

SOLITONES EN CADENAS
UNIDIMENSIONALES Y MALLAS
BIDIMENSIONALES

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Luis Alberto Cisneros Ake



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Acta de revisión de tesis

*A Angélica y Bitia
con todo mi amor*

Agradecimientos

*“Sabiduría ante todo; adquiere sabiduría;
y sobre todas tus posesiones adquiere inteligencia
Engrandécela, y ella te engrandecerá;
Ella te honrará, cuando tú la hayas abrazado.
Adorno de gracia dará a tú cabeza;
Corona de hermosura te entregará .”*
Proverbios Capítulo 4 Versículos 7-9.

Aprovecho el espacio de estas líneas para agradecer primeramente y sobre todo a Dios por darme la oportunidad de llegar a este momento y poderlo compartir con mis seres queridos, especialmente con mi amada esposa Angélica y mi hija Bitia de quienes he recibido todo su amor, apoyo y comprensión. Asimismo, agradezco a mis padres y a cada uno de mis hermanos por su fidelidad. También, agradezco el financiamiento otorgado por el CONACYT-No.Reg.170517, el Sistema Nacional de Investigadores SNI-Exp763, la DGEP-UNAM y el apoyo parcial del proyecto SEP-CONACYT-No.50303. Por otro lado, le hago extensivo mi agradecimiento al Dr. Antonmaria Minzoni Alessio de quien he tenido la oportunidad de aprender cuestiones no sólo de la ciencia sino de la vida. Además de agradecerle la confianza que me ha tenido. De igual manera quiero darle las gracias a los miembros de mi comite tutorial compuesto por los Drs. Gustavo Cruz Pacheco y Jesús Muciño Raymundo. Agradezco igualmente a todos y cada uno de los sinodales cuyos comentarios ayudaron a completar y mejorar este trabajo. Especialmente quiero agradecer al Dr. Panayotis Panayotaros el tiempo dedicado a discutir varios tópicos de la tesis. Finalmente, le doy las gracias

a todos y cada uno de los investigadores del departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS-UNAM. Además de agradecer el apoyo recibido de las secretarías del departamento Alma y Lourdes, así como también a Ana y Ramiro del área de cómputo.

A todos, gracias.

Contenido

Resumen	VIII
Introducción	1
1. Preliminares	8
1.1. Aproximación variacional	8
1.2. Fórmula de suma de Poisson	11
2. La cadena de Toda	14
2.1. Las ecuaciones de la cadena de Toda	14
2.2. Solución numérica	18
2.3. Solución aproximada	21
2.4. Análisis de la radiación	28
3. Ecuación discreta de Sine-Gordon unidimensional	34
3.1. Planteamiento del problema y su solución numérica	35
3.2. Ecuaciones aproximadas para la evolución del kink	40
3.3. Efecto de la radiación	45
3.3.1. Radiación de onda larga emitida por el pulso	47
3.3.2. La radiación de Peyrard y Kruskal	48
3.4. Modos internos	58
3.4.1. El efecto dinámico de los modos internos	60
3.5. Solución a las ecuaciones de modulación y comparación con la solución numérica	66

4. Ecuación discreta de Sine-Gordon en dos dimensiones espaciales	68
4.1. Planteamiento del problema y su solución numérica	69
4.2. Soluciones modulacionales para el pulso	74
4.3. Soluciones en el estado estacionario	76
4.4. Continuación de ramas	91
4.5. Capa límite y mapeos discretos	97
Conclusiones	106
Apéndice	110
I. Cálculo de series para la cadena de Toda	110
II. Cálculo de series para la cadena de Sine-Gordon	112
Bibliografía	117

Resumen

El estudio de ondas no lineales que son soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en espacio y tiempo es un problema complicado debido a la no linealidad. De las ecuaciones no lineales son de interés, en varias situaciones, aquellas en las cuales algunas de sus soluciones se muestran localizadas en el espacio y estables, las cuales denotamos en este trabajo como ondas solitarias o solitones [7]. Solamente en pocas ecuaciones no lineales se conoce la solución exacta al problema de valores iniciales. Sin embargo, se han desarrollado métodos numéricos y analíticos para investigar el comportamiento en ecuaciones no lineales. El método analítico más importante es conocido como el método de dispersión inversa, el cual se ha encontrado sólo es aplicable a ecuaciones muy particulares [7], [28]. Por otro lado, una alternativa para entender ecuaciones no lineales es encontrar aproximaciones asintóticas (cuasi analíticas) las cuales están basadas en una aproximación analítica y un método numérico, por ejemplo, el método de escalas múltiples y los métodos variacionales, entre otros [29], [9]. En este trabajo desarrollamos aproximaciones asintóticas basadas en el método variacional que usa el Lagrangiano de la ecuación. Este procedimiento asintótico es bastante general pues no requiere que la ecuación diferencial sea integrable, sólo requiere que tenga Lagrangiano. En el presente trabajo estudiamos la contraparte discreta de los modelos no lineales continuos, que en ciertos casos presentan más propiedades fenomenológicas debido a que describen modelos microscópicos. Buscamos soluciones tipo solitón y escalón (kink) en ecuaciones no lineales discretas en espacio, en particular de la ecuación de Toda y la ecuación discreta de Sine-Gordon. Esta última la estudiamos en una y dos dimensiones espaciales. Estas ecuaciones

discretas se reducen a sistemas infinitos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas, por lo que usamos un método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolverlas numéricamente. Por otra parte, desarrollamos para cada una de estas ecuaciones una aproximación asintótica basada en el Lagrangiano promediado de la ecuación respectiva. En el primer capítulo damos una revisión de la aproximación variacional que usa el Lagrangiano de la ecuación. Además, presentamos la fórmula de suma de Poisson, la cual usaremos para estimar las series infinitas de la aproximación variacional en términos del potencial de Peierls-Nabarro.

En la primera parte de este trabajo estudiamos modelos unidimensionales en el espacio. En el segundo capítulo estudiamos la cadena infinita de Toda, la cual modela a una infinidad de masas conectadas por resortes que se restituyen no linealmente. Se sabe que para masas y resortes constantes la cadena homogénea de Toda es completamente integrable y tiene solución exacta tipo solitón [4], [5], el cual es supersónico, es decir, viaja con una velocidad mayor a la de las ondas lineales. En este capítulo estudiamos numéricamente el problema de ajuste de una condición inicial a un solitón exacto en la cadena homogénea de Toda, esto es, donde la condición inicial no satisface la relación de dispersión de la solución exacta. Para este problema la solución numérica muestra un transitorio inicial muy violento, ya que la onda viajera es supersónica u onda de choque fuerte, y la radiación lineal que queda confinada en el triángulo formado por las características del problema lineal. El solitón supersónico se separa casi instantáneamente de la radiación lineal tal como lo predice el método de dispersión inversa. También estudiamos el problema de una cadena con impureza en las masas que varían lentamente como función del nodo. Este problema es no integrable. Aquí la solución numérica muestra como el solitón pierde energía y momento cuando este siente la variación de las masas. En ambos problemas desarrollamos una solución aproximada utilizando el Lagrangiano promediado e incluyendo la radiación. Esta solución explica de manera sencilla el frenado o aceleración del solitón en términos de un potencial efectivo generado por la impureza de las masas. También explica las oscilaciones en la velocidad de la onda de choque debidas al potencial de Peierls-Nabarro que aparece al perderse la integrabilidad. Mostramos que en

el caso supersónico el efecto del potencial de Peierls-Nabarro no es importante para la comprensión de la dinámica. Este resultado se obtiene del cálculo del Lagrangiano promediado con la fórmula de Poisson.

En el tercer capítulo estudiamos la ecuación de Sine-Gordon con diferencias centrales en la variable espacial como discretización. Este problema es no integrable y por lo tanto obtenemos un potencial interno también conocido como potencial de Peierls-Nabarro [23]. En esta ecuación estamos interesados en estudiar ondas viajeras tipo escalón (kink), las cuales existen en la contraparte continua y son subsónicas, esto es, viajan con una velocidad menor a la de las ondas lineales. La solución numérica muestra un transitorio inicial debido a la no integrabilidad, el escalón trata de ajustarse a una solución exacta, y el potencial interno hace que la solución numérica desarrolle oscilaciones cuyo periodo eventualmente entra en resonancia con la velocidad de la onda viajera, ya que la velocidad del escalón es subsónica. Por este motivo el comportamiento de este escalón difiere drásticamente del de la onda de choque. Observamos que a diferencia del caso continuo, el cual no tiene grados de libertad internos para el escalón, que los grados de libertad internos del problema discreto modifican de manera importante la evolución del escalón. Para entender estos grados de libertad internos estudiamos el problema de valores propios que se obtienen al linealizar la ecuación Sine-Gordon discreta estática alrededor de una solución estática. Mostramos que dos valores propios quedan fuera de la banda continua, uno exponencialmente pequeño, que puede ser positivo o negativo dependiendo de la posición del escalón, y el otro cercano a la rama inferior de la banda continua. La función propia correspondiente al valor propio exponencialmente pequeño es conocida en la literatura como el modo de Goldstone, mientras que la función propia con valor propio cercano a la rama inferior de la banda continua se conoce como modo impar (ver [27]). Desarrollamos una aproximación asintótica basada en el Lagrangiano promediado que incluye los modos de Goldstone e impar en la función de prueba. Con un análogo discreto del WKB estimamos la pérdida por radiación del escalón viajero. El amortiguamiento de radiación que obtenemos de este análisis lo incluimos en las ecuaciones variacionales del Lagrangiano promediado. Explicamos pues la evolución del escalón viajero

en términos de un escalón modulado interactuando con sus modos internos y perdiendo momento por la radiación. Este trabajo complementa el de Peyrard y Kruskal [19] en el cual no se tomarón en cuenta los modos internos y el de Kevrekidis y Weinstein [27] que es el límite opuesto en el cual el escalón no se mueve. Este análisis completa el estudio asintótico del problema.

En el cuarto capítulo estudiamos la ecuación de Sine-Gordon en dos dimensiones espaciales con diferencias centrales como discretización. Se sabe que la ecuación Sine-Gordon continua no tiene solución pulso tipo radial ya que toda solución de este tipo se colapsa en un tiempo finito [32]. Estudiamos este mismo problema en una malla cuadrada para valores pequeños del parámetro de discretización, d , que están entre el límite anticontinuo ($d = 0$) y el límite continuo ($d \gg 1$), y obtenemos soluciones radiales que se colapsan y algunas otras que no lo hacen. Desarrollamos la solución numérica y obtenemos una fórmula asintótica, basada en el Lagrangiano promediado, que predice cuantitativamente las condiciones iniciales radiales que no colapsan. Encontramos después soluciones numéricas para la ecuación estática discreta de Sine-Gordon bidimensional usando el método de Newton con la condición inicial dada por la fórmula para el pulso radial o por los datos numéricos de las soluciones numéricas del problema dinámico. Adicionalmente, obtenemos soluciones numéricas estáticas no sólo para pulsos radiales sino también para configuraciones en forma de anillo. Linearizamos a la ecuación de Sine-Gordon discreta alrededor de una solución estacionaria y estudiamos el problema de valores propios correspondiente para verificar la estabilidad de las soluciones estacionarias. Encontramos que las condiciones iniciales radiales que no colapsan son linealmente estables y tienden a tener una estructura no radial sino poligonal para radios grandes y cuadrada para radios pequeños, independientemente de la configuración del pulso. Esto último sugiere que para pulsos radiales el radio depende del ángulo no trivialmente para poder obtener una estructura poligonal para el perfil del pulso. Para un radio dado seguimos numéricamente a la rama estable, la cual bifurca en cuatro ramas inestables, como función del parámetro de discretización d . Además construimos, usando coordenadas normales y tangenciales, soluciones aproximadas en las que la frontera de la solución localizada queda determinada

por la geodésica que queda atrapada en los mínimos del potencial de Peierls-Nabarro.

Finalmente, la última parte de este trabajo tiene los apéndices en los cuales se desarrollan cálculos laboriosos para obtener los Lagrangianos promediados, con los correspondientes potenciales de Peierls-Nabarro, de la cadena de Toda y la cadena de Sine-Gordon unidimensional.

Introducción

En el estudio cuantitativo de problemas de las ciencias naturales aparecen ecuaciones (algebraicas, diferenciales ordinarias o parciales) no lineales siendo los problemas lineales más bien una excepción. Las ecuaciones diferenciales lineales están completamente entendidas y se conoce una gran cantidad de métodos analíticos para resolverlas. En el caso particular de ecuaciones diferenciales que describen a las ondas de amplitud pequeña las soluciones básicas corresponden a la solución elemental Ae^{ikx-wt} . Sin embargo, las ecuaciones diferenciales no lineales son mucho más complicadas de resolver ya que las soluciones ya no son sinusoidales. Es muy usual que los problemas no lineales se estudien linearizando alrededor de una vecindad de algún punto de interés para después usar la teoría lineal, existen métodos analíticos y numéricos para describir el comportamiento de la solución localmente. Una rama importante de las ecuaciones diferenciales no lineales es aquella que estudia soluciones tipo ondas no lineales, y más particularmente ondas no lineales localizadas y estables, esto es, ondas solitarias o solitones. Estas ondas resultan del balance de la teoría lineal con la no linealidad. Se balancea así la dispersión para poder producir ondas con forma permanente o ondas solitarias. El estudio de este tipo de soluciones surgió a partir de la observación que hiciera el ingeniero escocés John Scott Russell en el año de 1834, en la que detectó como un cúmulo de agua se transportaba a través de un canal una distancia considerable sin cambiar de forma cuando una barca jalada por caballos se detuvo repentinamente, lo que ocasionó que la proa de la barca golpeará el agua generando los solitones. A partir de entonces varios modelos continuos comenzaron a explorarse para explicar este tipo de

fenómenos, uno de los cuales es el descrito por la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) que precisamente modela ondas en aguas someras o poco profundas, en comparación con las dimensiones de la superficie. De hecho esta ecuación fue estudiada numéricamente por vez primera por Zabusky y Kruskal en 1965 [1], ellos acuñaron el término solitón en referencia a que este tipo de ondas tiene propiedades de interacción similares a las de una partícula, y que precisamente observaron en la ecuación KdV. Por otro lado, Klein (1927) y Gordon (1926) derivaron una ecuación de onda relativista para una partícula cargada en un campo electromagnético usando las ideas, entonces descubiertas, de la teoría cuántica. Dicha ecuación de Klein-Gordon se reduce a $\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \nabla^2\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi = 0$, en el caso especial de una partícula libre se pueden elegir unidades tales que $c = 1$ y generalizar a la forma no lineal $\psi_{tt} - \nabla^2\psi + V'(\psi) = 0$. Para algún potencial V no lineal, en particular si $V'(\psi) = \sin\psi$ se tiene la ecuación de Sine-Gordon $\psi_{tt} - \nabla^2\psi + \sin\psi = 0$. Ésta ecuación surgió por vez primera a finales del siglo XIX como una ecuación en la geometría diferencial de superficies con curvatura Gaussiana negativa. Por otra parte, también describe la propagación de una dislocación en un cristal cuya periodicidad está representada por $\sin\psi$ [2]. También es un modelo tentativo para una partícula elemental (Perring y Skyrme 1962), además de que es una forma equivalente del modelo de Thirring (Coleman 1975). Se tiene demostrado que la ecuación Sine-Gordon tiene soluciones tipo escalón (kink) y soluciones temporalmente periódicas y espacialmente localizadas en un sistema móvil de referencia adecuado (breathers) que viajan a velocidades por debajo de la velocidad de las ondas lineales. Otra ecuación que es muy importante en el estudio de ondas solitarias es la ecuación no lineal de Schrödinger con un potencial no lineal específico, ésta ecuación puede modelar el traslado de una señal en una fibra óptica. En las ecuaciones ejemplificadas anteriormente se ha demostrado que son completamente integrables y que tienen ondas solitarias como solución usando el método de dispersión inversa [28].

Por otro lado, se ha observado que los modelos continuos no siempre reflejan exactamente lo que se quiere modelar pues las propiedades microscópicas se pierden en el límite continuo. En 1938 Frenkel y Kontorova introduje-

ron el modelo conocido por su nombre, con el cual describieron una cadena de osciladores acoplados armónicamente sujeta a un potencial de sustrato externo [2], [3], que a nivel de las ecuaciones representa a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas, una ecuación por cada partícula de la cadena de osciladores. En medios continuos este modelo debería de reemplazarse por la ecuación continua de Sine-Gordon. Sin embargo, la existencia de un kink (escalón) y/o un breather del modelo continuo de Sine-Gordon no se cumple en el modelo discreto (modelo de Frenkel y Kontorova), el cual no es completamente integrable dado que la propiedad de la invariancia de traslación en la ecuación continua no se satisface en la ecuación discreta. Esto último sugiere que se debe de estudiar a los modelos discretos con otras herramientas y no hacer el límite continuo, pues el modelo continuo correspondiente tiene propiedades diferentes.

A partir de entonces ha surgido el interés en estudiar modelos no lineales y discretos porque pueden tener propiedades que no se presentan en sus límites continuos. Sin embargo, por su mayor generalidad, la mayoría de los modelos discretos dejan de ser completamente integrables [8], por ejemplo, el modelo de Frenkel y Kontorova [3]. Varios modelos discretos pueden ser obtenidos al ver a estos como discretizaciones de modelos continuos, dependiendo de que discretización se use. Así, por ejemplo, se ha estudiado la ecuación no lineal de Schrödinger con varias discretizaciones y no linealidades, se ha mostrado que una de ellas es completamente integrable, la ecuación de Ablowitz-Ladik, y que otras no lo son [8].

Uno de los primeros trabajos sobre la simulación numérica para la ecuación discreta de sine-Gordon fue llevado a cabo por Currie et. al. [22], en el cual mostraron que una condición inicial tomada como el escalón (kink) exacto de la ecuación continua de Sine-Gordon cambia su configuración un poco al radiar ondas lineales, dando lugar a un amortiguamiento espontáneo en el movimiento del escalón. Sin embargo, Currie et. al. no siguieron la evolución lo suficiente para observar en detalle el estado final del escalón viajero. Por otro lado, Ishimori y Munakata [23] obtuvieron los primeros resultados asintóticos, ellos estudiaron el efecto discreto en la dinámica del escalón de Sine-Gordon en la cadena de Frenkel y Kontorova usando el análisis pertur-

bativo de MacLaughlin y Scott, esto es, ellos consideraron la aproximación continua de la ecuación discreta de Sine-Gordon a todos los ordenes y escribieron la ecuación resultante como una ecuación de Sine-Gordon continua perturbada. Ellos mostraron que a primer orden en la aproximación continua el escalón se mueve en un potencial periódico, conocido como potencial de Peierls-Nabarro (PN), el cual es el causante de las oscilaciones y del atrapamiento del escalón. Sin embargo, ellos no compararon la solución asintótica con la numérica. Por otro lado, Peyrard y Kruskal [19] estudiaron la dinámica del escalón en la ecuación discreta de Sine-Gordon en el régimen muy discreto. Estudiaron en detalle la complicada evolución numérica del escalón viajero y mostraron que todas las condiciones iniciales de éste tipo tienen el mismo comportamiento cualitativo. Ellos encontraron, resolviendo la ecuación linealizada de Sine-Gordon con un término de forzamiento dado por el escalón viajero, que el escalón emite radiación cuando su velocidad resuena con la velocidad de fase de las ondas lineales de la cadena (fonones). Encontraron que la emisión de radiación es grande para velocidades grandes del escalón y pequeña para velocidades pequeñas. La evolución temporal de la velocidad del escalón viajero muestra oscilaciones relativamente grandes, causadas por el potencial de PN, alrededor de un valor promedio que decrece y que eventualmente cambia bruscamente de valor dando lugar a una especie de rodillas en la gráfica de la velocidad. Ellos exploraron la posición de dichas rodillas (lugar en donde ocurre la resonancia) y obtuvieron una estimación para la posición promedio del escalón. Sin embargo, ellos no propusieron ecuaciones que acoplaran la radiación con el movimiento del escalón. En la versión continua y para condiciones iniciales que no satisfacen la relación de dispersión de un escalón continuo exacto, Smyth y Worthy [15] obtuvieron la pérdida por radiación usando las ecuaciones de conservación del momento y la energía de la ecuación continua de Sine-Gordon. Ellos calcularon la pérdida de momento del escalón para las ondas radiadas. Las ondas radiadas las calcularon en términos de los parámetros del escalón obteniendo un sistema cerrado de ecuaciones. Finalmente, Boesch et. al. [25], [26] introdujeron un método de variable colectiva usando un operador de proyección para estudiar la emisión de radiación de un escalón discreto de Sine-Gordon, con ésta apro-

ximación ellos explicaron los efectos de la radiación y la evolución del escalón. Pero en la aproximación de la variable colectiva resolvieron numéricamente un número grande de ecuaciones diferenciales, lo que computacionalmente es equivalente a resolver numéricamente la cadena de Frenkel y Kontorova completa. En el caso bidimensional se ha observado que la ecuación continua de Sine-Gordon en dos variables espaciales no tiene pulsos radialmente simétricos como solución. Pues toda solución de este tipo colapsa en un tiempo finito, lo cual fue mostrado por John Neu [32] usando la teoría de modulaciones de Whitham, [9]. Por otra parte, Minzoni et al [33] intentaron estabilizar a los pulsos radiales introduciendo un momento angular al pulso, lo cual no fue suficiente pues el pulso radial también colapso. Ellos estudiaron numéricamente y asintóticamente éste problema e hicieron un estudio detallado de la radiación emitida por el pulso, la cual acoplaron con el pulso radial. Además, obtuvieron que estructuras en forma de anillo, diferencia entre dos pulsos radiales con radios diferentes, también colapsan.

También, en 1967 M. Toda [4], [5] presento una cadena uniforme, es decir masas y resortes constantes, de osciladores con una interacción exponencial entre vecinos cercanos y mostro una solución exacta tipo solitón. Más tarde se mostro que la ecuación de Toda es completamente integrable y su solución fue encontrada con un análogo discreto del método de dispersión inversa usando el par de Lax. Por lo que la ecuación para la cadena uniforme de Toda es una de las pocas ecuaciones discretas que son completamente integrables. Sin embargo, si las masas y/o los resortes de dicha cadena no son constantes sino que dependen de la posición de los osciladores, por ejemplo, entonces se tiene una cadena inhomogénea que ya no es integrable. Se han desarrollado técnicas experimentales, numéricas y perturbativas para estudiar la evolución de solitones en la cadena de Toda con impureza en las masas y/o en los resortes, ver [15], [16], [17], [18]. Sin embargo, los resultados perturbativos solamente dan descripciones cualitativas del sistema.

Una alternativa exitosa en ecuaciones diferenciales parciales para investigar el comportamiento de ondas no lineales es el estudio numérico combinado con técnicas asintóticas (cuasi analíticas) para investigar las soluciones. En el presente trabajo estudiamos algunos modelos discretos numéricamente y

asintóticamente. Primeramente, estudiamos el comportamiento numérico de soluciones tipo solitón, escalón (kink) y pulsos radiales. Después desarrollamos una aproximación asintótica, basada en el Lagrangiano promediado de la ecuación en cuestión, y finalmente hacemos una comparación cualitativa y cuantitativa de ambas soluciones. En el primer capítulo damos una revisión rápida de la aproximación asintótica que se obtiene de las ecuaciones variacionales del Lagrangiano del sistema. Además, presentamos la fórmula de Poisson que se usara para estimar las series que aparecen en los cálculos de los sistemas discretos.

En el segundo capítulo estudiamos la cadena de Toda, la cual se sabe que es completamente integrable, con condiciones iniciales que no satisfacen la relación de dispersión, problema de ajuste a un solitón exacto. Además, estudiamos el problema no integrable de una cadena con impureza en las masas. En ambos problemas desarrollamos la solución numérica y encontramos una aproximación asintótica usando el Lagrangiano de la ecuación de Toda. Incluimos la pérdida por radiación en las ecuaciones de modulación.

En el tercer capítulo estudiamos la cadena de Frenkel y Kontorova (Sine-Gordon discreta), la cual se sabe es no integrable. Desarrollamos una aproximación asintótica cuantitativa para la propagación de un escalón (kink) calculando el efecto de la radiación emitida por el escalón viajero. Usamos el Lagrangiano promediado discreto como la contraparte del que se considera en [20]. En esta aproximación la fórmula de suma de Poisson dota del potencial de Peierls-Nabarro (PN), el cual es el responsable del brinco del escalón a través de la cadena. Encontramos que a diferencia del caso continuo sólo son posibles soluciones estáticas tipo escalón. También mostramos que soluciones que se propagan sólo son posibles para velocidades más pequeñas que un cierto umbral, lo que explica por que los escalones con velocidades grandes (cercasas a 1) se propagan distancias cortas. El acoplamiento entre el escalón y la radiación es estudiado usando la existencia de la radiación resonante descubierta en [19] y producida por el movimiento del escalón. Esta radiación es calculada usando un análogo discreto del WKB. Un estudio cuidadoso de la solución numérica en una vecindad del escalón muestra que la contraparte dinámica del modo de Goldstone estático, el cual aparece como la contra-

parte del modo cero del modelo continuo debido a que el modelo discreto no es invariante de traslación, es responsable de una pequeña asimetría del escalón. Ésta asimetría hace que el potencial de PN sea más grande, lo cual a su vez produce aceleraciones más grandes. Cuando son incluidos todos estos efectos se obtiene una comparación satisfactoria entre la solución numérica y la asintótica.

En el capítulo cuatro estudiamos la ecuación discreta de Sine-Gordon en dos dimensiones espaciales. La contraparte continua de este modelo se sabe no tiene soluciones tipo pulso radialmente simétricos pues todos ellos colapsan en un tiempo finito, ver [32] y [33]. En este capítulo mostramos que la versión discreta tiene pulsos radialmente simétricos que colapsan y otros que no. Usamos el Lagrangiano promediado de la ecuación discreta para obtener cuantitativamente los radios de los pulsos que no colapsan. Estudiamos el problema de estabilidad de las soluciones que no colapsan linearizando alrededor de dichas soluciones. Consideramos el problema de continuación numérica, como función del parámetro de discretización d , de soluciones estables desde el límite anticontinuo ($d = 0$), el cual es opuesto al límite continuo $d = \infty$, y encontramos, en un régimen discreto ($d \approx 0,5$), un punto de retorno para dicha rama en cuatro ramas inestables. Mostramos que los pulsos que no colapsan tiene una estructura no radial sino poligonal. Encontramos un mapeo discreto que describe la forma poligonal de los pulsos.

En la parte última de este trabajo desarrollamos los cálculos de las series que son necesarias para estimar los Lagrangianos promediados utilizados a lo largo del trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este trabajo vamos a obtener resultados asintóticos basados en desarrollos como versiones discretas de la teoría de modulaciones inventada por Whitham (ver [9]), el cual usa el Lagrangiano de la ecuación en cuestión. Aplicando luego una función de prueba apropiada (basada en una solución modulada) se obtienen ecuaciones de modulación para los parámetros de la función de prueba. Estas ecuaciones predicen los aspectos relevantes del comportamiento de las soluciones de forma muy simple. Aquí extenderemos estas ideas a problemas discretos. Por otro lado, la influencia de la radiación es importante. Para estudiar ésta influencia acoplaremos la dinámica de las modulaciones con la dinámica de la radiación. También explicamos la fórmula de suma de Poisson (ver [10]), la cual vamos a necesitar para estimar las series infinitas en cada uno de los problemas discretos que vamos a estudiar.

1.1. Aproximación variacional

En la teoría de modulaciones de Whitham se supone que la ecuación diferencial se puede deducir de un Lagrangiano de la forma,

$$L = F(u_t, u_x, u). \tag{1.1}$$

En donde u se supone satisface la ecuación diferencial y tiene una cierta

forma funcional la cual proponemos, esto es, es una función de prueba. Como L satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{u_t} + \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - F_u = 0. \quad (1.2)$$

Si esta última ecuación tiene familias de soluciones que dependen de un vector de parámetros coherentes de la forma $u = U(\mathbf{x}, t, \mathbf{a})$. Entonces se pueden encontrar soluciones aproximadas de (1.2) de la forma:

$$u = U(\mathbf{x}, t, \mathbf{a}(t)), \quad (1.3)$$

donde $d\mathbf{a}/dt = \dot{\mathbf{a}} \ll 1$. La forma funcional (1.3) para la familia de soluciones es llamada función de prueba. Al sustituir (1.3) en (1.2) y despreciar términos pequeños en $\dot{\mathbf{a}}$ tenemos:

$$u_t = U_{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} + U_t.$$

Así, integrando respecto a x obtenemos:

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_t, u_x, u) dx = \int_{-\infty}^{\infty} L(\mathbf{x}, t, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) dx. \quad (1.4)$$

Que es conocido como el Lagrangiano promediado de la ecuación diferencial. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de (1.4) son las ecuaciones que contralan las modulaciones de la solución, u , de la ecuación diferencial.

El mismo procedimiento se puede hacer para ecuaciones discretas, que es en las que estamos interesados. En este caso un Lagrangiano típico para una cadena de osciladores no lineales es de la forma:

$$L = \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 - \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n)^2 - V(u_n). \quad (1.5)$$

Si suponemos una familia de soluciones tipo ondas viajeras,

$$u_n = U(n - \xi(t), \mathbf{a}),$$

y repetimos el procedimiento usado en el caso continuo entonces tenemos el Lagrangiano promediado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(U_{\xi} \dot{\xi} + U_{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \right)^2 - \frac{1}{2} (U_{n+1} - U_n)^2 - V(U_n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G \left(n - \xi, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}} \right).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Las sumas infinitas se evalúan usando la fórmula de suma de Poisson, la cual describiremos en la sección siguiente, y obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G \left(n - \xi, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m \xi} \widehat{G} \left(m, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}} \right), \tag{1.7}$$

donde \widehat{G} es la transformada de Fourier de G .

Así, con los modos más altos y despreciando términos pequeños en $\dot{\xi}$, $\dot{\mathbf{a}}$ y $\xi \dot{\mathbf{a}}$ se obtiene el Lagrangiano promediado (1.6) en la forma:

$$\mathcal{L} = A(\mathbf{a}, \xi) \dot{\xi}^2 + B(\mathbf{a}, \xi) \dot{\mathbf{a}}^2 + \exp(2\pi i \xi) \widehat{G}(\mathbf{a}). \tag{1.8}$$

Este es un Lagrangiano para una partícula con posición $\xi(t)$ moviéndose en un potencial periódico, $\exp(2\pi i \xi)$, con grados de libertad internos descritos por el parámetro \mathbf{a} . Notese que la malla es la responsable del potencial periódico, $\exp(2\pi i \xi) \widehat{G}(\mathbf{a})$, el cual es conocido como el potencial de Peierls-Nabarro y ello marca la diferencia cualitativa en el comportamiento de solitones en cadenas discretas.

Las ecuaciones de movimiento para los parámetros de la función de prueba, que se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange del Lagrangiano promediado \mathcal{L} , no incluyen las pérdidas por radiación. Estas deben incluirse usando las leyes de conservación para balancear las cantidades conservadas por la interacción de la estructura coherente y la radiación. Finalmente, debe calcularse la cantidad de radiación producida por la estructura coherente para cerrar las ecuaciones.

La idea general es tomar una cantidad conservada del Lagrangiano, por ejemplo, la funcional de energía $E(u, \dot{u})$ y la energía promedio $\overline{E}(\xi, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}})$ y entonces usar la ley de conservación del Lagrangiano

$$\frac{d}{dt}E(u, \dot{u}) = \frac{d}{dt}E_c(u, \dot{u}) + \frac{d}{dt}E_r(u, \dot{u}),$$

donde E_c es la energía de la onda coherente y E_r la energía contenida por la radiación. Ahora $E_c(u, \dot{u}) = \bar{E}(\xi, \mathbf{a}, \dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}})$ y la cantidad

$$F = \frac{d}{dt}E_r(u, \dot{u}),$$

es el flujo de energía que transita entre la estructura coherente y la radiación. Para cerrar las ecuaciones sólo se necesita calcular F . En los sistemas mecánicos F es una forma cuadrática (cuando suponemos una radiación pequeña) que es el potencial disipado o absorbido en la frontera entre la estructura coherente y la radiación. Para su cálculo necesitamos el valor de frontera para la radiación y resolver las ecuaciones de movimiento para las ondas radiadas. El valor de frontera se determina usando balances globales de energía o acoplamiento detallado entre la estructura coherente y la radiación, según sea el caso [13].

En principio este procedimiento completa la asintótica de la solución. Si bien esto siempre es factible, es necesario encontrar las funciones de prueba apropiadas así como el resolver los problemas de radiación que en general, si bien son lineales, presentan dificultades ya que están dados en dominios móviles.

El propósito de esta tesis es ilustrar como llevar a cabo estas ideas en contextos de ondas en cadenas unidimensionales subsónicas y supersónicas, además de estructuras coherentes en mallas bidimensionales.

