



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Sobre la transferencia de calor con un salto
en la temperatura de superficie”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

MARIO SANDOVAL ESPINOZA

DIRECTOR DE TESIS: DR. CESAR TREVIÑO TREVIÑO

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DRA. CATALINA STERN FORGACH

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. JULIO MARTINELL BENITO



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO D.F., AGOSTO 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

A mi director de tesis Dr. Cesar Treviño Treviño, por todo su apoyo y confianza.

Al Posgrado en Ciencias Físicas.

Al Consejo Nacional de Ciencia Y Tecnología por el apoyo económico recibido.

Índice general

Agradecimientos	I
Nomenclatura	VII
Resumen	IX
Abstract	x
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Objetivos	10
2. Modelos Matemáticos	11
2.1. Ecuaciones que gobiernan la mecánica de fluidos	11
2.1.1. Balance de propiedades generales	11

2.1.2. Ecuación de conservación de masa	13
2.1.3. Ecuación de balance de cantidad de movimiento	15
2.1.4. Ecuación de conservación de la energía	16
2.2. Planteamiento del problema	18
2.3. Ecuación de conservación de masa para el problema	19
2.4. Ecuación de capa límite	20
2.5. Ecuación de la energía en la aproximación de capa límite	21
2.6. Análisis de escala	22
3. Resultados	27
4. Conclusiones	35
A. Deducción del flujo de calor hacia el fluido	37
A.1. Método de Duhamel	38
B. Discretización del número de Nusselt, Nu	40
C. Discretización de la ecuación (3.1)	43
D. Solución asintótica ($\varepsilon \rightarrow \infty$) para Nu.	46
E. Solución asintótica ($\varepsilon \rightarrow \infty$) de la temperatura de superficie de la placa plana.	48

F. Soluciones asintóticas para el Nusselt de la interfaz, Nu^*	51
. Referencias	52

Índice de figuras

1.1. Número de Nusselt local a lo largo de la coordenada x^* para placas de vidrio y cerámica. (reproducida de (Luikov, 1974))	5
1.2. Esquema del problema de transferencia de calor estudiado en la literatura	7
1.3. Comparación de los resultados de varios autores para la temperatura de superficie T_w^* . (reproducida de (Chida, 2000))	9
1.4. Esquema del problema estudiado por M. Lighthill	10
2.1. Esquema del problema de transferencia de calor estudiado	19
3.1. Perfiles de temperatura adimensionales para diferentes valores del parámetro ε	29
3.2. Temperatura adimensional θ_{wl} del borde delantero de la placa ($s = 0$) como función del parámetro ε	30
3.3. Número de Nusselt Nu en función de la coordenada normalizada s para diferentes valores del parámetro ε	31

3.4. Número de Nusselt reducido $\varepsilon^{1/3}Nu$ como función de la coordenada interna r	32
3.5. Número de Nusselt Nu^* como función de ε	34

Nomenclatura

C, C_1	Constantes numéricas
h	Espesor de la placa plana
$K(x, x')$	Kernel de la integral, definido en ec. (2.32)
k	Conductividad térmica del fluido
k_w	Conductividad térmica del material de longitud x_0
Nu	Número de Nusselt del fluido, definido en ec. (2.40)
Nu^*	Número de Nusselt de la interfaz, definido en ec.(3.7)
Pr	Número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$
q_w	Flujo de calor al fluido por unidad de superficie, definido en ec. (2.32)
Q_s	Flujo de calor por unidad de longitud en la posición de la interfaz, $x = x_0$
R_0	Número de Reynolds, $R_0 = U_\infty x_0/\nu$
r	Coordenada interna, $r = (1 - s)/\varepsilon$
s	Coordenada longitudinal adimensional, $s = x/x_0$
T_0	Temperatura de la segunda porción de la placa, para $x \geq x_0$
T_∞	Temperatura del fluido en corriente libre
T_w	Temperatura de la superficie de la placa plana
T_{wl}	Temperatura del borde delantero de la placa ($x = 0$)
U	Velocidad longitudinal del fluido en la dirección x
U_∞	Velocidad del fluido en corriente libre

-
- x Coordenada cartesiana longitudinal
 y Coordenada cartesiana transversal
 x_0 Longitud del material con conductividad k_w
 x_p Longitud característica de penetración térmica, introducida en ec.(2.29)
 z Coordenada longitudinal adimensional, $z = (3/4)^{5/18} s^{3/4} / \varepsilon^{5/6}$

Símbolos griegos

- α Difusividad térmica del fluido
 β Parámetro de transferencia de calor adimensional, $\beta = (k/k_x)\zeta^3 Re_x^n Pr^m$
 δ Espesor de la capa límite viscosa
 δ_T Espesor de la capa límite térmica
 ε Parámetro adimensional, $\varepsilon = x_p/x_0$
 μ Viscosidad del fluido
 ν Viscosidad cinemática del fluido
 θ_w Temperatura adimensional de la superficie de la placa definido en ec. (2.37)
 ζ Relación de aspecto de la placa
 ∇ Gradiente
 ∇^2 Laplaciano

Resumen

En esta tesis se estudia el proceso de transferencia de calor de un flujo laminar e incompresible sobre una placa plana con un salto de temperatura en su superficie. La aportación más importante de este trabajo es que para estudiar el efecto real del salto de temperatura se considera el intercambio de calor entre los dos materiales que conforman la placa usando propiedades térmicas finitas. Se introduce un parámetro adimensional importante que es la razón de la longitud de penetración térmica entre la distancia desde el borde de ataque de la placa hasta la posición del salto de temperatura. Al variar este parámetro de 0 a ∞ se puede estudiar con el mismo formalismo, desde la transferencia de calor de una placa con temperatura de superficie constante hasta una placa con un salto en la temperatura. Se obtienen dos números de Nusselt diferentes, uno de ellos considerando el flujo de calor hacia el fluido y el segundo considerando el flujo de calor en la interfaz entre los dos materiales que conforman a la placa. La consecuencia fundamental de esta metodología es la ausencia de singularidades en la transferencia de calor.

Abstract

In this thesis the heat transfer problem of an incompressible laminar boundary layer due to a step in surface temperature over a flat plate is studied. Here, the most important contribution is to take into account the heat transfer process between the plate materials using finite thermal properties in order to study the real effect of a step in surface temperature. A nondimensional parameter has been introduced, this important parameter is defined as the ratio of the thermal penetration length and the initially unheated distance. The transition from a step in surface temperature to the constant temperature plate has been obtained as the parameter varies from 0 to ∞ . Two different Nusselt numbers are obtained, one considering the heat flux to the fluid and the second one considering the upward heat flux at the interface between the two plate materials. The fundamental contribution of this methodology is the absence of a singular behavior in the heat transfer process.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Muchos fenómenos tanto naturales como en procesos tecnológicos involucran transferencia de calor. Tal es el caso del flujo de calor desde una taza de café hacia el medio ambiente (interfaz: líquido-gas) o del medio ambiente hacia un pedazo de hielo (interfaz: gas-sólido). Un fluido que circula por un tubo intercambia calor con la pared. Un proyectil en vuelo y el ala de un avión intercambian energía con el aire alrededor de su superficie. Si estas superficies metálicas estuvieran en contacto con una atmósfera fría podríamos obtener una transferencia de calor muy grande que ocasionaría congelamiento, y por tanto, resultados negativos en el desplazamiento de estos cuerpos. El congelamiento de dichas superficies perturban el flujo laminar del aire a lo largo del cuerpo, incrementando el arrastre y disminuyendo la capacidad de sustentación en el caso de un perfil aerodinámico. Esta pérdida de sustentación debe ser compensada incrementando la energía del artefacto para

su desplazamiento.

Otro proceso de transferencia de calor ocurre en el fenómeno de remojado de superficies calientes. Este proceso es de importancia práctica en industrias metalúrgicas y nucleares. Por ejemplo, en procesos metalúrgicos es necesario enfriar rápidamente ciertos productos metálicos como tiras de metal, placas, cilindros, etc. Sin embargo el líquido inyectado para enfriar, no moja inmediatamente la superficie porque una capa de vapor evita el contacto líquido-sólido. La temperatura máxima de superficie en la cual el líquido enfriador establece contacto con la superficie caliente se le llama temperatura de remojado (rewetting) o temperatura de apagado. Cuando la superficie está debajo de la temperatura de remojado, el contacto líquido-sólido ocurre. Aguas arriba, (región mojada) el sólido es enfriado por convección, mientras que aguas abajo (región seca) es enfriado por el flujo de calor a una mezcla de vapor y gotas del líquido.

Es por estos fenómenos que la comprensión del proceso de transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido en movimiento es de suma importancia. En la mayoría de los casos la temperatura a lo largo de la superficie sólida es variable. A este tipo de problemas se le llama conjugados porque involucran varios mecanismos simultáneos de transferencia de calor como conducción, convección o radiación.

Es importante resaltar que en la literatura sólo existen los dos casos límites del problema estudiado, el análisis de una placa plana con temperatura de superficie constante y el estudio de una placa con un salto abrupto en la temperatura de su superficie. Cuando se analiza el flujo de calor para la placa con un salto en su temperatura, se obtiene una singularidad del flujo de calor

en la posición donde ocurre el salto. Esta singularidad genera un gradiente de temperatura infinito en la dirección longitudinal. Basta un material con conductividad térmica finita para que se destruya dicha singularidad.

1.2. Antecedentes

El problema clásico de transferencia de calor entre una placa plana y un fluido se ha estudiado desde hace muchos años. Prandtl (Prandtl, 1904) fue el primero en señalar en 1904 que la ecuación de cantidad de movimiento en la aproximación de capa límite, para flujos sobre una placa plana con velocidad de corriente libre uniforme y con temperatura de superficie constante, podría ser transformada en una ecuación diferencial ordinaria. En 1908, su estudiante de doctorado Blasius (Blasius, 1908), obtuvo la primera solución a la ecuación de cantidad de movimiento en la aproximación de capa límite. En 1921, Polhausen (Polhausen, 1921) siguiendo los trabajos de Prandtl y Blasius, obtuvo por vez primera la solución a la ecuación de la energía con la aproximación de capa límite. Falkner y Skan (Falkner and Skan, 1931) en 1930 demostraron que se podía aplicar la misma transformación a una familia de problemas. Tiempo después en 1939, Goldstein, (Goldstein, 1939) investigó en detalle las condiciones bajo las cuales tales transformaciones pueden llevarse a cabo.

Cuando consideramos que la temperatura de la placa es variable, el problema adquiere un interés especial debido a que el proceso de transferencia de calor es conjugado, es decir la temperatura de la superficie depende tanto de los procesos de conducción de calor en la placa como del proceso de convección

hacia el fluido. Si la temperatura de superficie de la placa, T_w , es constante, el proceso de transferencia de calor se obtiene como $q = k(T_w - T_\infty)/\delta_T$, donde T_∞ es la temperatura del fluido incompresible lejos de la placa, k es la conductividad térmica del fluido y δ_T es el espesor de la capa límite térmica. Si bien este espesor hay que encontrarlo a través de la solución de las ecuaciones de movimiento y energía del fluido, las propiedades de la superficie no tienen influencia alguna en la transferencia de calor. En un fluido en movimiento a lo largo de una placa plana o un tubo la temperatura de la pared es variable a lo largo del flujo, entonces dicha temperatura de la pared no se puede deducir sólo por el comportamiento del fluido, sino será función de la dinámica del fluido y de las propiedades térmicas de la pared.

