UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RETRACTOS Y EXTENSORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CARLOS SAIDT FERNANDEZ NASER

Tutor: DR. MARIA ISABEL PUGA
ESPINOSA

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos de Jurado

1. Datos de alumno Fernández Naser Carlos Saidt 17360700 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 400092814
2. Datos del tutor Doctora Puga Espinosa María Isabel
3. Datos del sinodal 1 Doctor Tamariz Mascarúa Angel
4. Datos del sinodal 2 Doctora Pellicer Covarrubias Patricia
5. Datos del sinodal 3 M. en C. Fernández Roman Leobardo
6. Datos del sinodal 4 M. en C. Islas Moreno Carlos
7. Datos del trabajo escrito Retractos y Extensores 55 p 2007

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Este trabajo esta dedicado principalmente a mi familia, que tanto me aguantaron y soportaron este largo camino.

A Bety ya que me aguanto y lidio con mi distracción todo este tiempo y que sin ella yo no estaría aquí.

A mi otra familia que siempre estuvo al pendiente de este loco soñador, gracias a Horacio, Israel, Mara, Magno y Ale, por acompañarme, algunos desde el principio y otros casi al final, gracias muchachos los llevo en el corazón.

Índice general

Introducción

La finalidad de esta tesis es presentar los conceptos de extensores y retractos en espacios topológicos en general.

En el capítulo 1 presentamos los resultados preliminares, incluyendo definiciones, ejemplos y contraejemplos. En particular, estudiamos el espacio de adjunción $Z = X \cup_f Y$ y sus propiedades.

En el capítulo 2 presentamos el concepto de retracto y su relación con las propiedades de conexidad local y propiedad del punto fijo.

En el capítulo 3, estudiamos extensores absolutos así como extensores por vecindades. Dada una clase de espacios topológicos estudiamos el concepto de extensor para dicha clase. Nos interesa en particular, la clase de los espacios normales. En este caso, el Teorema de Tietze nos dice que una n-celda, es un extensor para la clase de los espacios normales.

Por último, en el capítulo 4, estudiamos retractos absolutos y retractos absolutos de vecindades.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Espacios Topológicos

En esta sección se introducirá el concepto de Espacio Topológico, dando la de…nición de lo que es una topología, así como algunos ejemplos de Espacios Topológicos.

De…nición 1.1 *Sea X un conjunto. Una topología τ de…nida en X es un familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:*

1) ϕ y X son elementos de τ.

2) Sea A y B elementos de τ, entonces $A \cap B \in \tau$.

3) Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de elementos de τ, entonces $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

A los elementos de τ se les llaman abiertos y a la pareja (X, τ) se le llama espacio topológico. En otras palabras, la propiedad 2 la expresamos diciendo que intersección …nita de abiertos es abierta y la propiedad 3 que unión arbitraria de abiertos es abierta. Diremos que un subconjutno C de X es cerrado si y solo si $X \setminus C \in \tau$.

De…nición 1.2 *Sean X un espacio topológico y un subconjunto A de X. De…nimos $\overline{A}$ como la intersección de todos los cerrados de X que contienen a A.*

Vamos a dar algunos ejemplos de espacios topológicos.

Ejemplo 1.3 *a) Sea X un conjunto. Entonces el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X de…ne una topología en X en la cual todos los subconjuntos son abiertos. A esta topología se le llama* topología discreta.

b) Sea X un conjunto. La familia $\{\phi, X\}$ define en X la topología indiscreta.

Definición 1.4 *Sean (X, τ), (Y, δ) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua si para todo U abierto de Y tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Definición 1.5 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es un homeomorfismo si f es biyectiva y f^{-1} es continua. Decimos que X y Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$.*

Definición 1.6 *Sea X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es un encaje si $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Ejemplo 1.7 *a) Sea $X = \{1, 2\}$ en este espacio se pueden definir a lo más 4 topologías:*

$\tau_1 = \{\phi, X\}$ $\quad \tau_2 = \{\phi, X, \{1\}\}$ $\quad \tau_3 = \{\phi, X, \{2\}\}$ $\quad \tau_4 = P(X)$

A (X, τ_2) y a (X, τ_3) se les llama espacio de Sierpinski. Cabe aclarar que (X, τ_2) y (X, τ_3) son homeomorfos.

b) Sea X un conjunto y $A \subset X$. Definimos $A^c = X \setminus A$ el complemento de A con respecto de X. Consideramos la siguiente familia

$\tau = \{A \subset X : A = \phi \ o \ A^c \ es \ finito\}$ veamos que τ define una topología en X.

1) Es claro que ϕ y X están en τ.

2) Sean A y B elementos de τ.Si $A = \phi$ entonces $A \cap B = \phi \in \tau$, si $A \neq \phi$ y $B \neq \phi$, entonces $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ pero sabemos que unión de conjuntos finitos es finita entonces $A \cap B \in \tau$.

3) Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de elementos de τ, entonces

$(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in I}(A_\alpha)^c$. La intersección arbitraria de conjuntos finitos es finita, entonces $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

A esta topología se le llama la topología de complementos finitos o cofinita.

Definición 1.8 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una base para la topología es un subconjunto $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que τ es generado por $\mathcal{B}$, es decir los elementos τ son todas las posibles uniones de subconjuntos de $\mathcal{B}$.*

Definición 1.9 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una subbase para τ es una colección $\mathcal{F}$ de elementos de τ tal que $\sigma = \left\{ \bigcap_{i\in I} C_i \mid C_i \in \mathcal{F} \right\}$ forma una base para τ.*

Una proposición clara que se sigue de la definición 1.8 es la siguiente.

Proposición 1.10 *El conjunto $\mathcal{B} \subset \tau$ es base para la topología τ si y sólo si para todo U en τ y para todo u en U existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $u \in B \subset U$.*

Algunos ejemplos sencillos de bases y subbases son los siguientes:

Ejemplo 1.11 *a) Para la recta real $\mathbb{R}$ con la topología usual los intervalos abiertos de la forma (a,b) forman una base.*

b) Para la topología discreta el conjunto $\{\{x\} \mid x \in X\}$ forma una base.

c) En la recta real la topología que usualmente se define en ella es la que tiene como base los intervalos abiertos de la forma (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$, una subbase para esta topología son los intervalos de la forma $(-\infty, b)$ junto con los intervalos de la forma (a, ∞).

Definición 1.12 *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es cerrado en X si $A^c \in \tau$.*

Definición 1.13 *Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ y $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la proyección natural. La topología producto en X es la topología mas pequeña que hace que π_α sea continua para cada $\alpha \in A$.*

Es fácil probar que la familia $\{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } X_\alpha, \alpha \in A\}$ es una subbase para la topología producto en X.

Lema 1.14 *Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el espacio producto (con la topología producto). Sea Y un espacio topológico y $g : Y \to X$ una función. Entonces g es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ g$ es continua para toda $\alpha \in A$.*

Demostración. $\Rightarrow)$ Se sigue de la definición de topología producto que la proyección en la $\alpha-\acute{e}sima$ coordenada es continua. Tenemos que composición de funciones continuas es continua por lo tanto $\pi_\alpha \circ g$ es continua.

$(\Leftarrow)$ Bastará demostrar que la imagen inversa bajo g de cada subbásico $\pi_\alpha^{-1}(U)$ con U abierto en X_α, es abierto en Y. Tenemos que $\pi_\alpha \circ g$ es continua esto quiere decir que $(\pi_\alpha \circ g)^{-1}(U)$ es abierto de Y, ahora $(\pi_\alpha \circ g)^{-1}(U)$ $= g^{-1} \circ \pi_\alpha^{-1}(U) = g^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U))$ lo que prueba que g es continua. ■

Definición 1.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $U \subset X$. Decimos que U es denso en X si para toda $A \in \tau$, $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definición 1.16 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X contiene un conjunto denso numerable decimos que X es separable.*

Ejemplo 1.17 *Si consideramos a* $\mathbb{R}$ *con la topología usual encontramos que* $\mathbb{Q}$ *es un subespacio denso numerable de* $\mathbb{R}$.

1.2. Conexidad

En esta sección hablaremos de los conceptos de conexidad, localmente conexo, conexo en pequeño y conexo por trayectorias. Hablaremos de la relación que hay entre estos conceptos.

Definición 1.18 *Un espacio topológico X es conexo si no lo podemos escribir como unión de dos subconjuntos abiertos ajenos no vacíos.*

Proposición 1.19 *Sea X un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X entonces $\overline{A}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\overline{A} = B \cup C$ donde B y C son abiertos ajenos de $\overline{A}$, entonces $B \cap A \neq \phi$, $C \cap A \neq \phi$, $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \phi$ y $A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ lo cual no se puede ya que A era conexo. Por lo tanto $\overline{A}$ es conexo. ■

Proposición 1.20 *Sean X un espacio topológico conexo, $f : X \to Y$ continua y Y un espacio topológico, entonces $f(X)$ es un conexo en Y.*

Demostración. Supongamos que $f(X) = A \cup B$ donde A y B son abiertos ajenos de $f(X)$ entonces como f es continua $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos ajenos de X y $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, pero esto contradice el hecho de que X era conexo. Por lo tanto $f(X)$ es conexo. ■

Algunos ejemplos de espacios conexos.

Ejemplo 1.21 *a) El intervalo* $[0,1]$ *es conexo. Supongamos que*

$[0,1] = H \cup K$ *donde* H *y* K *son abiertos ajenos del intervalo* $[0,1]$ *y* $1 \in H$. *Como* H *es abierto entonces existe una vecindad del* 1 *que esta contenida en* H. *Sea* $c = \sup(K)$ *entonces* $c \neq 1$*, note que como* c *es el supremo de* K *entonces cualquier vecindad de* c *tiene puntos de* K *solo del lado izquierdo de* c.

Como estamos suponiendo que $[0,1]$ *no es conexo entonces* c *debe de estar en* H *o* K.

- si $c \in H$ *entonces* c *tiene una vecindad totalmente contenida en* H*, pero* c *es el supremo de* K *entonces* $K \cap H \neq \emptyset$.

- si $c \in K$ *entonces* c *tiene una vecindad totalmente contenida en* K*, pero* c *es el supremo de* K *entonces* $K \cap H \neq \emptyset$.

En ambos casos llegamos a una contradicción, ya que estábamos suponiendo que H *y* K *eran ajenos. Por lo tanto el intervalo* $[0,1]$ *es conexo.*

b)La circunferencia de radio 1 *que denotaremos como* S^1*es un conexo. Esto ya que* S^1 *es la imagen del intervalo* $[0,2\pi]$ *bajo la función*

$f(x) = \exp(ix)$.

c)La cerradura topológica de la gráfica de $\sin(\frac{1}{x})$

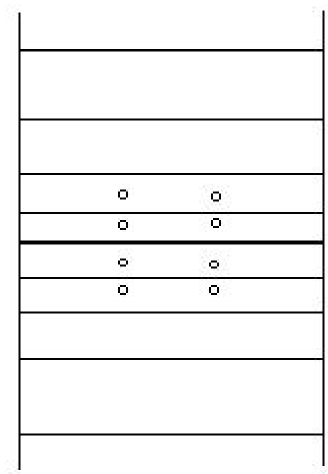
es conexa por la proposición 1.19, ya que la gráfica de $\sin(\frac{1}{x})$ *es homeomorfa a un rayo.*

De...nición 1.22 *Se dice que un espacio* X *es localmente conexo en un punto* p 2 X*, si para todo abierto* A *de* X *tal que* p 2 A*, existe* B ½ A *tal que* B *es abierto, conexo y* p 2 B*. Si* X *es localmente conexo en cada punto, decimos que* X *es localmente conexo.*

Ejemplo 1.23 *a) Un ejemplo de un espacio localmente conexo que no es conexo es* $[0,1)$ [$(1,2]$

b) Consideremos el espacio en el plano formado por las líneas verticales $x = 0$ *y* $x = 1$ *junto con las lineas horizontales*
© $(x, \frac{1}{n})$ j 0 · x · 1 *y* n = §1, §2, ... ª

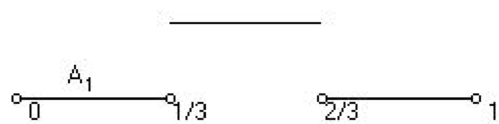
y por último agreguemos el intervalo $[0,1]$ *contenido en el eje de las equis.*



Este espacio no es localmente conexo en los puntos interiores del intervalo $[0,1]$*, ya que estos puntos tienen vecindades disconexas.*

De...nición 1.24 *Consideremos el intervalo* $[0,1]$ *y vamos a construir una familia de subconjuntos* fA_ig*del* $[0,1]$ *tal que* $A_{i+1} \subseteq A_i$.

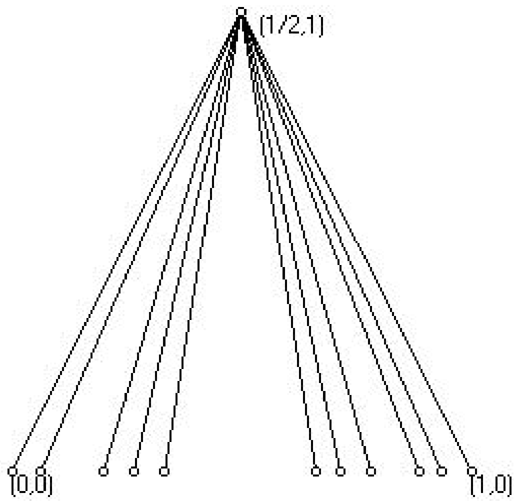
Ejemplo 1.25 *De...nición 1.26 Sea* $A_0 = [0,1]$, *ahora el siguiente elemento* A_1 *lo construimos quitándole a* A_0 *el intervalo* $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$



el A_2 lo construimos quitandole a A_1 los inervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$

en general si tenemos A_{n-1}, el A_n lo construimos partiendo en tres los 2^{n-1} intervalos cerrados que forman a A_{n-1} y quitándoles el intervalo de enmedio. El conjunto de Cantor es el subespacio $C = \bigcap_{n=1} A_n$ del intervalo $[0, 1]$. Como C es una intersección anidada de compactos entonces es compacto.