1.2. Fórmula de suma de Poisson

En los problemas discretos debemos de calcular sumas de funciones de la forma:

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m-x), \quad (1.9)$$

en donde $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función dada.

Resumando la serie se verifica que $g(x) = g(1+x)$, esto es, $g(x)$ es una función 1 – *periódica*. Por lo que podemos expandir a $g(x)$ en su serie de Fourier,

$$g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2n\pi x), \quad (1.10)$$

en donde los coeficientes de esta expansión están dados por:

$$A_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \cos(2n\pi x) dx, \quad B_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin(2n\pi x) dx. \quad (1.11)$$

Sustituimos a $g(x)$ dada por (1.9) en la expresión para A_n , por ejemplo, desarrollamos y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i-x) \cos(2n\pi x) dx = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(i-x) \cos(2n\pi x) dx \\ &= -2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{i+1/2}^{i-1/2} f(z) \cos(2n\pi(i-z)) dz = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{i-1/2}^{i+1/2} f(z) \cos(2n\pi z) dz \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(2n\pi z) dz. \end{aligned}$$

Es decir,

$$A_n = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(2n\pi z) dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Similarmente se verifica que

$$B_n = -2 \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin(2n\pi z) dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.13)$$

Por lo que en forma compacta, se cumple:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m-x) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \cos(2n\pi x) \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(2n\pi z) dz \\ - \sin(2n\pi x) \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin(2n\pi z) dz \end{array} \right] \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos[2n\pi(x+z)] dz \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos[2n\pi(x+z)] dz \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{2\pi i n(x+z)} dz \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \hat{f}(n), \tag{1.14}
\end{aligned}$$

y en donde

$$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{2\pi i n z} dz,$$

es la transformada de Fourier de f . En particular, si $x = 0$ se tiene la fórmula de suma de Poisson en su forma estándar [10]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n). \tag{1.15}$$

Para una serie doble el resultado es el mismo, pero en ese caso se debe de calcular la transformada de Fourier en dos variables. La fórmula de suma de Poisson (1.15) es muy usada para entender la dinámica de las ondas no lineales en los problemas de cadenas [30], [23], [24].

Capítulo 2

La cadena de Toda

En este capítulo estudiamos la evolución de soluciones tipo ondas de choque en la cadena de Toda con condiciones iniciales que no satisfacen la relación de dispersión no lineal entre la altura y la velocidad de la onda de choque de la solución exacta, la cual se conoce [4], [5]. En particular, estudiamos como la condición inicial se reajusta y evoluciona a una solución tipo onda viajera. Vemos como la teoría de modulaciones describe la evolución de ondas supersónicas explicando en detalle el reajuste de la onda de choque por la emisión de radiación lineal. Esta descripción es cuantitativamente muy buena a pesar de la interacción fuertemente no lineal. También estudiamos el problema de propagación de una onda de choque, la cual inicialmente es un solitón exacto, en un cadena con impurezas. Nuevamente la asintótica permite explicar la evolución de la onda en términos de modulaciones y la pérdida de momento por radiación.

2.1. Las ecuaciones de la cadena de Toda

Consideremos una cadena unidimensional e infinita de partículas que interactúan con sus vecinas más cercanas a través de resortes no lineales. Denotemos por m_n la masa de la n -ésima partícula y por y_n su desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. Además, denotemos por a_n y b_n las constantes del n -ésimo resorte no lineal, como se muestra en la Figura 2.1. Denotemos por $r_n = y_{n+1} - y_n$ al desplazamiento relativo entre la n -ésima y

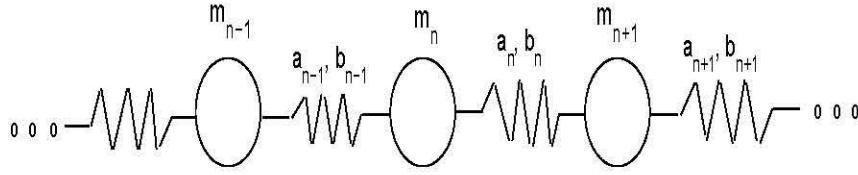


Figura 2.1: Arreglo de masas y resortes en la cadena unidimensional.

la $(n + 1)$ -ésima partícula. Así, de la segunda ley de Newton, las ecuaciones de movimiento se escriben de la siguiente manera [12]:

$$m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\phi'(r_{n-1}) + \phi'(r_n), \quad (2.1)$$

en donde $\phi(r)$ es el potencial de interacción no lineal entre las vecinas más cercanas. Este modelo discreto toma en cuenta la escala discreta (microscópica) de las moléculas de un cristal. Así, consideramos el potencial intermolecular de interacción de tipo exponencial, esto es,

$$\phi(r) = \frac{a_n}{b_n} e^{-b_n r} + a_n r, \quad a_n b_n > 0. \quad (2.2)$$

Este potencial cubre un amplio rango de situaciones desde el oscilador armónico hasta el límite fuertemente no lineal. Finalmente, la ecuación de movimiento que se obtiene para esta cadena no lineal es:

$$\begin{aligned} m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= V_n - V_{n+1}, \\ V_n &= a_n (e^{-b_n(y_n - y_{n-1})} - 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Esta ecuación se conoce como la cadena de Toda. Cuando los parámetros m_n y/o a_n , b_n dependen del nodo n se dice que tenemos una cadena con impureza, ya sea en las masas o en los resortes, o una cadena inhomogénea. Cuando $m_n = m$, $a_n = a$ y $b_n = b$ son constantes entonces decimos que tenemos una cadena uniforme, observamos que para dicha cadena uniforme el potencial de interacción $\phi(r)$ tiene un mínimo en $r = 0$, por lo que tenemos

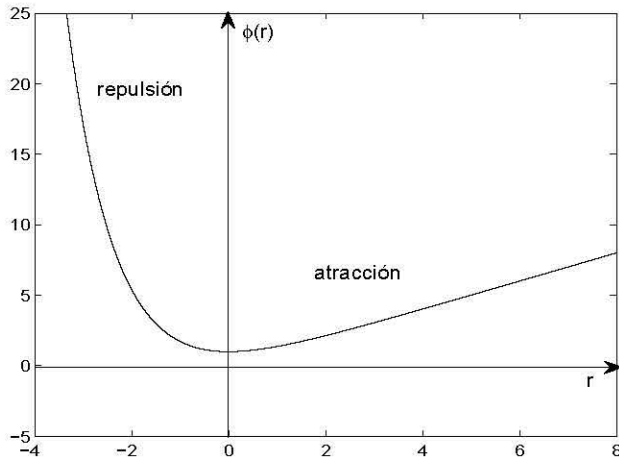


Figura 2.2: Gráfica de $\phi(r)$ para $a = b = 1$ que muestra las regiones de atracción y de repulsión.

atracción cuando $r > 0$ y repulsión cuando $r < 0$. Si además suponemos que $a > 0$ y $b > 0$ entonces ocurre una repulsión muy fuerte cuando $r < 0$ y una atracción débil (constante a grandes distancias) cuando $r > 0$. Mientras que si $a < 0$ y $b < 0$ tenemos una repulsión débil si $r < 0$ y una atracción fuerte si $r > 0$, ver Figura 2.2.

Por otro lado, la ecuación de movimiento (2.3) se puede obtener del Lagrangiano,

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{m_n}{2} \dot{y}_n^2 - \frac{a_n}{b_n} (e^{-b_n(y_{n+1}-y_n)} - 1) - a_n (y_{n+1} - y_n) \right]. \quad (2.4)$$

Para una cadena uniforme, M. Toda [4], [5] encontró la siguiente solución exacta,

$$y_n(t) = \frac{1}{b} \ln \frac{1 + e^{2(kn-k-\zeta t)}}{1 + e^{2(kn-\zeta t)}} + \text{constante}, \quad (2.5)$$

donde

$$\zeta = \sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh k, \quad k > 0, \quad ab > 0 \quad (2.6)$$

es la relación de dispersión no lineal. La ecuación (2.5) representa a un frente de onda supersónico, con respecto a la velocidad de las ondas del problema linearizado, que viaja a velocidad y altura constantes. La posición y velocidad de este frente están dadas por las relaciones siguientes,

$$\xi = \frac{\zeta}{k} t, \quad \dot{\xi} = \frac{\zeta}{k}, \quad (2.7)$$

respectivamente. En estos nuevos parámetros la solución (2.5) se transforma a lo siguiente,

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{b} \ln \frac{1 + e^{2k(n-1-\xi)}}{1 + e^{2k(n-\xi)}} + \text{constante} \\ &= \frac{1}{b} \ln \frac{\text{sech}(k(n-\xi))}{\text{sech}(k(n-1-\xi))} - \frac{k}{b} + \text{constante} \\ &= \frac{1}{b} \ln \frac{\text{sech}(k(n-\xi))}{\text{sech}(k(n-1-\xi))} + \frac{k}{b}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

en donde la constante $\frac{2k}{b}$ se ha introducido para tomar en consideración un nivel distinto de cero atrás del frente de onda. La relación de dispersión (2.6) queda transformada en lo siguiente,

$$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{ab}{m}} \frac{\sinh k}{k} > \sqrt{\frac{ab}{m}}, \quad k > 0 \quad (2.9)$$

en donde $\sqrt{\frac{ab}{m}}$ corresponde al valor numérico de la velocidad de las ondas lineales del límite armónico de la cadena uniforme. Por lo que el frente de onda (2.8) se llama supersónico.

Se han estudiado varios problemas relacionados con la cadena de Toda, por ejemplo, la dispersión de solitones debido a impurezas en las masas, la excitación de la vibración localizada de un modo causada por la incidencia de solitones en una impureza en las masas [15], [16], [17], [18]. En este tipo de trabajos se han desarrollado métodos experimentales, numéricos y asintóticos

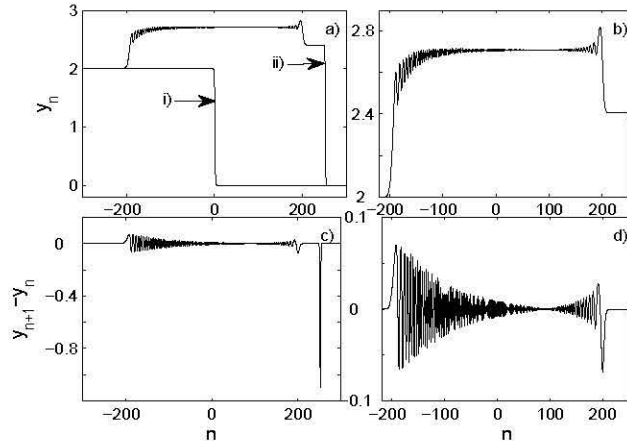


Figura 2.3: *Reajuste a solitón exacto para $a = b = m = 1$, $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 2$, $k(0) = 1$, $\dot{k}(0) = 0$. a) i) Condición inicial y ii) solución final. b) Nacimiento de un nuevo nivel atrás del shock principal y radiación lineal emitida. c) Diferencia dividida de la solución final y d) zoom de c).*

para obtener la evolución del sistema. Sin embargo, estas teorías aproximadas sólo dan descripciones cualitativas del sistema. Estamos interesados en desarrollar un método aproximado para estudiar problemas no lineales discretos que no tienen solución exacta. Como una primer aproximación desarrollaremos un método aproximado en la cadena de Toda, sin embargo como esta tiene solución exacta estudiaremos el problema de ajuste a un solitón exacto en donde la relación de dispersión (2.9) no se satisface inicialmente y el problema de una cadena con impurezas, la cual es no integrable [4], [5]. En la siguiente sección estudiamos numéricamente el comportamiento de las soluciones de estos dos problemas.

2.2. Solución numérica

Usamos un método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver un sistema finito, $2N + 1$, de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.3) y usamos

como condiciones iniciales las obtenidas de la solución exacta (2.8), esto es,

$$y_n(0) = \ln \frac{\operatorname{sech}(k_0(n - \xi))}{\operatorname{sech}(k_0(n - 1 - \xi))} + \frac{k_0}{b}, \quad -N \leq n \leq N \quad (2.10)$$

$$\dot{y}_n(0) = \dot{\xi}_0 k_0 \sinh k_0 \operatorname{sech}(k_0(n - \xi_0)) \operatorname{sech}(k_0(n - 1 - \xi_0)). \quad (2.11)$$

En el problema de ajuste a un solitón exacto tomamos $a = b = 1$, $m_n = m = 1$, $\xi_0 = \xi(0)$, $\dot{\xi}_0 = v_0 = \dot{\xi}(0)$, $\dot{k}(0) = 0$ y $k_0 = k(0)$ que no satisfagan la relación de dispersión (2.9) inicialmente. Con estos valores iniciales la relación de dispersión (2.9) exacta da una velocidad del solitón igual a $\sinh 1 \approx 1,1752$ por lo que hay un exceso inicial aproximado de 0,8248 en la velocidad de la condición inicial. Exceso que es relativamente grande y es el causante de que la solución final tenga un nivel más alto que el inicial.

La evolución de las condiciones iniciales (2.10) y (2.11) muestran un transitorio inicial para ajustar una condición inicial a un solitón exacto emitiendo radiación atrás del frente de onda. Esta evolución se muestra en la Figura 2.3. De esta Figura se puede ver claramente que el frente de onda es una onda supersónica ajustada a la onda viajera exacta. Atrás de este frente de onda se muestra una región perturbada que queda acotada por las características (triángulo de radiación) de la ecuación linealizada, como se ve puede ver de la Figura 2.4. Las pequeñas oscilaciones que quedan entre el triángulo de radiación corresponde a las ondas radiadas por el frente de onda viajero. Notamos que dicha radiación esta montada sobre un nivel un poco más alto con respecto al nivel de solitón ajustado, el cual corresponde al escalón pequeño que esta entre la línea característica $\xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t$ y el frente de onda principal, ver la Figura 2.4. Dicho nivel más alto es producido en el reajuste casi instantáneo al solitón exacto. Para tiempos muy grandes el solitón ajustado se separa más notablemente de la región perturbada (ondas lineales radiadas).

Como era de esperarse delante del shock no hay radiación emitida ya que el shock es supersónico. Esta situación es diferente de la encontrada en otros problemas hiperbólicos en donde las soluciones tipo escalón (kink) son subsónicas (ver [19]), la radiación es emitida atrás y adelante de la onda (kink), como también se mostrará en el siguiente capítulo.

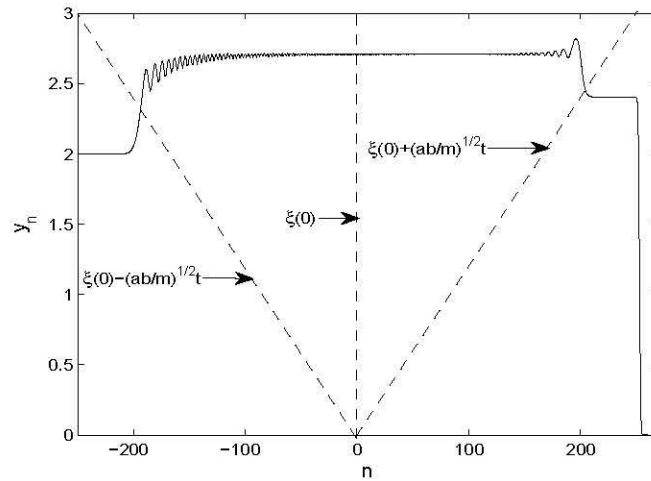


Figura 2.4: *Triángulo de radiación acotado por las características de las ondas lineales radiadas para $a = b = m = 1$, $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 2$, $k(0) = 1$, $\dot{k}(0) = 0$.*

A continuación consideramos la solución numérica, usando como antes un método de Runge-Kutta de cuarto orden, para el problema no homogéneo (2.3) con resortes constantes y una variación lenta en las masas, como función del nodo n . El solitón inicial es exacto, esto es, los parámetros iniciales satisfacen la relación de dispersión no lineal (2.9), y es colocado en el nodo n donde las masas toman el valor asintótico izquierdo. El solitón inicial está dado por las relaciones (2.10) y (2.11).

La solución numérica para este problema muestra a un solitón exacto viajando a la derecha sin presentar perturbación alguna hasta que comienza a sentir la variación lenta de las masas. Cuando esto ocurre el solitón viajero empieza a emitir radiación atrás debido a que no es una solución exacta. En la Figura 2.5 mostramos la solución numérica del problema inhomogéneo para la impureza $m_n = (3 + \tanh(0,5n))/2$. De esta Figura observamos que el frente de onda principal se reajusta atrás a un nivel un poco más bajo y que un solitón muy pequeño, viajando en dirección opuesta, parece ser que se forma atrás del frente de onda principal, de hecho, si la impureza tiene

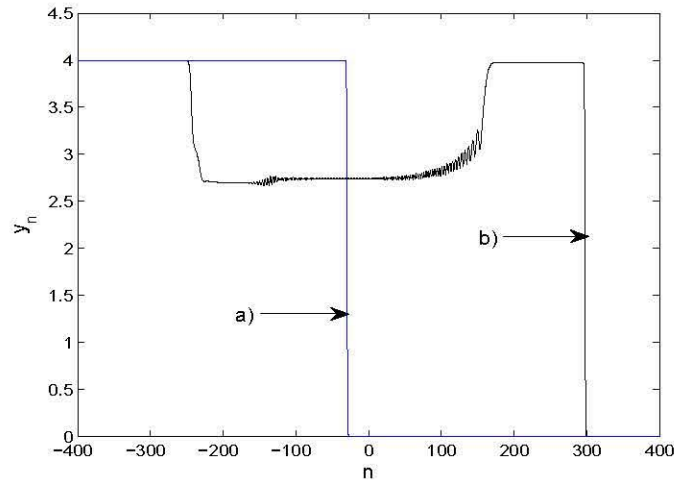


Figura 2.5: Solución numérica para la impureza $m_n = (3 + \tanh(0,5n)) / 2$ con las condiciones iniciales $a = b = m = 1$, $\xi(0) = -30$, $\dot{\xi}(0) = 2$, $k(0) = 2$, $\dot{k}(0) = 0$. a) Condición inicial y b) solución en $t = 250$.

una variación menos lenta es posible obtener un solitón totalmente reflejado, lo cual es un proceso muy complicado pues un solitón incidente en las masas se rompería no linealmente en uno transmitido y otro reflejado. Es por ello que analizamos el caso de una dependencia lenta de las masas como función del nodo, pues sólo esperamos capturar el solitón transmitido. En la sección siguiente desarrollamos una solución aproximada, basada en el Lagrangiano promediado (2.4), a ambos problemas para explicar su evolución.

2.3. Solución aproximada

Para obtener ecuaciones aproximadas usando el Lagrangiano promediado (2.4) necesitamos construir una función de prueba la cual debe de capturar las características dinámicas mostradas en la solución numérica de la sección anterior. De las Figuras 2.3 a 2.5 observamos que el nivel de atrás del frente de onda principal varía en la evolución. Para tomar en consideración este

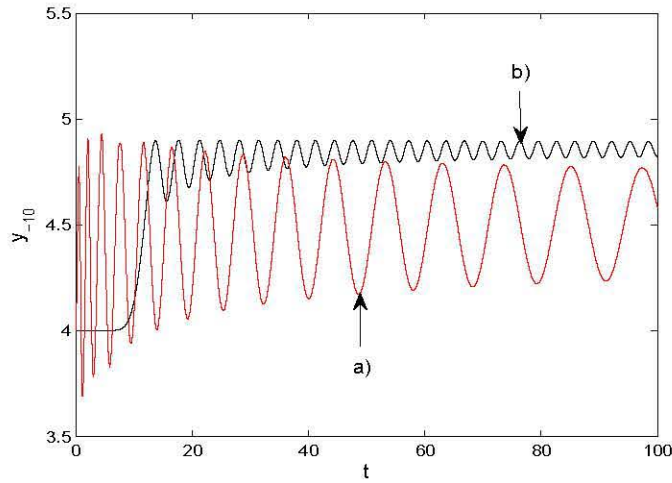


Figura 2.6: Comparación para las condiciones iniciales $a = b = m = 1$, $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 2,5$, $k(0) = 2$, $\dot{k}(0) = 0$. a) Solución aproximada (2.22)-(2.23) y b) solución numérica para $y_n(t)$ en el nodo $n = -10$ en $t = 100$.

hecho, tomamos el shock de Toda modulado de la siguiente forma,

$$y_n(t) = \frac{1}{b} \ln \frac{\text{sech}(k(n - \xi))}{\text{sech}(k(n - 1 - \xi))} + \frac{k}{b} \quad (2.12)$$

como una función de prueba, en donde ahora los parámetros ξ y k son funciones del tiempo. Esta solución tiene el nivel cero adelante del shock para todo el tiempo. Sin embargo, esta solución sólo es válida para $n \geq \xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t$ debido a la radiación emitida por el shock, ver las Figuras 2.3 y 2.5. De la solución numérica observamos que el shock radía atrás de él ondas lineales (alrededor de un nuevo nivel). Estas ondas lineales contribuyen a la perturbación creada atrás del shock como se muestra en las Figuras 2.4 y 2.5.

De la función de prueba (2.12) se tiene,

$$\dot{y}_n(t) = k\dot{\xi}G_n - \dot{k}[(n - \xi)G_n - 1 + \tanh(k(n - 1 - \xi))], \quad (2.13)$$

con

$$\begin{aligned}
G_n &= \tanh(k(n-\xi)) - \tanh(k(n-1-\xi)) \\
&= \sinh k \operatorname{sech}(k(n-\xi)) \operatorname{sech}(k(n-1-\xi)). \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Las funciones (2.12) y (2.13) son usadas en el Lagrangiano promediado (2.4) para una cadena uniforme. Aproximamos el Lagrangiano promediado usando la fórmula de suma de Poisson con un error exponencialmente pequeño, es decir, a primer orden. De la ecuación (2.13) se sigue que todos los términos en y_n^2 excepto el término $(-1 + \tanh(k(n-1-\xi)))^2$ tienen una suma finita. Este término que no converge se debe de sumar hasta la característica, pues de la solución numérica se observa que más allá del triángulo de radiación la función de prueba no es la apropiada. Por lo que obtenemos una suma convergente. Así, para la cadena uniforme obtenemos, al reemplazar la función de prueba (2.12) en (2.4), el siguiente Lagrangiano promediado:

$$\mathcal{L} = \frac{b^2}{m} L = \xi g_1(k, \xi) + k\xi g_2(k, \xi) + k g_3(k, \xi, t) - V(k, \xi) \quad (2.15)$$

donde (ver Apéndice I)

$$g_1(k, \xi) = 2k^2 \coth k - 2k - 4\pi^2 \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi), \quad (2.16)$$

$$g_2(k, \xi) = 2k + 4\pi \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \sin(2\pi\xi) \left(\frac{1}{k} - \coth k - \frac{\pi^2}{k^2} \coth \frac{\pi^2}{k} \right), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
g_3(k, \xi, t) = & -1 + \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{6k^3} + \coth k \left(\frac{\pi^2}{6k^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2\pi^2}{k^2} \coth k \coth \frac{\pi^2}{k} \\
& \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi) + \frac{\pi^2}{2k^4} \operatorname{csch}^3 \frac{\pi^2}{k} \left(3\pi^2 + \pi^2 \cosh \frac{2k^2}{k} - 2k \sinh \frac{2\pi^2}{k} \right) \\
& \cos(2\pi\xi) + \frac{2\pi^2}{k^2} \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi) + \frac{2\pi}{k} \coth k \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \sin(2\pi\xi) \\
& - \frac{2\pi}{k} (1 + \coth k) \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \sin(2\pi\xi) \\
& + \frac{1}{2k} \left[4k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) - \tanh \left(k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) \right) \right. \\
& \left. - 2 \ln \left(1 + \tanh \left(k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) \right) \right) - 1 + \ln 4 \right] \quad (2.18)
\end{aligned}$$

y

$$V(k, \xi) = \frac{2ab}{m} \left(\frac{\sinh^2 k}{k} - k \right) + \frac{4ab}{m} \frac{\pi^2}{k^2} \sinh^2 k \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi). \quad (2.19)$$

El Lagrangiano promediado \mathcal{L} en (2.15) es explícitamente dependiente del tiempo debido a que la función de prueba sólo es válida a partir de las líneas características. Este hecho debe de ser tomado en cuenta en la pérdida de radiación. Antes de estudiar la pérdida por radiación, se obtienen las siguiente ecuaciones variacionales de las fórmulas de Euler-Lagrange para el Lagrangiano promediado,

$$\delta\xi : 2\ddot{\xi}g_1 + \ddot{k}g_2 + \xi \frac{\cdot^2}{\partial\xi} \frac{\partial g_1}{\partial\xi} + 2\xi k \frac{\cdot\cdot}{\partial k} \frac{\partial g_1}{\partial k} + k \frac{\cdot^2}{\partial k} \left(\frac{\partial g_2}{\partial k} - \frac{\partial g_3}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial V}{\partial\xi} = 0, \quad (2.20)$$

$$\delta k : \ddot{\xi}g_2 + 2\ddot{k}g_3 + \xi \frac{\cdot^2}{\partial\xi} \left(\frac{\partial g_2}{\partial\xi} - \frac{\partial g_1}{\partial k} \right) + 2\xi k \frac{\cdot\cdot}{\partial\xi} \frac{\partial g_3}{\partial\xi} + k \frac{\cdot^2}{\partial k} \frac{\partial g_3}{\partial k} + 2k \frac{\cdot}{\partial t} \frac{\partial g_3}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial k} = 0, \quad (2.21)$$

en otros términos

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{4g_3g_1 - g_2^2} \left[\begin{array}{l} \dot{\xi}^2 \left(g_2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial \xi} - \frac{\partial g_1}{\partial k} \right) - 2g_3 \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \right) + \dot{\xi} \dot{k} \left(2g_2 \frac{\partial g_3}{\partial \xi} - 4g_3 \frac{\partial g_1}{\partial k} \right) + \\ \dot{k}^2 \left(g_2 \frac{\partial g_3}{\partial k} - 2g_3 \left(\frac{\partial g_2}{\partial k} - \frac{\partial g_3}{\partial \xi} \right) \right) + 2\dot{k}g_2 \frac{\partial g_3}{\partial t} + g_2 \frac{\partial V}{\partial k} - 2g_3 \frac{\partial V}{\partial \xi} \end{array} \right], \quad (2.22)$$

$$\ddot{k} = \frac{1}{4g_3g_1 - g_2^2} \left[\begin{array}{l} \dot{\xi}^2 \left(g_2 \frac{\partial g_1}{\partial \xi} - 2g_1 \left(\frac{\partial g_2}{\partial \xi} - \frac{\partial g_1}{\partial k} \right) \right) + \dot{\xi} \dot{k} \left(2g_2 \frac{\partial g_1}{\partial k} - 4g_1 \frac{\partial g_3}{\partial \xi} \right) + \\ \dot{k}^2 \left(g_2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial k} - \frac{\partial g_3}{\partial \xi} \right) - 2g_1 \frac{\partial g_3}{\partial k} \right) - 4\dot{k}g_1 \frac{\partial g_3}{\partial t} - 2g_1 \frac{\partial V}{\partial k} + g_2 \frac{\partial V}{\partial \xi} \end{array} \right]. \quad (2.23)$$

Una observación importante es que los términos de corrección dados por los potenciales de Peierls-Nabarro no intervienen en los cálculos finales, esto es indicativo de que en la fórmula de Poisson el término de orden cero es el único que contribuye, los siguientes ordenes se cancelan en el resultado final. Así, por ejemplo, resulta que el punto fijo para la segunda ecuación está dado por la relación,

$$\dot{\xi}^2 = \frac{2g_1 \frac{\partial V}{\partial k} - g_2 \frac{\partial V}{\partial \xi}}{g_2 \frac{\partial g_1}{\partial \xi} - 2g_1 \left(\frac{\partial g_2}{\partial \xi} - \frac{\partial g_1}{\partial k} \right)} = \frac{ab \sinh^2 k}{m k^2}, \quad (2.24)$$

la cual como se esperaba de la relación de dispersión (2.9) para un solitón exacto. Este punto fijo corresponde a un centro y el término de amortiguamiento $4g_1 \frac{\partial g_3}{\partial t}$ hace que las trayectorias viajen en espiral. Las trayectorias de la ecuación (2.22) tienen un transitorio inicial y oscilaciones alrededor de la velocidad dada por (2.24). Ahora, necesitamos incluir la pérdida de radiación para conseguir que las trayectorias vayan al punto fijo, el cual corresponde a la relación de dispersión de un solitón exacto. Hacemos comparaciones numéricas entre la ecuaciones aproximadas que acabamos de obtener y la solución numérica del problema. En las Figuras 2.6 y 2.7 mostramos la comparación entre la solución asintótica dada por las ecuaciones (2.22)-(2.23) y la correspondiente solución numérica para la solución $y_n(t)$ en los nodos $n = -10$ y $n = 10$, respectivamente. El escalón pequeño que aparece en la Figura 2.7 b) corresponde al nivel del solitón reajustado mientras que el siguiente escalón

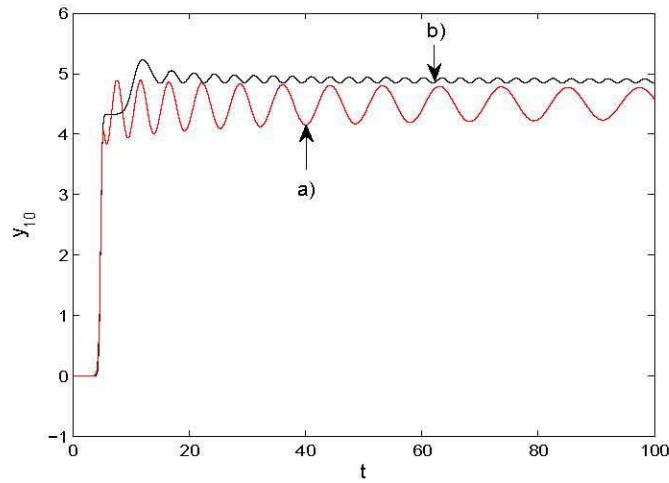


Figura 2.7: Comparación para las condiciones iniciales $a = b = m = 1$, $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 2,5$, $k(0) = 2$, $\dot{k}(0) = 0$. a) Solución aproximada (2.22)-(2.23) y b) solución numérica para $y_n(t)$ en el nodo $n = 10$ en $t = 100$.

con oscilaciones corresponde a la radiación lineal emitida por el solitón viajero. Observamos que el frente de onda principal está en fase con la solución aproximada. También, se observa que el nivel del solitón reajustado (escalón pequeño que se observa en la Figura 2.7 b)) compara bien con la solución aproximada. Las oscilaciones pequeñas montadas sobre un nivel distinto al del solitón reajustado que se muestran en ambas Figuras corresponden a ondas lineales emitidas por el shock, en esta parte la comparación es mala puesto que las ecuaciones aproximadas (2.22)-(2.23) no incluyen la pérdida de dichas ondas lineales, ésta parte va a ser discutida en la siguiente sección.

Por otro lado, en el problema de impureza en las masas suponemos que dichas masas varían lentamente como función de los nodos de la cadena. Con esta suposición podemos aproximar los cálculos donde este involucrada las masas al considerar una variación lenta con respecto a la variación de las otras variables. Además, despreciamos los términos de PN pues hemos visto que en la cadena de Toda no tienen influencia en la dinámica, pues la onda

no lineal es supersónica. Así, sustituyendo la función de prueba (2.12) en el Lagrangiano (2.4), obtenemos el siguiente Lagrangiano promediado,

$$\mathcal{L} = b^2 L = m(\xi) \dot{\xi}^2 g_1(k) + m(\xi) k \dot{\xi} g_2(k) + m(\xi) k^2 \dot{g}_3(k, \xi, t) - V(k) \quad (2.25)$$

donde

$$g_1(k) = 2k^2 \coth k - 2k, \quad (2.26)$$

$$g_2(k) = 2k, \quad (2.27)$$

$$g_3(k, \xi, t) = -1 + \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{6k^3} + \coth k \left(\frac{\pi^2}{6k^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.28)$$

$$+ \frac{1}{2k} \left[\begin{array}{l} 4k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) - \tanh \left(k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) \right) \\ -2 \ln \left(1 + \tanh \left(k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) \right) \right) - 1 + \ln 4 \end{array} \right],$$

$$V(k) = \frac{2ab}{m} \left(\frac{\sinh^2 k}{k} - k \right). \quad (2.29)$$

Por la forma funcional del Lagrangiano promediado (2.25) observamos que las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes tienen la forma funcional a las ecuaciones de Euler-Lagrange previamente obtenidas en el problema de ajuste al solitón exacto. En la Figura 2.8 se muestra la comparación numérica entre la solución al problema completo y la solución modulacional obtenida de Lagrangiano promediado (2.25) en el nodo $n = 100$ para la impureza en las masas $m_n = (1,8 - 0,2 \tanh(0,25n)) / 2$. Se observa que hay dos niveles en el frente de la solución numérica completa (Figura 2.8 b)), el primero de ellos corresponde a un soliton ajustado después de haber pasado sobre las masas variables y el segundo nivel corresponde a la radiación lineal generada y que decora al soliton ahora exacto.

