



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA UNO
EN EL ESPACIO HIPERBÓLICO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A :
GAMALIEL ALEJANDRO BAUTISTA MENDOZA



DIRECTOR DE TESIS:
DR: OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.

Bautista
Mendoza
Gamaliel Alejandro
53006348
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias
Matemáticas
89402067

2. Datos del tutor

Dr.
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco

3. Datos del sinodal 1

M. en C.
Ana Irene
Ramírez
Galarza

4. Datos del sinodal 2

M. en C.
Diana
Maya
Padilla

5. Datos del sinodal 3

Dr.
José Guadalupe
Reyes
Victoria

6. Datos del sinodal 4

M. en C.
Vinicio Antonio
Gómez
Gutiérrez

Para mi madre:
Guadalupe
Por su generosidad y ejemplo de lucha

Para mis hermanos:
Felipe A. y Gabriel

Para mi amigo:
Héctor H.

Agradecimientos

Mi tesis llegó a su realización gracias a mi esfuerzo y de muchas personas. En esta página quiero expresarles mi más profundo agradecimiento a todos aquellos que lo hicieron posible.

A mi padre.
A toda mi querida y apreciable familia
Bautista y Mendoza.
A Alejandro y Laura mis amigos de muchos años.
A Beatriz por tu apoyo incondicional.
A Carlos mi amigo y juez.
A José por su amistad.
A Luis por su persistencia.
A Moisés por su amistad y apoyo.
A Omar por su atinada crítica y conocimiento.

A mi mentor Oscar por su confianza y paciencia, que me tuvo, para emprender esta tarea, por su constante ánimo y por la cantidad de horas dedicadas, para hacerle mil cambios a la tesis.

A mis sinodales Ana Irene, Diana, Guadalupe y Vinicio A. por su valiosa y esmerada ayuda en la revisión y organización.

Me agradezco a mí mismo, por mi persistencia y desarrollo para obtener el grado de matemático.

Por último mi más profundo agradecimiento a la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO y la FACULTAD DE CIENCIAS por hacer de mí, un profesional.

Contenido

1	Preliminares	3
1.1	Definiciones básicas	3
1.2	Variedades semi-riemannianas	8
1.3	Subvariedades de codimensión 1	14
1.4	Ecuaciones de estructura	18
2	El plano hiperbólico	23
2.1	El semiplano superior y el disco de Poincaré	23
2.2	Geodésicas e isometrías del plano hiperbólico	28
2.3	El modelo del hiperboloide	30
2.4	Curvas distinguidas en el plano hiperbólico	32
3	El espacio hiperbólico	41
3.1	Los modelos del espacio hiperbólico	41
3.2	Subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{H}^n	45
3.3	Subvariedades totalmente umbílicas de \mathbb{H}_+^n	49
4	Superficies con curvatura media constante	55
4.1	Superficies mínimas en \mathbb{R}^3	55
4.2	El laplaciano y las funciones armónicas	58
4.3	Representación de Weierstrass	61
4.4	Ejemplos de la representación de Weierstrass	64
4.5	Transformación de Gauss hiperbólica	66
4.6	Representación de Bryant	71
4.7	Un ejemplo de una superficie en \mathbb{H}_+^3	74
4.8	Ejemplos de la representación de Bryant	76

Introducción

En esta tesis se estudian algunas superficies con curvatura media constante en ambientes con curvatura también constante. Este trabajo está inspirado en un artículo de Robert Bryant [1], donde él se pregunta si las superficies con curvatura media constante de un espacio ambiente con curvatura seccional constante K admiten una representación analítica. Si la curvatura media H satisface $H \equiv \pm\sqrt{-K}$, cuando $K = 0$ tenemos el caso clásico de las superficies mínimas y tal representación es justamente la representación de Weierstrass. Cuando $K > 0$, no hay tales superficies. Cuando $K < 0$, podemos usar una dilatación y reducir al caso $K = -1$; es decir, al espacio hiperbólico y las superficies con curvatura media constante e igual a uno.

En el capítulo 1 estudiaremos los elementos básicos y generales de la geometría diferencial para variedades. En el capítulo 2 definiremos y analizaremos el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , dando algunos ejemplos de curvas con curvatura constante.

En el capítulo 3 extenderemos el estudio del capítulo anterior a dimensiones superiores; estudiaremos con mayor detalle algunas subvariedades de \mathbb{H}^n con curvatura media constante, como las horoesferas, las esferas geodésicas y las hipersuperficies equidistantes.

En el capítulo 4 introducimos las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . Dichas superficies pueden ser representadas en términos de funciones analíticas, obteniéndose así la llamada “representación de Weierstrass”. Mostraremos la analogía entre el caso de las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 y las superficies con curvatura media constante uno en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Concluiremos este trabajo motivando la representación de Bryant a través de algunos ejemplos.

Capítulo 1

Preliminares

Aquí introducimos conceptos básicos de álgebra lineal, variedades diferenciables y estructuras semi-riemannianas. Estudiaremos las hipersuperficies; es decir, las subvariedades de codimensión 1, por medio de la segunda forma fundamental. En particular, usaremos en el capítulo 3 esta forma para definir las subvariedades totalmente geodésicas y las subvariedades totalmente umbílicas. Recordaremos también las ecuaciones de estructura, para finalmente desarrollar estos conceptos en el espacio hiperbólico.

1.1 Definiciones básicas

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita. Una forma bilineal en V es una transformación $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es lineal en cada entrada. La forma g es simétrica si y sólo si $g(v, w) = g(w, v)$ para todo v, w en V .

Definición 1.1. *Una forma bilineal simétrica g en V es:*

1. definida positiva [*negativa*] si y sólo si siempre que $v \neq 0$ entonces $g(v, v) > 0$ [< 0].
2. semidefinida positiva [*negativa*] si y sólo si $g(v, v) \geq 0$ [≤ 0] para todo $v \in V$.
3. no-degenerada si y sólo si siempre que $g(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces $v = 0$.

Podemos describir a las formas bilineales de la siguiente manera

Si g es una forma bilineal simétrica en V y e_1, \dots, e_n es una base para V , entonces la matriz $\mathbf{G} = (g_{ij}) = (g(e_i, e_j))$ de $n \times n$ es llamada **matriz de g** para e_1, \dots, e_n . Si g es una forma bilineal simétrica entonces esta matriz \mathbf{G} es simétrica; claramente g está determinada por

$$g(v, w) = g\left(\sum_i v_i e_i, \sum_j w_j e_j\right) = \sum_{ij} g_{ij} v_i w_j = v^t \mathbf{G} w$$

El siguiente lema muestra que es posible diagonalizar a la matriz \mathbf{G} , es decir, encontraremos una matriz Q tal que $D = Q^t \mathbf{G} Q$ donde D es una matriz diagonal.

Lema 1.2. *Si g es una forma bilineal simétrica en V entonces existe una base tal que $g(v, v) = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$ donde λ_i son valores propios de \mathbf{G} , para $i = 1, \dots, n$.*

Demostración: Si \mathbf{G} es la matriz de g para una base cualquiera, tenemos que

$$g(v', v') = (v')^t \mathbf{G} v';$$

como \mathbf{G} es una matriz simétrica podemos encontrar una matriz Q de cambio de base tal que $D = Q^t \mathbf{G} Q$ y $v' = Qv$. Sustituyendo estas igualdades tenemos

$$\begin{aligned} g(v', v') &= (v')^t \mathbf{G} v' &&= (Qv)^t \mathbf{G} Qv \\ &= v^t (Q^t \mathbf{G} Q) v &&= v^t D v \\ &= \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 \end{aligned}$$

Proposición 1.3. *Sea g una forma bilineal simétrica en V . Tenemos que*

1. g es definida $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiva si y sólo si } \lambda_i > 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ \text{negativa si y sólo si } \lambda_i < 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$
2. g es semi-definida $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiva si y sólo si } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ \text{negativa si y sólo si } \lambda_i \leq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$

Si g es una forma bilineal simétrica en V , para cualquier subespacio W de V se tiene que la restricción $g | W \times W$, denotada por $g | W$, es otra vez simétrica y bilineal.

Definición 1.4. *El índice ν de una forma bilineal simétrica g en V es el mayor entero tal que es la dimensión de un subespacio W de V , en el cual $g|_W$ es una forma definida negativa.*

En forma equivalente, el índice ν es el número de valores propios negativos de g .

Lema 1.5. *Una forma bilineal simétrica g en V es no degenerada si y sólo si la matriz \mathbf{G} que la representa en una base de V es invertible.*

Demostración: Sea e_1, \dots, e_n una base de V . Si $v \in V$, entonces $g(v, w) = 0$ para toda $w \in V$ si y sólo si $g(v, e_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como g es simétrica y $v = \sum_j v_j e_j$ tenemos:

$$g(v, e_i) = g\left(\sum_j v_j e_j, e_i\right) = \sum_j g_{ij} v_j$$

Entonces g es degenerada si y sólo si existen números v_1, \dots, v_n no todos cero tales que $\sum g_{ij} v_j = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Pero esto es equivalente a decir que la matriz (g_{ij}) es singular. \square

Definición 1.6. *Un producto escalar g en un espacio vectorial V es una forma bilineal simétrica no-degenerada.*

Ejemplo: \mathbb{R}_1^2 denota al conjunto de parejas de números reales con el producto interior $g : \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$g : \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(v, w) = v^t G w = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Es fácil ver que g es simétrica, bilineal y con determinante diferente de 0; entonces, por el lema 1.5 sabemos que g es no-degenerada y g es un producto escalar.

Definición 1.7. *Dado un producto escalar g en un espacio vectorial V , un vector u en V es nulo si y sólo si $g(u, u) = 0$ y $u \neq 0$. Si existen vectores nulos en V diremos que g es indefinido.*

El producto escalar g definido en \mathbb{R}_1^2 es indefinido, ya que los vectores nulos se encuentran en las rectas con pendientes 1 y -1 omitiendo el origen.

Observación: Si g es indefinido siempre hay subespacios donde la forma es degenerada; tales subespacios se llaman degenerados.

En el ejemplo de \mathbb{R}_1^2 vemos que $g(u, u)$ podría ser negativo, a diferencia del producto interior usual.

Definición 1.8. La norma $|u|$ de un vector u está definida como $\sqrt{|g(u, u)|}$. Un vector unitario u es un vector tal que $g(u, u) = \pm 1$.

Definición 1.9. Una base ortonormal es un conjunto de vectores linealmente independientes e_1, \dots, e_n tales que $g(e_i, e_i) = \pm 1$ y $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Ahora mostraremos que cualquier espacio V con un producto escalar tiene una base ortonormal.

Lema 1.10. Si g es un producto escalar en V entonces existe un vector u en V tal que $g(u, u) \neq 0$.

Demostración: Como g es no-degenerado entonces para todo $v \neq 0$ en V existe w en V tal que $g(v, w) \neq 0$. Si $g(v, v) \neq 0$ y $g(w, w) \neq 0$ no hay nada que demostrar. De lo contrario, supóngase que $g(v, v) = g(w, w) = 0$, haciendo $u = v + w$ tenemos que:

$$\begin{aligned} g(u, u) &= g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, v) + g(w, w) = \\ &= 2g(v, w) \neq 0. \square \end{aligned}$$

Lema 1.11. Si W es un subespacio de un espacio con producto escalar V , entonces

$$\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$$

Demostración: Sea e_1, \dots, e_k una base para W , la cual completamos a una base de V . Ahora $v \in W^\perp$ si y sólo si $g(v, e_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$; en términos de coordenadas tenemos

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} v_j = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq k$$

Éstas son k ecuaciones lineales con n incógnitas, de modo que por el lema 1.5 las columnas de la matriz (g_{ij}) son linealmente independientes, y por tanto, el espacio de soluciones tiene dimensión $n - k$. Pero por construcción estas soluciones son exactamente los vectores de W^\perp . \square

Lema 1.12. *Un subespacio W de V es no degenerado si y sólo si $V = W \oplus W^\perp$.*

Demostración: Por el lema anterior acerca de las dimensiones de W y W^\perp tenemos que $W + W^\perp$ es una suma directa si y sólo si $W \cap W^\perp = \{0\}$, pero

$$W \cap W^\perp = \{w \in W \mid w \perp W\} = \{0\},$$

ya que el producto escalar es no degenerado en W . \square

Lema 1.13. *W es un subespacio de V no-degenerado si y sólo si W^\perp es no-degenerado.*

Demostración: Sabemos que W y V son no-degenerados por lo que se puede escribir $V = W \oplus W^\perp$; entonces W^\perp es no-degenerado. El inverso es análogo. \square

Teorema 1.14. *Todo espacio vectorial $V \neq 0$ con un producto escalar tiene una base ortonormal.*

Demostración: Utilizaremos inducción sobre $n = \dim V$. Si $n = 1$, como g es no-degenerada entonces existe un vector u en V tal que $g(u, u) \neq 0$. Así que $u/|u|$ es un vector unitario. Supóngase que el teorema es válido para cualquier espacio vectorial con dimensión k menor que n para algún entero fijo $n > 1$. Sean e_1, \dots, e_k vectores ortonormales con $k < n$. Queremos demostrar que podemos agregarles otro vector ortonormal. Los vectores e_1, \dots, e_k generan un subespacio W no-degenerado. Como W^\perp es no-degenerado (y $\dim W^\perp > 1$) existe un vector unitario $e_{k+1} \in W^\perp$. \square

Si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal, la matriz $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ es diagonal. Podemos escribir

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\epsilon_j,$$

donde $\epsilon_j = g(e_j, e_j) = -1$ para $j = 1, \dots, v$ y $\epsilon_j = g(e_j, e_j) = 1$ para $j = v + 1, \dots, n$. Así, una forma bilineal simétrica g con índice v se puede escribir de la siguiente manera:

$$g(v, v) = -\sum_{j=1}^v \epsilon_j v_j^2 + \sum_{j=v+1}^n \epsilon_j v_j^2.$$

Si $v = 0$, V es isomorfo a \mathbb{R}^n . Si $v = 1$, V es isomorfo a \mathbb{R}_1^n , el espacio de Minkowski, con el cual trabajaremos posteriormente.

1.2 Variedades semi-riemannianas

Analizaremos las variedades diferenciables dotadas de una métrica semi-riemanniana, definiendo los conceptos de espacio tangente, conexión afín, derivada covariante de un campo vectorial X a lo largo de una curva diferenciable γ , geodésicas y transporte paralelo. Concluiremos con el teorema de Levi-Civita para variedades semi-riemannianas.

Definición 1.15. Una variedad diferenciable de dimensión n es un espacio topológico M , junto con una familia de transformaciones inyectivas continuas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de un conjunto abierto U_α de \mathbb{R}^n en M tal que:

1. $\cup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para cualquier par α, β con $\emptyset \neq \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W$, los conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$, $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y las transformaciones $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$, $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ son diferenciables.
3. La familia $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ es maximal para las condiciones 1) y 2).

$(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ es una parametrización o sistema de coordenadas de M en p mientras que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ es una vecindad coordinada en p . Una familia $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ que satisface 1 y 2 se llama una estructura diferenciable en M .

Definición 1.16. Sea M una variedad diferenciable, y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una curva diferenciable en M . Supóngase que $\alpha(0) = p \in M$ y sea $\mathfrak{D}(M)$ el conjunto de funciones en M que son diferenciables en p . El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : \mathfrak{D}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathfrak{D}(M)$$

Un vector tangente en p es el vector tangente en $t = 0$ para alguna curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p es el espacio tangente a M en p y se denota por $T_p M$.

A continuación definimos una variedad semi-riemanniana.

Definición 1.17. Una métrica semi-riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es una transformación que a cada $p \in M$ le asocia una forma bilineal simétrica no degenerada, de modo que el índice de g_p no depende de p .

En otras palabras, para cada punto p de M , tenemos un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio tangente $T_p M$ y el índice de $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es el mismo para todo p .

Definición 1.18. *Una variedad semi-riemanniana es una variedad diferenciable M con una métrica semi-riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.*

Una isometría es un tipo especial de transformación, que expresa la noción de isomorfismo para variedades semi-riemannianas.

Definición 1.19. *Sea M y N variedades semi-riemannianas. Una isometría de $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo que preserva las métricas semi-riemannianas; es decir*

$$\langle v, w \rangle = \langle df(v), df(w) \rangle \text{ para todo } v, w \in T_p M, \quad p \in M.$$

Un objeto preservado por todas las isometrías es llamado un invariante isométrico. La geometría semi-riemanniana es tradicionalmente descrita como el estudio de tales invariantes. Si existe una isometría entre M y N decimos que son isométricas; si las variedades son isométricas son geométricamente indistinguibles.

Necesitamos algunos elementos adicionales para enunciar el teorema de Levi-Civita para variedades semi-riemannianas.

Definición 1.20. *Un campo vectorial X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto de p en M un vector $X_p \in T_p M$.*

El campo vectorial X es C^∞ si y sólo si para cada parametrización de M tenemos que $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a_i : M \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$ para toda i .

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ definidos en M .

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. El objetivo de lo que sigue es definir un nuevo campo vectorial $\nabla_X Y$ en M , en el cual, el valor en cada punto p es el vector de razón de cambio de Y en la dirección X_p . Hay un camino natural para hacer esto en \mathbb{R}_v^n .

Definición 1.21. *Sean x_1, \dots, x_n las coordenadas en \mathbb{R}_v^n , Si X y $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ son campos vectoriales en \mathbb{R}_v^n , el campo vectorial $\nabla_X Y = \sum X(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ es llamado la derivada de Y con respecto a X .*

No es obvio cómo extender el concepto de conexión afín a variedades semi-riemannianas arbitrarias; pero empecemos por axiomatizar sus propiedades.

Definición 1.22. Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es una transformación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

denotada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_x Y$ con las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
 1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
 2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
- donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Sea

$$\mathfrak{X}^*(M) = \{\omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M) \mid \omega \text{ es lineal y } C^\infty\}$$

Aquí, ω es C^∞ en el sentido de que si $X \in C^\infty$ entonces $\omega(X) \in C^\infty$.

Proposición 1.23. Sea M una variedad semi-riemanniana. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, sea ω una 1-forma en M definida por:

$$\omega_V(X) = \langle X, V \rangle \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M)$$

Entonces la función $V \rightarrow \omega_V$ es un isomorfismo lineal de $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$.

Demostración: ω_V es lineal, esto es, en realidad una 1-forma [ver la sección 1.3] y la función $V \rightarrow \omega_V$ es también lineal. Además, es un isomorfismo por los siguientes dos hechos que probamos en seguida:

- (a) Si $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $V = W$.
- (b) Dada cualquier 1-forma $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ hay un único campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\omega(X) = \langle V, X \rangle$ para toda X .

Para probar (a) consideramos $Y = V - W$, entonces $\langle Y, X \rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $p \in M$, de donde $Y = 0$ porque la métrica es no degenerada.

