cuadrados de 1.1, que son representadas por las tres parejas de trasposiciones de A_4 .

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23) \quad (3.3)$$

Finalmente, las rotaciones de π sobre los puntos medios de aristas opuestas permuta las parejas de vértices opuestos. Por ejemplo, una rotación de π sobre los puntos medios de las aristas (1, 3) y (3, 1) manda a los vértices 1 en los vértices 3; mientras que el resto de los vértices van a su vértice opuesto. Es decir, el vértice 2 va al opuesto 2 y el 4 al 4. Por lo tanto las siguientes transposiciones etiquetan estas rotaciones:

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34). \quad (3.4)$$

Para ilustrar mejor estas rotaciones observemos la figura 1.6.

Por lo tanto, demostramos que

$$\mathfrak{D}_{24} \cong S_4.$$

De esta manera, las rotaciones de \mathfrak{D}_{24} se etiquetan con los elementos de S_4 . Con la representación de van Oss, los puntos en \mathbb{P}^3 , que se distribuyen de acuerdo con sus distancias desde Id , consisten de

$$\begin{aligned} &6, \text{ como el } (1234), \text{ a distancia } \frac{\pi}{4} \\ &8, \text{ como el } (123), \text{ a distancia } \frac{\pi}{3} \\ &6, \text{ como el } (12), \text{ a distancia } \frac{\pi}{2} \\ &\text{y } 3, \text{ como el } (12)(34), \text{ a distancia } \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

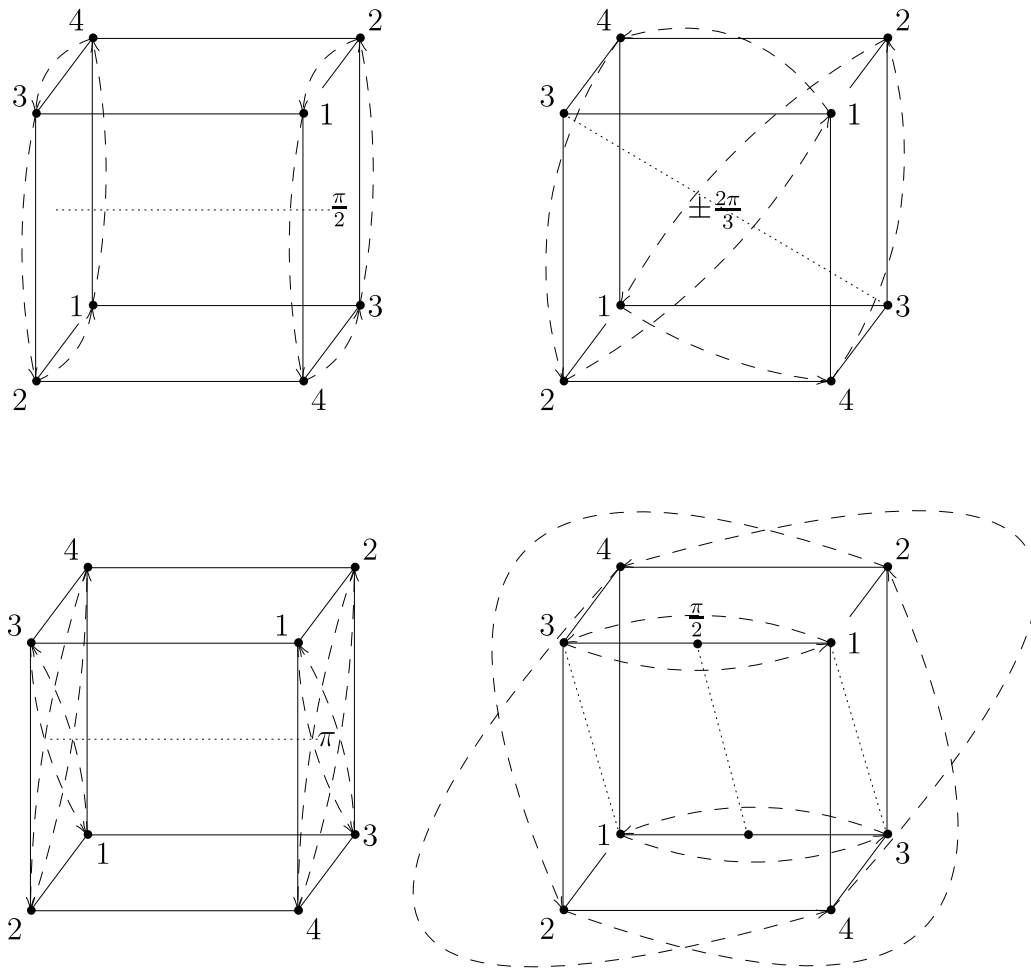


Figura 3.6: Las distintas rotaciones del cubo.

Sea Q la rotación etiquetada por la permutación (1234) . Como Q_r es una isometría de $\mathbf{SO}(3)$, $Q_r(\{3, 4, 3\}/2)$ es otra copia del $\{3, 4, 3\}/2$ cuyos vértices están en los puntos etiquetados por las permutaciones impares de S_4 .

Para probar que, en efecto, el $\{3, 4, 3\}/2$ es autodual, vamos a checar que el centro de un octaedro del $\{3, 4, 3\}/2$ corresponde a una rotación etiquetada con alguna permutación impar de S_4 , lo cual es simple. Si consideramos a la identidad, una rotación de π en la cara del cubo y las cuatro rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ en los vértices de dicha cara, estos 6 vértices forman un octaedro del $\{3, 4, 3\}/2$ (ver figura 1.4). Entonces, el centro de este octaedro está en el punto medio del segmento que define la identidad y la rotación de π , por lo que es una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en la misma dirección que la rotación de π , y por tanto, una rotación de $\frac{\pi}{2}$ de la cara del cubo. Por lo tanto, el $\{3, 4, 3\}/2$ es autodual. Ver figura 1.7.

De esta manera, podemos encontrar los centros de cada octaedro del $\{3, 4, 3\}/2$.

El cuadro 1.1 muestra los centros correspondientes a cada octaedro. Los ciclos de periodo 3 están acomodados de manera tal, que forman un 4-ciclo en la gráfica del $\{3, 4, 3\}/2$.

| Octaedro | Centro |
|--|----------|
| $E, (12)(34), (243), (124), (134), (132)$ | (1324) |
| $E, (14)(23), (243), (143), (123), (124)$ | (1243) |
| $E, (13)(24), (243), (132), (142), (143)$ | (1432) |
| $E, (14)(23), (134), (234), (142), (132)$ | (1342) |
| $E, (12)(34), (143), (142), (234), (123)$ | (1423) |
| $E, (13)(24), (124), (123), (234), (134)$ | (1234) |
| $(13)(24), (14)(23), (132), (142), (124), (123)$ | (34) |
| $(13)(24), (12)(34), (142), (143), (134), (124)$ | (23) |
| $(13)(24), (14)(23), (143), (243), (234), (134)$ | (12) |
| $(13)(24), (12)(34), (132), (243), (234), (123)$ | (14) |
| $(12)(34), (14)(23), (234), (142), (124), (243)$ | (13) |
| $(12)(34), (14)(23), (132), (134), (143), (123)$ | (24) |

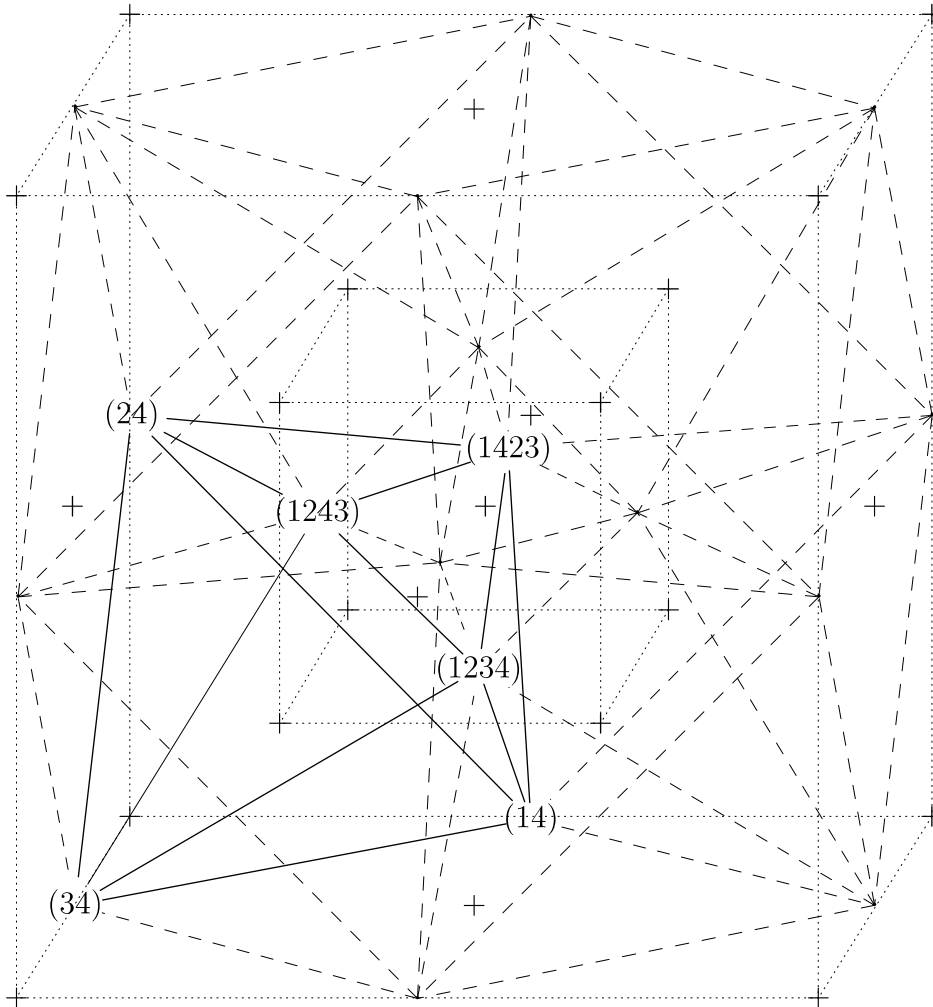
Cuadro 3.1: Las etiquetas de los octaedros del $\{3, 4, 3\}/2$.

Notemos que con el isomorfismo entre \mathfrak{O}_{24} y S_4 podemos operar las isometrías $P_l R_r$ con las permutaciones p y r que etiquetan a las rotaciones P y R . En particular, si conjugamos con q los elementos de A_4 obtenemos una isometría que deja fija a la identidad. Por ejemplo, consideremos el octaedro que definen los vértices $E, (13)(24), (132), (142), (143), (243)$. La etiqueta $q = (1234)$ de la rotación Q de $\frac{\pi}{2}$ en la misma cara que la rotación que se etiqueta con la permutación $(13)(24)$, define una rotación en $\mathbf{SO}(3)$ que rota al octaedro, ya que

$$\begin{aligned}
 q^{-1}(132)q &= (142) \\
 q^{-1}(142)q &= (143) \\
 q^{-1}(143)q &= (243) \\
 q^{-1}(243)q &= (132).
 \end{aligned}$$

Con esto, podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.1. *Las 24 permutaciones de S_4 nos dan las etiquetas para los vértices del $\{4, 3, 4\}/2$ y su dual, en el espacio proyectivo. Las 12 permutaciones de A_4 , denotan los vértices del $\{3, 4, 3\}/2$, y las 12 restantes los vértices del dual.*

Figura 3.7: El $\{3,4,3\}$ es autodual.