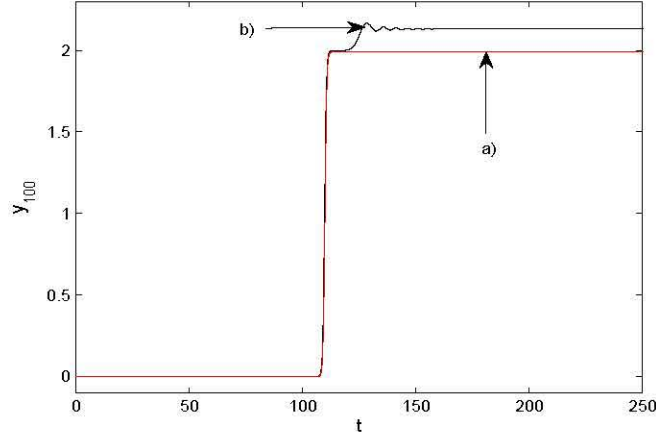


Figura 2.8: Comparación para las condiciones iniciales $a = b = m = 1$, $\xi(0) = -40$, $\dot{\xi}(0) = \sinh 1$, $k(0) = 1$, $\dot{k}(0) = 0$. a) Solución aproximada y b) solución numérica para $y_n(t)$ en el nodo $n = 100$ con la impureza $m_n = (1,8 - 0,2 \tanh(0,25n)) / 2$.

2.4. Análisis de la radiación

Consideramos el efecto de la radiación como en la ecuación continua de Sine-Gordon [20]. En primer lugar consideramos la pérdida de energía del shock para obtener un amortiguamiento en la ecuación en k . Luego calculamos la correspondiente pérdida de momento.

Se tiene que el hamiltoniano total H es conservado,

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.30)$$

Como en la ecuación continua de Sine-Gordon suponemos que,

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{ns} + \dot{y}_{nr}, \quad \dot{y}_{nr} \ll 1 \quad (2.31)$$

y que el shock, y_{ns} , y la radiación, y_{nr} , no se traslapan (ver Figura 2.4). Por lo que tenemos que,

$$H = \sum_{n=\xi(0)+\sqrt{ab/mt}}^{\infty} \dot{y}_{ns}^2 + V(y_{ns}) + \sum_{n=-\infty}^{\xi(0)+\sqrt{ab/mt}} \dot{y}_{nr}^2 + V(y_{nr}) = H_{shock} + H_{rad}. \quad (2.32)$$

El primer término de hecho se obtiene del Lagrangiano promediado (2.15) en la forma:

$$H_{shock} = \dot{k} \mathcal{L}_k + \dot{\xi} \mathcal{L}_\xi - \mathcal{L}. \quad (2.33)$$

Como la radiación es lineal y de onda larga, ver Figura 2.3, entonces el hamiltoniano es el correspondiente a la ecuación de onda lineal en la forma

$$H_{wave} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\xi(0)+\sqrt{ab/mt}} \dot{y}_{nr}^2 + (y_{n+1} - y_n)^2. \quad (2.34)$$

Como la radiación es de amplitud pequeña, entonces podemos suponer, a primera aproximación, que

$$H_{wave} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi(0)+\sqrt{ab/mt}} (y_t^2 + y_x^2) dx.$$

Así, de (2.32) la ecuación de conservación de energía (2.30) toma la forma,

$$\dot{k} \left(\frac{d}{dt} \mathcal{L}_k - \mathcal{L}_k \right) + \dot{\xi} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_\xi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab}{m}} (y_t^2 + y_x^2) + y_t y_x \right]_{\xi(0)+\sqrt{ab/mt}} = 0. \quad (2.35)$$

Los términos entre corchetes son la pérdida de energía en la radiación, la cual toma lugar hasta la línea característica $\xi(0) + \sqrt{ab/mt}$, ver Figura 2.4. Puesto que el Lagrangiano (2.15) fue obtenido promediando desde la línea característica $\xi(0) + \sqrt{ab/mt}$ hasta ∞ , que es donde el frente de onda corresponde a un solitón exacto, entonces se satisface la conservación de momento:

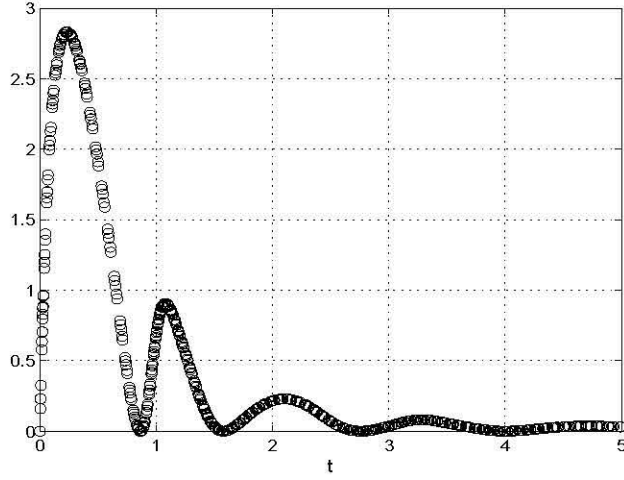


Figura 2.9: Gráfica de $\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{1}{t} g_3 k$ como función de t en el rango del transitorio.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\xi} = 0. \quad (2.36)$$

Por otro lado, debido a la forma del Lagrangiano (2.15) obtenemos que:

$$\dot{k} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{k}} = 2 \frac{\partial g_3}{\partial t} \dot{k}^2, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial g_3}{\partial t} \dot{k}^2, \quad (2.38)$$

en donde el producto $k \dot{\xi}$ se ha despreciado. Por lo que la ecuación de conservación de energía toma la siguiente forma:

$$\dot{k} \left(\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{k}} - \mathcal{L}_{\dot{k}} - \frac{\partial g_3}{\partial t} \dot{k} \right) = - \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab}{m}} (y_t^2 + y_x^2) + y_t y_x \right]_{\xi(0) + \sqrt{ab/mt}}, \quad (2.39)$$

la cual debe de ser acoplada con la ecuación de conservación de momento.

Ahora, calculamos la radiación lineal emitida atrás del shock que es el término entre corchetes. La solución es la onda $y(x, t) = h(t + x)$ con condición de frontera $y_x(\xi(0) + \sqrt{ab/mt}, t) = g(t)$ y en donde $g(t)$ debe de ser determinada. La función $g(t)$ es determinada de la conservación de la energía, en el triángulo de radiación (ver Figura 2.4), como en la ecuación continua de Sine-Gordon [20], para obtener:

$$H_{shock} - H_{shock\ fixed} = H_{rad} = \int_{\xi(0) - \sqrt{ab/mt}}^{\xi(0) + \sqrt{ab/mt}} \frac{1}{2} (y_t^2 + y_x^2) dx. \quad (2.40)$$

El lado izquierdo se expande alrededor del punto fijo k_0, ξ_0 y el lado derecho se evalúa usando la regla trapezoidal con $\xi = \xi_0 + \hat{\xi}, k = k_0 + \hat{k}$ para obtener

$$\frac{1}{2} g_3 \hat{k}^2 + \frac{1}{2} g_1 \hat{\xi} - g_2 k \hat{\xi}_0 = \frac{1}{4} 2 \sqrt{ab/mt} g^2(t) = \frac{\sqrt{ab/mt}}{2} g^2(t). \quad (2.41)$$

Puesto que la ecuación anterior se debe de satisfacer para t grande. Así, a primer orden tenemos:

$$g^2(t) = \frac{1}{t} g_3 \hat{k}^2 = \sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{1}{t} g_3 \hat{k}^2. \quad (2.42)$$

La ecuación final de la ecuación de energía es:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_k - \mathcal{L}_k + k \left(\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{1}{t} g_3 - \frac{\partial g_3}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.43)$$

la cual debe de ser resuelta acoplada con la ecuación de momento:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_\xi = 0.$$

Observamos que la radiación emitida suma un amortiguamiento extra. Finalmente, sumamos el efecto de la pérdida de momento del shock a la radiación. El momento canónico L_ξ en el límite $k \rightarrow 0$ es solamente el momento conservado para la aproximación continua $y_t y_x$. Así, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} y_x y_t = \frac{d}{dt} \int_{\xi(0)+\sqrt{ab/mt}}^{\infty} y_x^{shock} y_t^{shock} dx + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\xi(0)+\sqrt{ab/mt}} y_x^{rad} y_t^{rad} dx = 0. \quad (2.44)$$

Obtenemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_\xi + y_x y_t + \frac{1}{2} (y_t^2 + y_x^2) = 0. \quad (2.45)$$

Observemos que la pérdida de momento se cancela exactamente con el amortiguamiento de la energía. Por lo que la ecuación toma la forma final,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_k - \mathcal{L}_k + k \frac{\partial g_3}{\partial t} = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_\xi + \sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{1}{t} g_3 k^2 = 0. \quad (2.47)$$

Observamos que la primera parte de las ecuaciones anteriormente expuestas corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange previamente dadas, por lo que el estudio de la radiación da lugar a los términos de amortiguamiento $k \frac{\partial g_3}{\partial t}$ y $\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{1}{t} g_3 k^2$. La solución de las ecuaciones modulacionales, que ahora incluyen a la pérdida de radiación, tienen que ser comparadas con los resultados numéricos. Sin embargo, como el frente de onda es supersónico se tienen básicamente las mismas comparaciones que las mostradas en la Figuras 2.6 a 2.8. Por otro lado, de las comparaciones numéricas de las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 se puede observar que la diferencia entre el escalón del solitón ajustado y el escalón donde queda montada la radiación es del orden de 0,3. Esto correlaciona con el valor promedio del término de amortiguamiento $\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{1}{t} g_3 k^2$, como se puede ver de la Figura 2.9, en el estado inicial donde ocurre el transitorio. Además, no es posible obtener comparaciones numéricas buenas, entre la solución numérica completa y la modulacional, en la región del triángulo de radiación ya que el análisis de frontera móvil esta hecho a partir de la línea característica $\xi(0) + \sqrt{ab/mt}$, es decir, fuera del triángulo de radiación. En el siguiente capítulo estudiaremos el problema discreto de la ecuación de

Sine-Gordon, y veremos que la contribución de la radiación es determinante ya que el escalón (kink) es subsónico por lo que tendrá una interacción importante con las ondas lineales radiadas.

Capítulo 3

Ecuación discreta de Sine-Gordon unidimensional

En este capítulo estudiamos la ecuación de Sine-Gordon en una dimensión con diferencias centrales en la variable espacial. Se sabe que la ecuación para ésta cadena no tiene solución exacta [3]. Por otro lado, sabemos que la ecuación Sine-Gordon continua es completamente integrable [28] y tiene solución exacta tipo escalón (kink), por lo que buscamos en la cadena soluciones cercanas a este tipo de solución. Mostramos, a partir de la solución numérica, como la condición inicial tipo escalón (kink) tiene un transitorio inicial y desarrolla oscilaciones. Estudiamos el problema estático y resolvemos el problema de valores propios mostrando a dos valores propios que quedan fuera de la banda continua y cuyas funciones propias correspondientes (modo de Goldstone y modo impar) influyen en la dinámica del problema. Presentamos, en tres etapas, una solución aproximada para explicar la evolución: En la primer parte la solución aproximada esta basada en el Lagrangiano promediado de la ecuación discreta de Sine-Gordon con la solución exacta del caso continuo como función de prueba. En la segunda etapa incluimos la pérdida por radiación a las ecuaciones modulacionales obtenidas en la aproximación anterior. Finalmente, en la tercer etapa incluimos explícitamente en la función de prueba de la primera parte el modo de Goldstone (cuyo valor propio asociado es exponencialmente pequeño) e incluimos la correspondiente pérdida por radiación. Explicamos así la dinámica muy complicada del kink en términos de una modula-

ción del mismo que se acopla a sus modos internos. Este acoplamiento genera un potencial de Peierls-Nabarro, más grande, el cual es el responsable de la variación oscilante de la velocidad. Al incluir la pérdida por radiación se explica el frenado brusco del kink.

3.1. Planteamiento del problema y su solución numérica

La ecuación de movimiento del modelo Frenkel y Kontorova, el cual describe a una cadena de partículas armónicamente acopladas y sujetas a un potencial de sustrato periódico externo, esta representada por la siguiente ecuación discreta de Sine-Gordon,

$$\ddot{y}_n = y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - \frac{1}{d^2} \sin y_n, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.1)$$

que puede ser obtenida del Lagrangiano,

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{y}_n^2}{2} - \frac{1}{2} (y_{n+1} - y_n)^2 - \frac{1}{d^2} (1 - \cos y_n). \quad (3.2)$$

En donde la constante d es el parámetro de discretización, para d grande ($d \gg 1$) tenemos el límite continuo y para $d < 1$ el límite discreto y_n es el desplazamiento relativo de la partícula n .

Para d grande la ecuación (3.1) se puede aproximar formalmente por la ecuación de Sine-Gordon continua. Esto se puede ver al multiplicar a la ecuación (3.1) por d^2 y al hacer el cambio de variables $\tau = t/d$, $x_n = n/d$ para obtener,

$$u_{\tau\tau} = u_{xx} - \sin u.$$

Esta ecuación es integrable y puede ser analizada [28] usando el método de dispersión inversa. Se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones tipo kink dadas por,

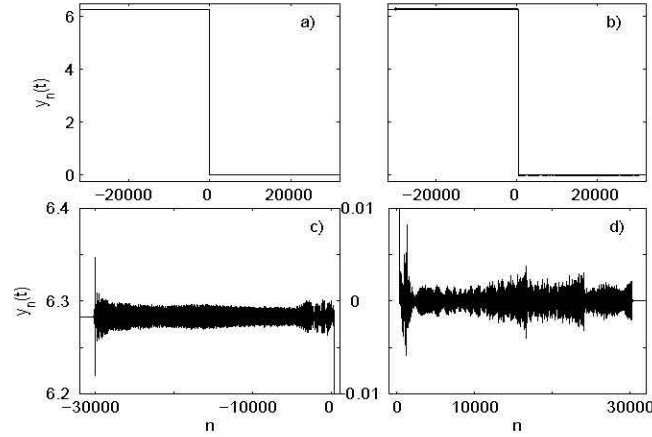


Figura 3.1: *Solución numérica del sistema (3.1) para $2N + 1$ partículas con $v_0 = 0,8$, $\xi_0 = 0$, $d = 0,95$, $N = 32000$ y $\Delta t = 0,025$. a) Condición inicial (3.4), b) solución numérica en $t=50000$, c) radiación atrás del kink y d) radiación adelante del kink.*

$$u(x, \tau) = 4 \arctan \exp \left(-\frac{x - v\tau}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (3.3)$$

en donde la velocidad $0 \leq v \leq 1$ es arbitraria.

La ecuación de movimiento discreta (3.1) no es exactamente integrable, sin embargo, dicha ecuación se puede resolver numéricamente [19]. Ahora consideraremos la solución numérica para reproducir los resultados relevantes.

Resolvemos numéricamente para un número finito, N , de ecuaciones usando un método de Runge-Kutta de cuarto orden con las condiciones iniciales obtenidas de la ecuación (3.3), esto es

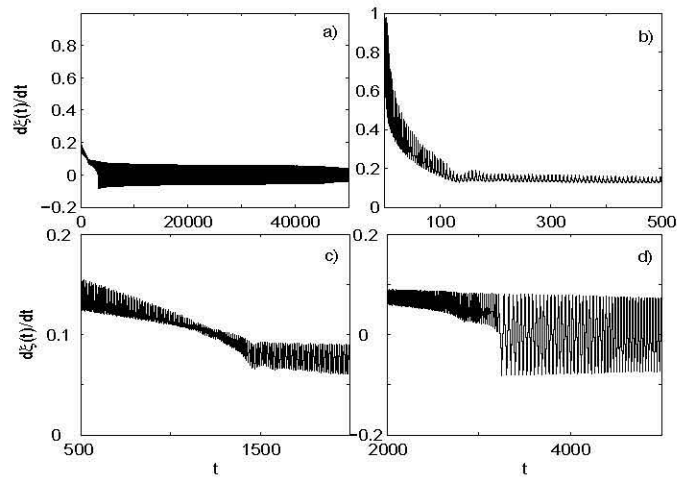


Figura 3.2: a) Evolución temporal numérica de la velocidad (3.7) para $v_0 = 0,8$, $\xi_0 = 0$, $d = 0,95$, $N = 32000$ y $\Delta t = 0,025$ en $t=50000$, b) primer rodilla, c) segunda rodilla y d) tercer rodilla y velocidad de atrapamiento.

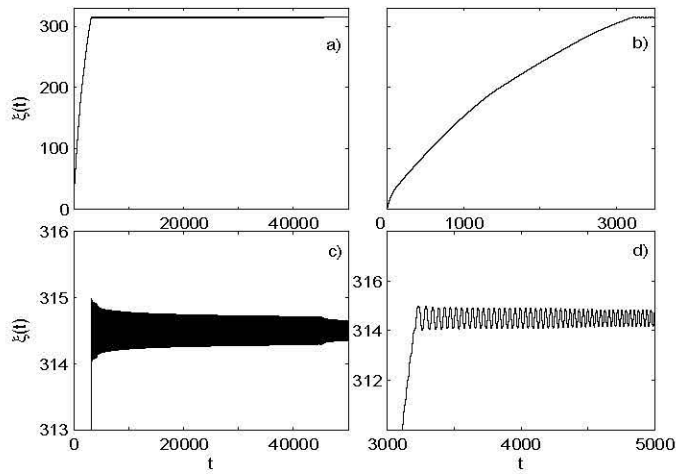


Figura 3.3: a) Evolución numérica de la posición para $v_0 = 0,8$, $\xi_0 = 0$, $d = 0,95$, $N = 32000$ y $\Delta t = 0,025$ en $t=50000$, b) zoom de a), c) posición numérica del kink atrapado y d) zoom de c).

$$y_n(t_0) = 4 \arctan \exp \left(-\frac{n - \xi_0}{d\sqrt{1 - v_0^2}} \right), \quad (3.4)$$

$$\dot{y}_n(t_0) = \frac{2}{d\sqrt{1 - v_0^2}} \operatorname{sech} \left(-\frac{n - \xi_0}{d\sqrt{1 - v_0^2}} \right), \quad -N \leq n \leq N \quad (3.5)$$

donde $\xi_0 = v_0 t_0$ al tiempo inicial $t = t_0$ y con las condiciones de frontera $y_{-N} = 2\pi$, $y_N = 0$.

Para evitar problemas de reflexión en la frontera numérica resolvemos para un número grande de partículas (del orden de 40000 partículas), por lo que las ondas radiadas por el kink no alcanzan a tocar la frontera artificial para nuestros tiempos máximos de evolución. La posición $\xi(t)$ y la velocidad $v(t) = \dot{\xi}(t)$ numéricas son estimadas usando una interpolación para el punto medio del kink, como sigue

$$\xi(t) \approx m + \frac{\pi - y_m(t)}{y_{m+1}(t) - y_m(t)}, \quad (3.6)$$

$$v(t) \approx \frac{\xi(t_{new}) - \xi(t_{old})}{\Delta t}, \quad (3.7)$$

donde m es un entero que satisface $y_m(t) > \pi$ y $y_{m+1}(t) < \pi$ al tiempo $t = t_{new}$ y $\Delta t = t_{new} - t_{old}$ es el paso de integración.

Reproducimos la solución numérica de Peyrard and Kruskal [19] para las siguientes condiciones iniciales $v_0 = 0,8$, $\xi_0 = 0$, $d = 0,95$ y $v_0 = 0,4$, $\xi_0 = 0$, $d = 1$. La evolución numérica para el kink con velocidad inicial $v_0 = 0,8$ se muestra en la Figura 3.1. Como se describe en [19], el kink desacelera muy rápido y después de moverse una distancia relativamente corta en la cadena se queda atrapado entre dos partículas de la cadena (lo cual contrasta con la onda viajera del continuo [20]), ver las Figuras 3.3 y 3.6. También, hay ondas atrás del kink que son emitidas por este como radiación prominentemente emitidas atrás del kink viajero. Hay velocidades críticas en las cuales hay un cambio brusco en el tipo de ondas radiadas por el kink, estas velocidades críticas son identificadas con las velocidades correspondientes a las rodillas de

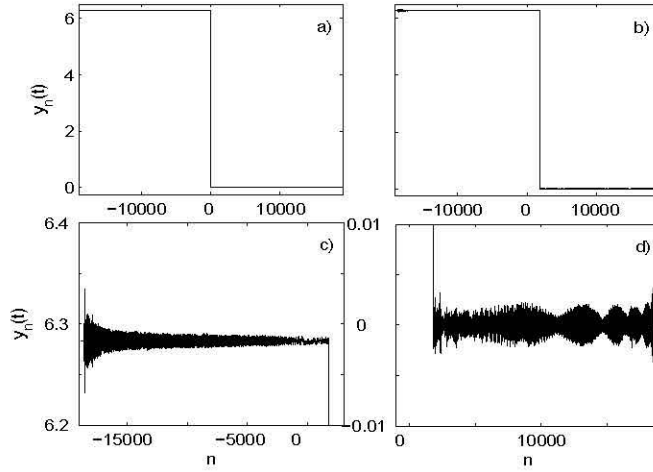


Figura 3.4: *Solución numérica del sistema (3.1) para $2N + 1$ partículas con $v_0 = 0,4$, $\xi_0 = 0$, $d = 1$, $N = 20000$ y $\Delta t = 0,025$. a) Condición inicial (3.4), b) solución numérica en $t=30000$, c) radiación atrás del kink y d) solución adelante del kink.*

la curva de la Figura 3.2. Seguimos la evolución temporal del kink hasta que este queda atrapado y en donde también observamos que aparecen rodillas en la curva de la velocidad del kink, pero ahora a intervalos de tiempo, t , exponencialmente largos.

La evolución temporal para la velocidad inicial $v_0 = 0,4$ tiene el mismo comportamiento cualitativo que la velocidad inicial $v_0 = 0,8$ (ver las Figuras 3.1 a 3.6), pero ahora hay una diferencia cuantitativa muy notoria entre las dos evoluciones. Para la velocidad inicial $v_0 = 0,8$ el kink es rápidamente atrapado mientras que para la velocidad más pequeña $v_0 = 0,4$ el kink viaja casi libremente y eventualmente queda atrapado.

Algunos autores han investigado la asintótica de kinks viajeros [23], [30]. En estos trabajos el mecanismo de amortiguamiento se ha discutido en una forma cualitativa y no cuantitativa. En [19] se ha encontrado el mecanismo principal de radiación, sin embargo el detalle de como dicha radiación se acopla con el kink viajero no se ha considerado. Por otro lado, la asintótica

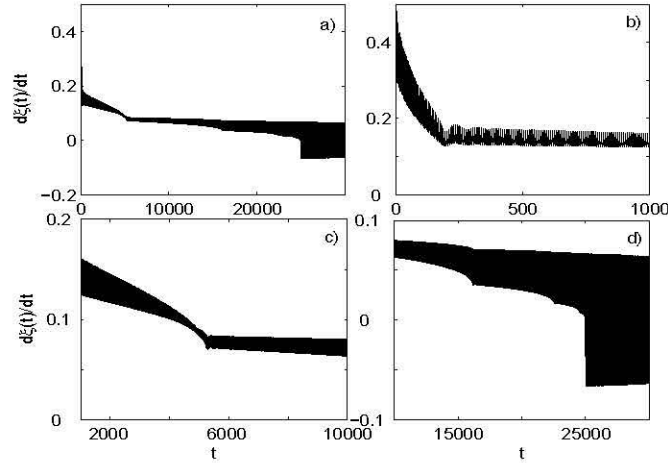


Figura 3.5: a) Evolución temporal numérica de la velocidad (3.7) para $v_0 = 0,4$, $\xi_0 = 0$, $d = 1$, $N = 20000$ y $\Delta t = 0,025$ en $t=30000$, b) primera rodilla, c) segunda rodilla y d) tercer rodilla y velocidad de atrapamiento.

de la evolución del kink atrapado fue estudiada recientemente por Kevrekidis y Weinstein [27], en donde mostrarón que la evolución queda dominada por la interacción no lineal de los modos internos del kink con la radiación. Estamos interesados en el régimen complementario, esto es, el estudio asintótico del kink dinámico mucho antes de que ocurra el atrapamiento. En particular, como los modos internos del kink se acoplan a la radiación emitida durante el viaje del kink a través de los nodos de la cadena.

3.2. Ecuaciones aproximadas para la evolución del kink

Seguimos a Smyth y Worthy [20], quienes estudiaron la evolución del kink en la ecuación continua de Sine-Gordon. Por lo que tomamos la solución del kink modulado en la forma:

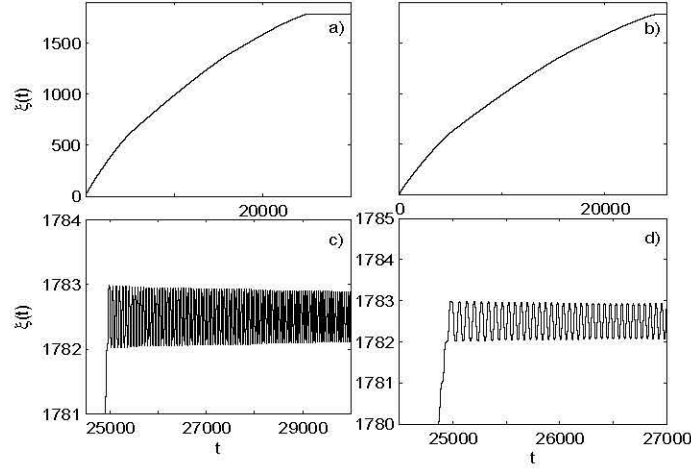


Figura 3.6: a) Evolución temporal numérica de la posición (3.6) para $v_0 = 0,4$, $\xi_0 = 0$, $d = 1$, $N = 20000$ y $\Delta t = 0,025$ en $t=30000$, b) zoom de a), c) posición numérica del kink atrapado y d) zoom de c).

$$y_n(t) = K_n(t) = 4 \arctan \exp \left(-\frac{n - \xi(t)}{w(t)} \right). \quad (3.8)$$

Similar al caso continuo, suponemos que el ancho $w(t)$ de esta función de prueba se ajustara y que la velocidad $v(t) = \dot{\xi}(t)$ será no uniforme. De la condición inicial (3.4)-(3.5) tenemos que $v(t_0) = v_0$, $\xi_0 = \xi(t_0) = v_0 t_0$, y $w(t_0) = d\sqrt{1 - v_0^2}$ al tiempo inicial $t = t_0$. En un estudio previo O. Braun et al [30] propusieron a w fijo y relativamente grande para el problema de dispersión de un kink por impurezas en una cadena discreta y no fueron mostradas comparaciones numéricas cuantitativas entre la solución numérica y la asintótica.

Ahora, sustituimos la función de prueba (3.8) en el Lagrangiano (3.2) para obtener el siguiente Lagrangiano promediado,

$$\begin{aligned}
L = & \left(\frac{2\dot{\xi}^2}{w^2} - \frac{2}{d^2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) + \frac{2\dot{w}^2}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n-\xi}{w} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \\
& - 8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan^2 \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} + \frac{1}{2w} \right) \right), \tag{3.9}
\end{aligned}$$

en donde hemos usado las siguientes relaciones exactas

$$\begin{aligned}
y_n - y_{n+1} &= 4 \arctan \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} + \frac{1}{2w} \right) \right), \\
\dot{y}_n &= \frac{2}{w^2} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \left(\dot{\xi}w + \dot{w}(n-\xi) \right), \\
1 - \cos y_n &= 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right).
\end{aligned}$$

Los términos proporcionales a $\dot{\xi}\dot{w}$ se despreciaron debido a que no contribuyen en la dinámica. Observamos que al tomar a w relativamente grande (aproximación continua) en la evaluación del Lagrangiano (3.9) se tiene que

$$y_n - y_{n+1} \approx \frac{2}{w} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right). \tag{3.10}$$

Y al usar (3.10) en (3.9) además de la fórmula de Poisson obtenemos a primera aproximación,

$$L = \left(\frac{\dot{\xi}^2}{w^2} - \frac{1}{d^2} - \frac{1}{w^2} \right) 4w + \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3w}, \tag{3.11}$$

lo que como se esperaba recupera el Lagrangiano obtenido por Smyth y Worthy [20] para la ecuación continua de Sine-Gordon.

Para capturar los efectos discretos de la cadena usamos la fórmula de suma de Poisson en la expresión exacta (3.9). Los detalles de los cálculos se muestran en el Apéndice II. Sólo retenemos las aproximaciones a primer orden (modos más altos) que son términos periódicos conocidos como potencial de

Peierls-Nabarro (PN). Además, el término periódico de PN que multiplica a \dot{w}^2 (ver Apéndice II) no es tomado en cuenta porque es demasiado pequeño. Así, obtenemos

$$L_K = \left(\frac{\dot{2}\xi}{w^2} - \frac{2}{d^2} \right) \left(2w + \frac{4\pi^2 w^2}{\sinh(\pi^2 w)} \cos(2\pi\xi) \right) + \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3w} - h(w), \quad (3.12)$$

en donde el término

$$h(w) = 8 \int_{-\infty}^{\infty} \arctan^2 \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \frac{x}{w} \right) dx, \quad (3.13)$$

se puede interpolar a partir de los datos obtenidos de la integración numérica de (3.13) para algunos valores de w entre 0 y 1,2, que son los valores típicos de w . La siguiente expresión ajusta bien los valores de la integración numérica de (3.13):

$$h(w) \approx \frac{28 + 120w}{1,4 + 6w + 30w^2}, \quad \text{para } w > 0.$$

Notemos que para $w \gg 1$, $h(w) \approx 4/w$ la ecuación (3.12) recupera el límite continuo.

Los términos periódicos de PN son exponencialmente pequeños en w cuando $w \gg 1$. Por otro lado, estos términos de PN tienen una contribución importante cuando $w \approx 1$, lo que muestra los efectos notorios que tiene la cadena en el movimiento del kink pues es el régimen muy discreto.

Ahora tomamos las variaciones del Lagrangiano promediado (3.12) con respecto a las coordenadas generalizadas ξ y w . Así, obtenemos las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta\xi : \quad \ddot{\xi} = \left(\frac{\dot{2}\xi}{\xi} + \frac{w^2}{d^2} \right) \frac{2\pi^3 w}{\sinh(\pi^2 w)} \sin(2\pi\xi), \quad (3.14)$$

$$\delta w : \quad \ddot{w} = \frac{\dot{w}^2}{2w} - \frac{6w}{\pi^2 d^2} - \frac{6\xi}{\pi^2 w} - \frac{3w}{2\pi^2} h'(w). \quad (3.15)$$

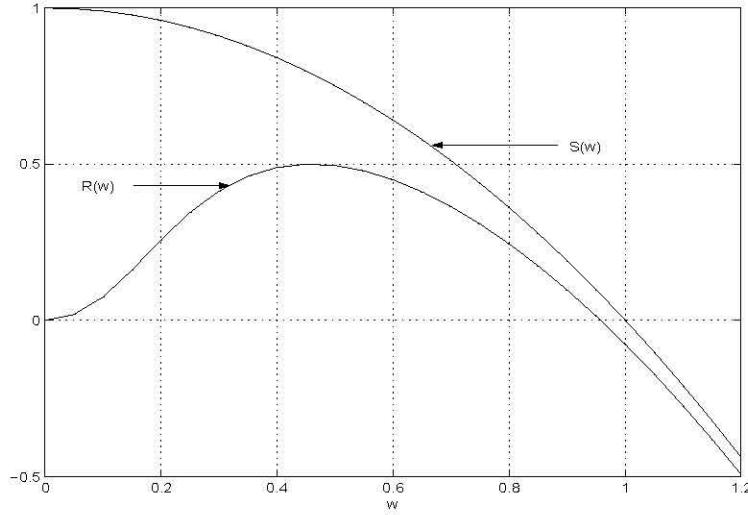


Figura 3.7: Gráficas de $R(w)$ relacionada a la relación de dispersión discreta (3.15) y $S(w) = 1 - w^2/d^2$ relacionada a la relación de dispersión continua, ambas para $d = 1$.