Ejemplo 1.27 *El siguiente ejemplo es un espacio que es conexo , pero no* *es localmente conexo. Nos fijamos en el punto* $\left(\frac{1}{2},1\right)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *y dibujamos todos los segmentos de rectas que unan a este punto con cada uno de los elementos del conjunto de Cantor .*

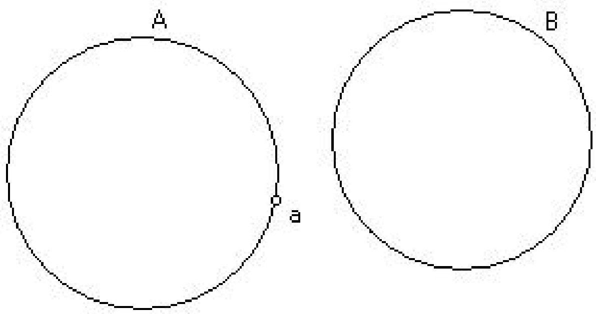


A este espacio se le conoce como $el\ cono\ geométrico\ de\ Cantor$, *y bueno gracias a que el conjunto de Cantor es totalmente disconexo, si nos fijamos en un abierto del cono que contenga a un punto del conjunto de Cantor y que no contenga al* $(\frac{1}{2},1)$ *obtenemos que el abierto es disconexo, ya que el punto que conecta a los puntos del Cantor es precisamente el* $(\frac{1}{2},1)$.

Definición 1.28 *Sea* $x \in X$. *La componente* Cx *de* x *en* X *es la unión de los subconjuntos conexos de* X *que contienen a* x.

Si el espacio X es conexo tenemos que la componente conexa de todo punto es el total. La familia de componentes conexas de los puntos nos da una partición del espacio.

Sea $X = A \cup B$ con A y B conexos ajenos, si tomamos un punto $a \in A$, obtenemos que $Ca = A$, como se ve en la siguiente figura:



Proposición 1.29 *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si las componentes de cualquier abierto de X son abiertas.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea C componente del abierto U de X y $p \in C$. Como U es abierto de X entonces existe un abierto y conexo B tal que $p \in B \subseteq U$. Por definición de componente tenemos que $B \subset C$, lo que demuestra que C es abierta.

$\Leftarrow$) Sea U abierto de X, $p \in U$ y C la componente de U tal que $p \in C$. Por hipótesis todas las componentes de abiertos de X son abiertas, entonces tenemos que C es abierto, conexo y está contenido en U, lo que prueba que X es localmente conexo. ■

Definición 1.30 *Un espacio X es conexo en pequeño en p si para todo abierto V de X tal que $p \in V$ existe un conexo C tal que $p \in int(C) \subset C \subset V$.*

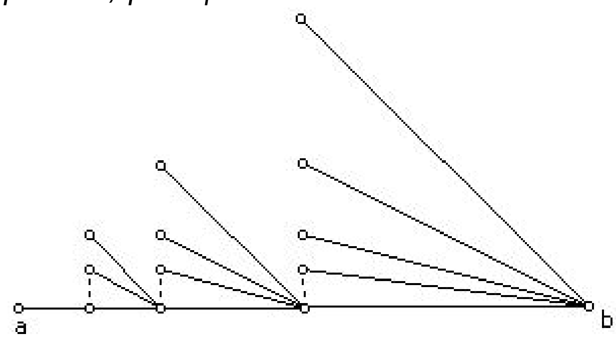
Proposición 1.31 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es local mente conexo en p para todo $p \epsilon X$ si y sólo si X es conexo en pequeño en* p *para todo $p \epsilon X$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $p \in V \subset X$ con V abierto. Como X es localmente conexo entonces existe $B \subset V$ tal que B es abierto y conexo y

p 2 B, entonces p 2 $int(B)$ = B ½ V. Lo que demuestra que X es conexo en pequeño en p para todo $p\epsilon X$.

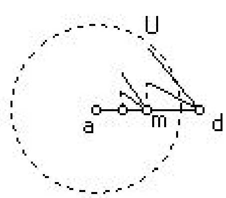
(=) Sean U ½ X abierto, x 2 U y C una componente de U. Por ser X conexo en pequeño existe B un conexo de U tal que x 2 $int(B)$. Por de…nición de componente, B ½ C, lo que prueba que C es abierta. Utilizando la Proposición 1.29, X es localmente conexo. ■

Ejemplo 1.32 *El siguiente es un ejemplo de un espacio conexo en pequeño en el punto a, pero que no es localmente conexo en ese punto.*

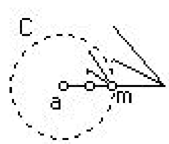


Observemos las vecindades abiertas del punto a

a)



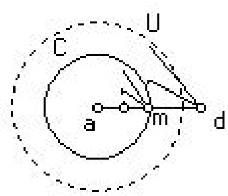
b)



Vamos a …jarnos en las vecindades abiertas U de a que son de la forma a).

Lo que tenemos que encontrar es un conexo C ½ U tal que

$A \in int(C) \subset C \subset U$. *Siempre podemos encontrar un punto m de ramificación entre d y a, entonces tomamos el conexo C como se muestra en la siguiente figura*



De forma análoga si nos fijamos en la vecindades abiertas U de a que son de la forma b), encontramos C conexo en U, esto demuestra que es conexo en pequeño. La vecindades abiertas de a no son conexas, por lo tanto el espacio no es localmente conexo.

Denotaremos $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ y $E^{n+1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$.

Definición 1.33 *Se dice que un espacio X es conexo por trayectorias si y sólo si para cualesquiera dos puntos $x,y \in X$, existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

Ejemplo 1.34 *a)El intervalo $[0,1]$ es conexo por trayectorias.*
b)S^n es conexo por trayectorias.
c)El $cono\ de\ Cantor$ es conexo por trayectorias.

Proposición 1.35 *Todo espacio conexo por trayectorias es conexo.*
Demostración. Sea X un espacio conexo por trayectorias. Supongamos que X no es conexo, entonces $X = A \cup B$ con A y B subconjuntos de X

ajenos no vacios, sean $a \in A$ y $b \in B$, como X es conexo por trayectorias existe $f : [0,1] \to X$ continua tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$, entonces $I = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ pero esto no puede pasar , ya que $[0,1]$ es conexo, por lo tanto X es conexo. ■

Definición 1.36 *Se dice que un espacio X es localmente conexo por trayectorias si y sólo si todo punto de X tiene una base local formada por conjuntos conexos por trayectorias.*

Proposición 1.37 *Todo espacio X conexo y localmente conexo por trayectorias es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $a, b \in X$, M y N subconjuntos de X tal que $a \in int(M)$ y $m \in int(N)$ y $M \cap N \neq \emptyset$, esto lo podemos suponer ya que X es conexo. Sea $z \in N \cap M$. Como X es localmente conexo por trayectorias existe $M^* \subset M$ conexo por trayectorias tal que a y z estan en M^*, análogamente existe $N^* \subset N$ tal que z y b estan contenidos en N^*, la trayectoria que une a a con b es la unión de la trayectoria de a a z con la que une a z con b. ■

1.3. Espacios Métricos

En esta sección hablaremos de espacios métricos, dando la definición de lo que es una métrica, y teniendo la importante observación de que siempre a un espacio métrico le podemos definir una métrica que sea acotada. Otros conceptos que trataremos en esta sección es el de norma y de espacio normado. Esta sección nos servirá cuando hablemos, más adelante, de Espacios Métricos Completos.

Definición 1.38 *Una métrica para un conjunto X es una función*
$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que para $x, y, z \in X$.*
i) $d(x,y) = d(y,x)$.
ii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Desigualdad del triangulo).*
iii) $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
Si d es una métrica en X, decimos que (X,d) es un espacio métrico.

Ejemplo 1.39 *a) La recta real* $\mathbb{R}$ *con la siguiente función distancia* $\partial(x,y) = |x - y|$ *es el ejemplo más conocido de espacio métrico, en general* $\mathbb{R}^n$ *con la función distancia* $\partial((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_2)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$ *es un espacio métrico.*

b) En el plano podemos definir otras funciones distancia como por ejemplo:

i)$\partial_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ *la cual es llamda la métrica del taxista.*

ii)$\partial_2(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

c) Otro ejemplo sencillo de métrica es la siguiente. Sea X un conjunto y definimos la siguiente función distancia. $\partial(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$ *a esta métrica se le llama la métrica discreta.*

Podemos darle estructura de espacio topológico a un espacio métrico definiendo la siguiente topología.

Definición 1.40 *Sea (X, ∂) un espacio métrico.*

Definimos $\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in X\ y\ r \in \mathbb{R}\}$

donde $B_r(x) = \{y \in X \mid \partial(x, y) < r\}$.

En este caso los abiertos son los conjuntos $U \subset X$ tal que para todo $u \in U$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $B_r(u)$ se queda contenida en U. Lo que nos dice que $\mathcal{B}$ *es una base para la topología.*

Definición 1.41 *Sean (X, ∂) y (Y, ρ) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es una isometría si para todo $x_1, x_2 \in X$ pasa lo siguiente $\partial(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$.*

Observación 1.42 *Dado cualquier espacio métrico (X, ∂), podemos definir una función distancia ∂^* acotada de la siguiente manera* $\partial^*(a, b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$.

Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos $f_A : X \to \mathbb{R}$ como $f_A(x) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$.

Lema 1.43 *La función f_A es continua.*

Demostración. Sea $a \in A$. Usando la desigualdad del triángulo, obtenemos $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. De esta desigualdad obtenemos lo siguiente: $d(x, a) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Esta desigualdad se cumple también si tomamos ínfimos , asi que podemos tomar la siguiente desigualdad $inf(d(x, a) - d(x, y)) \leq inf(d(y, a))$, ahora $d(x, y)$ es un valor constante para el ínfimo ya que este lo tomamos con respecto a la a por lo que la desigualdad queda así $inf_{a \in A}(d(x, a)) - d(x, y)) \leq inf_{a \in A}(d(y, a))$.

Ahora recordando la definicion de f_A obtenemos lo siguiente: $f_A(x) - d(x,y) \leq f_A(y)$. De la cual obtenemos la siguiente desigualdad: $f_A(x) - f_A(y) \leq d(x,y)$. Realizando un procedimiento análogo, cambiando x por y y visceversa, obtenemos $f_A(y) - f_A(x) \leq d(x,y),$ lo que nos dice que $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x,y)$; Lo que demuestra que f_A es continua. ■

Definición 1.44 *Un espacio normado X es un espacio vectorial* [Hu, capítulo2secc,13] *sobre* $\mathbb{R}$*, tal que a cada elemento x de X podemos asociarle un número real $\|x\|$ que cumple con las siguientes propiedades:*

1) $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *si y solo si* $x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ *para toda* $\alpha \in \mathbb{R}$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Con la norma se puede definir una métrica en X, simplemente para todo $x, y \in X$ definimos $d(x,y) = \|x - y\|$.

1.4. Espacios Compactos

En esta sección hablaremos muy poco de espacios compactos, dando solo la definición, algunos ejemplos y una proposición importante para el resto de la tesis

Definición 1.45 *Sea X un espacio topológico. Una cubierta de X es una familia $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X$. Si la familia está compuesta únicamente de abiertos de X, la cubierta se llama cubierta abierta.*

Definición 1.46 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es compacto si para toda cubierta abierta $\mathcal{B}$ de X existe un subconjunto finito de $\mathcal{B}$ que es cubierta de X.*

Definición 1.47 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es en espacio de Lindelöf si para toda cubierta abierta $\mathcal{B}$ de X existe un subconjunto numerable de $\mathcal{B}$ que es cubierta de X.*

Ejemplo 1.48 *Unos ejemplos sencillos de espacios compactos son:*

a) El intervalo cerrado $[0,1]$.

b) La circunferencia unitaria

Proposición 1.49 *Sean X, Y espacios topológicos, A un subespacio compacto de X y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(A)$ es compacto en Y.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(A)$. Entonces $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existe $\mathcal{V}$ subcubierta finita de $f^{-1}(\mathcal{U})$. Definimos $\mathcal{U}^* = \{U \in \mathcal{U} \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{V}\}$. Es claro que $\mathcal{U}^*$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. ■

Proposición 1.50 *Sean X, Y espacios topológicos, A un subespacio de Lindelöf de X y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(A)$ es un espacio de Lindelöf .*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(A)$. Entonces $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es un espacio de Lindelöf, existe $\mathcal{V}$ subcubierta numerable de $f^{-1}(\mathcal{U})$. Definimos $\mathcal{U}^* = \{U \in \mathcal{U} \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{V}\}$. Es claro que $\mathcal{U}^*$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. ■

Lema 1.51 *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces X es separable.*

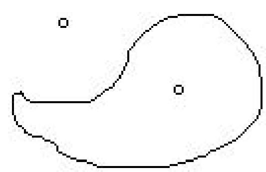
Demostración. Sea $B_k = \left\{B_{\frac{1}{k}}(x) \mid x \epsilon X\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe $B_k^* = \left\{B_{\frac{1}{k}}(x_1^k), B_{\frac{1}{k}}(x_2^k), \ldots, B_{\frac{1}{k}}(x_{n_k}^k)\right\}$ subcubierta finita de B_k. Sea $D = \left\{x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots\right\}$. Veamos que D es un subconjunto denso numerable en X. D es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos finitos. Sea $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$, como U es abierto entonces existe $B_{r_0}(x) \subset U$ para algún $r_0 \in \mathbb{R}$. Sabemos que para todo $r \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < r$. Entonces podemos tomar una cubierta abierta B_k de X con $\frac{1}{k} < r_0$ de la cual obtenemos su subcubierta finita B_k^*. Ahora, existe $B_{\frac{1}{k}}(x_j^k)$ para alguna $1 < k < n_k$ tal que $x \in B_{\frac{1}{k}}(x_j^k)$, entonces $d(x, x_j^k) < \frac{1}{k}$, por lo tanto $x_j^k \in B_{r_0}(x)$. ■

1.5. Axiomas de Separación

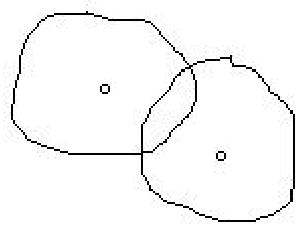
En esta sección hablaremos de los conceptos de que un espacio sea T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 y de cómo estos conceptos se relacionan. Esta sección nos servirá mas adelante cuando hablemos de Espacios de Hausdorff y de Espacios Normales.