3.2. El $\{4, 3, 3\}/2$ y el $\{3, 3, 4\}/2$.

Hemos logrado construir al $\{3, 4, 3\}/2$ con las rotaciones del tetraedro. Ahora, si consideramos ciertos vértices de éste, podremos construir al $\{4, 3, 3\}/2$ y al $\{3, 3, 4\}/2$.

Consideremos solamente las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ en la representación de van Oss. Obtenemos ocho puntos en \mathbb{P}^3 que, como vimos, forman un cubo, que denotaremos como \mathcal{C} . Por la representación de rotaciones de van Oss, las ocho rotaciones del tetraedro, etiquetadas por los elementos (123) , (132) , (142) , (124) , (134) , (143) , (234) y (243) de A_4 , están a distancia $\frac{\pi}{3}$ de Id . Notemos que si tomamos por pares sus cocientes por la derecha nos dan como resultado una pareja de trasposiciones o un ciclo de periodo 3. Por lo que

Definición 3.1. Diremos que hay una arista entre dos rotaciones P y Q (ambas

de $\frac{2\pi}{3}$) si PQ^{-1} es una rotación de $\frac{2\pi}{3}$.

De esta manera, existe una arista entre los vértices opuestos del cubo; ya que uno es el inverso del otro, y al tomar sus cocientes, la rotación resultante es una rotación de $\frac{2\pi}{3}$. Ver figura 1.8.

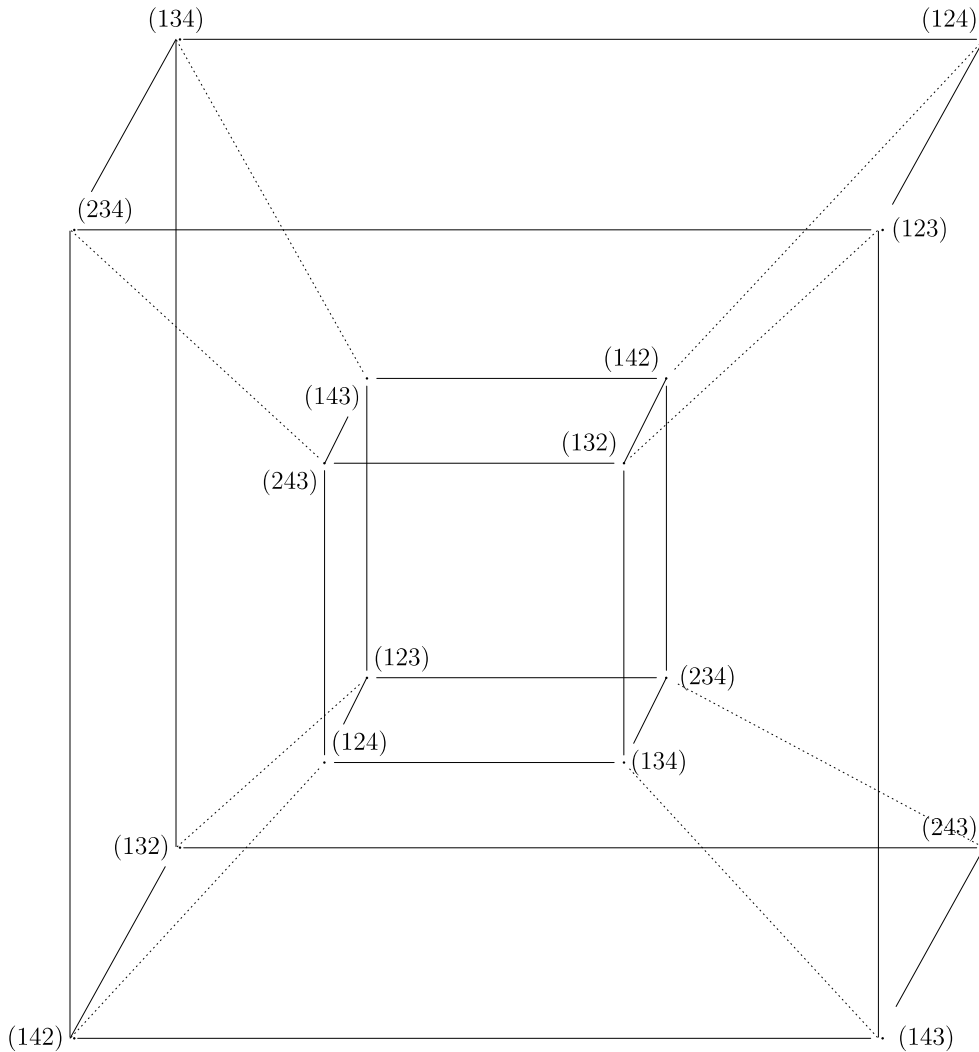


Figura 3.8: El $\{4, 3, 3\}/2$ en \mathbb{P}^3 etiquetado con elementos de A_4 .

Las 2-caras son las mismas caras del cubo más las que inducen las aristas entre dos vértices opuestos, y las 3-caras, son las regiones en las que parte las 2-caras a \mathbb{P}^3 . Estas regiones resultan ser cubos (ver figura 1.8). Notemos que todos los cubos comparten entre sí a todos sus vértices. A este politopo lo denotaremos como $\{4, 3, 3\}/2$.

Por otro lado, si consideremos a las rotaciones de π y a la identidad solamente, obtenemos 4 puntos, 3 en el plano polar de la identidad. Diremos que existe una

arista entre dos de estos puntos si el cociente de sus rotaciones es de nuevo una rotación de π . De esta manera, existe una arista entre cualesquiera dos puntos; ya que estas tres rotaciones junto con la identidad forman un grupo. Así, podemos definir a las 2-caras como cualquier triángulo que se forme y a las 3-caras, como en los casos anteriores, como las regiones en las que se parte \mathbb{P}^3 . Estas regiones son tetraedros. Ver figura 1.9. Notemos que, también en este caso, todos los tetraedros comparten sus vértices entre sí. A este politopo lo denotamos como $\{3, 3, 4\}/2$.

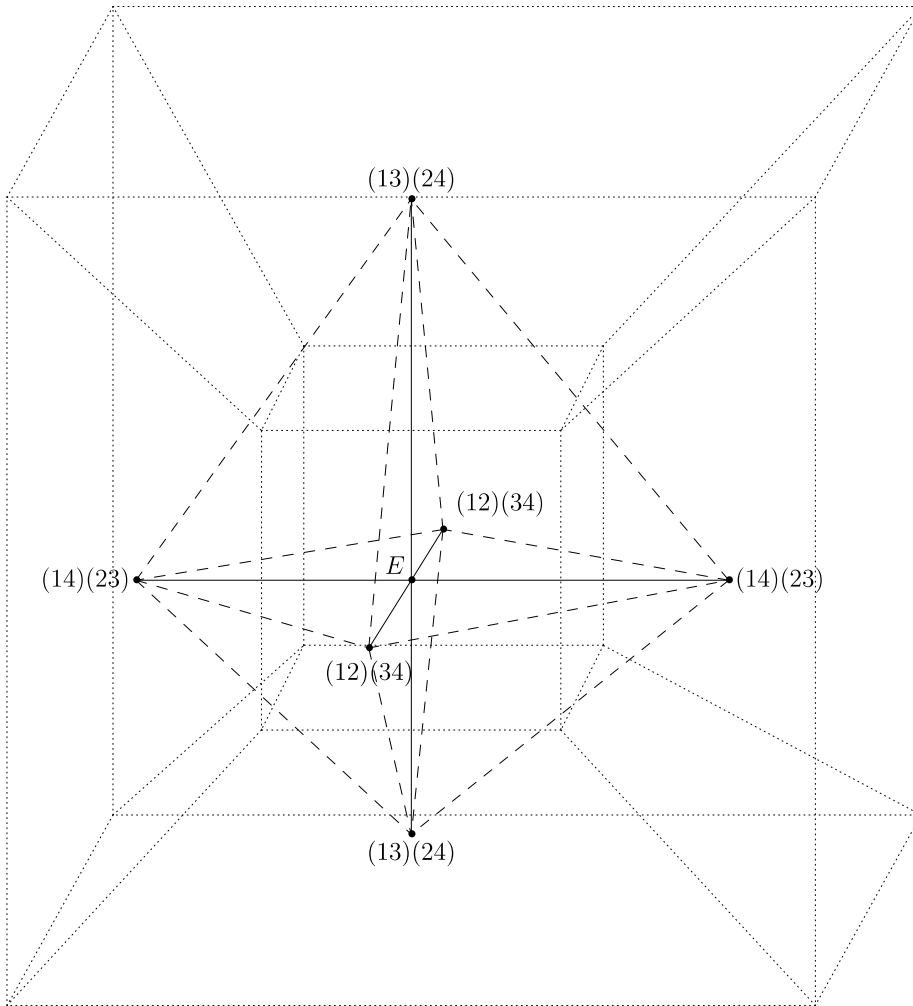


Figura 3.9: El $\{3, 3, 4\}/2$ en \mathbb{P}^3 etiquetado con elementos de A_4 .

Como a cada 3-cara del $\{4, 3, 3\}/2$ le corresponde un vértice del $\{3, 3, 4\}/2$, a cada 2-cara una arista y a cada vértice una 3-cara, el $\{3, 3, 4\}/2$ es dual del $\{4, 3, 3\}/2$.

3.3. La combinatoria.

En esta sección definiremos a los politopos combinatorios $\{4, 3, 3\}/2$, $\{3, 3, 4\}/2$ y $\{3, 4, 3\}/2$.

Hemos construido al $\{4, 3, 3\}/2$ de forma geométrica, usando como vértices a las rotaciones del tetraedro con la representación de van Oss. Ahora, construiremos al $\{4, 3, 3\}/2$ de manera combinatoria, usando como vértices elementos de A_4 , y utilizando sus propiedades como herramienta.

Nuestros vértice serán las ciclos de periodo 3 de A_4 , y existirá una arista entre dos vértices si sus respectivos cocientes son ciclos de periodo 3. Con esto, hemos logrado construir la gráfica asociada a este politopo, $Sk^1(\{4, 3, 3\})$ (ver figura 1.10). Sin embargo, falta conocer las 2-caras y las 3-caras para concluir la construcción combinatoria. Para esto, daremos la siguiente definición.

