



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE LOS ESTADOS COHERENTES A
SISTEMAS CUÁNTICOS SIMPLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

P R E S E N T A

OSCAR SÁNCHEZ SANTOS

TUTOR

DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA



2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

APLICACIÓN DE LOS ESTADOS COHERENTES A SISTEMAS
CUÁNTICOS SIMPLES

OSCAR SÁNCHEZ SANTOS

Agradecimientos

Deseo expresar mis más grandes agradecimientos a los Doctores Ramón López Peña, Héctor Octavio Castaños, Rocío Jáuregui Renaud, José Antonio García Zenteno y Shahen Hacyan Saleryan por sus valiosos comentarios y correcciones de este trabajo, y a Enrique Martínez Miranda por sus tips en la escritura del mismo

Índice general

Introducción	v
1. Segunda Cuantización	1
1.1. Oscilador Armónico y Estados de Fock	1
1.2. Evolución del Valor Medio de un Operador	3
1.3. Segunda Cuantización	3
1.4. Cuantización del Campo Electromagnético	9
2. Estados Coherentes de $hw(1)$	11
2.1. Sistemas Mecánicos Discretos	11
2.2. Construcción de la Integral de trayectoria	12
2.3. Construcción de los Estados Coherentes de $hw(1)$	16
2.4. Integral de Trayectoria en la Representación $hw(1)$	20
2.5. Elementos de Matriz de los Operadores de $hw(1)$	22
3. Estados Coherentes $su(2)$	25
3.1. Propiedades de los Operadores \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_z	25
3.2. Estados Coherentes de $su(2)$	26
3.3. Representación de Jordan-Schwinger de $SU(2)$	31
3.4. Integral de Trayectoria en la Representación de $su(2)$	33
3.5. Elementos de Matriz de los Operadores de $su(2)$	35
4. Transiciones de Fase en el Modelo de LMG	37
4.1. Análisis Cuántico Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick	37
4.1.1. Caso Diagonal $\lambda = 0$	37
4.1.2. Caso General $\lambda \neq 0$	39
4.1.3. Estado Base y Primer Estado Excitado	41
4.2. Análisis Semiclásico	42
4.2.1. Puntos Críticos	44
4.2.2. Transiciones de Fase	48
4.2.3. Trayectorias	50
4.3. Comparación Entre el Análisis Cuántico y Clásico	53
5. Transiciones de Fase en el Modelo JC	57
5.1. Análisis Cuántico del Modelo de Jaynes-Cummings	57
5.2. Análisis Semiclásico	60
5.2.1. Puntos Críticos y Separatriz del Sistema	61
5.2.2. Transiciones de Fase	65

5.2.3. Equivalencia entre el Modelo LMG y JC	66
5.2.4. Ecuaciones de Movimiento	67
5.3. Comparación entre el Análisis Clásico y Cuántico	69
6. Conclusiones	71
A. Identidad de Baker-Campbell-Hausdorff	73
B. Relaciones de Ortogonalidad de las Funciones $D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma)$	75
C. Matriz Hessiana	77

Introducción

Las transiciones de fase cuánticas son cambios cualitativos en las propiedades de los estados base en sistemas de muchos cuerpos debido a las modificaciones o interacciones entre sus constituyentes o interacciones de los constituyentes con campos externos. Típicamente las transiciones ocurren cuando algún parámetro g del sistema hamiltoniano es variado a través del espacio de parámetros.

Los modelos de Jaynes-Cummings (JC) y Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) son modelos muy importantes en el campo de la óptica cuántica. El modelo JC describe la interacción de un átomo de dos niveles con una cavidad electromagnética cuantizada, que contiene un solo modo de oscilación. Este modelo describe algunos fenómenos tales como oscilaciones de Rabi e inversión atómica; también ha sido adoptado como modelo de investigación del espectro de emisión de átomos de dos niveles. Recientes experimentos con átomos de Rydberg altamente excitados con cavidades electromagnéticas han permitido investigar experimentalmente y confirmar las predicciones hechas por el modelo JC.

Desde el comienzo de la década de 1980, es sabido que el modelo LMG representa una aproximación a los modelos ferromagnéticos de Ising y que por medio de la aproximación semiclásica tiene transiciones de segundo orden en el límite de un gran número de partículas. Las transiciones de fase en el límite de un gran número de partículas han sido estudiadas recientemente. En general, se ha encontrado que los estados comprimidos es una condición necesaria pero no suficiente para el enredamiento cuántico, con diferentes predicciones de enredamiento en el átomo de dos niveles del modelo JC.

El propósito de esta tesis es presentar las aplicaciones de los estados coherentes de $su(2)$ y $hw(1)$ [12] para obtener transiciones de fase cuánticas en sistemas cuánticos simples que involucren operadores de ambas álgebras [7], además de mostrar sus relaciones con el caso clásico a través de aproximación semiclásica del valor esperado de la matriz hamiltoniana cuántica en la base de estados coherentes. Para ello en el primer capítulo se desarrolla el formalismo de segunda cuantización [10, 16, 27], que tiene como objetivo mostrar cómo escribir hamiltonianos cuánticos en términos de operadores bosónicos y fermiónicos. En este capítulo se incluye una de las primeras aplicaciones del formalismo de la segunda cuantización, se cuantiza el campo electromagnético [24]. En el segundo y tercer capítulos se construyen los estados coherentes de $hw(1)$ y $su(2)$. En el primer caso se dan las tres definiciones de estado coherente; se demuestra que estos son eigenvectores del operador de aniquilación. La construcción de los estados coherentes de $su(2)$ se hace de manera análoga a lo hecho con el álgebra $hw(1)$. Estas construcciones muestran que los estados coherentes forman una representación especial de la mecánica cuántica. Para ambos casos se construyen explícitamente las relaciones de completéz. Se construyen también algunos elementos de matriz de los operadores de las álgebras $hw(1)$ y $su(2)$ y productos entre ellos en la base de sus estados coherentes. Además se construyen sus corchetes de Poisson los cuales muestran que las ecuaciones de movimiento en la representación de estados coherentes se reducen al caso clásico.

En el cuarto capítulo se hace un análisis del modelo LMG tanto cuántico como clásico. En el análisis cuántico se obtienen las energías para el caso diagonal y no-diagonal; en el caso diagonal se grafican las energías, que muestran que para ciertos valores de los parámetros de control se producen

degeneraciones; se obtienen relaciones matemáticas para los valores exactos en los cuales se producen dichas degeneraciones. Para el caso no diagonal se grafican las energías para ciertos valores de los parámetros; estas gráficas muestran intersecciones y anti-intersecciones en los niveles de energía; se dan relaciones matemáticas para los valores en los cuales se producen las intersecciones y anti-intersecciones. Se grafican las superficies de energía para el estado base y el primer estado excitado. Estas gráficas muestran súbitos cambios en la pendiente para algunos valores de los parámetros; éstos cambios en la pendiente se muestra que tienen lugar aproximadamente en donde se producen las transiciones de fase en el modelo clásico.

Para el análisis clásico se utiliza el valor esperado de la matriz del hamiltoniano del modelo LMG en la base de estados coherentes de $su(2)$. Este valor esperado será llamado función de energía. El comportamiento dinámico en el caso clásico, está gobernado por la función de energía o función hamiltoniana. Para obtener el comportamiento dinámico se encuentra la separatriz del modelo clásico (recordemos que la separatriz en la mecánica clásica nos determina el carácter de estabilidad de los puntos de críticos); ésto se logra a través de la condición $Det\mathcal{H}_{ab} = 0$, donde H_{ab} es la matriz hessiana de la función de energía. Una vez obtenida la separatriz se determinan los grados de las transiciones de fase a través del criterio de Ehrenfest.

Se muestra que la separatriz clásica no sólo gobierna el comportamiento del modelo clásico sino también del modelo cuántico; es decir, en el caso cuántico la separatriz nos dice en qué valores de los parámetros del hamiltoniano existen las degeneraciones en la energía y en el caso clásico dónde se llevan a cabo los cambios de carácter de los puntos críticos así como sus transiciones de fase.

En el quinto capítulo se realiza el análisis hecho en el modelo LMG con el modelo JC. Se demuestra que en el modelo clásico existen transiciones de fase de primer orden y éstas se manifiestan a nivel cuántico en el cambio de espaciamientos de los niveles de energía próximos. Además se demuestra que el modelo JC es equivalente al modelo LMG. Por último en el sexto capítulo se dan las conclusiones.

Capítulo 1

Segunda Cuantización

En este capítulo introduciremos el método de segunda cuantización tanto para sistemas bosónicos como para sistemas de fermiones, para posteriormente aplicarlo a la cuantización del campo electromagnético.

1.1. Oscilador Armónico y Estados de Fock

El hamiltoniano de un conjunto de osciladores armónicos cuánticos [5] multidimensionales está dado por

$$\hat{H} = \sum_k \left[\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{m\omega_k^2 \hat{q}_k^2}{2} \right], \quad (1.1)$$

donde las variables \hat{p}_k y \hat{q}_k , son operadores cuánticos de momento y posición para cada una de las direcciones en el espacio. Este mismo hamiltoniano puede ser definido de un modo más conveniente, de tal manera que evitemos las constantes, si introducimos el siguiente par de operadores¹

$$\hat{q}_k = \sqrt{m\omega} q_k, \quad \hat{p}_k = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p_k, \quad (1.2)$$

los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = 1. \quad (1.3)$$

Introduciendo estos nuevos operadores en el hamiltoniano (1.1), este se reduce a

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\omega}{2} (\hat{q}_k^2 + \hat{p}_k^2). \quad (1.4)$$

Si construimos operadores con combinaciones lineales de los operadores (1.2), de la manera siguiente

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k + i\hat{p}_k), \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k - i\hat{p}_k), \quad (1.5)$$

¹En este trabajo \hbar la tomamos igual a uno.

los cuales llamaremos de creación y aniquilación respectivamente [5], que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_k] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0. \quad (1.6)$$

Utilizando la definición de los operadores de creación y aniquilación, junto con su relación de conmutación, el hamiltoniano (1.4) queda de la siguiente forma

$$\hat{H} = \sum_k \omega(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}). \quad (1.7)$$

Escribiendo $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \hat{N}_k$, el Hamiltoniano anterior se reduce a

$$\hat{H} = \sum_k \omega(\hat{N}_k + \frac{1}{2}). \quad (1.8)$$

El operador \hat{N}_k es llamado operador de número [24]. Los eigenestados del operador de número $|n_k\rangle$, son conocidos como estados de número o estados de Fock [5], y satisfacen la siguiente relación de eigenvalores

$$\hat{N}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle, \quad (1.9)$$

donde $n_k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ y $k = 1, 2, \dots, N$ la dirección en el espacio, de cada uno de los operadores.

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle, \quad (1.10)$$

y el estado base (o estado del vacío), está definido como

$$|0\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes \dots \otimes |0_N\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = 0. \quad (1.11)$$

La energía por último (valor esperado del hamiltoniano (1.7)) toma la forma

$$E = \langle n_k | \hat{H} | n_k \rangle = \omega \sum_{k=1}^N (n_k + \frac{1}{2}). \quad (1.12)$$

De la aplicación de los operadores de creación y de aniquilación a los estados de número, se obtiene

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle. \quad (1.13)$$

Los estados excitados pueden ser obtenidos aplicando n veces el operador de creación al estado del vacío

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = \prod_k \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{(n_k)!}} |0\rangle. \quad (1.14)$$

Los estados de Fock son ortonormales

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{k,k}, \quad (1.15)$$

y forman una base del espacio, para cada ω_k

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1_k. \quad (1.16)$$

1.2. Evolución del Valor Medio de un Operador

Sea \hat{A} un operador en algún espacio de Hilbert. Si el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema está normalizado, el valor medio del operador \hat{A} en el instante t es

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle. \quad (1.17)$$

Vemos ahora que $\langle \hat{A} \rangle(t)$ depende del tiempo, a través de $|\psi(t)\rangle$, el cual involucra el tiempo de acuerdo con la ecuación de Schrödinger [5], como

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (1.18)$$

Sin embargo, el operador \hat{A} puede depender explícitamente del tiempo, causando una variación adicional de $\langle \hat{A} \rangle(t)$ con respecto al tiempo.

Para obtener la relación que nos diga como evoluciona en el tiempo un operador y cómo esta ecuación se relaciona con la mecánica clásica, debemos proceder de la siguiente manera.