Definición 1.52 *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $A \subset X$ es una vecindad de x si y solo si $x \in int(A)$. Si A es abierto, decimos que A es una vecindad abierta de x.*

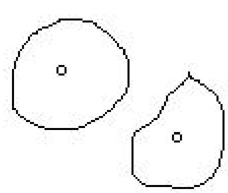
Definición 1.53 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_0 si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$, $x \neq y$, tenemos que al menos uno de ellos tiene una vecindad que no incluye al otro.*



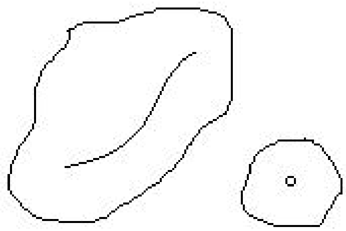
Definición 1.54 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_1 si y sólo si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ distintos, existe una vecindad de x que no contiene a y y viceversa.*



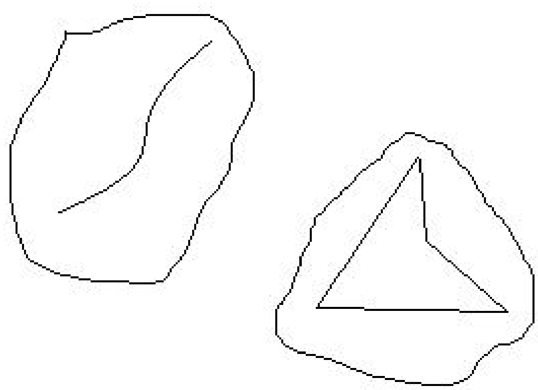
Definición 1.55 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es T_2 o espacio de Hausdorff si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ existen vecindades U y V de x y y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.*



Definición 1.56 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es T_3 si y sólo si para todo $A \subseteq X$ cerrado y para todo $x \notin A$ existe una vecindad U de A y una vecindad V de x tales que $U \cap V = \emptyset$.*



Definición 1.57 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es T_4 si y sólo si para todos cerrados ajenos A y B de X existen vecindades U y V de A y B de B tales que $U \cap V = \emptyset$.*



Proposición 1.58 *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces los conjuntos formados por un solo elemento son cerrados en X.*

Demostración. Sea $x \in X$. Para probar que $\{x\}$ es cerrado en X, basta probar que $X \setminus \{x\}$. Sea $y \in X \setminus \{x\}$, como X es T_1 existe una vecindad U de

y tal que $x \notin U$. Como $y \in int(U)$, podemos econtrar una vecindad abierta V de y tal que $V \subset U$. Por lo tanto $X \setminus \{x\}$ es abierto. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado en X. ■

Proposición 1.59 *Sea X un espacio topológico. Dadas las definiciones anteriores tenemos las siguientes afirmaciones:*

i) Si X es un espacio T_1 y T_4 entonces X es T_3

ii) Si X es un espacio T_1 y T_3 entonces X es T_2

iii) Si X es un espacio T_2 entonces X es T_1

iv) Si X es un espacio T_1 entonces X es T_0.

Demostración. i) Sean $x \in X$ y $A \subset X$ cerrado tal que $x \notin A$.Gracias a la porposición 1.58, tenemos que los conjuntos formados por un solo elemento son cerrados en X, entonces como X es T_4 tenemos que existen U y V vecindades de x y A respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$ por lo tanto X es T_3.

ii) Sean $x, y \in X$ $x \neq y$. La propiedad de ser T_1 significa que los puntos son cerrados en X, entonces como X es T_3 tenemos que existen U y V vecindades de x y y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$ por lo tanto X es T_2.

iii) Sean $x, y \in X$ $x \neq y$. Como X es T_2 entonces existen U y V vecindad de x y y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto X es T_1.

iv) Sean $x, y \in X$ $x \neq y$. Como X es T_1 entonces existe U vecindad de x tal que $y \notin U$, por lo tanto X es T_0. ■

Ejemplo 1.60 *a) El que X sea T_1 es muy importante para que los incisos i), ii) de la Proposición 1.59 se cumplan, ya que por ejemplo, si a X le damos la topología indiscreta X no es T_1 ni T_2, pero es claramente T_4 y T_3.*

b) Sea $X = \mathbb{R}$. La colección de todas las uniones de intervalos abiertos de la forma $(-\infty, b) = \{x \in X | x < b\}$ forman una topología ∂ para X. Con esta topológia X es T_0, pero X no es T_1.

c) Si a $\mathbb{R}$ le asignamos la topología de los complementos finitos, $\mathbb{R}$ cumple T_1 pero no es T_2.

d) Sea r la topología usual de $\mathbb{R}$. Ahora consideramos la topología ∂ generada por la subbase $r \cup \{A \subseteq X \mid A \subseteq \mathbb{Q}\}$. $\mathbb{R}$ cumple T_2 ya que ∂ es más fina que r, pero $\mathbb{R}$ no es T_3 ya que el conjunto de los numeros irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es cerrado, pero no lo podemos separar del 0.

e) Todo espacio métrico (X, d) es de Hausdorff.

1.6. Espacios de Hausdorff

En esta sección hablaremos de cuando un espacio — se dice que es un Espacio de Hausdorff, y de algunas propiedades de estos espacios. Este tipo de espacios son importantes para esta tesis ya que, más adelante en los capítulos 3 y 4 hablaremos de cómo se comportan los retractos y extensores en este tipo de espacios

Recordemos que X es un espacio de Hausdorff si X es T_2 (Definición 1.55).

Proposición 1.61 *Sean $\{X_i\}$ una familia de espacios de Hausdorff entonces:*

a) Todo subespacio de $\prod X_i$ es Hausdorff.

b) $\prod_{i \in I} X_i$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. i) Sean A un subespacio de X_i y $x, y \in A$ con $x \neq y$. Como X_i es de Hausdorff, entonces existen vecindades U y V de x y y respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap A$ y $V \cap A$ son vecindades de x y y respectivamente, entonces A es de Hausdorff.

ii) Sean $X = \prod_{i \in I} X_i$ y $x = (x_i), y = (y_i)$ dos puntos distintos de X. Como $x \neq y$ entonces $x_i \neq y_i$ para alguna $i \in I$, entonces ya que X_i es de Hausdorff , por lo tanto, existen U_i vecindad de x_i y V_i vecindad de y_i tales que $U_i \cap V_i = \emptyset$. Sea $\pi_i : X \to X_i$ la i-esima proyección. Entonces $\pi^{-1}(U_i)$ y $\pi^{-1}(V_i)$ son vecindades ajenas de x y y respectivamente, por lo tanto X es de Hausdorff. ■

Definición 1.62 *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $F(x) = \{U \subseteq X \mid U \text{ es vecindad de } x\}$ es un sistema fundamental de vecindades si para toda vecindad V de x existe $U \in F(x)$ tal que $U \subseteq V$.*

Definición 1.63 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es primero numerable si todo elemento x de X tiene un sistema fundamental de vecindades numerable.*

Proposición 1.64 *Sean X un espacio de Hausdorff y $A \subseteq X$ compacto. Entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Vamos a demostrar que $X \setminus A$ es abierto. Sea $x \in X \setminus A$. Como X es un espacio de Hausdorff, para cada $a \in A$ existe vecindades *ajenas U_a y V_a de a y x respectivamente. Sea* $\mathcal{U} = \bigcup_{a \in A} U_a$*. Observemos que* $\mathcal{U}$ *es cubierta abierta de A, entonces existe* $\mathcal{U}^* = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$ *subcubierta finita de* $\mathcal{U}$*.Entonces* $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ *es una vecindad de x totalmente contenida en $X \setminus A$. Por lo tanto $X \setminus A$ es abierto.* ■

Lema 1.65 *Sean X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Entonces toda función continua $f : X \to Y$ es cerrada.*

Demostración. Sea C cerrado de X, como X es compacto entonces tenemos que C es compacto, ahora $f(C)$ es un compacto ya que las funciones continuas mandan compactos en compactos. Como Y es un espacio de Hausdorff, entonces $f(C)$ es cerrado (Porposición 1.64). Lo que prueba que f es cerrada. ■

Definición 1.66 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es segundo numerable si τ tiene una base numerable.*

Con el fin de dar un ejemplo de un espacio Hausdorff que no es métrico probaremos la siguiente proposición.

Proposición 1.67 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es métrico y separable, entonces es segundo numerable.*

Demostración. Como X es separable entonces existe $D \subset X$ denso y numerable. Veamos que la colección $\mathcal{B} = \{B_r(a_r) \mid a_r \in D \text{ y } r \in \mathbb{Q}\}$ es una base para τ.

Sean $U \in \tau$ y $y \in U$. Gracias a la Definición 1.40 podemos suponer que $B_n(y) \subset U$. Como D es denso entonces existe $d \in D$ tal que $d \in B_n(y)$ entonces por definición de $B_n(y)$ (vease definición 1.40) $\partial(d, y) \leq n$. Como $B_n(y) \in \tau$ entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $B_r(d) \subset B_n(y) \subset U$. Esto nos da dos casos:

a) Si $r \in \mathbb{Q}$ entonces ya terminamos.

b) Si $r \notin \mathbb{Q}$ entonces por las propiedades de los números reales existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r$, entonces $B_s(d) \subset U$.

Con lo que se demuestra la proposición. ■

Ejemplo 1.68 *Vamos a construir un espacio que se llama la línea de Sorgenfrey que denotaremos como* $\mathbb{L}$*, el cuál es un espacio Hausdorff que no es métrico. Consideremos la recta real y definimos la topología* τ *de la siguiente manera: Consideramos la colección de uniones arbitrarias e intersecciones finitas de intervalos de la forma* $[a, b)$*.*

Es claro que $\mathbb{Q}$ *sigue siendo denso en* $\mathbb{L}$*, por lo que* $\mathbb{L}$ *es separable. Para demostrar que* $\mathbb{L}$ *no es métrico, gracias a la proposición 1.67, basta ver que* $\mathbb{L}$ *no es segundo numerable.*

Sea $\mathcal{B}$ *una base para* $\mathbb{L}$*. Sea* $a \in \mathbb{L}$ *y consideramos el siguiente abierto* $[a, a+1)$ *que contiene a* a*.Como* $\mathcal{B}$ *es base, existe* $V_a \in \mathcal{B}$ *tal que* $a \in V_a \subset [a, a+1)$*. Ahora si* $a \neq b$ *entonces* $V_a \neq V_b$ *ya que* $\min V_a = a \neq b = \min V_b$ *lo que nos dice que para cada real hay un elemento diferente de* $\mathcal{B}$*, se sigue de aqui que* $\mathcal{B}$ *es no numerable. Por lo tanto* $\mathbb{L}$ *no es segundo numerable. Por lo tanto* $\mathbb{L}$ *no es métrico.*

1.7. Espacios Normales

En esta sección hablaremos de cuando un espacio se dice que es un espacio Normal y de algunas propiedades de estos espacios. Este tipo de espacios son importantes para esta tesis ya que, más adelante en los capítulos 3 y 4, hablaremos de cómo se comportan los retractos y extensores en este tipo de espacios.

Definición 1.69 *Sea* X *un espacio topológico, decimos que* X *es normal si cumple que* X *es* T_2 *y* T_4 *(Definición 1.55 y Definición 1.57)*

Nótese que si X es normal y At es un cerrado de X, entonces existe $U \subset X$ abierto tal que $W_1^c \subset U \subset \overline{U} \subset W_2$.

Proposición 1.70 *Sea* X *un espacio normal y* $X = W_1 \cup W_2$ *con* W_1 *y* W_2 *abiertos. Entonces existen cerrados* X_1 *y* X_2 *de* X *tales que* $X_1 \subset W_1,\ X_2 \subset W_2$ *y* $X = X_1 \cup X_2$*.*

Demostración. Consideremos el siguiente cerrado $W_1^c \subset W_2$. Como X es normal, entonces existe $U \subset X$ abierto tal que $W_1^c \subset U \subset \overline{U} \subset W_2$. Definimos $X_2 = \overline{U}$ y $X_1 = U^c$. Es claro que $X_1 \subset W_1$ y $X_2 \subset W_2$. Sólo falta ver que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $x \in X \setminus X_2$, entonces $x \notin U$ por lo que $x \in X_1$, lo que prueba la proposición. ■

De…nición 1.71 *Se dice que X es completamente normal si para todos subconjuntos A, B de X tales que $\overline{A}$ \ B = ϕ y $\overline{B}$ \ A = ϕ, existen abiertos U, Vde X tales que A ½ U, B ½ V y U \ V = ϕ.*

Nótese que X es completamente normal si y sólo si para todos subconjuntos A, B de X tales que $\overline{A}$ \ B = ϕ y $\overline{B}$ \ A = ϕ, existe un abierto U de X tal que A ½ U ½ $\overline{U}$ ½ X n B.

1.8. Espacios Métricos completos

En esta sección hablaremos del concepto de Espacio Métrico Completo. Terminaremos esta sección hablando de la isometría canónica X, la cual nos será bastante útil en los capítulos 3 y 4.

De…nición 1.72 *Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, ∂) es de Cauchy si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que $\partial(x_n, x_m) < \epsilon$ cuando $m, n > N$.*

No todas la sucesiones de Cauchy son convergentes. Por ejemplo la sucesión $(\frac{1}{n})$ es de Cauchy en el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica usual, pero no converge en el $(0, 1)$.

De…nición 1.73 *Un espacio métrico (X, ∂) es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy en X converge. Un espacio topológico X es completamente metrizable si y solo existe una métrica que genera a ∂ con la cual X es un espacio métrico completo.*

De…nición 1.74 *Se dice que es un espacio normado X es un espacio de Banach si y solo si su métrica es completa.*

Ejemplo 1.75 *Sean Y un espacio compacto y $L = C(Y)$ el conjunto de todas las funciones reales continuas de…nidas en Y. Entonces L forma un espacio lineal sobre los reales de…niendo para todo f, g 2 L, y 2 Y y α 2 R lo siguiente:*

i) $(f + g)(y) = f(y) + g(y)$

ii) $(\alpha f)(y) = \alpha(f(y))$

Para toda f 2 L, de…nimos la siguiente norma kfk = sup$_{y 2 Y}$ j$f(y)$j *.Con esta norma L es un espacio de Banach.*

Sea $a \in Y$ y consideremos la función continua real acotada f_a definida como $f_a(y) = d^*(a,y)$ para toda $y \in Y$, donde d^* es la distancia definida en la Observación 1.42. Definamos $\mathrm{X} : Y \to L$ como $\mathrm{X}(a) = f_a$ para toda $a \in Y$.

Lema 1.76 *La función $\mathrm{X} : Y \to L$ es una isometría, llamada la isometría canónica del espacio métrico acotado Y.*

Demostración. Sean $a, b \in Y$, entonces
$d^*(a,b) = |f_a(b) - f_b(b)| \leq \|f_a - f_b\| = \sup_{y \in Y} |d^*(a,y) - d^*(b,y)| \leq d^*(a,b)$ lo que nos dice que $d(\mathrm{X}(a), \mathrm{X}(b)) = \|f_a - f_b\| = d^*(a,b)$
lo que prueba que X es una isometría. ■

Definición 1.77 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un conjunto G_δ si A es la intersección de un número numerable de abiertos de X.*

Definición 1.78 *Decimos que X es un G_δ absoluto si para todo espacio Y tal que existe una inmersión $f : X \to Y$ tal que $f(X)$ es denso en Y entonces X es un G_δ de Y.*

Definición 1.79 *Una compactificación de un espacio topológico X es una pareja (H, f) donde H es un espacio compacto Hausdorff y f es una inclusión de X como un espacio denso de H.*

Definición 1.80 *Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si para todo cerrado A de X y $x \notin A$ existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(A) = 1$ y $f(x) = 0$.*

Definición 1.81 *Llamaremos espacio de Tychonoff a un espacio topológico X que es T_1 y completamente regular.*

Definición 1.82 *Sea X un espacio de Tychonoff (Definición 1.81). Consideremos el conjunto $C(X) = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ es continua}\}$ y definimos la siguiente función $\beta : X \to [0,1]^\alpha$ como $\beta(x) = [f(x)]_{f \in C(X)}$ donde α es la cardinalidad de $C(X)$. La compactificación de Stone-Čech de X es la cerradura de $\beta(X)$ en $[0,1]^\alpha$.*

1.9. Propiedad del punto fijo

Más a delante hablaremos de que, los retractos preservan la propiedad del punto fijo, por eso en esta sección hablaremos un poco de esta propiedad, dando algunos ejemplos de espacios que la tienen.