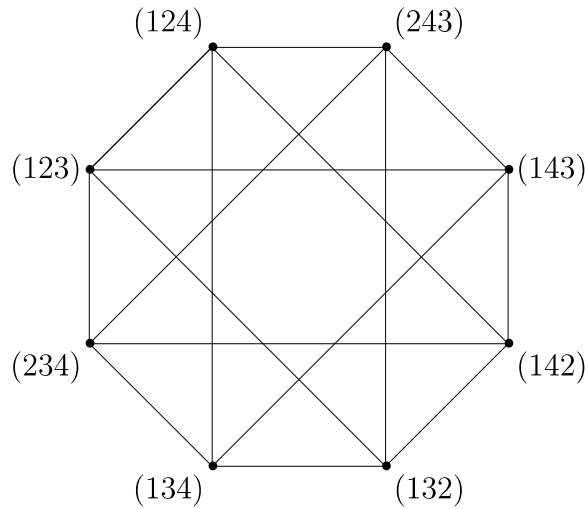


Figura 3.10: La gráfica $Sk^1(\{4, 3, 3\})$.

Definición 3.2. Sean cuatro vértices p, q, r, s en $Sk^1(\{4, 3, 3\})$ que formen una 4-ciclo $pqrs$. Si al operarlos en orden, obtenemos la identidad, entonces es una 2-cara.

Primero notemos que el orden se basa en considerar lo siguiente: Si nos tomamos p, q, r, s , estos forman un ciclo $pqrs$. Por lo que $pqrs$ es distinto de $pqsr$. Sin embargo, si es igual a $qrsp$.

Por ejemplo, el conjunto ordenado $((132), (142), (124), (123))$ forma un 4-ciclo con nuestra definición de arista, y $(243)(143)(142)(132) = (1)(2)(3)(4) = E$, por lo tanto es una 2-cara. Mientras que el conjunto ordenado $((142), (132), (124), (123))$

no forma un 4-ciclo y $(142)(132)(124)(123) = (12)(34)$. Notemos que no todos los 4-ciclos en $Sk^1(\{4, 3, 3\})$ son caras, por ejemplo los vértices (134) , (143) , (243) , (132) forman un 4-ciclo en $Sk^1(\{4, 3, 3\})$; sin embargo

$$(134)(143)(243)(132) = (13)(24) \neq E.$$

Observación. No es cierto que, si al operar cuatro vértices se obtiene la identidad, estos vértices formen una 2-cara. Por ejemplo:

$$(124), (234), (243), (142)$$

no es una cara; pues no forman un 4-ciclo. Sin embargo si los operamos en orden obtenemos la identidad.

Consideremos de nuevo los 8 ciclos de periodo 3 que etiquetan al cubo de la figura 1.3. A este cubo lo denotaremos como \mathcal{C} . Las 3-caras del $\{4, 3, 3\}/2$ las obtenemos multiplicando por la derecha una pareja de transposiciones a las etiquetas del cubo \mathcal{C} .

A este politopo se le suele llamar *hemihipercubo*, *hemi 8-celda* o $\{4, 3, 3\}_4^a$. En un sentido combinatorio el $\{4, 3, 3\}/2$ es distinto del $\{4, 3, 3\}$; ya que el $\{4, 3, 3\}$ en \mathbb{R}^4 tiene 8 3-caras; mientras que, el politopo en el que estamos trabajando, el $\{4, 3, 3\}/2$, tiene 4 3-caras.

Para empezar la definición combinatoria del $\{3, 3, 4\}/2$ diremos que los vértices son las parejas de trasposiciones de A_4 ,

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23),$$

junto con la identidad E .

Recordemos que las dos trasposiciones junto con la identidad es subgrupo de A_4 , por lo que, como dijimos anteriormente para las rotaciones de π , a menos que se operen con ellas mismas, el resultado será una dos transposición. Así que todos los vértices son adyacentes entre sí, y la definición geométrica de arista se puede traducir a

Definición 3.3. Hay una arista entre dos vértices (a, b) ordenados, si el producto de ambos es distinto de la identidad E . Notemos que la arista a, b es distinta de la b, a .

Con la definición de aristas construimos a la gráfica $Sk^1(\{3, 3, 4\})$. Notemos que la gráfica tiene aristas múltiples, por lo que no es una gráfica simple. Ver figura 1.11. Con esto, podemos dar las siguientes definiciones:

Definición 3.4. Las 2-caras están formadas por cualesquiera tres vértices de $Sk^1(\{3, 3, 4\})$.

^aEn [8] explican esta notación.

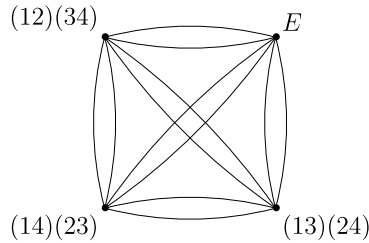


Figura 3.11: $Sk^1(\{3, 3, 4\})$, la gráfica del $\{3, 3, 4\}$.

Para construir a las 3-caras podemos ayudarnos de la construcción geométrica y considerar a las subgráficas completas de $Sk^1(\{3, 3, 4\})$ que definan una región en la construcción geométrica etiquetada con las parejas de transposiciones y la identidad.

A este politopo se le conoce como *hemi 16-celda* o $\{3, 3, 4\}_4$. Y, al igual que el $\{4, 3, 3\}/2$, éste se diferencia del $\{3, 3, 4\}$ combinatoriamente, ya que consta de 8 3-caras; mientras que el $\{3, 3, 4\}$ en \mathbb{R}^4 tiene 16 caras.

A continuación, vamos a dar la construcción combinatoria del $\{3, 4, 3\}$, y probaremos que es un politopo autodual.

Los vértices serán los elementos de A_4 , y diremos que hay una arista entre dos vértices si su cociente es un ciclo de periodo 3.

Esto define a la gráfica $Sk^1(\{3, 4, 3\})$. Notemos que $Sk^1(\{4, 3, 3\})$ está contenida en $Sk^1(\{3, 4, 3\})$ como subgráfica inducida por los ciclos de periodo 3 de A_4 . Ver figura 1.12.

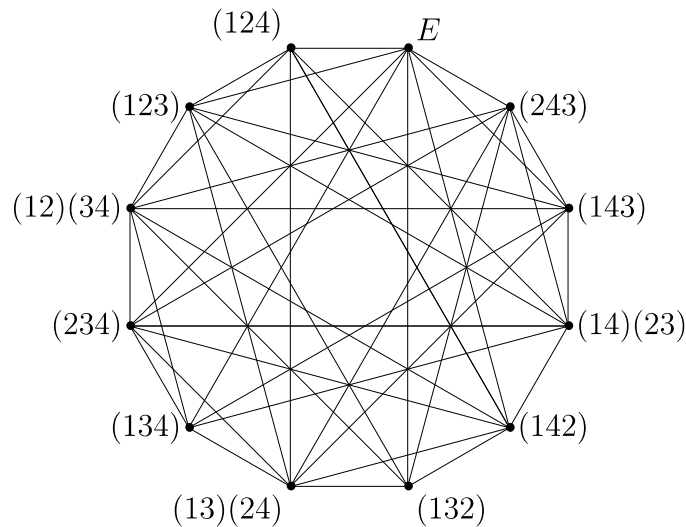


Figura 3.12: La gráfica $Sk^1(\{3, 4, 3\})$.

Definiremos a las 2-caras como un 3-ciclo en $Sk^1(\{3, 4, 3\})$ que esté formado por una arista del $\{4, 3, 3\}$ y un centro del cubo que contiene a esa arista.

Notemos que cualquier 3-ciclo en $Sk^1(\{3, 4, 3\})$ está formado de dos ciclos de periodo 3 y una pareja de trasposiciones o la identidad; ya que no hay aristas entre 2 parejas de trasposiciones cualesquiera y la identidad, y además la subgráfica inducida por los ciclos de periodo 3 corresponde a la gráfica $Sk^1(\{4, 3, 3\})$, que no tiene 3-ciclos como subgráfica. Sin embargo, no todos los 3-ciclos de $Sk^1(\{3, 4, 3\})$ son 2-caras. Por ejemplo, el 3-ciclo $(13)(24), (132), (134)$. La arista $(132), (134)$ no esta contenida en el cubo con baricentro $(13)(24)$. Esta definición de 2-cara si es coherente con la construcción geométrica, ya que los octaedros están formados por una 2-cara que comparten dos cubos y los centros respectivos de esos dos cubos, y cualquier arista de esa 2-cara del $\{4, 3, 3\}$ es incidente a estos centros.

Finalmente, para definir una 3-cara, consideremos una 2-cara del $\{4, 3, 3\}/2$, y la arista del $\{3, 3, 4\}/2$ que está en correspondencia con dicha 2-cara con la dualidad. La gráfica inducida en $Sk^1(\{3, 4, 3\})$ por los cuatro vértice de la 2-cara con los 2 vértices de la arista forman las 3-caras del $\{3, 4, 3\}$.

Esta definición de 3-cara es congruente con la construcción geométrica ya que así construimos los octaedros geoméricamente.

Para demostrar que el $\{3, 4, 3\}/2$ definido de manera combinatoria es un politopo autodual, recordemos que los elementos del dual geométrico se etiquetan con las permutaciones impares de S_4 , y que además al aplicar una operación P_r a cualquier grupo de rotaciones la distancia entre ellos se preserva. Si aplicamos $p = (1234)$ por la derecha a los elementos del $\{3, 4, 3\}$ se preservarán las adyacencias entre ellos. Es decir, se conservarán las caras que forman al $\{3, 4, 3\}$. Y, como aplicar una permutación impar a una par es una permutación impar, el resultado de operar todos los vértices del $\{3, 4, 3\}$ por p_r será su recíproco, ya que preserva adyacencias. Todas las imágenes son distintas, y es compatible con la definición de arista, por lo que estamos dando un isomorfismo entre el $\{3, 4, 3\}$ a su dual; y por lo tanto, es autodual.

Por ejemplo, consideremos la 3-cara del $\{3, 4, 3\}$

$$E$$

$$(132) \quad (134) \quad (234) \quad (142)$$

$$(14)(23).$$

Si aplicamos $p_r = (1234)$ al $\{3, 4, 3\}$, obtenemos la 3-cara en el dual (Ver figura 1.4 y 1.7).

$$(1234)$$

$$(14) \quad (1423) \quad (1243) \quad (34)$$

$$(24).$$

Para finalizar el análisis combinatorio del $\{3, 4, 3\}/2$, observemos los diagramas de Hasse de las secciones \emptyset/F_2 , F_1/F_3 y $F_2/\{3, 4, 3\}/2$. Podemos notar que el símbolo de Schläfli de este politopo es efectivamente el $\{3, 4, 3\}/2$, que se suele denotar como $\{3, 4, 3\}_6$. En la figura 1.13 podemos ver un ejemplo de cada sección que definen al símbolo de Schläfli. $F_2 = \{E, (132), (142)\}$, $G_2 = \{E, (132), (134)\}$ y $H_2 = \{E, (132), (243)\}$, mientras que F_3 es el octaedro remarcado de la figura 1.7, G_3 es el octaedro que definen los ciclos $\{(132), (142), (143), (243)\}$ y H_3 el octaedro que definen los ciclos $\{(132), (134), (124), (243)\}$.