La temperatura de superficie de la placa depende entonces no solo de la coordenada x a lo largo de la placa sino también de la conductividad térmica del material que conforma la placa. Este hecho se puede verificar experimentalmente. En la figura 1.1, obtenida de (Luikov, 1974), se muestra la gráfica de la función $Nu_x = f(x^*)$ para placas de cerámica y vidrio. Aquí, x^* es la coordenada longitudinal normalizada y Nu_x es el número de Nusselt local definido como $Nu_x = -x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} / (T_w - T_\infty)$. La figura muestra que la curva $f(x^*)$ para una placa de vidrio con $x^* > 0.5$, el número de Nusselt local es negativo ($Nu_x < 0$). Por lo tanto para cálculos del número de Nusselt Nu_x necesitamos una solución simultánea del problema de transferencia de calor de un fluido sobre una superficie sólida y el problema de conducción de calor dentro de la placa. Es decir, debemos resolver un problema conjugado. En este caso, la condición de frontera de tercera clase, $k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} + c_1(T_w - T_\infty) = 0$, debe ser sustituida por una condición de frontera de cuarta clase en la superficie, $k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = k_w \left(\frac{\partial T_w}{\partial y} \right)_{y=0}$.

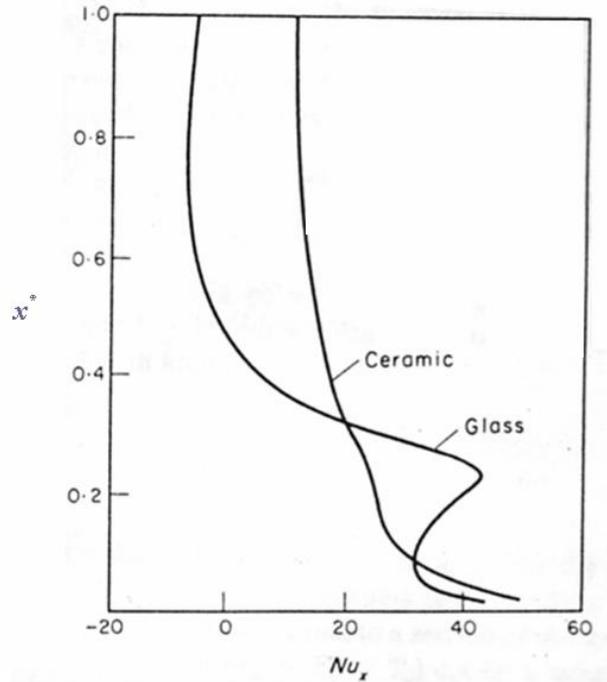


Figura 1.1: Número de Nusselt local a lo largo de la coordenada x^* para placas de vidrio y cerámica. (reproducida de (Luikov, 1974))

Notemos que las condiciones de frontera anteriores sólo son válidas para placas sin fuentes de calor. En publicaciones relacionadas con problemas de transferencia de calor conjugado, el proceso de solución está bien establecido. Se deduce en todos ellos el número de Nusselt Nu_x , ya sea de manera numérica o de forma analítica. Por ejemplo, para un problema bidimensional $Nu_x = -x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} / (T_w - T_\infty)$, donde y es normal a la placa. Aquí se considera T_w como constante. En el caso de considerar temperatura de superficie variable, tenemos $Nu_x = -x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} / (T(0, x) - T_\infty)$. Para este tipo de problema conjugado se puede utilizar, según (Luikov, 1974), una simple

relación empírica de la forma $Nu_x = ABr^m Re_x^n f(Br)$, donde A , n y m son constantes, Br es el número de Brun definido como la relación β/ζ^2 donde β es el parámetro de transferencia de calor adimensional, $\beta = (k/k_x)\zeta^3 Re_x^n Pr^m$, Re_x es el número de Reynolds y ζ es la relación de aspecto de la placa (el espesor entre la longitud). Estas correlaciones son usadas sobre todo en ingeniería.

Existen en la literatura varios estudios sistemáticos en relación con el proceso de transferencia de calor entre un fluido laminar e incompresible y una placa plana en convección forzada cuya parte inferior es mantenida a temperatura constante (ver figura 1.2). Tal es el caso de Perelman (Perelman, 1961), Luikov (Luikov, 1974), Payvar (Payvar, 1977), Karvinen (Karvinen, 1978), Pozzi y Lupo (Pozzy and M.Lupo, 1989), Pop e Ingham (Pop and D.Ingham, 1993), Treviño (Treviño and F.Mendez, 1997) y Vynnycky (Vynnycky and S.Kimura, 1998). Perelman fue el primero en considerar este problema de forma acoplada. Luikov obtuvo dos soluciones aproximadas, la primera basada en un análisis diferencial y la segunda basada en el método integral, donde asumió formas polinomiales para el perfil de velocidades y temperatura. Luikov obtuvo un criterio usando el número de Brun para decidir cuando considerar el problema como conjugado. Concluyó que cuando el número de Brun es menor que 0.1 la resistencia térmica de la pared puede ser despreciada, es decir el problema puede considerarse como no conjugado porque según Luikov el Nusselt calculado bajo estas condiciones tendrá sólo el cinco por ciento de error respecto al Nusselt real.

Payvar (Payvar, 1977) utilizó la aproximación de Lighthill para grandes números de Prandtl y obtuvo una ecuación integral la cual resolvió numéri-

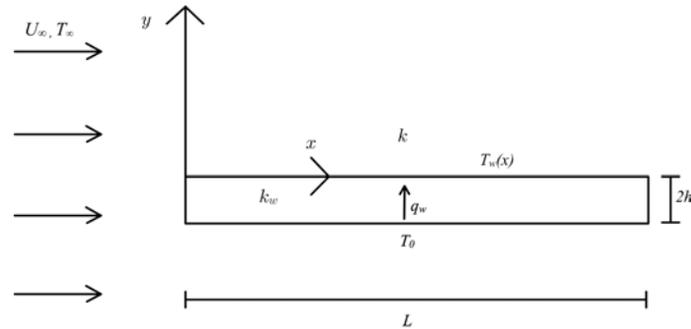


Figura 1.2: Esquema del problema de transferencia de calor estudiado en la literatura

camente. Él también obtuvo soluciones asintóticas para números de Prandtl grandes y pequeños. Pozzi y Lupo (Pozzi and M.Lupo, 1989) resolvieron el problema con el método de desarrollo en series y obtuvieron una primera serie válida para valores pequeños de x (coordenada a lo largo de la placa) y una segunda serie válida para valores grandes de x . Además demostraron que si la serie para valores pequeños de x es transformada utilizando una transformación de Padé, ésta puede describir de manera muy precisa la solución en todo el dominio del flujo. Aunque este método de solución es interesante, requiere una gran cantidad de trabajo numérico para encontrar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias interrelacionadas. De hecho, el trabajo numérico requerido puede ser mayor al necesitado para resolver numéricamente el problema completo. Treviño, et.al. (Treviño and F.Mendez, 1997), consideraron la transferencia de calor longitudinal y transversal en la placa, lo que artículos anteriores no habían hecho. Con la inclusión de la transferencia de calor longitudinal el conjunto de ecuaciones que gobiernan el fenómeno son elípticas y las resolvieron usando la aproximación de Lighthill (Lighthill, 1950) para números de Prandtl muy grandes comparados con la unidad.

Además utilizaron técnicas asintóticas y numéricas, comparando finalmente ambas soluciones. Ellos concluyeron que el número de Nusselt promedio es ligeramente mayor que cuando no se considera la transferencia de calor longitudinal en la placa. Recientemente Wang (Wang, 1997), formuló el mismo problema pero considerando fluidos no newtonianos. Utilizó el modelo de la ley de potencias $\tau = \mu(\partial U/\partial y)^n$ usada para fluidos no newtonianos, la cual dice que si el exponente es $n < 1$ corresponde a pseudoplásticos, si $n = 1$ corresponde a fluidos newtonianos y $n > 1$ a fluidos dilatantes. Wang resolvió el problema numéricamente utilizando el método de diferencias finitas y pudo estudiar los efectos del número de Prandtl y la no linealidad de los fluidos en los perfiles de temperatura de la placa. Finalmente Kikuji Chida (Chida, 2000), obtiene de forma numérica la temperatura de superficie de la placa plana considerando la conducción de calor longitudinal y transversalmente. Chida, compara sus resultados con los obtenidos por Payvar, Luikov y Pop. Esta comparación puede verse en la Figura 1.3. Aquí el perfil de temperatura de superficie de la placa normalizado T_w^* es graficado para $Pr = 0.72$. Los resultados de Chida concuerdan muy bien con los de Payvar y Luikov. Según Chida, si la coordenada x^* para los resultados de Pop e Ingham fuese multiplicada por $(1/4)$, entonces sus resultados coincidirían con los demás autores.

Debido al hecho de utilizar propiedades térmicas constantes del fluido (conductividad térmica, densidad y calor específico), la ecuación de la energía es lineal e independiente de las ecuaciones de conservación de masa y balance de cantidad de movimiento, hay entonces una representación integral del flujo de calor hacia el fluido como función de la distribución de temperatura de la placa. Un caso especial es cuando la temperatura de la placa experimenta un

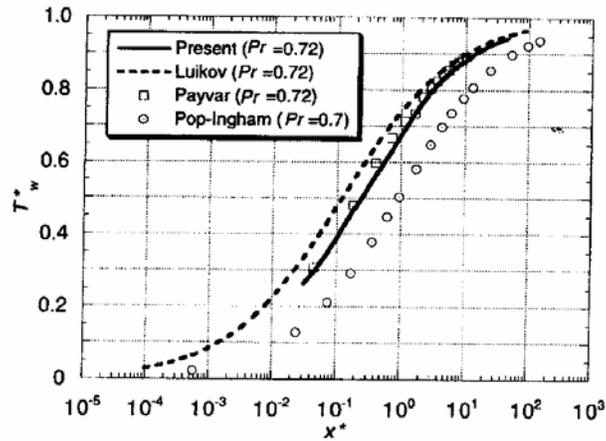


Figura 1.3: Comparación de los resultados de varios autores para la temperatura de superficie T_w^* . (reproducida de (Chida, 2000))

cambio abrupto de T_∞ (que corresponde a la temperatura del fluido en corriente libre) a T_0 , $T_0 \neq T_\infty$ (ver figura 1.4). Lighthill (Lighthill, 1950) para este problema obtuvo una solución de autosemejanza asumiendo que el espesor de la capa límite térmica es muy pequeño comparado con el espesor de la capa límite viscosa, la cual da una excelente aproximación aún para números de Prandtl de orden unidad. El flujo de calor en este caso muestra una singularidad en la posición donde ocurre el salto de temperatura (ver figura 1.4). Con el objetivo de evitar esta singularidad usaremos dos materiales diferentes con propiedades térmicas distintas. Básicamente, necesitaremos un material con conductividad térmica pequeña y prácticamente despreciable para cubrir la longitud inicial de la placa. En esta configuración habrá un pequeño pero finito flujo de calor en la interfaz de las dos secciones de la placa. Este flujo perturbará el flujo de calor al fluido y destruirá su comportamiento singular en la posición de la interfaz. Bajo estas condiciones es necesario resolver un problema de transferencia de calor conjugado. Existen también muchos

artículos relacionados con la transferencia de calor de flujos compresibles. En este trabajo se considera el fluido como incompresible.