Definición 1.83 *Se dice que un espacio X tiene la propiedad del punto fijo (ppf) si para toda función $f : X \to X$ $\exists x \in X$ t.q. $f(x) = x$.*

Veamos algunos ejemplos de espacios con esta propiedad.

Ejemplo 1.84 *El intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua y supongamos que $f(x) \neq x$ $\forall x \in [0, 1]$. Definimos los siguientes conjuntos $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) < x\}$ y $B = \{x \in [0, 1] \mid f(x) > x\}$. Nótese que A es no vacío, ya que si lo fuera, B tendría un elemento más grande que 1, lo que no puede pasar ya que los valores de f no se salen del intervalo $[0, 1]$. También B es no vacío, ya que si lo fuera, A tendría un elemento mas pequeño que 0, lo que no puede pasar ya que los valores de f no se salen del intervalo $[0, 1]$. Estos conjuntos son claramente disjuntos y cumplen que $A \cup B = [0, 1]$. Ahora demostraremos que A y B son cerrados.

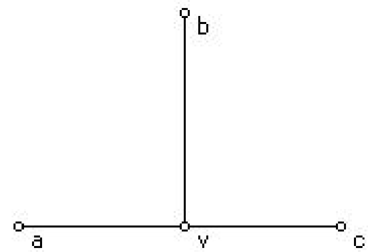
Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de elementos de A con límite x. Por la definición de A tenemos que $f(x_n) < x_n$. Por hipótesis tenemos que f es continua, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty}(x_n))$. Juntando estos resultados obtenemos:

$f(x_n) < x_n$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty}(x_n)$ entonces $f(\lim_{n\to\infty}(x_n)) \leq \lim_{n\to\infty}(x_n)$ entonces $f(x) \leq x$ entonces $f(x) < x$.

Lo que nos dice que $x \in A$. Por lo tanto A es cerrado. Análogamente se puede repetir el argumento para B. Por lo tanto X es disconexo. Lo que es una contradicción, ya que el intervalo $[0, 1]$ es conexo. Por lo tanto el intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo.

Gracias al ejemplo 1.84 y al hecho de que todo arco es homeomorfo al $[0, 1]$, tenemos que todo arco tiene la propiedad del punto fijo.

Definición 1.85 *Un triodo simple T es un espacio homeomorfo a la siguiente figura:*



Ejemplo 1.86 *Veamos que un triodo simple T tiene la propiedad del punto fijo.*

Para esto supongamo que T no tiene la propiedad del punto fijo. Sea $f : T \to T$. Por hipótesis sabemos que $f(v) \neq v$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $f(v) \in av - v$. Definimos $A = \{x \in av - v \mid f(x) \in av\}$, Por la continuidad de f sabemos que $A \neq \phi$. Definimos las siguientes funciones:

i) $g : av \to T$ dada por $g(x) = f(x)$

ii) $h : T \to av$ dada por $h(x) = \begin{cases} x \ si \ x \in av \\ v \ si \ x \notin av \end{cases}$

Es claro que ambas funciones son continuas, con esto obtenemos la siguiente función continua $\gamma : av \to av$ dada por $\gamma(x) = (h \circ g)(x)$. Como av es un arco, entonces existe $x_0 \in av$ tal que $\gamma(x_0) = x_0$. Por otro lado tenemos que para toda $x \in av$, $h(x) = x$, entonces

$x_0 = \gamma(x_0) = h(g(x_0)) = h(f(x_0)) = f(x_0)$.

Por lo tanto obtenemos que $x_0 = f(x_0)$.

1.10. Espacio Cociente

Esta sección es muy importante para esta tesis, ya que este concepto de Espacio Cociente será muy indispensable para los resultados de los capítulos

3 y 4. Introduciremos este concepto, y hablaremos de algunas propiedades que hereda el Espacio Cociente.

Definición 1.87 *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* P *una partición de* X, *y* $q : X \to P$ *tal que* $q(x)$ *es el elemento de* P *que contiene a* $\{x\}$.

El espacio cociente es el espacio X/P *con la siguiente topología:*

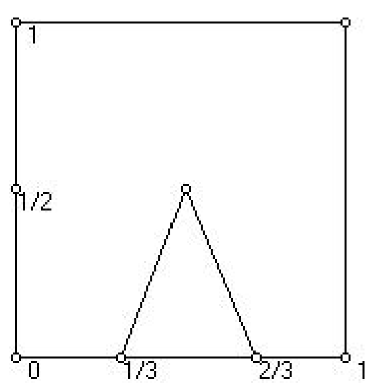
$\partial = \{U \subseteq P \mid q^{-1}(U) \subseteq \tau\}$.

Definición 1.88 *Sean* (X, τ) *y* (Y, σ) *espacios topológicos tales que* $X \cap Y = \phi$. *Definimos la suma* $X \cup Y$ *de* X *y* Y *como el espacio topológico* $(X \cup Y, \gamma)$, *donde* $U \in \gamma$ *si y sólo si* $U \cap X \in \tau$ *y* $U \cap Y \in \sigma$.

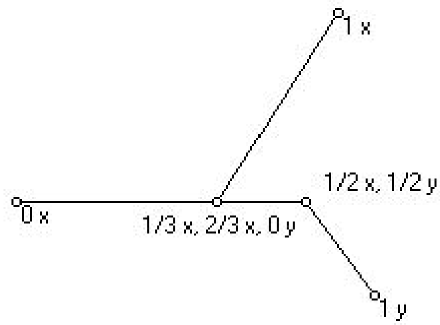
Definición 1.89 *Sean* (X, τ) *y* (Y, σ) *espacios topológicos,* $A \subset X$ *cerrado y* $f : A \to Y$ *una función continua. El espacio de adjunción* $X \cup_f Y$ *es el espacio cociente* $X \cup Y/P$ *donde*

$P = \{\{w\} \mid w \in (X \setminus A) \cup (Y \setminus f(A))\} \cup \{\{y\} \cup f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\}$.

Ejemplo 1.90 *Sea* $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$, $A = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ *y consideramos la siguiente función*



Siguiendo la definición de espacios adjunción lo que tenemos que hacer, para contruir el espacio de adjunción, es identificar a cada $a \in A$ *con su* $f(a)$. *Entonces lo que obtenemos es el siguiente espacio:*



Sea π una propiedad de espacios topológicos. Decimos que el espacio de adjunción Z preserva la propiedad π si y sólo si Z tiene la propiedad π cuando X y Y, ambos, la tengan.

Lema 1.91 *Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset X$ cerrado, $f : A \to Y$ una función continua y $Z = X \cup_f Y$ su espacio de adjunción. Sea Z^* un subespacio de Z entonces existen subespacios $X^* \subseteq X$ y $Y^* \subseteq Y$, $A^* \subset X^*$ cerrado y $g : A^* \to Y^*$ una función continua tales que $Z^* = X^* \cup_g Y^*$.*

Demostración. Sea $X^* = q^{-1}(Z^*) \cap X$ y $Y^* = q^{-1}(Z^*) \cap Y$ donde q es la función definida en la Porposición 1.87 y definimos $A^* = X^* \cap A$ y $g = f|_{A^*} : A^* \to Y^* \cap f(A)$.Consideramos la partición

$P = \{\{w\} \mid w \in (X \setminus A) \cup (Y \setminus f(A))\} \cup \{\{y\} \cup g^{-1}(y) \mid y \in g(A)\}$ de $X^* + Y^*$.

Es claro que $Z^* = X^* \cup_g Y^*$. ■

Proposición 1.92 *Sean X y Y ambos con alguna de las siguientes propiedades:*

a) Compacto.

b) Lindelöf.

c) Normal.

d) Completamente normal.

e) Hausdorff compacto.

Entonces el espacio de adjunción $Z = X \cup_f Y$ preserva estas propiedades.

Demostración. a) Suponemos que X y Y son compactos. Entonces vamos a demostrar que Z es compacto.

Veamos primero que $(X \cup Y, \gamma)$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $(X \cup Y, \gamma)$, entonces $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap X = \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap X \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U} \cap Y = \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap Y \neq \emptyset\}$ son cubiertas abiertas de X y Y respectivamente. Por hipótesis X y Y son compactos, entonces existen $\mathcal{U}_1^*$ subcubierta finita de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2^*$ subcubierta finita de $\mathcal{U}_2$. Entonces $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}_1^* \cup \mathcal{U}_2^*$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto $(X \cup Y, \gamma)$ es compacto. Z es la imagen continua de $(X \cup Y, \gamma)$, entonces Z es compacto (Proposición 1.49).

b) Suponemos que X y Y son de Lindelöf. Entonces vamos a demostrar que Z es de Lindelöf.

Veamos primero que $(X \cup Y, \gamma)$ es de Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $(X \cup Y, \gamma)$, entonces $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap X = \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap X \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U} \cap Y = \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap Y \neq \emptyset\}$ son cubiertas abiertas de X y Y respectivamente. Por hipótesis X y Y son Lindelöf, entonces existen $\mathcal{U}_1^*$ subcubierta numerable de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2^*$ subcubierta numerable de $\mathcal{U}_2$. Entonces $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}_1^* \cup \mathcal{U}_2^*$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Por lo tanto $(X \cup Y, \gamma)$ es de Lindelöf. Z es la imagen continua de $(X \cup Y, \gamma)$, entonces Z es Lindelöf (Proposición 1.50).

c) Sean H_1 y H_2 cerrados ajenos de Z. Consideramos $q^{-1}(H_1) \cap Y \subset V_1$ y $q^{-1}(H_2) \cap Y \subset V_2$ con V_1 y V_2 abiertos en Y y $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$, donde q es la función definida en la Proposición 1.87. Como $f^{-1}(V_i)$ es abierto en A y X es normal, entonces $f^{-1}(V_i) = W_i \cap A$ donde W_i es abierto en X para $i = 1, 2$ y además $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \phi$.

Definimos $K_i = (\varphi^{-1}(H_i) \cap X) \cup (\overline{W_i} \cap Fr(A))$ para $i = 1, 2$. Observemos que K_i son cerrados en X, ya que son union finita de cerrados, y además $K_1 \cap K_2 = \phi$, ya que los H_i eran cerrados ajenos, y por como escogimos a W_i tenemos que: $(\overline{W_1} \cap Fr(A)) \cap (\overline{W_2} \cap Fr(A)) = \phi$.

Por hipótesis X es normal, entonces existen abiertos U_i de X tales que $K_i \subset U_i$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Ahora definimos para $i = 1, 2$ los siguientes conjuntos: $J_i = V_i \cup (W_i \cap A) \cup (U_i \setminus A)$.

Primera afirmación: J_i es abierto. Como V_i es abierto y $(U_i \setminus A)$ también lo es. Sólo nos falta ver que si $x \in W_i \cap A$ entonces existe un abierto $B(x) \subset J_i$.

Sea $x \in W_i \cap A$, entonces $x \in A$. Consideremos dos casos:

i) $x \in Int(A)$. Entonces $x \in W_i \cap int(A) \subseteq W_i \cap A.$

ii) $x \in Fr(A)$. Entonces $x \in W_i \cap Fr(A) \subset U_i$, por lo tanto $x \in W_i \cap A.$

Veamos que $W_i \cap U_i \subset (W_i \cap A) \cup (U_i \setminus A)$:

Sea $w \in W_i \cap U_i$ entonces $\begin{cases} \text{Si } x \in A \text{ entonces } x \in W_i \cap A \\ \text{Si } x \notin A \text{ entonces } x \in U_i \setminus A \end{cases}$.

Segunda afirmación $J_1 \cap J_2 = \emptyset$: $J_1 \cap J_2 = (V_1 \cup (W_1 \cap A) \cup (U_1 \setminus A)) \cap (V_2 \cup (W_2 \cap A) \cup (U_2 \setminus A) = (V_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap (W_2 \cap A)) \cup (V_1 \cap (U_2 \setminus A)) \cup ((W_1 \cap A) \cap V_2) \cup ((W_1 \cap A) \cap (W_2 \cap A)) \cup ((W_1 \cap A) \cap (U_2 \setminus A)) \cup ((U_1 \setminus A) \cap V_2) \cup ((U_1 \setminus A) \cap (W_2 \cap A)) \cup ((U_1 \setminus A) \cap (U_2 \setminus A))$.

Veremos que cada una de las intersecciones es vacía.

i) $(V_1 \cap V_2) = \emptyset$

ii) $(V_1 \cap (W_2 \cap A)) = \emptyset$ ya que $V_1 \subseteq Y$ y $(W_2 \cap A) \subseteq X$

iii) $(V_1 \cap (U_2 \setminus A)) = \emptyset$ ya que $V_1 \subseteq Y$ y $(U_2 \setminus A) \subseteq X$

iv) $(W_1 \cap A) \cap V_2 = \emptyset$ ya que $(W_1 \cap A) \subseteq X$ y $V_2 \subseteq Y$

v) $(W_1 \cap A) \cap (W_2 \cap A) = \emptyset$ ya que $(W_1 \cap A) = f^{-1}(V_1)$ y $(W_2 \cap A) = f^{-1}(V_2)$

vi) $(W_1 \cap A) \cap (U_2 \setminus A) = \emptyset$ ya que $(W_1 \cap A) \subseteq A$ y $(U_2 \setminus A) \subseteq (X \setminus A)$

vii) $(U_1 \setminus A) \cap V_2 = \emptyset$ ya que $(U_1 \setminus A) \subseteq X$ y $V_2 \subseteq Y$

viii) $(U_1 \setminus A) \cap (W_2 \cap A) = \emptyset$ ya que $(U_1 \setminus A) \subseteq (X \setminus A)$ y $(W_2 \cap A) \subseteq A$

ix) $(U_1 \setminus A) \cap (U_2 \setminus A) = \emptyset$ ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Tercera afirmación $\varphi^{-1}(\varphi(J_i)) = J_i$: Bastara probar que $\varphi^{-1}(\varphi(J_i)) \subseteq J_i$

Sea $w \in \varphi^{-1}(\varphi(J_i))$, entonces $\varphi(w) \in \varphi(J_i) \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(z)$ con $z \in J_i = V_i \cup (W_i \cap A) \cup (U_i \setminus A)$

i)Supongamos que $z \in V_i$ y consideremos las siguientes posibilidades

a) $z \notin f(A)$ entonces $\varphi(z) = \{z\} = \varphi(w)$ entonces $z = w$ entonces $w \in J_i$

b) $z \in f(A)$ entonces $\varphi(z) = \{z\} \cup f^{-1}(z)$. Entonces, o bien $w = z \in J_i$ ó $f(w) = z$ entonces $z \in V_i$ y $w \in f^{-1}(V_i) = W_i \cap A \subseteq J_i$.

ii) Si $z \in W_i \cap A = f^{-1}(V_i)$ entonces $\varphi(z) = \{f(z)\} \cup f^{-1}(f(z))$. Si $w = f(z)$, entonces$w \in V_i \subseteq J_i$. Si $f(w) = f(z)t$ entonces $f(w) \in V_i$ entonces $w \in f^{-1}(V_i) = W_i \cap A \subseteq J_i$.

iii) Si $z \in U_i \setminus A$ entonces $\varphi(z) = \{z\}$ entonces $\varphi(w) = \{w\}$ entonces $w = z \in J_i$

Gracias a la tercera afirmación obtenemos que $\varphi(J_i)$ es abierto.