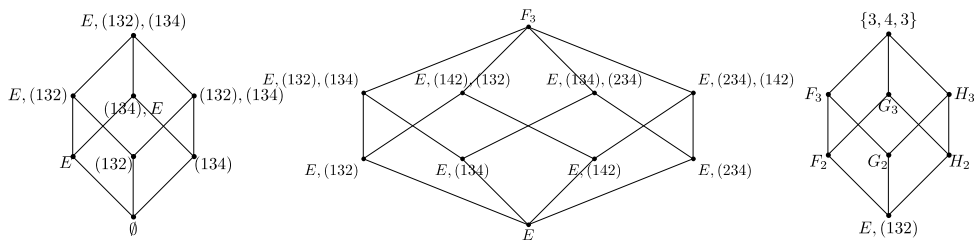


Figura 3.13: Las secciones que definen el símbolo de Schläfli.

Capítulo 4

El $\{3, 3, 5\}/2$ en \mathbb{P}^3 .

En este capítulo construiremos al $\{3, 3, 5\}/2$ a partir del grupo de rotaciones del dodecaedro; en notación, \mathfrak{I}_{60} . Utilizaremos sus elementos como vértices del politopo, y con esto, observaremos que con propiedades de este grupo podemos dar una construcción totalmente combinatoria, usando a los elementos del grupo alternante de 5 elementos, A_5 . Finalmente, con ideas del capítulo anterior, etiquetaremos a su dual con elementos del grupo de permutaciones pares de 6 elementos, o grupo alternante de 6 elementos A_6 , como vértices.

Para construir al $\{3, 3, 5\}/2$, primero demostraremos que el grupo de rotaciones, o grupo icosaédrico, es isomorfo A_5 .

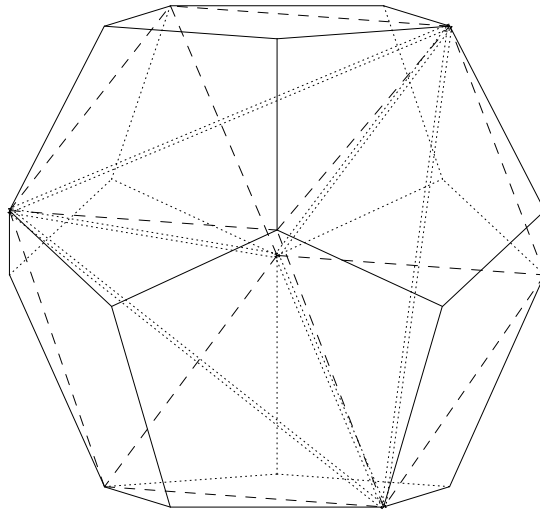


Figura 4.1: Tetraedro inscrito en un cubo inscrito en el dodecaedro.

Para esto, consideremos un dodecaedro etiquetado de la siguiente manera: Consideremos a los cinco cubos inscritos en el dodecaedro, etiquetemoslo con los colores $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Es importante el orden en que coloreemos a los cubos;

ya que, distintas coloraciones dan etiquetas diferentes para las rotaciones del dodecaedro. Por ahora, supongamos que elegimos la coloración del dodecaedro de la figura 1.3. Después haremos un análisis de este problema.

Ahora, consideremos los dos compuestos de cinco tetraedros que están inscritos en el dodecaedro. En cada cubo inscrito, cada uno de los dos tetraedros inscritos en él esta en un compuesto. Ahora fijemos uno de los dos compuestos de 5 tetraedros inscritos como (+), y el otro como (-). Si nos fijamos en todos los tetraedros con índice (+), estos etiquetan los vértices del dodecaedro con los colores que habíamos asignado. Del mismo modo, los tetraedros con índice (-). Ver figura 1.2.

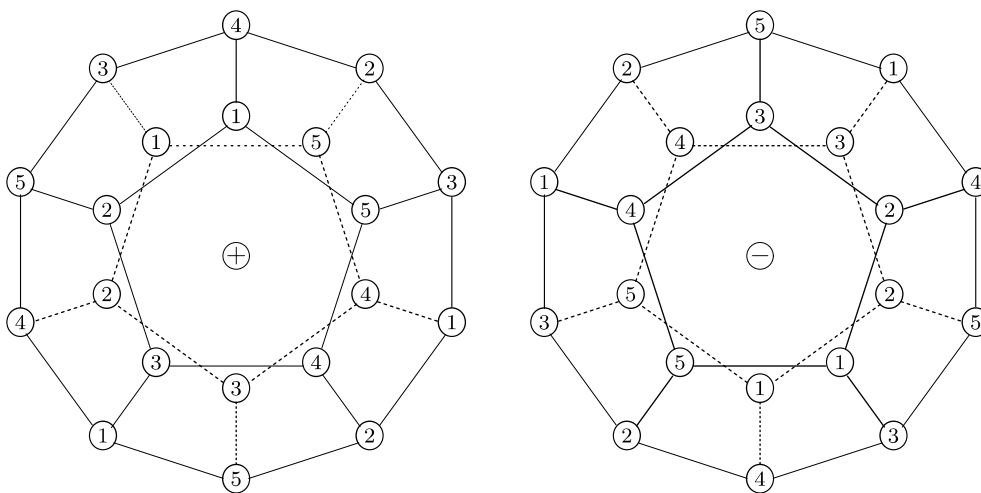


Figura 4.2: Las etiquetaciones del dodecaedro.

Definición 4.1. Diremos que un vértice tiene el índice (a, b) , si en él, inciden el tetraedro inscrito en el cubo $a \in \mathcal{C}$ con índice + y el tetraedro inscrito en el cubo $b \in \mathcal{C}$ con índice -. Ver figura 1.3.

El grupo de rotaciones del dodecaedro consiste de

- 12 rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$,
- 20 rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$,
- 12 rotaciones de $\frac{4\pi}{5}$ y
- 15 rotaciones de π .

Los ejes de las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ y $\frac{4\pi}{5}$ están en los centros de las caras del dodecaedro, por lo que hay una por cada cara del dodecaedro, respectivamente. Las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ están sobre los vértices, por lo que existe una por cada vértice del dodecaedro. Y, finalmente, los centros de las rotaciones de π están en los puntos medios de las aristas cuyos vértices son opuestos. Como hay 30 aristas y

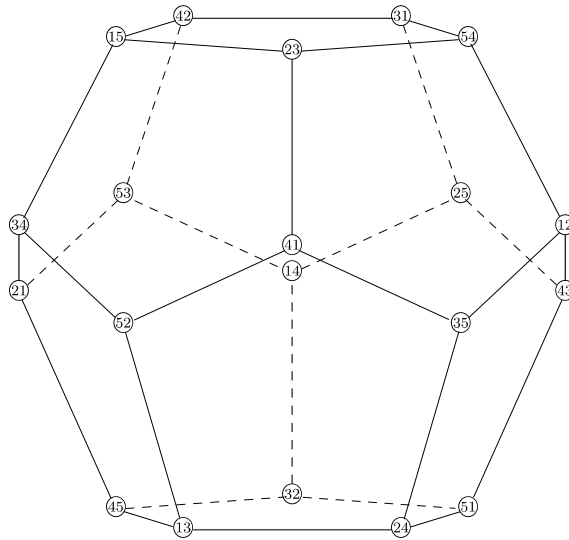


Figura 4.3: El dodecaedro etiquetado.

la rotación de π es la misma para las dos aristas opuestas, hay 15 rotaciones de este tipo. Ver figura 1.4.

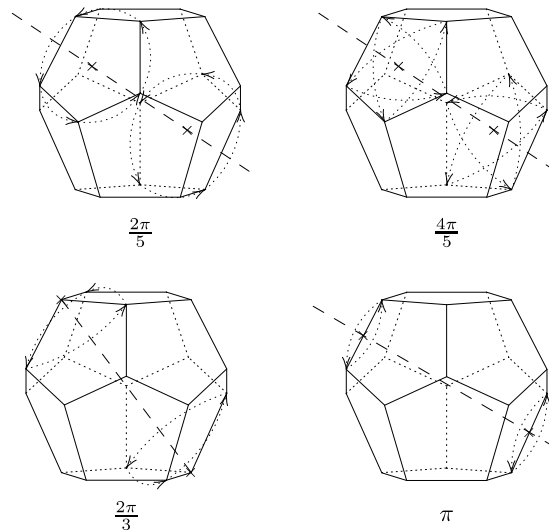


Figura 4.4: Las rotaciones del dodecaedro.

Ahora, observemos como actúan las etiquetas de los vértices bajo las rotaciones en las caras.

Como, en cada cara del dodecaedro sólo incide un solo tetraedro de un índice $+$ ó $-$ por cada cubo que lo contiene, y los cinco cubos inciden en la cara, podemos concluir que una rotación de $\frac{2\pi}{5}$ ó $\frac{4\pi}{5}$ permuta los cinco índices de \mathcal{C} . Es decir,

podemos etiquetarla con un ciclo de periodo 5. Ver cuadro 1.1.

| Cara | rotación | 5-ciclo | rotación | 5-ciclo |
|------------------|------------------|---------|------------------|---------|
| {41,52,13,24,35} | $\frac{2\pi}{5}$ | (12345) | $\frac{4\pi}{5}$ | (24135) |
| {41,23,15,34,52} | | (42135) | | (23415) |
| {41,35,12,54,23} | | (24315) | | (41235) |
| {23,54,31,42,15} | | (34125) | | (42315) |
| {34,15,42,53,21} | | (23145) | | (34215) |
| {52,34,21,45,13} | | (32415) | | (21345) |
| {43,12,35,24,51} | | (41325) | | (12435) |
| {25,43,51,32,14} | | (31245) | | (14325) |
| {14,32,45,21,53} | | (13425) | | (32145) |
| {31,54,12,43,25} | | (14235) | | (43125) |
| {25,14,53,42,31} | | (43215) | | (31425) |
| {32,51,24,13,45} | | (21435) | | (13245) |

Cuadro 4.1: Permutaciones correspondientes a las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ y $\frac{4\pi}{5}$.

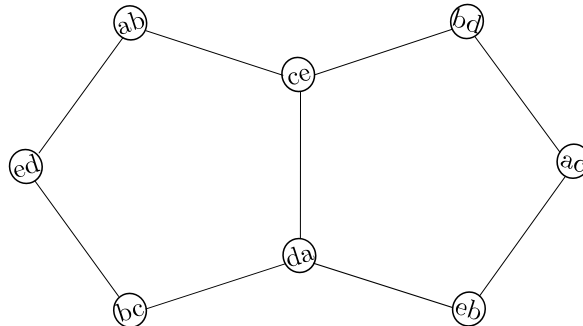
Notemos que las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ se etiquetan con ciclos de periodo 5 de la forma $(abcd5)$ donde (a, b, c, d) es la imagen de una permutación par de 4 elementos en el conjunto ordenado $(1, 2, 3, 4)$. Por ejemplo, en la permutación (31245) , la cuarteta ordenada $(3, 1, 2, 4)$ es la imagen de la permutación (123) . Mientras que las rotaciones de $\frac{4\pi}{5}$ son de la forma $(abcd5)$ donde (a, b, c, d) es la imagen de una permutación impar en el mismo conjunto ordenado. Por ejemplo, en la permutación (14325) , la cuarteta ordenanda $(1, 4, 3, 2)$ es la imagen de la permutación (24) . Esta distinción se debe a la elección del orden de la coloración que le dimos a los cubos inscritos en el dodecaedro. Para ver esto, hay que probar dos cosas:

Consideremos una cara del dodecaedro.