Para probar (b) es suficiente determinar a V en una vecindad coordinada U . Si $\omega = \sum \omega_i dx_i$, sea $V = \sum_{ij} g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ donde las matrices g_{ij} y g^{ij} son matrices inversas entre sí. Entonces

$$\begin{aligned} \left\langle V, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle &= \left\langle \sum_{ij} g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle = \sum_{ij} \omega_i g^{ij} g_{jk} \\ &= \sum_i \omega_i \delta_{ik} = \omega_k = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

Por linealidad tenemos que $\omega(X) = \langle X, V \rangle$ para todo X en U . \square

Definición 1.24. Una *conexión afín* ∇ en una variedad semi-riemanniana M es *simétrica* cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Observación: En un sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) , si ∇ es simétrica se tiene

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

para toda i y $j = 1, \dots, n$. Lo anterior es equivalente a decir que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel que veremos posteriormente.

Definición 1.25. Una *conexión afín* ∇ en una variedad semi-riemanniana M es *compatible con la métrica* si y sólo si

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Ahora podemos enunciar el teorema fundamental de la sección.

Teorema 1.26. (Levi-Civita) Dada una variedad semi-riemanniana M , existe una *única conexión afín* ∇ *simétrica y compatible con la métrica semi-riemanniana*.

Demostración: Supongamos primeramente que existe tal conexión afín ∇ ; entonces

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (1.1)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (1.2)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (1.3)$$

Sumando (1.1) y (1.2) y restando (1.3), usando la simetría de ∇ , tenemos que

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle \nabla_Y X, Z \rangle$$

Es decir,

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \} \quad (1.4)$$

A la expresión (1.4) le llamaremos la fórmula de Koszul; como ∇ satisface la fórmula de Koszul, por el inciso (a) de la proposición anterior, tenemos que es única.

Para probar la existencia usaremos una función $F(X, Y, Z)$ igual al lado derecho de la fórmula de Koszul. Primero fijamos a X, Y y haciendo cálculos demostramos que la función $Z \mapsto F(X, Y, Z)$ es lineal y además es una 1-forma. Por el inciso (b) de la proposición anterior existe un único campo vectorial, el cual se denota por $\nabla_Y X$ tal que $\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \frac{1}{2} F(X, Y, Z)$ para todo Z . Falta demostrar que la conexión ∇ así definida cumple las tres propiedades de la definición de **conexión afín** ∇ ; aunque aquí sólo probaremos la tercera: Usando las siguientes igualdades

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X \quad \text{y} \quad Y \langle Z, fX \rangle = fY \langle Z, X \rangle + Y(f) \langle Z, X \rangle,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \langle Z, \nabla_Y fX \rangle &= fX \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, fX \rangle - Z \langle fX, Y \rangle \\ &\quad - \langle [fX, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], fX \rangle - \langle [fX, Y], Z \rangle \\ &= fX \langle Y, Z \rangle + fY \langle Z, X \rangle + Y(f) \langle Z, X \rangle - fZ \langle X, Y \rangle \\ &\quad - Z(f) \langle X, Y \rangle - f \langle [X, Z], Y \rangle + Z(f) \langle X, Y \rangle \\ &\quad - f \langle [Y, Z], X \rangle - f \langle [X, Y], Z \rangle + Y(f) \langle X, Z \rangle \\ &= fX \langle Y, Z \rangle + fY \langle Z, X \rangle - fZ \langle X, Y \rangle - f \langle [X, Z], Y \rangle \\ &\quad - f \langle [X, Y], Z \rangle - f \langle [Y, Z], X \rangle + Y(f) \langle Z, X \rangle \\ &\quad - Z(f) \langle X, Y \rangle + Z(f) \langle X, Y \rangle + Y(f) \langle X, Z \rangle \\ &= 2f \langle Z, \nabla_Y X \rangle + 2Y(f) \langle Z, X \rangle \\ &= 2 \langle Z, f \nabla_Y X + Y(f) X \rangle. \end{aligned}$$

Como estas igualdades valen para todo Z , tenemos que

$$\nabla_Y fX = f\nabla_Y X + Y(f)X. \quad \square$$

De aquí en adelante, ∇ denota la conexión dada por el teorema anterior y decimos que ∇ es la conexión semi-riemanniana asociada a la métrica.

Definición 1.27. Sea M una variedad semi-riemanniana de dimensión n , y X_1, \dots, X_n campos vectoriales definidos en un abierto U de M , tales que en cada punto p , los vectores $X_1(p), \dots, X_n(p)$ forman una base de $T_p M$. Las funciones Γ_{ij}^k definidas en U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ son los coeficientes o símbolos de Christoffel de la conexión ∇ en U .

Observación: En términos de los coeficientes g_{ij} de la métrica, los símbolos de Christoffel están dados por la siguiente fórmula:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km}$$

donde $\{g^{km}\}$ es la matriz inversa de $\{g_{km}\}$. Esta expresión surge de la aplicación de la fórmula de Koszul a los vectores de una base.

Definición 1.28. Un campo vectorial X a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow M$ es una transformación diferenciable que asocia a cada s en I un vector tangente $X(s) \in T_{\gamma(s)} M$.

Proposición 1.29. Sea M una variedad semi-riemanniana con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial X definido a lo largo de una curva diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DX}{ds}$ a lo largo de γ , llamado la derivada covariante de X a lo largo de γ , tal que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\frac{D}{ds}(X + Y) = \frac{DX}{ds} + \frac{DY}{ds}$ para cada pareja de campos X, Y definidos a lo largo de γ ;
2. $\frac{D}{ds}(fX) = \frac{df}{ds}X + f\frac{DX}{ds}$, donde X es un campo vectorial a lo largo de γ y f es una función diferenciable en I ;
3. Si X es inducido por un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ (es decir, $X(s) = Y(\gamma(s))$), entonces $\frac{DX}{ds} = \nabla_{\frac{d\gamma}{ds}} Y$.

Lo anterior nos permite definir los campos paralelos y las geodésicas.

Definición 1.30. Sea M una variedad semi-riemanniana con una conexión afín ∇ . Un campo vectorial X a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow M$ es paralelo si $\frac{DX}{ds} = 0$ para toda $s \in I$.

Definición 1.31. Una curva $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica en $s_0 \in I$ si $\frac{D}{ds} \left(\frac{d\gamma}{ds} \right) = 0$ en el punto s_0 ; si γ es una geodésica en s para toda $s \in I$, decimos que γ es una geodésica.

Para concluir esta sección recordaremos la definición del tensor de curvatura.

Definición 1.32. La curvatura R de una variedad semi-riemanniana M es la transformación $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

1.3 Subvariedades de codimensión 1

El propósito de esta sección es definir el concepto de segunda forma fundamental y aplicarlo a las subvariedades de codimensión 1, analizando en este contexto el caso particular del espacio hiperbólico. Comenzaremos definiendo el concepto de subvariedad.

Definición 1.33. Sean M y \overline{M} variedades semi-riemannianas. Una transformación diferenciable $f : M \rightarrow \overline{M}$ es una inmersión si $df_p : T_p M \rightarrow T_p \overline{M}$ es inyectiva para toda p en M . Si además f es un homeomorfismo en $f(M) \subset \overline{M}$, decimos que f es un encaje. Si $M \subset \overline{M}$, la inclusión $f : M \hookrightarrow \overline{M}$ es un encaje y la métrica de \overline{M} restringida a M es no degenerada, decimos que M es una subvariedad semi-riemanniana de \overline{M} .

Consideremos de aquí en adelante una subvariedad semi-riemanniana M de dimensión n inmersa en una variedad semi-riemanniana \overline{M} de dimensión m mediante la transformación $f : M \rightarrow \overline{M}$. En adelante nos referiremos a \overline{M} como el *espacio ambiente* y a $m - n$ como la *codimensión* de M en \overline{M} .

Para cada punto $p \in M$, tenemos una descomposición del plano tangente de \overline{M} como $T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$ y podemos definir la proyección tangente

$\Upsilon : T_p \overline{M} \rightarrow T_p M$ y normal $\perp : T_p \overline{M} \rightarrow T_p M^\perp$ para \overline{X} y \overline{Y} campos vectoriales en \overline{M} como

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y})^\Upsilon + (\overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y})^\perp$$

donde $\overline{\nabla}$ es la conexión en \overline{M} .

Lema 1.34. *Si ∇ es la conexión afín de M determinada por la métrica y la inmersión f , entonces*

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y})^\Upsilon = \nabla_{X_p} Y$$

donde $(\overline{Y})^\Upsilon = Y$ (ver [10]).

Definimos a $B(X_p, Y_p) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y})^\perp$ como una transformación $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ bilineal simétrica mediante la siguiente fórmula:

$$B(X_p, Y_p) = \overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y} - \nabla_{X_p} Y. \quad \text{donde } X, Y \in \mathfrak{X}(U)$$

Consideremos una situación específica donde M es una *hipersuperficie* en \overline{M} , es decir, una subvariedad de codimensión 1. En este caso, existe una vecindad U de un punto $p \in M$ y un campo vectorial unitario normal a M denotado por η tal que $\eta(p) \in (T_p M)^\perp$ para todo $p \in U$ y $|\langle \eta, \eta \rangle| = 1$. De hecho, hay sólo dos elecciones para η . Además, como η es un campo vectorial de \overline{M} definido localmente en M , el símbolo $\overline{\nabla}_{X_p} \eta$ tiene sentido para $X_p \in T_p M$. Observemos que para todo $X_p \in T_p M$ tenemos que $\overline{\nabla}_{X_p} \eta \in T_p M$.

Definición 1.35. *Si η es un campo vectorial unitario normal a M , definimos el operador de forma $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ mediante la expresión*

$$S_\eta(X_p) = -(\overline{\nabla}_{X_p} \eta)^\Upsilon$$

Es conocido que $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ es una transformación lineal simétrica y que existe una base ortogonal de vectores propios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, con $1 \leq i \leq n$. En este caso, decimos que las direcciones determinadas por los e_i son las *direcciones principales* y que $\lambda_i = k_i$ son las *curvaturas principales* de M .

Si Y es un campo vectorial tangente en M , entonces

$$\langle \overline{\nabla}_{X_p} \eta, Y_p \rangle = -\langle \eta, \overline{\nabla}_{X_p} Y \rangle \quad (1.5)$$

Definición 1.36. *La segunda forma fundamental de M se define como:*

$$II(X_p, Y_p) = \langle \overline{\nabla}_{X_p} \eta, Y_p \rangle \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad \eta \in (T_p M)^\perp$$

Definición 1.37. M es totalmente geodésica si la segunda forma fundamental es idénticamente cero.

Definición 1.38. Un punto $p \in M$ es umbílico si las curvaturas principales en p son iguales; es decir, si existe $\lambda = \lambda(p)$ tal que $S_\eta(X_p) = \lambda X_p$ para todo X_p .

En la siguiente proposición damos un criterio para decidir si un punto es umbílico.

Proposición 1.39. $S_\eta(X_p) = \lambda X_p$ para todo X_p si y sólo si $\Gamma_{ij}^{n+1} \langle \eta, \eta \rangle = \lambda g_{ij}$, donde $X_{n+1} = \eta$ es un vector normal a M .

Demostración: Supongamos primero que $S_\eta(X_p) = \lambda X_p$; entonces:

$$\begin{aligned} \lambda g_{ij} &= \langle S_\eta(X_p), X_j \rangle = -\langle \nabla_{X_i} \eta, X_j \rangle = \langle \eta, \nabla_{X_i} X_j \rangle \\ &= \langle \eta, \sum \Gamma_{ij}^k X_k \rangle = \Gamma_{ij}^{n+1} \langle \eta, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Recíprocamente, debemos mostrar que $\nabla_{X_i} X_{n+1} = \lambda X_i$ para $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_i} X_{n+1}, X_j \rangle &= -\langle X_{n+1}, \nabla_{X_i} X_j \rangle = -\left\langle X_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k X_k \right\rangle \\ &= -\Gamma_{ij}^{n+1} \langle \eta, \eta \rangle = \lambda g_{ij} = \langle \lambda X_i, X_j \rangle. \end{aligned}$$

Como X_j es arbitrario, $\nabla_{X_i} X_{n+1} = \lambda X_i$. \square

La siguiente relación entre las *curvaturas seccionales* K de M y \bar{K} de \bar{M} es llamada ecuación de Gauss. Mediante esta ecuación calcularemos la curvatura seccional de \mathbb{H}^n .

Proposición 1.40. (ver [8] p.107) Sea S_η el operador de forma de la hipersuperficie $M \subset \bar{M}$. Si X_p, Y_p generan un plano tangente en M no degenerado, entonces

$$K(X_p, Y_p) = \bar{K}(X_p, Y_p) - \frac{\langle S_\eta(X_p), X_p \rangle \langle S_\eta(Y_p), Y_p \rangle - \langle S_\eta(X_p), Y_p \rangle^2}{\langle X_p, X_p \rangle \langle Y_p, Y_p \rangle - \langle X_p, Y_p \rangle^2}.$$

En particular, veamos qué ocurre cuando M es una variedad diferenciable de dimensión 2, la cual llamaremos superficie regular orientada. Encontraremos las curvaturas principales en términos de los coeficientes de la

primera y segunda forma fundamental y usaremos estos resultados en el capítulo 4.

Sea M una superficie definida por $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 . Sea $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , tal que $\eta(p)$ es normal a \mathbf{f} en U de modo que

$$\left\langle \eta, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \right\rangle \equiv 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.6)$$

Derivamos esta ecuación y obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle \eta, \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle = b_{ij} \quad i, j = 1, 2 \quad (1.7)$$

Los coeficientes b_{ij} son llamados los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Proposición 1.41. *Las curvaturas principales k_1 y k_2 son las raíces de la siguiente ecuación:*

$$\det(b_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0. \quad \square \quad (1.8)$$

(ver [9] p.13)

Definición 1.42. *La curvatura media H se define en términos de las curvaturas principales*

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (1.9)$$

Encontraremos una expresión para H en términos de b_{ij} y g_{ij} definidas en (1.7).

La ecuación (1.8) toma la forma

$$\det(g_{ij})\lambda^2 - (g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12})\lambda + \det(b_{ij}) = 0;$$

como la curvatura media es igual a la mitad de la suma de las raíces de este polinomio, tenemos

$$H = \frac{g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det(g_{ij})} \quad (1.10)$$

1.4 Ecuaciones de estructura

Aquí definiremos las 1-formas llamadas formas de conexión en términos de los marcos móviles y escribiremos la conexión afín en el lenguaje de las formas, para obtener las ecuaciones de estructura, cerrando esta sección probando el lema de Cartan.

Definición 1.43. *Sea U una vecindad de p en M , y X_1, \dots, X_n campos vectoriales tales que para cada punto p en U , los vectores $\{X_i(p)\}$, $i = 1, \dots, n$ forman una base en T_pM . Decimos que $\{X_i\}$ es un **marco móvil** en U .*

Consideremos un marco móvil ortonormal X_1, \dots, X_n en un conjunto abierto en M ; definimos las 1-formas duales ω_i asociadas al marco móvil como

$$\omega_i(X_j) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (1.11)$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Definimos las *formas de conexión* de la siguiente manera:

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X X_i, X_j \rangle. \quad (1.12)$$

Ya que $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$, su derivada con respecto de X se anula; si ∇ es una conexión compatible con la métrica, tenemos que

$$X \langle X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_X X_i, X_j \rangle + \langle X_i, \nabla_X X_j \rangle = (\omega_{ij} + \omega_{ji})(X) = 0,$$

de modo que las formas de conexión $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ son antisimétricas en i, j .

Podemos escribir a (1.12) en términos de las 1-formas duales como

$$\omega_{ij}(X_k) = \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle = \omega_j(\nabla_{X_k} X_i).$$

Usando la linealidad, tenemos que para X arbitrario,

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X X_i, X_j \rangle = \omega_j(\nabla_X X_i). \quad (1.13)$$

La ecuación anterior define ω_{ij} en términos de ∇ (y de la métrica). Si ahora queremos usar la ecuación (1.12) para definir la conexión en términos

de ω_{ij} tendríamos que para $Y = \sum_i y_i Y_i$ se cumple

$$\begin{aligned} \nabla_{X_k} \left(\sum_i y_i Y_i \right) &= \sum_i (X_k(y_i) Y_i + y_i \nabla_{X_k} Y_i) \\ &= \sum_i (X_k(y_i) Y_i + y_i \sum_i \omega_{ij}(X_k) Y_j) \\ &= \sum_j (X_k(y_j) + \sum_i y_i \omega_{ij}(X_k)) Y_j \end{aligned}$$

Por la linealidad, si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\nabla_X Y = \sum_j (X(y_j) + \sum_i y_i \omega_{ij}(X)) Y_j \quad (1.14)$$

Utilizaremos esta ecuación para un cálculo posterior. Ahora mostraremos que las formas ω_i y ω_{ij} satisfacen las llamadas *ecuaciones de estructura*.

Teorema 1.44. *Sea M una variedad riemanniana con formas duales ω_i y formas de conexión ω_{ij} . Entonces se cumple la primera ecuación de estructura*

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ij}. \quad (1.15)$$

Demostración: Por linealidad, basta ver qué ocurre al evaluar las formas en las parejas (X_k, X_l) . Se tiene

$$d\omega_i(X_k, X_l) = X_k(\omega_i(X_l)) - X_l(\omega_i(X_k)) - \omega_i([X_k, X_l]) = -\omega_i([X_k, X_l]).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ij}(X_k, X_l) &= \omega_{il}(X_k) - \omega_{il}(X_l) \\ &= \langle X_i, \nabla_{X_k} X_l \rangle - \langle X_i, \nabla_{X_l} X_k \rangle \\ &= \langle X_i, \nabla_{X_k} X_l - \nabla_{X_l} X_k \rangle \\ &= -\omega_i(\nabla_{X_k} X_l - \nabla_{X_l} X_k) \\ &= -\omega_i([X_k, X_l]). \quad \square \end{aligned}$$

Se puede decir que la primera ecuación de estructura es una manera de establecer la compatibilidad de la conexión ∇ (dada por las formas ω_{ij}) con la métrica (dada por las formas duales).