Derivemos $\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ con respecto a t , de manera que obtenemos

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \left[\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right] \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{A}(t) \left[\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle \right] + \langle \psi(t) | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \psi(t) \rangle. \quad (1.19)$$

Si despejamos $\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$ de la ecuación (1.18), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i} \langle [\hat{A}, \hat{H}(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle. \quad (1.20)$$

Otra manera de obtener la evolución temporal de un operador, es en el esquema de Heisenberg; en el cual los operadores tienen dependencia temporal de la forma

$$A^{(H)}(t) = U^\dagger(t) A^{(S)} U(t), \quad (1.21)$$

donde $U(t)$ es un operador unitario dependiente del tiempo y donde los super-índices nos dicen que estamos pasando de la representación de Schrödinger a la representación de Heisenberg.

Como un ejemplo consideremos el hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional cuántico. Introduzcamos el hamiltoniano en la ecuación (1.20). Una vez hecho esto se obtienen un par de ecuaciones

$$\frac{d\langle \hat{a} \rangle}{dt} = -i\omega \langle \hat{a} \rangle, \quad \frac{d\langle \hat{a} \rangle^\dagger}{dt} = -i\omega \langle \hat{a} \rangle^\dagger, \quad (1.22)$$

que tienen las siguientes soluciones:

$$\langle \hat{a} \rangle(t) = \langle \hat{a} \rangle(0) e^{-i\omega t}, \quad \langle \hat{a} \rangle^\dagger(t) = \langle \hat{a} \rangle^\dagger(0) e^{i\omega t}. \quad (1.23)$$

1.3. Segunda Cuantización

Consideremos un conjunto $\psi_1(\mathbf{r}_1), \psi_2(\mathbf{r}_2), \dots$ ortogonal y completo de funciones de onda de estados estacionarios de una sola partícula. Éstas pueden ser estados de una partícula en algún campo externo arbitrario, pero usualmente son tan solo ondas planas. Las funciones de onda de partícula libre tienen valores definidos de momento (y de proyección de espín). A fin de tener un espectro de estados discreto, debemos considerar el movimiento de las partículas en una región muy

grande pero finita, para la cual los eigenvalores de las componentes del momento formen una serie discreta, los intervalos serán inversamente proporcionales a las dimensiones lineales de la región y tienden a cero al incrementar ésta (condiciones de frontera).

Consideremos de una manera puramente formal un sistema de n partículas que no interactúan entre sí. Cada partícula se halla entonces en uno de los estados ψ_1, ψ_2, \dots . Sea n_i el número de partículas que se encuentran en el estado ψ_i . Este número, claro está, puede ser igual a cero. Dados los números n_1, n_2, \dots (es evidente que $\sum n_i = n$) determina un estado del sistema en conjunto; lo representaremos mediante los sub-índices en la función de onda en el sistema $\Psi_{n_1, n_2, \dots}$. Se trata de construir un formalismo matemático en el que los números de ocupación de los estados, n_1, n_2, \dots (y no las coordenadas de las partículas) representan el papel de las variables independientes [16].

La función $\Psi_{n_1, n_2, \dots}$ es la suma simetrizada (las partículas satisfacen la estadística de Bose) de productos de funciones ψ_i . Escribámosla en la forma:

$$\Psi_{n_1, n_2, \dots} = \sqrt{\frac{(n_1! n_2! \dots)}{n!}} \sum \psi_{p_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{p_2}(\mathbf{r}_2) \dots \psi_{p_n}(\mathbf{r}_n). \quad (1.24)$$

p_1, p_2, \dots, p_n son aquí los números que fijan los estados en los que se encuentran las diferentes partículas, y la suma se extiende sobre todas las permutaciones de los índices p_1, p_2, \dots, p_n . Los números n_i indican cuantos de los índices p_1, p_2, \dots, p_n son considerados. El número total de términos en la suma anterior es $n!/n_1!n_2! \dots$

El factor constante en la suma se ha elegido de tal manera que la función resulte normalizada (en virtud de la ortogonalidad de las funciones de onda).

Sea ahora $\hat{A}_\alpha^{(1)}$ el operador de alguna cantidad que pertenece a la α -ésima partícula y que actúa sólo en las variables de esa partícula. Introduzcamos el operador, simétrico respecto a todas las partículas

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_\alpha \hat{A}_\alpha^{(1)}. \quad (1.25)$$

(la suma se extiende sobre todas las partículas). Antes que nada, es fácil ver que los elementos de matriz serán diferentes de cero sólo para las transiciones las cuales dejen invariantes los números de ocupación n_1, n_2, \dots (elementos de la diagonal) y para transiciones donde uno de estos números sea incrementado y otro disminuido en una unidad. Entonces cada uno de los operadores $\hat{A}_\alpha^{(1)}$ actúa sólo en una de las funciones del producto $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_1$, sus elementos de matriz sólo pueden ser diferentes de cero para las transiciones en las cuales los estados de una sola partícula son cambiados, es decir, que el número de partículas en algún estado es disminuido en una unidad, y en el otro estado es incrementado en una unidad. El cálculo de los elementos de matriz es en principio muy simple. Los elementos no diagonales están dados por

$$\hat{F}_{n_i-1, n_k}^{(1)n_i, n_k-1} = \hat{A}_{ik}^{(1)} \sqrt{(n_i n_k)}, \quad (1.26)$$

y los elementos de matriz de $\hat{A}_{ik}^{(1)}$ por

$$\hat{A}_{ik}^{(1)} = \int \psi_i^*(\mathbf{r}_i) \hat{A}^{(1)} \psi_k(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}, \quad (1.27)$$

entonces los operadores $\hat{A}_\alpha^{(1)}$ difieren sólo en las etiquetas que poseen las variables, en las cuales actúan. Los elementos de la diagonal de $F^{(1)}$ son el valor medio de la cantidad $F^{(1)}$ en los estados $\psi_{n_1 n_2 \dots}$, por lo que

$$\overline{\hat{F}^{(1)}} = \sum_i \hat{A}_{ii}^{(1)} n_i. \quad (1.28)$$

La matriz anterior, nos sugiere, por tener en ella el número n_i la utilización de los operadores de creación y aniquilación. Pero primero hacemos la identificación siguiente entre las funciones y los estados, de manera que podamos utilizar las propiedades de los operadores de aniquilación y creación

$$\Psi_{n_1, n_2, \dots} \rightarrow |n_1, n_2, \dots\rangle, \quad (1.29)$$

hecha ésta identificación los operadores de ascenso y descenso satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{ik} \quad \text{y} \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_k] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0, \quad (1.30)$$

y actúan sobre los estados como

$$\hat{a}_i |n_1, n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, \quad (1.31)$$

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle. \quad (1.32)$$

De aquí se tiene

$$\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger = \hat{N}_i + 1, \quad (1.33)$$

de manera similar

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = \hat{N}_i. \quad (1.34)$$

De las relaciones anteriores obtenemos

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_{i,k} \hat{A}_{ik}^{(1)} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k. \quad (1.35)$$

Este resultado puede ser generalizado a operadores más generales, por ejemplo,

$$\hat{F}^{(2)} = \sum_{a>b} \hat{A}_{ab}^{(2)}, \quad (1.36)$$

donde $\hat{A}_{ab}^{(2)}$ es el operador de cantidades físicas pertenecientes a dos partículas, por lo que actúa en las variables r_a y r_b . Cálculos similares nos muestran que este operador puede ser expresado en términos de los operadores $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$, por

$$\hat{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \langle ik | \hat{A}^{(2)} | lm \rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_m, \quad (1.37)$$

donde

$$\langle ik | \hat{A}^{(2)} | lm \rangle = \int \int \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_k^*(\mathbf{r}_2) \hat{A}^{(2)} \psi_l(\mathbf{r}_1) \psi_m(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (1.38)$$

Estas ecuaciones pueden ser utilizadas para expresar, en términos de los operadores de creación y aniquilación, el hamiltoniano de algún sistema físico de N partículas idénticas interactuantes. El hamiltoniano de tal sistema es, desde luego, simétrico con respecto a todas las partículas. En la aproximación no relativista, puede ser expresado de la siguiente manera

$$\hat{H} = \sum_a \hat{H}_a^{(1)} + \sum_{a>b} U^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + \sum_{a>b>c} U^{(3)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_c) + \dots, \quad (1.39)$$

donde $\hat{H}_a^{(1)}$ es la parte del hamiltoniano la cual depende sólo de las coordenadas de la a -ésima partícula

$$\hat{H}_a^{(1)} = -\frac{1}{2m}\Delta_a + U^{(1)}(\mathbf{r}_a), \quad (1.40)$$

y $U^{(1)}(\mathbf{r}_a)$ es la energía potencial de una sola partícula. Los términos restantes son las interacciones entre las partículas. Entonces este hamiltoniano puede ser escrito en términos de las ecuaciones (1.35) y (1.37), de la manera siguiente

$$\hat{H} = \sum_{i,k} H^{(1)}_{ik} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \langle ik|U^{(2)}|lm\rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_m + \dots \quad (1.41)$$

Para un sistema en el cual no hay interacción, el primer término es el que sobrevive, por lo que se tiene

$$\hat{H} = \sum_{i,k} H^{(1)}_{ik} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k. \quad (1.42)$$

Si las funciones de onda ψ_i son funciones de onda del hamiltoniano $\hat{H}^{(1)}$ de una partícula individual, la matriz $H^{(1)}_{ii}$ es diagonal, y se expresa como

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i. \quad (1.43)$$

Si reemplazamos los operadores de creación y aniquilación por el operador de número, tenemos

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i. \quad (1.44)$$

La relaciones (1.37) y (1.38), nos muestran que podemos escribir de una manera más compacta todas las ecuaciones anteriores. Definiendo nuevos operadores

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_i \psi_i(\mathbf{r}) \hat{a}_i, \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \hat{a}_i^\dagger, \quad (1.45)$$

donde las variables \mathbf{r}_i son consideradas como parámetros, y las funciones de onda satisfacen

$$\sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.46)$$

las relaciones de conmutación que siguen nuestros nuevos operadores son las siguientes:

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')] = 0, \quad [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.47)$$

Y nuestros operadores de segunda cuantización pueden ser escritos en términos de éstos nuevos operadores en la forma

$$\hat{F}^{(1)} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}^{(1)} \hat{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.48)$$

$$\hat{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \int \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{A}^{(2)} \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (1.49)$$

y el hamiltoniano

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})H^{(1)}\hat{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')U^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r}d\mathbf{r}' + \dots \quad (1.50)$$

El operador $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})$, es muy parecido a $\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$, el cual determina la densidad de probabilidad para una partícula en un estado con una función de onda ψ . La integral

$$\hat{N} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad (1.51)$$

en el formalismo de la segunda cuantización representa el número total de partículas en el sistema.

Ahora procedamos a repetir lo que hicimos para el caso de sistemas de bosones para un sistema de fermiones [5].