Para valores de w fijos y que satisface la relación de dispersión continua, $w = d\sqrt{1 - \xi^2}$, se obtiene que la ecuación de movimiento (3.14) es la obtenida por Braun y Kivshar [30] con un escalamiento apropiado y usando la aproximación continua (3.10). La ecuación (3.14) tiene sillars en los nodos (partículas) de la cadena y centros en medio de nodos consecutivos. Las órbitas no acotadas representan los brinco del kink en su viaje a través de la cadena. La variación de w según la ecuación (3.15) muestra el hecho de que w no tiene puntos fijos a menos que el kink mismo sea estacionario, para lo cual hay dos posibilidades de ξ , en un nodo o entre dos nodos, según son los puntos fijos de (3.14). Además, notemos que la selección del estado estacionario está determinado, como se esperaba, por términos exponencialmente pequeños en w [27], [31]. Esto explica la observación numérica de que todas las condiciones iniciales tipo kink quedan atrapadas. Por otro lado si los términos de corrección periódicos, potencial PN, se desprecian se obtiene que la ecuación para w tiene puntos fijos en,

$$R(w) = \xi^2 \quad (3.16)$$

con

$$R(w) = -\frac{w^2}{4} \left(\frac{4}{d^2} + h'(w) \right). \quad (3.17)$$

En la Figura 3.7 mostramos la gráfica de (3.17). De esta gráfica observamos que la relación de dispersión discreta (3.16) se satisface sólo si $0 \leq \xi \lesssim 0,7064$ para $d = 1$, lo que está en contraste con la relación de dispersión continua, $S(w) = 1 - w^2/d^2 = \xi^2$, la cual se satisface para todo $0 \leq \xi \leq 1$. Esto último explica el porque velocidades lentas del kink se propagan distancias más grandes, ya que dichas velocidades corresponden aproximadamente a puntos fijos pues son soluciones estacionarias que se propagan, con una corrección exponencialmente pequeña. Por otro lado, kinks con velocidades grandes no aproximan a soluciones estacionarias que se propagan, por lo que estos kinks deben de radiar una gran cantidad de energía para ajustarse a posibles soluciones tipo kink. Para completar la teoría de modulaciones debemos de incluir el efecto de radiación siguiendo a [20] y [19].

3.3. Efecto de la radiación

Para calcular el efecto de la radiación debemos de calcular la energía pérdida propuesta por Peyrard y Kruskal [19] y usar las ideas de [20] para relacionar la radiación con el movimiento del kink. Para esto, la solución se supone es de la forma $y_n(t) \sim K_n(t)$ en la región $\xi - l \leq n \leq \xi + l$ donde l es un corte adecuado y $y_n^R(t) \sim y_n^c(t) + y_n^{PK}(t)$ fuera de la región ocupada por la estructura coherente (kink). Esta descomposición está sugerida por los resultados numéricos de la Figura 3.8. En esta figura se observa que la diferencia dividida $g_n(t) = (y_{n+1}^{num}(t) - K_{n+1}(t)) - (y_n^{num}(t) - K_n(t))$ tiene dos componentes. La primera es una onda relativamente ancha, la cual es producida por radiación de onda larga como en el caso continuo, que reajusta a w . Esto es tomado en cuenta por $y_n^c(t)$. Las ondas radiadas atrás del kink

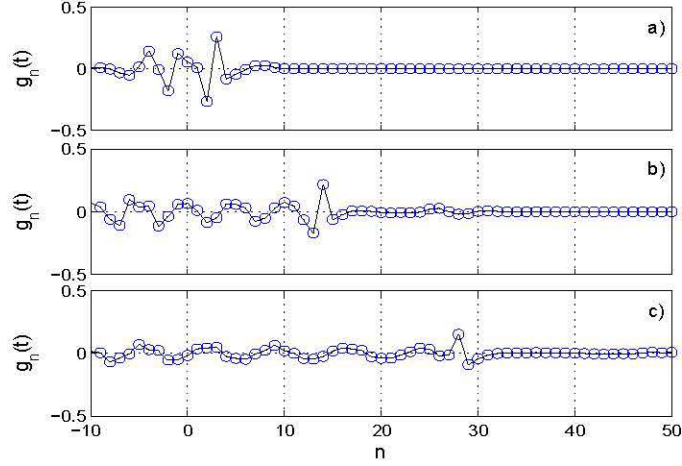


Figura 3.8: Diferencia dividida de $y_n^{num}(t) - K_n(t)$ entre la solución numérica y el kink modulado (3.8) usando (3.6) y (3.7) para estimar los parámetros de modulación para a) $t=10$, b) $t=45$ y c) $t=100$.

de Peyrard y Kruskal, $y_n^{PK}(t)$, esta controlada por el pico principal de la Figura 3.8 que es la discutida en [19]. Esta radiación está ausente en el límite continuo debido a que es causada por la resonancia de los números de onda ω/ξ producidos por el kink que se mueve con el período de la cadena para valores definidos de ω . Con estas suposiciones la energía perdida toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{n=\xi-l}^{\xi+l} \frac{\dot{y}_n^2}{2} + \frac{1}{2} (y_{n+1} - y_n)^2 + \frac{1}{d^2} (1 - \cos y_n) \\
&= \dot{\xi} \left[\frac{\dot{y}_n^2}{2} + \frac{1}{2} (y_{n+1} - y_n)^2 + \frac{1}{d^2} (1 - \cos y_n) \right]_{\xi-l}^{\xi+l} \\
&+ \sum_{n=\xi-l}^{\xi+l} \dot{y}_n \ddot{y}_n + (y_{n+1} - y_n) (\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n) + \frac{\dot{y}_n}{d^2} \sin y_n. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Ahora, el lado izquierdo es evaluado en la estructura coherente (kink) dada por (3.8), por lo que de (3.18) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{2\dot{\xi}^2}{w^2} + \frac{2}{d^2} \right) \left(2w + \frac{4\pi^2 w^2}{\sinh(\pi^2 w)} \cos(2\pi\xi) \right) + \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3w} + h(w) \right] \\ = & - \left[\dot{y}_n^R (y_{n+1}^R - y_n^R) \right]_{\xi-l}^{\xi+l} \end{aligned} \quad (3.19)$$

en donde hemos supuesto que la radiación se emite simétricamente alrededor del kink, lo cual no es totalmente cierto pues se emite radiación predominantemente atrás del kink. Puesto que la radiación es pequeña calculamos y_n^R usando la ecuación linearizada.

$$\ddot{y}_n^R - (y_{n-1}^R - 2y_n^R + y_{n+1}^R) + \frac{1}{d^2} y_n^R = 0, \quad (3.20)$$

con una condición de frontera movible apropiada sobre y_n^R en el kink y en la cola de éste.

3.3.1. Radiación de onda larga emitida por el pulso

Las ondas largas generadas por el pulso principal se supone que satisfacen la ecuación continua de Sine-Gordon linearizada con la condición de frontera $u_x = g(t)$ en $x = \xi(t)$, que es donde se localiza el kink, como en [20]. La condición de frontera $g(t)$ se determina igualando el exceso de energía contenido en el pulso con la energía contenida en la radiación emitida. Para el escalón (kink) el exceso de energía cinética en w se obtiene de la linearización de L_K (3.12) en el punto fijo w_0 , correspondiente a la ecuación para w dada en (3.15), lo cual da:

$$\frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3w_0} = \frac{1}{2} \int_{-c_g t + (\xi-l)}^{c_g t + (\xi+l)} (u_t^2 + u_x^2 + u^2) dx, \quad (3.21)$$

en donde c_g es la velocidad de grupo de las ondas lineales que se obtienen de la ecuación linealizada $\ddot{y}_n - (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \frac{1}{d^2}y_n = 0$. Esto es,

$$c_g = \frac{\sin k}{\sqrt{1/d^2 + 4 \sin^2(k/2)}}, \quad (3.22)$$

con k como el número de onda. El número de onda k se estima de considerar la frecuencia Ω del oscilador lineal en w en el punto fijo. Así, las ondas son producidas en un número de onda k que satisface $w(k) = \Omega$, $w(k) = \sin^2(k/2)$. Esto da un valor promedio para c_g del orden de $1/10$ en el rango de d , el cual es cercano a 1.

Puesto que $u_x = g$ en la frontera, entonces la integral (3.21) se aproxima con la regla del trapecio para obtener (ver [20]),

$$g^2 = \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3c_g w_0 t^2}.$$

De la ecuación anterior para g^2 obtenemos:

$$\left[\dot{y}_n^c \partial y_n^c / \partial n \right]_{\xi-l}^{\xi+l} = g^2 t = \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3c_g w_0 t}. \quad (3.23)$$

En el caso del modo de Goldstone, el cual se explica en detalle en la siguiente sección, el exceso de energía incluye la energía cinética de dicho modo interno en L_A , el cual es,

$$\lambda \dot{A}^2 + \frac{\lambda}{36\lambda} A^2 (12 + \pi^2).$$

Esto es, en el caso general tenemos

$$\left[\dot{y}_n^c \partial y_n^c / \partial n \right]_{\xi-l}^{\xi+l} = \frac{1}{c_g t} \left(\frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3w_0} + \lambda_0 \dot{A}^2 + \frac{\lambda}{36\lambda_0} A^2 (12 + \pi^2) \right). \quad (3.24)$$

3.3.2. La radiación de Peyrard y Kruskal

La radiación de Peyrard y Kruskal es causada por la resonancia del movimiento oscilatorio del escalón (kink) con el período, n , de la cadena. Para determinar el efecto de dicha radiación debemos de resolver,

$$\ddot{y}_n^{PK} - (y_{n-1}^{PK} - 2y_n^{PK} + y_{n+1}^{PK}) + \frac{1}{d^2}y_n^{PK} = 0, \quad n \leq \xi(t), \quad (3.25)$$

con condiciones apropiadas de acoplamiento para el escalón en $n \approx \xi(t)$.

De la Figura 3.8 observamos que este tipo de radiación es producida por la oscilación de la diferencia espacial del escalón. Así, una diferencia apropiada de y_n^{PK} debe de ser acoplada a una función $f(n - \xi(t))$ dada, la cual es determinada por la forma de la diferencia del escalón y los modos internos, los cuales se describen en la sección siguiente, que también son excitados cuando n tiende a $\xi(t)$. Claramente el problema (3.25), con la condición acoplamiento ya explicada, no tiene solución exacta. Además, necesitamos derivar una condición de acoplamiento adecuada para poder calcular la radiación. Para este fin, comenzaremos por estudiar la transformada de Laplace de la condición de frontera en la forma:

$$\int_0^\infty f(n - \xi(t)) e^{-st} dt.$$

La integral no se puede evaluar en forma cerrada. Así que tomamos $\xi(t) \approx vt$, en donde $v = \dot{\xi}$, y esperamos que la desviación $\xi - vt$ sea pequeña. En este caso la integral puede ser evaluada si suponemos que v es constante, de hecho varia lentamente, obtenemos:

$$\frac{1}{v} e^{-ns/v} \int_{-n}^\infty e^{-su/v} f(-u) du = e^{-ns/v} B(s, n),$$

donde

$$B(s, n) = \frac{1}{v} \int_{-n}^\infty e^{-su/v} f(-u) du. \quad (3.26)$$

La condición de frontera (3.26) para (3.25) tiene una forma de WKB ya que para v pequeño B es lentamente variable y la fase en la exponencial tiene variaciones grandes en n . Entonces, tomamos una solución del tipo WKB $A(n, s) \exp \varphi(n, s)$ para la transformada de Laplace de la ecuación (3.25),

$$\left(s^2 + 2 + \frac{1}{d^2} \right) \tilde{y}_n^{PK} - (\tilde{y}_{n-1}^{PK} + \tilde{y}_{n+1}^{PK}) = 0.$$

A primer orden la fase $\varphi(n, s)$ satisface la relación de dispersión discreta,

$$\left(s^2 + 2 + \frac{1}{d^2}\right) - (\exp(\varphi(n+1, s) - \varphi(n, s)) + \exp(\varphi(n-1, s) - \varphi(n, s))) = 0.$$

Suponemos que $\varphi(n+1, s) - \varphi(n, s) \approx \varphi'(n, s)$. Obtenemos que $\varphi'(n, s) = \ln \lambda(s)$, en donde $\lambda(s)$ es la raíz de $(s^2 + 2 + \frac{1}{d^2}) - \lambda + \lambda^{-1} = 0$. Esto da el número de onda, k , apropiado de la cadena discreta en $s = iw$. Aquí w es la frecuencia asociada a dicho número de onda. La función $A(n, s)$ será determinada en el acoplamiento.

Una condición apropiada de acoplamiento se obtiene eligiendo el punto $n = N \approx \xi$, y los puntos $n = N+1$ y $n = N-1$. La Figura 3.8 sugiere acoplar la diferencia espacial de la radiación a la diferencia espacial del escalón, por lo que aproximamos a la derivada espacial de u_n por la diferencia dividida $(u(N+1) - u(N-1))/2$, la cual debe de acoplarse a $e^{-ns/v}B(s, n)$ que es la condición de frontera obtenida en (3.26). Lo cual da:

$$u(N+1) - u(N-1) = 2Be^{-Ns/v},$$

$$A(s) (\exp(\varphi(N+1, s) - \varphi(N, s)) - \exp(\varphi(N-1, s) - \varphi(N, s))) = 2Be^{-Ns/v}.$$

De la relación (3.26) observamos que en el acoplamiento podemos considerar para $\varphi(N)$ la forma funcional $\varphi(N) = -Ns/v$ y $\varphi(N+1) = -(N+1)s/v$ en la región del escalón. Por otro lado $-\varphi(N) + \varphi(N-1)$ es la región de la radiación y satisface la relación de dispersión. Esto da

$$\exp(\varphi(N-1) - \varphi(N)) = \lambda^{-1}(s).$$

Así, determinamos $A(n, s)$ en la siguiente forma:

$$A(n, s) = \frac{2B}{e^{-s/v} - \lambda^{-1}(s)}. \quad (3.27)$$

La solución aproximada toma la forma:

$$y_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^n(s) \frac{2B}{e^{-s/v} - \lambda^{-1}(s)} e^{st} ds. \quad (3.28)$$

El contorno C está en $Res > 0$. Las singularidades del integrando son dos puntos rama que se extienden de $\pm i\sqrt{4 + \frac{1}{d^2}}$ a infinito. Los polos son las raíces de la relación de dispersión $\lambda(s) = e^{s/v}$ la cual recobra las ondas resonantes descritas en [19] como la contribución dominante de la solución (suponemos que la velocidad v es una función que varía lentamente). Los polos están en el eje imaginario y tienen residuos reales de la forma:

$$y_n(t) = \sum_k e^{inw_k/v} e^{iwt} \frac{2B(iw_k)}{-e^{-iw_k/v}/v + \lambda'/\lambda^2} + c.c. \quad (3.29)$$

en donde la suma se extiende en las raíces w_k de $e^{-s/v} - \lambda^{-1}(s) = 0$ como en [19]. Notemos que las ondas se mueven a la izquierda, también cuando v tiende a cero las raíces pequeñas w_k se pierden, como esta descrito en [19]. Para completar la solución, calculamos $B(iw_k)$. Tenemos que:

$$B(iw_k) = \frac{1}{v} \int_{-N}^{\infty} e^{iw_k u/v} f(-u) du. \quad (3.30)$$

Puesto que N es relativamente grande comparado con el ancho de la función par $f(u)$. Podemos considerar,

$$B(iw_k) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_k u/v} f(-u) du. \quad (3.31)$$

La función $f(u)$ es la que se obtiene de la derivada de la forma del escalón (ver la ecuación (3.8)) y la integral se extiende a $-\infty < u < \infty$. En este caso $f(u) = -\frac{2}{w} \operatorname{sech}\left(\frac{u}{w}\right)$. La integral es exponencialmente pequeña puesto que esta controlada por los polos de $f(-u)$ en $Imw < 0$. Finalmente, debemos de tomar en cuenta el hecho de que $\frac{x-\xi(t)}{w}$ no es exactamente $\frac{x-vt}{w}$. De hecho, de la Figura 3.10 observamos que $\frac{x-vt}{w} < \frac{x-\xi(t)}{w}$. Por otro lado, se necesita la dependencia funcional $x - vt$ para construir la solución aproximada para la radiación. Debido a esto aproximamos $\frac{x-\xi(t)}{w}$ por $\frac{x-vt}{\rho w}$, donde ρ es una función que varía lentamente. Para determinar ρ observamos de la Figura 3.10 que ρ es casi constante y cercana a 1 excepto en el punto donde la aceleración

del escalón (kink) es mayor, el cual tiene lugar en la rodilla de la Figura 3.11. Una buena aproximación en este punto es usar un valor constante de ρ cercano a 1. Así también proponemos una variación decreciente de ρ para ajustar la variación brusca en la rodilla con un decaimiento alrededor de $t = 60$, que es el tiempo aproximado en el que ocurre la primer rodilla, de la forma $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$. Estos valores de ρ se obtienen fijando el resultado a una condición inicial específica de $v = 0,4$.

Finalmente, obtenemos una estimación de $B(iw_k)$ calculando el residuo en el primer polo en la forma,

$$B(iw_k) = -\frac{4\pi}{v} \exp\left(-\frac{\pi w_k}{2v} w \rho\right) \quad (3.32)$$

Usando esta expresión en (3.29) obtenemos,

$$y_n^{PK}(t) = -\sum_k \frac{8\pi}{v} \exp\left(-\frac{\pi w_k}{2v} w \rho\right) R(w_k) \cos\left(\frac{w_k}{v} n + w_k t + \psi_k\right) \quad (3.33)$$

donde

$$R(w_k) = \frac{|\lambda^2(iw_k)| v}{|\lambda'(iw_k) - \lambda^2 e^{-iw_k/v}|}, \quad (3.34)$$

$$\psi_k = \arg\left(1 / (\lambda'(iw_k) / \lambda^2(iw_k) - e^{-iw_k/v})\right). \quad (3.35)$$

Así, de la relación (3.23), obtenemos:

$$\left[\dot{y}_n^c \partial y_n^c / \partial n\right]_{\xi-l}^{\xi+l} = \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3c_g w t}, \quad (3.36)$$

y de la ecuación (3.32), tenemos que:

$$-\left[\dot{y}_n^{PK} \partial y_n^{PK} / \partial n\right]_{-\infty}^{\xi-l} = -\sum_k 128\pi^2 |R(w_k)|^2 \exp\left(-\frac{\pi w_k}{v} w \rho\right) \frac{w_k^2}{v^3} \sin^2\left(\frac{w_k}{v} (\xi + l) + w_k t + \psi_k\right). \quad (3.37)$$

El promedio de la ecuación (3.37) es la pérdida de energía estudiada en [19]. Los productos cruzados entre y_n^c y y_n^{PK} no contribuyen debido a que

promediamos a escalas de tiempo rápidas, así obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{2\dot{\xi}^2}{w^2} + \frac{2}{d^2} \right) \left(2w + \frac{4\pi^2 w^2}{\sinh(\pi^2 w)} \cos(2\pi\xi) \right) + \frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3w} + h(w) \right] \\ &= -\frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3c_g w t} - \sum_k 64\pi^2 |R(w_k)|^2 \exp\left(-\frac{\rho\pi w w_k}{v}\right) \frac{w_k^2}{v^3}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De (3.34) vemos el promedio de $|R(w_k)|$ es aproximadamente v , por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{w} \left[\ddot{\xi} - \left(\dot{\xi}^2 + \frac{w^2}{d^2} \right) \frac{2\pi^3 w}{\sinh(\pi^2 w)} \sin(2\pi\xi) \right] \dot{\xi} + \\ & \frac{2\pi^2}{3w} \left[\ddot{w} - \frac{\dot{w}^2}{2w} + \frac{6w}{\pi^2 d^2} + \frac{6\dot{\xi}}{\pi^2 w} + \frac{3w}{2\pi^2} h'(w) \right] \dot{w} \\ &= -\frac{\pi^2 \dot{w}^2}{3c_g w t} - \sum_k 64\pi^2 \exp\left(-\frac{\rho\pi w w_k}{v}\right) \frac{w_k^2}{v}. \end{aligned}$$

Como $\dot{w} \neq 0$ durante la oscilación para obtener una ecuación no singular, igualamos la pérdida de energía de w con la ecuación de movimiento de w para obtener

$$\ddot{w} - \frac{\dot{w}^2}{2w} + \frac{6w}{\pi^2 d^2} + \frac{6\dot{\xi}}{\pi^2 w} + \frac{3w}{2\pi^2} h'(w) = -\frac{\dot{w}}{2c_g t} \quad (3.39)$$

y

$$\ddot{\xi} - \left(\dot{\xi}^2 + \frac{w^2}{d^2} \right) \frac{2\pi^3 w}{\sinh(\pi^2 w)} \sin(2\pi\xi) = -\dot{\xi} \sum_k 8\pi^2 w \exp\left(-\frac{\rho\pi w w_k}{v}\right) \frac{w_k^2}{v^3}. \quad (3.40)$$

Notemos que en la ecuación (3.40) el amortiguamiento resonante no es de la forma $\mu\dot{\xi}$ con μ constante, sino que depende de la velocidad $v = \dot{\xi}$ en una forma que capturar el hecho de que para velocidades grandes el amortiguamiento es relativamente grande debido a la pequeñas de $w_k/\dot{\xi}$. Sin embargo,

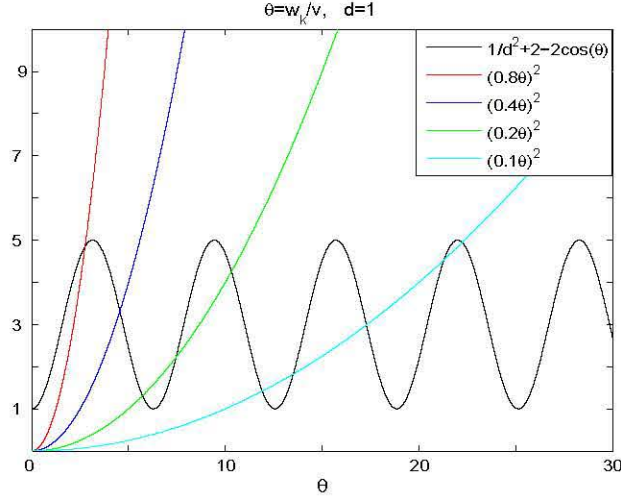


Figura 3.9: Raíces w_k de $\frac{1}{d^2} + 2 - 2 \cos\left(\frac{w_k}{v}\right) = w_k^2$ para varios valores de v .

como la velocidad del kink ξ decrece, como se discute en [19] y como se describio anteriormente, w_k/ξ crece y la ecuación $\frac{1}{d^2} + 2 - 2 \cos\left(\frac{w_k}{v}\right) = w_k^2$ pierde la raíz más pequeña w_k , ver la Figura 3.9. Esto último produce la rodilla en la evolución temporal de la velocidad debido a que el amortiguamiento disminuye bruscamente cuando las raíces pequeñas se pierden. Notemos que la forma de este amortiguamiento tiende a cero cuando $\xi \rightarrow 0$, lo cual era de esperarse pues el kink no resuena con la cadena cuando este tiende al estado estacionario.

Antes de comparar las soluciones de (3.39) y (3.40) con la correspondiente solución numérica, analizaremos cualitativamente la naturaleza de las soluciones modulacionales. En la ecuación (3.40) el amortiguamiento hace decrecer a ξ , esto es, el ancho w dado por (3.39) se ajusta a un nuevo valor más grande (el kink se vuelve más ancho) cuando ξ decrece. En consecuencia la barrera del potencial de PN se hace más pequeña. Esto permite al kink propagarse distancias relativamente más grandes.

En las Figuras 3.10 y 3.11 observamos una comparación entre la solución

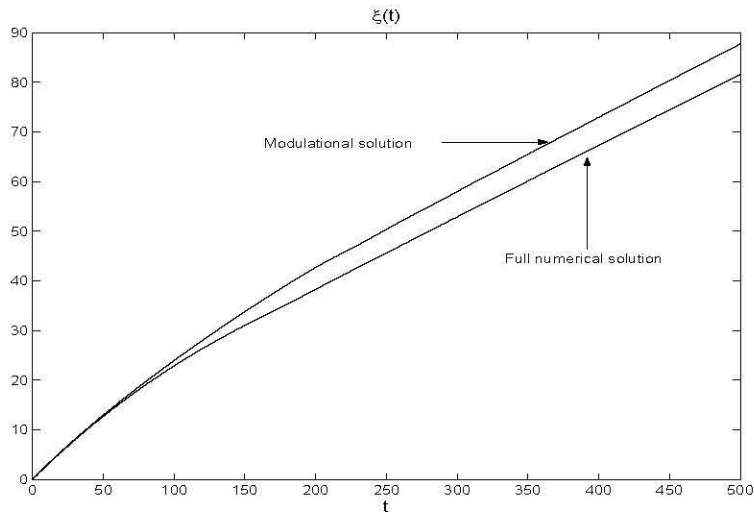


Figura 3.10: Comparación numérica entre la posición numérica (3.6) y la solución del sistema (3.23)-(3.24) para $\rho = 0,925$ y $v_0 = 0,3$.

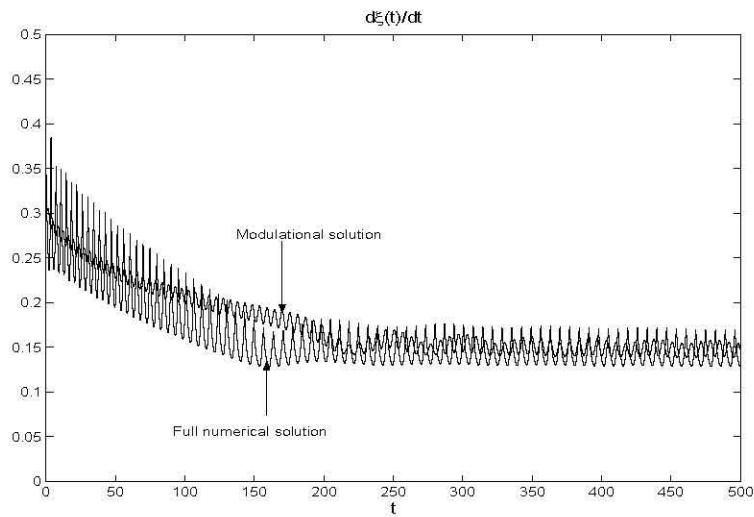


Figura 3.11: Comparación numérica entre la velocidad numérica (3.7) y la solución del sistema (3.23)-(3.24) para $\rho = 0,925$ y $v_0 = 0,3$.

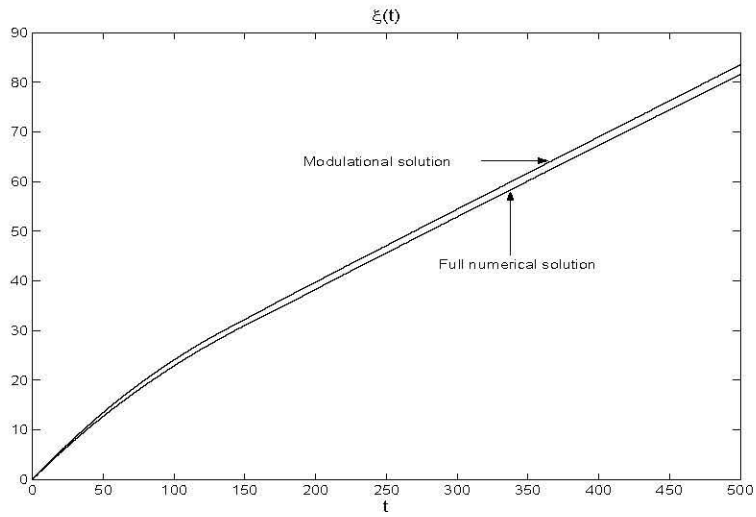


Figura 3.12: Comparación numérica entre la posición numérica (3.6) y la solución del sistema (3.23)-(3.24) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,3$.

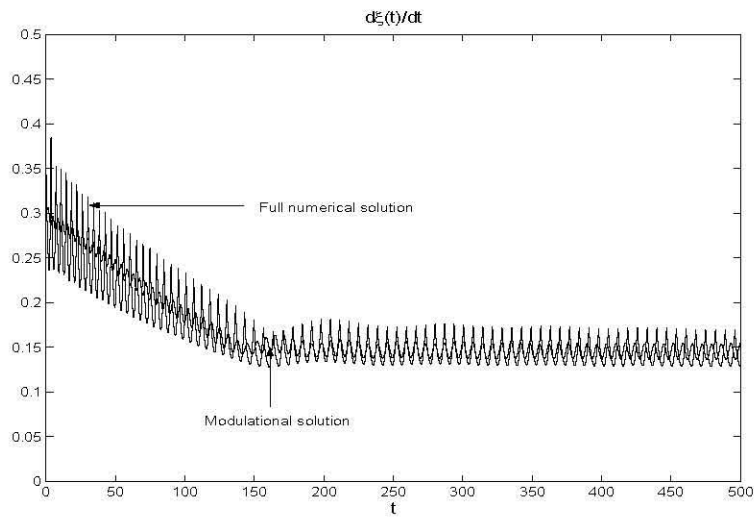


Figura 3.13: Comparación numérica entre la velocidad numérica (3.7) y la solución del sistema (3.23)-(3.24) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,3$.

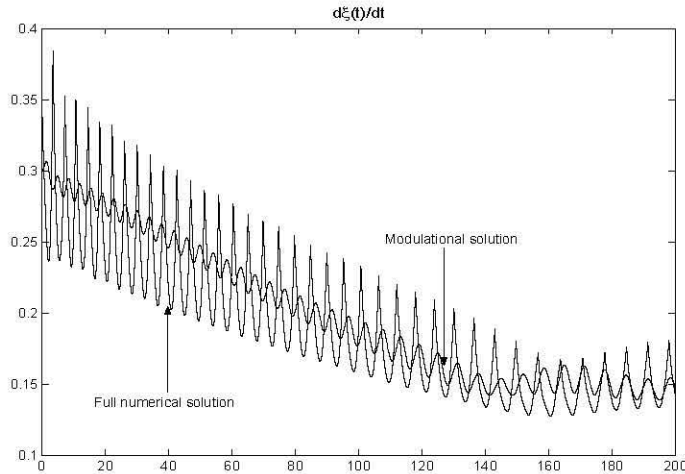


Figura 3.14: *Comparación numérica de la Figura 2.12 en una ventana más pequeña.*

numérica y la solución modulacional con los parámetros del kink evolucionando de acuerdo a (3.39) y (3.40). En las Figuras 3.10 y 3.11 mostramos las comparaciones para $\rho = 0,925$ en el amortiguamiento de la radiación y observamos que para este valor constante de ρ tenemos una buena comparación con la solución numérica hasta el tiempo en el que ocurre la primer rodilla. También, observamos que hay una aceleración relativamente grande en la rodilla (ver Figura 3.11). Este proceso, como ya se explicó anteriormente, sólo puede ser capturado tomando un cambio en ρ , como función del tiempo t , el cual no puede ser obtenido analíticamente puesto que no hay soluciones analíticas explícitas para el problema de la radiación con velocidad variable del escalón v . Así, consideramos el cambio en ρ de la forma $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ el cual tiene ahora el cambio correcto para la escala de tiempo en la que ocurre la primer rodilla. Las comparaciones se muestran en las Figuras 3.12 y 3.13. Ahora la aproximación es muy buena en el promedio. También con la misma $\rho(t)$ obtenemos comparaciones muy similares para velocidades iniciales en el rango entre 0,3 y 0,5. Una compara-

ción más cercana muestra que la oscilación de las ecuaciones modulacionales es más pequeña que el de la numérica (ver Figura 3.14). Esto es porque el potencial de PN es muy sensible al ancho del kink debido a su dependencia exponencial. Esta discrepancia se debe a que a diferencia del caso continuo, en donde la comparación es muy buena, hay otro mecanismo que hace a las oscilaciones más grandes. En la siguiente sección describiremos como la contraparte dinámica de los modos internos, los cuales fueron estudiados en [27] para el caso estático, contribuyen a obtener oscilaciones más grandes en el caso dinámico.

3.4. Modos internos

En el caso estático, la ecuación discreta de sine-Gordon se reduce a lo siguiente:

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - \frac{1}{d^2} \sin y_n = 0, \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.41)$$

Podemos usar el método de Newton para encontrar una solución estática, y_{skink} , de (3.41) apartir de la condición inicial dada por el kink (3.4). La solución estática que resulta es una pequeña perturbación de la condición inicial (3.4), como se muestra en la Figura 3.15 a).