Ahora definimos el *tensor de curvatura* como

$$\Omega_{ij}(X, Y) = \langle R(Y, X)X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y X_i - \nabla_Y \nabla_X X_i - \nabla_{[X, Y]} X_i, X_j \rangle \quad (1.16)$$

Teorema 1.45. *Sea M una variedad riemanniana con formas duales ω_i , y formas de conexión ω_{ij} . Entonces se cumple la segunda ecuación de estructura*

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \quad (1.17)$$

Demostración: Basta ver qué ocurre al evaluar las ecuaciones (1.16) y (1.17) en la pareja (X_l, X_m) :

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}(X_l, X_m) &= (d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj})(X_l, X_m) \\ &= X_l(\omega_{ij}(X_m)) - X_m(\omega_{ij}(X_l)) - \omega_{ij}([X_l, X_m]) \\ &\quad - \sum_k \omega_{ik}(X_l)\omega_{kj}(X_m) - \omega_{ik}(X_m)\omega_{kj}(X_l). \end{aligned}$$

Analizaremos ahora el lado derecho de (1.17) por partes. La expresión (1.14) es en este caso

$$\nabla_{X_m} X_i = \sum_k \omega_{ik}(X_m) X_k$$

Si aplicamos ∇_{X_l} a la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{X_l} \nabla_{X_m} X_i &= \sum_k \nabla_{X_l} (\omega_{ik}(X_m) X_k) \\ &= \sum_k (X_l(\omega_{ik}(X_m)) X_k + \omega_{ik}(X_m) \nabla_{X_l} X_k) \\ &= \sum_k (X_l(\omega_{ik}(X_m)) X_k + \omega_{ik}(X_m) \sum_n \omega_{kn}(X_l) X_n) \\ &= \sum_k (X_l(\omega_{ik}(X_m)) X_k + \sum_{k,n} \omega_{ik}(X_m) \omega_{kn}(X_l) X_n) \end{aligned}$$

De este modo,

$$\langle \nabla_{X_l} \nabla_{X_m} X_i, X_j \rangle = (X_l \omega_{ik} X_m) + \sum_k \omega_{ik}(X_m) \omega_{kj}(X_l).$$

Al comparar con la expresión de $\Omega_{ij}(X_l, X_m)$, sólo resta probar

$$-\omega_i([X_l, X_m]) = \langle \nabla_{[X_l, X_m]} X_i, X_j \rangle,$$

pero esto es claro de la ecuación (1.13). \square

El siguiente lema, llamado Lema de Cartan, nos permite determinar los coeficientes h_{ij} de la segunda forma fundamental; en el capítulo 4 utilizaremos esta expresión para analizar las diferenciales $d\omega_{13}$, $d\omega_{23}$.

Lema 1.46. *Sea $\{X_i\}$ un marco móvil en U y sean $\omega_1, \dots, \omega_r : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, $r < n$, 1-formas linealmente independientes. Supongamos que existen 1-formas $\omega_{i1}, \dots, \omega_{ir} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \omega_{ij} = 0$. Entonces,*

$$\omega_{ij} = \sum_{j=1}^n h_{ij} \omega_j \quad \text{donde } h_{ij} = h_{ji}$$

Demostración: Completamos las formas ω_i para obtener una base $\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n$ de $T_p M^*$ y escribimos

$$\omega_{ir} = \sum_{j=1}^r h_{ij} \omega_j + \sum_{l=r+1}^n \bar{h}_{il} \omega_l, .$$

Usando la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \omega_{ij} = \sum_{ij} h_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_l \bar{h}_{il} \omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i < j} (h_{ij} - h_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i < l} \bar{h}_{il} \omega_i \wedge \omega_l \end{aligned}$$

Como $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k, s = 1, \dots, n$ son linealmente independientes, concluimos que $\bar{h}_{il} = 0$ y $h_{ij} = h_{ji}$.

Capítulo 2

El plano hiperbólico

En este capítulo analizaremos tres modelos de la geometría hiperbólica en dimensión 2, las isometrías entre estos modelos, así como algunas curvas particulares llamadas horociclos, curvas equidistantes y círculos geodésicos. Mostraremos que estas curvas son las únicas con curvatura constante en el plano hiperbólico, en particular, los horociclos son las únicas curvas con curvatura constante 1 en \mathbb{H}_+^2 .

2.1 El semiplano superior y el disco de Poincaré

El semiplano superior es el conjunto

$$\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

con la métrica

$$ds_0^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Esta métrica en el semi-plano superior es igual al producto escalar ds^2 en \mathbb{R}^2 multiplicada por el factor $\frac{1}{y^2}$. La forma compleja de esta métrica se obtiene sustituyendo

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

en la ecuación para ds_0^2 , de donde

$$\begin{aligned}
ds_0^2 &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} &= \frac{d\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + d\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2}{\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2} \\
&= \frac{d(z+\bar{z})^2 - d(z-\bar{z})^2}{(z-\bar{z})^2} &= \frac{dz^2 - 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2 - (dz^2 + 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2)}{(z-\bar{z})^2} \\
&= \frac{-4dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, el disco de Poincaré es el disco unitario abierto

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

con la métrica

$$ds_1^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))}.$$

Estableceremos transformaciones de \mathbb{H}_+^2 a \mathbb{D}^2 , así como en sí mismas, actuando como isometrías hiperbólicas.

Las transformaciones de Möbius tienen la forma

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad ad - bc \neq 0$$

que son composición de transformaciones que respetan no sólo ángulos, sino también su sentido:

- 1) Traslaciones $F(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$
- 2) Homotecias $F(z) = az$, $a \in \mathbb{R}$
- 3) Rotaciones $F(z) = az$, $a = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$
- 4) La transformación $F(z) = \frac{1}{z}$ es la composición de la inversión en la circunferencia unitaria y la reflexión en el eje real.

El conjunto de las transformaciones de Möbius es un grupo isomorfo al grupo de matrices complejas de 2×2 al identificar cada matriz con su negativa. Sea $SL(2, \mathbb{C})$ el grupo de matrices 2×2 con entradas de números complejos y determinante uno. Definimos $PSL(2, \mathbb{C})$ como el grupo proyectivo especial lineal de la siguiente manera

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \pm I.$$

Además, denotaremos por $PSL(2, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices con entradas reales y determinante uno.

El siguiente teorema establece propiedades geométricas fundamentales de las transformaciones de Möbius:

Teorema 2.1. *Cualquier transformación de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ se puede expresar como la composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación $F(z) = \frac{1}{z}$.*

Demostración: Una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que fija el infinito es de la forma

$$z \rightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

es decir, es una composición de homotecias, rotaciones y traslaciones.

Si la transformación no fija el infinito tenemos

$$z \rightarrow F(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

y es por tanto composición de algunas de las transformaciones descritas anteriormente. \square

Veremos bajo qué condiciones las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$ dejan invariante a \mathbb{H}_+^2 y \mathbb{D}^2 actuando como isometrías hiperbólicas.

Teorema 2.2. *Una transformación de Möbius F deja invariante a \mathbb{H}_+^2 si y sólo si $F \in PSL(2, \mathbb{C})$; es decir, si y sólo si tiene la forma*

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1. \quad (2.1)$$

Demostración: Primero demostraremos que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Vamos a encontrar el subgrupo de transformaciones $F \in PSL(2, \mathbb{C})$ que llevan cualquier número real en otro número real.

Si la transformación F está en $PSL(2, \mathbb{C})$, tenemos que

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc = 1.$$

Por hipótesis, F preserva a \mathbb{H}_+^2 ; por continuidad y la biyectividad implica que F también preserva la recta real extendida $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Si

$$T(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}$$

Resulta que F y T coinciden en $\widehat{\mathbb{R}}$, ya que si $z \in \widehat{\mathbb{R}}$ entonces

$$F(z) = \overline{F(\bar{z})} = T(\bar{z}) = \overline{T(z)}$$

Por lo tanto, como F y T coinciden en más de dos puntos, $T = F$. Evaluando en 0 y ∞ tenemos

$$F^{-1}(0) = T^{-1}(0) = -\frac{b}{a} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}},$$

$$F^{-1}(\infty) = T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} = -\frac{\bar{d}}{\bar{c}},$$

de manera que $\frac{\bar{a}}{a} = \frac{\bar{b}}{b} = \lambda$ y $\frac{\bar{c}}{c} = \frac{\bar{d}}{d} = \mu$. Así que

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\mu \bar{a}z + \bar{b}}{\lambda \bar{c}z + \bar{d}} = \frac{\mu}{\lambda} T(z)$$

Pero $F = T$, así que $\lambda = \mu$. Ahora encontraremos el valor de λ :

$$1 = \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \lambda^2(ad - bc) = \lambda^2.$$

Tenemos que $\lambda = \pm 1$, por lo que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1 \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

Es fácil ver el caso cuando $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$, $c = \bar{c}$, $d = \bar{d}$ son números reales.

Falta demostrar el caso cuando $a = -\bar{a}$, $b = -\bar{b}$, $c = -\bar{c}$, $d = -\bar{d}$ no son imaginarios puros; si así fuera, se tendría

$$F(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-\bar{c}i + \bar{d})}{|ci + d|^2}$$

Calculando la parte imaginaria tenemos

$$\operatorname{Im}(F(i)) = \frac{(a\bar{d} - b\bar{c})}{|ci + d|^2} = -\frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}}{|ci + d|^2} < 0$$

lo cual contradice que F preserva a \mathbb{H}_+^2 . \square

Vamos a encontrar una transformación $G \in PSL(2, \mathbb{C})$ que transforme \mathbb{H}_+^2 a \mathbb{D}^2 . Para que esto ocurra, basta hallar una transformación de Möbius que mande tres puntos distintos de la recta extendida $\widehat{\mathbb{R}}$ a tres puntos distintos de la circunferencia unitaria en $\partial\mathbb{D}^2$. Una elección que resulta muy adecuada, es enviar $-1, 0, 1$ a $1, i, -1$.

Si

$$G(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

entonces

$$G(0) = \frac{b}{d} = i \quad G(1) = \frac{a+b}{c+d} = -1 \quad G(-1) = \frac{-a+b}{-c+d} = 1$$

de modo que

$$a + b = -(c + d) \quad \text{y} \quad -a + b = -c + d.$$

Sumando y restando se obtienen las siguientes ecuaciones

$$-b = c \quad \quad \quad a = -d$$

Si $d = -1$, tenemos la transformación de Möbius

$$G(z) = \frac{z - i}{iz - 1}. \quad (2.2)$$

Daremos un criterio para determinar el subgrupo $PSL(2, \mathbb{C})$ que deja invariante al disco \mathbb{D}^2 .

Teorema 2.3. *Una transformación de Möbius $H(z)$ deja invariante al disco \mathbb{D}^2 si y sólo si tiene la forma*

$$H(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}} \quad \text{donde} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Demostración: Vamos a demostrar que si H deja invariante al disco \mathbb{D}^2 entonces H tiene la forma (2.3).

Consideremos las transformaciones de Möbius dadas en forma matricial por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de modo que $F = G^{-1}HG$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{H} & \mathbb{D}^2 \\ G \uparrow & & \downarrow G^{-1} \end{array}$$

$$\mathbb{H}_+^2 \xrightarrow{F} \mathbb{H}_+^2$$

Como H deja invariante al disco, F deja invariante a \mathbb{H}_+^2 y $F \in PSL(2, \mathbb{R})$. Calculando tenemos

$$\begin{aligned} H = GFG^{-1} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a - ci & b - di \\ ai - c & bi - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(a+d) + (c-b)i & c+b + (a-d)i \\ c+b + (d-a)i & -(a+d) + (b-c)i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

es decir,

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}) \quad \text{donde } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Demostraremos el inverso; es decir que si H tiene la forma (2.3) entonces H deja invariante a \mathbb{D}^2 . Para mostrar esto, calcularemos a F y veremos que pertenece a $PSL(2, \mathbb{R})$.

Sea

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{H} & \mathbb{D}^2 \\ G \uparrow & & \downarrow G^{-1} \\ \mathbb{H}_+^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{H}_+^2 \end{array}$$

Por hipótesis tenemos la condición (2.3). Calculando a F tenemos:

$$\begin{aligned} F = G^{-1}HG &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\alpha + \bar{\beta}i & -\beta + \bar{\alpha}i \\ -\alpha i + \bar{\beta} & -\beta i + \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\alpha + \bar{\alpha}) + (\bar{\beta} - \beta)i & (\bar{\beta} + \beta) + (\alpha - \bar{\alpha})i \\ \bar{\beta} + \beta + (\bar{\alpha} - \alpha)i & (\alpha + \bar{\alpha}) + (\beta - \bar{\beta})i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que $F \in PSL(2, \mathbb{R})$ y por tanto deja invariante a \mathbb{H}_+^2 ; entonces, como $G: \mathbb{H}_+^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$, tenemos que $H = GFG^{-1}$ deja invariante a \mathbb{D}^2 . \square

2.2 Geodésicas e isometrías del plano hiperbólico

Ahora demostraremos que las semirrectas ortogonales a $\partial\mathbb{H}_+^2$ son geodésicas de $\partial\mathbb{H}_+^2$.

Teorema 2.4. *Las semirrectas ortogonales a $\partial\mathbb{H}_+^2$ son geodésicas de \mathbb{H}_+^2 .*

Demostración: Consideremos el modelo del semiplano superior con la métrica $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$ y calculemos los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

Para determinar si la curva $\gamma(t) = (a, e^t)$ es una geodésica, veremos que cumple con el siguiente sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0$$

Así, tenemos que

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{21}^1 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0,$$

pues $\frac{dx_1}{dt} = 0$ y $\Gamma_{22}^1 = 0$; análogamente,

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{21}^2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{22}^2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0,$$

pues

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{1}{y} \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Así, $\gamma(t) = (a, e^t)$ es una geodésica. \square

En los siguientes dos teoremas se demostrará que $PSL(2, \mathbb{R}) = I(\mathbb{H}_+^2)$ donde $I(\mathbb{H}_+^2)$ son las isometrías del semi-plano superior.

Teorema 2.5. *Los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías de \mathbb{H}_+^2 respecto a la métrica hiperbólica, es decir, $PSL(2, \mathbb{R}) \subset I(\mathbb{H}_+^2)$.*

Demostración: Sea $F \in PSL(2, \mathbb{R})$ de la forma

$$w = F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{donde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Debemos mostrar que

$$\frac{dw \cdot d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = \frac{dz \cdot d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}$$

Calculando tenemos:

$$\begin{aligned}
-4 \frac{dw \cdot d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} &= -4 \frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \cdot d\left(\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)}{\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)^2} \\
&= -4 \frac{(cz-d) \cdot a \cdot dz - (az+b) \cdot c \cdot dz \cdot (c\bar{z}+d)ad\bar{z} - (a\bar{z}+b)c d\bar{z}}{(cz+d)^2 \frac{(c\bar{z}+d)^2}{(az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)^2}} \\
&= -4 \frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd - acz\bar{z} - ad\bar{z} + bcz - bd}{dz \cdot d\bar{z}} \\
&= -4 \frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd - acz\bar{z} - ad\bar{z} + bcz - bd}{(z - \bar{z})^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F(z)$ es una isometría. \square

Teorema 2.6. *Las isometrías $F : \mathbb{H}_+^2 \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ que preservan orientación son elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$, es decir, $PSL(2, \mathbb{R}) \supset I(\mathbb{H}_+^2)$.*

Demostración: Sea $F : \mathbb{H}_+^2 \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ una isometría.

Si $P, Q, R \in \mathbb{H}_+^2$, sean $F(P) = P', F(Q) = Q', F(R) = R' \in \mathbb{H}_+^2$. Es claro que F lleva ΔPQR en $\Delta P'Q'R'$.

Sabemos que existe $G \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $G(P) = P'$ y $G(Q) = Q'$. Demostraremos que si $F(R) = G(R)$. $G(R)$ tiene sólo dos posibilidades, que son los puntos de intersección de la circunferencia hiperbólica con centro en P' y radio $d_H(P, R)$ y la circunferencia hiperbólica con centro en Q' y radio $d_H(Q, R)$. Como G preserva la orientación, tenemos que $F(R) = G(R)$. Análogamente podemos demostrar que $F(S) = G(S)$ para todo $S \in \mathbb{H}_+^2$; por lo tanto, $F = G$ y $F \in PSL(2, \mathbb{R})$. \square

2.3 El modelo del hiperboloide

\mathbb{R}_1^3 denota el espacio vectorial de dimensión 3 con el producto escalar siguiente:

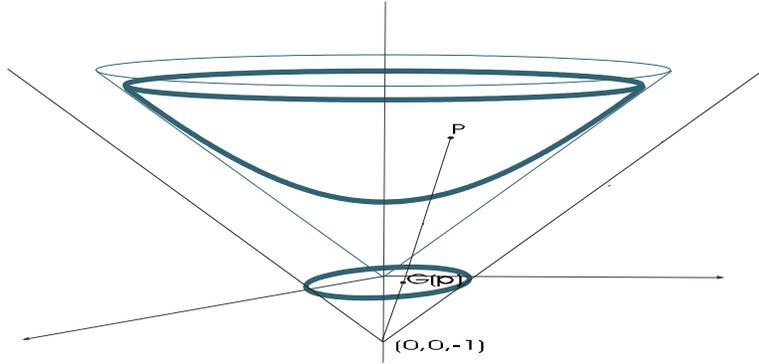
$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2,$$

donde $x = (x_0, x_1, x_2)$ y $y = (y_0, y_1, y_2)$.

Sea $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ el conjunto definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_2 > 0\}$$

Ahora daremos una isometría $G : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ entre el hiperboloide \mathbb{H}^2 y el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 . Sea γ una recta que une a los puntos $p \in \mathbb{H}^2$ y $p_0 = (0, 0, -1)$. Definimos $G(p)$ como la intersección de γ con \mathbb{D}^2 como en la siguiente figura.



Para dar una expresión analítica de G , sean $p = (x_0, x_1, x_2)$ y $G(p) = (u_1, u_2, 0)$. Entonces la recta que une p y p_0 está parametrizada por

$$\gamma(t) = (0, 0, -1) + t[(x_0, x_1, x_2) - (0, 0, -1)] = (tx_0, tx_1, tx_2 + t - 1).$$

Como la tercera coordenada debe anularse, tenemos

$$t = \frac{1}{x_2 + 1}$$

Entonces la proyección de \mathbb{H}^2 en \mathbb{D}^2 es

$$G(x_0, x_1, x_2) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_2 + 1}, \frac{x_1}{x_2 + 1}, 0 \right).$$

Para la transformación inversa, consideramos la recta que pasa por $(x_0, x_1, 0)$ y $(0, 0, -1)$, dada por $\gamma(x_0, x_1) = (tx_0, tx_1, t - 1)$. Calculando a t , tenemos lo siguiente:

$$t = \frac{2}{1 - (x_0^2 + x_1^2)}$$

de modo que

$$f(x_0, x_1) = \left(\frac{2x_0}{1 - (x_0^2 + x_1^2)}, \frac{2x_1}{1 - (x_0^2 + x_1^2)}, \frac{2}{1 - (x_0^2 + x_1^2)} - 1 \right)$$

es la proyección $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$.