1. Si la rotación de $\frac{2\pi}{5}$ se etiqueta con la permutación $(abcd5)$ y la permutación que tiene como imagen a la cuarteta ordenada (a,b,c,d) tiene una paridad, entonces la rotación de $\frac{2\pi}{5}$ de la cara adyacente se etiqueta con una permutación de conjunto $\{a, b, c, d, 5\}$ cuya restricción al subconjunto ordenado (a, b, c, d) es la imagen de una permutación con la misma paridad.

Demostración. Supongamos que las etiquetas de la cara son ac , bd , $c5$, da y $5b$. Entonces la rotación de $\frac{2\pi}{5}$ de esta cara es un ciclo de periodo 5, $(abcd5)$, donde (a, b, c, d) es la imagen de una permutación de 4 elementos con alguna paridad. Consideremos la cara adyacente con etiquetas $c5$, ab , $5d$, bc y da . Su rotación de $\frac{2\pi}{5}$ se etiqueta con la permutación $(bdca5)$. Entonces, la cuarteta ordenada (a, b, c, d)

difiere de (b, d, c, a) por dos transposiciones, a saber, (ad) y (bd) . Por lo tanto, son imágenes de permutaciones de S_4 que tienen la misma paridad. \square



Como corolario, tenemos que si una rotación de $\frac{2\pi}{5}$ da una paridad, entonces todas las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ tienen la misma paridad. Por lo que la paridad de una cara define la etiquetación de las demás.

Notemos que hay 24 maneras distintas de ordenar al conjunto $(1, 2, 3, 4, 5)$ si lo consideramos como un ciclo ordenado. Es decir, $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5, 1\}$. Doce de éstas representan una etiquetación de los vértices del dodecaedro de la figura 1.3. El siguiente resultado nos dice como obtener la otra etiquetación con las otras 12 maneras de ordenar.

2. *Una reflexión en el dodecaedro manda una etiquetación en la otra. Y cambia la paridad.*

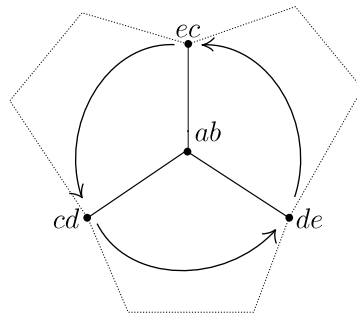
Demostración. Consideremos de nuevo la cara $\{ac, bd, c5, da, 5b\}$. Una reflexión del dodecaedro en esa cara pasa por un vértice y el punto medio de la arista opuesta. Digamos el vértice bd y la arista $da, 5b$. La nueva etiquetación de la cara es $\{c5, bd, ac, da, 5b\}$. Su rotación de $\frac{2\pi}{5}$ se etiqueta con la permutación $(dcab5)$. Y $\{abcd\}$ difiere de $\{dcab\}$ por tres transposiciones:

$$(ad)(a, b, c, d) = (d, b, c, a) \quad (bc)(d, b, c, a) = (d, c, b, a) \quad (ab)(d, c, b, a) = (d, c, a, b).$$

Por lo tanto, son imágenes de permutaciones de S_4 con distinta paridad, de donde se sigue que el orden $\{d, c, a, b, 5\}$ es distinto a los 12 que definía el orden $\{a, b, c, d, 5\}$. Y por tanto, este orden define otra etiquetación. \square

Y entonces, podemos llegar a la siguiente

Observación. Si hubiéramos elegido la otra etiquetación de dodecaedro, las etiquetas de las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ hubieran sido del tipo $(abcd5)$, donde $abcd$ sería la imagen de una permutación impar de S_4 .



| vértice | rotación de $\frac{2\pi}{3}$ | 3-ciclo | vértice | rotación de $\frac{2\pi}{3}$ | 3-ciclo |
|---------|------------------------------|---------|---------|------------------------------|---------|
| 23 | $41 \mapsto 54 \mapsto 15$ | (145) | 54 | $12 \mapsto 31 \mapsto 23$ | (132) |
| 31 | $42 \mapsto 54 \mapsto 25$ | (245) | 42 | $15 \mapsto 31 \mapsto 53$ | (135) |
| 15 | $23 \mapsto 42 \mapsto 34$ | (243) | 53 | $21 \mapsto 42 \mapsto 14$ | (124) |
| 34 | $42 \mapsto 15 \mapsto 21$ | (125) | 41 | $35 \mapsto 23 \mapsto 52$ | (253) |
| 12 | $35 \mapsto 43 \mapsto 54$ | (345) | 25 | $14 \mapsto 31 \mapsto 43$ | (134) |
| 14 | $53 \mapsto 25 \mapsto 32$ | (235) | 21 | $34 \mapsto 53 \mapsto 45$ | (354) |
| 52 | $41 \mapsto 34 \mapsto 13$ | (143) | 35 | $12 \mapsto 41 \mapsto 24$ | (142) |
| 43 | $25 \mapsto 12 \mapsto 51$ | (152) | 32 | $14 \mapsto 51 \mapsto 45$ | (154) |
| 45 | $13 \mapsto 21 \mapsto 32$ | (123) | 13 | $24 \mapsto 52 \mapsto 45$ | (254) |
| 24 | $35 \mapsto 13 \mapsto 51$ | (153) | 51 | $32 \mapsto 43 \mapsto 24$ | (234) |

Cuadro 4.2: Permutaciones correspondientes a las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$.

Las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ con eje sobre vértices opuestos fija dos índices $a, b \in \mathcal{C}$, dado que los vértices del eje son ab y ba , y sólo permuta los tres restantes, por lo que se puede representar como un ciclo de periodo tres. Ver cuadro 1.2.

Por último, una rotación de π sobre los puntos medios de dos aristas opuestas fija tres cubos que tiene ese eje como eje de rotación. Por lo que sólo permuta los vértices de las aristas $\{(a, b), (c, d)\}$ y $\{(b, a), (d, c)\}$ de tal manera que

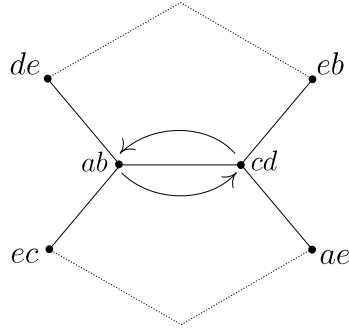
$$\begin{aligned} a &\mapsto c & c &\mapsto a \\ b &\mapsto d & d &\mapsto b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una rotación de π se etiqueta como producto de dos transposiciones. Ver cuadro 1.3.

Así, después de este análisis, podemos concluir que

$$\mathfrak{I}_{60} \cong A_5.$$

Notemos que la representación de van Oss de las rotaciones del dodecaedro nos definen diversos ‘niveles’ de puntos que están a la misma distancia del origen:



| arista | permutación | arista | permutación | arista | permutación |
|--------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|
| 42-31 | (12)(34) | 54-23 | (25)(34) | 15-42 | (14)(25) |
| 31-54 | (35)(14) | 23-15 | (21)(35) | 23-41 | (24)(31) |
| 15-34 | (13)(45) | 42-53 | (23)(45) | 31-25 | (15)(23) |
| 54-12 | (15)(24) | 41-52 | (12)(45) | 52-34 | (24)(35) |
| 34-21 | (14)(23) | 21-53 | (13)(25) | 53-14 | (15)(34) |

Cuadro 4.3: Permutaciones correspondientes a las rotaciones de π .

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \{R \in \mathcal{I}_{60} : R \text{ es una rotación de } \frac{2\pi}{5}\} \\
 N_2 &= \{R \in \mathcal{I}_{60} : R \text{ es una rotación de } \frac{2\pi}{3}\} \\
 N_3 &= \{R \in \mathcal{I}_{60} : R \text{ es una rotación de } \frac{4\pi}{5}\} \text{ y} \\
 N_4 &= \{R \in \mathcal{I}_{60} : R \text{ es una rotación de } \pi\}.
 \end{aligned}$$

Definiremos como $N_0 = E$ al origen. Como N_1 y N_3 son 12 rotaciones en las caras del dodecaedro, que se etiquetan con 5-ciclos pares y 5 ciclos impares respectivamente, cada uno es un icosaedro (Ver figura 1.6). Los elementos de N_2 son 20 rotaciones en los vértices del dodecaedro, por lo que forma un dodecaedro (ver figura 1.5). Finalmente, N_4 tiene 15 elementos en el plano polar de E .

Finalmente, para construir al $\{3, 3, 5\}/2$ geométrico en \mathbb{P}^3 damos la siguiente

Definición 4.2. 1. Diremos que existirá una arista entre dos rotaciones de \mathcal{I}_{60} si el cociente de estas da como resultado una rotación de $\frac{2\pi}{5}$

2. Una 2-cara será cualquier triángulo que se forme.
3. Finalmente, una 3-cara es cualquier tetraedro.

4.1. La combinatoria del $\{3, 3, 5\}/2$.

A continuación construiremos al $\{3, 3, 5\}/2$ basándonos en la construcción geométrica. Para empezar nuestra construcción combinatoria, diremos que los vértices del $\{3, 3, 5\}/2$ serán los elementos de A_5 , y habrá una arista entre dos elementos de A_5 si cumple la siguiente

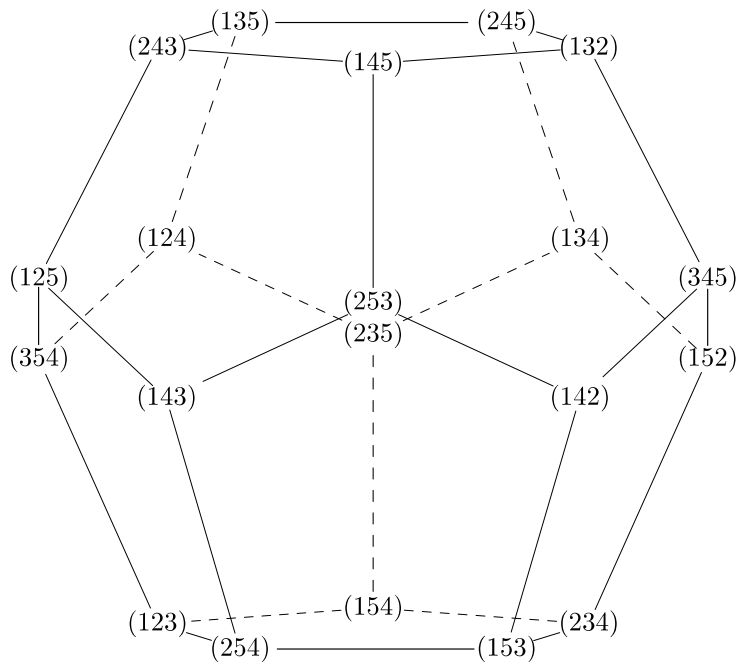


Figura 4.5: Los subgráfica inducida por N_2 .