El principio de exclusión de Pauli [5] nos dice que un sistema de fermiones indistinguibles debe ser descrito por una función de onda antisimétrica ante el intercambio de un par de coordenadas de la partícula, es decir, se debe cumplir

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_m, \dots, \mathbf{r}_N) = -\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (1.52)$$

Ahora sean $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ soluciones de la ecuación de Schrödinger, para una sola partícula. Podemos utilizar el producto tensorial para construir las funciones de onda (1.52), sólo que este producto no satisface la condición de antisimetría. Podemos obtener una función de onda que satisfaga la condición de antisimetría, aplicando el operador de permutación P , el cual intercambia un par de coordenadas, es decir,

$$\Psi = (N!)^{-\frac{1}{2}} \sum_P (-1)^P \psi_1(P\mathbf{r}_1) \cdot \psi_2(P\mathbf{r}_2) \cdots \psi_N(P\mathbf{r}_N), \quad (1.53)$$

donde la suma corre sobre todas las permutaciones $N!$ de las coordenadas con signo ± 1 de acuerdo si la permutación es par o impar. Sin embargo, queremos construir una notación semejante, tal como en el caso de bosones. Ésto lo podemos lograr utilizando los números de ocupación $|n_1, n_2, \dots\rangle$, de manera que podemos tener n_1 partículas en el estado ψ_1 , n_2 partículas en el estado ψ_2 , etc. De manera que, nuestras funciones de onda las podemos identificar en términos de la nueva notación, como

$$|1_1, 0_2, \dots\rangle \rightarrow \psi_1(\mathbf{r}_1), \quad (1.54)$$

$$|1_1, 1_2, \dots\rangle \rightarrow \frac{1}{2} \{ \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1) \}. \quad (1.55)$$

Todo lo que hemos hecho para bosones, lo podemos hacer para en el caso de fermiones, sólo que en este caso debemos tratar con funciones de onda antisimétricas. En la teoría de bosones los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger tienen la propiedad de cambiar los números de ocupación de los estados. Definamos un operador \hat{b}_k^\dagger , que crea una partícula en el k -ésimo estado, es decir,

$$\hat{b}_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle, \quad (1.56)$$

similarmente el operador \hat{b}_k destruye una partícula en el k -ésimo estado

$$\hat{b}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle. \quad (1.57)$$

Para que el estado del fermión que realmente pueda existir se tiene que cumplir $n_k = 0$ o $n_k = 1$. Para que ésto se cumpla se tiene que satisfacer

$$(\hat{b}_k^\dagger)^2 = 0 \quad \text{y} \quad (\hat{b}_k)^2 = 0. \quad (1.58)$$

Una de las más útiles cosas que podemos hacer con los operadores bosónicos es construir a partir del estado de vacío los estados excitados. Lo mismo podemos hacer con los operadores fermiónicos, es decir,

$$\hat{b}_k^\dagger |0\rangle = |1_k\rangle \rightarrow \psi_k(\mathbf{r}), \quad (1.59)$$

$$\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger |0\rangle = -\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger |0\rangle = |1_{k'}, 1_k\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_k(\mathbf{r}_1) \psi_{k'}(\mathbf{r}_2) - \psi_k(\mathbf{r}_2) \psi_{k'}(\mathbf{r}_1) \}. \quad (1.60)$$

Por lo tanto su suma

$$(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k^\dagger + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger) |0\rangle = 0, \quad (1.61)$$

lo cual implica

$$\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k^\dagger + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger = 0 \quad \text{si } k \neq k', \quad (1.62)$$

o escrita en términos de anticonmutadores

$$\{\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger\} = 0. \quad (1.63)$$

Ahora, si involucramos el operador \hat{b} tenemos

$$\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k |0_k\rangle = 0; \quad \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger |0_k\rangle = |0_k\rangle, \quad (1.64)$$

$$\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k |1_k\rangle = |1_k\rangle; \quad \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger |1_k\rangle = 0. \quad (1.65)$$

Si las sumamos obtenemos

$$\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger = 1. \quad (1.66)$$

Por lo tanto, de manera más general tenemos las relaciones de anticonmutación:

$$\{\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'}. \quad (1.67)$$

Podemos definir (1.56) y (1.57) como

$$\hat{b}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \quad \text{y} \quad \hat{b}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{(1 - n_k)} |n_k + 1\rangle. \quad (1.68)$$

Con las relaciones de conmutación ya definidas podemos escribir las expansiones (1.52) como

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_i \psi_i(\mathbf{r}) \hat{b}_i, \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}) \hat{b}_i^\dagger, \quad (1.69)$$

que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')\} = \{\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \text{y} \quad \{\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.70)$$

El primer término del hamiltoniano (1.42) puede ser escrito en términos de los nuevos operadores como

$$H = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{H}^{(1)} \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger \epsilon_k. \quad (1.71)$$

1.4. Cuantización del Campo Electromagnético

Ahora discutamos los campos electromagnéticos, dentro del marco de la electrodinámica clásica, para posteriormente poder aplicar el formalismo de la segunda cuantización desarrollado en la sección anterior a la cuantización del campo electromagnético [24]. Tales campos están gobernados por las ecuaciones de Maxwell [13], que para el caso del vacío tienen la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (1.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.73)$$

En la norma de Coulomb los campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} pueden ser determinados de un vector potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, de la siguiente manera

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.74)$$

Con la condición de norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ y la sustitución de la primera expresión de las ecuaciones (1.74) en la segunda de las ecuaciones (1.72), encontramos que \mathbf{A} satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.75)$$

la cual en un instante dado $t = 0$, la podemos expandir en una serie de Fourier. Asumiendo las condiciones periódicas para \mathbf{A} , encerrada en una caja, de lado $L = (V)^{1/3}$, tenemos

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\alpha=1,2} (c_k(0) \mathbf{u}_{k,\alpha}(x) + c_k^*(0) \mathbf{u}_{k,\alpha}^*(x)), \quad (1.76)$$

donde

$$\mathbf{u}_{k,\alpha}(x) = \epsilon^{(\alpha)} e^{ik \cdot x}, \quad (1.77)$$

y $\epsilon^{(\alpha)}$ es llamado vector lineal de polarización, el cual es un vector unitario y perpendicular a la dirección de k . Dado k , elegimos $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ de tal manera que $(\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, k/|k|)$ forme una triada de vectores unitarios mutuamente ortogonales. Nótese que $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ y k , no van en la dirección de los ejes x , y y z , sino que sólo son mutuamente ortogonales. Entonces $\epsilon^{(\alpha)}$ es perpendicular a k , por lo que la condición de transversalidad está garantizada. Las componentes de Fourier $u_{k,\alpha}$, satisfacen

$$\frac{1}{V} \int d^3x \mathbf{u}_{k,\alpha}^* \cdot \mathbf{u}_{k',\alpha'} = \delta_{k,k'} \delta_{\alpha,\alpha'}, \quad (1.78)$$

$$\frac{1}{V} \int d^3x \mathbf{u}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{k',\alpha'}^* = \delta_{k,-k'} \delta_{\alpha,\alpha'}. \quad (1.79)$$

De las condiciones en la frontera, tenemos

$$k_x, k_y, k_z = 2n\pi/L, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.80)$$

Para obtener $\mathbf{A}(x, t)$ para $t \neq 0$, simplemente reemplazamos $c_k(0)$ y $c_k^*(0)$ por

$$c_k(t) = c_k(0) e^{-i\omega t}, \quad c_k^*(t) = c_k^*(0) e^{i\omega t}, \quad (1.81)$$

donde

$$\omega = |k|c. \quad (1.82)$$

Si reemplazamos las ecuaciones anteriores en (1.76), se obtiene

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\alpha=1,2} (c_k(0)\epsilon^{(\alpha)} e^{i(k \cdot x - \omega t)} + c_k^*(0)\epsilon^{(\alpha)} e^{-i(k \cdot x - \omega t)}), \quad (1.83)$$

la cual representa un conjunto de osciladores cuya amplitud es $c_k(0)e^{ik \cdot x}$. Para cada punto del espacio se trata así de osciladores con amplitud instantánea $c_k(t) = c_k(0)e^{-i\omega_k t}$ que satisfacen la ecuación $\frac{d^2 c_k}{dt^2} = -\omega^2 c_k$, es decir, descritos precisamente como osciladores armónicos clásicos. La cuantización de estos osciladores se obtiene transformando las amplitudes c_k y c_k^* en operadores de creación y aniquilación, respectivamente, de manera que haciendo este cambio se obtiene el vector potencial en el contexto de la segunda cuantización siguiente

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{c^2}{2\omega_k}} [\hat{a}_k(0)\epsilon^{(\alpha)} e^{i(k \cdot x - \omega t)} + \hat{a}_k^\dagger(0)\epsilon^{(\alpha)} e^{-i(k \cdot x - \omega t)}]. \quad (1.84)$$

El hamiltoniano del campo electromagnético en el vacío está dado por

$$H = \frac{1}{2} \int (|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2) d^3x. \quad (1.85)$$

Escribiéndolo en términos de las ecuaciones (1.74) se tiene

$$H = \frac{1}{2} \int (|\nabla \times \mathbf{A}|^2 + |(1/c)(\partial \mathbf{A}/\partial t)|^2) d^3x. \quad (1.86)$$

Introduciendo la expansión (1.84) en el hamiltoniano anterior, se tiene lo siguiente

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_k \omega (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger) = \sum_k \omega (\hat{N}_k + \frac{1}{2}), \quad (1.87)$$

donde se han utilizado las condiciones de ortogonalidad y condiciones de frontera.

Capítulo 2

Estados Coherentes de $\hbar\omega(1)$

En este capítulo se construyen los estados coherentes del álgebra $\hbar\omega(1)$. La construcción parte desde la definición de operador de desplazamiento, el cual al ser aplicado al estado de vacío se tiene la primera definición de estado coherente. Al final de esta construcción se demuestra que los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación. Además se demuestra que en la representación de estados coherentes las ecuaciones de movimiento se reducen al límite clásico. Se construyen algunos elementos de matriz de los operadores del álgebra $\hbar\omega(1)$.

2.1. Sistemas Mecánicos Discretos

El comportamiento dinámico de una sola partícula, o más precisamente, una masa puntual en mecánica clásica puede ser deducida de las ecuaciones de movimiento de Lagrange [9]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.1)$$

las cuales son derivables del principio variacional de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0, \quad (2.2)$$

donde S denota la acción, y L la lagrangiana (la cual asumimos que no depende explícitamente del tiempo). La lagrangiana está dada por la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V .

$$L = T - V. \quad (2.3)$$

Además la variación (2.2) es tomada sobre una trayectoria arbitraria $q_i(t)$, tal que δq_i , es cero en t_1 y t_2 . El hamiltoniano está dado por la transformación de Legendre

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (2.4)$$

donde p_i , la variable canónica conjugada de q_i , se define como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.5)$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.6)$$

Ahora consideremos una cierta función que depende de las variables canónicas y del tiempo $u(q, p, t)$. Tomemos la derivada total

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Si introducimos las ecuaciones (2.6) en (2.7), éstas quedan de la siguiente forma

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Escribimos los dos primeros términos de la siguiente manera:

$$\{u, H\} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.9)$$

los cuales son conocidos como corchetes de Poisson. Por lo tanto, la ecuación (2.8) en términos de los corchetes de Poisson queda como

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.6) también pueden ser escritas en términos de los corchetes de Poisson [9], es decir,

$$\dot{q}_i = \{q, H\} \quad \text{y} \quad \dot{p}_i = \{p, H\}. \quad (2.11)$$

2.2. Construcción de la Integral de trayectoria

Consideremos una sola partícula, descrita por un hamiltoniano H . Sea $|\psi(t)\rangle$ el estado dependiente del tiempo de nuestro sistema de una partícula. La densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en el punto (q, t) es $|\psi(q, t)|^2$, donde $\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle$ es la función de onda que representa el estado $|\psi(t)\rangle$ en la base de eigenvectores del operador de posición $|q\rangle$.

El estado dependiente del tiempo $|\psi(t)\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.12)$$

la cual tiene por solución

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.13)$$

donde hemos asumido que el hamiltoniano no depende del tiempo. En la base de los eigenvectores del operador de posición, esta ecuación se transforma a

$$\begin{aligned} \langle q | \psi(t) \rangle &= \langle q | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | \psi(t_0) \rangle \\ &= \int dq_1 \langle q | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | q_1 \rangle \langle q_1 | \psi(t_0) \rangle = \int dq_1 G(q, t; q_1, t_0) \psi(q_1, t_0), \end{aligned} \quad (2.14)$$

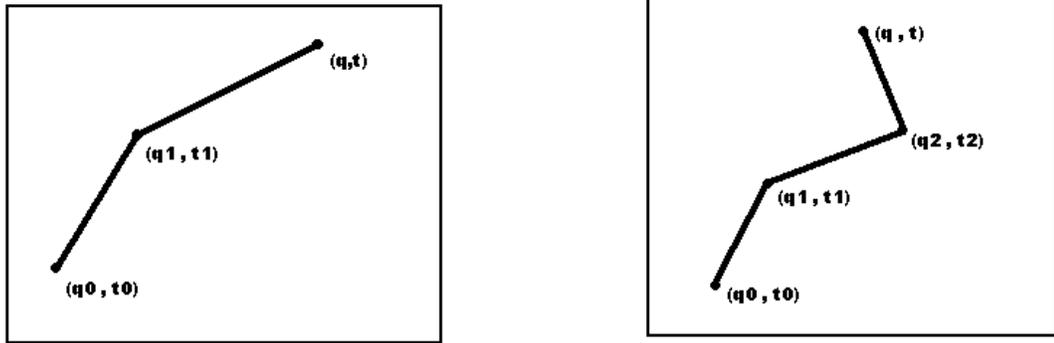


Figura 2.1: Propagación de una sola partícula. En la figura del lado izquierdo la trayectoria es segmentada en dos partes. Y la trayectoria lado derecho es segmentada en tres partes.

donde los eigenvectores del operador posición forman una base completa, es decir,

$$1 = \int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1|. \quad (2.15)$$

El operador de evolución temporal, $e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$, involucra al sistema de t_0 a t , es decir, propaga el estado del tiempo t_0 al tiempo t . La función de Green para esta ecuación de Schrödinger, $G(q, t; q_1, t_0)$, es el elemento de matriz del operador de evolución temporal en la base $|q\rangle$. Feynman descubrió que $G(q, t; q_1, t_0)$ puede ser representada por una integral de trayectoria [10, 11].