Teorema 2.7. *La transformación G es una isometría entre el hiperboloide y el disco de Poincaré.*

Demostración: Sean $u_\alpha = tx_\alpha$ para $\alpha = 0, 1$ y $x_2 = t - 1$, con

$$t = \frac{2}{1 - (x_0^2 + x_1^2)}.$$

Tenemos que

$$du_\alpha = x_\alpha dt + tdx_\alpha, \quad dx_2 = dt, \quad \text{y} \quad dt = \frac{4(x_0dx_0 + x_1dx_1)}{(1 - (x_0^2 + x_1^2))^2};$$

sustituyendo en la expresión para la métrica del hiperboloide, tenemos

$$\begin{aligned} (du_0)^2 + (du_1)^2 - (du_2)^2 &= (dtx_0 + tdx_0)^2 + (dtx_1 + tdx_1)^2 - dt^2 \\ &= dt^2(x_0^2 + x_1^2 - 1) + t^2(dx_0^2 + dx_1^2) + 2tdt(x_0dx_0 + x_1dx_1) \\ &= \frac{16(x_0dx_0 + x_1dx_1)^2}{(1 - (x_0^2 + x_1^2))^4} (x_0^2 + x_1^2 - 1) + t^2(dx_0^2 + dx_1^2) + \\ &\quad + 2\frac{2}{[1 - (x_0^2 + x_1^2)]} \frac{4(x_0dx_0 + x_1dx_1)}{(1 - (x_0^2 + x_1^2))^2} (x_0dx_0 + x_1dx_1) \\ &= -\frac{16(x_0dx_0 + x_1dx_1)^2}{(1 - (x_0^2 + x_1^2))^3} + \frac{16(x_0dx_0 + x_1dx_1)^2}{(1 - (x_0^2 + x_1^2))^3} + t^2(dx_0^2 + dx_1^2) \\ &= \frac{4(dx_0^2 + dx_1^2)}{[1 - (x_0^2 + x_1^2)]^2}. \end{aligned}$$

de modo que

$$(du_0)^2 + (du_1)^2 - (du_2)^2 = \frac{4(dx_0^2 + dx_1^2)}{[1 - (x_0^2 + x_1^2)]^2}$$

De esto concluimos que $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ induce en \mathbb{D}^2 la métrica usual del disco y por tanto es una isometría. \square

2.4 Curvas distinguidas en el plano hiperbólico

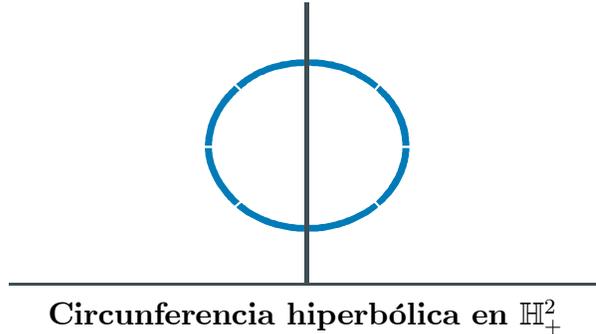
Aquí presentamos las circunferencias geodésicas, los horociclos y las curvas equidistantes a una geodésica en el semiplano superior. Posteriormente describiremos estos tipos de curvas en los otros modelos del plano hiperbólico.

Curvas en el modelo del semiplano superior

Consideramos una circunferencia “euclidiana” completamente contenida en \mathbb{H}_+^2 . El siguiente teorema muestra que ésta es una circunferencia “hiperbólica”.

Teorema 2.8. *Una circunferencia euclidiana es una circunferencia hiperbólica en \mathbb{H}_+^2 .*

Demostración: Sea $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \text{ con } r < 1\}$ una circunferencia euclidiana con centro en el origen contenida en el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 . Como hemos visto $G^{-1} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}_+^2$ es una isometría y $G^{-1}(C)$ es una circunferencia hiperbólica, ya que cualquier transformación de Möbius lleva circunferencias en circunferencias euclidianas, por lo tanto, $G^{-1}(C)$ es una circunferencia euclidiana y hiperbólica contenida en \mathbb{H}_+^2 . Por otro lado, C se puede llevar en cualquier otra circunferencia mediante una transformación de Möbius. \square



Definición 2.9. *Un horociclo es una circunferencia euclidiana tangente a la frontera de \mathbb{H}_+^2 , o bien, su imagen bajo una isometría de \mathbb{H}_+^2 .*

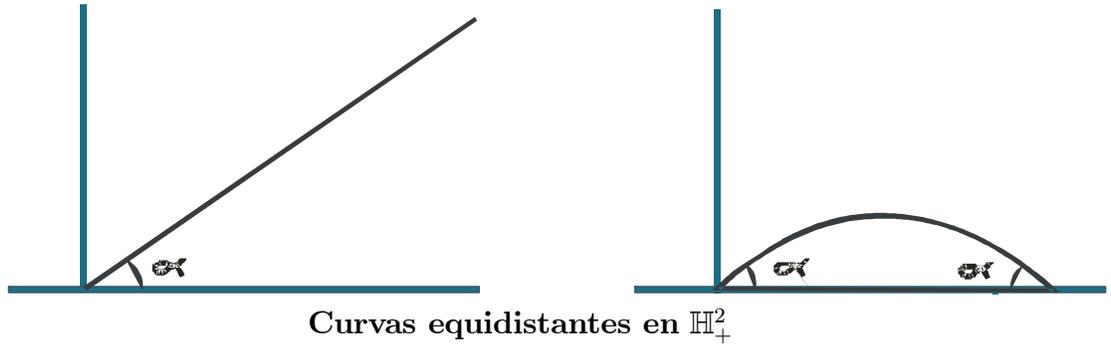
Dada una circunferencia euclidiana tangente a la frontera de \mathbb{H}_+^2 , si mandamos el punto de tangencia en el punto al infinito de $\widehat{\mathbb{C}}$, obtenemos una recta paralela a la frontera del semiplano superior, como vemos en la siguiente figura:



Definiremos una curva equidistante a una geodésica de la manera siguiente.

Proposición 2.10. *Una curva equidistante a una geodésica Q es una recta euclidiana P que corta a la frontera de \mathbb{H}_+^2 en un punto O formando un ángulo α , o bien su imagen bajo una isometría de \mathbb{H}_+^2 .*

Por medio de una inversión la recta P de ángulo α , se transforma en un arco de circunferencia que corta a la frontera del semiplano superior con ángulo α , como vemos en la siguiente figura:



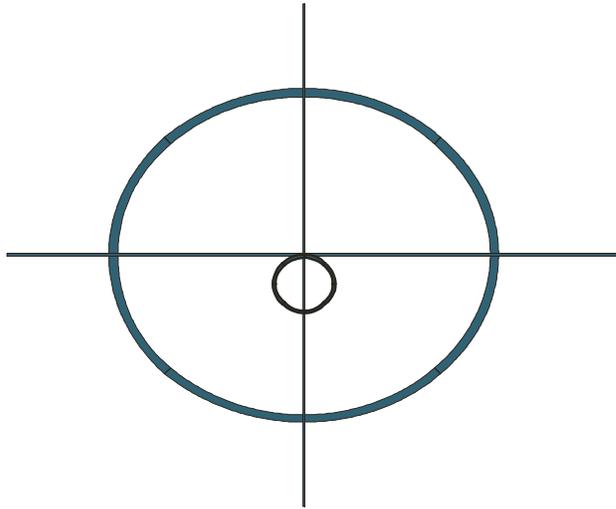
Para justificar este nombre, consideremos una semirrecta Q ortogonal a $\partial\mathbb{H}_+^2$ que pase por el punto de intersección de P con $\partial\mathbb{H}_+^2$. Vamos a probar que P es una curva equidistante de Q . Para esto, sea γ_r una geodésica representada por una semicircunferencia de radio r , con centro en $0 \in P \cap \partial\mathbb{H}_+^2$. Mostraremos que la longitud de γ_r entre los puntos de intersección con P y Q no depende de r . Sea $\gamma_r = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, donde $\theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$. Entonces

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'_r\|_H d\theta = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

lo que no depende de r . Concluimos que al tomar una recta Q perpendicular a $\partial\mathbb{H}_+^2$, P tiene una distancia fija a Q , lo que justifica el nombre de curva equidistante.

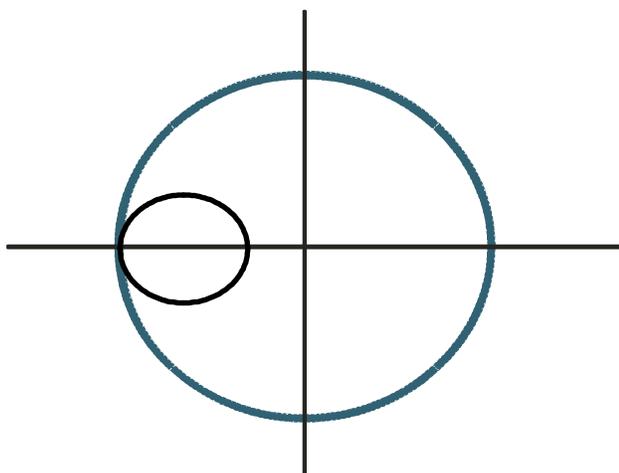
Curvas en D^2

Usando nuevamente las transformaciones de Möbius y la caracterización de las circunferencias geodésicas en \mathbb{H}_+^2 , tenemos que las circunferencias geodésicas de \mathbb{D}^2 son las circunferencias euclidianas totalmente contenidas en \mathbb{D}^2 .

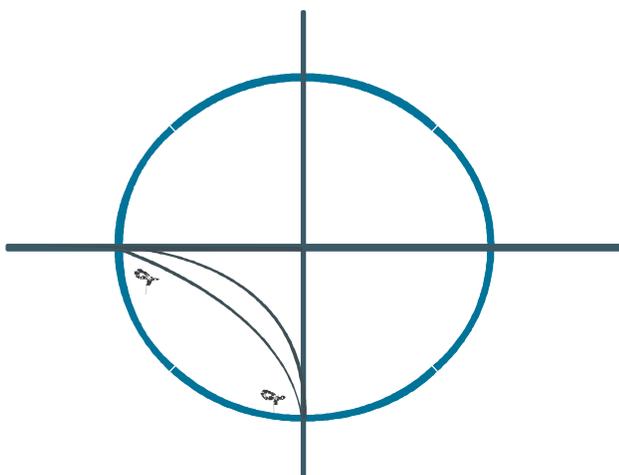


Circunferencia en \mathbb{D}^2

Para ver los horociclos en el disco de Poincaré, utilizamos una transformación de Möbius; esta transformación lleva una circunferencia tangente a la frontera del semiplano superior en una circunferencia tangente a la frontera del disco como en la siguiente figura.

Horociclo en \mathbb{D}^2

Análogamente, podemos ver que una curva equidistante a una geodésica Q en el disco de Poincaré es un arco de circunferencia que corta a la frontera del disco formando un ángulo α .

Curva equidistante en \mathbb{D}^2

Curvas en el modelo del hiperboloide

Antes de analizar con detalle las curvas anteriores en el modelo del hiperboloide, probaremos que la imagen de una circunferencia en \mathbb{D}^2 bajo la proyección antes definida se puede ver como la intersección de \mathbb{H}^2 con un plano P .

Si parametrizamos una circunferencia en \mathbb{D}^2 como

$$x_1 = r \cos t - c, \quad x_2 = r \sin t,$$

donde c es el centro y r es el radio, su imagen en \mathbb{H}^2 está dada de la siguiente manera:

$$\left(\frac{2r \cos t - c}{1 - r^2 + 2rc \cos t - c^2}, \frac{2r \sin t}{1 - r^2 + 2rc \cos t - c^2}, \frac{2}{1 - r^2 + 2rc \cos t - c^2} - 1 \right)$$

Los puntos de esta curva satisfacen la ecuación de un plano

$$Ax + By + Cz = D$$

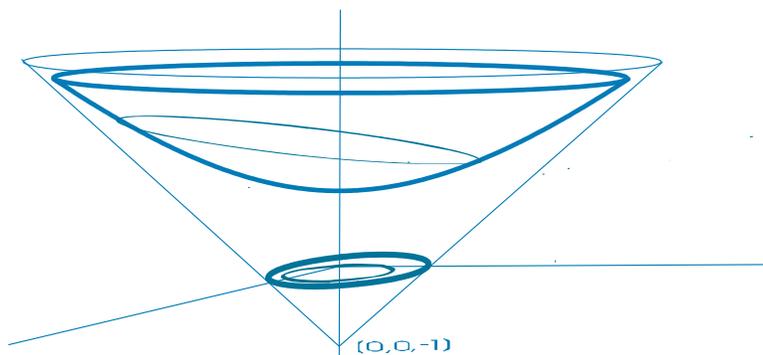
con $A = c$, $B = 0$, $C = \frac{1-r^2}{2}$ y $D = \frac{1+r^2}{2}$. Así, la imagen de un arco de circunferencia en \mathbb{D}^2 bajo la proyección a \mathbb{H}^2 es una curva plana en \mathbb{H}^2 es decir, la curva es la intersección de P con \mathbb{H}^2 donde P es un plano que forma un ángulo α con el plano xy .

En particular, si una circunferencia tiene centro en el origen con radio $r < 1$ en \mathbb{D}^2 , al proyectar en \mathbb{H}^2 obtenemos una circunferencia, que es la intersección de un plano P paralelo al plano x_0x_1 con \mathbb{H}^2 , haciendo el cálculo tenemos:

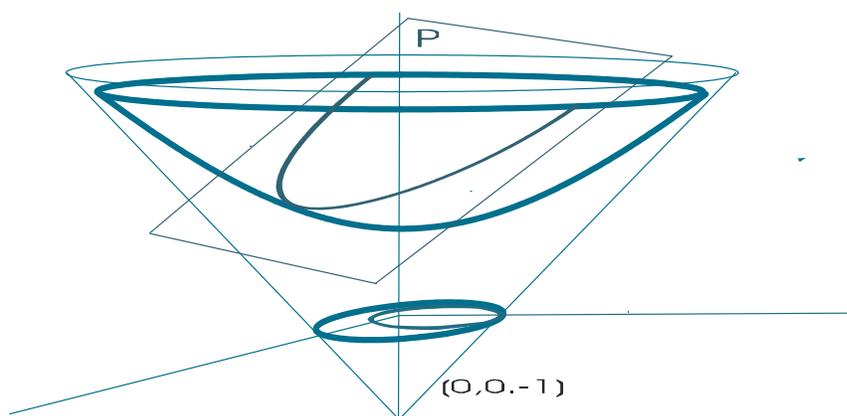
$$\left(\frac{2 \cos t}{1 - r^2}, \frac{2 \sin t}{1 - r^2}, \frac{2}{1 - r^2} - 1 \right)$$

Así que P tiene un ángulo $\alpha = 0$. Si trasladamos el centro de la circunferencia en el eje x la proyección de la circunferencia sólo cambia de ángulo. Si el plano P forma un ángulo entre $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, se tiene que $P \cap \mathbb{H}^2$ es una elipse. Por otro lado, si parametrizamos un horociclo en \mathbb{H}^2 fijando el centro c en el eje de las abscisas con $0 < c - 1 < 1$ y escribiendo el radio en términos del centro, tenemos la circunferencia siguiente $((1 + c) \cos t - c, (1 - c) \sin t)$ proyectando el horociclo en $G^{-1} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ obtenemos una curva que pertenece al plano P como $x = z + a$, que es un plano paralelo a la generatriz del cono con ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, es decir, la imagen del horociclo en \mathbb{H}^2 es una parábola. Si la circunferencia es una curva equidistante a una geodésica, la proyección en \mathbb{H}^2 es una hipérbola, donde el plano P tiene un ángulo α , $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Si el plano tiene un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tenemos una geodésica en \mathbb{H}^2 .

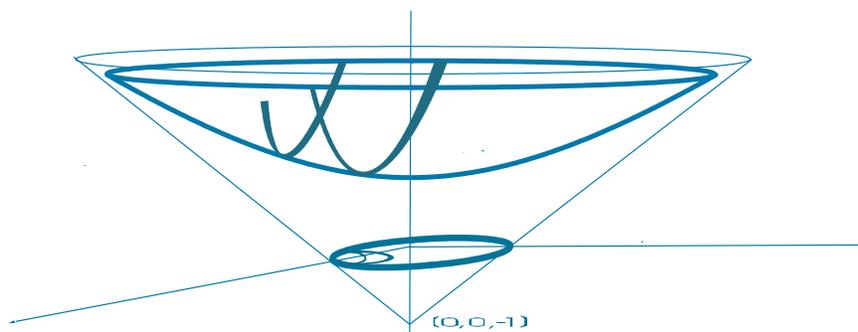
Las curvas descritas anteriormente tienen la forma que se muestra en las siguientes figuras.



Circunferencia geodésica en \mathbb{H}^2



Horociclos en \mathbb{H}^2



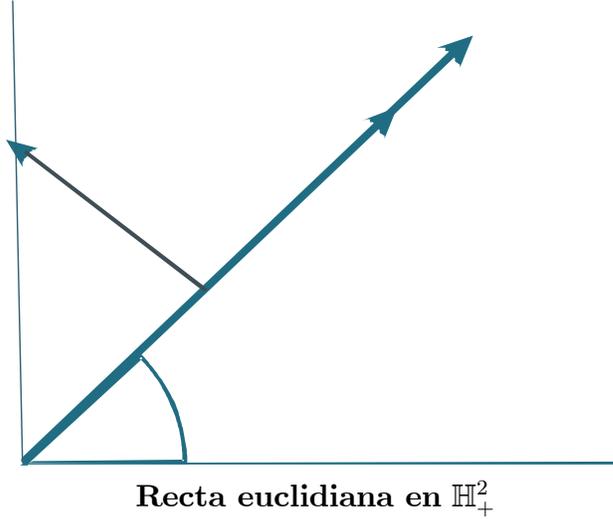
Curvas equidistantes a una geodésica en \mathbb{H}^2

Curvas con curvatura constante en \mathbb{H}_+^2

En esta sección calcularemos la curvatura de una recta euclidiana en \mathbb{H}_+^2 , Como consecuencia de esto obtendremos como resultado que los horociclos

son las curvas en \mathbb{H}_+^2 que tienen curvatura constante 1.

Como primer cálculo auxiliar obtendremos la curvatura de una recta euclidiana en el modelo del semiplano superior.



Teorema 2.11. *Las rectas euclidianas que forman un ángulo α con la frontera de \mathbb{H}_+^2 tienen curvatura*

$$k = -\cos\alpha$$

Demostración: Usaremos la siguiente parametrización de la curva:

$$\mathbf{x}(t) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha).$$

En los puntos de la curva, la métrica de \mathbb{H}_+^2 se ve como

$$(g_{ij}) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos la definición (1.27) para calcular los símbolos de Christoffel en términos de la métrica. Como $g^{mk} = 0$ si $m \neq k$, se tiene

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{kk}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{t}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\cos \alpha}{t^2 \sin \alpha}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Sustituimos estos coeficientes en la conexión afín, donde X es el campo tangente a la recta y $\eta = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 = \text{sen } \alpha X_2$ es un campo vectorial normal constante en la recta.

$$\begin{aligned}
\nabla_X \eta &= \sum_k^2 \left(\sum_{ij}^2 x_i \eta_j \Gamma_{ij}^k + X(\eta_k) \right) X_k \\
&= x_1 \eta_1 \Gamma_{11}^1 X_1 + x_1 \eta_2 \Gamma_{12}^1 X_1 + x_2 \eta_1 \Gamma_{21}^1 X_1 + X(\eta_1) X_1 \\
&\quad + x_1 \eta_1 \Gamma_{11}^2 X_2 + x_2 \eta_2 \Gamma_{22}^2 X_2 + X(\eta_2) X_2 \\
&= t \eta_1 \left(-\frac{1}{x_1} \right) X_1 + t \eta_2 \left(-\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \right) X_1 + x_2 \eta_1 \left(-\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \right) X_1 + X(\eta_1) X_1 \\
&\quad + x_1 \eta_1 \left(\frac{\cos \alpha}{t^2 \text{sen } \alpha} \right) X_2 + x_2 \eta_2 \left(-\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \right) X_2 + X(\eta_2) X_2; \\
&= t \text{sen } \alpha \left(-\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \right) X_1 + t \text{sen } \alpha \left(-\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \right) X_2 \\
&= -\cos \alpha (t X_1 + t X_2)
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\nabla_X \eta = -\cos \alpha X.$$

Así, la curvatura de una recta euclidiana en \mathbb{H}_+^2 depende sólo del ángulo α .