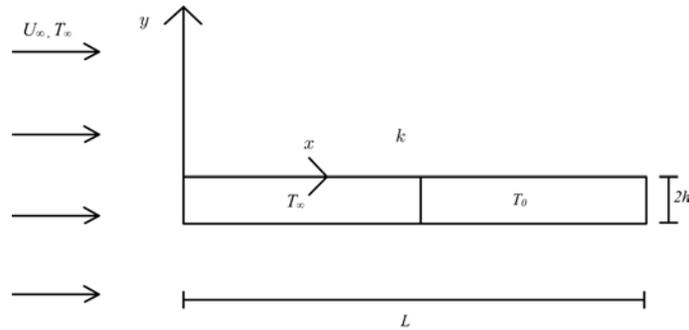


Figura 1.4: Esquema del problema estudiado por M. Lighthill

1.3. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

- * Obtener el proceso de transferencia de calor para una placa plana con un salto en su temperatura de superficie, colocada paralela a un flujo incompresible y forzado.
- * Utilizar los métodos de perturbación para encontrar soluciones analíticas al problema para casos límites importantes.
- * Resolver el problema de forma numérica utilizando el método de diferencias finitas.
- * Comparar las soluciones analíticas con los resultados numéricos.

Capítulo 2

Modelos Matemáticos

En este capítulo se plantea el problema físico estudiado. Se establecen las ecuaciones que rigen el fenómeno físico y sus condiciones de frontera y se presenta la metodología usada para resolver el problema.

2.1. Ecuaciones que gobiernan la mecánica de fluidos

El análisis presentado a continuación está basado en libro (Brodkey, 1995).

2.1.1. Balance de propiedades generales

El balance de una propiedad general se puede hacer sobre un elemento de volumen v que se mueve con velocidad de corriente \mathbf{U} . Las propiedades

(masa, momento y energía) por unidad de volumen las denotaremos como ψ y el flujo de dicha propiedad como Ψ . El flujo neto a través de la superficie estará dado por la integral de superficie cerrada

$$\oint_S (\Psi \cdot d\mathbf{S}) \quad (2.1)$$

La integral será negativa para flujos hacia dentro de la superficie y positiva para flujos hacia fuera. La generación de la propiedad por unidad de volumen y tiempo será denotada por $\dot{\psi}_g$ entonces la generación dentro del volumen es

$$\int_v \dot{\psi}_g dv \quad (2.2)$$

La razón de cambio de la propiedad en el volumen es

$$\frac{d}{dt} \left(\int_v \psi dv \right) \quad (2.3)$$

Debido a que la razón de cambio dentro del volumen debe ser igual al flujo neto a través de la superficie más la generación, entonces el balance queda representado por

$$\frac{d}{dt} \left(\int_v \psi dv \right) = - \oint_S (\Psi \cdot d\mathbf{S}) + \int_v \dot{\psi}_g dv \quad (2.4)$$

El término de la izquierda es el cambio total de la propiedad en v . Éste puede ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \left(\int_v \psi dv \right) = \oint_S \psi (\mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}) + \int_v (\partial\psi/\partial t) dv, \quad (2.5)$$

donde el término de la derivada parcial considera la razón de cambio con respecto al tiempo en v , mientras que el otro término representa el cambio de la propiedad asociado con el movimiento del elemento de volumen con

velocidad \mathbf{U} . El resultado se obtiene de la diferenciación de una integral. La ecuación (2.4) se reescribe como

$$\oint_S \psi(\mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}) + \int_v (\partial\psi/\partial t) dv = - \oint_S (\boldsymbol{\Psi} \cdot d\mathbf{S}) + \int_v \dot{\psi}_g dv \quad (2.6)$$

El teorema de Gauss señala que

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = - \oint_S (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}). \quad (2.7)$$

Combinando (2.6) y (2.7) obtenemos

$$\int_v \left[\partial\psi/\partial t + (\nabla \cdot \psi\mathbf{U}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}) - \dot{\psi}_g \right] dv = 0.$$

Debido a que la expresión es verdadera para cualquier región en el espacio, entonces

$$\partial\psi/\partial t + (\nabla \cdot \psi\mathbf{U}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}) - \dot{\psi}_g = 0, \quad (2.8)$$

la cual es la ecuación general de cambio para la propiedad ψ . El elemento de volumen pudo haberse considerado como estacionario en la corriente del fluido, en cuyo caso el segundo término sería cero.

Es interesante resaltar que el análisis macroscópico realizado con anterioridad, coincide con un análisis microscópico, proveniente de la Física Estadística. Aquí, mediante una aproximación molecular se deduce la ecuación de Enskog (ecuación general de cambio), para un gas monoatómico diluido. Esta ecuación debe ser sumada sobre todas las n moléculas para obtener el equivalente de ecuación (2.8).

2.1.2. Ecuación de conservación de masa

Para obtener expresiones explícitas de las ecuaciones de cambio, debemos sustituir las propiedades y flujos dentro de las ecuaciones generales. En esta

sección, la ecuación (2.8) será utilizada.

La propiedad macroscópica de la masa por unidad de volumen es la densidad ρ . El flujo de masa en este caso es cero, debido a que el elemento bajo consideración se mueve con la velocidad de corriente \mathbf{U} . La generación de masa es cero. La ecuación general de balance (2.8) es entonces

$$\partial\rho/\partial t + (\nabla \cdot \rho\mathbf{U}) = 0 \quad (2.9)$$

En términos de la derivada material

$$D\rho/Dt = (\partial\rho/\partial t) + \mathbf{U} \cdot \nabla\rho \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) queda por lo tanto

$$D\rho/Dt = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{U}). \quad (2.11)$$

Si el material es incompresible, la densidad es constante, entonces obtenemos de (2.11)

$$(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.9) son formas de representar la ecuación de continuidad. Si la densidad en un volumen dado es decreciente con el tiempo, entonces debe haber un exceso de flujo que sale sobre el que entra; el término $(\nabla \cdot \mathbf{U})$ debe ser una función positiva creciente (la divergencia de la velocidad). El término divergencia significa exceso de flujo que sale sobre el que entra en un volumen dado.

2.1.3. Ecuación de balance de cantidad de movimiento

La propiedad macroscópica de la cantidad de movimiento por unidad de volumen es $\rho\mathbf{U}$, el flujo de la cantidad de movimiento es el tensor de presión \mathbf{P} . Sin embargo, debido a que la cantidad de movimiento puede ser modificada por fuerzas de campo tales como la gravedad, la ecuación general de balance se puede escribir como

$$\partial\rho\mathbf{U}/\partial t + (\nabla \cdot \rho(\mathbf{U}\mathbf{U})) + (\nabla \cdot \mathbf{P}) - \sum_s \rho\mathbf{F}_s = 0 \quad (2.12)$$

donde \mathbf{F}_s representa las fuerzas de campo por unidad de masa. Usando la identidad $(\nabla \cdot \rho(\mathbf{U}\mathbf{U})) = (\rho\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mathbf{U}(\nabla \cdot \rho\mathbf{U})$, y

$$\frac{\partial\rho\mathbf{U}}{\partial t} = \rho \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \mathbf{U}$$

La ecuación (2.12) se reescribe como

$$\rho \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \mathbf{U} = -(\nabla \cdot \mathbf{P}) - (\rho\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \sum_s \rho\mathbf{F}_s \quad (2.13)$$

Combinando ésta con la ecuación de continuidad (2.9) y expresándola en términos de la derivada material, obtenemos

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{P}) + \sum_s \rho\mathbf{F}_s \quad (2.14)$$

La Ecuación (2.14) es una forma de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, e indica que la velocidad de un elemento cambia (se acelera) por el gradiente del tensor de presiones y por fuerzas externas. Se puede demostrar que el tensor de presión \mathbf{P} se compone de dos términos (presión estática y esfuerzos viscosos), por lo tanto, el cambio en la velocidad se

deberá al gradiente en la presión estática, $-(1/\rho)\nabla p$, y al término que produce una desaceleración en el elemento del fluido debido al esfuerzo viscoso, $-(1/\rho)(\nabla \cdot \tau)$. La ecuación (2.14) es una expresión matemática de la segunda ley de Newton.

La ecuación de cantidad de movimiento (2.14) puede ser modificada dividiendo el tensor de presión \mathbf{P} en un tensor de presión estática y un tensor viscoso. Finalmente aplicando ciertas identidades vectoriales obtenemos la conocida ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mu\nabla^2\mathbf{U} + \sum_s \rho\mathbf{F}_s \quad (2.15)$$

donde μ representa la viscosidad dinámica del fluido.

2.1.4. Ecuación de conservación de la energía

La propiedad macroscópica de la energía interna por unidad de volumen es ρe , donde e es la energía interna por unidad de masa. El flujo de energía debido al flujo de calor por conducción y difusión se denota por \mathbf{q} . Aquí no se toma en cuenta generación de energía por medios eléctricos, químicos o nucleares. Sin embargo, se realiza un trabajo (fuerza \times distancia) hacia el fluido. Éste consiste de dos partes: primero, el trabajo hecho sobre el fluido el cual es asociado a fuerzas de bulto (todas las fuerzas de campo $\rho\mathbf{F}_s$); y segundo, el trabajo hecho por el fluido el cual está asociado con fuerzas de superficie (fuerzas viscosas y de presión) como se describe en el tensor de presión ($\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$). En este caso el trabajo por unidad de tiempo (fuerza \times velocidad) es

$$\int_v \dot{\psi}_g dv = \int_v \sum_s (\mathbf{U} \cdot \rho\mathbf{F}_s) dv - \oint_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.16)$$

Aplicando el teorema de Gauss a la ecuación anterior y luego de ciertos arreglos matemáticos, podemos sustituirla en la ecuación (2.8) y expresar esta última en términos de las energías interna y cinética

$$\partial[\rho(e + \frac{1}{2}U^2)]/\partial t + (\nabla \cdot \rho(e + \frac{1}{2}U^2)\mathbf{U} + (\nabla \cdot \mathbf{q}) + \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}) - U \cdot \sum_s \rho \mathbf{F}_s - \sum_s (\mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_s)) = 0 \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{J} = -D\nabla\rho$ (ley de Fick). Aquí \mathbf{J} es el vector de flujo másico y D es la difusividad de masa.