Supongamos que nuestra partícula está localizada en q_0 en el tiempo t_0 , luego $|\psi(t_0)\rangle = |q_0\rangle$, es decir, $\psi(q_1, t_0) = \langle q_1 | \psi(t_0) \rangle = \langle q_1 | q_0 \rangle = \delta(q_1 - q_0)$. La función de onda en el tiempo t es $\psi(q, t)$, la amplitud de probabilidad de una partícula que va de (q_0, t_0) a (q, t) .

De la ecuación (2.14) podemos ver que

$$\psi(q, t) = \int dq_1 G(q, t; q_1, t_0) \delta(q_1 - q_0) = G(q, t; q_0, t_0), \quad (2.16)$$

por lo tanto, $G(q, t; q_0, t_0)$ representa la amplitud de probabilidad, de una partícula que inicia en (q_0, t_0) y llega al punto (q, t) . No sabemos cómo se comporta la partícula al ir de (q_0, t_0) a (q, t) . Tampoco sabemos qué trayectoria toma. En efecto, no sabemos cuál trayectoria toma, y la mecánica cuántica nos dice que puede ser cualquiera. La amplitud total $G(q, t; q_0, t_0)$, será la suma de todas las amplitudes que representan el proceso físico. La amplitud total $G(q, t; q_0, t_0)$ será la suma sobre las trayectorias, pesando cada trayectoria por su amplitud de probabilidad. La suma sobre todas las trayectorias es a lo que llamaremos integral de trayectoria.

Podemos construir esta integral de trayectoria y determinar el peso o amplitud de cada trayectoria, dividiendo la trayectoria en una serie de pequeñas trayectorias. Primero comencemos por dividir la trayectoria que va de (q_0, t_0) a (q, t) en dos secciones como se muestra en la Figura 2.1, lado izquierdo. La amplitud $G(q, t; q_0, t_0)$ que va de (q_0, t_0) a (q, t) puede ser escrita en términos de la amplitud que va de (q_0, t_0) a (q_1, t_1) y la amplitud que va de (q_1, t_1) a (q, t) como

$$G(q, t; q_0, t_0) = \int dq_1 G(q, t; q_1, t_1) G(q_1, t_1; q_0, t_0), \quad (2.17)$$

donde $t_0 < t_1 < t$. El resultado de la ecuación (2.17) se sigue del hecho

$$G(q, t, q_0, t_0) = \langle q | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | q_0 \rangle = \langle q | e^{-i\hat{H}(t-t_1)} e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} | q_0 \rangle$$

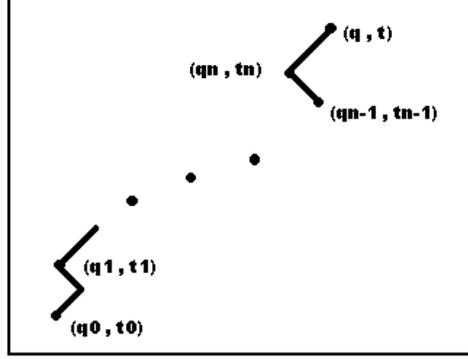


Figura 2.2: Propagación de una sola partícula, el proceso es partido en $N + 1$ subtrayectorias. Como la integración se toma sobre todos los puntos intermedios (q_i, t_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, $t_i < t_{i+1}$, sumamos sobre todas las subtrayectorias que conectan a (q_0, t_0) con (q, t) .

$$\begin{aligned}
 &= \int dq_1 \langle q | e^{-i\hat{H}(t-t_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} | q_0 \rangle \\
 &= \int dq_1 G(q, t; q_1, t_1) G(q_1, t_1; q_0, t_0),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

podemos considerar el producto $G(q, t; q_1, t_1)G(q_1, t_1; q_0, t_0)$ como la amplitud de probabilidad de que la partícula, que en su trayectoria de (q, t) a (q_0, t_0) pase por (q_1, t_1) . Podemos repetir el mismo procedimiento eligiendo t de tal manera que $t > t_2 > t_1 > t_0$, e insertando $\int dq_2 |q_2\rangle \langle q_2|$ dentro de $\langle q | e^{-i\hat{H}(t-t_1)} | q_1 \rangle$, y dividir la trayectoria en tres partes como se muestra en la Figura 2.1, lado derecho, de manera que

$$G(q, t; q_0, t_0) = \int \int dq_1 dq_2 G(q, t; q_2, t_2) G(q_2, t_2; q_1, t_1) G(q_1, t_1; q_0, t_0), \tag{2.19}$$

e igual que la relación anterior, $G(q, t; q_2, t_2)G(q_2, t_2; q_1, t_1)G(q_1, t_1; q_0, t_0)$, es la amplitud de probabilidad de que la partícula que pasa por (q_1, t_1) y (q_2, t_2) en su camino de (q, t) a (q_0, t_0) . Repitamos el procedimiento anterior, para muchas subtrayectorias, del intervalo t_0 a t tal y como se muestra en la Figura 2.2. Estas subtrayectorias son $N + 1$ piezas iguales. La amplitud que pasa por (q_i, t_i) , para $i = 1, 2, \dots, N$, será el producto, $G(q, t; q_N, t_N) \cdots G(q_1, t_1; q_0, t_0)$, donde la amplitud es

$$\begin{aligned}
 G(q, t; q_0, t_0) &= \int \cdots \int dq_N \cdots dx_1 \\
 &G(q, t; q_N, t_N) G(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}) \cdots G(q_1, t_1; q_0, t_0).
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Cuando el límite $N \rightarrow \infty$, el producto

$$G(q, t; q_N, t_N) \cdots G(q_1, t_1; q_0, t_0), \tag{2.21}$$

será la amplitud de probabilidad para la partícula que toma una trayectoria específica $q(t)$ entre los puntos (q_0, t_0) y (q, t) . Luego la amplitud total, $G(q, t; q_0, t_0)$, es

$$G(q, t; q_0, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N dq_N G(q, t; q_N, t_N) \cdots G(q_1, t_1; q_0, t_0). \tag{2.22}$$

Reescribamos el integrando de la ecuación (2.22) de una manera más útil y más compacta. Examinemos $G(q_{i+1}, t_{i+1}; q_i, t_i)$, para N muy grande tal que $(t_{i+1} - t_i)/N = \epsilon$ sea pequeño. Entonces como el intervalo de tiempo es pequeño, podemos expandir la exponencial de $G(q_{i+1}, t_{i+1}; q_i, t_i)$ en potencias de ϵ , e ignorar los términos de orden mayor a uno, de manera que

$$\begin{aligned} G(q_{i+1}, t_{i+1}; q_i, t_i) &= \langle q_{i+1} | e^{-i\hat{H}(t_{i+1}-t_i)/N} | q_i \rangle = \langle q_{i+1} | e^{-i\hat{H}\epsilon} | q_i \rangle \\ &= \langle q_{i+1} | 1 - i\hat{H}\epsilon + O(\epsilon^2) + \dots | q_i \rangle = \langle q_{i+1} | q_i \rangle - i\epsilon \langle q_{i+1} | \hat{H} | q_i \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ahora escribamos los términos de (2.23) del lado derecho, en la representación de momentos como

$$\langle q_{i+1} | q_i \rangle = \delta(q_{i+1} - q_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi} e^{ip_i(q_{i+1}-q_i)}, \quad (2.24)$$

y

$$\langle q_{i+1} | \hat{H} | q_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi} H(p_i, \hat{q}_i) e^{ip_i(q_{i+1}-q_i)}, \quad (2.25)$$

donde $\hat{q}_i = (q_{i+1} + q_i)/2$. La $H(p_i, \hat{q}_i)$, que aparece en el integrando de (2.25), es una función ordinaria no un operador. Introduciendo (2.24) y (2.25) en (2.23), ésta se transforma a

$$\begin{aligned} G(q_{i+1}, t_{i+1}; q_i, t_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi} e^{ip_i(q_{i+1}-q_i)} (1 - i\epsilon H(p_i, \hat{q}_i) + \dots) \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi} e^{ip_i(q_{i+1}-q_i)} e^{-i\epsilon H(p_i, \hat{q}_i)}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

pero $e^{-i\epsilon H(p_i, \hat{q}_i)} \approx 1 - i\epsilon H(p_i, \hat{q}_i) + \dots$, por ser ϵ pequeña. Por lo tanto, el producto infinito del integrando de la ecuación (2.22) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^N G(q_{i+1}, t_{i+1}; q_i, t_i) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=0}^N \frac{dp_i}{2\pi} \prod_{j=1}^N e^{ip_i(q_{i+1}-q_i)} e^{-i(t-t_0)H(p_i, \hat{q}_i)/(N+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=0}^N \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left(i \sum_{j=0}^N \epsilon p_j \frac{(q_{j+1} - q_j)}{\epsilon} - \epsilon H(p_j, \hat{q}_j)\right) \\ &= \int \mathcal{D}p \exp\left(i \int_{t_0}^t (p\dot{q} - H(p, q)) dt\right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $q_{N+1} = q$, $t_{N+1} = t$. La amplitud total es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} &G(q, t; q_0, t_0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=0}^N \frac{dp_j}{2\pi} \int \prod_{i=1}^N dq_i \exp\left(i \sum_{j=0}^N \epsilon p_j \frac{(q_{j+1} - q_j)}{\epsilon} - \epsilon H(p_j, \hat{q}_j)\right) \\ &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp\left(i \int_{t_0}^t (p\dot{q} - H(p, q)) dt\right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde $\dot{q}_i = (q_{i+1} - q_i)/\epsilon$. Entonces la ecuación (2.27) se reduce a

$$G(q, t; q_0, t_0) = \int \mathcal{D}q(t) \exp\left(i \int_{t_0}^t \mathcal{L}[\dot{q}, q, t] dt\right) = \int \mathcal{D}q(t) \exp(i\mathcal{S}[q(t)]), \quad (2.29)$$

donde \mathcal{L} y $\mathcal{S}[q(t)]$ son la lagrangiana y la acción clásica [9] respectivamente y

$$\mathcal{D}q(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N dq_i \left(\frac{1}{2i\pi\epsilon}\right), \quad N\epsilon = t - t_0. \quad (2.30)$$

Es decir, la amplitud tomando una trayectoria particular, es la exponencial i veces la acción clásica, asociada con dicha trayectoria.

2.3. Construcción de los Estados Coherentes de hw(1)

El álgebra que obedece las relaciones de conmutación, de los operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger y 1, es conocida como el álgebra de Weyl-Heisenberg hw(1), y está dada en términos de las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, 1] = [\hat{a}^\dagger, 1] = 0. \quad (2.31)$$

Existen tres diferentes definiciones de estados coherentes para el álgebra hw(1), todas equivalentes. Definición I, llamada "Geométrica", definición II, llamada "Función Generadora", útil para la construcción del conjunto completo de estados; y por último la definición III, llamada "Estado Coherente".

Iniciaremos con la definición geométrica (I). Consideremos una función de onda arbitraria $\psi(x)$, que describe algún sistema, hagamos que el sistema se desplace una distancia c , entonces tenemos

$$\psi(x - c) = \sum_0 \frac{(-c)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) = \exp\left(-c \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = e^{\frac{c}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} \psi(x), \quad (2.32)$$

donde $\frac{c}{\sqrt{2}}$ es una cantidad compleja. Inspirados en esta construcción podemos hacer la definición más general de operador de desplazamiento de la siguiente manera, el cual guiará nuestra primer definición de estado coherente,

$$e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})} |0\rangle = |z\rangle, \quad (2.33)$$

donde el operador $e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})}$ es conocido como el operador de desplazamiento. Sin embargo, este operador tal y como está escrito tiene una forma un tanto complicada. Para utilizar una expresión menos complicada utilicemos un caso particular de la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff (ver apéndice A) [4]

$$e^{(A+B)} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (2.34)$$

que es válida sólo cuando

$$[A, [A, B]] = 0, \quad y \quad [B, [A, B]] = 0. \quad (2.35)$$

Si hacemos $A = z^* \hat{a}^\dagger$ y $B = -z \hat{a}$, tenemos entonces que

$$|z|^2 [\hat{a}^\dagger, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = |z|^2 [\hat{a}^\dagger, 1] = 0, \quad y \quad |z|^2 [\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]] = |z|^2 [\hat{a}, -1] = 0, \quad (2.36)$$

donde hemos utilizado las relaciones de conmutación (2.31). Tomando en cuenta que $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1$ y las identificaciones de A y B , la expresión (2.34) se reduce a

$$e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})} = e^{z^* \hat{a}^\dagger} e^{-z \hat{a}} e^{-\frac{1}{2} z z^*}, \quad (2.37)$$

el cual será el operador de desplazamiento que utilizaremos en adelante. Si tomamos el adjunto del operador de desplazamiento, tenemos

$$e^{(z \hat{a} - z^* \hat{a}^\dagger)} = e^{-(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})}, \quad (2.38)$$

el cual puede observarse que es el inverso de (2.37), por lo tanto, si tomamos el producto de (2.37) con (2.6), éste es igual a la identidad. Esto implica que el operador de desplazamiento es unitario.