Para terminar la demostración falta ver que $H_i \subseteq \varphi(J_i)$. Sea $h \in H_i$, entonces $\varphi^{-1}(h) \cap Y \subseteq V_i \subseteq J_i$ y $\varphi^{-1}(h) \cap X \subseteq H_i \subseteq U_i \subseteq J_i$, entonces $\varphi^{-1}(h) \in J_i$. Por lo tanto, usando la afirmarción iii) obtenemos que: $h = \varphi(\varphi^{-1}(h)) \in \varphi(J_i)$. Por lo tanto Z es normal.

d) Sea Z' subespacio de Z, entonces por el Lema 1.91 Z' es el espacio de adjunción de X' y Y', para algunos $X' \subset X$ y $Y' \subset Y$. Por hipotesis X y Y son completamente normales por lo tanto X' y Y' son normales. Ahora, usando el inciso a) de la Proposición 1.92 obtenemos que A es normal. Por lo tanto Z es completamente normal.

e) Como X y Y son Hausdorff compactos, entonces son normales, por el inciso c) y a) de esta proposisción Z es normal y compacto, sabemos que todo espacio normal es Hausdorff entonces Z es Hausdorff compacto. ■

Capítulo 2

Retractos

En este capítulo hablaremos de los conceptos de retracto, de retracto por vecindades, y de algunas propiedades. Este capitulo nos permitirá hablar más adelante de extensores absolutos y de retractos absolutos.

2.0.1. Definiciones

Definición 2.1 *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$.*

i) Se dice que A es un retracto *de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para toda $a \in A$. A la función r le llamamos* retracción.

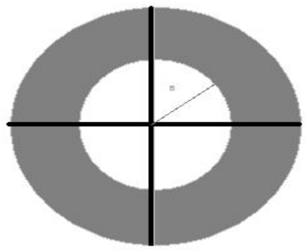
ii) Se dice que A es un retracto por vecindades *de X si existe un abierto $U \subset X$, tal que $A \subset U$ y A es retracto de U.*

Es claro que todo retracto es retracto por vecindades.

Ejemplo 2.2 *a) Cualquier punto a de un espacio X es un retracto de X ya que la función $f : X \to \{a\}$ definida como $f(x) = a$ cumple con la defnición de retracción.*

b) Sea $0 < n < 1$ y

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ n < \|(x, y)\| < 1\} \subset D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \ \|\vec{x}\| \leq 1\}$ *como en la siguiente figura*



$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \|(x,y)\| = 1\}$ *es un retracto de X ya que podemos definir la siguiente función:*

$f : X \rightarrow S^1$ *como* $f(m\cos(\theta), m\sin(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. *Como esta función la podemos definir para cualquier m con $0 < m < 1$ obtenemos que S^1 es retracto por vecindades de D. Sin embargo el Teorema de Brower* [$Willard$*, pag. 236 teorema 34.6*] *nos dice que S^1 no es retracto de D.*

Definición 2.3 *Sean X y Y espacios topológicos , $A \subseteq X$ y $f : A \rightarrow Y$ una función contínua. Decimos que f tiene una extensión sobre X si existe $F : X \rightarrow Y$ una función contínua tal que $F|_A = f$.*

2.0.2. Propiedades de los retractos

Proposición 2.4 *Un subespacio A de un espacio topológico X es un retracto de X si y sólo si para cualquier espacio Y, toda función $g : A \rightarrow Y$ tiene una extensión sobre X.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $r : X \rightarrow A$ una retracción de X en A. Entonces, la composición $g \circ r : X \rightarrow Y$ extiende a g. En efecto, sea $a \in A$, entonces $g \circ r(a) = g(r(a)) = g(a)$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis sabemos que para todo espacio Y, toda función $g : A \rightarrow Y$ tiene una extensión sobre X, entonces definimos $Y = A$ y $g = Id_A$, con esto obtenemos que $Id_A : A \rightarrow A$ tiene una extensión $r : X \rightarrow A$, por lo tanto A es retracto de X. ■

Definición 2.5 *Sea X un espacio topológico. Una función $e : X \to X$ contínua es idempotente si $e \circ e = e$.*

Proposición 2.6 *Sean $r : X \to A$ una retracción de X en A y $h : A \to X$ la inclusión de A en X. Entonces la función $e = h \circ r : X \to X$ es idempotente.*

Demostración. Como r es una retracción tenemos que
$r \circ h(a) = r(h(a)) = r(a) = a$ para toda $a \in A$.
Ahora
$e \circ e = (h \circ r) \circ (h \circ r) = h \circ (r \circ h) \circ r = h \circ r = e$.
Lo que prueba que e es idempotente. ■

Proposición 2.7 *Sean $e : X \to X$ una función contínua idempotente y $e(X)=A$. Entonces la función e es una retracción de X sobre A.*

Demostración. Como e es idempotente, tenemos que $e \circ e = e$. Sea $a \in A$. Por hipótesis $e(X) = A$, entonces existe $x \in X$ tal que $a = e(x)$, entonces $e(a) = e(e(x)) = (e \circ e)(x) = e(x) = a$. Lo que prueba que e es retracción. ■

Proposición 2.8 *Todo retracto de un espacio de Hausdorff X es cerrado en X.*

Demostración. Sean X un espacio de Hausdorff y un retracto A de X. Bastará probar que $B = X \setminus A$ es abierto.

Sean $r : X \to A$ una retracción y $b \in B$. Entonces $r(b) = a$ para algún $a \in A$. Por la elección de A y B tenemos que $a \neq b$. Como X es de Hausdorff, entonces existen abiertos ajenos U y V de X tales que $a \in U$ y $b \in V$. Por la continuidad de r y teniendo que A tiene la topología herdada tenemos que $r^{-1}(U \cap A)$ es un abierto de X que contiene a a.

Sea $W = r^{-1}(U \cap A) \cap V$. Probaremos que $W \subset B$. Para esto tomamos $x \in W$. Entonces $x \in V$ y $x \in r^{-1}(U \cap A)$, por lo que $r(x) \in U$, de aquí se sigue que $r(x) \neq x$, ya que $U \cap V = \phi$, entonces $x \in B$. Por lo tanto A es cerrado. ■

El siguiente ejemplo muestra que si el espacio X no es de Hausdorff la Proposición 2.8 no es cierta.

Ejemplo 2.9 *Sea $X = ([0,1]$ con la topología cofinita $\mu)$.*

Primero demostraremos que $[0,1]$ no es de Hausdorff con esta topología.

Sean x, $y \in X$. Consideremos U y V vecindades abiertas de x y y respectivamente. Supongamos que $U \cap V = \phi$, esto significa que $V \subset U^c$, entonces U^c es finito, lo que significa que V es finito, pero esto no puede pasar ya que V^c es finito, por lo tanto X no es de Hausdorff.

Veamos que la Proposición 2.8 no se cumple en este caso.

Veremos que $(0,1)$ es un retracto de $[0,1]$. Sea $\alpha : [0,1] \to (0,1)$ definida como $\alpha(x) = \begin{cases} x & si\ x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & si\ x \in \{0,1\} \end{cases}$.

Para ver que α es una retracción demostraremos que α es continua. Sea $U \subset (0,1)$ abierto entonces $U^c = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Consideremos dos casos:

caso 1) $\frac{1}{2} \in U$. Entonces $\alpha^{-1}(U) = U \bigcup \{0,1\}$ que es abierto

caso 2) $\frac{1}{2} \notin U$. Entonces $\alpha^{-1}(U) = U$ que es abierto.

Ahora es claro que $\alpha(u) = u\ \forall u \in (0,1)$ por lo que obtenemos que α es retracción. Finalmente, nótese que $(0,1)$ no es cerrado respecto a μ.

Proposición 2.10 *Sean X un espacio topológico y A un retracto de X.*

1) Si X tiene la propiedad del punto fijo, entonces también A la tiene.

2) Si X es localmente conexo, entonces también A lo es.

Demostración. 1) Sean $A \subset X$ y $r : X \to A$ una retracción.

Sea $g : A \to A$ una función continua.

Consideramos la función $h = i \circ g \circ r : X \to X$, entonces existe $x \in X$ tal que $h(x) = x$, entonces

$x = h(x) = i(g(r(x))) = g(r(x)) \in A$ por lo tanto $x \in A$ y $r(x) = x$ entonces $x = h(x) = g(x)$. Por lo tanto g tiene la propiedad del punto fijo.

2) Sea X un espacio localmente conexo y A un retracto de X , entonces existe $r : W \to A$ una retracción. Sea $p \in A$ y N vecindad abierta de p en A, como r es continua obtenemos que $r^{-1}(N)$ es un abierto de X tal que $p \in r^{-1}(N)$.

Ahora, por hipótesis, X es localmente conexo, entonces $\exists M \subset r^{-1}(N)$ abierto y conexo tal que $p \in M$. Nótese que $M \cap A \subset r(M)$, como M es abierto de X, $M \cap A$ es abierto en A y por lo tanto $p \in Int(r(M))$. Por otra parte $r(M)$ es conexo. Esto demuestra que A es conexo en pequeño p para todo $p \in A$. Entonces por la Proposición 1.31, A es localmente conexo. ■

Capítulo 3

Extensores Absolutos

Empezaremos este capítulo con algunas definiciones, para después hablar de algunas propiedades importantes relacionadas con estos espacios. Para terminar, dedicaremos una sección de este capítulo para hablar de las propiedades de extensores absolutos y extensores absolutos por vecindades para la clase η de lo espacios normales.

3.1. Definiciones

Definición 3.1 *Decimos que una clase* $\mathcal{C}$ *de espacios topológicos es débilmente hereditaria si cumple lo siguiente:*

i) Si $X \in \mathcal{C}$ *y* Y *es homeomorfo a* X*, entonces* $Y \in \mathcal{C}$.

ii) Si $X \in \mathcal{C}$ *y* $F \subseteq X$ *es cerrado, entonces* $F \in \mathcal{C}$.

De aquí en adelante $\mathcal{C}$ denotará a una clase de espacios topológicos débilmente hereditaria.

Definición 3.2 *Sean* X *y* Y *espacios topológicos y* $A \subseteq X$ *cerrado.*

i) Decimos que A *tiene la propiedad de extensión en* X *con respecto a* Y *si toda función continua* $f : A \to Y$ *tiene una extensión* $g : X \to Y$.

ii) Decimos que A *tiene la propiedad de extensión por vecindades en* X *con respecto a* Y *si toda función continua* $f : A \to Y$ *tiene una extensión* $g : W \to Y$ *donde* W *es abierto en* X *con* $A \subset W$.

Definición 3.3 *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de espacios topológicos débilmente hereditaria.*

i) Y es un extensor absoluto para la clase C *(Y es EA para la clase* C*) si todo subespacio cerrado A de cualquier elemento X de* C*, tiene la propiedad de extensión en X con respecto a Y.*

ii) Se dice que un espacio Y es un extensor absoluto por vecindades para la clase C *(Y es EAV para la clase* C*) si todo subespacio cerrado A de cualquier elemento X de* C *tiene la propiedad de extensión por vecindades en X con respecto a Y.*

3.2. Propiedades de los EA y de los EAV

Partiremos estas propiedades en dos. Primero hablaremos un poco solo de extensores absolutos, para después hablar de extensores absolutos por vecindades. Para terminar mencionaremos un importante teorema, el Teorema de Extensión de Dugundji.

3.2.1. Extensores Absolutos

Proposición 3.4 *Todo EA para la clase* C *es un EAV para la clase* C*.*

Demostración. Esto es claro, ya que si Y es un EA para la clase C y $f : A \to Y$ es una función continua definida en un subespacio cerrado A de X, X elemento de C, f se puede extender sobre X. Como X es un abierto que contiene a A, obtenemos el resultado deseado. ■

Proposición 3.5 *Sea β es una subclase débilmente hereditaria de la clase* C*. Entonces todo EA (respectivamente EAV) para la clase* C *es un EA para la clase β.*

Demostración. Sean Y un EA para la clase C, A subespacio cerrado de X, X elemento de β y una función $f : A \to Y$. Como $\beta \subset$ C y Y es EA para la clase C, entonces f tiene una extensión sobre X (sobre un subespacio abierto de X) lo cual prueba la proposición. ■

Teorema 3.6 *Un producto topológico de extensores absolutos para la clase* C *es un extensor absoluto para la clase* C.

Demostración. Sean $\{Y_\mu \mid \mu \in M\}$ una colección de extensores absolutos para la clase C y $Y = \prod_{\mu \in M} Y_\mu$. Sean $X \in$ C, A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Sean $\mu \in M$ y $P_\mu : Y \to Y_\mu$ la proyección en la $\mu -$ésima coordenada. Consideremos la siguiente función $f_\mu = P_\mu \circ f : A \to Y_\mu$. Como Y_μ es un EA para la clase C entonces f_μ tiene una extensión $F_\mu : X \to Y_\mu$. Utilizando F_μ podemos definir $G : X \to Y$ como sigue $P_\mu(G(x)) = F_\mu(x)$. Veamos que G es extensión de f. Gracias al lema 1.14, G es continua ya que cada una de sus proyecciones es continua (la proyección $\mu -$ésima de G es $F_\mu(X)$).