También podemos estudiar el problema de valores propios de la ecuación linealizada (3.41) alrededor de la solución estática que encontramos numéricamente con el método de Newton, esto es,

$$y_{n-1} - \left(2 + \frac{1}{d^2} \cos y_{skink} \right) y_n + y_{n+1} = 0, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.42)$$

en donde y_{skink} es la solución estática de (3.41) encontrada por el método de Newton, y el lado izquierdo de la última expresión se puede ver en forma matricial como la n -ésima ecuación de un producto de matrices, más concretamente un vector con una matriz tridiagonal. Kevrekidis y Weinstein [27] mostraron que la ecuación (3.42) tiene un par de valores propios que

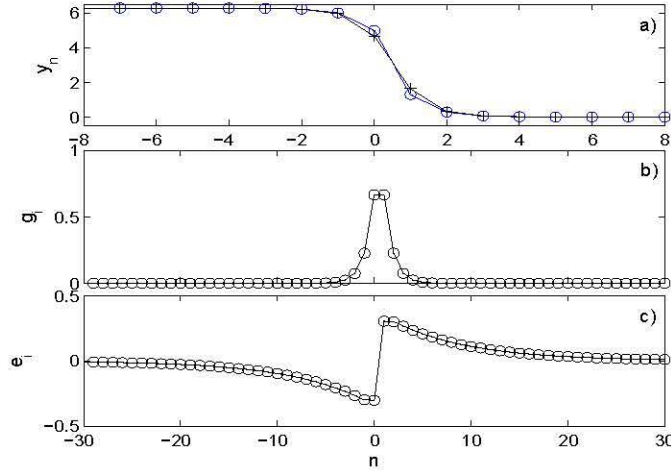


Figura 3.15: a) $(-o-)$ Solución estática y_{skink} y $(-+-)$ kink inicial (3.4), b) modo de Goldstone y c) modo impar para $d = 0,4$.

aparecen en el espacio entre las ramas superior, $\left[i\frac{1}{d}, i\sqrt{4 + \frac{1}{d^2}} \right]$, e inferior, $\left[-i\sqrt{4 + \frac{1}{d^2}}, -i\frac{1}{d} \right]$, del espectro continuo. Dichas ramas se obtienen de resolver la ecuación linealizada de (3.41) para la solución elemental $e^{i(kn - \omega t)}$. Los modos correspondientes (vectores o funciones propias) a éste par de valores propios son llamados modos internos del kink. El modo cero que se obtiene de la invariancia Galileana de la ecuación de Sine-Gordon continua no desaparece en el límite discreto pero en vez de eso aparece un modo con valor propio exponencialmente pequeño, que puede ser positivo o negativo dependiendo de la posición del kink. Dicho modo se llama modo de Goldstone. El otro valor propio queda pegado a la rama inferior del espectro continuo, y la correspondiente función propia se llama el modo impar. Kevrekidis y Weinstein [27] mostraron que para $d > d_e \approx 0,515$ el modo (especialmente) impar aparece. Los modos de Goldstone e impar se muestran en la Figura 3.15 b) y 3.15 c), respectivamente. De esta misma figura observamos que el modo de Goldstone puede ser aproximado muy bien por la función $Asech((n - \xi)/\lambda)$, con A y λ parámetros de modulación para este modo.

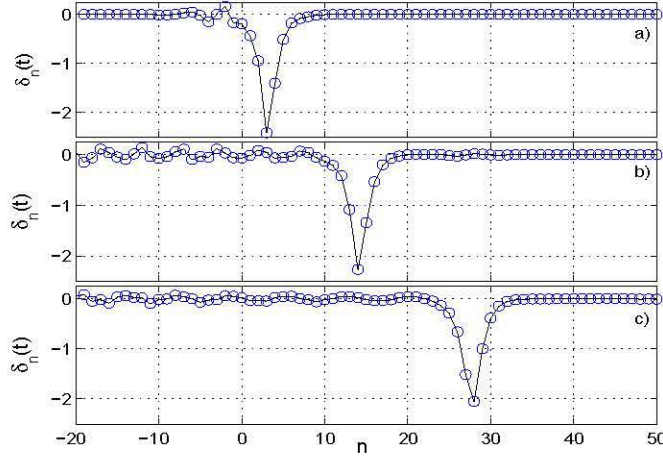


Figura 3.16: Gráfica de (3.42) que muestra la asimetría del pico para a) $t=10$, b) $t=45$ y c) $t=100$.

3.4.1. El efecto dinámico de los modos internos

Para estudiar el efecto en la dinámica de los modos internos el kink, observamos primeramente de la Figura 3.16 que el pico de la diferencia dividida

$$\delta_n(t) = y_{n+1}^{num}(t) - y_n^{num}(t) \quad (3.43)$$

tiene una simetría que evoluciona con el tiempo. Por otro lado,

$$\Delta_n(t) = K_{n+1}(t) - K_n(t) \quad (3.44)$$

no tiene asimetría. Así, la diferencia

$$g_n(t) = \Delta_n(t) - \delta_n(t) \quad (3.45)$$

la cual esta graficada en la Figura 3.8, es la asimetría del pico. Se observa de la Figura 3.8 que el valor g_n más grande se localiza en la posición del kink y es un dipolo, el cual tiene la misma forma que la diferencia dividida del modo de Goldstone. Además, se observa que esta diferencia dividida interactua

muy fuertemente con la radiación. Así, para la teoría de modulaciones es razonable tomar una función de prueba que incluya una modulación del modo de Goldstone de la siguiente forma:

$$y_n(t) = 4 \arctan \exp\left(-\frac{n - \xi(t)}{w(t)}\right) + A(t) \operatorname{sech}\left(\frac{n - \xi(t)}{\lambda(t)}\right). \quad (3.46)$$

El efecto del modo impar esta tomado en cuenta en la dependencia temporal de $w(t)$. Usamos (3.46) como función de prueba de (3.2) y obtenemos el Lagrangiano promediado en la forma

$$L = L_K + L_A + L_{int}. \quad (3.47)$$

El Lagrangiano L_K es el Lagrangiano (3.12) que previamente hemos estudiado.

El Lagrangiano L_A es el correspondiente al modo interno. Puesto que la amplitud A se supone es pequeña (ver Figura 3.8), del Apéndice II tenemos

$$\begin{aligned} L_A = & \lambda A^2 + \frac{\lambda^2 A^2}{36\lambda} (12 + \pi^2) + \frac{\xi^2 A^2}{2\lambda^2} \left(\frac{2\lambda}{3} + \frac{\lambda^2 (1 - 2\pi^2 \lambda^2)}{6 \sinh(\pi^2 \lambda)} \cos(2\pi\xi) \right) \\ & - A^2 \left(2\lambda - \frac{2}{\sinh \frac{1}{\lambda}} - 4\lambda I_1(\lambda) \cos(2\pi\xi) \right) \\ & - \frac{A^2}{2d^2} \left(2\lambda - \frac{5,5\lambda w}{1,1w + \lambda} + 4 \cos(2\pi\xi) \left(\frac{\pi^2 \lambda^2}{\sinh(\pi^2 \lambda)} - I_2(\lambda, w) \right) \right) \\ & + \frac{A^4}{24d^2} \left(\frac{4}{3}\lambda - 2,132w^{0,2}\lambda^{0,8} + \right. \\ & \left. 4 \cos(2\pi\xi) \left(\frac{2\pi^2 \lambda^2 (1 + \pi^2 \lambda^2)}{3 \sinh(\pi^2 \lambda)} - I_3(\lambda, w) \right) \right). \quad (3.48) \end{aligned}$$

Las funciones $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda, w)$ y $I_3(\lambda, w)$ están dadas en el Apéndice II. Como se esperaba los términos cuadráticos de L_A involucran la contribución de los términos de PN, los cuales en el caso estático son responsables del cambio de estabilidad del kink dependiendo de la posición del mismo. El efecto de la dinámica de los modos internos esta incluida en los términos λ^2 y ξ^2 . Los términos de interacción en L_{int} son de dos tipos. Los primeros dan la masa

agregada al kink debido a los modos internos y el segundo tipo de interacción produce una modificación del potencial de PN, $V(w, \lambda)$, que siente el kink debido a la presencia del modo interno. Esta interacción se mostrará que es la responsable del aumento de la oscilación en la velocidad descrita en la sección anterior. Este último Lagrangiano es calculado en el Apéndice II en la forma

$$L_{int} = \frac{4A \sin(2\pi\xi)}{\lambda w} \left(\dot{\xi}^2 - 1 \right) V(w, \lambda) - \frac{4A}{d^2} \sin(2\pi\xi) V(\lambda, w) + \frac{2A^3}{3d^2} \sin(2\pi\xi) S(\lambda, w). \quad (3.49)$$

Así, el efecto dinámico de los modos internos es obtenido al resolver las ecuaciones variacionales que se obtienen del Lagrangiano promediado (3.47). Ahora habrá nuevas ecuaciones para A y λ , la ecuación para w será también modificada. La ecuación para la posición tendrá ahora un potencial de PN más grande debido a la interacción con los modos internos, lo cual como veremos explica la amplitud más grande de la oscilación de la velocidad puesta en evidencia con los cálculos numéricos, lo cual no fue capturado usando solamente al kink como función de prueba. Las ecuaciones variacionales toman la siguiente forma:

$$\ddot{\xi} - 4w\pi^3 \exp(-\pi^2 w) \left(\dot{\xi}^2 + \frac{w^2}{d^2} \right) \sin(2\pi\xi) + \frac{\pi}{\lambda} A \left(\dot{\xi}^2 + 1 \right) V(w, \lambda) \cos(2\pi\xi) + \frac{\pi w}{d^2} AV(\lambda, w) \cos(2\pi\xi) - \frac{\dot{\xi} \dot{w}}{w} = l_\xi \quad (3.50)$$

$$\ddot{w} - \frac{\dot{w}^2}{2w} + \frac{6}{\pi^2 w} \left(\dot{\xi}^2 + \frac{w^2}{d^2} \right) + \frac{3w}{2\pi^2} h'(w) - \frac{5,9676A^2 \lambda^2 w}{2\pi^2 d^2 (\lambda^2 - 0,0156\lambda w + 2,0376w^2)} + \frac{0,4264A^4 w^{0,2} \lambda^{0,8}}{16\pi^2 d^2} = l_w \quad (3.51)$$

$$\ddot{A} - A \left[\dot{\lambda}^2 \frac{(12 + \pi^2)}{36\lambda^2} + \frac{\dot{\xi}^2}{3\lambda^2} - 2 + \frac{2}{\lambda \sinh \frac{1}{\lambda}} + \frac{1,65w - \lambda}{d^2(1,1w + \lambda)} \right] - \frac{A^3}{d^2} \left[\frac{1}{9} - \frac{2,132}{12} \left(\frac{w}{\lambda} \right)^{0,2} \right] = l_A \quad (3.52)$$

$$\ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda} + \frac{6\dot{\xi}^2}{\lambda(12 + \pi^2)} - \frac{18\lambda\dot{A}^2}{A^2(12 + \pi^2)} + \frac{36}{\lambda(12 + \pi^2)} \left(\lambda^2 - \frac{\cosh \frac{1}{\lambda}}{\sinh^2 \frac{1}{\lambda}} \right) + \frac{18\lambda}{d^2(12 + \pi^2)} \left(1 - \frac{1,9892w^2}{w^2 - 0,0156\lambda w + 2,0376\lambda^2} \right) - \frac{A^2\lambda}{d^2(12 + \pi^2)} \left(1 - 1,2792 \left(\frac{w}{\lambda} \right)^{0,2} \right) = l_\lambda. \quad (3.53)$$

El término de amortiguamiento para la ecuación de ξ es básicamente el mismo que antes, el cual se obtuvo del análisis de la pérdida por radiación, debido a que la contribución del modo de Goldstone es muy pequeña (ver la Figura 3.8). Así, tenemos que

$$l_\xi = -\dot{\xi} \sum_k 8\pi^2 w \exp\left(-\frac{\rho\pi w w_k}{v}\right) \frac{w_k^2}{v^3},$$

$$l_w = -\frac{\dot{w}}{2c_g t},$$

$$l_A = -\frac{\dot{A}}{2c_g t},$$

$$l_\lambda = -\frac{\dot{\lambda}}{2c_g t}.$$

Estas ecuaciones de modulación ahora serán usadas para explicar cuantitativamente la dinámica del kink usando una descripción simple de la interacción entre el kink modulado y los modos internos generados por el movimiento del kink a través de la cadena.

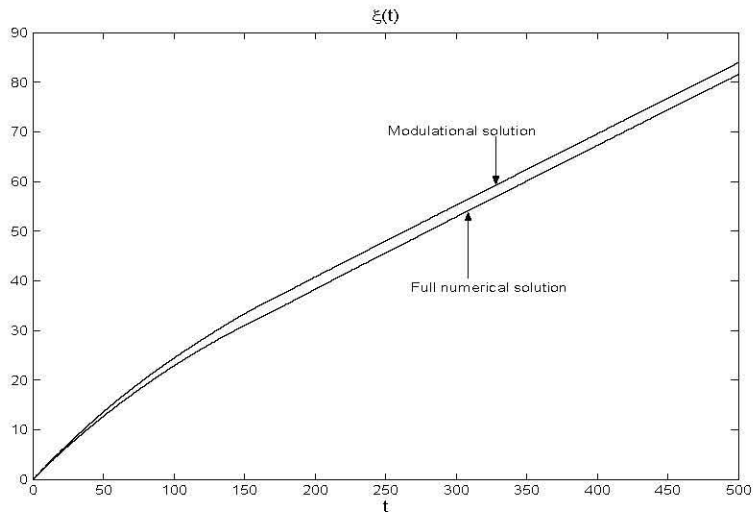


Figura 3.17: Comparación numérica entre la posición numérica (3.6) y la solución del sistema (3.49) a (3.52) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,3$.

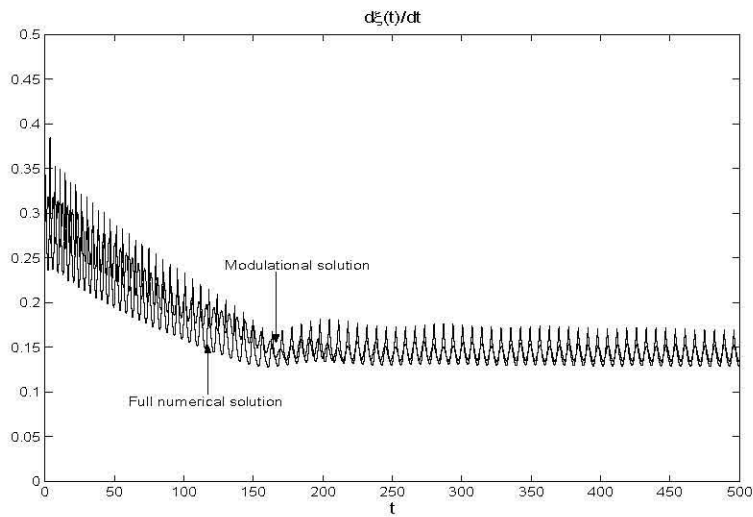


Figura 3.18: Comparación numérica entre la velocidad numérica (3.7) y la solución del sistema (3.49) a (3.52) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,3$.

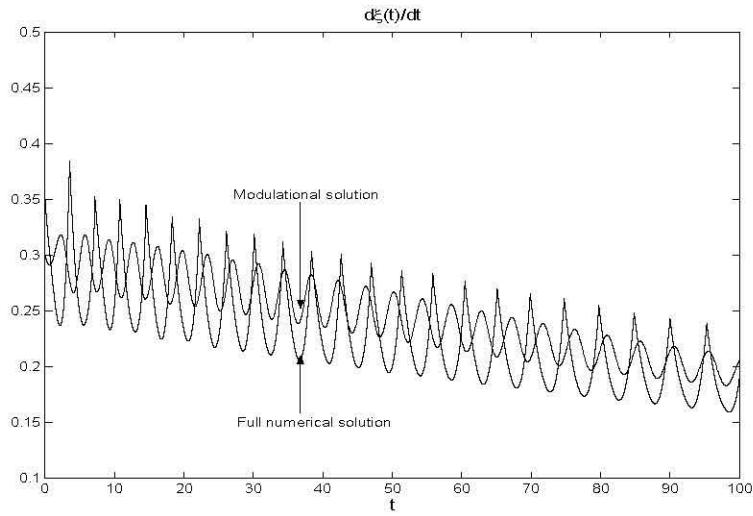


Figura 3.19: Comparación numérica entre la velocidad numérica (3.7) y la solución del sistema (3.49) a (3.52) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,3$ en una ventana más pequeña.

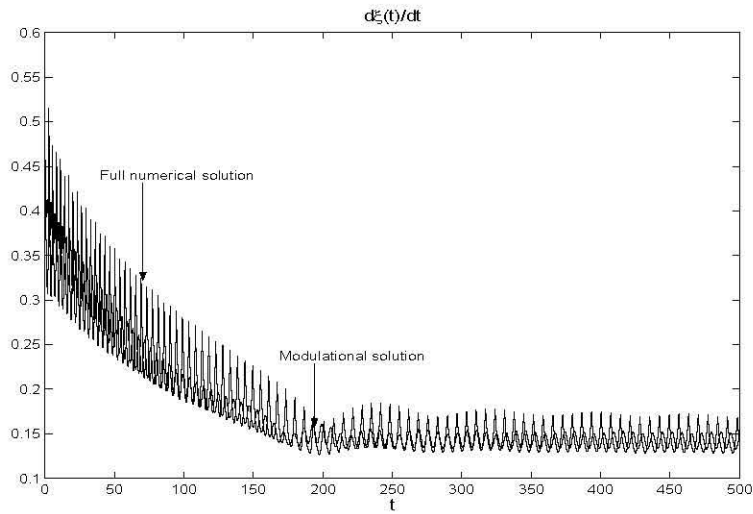


Figura 3.20: Comparación numérica entre la velocidad numérica (3.7) y la solución del sistema (3.49) a (3.52) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,4$.

3.5. Solución a las ecuaciones de modulación y comparación con la solución numérica

Antes de comparar la solución de las ecuaciones modulacionales con la solución numérica describiremos el comportamiento cuantitativo de estas soluciones modulacionales. La ecuación de movimiento para w tiene un centro en la raíz derecha de la relación de dispersión discreta (3.16) y el ancho del kink es atraído hacia este estado estacionario debido al amortiguamiento. Por otro lado, la ecuación para λ tiene un centro para $\lambda = 0,85$ y un silla para $\lambda = 0,35$ cuando $w = 0,9$. Este centro se esperaba puesto que corresponde a un mínimo del cociente de Rayleigh como función de λ para la función de prueba que aproxima al modo de Goldstone. La ecuación para A tiene un punto crítico para $A = 0$. La parte lineal en este punto crítico tiene dos términos. El primero da el valor del cociente de Rayleigh para el caso estático el cual alterna su signo dependiendo de si el kink está en un mínimo o en un máximo del potencial de PN. El segundo término es la modificación dinámica de este comportamiento debido a los términos ξ^2 y λ^2 . Así vemos que debido a la oscilación rápida de los parámetros modulacionales del kink este término tendrá un promedio pequeño. Esto resultará en que el promedio es pequeño y negativo. Así, el punto fijo $A = 0$ es un centro en una escala de tiempo grande. El término A^3 previene que la amplitud del modo interno de Goldstone crezca demasiado durante la parte inestable del ciclo que hace el valor propio de este modo durante el viaje del kink sobre los nodos de la cadena.

Finalmente, la ecuación para ξ tiene un término nuevo en el potencial de PN proporcional a A causado por el modo interno. Este término es importante puesto que la integral en $V(\lambda, w)$ involucra un polo doble el cual da una contribución relativamente grande. Debido al periodo grande de A esta contribución es importante para tiempos grandes. Como antes, el cambio en el amortiguamiento produce la rodilla al tomar en cuenta el modo interno de Goldstone. Este análisis explica en términos sencillos el comportamiento del kink viajero en la cadena.

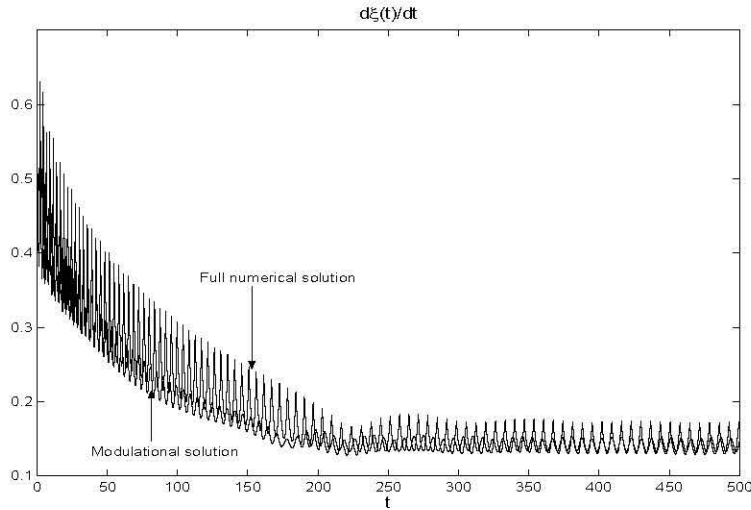


Figura 3.21: Comparación numérica entre la velocidad numérica (3.7) y la solución del sistema (3.49) a (3.52) para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$ y $v_0 = 0,5$.

Ahora compararemos la solución modulacional con los resultados numéricos. Hacemos las comparaciones para $\rho(t) = 1 - 0,15 \tanh(t/60)$. Vemos que la concordancia entre las amplitudes es muy buena debido a la influencia del modo interno. Como se muestra en las Figuras 3.17, 3.18 y 3.19. El mismo $\rho(t)$ fue usado para otras condiciones iniciales y las Figuras 3.20 y 3.21 muestran la comparación en velocidades para $v_0 = 0,4$ y $v_0 = 0,5$, respectivamente. Vemos que la comparación es notoriamente buena debido a la complejidad del proceso de radiación y la aproximación usada. En estaciones posteriores a la primer rodilla el amortiguamiento de la radiación de las ecuaciones aproximadas es bastante fuerte y la teoría de modulaciones para la radiación no puede capturar los detalles del cambio brusco en la radiación. Más allá de la primer rodilla la barrera del potencial de PN es pequeña y puesto que el amortiguamiento es también pequeño el kink viaja como el kink del continuo para una velocidad pequeña. En el siguiente capítulo estudiaremos la cadena de Sine-Gordon en dos dimensiones espaciales.

Capítulo 4

Ecuación discreta de Sine-Gordon en dos dimensiones espaciales

Se sabe que la ecuación de Sine-Gordon continua en dos dimensiones espaciales no tiene soluciones radialmente simétricas [32]. Esto es, todas las condiciones iniciales radialmente simétricas colapsan en un tiempo finito. En este capítulo estudiamos este problema en una malla bidimensional cuadrada. Mostramos que la ecuación de Sine-Gordon discreta tiene soluciones aproximadas radialmente simétricas que colapsan y otras que no lo hacen. Desarrollamos una teoría de modulaciones, basada en el Lagrangiano promediado, para explicar este hecho y para estimar los radios de las condiciones iniciales que no colapsan y el umbral, en el parámetro de discretización, de las soluciones que colapsan. Estudiamos numéricamente el problema de valores propios para el caso estático para mostrar la estabilidad de las soluciones que no colapsan. Además, obtenemos que la capa límite del pulso radial tiende a hacerse poligonal, en vez de circular. Para radios grandes la estructura es totalmente poligonal e irregular y para radios relativamente pequeños es cuadrada con esquinas. También, para un radio dado, hacemos la continuación numérica de la rama estable como función del parámetro de discretización, y obtenemos un punto de retorno en el cual surgen cuatro ramas de soluciones inestables. Por último usamos el Lagrangiano promediado, con una función de prueba que queda

dirigida hacia la frontera lineal al usar coordenadas normales y tangenciales, para capturar la forma de la frontera y para describir cualitativamente la estructura poligonal. De este análisis obtenemos un mapeo discreto para las coordenadas de la estructura poligonal. Esta descripción es en términos de una geodésica atrapada por los canales bidimensionales formados por el potencial de Peierls-Nabarro.

4.1. Planteamiento del problema y su solución numérica

En 1990 J. Neu [32] estudio la modulación de onda larga de soluciones tipo pulso en la ecuación continua de Sine-Gordon en dos dimensiones espaciales,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u + \sin u = 0, \quad (4.1)$$

y mostro, usando la teoría de modulaciones de Whitham (ver [9]), que todas las soluciones radialmente simétricas colapsan, esto es, el radio del pulso tiende a cero en un tiempo relativamente corto. También, estudio la posibilidad de soluciones con capa límite oscilante y las construyo asintóticamente. Minzoni et. al. [33] retomaron el problema para estudiar numérica y asintóticamente el comportamiento de soluciones tipo pulso que en coordenadas polares toman la forma,

$$u = 4 \arctan \exp \left(-\frac{r - R - ar \cos n(\theta - \xi)}{w} \right). \quad (4.2)$$

Este pulso tiene, como en [33], un momento angular proporcional a a , para $a \neq 0$. De hecho (4.2) representa una capa límite suave que se mueve con velocidad $\dot{\xi}$ en la dirección angular θ . Minzoni et. al. mostraron que el radio, R , eventualmente tiende a cero puesto que el término estabilizante del momento angular es proporcional a a y decreciente, debido a la radiación de ondas espirales. Por lo que no fue resuelta la posibilidad de estabilizar condiciones iniciales tipo pulso.

En el presente capítulo consideramos la discretización del espacio bidimensional con diferencias centrales de la ecuación continua (4.1). Dicha dis-

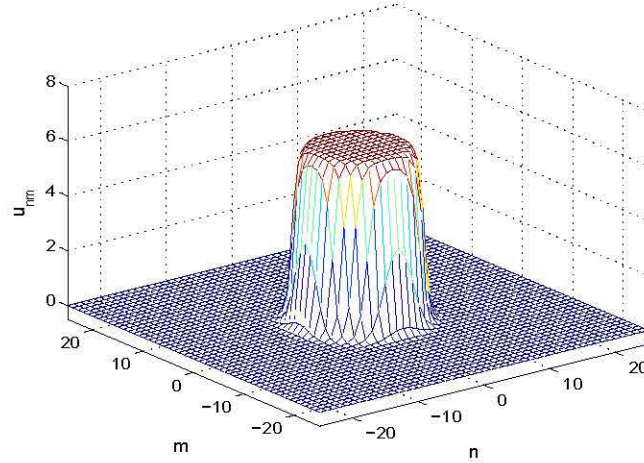


Figura 4.1: Gráfica del pulso (4.3) para $R = 8$ y $w = d = 0,4$.

cretización plantea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas:

$$\ddot{u}_{nm} = u_{n-1,m} + u_{n+1,m} + u_{n,m-1} + u_{n,m+1} - 4u_{n,m} - \frac{1}{d^2} \sin u_{nm}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3)$$

Usamos una condición inicial en la forma de un pulso radialmente simétrico discreto (ver Figura 4.1), el cual es la contraparte discreta de (4.2) con $a = 0$,

$$u_{nm}(t) = 4 \arctan \exp \left(-\frac{\sqrt{n^2 + m^2} - R(t)}{w} \right). \quad (4.4)$$

Cuando d es grande tenemos el límite continuo y en este límite se satisface la relación de dispersión $w = d\sqrt{1 - R}$, para $d \leq 1$ tenemos el límite discreto.

Para estudiar la evolución de la condición inicial (4.4) resolvemos numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

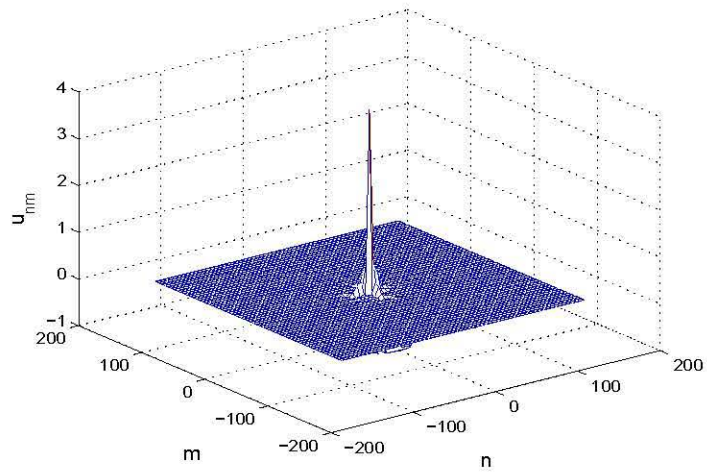


Figura 4.2: Colapso de un pulso radial con condiciones iniciales $R(0) = 16$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 1$ en la malla $[-150, 150] \times [-150, 150]$ para un tiempo $t = 26$.

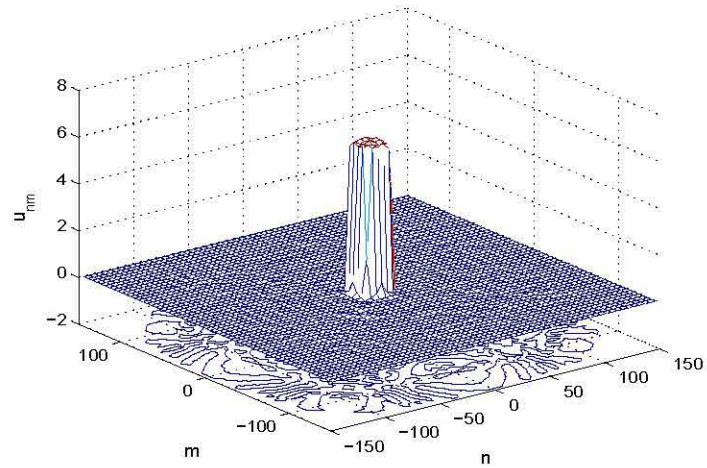


Figura 4.3: Atrapamiento de un pulso radial con condiciones iniciales $R(0) = 15,5$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$ en la malla $[-150, 150] \times [-150, 150]$ para un tiempo $t = 300$.

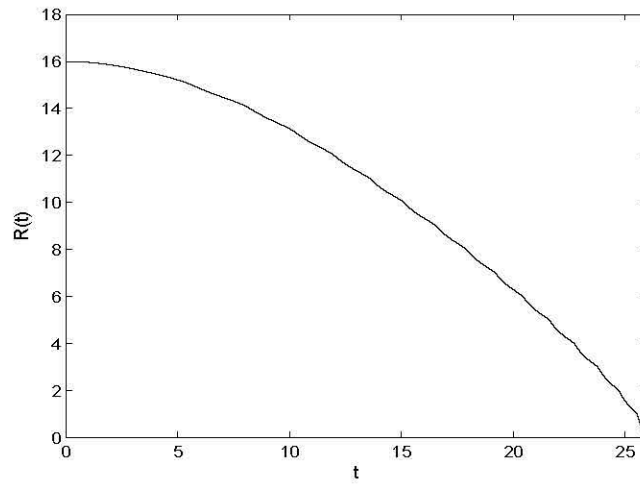


Figura 4.4: *Estimación numérica de la posición del radio para la condición inicial $R(0) = 16$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 1$ que colapsa.*

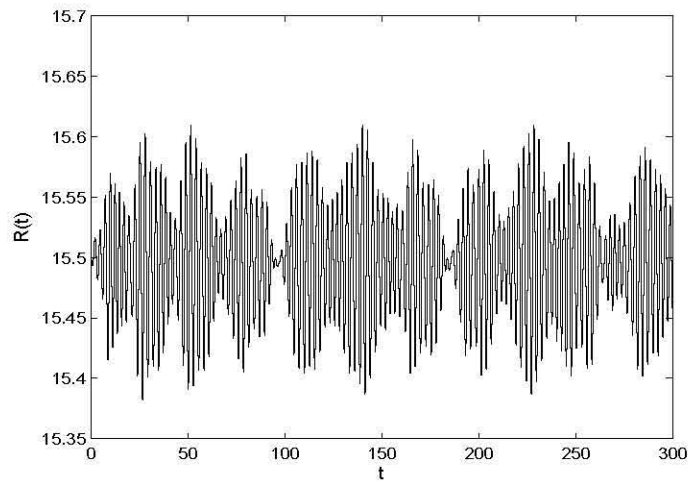


Figura 4.5: *Estimación numérica de la posición del radio para la condición inicial $R(0) = 15,5$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$ que queda atrapada.*

(4.3). Para este fin, usamos un método de Runge-Kutta de cuarto orden usando a (4.4) y sus derivadas temporales como condiciones iniciales. El problema discreto (4.3) no es rígido por lo que el método de Runge-Kutta da una solución numérica muy buena para pasos de tiempo del orden de 10^{-3} . La solución numérica para este problema muestra dos tipos de solución una de ellas colapsa en un tiempo finito mientras que la otra queda atrapada entre los nodos de la malla bidimensional cuadrada. Ambas radian ondas lineales. Como (4.3) es un sistema de ordinarias sabemos que, dada una condición inicial, la solución existirá para todo tiempo. Por lo que usamos el término de colapso para indicar el rompimiento del pulso (radio se hace cero) y su eventual decaimiento en radiación lineal. Mostramos estas dos posibilidades en las Figuras 4.2 y 4.3, respectivamente. En la Figura 4.2 se muestra la solución colapsada y se observa que la condición inicial queda concentrada en un punto, puesto que el radio del pulso inicial se hace cero (ver Figura 4.4), la configuración oscila y finalmente decae en radiación lineal. En esta evolución hay modos inestables localizados en la parte superior del pulso que tratan de desestabilizarlo hasta que éste decae en radiación lineal. En la Figura 4.3 se muestra a una condición inicial cuyo radio no tiende a cero para un tiempo relativamente grande, $t = 300$. En este caso el pulso radial es robusto por lo que los modos inestables no pueden desestabilizarlo. En la Figura 4.5 mostramos una estimación numérica de la evolución temporal para este radio y observamos que la capa límite de este pulso no se mueve, debido a que queda atrapado en los nodos de la malla. Para explicar este comportamiento hacemos una estimación numérica de la evolución temporal del radio por medio de la fórmula $R(t) \approx n + \frac{\pi - u_{nm}(t)}{u_{n+1,m}(t) - u_{nm}(t)}$, la cual corresponde a una sección transversal de m y es análoga a la usada en (3.6) para estimar numéricamente la posición del escalón (kink). En la sección siguiente desarrollamos una solución modulacional usando el Lagrangiano promediado.