Además de ser unitario el operador de desplazamiento, satisface las siguientes relaciones

$$D^{-1}(z) \hat{a} D(z) = \hat{a} + z^* \quad D^{-1}(z) \hat{a}^\dagger D(z) = \hat{a}^\dagger + z^*, \quad (2.39)$$

es decir, para z real, $D(z)$ efectúa una traslación en el espacio de las coordenadas; si z es imaginario, $D(z)$ efectúa una traslación en el espacio de los momentos; y en general realiza una traslación en el espacio fase. Si aplicamos nuestro operador de desplazamiento a $|0\rangle$, tenemos la primera definición de estado coherente

Definición I:

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2} z z^*} e^{z^* \hat{a}^\dagger} e^{-z \hat{a}} |0\rangle. \quad (2.40)$$

Esta expresión se puede simplificar expandiendo $e^{-z \hat{a}}$ en su serie de Taylor, es decir,

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2} z z^*} e^{z^* \hat{a}^\dagger} \left(1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n z^n \hat{a}^n}{n!} \right) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2} z z^*} e^{z^* \hat{a}^\dagger} |0\rangle + e^{-\frac{1}{2} z z^*} e^{z^* \hat{a}^\dagger} \left(\sum_1^\infty \frac{(-1)^n z^n \hat{a}^n}{n!} \right) |0\rangle. \quad (2.41)$$

Pero $\hat{a}^n |0\rangle = 0$. Ésto implica que el segundo miembro de la expresión anterior es cero, por lo tanto, ésta queda simplemente como

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2} z z^*} e^{z^* \hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.42)$$

Ahora calculemos el producto punto de dos estados coherentes diferentes. Para hacerlo pongamos las etiquetas $|z_1\rangle$ y $|z_2\rangle$ a la expresión anterior y tomemos su producto punto:

$$\langle z_2 | z_1 \rangle = e^{-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2)} \langle 0 | e^{z_2 \hat{a}} e^{z_1^* \hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.43)$$

Si utilizamos la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff (ver apéndice A), el producto $\langle 0 | e^{z_2 \hat{a}} e^{z_1^* \hat{a}^\dagger} |0\rangle$ se reduce a $e^{z_2 z_1^*} \langle 0 | 0 \rangle$, por lo tanto, el producto punto está dado por

$$\langle z_2 | z_1 \rangle = e^{-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) + z_2 z_1^*}. \quad (2.44)$$

Si tomamos el cuadrado del valor absoluto

$$|\langle z_2 | z_1 \rangle|^2 = e^{-(|z_1|^2 + |z_2|^2) + 2 z_2 z_1^*} = e^{-|z_1 - z_2|^2}, \quad (2.45)$$

es decir, los estados coherentes no son ortogonales, aunque en el límite $|z_1 - z_2|^2 \gg 1$ son aproximadamente ortogonales.

Si queremos calcular la función de distribución, primero multipliquemos por la izquierda por $\langle n|$ y tomemos el cuadrado del valor absoluto; haciendo ésto se obtiene

$$|\langle n|z\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n} e^{-|z|^2}}{n!}, \quad (2.46)$$

la cual resulta ser una distribución de Poisson [20] y donde $|z|^2$ es el número medio de fotones ($\bar{n} = \langle z|\hat{a}\hat{a}^\dagger|z\rangle = |z|^2$).¹

Excepto por el número $e^{-\frac{1}{2}zz^*}$ la definición I es equivalente a
Definición II:

$$|z\rangle = e^{z^*\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_0^\infty \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \quad (2.47)$$

Ésta puede ser la más simple definición si nuestro interés está centrado en la construcción de operadores. Observéese que el producto escalar (el cual se sigue de las relaciones de ortogonalidad de los estados excitados del oscilador armónico) resulta ser $\langle z|z\rangle = e^{-zz^*}$, el cual no es una función delta δ . hagamos que nuestra relación de completéz absorba este número; por lo tanto, ésta estará dada por

$$1 = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{zz^*} |z\rangle\langle z|, \quad (2.48)$$

donde la integración es realizada sobre todo el z-espacio. Para mostrar que en efecto la integral anterior es un operador unidad, hagamos el siguiente cambio de variable $z = \rho e^{i\phi}$; una vez realizado el cambio de variable la integral anterior se transforma en

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{zz^*} |z\rangle\langle z| = \sum_{m,n} \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{zz^*} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \frac{(z)^m}{\sqrt{m!}}\langle m| \\ &= \sum_{n,m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} \int_0^\infty \rho d\rho e^{-\rho^2} \frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}|n\rangle\langle m| \\ &= \sum_{n,m} \delta_{n,m} \frac{1}{n!} 2 \int_0^\infty d\rho \rho^{2n+1} e^{-\rho^2} |n\rangle\langle n| = \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Lo cual demuestra que en efecto es un operador unidad.

Definición III

$$\hat{a}|z\rangle = z^*|z\rangle. \quad (2.50)$$

Esta propiedad se demuestra de la manera siguiente: utilicemos la definición II para $|z\rangle$, por lo cual se tiene

$$\hat{a}|z\rangle = \hat{a} \sum_{n=0}^\infty \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad (2.51)$$

pero $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, por lo tanto, la expresión anterior es igual a

$$\hat{a}|z\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{\sqrt{n}(z^*)^n}{\sqrt{n(n-1)!}}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z^*)^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle. \quad (2.52)$$

¹La distribución de Poisson tiene la media y la varianza igual al número medio de fotones.

Si factorizamos una z^* , tenemos entonces

$$\hat{a}|z\rangle = z^* \sum_{n=1} \frac{(z^*)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle. \quad (2.53)$$

Pero $\sum_{n=1} \frac{(z^*)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle$ es nuevamente el estado coherente de la definición II, por lo tanto,

$$\hat{a}|z\rangle = \sum_{n=0} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = z^* \sum_{n=1} \frac{(z^*)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = z^*|z\rangle. \quad (2.54)$$

Ésto implica que (2.50) ha sido demostrado. La relación (2.50) nos dice que el estado coherente es una eigenfunción de el operador de aniquilación.

Los vectores de estado $|\psi\rangle$ pueden ser expresados en su respectivo z-espacio funcional realizando $\{z|\psi\rangle = \psi(z)$. Utilizando el operador unidad el producto escalar está definido por

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} \langle\psi_1|z\rangle \{z|\psi_2\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} \psi_1^*(z) \psi_2(z). \quad (2.55)$$

El z-espacio es conocido como espacio de Bargmann [12], y el z-espacio de funciones, $\psi(z)$, son las transformaciones de Bargmann de la representación ordinaria del espacio de coordenadas, al z-espacio. Observése que

$$\psi(z) = \{z|\psi\rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle n|\psi\rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} c_n, \quad (2.56)$$

No solo los vectores de estado, sino tambien los operadores del z-espacio pueden ser obtenidos. Ésto puede ser hecho de la siguiente manera. Si hacemos la identificación

$$|\psi\rangle \longrightarrow \psi(z) = \{z|\psi\rangle = \langle 0|e^{z\hat{a}}|\psi\rangle, \quad (2.57)$$

los operadores se mapean como $O \longrightarrow \Gamma(O)\psi(z) = \{z|O|\psi\rangle = \langle 0|e^{z\hat{a}}O|\psi\rangle$. Si introducimos $e^{-z\hat{a}}e^{z\hat{a}} = 1$, en la identidad anterior tenemos

$$\langle 0|(e^{z\hat{a}}Oe^{-z\hat{a}})e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = \langle 0|\left(O + [z\hat{a}, O] + \frac{1}{2}[z\hat{a}, [z\hat{a}, O]] + \dots\right)e^{z\hat{a}}|\psi\rangle, \quad (2.58)$$

en donde hemos utilizado la expansión de conmutadores de Baker-Campbell-Hausdorff. Entonces los operadores pueden ser construidos con los operadores de creación y aniquilación. Luego será suficiente determinar las realizaciones del z-espacio de \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Si $O = \hat{a}$, el único término que sobrevive en la expansión de conmutadores es el primero, por lo tanto,

$$\Gamma(O)\psi(z) = \langle 0|\hat{a}e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = \langle 0|\frac{\partial}{\partial z}e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial z}\langle 0|e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial z}\{z|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial z}\psi(z). \quad (2.59)$$

Ésto implica que el operador $\Gamma(O) = \partial/\partial z$. Si $O = \hat{a}^\dagger$, los términos que sobreviven en la expansión de conmutadores son los dos primeros, de manera que la relación (2.58) se reduce a

$$\Gamma(O)\psi(z) = \langle 0|(O + [z\hat{a}, O])e^{z\hat{a}}|\psi\rangle. \quad (2.60)$$

Entonces como $O = \hat{a}^\dagger$, se tiene que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, y el hecho de que $\langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$, la relación anterior queda de la siguiente forma

$$\Gamma(O)\psi(z) = \langle 0|(\hat{a}^\dagger + ze^{z\hat{a}}|\psi\rangle = z\langle 0|e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = z\{z|\psi\rangle = z\psi(z), \quad (2.61)$$

lo que implica que $\Gamma(O) = z$. Por lo tanto, podemos hacer la identificación de los operadores, en nuestro espacio de Bargmann, de la siguiente manera:

$$\hat{a} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{a}^\dagger \longrightarrow z. \quad (2.62)$$

Obsérvese que las realizaciones del z -espacio de los operadores satisfacen las relaciones de conmutación de los operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger y 1, es decir, $[\partial/\partial z, z] = 1$ y $[\partial/\partial z, 1] = [z, 1] = 0$.

2.4. Integral de Trayectoria en la Representación hw(1)

Para poder construir la integral de trayectoria en la base de estados coherentes de hw(1) [15], procederemos de manera muy similar a como se hizo en la sección (2.2), salvo una pequeña variación del procedimiento, pero que sin embargo es totalmente equivalente. Para ello consideremos el estado $|z\rangle$ en el tiempo t y el estado $|z_0\rangle$ en el tiempo t_0 , de manera que su amplitud estará dada por

$$G(z, t; z_0, t_0) = \langle z | [\exp(-i\hat{H}(t - t_0))] | z_0 \rangle. \quad (2.63)$$

La exponencial en el interior de los bra-kets, puede ser escrita de otra manera. Dividamos el intervalo de tiempo en n subintervalos iguales $\epsilon = (t - t_0)/n$, y tomemos el límite $n \rightarrow \infty$, haciendo ésto la exponencial queda $\exp(-i\hat{H}(t - t_0)) = (1 - (i/n)\hat{H}(t - t_0))^n = (1 - i\hat{H}\epsilon)^n$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(z_k, t_k; z_{k-1}, t_{k-1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle z_k | (1 - i\hat{H}\epsilon)^k | z_{k-1} \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} \langle z_k | (1 - i\hat{H}\epsilon) | z_{k-1} \rangle. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Introduciendo (2.64) en (2.22), tenemos

$$\begin{aligned} G(z_k, t_k; z_{k-1}, t_{k-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \langle z_k | (1 - i\hat{H}\epsilon) | z_{k-1} \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n (\langle z_k | z_{k-1} \rangle - i\epsilon \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \langle z_k | z_{k-1} \rangle \left(1 - i\epsilon \frac{\langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle}{\langle z_k | z_{k-1} \rangle} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \langle z_k | z_{k-1} \rangle \prod_{k=1}^n \left(1 - i\epsilon \frac{\langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle}{\langle z_k | z_{k-1} \rangle} \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

el producto $\prod_{k=1}^n (1 - i\epsilon \frac{\langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle}{\langle z_k | z_{k-1} \rangle})$ puede ser reemplazado por $\exp[-(i\epsilon) \times \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle]$, y el producto interno lo podemos escribir como $\langle z_k | z_{k-1} \rangle = \exp[\ln \langle z_k | z_{k-1} \rangle]$. Por lo tanto, (2.65), toma la forma

$$\begin{aligned} G(z_k, t_k; z_{k-1}, t_{k-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \exp[\ln \langle z_k | z_{k-1} \rangle] \exp[-i\epsilon \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \exp[\ln \langle z_k | z_{k-1} \rangle - i\epsilon \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle] \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \exp i\epsilon \left[-i \frac{1}{\epsilon} \ln \langle z_k | z_{k-1} \rangle - \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle \right]. \quad (2.66)$$