Como resultado obtenemos la curvatura de los horociclos y las geodésicas.

Corolario 2.12. *Si γ es un horociclo de \mathbb{H}_+^2 , entonces γ tiene curvatura constante 1.*

Demostración: Como el horociclo es isométrico a una recta paralela a la frontera de \mathbb{H}_+^2 , se tiene que $\alpha = 0$, de modo que su curvatura es $k = \cos 0 = 1$.

En el capítulo 3, veremos el recíproco, en el caso general (ver 3.18), es decir: Si γ tiene curvatura constante 1 en \mathbb{H}_+^2 entonces $\gamma \subset \mathbb{H}_+^2$ es un horociclo.

Como los tres modelos son isométricos, los horociclos también tienen curvatura 1 en el disco de Poincaré y en el hiperboloide.

Capítulo 3

El espacio hiperbólico

El objetivo ahora es generalizar el análisis del capítulo anterior al caso de dimensión n . Veremos nuevamente tres modelos del espacio hiperbólico. En el modelo del hiperboloide pensaremos a \mathbb{H}^n como subconjunto del espacio vectorial \mathbb{R}_1^{n+1} y veremos que \mathbb{H}^n es una subvariedad completa, totalmente umbílica de \mathbb{R}_1^{n+1} , calculando su curvatura seccional. Finalmente analizaremos algunas subvariedades inmersas en \mathbb{H}^n con curvatura constante; en particular, las subvariedades totalmente geodésicas y las subvariedades totalmente umbílicas en \mathbb{H}^n .

3.1 Los modelos del espacio hiperbólico

El semiespacio superior \mathbb{H}_+^n se define como el conjunto

$$\mathbb{H}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Análogamente a lo que hicimos en el capítulo anterior, es posible mostrar que las geodésicas de \mathbb{H}_+^n son las semicircunferencias en \mathbb{H}_+^n ortogonales a $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ y también las semirectas en \mathbb{H}_+^n , perpendiculares a \mathbb{R}^{n-1} .

El grupo de isometrías de \mathbb{H}_+^n es el grupo generado por las inversiones en esferas de dimensión $n - 1$ cuyo centro está en \mathbb{R}^{n-1} y las reflexiones con respecto a hiperplanos verticales. Ver [14].

El disco de Poincaré es el disco unitario abierto

$$\mathbb{D}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}.$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)}{(1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2))}.$$

Sea $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ la frontera de \mathbb{D}^n , definida por:

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Sabemos entonces que las geodésicas de \mathbb{D}^n son las circunferencias ortogonales a \mathbb{S}^{n-1} y los diámetros de \mathbb{D}^n .

Definiremos el modelo del hiperboloide, como el conjunto de $(n+1)$ -adas de números reales, con la siguiente métrica:

$$\langle x, y \rangle = x_0y_0 + \dots - x_ny_n$$

donde $x = (x_0, \dots, x_n)$ y $y = (y_0, \dots, y_n)$. Sea \mathbb{H}^n el conjunto definido como

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = x_0^2 + \dots - x_n^2 = -1, x_n > 0\}.$$

Más adelante mostraremos que \mathbb{H}^n tiene curvatura seccional constante negativa. Como paso preliminar, mostramos que el vector de posición p (en \mathbb{R}_1^{n+1}) es el vector normal a \mathbb{H}^n .

Consideremos una curva en el hiperboloide, es decir,

$$x_0^2(t) + \dots - x_n^2(t) = -1.$$

Derivando con respecto a t , tenemos

$$2x_0x_0'(t) + \dots - 2x_nx_n'(t) = 0$$

lo que nos dice que

$$\langle (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n), (x_0', \dots, x_{n-1}', x_n') \rangle = 0;$$

(con la métrica dada) es decir, el vector de posición es ortogonal al vector tangente. En adelante denotaremos el vector normal por η .

Teorema 3.1. \mathbb{H}^n es una subvariedad totalmente umbílica en \mathbb{R}_1^{n+1} .

Demostración: Sea S_η el operador de forma de la hipersuperficie $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$. De acuerdo con la definición 1.38, debemos mostrar que $S_\eta(X_p) = X_p$. Como hemos visto, el vector de posición p es el vector normal η , de modo que

$$S_\eta(X_p) = (\overline{\nabla}_{X_p} \eta)^T = (\overline{\nabla}_{X_p} p)^T = \overline{\nabla}_{X_p} p = X_p;$$

esto muestra que $p \in \mathbb{H}^n$ es un punto umbílico; como esto vale para todo p , tenemos que \mathbb{H}^n es totalmente umbílica en \mathbb{R}_1^{n+1} .

Teorema 3.2. *La curvatura seccional de \mathbb{H}^n es constante e igual a -1 .*

Demostración: Si X_p, Y_p generan un plano tangente no degenerado en M , entonces por la ecuación de Gauss para hipersuperficies (1.40) tenemos que:

$$K(X_p, Y_p) = \overline{K}(X_p, Y_p) - \frac{\langle S_\eta(X_p), X_p \rangle \langle S_\eta(Y_p), Y_p \rangle - \langle S_\eta(X_p), Y_p \rangle^2}{\langle X_p, X_p \rangle \langle Y_p, Y_p \rangle - \langle X_p, Y_p \rangle^2},$$

Como \mathbb{R}_1^{n+1} tiene curvatura seccional $\overline{K}(X_p, Y_p) = 0$; además, $S_\eta(X_p) = X_p$, de modo que al sustituir en la expresión anterior tenemos que la curvatura seccional de \mathbb{H}^n es $K(X_p, Y_p) = -1$.

Para demostrar que \mathbb{H}^n es completa necesitaremos algunos resultados de isometrías. Si $T : V \rightarrow W$ es un isomorfismo lineal que preserva el producto escalar lo llamamos isometría lineal.

Teorema 3.3. *Dos espacios vectoriales V, W con producto escalar tienen la misma dimensión y el mismo índice si y sólo si existe una isometría lineal de V a W .*

Demostración: Supongamos que los espacios tienen la misma dimensión y el mismo índice. Sean e_1, \dots, e_n una base ortonormal para V y e'_1, \dots, e'_n una base ortonormal para W . Por el lema 2.26 de [8], podemos suponer que $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle$ para toda i, j .

Sea T la transformación lineal tal que $T(e_i) = e'_i$ para toda i . Es claro que T es una isometría lineal.

Recíprocamente, si $T : V \rightarrow W$ es una isometría lineal, T lleva una base ortonormal para V en una base ortonormal para W . Además, $\dim V = \dim W$ y por el mismo lema 2.26 de [8] tenemos que $\text{ind } V = \text{ind } W$.

Teorema 3.4. Sean e_1, \dots, e_n y e'_1, \dots, e'_n bases ortonormales de vectores tangentes en \mathbb{H}^n en los puntos p y q respectivamente. Entonces existe una isometría $T : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ que lleva \mathbb{H}^n isométricamente en sí mismo tal que $T(p) = q$ y $dT(e_i) = e'_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración: Tenemos e_1, \dots, e_n una base ortonormal en $T_p\mathbb{H}^n$ y otra base ortonormal e'_1, \dots, e'_n en $T_q\mathbb{H}^n$. Como sabemos que el vector posición es el vector normal a \mathbb{H}^n , cada base e_1, \dots, e_n, p y e'_1, \dots, e'_n, q es una base ortonormal en \mathbb{R}_1^{n+1} . Por lo que podemos encontrar una transformación $T : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ tal que $T(p) = q$. Como T es lineal tenemos $dT(e_i) = e'_i$ para toda i . Por el lema 3.7 de [8] sabemos que T restringida a \mathbb{H}^n es una isometría de \mathbb{H}^n .

Teorema 3.5. \mathbb{H}^n es completo.

Demostración: La idea es mostrar que una geodésica particular es completa y luego llevar esa curva en otra geodésica arbitraria.

Mostraremos primero que la curva $\gamma_1(t) = (0, \dots, 0, \sinh t, \cosh t)$ es una geodésica completa en \mathbb{H}^n . Calculando la derivada, tenemos que

$$\gamma'_1(t) = (0, \dots, 0, -\cosh t, \sinh t)$$

de modo que

$$\|\gamma'_1(t)\|_{hip}^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

lo que dice que γ_1 está parametrizada por longitud de arco; además

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'_1(t)\|_{hip}^2 dt = \int_0^t dt = t$$

de modo que γ_1 es completa.

En el caso de una geodésica γ_2 arbitraria, por la proposición anterior implica que existe una isometría T tal que $T(\gamma_1) = \gamma_2$. Como T lleva geodésicas completas en geodésicas completas, toda geodésica en \mathbb{H}^n es completa y \mathbb{H}^n es completo.

3.2 Subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{H}^n

En esta sección veremos que si una subvariedad M está inmersa y es totalmente geodésica en \mathbb{H}^n , entonces M es de la forma $P \cap \mathbb{H}^n$, donde P es un hiperplano en \mathbb{R}_1^{n+1} . Primeramente construiremos la herramienta en términos de distribuciones y campos vectoriales.

Definición 3.6. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva en una variedad diferenciable M , Δ es una **distribución de dimensión j** a lo largo γ , si para cada $\gamma(s) \in M$ tenemos un subespacio de dimensión j tal que $\Delta_{\gamma(s)} \subset T_{\gamma(s)}M$ y $\Delta_{\gamma(s)}$ es generado por j campos vectoriales suaves para toda s .

Definición 3.7. Δ es una **distribución de dimensión j paralela** a lo largo de γ si y sólo si existen j campos vectoriales suaves X_1, \dots, X_j paralelos a lo largo de γ y $\Delta_{\gamma(s)}$ es generado por $X_1(\gamma(s)), \dots, X_j(\gamma(s))$ para toda s .

Teorema 3.8. Sea Δ una distribución a lo largo de γ . La condición $DX(s)/ds \in \Delta_{\gamma(s)}$, para todo campo vectorial suave X tal que $X(s) \in \Delta_{\gamma(s)}$ es equivalente a que Δ sea una distribución paralela a lo largo de γ .

Demostración: Sean X_1, \dots, X_j campos vectoriales suaves que generen a Δ . Supongamos, $DX_i(s)/ds \in \Delta_{\gamma(s)}$; entonces existen a_{ik} tales que

$$\frac{DX_i(s)}{ds} = \sum_k a_{ik} X_k$$

Si $W = \sum_i b_i X_i$ es un campo paralelo a lo largo de γ , entonces

$$\begin{aligned} 0 = \frac{DW}{ds} &= \sum_i \left(b_i \frac{DX_i}{ds} + \frac{db_i}{ds} X_i \right) = \sum_i \left(b_i \sum_k a_{ik} X_k + \frac{db_i}{ds} X_i \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i b_i a_{ik} + \frac{db_k}{ds} \right) X_k. \end{aligned}$$

Así que,

$$\sum_i b_i a_{ik} + \frac{db_k}{ds} = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, j.$$

Esta ecuación es lineal, por lo que tiene soluciones en todo el intervalo $[a, b]$ con condiciones iniciales arbitrarias. Si para cada $\lambda = 1, \dots, j$ denotamos por $b_{i\lambda}$ las soluciones del sistema anterior con condiciones iniciales $b_{i\lambda}(a) = \delta_{i\lambda}$ y $W_\lambda = \sum_{i=1}^j b_{i\lambda} X_i$, entonces los campos vectoriales W_i son paralelos a lo largo de γ y son linealmente independientes en a , por lo que son linealmente independientes en todas partes. Los campos $W_i(s)$ generan a $\Delta_{\gamma(s)}$ para toda s , lo cual demuestra que Δ es paralelo a lo largo de γ .

Demostrando el recíproco, supongamos que Δ es una distribución paralela a lo largo de γ y X es un campo vectorial a lo largo de γ tal que pertenece a $\Delta_{\gamma(s)}$ (es decir, $X(s) \in \Delta_{\gamma(s)}$ para todo s). Por lo que

$$X = \sum a_i X_i$$

Como cada X_i es un campo vectorial paralelo,

$$\frac{DX}{ds} = \sum_{i=1}^j \left(a_i \frac{DX_i}{ds} + \frac{da_i}{ds} X_i \right) = \sum_{i=1}^j \frac{da_i}{dt} X_i$$

Así que

$$\frac{DX}{ds} \in \Delta_{\gamma(s)} \quad \text{para todo } s \in [a, b]. \quad \square$$

En seguida definiremos la transformación exponencial.

Sabemos que dado cualquier p en M ; existen $\delta, \epsilon > 0$, un conjunto abierto $V \subset M$ y una transformación γ (ver [3] p.64)

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M \quad \text{donde } \mathcal{U} = \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in T_p M \mid |v| < \epsilon\}$$

tales que la curva $\gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$ es la única geodésica en M tal que $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = v$ para cada $q \in V$ y $v \in T_p M$.

Por otra parte, usando la unicidad de las geodésicas tenemos que

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v);$$

el lado izquierdo de esta igualdad representa la geodésica que pasa por q con velocidad av y el lado derecho representa una reparametrización de la geodésica que pasa por q con velocidad v .

Si hacemos $a = \delta/2$, $\gamma(at, q, v)$ está definida en el intervalo $(-2, 2)$ de modo que $\gamma(t, q, av)$ está definida para $|av| < \epsilon$, o $|v| < 2\epsilon/\delta$. Podemos entonces definir la aplicación \exp por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad q \in V, |v| < 2\epsilon/\delta.$$

Teorema 3.9. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_1^m$ una curva en \mathbb{R}_1^m . Supongamos que Δ es una distribución de dim j paralela a lo largo de γ tal que $\gamma'(s) \in \Delta_{\gamma(s)}$ para toda s . Entonces la curva γ pertenece a un subespacio vectorial de dimensión j , $P \subset \mathbb{R}^m$, y $P = \exp(\Delta_{\gamma(s)})$ para toda s .*

Demostración: Sea $P = \Delta_{\gamma(a)}$ el subespacio vectorial de dimensión j al que pertenece $\gamma'(a)$ en \mathbb{R}_1^m . Supondremos que P es paralelo al subespacio vectorial (x_1, \dots, x_j) . Supongamos que la curva $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_m)$ no está enteramente contenida en P ; entonces existe k donde $j < k \leq m$ tal que $\gamma_k(a) \neq \gamma_k(s)$; por el teorema del valor medio, sabemos que

$$\gamma_k(a) - \gamma_k(s) = \gamma'_k(s_0)(a - s)$$

entonces hay un vector tangente con $\gamma'_k(s_0) \neq 0$; esto es imposible, ya que $\Delta_{\gamma(s)}$ es una distribución paralela a lo largo de γ y es igual a P . Es claro que $P = \exp(\Delta_{\gamma(s)})$. \square

Definición 3.10. *M es totalmente geodésica en \overline{M} si y sólo si cada geodésica de M es también geodésica en \overline{M} .*

Usaremos los resultados anteriores para analizar el caso hiperbólico.

Teorema 3.11. *Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$ una inmersión y Δ una distribución paralela de dimensión j a lo largo de γ tal que $\gamma'(s) \in \Delta_{\gamma(s)}$ para toda s . Entonces γ está contenida en P una subvariedad totalmente geodésica en \mathbb{H}^n y $\exp(\Delta(s)) \subset P$ para toda s .*

Demostración: Este resultado es esencialmente local. Sea $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$. Denotemos las conexiones en \mathbb{H}^n y \mathbb{R}_1^{n+1} por ∇ y $\overline{\nabla}$, respectivamente y sea η un campo unitario normal a \mathbb{H}^n .

Como $\Delta_{\gamma(s)}$ es una distribución paralela a lo largo de γ , por el teorema 3.8

$$\frac{DX(s)}{ds} \in \Delta_{\gamma(s)} \text{ para todo } X(s) \in \Delta(\gamma(s));$$

definimos

$$\bar{\Delta}_{\gamma(s)} = \Delta_{\gamma(s)} \oplus \mathbb{R} \cdot \eta(\gamma(s)) \text{ para toda } s. \quad (3.1)$$

Así que falta demostrar que $\bar{\Delta}_{\gamma(s)}$ es paralela en \mathbb{R}_1^{n+1} ; es decir, hay que demostrar que para todo $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^{n+1})$ tal que $\bar{X}(\gamma(s)) \in \bar{\Delta}_{\gamma(s)}$, se cumple que $\frac{D\bar{X}(\gamma(s))}{ds} \in \bar{\Delta}_{\gamma(s)}$. escribimos $\bar{X}(\gamma(s))$ como

$$\bar{X}(s) = X(s) + \lambda(s)\eta(s)$$

Al derivar obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{X}(\gamma(s))}{ds} &= \frac{DX(\gamma(s))}{ds} + \frac{D(\lambda(s)\eta(s))}{ds} \\ &= \left(\frac{DX(\gamma(s))}{ds} \right)^\top + \left(\frac{DX(\gamma(s))}{ds} \right)^\perp + \frac{D(\lambda(s)\eta(s))}{ds} \end{aligned}$$

Pero

$$\left(\frac{DX(\gamma(s))}{ds} \right)^\top = \frac{DX(\gamma(s))}{ds} \in \Delta_{\gamma(s)}$$

Sólo falta demostrar que $\frac{D(\lambda(s)\eta(s))}{ds} \in \bar{\Delta}_{\gamma(s)}$

$$\frac{D(\lambda(s)\eta(s))}{ds} = \frac{D\lambda}{ds}\eta + \lambda \frac{D\eta}{ds}$$

Por otro lado, por la proposición 3.1, \mathbb{H}^n es totalmente umbílica en \mathbb{R}_1^{n+1} , por lo que

$$\frac{D\eta(\gamma(s))}{ds} = \bar{\nabla}_{\gamma'(s)}\eta = \lambda\gamma'(s) \in \Delta_{\gamma(s)} \quad (3.2)$$

Así que

$$\frac{D\bar{X}(\gamma(s))}{ds} = \frac{D\lambda}{ds}\eta + \lambda\gamma' \in \bar{\Delta}_{\gamma(s)}$$