El tensor de presión se puede dividir en dos términos: un término de trabajo-presión-volumen, asociado con efectos de compresión $-p(\nabla \cdot \mathbf{U})$ y un término de disipación viscosa $-\tau : (\nabla \mathbf{U})$. Con lo anterior y usando ciertas identidades vectoriales (2.17) se reescribe como

$$\rho(De/Dt) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \tau : (\nabla \mathbf{U}) + \sum_s (\mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_s) \quad (2.18)$$

Físicamente esta ecuación nos dice que la energía interna cambia debido al flujo de calor, efectos de expansión, calentamiento viscoso y por fuerzas externas. Existen otras maneras de representar la ecuación de la energía, ya sea en función de la entalpía, energía cinética o temperatura. Una forma importante para el análisis de la transferencia de calor es la ecuación de la energía en términos de la temperatura. Ésta se puede obtener expresando la energía interna en términos termodinámicos, presión, volumen y temperatura. Usando esto en la ecuación (2.18), el resultado es

$$\rho c_v(DT/Dt) = k\nabla^2 T + Dp/Dt + \Phi + \sum_s (\mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_s) \quad (2.19)$$

donde se introdujo la ley de Fourier $\mathbf{q} = -k\nabla T$, la capacidad calorífica a

volumen constante c_v y la función de disipación Φ definida como

$$\Phi = 2\mu \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{U})^2 \end{aligned} \right] \quad (2.20)$$

En la ecuación (2.19), el lado izquierdo representa al cambio como función del tiempo de la energía interna, mientras que el lado derecho representa, respectivamente, la razón de difusión de calor al fluido, la razón de trabajo hecha sobre el fluido por compresión y la razón de disipación viscosa por unidad de volumen.

2.2. Planteamiento del problema

El modelo físico analizado se muestra en la Figura 2.1. Una placa plana delgada de longitud L y espesor $2h$ se coloca paralela a un flujo forzado de un fluido incompresible con velocidad de corriente libre U_∞ , temperatura T_∞ y conductividad térmica k . La placa está compuesta de dos materiales con diferentes propiedades térmicas. El primer material tiene una conductividad térmica finita k_w . Este material está localizado desde el borde delantero y tiene una longitud x_0 . Le sigue el segundo material con una conductividad térmica extremadamente grande y que tiene una temperatura uniforme T_0 . Las coordenadas cartesianas son x en la dirección longitudinal y y en dirección transversal con el origen del sistema cartesiano en la esquina izquierda de la placa plana. Se considera al flujo incompresible, estacionario y bidimensional, además se desprecian los efectos de borde hidrodinámicos.

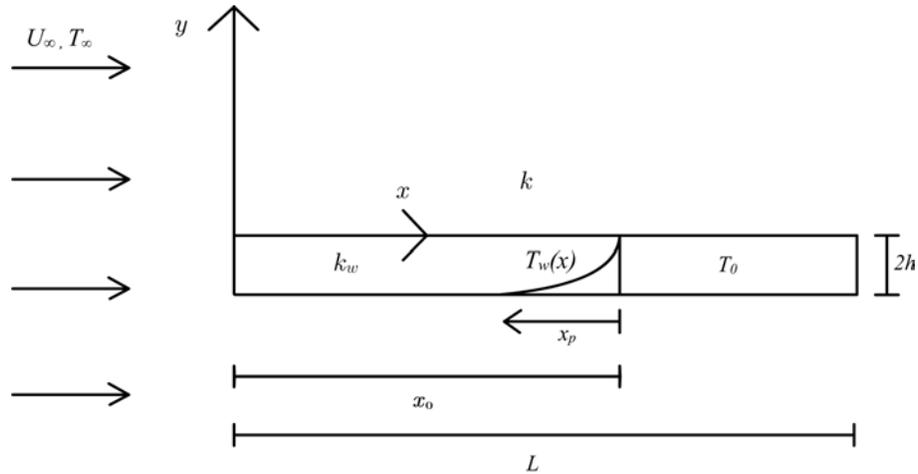


Figura 2.1: Esquema del problema de transferencia de calor estudiado

2.3. Ecuación de conservación de masa para el problema

Debido a que consideramos al flujo como incompresible, estacionario y bidimensional, la ecuación de conservación de masa (2.9) se escribe (White, 1979)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

donde \mathbf{U} es el vector velocidad del fluido, U y V son las componentes de la velocidad en la dirección x y y respectivamente.

2.4. Ecuación de capa límite

Al considerar un fluido viscoso en movimiento estacionario, sobre una superficie plana de longitud L , podemos suponer que las partículas del fluido se adhieren a la superficie, entonces las fuerzas de fricción retardan el movimiento del fluido dentro de una capa delgada cercana a la superficie. En esta capa delgada (llamada capa límite viscosa δ) la velocidad del fluido decrece desde su velocidad de corriente libre U_∞ hasta cero en la superficie (condición de no deslizamiento). Esta grandiosa observación fue introducida por Ludwig Prandtl en 1904 quien por esto, es considerado el fundador de la aerodinámica moderna.

Con esta idea, Prandtl adimensionalizó la ecuación de balance de cantidad de movimiento (2.15) y utilizando el hecho experimental $\bar{\delta} = \delta/L \ll 1$, aplicó a (2.15) un análisis de orden de magnitud. Dedujo entonces que el término $\partial^2 \bar{U} / \partial \bar{x}^2 \ll \partial^2 \bar{U} / \partial \bar{y}^2$ y que $\partial \bar{p} / \partial \bar{y} = O(\bar{\delta})$, aquí las variables testadas representan la adimensionalización de las mismas. Con el análisis anterior la ecuación de balance de cantidad de movimiento (2.15) para nuestro problema se simplifica como

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.22)$$

donde se considera que el gradiente de presión es cero, debido a que la velocidad de corriente libre U_∞ del fluido es constante. Las condiciones de frontera para la ecuación de balance de cantidad de movimiento son

$$U = V = 0 \text{ en } y = 0 \quad (2.23)$$

$$U = U_\infty \text{ para } y \rightarrow \infty$$

$$U = U_\infty \text{ en } x = 0 : \quad (2.24)$$

La ecuación (2.22) sujeta a (2.23) se resuelve fácilmente al introducir la variable de autosemejanza $\eta = y/\sqrt{U_\infty/\nu x}$. (White, 1979). Esta variable transforma (2.22) y (2.21) en una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, conocida como ecuación de Blasius,

$$\frac{d^3 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad (2.25)$$

con las condiciones de frontera

$$f(0) = \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 1 - \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.26)$$

Aquí, $f = \int_0^\eta (U/U_\infty) d\eta$.

2.5. Ecuación de la energía en la aproximación de capa límite

Si la temperatura de la placa plana es diferente de la temperatura del fluido, una capa límite térmica δ_T también se desarrollará sobre la placa. En una región pequeña, en la vecindad inmediata de la placa, ocurrirá una variación significativa de la temperatura. Nuevamente tomando en cuenta

que $\bar{\delta}_T = \delta_T/L \ll 1$, $\bar{y} = O(\bar{\delta}_T)$ y adimensionalizando (2.19) se observa que $\partial^2 \bar{T} / \partial \bar{x}^2 \ll \partial^2 \bar{T} / \partial \bar{y}^2$. Entonces la ecuación de la energía (2.19) en la aproximación de capa límite para un flujo estacionario, bidimensional e incompresible con propiedades termofísicas constantes es

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.27)$$

donde se ha suprimido el término $\mu/\rho c_p (\partial u/\partial y)^2$, el cual es importante sólo para altas velocidades del fluido. Las condiciones de frontera para la ecuación de la energía son

$$T = T_\infty \text{ en } x = 0 \quad (2.28)$$

$$U = U_\infty \text{ para } y \rightarrow \infty$$

$$T = T_0 \text{ para } y = 0, x \geq x_0 \text{ y } T = T_w(x) \text{ para } x \leq x_0$$

2.6. Análisis de escala

Un análisis de escala para la transferencia de calor en la interfaz entre ambas porciones de la placa, Q_s , es (Bejan, 1994)

$$Q_s \sim \frac{k_w(T_0 - T_\infty)h}{x_p} \sim \frac{k(T_0 - T_\infty)x_p}{\delta_T} \quad (2.29)$$

donde x_p denota la longitud de penetración térmica característica medida desde la posición de la interfaz (ver Figura 2.1) y δ_T es el espesor de la capa límite térmica. En la relación (2.29) el calor que fluye a través de la interfaz,

finalmente se transfiere hacia el fluido, es decir, debido a que el problema es estacionario, se cumple la ley de conservación de la energía. Del balance de los términos convectivos ($U\partial T/\partial x$) y difusivos ($\alpha\partial T^2/\partial y^2$) en la ecuación de la energía del fluido (2.27), se obtiene la siguiente relación

$$\frac{u(T_0 - T_\infty)}{x_p} \sim \frac{\alpha(T_0 - T_\infty)}{\delta_T^2} \quad (2.30)$$

donde U corresponde a la velocidad local del fluido, $U \sim U_\infty \delta_T / \delta$, con δ denotando la capa límite viscosa y α la difusividad térmica del fluido. Del balance de términos inerciales ($U\partial U/\partial x$) y de fricción ($\nu\partial U^2/\partial y^2$) en la ecuación de cantidad de movimiento (2.22), se obtiene el orden de magnitud para el espesor de la capa límite viscosa, $\delta \sim x_0/R_0^{1/2}$, donde R_0 es el número de Reynolds basado en x_0 , $R_0 = U_\infty x_0 / \nu$, con ν la viscosidad cinemática del fluido. Usando las relaciones (2.29) y (2.30), la longitud de penetración térmica x_p relativa a x_0 es

$$\varepsilon = \frac{x_p}{x_0} = \frac{C_1}{\text{Pr}^{1/5} R_0^{3/10}} \left(\frac{h}{x_0} \frac{k_w}{k} \right)^{3/5} \quad (2.31)$$

donde $C_1 = (3/4)^{1/3} (4/f''(0))^{1/5} = 1.495$ es una constante incluida por conveniencia. El valor de la constante C_1 se dedujo luego de adimensionalizar la ecuación integro-diferencial para θ_w (2.36). Aquí $f''(0) = 0.332$ corresponde a la segunda derivada de la función de Blasius evaluada en la superficie, (White, 1979) y Pr es el número de Prandtl del fluido, $\text{Pr} = \nu/\alpha$.