Si utilizamos el producto interno de los estados coherentes de hw(1), definido en la ecuación (2.44), y tomamos su logaritmo, tenemos que

$$\begin{aligned} \ln \langle z_k | z_{k-1} \rangle &= \frac{1}{2} [-z_k z_k^* - z_{k-1} z_{k-1}^* + z_{k-1} z_k^* + z_{k-1} z_k^*] \\ &= \frac{1}{2} [z_{k-1} (z_k^* - z_{k-1}^*) - z_k^* (z_k - z_{k-1})]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Haciendo $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, tenemos

$$\ln \langle z_k | z_{k-1} \rangle = \frac{1}{2} [z_k \Delta z_k^* - z_k^* \Delta z_k]. \quad (2.68)$$

Introduciendo esta relación en la ecuación (2.66), se tiene

$$G(z_k, t_k; z_{k-1}, t_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \prod_{k=1}^n \exp i\epsilon \left[-\frac{i}{2} \frac{z_k \Delta z_k^* - z_k^* \Delta z_k}{\epsilon} - \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle \right]. \quad (2.69)$$

Tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$, el producto toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^n \exp i\epsilon \left[-\frac{i}{2} \frac{z_k \Delta z_k^* - z_k^* \Delta z_k}{\epsilon} - \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle \right] \\ &= \exp i\epsilon \sum_{k=1}^n \left[-\frac{i}{2} \frac{z_k \Delta z_k^* - z_k^* \Delta z_k}{\epsilon} - \langle z_k | \hat{H} | z_{k-1} \rangle \right] \\ &\rightarrow \exp i \int_t^{t'} \left\{ -\frac{i}{2} [z(t) \dot{z}^*(t) - z^*(t) \dot{z}(t)] - \mathcal{H} \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Por lo tanto, (2.66), queda de la siguiente manera

$$G(z_k, t_k; z_{k-1}, t_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(z_k) \exp i \int_t^{t'} \left\{ -\frac{i}{2} [z(t) \dot{z}^*(t) - z^*(t) \dot{z}(t)] - \mathcal{H} \right\} dt. \quad (2.71)$$

Tomando los límites, tenemos

$$\begin{aligned} G(z, t; z', t') &= \int \mathcal{D}x(z(t)) \exp i \int_t^{t'} \left\{ -\frac{i}{2} [z(t) \dot{z}^*(t) - z^*(t) \dot{z}(t)] - \mathcal{H} \right\} dt \\ &= \int \mathcal{D}x(z(t)) \exp[iS], \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde la acción está definida por

$$S = \int_t^{t'} \mathcal{L}(z(t), \dot{z}(t), z^*(t), \dot{z}^*(t)) dt, \quad (2.73)$$

la lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}(z(t)\dot{z}^*(t) - z^*(t)\dot{z}(t)) - \mathcal{H}, \quad (2.74)$$

y

$$\mathcal{H} = \langle z | \hat{H} | z \rangle. \quad (2.75)$$

Para calcular las ecuaciones de movimiento, utilicemos las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1), sólo que en este caso las variaciones serán tomadas en las dos variables $z(t)$ y $z^*(t)$. De manera que tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^*} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^*} = 0. \quad (2.76)$$

Si sustituimos (2.74) en (2.76), tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{z} = -i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z^*} \quad \dot{z}^* = i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}. \quad (2.77)$$

Estas últimas ecuaciones pueden ser escritas en términos de los corchetes de Poisson, es decir,

$$\dot{z} = i\{z, \mathcal{H}\} \quad \dot{z}^* = i\{z^*, \mathcal{H}\}. \quad (2.78)$$

Ahora tomando en cuenta que z está dada por

$$z = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \quad (2.79)$$

nuestras ecuaciones de movimiento toman la siguiente forma:

$$\dot{q} = \{q, \mathcal{H}\}, \quad \dot{p} = \{p, \mathcal{H}\}. \quad (2.80)$$

Las cuales coinciden con las ecuaciones de movimiento clásicas.

2.5. Elementos de Matriz de los Operadores de hw(1)

En los estados coherentes de hw(1), el estado no normalizado y su adjunto están definidos de la siguiente manera

$$|z\rangle = e^{z^* \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad \langle z| = \langle 0| e^{z \hat{a}}, \quad (2.81)$$

y el producto interno por

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = e^{z_1 z_2^*}. \quad (2.82)$$

Si utilizamos los operadores construidos en la sección (2.3), el valor esperado de alguno de estos operadores está dado por

$$\langle z | O | z \rangle = \frac{\{z | O | z\}}{\{z | z\}}, \quad (2.83)$$

donde O representa cada uno de los operadores del álgebra. Si $O = \hat{a} = \frac{\partial}{\partial z}$, se tiene

$$\langle z | \hat{a} | z \rangle = \frac{\{z | \hat{a} | z\}}{\{z | z\}} = e^{-z z^*} \frac{\partial e^{z z^*}}{\partial z} = z^*. \quad (2.84)$$

Para $O = \hat{a}^\dagger = z$, se tiene lo siguiente:

$$\langle z | \hat{a}^\dagger | z \rangle = \frac{\{z | \hat{a}^\dagger | z\}}{\{z | z\}} = e^{-zz^*} z e^{zz^*} = z. \quad (2.85)$$

En casos en los cuales se tienen productos de la forma $O = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ o $O = \hat{a} \hat{a}^\dagger$, el valor esperado es el mismo, es decir,

$$\langle z | \hat{a}^\dagger \hat{a} | z \rangle = \frac{\{z | \hat{a}^\dagger \hat{a} | z\}}{\{z | z\}} = e^{-zz^*} z \frac{\partial e^{zz^*}}{\partial z} = zz^* = |z|^2,$$

Potencias de los operadores se obtienen de manera análoga.

Capítulo 3

Estados Coherentes $\text{su}(2)$

En este capítulo se construyen los estados coherentes de $\text{su}(2)$ siguiendo los pasos hechos en la construcción de los estados coherentes de $\text{hw}(1)$. Se construye la integral de trayectoria en la representación de los estados coherentes de $\text{su}(2)$, la cual nos conduce a las ecuaciones de movimiento. Se obtienen algunos elementos de matriz del álgebra $\text{su}(2)$.

3.1. Propiedades de los Operadores \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_z

El álgebra $\text{so}(3)$ obedece las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \epsilon_{ijk} \hat{J}_k. \quad (3.1)$$

Los operadores \hat{J}_+ y \hat{J}_- (los cuales llamaremos de ascenso y descenso respectivamente), están definidos en términos de los operadores \hat{J}_x y \hat{J}_y de la siguiente manera [5]

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y; \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y. \quad (3.2)$$

Al aplicarlos al estado $|J, M\rangle$, el cual es un eigenestado de \hat{J}^2 ($\hat{J}^2|J, M\rangle = J(J+1)|J, M\rangle$), se tienen las expresiones

$$\hat{J}_+|J, M\rangle = \sqrt{(J-M)(J+M+1)}|J, M+1\rangle, \quad (3.3)$$

$$\hat{J}_-|J, M\rangle = \sqrt{(J+M)(J-M+1)}|J, M-1\rangle. \quad (3.4)$$

Además el operador \hat{J}_z satisface

$$\hat{J}_z|J, M\rangle = M|J, M\rangle, \quad (3.5)$$

donde J y M , son los números cuánticos con valores $J = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ y $-J \leq M \leq J$. Por otra parte si aplicamos el operador \hat{J}_- , al estado de mínimo peso $|J, M_{\min} = -J\rangle$ (el cual denotaremos en lo sucesivo como $|J, -J\rangle$), se tiene

$$\hat{J}_-|J, -J\rangle = 0. \quad (3.6)$$

Al aplicar el operador \hat{J}_+ n veces al estado de mínimo peso, obtenemos sus estados excitados

$$\hat{J}_+^n|J, -J\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n(2J)(2J-1)(2J-2)\dots(2J-n+1)}|J, -J+n\rangle. \quad (3.7)$$

Pero $(2J)(2J-1)(2J-2)\dots(2J-n+1) = \frac{(2J)!}{(2J-n)!}$. Ésto implica que la relación (3.7) se convierte en

$$\hat{J}_+^n |J, -J\rangle = \sqrt{\frac{n!(2J)!}{(2J-n)!}} |J, -J+n\rangle. \quad (3.8)$$

3.2. Estados Coherentes de su(2)

Las relaciones de conmutación que satisfacen los operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger y 1, junto con la aplicación del operador de aniquilación al estado del vacío $\hat{a}|0\rangle = 0$, son las relaciones que nos guiaron en la construcción de los estados coherentes del álgebra hw(1). La pregunta es como definir estados coherentes para el álgebra su(2), que satisface las relaciones de conmutación siguientes:

$$[J_-, J_+] = -2J_0, \quad [J_0, J_+] = J_+, \quad [J_0, J_-] = -J_-, \quad (3.9)$$

Si hacemos la identificación siguiente entre operadores del álgebra hw(1) y su(2) [7]:

$$\hat{a}^\dagger \longrightarrow J_+, \quad \hat{a} \longrightarrow J_-, \quad 1 \longrightarrow J_0, \quad (3.10)$$

podemos tomar la definición I de estado coherente de hw(1) y obtener un operador análogo al operador de desplazamiento, es decir,

$$e^{z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a}} \longrightarrow e^{\zeta^* \hat{J}_+ - \zeta \hat{J}_-}, \quad (3.11)$$

e identificamos el estado del vacío con el de mínimo peso

$$|0\rangle \longrightarrow |J, -J\rangle. \quad (3.12)$$

Ahora sabemos que los estados coherentes de hw(1) son completos respecto a la medida

$$1 = \frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-zz^*} |z\rangle \langle z|. \quad (3.13)$$

Podemos ahora preguntarnos sobre la medida con la cual los estados coherentes de su(2) son completos. Primero tenemos que en la relación (3.11) \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_0 no conmutan, de manera que no podemos utilizar la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff, como lo hicimos en el caso del álgebra hw(1). Entonces debemos proceder de otra manera. Primero veamos que en efecto los estados coherentes de su(2) son completos. Para lograrlo tenemos que utilizar las propiedades de las funciones $D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, 0)$ (ver apéndice B sobre las matrices D de Wigner) [4]. Para poder utilizar las relaciones de completéz de estas funciones primero hagamos el siguiente cambio de variable $\zeta = \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$, y utilicemos la definición de los operadores de ascenso y descenso $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$, $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$. Utilizando este cambio de variable y la definición de operadores de ascenso y descenso, la ecuación (3.11) se transforma a

$$e^{\zeta^* \hat{J}_+ - \zeta \hat{J}_-} = e^{-i\theta(\hat{J}_x \sin \phi - \hat{J}_y \cos \phi)} = e^{-i\theta(\hat{J} \cdot \mathbf{n})}, \quad (3.14)$$

por lo tanto el estado coherente queda de la siguiente manera

$$|\zeta\rangle = |\theta, \phi\rangle = e^{-i\theta(\hat{J} \cdot \mathbf{n})} |J, -J\rangle. \quad (3.15)$$