Por el teorema 3.8 tenemos que $\bar{\Delta}$ es una distribución paralela en \mathbb{R}_1^{n+1} . Por el teorema 3.9, la curva γ está en un subespacio vectorial $P \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ de dimensión $j+1$ y $P = \exp(\bar{\Delta}_{\gamma(s)})$ para toda s . Como $\eta(\gamma(s)) \in \bar{\Delta}_{\gamma(s)}$, el subespacio vectorial P pasa por el origen $0 \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Así, la curva γ está contenida en $P \cap \mathbb{H}^n$, también tenemos que $\exp(\Delta_{\gamma(s)}) \subset P \cap \mathbb{H}^n$ para toda s . Esto implica que $P \cap \mathbb{H}^n$ es totalmente geodésica en \mathbb{H}^n . \square

Teorema 3.12. *Sea M una subvariedad conexa inmersa en \mathbb{H}^n y sea Δ una distribución de dimensión j a lo largo de M tal que $T_p M \subset \Delta(p)$ para toda $p \in M$. Supongamos que $\Delta_{\gamma(s)}$ es una distribución paralela a lo largo de cada curva γ tal que $\gamma'(s) \in \Delta_{\gamma(s)}$ para toda s en M . Entonces M está contenida en una subvariedad totalmente geodésica $P \subset \mathbb{H}^n$ y $\exp(\Delta(p)) \subset P$ para toda $p \in M$.*

Demostración: Sean $p_0 \in M$ y P una subvariedad totalmente geodésica en \mathbb{H}^n con $\exp(\Delta(p_0)) \subset P$. Para cada $p \in M$ encontramos una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma(1) = p$. Aplicamos el teorema 3.11 a la distribución $s \rightarrow \Delta_{\gamma(s)}$ lo que implica que γ está contenida en una subvariedad totalmente geodésica $Q \subset \mathbb{H}^n$ de dimensión j , y $\exp(\Delta(\gamma(s))) \subset Q$ para toda s . Si $s = 0$, vemos que $Q \subset P$. Entonces $p \in P$ y $\exp(\Delta(p)) = \exp(\Delta(\gamma(1))) \subset Q \subset P$. \square

Lema 3.13. *Si M es una subvariedad totalmente geodésica en \mathbb{H}^n y $e_{n+1} \in M$ entonces $M = P \cap \mathbb{H}^n$*

Demostración: Sea P un subespacio de \mathbb{R}_1^{n+1} tal que $P = T_{e_{n+1}} M \oplus \lambda e_{n+1}$ y $e_{n+1} \in P$ entonces $P \cap \mathbb{H}^n$ es totalmente geodésica en \mathbb{H}^n .

$$T_{e_{n+1}} M = T_{e_{n+1}}(P \cap \mathbb{H}^n)$$

Por unicidad de las geodésicas

$$M = P \cap \mathbb{H}^n. \quad \square$$

Teorema 3.14. *Si M es una subvariedad totalmente geodésica en \mathbb{H}^n para cualquier q en M entonces $M = P \cap \mathbb{H}^n$ donde P es un subespacio de \mathbb{R}_1^{n+1} tal que $q \in P$.*

Demostración: Sea T una isometría de \mathbb{H}^n tal que $T(e_{n+1}) = q$ donde $q \in P$; entonces $T^{-1}(M)$ es una subvariedad totalmente geodésica que pasa por e_{n+1} . Por el lema anterior $T^{-1}(M) = P \cap \mathbb{H}^n$ por lo tanto $M = T(P) \cap \mathbb{H}^n$. \square

3.3 Subvariedades totalmente umbílicas de \mathbb{H}_+^n

Ahora veremos que las únicas subvariedades totalmente umbílicas en \mathbb{H}_+^n son las horoesferas, las esferas geodésicas y las hipersuperficies equidistantes.

Dedicamos el resto de este capítulo a mostrar que estas hipersuperficies son las únicas totalmente umbílicas en el espacio hiperbólico.

Teorema 3.15. *Sean $n \geq 2$ y M^n una subvariedad conexa y totalmente umbílica inmersa en \mathbb{R}^{n+1} , de modo que si η es el campo normal a M , entonces*

$$\bar{\nabla}_X \eta = -\lambda X$$

para todo campo X en M . Entonces λ es constante.

Demostración: Es suficiente probar el lema localmente. Sea $X_1, \dots, X_n, X_{n+1} = \eta$ un marco móvil en M . Por hipótesis existe una función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\nabla}_X X_{n+1} = -\lambda X \quad X \in \mathfrak{X}(M) \quad (3.3)$$

En términos de 1-formas duales y las formas de conexión tenemos

$$\omega_{i,n+1}(X) = \langle \bar{\nabla}_X X_{n+1}, X_i \rangle = -\lambda \langle X, X_i \rangle;$$

es decir,

$$\omega_{i,n+1}(X) = -\omega_{n+1,i}(X) = -\lambda \omega_i(X)$$

Calculando la derivada exterior y usando las ecuaciones de estructura obtenemos

$$d\lambda \wedge \omega_j + \lambda d\omega_j = \sum_i \omega_{n+1,i} \wedge \omega_{ij} = -\lambda \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ij}$$

Como

$$d\omega_j = -\sum_i \omega_i \wedge \omega_{ij},$$

entonces

$$d\lambda \wedge \omega_j = 0.$$

Esto implica que $d\lambda = 0$, así que λ es constante localmente. Este argumento demuestra en general que $\{q \in M : \lambda(q) = \lambda(p)\}$ es abierto, pero también es cerrado y M es conexa por lo que λ es constante en todo M . \square

Teorema 3.16. *Sean $n \geq 2$ y M^n una subvariedad conexa y totalmente umbílica inmersa en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces*

1. M es totalmente geodésica y está contenida en un espacio vectorial de dimensión n , es decir, $II = 0$ en todas partes.
2. M está contenida en una esfera de dimensión n .

Demostración: Por el lema anterior, sabemos que λ es constante. Si $\lambda = 0$, entonces $\langle \bar{\nabla}_X X_{n+1}, X_j \rangle = 0$, por lo tanto la segunda forma fundamental $II = 0$ se anula en todas partes; esto implica que M es totalmente geodésica en \mathbb{R}^{n+1} y que M está contenida en un espacio vectorial de dimensión n .

Por otro lado, si $\lambda \neq 0$, sea V el campo vectorial en \mathbb{R}^{n+1} definido por

$$V(p) = p \in T_p \mathbb{R}^{n+1}.$$

Entonces $\bar{\nabla}_X V = X$ para cada vector tangente X de \mathbb{R}^{n+1} . Por la ecuación (3.3),

$$\bar{\nabla}_X (X_{n+1} + \lambda V) = 0$$

El campo vectorial $X_{n+1} + \lambda V$ es paralelo a lo largo de M identificando el vector tangente de \mathbb{R}^{n+1} con elementos de \mathbb{R}^{n+1} . Esto significa que $X_{n+1} + \lambda V$ es un vector constante v_0 sobre M , por lo tanto tenemos

$$X_{n+1}(p) + \lambda p = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

Así,

$$p - \frac{v_0}{\lambda} = \frac{-X_{n+1}(p)}{\lambda} \quad \text{y} \quad \left| p - \frac{v_0}{\lambda} \right| = \left| \frac{X_{n+1}(p)}{\lambda} \right| = \frac{1}{|\lambda|}$$

para todo $p \in M$, lo cual significa que M está contenida en una esfera de radio $\frac{1}{|\lambda|}$ con centro en el punto v_0/λ . \square

Teorema 3.17. Sean $f : N \rightarrow \bar{N}$ conforme y M una subvariedad de N con $p \in M$ un punto umbílico. Entonces $f(p)$ es un punto umbílico de $f(M) \subset \bar{N}$ (aunque la λ para $f(p)$ no necesariamente es la misma que la λ para p).

Demostración: Como el resultado es local, supondremos que N y \bar{N} están contenidas en \mathbb{R}^m , que f es la identidad con $p = f(p) = 0$ y $T_p M = T_{f(p)} f(M)$ es el plano (x_1, \dots, x_n) contenido en $T_0 \mathbb{R}^m$. Las métricas para N y \bar{N} tienen componentes $g_{\alpha\beta}$ y $\bar{g}_{\alpha\beta}$, donde

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}$$

para alguna función σ . Entonces $\bar{g}^{\alpha\beta} = e^{-2\sigma}g^{\alpha\beta}$; haciendo cálculos directos relacionamos los correspondientes símbolos de Christoffel de N y \bar{N} (ver la observación de la definición 1.27) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{g}_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} \\
= & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial e^{2\sigma} g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial e^{2\sigma} g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} \\
= & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial e^{2\sigma}}{\partial x_\beta} g_{\alpha\mu} + e^{2\sigma} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial e^{2\sigma}}{\partial x_\alpha} g_{\beta\mu} + e^{2\sigma} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial e^{2\sigma}}{\partial x_\mu} g_{\alpha\beta} - e^{2\sigma} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} \\
= & e^{2\sigma} \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} + g_{\alpha\mu} \sigma_\beta + g_{\beta\mu} \sigma_\alpha - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma &= \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{g}_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} \bar{g}^{\mu\gamma} \\
&= \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} + g_{\alpha\mu} \sigma_\beta + g_{\beta\mu} \sigma_\alpha - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \right) g^{\mu\gamma} \\
&= \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right\} g^{\mu\gamma} \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^m g^{\mu\gamma} g_{\alpha\mu} \sigma_\beta + \sum_{\mu=1}^m g^{\mu\gamma} g_{\beta\mu} \sigma_\alpha - \sum_{\mu=1}^m g^{\mu\gamma} g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \\
&= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \delta_{\alpha\gamma} \sigma_\beta + \delta_{\beta\gamma} \sigma_\alpha - g_{\alpha\beta} \sum_{\mu=1}^m g^{\mu\gamma} \sigma_\mu
\end{aligned}$$

En particular, para $i, j \leq n$ y $\gamma = n+1$ tenemos

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{n+1} = \Gamma_{ij}^{n+1} - g_{ij} \sum_{\mu=1}^m g^{n+1\mu} \sigma_\mu \tag{3.4}$$

Por hipótesis, $p = 0$ es un punto umbílico para M . Por la proposición 1.39, esto significa que hay una constante λ tal que

$$\Gamma_{ij}^{n+1}(0) = \lambda g_{ij}(0).$$

Entonces por la ecuación (3.4) tenemos

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{n+1}(0) = \left(\lambda - \sum_{\mu=1}^m g^{n+1\mu}(0) \sigma_{\mu}(0) \right) g_{ij}(0)$$

lo cual demuestra que $f(p) = 0$ es un punto umbílico para $f(M)$. \square

Teorema 3.18. *Sean $n \geq 2$ y $f : M \rightarrow \mathbb{H}_+^{n+1}$, donde M es una hipersuperficie conexa inmersa en \mathbb{H}_+^{n+1} y totalmente umbílica en \mathbb{H}_+^{n+1} . Entonces $f(M)$ está contenida en una esfera geodésica, o en una horoesfera, o en una hipersuperficie equidistante en \mathbb{H}_+^{n+1} .*

Demostración: Utilizamos el modelo del semiespacio superior \mathbb{H}_+^{n+1} . Observemos que la identidad $i : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es conforme, de modo que por la proposición anterior, M es totalmente umbílica en \mathbb{R}^{n+1} . Esto implica que M está contenida en una hiperesfera o un hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} , lo que concluye la demostración. \square

Capítulo 4

Superficies con curvatura media constante

El objetivo final de nuestro trabajo es estudiar las superficies mínimas en el espacio euclidiano y las superficies en el espacio hiperbólico con curvatura media constante, mostrando que estas superficies comparten ciertas propiedades; en particular, que estas superficies admiten una estructura compleja.

Analizaremos la transformación de Gauss en el caso de las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 y su transformación correspondiente para las superficies con $H \equiv 1$ en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 . Más adelante veremos la representación de Weierstrass y concluiremos con la representación de Bryant parametrizando una superficie en \mathbb{H}^3 en términos de funciones analíticas, presentando un ejemplo de esta representación.

4.1 Superficies mínimas en \mathbb{R}^3

Las superficies mínimas son aquellas que tienen curvatura media cero. Veremos la relación entre las funciones armónicas y las superficies mínimas, relación que nos permitirá obtener la representación de Weierstrass. Además, daremos algunos ejemplos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 .

Discutiremos brevemente el método de variaciones para superficies mínimas, para caracterizar a éstas como aquellas superficies de menor área entre todas las superficies con la misma frontera. Para formalizar lo anterior consideremos la siguiente situación:

Sea M una superficie regular obtenida como la imagen de $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 . Sea Γ una curva cerrada simple de clase C^1 contenida en U de tal manera que acota a un subdominio simplemente conexo $\Theta \subset U$ ($\partial\Theta = \Gamma$) y Σ la superficie definida por \mathbf{f} restringida a Θ . Sea $\tilde{\Sigma}$ una superficie definida por $\tilde{\mathbf{f}} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{\mathbf{f}}(p) = \mathbf{f}(p)$ para todo $p \in \Gamma$. Queremos encontrar condiciones para que Σ tenga área menor o igual que el área de $\tilde{\Sigma}$, considerando la variación del vector normal de la superficie.

Sea $\eta : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , tal que $\eta(p)$ es normal a $\mathbf{T}_{\tilde{\mathbf{f}}(p)}M$. Consideramos una función arbitraria $h : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en U y para cada número real λ definimos $\tilde{\mathbf{f}}(p) = \mathbf{f}(p) + \lambda h(p)\eta(p)$. Con esto formamos la superficie \sum_λ definida por:

$$\sum_\lambda = \{\tilde{\mathbf{f}}(p) \mid p \in \Theta, 0 < \lambda \leq 1\}.$$

Diferenciando a $\tilde{\mathbf{f}}$, tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} + \lambda \left[h \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \eta \right];$$

usando (??) y (1.7) vemos que los coeficientes de la métrica en $\tilde{\mathbf{f}}(p)$ se relacionan con los coeficientes de la métrica en $\mathbf{f}(p)$ como sigue:

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij} - 2\lambda h b_{ij} + \lambda^2 c_{ij},$$

donde c_{ij} es una función continua en Θ . De esto se sigue que:

$$\det \tilde{g}_{ij} = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2, \quad (4.1)$$

donde

$$a_0 = \det g_{ij}, \quad a_1 = -2h(g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}) \quad (4.2)$$

y a_2 es una función continua en p , $\lambda(p)$ en U .

Como una primera consecuencia de esta fórmula, usando el hecho de que M es regular deducimos que a_0 tiene un mínimo positivo sobre $\bar{\Theta}$.

Demostraremos que si el área de \sum es mínima entonces la curvatura media es $H = 0$.

Calcularemos el área de $A(\lambda) = A(\sum_\lambda)$, considerando lo siguiente:

$$A(\lambda) = \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2;$$

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \det \tilde{g}_{ij} &= (b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2)^2 \\ &= b_0^2 + 2b_0b_1\lambda + (2b_0b_2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2\lambda^2)\lambda^2 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} b_0^2 &= a_0, & b_0 &= \sqrt{a_0} \\ 2b_0b_1 &= a_1, & b_1 &= \frac{a_1}{2b_0} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \end{aligned}$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} &= b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 \\ &= \sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda + o(\lambda^2) \end{aligned}$$

Como a_1 y a_2 son continuas en Θ , existe $\varepsilon > 0$, p en Θ , tal que

$$\left| \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda \right) \right| < M_0\lambda^2 \quad (4.3)$$

para $|\lambda| < \varepsilon$ y p en Θ , donde M_0 es una constante positiva.

Definimos el área de $S_0 = \sum_0$ en términos de la ecuación (4.2) como

$$A(0) = A(S_0) = \int \int_{\Theta} \sqrt{a_0} dx_1 dx_2 \quad (4.4)$$

Integrando (4.3), tenemos que

$$\left| A(\lambda) - A(0) - \lambda \int \int_{\Theta} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} dx_1 dx_2 \right| < \tilde{M}_0\lambda^2, \text{ donde } \tilde{M}_0 = M_0 \int \int_{\Theta} dx_1 dx_2$$

y

$$\left| \frac{A(\lambda) - A(0)}{\lambda} - \int \int_{\Theta} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} dx_1 dx_2 \right| < \tilde{M}_0\lambda$$

Haciendo λ tender a cero, sustituyendo las expresiones de a_0 , a_1 de la ecuación (4.2) y renombrando la fórmula para la curvatura media en la ecuación (1.10) obtenemos la expresión (4.5) siguiente

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int \int_{\Theta} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} dx_1 dx_2 \\ &= \int \int_{\Theta} \frac{-2h(g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12})}{2\sqrt{\det g_{ij}}} dx_1 dx_2 \\ &= \int \int_{\Theta} \frac{-(2\det g_{ij})hH}{\sqrt{\det g_{ij}}} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$A'(0) = -2 \int \int_{\Theta} H h \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 dx_2 \quad (4.5)$$

Con esta notación, encontramos una familia de superficies \sum_{λ} , para obtener la siguiente ecuación reducimos a $h(p) = 1$ en (4.5).

$$A'(0) = -2 \int \int_{\Theta} H dA$$

la cual nos da una interpretación interesante para la curvatura media H . Regresemos a nuestro problema original.

Teorema 4.1. *Si el área de \sum es mínima, entonces la curvatura media H se anula.*

Demostración: Supongamos que la curvatura media no es idénticamente cero: entonces existe un punto p en Θ y $\eta(p)$ tal que $H \neq 0$. Supongamos que $H > 0$. Por el lema 2.2 podemos encontrar una vecindad V_1 en p tal que $\eta(p) = \eta$ en V_1 , tomemos una vecindad V_2 tal que $p \in V_2 \subset V_1$ con $H > 0$ en V_2 ; si encontramos una función $h(p)$ tal que $h(p) > 0$, $h(p) \geq 0$ para todo $p \in \Theta$, y $h(p) = 0$ para $p \notin V_2$, la integral del lado derecho de (4.5) sería estrictamente positiva. Sin embargo, si V_2 es bastante pequeña entonces $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ sobre Γ , por lo que \sum_{λ} sería una superficie con la misma frontera de \sum . La afirmación de que \sum minimiza el área implica que $A(\lambda) \geq A(0)$ para todo λ , de donde $A'(0) = 0$, y obtenemos una contradicción ya que $A'(0) < 0$ por (4.5). \square

4.2 El laplaciano y las funciones armónicas

Aquí veremos la relación del laplaciano de una parametrización con la curvatura media y usaremos las funciones armónicas para dar una estructura analítica a la superficie.

Definición 4.2. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto simplemente conexo y $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión de clase C^k , $k > 2$. \mathbf{f} es **isotérmica** si

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = g_{22}; \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = 0.$$

En este caso \mathbf{f} es una transformación conforme (es decir preserva ángulos), la cual induce una métrica de la forma

$$ds^2 = \lambda^2(dx_1^2 + dx_2^2),$$

donde $\lambda = g_{11} = g_{22}$, también decimos que (x_1, x_2) son parámetros isotérmicos para la superficie descrita por \mathbf{f} .

Teorema 4.3. *Sea $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión de clase C^k . Entonces existe un difeomorfismo $\phi : U \rightarrow U$ de clase C^k tal que $\bar{\phi} = \mathbf{f} \circ \phi$ es una transformación conforme.*

La demostración de este teorema aparece en [10].