Si suponemos propiedades térmicas constantes del fluido (conductividad térmica, densidad y calor específico), la ecuación de la energía es lineal e independiente de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimien-

to. Hay entonces una representación integral del flujo de calor hacia el fluido como función de la distribución de temperatura de la placa. Entonces, el flujo de calor de la placa con temperatura variable al fluido por unidad de superficie, q_w , se puede escribir como (ver apéndice A)

$$q_w = \frac{k}{x} Re_x^{1/2} \frac{[f''(0) Pr]^{1/3}}{4^{1/3}} \left[T_{wl} - T_\infty + \int_{T_{wl}}^{T_w(x)} K(x, \xi) dT'_w(\xi) \right] \quad (2.32)$$

donde $K(x, \xi)$ es el Kernel definido por $K(x, \xi) = [1 - (\xi/x)^{3/4}]^{-1/3}$ y $T_w(x)$ es la temperatura en la interfaz (placa-fluido), la cual se obtendrá al resolver la ecuación de la energía (Laplace) para la placa. T_{wl} es la temperatura en el borde delantero de la placa, $T_{wl} = T_w(0)$. En la aproximación de placa delgada ($h/x_0 \ll 1$) podemos suponer que las variaciones de temperatura en la dirección transversal de la placa pueden ser despreciadas (placa térmicamente delgada). En este sentido, se integra la ecuación de Laplace en la dirección transversal para la placa plana en un dominio $[0, h]$, obteniendo

$$\int_0^h \left[\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^{*2}} \right] dy^* = 0 \quad (2.33)$$

donde $y^* = y + h$. Usando la aproximación de placa delgada y de la simetría del problema obtenemos

$$\frac{d^2 T_w}{dx^2} = -\frac{1}{h} \frac{\partial T_w(x, h)}{\partial y^*}. \quad (2.34)$$

De la condición de continuidad del flujo de calor en la interfaz, se cumple la siguiente condición de frontera

$$k_w \frac{\partial T_w(x, h)}{\partial y^*} = k \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = -q_w. \quad (2.35)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.35) en la (2.34), se obtiene la siguiente ecuación integro-diferencial adimensional para $T_w(x)$

$$\frac{d^2\theta_w}{ds^2} = \frac{(3/4)^5}{\varepsilon^{5/3}\sqrt{s}} \left[\theta_{wl} + \int_{\theta_{wl}}^{\theta_w(s)} K(s, \xi') d\theta'_w \right] \quad (2.36)$$

donde

$$\theta_w(s) = \frac{T_w(s) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad s = \frac{x}{x_0} \quad (2.37)$$

Para el problema, suponemos que el borde delantero de la placa es adiabático y que la temperatura en $s = 1$ alcanza la temperatura T_0 . En este caso, las condiciones de frontera para la ecuación (2.36) se expresan como

$$\left. \frac{d\theta_w}{ds} \right|_{s=0} = \theta_w(1) - 1 = 0. \quad (2.38)$$

En el problema existe tanto un flujo de energía por conducción como por convección. Además, debido a que el fluido está en movimiento por algún agente externo, el fenómeno de transferencia de calor, se denomina proceso de convección forzada. Existe un número adimensional conocido como número de Nusselt en el estudio de la convección forzada el cual nos proporciona una medida de la relación entre la transferencia de calor total y la transferencia de calor por conducción. Este número, se define como la relación del coeficiente de transferencia de calor γ multiplicado por una longitud característica l dividido por la conductividad térmica. Se representa con el símbolo Nu . Es decir,

$$Nu = \frac{\gamma l}{k}$$

Podemos sustituir en la ecuación anterior la definición del coeficiente de

transferencia de calor $\gamma = q_w/(T_0 - T_\infty)$ (Kakac and Yener, 1995) y obtener una nueva expresión para el número de Nusselt

$$Nu = \frac{q_w l}{k(T_0 - T_\infty)} \quad (2.39)$$

Por todo lo anterior, para conocer el fenómeno de transferencia de calor de la placa hacia el fluido en convección forzada, utilizaremos el número de Nusselt. Para el problema, el Nu escalado se expresa como

$$Nu = \frac{q_w x_0}{k(T_0 - T_\infty)} \left(\frac{4}{f''(0)} \right)^{1/3} \frac{1}{\text{Pr}^{1/3} R_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\theta_{wl} + \int_{\theta_{wl}}^{\theta_w(s)} K(s, \xi') H(1 - \xi') d\theta_w \right] \quad (2.40)$$

La ecuación (2.40) proviene de sustituir (2.32) en la ecuación (2.39). Aquí $H(t)$ corresponde a la función de Heaviside, $H(t) = 0$ para $t < 0$ y $H(t) = 1$ para $t > 0$. La discretización de ecuación (2.40) puede verse en el Apéndice B.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo se presentan las soluciones numéricas y su comparación con las soluciones asintóticas obtenidas para casos límite importantes.

Para los cálculos numéricos es conveniente introducir una coordenada longitudinal definida como $z = (3/4)^{5/18} s^{3/4} / \varepsilon^{5/6}$. Con esta nueva coordenada, la ecuación (2.36) se transforma en

$$3z \frac{d^2 \theta_w}{dz^2} - \frac{d\theta_w}{dz} = \frac{16z}{3} \left[\theta_{wl} + \int_0^z \frac{d\theta_w}{dz'} \frac{1}{(1 - z'/z)^{1/3}} dz' \right] \quad (3.1)$$

la cual se resuelve con las siguientes condiciones de frontera $d\theta_w(0)/dz = 0$ y $\theta_w(z_f) = 1$ (ver Apéndice C). Aquí $z_f = (3/4)^{5/18} / \varepsilon^{5/6}$. La ecuación (3.1) está libre de parámetros, pues el parámetro ε se colocó en la condición de frontera. Esta ecuación se puede resolver como un problema de condiciones de frontera $d\theta_w(0)/dz = 0$ y $\theta_w(0) = \theta_{wl}(\varepsilon)$. Especificando el valor de θ_{wl} en el programa obtenemos el valor de z_f como la posición de la coordenada z en donde θ_w alcanza el valor de la unidad. Una vez que conocemos el valor de

z_f podemos obtener el valor del parámetro ε de la relación $\varepsilon = (4/3)^{1/3} z_f^{6/5}$. La figura 3.1 muestra los perfiles de temperatura adimensional en función de la coordenada normalizada s , para diferentes valores del parámetro ε , al resolver numéricamente la ecuación (3.1) con sus correspondientes condiciones de frontera. En esta misma figura el caso $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon \rightarrow \infty$ corresponderían a la función $\theta_w = H(s - 1)$ y $\theta_w = 1$ respectivamente. La relación entre la temperatura adimensional θ_{wl} del borde delantero de la placa ($s = 0$) y el parámetro ε , es obtenida y se muestra en la figura 3.2, donde también se grafica el comportamiento asintótico de θ_{wl} para valores grandes y pequeños de ε . Para valores pequeños de ε , la aproximación $\theta_{wl} = \exp(-1/\varepsilon)$ es excelente. En el recuadro de la figura 3.2 se muestra esta relación. Sin embargo el comportamiento asintótico para valores grandes de ε dados por la ecuación (3.6) sólo reproduce la solución para valores mayores de 10. Notemos, que conforme el flujo de calor penetra más hacia el lado izquierdo de la placa ($\varepsilon > 0$), la temperatura del borde de ataque θ_{wl} se incrementa.

La figura 3.3 muestra los resultados numéricos del número de Nusselt Nu en función de la coordenada normalizada s . Además en esta figura se grafican las soluciones asintóticas del Nu . Para $\varepsilon = 0$, se tiene $Nu = H(s - 1)[1 - (1/s)^{3/4}]s^{-1/2}$ (Kakac and Yener, 1995) que corresponde a la solución clásica de una placa con un salto en la temperatura de su superficie y para $\varepsilon \rightarrow \infty$, $Nu = s^{-1/2}$ (ver Apéndice D) el cual es la solución de una placa con temperatura constante. En esta gráfica notamos que la singularidad en $s = 1$ desaparece para valores pequeños pero finitos de ε , produciéndose un pico en el número de Nusselt en esta posición con valor decreciente si aumentamos el valor de ε . Una singularidad aparece ahora en $s = 0$, o sea en el borde de ataque de la placa. Se observa en esta misma gráfica una transición hacia

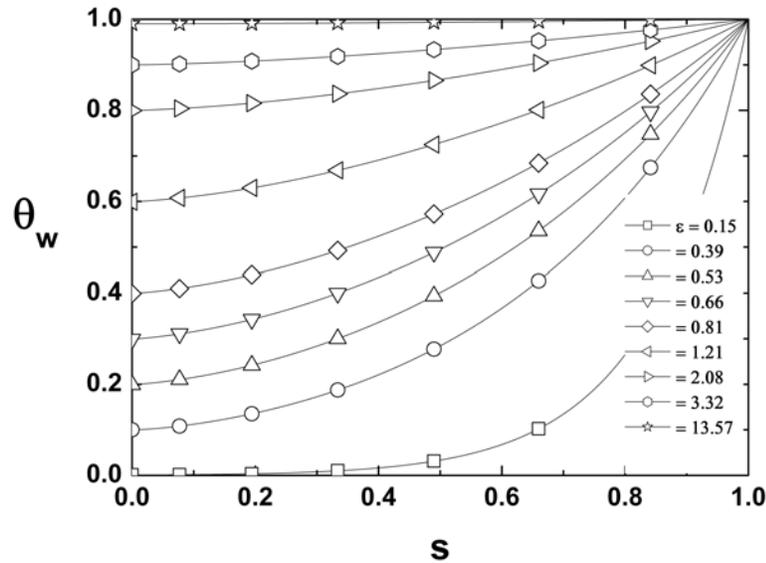


Figura 3.1: Perfiles de temperatura adimensionales para diferentes valores del parámetro ε

la solución obtenida para una placa plana con temperatura de superficie constante ($\varepsilon \rightarrow \infty$) conforme el valor de ε se incrementa. El pico en $s = 1$ desaparece para valores $\varepsilon \gg 1$. La figura 3.3, demuestra que el flujo de calor hacia el fluido es finito en la posición donde ocurre el salto de temperatura cuando se considera la transferencia de calor en la interfaz de los materiales que conforman la placa. En esta misma gráfica, notemos que los resultados están acotados por los casos límites analizados en la literatura, es decir, placa plana con temperatura de superficie constante y placa plana con salto abrupto en la temperatura de superficie, $\varepsilon \rightarrow \infty$ y $\varepsilon = 0$ respectivamente. Se logró demostrar que el flujo de calor hacia el fluido no es infinito al considerar que existe un flujo de calor en la interfaz de ambos materiales que conforman la placa; condición que vuelve más real el estudio de este problema.