Si utilizamos la relación de completéz del estado $|J, M\rangle$ para una J definida (ver apéndice B), es decir,

$$1 = \sum_{M=-J}^J |J, M\rangle \langle J, M|, \quad (3.16)$$

se tiene entonces que

$$|\theta, \phi\rangle = \sum_{M=-J}^J |J, M\rangle \langle J, M| e^{-i\theta(\hat{J}\cdot n)} |J, -J\rangle = \sum_{M=-J}^J |J, M\rangle D_{J,-J}^{(J)}(\theta, \phi, 0), \quad (3.17)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \frac{(2J+1)}{4\pi} \int d\Omega |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi| \\ &= \frac{(2J+1)}{4\pi} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi D_{J,-J}^{(J)}(\theta, \phi, 0) D_{J,-J}^{(J)*}(\theta, \phi, 0) |J, M\rangle \langle J, M'| \\ &= \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J \delta_{M,M'} |J, M\rangle \langle J, M'| \\ &= \sum_{M=-J}^J |J, M\rangle \langle J, M|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La relación (3.18), sólo nos ha demostrado que en efecto los estados coherentes de su(2) son completos, pero no nos sirve para utilizarla de definición de estado coherente. Para ello tenemos que encontrar una relación análoga al operador de desplazamiento, como en el caso de los estados coherentes de hw(1). Buscamos que se cumpla la siguiente identidad

$$e^{a_+ \hat{J}_+ + a_0 \hat{J}_0 + a_- \hat{J}_-} = e^{b_+ \hat{J}_+} e^{\ln b_0 \hat{J}_0} e^{b_- \hat{J}_-}, \quad (3.19)$$

la cual se cumple siempre por tratarse del grupo de Lie; y donde $a_1 = 0$, $a_\pm = \pm \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}$ y b_0, b_+ y b_- serán determinadas. Obsérvese que la relación (3.19) no hace referencia a la representación de los operadores, ni a los eigenvalores de los mismos, por lo que podemos utilizar cualquier representación. Por ser la representación para $J = 1/2$ la más simple, ésta es la que utilizaremos. Entonces tenemos que para $J = 1/2$ los operadores tienen asociadas las siguientes matrices

$$\hat{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

de manera que

$$a_+ \hat{J}_+ + a_0 \hat{J}_0 + a_- \hat{J}_- = A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_0 & a_+ \\ a_- & -\frac{1}{2} a_0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$e^{a_+ \hat{J}_+ + a_0 \hat{J}_0 + a_- \hat{J}_-} = I \cosh a + \frac{A}{a} \sinh a, \quad (3.21)$$

donde $a = i\frac{\theta}{2}$, que es el eigenvalor positivo de A , de manera que la expresión de lado derecho, queda de la siguiente forma

$$I \cosh a + \frac{A}{a} \sinh a = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Para las matrices (3.19) del lado izquierdo, tenemos

$$e^{b_+ \hat{J}_+} = \begin{pmatrix} 1 & b_+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad e^{b_- \hat{J}_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_- & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$e^{\ln b_0 \hat{J}_0} = \begin{pmatrix} \sqrt{b_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{b_0}} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Si multiplicamos las matrices (3.23) y (3.24) obtenemos

$$e^{b_+ \hat{J}_+} e^{\ln b_0 \hat{J}_0} e^{b_- \hat{J}_-} = \frac{1}{\sqrt{b_0}} \begin{pmatrix} b_0 + b_+ b_- & b_+ \\ b_- & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -ie^{i\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{b_0}} \begin{pmatrix} b_0 + b_+ b_- & b_+ \\ b_- & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Comparando los elementos de las matrices anteriores, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{b_0}} = \cos \frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad b_0 = \frac{\cos^2 \theta}{2} = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3.27)$$

y

$$b_+ = -i\sqrt{b_0} e^{i\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = -ie^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2}, \quad (3.28)$$

$$b_- = i\sqrt{b_0} e^{-i\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = ie^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (3.29)$$

Esto implica que

$$b_+ b_- = \tan^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3.30)$$

y

$$b_+ \rightarrow \zeta^*; \quad b_- \rightarrow \zeta; \quad \rightarrow \quad b_0 = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \zeta \zeta^*. \quad (3.31)$$

De esta manera obtenemos

$$e^{b_+ \hat{J}_+} e^{\ln b_0 \hat{J}_0} e^{b_- \hat{J}_-} |J, -J\rangle = e^{\zeta^* \hat{J}_+} e^{\ln(1+\zeta \zeta^*) \hat{J}_0} e^{\zeta \hat{J}_-} |J, -J\rangle. \quad (3.32)$$

Por otra parte tenemos de las propiedades de los operadores \hat{J}_- y \hat{J}_+ , que

$$e^{\zeta \hat{J}_-} |J, -J\rangle = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{J}_-^n}{n!}\right) |J, -J\rangle = |J, -J\rangle, \quad (3.33)$$

y

$$\begin{aligned} e^{\ln(1+\zeta \zeta^*) \hat{J}_0} |J, -J\rangle &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{J}_0 \ln(1 + \zeta \zeta^*)^n}{n!} \right) |J, -J\rangle = e^{-J \ln(1+\zeta \zeta^*)} |J, -J\rangle \\ &= \frac{1}{(1 + \zeta \zeta^*)^J} |J, -J\rangle. \end{aligned} \quad (3.34)$$

De donde la ecuación del lado izquierdo de la identidad (3.32) se reduce a

$$e^{\zeta^* \hat{J}_+} e^{\ln(1+\zeta \zeta^*) \hat{J}_0} e^{\zeta \hat{J}_-} |J, -J\rangle = \frac{e^{\zeta^* \hat{J}_+}}{(1 + \zeta \zeta^*)^J} |J, -J\rangle. \quad (3.35)$$

Por lo que nuestro estado coherente estará dado por

$$|\zeta\rangle = \frac{e^{\zeta^* \hat{J}_+}}{(1 + \zeta \zeta^*)^J} |J, -J\rangle. \quad (3.36)$$

Ahora si calculamos el término $e^{\zeta^* \hat{J}_+} |J, -J\rangle$, tomando en cuenta que la exponencial la podemos expandir en una serie de Taylor, se tiene lo siguiente

$$e^{\zeta^* \hat{J}_+} |J, -J\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{*n}}{n!} \right) \hat{J}_+^n |J, -J\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(2J)!}{n!(2J-n)!}} \zeta^{*n} |J, -J+n\rangle. \quad (3.37)$$

Esta relación la podemos escribir de una manera diferente. Sabemos que en este caso $M = -J + n$, y tomando $J = 2N$, tenemos entonces que la relación anterior se transforma a

$$e^{\zeta^* \hat{J}_+} |N, 0\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{*n}}{n!} \right) \hat{J}_+^n |N, 0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(N)!}{n!(N-n)!}} \zeta^{*n} |N, n\rangle. \quad (3.38)$$

Definamos nuestra relación de completez en la base de estados coherentes de su(2) [12] de la manera siguiente:

$$\frac{(2J+1)}{4\pi} \int d\Omega |\zeta\rangle \langle \zeta| = \frac{(2J+1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sin \theta d\theta d\phi |\zeta\rangle \langle \zeta|, \quad (3.39)$$

si utilizamos los cambios de variable $\zeta = \varrho e^{i\phi}$, y $\varrho = \tan \frac{\theta}{2}$ junto con la relación (3.36), el elemento de ángulo sólido se transforma en $\sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\varrho d\varrho d\phi}{(1+\varrho^2)^2}$; y la integral anterior se transforma a

$$\begin{aligned} \frac{(2J+1)}{4\pi} \int d\Omega |\zeta\rangle \langle \zeta| &= \frac{(2J+1)}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{\varrho d\varrho}{(1+\varrho^2)^2} \frac{e^{\zeta^* \hat{J}_+}}{(1+\varrho^2)^J} |\zeta\rangle \langle \zeta| \frac{e^{\zeta \hat{J}_-}}{(1+\varrho^2)^J} \\ &= \frac{(2J+1)}{\pi} \int \frac{d^2\zeta}{(1+\zeta\zeta^*)^{2J+2}} |\zeta\rangle \langle \zeta|. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ahora tenemos que demostrar que la relación (3.40) es en efecto igual a la identidad. La manera de demostrarlo es la siguiente. Sabemos que

$$\psi(\zeta) = \langle \zeta | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(2J)!}{n!(2J-n)!}} \zeta^{*n} \langle J, -J+n | \psi \rangle. \quad (3.41)$$

Ésto implica que

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) \psi^*(\zeta) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(2J)!(2J)!}{n!m!(2J-n)!(2J-m)!}} \zeta^{*n} \zeta^m \langle J, -J+n | \psi \rangle \langle \psi | J, -J+m \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(2J)!(2J)!}{n!m!(2J-n)!(2J-m)!}} \zeta^{*n} \zeta^m \langle J, -J+n | J, -J+m \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(2J)!(2J)!}{n!m!(2J-n)!(2J-m)!}} \zeta^{*n} \zeta^m \delta_{n,m} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2J)!}{n!(2J-n)!} |\zeta|^{2n}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \frac{(2J+1)}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(1+\rho^2)^{2J+2}} \langle \psi | \zeta \rangle \langle \zeta | \psi \rangle \\ &= \frac{(2J+1)}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(1+\rho^2)^{2J+2}} \psi(\zeta) \psi^*(\zeta) \\ &= \frac{(2J+1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2J)!(2J)!}{n!(2J-n)!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{\rho^{n+m+1} d\rho}{(1+\rho^2)^{2J+2}} \\ &= \frac{(2J+1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2J)!}{n!(2J-n)!} 2\pi \delta_{n,m} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{n+m+1} d\rho}{(1+\rho^2)^{2J+2}} \\ &= \frac{2(2J+1)(2J)!}{n!(2J-n)!} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{2n+1} d\rho}{(1+\rho^2)^{2J+2}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Si hacemos $x = \rho^2$ la integral anterior se reduce a

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{(2J+1)(2J)!}{n!(2J-n)!} \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{(1+x)^{2J+2}} = \frac{(2J+1)(2J)!}{n!(2J-n)!} B(n+1, 2J+1-n). \quad (3.44)$$

Pero tenemos que $B(n+1, 2J+1-n) = \frac{n!(2J-n)!}{2^{2J+1}!} = \frac{n!(2J-n)!}{2^{2J+1}(2J)!}$, por lo que

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{(2J+1)(2J)!}{n!(2J-n)!} B(n+1, 2J+1-n) = 1. \quad (3.45)$$

Entonces el estado coherente es completo con respecto a (3.40), por lo que podemos escribir el estado coherente no normalizado simplemente como $|\zeta\rangle = e^{\zeta \hat{J}_+} |J, -J\rangle$, y su adjunto $\langle \zeta| = \langle J, -J| e^{\zeta \hat{J}_-}$.

Por un lado tenemos $\psi(\zeta) = \langle \zeta | \psi \rangle = \langle J, -J | e^{\zeta \hat{J}_-} | \psi \rangle$. Y por otra parte la definición de la forma del operador \hat{O} en la representación de Bargmann [12] es $\mathcal{O}\psi(\zeta) = \langle \zeta | \hat{O} | \psi \rangle$. Podemos escribir esta relación de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}\psi(\zeta) = \langle J, -J | e^{\zeta \hat{J}_-} \mathcal{O} | \psi \rangle = \langle J, -J | (e^{\zeta \hat{J}_-} \mathcal{O} e^{-\zeta \hat{J}_-}) e^{\zeta \hat{J}_-} | \psi \rangle. \quad (3.46)$$

Si sustituimos el término dentro de los paréntesis por la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff se tiene lo siguiente

$$\mathcal{O}\psi(\zeta) = \langle J, -J | \left(\mathcal{O} + [\zeta \hat{J}_-, \mathcal{O}] + \frac{1}{2} [\zeta \hat{J}_-, [\zeta \hat{J}_-, \mathcal{O}]] + \dots \right) e^{\zeta \hat{J}_-} | \psi \rangle. \quad (3.47)$$

Si $\mathcal{O} = \hat{J}_-$, sólo sobrevive el primer término dentro del paréntesis, es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\psi(\zeta) &= \langle J, -J | \hat{J}_- e^{\zeta \hat{J}_-} | \psi \rangle \\ &= \langle J, -J | \frac{\partial}{\partial \zeta} e^{\zeta \hat{J}_-} | \psi \rangle = \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle J, -J | e^{\zeta \hat{J}_-} | \psi \rangle = \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi(\zeta), \end{aligned} \quad (3.48)$$

por lo tanto; $\hat{J}_- \rightarrow \partial/\partial \zeta$.