Sean M una superficie conexa orientable y $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una inmersión de clase C^k . Por el teorema anterior podemos decir que cada punto $p \in M$ tiene una vecindad con parámetros isotérmicos.

Definición 4.4. *El laplaciano $\Delta \mathbf{f}$ de \mathbf{f} se define como*

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}.$$

Si $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$, decimos que \mathbf{f} es armónica.

Teorema 4.5. *Sea $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización isotérmica; entonces*

$$\Delta \mathbf{f} = 2\lambda^2 H \tag{4.6}$$

donde H es la curvatura media.

Demostración: Como \mathbf{f} es una parametrización isotérmica,

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = g_{22}, \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = 0.$$

Diferenciando la primera ecuación con respecto a x_1 y la segunda con respecto a x_2 ,

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right\rangle;$$

es decir,

$$\left\langle \Delta \mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right\rangle = 0.$$

Similarmente, derivando la primera ecuación con respecto a x_2 y la segunda con respecto a x_1 tenemos

$$\left\langle \Delta \mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\rangle = 0.$$

Concluimos que $\Delta \mathbf{f}$ es un vector perpendicular al plano tangente de modo que tenemos por (1.7) y (1.10) las siguientes igualdades:

$$\langle \Delta \mathbf{f}, \eta \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}, \eta \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}, \eta \right\rangle = b_{11} + b_{22} = \langle 2\lambda^2 H, \eta \rangle,$$

de donde

$$\Delta \mathbf{f} = 2\lambda^2 H,$$

que es lo que se quería probar. \square

Teorema 4.6. *Sea $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización isotérmica. La superficie $\mathbf{f}(U)$ es mínima si y sólo si \mathbf{f} es armónica.*

Demostración: Si $\mathbf{f}(U)$ es mínima entonces H se anula y por el lema anterior tenemos:

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2} = 0.$$

Por lo tanto, \mathbf{f} es una función armónica. El recíproco es análogo. \square

Introducimos la siguiente notación: Dada una superficie $\mathbf{f}(U)$ definida por la parametrización $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ consideramos la funciones complejas:

$$\phi_k = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1} - i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_2}; \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Tenemos las siguientes proposiciones:

Proposición 4.7. \mathbf{f}_k es armónica si y sólo si ϕ_k es analítica.

Demostración: Sean $u = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1}$ y $v = -\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_2}$, de modo que $\phi_k = u + iv$.

Supongamos que ϕ_k es analítica, por lo que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$$

sustituyendo tenemos $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_2} \right)$ y $\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1 \partial x_2}$ si y sólo si $\frac{\partial \mathbf{f}_k^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \mathbf{f}_k^2}{\partial x_2^2} = 0$ por lo tanto \mathbf{f}_k es armónica. \square

Proposición 4.8. $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ es isotérmica si y sólo si

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0. \quad (4.8)$$

Demostración: Basta observar que

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = g_{11}^2 - g_{22}^2 - 2ig_{12}. \square$$

Ahora demostraremos que las superficies mínimas admiten una estructura compleja.

Corolario 4.9. Sea $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización isotérmica de una superficie mínima $\mathbf{f}(U)$. Entonces las funciones ϕ_k definidas por (4.7) son analíticas y satisfacen las ecuaciones (4.8).

Demostración: Sea M una superficie mínima con una parametrización isotérmica \mathbf{f} . Entonces las funciones \mathbf{f}_k son funciones armónicas, aplicando el teorema (4.6). Por la proposición (4.7) cada ϕ_k es analítica. La última proposición muestra que las ϕ_k satisfacen (4.8). \square

4.3 Representación de Weierstrass

En esta sección describimos una superficie mínima en términos de funciones analíticas mediante la llamada **representación de Weierstrass**.

Teorema 4.10. Sean $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas, las cuales satisfacen (4.8) en un dominio simplemente conexo U . Entonces existe $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{f}(U)$ es una superficie mínima donde la ecuación (4.7) es válida.

Demostración: Por hipótesis ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 son analíticas. Definimos

$$\mathbf{f}_k = \Re e \int_{z_0}^{\zeta} \phi_k(z) dz. \quad (4.9)$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\Re \int_{z_0}^{\zeta} \phi(z) dz &= \Re \int_{z_0}^{\zeta} (\Re \phi + \text{Im } \phi) (dx_1 + dx_2) \\ &= \int_{z_0}^{\zeta} \Re \phi dx_1 - \text{Im } \phi dx_2.\end{aligned}$$

Demostraremos que $\phi_k = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1} - i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_2}$ para $k = 1, 2, 3$. Derivando a \mathbf{f}_k con respecto a x_1 y x_2 :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1}(\zeta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_k(\zeta+h) - \mathbf{f}_k(\zeta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Re \int_{\zeta}^{\zeta+h} \phi_k(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\zeta}^{\zeta+h} \Re \phi dx_1 - \text{Im } \phi dx_2}{h}.$$

Puesto que estamos derivando con respecto de x_1 , podemos considerar que la trayectoria de ζ a $\zeta + h$ es un segmento horizontal, de modo que

$$\int_{\zeta}^{\zeta+h} \text{Im } \phi dx_2 = 0 \text{ y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_1}(\zeta) = \Re \phi(\zeta).$$

Análogamente, $\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_2}(\zeta)$ es igual a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_k(\zeta+ih) - \mathbf{f}_k(\zeta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Re \int_{\zeta}^{\zeta+ih} \phi_k(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\zeta}^{\zeta+ih} \Re \phi dx_1 - \text{Im } \phi dx_2}{h} = -\text{Im } \phi(\zeta).$$

Así, se cumple la ecuación (4.7). Entonces $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ son armónicas por la proposición (4.7) y $\mathbf{f}(U)$ es una superficie mínima por el teorema 4.6.

□

Describiremos explícitamente todas las soluciones en términos de la ecuación (4.8).

Lema 4.11. Sean ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 funciones analíticas en U que cumplen con (4.8). Entonces podemos representar estas funciones en la forma (4.12) excepto si $\phi_1 = i\phi_2, \phi_3 = 0$.

Demostración: Daremos la solución de (4.8). Sean

$$\omega = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \quad (4.10)$$

Escribimos (4.8) de la siguiente forma

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\phi_3^2,$$

o bien,

$$(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2, \quad (4.11)$$

de donde

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)};$$

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)} \frac{(\phi_1 - i\phi_2)}{(\phi_1 - i\phi_2)} = -\frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} (\phi_1 - i\phi_2) = -g^2\omega$$

$$\phi_1 + i\phi_2 = -g^2\omega$$

$$2\phi_1 = -g^2\omega + \phi_1 - i\phi_2 = \omega - g^2\omega$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\omega(1 - g^2).$$

Así, podemos encontrar a ϕ_2, ϕ_3 . Esta representación no es válida si ω no es analítica; es decir si $\phi_1 = i\phi_2$, o si el denominador de g se anula en (4.10) y en el caso de (4.11) si $\phi_3 = 0$. \square

Definición 4.12. Sea $U \subset \mathbb{C}$ conexo. Una función g es **meromorfa** si existe $A = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset U$ tal que g es analítica en $U - A$ y cada z_i es un polo de orden m de g .

Lema 4.13. Sea $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en U con polos de orden m . Sea $\omega : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función en U con ceros de orden menor que $2m$. Entonces las funciones ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 dadas por

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\omega(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}\omega(1 + g^2), \quad \phi_3 = \omega g \quad (4.12)$$

son analíticas en U y satisfacen (4.8).

Demostración: Un cálculo directo muestra que las funciones dadas en (4.12) cumplen (4.8). Las expresiones (4.12) reciben el nombre de **representación de Weierstrass**. \square

Escribimos la representación de Weierstrass de modo que después podamos hacer una comparación con la **representación de Bryant**.

Teorema 4.14. Sea $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización isotérmica de una superficie mínima $\mathbf{f}(U)$. Entonces existe $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ analítica tal que $\Re F = \mathbf{f}$. La función F puede ser representada en la forma siguiente

$$F_k = \int \phi_k(z) dz$$

con $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$.

4.4 Ejemplos de la representación de Weierstrass

En esta sección daremos dos ejemplos del uso de la representación de Weierstrass: la catenoide y la superficie de Enneper.

La catenoide

Sea $g(z) = -e^z$ y $\omega(z) = -e^{-z}$. Observemos que g no tiene polos y ω no tiene ceros en \mathbb{C} . De la ecuación (4.12) obtenemos:

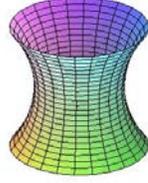
$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}\omega(1 - g^2) = \frac{1}{2}(-e^{-z})(1 + e^{2z}) = \frac{-e^{-z} + e^z}{2} = -\operatorname{senhz} \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}\omega(1 + g^2) = \frac{i}{2}(-e^{-z})(1 - e^{2z}) = \frac{i(-e^{-z} + e^z)}{2} = i \cosh z \\ \phi_3 &= \omega g = (-e^z)(-e^{-z}) = 1 \end{aligned}$$

Como senhz , $i \cosh z$ y la multiplicación por una constante son funciones analíticas en \mathbb{C} , entonces $\int_{\gamma} \phi_k(z) = 0$ para cada curva cerrada γ en \mathbb{C} y $k = 1, 2, 3$. Obtenemos que

$$\begin{aligned} x_1(\zeta) &= \Re \int_{\gamma} -\operatorname{senhz} dz = \Re (\cosh z - 1) = \cos y \cosh x - 1 \\ x_2(\zeta) &= \Re \int_{\gamma} i \cosh z dz = \Re (-i \operatorname{senhz}) = \operatorname{seny} \cosh x \\ x_3(\zeta) &= \Re \int_{\gamma} dz = \Re (z) = x \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(x, y) = (\cos y \cosh x - 1, \operatorname{seny} \cosh x, x)$$

es la parametrización de la catenoide.

Catenoide en \mathbb{R}^3 **La superficie de Enneper**

Sea $g(z) = z$ y $\omega(z) = 1$. Observemos que g no tiene polos y ω no tiene ceros en \mathbb{C} . Sustituyendo en (4.12) obtenemos:

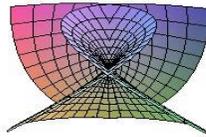
$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}\omega(1 - g^2) = \frac{1}{2}(1 - z^2) \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}\omega(1 + g^2) = \frac{i}{2}(1 + z^2) \\ \phi_3 &= \omega g = z\end{aligned}$$

Y de (??) tenemos:

$$\begin{aligned}x_1(\zeta) &= \Re \int_{\gamma} \frac{1}{2}(1 - z^2)dz = \Re \left(z - \frac{z^3}{3} \right) \\ x_2(\zeta) &= \Re \int_{\gamma} \frac{i}{2}(1 + z^2)dz = \Re \left(iz - \frac{iz^3}{3} \right) \\ x_3(\zeta) &= \Re \int_{\gamma} z dz = \Re \left(\frac{z^2}{2} \right)\end{aligned}$$

Haciendo los cálculos, obtenemos la parametrización de la superficie de Enneper:

$$\mathbf{x}(x, y) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, -y - \frac{y^3}{3} + x^2y, x^2 - y^2 \right).$$

Superficie de Enneper en \mathbb{R}^3

4.5 Transformación de Gauss hiperbólica

El objetivo de esta sección es establecer una relación entre la transformación de Gauss en el caso de las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 y su transformación correspondiente para las superficies con curvatura media uno en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Primero necesitaremos introducir la definición de la tercera forma fundamental y una proposición.

Definición 4.15. *La tercera forma fundamental de M se define como:*

$$III_p(X, Y) = \langle d_p\eta(X), d_p\eta(Y) \rangle \quad X, Y \in T_pM \quad (4.13)$$

Proposición 4.16. *Para cualquier superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ tenemos*

$$III - 2HII + KI = 0 \quad (4.14)$$

Demostración: Recordando el teorema de Cayley-Hamilton, la diferencial de la transformación de Gauss satisface su polinomio característico, el cual está definido por

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \text{traza}(-d\eta)\lambda + \det(-d\eta) = \lambda^2 - 2H\lambda + K$$

por lo que

$$(-d\eta)^2 - 2H(-d\eta) + K \cdot \text{identidad} = 0 \quad \text{en } T_pM$$

Aplicando esta ecuación en X y haciendo el producto escalar con Y , obtenemos el resultado deseado. \square

Teorema 4.17. *La transformación de Gauss euclidiana es conforme si y sólo si la superficie tiene curvatura media cero o es totalmente umbílica en \mathbb{R}^3 .*

Demostración: Supongamos que η es conforme; entonces satisface la ecuación $III = -\lambda I$ para alguna función $\lambda > 0$; entonces por (4.14), sabemos

$$(K + \lambda)I = 2HII \quad (4.15)$$

Si $H(p) \neq 0$, podemos escribir a II como un múltiplo de $(K + \lambda)I$, es decir $\bar{\nabla}_X X_{n+1} = (K + \lambda)X_i$, lo que significa que p es umbílico de acuerdo con la definición 1.38.

Si $H(p) = 0$ tenemos por (4.15) que $K = -\lambda < 0$. Como la curvatura cambia de signo, p no puede ser umbílico, así que

$$p \text{ es umbílico si y sólo si } H(p) \neq 0$$

Inversamente tenemos:

Supongamos que M es mínima, entonces, por la ecuación (4.14), sabemos que

$$III = -KI,$$

es decir

$$\langle d_p\eta(X), d_p\eta(Y) \rangle = -K \langle X_p, Y_p \rangle$$

lo que demuestra que η es conforme donde $\lambda(p) = -K(p)$. \square

A continuación definiremos la transformación de Gauss en el caso hiperbólico.

Sea

$$\mathbb{R}_1^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ con la métrica } \langle v, v \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$$

con una orientación positiva.

Definimos

$$\mathbb{H}^3 = \{v \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle v, v \rangle = -1 \text{ y } x_0 > 0\}$$

Sea M una subvariedad en \mathbb{H}^3 con $\dim M = 2$ y (e_0, e_1, e_2, e_3) un marco móvil ortogonal en M con $e_0 \in M$, e_1, e_2 una base orientada en $T_{e_0}M$ (la orientación es positiva) y e_3 el vector normal de M en \mathbb{H}^3 .

Definición 4.18. *Sea (e_0, e_1, e_2, e_3) un marco móvil ortogonal en M orientado positivamente, que además satisface*

1. $x_0(e_0) > 0$

2. $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } i, j = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j = 1, 2 \text{ ó } 3 \end{cases}$

La segunda condición se puede expresar en términos de la siguiente matriz :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i, j = 0, 1, 2 \text{ ó } 3$$

Definiremos el cono \mathbb{N}^3 como

$$\mathbb{N}^3 = \{v \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle v, v \rangle = 0 \text{ y } x_0(e_0) > 0\} \subseteq \mathbb{R}_1^4$$

Veamos que para cada marco ortonormal (e_0, e_1, e_2, e_3) , el vector $e_0 + e_3$ pertenece al cono \mathbb{N}^3 :

$$\begin{aligned} \|e_0 \pm e_3\|^2 &= \langle e_0, e_0 \pm e_3 \rangle \pm \langle e_3, e_0 \pm e_3 \rangle \\ &= \langle e_0, e_0 \rangle \pm \langle e_0, e_3 \rangle \pm \langle e_3, e_0 \rangle \pm \langle e_3, e_3 \rangle \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Identificaremos al espacio \mathbb{H}^3 como el conjunto de rectas que están en el interior del cono. Al espacio de rectas contenidas en \mathbb{N}^3 le llamaremos S_∞^2 . De esta forma, podemos compactificar a \mathbb{H}^3 agregándole \mathbb{N}^3 como frontera.

Observación: Cada geodésica en \mathbb{H}^3 es la intersección de un plano en el origen y \mathbb{H}^3 . La intersección de este plano con \mathbb{N}^3 está formada por dos rectas, es decir, dos puntos en S_∞^2 .

Sea $[e_0 + e_3]$ la recta generada por $e_0 + e_3 \in \mathbb{N}^3$ entonces $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow S_\infty^2$ tenemos que S_∞^2 es el cociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$, es decir

$$[e_0 + e_3] = \{\lambda(e_0 + e_3) \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

Definición 4.19. La transformación $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow S_\infty^2$ es llamada la transformación de Gauss hiperbólica en \mathbb{H}^3 .

Ahora vamos a escribir las métricas de M y S_∞^2 en términos de las 1-formas duales, las formas de conexión y las ecuaciones de estructura.

Sean ω_i las formas duales de los e_i ; es decir, $\omega_i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle$. Además, sean ω_{ij} las formas de conexión dadas por

$$\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle = \langle de_i(e_k), e_j \rangle, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad \text{Observemos que}$$

$$de_i(e_k) = \sum \omega_{ij}(e_k) e_j. \quad (4.16)$$

Además,

$$\omega_{0i}(e_k) = \langle de_0(e_k), e_i \rangle = \langle \nabla_{e_k} e_0, e_i \rangle = \langle e_k, e_i \rangle = \omega_i(e_k) \quad (4.17)$$

Usando la fórmula (4.17), estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} de_0 &= \sum \omega_j e_j \\ de_i &= \omega_i e_0 + \sum \omega_{ij} e_j \end{aligned} \quad (4.18)$$

Además, diferenciando las 1-formas y las formas de conexión, obtenemos las ecuaciones de estructura (ver (1.15))

$$\begin{aligned} d\omega_i &= -\omega_{ij} \wedge \omega_j \\ d\omega_{ij} &= -\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \omega_i \wedge \omega_j \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si $\langle de_0, de_0 \rangle$ denota la métrica inducida en M por la métrica de \mathbb{H}^3 , podemos escribirla en términos de las 1-formas:

$$\langle de_0, de_0 \rangle = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2.$$

Para calcular la métrica $\|d(e_0 + e_3)\|^2$ inducida en M por la transformación $[e_0 + e_3]$, usando la ecuación 4.18 podemos escribir

$$\begin{aligned} d(e_0 + e_3) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i + \omega_3 e_0 + \sum_{j=1}^3 \omega_{j3} e_j \\ &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \omega_3 e_0 + \omega_{13} e_1 + \omega_{23} e_2 + \omega_{33} e_3 \\ &= \omega_3 (e_0 + e_3) + (\omega_1 + \omega_{13}) e_1 + (\omega_2 + \omega_{23}) e_2; \end{aligned}$$

sustituyendo y haciendo las operaciones tenemos

$$\begin{aligned} \|d(e_0 + e_3)\|^2 &= \langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3) \rangle \\ &= \omega_3^2 \|e_0 + e_3\|^2 + (\omega_1 + \omega_{13})^2 \|e_1\|^2 + (\omega_2 + \omega_{23})^2 \|e_2\|^2 \\ &= (\omega_1 + \omega_{13})^2 + (\omega_2 + \omega_{23})^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

El siguiente teorema muestra la analogía entre las superficies con $H \equiv 1$ en el espacio hiperbólico y las superficies con $H \equiv 0$ en \mathbb{R}^3 .