4.2. Soluciones modulacionales para el pulso

Recordamos que en el caso de la ecuación discreta de Sine-Gordon unidimensional, estudiada en el capítulo anterior, (ver [23], [24]) la solución escalón (kink) queda atrapada en el potencial de Peierls-Nabarro que ella genera. Ahora mostramos, usando el Lagrangiano promediado, como este potencial tiene un mínimo en la dirección radial, la cual es la responsable del atrapamiento del pulso para cuando el radio es suficientemente grande. Para obtener el Lagrangiano promediado observamos que la ecuación discreta (4.3) es obtenida del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \dot{u}_{nm}^2 - \frac{1}{2} (u_{n+1,m} - u_{nm})^2 - \frac{1}{2} (u_{nm} - u_{n,m+1})^2 - \frac{1}{d^2} (1 - \cos u_{nm}) \right]. \quad (4.5)$$

Usamos al pulso (4.4) como función de prueba para promediar el Lagrangiano (4.5). Como primera aproximación suponemos que $u_{n+1,m} - u_{nm} \approx \frac{\partial}{\partial x} u(x, m) |_{x=n}$ y $u_{nm} - u_{n,m+1} \approx \frac{\partial}{\partial y} u(n, y) |_{y=m}$, por lo que de (4.5) obtenemos el Lagrangiano promediado,

$$\mathcal{L} = \frac{2}{w^2} \left(\dot{R}^2 - 1 - \frac{w^2}{d^2} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{n^2 + m^2} - R(t)}{w} \right). \quad (4.6)$$

Para sumar la serie doble (4.6) hacemos $f_{nm} = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{n^2 + m^2} - R}{w} \right)$ y usamos la fórmula de suma de Poisson (ver Capítulo 1),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{nm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{nm}, \quad (4.7)$$

en donde

$$\hat{f}_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R(t)}{w} \right) \exp[-2\pi i (n, m) \cdot (x, y)] dx dy \quad (4.8)$$

es la transformada de Fourier de f_{nm} . En coordenadas polares la transformada (4.8) resulta ser:

$$\widehat{f}_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \operatorname{sech}^2 \left(\frac{r - R(t)}{w} \right) \exp \left[-2\pi i r \sqrt{n^2 + m^2} \cos \theta \right] dr d\theta. \quad (4.9)$$

Ahora, consideramos radios grandes y usamos la fase estacionaria [14] para aproximar la integral en θ para obtener:

$$\widehat{f}_{nm} \approx \int_0^\infty r \operatorname{sech}^2 \left(\frac{r - R(t)}{w} \right) \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt[4]{n^2 + m^2}} \exp \left[\pi i \left(2r \sqrt{n^2 + m^2} - \frac{1}{4} \right) \right] dr. \quad (4.10)$$

Ahora, aproximamos el cálculo de la última integral para radios, R , grandes

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{nm} &= \frac{w \exp \left[\pi i \left(2R \sqrt{n^2 + m^2} - \frac{1}{4} \right) \right]}{\sqrt[4]{n^2 + m^2}} \int_{-R/w}^\infty \sqrt{R + wz} \operatorname{sech}^2 z \exp \left(2\pi i zw \sqrt{n^2 + m^2} \right) dz \\ &\approx \frac{w \sqrt{R} \exp \left[\pi i \left(2R \sqrt{n^2 + m^2} - \frac{1}{4} \right) \right]}{\sqrt[4]{n^2 + m^2}} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}^2 z \exp \left(2\pi i zw \sqrt{n^2 + m^2} \right) dz \\ &= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt[4]{n^2 + m^2}} \frac{4\pi w^2 \sqrt{n^2 + m^2}}{\sinh \left(\pi^2 w \sqrt{n^2 + m^2} \right)} \cos \left[\pi \left(2R \sqrt{n^2 + m^2} - \frac{1}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por lo que a primera aproximación consideramos los modos de mayor orden ($n = 0, m = 0$), ($n = \pm 1, m = 0$) y ($n = 0, m = \pm 1$) y obtenemos

$$f(R) = \sum_{m=-\infty}^\infty \sum_{n=-\infty}^\infty f_{nm} \approx 4\pi w R + \frac{16\pi w^2 \sqrt{R}}{\sinh(\pi^2 w)} \cos \left[\pi \left(2R - \frac{1}{4} \right) \right], \quad (4.12)$$

lo cual determina el Lagrangiano promediado. Por lo que al tomar las variaciones del Lagrangiano promediado (4.6) obtenemos la ecuación de movimiento para el radio en la forma:

$$\ddot{R} = - \left(\dot{R}^2 + 1 + \frac{w^2}{d^2} \right) \frac{f'(R)}{2f(R)}. \quad (4.13)$$

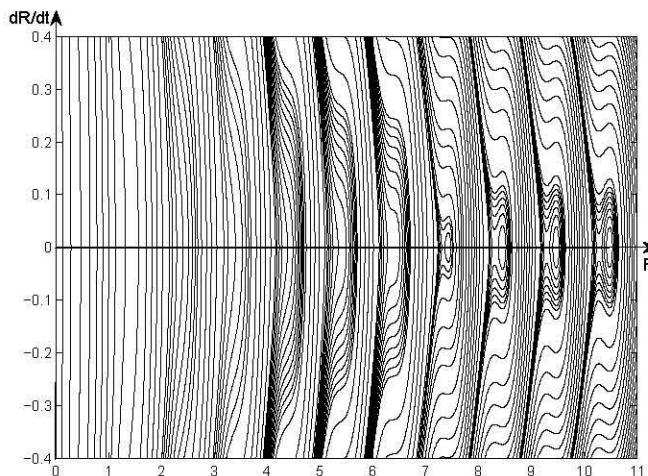


Figura 4.6: Plano fase para la ecuación (4.13) con $d = 0,4$.

Esta ecuación diferencial recobra, cuando $w \approx d$ y $d \rightarrow \infty$, la ecuación de J. Neu [32] en la que se muestra el colapso. Sin embargo, cuando d es pequeño y $w \approx d$ el potencial de Peierls-Nabarro, el cual es proporcional a $\sqrt{R} \cos \left[\pi \left(2R - \frac{1}{4} \right) \right]$, empieza a ser importante para radios grandes.

El plano fase correspondiente se muestra en la Figura 4.6. Los centros de este plano fase representan soluciones estáticas que no colapsan debido al atrapamiento del escalón (kink) radial por el potencial de Peierls-Nabarro. Mostraremos numéricamente que este plano fase predice con una buena precisión los radios de los pulsos estables. En la sección siguiente estudiaremos numéricamente las soluciones alrededor de los pulsos estables.

4.3. Soluciones en el estado estacionario

Para tener un calculo numérico de los pulsos estacionarios, determinados por los centros del plano fase de la Figura 4.6, usamos el método de Newton para obtenerlos. Así, resolvemos numéricamente la ecuación discreta bidimensional de Sine-Gordon para el caso estacionario y entonces determi-

namos numéricamente los valores propios correspondientes para entender la estabilidad lineal de los pulsos discretos. Esto es, resolvemos numéricamente la ecuación estacionaria de (4.3) para soluciones tipo pulso en una malla cuadrada finita con $(2L + 1)^2$ nodos,

$$u_{n-1,m} + u_{n+1,m} + u_{n,m-1} + u_{n,m+1} - 4u_{n,m} - \frac{1}{d^2} \sin u_{n,m} = 0, \quad -L \leq n, m \leq L, \quad (4.14)$$

con condiciones cero en la frontera.

La ecuación (4.14) plantea encontrar los ceros de la función no lineal $F: \mathbf{R}^{(2L+1)^2} \rightarrow \mathbf{R}^{(2L+1)^2}$ definida por su lado izquierdo. Antes de abordar el problema estacionario (4.14) numeramos las variables independientes identificando al nodo (n, m) de la malla con el número $s = (2L + 1)(L - m) + L + 1 - n$, $1 \leq s \leq (2L + 1)^2$. Así, resultan las numeraciones $u_{n-1,m} \rightarrow u_{s+1}$, $u_{n+1,m} \rightarrow u_{s-1}$, $u_{n,m-1} \rightarrow u_{s+2L+1}$, $u_{n,m+1} \rightarrow u_{s-2L-1}$, etc. En ésta numeración la función no lineal F toma la siguiente forma

$$F(\mathbf{u}) = \left(\dots, u_{s+1} + u_{s-1} + u_{s+2L+1} + u_{s-2L-1} - 4u_s - \frac{1}{d^2} \sin u_s, \dots \right), \quad (4.15)$$

con $\mathbf{u} = (\dots, u_{s-1}, u_s, u_{s+1}, \dots)$.

Ahora, usamos el método de Newton para encontrar los ceros de la función no lineal $F(\mathbf{u})$. El k -ésimo paso de la iteración queda dado por:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} - A_{k-1}^{-1} F(\mathbf{u}_{k-1}), \quad (4.16)$$

en donde

$$A_{k-1} = JF(\mathbf{u})|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{k-1}}, \quad (4.17)$$

es la matriz Jacobiana de F evaluada en el paso $(k - 1)$ -ésimo. Así, damos una condición inicial \mathbf{u}_0 y el método iterativo de Newton (4.16) nos da una solución numérica estacionaria \mathbf{u}^{est} .

El Jacobiano (4.17) es usado también para determinar la estabilidad lineal de \mathbf{u}^{est} . De hecho, la ecuación de onda (4.3), en la nueva numeración, se puede

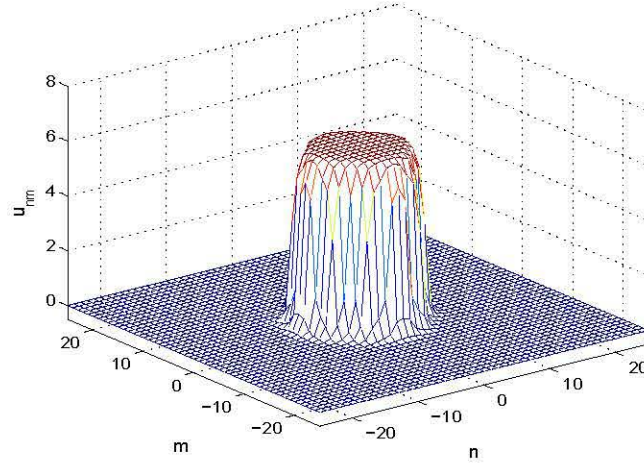


Figura 4.7: Solución estacionaria para el pulso (4.3) con $R = 8$ y $w = d = 0,4$.

escribir en la forma: $\ddot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u})$. Por lo que la linealización correspondiente a una perturbación \mathbf{w} de \mathbf{u}^{est} se escribe de la siguiente manera

$$\ddot{\mathbf{w}} = JF(\mathbf{u}^{est}) \mathbf{w}. \quad (4.18)$$

Considerando ahora los modos normales $\mathbf{w} = \exp(\lambda t) \mathbf{v}$ obtenemos el siguiente problema de valores propios:

$$\lambda^2 \mathbf{v} = JF(\mathbf{u}^{est}) \mathbf{v}. \quad (4.19)$$

La relación (4.19) la resolvemos numéricamente para encontrar los valores y vectores propios, determinando así la estabilidad lineal de la solución estacionaria \mathbf{u}^{est} . Observamos que cuando los valores propios de $JF(\mathbf{u}^{est})$ son positivos \mathbf{u}^{est} es un punto silla, ya que la \mathbf{v} crece. En el caso de que los valores propios de $JF(\mathbf{u}^{est})$ sean negativos \mathbf{u}^{est} es neutralmente estable, y es la radiación la que estabiliza asintóticamente a las soluciones tipo pulso.

En las Figuras 4.7 a 4.25 mostramos numéricamente algunas soluciones estacionarias, \mathbf{u}^{est} , de (4.14) con sus correspondientes valores propios, obtenidos de (4.19), arreglados en orden creciente. En la Figura 4.7 presentamos la

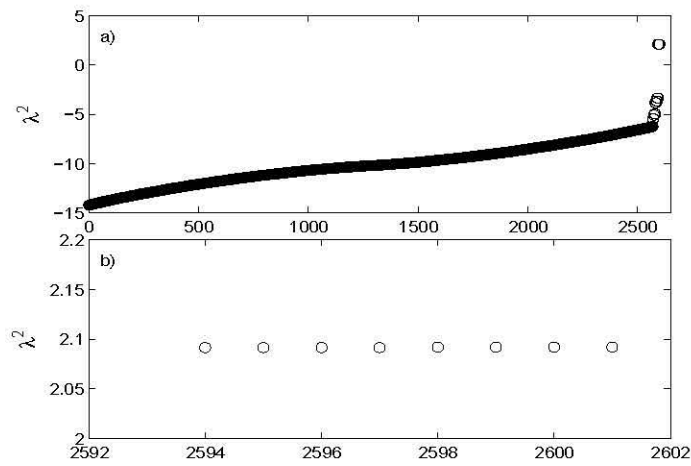


Figura 4.8: a) Valores propios λ^2 de la solución estacionaria de la Figura 4.7 y b) ventana más pequeña de a).

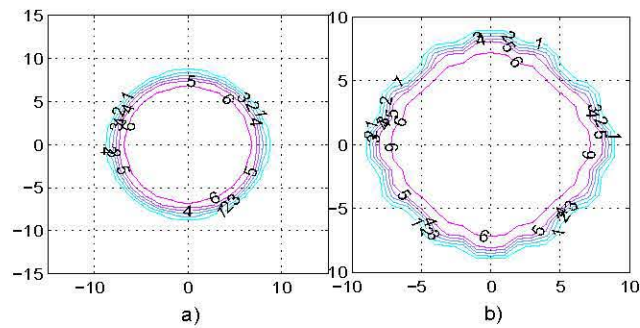


Figura 4.9: a) Líneas de nivel de la condición inicial dada por la Figura 4.1. b) Líneas de nivel de la solución estacionaria dada por la Figura 4.7.

solución estacionaria para la condición inicial dada por la Figura 4.1, la cual se obtiene de la fórmula del pulso (4.4). Se observa que esta solución estacionaria es inestable, como se puede ver de la Figura 4.8 de los cuadrados de los valores propios. Cuando $\lambda^2 \geq 0$ tenemos inestabilidad mientras que si el cuadrado de los valores propios es negativo tenemos soluciones oscilatorias, las cuales son neutralmente estables y eventualmente amortiguadas por la radiación como en el caso unidimensional, ver [23], [19], [25], [27] y [24]. Por otro lado, de la Figura 4.9 notamos que las líneas de nivel para esta solución estacionaria tienen una estructura romboidal.

Hacemos notar que en la gráfica del cuadrado de los valores propios aparecen casi todos en la banda del espectro continuo, $[-8 - \frac{1}{d^2}, \frac{1}{d^2}]$, mientras que algunos pocos quedan fuera de dicha banda continua. La banda continua se obtiene de resolver la linealización de la ecuación estática (4.14) con la solución elemental $e^{i(k_1n+k_2m-\omega t)}$. De donde se obtiene la relación de dispersión $\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{d^2} + 4 \sin^2 k_1 + 4 \sin^2 k_2}$ y cuyos valores máximos y mínimos definen los extremos de la banda continua del problema (4.19) para el cuadrado de los valores propios. Esto último es similar a lo que ocurre en el caso unidimensional y que fue discutido en la sección 3.4. Sin embargo hay una diferencia notoria y es que ahora son varios los valores propios que quedan fuera de la banda continua, y no los dos de la contraparte unidimensional. De hecho los valores propios quedan agrupados en bloques de cuatro, lo que está en relación a la geometría cuadrada de la malla discreta. Así, tendremos para el caso bidimensional varios modos internos que como veremos son el análogo bidimensional de los modos internos, orientados en varias direcciones, del problema unidimensional.

Ahora estudiamos en detalle las soluciones que no colapsan predecidas por la ecuación modulacional (4.13). Comenzamos con el radio $R = 8$. De esta manera, damos una condición inicial con $R(0) = 8$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$ en el problema dinámico (4.3). La solución numérica correspondiente al tiempo $t = 150$ se muestra en la Figura 4.10 y cuyos datos numéricos son ahora usados como condición inicial para el método de Newton (4.16). La solución estacionaria correspondiente, cuya gráfica se muestra en la Figura 4.11, es

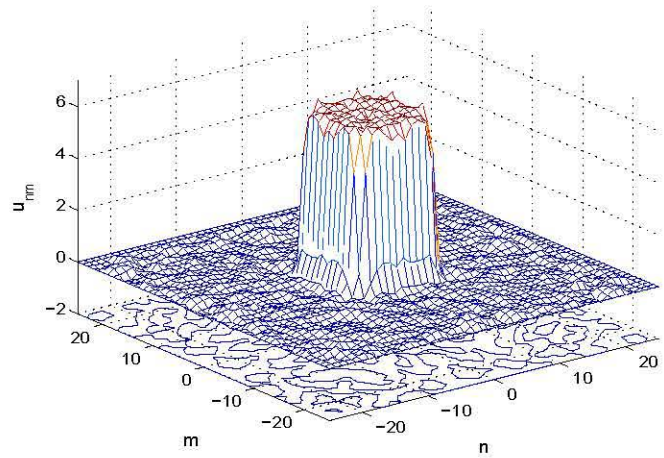


Figura 4.10: *Solución dinámica en $t = 150$ para el pulso (4.3) con $R(0) = 8$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$.*

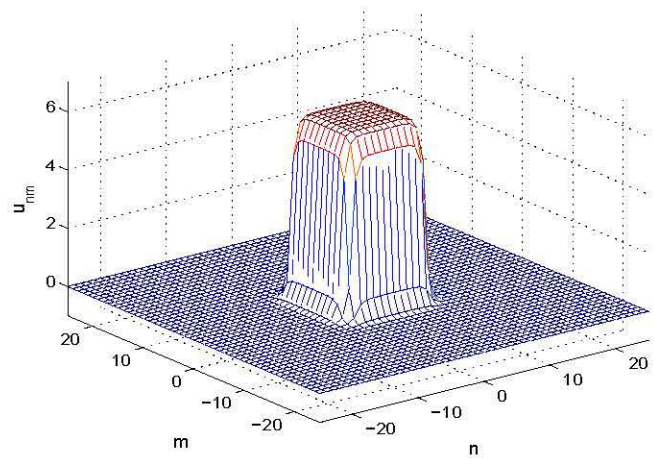


Figura 4.11: *Solución estacionaria para la condición inicial dada por la Figura 4.10.*

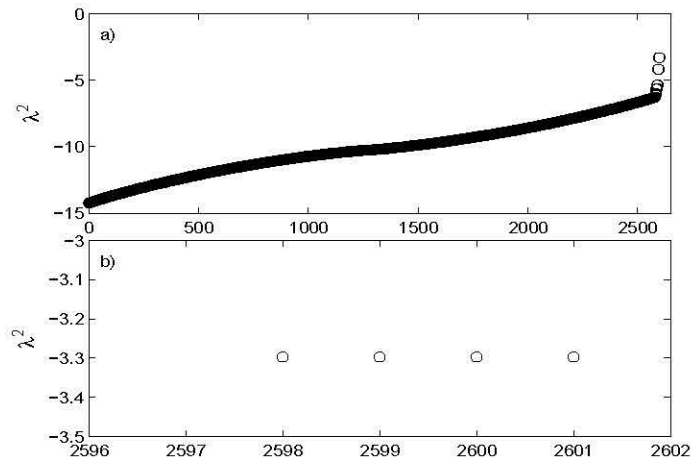


Figura 4.12: a) Valores propios λ^2 de la solución estacionaria de la Figura 4.11 y b) ventana más pequeña de a).

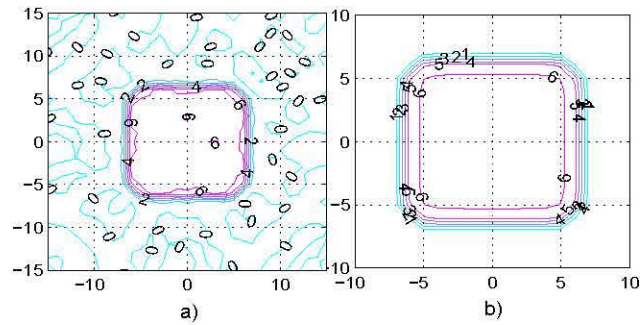


Figura 4.13: a) Líneas de nivel de la codición inicial Figura 4.10. b) Líneas de nivel de la solución estacionaria Figura 4.11.

linealmente estable pues el cuadrado de todos los valores propios son negativos, ver Figura 4.12. Las curvas de nivel correspondientes a la condición inicial y a su solución estacionaria se muestran en la Figura 4.13. De esta gráfica observamos que la solución estacionaria de la Figura 4.11 corresponde a una estructura cuadrada con lados pequeños en las esquinas. En la Figura 4.14 mostramos la solución final que viene del problema dinámico para la condición inicial $R(0) = 8$, $\dot{R}(0) = 0,1$ y $d = 0,4$, mientras que en la Figura 4.15 tenemos la solución estacionaria correspondiente. Observamos que en las soluciones dinámicas aparecen pequeñas perturbaciones en la parte superior del pulso, las cuales no aparecen en las soluciones estacionarias correspondientes. Dichas perturbaciones son producidas por los modos linealmente estables, los cuales oscilan y eventualmente decaen en radiación a escalas grandes de tiempo, como en el caso unidimensional [19]. El problema de valores propios (4.19) para la solución estacionaria de la Figura 4.15 muestra que dicha solución es estable, como se puede ver de la Figura 4.16. En la Figura 4.17 mostramos las curvas de nivel para la condición inicial dada en la Figura 4.14 y para la solución estacionaria correspondiente dada en la Figura 4.15. De estas curvas de nivel observamos una estructura poligonal para el pulso pero ahora con una diferencia en las esquinas con respecto a las curvas de nivel dadas en las Figuras 4.9 y 4.13, la solución de la Figura 4.17 tiene más lados y no es totalmente simétrica.

Cuando se dejan evolucionar condiciones iniciales ligeramente diferentes en la ecuación dinámica (4.3) y las soluciones finales correspondientes se ponen como condiciones iniciales en el método de Newton, observamos que se producen soluciones estacionarias diferentes en detalle aún si su comportamiento global es el mismo, como se predice en la ecuación modulacional (4.13).

Ahora intentamos pulsos radiales con radios grandes. Esto es, resolvemos numéricamente el problema dinámico para la condición inicial $R(0) = 15,5$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$. En la Figura 4.18 se muestra la solución dinámica al tiempo $t = 300$ y en la Figura 4.19 la correspondiente solución estacionaria. En la Figura 4.20 se muestra la estabilidad de dicha solución estacionaria

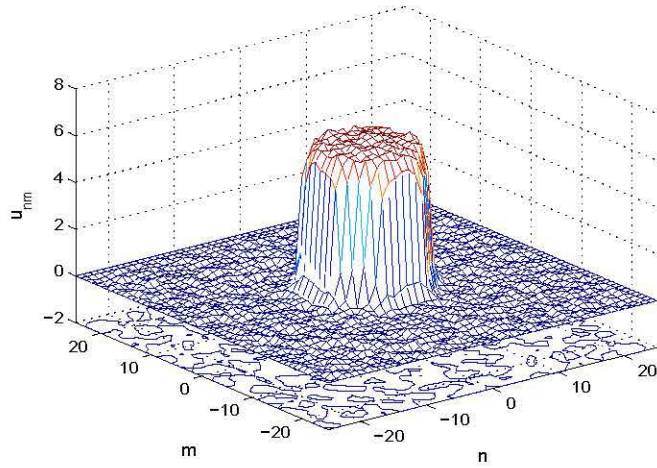


Figura 4.14: Solución dinámica en $t = 500$ para el pulso (4.3) con $R(0) = 8$, $\dot{R}(0) = 0,1$ y $d = 0,4$.

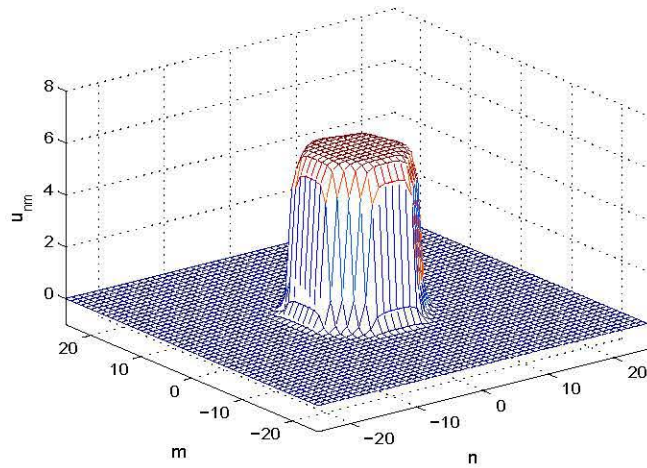


Figura 4.15: Solución estacionaria para la condición inicial dada por la Figura 4.14.

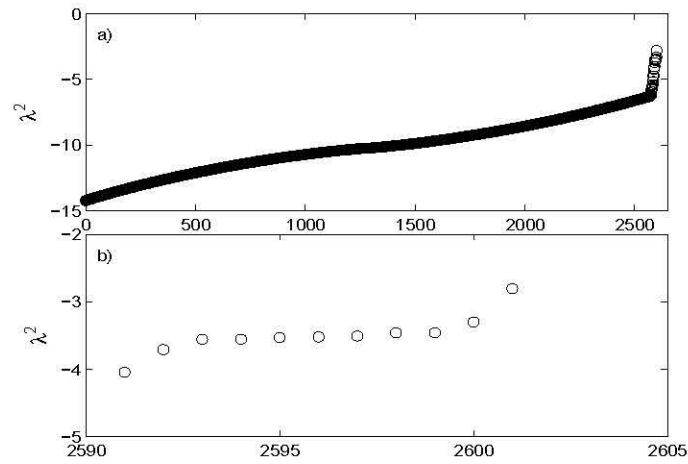


Figura 4.16: a) Valores propios λ^2 de la solución estacionaria de la Figura 4.15 y b) ventana más pequeña de a).

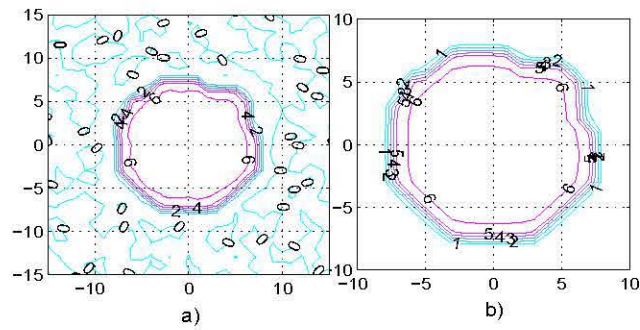


Figura 4.17: a) Líneas de nivel de la codición inicial Figura 4.14. b) Líneas de nivel de la solución estacionaria Figura 4.15.

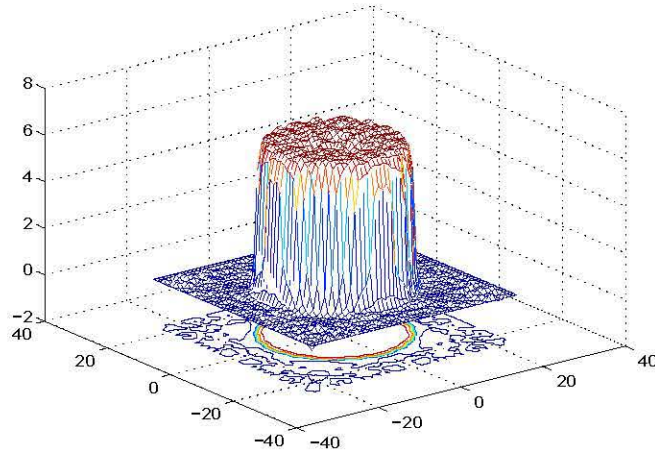


Figura 4.18: *Solución dinámica en $t = 300$ para el pulso (4.3) con $R(0) = 15,5$, $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$.*

mientras que en la Figura 4.21 se despliega la estructura poligonal con muchos lados para la solución estacionaria.

Consideramos ahora estructuras formadas por la diferencia de dos pulsos radiales distintos, esto es, estructuras en forma de anillos. Sabemos que $R = 8$ y $R = 15,5$ son radios que no colapsan entonces intentamos un anillo con estos radios y $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$ en la solución dinámica. En la Figura 4.22 tenemos la solución final al tiempo $t = 200$. Mientras que en la Figura 4.23 se muestra la correspondiente solución estacionaria. De la Figura 4.24 vemos que dicha estructura estacionaria es estable. La Figura 4.25 muestra las curvas de nivel para la condición inicial y la solución estacionaria. Observamos que los pulsos internos y externos definen estructuras poligonales. Se infiere que el pulso externo domina en la estructura, esto es porque para el pulso interno, como ya vimos, le corresponde una estructura cuadrada con pequeñas esquinas.

Todo el análisis que hasta ahora hemos realizado apunta en la dirección de que las estructuras que no colapsan en la malla bidimensional para la

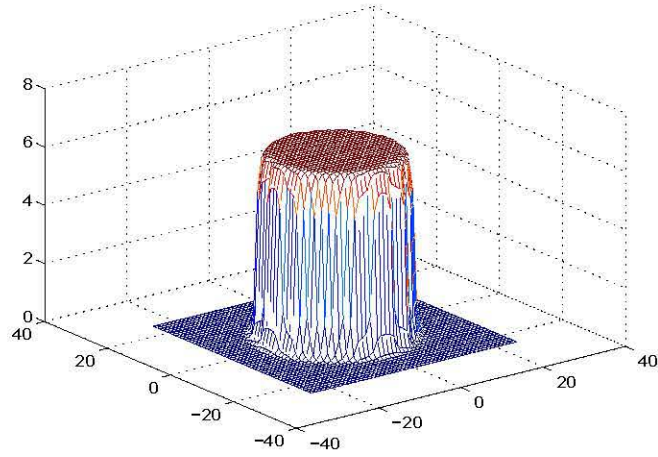


Figura 4.19: *Solución estacionaria para la condición inicial dada por la Figura 4.18.*

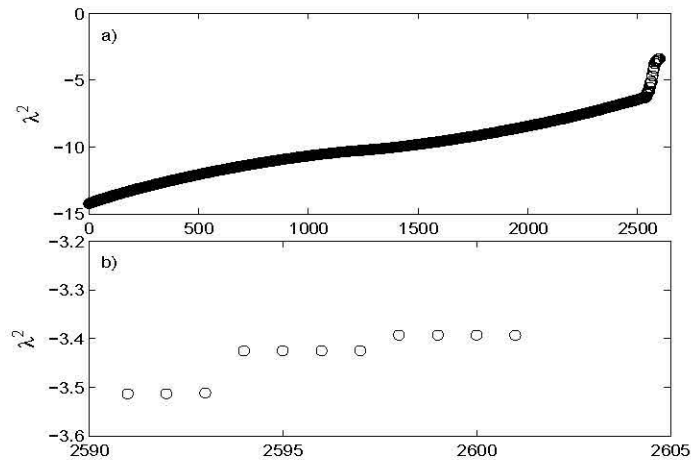


Figura 4.20: a) *Valores propios λ^2 de la solución estacionaria de la Figura 4.19* y b) *ventana más pequeña de a).*

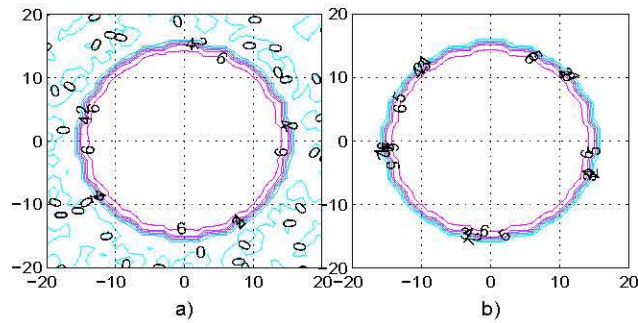


Figura 4.21: a) Líneas de nivel de la condición inicial Figura 4.18. b) Líneas de nivel de la solución estacionaria Figura 4.19.

ecuación de Sine-Gordon no son circulares sino poligonales. Por otra parte, la aproximación variacional da una buena idea de la dimensión característica del pulso que evita el colapso pero no puede tomar en cuenta los detalles finos observados en la solución numérica y su estabilidad. El estudio numérico de la estabilidad muestra que hay soluciones estacionarias tanto estables como inestables, las cuales son el análogo bidimensional de las soluciones tipo escalón (kink), del caso unidimensional, localizados en un nodo o entre dos nodos de la cadena. También, observamos que pulsos con radios grandes tienen una estructura poligonal más compleja, mientras que pulsos con radios pequeños tienen una estructura más regular. Es también claro que el mismo comportamiento estudiado en [19] está presente en las oscilaciones de la pared del escalón (kink) puesto que ahora hay muchos modos internos interactuando con su radiación a escalas de tiempo exponencialmente largas. Para entender este comportamiento refinaremos, en la siguiente sección, los resultados de la aproximación modulacional.