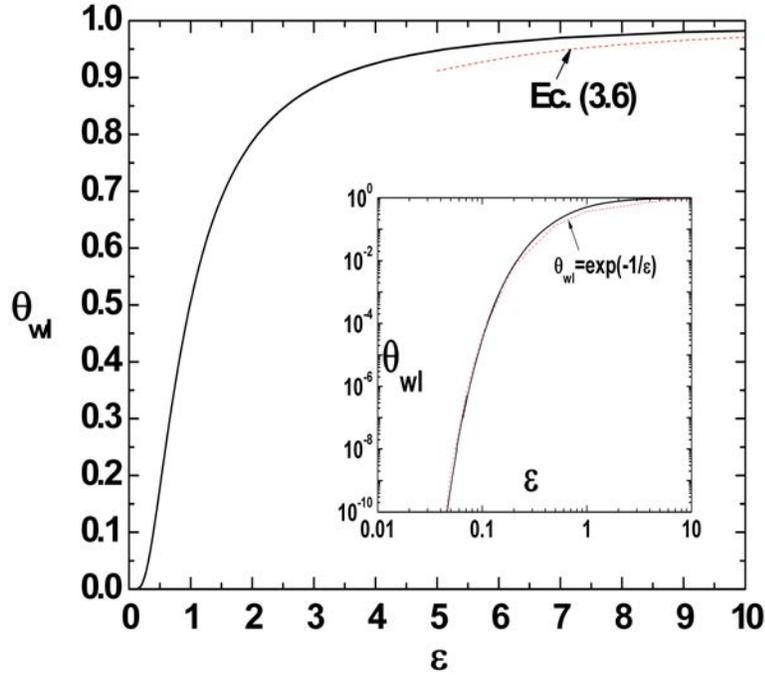


Figura 3.2: Temperatura adimensional θ_{wl} del borde delantero de la placa ($s = 0$) como función del parámetro ε

Las soluciones asintóticas para valores pequeños pero finitos de ε comparados con la unidad, en otras palabras $x_p \ll x_0$, se obtienen al introducir la variable interna $r = (1 - s)/\varepsilon$ en la ecuación (2.36). Después de ciertas simplificaciones dicha ecuación (2.36) se transforma en

$$\frac{d^2\theta_w(r)}{dr^2} = \int_0^{\theta_w} \frac{d\theta_w}{\sqrt[3]{r' - r}} \quad (3.2)$$

sujeta a las condiciones de frontera $\theta_w(0) = 1$ y $\theta_w(\infty) = 0$. La solución a la ecuación (3.2) con sus respectivas condiciones de frontera se obtiene fácilmente y corresponde a la función exponencial $\theta_w(r) = \exp(-Cr)$ donde C es

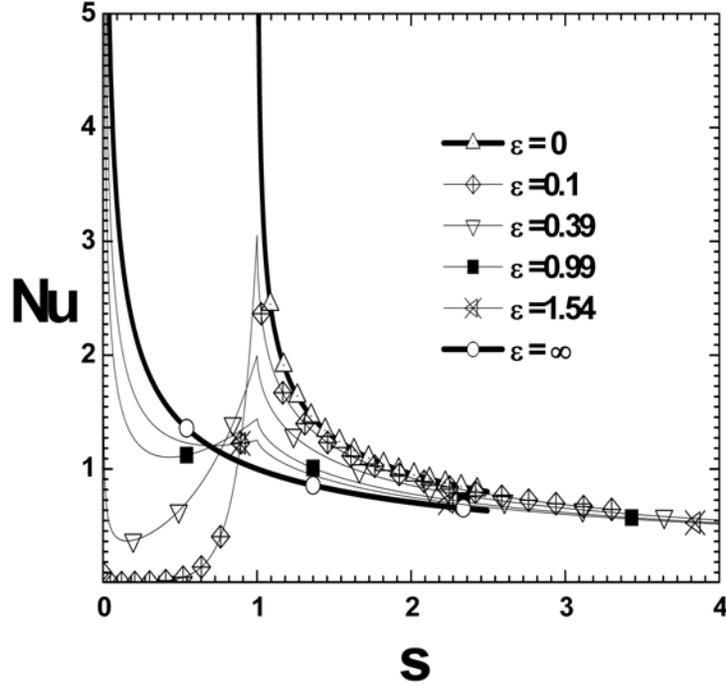


Figura 3.3: Número de Nusselt Nu en función de la coordenada normalizada s para diferentes valores del parámetro ε

una constante dada por $C = [\Gamma(2/3)]^{3/5}$, mientras que $\Gamma(2/3)$ es la función gamma, $\Gamma(2/3) = \int_0^\infty t^{-1/3} \exp(-t) dt = 1.3541$ y por lo tanto $C \simeq 1.1995$. El número de Nusselt en este régimen es

$$Nu = \left(\frac{4}{3\varepsilon}\right)^{1/3} C^2 \exp(-Cr), \text{ para } r \geq 0 \text{ (} s \leq 1 \text{)} \quad (3.3)$$

y

$$Nu = \left(\frac{4C}{3\varepsilon}\right)^{1/3} \exp(-Cr) \Gamma(-r/C, 2/3), \text{ para } r < 0 \text{ (} s > 1 \text{)}, \quad (3.4)$$

donde $\Gamma(-r/C, 2/3)$ corresponde a la función gamma incompleta definida

como $\Gamma(-r/C, 2/3) = \int_{-r/C}^{\infty} t^{-1/3} \exp(-t) dt$. El número de Nusselt reducido $\varepsilon^{1/3} Nu$ para valores pequeños de ε se obtiene de las ecuaciones (3.3) y (3.4) y se muestra en la Figura 3.4 como función de r . Valores positivos de r corresponden a valores $s < 1$, con $s = 1 - \varepsilon r$. El máximo valor del número de Nusselt en $s = 1$ es entonces $(4/3)^{1/3} C^2 / \varepsilon^{1/3}$ para $\varepsilon \rightarrow 0$.

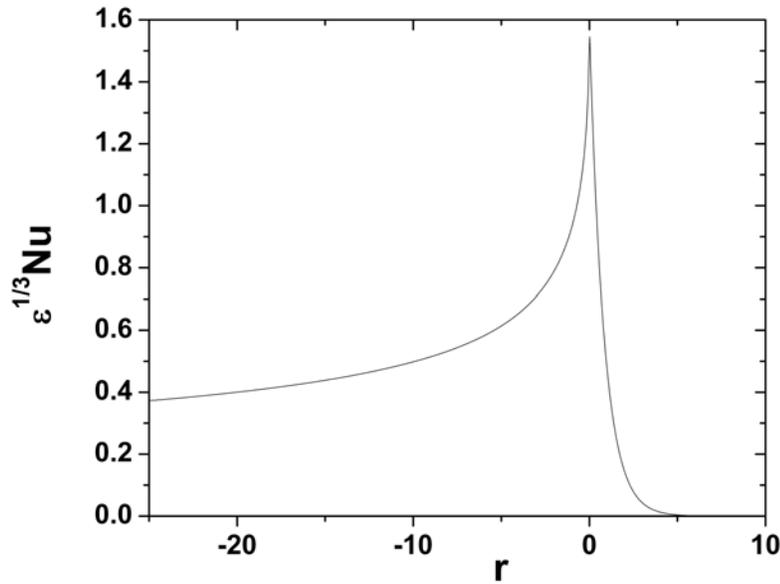


Figura 3.4: Número de Nusselt reducido $\varepsilon^{1/3} Nu$ como función de la coordenada interna r

Por otra parte, para valores grandes de ε comparados con la unidad, el proceso de transferencia de calor tiende al de una placa con temperatura constante en toda su superficie. De la ecuación (2.36) se puede deducir el comportamiento para valores grandes de ε . Para valores grandes y finitos de ε , la temperatura en la placa es (ver Apéndice E)

$$\frac{\theta_w}{\theta_{wl}} = \phi = 1 + \frac{1.1364}{\varepsilon^{5/3}} s^{3/2} + \frac{0.29056}{\varepsilon^{10/3}} s^3 + \dots \quad (\varepsilon \rightarrow \infty) \quad (3.5)$$

con θ_{wl} dada por (ver Apéndice E)

$$\theta_{wl} = 1 - \frac{1.1364}{\varepsilon^{5/3}} + \frac{1.0008}{\varepsilon^{10/3}} + \dots (\varepsilon \rightarrow \infty) \quad (3.6)$$

Otro parámetro de interés es el flujo de calor por unidad de longitud en la interfaz entre ambos materiales de la placa, Q_s , en $x = x_0$. En forma adimensional, el número de Nusselt Nu^* apropiado es entonces

$$Nu^* = \frac{Q_s x_0}{hk_w \Delta T} = \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial s} \right|_{s=1}. \quad (3.7)$$

Los comportamientos asintóticos para valores pequeños y grandes de ε comparados con la unidad son (ver Apéndice F)

$$Nu^* \sim \frac{C}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad Nu^* \sim \frac{1.7046}{\varepsilon^{5/3}} + \frac{0.8769}{\varepsilon^{10/3}} + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

La figura 3.5 muestra al número de Nusselt Nu^* como función de ε , obtenido numéricamente de la ecuación (3.1). Los comportamientos asintóticos para valores pequeños y grandes de ε comparados con la unidad, dados por las ecuaciones (3.8), se muestran también en esta figura. La solución asintótica para valores pequeños de ε reproduce muy bien al Nu^* para valores de ε del orden unidad.

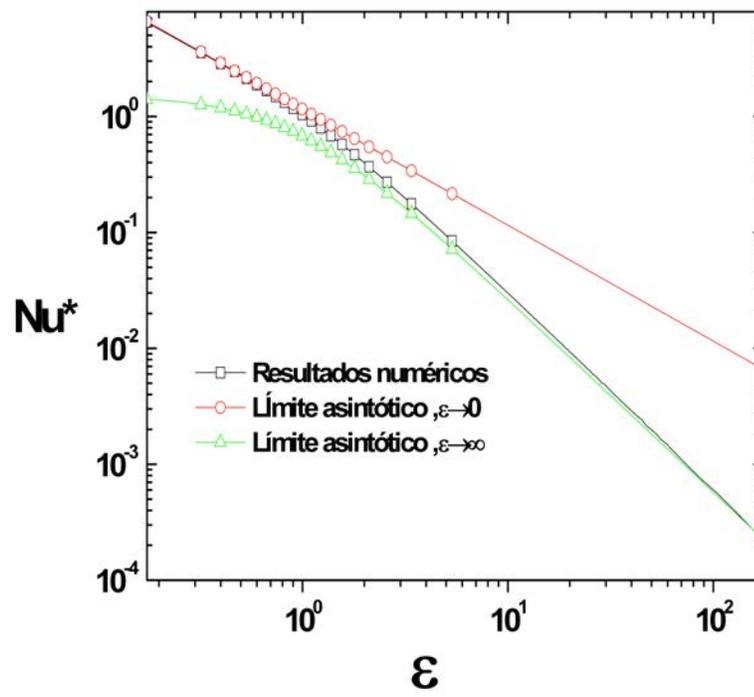


Figura 3.5: Número de Nusselt Nu^* como función de ε

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo, el proceso de transferencia de calor de un flujo laminar e incompresible sobre una placa con un salto de temperatura en su superficie ha sido analizado. Se introdujo un parámetro adimensional importante ε definido como la razón de la longitud de penetración térmica x_p entre la distancia desde el borde de ataque de la placa hasta la posición del salto de temperatura x_0 . Al variar este parámetro de 0 a ∞ se puede estudiar con el mismo formalismo, desde la transferencia de calor de una placa con un salto de temperatura en su superficie hasta una placa con temperatura de superficie constante. Se obtuvieron dos números de Nusselt diferentes, uno de ellos considerando el flujo de calor hacia el fluido Nu y el segundo considerando el flujo de calor en la interfaz entre los dos materiales que conforman a la placa Nu^* . El flujo de calor hacia el fluido se obtuvo en función del parámetro ε .