Teorema 4.20. *La transformación de Gauss $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow S_\infty^2$ es conforme, donde M es una subvariedad conexa de \mathbb{H}^3 si y sólo si M tiene curvatura media 1 o M es totalmente umbílica.*

Demostración: La transformación $[e_0 + e_3]$ es conforme si y sólo si $\|d(e_0 + e_3)\|^2$ es un múltiplo de $\|de_0\|^2$.

Sabemos que

$$\|d(e_0 + e_3)\|^2 = (\omega_1 + \omega_{13})^2 + (\omega_1 + \omega_{23})^2.$$

Observemos que

$$d\omega_3 = -\omega_{13} \wedge \omega_1 = \omega_{23} \wedge \omega_2 = 0;$$

Por el lema de Cartan, sabemos que existen funciones suaves $h_{ij} = h_{ji}$ ($i, j = 1, 2$) tales que

$$\begin{pmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Sustituyendo a ω_{13} y ω_{23} , y haciendo operaciones tenemos

$$\begin{aligned} \|d(e_0 + e_3)\|^2 &= ((1 + h_{11})\omega_1 + h_{12}\omega_2)^2 + (h_{21}\omega_1 + (1 + h_{22})\omega_2)^2 \\ &= (2(H^2 - H) - (1 + h_{12}^2 - h_{11}h_{22})) \|de_0\|^2 \\ &\quad + (H - 1)[(h_{11} - h_{22})(\omega_1)^2 + 4h_{12}\omega_1\omega_2 - (h_{11} - h_{22})(\omega_2)^2]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si sustituimos $H \equiv 1$ en 4.22 tenemos

$$\|d(e_0 + e_3)\|^2 = -(1 + h_{12}^2 - h_{11}h_{22}) \|de_0\|^2.$$

Si M es totalmente umbílica, podemos elegir un marco e_1, e_2 de modo que $h_{11} = h_{22}$ y $h_{12} = 0$, por lo que

$$\|d(e_0 + e_3)\|^2 = [2(H^2 - H) - (1 - h_{11}h_{22})] \|de_0\|^2.$$

Por lo tanto, en ambos casos, $\|d(e_0 + e_3)\|^2$ es conforme.

Inversamente, si la transformación de Gauss $[e_0 + e_3] : M \rightarrow S_\infty^2$ es conforme, entonces existe una función λ tal que $\|d(e_0 + e_3)\|^2 = \lambda \|de_0\|^2$. Evaluando en e_1 y e_2 tenemos

$$\begin{aligned} \|d(e_0 + e_3)\|^2(e_1) &= ((1 + h_{11})\omega_1(e_1) + h_{12}\omega_2(e_1))^2 + \\ &\quad (h_{21}\omega_1(e_1) + (1 + h_{22})\omega_2(e_1))^2 \\ &= (1 + h_{11})^2 + (h_{21})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \\
\|d(e_0 + e_3)\|^2(e_2) &= ((1 + h_{11})\omega_1(e_2) + h_{12}\omega_2(e_2))^2 + \\
&\quad (h_{21}\omega_1(e_2) + (1 + h_{22})\omega_2(e_2))^2 \\
&= (h_{12})^2 + (1 + h_{22})^2.
\end{aligned}$$

Como $\|d(e_0 + e_3)\|^2(e_1) = \|d(e_0 + e_3)\|^2(e_2) = \lambda$, obtenemos

$$(1 + h_{11})^2 = (1 + h_{22})^2.$$

Esto implica que $h_{11} = h_{22}$ y M es umbílica, o bien que $(1 + h_{11}) = -(1 + h_{22})$, de donde

$$H = -\frac{h_{11} + h_{22}}{2} = 1.$$

Observación: En el caso de que $H = 1$ y M es totalmente umbílica en \mathbb{H}_+^2 vimos en el capítulo 2 que M es un subconjunto abierto de una horoesfera en \mathbb{H}_+^2 .

4.6 Representación de Bryant

En los capítulos 2 y 3 hallamos curvas y subvariedades de curvatura media 1 en \mathbb{H}^2 y \mathbb{H}^n respectivamente. En esta sección daremos una analogía entre el teorema de Weierstrass para las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 y el teorema de Bryant para las superficies de curvatura media 1 en \mathbb{H}^3 .

Primero identificamos a \mathbb{R}_1^4 con $Herm(2 \times 2)$, el conjunto de las matrices simétricas hermitianas de 2×2 , asociando $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^4$ con la siguiente matriz

$$v = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Observemos que $\det v = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, entonces se puede identificar con

$\mathbb{H}^3 = \{v \in Herm(2 \times 2) \mid \det v = 1\}$, el conjunto de las matrices v con $\det v = 1$, tal que preserve el producto escalar en $Herm(2 \times 2)$ dado por

$$\det v = -\langle v, v \rangle.$$

Si definimos $SL(2, \mathbb{C})$ como el conjunto de matrices complejas 2×2 con determinante 1, que resulta ser un grupo de Lie complejo, definimos una

transformación $F : \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ como:

$$F(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (4.24)$$

donde A, B, C, D son funciones analíticas.

Introduciremos una nueva subvariedad en \mathbb{H}^3 , representada como

$$\{FF^* \mid F \in SL(2, \mathbb{C}) \text{ donde } F^* = {}^t \bar{F}\} \subset \mathbb{H}^3$$

Podemos definir una transformación Φ de $SL(2, \mathbb{C})$ en \mathbb{H}^3

$$\Phi(F) = FF^*.$$

Derivando tenemos (ver [10], [15])

$$d\Phi(F) = F^{-1}dF$$

Decimos que la inmersión F es nula si y sólo si $\det(F^{-1}dF) = 0$. Ésta será la condición para la representación de Bryant equivalente a la condición $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ para la representación de Weierstrass.

Teorema 4.21. *Sea $F : \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una inmersión conforme nula. Entonces $FF^* = f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión suave con $H \equiv 1$ de \mathbb{C} en \mathbb{H}^3 .*

Inversamente,

Teorema 4.22. *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión conforme con $H \equiv 1$, entonces existe $F : \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que $FF^* = f$.*

Observación: El resultado anterior es análogo al teorema de Weierstrass, sustituyendo a \mathbb{R}^3 por \mathbb{H}^3 , \mathbb{C}^3 por $SL(2, \mathbb{C})$, $\Re : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ y por supuesto $H \equiv 0$ por $H \equiv 1$ respectivamente. Esquemáticamente, tenemos:

Representación de Weierstrass

$$\mathbb{C} \xrightarrow[\text{nula}]{\text{inmersión}} \mathbb{C}^3 \xrightarrow{\Re} \mathbb{R}^3$$

Representación de Bryant

$$\mathbb{C} \xrightarrow[\substack{\text{conforme} \\ \text{nula}}]{\text{inmersión}} SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{H}^3$$

En analogía con lo que hicimos en la sección 4.3, podemos escribir la representación de Bryant en términos de una función g y una forma ω de la manera siguiente.

Proposición 4.23. *Si $F : \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una inmersión nula, entonces $F^{-1}dF$ se puede escribir como:*

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad (4.25)$$

donde $g = -\frac{dB}{dA}$ es meromorfa y $\omega = AdC - CdA$ es una 1-forma analítica.

Demostración:

Sea

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA & dB \\ dC & dD \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} DdA - BdC & DdB - BdD \\ AdC - CdA & AdD - CdB \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sabemos que $AD - BC = 1$. Al derivar, vemos que

$$0 = d(AD - BC) = DdA + AdD - CdB - BdC = \text{tr}(F^{-1}dF)$$

Por lo que tenemos

$$DdA - BdC = CdB - AdD \text{ y } dAdD = dBdC$$

Calculando la primera entrada de la matriz 4.26 tenemos

$$\begin{aligned} DdA - BdC &= CdB - AdD &= CdB \frac{dA}{dA} - A \frac{dBdC}{dA} \\ &= -\frac{dB}{dA}(AdC - CdA) &= -g\omega \end{aligned}$$

donde llamaremos a $g = -\frac{dB}{dA}$ y $\omega = AdC - CdA$.
y calculando la segunda entrada de la matriz 4.26 tenemos

$$\begin{aligned}
DdB - BdD &= \frac{1}{dA} (DdBdA - BdAdD) = \frac{1}{dA} (DdBdA - BdBdC) \\
&= \frac{dB}{dA} (DdA - BdC) = \frac{dB}{dA} (CdB - AdD) \\
&= \frac{dB}{dA^2} (CdAdB - AdAdD) = \frac{dB}{dA^2} (CdAdB - AdBdC) \\
&= -\frac{dB^2}{dA^2} (AdC - CdA) = -g^2\omega. \square
\end{aligned}$$

4.7 Un ejemplo de una superficie en \mathbb{H}_+^3

Obtendremos algunas superficies en términos de la representación de Bryant para el modelo matricial para \mathbb{H}^3 establecido en (4.23). Para ver las superficies en el modelo del semiespacio superior proyectamos estereográficamente $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ en el disco $B = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ y finalmente usamos una transformación de B en \mathbb{H}_+^3 .

Describamos la proyección natural de $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ en la bola unitaria $B = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ tomando la recta que pasa por $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$ y por $(-1, 0, 0, 0)$, es decir, $\lambda(x_0 + 1, x_1, x_2, x_3) + (-1, 0, 0, 0) = (0, *)$ entonces $\lambda = \frac{1}{x_0+1}$, la intersección de la recta con B , le llamamos y :

Así que

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow y = \left(0, \frac{x_1}{x_0 + 1}, \frac{x_2}{x_0 + 1}, \frac{x_3}{x_0 + 1}\right)$$

es la proyección estereográfica de \mathbb{H}^3 en B .

Ahora queremos una isometría que mande B en el semiespacio superior $\mathbb{H}_+^3 = \{(u, v, w) \mid w > 0\}$ y que preserve orientación.

Primero hacemos una inversión en la esfera de radio $\sqrt{2}$ centrada en $(0, 0, 1)$:

$$p \rightarrow \frac{2(p - (0, 0, 1))}{\|p - (0, 0, 1)\|^2} + (0, 0, 1)$$

Esta transformación preserva orientación y lleva B en el semiespacio inferior $\{w < 0\}$. Componemos esta transformación con $(u, v, w) \rightarrow (u, v, -w)$ para obtener una isometría de B en el semiespacio superior que preserve la orientación :

$$(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \frac{(y_1, y_2, 1 - y_3)}{y_1^2 + y_2^2 + (1 - y_3)^2} \quad (4.27)$$

Al componer la proyección estereográfica con esta transformación obtenemos una aplicación de $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ en \mathbb{H}_+^3 dada por

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_0 - x_3}, \frac{x_2}{x_0 - x_3}, \frac{1}{x_0 - x_3} \right) = (u, v, w). \quad (4.28)$$

En lo siguiente generaremos superficies en el semiespacio superior \mathbb{H}_+^3 en términos de las funciones A, B, C, D de la representación de Bryant.

Proposición 4.24. *Sean (u, v, w) las coordenadas de \mathbb{H}_+^3 . En términos de la matriz 4.24 de la representación de Bryant,*

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{A\bar{C} + B\bar{D}}{|C|^2 + |D|^2} \\ w &= \frac{1}{|C|^2 + |D|^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Demostración: Para resolver a $(u, v, w) \in \mathbb{H}_+^3$, necesitamos encontrar a x_i en términos de A, B, C, D . Relacionando a \mathbb{H}^3 con la matriz de lado izquierdo y igualando la operación, antes definida, tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} = \mathbf{FF}^*$$

Sustituyendo y igualando obtenemos

$$\begin{aligned} 2x_0 &= |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 \\ 2x_3 &= |A|^2 + |B|^2 - |C|^2 - |D|^2 \\ x_1 + ix_2 &= A\bar{C} + B\bar{D} \\ x_1 - ix_2 &= C\bar{A} + D\bar{B} \\ 2x_1 &= A\bar{C} + C\bar{A} + B\bar{D} + D\bar{B} \\ 2x_2 &= i(C\bar{A} + D\bar{B} - A\bar{C} - B\bar{D}) \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos (u, v, w) en términos de A, B, C, D , usando la parametrización (4.28),

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{A\bar{C} + B\bar{D}}{|C|^2 + |D|^2} \\ w &= \frac{1}{|C|^2 + |D|^2} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones permiten describir superficies en \mathbb{H}_+^3 . \square

4.8 Ejemplos de la representación de Bryant

Daremos un ejemplo del uso de la representación de Bryant para generar una familia de superficies en el semi-espacio superior \mathbb{H}_+^3 . Recordemos que en la sección 4.4, obtuvimos la representación de Weierstrass de la catenode en \mathbb{R}^3 . Ahora parametrizaremos una familia de catenoides variando λ en \mathbb{H}_+^3 , con la ayuda del teorema 4.21 usando las siguientes funciones:

$$g(z) = e^z \quad \omega(z) = \lambda e^{-z} dz \quad (4.30)$$

Sustituimos estos datos en la representación de Bryant 4.25, tenemos

$$dF = \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -e^z \\ e^{-z} & -1 \end{pmatrix} dz$$

Ahora vamos a encontrar las soluciones para A, B, C, D . Obteniendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A' &= \lambda A + \lambda e^{-z} B \\ B' &= -\lambda A e^z - \lambda B \\ C' &= \lambda C + \lambda e^{-z} D \\ D' &= -\lambda e^z C - \lambda D \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para resolver esto, usamos el método de Umehara y Yamada ([11]). Derivando la primera de estas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} A'' &= \lambda A' - \lambda B e^{-z} + \lambda e^{-z} (-\lambda A e^z - \lambda B) \\ &= \lambda A' - \lambda^2 A - (\lambda + 1) \lambda B e^{-z} \\ &= \lambda A' - \lambda^2 A - (\lambda + 1)(A' - \lambda A) \end{aligned}$$

de modo que A satisface la ecuación

$$A'' + A' - \lambda A = 0 \quad (4.32)$$

Repetimos este procedimiento para B, C y D obteniendo

$$\begin{aligned} B'' - B' - \lambda B &= 0 \\ C'' + C' - \lambda C &= 0 \\ D'' - D' - \lambda D &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como éstas son ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas y con coeficientes constantes, las soluciones son de la siguiente forma $A = ae^{\gamma z}$, $B = be^{\delta z}$.

$$\gamma^2 + \gamma - \lambda = 0$$

$$\delta^2 - \delta - \lambda = 0$$

Para encontrar las soluciones consideramos las siguientes raíces de las anteriores ecuaciones

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} + \alpha, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2} - \alpha, \quad \delta_1 = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} - \alpha$$

donde $\alpha^2 = \frac{1}{4} + \lambda$ y $\lambda = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \gamma_1\delta_1 = \gamma_2\delta_2$.

Para $\lambda \neq -\frac{1}{4}$, vamos a encontrar a y b sustituyéndola en las soluciones de la ecuación (4.31) tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma_1 a &= \lambda a + \lambda b \\ \delta_1 b &= -\lambda a - \lambda b \end{aligned}$$

sustituyendo, obtenemos las soluciones para a y b :

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)a + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)b = \gamma_1 a + \delta_1 b = 0$$

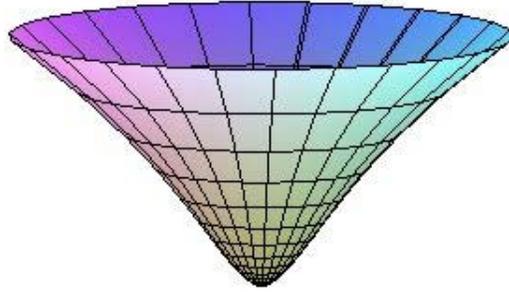
Así que

$$\begin{aligned} A &= r\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)e^{(\alpha - \frac{1}{2})z} \\ B &= r\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)e^{(\alpha + \frac{1}{2})z} \\ C &= s\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)e^{(-\frac{1}{2} - \alpha)z} \\ D &= s\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)e^{(\frac{1}{2} - \alpha)z}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

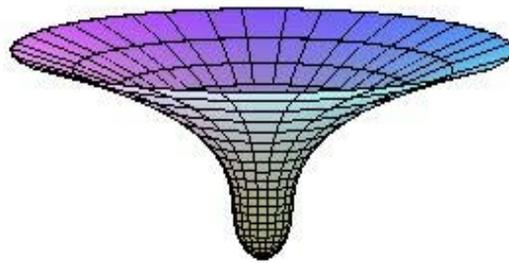
Consideremos el caso real si $\alpha > 0$ y $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Sustituyendo las soluciones A, B, C, D en la ecuación 4.29 tenemos

$$\begin{aligned} u + iv &= \left[\frac{(\frac{1}{4} - \alpha^2)(e^x + e^{-x})e^{2\alpha x}}{(\frac{1}{2} - \alpha)^2 e^{-x} + (\frac{1}{2} + \alpha)^2 e^x} \right] e^{2\alpha y i} \\ w &= \frac{2\alpha e^{2\alpha x}}{(\frac{1}{2} - \alpha)^2 e^{-x} + (\frac{1}{2} + \alpha)^2 e^x}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Las siguientes figuras muestran una familia de hipersuperficies en el semi-espacio superior \mathbb{H}_+^3 variando los valores de α :



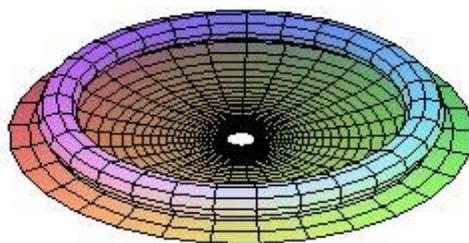
$$\alpha = 1.25$$



$$\alpha = 0.76$$



$$\alpha = 0.54$$



$$\alpha = 0.1$$

Bibliografía

- [1] Bryant R, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque 154-155, Soc. Math. de France (321-374), 1987.
- [2] Do Carmo, M , *Differential Curves and Surfaces in \mathbb{R}^3* , Prentice Hall, 1976.
- [3] Do Carmo, M, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [4] Do Carmo, M, *Differential Forms and Applications*, Springer, 1994.
- [5] Guillemin, V, Pollack, A. *Topología diferencial*, Sociedad Matemática Mexicana 2003.
- [6] Lascurain, A, *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, las prensas de Ciencias, 2005.
- [7] Meeks W, Ros A, Rosenberg H, *The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat*, Springer, 1983.
- [8] O'Neill, B, *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [9] Osserman R, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Pub, 1986.
- [10] Spivak, M, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry II,III,IV*, Publish or Perish Inc, 1979.
- [11] Umehara M, Yamada K, *Complete surfaces of constant curvature-1 in the hyperbolic 3-space*, Annals of Mathematics **137** (611-638), 1993.
- [12] Ramírez, A. Seade, J, *Introducción a la Geometría avanzada*, las prensas de Ciencias, 2005.

- [13] Rudin, W, *Real and Complex Analysis*, Mc-Graw-Hill, 1966.
- [14] Verjosky, A, *Introducción a la geometría hiperbólica*, Sexta escuela latino americana de matemáticas, Oaxtepec, Morelos, Julio de 1982.
- [15] Warner F, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983.