Definición 4.3. Diremos que hay una arista entre dos elementos de A_5 si su cociente es un 5-ciclo que represente una rotación de $\frac{2\pi}{5}$.

Con esto, definimos a la gráfica que da lugar al $\{3, 3, 5\}/2$, que denotaremos como $Sk^1(\{3, 3, 5\})$.

Recordemos que, en la construcción geométrica, entre dos vértices la distancia más pequeña que puede haber, es $\frac{\pi}{5}$ con respecto a la distancia que definimos en el Capítulo 2, y recordemos que las rotaciones que están a menor distancia de la identidad son las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$, por lo que nuestra definición combinatoria de aristas es congruente con la definición geométrica.

Definición 4.4. Una 2-cara del $\{3, 3, 5\}$ es cualquier subgráfica inducida C de $Sk^1(\{3, 3, 5\})$ que sea un 3-ciclo.

Finalmente, definiremos a las 3-caras de la siguiente manera.

Definición 4.5. Una 3-cara es cualquier subgráfica inducida K de $Sk^1(\{3, 3, 5\})$ que sea una gráfica completa de cuatro vértices, K_4 .

4.2. El dual del $\{3, 3, 5\}$: El $\{5, 3, 3\}$.

Nuestro siguiente objetivo es encontrar una manera de etiquetar a los vértices del $\{5, 3, 3\}$ en \mathbb{P}^3 , que es el dual del $\{3, 3, 5\}$. Sin embargo, hemos usado a todos

los subgrupos finitos de $\mathbf{SO}(3)$, y como queremos etiquetar al $\{5, 3, 3\}$, necesitamos de un conjunto de 300 elementos; ya que el $\{3, 3, 5\}$ en \mathbb{P}^3 cuenta con 300 tetraedros, y como vimos anteriormente, el subgrupo finito no diédrico o cíclico más grande de $\mathbf{SO}(3)$ tiene 60 elementos.

Recordemos que en nuestra construcción geométrica las rotaciones de \mathfrak{I}_{60} definen diversos ‘niveles’ de puntos en \mathbb{P}^3 .

Consideremos una de las dos rectas definidas por Id y la rotación de π etiquetada con la permutación $(13)(24)$. El eje de esta rotación une los puntos medios de aristas opuestas de dodecaedro, las etiquetadas por $\{23, 41\}$ y $\{14, 32\}$. Por lo que en nuestra construcción geométrica, esta recta pasa por el punto medio de la arista que se etiqueta con las permutaciones

$$(24315) \text{ y } (42135),$$

que son las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ de las caras adyacentes a la arista $\{14, 32\}$ ^a. También corta los puntos medios de la arista etiquetada por

$$(145) \text{ y } (325),$$

que son las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ en los vértices $\{32\}$ y $\{14\}$ respectivamente. Notemos que el conjunto

$$T_0 = \{(24315), (42135), (145), (325)\} \quad (4.1)$$

forma un tetraedro, dado que

$$\begin{aligned} (24315)(42135)^{-1} &= (41325), & (24315)(145)^{-1} &= (21435) \\ (24315)(325)^{-1} &= (31245), & (42135)(145)^{-1} &= (13425) \\ (42135)(325)^{-1} &= (43215), & (145)(325)^{-1} &= (14235), \end{aligned}$$

y de aquí se verifica fácilmente la paridad de los correspondientes elementos de S_4 . Entonces el segmento $\{Id, (13)(24)\}$ pasa por el centro de un tetraedro. Y además, como

$$(145)((13)(24))^{-1} = (31245) \quad \text{y} \quad (325)((13)(24))^{-1} = (13425),$$

las ternas $(Id, (24315), (42135))$ y $((145), (325), (13)(24))$ son 2-caras. Por lo que podemos concluir que el baricentro del tetraedro T_0 está en el punto medio del segmento $\{Id, (13)(24)\}$. Es decir, es la rotación Q de $\frac{\pi}{2}$ en el mismo centro de la rotación de π etiquetada por la permutación $(13)(24)$. Ahora, debemos encontrar una etiqueta de Q , que por el momento llamaremos q y que debe cumplir algo parecido a

$$”q^2 = (13)(24)” \quad (4.2)$$

^aLa otra recta $\{Id, (13)(24)\}$ corta el medio punto de la arista cuya etiqueta es $\{(13425), (31245)\}$, que son las etiquetas de las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$ de las caras adyacentes a la arista $\{32, 41\}$, que es opuesta a la $\{14, 32\}$.

Pues es lo que sucede geoméricamente, ($Q^2 = (13)(24)$) pensando a éste con el isomorfismo entre \mathcal{T}_{60} y A_5 .

Ahora, pensemos en $N_2 \subset \mathbb{B}^3$ (Ver figura 1.5) como el dodecaedro original. Por el Lema 2.1, la rotación Q en el espacio proyectivo se expresa aquí como $Q_l \circ Q_r$, que no deja fijo a N_2 (porque $Q \notin \mathcal{T}_{60}$); pero si deja fijo al cubo 5, pues es justo la rotación de $\frac{\pi}{2}$ en su cara. Notemos además que si le ponemos las etiquetas ab del dodecaedro original el índice distinto de 5 es el que habíamos usado en el cubo en el capítulo anterior. Entonces, $Q_l Q_r$ permuta cíclicamente a las rotaciones etiquetadas por

$$(132), \quad (243), \quad (143), \quad (142).$$

La etiqueta que buscamos, para que este bien definida, debe transformar los ciclos de periodo 3 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} q^{-1}(132)q &= (243), & q^{-1}(243)q &= (143), \\ q^{-1}(143)q &= (142), & q^{-1}(142)q &= (132). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por el análisis del $\{3, 4, 3\}/2$ del Capítulo 3, 1.2 y 1.3 sugieren que $q = (1234)$; ya que al fijar el cubo 5, la etiqueta que estamos buscando pertenece al grupo de rotaciones del cubo, que es precisamente S_4 . Sin embargo, es absurdo que los elementos impares de S_5 etiquetan los baricentros del $\{3, 3, 5\}$; ya que la cardinalidad de S_5 es 120, por lo que sólo sobran 60 elementos de S_5 para el $\{5, 3, 3\}/2$, por lo que nos hacen falta 240 elementos más para etiquetar los 300 tetraedros del $\{3, 3, 5\}$. Se resuelve este problema si añadimos un sexto símbolo 0, y consideramos la permutación

$$q = (05)(1234)$$

como la etiqueta de Q , que sigue cumpliendo 1.2 y 1.3. Esta etiqueta es una permutación par de 6 elementos, que al añadirla a A_5 podemos generar a A_6 , con lo que obtenemos 360 elementos, de los cuales, 60 de ellos, las permutaciones de A_5 , los usamos para etiquetar al $\{3, 3, 5\}/2$, y los otros 300 podrían etiquetar a los baricentros.

Definición 4.6. La etiqueta de un tetraedro T del $\{3, 3, 5\}/2$ es

$$p^{-1}(05)(1234)r$$

donde p y $r \in A_5$ son las etiquetas de P y $R \in \mathbf{SO}(3)$ respectivamente tales que $P^{-1}T_0R = T$

Ahora nos concentraremos en probar que la etiqueta esta bien definida. Escribiremos como p_l si multiplicamos por la izquierda la permutación p^{-1} , y p_r si multiplicamos por la derecha la permutación $p \in A_5$.

Lema 4.1. *Las etiquetas están bien definidas.*

Demostración. Basta probar que cualquier isometría del $\{3, 3, 5\}/2$ que deje fijo al tetraedro T_0 , debe dejar fija a la etiqueta; ya que, por el Lema 2.1 podemos mandar el tetraedro T_0 a cualquier otro mediante operaciones $P_l R_r$. Dado que hay un isomorfismo entre \mathfrak{I}_{60} y A_5 , podemos considerar a una operación P_r como una permutación por la derecha $p \in A_5$ y análogamente para las operaciones por la izquierda. De tal manera que, consideremos los siguientes dos generadores del subgrupo de rotaciones de \mathfrak{I}_{60} que dejan fijo al tetraedro T_0 escritos como permutaciones de A_5 por la izquierda y por la derecha: $p_l r_r = (124)_l (123)_r$ y $p'_l r'_r = (143)_l (142)_r$; ya que

$$\begin{aligned} (124)^{-1}(24315)(123) &= (325), \\ (124)^{-1}(42135)(123) &= (42135), \\ (124)^{-1}(145)(123) &= (24315), \\ (124)^{-1}(325)(123) &= (145) \end{aligned}$$

deja fijo al (42135) y permuta cíclicamente los otros tres, por lo que es una rotación de $\frac{2\pi}{3}$ en el centro de la 2-cara $((24315), (145), (325))$, y

$$\begin{aligned} (143)^{-1}(24315)(142) &= (145), \\ (143)^{-1}(42135)(142) &= (24315), \\ (143)^{-1}(145)(142) &= (42135), \\ (143)^{-1}(325)(142) &= (325) \end{aligned}$$

deja fijo (325) y permuta cíclicamente los demás, por lo que es una rotación de $\frac{2\pi}{3}$ en el centro de la cara $((24315), (42135), (145))$. Al operar estos generadores al $(05)(1234)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} (124)^{-1}(05)(1234)(123) &= (05)(1234), \\ (143)^{-1}(05)(1234)(142) &= (05)(1234) \end{aligned}$$

de donde se sigue que dejan fijo la etiqueta del centro. De tal manera, que podemos aplicar $p_l r_r$ a la etiqueta $(05)(1234)$ para encontrar las otras etiquetas. \square

Y así, podemos concluir que

Teorema 4.1. *Las 360 permutaciones de A_6 nos dan las etiquetas para los vértices del $\{3, 3, 5\}/2$ y su dual, el $\{5, 3, 3\}/2$ en el espacio proyectivo. Las 60 permutaciones que dejan fijo al 0, denotan los vértices del $\{3, 3, 5\}/2$, y las 300 restantes los vértices del $\{5, 3, 3\}/2$.*

A continuación desarrollaremos una receta para encontrar las etiquetas de los tetraedros que tienen como uno de sus vértices a E :

Basta con encontrar las permutaciones p y r apropiadas que mandan a $T_0 = \{(24315), (42135), (145), (325)\}$ que tienen al vértice E . Vamos a ayudarnos de la geometría para esto. Para visualizar los tetraedros que tienen al vértice E veamos figura 1.6.