En conclusión, la contribución más importante de este trabajo fue demostrar que la transferencia de calor al fluido es finita en la posición donde

ocurre el salto de temperatura. Lo cual se logró considerando el intercambio de calor entre los dos materiales que conforman la placa usando propiedades térmicas finitas.

Apéndice A

Deducción del flujo de calor hacia el fluido

De la literatura, el problema de flujo de calor hacia el fluido para una placa plana con un salto en su temperatura, (Kakac and Yener, 1995) es

$$q_w = \frac{k}{x_0 s} \sqrt{\frac{U_\infty x_0 s}{\nu}} \frac{(f''(0) \text{Pr})^{1/3}}{4^{1/3}} \frac{(T_0 - T_\infty) H(s-1)}{(1 - s^{-3/4})^{1/3}}$$

donde s representa la coordenada normalizada $s = x/x_0$ y $H(t)$ corresponde a la función de Heaviside, $H(t) = 0$ para $t < 0$ y $H(t) = 1$ para $t > 0$. Debido a que nuestro problema considera propiedades físicas del flujo constantes, la ecuación de la energía es lineal en la temperatura, entonces el principio de superposición puede usarse para resolver el problema de superficies con temperatura variable. Esta superposición es conocida como el método de Duhamel.

A.1. Método de Duhamel

Consideremos nuevamente el problema de la placa plana con temperatura de superficie variable. La ecuación de capa límite de la energía con condiciones de frontera generales está dada por las ecuaciones (2.27) y (2.28). Es posible construir la solución de $T(x, y)$, si fraccionamos la temperatura de la superficie $T_w(x)$ en un número constante de pasos y después se superponen las soluciones para temperaturas de superficie constantes de cada paso. Notando la linealidad del problema escribimos $T(x, y)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 T(x, y) - T_\infty &= [T_w(0) - T_\infty] \phi(0, x, y) & (A.1) \\
 &+ [T_w(\xi_1) - T_w(0)] \phi(\xi_1, x, y) \\
 &+ [T_w(\xi_2) - T_w(\xi_1)] \phi(\xi_2, x, y) \\
 &+ \dots \\
 &+ [T_w(\xi_n) - T_w(\xi_{n-1})] \phi(\xi_n, x, y),
 \end{aligned}$$

donde $\phi(\xi, x, y)$ es la solución del siguiente problema auxiliar

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (A.2)$$

$$\phi = 0 \text{ para } x = \xi \quad (A.3)$$

$$\phi = 0 \text{ para } y \rightarrow \infty$$

$$\phi = 0 \text{ en } y = 0 \text{ para } 0 < x < \xi \text{ y } \phi = 1 \text{ para } x > \xi .$$

Introduciendo $\Delta T_{w,m} = T_w(\xi_m) - T_w(\xi_{m-1})$ escribimos la ecuación (A.1)

como

$$T(x, y) - T_\infty = [T_w(0) - T_\infty] \phi(0, x, y) + \sum_{m=1}^n \phi(\xi_m, x, y) \Delta T_{w,m}, \quad (\text{A.4})$$

la cual puede ser escrita de la siguiente forma

$$T(x, y) - T_\infty = [T_w(0) - T_\infty] \phi(0, x, y) + \sum_{m=1}^n \phi(\xi_m, x, y) \frac{\Delta T_{w,m}}{\Delta \xi_m} \Delta \xi_m, \quad (\text{A.5})$$

donde se introdujo $\Delta \xi_m = \xi_m - \xi_{m-1}$. Finalmente en el límite $n \rightarrow \infty$, la ecuación (A.5) se escribe como

$$T(x, y) - T_\infty = [T_w(0) - T_\infty] \phi(0, x, y) + \int_0^x \phi(\xi, x, y) \frac{dT_w}{d\xi} d\xi. \quad (\text{A.6})$$

Este resultado es conocido como la superposición integral de Duhamel. El flujo de calor de la placa al fluido es, de la ecuación (A.6)

$$q_w = [T_w(0) - T_\infty] h(0, x) + \int_0^x h(\xi, x) \frac{dT_w}{d\xi} d\xi \quad (\text{A.7})$$

donde $h(\xi, x)$ es el coeficiente local de transferencia de calor definido como

$$h(\xi, x) = -k \frac{\partial \phi(\xi, x, 0)}{\partial y} \quad (\text{A.8})$$

Asumiendo un polinomio de tercer grado para $\phi(\xi, x, y)$, el método integral reduce (A.8) a

$$h(\xi, x) = \frac{k}{x} Re_x^{1/2} \frac{[f''(0) Pr]^{1/3}}{4^{1/3}} \left[1 - (\xi/x)^{3/4} \right]^{-1/3} \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo la ecuación (A.9) en la (A.7), se obtiene el flujo de calor hacia el fluido

$$q_w = \frac{k}{x} Re_x^{1/2} \frac{[f''(0) Pr]^{1/3}}{4^{1/3}} \left[T_w(0) - T_\infty + \int_0^x \left[1 - (\xi/x)^{3/4} \right]^{-1/3} \frac{dT_w}{d\xi} d\xi \right] \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Discretización del número de Nusselt, Nu

Utilizando el cambio de coordenada $s = (z/z_f)^{4/3}$ en la ecuación (2.40), se obtiene

$$Nu = \left(\frac{z_f}{z}\right)^{2/3} \left[\theta_{wl} + \int_0^z \frac{d\theta_w}{dz'} \frac{1}{(1 - z'/z)^{1/3}} dz' \right] = z_f^{2/3} \left[\frac{9}{16z^{2/3}} \frac{d^2\theta_w}{dz^2} - \frac{3}{16z^{5/3}} \frac{d\theta_w}{dz} \right], (z < z_f)$$

$$Nu = \left(\frac{z_f}{z}\right)^{2/3} \left[\theta_{wl} + \int_0^{z_f} \frac{d\theta_w}{dz'} \frac{1}{(1 - z'/z)^{1/3}} dz' \right], (z > z_f). \quad (\text{B.1})$$

La discretización del Nu para el caso ($z < z_f$) es simple. Sólo se sustituye la discretización de las derivadas según el método de las diferencias finitas.

Para el caso ($z > z_f$) se discretiza el espacio z como

$$z = (k - 1)\Delta z \quad k = 1, \dots, n$$

$$z' = (i - 1)\Delta z' \quad i = 1, \dots, n,$$

entonces existe un $a = i$ tal que $z' = (a - 1)\Delta z' = z_f$, por lo que de la ecuación (B.1) la integral se discretiza como

$$\begin{aligned} \int_0^{z_f} \frac{d\theta_w}{dz'} \frac{1}{(1 - \frac{z'}{z})^{1/3}} dz' &= \sum_{i=1}^{a-1} \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta z'} \right) z \int_{\frac{i-1}{\Delta z}}^{\frac{i\Delta z}{z}} \frac{du}{(1-u)^{1/3}} = \quad (B.2) \\ &= \frac{3}{2} \frac{z}{\Delta z} \sum_{i=1}^{a-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \left[\left(1 - (i-1) \frac{\Delta z}{z} \right)^{2/3} \right] - \\ &= \frac{3}{2} \frac{z}{\Delta z} \sum_{i=1}^{a-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \left(1 - i \frac{\Delta z}{z} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

donde se ha aproximado la derivada como

$$\frac{d\theta}{dz'} \simeq \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta z'}, \quad (B.3)$$

y se ha utilizado la variable $u = z'/z$. Nótese que por comodidad se ha redefinido θ_w por θ . Sustituyendo en la ecuación (B.2) $w = z/\Delta z$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{z_f} \frac{d\theta}{dz'} \frac{1}{(1 - z'/z)^{1/3}} dz' &= \frac{3}{2} w \sum_{i=1}^{a-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \left[(1 - (i-1)/w)^{2/3} - (1 - i/w)^{2/3} \right] \\ &= \frac{3}{2} w^{1/3} \sum_{i=1}^{a-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \left[(w - i + 1)^{2/3} - (w - i)^{2/3} \right] \\ &= \frac{3}{2} w^{1/3} \sum_{i=1}^{a-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) b(w, i), \end{aligned}$$

donde se ha definido $b(w, i) = \left[(w - i + 1)^{2/3} - (w - i)^{2/3} \right]$. Finalmente la ecuación (B.1) queda discretizada de la forma siguiente

$$Nu(z, \epsilon) = z_f^{2/3} \left[\frac{\theta_{wl}}{z_f^{2/3}} + \frac{3}{2(z\Delta z)^{1/3}} \sum_{i=1}^{a-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) b(w, i) \right], \quad (z > z_f) \quad (\text{B.4})$$

Apéndice C

Discretización de la ecuación (3.1)

Tal como se hizo en al Apéndice anterior, se discretiza el espacio de la siguiente manera

$$\begin{aligned} z &= (k-1)\Delta z & (C.1) \\ z' &= (i-1)\Delta z'. \end{aligned}$$

Con ello, la integral toma la forma

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{d\theta}{dz'} \frac{1}{(1 - \frac{z'}{z})^{1/3}} dz' &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta z'} \int_{(i-1)\Delta z'}^{i\Delta z'} \frac{dz'}{(1 - \frac{z'}{z})^{1/3}} & (C.2) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)z}{\Delta z'} \int_{\frac{(i-1)}{k-1}}^{\frac{i}{k-1}} \frac{du}{(1-u)^{1/3}} \end{aligned}$$

donde se ha aproximado la derivada

$$\frac{d\theta}{dz'} \simeq \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta z'}$$

y propuesto el cambio de variable $z'/z = u$. Después de evaluar la integral en (C.2) como

$$\int_0^z \frac{d\theta}{dz'} \frac{1}{(1 - z'/z)^{1/3}} dz' = \frac{3(k-1)^{1/3}}{2} \sum_{i=1}^{k-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) [(k-i)^{2/3} - (k-1-i)^{2/3}], \quad (\text{C.3})$$

se define

$$\alpha(k, i) = (k-i)^{2/3} - (k-1-i)^{2/3}. \quad (\text{C.4})$$

Con (C.4), la ecuación (C.3) se reescribe como

$$\int_0^z \frac{d\theta}{dz'} \frac{1}{(1 - z'/z)^{1/3}} dz' = \frac{3}{2} (k-1)^{1/3} \sum_{i=1}^{k-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \alpha(k, i) \quad (\text{C.5})$$

Se sustituye la ecuación (C.5) en la ecuación (3.1), quedando ésta como

$$3z \frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{d\theta}{dz} = \frac{16z}{3} \left[\theta_{wl} + \frac{3}{2} (k-1)^{1/3} \sum_{i=1}^{k-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \alpha(k, i) \right] \quad (\text{C.6})$$