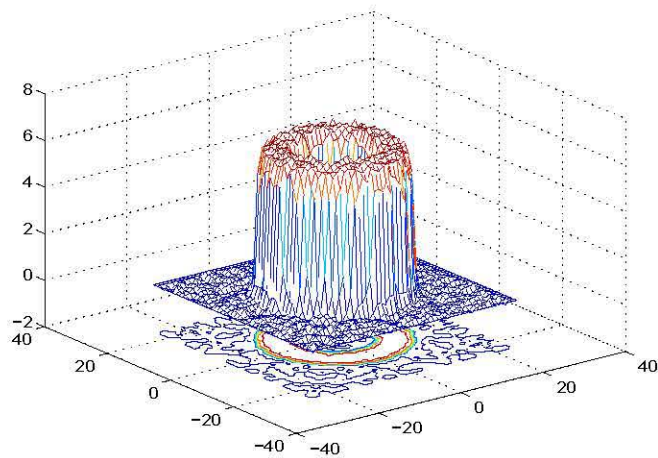


Figura 4.22: *Solución dinámica en $t = 200$ para la dona con radio externo $R(0) = 15,5$ y radio interno $R(0) = 8$ con $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$.*

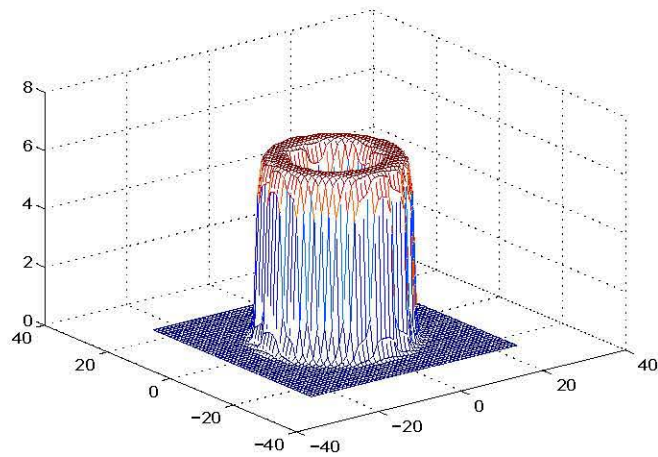


Figura 4.23: *Solución estacionaria para la dona con radio externo $R(0) = 15,5$ y radio interno $R(0) = 8$ con $\dot{R}(0) = 0$ y $d = 0,4$.*

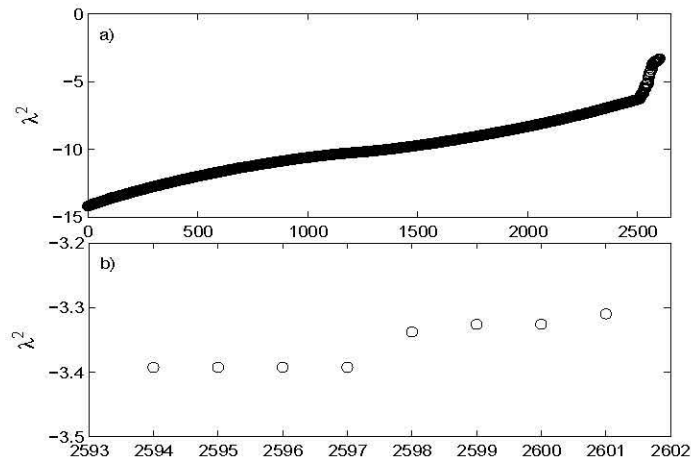


Figura 4.24: a) Valores propios λ^2 de la solución estacionaria de la Figura 4.23 y b) ventana más pequeña de a).

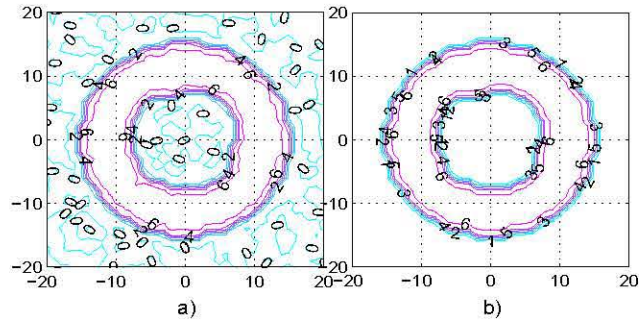


Figura 4.25: a) Líneas de nivel de la condición inicial Figura 4.22. b) Líneas de nivel de la solución estacionaria Figura 4.23.

4.4. Continuación de ramas

Los resultados asintóticos cubren un rango de d relativamente pequeño y dan el comportamiento a primer orden de estructuras estables con fronteras poligonales. Por otro lado, para valores grandes de d estas soluciones dejan de existir, como se puede ver de la Figura 4.6, puesto que no hay soluciones estacionarias en el límite continuo. En el límite anticontinuo, $d = 0$, se sabe de los resultados de Aubry [34] que cualquier estructura poligonal es posible. Es por eso que es de interés estudiar la evolución de una estructura poligonal para valores crecientes (hacia el límite continuo) y decrecientes (hacia el límite anticontinuo) del parámetro de discretización, es decir, la continuación en el parámetro de discretización, d , de soluciones estáticas. De esta manera, encontramos la rama de soluciones \mathbf{u}^{est} de $F(\mathbf{u}^{est}, d) = 0$ con F dado por la relación (4.15).

Para encontrar las ramas recordamos la idea usual de continuación, en la cual debemos de encontrar la ecuación diferencial que satisface la solución a lo largo de la rama en la siguiente forma:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}^{est}} \dot{\mathbf{u}}^{est} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0, \quad (4.20)$$

en donde el punto denota derivación respecto de d .

En el límite anticontinuo cualquier configuración de nodos que satisfaga sin $u_{nm} = 0$ es una solución posible. Un argumento de función implícita muestra que dicha solución puede ser continuada para $d \approx 0$. En estos términos si $d \approx 0$ entonces cualquier configuración va a la configuración cercana. Más aún, si la configuración para $d \approx 0$ tiene una frontera con longitud pequeña la estructura será más simétrica mientras que configuraciones con fronteras más grandes tendrán una estructura poligonal más compleja.

Para resolver (4.20) usamos el método de Euler para obtener,

$$\mathbf{u}(d + \Delta d) = \mathbf{u}^{est}(d) - A^{-1} \frac{\partial F}{\partial d} \Delta d. \quad (4.21)$$

El valor de \mathbf{u} obtenido en (4.21) es entonces usado como condición inicial en el método de Newton para resolver $F(\mathbf{u}, d + \Delta d) = 0$. Este procedimiento

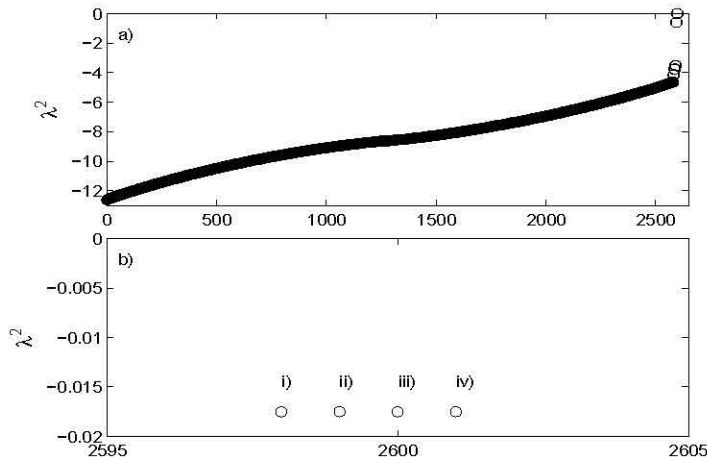


Figura 4.26: a) Valores propios λ^2 de la matriz jacobiana A , cerca del punto de retorno. b) Ventana más pequeña de a) mostrando los cuatro valores propios más cercanos a cero.

produce una única rama de soluciones hasta que el jacobiano A de F es singular. Dependiendo de la singularidad hay una bifurcación o punto de retorno en la rama obtenida.

Utilizamos este procedimiento para continuar hacia atrás (límite anticontinuo) y hacia adelante (límite continuo) la solución casi cuadrada estable estudiada en la Figura 4.11 para $d = 0,4$. Los resultados del análisis se presentan en el diagrama de bifurcación de la Figura 4.31, donde se gráfica la norma euclídeana de la solución estacionaria, \mathbf{u}^{est} , con respecto al parámetro de discretización, d . Como era de esperarse, la solución de la Figura 4.11 la podemos continuar hacia atrás hasta $d = 0$. Puesto que no hay soluciones para d grande esperamos que la continuación se detenga cuando d sea relativamente grande, de hecho la continuación se detiene en $d \approx 0,464625$. Esperamos un punto de retorno degenerado (debido a la simetría cuadrada de la malla), el cual retorna las ramas hacia atrás ya que no hay soluciones para d más grande. Debido a la simetría cuadrada de la malla bidimensional encontramos que cuatro valores propios negativos de A cruzan por cero, cerca

de $d \approx 0,464625$, al lado positivo como se muestra en la Figura 4.26 b). Así, una rama estable emerge con ramas inestables. En las Figuras 4.27 a 4.30 mostramos las cuatro funciones propias (modos internos) correspondientes a los cuatro valores propios dados en la Figura 4.26 b) que están cerca del punto de retorno en $d = 0,464625$. Notemos que dichas funciones propias controlan la posibilidad de tener mutiplicidad de soluciones en el punto de retorno. Dichos modos internos estan concentrados en las esquinas y controlan los detalles de la estructura de las soluciones en cada rama, además de su estabilidad. Para obtener las nuevas ramas de soluciones no podemos usar las ideas usuales de retorno ya que en esas ideas se supone un tipo de degeneración cuadrática.

Procedemos ahora a obtener a las nuevas ramas sumando combinaciones lineales de las funciones propias a la solución estable en el punto de retorno de la rama a), dada en la Figura 4.31, y usando dicha suma como condición inicial para el método de Newton. Así, la rama b) de la Figura 4.31 corresponde a la continuación que se obtiene de sumar el modo interno de la Figura 4.28 con la correspondiente solución estática, \mathbf{u}^{est} , en el punto de retorno. La misma rama se obtienen si se suma el modo interno de la Figura 4.29. En ambos casos un valor propio se hace positivo y permanece positivo hasta el límite anticontinuo, $d = 0$, por lo que dicha rama es inestable. Por otro lado, la rama c) corresponde a la continuación que se obtiene de sumar, en el punto de retorno, a la solución estática \mathbf{u}^{est} de la rama estable a) el modo interno de la Figura 4.27. Aquí obtenemos que dos valores propios se hacen positivos y sólo ellos permanencen positivos en la continuación de dicha rama hasta el límite anticontinuo, por lo que también corresponde a una rama inestable. La rama d) corresponde a la continuación que se obtiene de sumar a la solución estática \mathbf{u}^{est} la suma de los cuatro modos internos de las Figuras 4.27 a 4.30 en el punto de retorno. En esta rama tres de los cuatro valores propios cercanos a cero se hacen positivos y permanecen positivos en la continuación hasta $d = 0$, por lo que nuevamente dicha rama es inestable. Finalmente, la rama e) corresponde a la continuación que se obtiene de sumar a la solución estática \mathbf{u}^{est} el modo interno de la Figura 4.30 en el punto de retorno. Aquí los cuatro valores propios se hacen positivos simultáneamente y permanencen positivos

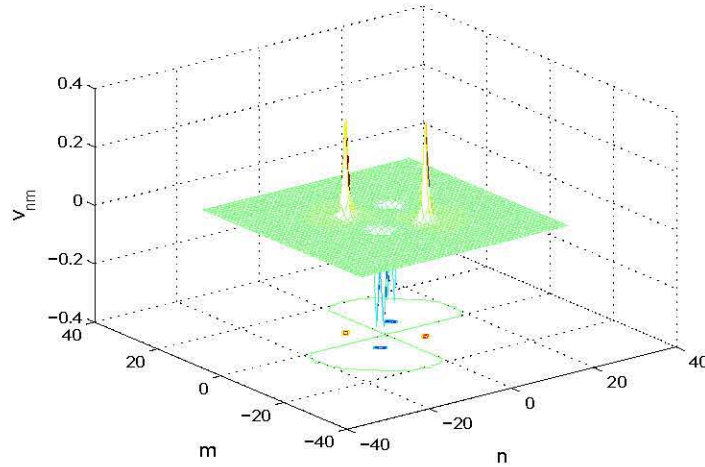


Figura 4.27: *Modo interno correspondiente al valor propio i) de la Figura 4.26 b).*

en la continuación de dicha rama hasta $d = 0$, por lo que corresponde a una rama inestable. Hacemos notar que cualquier otra combinación lineal de los cuatro modos internos retorna en alguna de las cuatro ramas inestables de la Figura 4.31. También, observamos que la única forma de continuar a la rama estable, en el punto de retorno, es usar combinaciones lineales de los modos internos.

Se pueden obtener resultados similares en la continuación de una solución estacionaria estable con un radio característico más grande, con la única diferencia de que ahora el punto de retorno se obtendrá en un valor un poco más grande de d . Por ejemplo, la continuación de la solución estable de la Figura 4.19 correspondiente a un radio de 15,5 y $d = 0,4$ presenta un punto de retorno en $d \approx 0,4937$. Es importante hacer notar que las estructuras de todas las ramas de la Figura 4.31 tienen las mismas dimensiones características, para un valor de d dado, y sólo difieren en el tamaño de las esquinas. Por otro lado, cuando se dan condiciones iniciales ligeramente diferentes en \dot{R} las soluciones dinámicas (4.3) correspondientes sólo difieren en una combinación lineal de los modos internos. Así, cuando la solución dinámica es usada como

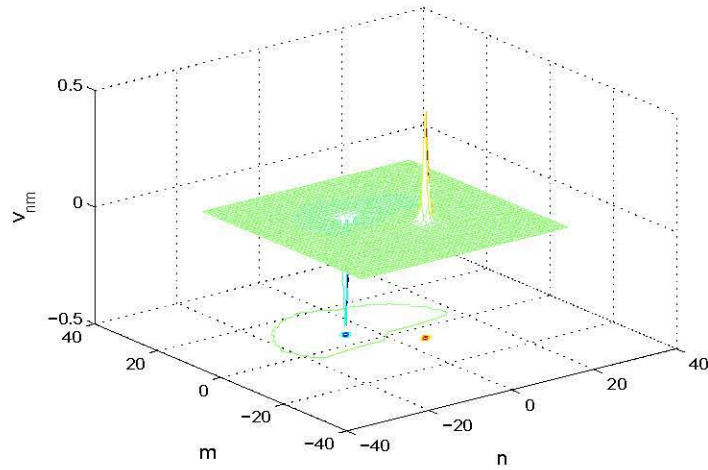


Figura 4.28: *Modo interno correspondiente al valor propio ii) de la Figura 4.26 b).*

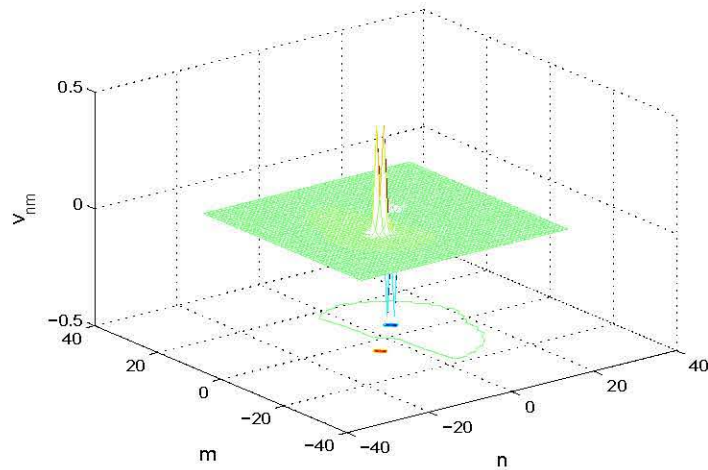


Figura 4.29: *Modo interno correspondiente al valor propio iii) de la Figura 4.26 b).*

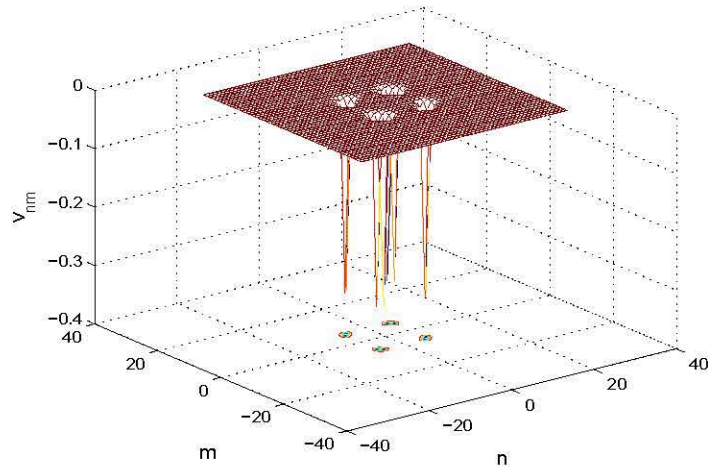


Figura 4.30: *Modo interno correspondiente al valor propio $iv)$ de la Figura 4.26 b).*

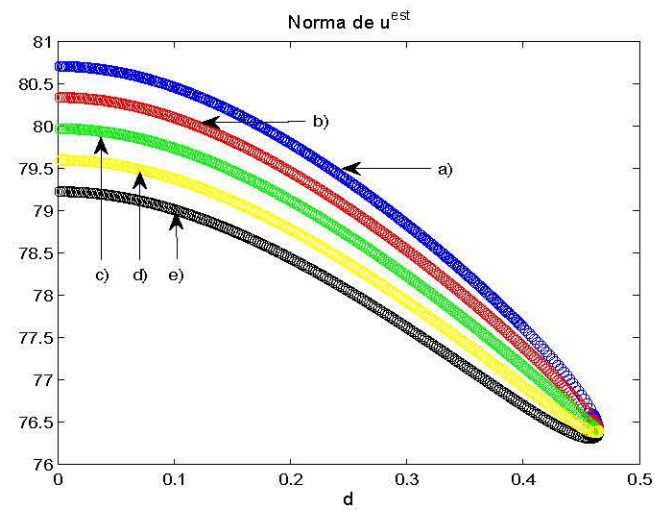


Figura 4.31: *Continuación en d para la solución estacionaria estable de la Figura 4.11. a) Rama estable. b), c), d) y e) Continuaciones inestables.*

una condición inicial para el método de Newton ésta corresponderá a una rama estable o inestable, dependiendo de la combinación lineal específica de los modos internos encontrados en la solución dinámica los cuales dependen de las condiciones iniciales y del tiempo en el que detenemos la dinámica. Estos resultados confirman las predicciones de la teoría de modulaciones (4.13), para el radio de la solución estable. Estos resultados también confirman la necesidad de refinar la teoría de modulaciones (4.13) para tomar en cuenta los detalles de la estructura poligonal que observamos en las soluciones estacionarias. Estos refinamientos se darán en la sección siguiente.

4.5. Capa límite y mapeos discretos

En el desarrollo de la aproximación modulacional de la sección 4.2, para obtener la relación (4.10), se despreciaron con la aproximación de fase estacionaria (la cual toma en cuenta el efecto promedio del ángulo) los posibles efectos angulares de orden más alto de las fronteras poligonales. Para tomar en cuenta los detalles de la contribución del ángulo seguimos una sugerencia de S. Aubry y consideramos de inicio funciones de prueba cuya capa límite este concentrada a lo largo de poligonales. En esta aproximación la estructura bidimensional de la función de prueba es vista como paredes unidimensionales atrapadas por sus potenciales unidimensionales de PN, el cual depende de la orientación de las paredes. Dichas paredes están ligadas a lo largo de la curva de menor longitud posible compatible con el potencial de atrapamiento que tiene la barrera de potencial de PN más pequeña.

Para calcular el Lagrangiano promediado consideramos un polígono cuyo lado i -ésimo esta determinado por las coordenadas (g_i, f_i) y (g_{i+1}, f_{i+1}) . De esta forma los vectores normal y tangencial unitarios al lado i -ésimo (ver Figura 4.32) quedan determinados por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} (-\Delta f_i, \Delta g_i), \quad (4.22)$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} (\Delta g_i, \Delta f_i), \quad (4.23)$$

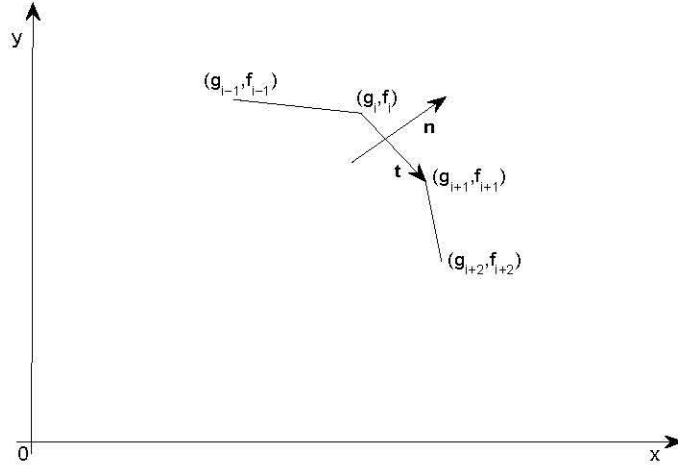


Figura 4.32: Construcción de la estructura poligonal y vectores normal y tangencial a cada lado.

con $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ y $\Delta g_i = g_{i+1} - g_i$. Así, cualquier punto \mathbf{x} en la banda generada por el i -ésimo lado del polígono queda determinado por:

$$\mathbf{x} = (x, y) = (g_i, f_i) + s\mathbf{t} + \lambda\mathbf{n}, \quad 0 \leq s \leq \sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2} \text{ y } -\infty \leq \lambda \leq \infty. \quad (4.24)$$

Suponemos ahora que el pulso tiene una estructura de capa límite dada por el escalón (kink) unidimensional en la forma:

$$u = 4 \arctan \exp\left(\frac{\lambda}{w}\right). \quad (4.25)$$

El valor $\lambda = 0$ corresponde al kink unidimensional (4.25) centrado en la capa límite. Por otro lado, aproximamos $u_{n+1,m} - u_{nm} \approx \frac{\partial}{\partial x} u(x, m) \big|_{x=n}$ y $u_{nm} - u_{n,m+1} \approx \frac{\partial}{\partial y} u(n, y) \big|_{y=m}$ para el caso estático ($w = d$) y usamos el cambio a coordenadas normales y tangenciales (4.24) para obtener,

$$(u_{n+1,m} - u_{nm})^2 + (u_{nm} - u_{n,m+1})^2 \approx u_x^2 + u_y^2 = u_\lambda^2 = 4 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda_{nm}}{d}\right), \quad (4.26)$$

donde λ_{nm} denota la dependencia de la coordenada normal en los nodos (n, m) de la malla.

De esta manera, el Lagrangiano promediado de la ecuación estática (4.14) es:

$$L = -\frac{4}{d^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\lambda_{nm}}{d} \right). \quad (4.27)$$

La serie doble anterior se suma ahora usando la fórmula de suma de Poisson (ver el primer capítulo)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{nm} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{nm}, \quad (4.28)$$

donde

$$\hat{f}_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2\pi j(n, m) \cdot (x, y)] f(x, y) dx dy, \quad (4.29)$$

es la transformada de Fourier de f_{nm} y $j = \sqrt{-1}$.

Ahora consideramos a $f(x, y)$ como el kink unidimensional, en coordenadas cartesianas, que actúa sobre cada intercara (lado i -ésimo del polígono) y usamos el cambio a coordenadas normales y tangenciales (4.24) para obtener,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{nm}^i &= \exp[-2\pi j(n g_i + m f_i)] \int_0^{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \exp \left[-2\pi j s \frac{n \Delta g_i + m \Delta f_i}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \right] ds \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-2\pi j \lambda \frac{m \Delta g_i - n \Delta f_i}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \right] \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\lambda}{d} \right) d\lambda, \end{aligned} \quad (4.30)$$

la contribución del lado i -ésimo del polígono en \hat{f}_{nm}^i . Finalmente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{nm}^i &= \frac{2\pi d^2 (m \Delta g_i - n \Delta f_i) \sin[\pi(n \Delta g_i + m \Delta f_i)]}{(n \Delta g_i + m \Delta f_i) \sinh \left[\frac{\pi^2 d (m \Delta g_i - n \Delta f_i)}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \right]} \\ &\quad \cos[\pi(n(\Delta g_i + 2g_i) + m(\Delta f_i + 2f_i))]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

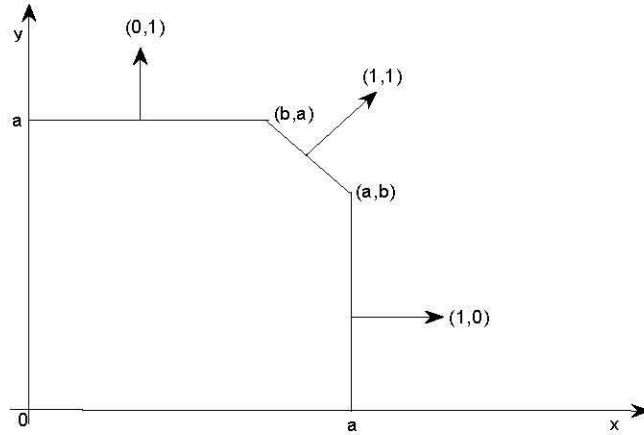


Figura 4.33: Configuración cuadrada, en el primer cuadrante, con una pequeña diagonal en la esquina. Direcciones de mayor contribución para cada lado de la configuración.

El Lagrangiano promediado toma así la forma siguiente:

$$L = \frac{8}{d} \sum_i \left\{ \sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2} + \sum_{|n|, |m| \neq 0} \hat{f}_{nm}^i \right\}. \quad (4.32)$$

El primer término de (4.32) es la contribución de la longitud del polígono. El segundo término es el potencial que siente cada lado del polígono y que depende de la orientación en la malla de dicho lado. De hecho, el lado i -ésimo está sujeto, dependiendo de su normal, a la atracción o repulsión de todos los canales posibles, los cuales están orientados en la dirección (n, m) , formados por el potencial de PN.

El Lagrangiano (4.32) tiene la forma general de los Lagrangianos para sistemas de mapeos discretos cuyas ecuaciones variacionales dan la configuración de los lados. De esta manera, esperamos obtener las características típicas de la iteración de mapeos discretos. Esto es, estructuras multiescalas para los lados causadas por el efecto, en todas las direcciones (n, m) posibles,

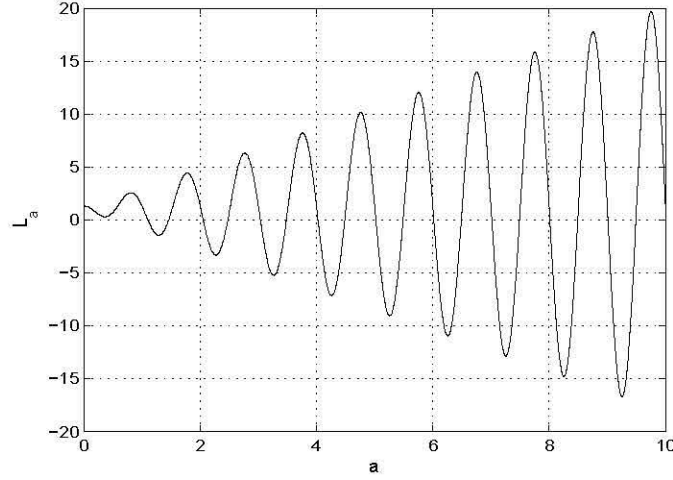


Figura 4.34: Gráfica de (4.35) para $d = 0,4$. La recta horizontal es el lado izquierdo y la curva es el lado derecho de dicha ecuación.

del potencial de PN. Además, la aparición de estructuras más complejas en la organización de los lados (asociadas con los mapeos a aproximaciones de orbitas caóticas con periodo grande) para cuando el número de lados aumenta, lo cual se ha visto ocurre en la transición de fase.

Comenzamos considerando ahora el caso más simple posible, el cual toma en cuenta sólo los canales de PN ($n = 0, m = 0$), ($n = \pm 1, m = 0$), ($n = 0, m = \pm 1$), ($n = 1, m = 1$) y ($n = -1, m = -1$), para obtener:

$$L = -\frac{8}{d} \sum_i \left[\begin{aligned} & \sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2} + \frac{2\pi d \Delta f_i \sin(\pi \Delta g_i)}{\Delta g_i \sinh \left[\frac{\pi^2 d \Delta f_i}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \right]} \cos [\pi (g_{i+1} + g_i)] + \\ & \frac{2\pi d \Delta g_i \sin(\pi \Delta f_i)}{\Delta f_i \sinh \left[\frac{\pi^2 d \Delta g_i}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \right]} \cos [\pi (f_{i+1} + f_i)] + \\ & \frac{2\pi d (\Delta g_i - \Delta f_i) \sin[\pi (\Delta g_i + \Delta f_i)]}{(\Delta g_i + \Delta f_i) \sinh \left[\frac{\pi^2 d (\Delta g_i - \Delta f_i)}{\sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2}} \right]} \cos [\pi (g_{i+1} + g_i + f_{i+1} + f_i)] \end{aligned} \right], \quad (4.33)$$

donde la suma se extiende sobre todos los lados del polígono. Observamos

que los términos periodicos de PN que aparecen en (4.33) son lo mayor posible para cuando la normal al lado i -ésimo es paralela a los vectores $(1, 0)$, $(1, 1)$ o $(0, 1)$. En principio, con estas direcciones podemos obtener estructuras poligonales.

En el caso simple de una estructura cuadrada con diagonales pequeñas en las esquinas. Tomamos (en el primer cuadrante) $f_1 = a$, $f_2 = a$, $f_3 = b$, $f_4 = 0$ y $g_1 = 0$, $g_2 = b$, $g_3 = a$, $g_4 = a$ con $0 < b < a$, ver Figura 4.33. Ahora reemplazamos dichas coordenadas en el Lagrangiano promediado (4.33) para obtener:

$$L = -\frac{8}{d} \left[2b + \sqrt{2}(a - b) + \frac{4\pi^2 db}{\sinh(\pi^2 d)} \cos 2\pi a + \frac{4\pi^2 d(a - b)}{\sinh(\sqrt{2}\pi^2 d)} \cos 2\pi(a + b) \right], \quad (4.34)$$

donde hemos considerado los potenciales de PN más grandes, esto es, aquellos que actúan paralelos a la normal de cada lado de la estructura cuadrada con esquinas (ver Figura 4.33).

El Lagrangiano (4.34) es muy interesante pues en el caso particular $b = a$, el cual corresponde a una configuración cuadrada con sus lados paralelos a los ejes coordenados, la ecuación de Euler-Lagrange, $L_a = 0$, del Lagrangiano (4.34) conduce a la siguiente expresión:

$$L_a = 2 + \frac{4\pi^2 d}{\sinh(\pi^2 d)} [\cos(2\pi a) - 2\pi a \sin(2\pi a)] = 0, \quad (4.35)$$

cuyas soluciones se muestran en la Figura 4.34. Dicha Figura muestra como se organizan las ramas de soluciones cuadradas (que son una primer aproximación a la Figura 4.11, ya que no estamos considerando, en esta primer aproximación, la pequeña esquina a 45° que se forma en la solución numérica, ver Figura 4.13 b)).