Sea $a \in A$. Entonces $P_\mu(G(a)) = F_\mu(a) = P_\mu(f(a))$. ■

Proposición 3.7 *Todo retracto de un EA para la clase* C *es un EA para la clase* C*.*

Demostración. Sean Z un EA para la clase C y Y un retracto de Z con $r : Z \to Y$ una retracción. Sean $X \in$ C, A cerrado de X y $f : A \to Y$ función continua. Sean $i : Y \to Z$ la inclusión y $g = i \circ f : A \to Z$. Como Z es un EA para la clase C, obtenemos que g tiene una extensión $G : X \to Z$. La función $m = r \circ G : X \to Y$ es continua ya que es composición de funciones continuas. Sea $a \in A$. Entonces $m(a) = r \circ G(a) = r \circ (i \circ f(a)) = r(i(f(a))) = r(f(a)) = f(a)$. Se sigue de aquí que m es una extensión de f. ■

Proposición 3.8 *Sea Y un EA para la clase* C*. Supongamos que $Y = Y_1 \cup Y_2$ donde Y_1, Y_2 son subespacios cerrados de Y y $Y_1 \cap Y_2$ es un EA para la clase* C*. Entonces Y_1, Y_2 son EA para la clase* C*.*

Demostración. Probaremos que Y_1 es un EA para la clase C. Sean $X \in$ C, A un cerrado de X y $f : A \to Y_1$ una función continua. Como Y es un EA para la clase C, la composición $\phi = i \circ f : A \to Y$ donde i: $Y_1 \to Y$ es la inclusión, tiene una extensión $\phi^* : X \to Y$. Ya que X es normal, existe un abierto V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset X$.

Sean $\varphi = \phi^*|_{\overline{V}}$, $B_1 = \varphi^{-1}(Y_1)$ y $B_2 = \varphi^{-1}(Y_2)$.

Entonces

i) B_1 y B_2 son cerrados en $\overline{V}$ y por lo tanto son cerrados en X

ii) $\overline{V} = B_1 \cup B_2$ y $A \subset B_1$

iii) $\varphi(B_1 \cap B_2) \subset Y_1 \cap Y_2$.

Por ser cerrados en X, B_2 y $B_1 \cap B_2$ pertenecen a la clase C. Entonces $\varphi|_{B_1 \cap B_2} : B_1 \cap B_2 \to Y_1 \cap Y_2$ tiene una extensión $\kappa : X \to Y_1 \cap Y_2$.

Sea $g : X \to Y_1$ definida como $g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & si\ x \in B_1 \\ \kappa(x), & si\ x \in B_2 \end{cases}$

La continuidad de g se sigue del hecho de que $\kappa(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in B_1 \cap B_2$.

Sea $a \in A$. Entonces $g(a) = \varphi(a) = \phi^*(a) = \phi(a) = i(f(a)) = f(a)$ lo que prueba que g es una extensión de f. ■

3.2.2. Extensores Absolutos por Vecindades.

Proposición 3.9 *El producto topológico de una colección finita de EAV´s para la clase* C *es un EAV para la clase* C*.*

Demostración. Sean $\{Y_\mu \mid \mu \in M\}$ una colección finita de EAV´s para la clase C y $Y = \prod_{\mu \in M} Y_\mu$. Sean $X \in$ C , A cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Ahora para toda $\mu \in M$, construimos la función $f_\mu = P_\mu \circ f : A \to Y_\mu$, donde $P_\mu : Y \to Y_\mu$ es la proyección en la $\mu - ésima$ coordenada. Como Y_μ es un EAV para la clase C, entonces f_μ tiene una extensión $F_\mu : W_\mu \to Y_\mu$ con W_μ abierto de X y $A \subset W_\mu$.

Como M es finito entonces $W = \bigcap_{\mu \in M} W_\mu$ es un abierto de X que contiene a A. Definimos $G : W \to Y$ como $P_\mu(G(x)) = F_\mu(x)$. Otra vez, gracias al Lema 1.14, G es continua. Sea $a \in A$. Entonces $P_\mu(G(a)) = F_\mu(a) = P_\mu(f(a))$. Así, G es extensión de f . ■

Proposición 3.10 *Todo retracto por vecindades de un EAV para la clase* C *es un EAV para la clase* C.

Demostración. Sean Z un EAV para la clase C y Y un retracto por vecindades de Z. Sean $W \subset Z$ abierto tal que $Y \subset W$ y $r : W \to Y$ una retracción. Sean $X \in$ C , A cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua Sean $i : Y \to Z$ la inclusión y $g = i \circ f : A \to Z$. Como Z es un EAV para la clase C, obtenemos que g tiene una extensión $G : V \to Z$ con $A \subset V \subset X$, y V abierto. Sea $U = G^{-1}(W)$, es claro que $A \subset U$.

Definimos $\psi : U \to Y$ como $\psi(u) = r(G(u))$ para toda $u \in U$. Veamos que ψ es una extensión de f :

La continuidad de ψ se sigue del hecho de que la composición de funciones continuas es continua. Sea $a \in A$, entonces $\psi(a) = r \circ G(a) = r \circ (i \circ f(a)) = r(i(f(a))) = r(f(a)) = f(a)$. ■

Proposición 3.11 *Todo subespacio abierto de un EAV para la clase* C *es un EAV para la clase* C.

Demostración. Sean Y un EAV para la clase $\mathcal{C}$, W un subespacio abierto de Y , A subespacio cerrado de un espacio X, X elemento de la clase $\mathcal{C}$ y $f : A \to W$. Como Y es un EAV para la clase $\mathcal{C}$, la composición $\varphi = i \circ f : A \to Y$,donde i denota la inclusión de A en Y, tiene una extensión $\psi : V \to Y$ con $V \subset X$ abierto tal que $A \subset V$.

Consideremos la imagen inversa $U = \psi^{-1}(W)$. Como U es abierto en V y este es abierto en X entonces U es abierto de X.

Definimos $g : U \to W$ como $g(x) = \psi(x)$ para toda $x \in U$. Sea $a \in A$. Entonces $g(a) = \psi(x) = f(a)$. Lo que prueba que g es una extensión de f. ■

Para las siguientes dos proposiciones pediremos que los elementos de la clase $\mathcal{C}$ sean normales.

Proposición 3.12 *Sean dos subespacios abiertos Y_1 y Y_2 de Y con $Y = Y_1 \cup Y_2$. Si Y_1 y Y_2 son EAV´ para la clase $\mathcal{C}$ entonces Y también lo es.*

Demostración. Sean X elemento de la clase $\mathcal{C}$, A cerrado de X y $f : A \to Y$ función continua.

De la igualdad $A = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ obtenemos que $X = W_1 \cup W_2$ donde $W_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \setminus A)$ y $W_2 = f^{-1}(Y_2) \cup (X \setminus A)$. Además W_1 y W_2 son abiertos de X.

Como X es normal y $X = W_1 \cup W_2$, existen X_1 y X_2 cerrados de X tales que $X_1 \subset W_1$, $X_2 \subset W_2$ y $X = X_1 \cup X_2$ (vease Proposición 1.70).

Con esto obtenemos que $A = A_1 \cup A_2$ donde $A_1 = X_1 \cap A$ y $A_2 = X_2 \cap A$.

Por otro lado, por la forma en que definimos W_1 y W_2, obtenemos que $f(A_i) = Y_i$ con $i \in \{1, 2\}$.

Por la Proposición 3.11, $Y_1 \cap Y_2$ es un EAV para la clase $\mathcal{C}$, entonces la función $f|_{A_1 \cap A_2} : A_1 \cap A_2 \to Y_1 \cap Y_2$ tiene una extensión $\varphi : M \to Y_1 \cap Y_2$ con $A_1 \cap A_2 \subset M$, donde M es abierto de $X_1 \cap X_2$. Ahora, X es normal, entonces existe N abierto de $X_1 \cap X_2$ tal que $A_1 \cap A_2 \subset N \subset \overline{N} \subset M \subset X_1 \cap X_2$.

Entonces $A_1 \cap A_2 \subset \overline{N} \cap A \subset X_1 \cap X_2 \cap A = A_1 \cap A_2$ lo que nos dice que $\overline{N} \cap A = A_1 \cap A_2$........(1).

Definimos la función $g : \overline{N} \cup A_1 \to Y$ de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & si\ x \in \overline{N} \subset M \\ f(x), & si\ x \in A \end{cases}.$$

Para ver que g está bien definida nótese que si $x \in \overline{N} \cap A$, entonces por (1) $\varphi(x) = f(x)$. Esto prueba también que g es continua.

Por otra parte, $g(\overline{N} \cup A_i) \subset Y_i,\ i \in \{1,2\}$. Como Y_i es un EAV para la clase C podemos extender $g|_{\overline{N}\cup A_i} : \overline{N} \cup A_i \to Y_i$ a $h_i : V_i \to Y_i$ donde V_i es abierto en X_i y $\overline{N} \cup A_i \subset V_i$ con $i \in \{1,2\}$.

Gracias a la normalidad tenemos:

1) Existe Q_i abierto de X_i, tal que $\overline{N} \cup A_i \subset Q_i \subset \overline{Q_i} \subset V_i \subset X_i$ con $i \in \{1,2\}$.

2) Ya que $(X_1 \cap X_2) \setminus N$ y A son cerrados ajenos, existen D y E abiertos de X con $D \cap E = \emptyset$, tales que $(X_1 \cap X_2) \setminus N \subset D$ y $A \subset E$.

Definimos los siguientes cerrados $J_1 = \left(\overline{Q_1 \setminus X_2}\right) \cap \overline{E}$ y $J_2 = \left(\overline{Q_2 \setminus X_1}\right) \cap \overline{E}$. Con esto obtenemos que $J_1 \subset \overline{Q_1} \subset V_1 \subset X_1$ $i \in \{1,2\}$ y $J_1 \cap J_2 \subset \overline{Q_1} \cap \overline{Q_2} \subset X_1 \cap X_2 \cap \overline{E}$.

Como $\overline{E} \cap D = \emptyset$, entonces $\emptyset = \overline{E} \cap ((X_1 \cap X_2) \setminus N) = \overline{E} \cap (X_1 \cap X_2 \cap N^c)$. Lo que nos dice que si $x \in \overline{E} \cap (X_1 \cap X_2)$, entonces $x \in N$. Por lo tanto $\overline{E} \cap (X_1 \cap X_2) \subset N$ y $J_1 \cap J_2 \subset N$.

Definimos los siguientes cerrados $K_1 = J_1 \cup \overline{N}$, $K_2 = J_2 \cup \overline{N}$, entonces $K_i \subset V_i$ con $i \in \{1,2\}$ y $K_1 \cap K_2 = (J_1 \cap J_2) \cup (\overline{N} \cap J_1) \cup (\overline{N} \cap J_2) \cup \overline{N} = \overline{N}$. Sea $K = K_1 \cup K_2$, como $h_1|_{\overline{N}} = g|_{\overline{N}} = h_2|_{\overline{N}}$, podemos definir $h : K \to Y$ de la siguiente forma $h(x) = \begin{cases} h_1(x), & si\ x \in K_1 \\ h_2(x), & si\ x \in K_2 \end{cases}$.

Sea $a \in A$. Si $a \in A_1$, entonces $h(a) = h_1(a) = g(a) = f(a)$ y si $a \in A_2$, entonces $h(a) = h_2(a) = g(a) = f(a)$. Esto demuestra que h es una extensión de f.

Sólo falta probar que K contiene un abierto de X que contiene a A.

Consideremos $G = [(Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1) \cup N] \cap E$. Veremos que G es abierto en X.

Como E es abierto de X, basta ver que $H = [(Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1) \cup N]$ es abierto en X.

Se sigue de las definiciónes de N, Q_1 y Q_2 que existen abiertos B_0, B_1 y B_2 de X tales que:

1) $N = B_0 \cap X_1 \cap X_2$

2) $Q_1 = B_1 \cap X_1$

3) $Q_2 = B_2 \cap X_2$

Como $X = X_1 \cup X_2$, $Q_1 \setminus X_2 = B_1 \setminus X_2$, $Q_2 \setminus X_1 = B_2 \setminus X_1$, $N \subset Q_1$ y $N \subset Q_2$, entonces $N \subset B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Sea $x \in B_0 \cap B_1 \cap B_2$ consideremos todos los casos:

i) Si $x \in X_1 \cap X_2$ tenemos que $x \in N$

ii) Si $x \in X \setminus X_2$ entonces $x \in B_1 \cap (X \setminus X_2) = B_1 \setminus X_2$

iii) Si $x \in X \setminus X_1$ entonces $x \in B_2 \setminus X_1$.

Todo lo anterior nos dice que $B_0 \cap B_1 \cap B_2 \subset H$. Ahora usando los 3 casos junto con el hecho de que $N \subset B_0 \cap B_1 \cap B_2$, obtenemos que $H = (B_1 \setminus X_2) \cup (B_2 \setminus X_1) \cup (B_0 \cap B_1 \cap B_2)$, lo que prueba que H es abierto de X ya que los conjuntos en cada uno de los parentésis es abierto en X.

Ahora probaremos que $A \subset G$. Notemos que $A \subset E$. Escribimos $A = A \cap (X_1 \cap X_2) \cup A - (X_1 \cap X_2)$ y notamos que $A \cap (X_1 \cap X_2) = A_1 \cap A_2 \subset N$. Por otro lado $A - (X_1 \cap X_2) = (A - X_1) \cup (A - X_2) \subset (Q_2 - X_1) \cup (Q_1 - X_2)$.Por último, veremos que $G \subset K$. Se sigue de la definición de J_1 y J_2 que $((Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1)) \cap E \subset J_1 \cup J_2 \subset K_1 \cup K_2$. Por otra parte $N \cap E \subset N \subset K_1 \cap K_2 \subset K$. Con lo que queda demostrada la proposición. ■

Corolario 3.13 *Si un espacio Y es la unión de un número finito de subespacios abiertos cada uno de ellos es EAV para la clase* C*, entonces Y es EAV para la clase* C*.*

Proposición 3.14 *Sean Y_1 y Y_2 subespacios cerrados de un espacio Y . Supóngase que Y es un EAV para la clase* C*. Suponemos que $Y_1 \cup Y_2 = Y$ y $Y_1 \cap Y_2$ es un EAV para la clase* C*. Entonces Y_1 y Y_2 son EAV´ para la clase* C.

Demostración. Probaremos que Y_1 es un EAV para la clase C.

Sean X elemento de la clase C, A un cerrado de X y $f : A \to Y_1$ una función continua. Como Y es un EAV para la clase C, la composición

$\phi = i \circ f : A \to Y$, donde i: $Y_1 \to Y$ es la inclusión, tiene una extensión $\phi^* : U \to Y$ con U abierto de X tal que $A \subset U$.

Ya que X es normal, existe V abierto de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Sea $\varphi = \phi^*|_{\overline{V}}$.