Discretizando el lado izquierdo de (C.6) según el método de diferencias finitas

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dz^2} &\simeq \frac{\theta_{y_k} - 2\theta_{k-1} + \theta_{k-2}}{\Delta z^2} \\ \frac{d\theta}{dz} &\simeq \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\Delta z} \end{aligned}$$

se obtiene

$$3z \left(\frac{\theta_k - 2\theta_{k-1} + \theta_{k-2}}{\Delta z^2} \right) - \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\Delta z} \right) = \frac{16z}{3} \left[\theta_{wl} + \frac{3}{2}(k-1)^{1/3} \sum_{i=1}^{k-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) \alpha(k, i) \right]$$

o como

$$3(k-1)(\theta_k - 2\theta_{k-1} + \theta_{k-2}) - (\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{16(k-1)\Delta z^2}{3} \left[\begin{array}{l} \theta_1 + \frac{3}{2}(k-2)^{1/3}(\theta_k - \theta_{k-1}) + \\ \frac{3}{2}(k-1)^{1/3} \sum_{i=1}^{k-2} (\theta_{i+1} - \theta_i) \alpha(k, i) \end{array} \right], \quad (C.7)$$

sujeta a las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \theta(\xi_f^{3/4}) &= 1 \\ \frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=0} &= 0 \\ \theta(0) &= \theta_{wl}, \end{aligned}$$

donde $\theta = \theta(z)$. Agrupando los términos semejantes de la ecuación (C.7), se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \theta_k [3(k-1) - 1 - 8\Delta z^2(k-2)^{4/3}] &= \theta_{k-1} [6(k-1) - 1 - 8\Delta z^2(k-1)^{4/3}] - \\ &\theta_{k-2} [3(k-1)] + \\ &\frac{16(k-1)\Delta z^2}{3} \left[\theta_1 + \frac{3}{2}(k-2)^{1/3}(\theta_k - \theta_{k-1}) \right] + \\ &\frac{16(k-1)\Delta z^2}{3} \left[\frac{3}{2}(k-1)^{1/3} \sum_{i=1}^{k-2} (\theta_{i+1} - \theta_i) \alpha(k, i) \right] \end{aligned}$$

donde $k = 3, \dots, n$.

Apéndice D

Solución asintótica $(\varepsilon \rightarrow \infty)$

para Nu .

El flujo de calor adimensional hacia el fluido para $(z \leq z_f)$ según (2.40) es

$$Nu = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\theta_{wl} + \int_{\theta_{wl}}^{\theta_w(s)} d\theta_w \frac{1}{(1 - (\xi'/s)^{3/4})^{1/3}} \right].$$

Sustituyendo el cambio de variable $s = (z/z_f)^{3/4}$ y la definición $\phi = \theta_w / \theta_{wl}$ se obtiene

$$Nu = \left(\frac{z_f}{z} \right)^{2/3} \theta_{wl} \left[1 + \int_0^z \frac{d\phi}{dz'} \frac{dz'}{(1 - (z'/z)^{3/4})^{1/3}} \right] \quad (\text{D.1})$$

Introduciendo en la ecuación (D.1) las soluciones asintóticas $(\varepsilon \rightarrow \infty)$ para θ_{wl} y ϕ dadas por las ecuaciones (3.5) y (3.6), respectivamente, se obtiene

$$Nu = \left(\frac{z_f}{z}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{4}{3}z_f^2 + \frac{62}{45}z_f^4\right) \left[1 + \frac{8}{3}z^2 B(2, 4/3) + \frac{8}{5}z^4 B(4, 4/3) + \dots\right] \quad (\text{D.2})$$

donde se introdujo la función beta, $B(x, y) = \int_0^z \frac{z'^{x-1} dz'}{(1-z'/z)^{y-1}}$. Finalmente expresando la ecuación (D.2) en función de $s = (z/z_f)^{3/4}$ y $\varepsilon = (3/4)^{1/3}/(z_f)^{6/5}$ se llega a la solución asintótica

$$Nu = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[1 - \frac{(4/3)^{4/9}}{\varepsilon^{5/3}} (1 - 2s^{3/2})\right], (\varepsilon \rightarrow \infty). \quad (\text{D.3})$$

Apéndice E

Solución asintótica ($\varepsilon \rightarrow \infty$) de la temperatura de superficie de la placa plana.

Se considera la ecuación

$$3z \frac{d^2 \theta_w}{dz^2} - \frac{d\theta_w}{dz} = \frac{16z}{3} \left[\theta_{wl} + \int_0^z \frac{d\theta_w}{dz'} \frac{1}{(1 - (z'/z)^{3/4})^{1/3}} dz' \right]. \quad (\text{E.1})$$

Definiendo $\phi = \theta_w / \theta_{wl}$, la ecuación (E.1) toma la forma

$$3z \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{d\phi}{dz} = \frac{16z}{3} \left[1 + \int_0^z \frac{d\phi}{dz'} \frac{1}{(1 - (z'/z)^{3/4})^{1/3}} dz' \right]. \quad (\text{E.2})$$

Se propone la solución asintótica para valores grandes de ε ($\varepsilon \rightarrow \infty$) de θ_w

$$\phi \sim 1 + bz^2 + cz^4 + \dots \quad (\text{E.3})$$

Al sustituir (E.3) en (E.2), se obtiene

$$3z[2b + 12cz^2 + \dots] - 2bz - 4cz^3 + \dots = \frac{16z}{3} + \frac{16z}{3} \int_0^z \frac{(2bz' - 4cz'^3)}{(1 - \frac{z'}{z})^{1/3}} dz' \quad (\text{E.4})$$

La ecuación anterior puede simplificarse a tercer orden en z , quedando

$$4bz + 32cz^3 = \frac{16z}{3} + \frac{32bz^3}{3} B(2, 4/3), \quad (\text{E.5})$$

donde se deduce que

$$b = \frac{4}{3}, \quad c = \frac{4}{9} B(2, 4/3) = \frac{2}{5}$$

Finalmente la solución asintótica para θ_w está dada por

$$\phi \sim 1 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{2}{5}z^4 + \dots \quad (\text{E.6})$$

Sustituyendo el cambio de variable $z = (3/4)^{5/18} s^{3/4} / \varepsilon^{5/6}$ en la relación (E.6), se obtiene

$$\frac{\theta_w}{\theta_{wl}} \sim 1 + \frac{1.1364}{\varepsilon^{5/3}} s^{3/2} + \frac{0.29056}{\varepsilon^{10/3}} s^3 + \dots \quad (\varepsilon \rightarrow \infty) \quad (\text{E.7})$$

Para el límite asintótico de θ_{wl} se nota que $\theta_w = 1$ en z_f , lo que implica de la relación (E.6)

$$\frac{1}{\theta_{wl}} \sim 1 + \frac{4}{3}z_f^2 + \frac{2}{5}z_f^4 + \dots \quad (\text{E.8})$$

Aplicando el binomio de Newton a la relación (E.8) se obtiene

$$\theta_{wl} \sim 1 - \frac{4}{3}z_f^2 + \frac{62}{45}z_f^4 + \dots$$

Finalmente sustituyendo $z_f = (3/4)^{5/18} / \varepsilon^{5/6}$ en la expresión anterior, ésta queda como

$$\theta_{wl} \sim 1 - \frac{1.1364}{\varepsilon^{5/3}} + \frac{1.0008}{\varepsilon^{10/3}} + \dots \quad (\text{E.9})$$

Apéndice F

Soluciones asintóticas para el Nusselt de la interfaz, Nu^*

De la ecuación (3.7) y utilizando el cambio de coordenada $r = (1 - s)/\varepsilon$, el número de Nusselt Nu^* está dado por

$$Nu^* = \frac{Q_s x_0}{hk_w \Delta T} = \frac{\partial \theta_w}{\partial s} \Big|_{s=1} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_w}{\partial r} \Big|_{r=0}. \quad (\text{F.1})$$

Para el caso $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene un comportamiento exponencial para la temperatura en la superficie de la placa, es decir, $\theta_w(r) = \exp(-Cr)$, donde $C \simeq 1.1995$. Al sustituirlo en la ecuación (F.1), se encuentra el comportamiento asintótico de Nu^* para $\varepsilon \rightarrow 0$, como

$$Nu^* \sim \frac{C}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{F.2})$$

El comportamiento asintótico $\varepsilon \rightarrow \infty$ lo obtenemos al sustituir la ecuación (3.5) en (F.1), donde se aproxima $\theta_{wl} \simeq 1$, quedando como

$$Nu^* \sim \frac{1.7046}{\varepsilon^{5/3}} + \frac{0.8769}{\varepsilon^{10/3}} + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow \infty \quad (\text{F.3})$$

Referencias

- Bejan, A. (1994). *Convection Heat Transfer*. Wile-Interscience.
- Blasius, H. (1908). Genschichten in flussigkeiten mit kleiner reibung. *Z. Math. Phys.*, 56:1–37.
- Brodkey, R. (1995). *The phenomena of fluid motions*. Dover.
- Chida, K. (2000). Surface temperature of a flat plate of finite thickness under conjugate laminar forced convection heat transfer condition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:639–642.
- Falkner, W. and Skan (1931). Solution of the boundary layer equations. *Phil. Mag.*, 12:865–896.
- Goldstein, S. (1939). A note on boundary layer equation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 35:338–340.
- Kakac, S. and Yener, Y. (1995). *Convective Heat Transfer*. CRS Press.
- Karvinen, R. (1978). Note on conjugate heat transfer in a flat plate. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 5:197–202.
- Lighthill, M. (1950). Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary. *Proceeding of the Royal Society*, pages 359–365.

- Luikov, A. (1974). Conjugate convective heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17:257–265.
- Payvar, P. (1977). Convective heat transfer to laminar flow over a plate of finite thickness. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20:431–433.
- Perelman, T. (1961). On conjugate problems of heat transfer. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 3:293–303.
- Polhausen, K. (1921). Der warmeaustausch zwischen festen korpern und flussigkeiten mit kleiner reibung und kleiner wärmeleitung. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1:115–121.
- Pop, I. and D.Ingham (1993). A note on conjugate forced convection boundary layer flow past a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36:3873–3876.
- Pozzy, A. and M.Lupo (1989). The coupling of conduction with forced convection over a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 23:1207–1214.
- Prandtl, L. (1904). Über flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung. *Proc. 3rd Int. Math. Congr. Heidelberg*, 1:484–491.
- Treviño, C. and F.Mendez (1997). The classical problem of convective heat transfer in laminar flow over a thin finite thickness plate with uniform temperature at the lower surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40:3577–3580.

-
- Vynnycky, M. and S.Kimura (1998). Forced convectio heat transfer from a flat plate:the conjugate problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41:45–59.
- Wang, T. (1997). The analysis of conjugate problems of conduction and convection for non-newtonian fluids past a flat plate. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 24:337–348.
- White, F. M. (1979). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Inc.