De la Figura 4.34 observamos que hay dos soluciones que estan aparejadas, las cuales corresponden a una solución estable y otra inestable. Estas ramas, como ya vimos en la sección anterior, se conectan en el punto de retorno. Cuantitativamente la longitud del lado obtenida para $d = 0,4$ de (4.35) es $a \approx 6,491$ y numéricamente de la Figura 4.13 b) vemos que la línea de nivel

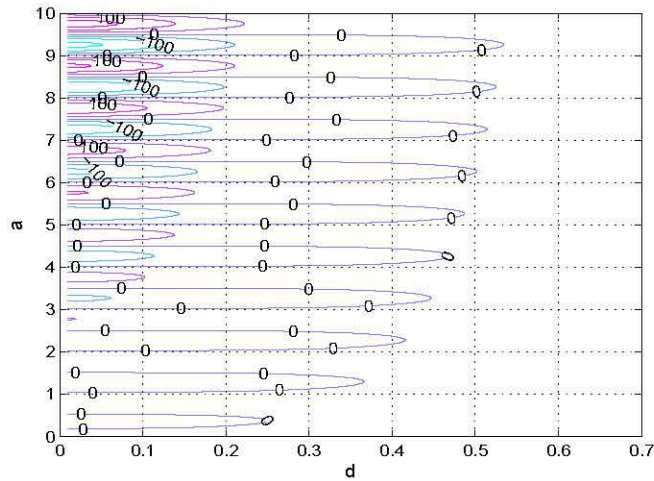


Figura 4.35: *Curvas de nivel para el lado izquierdo de la relación (4.36).*

π , la cual corresponde a la línea de nivel en el punto de inflexión de la función de prueba, es $a \approx 6,525$. Por lo que tenemos una comparación aceptable entre la aproximación modulacional y la solución numérica del problema completo.

Por otro lado, el caso $b = 0$ corresponde a una configuración cuadrada con sus vértices en los ejes coordenados. Para este caso el Lagrangiano (4.34) conduce a la ecuación variacional:

$$\sqrt{2} + \frac{4\pi^2 d}{\sinh(\sqrt{2}\pi^2 d)} [\cos(2\pi a) - 2\pi a \sin(2\pi a)] = 0. \quad (4.36)$$

Las soluciones de la relación anterior corresponden a las curvas de nivel cero de la Figura 4.35. De esta Figura se puede ver también como quedan organizadas las ramas de la Figura 4.31. Observamos que hay nuevamente dos ramas, las cuales corresponden a la rama estable y a una de las cuatro ramas inestables de la Figura 4.31. También de la Figura 4.35 notamos que para el valor característico de a , el cual es aproximadamente 6,525, hay soluciones para $d \lesssim 0,5$ lo cual correlaciona con el punto de retorno $d \approx 0,464625$ encontrado en la sección anterior.

En el caso general, cuadrado con diagonales en las esquinas, tenemos

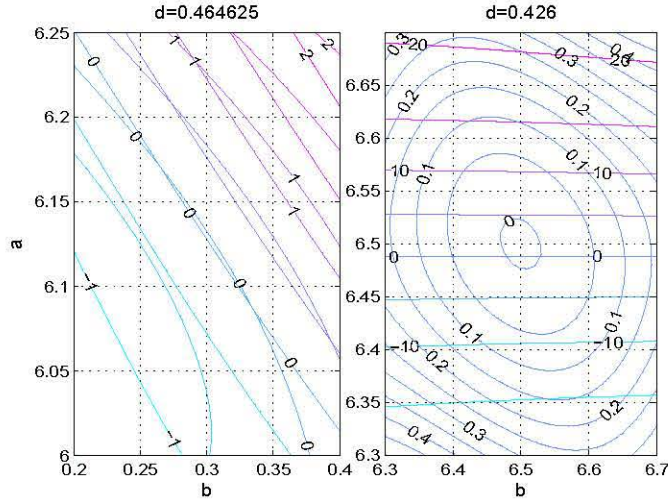


Figura 4.36: Intersección de las curvas de nivel de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.37) y (4.38).

las ecuaciones de Euler-Lagrange ($L_a = 0$ y $L_b = 0$) que se obtienen del Lagrangiano (4.34),

$$0 = \sqrt{2} - \frac{8\pi^3 d}{\sinh(\pi^2 d)} b \sin(2\pi a) + \frac{4\pi^2 d}{\sinh(\sqrt{2}\pi^2 d)} [\cos 2\pi(a+b) - 2\pi(a-b) \sin 2\pi(a+b)], \quad (4.37)$$

$$0 = 2 - \sqrt{2} + \frac{4\pi^2 d}{\sinh(\pi^2 d)} \cos(2\pi a) - \frac{4\pi^2 d}{\sinh(\sqrt{2}\pi^2 d)} [\cos 2\pi(a+b) + 2\pi(a-b) \sin 2\pi(a+b)]. \quad (4.38)$$

Las ecuaciones (4.37) y (4.38) son dos ecuaciones no lineales y acopladas que son muy sensibles a los valores de a y b . En la Figura 4.36 se muestra la intersección de las curvas de nivel de las ecuaciones de Euler-Lagrange L_a y L_b en las dos regiones de interés, cerca de $b = a$ y $b = 0$. Se observa que esta

por ocurrir una bifurcación de soluciones para los valores de d mostrados en la Figura 4.36.

En el caso general del Lagrangiano (4.33) se deben de obtener ecuaciones variacionales para cada f_i y g_i que definen la estructura poligonal. Este caso general es complicado dada la estructura de las ecuaciones variacionales. Sin embargo, tiene la ventaja que sus soluciones involucran a funciones de un sólo índice, lo cual sugiere relacionar estas soluciones con orbitas de mapeos discretos. Por lo que el análisis de dichas ecuaciones variacionales será el propósito de estudios posteriores.

Conclusiones

Hemos estudiado problemas no lineales discretos en una y dos dimensiones espaciales. En el caso de una dimensión espacial estudiamos la cadena de Toda y la cadena de Sine-Gordon (ecuación discreta de Sine-Gordon). Es importante notar que en la cadena de Toda estudiamos solitones supersónicos, los cuales no se habían estudiado antes con la teoría de modulaciones. En la cadena de Toda estudiamos el problema de ajuste de una condición inicial a un solitón exacto y el problema de una cadena con impureza en las masas. Para ambos problemas desarrollamos su solución numérica completa. En el caso del ajuste al solitón exacto encontramos numéricamente que la condición inicial desarrolla un transitorio inicial e inmediatamente se ajusta al solitón exacto emitiendo radiación lineal que queda confinada entre las rectas características (triángulo de radiación) del problema linearizado. Para el problema inhomogéneo con una variación lenta de las masas, como función del nodo, observamos que el solitón inicial, el cual es exacto, empieza a desacelerarse radiando energía (la cual sólo es lineal para variaciones lentas en las masas) cuando siente la variación en las masas y se transmite sobre ellas. Si la variación es menos lenta se puede obtener un solitón reflejado y uno transmitido, lo cual es difícil de estudiar. Para ambos problemas desarrollamos una solución aproximada, basada en el Lagrangiano promediado, que incluye la pérdida por radiación y encontramos que comparan bastante bien con la solución numérica correspondiente. Terminamos señalando que al no depender la teoría de modulaciones de la integrabilidad del problema sus predicciones indican que el comportamiento observado es genérico para modelos integrables tipo Toda.

En la cadena de Sine-Gordon desarrollamos una solución modulacional que incluye la pérdida por radiación para el movimiento de un escalón de Sine-Gordon continuo en una cadena discreta. Mostramos que, a diferencia del modelo continuo, no es posible obtener soluciones tipo escalón para velocidades $\dot{\xi} > \dot{\xi}_c = 0,7064$. Esto explica porque escalones iniciales rápidos radian una gran cantidad de energía para ajustarse a escalones viajeros con velocidades más pequeñas. Para velocidades más pequeñas la dinámica del escalón puede ser estudiada más exactamente usando la evolución de los dos modos internos. El efecto del modo impar es capturado (como en el caso continuo) en la modulación del ancho del escalón, w , y la radiación de onda larga. El efecto del modo de Goldstone es tomado en cuenta explícitamente. El efecto del modo discreto de Goldstone es de una importancia crucial puesto que el escalón viaja bricando entre un estado estable y uno inestable, en el mínimo y el máximo del potencial de Peierls-Nabarro. Como el modo interno crece u oscila, la forma del escalón desarrolla una asimetría angosta. De hecho esta asimetría es responsable de la modificación del potencial de PN, el cual incrementa su valor debido a la contribución a pequeña escala. Esto motiva a la oscilación de la velocidad y la radiación resonante.

El mecanismo de radiación descubierto por Peyrard y Kruskal [19] se incorporó en detalle en la solución modulacional para obtener el término de amortiguamiento, el cual no fue calculado en los estudios previos [27], [23], [25], [30]. Esto fue calculado resolviendo aproximadamente un problema de señal apropiado para la ecuación lineal discreta, usando un análogo discreto de la superposición de soluciones tipo WKB. Con estos mecanismos simples explicamos cuantitativamente en detalle la dinámica del escalón antes de que alcance el equilibrio. También, observamos que la ecuación para la posición, ξ , del escalón (kink) cuando éste es fijo son análogas a las estudiadas por Kevrekidis y Weinstein. Sin embargo, las interacciones a orden más alto que despreciamos entre el escalón, los modos internos y la radiación en la dinámica son importantes en este régimen. Las ecuaciones para la transición entre el escalón móvil estudiado en este trabajo y el escalón estático estudiado en [27] necesita ser desarrollado para capturar la transición entre los diferentes comportamientos de la radiación. Esta pregunta delicada necesita ser estu-

diada en un trabajo posterior. En particular, como incorporar las pequeñas rodillas de las Figuras 3.2 y 3.5 requerirá de un análisis más preciso de la radiación. Notamos como la solución modulacional explica en términos simples el mecanismo que acopla al escalón con los modos internos y la radiación. Esta aproximación da una un método simple y aproximado que puede ser usado en otras situaciones que involucren la propagación de escalones en cadenas.

Finalmente, en el caso bidimensional estudiamos la ecuación de Sine-Gordon en una malla discreta. Aquí mostramos usando una aproximación modulacional que la ecuación discreta soporta soluciones tipo pulso que no colapsan, lo cual esta en contraste con la versión continua [32], [33]. Dicha aproximación modulacional recobra la aproximación del caso continuo, además de que da una idea cuantitativa del tamaño de los pulsos que no colapsan. Por otro lado, encontramos la continuación desde el límite anticontinuo de soluciones estables, las cuales no colapsan, como función del parámetro de discretización d y encontramos una bifurcación en cuatro ramas inestables en un valor máximo de d . Por lo que encontramos los valores posibles del parámetro de discretización que dan soluciones que no colapsan, para un pulso con un tamaño dado. De este análisis encontramos que los pulsos que no colapsan tiene una configuración poligonal, viendo sus curvas de nivel. Para explicar la estructura poligonal de los pulsos estables desarrollamos una aproximación modulacional para las coordenadas del polígono, lo cual da lugar a un mapeo discreto. Estudiamos algunos casos específicos para ejemplificar dicho mapeo, ya que el caso general es complicado. Sin embargo, en los casos particulares que estudiamos encontramos una correspondencia muy buena con la solución numérica respectiva. El estudio del mapeo general será el propósito de estudios posteriores.

Es de notarse que la simetría de los resultados obtenidos depende de que la malla sea cuadrada. Sin embargo, otros problemas requieren otro tipo de mallas, por ejemplo, triangular o hexagonal. Esperamos entonces que el punto de retorno no tenga cuatro ramas, como en la Figura 4.31, sino seis o tres, respectivamente. Por otro lado, las ideas desarrolladas en este trabajo para obtener la continuación de ramas desde el límite anticontinuo hasta un valor máximo d podrían ser aplicables a otros problemas de cadenas. Por ejemplo,

en [35], [36] y [37] han estudiado cierto tipo de soluciones para la ecuación discreta NLS en el límite anticontinuo, y han obtenido que dichas soluciones de pueden extender un poco más allá del límite anticontinuo. Sin embargo, no han desarrollado el problema de continuación en forma completa. Finalmente, también comentamos que estas ideas pueden aplicarse a problemas cuya parte líneal esta asociada a un Laplaciano que viene de una gráfica más general.

Apéndice

I. Cálculo de series para la cadena de Toda

A primer aproximación, es decir considerando el primer modo, la fórmula de suma de Poisson (1.14) da:

$$\begin{aligned}
 g_1(k, \xi) &= \frac{k^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tanh(k(n-\xi)) - \tanh(k(n-1-\xi)))^2 \\
 &= 2k^2 \coth k - k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(k(n-\xi)) \\
 &= 2k^2 \coth k - 2k - 4\pi^2 \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(k, \xi) &= -k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-\xi) (\tanh(k(n-\xi)) - \tanh(k(n-1-\xi)))^2 + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1 + \tanh(k(n-1-\xi))) (\tanh(k(n-\xi)) - \tanh(k(n-1-\xi))) \right] \\
 &= 2k + 2k \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-\xi) \operatorname{sech}^2(k(n-\xi)) + \\
 &\quad 2k \coth k \left(1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-\xi) (\tanh(k(n-\xi)) - \tanh(k(n-1-\xi))) \right) \\
 &= 2k + 4\pi \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \sin(2\pi\xi) \left(\frac{1}{k} - \coth k - \frac{\pi^2}{k^2} \coth \frac{\pi^2}{k} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3(k, \xi) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \xi)^2 (\tanh(k(n - \xi)) - \tanh(k(n - 1 - \xi)))^2 + \\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \xi) (-1 + \tanh(k(n - 1 - \xi))) (\tanh(k(n - \xi)) - \tanh(k(n - 1 - \xi))) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=\xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t}^{\infty} (-1 + \tanh(k(n - 1 - \xi)))^2 \\
&= \coth k \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \xi)^2 (\tanh(k(n - \xi)) - \tanh(k(n - 1 - \xi))) \\
&- \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \xi)^2 \operatorname{sech}^2(k(n - \xi)) \\
&- (1 + \coth k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \xi) (\tanh(k(n - \xi)) - \tanh(k(n - 1 - \xi))) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(k(n - \xi)) + \frac{1}{2} \sum_{n=\xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t}^{\infty} (-1 + \tanh(k(n - 1 - \xi)))^2.
\end{aligned}$$

Ahora notamos que la serie $\sum_{n=\xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t}^{\infty} (-1 + \tanh(k(n - 1 - \xi)))^2$ se ha calculado a partir de la característica $\xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t$ debido a que la función de prueba para el problema de la cadena de Toda es válida en este régimen. El resto de las series si se calculan de $-\infty$ a ∞ pues básicamente suman lo mismo que de $\xi_0 + \sqrt{\frac{ab}{m}}t$ a ∞ . Así, el resto de las sumas da:

$$\begin{aligned}
g_3(k, \xi, t) = & -1 + \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{6k^3} + \coth k \left(\frac{\pi^2}{6k^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2\pi^2}{k^2} \coth k \coth \frac{\pi^2}{k} \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi) \\
& + \frac{\pi^2}{2k^4} \operatorname{csch}^3 \frac{\pi^2}{k} \left(3\pi^2 + \pi^2 \cosh \frac{2k^2}{k} - 2k \sinh \frac{2\pi^2}{k} \right) \cos(2\pi\xi) + \frac{2\pi^2}{k^2} \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi) \\
& + \frac{2\pi}{k} \coth k \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \sin(2\pi\xi) - \frac{2\pi}{k} (1 + \coth k) \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \sin(2\pi\xi) \\
& + \frac{1}{2k} \left[-1 + \ln 4 + 4k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) - \tanh \left(k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - 2 \ln \left(1 + \tanh \left(k \left(\xi - \xi_0 + 1,5 - \sqrt{\frac{ab}{m}t} \right) \right) \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(k, \xi) &= -\frac{2ab}{m}k + \frac{ab}{m} \sinh^2 k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(k(n-\xi)) \\
&= \frac{2ab}{m} \left(\frac{\sinh^2 k}{k} - k \right) + \frac{4ab}{m} \frac{\pi^2}{k^2} \sinh^2 k \operatorname{csch} \frac{\pi^2}{k} \cos(2\pi\xi).
\end{aligned}$$

II. Cálculo de series para la cadena de Sine-Gordon

A primer aproximación, es decir considerando el primer modo, la fórmula de suma de Poisson (1.14) da:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) &= 2w + \frac{4\pi^2 w^2}{\sinh(\pi^2 w)} \cos(2\pi\xi), \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n-\xi}{w} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \\
&= \frac{\pi^2 w}{6} - \frac{\pi^4 w^2 \cos(2\pi\xi)}{2 \sinh^3(\pi^2 w)} \left(3 + \cosh(2\pi^2 w) - \frac{2}{w\pi^2} \sinh(2\pi^2 w) \right),
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan^2 \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} + \frac{1}{2w} \right) \right) = \frac{3,5 + 15w}{1,4 + 6w + 30w^2}$$

$$+ 2w \cos(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \arctan^2 \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(x + \frac{1}{2w} \right) \right) \cos(2\pi x) dx.$$

El primer término de la última suma se obtiene al interpolar los valores de la correspondiente integración numérica para valores típicos de w (los cuales están entre 0 y 1,2), la cual no puede ser calculada en forma cerrada. El resto de los términos como ya se sabe son a lo más del orden de $O(e^{-2\pi^2 w})$.

De la función de prueba (3.45) se obtiene

$$y_n - y_{n+1} = 4 \arctan \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} + \frac{1}{2w} \right) \right) + \frac{2A \sinh \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right)}{1 + \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right)},$$

$$\dot{y}_n = \frac{2}{w^2} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \left(\dot{\xi} w + \dot{w} (n-\xi) \right) + \dot{A} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) + \frac{A}{\lambda^2} \left(\dot{\xi} \lambda + \dot{\lambda} (n-\xi) \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right),$$

$$1 - \cos y_n \approx 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) + 2A \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{w} \right) + \frac{A^2}{2} \left(\operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) - 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \right) - \frac{A^3}{3} \operatorname{sech}^3 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{w} \right) - \frac{A^4}{24} \left(\operatorname{sech}^4 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) - 2 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \right),$$

en donde la última expresión a sido desarrollada en serie de Taylor como función de A , alrededor de $A = 0$.

Sustituyendo las expresiones anteriores en el Lagrangiano (3.2) y despreciando el producto cruzado de derivadas (por ejemplo: $\xi\dot{w}, \dots$) debido a que son términos muy pequeños, encontramos que el Lagrangiano promediado es,

$$L = L_K + L_A + L_{int}.$$

donde

$$L_K = \frac{2}{w^2} \left(\xi^2 - \frac{w^2}{d^2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) + \frac{2\dot{w}^2}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n-\xi}{w} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) - 8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan^2 \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} + \frac{1}{2w} \right) \right),$$

$$L_A = \frac{A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) + \frac{\lambda A^2}{2\lambda^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) + \frac{\xi A^2}{2\lambda^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) - A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right) \tanh^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right)}{\left(1 + \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right) \right)^2} - \frac{A^2}{2d^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \right) + \frac{A^4}{24d^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \right),$$

y

$$\begin{aligned}
L_{int} &= \frac{2A\xi}{\lambda w} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \\
&- \frac{2A}{d^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \\
&- A \sum_{n=-\infty}^{\infty} 8 \arctan \left(\sinh \frac{1}{2w} \operatorname{sech} \left(\frac{n+1/2-\xi}{w} \right) \right) \frac{\sinh \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech} \left(\frac{n+1/2-\xi}{\lambda} \right) \tanh \left(\frac{n+1/2-\xi}{\lambda} \right)}{1 + \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n+1/2-\xi}{\lambda} \right)} \\
&+ \frac{A^3}{3d^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{w} \right).
\end{aligned}$$

Las sumas que aparecen en estos Lagrangianos son evaluadas con la fórmula de Poisson, y a primer orden obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \\
&= 2 \sin(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \frac{x}{w} \operatorname{sech} \frac{x}{\lambda} \tanh \frac{x}{\lambda} \sin(2\pi x) dx = 2 \sin(2\pi\xi) V(w, \lambda), \\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \tanh \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \\
&= 2 \sin(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3 \frac{x}{\lambda} \operatorname{sech} \frac{x}{w} \tanh \frac{x}{w} \sin(2\pi x) dx = 2 \sin(2\pi\xi) S(w, \lambda), \\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) = \frac{2\lambda}{3} + \frac{\lambda^2(1-2\pi^2\lambda^2)}{6 \sinh(\pi^2\lambda)} \cos(2\pi\xi), \\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \tanh^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \\
&= \lambda \frac{12 + \pi^2}{18} + 2\lambda \cos(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \operatorname{sech}^2 x \tanh^2 x \cos(2\pi x \lambda) dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right) \tanh^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right)}{\left(1 + \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right) \right)^2} = 2\lambda - \frac{2}{\sinh \frac{1}{\lambda}} \\
& - 4\lambda \cos(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 x \tanh^2 x \cos(2\pi\lambda x)}{\left(1 + \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 x \right)^2} dx \\
= & 2\lambda - \frac{2}{\sinh \frac{1}{\lambda}} - 4\lambda I_1(\lambda) \cos(2\pi\xi),
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) = \frac{4}{3}\lambda + \frac{8\pi^2\lambda^2(1+\pi^2\lambda^2)}{3\sinh(\pi^2\lambda)} \cos(2\pi\xi),$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \\
= & \frac{2,75\lambda w}{1,1w + \lambda} - 2 \cos(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{\lambda} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{w} \cos(2\pi x) dx \\
= & \frac{2,75\lambda w}{1,1w + \lambda} - 2I_2(\lambda, w) \cos(2\pi\xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{n-\xi}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-\xi}{w} \right) \\
= & 1,066w^{0,2}\lambda^{0,8} + 2 \cos(2\pi\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \frac{x}{\lambda} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{w} \cos(2\pi x) dx \\
= & 1,066w^{0,2}\lambda^{0,8} + 2I_3(\lambda, w) \cos(2\pi\xi).
\end{aligned}$$

El primer término de las dos sumas anteriores es obtenido interpolando los datos numéricos de la correspondiente integral numérica.

Bibliografía

- [1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240.
- [2] Y. Frenkel and T. Kontorova, Zh. Eksp. Teor. Phys. 8 (1938) 89, 1340; J. Phys. (Moscow) 1 (1939) 137.
- [3] O. M. Braun and Y. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova Model, Concepts, Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin-Hilderberg New York, 2004.
- [4] Toda, M., *Nonlinear waves and solitons*, Series: Mathematics and its applications (Japanese series), KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1989.
- [5] Toda, M., *Theory of nonlinear lattices*, 2nd. Edition, Springer series in solid-states science; 20, Springer-Verlag, Berlin-Hilderberg, 1989.
- [6] Ryogo Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Newell, Alan C. *Solitons in Mathematics and Physics*. Philadelphia, Pennsylvania: Society for industrial and applied mathematics, 1985.
- [8] M. J. Ablowitz, B. Prinari and A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, Cambridge University Press, 2004.
- [9] Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. A Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts, 1999.
- [10] Dym, H. and McKean, H. P. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press Inc., London LTD, 1972.

- [11] Gaetano Vilasi. *Hamiltonian Dynamics*. World Scientific publishing Co. Pte. Ltd.
- [12] Grant R. Fowles. *Analytical Mechanics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.
- [13] Minzoni, A.A. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **Vol. 3**, 1-49, 1997.
- [14] Bleistei, Norman and Richard A. Handelsman *Asymptotic expansions of integrals*, Holt, Rinehart and Winston.
- [15] S. Watanabe and M. Toda. J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 3443.
- [16] S. Watanabe and M. Toda. J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 3436.
- [17] A. Nakamura. Prog. Theor. Phys. **59** (1978) 1447.
- [18] A. Nakamura. Prog. Theor. Phys. **61** (1979) 427.
- [19] M. Peyrard and M. Kruskal, Physica 14D, 88 (1984).
- [20] N. F. Smyth and A. L. Worthy, Phys. Rev. E 60, 2330 (1999).
- [21] Drazin, P. G. and Johnson, J. S., *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, New York, 1989.
- [22] J. F. Currie, S. E. Trullinger, A. R. Bishop and J. A. Krumhansl, Phys. Rev. B15 (1977) 5567.
- [23] Y. Ishimori and T. Munakata, J. Phys. Soc. Japan 51 (1982) 3367.
- [24] L. A. Cisneros and A. A. Minzoni, Physica D, to appear.
- [25] R. Boesch. C. R. Willis, and M. El-Batanouny, Phys. Rev. B 40, 2284 (1989).
- [26] R. Boesch and C. R. Willis, Phys. Rev. B 39, 361 (1989).
- [27] P. G. Kevrekidis and M. I. Weinstein, Physica D 142, 113 (2000).

- [28] S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakarov. *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Transform*. Consultants Bureau, New York, 1984.
- [29] Simmonds, J. G. and Mann, J. E., *A First Look At Perturbation Theory*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1986.
- [30] O. M. Braun and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. B 43, 1060 (1991).
- [31] P. G. Kevrekidks, C. K. R. T. Jones and T. Kapitula, Phys. Lett. A 269, 120-129 (2000).
- [32] J. C. Neu, Physica D 43 (1990) 421.
- [33] A. A. Minzoni, Noel F. Smyth and Annette L. Worthy, Physica D 159 (2001) 101-123.
- [34] Aubry S. and Abramovici G., Physica D 43 (1990) 199.
- [35] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskakis, Physica D 212 (2005) 20-53.
- [36] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskakis, Physica D 212 (2005) 1-19.
- [37] Panayotis Panayotaros and D. E. Pelinovsky. *Periodic oscillations of discrete NLS solitons in the presence of diffraction management*. Borrador.
- [38] Michal Feckan and Vassilis M. Rothos, Nonlinearity, 2007.
- [39] Imran A. Butt and Jonathan A. D. Wattis, J. Phys. A: Math. Gen., 2006.



**MEMORIA DESCRIPTIVA
DEL PROYECTO**

MEMORIA DESCRIPTIVA

La necesidad indispensable de contar con servicios de atención pública y emergencias en una comunidad, además de representar seguridad y tranquilidad para la misma, forma parte de toda la gama de servicios públicos de la cual el Gobierno tiene la obligación de brindar, para lograr así el bienestar general de una sociedad.

El proyecto presente, esta basado en la idea general obtenida del estudio metodológico realizado a Edificios destinados a brindar el servicio de Bomberos y Protección Civil en México, así como en información obtenida en libros y paginas de Internet.

Formalmente el proyecto se realizó de tal manera que no se rompiera con el entorno Urbano y Natural, tomando en cuenta las condicionantes del reglamento Municipal de Imagen Urbana, así como los materiales utilizados en la región. Se intento al máximo no alterar el paisaje natural, integrando las formas y volúmenes al mismo, logrando que el edificio se vuelva parte y no ajeno.

Funcionalmente el proyecto se resolvió en 5 áreas principales :

- 1.- Zona Administrativa
- 2.- Zona de Empleados
- 3.- Zona de Entrenamiento
- 4.- Zona de Salidas a Emergencias
- 5.- Áreas verdes y Andadores

Todas las Áreas fueron analizadas y comparadas con los Modelos Análogos, incorporando espacios que mejoran el funcionamiento y confort de la Estación de Bomberos; Dentro del Edificio, además de anteriormente dicho, se tomo como eje principal el dejar salidas a través de pasillos y tubos de emergencia lo mas directamente posible hacia las salidas de Servicio de Emergencias.

La **Zona Administrativa**, ubicada en la Planta Baja, comprende el acceso por la fachada principal del edificio, en el cual se llega a un vestíbulo, donde se encuentra un recibidor a través del cual se controlan las visitas y el personal, además de estar integrado a la Sala de Control, la Oficina del Comandante, la del Sub comandante, Sala de Juntas, Protección Civil, Consultorio y Sanitarios.

La **Zona de Empleados**, se compone del Comedor, la Cocina, la cual cuenta con cuarto de despensa, conexión con el patio de servicio y salida al estacionamiento. Los Dormitorios se distribuyen en las dos Plantas; en la Planta Baja se encuentran los dormitorios para mujeres, debido a que cada vez mas de ellas se interesan por esta profesión, el Dormitorio cuenta con Baños y Vestidores, con capacidad para 3 personas. El Dormitorio del Comandante se encuentra integrado a su Oficina y cuenta con Baño independiente, además de estar en una zona primordial hacia la zona administrativa y las salidas de servicio de emergencia.

En la Planta Alta de Edificio se encuentran los dormitorios de la Tropa y de los Oficiales, divididos en tres cuartos dos para tropa , con capacidad para 15 personas y uno para oficiales con capacidad para 7 personas, también cuenta con dos Baños y Vestidores, uno para la tropa y otro para los oficiales, dando como resultado infraestructura par 26 empleados, divididos en dos turnos. Cuenta con Gimnasio y una Sala de Descanso.

La **Zona de Entrenamiento**, se ubica en la parte posterior del Predio, compuesta de una zona de acondicionamiento físico y otra de practicas de emergencia, en la cual se encuentra un edificio con características iguales a los del municipio y una plancha de concreto en la cual se pueden realizar simulacros de incendio, también cuenta con un tanque elevado de almacenamiento de agua, en el cual se pueden realizar maniobras de rescate y salvamento.

La **Zona de Salidas a Emergencias**, comprende desde la salida de los tubos de emergencia, hasta la salida de los carros de Bomberos, ubicados en el Hangar. El Hangar cuenta con capacidad para 6 carros chicos (Canadiense, Camionetas) y 2 carros grandes (Cisterna, Bomba), que además de estar ubicados óptimamente para su incorporación al la Vialidad Primaria, cuenta con Bodegas para el almacenamiento de equipo. También cuenta con un área de Mantenimiento, la cual no obstruye el funcionamiento de la Estación.

Áreas Verdes y Andadores, las áreas verdes envuelven prácticamente al proyecto, ayudando así, primero a la integración del proyecto al entorno, además de funcionar como área permeable hacia los mantos acuíferos. Los andadores se proyectaron de adoquín en lo mas posible, para también ayudar con la filtración de agua.

Debido a que el elemento principal del proyecto es el Agua, se aplico la utilización de Aguas Pluviales, en la Instalación Hidráulica, para el llenado de la cisterna, la cual abastece los carros de bomberos. Así como también toda el agua utilizada para el servicio de la estación, será tratada por medio de trampas de grasa y fosas sépticas para luego ser inyectada al subsuelo por medio de pozos de absorción



COSTOS Y FINANCIAMIENTO

PRESUPUESTO GENERAL

COSTO DE TERRENO

El costo del metro cuadrado de terreno se valúa en esta zona en \$ 380.00 mn

Considerando que el área total de terreno es de 5017 m²

El costo del terreno será de **\$ 1,906,460.00 mn**

CONSTRUCCION

El metro cuadrado de construcción se valúa en un aproximado de \$ 4,800.00 mn.

Tomando en cuenta que el total de construcción es de 1209 m²

El costo de construcción será de **\$ 5, 803,200 mn.**

ESTACIONAMIENTO Y PATIOS

El metro cuadrado de estacionamiento, patios y calles se valúa en \$ 257.00 mn.

El área total de estacionamiento y patios es de 2142.8 m²

El costo de construcción será de **\$ 550,699.60 mn.**

JARDINES

El costo del metro cuadrado de jardines se valúa en \$ 127.00 mn.

Considerando que el área total de jardines es de 1665.71 m²

El costo será de **\$ 211,545.17 mn**

El costo total de la Estación de Bomberos será de \$ 8,471,904.77 mn

FINANCIAMIENTO

Considerando que el proyecto de la **Estación de Bomberos** es una prioridad para el Plan de Desarrollo Municipal de Villa del Carbón., el proyecto sería primordialmente financiado por el municipio y otra parte de estaría a cargo de empresas públicas y privadas interesadas en el proyecto.

40 % Municipio

20 % Comisión Nacional de Bosques

15 % Secretaria de Turismo

15 % Telmex

10 % Sociedad Civil

Nota : Los costos y valores por m² son aproximados y fueron tomados del
Catalogo Nacional de Costos , Enero 2006.



BIBLIOGRAFIA

- **Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal**
Editorial Trillas , Enero 2004
- **Plan Municipal de Desarrollo Urbano**
Gobierno del Estado de México. 2002
- **Enciclopedia de Arquitectura**
Plazola Volumen 2
Plazola Editores, 1995
- **Arquitectura Habitacional , Volumen 1**
Alfredo Plazota Cisneros
Editorial Lamusa, 1990
- **Sistema Normativo de Equipamiento Urbano**
Admon. Pública y Serv. Urbanos SEDESOL
- **Manual Ahmsa**
Altos Hornos de México
- **Manual del Arquitecto Descalzo**
Johann Van Lengen
Editorial Árbol

- **Diseño estructural de Casas Habitación**
Gabriel O. Gallo, Luis I. Espino, Alfonso E. Olvera
Editorial McGraw-Hill 1999
- **Concreto Reforzado por Resistencia Máxima y Servicio**
Vicente Perez Alama
Editorial Trillas 1993 México
- **Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado**
Oscar M. Gonzalez Cuevas, Francisco Robles Fernandez
Editorial Limusa 2005 México
- **Principios de Diseño Urbano/ Ambiental**
Mario Schjetnan, Jorge Calvillo, Manuel Peniche
Editorial Árbol, 1997
- **Guía Práctica para el Cálculo de Instalaciones Eléctricas**
Autor : Enriquez Harper
Editorial Limusa 2004 México
- **Instalaciones Técnicas en Edificios**
Autor : Konrad Sage
Editorial Gustavo Gili S.A. Barcelona 1980
- **Catalogo Nacional de Costos**
Enero 2006.