Consideremos la imágenes inversas $B_1 = \varphi^{-1}(Y_1)$ y $B_2 = \varphi^{-1}(Y_2)$. Entonces B_1 y B_2 son cerrados en $\overline{V}$ y por lo tanto son cerrados en X. Además $\overline{V} = B_1 \cup B_2$, $A \subset B_1$ y $\varphi(B_1 \cap B_2) \subset Y_1 \cap Y_2$.

Como B_2 es un cerrado de X tenemos que B_2 también pertenece a la clase C , lo mismo podemos decir de $B_1 \cap B_2$, por lo que $\varphi|_{B_1 \cap B_2} : B_1 \cap B_2 \to Y_1 \cap Y_2$ tiene una extensión $\kappa : N \to Y_1 \cap Y_2$, con N abierto de B_2 tal que $B_1 \cap B_2 \subset N$. Ahora, como B_2 es normal entonces existe M abierto de B_2 que cumple $B_1 \cap B_2 \subset M \subset \overline{M} \subset N \subset B_2$. Entonces B_1 y $\overline{M}$ son dos cerrados de X y $B_1 \cap \overline{M} = B_1 \cap \overline{M} \cap B_2 = B_1 \cap B_2$.

Gracias a todo lo anterior podemos definir la siguiente función:

$g : B_1 \cup \overline{M} \to Y_1$ como $g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & si\ x \in B_1 \\ \kappa(x), & si\ x \in \overline{M} \end{cases}$

Sea $a \in A$, entonces $g(a) = \varphi(a) = \phi^*(a) = \phi(a) = i(f(a)) = f(a)$ lo que prueba que g es una extensión de f. Basta probar ahora, que $B_1 \cup \overline{M}$ contiene un abierto que contiene a A.

Consideremos $W = (B_1 \cup \overline{M}) \cap V$. Tenemos que $A \subset W \subset B_1 \cup \overline{M}$, por lo que solo necesitamos probar que W es abierto de X. Como $B_1 \cap B_2 \subset M$ y $\overline{V} = B_1 \cup B_2$ entonces tenemos $W = \left[(\overline{V} \setminus B_2) \cup M\right] \cap V = (V \setminus B_2) \cup (M \cap V)$. Como M es abierto de B_2 entonces existe un abierto Q de X tal que $M = Q \cap B_2$, por lo que obtenemos: $M \cap V \subset Q \cap V = Q \cap \overline{V} \cap V = [Q \cap (B_1 \cup B_2) \cap V] \subset [B_1 \cup (Q \cap B_2)] \cap V = (B_1 \cup M) \cap V = W$.

De aquí se sigue que:

$W = (V \setminus B_2) \cup (Q \cap V)$.Lo que dice que W es abierto de X. ■

Para la siguiente proposición pediremos una condición más fuerte para la clase $\mathcal{C}$, esta es que cada elemento de $\mathcal{C}$ sea completamente normal (véase Definción 1.71).

Proposición 3.15 *Sean Y_1 y Y_2 dos cerrados de una espacio Y con $Y_1 \cup Y_2 = Y$ y supongamos que Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son EAV para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y también lo es.*

Demostración. Sean $X \in \mathcal{C}$, A un cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Consideremos las imágenes inversas $A_1 = f^{-1}(Y_1)$ y $A_2 = f^{-1}(Y_2)$ en A. Entonces por la continuidad de f, A_1 y A_2 son cerrados de X y además $\left[\overline{(A_1 \setminus A_2)} \cap (A_2 \setminus A_1)\right] \cup \left[(A_1 \setminus A_2) \cap \overline{(A_2 \setminus A_1)}\right] = \emptyset$. Como X es completamente normal entonces existe U abierto de X tal que $A_1 \setminus A_2 \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus (A_2 \setminus A_1) = (X \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$.

Ahora definamos los siguientes cerrados $X_1 = \overline{U} \cup (A_1 \cap A_2)$ y $X_2 = (X \setminus U) \cup (A_1 \cap A_2)$.

Con todo esto obtenemos las siguientes relaciones $X_1 \cap A = A_1$, $X_2 \cap A = A_2$ y $X_1 \cup X_2 = X$.

Como $Y_1 \cap Y_2$ es un EAV para la clase $\mathcal{C}$ y $A_1 \cap A_2$ es cerrado en $X_1 \cap X_2$ que es elemento de $\mathcal{C}$, la función $f|_{A_1 \cap A_2} : A_1 \cap A_2 \to Y_1 \cap Y_2$ tiene una extensión $\phi : M \to Y_1 \cap Y_2$ donde M es un abierto de $X_1 \cap X_2$. Ahora $X_1 \cap X_2$ es normal, entonces existe un abierto N tal que $A_1 \cap A_2 \subset N \subset \overline{N} \subset X_1 \cap X_2$, entonces $A_1 \cap A_2 \subset \overline{N} \cap A \subset X_1 \cap X_2 \cap A = A_1 \cap A_2$ lo que nos dice que $\overline{N} \cap A = A_1 \cap A_2$. Definimos $g : \overline{N} \cup A \to Y$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} \phi(x), & si\ x \in \overline{N} \subset M \\ f(x), & si\ x \in A \end{cases}.$$

Como $g(\overline{N} \cup A_1) \subset Y_1$ y Y_1 es un EAV para la clase C, entonces $g|_{\overline{N} \cup A_1} : \overline{N} \cup A_1 \to Y_1$ tiene una extensión $h_1 : V_1 \to Y_1$ donde V_1 es un abierto de $\overline{N} \cup A_1$ que contiene a $\overline{N} \cup A_1$,de la misma forma $g|_{\overline{N} \cup A_2} : \overline{N} \cup A_2 \to Y_2$ tiene una extensión $h_2 : V_2 \to Y_2$ donde V_2 es un abierto de $\overline{N} \cup A_2$ que contiene a $\overline{N} \cup A_2$. Para $i = 1, 2$, gracias a la normalidad de X_i, existe un abierto Q_i tal que $\overline{N} \cup A_i \subset Q_i \subset \overline{Q_i} \subset V_i \subset X_i$. Como X es normal y $(X_1 \cap X_2) \setminus N$ y A son cerrados ajenos de X, entonces existen abiertos ajenos D y E en X tales que $(X_1 \cap X_2) \setminus N \subset D$ y $A \subset E$.

Definimos $J_1 = \left(\overline{Q_1 \setminus X_2}\right) \cap \overline{E}$, $J_2 = \left(\overline{Q_2 \setminus X_1}\right) \cap \overline{E}$, nótese que son cerrados en X. Es claro que $J_1 \subset V_1$, $J_2 \subset V_2$.

Veamos que $J_1 \cap J_2 \subset N$. Para esto observemos que $Ji \subseteq \overline{Q_i} \cap \overline{E} \subseteq X_i \cap \overline{E}$. Por lo que basta demostrar que $X_1 \cap X_2 \cap \overline{E} \subseteq N$, pero esto es claro ya que si $x \in \left((X_1 \cap X_2) \cap \overline{E}\right) \setminus N$, entonces $x \in D \cap \overline{E}$ lo que es una contradicción.

Definimos $K_1 = J_1 \cup \overline{N}$, $K_2 = J_2 \cup \overline{N}$ que son cerrados de X que cumplen $K_1 \subset V_1$, $K_2 \subset V_2$ y $K_1 \cap K_2 = \overline{N}$.

Sea $K = K_1 \cup K_2$. Gracias a que $h_1|_{\overline{N}} = g|_{\overline{N}} = h_2|_{\overline{N}}$ podemos definir $h : K \to Y$ de la siguiente forma $h(x) = \begin{cases} h_1(x), & si\ x \in K_1 \\ h_2(x), & si\ x \in K_2 \end{cases}$.

Es claro que h es una extensión de f, ya que si $a \in A_1$, entonces $h(a) = h_1(a) = g(a) = f(a)$. Ahora si $a \in A_2$, entonces $h(a) = h_2(a) = g(a) = f(a)$.

Para completar la demostración de la proposicón falta probar que K contiene un abierto de X que contiene a A. Para esto consideremos $G = [(Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1) \cup N] \cap E$. Es claro que G es abierto en X.

Ahora veremos que $G \subset K$. Se sigue de la definición de J_1 y J_2 que $((Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1)) \cap E \subset J1 \cup J2 \subset K_1 \cup K_2$. Por otra parte $N \cap E \subset N \subset K_1 \cap K_2 \subset K$. ■

Terminaremos esta sección con el siguiente teorema que es bastante importante y útil, sin embargo excluiremos su demostración en este texto. El teorema se conoce como Teorema de extensión de Dugundji. Su demostración se puede encontrar en $[Hu,$ capítulo 2 secc. 14].

Teorema 3.16 *Sea L un espacio topológico lineal, X un espacio metrizable, A cerrado de X. Si existe una función continua $f : A \to L$ entonces f tiene una extensión $g : X \to L$ tal que $g(X)$ está contenido en la envoltura convexa de $f(A)$ en L.*

3.3. Propiedades de los EA y EAV para la clase η de los espacios normales.

En esta sección hablamos de algunas propiedades importantes de los extensores absolutos y extensores absolutos por vecindades para esta clase de espacios. Mencionaremos resultados importantes como que el intervalo cerrado $[0, 1]$, y cualquier potencia de este, son un extensor absoluto para esta clase.

El siguiente Teorema se conoce como Teorema de Extensión de Tietze

Teorema 3.17 *El intervalo $I = [0, 1]$ de los números reales es un EA para la clase η de los espacios normales.*

Demostración. Sean $X \in \eta$, $A \subset X$, A cerrado y $f : A \to I$. Para demostrar el teorema, construiremos dos sucesiones de funciones continuas $f_n : A \to I$ y $g_n : X \to I$ con las siguientes propiedades:

i) $f_0(x) = f(x)\ \forall x \in X$

ii) $g_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\ \forall x \in X$

iii) $g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)\ \forall x \in X$

iv) $0 \leq f_n(x) \leq (\frac{2}{3})^n\ \forall x \in A$

Si construimos estas sucesiones se sigue de la propiedad ii) que $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)$ converge uniformemente y por lo tanto $g : X \to \mathbb{R}$ es continua. Además de la desigualdad (ii) se sigue que

$0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) \leq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^i = 1$ se cumple para toda $x \in X$.

De las propiedades i) y iii) se sigue que si $a \in A$ entonces $g_n(a) = f_n(a) - f_{n+1}(a)$ y de aquí $g(a) = \lim_{n \to \infty} g_0(a) + \ldots + g_n(a) = \lim_{n \to \infty} f_0(a) - f_1(a) + f_1(a) - \ldots - f_{n+1}(a) = \lim_{n \to \infty} f_0(a) - f_{n+1}(a) = f(a)$, ya que por (iv) $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(a) = 0$.

Esto demuestra que $g : X \to I$ es una extensión de f.

Para contruir las sucesiones recordemos lo siguiente: Para cualesquiera dos subconjutos cerrados ajenos B, C de un espacio normal X, tenemos $X_{B,C} : X \to [0,1]$ la función característica que satisface

$$X_{B,C}(x) = \begin{cases} 0, si\ x \in B \\ 1, si\ x \in C \end{cases}$$

Sea $f_0 = f$ y suponemos que f_k ya está definida para $k \leq n$. Esto nos define 2 conjuntos cerrados disjuntos del subespacio A

$$B_n = \left\{x\epsilon A \mid f_n(x) \leq (\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n\right\}$$
$$C_n = \left\{x\epsilon A \mid f_n(x) \geq (\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3})^n\right\}.$$

Como A es cerrado en X, entonces B_n y C_n también son cerrados y además son ajenos.

Definimos $g_n(x) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n X_{B_n,C_n}(x)$ para todo punto x en X.

Ahora probaremos que

$0 \leq f_n(x) - g_n(x) \leq 1$ para todo $x \in A$..(a)

Sea $x \in B_n$, entonces (a) claramente se cumple ya que $g_n(x) = 0$ para todo $x \in B_n$. Ahora tomamos x un punto en A que no está en B_n. Tenemos que $f_n(x) > \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ y $g_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$, entonces $-g_n(x) \geq -(\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n)$, lo que nos dice que $f_n(x) - g_n(x) \geq 0$. Ahora por la definición de f_n tenemos que $f_n(x) \leq 1$ y como $g_n(x) \geq 0$, entonces $f_n(x) - g_n(x) \leq 1$ lo que prueba (a).

Ya que probamos la desigualdad (a), podemos definir f_{n+1} de la siguiente manera $f_{n+1} = f_n - g_n$. Lo que completa la construcción inductiva de las funciones f_n y g_n para todo entero $n \geq 0$. La desigualdad (iii) se sigue inmediatamente de la definición de estas sucesiones.

Durante la construcción establecimos algunas desigualdades que satisfacen las funciones

f_n y g :

$0 \leq X_{B_n,C_n}(x) \leq 1$ y $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$..............................(b)

las cuales se cumplen para todo x en X.

Ahora probaremos por inducción la siguiente desigualdad:

$0 \leq f_n(a) \leq (\frac{2}{3})^n$ para todo $a \in A$..................................... (c).

Para $f_0 = f$, $0 \leq f(a) \leq (\frac{2}{3})^0 = 1$.Ahora suponemos que para cierta $n \in \mathbb{N}$, $f_n(a)$ tiene la propiedad (c). Consideremos 2 casos:

caso 1: $a \in C_n$. Entonces $g_n(a) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$, por lo tanto $f_{n+1}(a) = f_n(a) - g_n(a) = f_n(a) - (\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n) \leq (\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n) = (1 - \frac{2}{3})(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$

caso 2: $a \notin C_n$. Entonces $f_n(a) \leq (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^n \leq (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})^n = (\frac{2}{3})^{n+1}$ y $0 \leq g_n(a)$, Con esto quedan probados i),ii),iii) y iv) y termina la demostración del teorema. ■

Corolario 3.18 *Cualquier potencia topológica de* $I = [0,1]$ *es un EA para la clase* η *de los espacios normales.*

Definición 3.19 *Un espacio topológico* X *es contraíble si existe* $p \in X$ *y una función continua* $H : X \times I \to X$ *tal que para toda* $x \in X$, $H(x,0) = x$ *y* $H(x,1) = p$

Ejemplo 3.20 *R*^{n} *es contraíble para toda n.*

Proposición 3.21 *Si un espacio contraíble* Y *es un EAV para la clase* η *de los espacios normales, entonces* Y *es un EA para la clase* η.