Consideremos $\{t_1 = E, t_2, t_3, t_4\}$ un tetraedro, donde t_i son permutaciones de A_5 , en particular t_1 es la identidad. Entonces, existen p y r permutaciones de A_5 , tal que

$$\begin{aligned} p^{-1}(24315)r &= E, \\ p^{-1}(42135)r &= t_2, \\ p^{-1}(145)r &= t_3, \\ p^{-1}(325)r &= t_4. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Entonces, $r = ((24315)^{-1}p)$ y las ecuaciones restantes de 1.4 se convierten en

$$\begin{aligned} p^{-1}(23145)p &= t_2, \\ p^{-1}(34125)p &= t_3, \\ p^{-1}(42135)p &= t_4. \end{aligned} \tag{4.5}$$

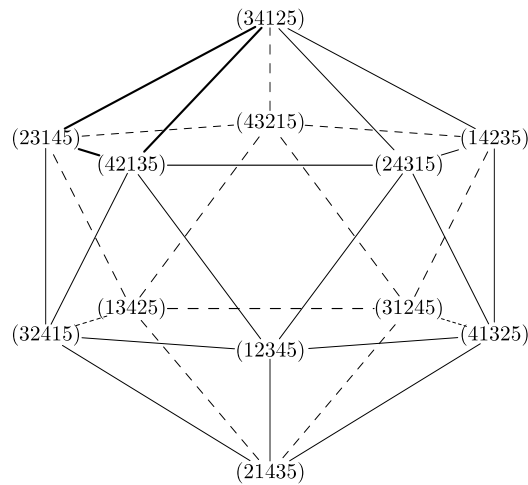


Figura 4.6: Distribución de las etiquetas de las rotaciones de $\frac{2\pi}{5}$.

Cada etiqueta representa una rotación de $\frac{2\pi}{5}$ (el icosaedro de la izquierda) o $\frac{4\pi}{5}$ (el de la derecha) en las caras del dodecaedro de la figura 1.3. La cara marcada en la figura es la $C = \{(23145), (34125), (42153)\}$.

Por ejemplo. Si $F = \{t_2, t_3, t_4\} = \{(12345), (41325), (21435)\}$, p es la permutación (43125) ; ya que p representa a una rotación de $\frac{4\pi}{5}$ y la rotación de $\frac{4\pi}{5}$

en \mathbb{P}^3 con eje $\{(32415), (14235)\}$ que manda la cara C en F es $p_l p_r$. Si revisamos

$$\begin{aligned}(43125)^{-1}(23145)(43125) &= (12345), \\ (43125)^{-1}(34125)(43125) &= (41325), \\ (43125)^{-1}(42135)(43125) &= (21435).\end{aligned}$$

Además, $r = (245)$. Por lo tanto, el centro del tetraedro $\{E, (12345), (41325), (21435)\}$ es el $(024)(153)$; ya que

$$(43125)^{-1}(05)(1234)(245) = (024)(153).$$

En la etiquetación del $\{5, 3, 3\}/2$ por $A_6 - A_5$, de nuevo, la estructura cíclica de las etiquetas corresponde a distancias al origen, pues la conjugación preserva la estructura cíclica (en A_6) y la distancia al origen (en $\mathbf{SO}(3)$). Esta estratificación de los vértices también toma en cuenta al nuevo símbolo 0, y es como sigue:

$$\begin{aligned}M_1 &: 20 \text{ rotaciones con etiquetas } (0ab)(cde), \\ M_2 &: 20 \text{ con etiquetas } (0ab), \\ M_3 &: 30 \text{ con etiquetas } (0a)(bcde), \\ M_4 &: 60 \text{ con etiquetas } (0abcd), \\ M_5 &: 60 \text{ con etiquetas } (0abc)(de), \\ M_6 &: 60 \text{ con etiquetas } (0abdc), \\ M_7 &: 20 \text{ con etiquetas } (0ab)(ced) \text{ y} \\ M_8 &: 30 \text{ con etiquetas } (0a)(bc)\end{aligned}$$

De la misma manera como sucedió en el $\{3, 3, 5\}/2$, los niveles M_1 y M_7 , y M_4 y M_6 se distinguen entre sí por la paridad de la permutación $(abcde)$.

Finalmente, vamos a probar que las etiquetas del $\{5, 3, 3\}/2$ que definimos, cumplen con la propiedad de que, al operar el cociente con las etiquetas del tetraedro que etiqueta, las permutaciones resultantes tienen la misma estructura cíclica. Esta propiedad la cumplen las etiquetas definidas via los isomorfismos entre los subgrupos de $\mathbf{SO}(3)$ y los grupos de permutaciones.

Demostración. ■ Primero probaremos el resultado para la etiqueta que encontramos primero. Haciendo las cuentas:

$$\begin{aligned}(05)(1234)(42135)^{-1} &= (035)(142), & (05)(1234)(24315)^{-1} &= (015)(243), \\ (05)(1234)(145)^{-1} &= (045)(123), & (05)(1234)(325)^{-1} &= (025)(134).\end{aligned}$$

Y cada cociente es de la forma $(0ab)(cde)$ donde $abcde$ es la imagen de una permutación par del conjunto ordenado $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. A saber

$$\begin{aligned}35142 \text{ es la imagen de } (13)(25), & \quad 15243 \text{ es la imagen de } (235), \\ 45123 \text{ es la imagen de } (13524), & \quad 25134 \text{ es la imagen de } (13452)\end{aligned}$$

- Dado que ya definimos las otras etiquetas como $p_l(05)(1234)r_r$ con p y $r \in A_5$. Los vértices del tetraedro que etiqueta $p_l(05)(1234)r_r$ son:

$$\begin{array}{cc} p^{-1}(42135)r, & p^{-1}(24315)r, \\ p^{-1}(145)r, & p^{-1}(325)r \end{array}$$

Haciendo los cálculos

$$\begin{array}{l} (p^{-1}(05)(1234)r)(p^{-1}(42135)r)^{-1} = p^{-1}(035)(142)p, \\ (p^{-1}(05)(1234)r)(p^{-1}(24315)r)^{-1} = p^{-1}(015)(243)p, \\ (p^{-1}(05)(1234)r)(p^{-1}(145)r)^{-1} = p^{-1}(045)(123)p, \\ (p^{-1}(05)(1234)r)(p^{-1}(325)r)^{-1} = p^{-1}(025)(134)p. \end{array}$$

Y como la conjugación en A_6 preserva la estructura cíclica, las cuatro permutación es del tipo $(0ab)(cde)$, y además $abcde$ es la imagen de una permutación de A_5 ya que $p \in A_5$.

□

4.3. Conclusiones.

De esta manera, hemos encontrado etiquetas para los vértices del $\{4, 3, 3\}/2$, $\{3, 3, 4\}/2$, $\{3, 4, 3\}/2$, $\{3, 3, 5\}/2$ y $\{5, 3, 3\}/2$ proyectivos, usando grupos de permutaciones, y con estas etiquetas pudimos definir combinatoriamente a los primeros cuatro.

Como el $\{5, 3, 3\}$ proyectivo se etiqueta con A_6 , un grupo que no es subgrupo de $\mathbf{SO}(3)$, la etiqueta es más artificial que la de los politopos anteriores, por lo que no se pueden definir condiciones suficientes para las aristas, las 2-caras y las 3-caras usando sólo las herramientas que nos da A_6 como grupo. Sin embargo, es muy interesante que la etiqueta de cada vértice del $\{5, 3, 3\}$ si cumpla otras condiciones locales que queríamos para las etiquetas: Los cocientes de cada etiqueta del tetraedro, con las respectivas etiquetas de los vértices de éste, tienen las mismas estructuras cíclicas entre sí. Por otra parte, estos se dividen en niveles, dependiendo su estructura cíclica y la paridad de $abcde$ en $0abcde$. Por lo que la etiqueta no resulta ser tan artificial.

Bibliografía

- [1] Jorge Arocha, Javier Bracho, and Luis Montejano, *Regular projective polyhedra with planar faces I*, Aequationes Mathematicae **59** (2000), 55–73.
- [2] Javier Bracho, *Regular projective polyhedra with planar faces II*, Aequationes Mathematicae **59** (2000), 160–176.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, third ed., Dover publications, 1948.
- [4] ———, *Regular honeycombs in elliptic space*, Proc. of the London Math. Soc. (3), **4** (1954), 471–501.
- [5] Reinhard Diestel, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2000.
- [6] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Lie groups*, Universitext, Springer-Verlag, 1999.
- [7] Isabel Alicia Hubard Escalera, *Poliedros coloreados con órdenes cíclicos*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.
- [8] Peter McMullen and Egon Schulte, *Abstract regular polytopes*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 92, Cambridge University Press, 2002.
- [9] Carlos Prieto, *Topología básica*, Fondo de Cultura Económica, 2003.
- [10] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1994.
- [11] Guillermo Ruiz Galván, *$SO(3)$ y los politopos regulares en cuatro dimensiones*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.

10. Referencias

- Acevedo, A. 1991. Behaviour and movements of bottlenose dolphins, *Tursiops truncatus*, in the entrance to Ensenada de La Paz, México. *Aquatic Mammals*. 17: 137-147
- Bazúa Durán, M.C. 1997. Comparación de vocalizaciones entre distintos grupos de delfines (*Tursiops truncatus*) del Golfo de México. Tesis de Maestría en Ciencias del Mar. Colegio de Ciencias y Humanidades. Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado. Universidad Nacional Autónoma de Mexico. 262pp.
- Bazúa-Durán, M.C. 2004. The whistles of bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) from the Gulf of Mexico. *Journal of the Acoustical Society of America* 115(5):2518
- Bazúa-Durán, M.C. 2005. The acoustic repertoire of the bottlenose dolphins from the southern Gulf of Mexico. *Journal of the Acoustical Society of America*. 117(4):2469
- Blaylock, R.A., J.W., Hain, L.J., Hansen, D.L., Palka, y G.T., Waring 1995. U.S. Atlantic and Gulf of Mexico Marine Mammal Stock Assessments. *NOAA Technical Memorandum*. U.S. Department of Commerce. Florida, EEUUA. 211pp.
- Borrel, A., A. Aguilar, V. Tornero, M. Sequeira, G. Fernandez y S. Alis. 2005. Organochlorine compounds and stable isotopes indicate bottlenose dolphin subpopulation structure around the Iberian Peninsula. *Environment International*. 32(4):516-523
- Caldwell, D.K. y M.C., Caldwell. 1972. *The World of the Bottlenosed Dolphin*. J. B. Lippincott Company, Philadelphia, EEUUA. 137pp.
- Chalmer, B.J. 1987. *Understanding Statistics*. Marcel Dekker Inc. Nueva York, EEUUA. 326pp.
- Contreras, E.F. 1993. *Ecosistemas costeros mexicanos*. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. 415pp.