Demostración. Por la contractibilidad de Y existen un punto $y_0 \in Y$ y una función $h : Y \times I \to Y$ tal que $h(y,0) = y$ y $h(y,1) = y_0$ para toda $y \in Y$. Sean A subespacio cerrado de X, X elemento de la clase η y $f : A \to Y$ continua. Como Y es un EAV para la clase C, entonces f tiene una extensión $g : U \to Y$ donde U es un subespacio abierto de X tal que $A \subset U$. Como X es normal, existe un subespacio abierto V de X con $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Consideramos la siguiente función continua $e : X \to I$ tal que $e(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in A \\ 1, & si\ x \in X \setminus V \end{cases}$. Definimos $m(x) = \begin{cases} h[g(x), e(x)], & si\ x \in \overline{V} \\ y_0 & si\ x \in X \setminus V \end{cases}$.

Para demostrar que m esta bien definida y es continua basta observar que si $x \in (X \setminus V) \cap \overline{V}$, entonces $h[g(x), e(x)] = h[g(x), 1] = yo$. Sea $a \in A$, entonces $m(a) = h[g(a), e(a)] = h[f(a), 0] = f(a)$. Lo que prueba que m es una extensión de f. ■

Corolario 3.22 *El espacio Euclidiano n-dimensional* $\mathbb{R}^n$ *es una EA para la clase* η *de los espacios normales.*

Demostración. Esto se sigue de la Proposición 3.6 ya que $\mathbb{R}^n$ *es contraíble (véase el Ejemplo 3.20)* ■

Capítulo 4

Retractos Absolutos

En este último capitulo hablaremos de cuando un espacio es un retracto absoluto o un retracto absoluto por vecindades, terminaremos demostrando dos proposiciones que nos van a decir, para que clase de espacios los conceptos de retracto absoluto (retracto absoluto por vecindades), están relacionados con el concepto de extensor absoluto (extensor absoluto por vecindades).

4.1. De…niciones

De…nición 4.1 *i) Sea Y elemento de la clase* C*. Decimos que Y es un retracto absoluto para la clase* C *(Y es un RA para* C*) si para todo Z_0 cerrado de Z* 2 C *tal que Y es isomorfo a Z_0 tenemos que Z_0 es retracto de Z.*

ii) Sea Y elemento de la clase C*. Decimos que Y es un retracto absoluto por vecidandes para la clase* C *(Y es un RAV para* C*) si para Z_0 es cerrado de Z* 2 C *tal que Y es isomorfo a Z_0 tenemos que Z_0 es retracto por vecindades de Z.*

Proposición 4.2 *Todo RA para la clase* C *es un RAV para la clase* C.

Demostración. Se sigue de la de…nición 2.1 ■

Proposición 4.3 *Sean β una subclase débilmente hereditaria de* C *y Y* 2 *β. Si Y es un RA (resp. RAV) para la clase* C, *entonces Y es un RA (resp. RAV) para la clase β.*

Demostración. Todo elemento de β es elemento de $\mathcal{C}$ por lo tanto es claro que la proposición se cumple ■

La siguientes proposiciónes nos muestran la relación que hay entre los EA (resp. EAV) y los RA (resp. RAV)

Proposición 4.4 *Sea Y elemento de una clase $\mathcal{C}$. Si Y es un EA para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y es un RA para la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean Z_0 un cerrado de $Z \in \mathcal{C}$ y $h : Y \to Z_0$ un homeomorfismo. Como Y es un AE para la clase $\mathcal{C}$ entonces $f = h^{-1} : Z_0 \to Y$ tiene una extensión $F : Z \to Y$ Sea $g = h \circ F : Z \to Z_0$. Es claro que g es continua ya que es composición de funciones continuas. Sea $z \in Z_0$ entonces $g(z) = h(F(z)) = h(f(z) = h(h^{-1}(z)) = z$ por lo tanto g es retracción. ■

Proposición 4.5 *Sea Y elemento de un clase $\mathcal{C}$. Si Y es un EAV para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y es un RAV para la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea Z_0 un cerrado de $Z \in \mathcal{C}$ y $h : Y \to Z_0$ un homeomorfismo. Como Y es un EAV entonces $f = h^{-1} : Z_0 \to Y$ tiene una extensión $g : U \to Y$ donde U es abierto de Z y $Z_0 \subset U$. Consideremos la composición $r = h \circ g : U \to Z_0$. Claramente r es continua. Sea $z \in Z_0$ entonces $r(z) = h(g(z)) = h(h^{-1}(z)) = z$. ■

El siguiente teorema, conocido como el teorema Eilenberg-Wojdyslawski, es muy útil en la teoría de los RA y de los RAV para las clases $\mathcal{M}$ de los espacios metrizables y $\mathcal{LM}$ de los espacios metrizables separables.

Definición 4.6 *Sea $C(Y)$ el espacio de las funciones acotadas continuas de Y en $\mathbb{R}$.*

Teorema 4.7 *Sea Y un espacio métrico acotado y $L = C(Y)$.*

Si X es la isometría definida en el Ejemplo 1.76 entonces $X(Y)$ es cerrado en la envoltura convexa Z de $X(Y)$ en L

Demostración. Para ver que $X(Y)$ es un cerrado de Z, es suficiente demostrar que $Z \setminus X(Y)$ es abierto en Z.

Sea $g \in Z \setminus X(Y)$. Como Z es la envoltura convexa de $X(Y)$, existen un número finito de puntos $a_1, ..., a_n$ en Y tal que

$g = \sum_{i=1} t_i f_i$ con $f_i = X(a_i)$ donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1} t_i = 1$.

Como g no pertenece a $X(Y)$ entonces tenemos que $g \neq f_i$ para todo $i = 1, 2, .., n$. Escojamos un real positivo α tal que $\alpha < \frac{1}{2} d(g, f_i)$ para toda $i = 1, 2, .., n$, donde d denota la función distancia en $L = C(Y)$ definida por la norma dada en Ejemplo 1.75 .

Denotemos por V_α a la vecindad abierta de g en Z definida como $V_\alpha = \{\theta \in Z \mid d(g, \theta) < \alpha\}$. Probaremos que $V_\alpha \subset Z \setminus X(Y)$.

Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f = X(y) \in V_\alpha$, entonces $d(X(a_i), X(y)) = d(f_i, f) > \alpha$ para todo $i = 1, 2, .., n$.

Como X es isometría (Lema 1.76) entonces $f_i(y) = d(a_i, y) > \alpha$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Por lo que obtenemos que $d(f, g) = \|g - f\| \geq |g(y) - f(y)| = |g(y)| = \sum_{i=1} t_i f_i(y) > (\sum_{i=1} t_i)\alpha = \alpha$. Esto contradice la suposición de que f está en V_α. Por lo que $V_\alpha \subset Z \setminus X(Y)$. Con lo que queda demostrado que $X(Y)$ es cerrado en Z. ■

Los siguientes teoremas nos darán algunos tipos de clases para las cuales se cumple el inverso de las Proposiciónes 4.4 y 4.5.

Proposición 4.8 *Sea* C *algunas de las siguientes clases:*

a) de todos los espacios normales.

b) de todos los espacios completamente normales.

c) de todos los espacios de Lindelöf.

d) de todos los espacios compactos de Hausdorff.

e) de todos los espacios Metrizbles.

f) de todos los espacios compactos metrizables.

Todo RAV para la clase C *es un EAV para la clase* C.

Demostración. Sea Y un RAV para la clase C. Sean $A \subset X$ cerrado , $X \in$ C y $f : A \to Y$ continua. Partiremos la demostración en 3 casos.

caso 1: Supongamos que C es de alguna de las clases a)-d) Consideremos el espacio de adjunción Z definido en la Definición 1.89. Gracias a la Proposición 1.92 obtenemos que Z pertenece a la clase C.

Sean $i = \varphi|_Y$ y $j = \varphi|_X$. Entonces $i : Y \to Z_0$ es un homeomorfismo con $Z_0 = Z \setminus \varphi(X \setminus A)$ cerrado en Z. Como Y es RAV, entonces existen $Y \subset V \subset Z_0$ abierto y una retracción $r : V \to Z_0$. La imagen inversa $U = j^{-1}(V)$ es una vecindad de A en X. Definimos $g : U \to Y$ de la siguiente manera $g(x) = (i^{-1} \circ r)\,[j(x)]$ para toda $x \in U$.Ya que g es composición de funciones continuas g es continua .

Sea $a \in A$ entonces $g(a) = i^{-1}(r(j(a))) = i^{-1}(r(f(a)) = i^{-1}(f(a) = f(a)$. Por lo que la proposición queda demostrada para este caso.

Caso 2: Supongamos que C es de la clase e) . Entonces Y es metrizable. Definamos en Y una metrica acotada y consideramos la isometría canónica X $: Y \to L$ definida en el Ejemplo 1.75.

Entonces $Z_0 =$ X(Y) es un cerrado de la envoltura convexa Z de X(Y) (Proposición 4.7) y Z es metrizable ya que es subespacio de un espacio metrizable. Como Y es RAV, entonces existe una vecindad abierta V de Z_0 en Z y una retracción $r : V \to Z_0$.

La función $\phi =$ X $\circ f : A \to L$ tiene una extensión ª $: X \to L$ (Teorema 3.16), tal que ª(X) esta contenido en la envoltura convexa de $\phi(A)$, entonces ª$(X) \subset Z$. La imagen inversa $U =$ ª$^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de A en X.

Definimos la función $g : U \to Y$ como $g(x) =$ X$^{-1}(r((x))$. Ya que g es composición de funciones continuas g es continua. Sea $a \in A$, entonces $g(a) =$ X$^{-1}(r((a)) =$ X$^{-1}(r(\phi(a)) =$ X$^{-1}(\phi(a)) =$ X$^{-1}($X $\circ f(a)) = f(a)$.Por lo que la proposición queda demostrada para este caso.

Caso 3) Supongamos que C es de la clase f),

Como Y es un espacio compacto metrizable entonces existe un homeomorfismo $h : Y \to Z_0$. donde Z_0 es cerrado del cubo de Hilbert

Y es un RAV para la clase de los espacios compactos metrizables, entonces existen V vecindad de Z_0 y una retracción $r : V \to Z_0$.

Gracias al Corolario 3.18 sabemos que el cubo de Hilbert es un EAV para la clase η de los espacios metrizables entonces la función © $: h \circ f : A \to Z$ tiene una extensión ª $: X \to Z$.

La imagen inversa $U = \Psi^{-1}(V)$ es una vecindad de A en X. Entonces definimos la función $g : U \to Y$ como $g(x) = (h^{-1} \circ r)(\Psi(x))$. Es claro que g es continua.

Veamos que g es extensión de f. Para esto consideremos $a \in A$. Entonces $g(a) = h^{-1}(r(\Psi(a)) = h^{-1}(r(\Phi(a)) = h^{-1}(r(h(f(a)))) = h^{-1}(h(f(a))) = f(a)$. Lo que queda demostrada la proposición para este caso. ■

Proposición 4.9 *Sea* $\mathcal{C}$ *alguna de las siguientes clases:*

a) de todos los espacios normales.

b) de todos los espacios completamente normales.

c) de todos los espacios de Lindelöf.

d) de todos los espacios compactos de Hausdorff.

e) de todos los espacios Metrizbles.

f) de todos los espacios compactos metrizables.

Entonces todo RA para la clase $\mathcal{C}$ *es un EA para la clase* $\mathcal{C}$.

Demostración. Sean Y un RA para la clase $\mathcal{C}$, $A \subset X$ cerrado, $X \in \mathcal{C}$ y $f : A \to Y$ continua. Ahora partiremos la demostración en 3 casos.

Caso 1) Supongamos que $\mathcal{C}$ es de alguna de las clases a)-d) Consideremos el espacio de adjunción Z definido en la Definición 1.89. Gracias a la Proposición 1.92 obtenemos que Z pertenece a la clase $\mathcal{C}$.

Sea $i = \varphi|_Y$ y $j = \varphi|_X$. Entonces $i : Y \to Z_0$ es un homeomorfismo con $Z_0 = Z \setminus \varphi(X \setminus A)$ cerrado en Z. Como Y es RA, entonces existe una retracción $r : Z \to Z_0$. Definimos $g : X \to Y$ de la siguiente manera $g(x) = (i^{-1} \circ r)[j(x)]$

Ya que g es composición de funciones continuas g es continua .

Sea $a \in A$ entonces $g(a) = i^{-1}(r(j(a))) = i^{-1}(r(f(a)) = i^{-1}(f(a) = f(a)$ por lo que la proposición queda demostrada para este caso.

Caso 2: Supongamos que $\mathcal{C}$ es de la clase e) . Entonces Y es metrizable. Definamos en Y una métrica acotada y consideramos la isometría canónica X : $Y \to L$ definida en el Teorema 4.7.

Entonces $Z_0 = X(Y)$ es un cerrado de la envoltura convexa Z de $X(Y)$. y Z es metrizable ya que es subespacio de un espacio metrizable.

La función $\phi = X \circ f : A \to L$ tiene una extensión $\psi : X \to L$ (Teorema 3.16), tal que $\psi(X)$ esta contenido en la envoltura convexa de $\phi(A)$, entonces $\psi(X) \subset Z$.

Como Y es un RA, existe $r : X \to Z_0$ una retracción. Definimos $g : X \to Y$ como $g(x) = X^{-1}(r(\psi(x))$.Ya que g es composición de funciones continuas g es continua. Sea $a \in A$, entonces $g(a) = X^{-1}(r((a)) = X^{-1}(r(\phi(a)) = X^{-1}(\phi(a)) = X^{-1}(X \circ f(a)) = f(a)$.

Por lo que la proposición queda demostrada para este caso.

Caso 3) Supongamos que C es de la clase f),

Como Y es un espacio compacto metrizable entonces existe un homeomorfismo $h : Y \to Z_0$. donde Z_0 es un cerrado del cubo de Hilbert

Y es un RA para la clase de los espacios compactos metrizables, entonces existe $r : I^{\omega_0} \to Z_0$.

Gracias al Corolario 3.18 sabemos que el cubo de Hilbert es un EA para la clase η de los espacios metrizables entonces la función $\varphi : h \circ f : A \to I^{\omega_0}$ tiene una extensión $\psi : X \to I^{\omega_0}$..

Entonces definimos la función $g : U \to Y$ como $g(x) = (h^{-1} \circ r)(\psi(x))$. Es claro que g es continua.

Veamos que g es extensión de f, para esto consideremos $a \in A$, entonces $g(a) = h^{-1}(r(\psi(a)) = h^{-1}(r(\varphi(a)) = h^{-1}(r(h(f(a)))) = h^{-1}(h(f(a))) = f(a)$ con lo que queda demostrada la proposición para este caso. ■

Bibliografía

[Hu] Hu, Hze Tsen: *Theory of retracts*, Wayne State University, Detroit (1965)

[Willard] S. Willard: *General Topology*, Dover publication.

[Prieto] D. Hinrichsen, J. L. Fernández, A. Collar, A. A. Prieto: *Topolog¶a General*, Sociedad Metemática Mexicana, México (2003)