- De la Lanza G. y C. Cáceres. 1994. *Lagunas Costeras y el Litoral Mexicano*. Universidad Autónoma de Baja California, México. 497pp.
- De la Parra J., R. 1989. Notas sobre la observación de los odontocetos al este de Cancún, Quintana Roo. XIV Reunión Internacional de la Sociedad Mexicana para el estudio de los Mamíferos Marinos. La Paz, B.C.S. Abril 1989.
- Delgado Estrella, A. 1991. Algunos aspectos de la ecología de poblaciones de las toninas *Tursiops truncatus*, Montagü 1821, en la Laguna de Términos y Sonda de Campeche, México. Tesis de Licenciatura en Biología, Escuela Nacional de Estudios Profesionales Iztacala, Universidad Nacional Autónoma de México, México. 150pp.
- Delgado Estrella, A. 1997. Relación de las toninas, *Tursiops truncatus*, y las toninas moteadas, *Stenella frontalis*, con la actividad camaronera en la Sonda de Campeche, México. *An. Inst. Biol. Univ. Nac. Autón. México Ser. Zool.* 68(2): 317-338
- Delgado Estrella, A. 2002. *Comparación de parámetros poblacionales de las toninas, Tursiops truncatus, en la región sureste del Golfo de México (Estados de Tabasco, Campeche, Yucatán y Quintana Roo)*. Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México. 160pp.
- Dixon, W.J y F.J. Massey Jr. 1969. *Introduction to Statistical Analysis*. 3ª ed. McGraw-Hill Book Company. EEUUA. 638pp.
- DOF. 1994. Decreto por el que se declara a la zona conocida como "Laguna de Términos" como Área Natural Protegida. *Diario Oficial de la Federación*. 6 de junio de 1994.
- Duffield, D.A. y J. Chamberlin-Lea. 1990. Use of Chromosome Heteromorphisms in Studies of Bottlenose Dolphin Populations and Paternities. En: S. Leatherwood and R. R. Reeves (Eds.), *The bottlenose dolphin*, Academic Press, San Diego, EEUUA. Pp.609-622

- Gallo Reynoso, J.P. 1991. Group behavior of common dolphins *Delphinus delphis* during prey capture. *An. Inst. Cienc. Mar Limnol.* 62: 253–262
- Gao, A., K. Zhou y Y. Wang. 1995. Geographic variation in morphology of bottlenose dolphins (*Tursiops* sp.) in Chinese waters. *Aquatic Mammals.* 21:121–135.
- Gío-Argáez, F.R. 1996. Campeche y Sus Recursos Naturales. *Rev. Soc. Mex. Hist. Nat.* Vol. Esp. 247pp.
- Gómez-Pompa, A. y R. Dirzo. 1995. *Las Reservas de la Biosfera y Otras Áreas Naturales Protegidas de México.* SEMARNAP y CONABIO, México. 159pp.
- Gorter U. 2003. Bottlenose dolphin. En: The Bottlenose dolphin Factsheet. American Cetacean Society. California, EEUUA. 2pp.
- Haude, M., S. Randall, P. Fair y G. Bossart. 2005. Polyfluoroalkyl compounds in free-ranging bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) from the Gulf of Mexico and the Atlantic Ocean. *Rev. Environmental Science and Technology* 39(17):6591-6598
- Hersh, S.L. y D.A. Duffield. 1990. Distinction between northwest Atlantic offshore and coastal bottlenose dolphins based on hemoglobin profile and morphometry. En: S. Leatherwood y R. R. Reeves (Eds.), *The bottlenose dolphin*, Academic Press, San Diego, EEUUA. Pp. 129-139
- Holmgren V. 1988. Registro de *Tursiops truncatus* (Cetacea: Delphinidae) en la boca de la Laguna de Terminos, Campeche durante las estaciones de invierno y primavera de 1988. Informe de Servicio Social Carrera Biología. División de Ciencias Biológicas y de la Salud. Departamento el hombre y su ambiente. UAM-Xochimilco. 60pp.
- INE. 1997. *Programa de Manejo del Área de Protección de Flora y Fauna Laguna de Términos México.* SEMARNAP México, D.F. 201pp.

- IUCN 2004. Red List of Threatened Species. www.iucnredlist.org. Ingresada el 23 de Marzo 2006.
- Chalmer, B.J. 1987. *Understanding Statistics*. Marcel Dekker Inc. Nueva York, EEUA. 326pp.
- Johnson, R. 1988. *Elementary Statistics* 5^a ed. PWS-Kent Publishing Company. Boston, MA, EEUA. 613pp.
- Klinowska, M. 1991. (ed.) *Dolphins, Porpoises, and Whales of the World. The IUCN Red Data Book*. Cambridge, Reino Unido: IUCN/World Conservation Union.
- Krafft, A., J.H. Lichy, T.P. Lipscomb y B. Klaunberg. 1995. Postmortem diagnosis of morbillivirus infection in bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) in the Atlantic and Gulf of Mexico epizootics by polymerase chain-reaction assay. *Journal of Wildlife Disease*. 31(3): 410-415.
- Kuehl, D.W. y R. Haebler. 1995. Organochlorine, organobromine, metal and selenium residues in bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) collected during an unusual mortality event in the Gulf of Mexico, 1990. *Archives of Environmental Contamination and Toxicology*. 28(4): 494-499.
- Leatherwood, S. y R.R. Reeves. 1983. *The Sierra Club Handbook of Whales and Dolphins*. Sierra Club Books. San Francisco, EEUA. 302pp.
- Leatherwood, S., R.R. Reeves, W.F. Perrin y W.E. Evans. 1988. *Whales, Dolphins, and Porpoises of the Eastern North Pacific and Adjacent Arctic Waters: A Guide to Their Identification*. Dover Publications, Nueva York, EEUA. 256pp.
- Lipscomb, T.P., S. Kennedy, D. Moeffett y B. Ford. 1994. Morbilliviral disease in an Atlantic bottlenose dolphin (*Tursiops truncatus*) from the Gulf of Mexico. *Journal of Wildlife Disease*. 30 (4): 572-576.
- López Hernández, I. 1997. Interacción de las toninas *Tursiops truncatus*, con la actividad pesquera en la costa de Tabasco, México. Tesis de Maestría en Ciencias, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México. 84pp.

- Lusseau, D. 2005. Residency pattern of bottlenose dolphins *Tursiops* spp. in Milford Sound, New Zealand, is related to boat traffic. *Mar Ecol Prog Ser.* 295: 265-272.
- McClave, J.T. y T. Sincich. 2006. *Statistics*. Pearson, Prentice Hall. EEUUA. 935 pp.
- Mendenhall, W. y T. Sincich 1997. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 4ª ed. Prentice Hall Hispanoamericana. México. 1182pp.
- Montagu, G. 1821. Description of a species of *Delphinus* which appears to be new. *Mem. Wermerian Nat. Hist. Soc.* 3:75-82
- Moore, D.S. y G.P. McCabe 2006. *Introduction to the Practice of Statistics*. 5ª ed. WH Freeman & Company. Nueva York, EEUUA. 800pp.
- Morteo, E., G. Heckel, R.H. Defran y Y. Schramm. 2004. Distribución, movimientos y tamaño de manadas de delfines nariz de botella al sur de la Bahía de San Quintín, Baja California, Mexico. *Ciencias Marinas*. 30(1A):35-46
- Mullin, K.D. 1989. Comparative seasonal abundance and ecology of bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) in three habitats of the north-central Gulf of Mexico. *Diss Abs. Int Pt B- Sci & Eng.* Vol. 50, no.2, 147pp.
- Mullin, K.D., R.R. Lohofner, W. Hoggard, C.L. Roden y C.M. Rogers. 1990. Abundance of bottlenose dolphins, *Tursiops truncatus*, in the coastal Gulf of Mexico. *Northeast Gulf Science*. 11(2) 113-122.
- Odell, K. 1975. Status and Aspects of the Life History of the Bottlenose Dolphin, *Tursiops truncatus*, in Florida. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*. 32(7):1055-1058.
- Preen, A. 2004. Distribution, abundance and conservation status of dugongs and dolphins in the southern and western Arabian Gulf. *Biological Conservation*. 118: 205 – 218.

- Quan Kiú Rascón, A.C. 2006. El repertorio de silbidos de tursiones (*Tursiops truncatus*) de la Laguna de Terminos, Campeche, México. Tesis de Licenciatura en Biología, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. 74pp.
- Read, A.J., R.S. Wells, A.A. Hohn y M.D. Scott. 1993. Patterns of Growth in Wild Bottlenose Dolphins, *Tursiops truncatus*. *Journal of the Zoological Society of London*. 231:107-123.
- Reza García, N.I. 2001. Distribución y abundancia de *Tursiops truncatus* en la Bahía de Santa María, Sinaloa, México. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. 59pp.
- Ridgway, S.H. 1972. (ed.). *Mammals of the Sea: Biology and medicine*. Charles C. Thomas. Illinois, EEUUA. 256pp.
- Ruiz Boijseauneau, I. 1995. *Distribución y abundancia de Tursiops truncatus Montagu, 1821 (Cetacea: Delphinidae) en la Bahía de Banderas y aguas adyacentes, México*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. 112pp.
- Schroeder, J.P. 1990. Breeding Bottlenose Dolphins in Captivity. En: S. Leatherwood y R. R. Reeves (Eds.), *The bottlenose dolphin*, Academic Press, San Diego, EEUUA. Pp. 435-446.
- Sellas, A., R. Wells y P. Rosel. 2005. Mitochondrial and nuclear DNA analyses reveal fine scale geographic structure in bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) in the Gulf of Mexico. *Conservation Genetics*. 6(5): 715-728
- SEMARNAT. 1999. *Reportaje de Regiones* en línea. Ingresada, 21 de marzo, 2006 en <http://www.semarnat.gob.mx/regiones/terminos-campeche/generalidades.shtml>
- Shane, S.H., R.S. Wells y B. Würsig. 1986. Ecology, Behavior and Social Organization of the Bottlenose Dolphin: A Review. *Marine Mammal Science*. 2(1): 34-63

- Turnbull, B.S. y D.F. Cowan. 1999. Angiomatosis, a newly drecognized disease in Atlantic bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) from the Gulf of Mexico. *Veterinary Pathology*. 36(1): 28-34.
- Turner, J.P. y G.A.J., Worthy. 2003. Skull morphometry of bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) from the Gula of Mexico. *J Mammal*. 2(84): 665-672
- Turner, J.S. 2001. Characterizing bottlenose dolphin (genus: *Tursiops*) stocks using haemoglobin, mtDNA, and morphometrics, a comparison of methods. Tesis de Maestría, University of Houston, Texas, EEUUA. 129pp.
- Wells, R.S, L.J. Hansen, A. Baldrige, T.P. Dohl, D.L. Kelly y R.H. Defran. 1990. Northward Extension of the Range of Bottlenose Dolphins Along the California Coast. En: S. Leatherwood y R. R. Reeves (Eds.), *The bottlenose dolphin*, Academic Press, San Diego, EEUUA. Pp. 421-431
- Wilson, B., P.M. Thompson y P.S. Hammond. 1997. Habitat use by bottlenose dolphins: seasonal distribution and stratified movement patterns in the Moray Firth, Scotland. *Journal of Applied Ecology*. 34: 1365-1374
- Yañez Arancibia, A. y J.W. Day. 1982. Ecological Characterization of Terminos Lagoon, a tropical lagoon-estuarine system in the southern Gulf of México. En: Lasserre,P. y Postma, H. (Eds.) *Coastal Lagoons. Oceanologica Acta. Vol. Spec. 5 (4):*431-440.
- Zar, J.H. 1984. *Biostatistical Analysis*. Prentice-Hall Inc. Nueva Jersey, EEUUA. 718pp.