Si $\mathcal{O} = \hat{J}_+$, los primeros tres términos dentro del paréntesis sobreviven, de manera que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\psi(\zeta) &= \langle J, -J | (\hat{J}_+ - 2\zeta\hat{J}_0 - \zeta^2\hat{J}_-) e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle \\
&= \langle J, -J | \hat{J}_+ e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle - 2\zeta \langle J, -J | \hat{J}_0 e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle - \zeta^2 \langle J, -J | \hat{J}_- e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle \\
&= 2\zeta J \langle J, -J | e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle - \zeta^2 \langle J, -J | \partial / \partial \zeta (e^{\zeta\hat{J}_-}) | \psi \rangle \\
&= 2\zeta J \langle \zeta | \psi \rangle - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \zeta | \psi \rangle = \left(2\zeta J - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \psi(\zeta),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

por lo tanto; $\hat{J}_+ \rightarrow 2\zeta J - \zeta^2 \partial / \partial \zeta$.

Por último si $\mathcal{O} = \hat{J}_0$, sólo sobreviven los dos primeros términos dentro del parentésis, es decir

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\psi(\zeta) &= \langle J, -J | (\hat{J}_0 + \zeta\hat{J}_-) e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle = \langle J, -J | \hat{J}_0 e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle + \zeta \langle J, -J | \hat{J}_- e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle \\
&= -J \langle J, -J | e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle + \zeta \langle J, -J | \frac{\partial}{\partial \zeta} e^{\zeta\hat{J}_-} | \psi \rangle = \left(-J + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \psi(\zeta).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Por lo tanto, $\hat{J}_0 \rightarrow -J + \zeta \partial / \partial \zeta$.

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}, \zeta \right] = 1, \quad [\zeta, 1] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \zeta}, 1 \right] = 0. \tag{3.51}$$

Las identificaciones hechas para los operadores \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_0 deben satisfacer las relaciones de conmutación del álgebra su(2), es decir,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}, 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = 2J \left[\frac{\partial}{\partial \zeta}, \zeta \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \zeta}, \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = 2J - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} = -2\hat{J}_0, \tag{3.52}$$

$$\left[-J + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = \left[\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} = \hat{J}_+, \tag{3.53}$$

$$\left[-J + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = \left[\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] = J - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} = -\hat{J}_-. \tag{3.54}$$

Lo que demuestra que los operadores satisfacen las relaciones de conmutación de su(2).

También podemos elegir el siguiente conjunto de operadores

$$\hat{J}_+ \rightarrow \zeta, \quad \hat{J}_- \rightarrow 2J \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \hat{J}_0 \rightarrow -J + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{3.55}$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación de su(2).

3.3. Representación de Jordan-Schwinger de SU(2)

Sean X_{ij} matrices de dimensión $k \times k$ con coeficientes en los números complejos. Definimos el mapeo de Jordan [4] como:

$$\mathcal{L} : X_{ij} \longrightarrow \sum_{i,j=0}^k X_{ij} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = \mathcal{L}_X, \tag{3.56}$$

donde \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_j , son los operadores de creación y aniquilación en dos dimensiones, que cumplen con las relaciones de conmutación siguientes

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0; \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}; \quad i, j = 1, 2. \quad (3.57)$$

El mapeo de Jordan tiene las siguientes propiedades:

1) \mathcal{L}_X Preserva linealidad

$$\alpha\mathcal{L}_X + \beta\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{\alpha X + \beta Y}$$

2) \mathcal{L}_X Preserva conmutadores

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Si $k = 2$, sean $\{\sigma_i\}$, las matrices de Pauli. Definimos entonces $\hat{J}_i = \mathcal{L}_{1/2\sigma_i}$; ésto implica

$$[\hat{J}_n, \hat{J}_m] = \mathcal{L}_{[1/2\sigma_n, 1/2\sigma_m]} = \mathcal{L}_{1/2i\epsilon_{nmk}\sigma_k} = i\epsilon_{nmk}\mathcal{L}_{1/2\sigma_k} = i\epsilon_{nmk}\hat{J}_k. \quad (3.58)$$

De esta manera tenemos

$$\hat{J}_x = \mathcal{L}_{1/2\sigma_x} = \sum_{n,m=1}^2 \left(\frac{\sigma_x}{2}\right) \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m = \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2), \quad (3.59)$$

$$\hat{J}_y = \mathcal{L}_{1/2\sigma_y} = \sum_{n,m=1}^k \left(\frac{\sigma_y}{2}\right) \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m = \frac{i}{2}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2), \quad (3.60)$$

$$\hat{J}_z = \mathcal{L}_{1/2\sigma_z} = \sum_{n,m=1}^k \left(\frac{\sigma_z}{2}\right) \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) = \frac{1}{2}(\hat{N}_1 - \hat{N}_2). \quad (3.61)$$

Pero a nosotros nos interesa los operadores \hat{J}_+ y \hat{J}_- . Afortunadamente éstos los podemos obtener, de la definición de los mismos, es decir,

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y. \quad (3.62)$$

Utilizando los operadores (3.59), (3.60) y (3.61), los operadores de ascenso y descenso quedan en términos de los operadores de creación y aniquilación de la siguiente forma

$$\hat{J}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2; \quad \hat{J}_- = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1; \quad \hat{J}_0 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2). \quad (3.63)$$

Verifiquemos que en realidad estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación de $su(2)$. Para hacer esto utilicemos las relaciones de conmutación (3.57), de manera que

$$\begin{aligned} [\hat{J}_-, \hat{J}_+] &= [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2] = [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_2] = [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 [\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2] \\ &= \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 = -2\hat{J}_0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}_0, \hat{J}_+] &= \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2] - \frac{1}{2}[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2] \\ &= \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] \hat{a}_2 + \frac{\hat{a}_1^\dagger}{2} [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_2] - \frac{1}{2}[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger] \hat{a}_2 - \frac{\hat{a}_1^\dagger}{2} [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_2] \end{aligned}$$

$$= \frac{\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2}{2} + \frac{\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2}{2} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 = \hat{J}_+, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}_0, \hat{J}_-] &= \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] - \frac{1}{2}[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] \\ &= \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger] \hat{a}_1 + \frac{\hat{a}_2^\dagger}{2}[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1] - \frac{1}{2}[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] \hat{a}_1 - \frac{\hat{a}_2^\dagger}{2}[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_1] \\ &= -\frac{\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1}{2} - \frac{\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1}{2} = -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 = -\hat{J}_-. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Además se tiene

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_0^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i - \frac{1}{4} \hat{N}^2, \quad (3.67)$$

donde $\hat{N} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2$. Por lo tanto

$$\hat{J}^2 |n_1 n_2\rangle = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) |n_1 n_2\rangle. \quad (3.68)$$

Esto implica que $J = n/2$, $M = (n_1 - n_2)/2$ y $n = n_1 + n_2$ pertenece a los enteros positivos.

Si aplicamos n veces el operador de creación a cada uno de sus eigenfunciones, para obtener sus estados excitados en términos del estado del vacío, tenemos

$$|n_1\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} |0\rangle, \quad |n_2\rangle = \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |0\rangle. \quad (3.69)$$

Si tomamos el producto tensorial de los dos estados excitados, y hacemos $n_1 = J + M$ y $n_2 = J - M$, se tiene

$$|J, M\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle = |n_1, n_2\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{J+M} (\hat{a}_2^\dagger)^{J-M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}} |0\rangle. \quad (3.70)$$

3.4. Integral de Trayectoria en la Representación de su(2)

Para poder construir la integral de trayectoria en la base de estados coherentes de su(2) [15], tenemos que seguir los pasos seguidos en la construcción de la integral de trayectoria en la base de estados coherentes de hw(1). Para ello, utilicemos la forma explícita del producto interno de dos diferentes estados coherentes; cuya forma es la siguiente:

$$\langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle = \frac{(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1})^{2J}}{[(1 + |\zeta_k|^2)(1 + |\zeta_{k-1}|^2)]^J}. \quad (3.71)$$

Tomando el logaritmo, se tiene

$$\ln[\langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle] = 2J \ln(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) - J \ln(1 + |\zeta_k|^2) - J \ln(1 + |\zeta_{k-1}|^2). \quad (3.72)$$

Si utilizamos el desarrollo de Taylor para la función logaritmo, tenemos

$$\ln(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) = \zeta_k^* \zeta_{k-1} - \frac{(\zeta_k^* \zeta_{k-1})^2}{2} + \dots = \zeta_k^* \zeta_{k-1} (1 - \zeta_k^* \zeta_{k-1}) + \dots \quad (3.73)$$

Pero $1 - \zeta_k^* \zeta_{k-1} \approx \frac{1}{1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}}$, por lo que (3.73) queda de la siguiente manera

$$\ln(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) = \frac{\zeta_k^* \zeta_{k-1}}{1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}} + \dots \quad (3.74)$$

De manera análoga, podemos escribir los demás logaritmos

$$\ln(1 + \zeta_k^* \zeta_k) = \frac{\zeta_k^* \zeta_k}{1 + \zeta_k^* \zeta_k} + \dots, \quad (3.75)$$

$$\ln(1 + \zeta_{k-1}^* \zeta_{k-1}) = \frac{\zeta_{k-1}^* \zeta_{k-1}}{1 + \zeta_{k-1}^* \zeta_{k-1}} + \dots \quad (3.76)$$

Introduciendo (3.74), (3.75) y (3.76) en (3.72), y tomando en cuenta el hecho $\frac{1}{1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}} \approx \frac{1}{1 + \zeta_k^* \zeta_k} \approx \frac{1}{1 + \zeta_{k-1}^* \zeta_{k-1}} \approx \frac{1}{1 + |\zeta_k|^2}$ para k muy grande, se tiene

$$\begin{aligned} \ln[\langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle] &= 2J \ln(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) - J \ln(1 + |\zeta_k|^2) - J \ln(1 + |\zeta_{k-1}|^2) \\ &\approx \frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} (\zeta_k^* \zeta_{k-1} + \zeta_k^* \zeta_{k-1} - \zeta_k^* \zeta_k - \zeta_{k-1}^* \zeta_{k-1}) + \dots \\ &= \frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} [\zeta_{k-1} (\zeta_k^* - \zeta_{k-1}^*) - \zeta_k^* (\zeta_k - \zeta_{k-1})] + \dots \end{aligned} \quad (3.77)$$

haciendo $\Delta \zeta_k = \zeta_k - \zeta_{k-1}$, la ecuación (3.72) queda de la siguiente manera

$$\ln \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle = \frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} [\zeta_{k-1} \Delta \zeta_k^* - \zeta_k^* \Delta \zeta_k] + \dots \quad (3.78)$$

De aquí tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{k=n} \ln[\langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle] &= \exp \sum_{k=1}^{k=n} \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} [\ln \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle] \\ &= \exp \sum_{k=1}^{k=n} \epsilon \left[\frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} \left(\zeta_k \frac{\Delta \zeta_k^*}{\epsilon} - \zeta_k^* \frac{\Delta \zeta_k}{\epsilon} \right) + \frac{1}{\epsilon} O(\Delta \zeta_k^2) \right], \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} G(t, \zeta; t_0, \zeta_0) &= \int \dots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx(\zeta_k) \\ &\times \exp \sum_{k=1}^{k=n} \epsilon \left[\frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} \left(\zeta_k \frac{\Delta \zeta_k^*}{\epsilon} - \zeta_k^* \frac{\Delta \zeta_k}{\epsilon} \right) - \langle \zeta_k | \hat{H} | \zeta_{k-1} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Tomando los límites $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, resulta

$$G(t, \zeta; t_0, \zeta_0) = \int Dx[\zeta(t)] \exp[iS], \quad (3.80)$$

donde

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\zeta(t), \dot{\zeta}(t); \zeta^*(t), \dot{\zeta}^*(t)) dt,$$

$$\mathcal{L} = \frac{iJ}{(1 + |\zeta|^2)} (\dot{\zeta}^*(t)\zeta(t) - \zeta^*(t)\dot{\zeta}(t)) - \mathcal{H}, \quad (3.81)$$

y

$$\mathcal{H} = \langle \zeta | \hat{H} | \zeta \rangle.$$

Si queremos calcular las ecuaciones de movimiento, tenemos que utilizar la variación (2.2), sólo que en este caso las variaciones serán tomadas en las dos variables $\zeta(t)$ y $\zeta^*(t)$. De manera que tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}^*} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta^*} = 0. \quad (3.82)$$

Sustituyendo (3.81) en (3.82), tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{\zeta} = -i \frac{(1 + |\zeta|^2)}{2J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta^*}, \quad \dot{\zeta}^* = i \frac{(1 + |\zeta|^2)}{2J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}. \quad (3.83)$$

Escribiendo estas ecuaciones en términos de los corchetes de Poisson, éstas toman la forma

$$\dot{\zeta} = i \frac{(1 + |\zeta|^2)}{2J} \{\zeta, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\zeta}^* = i \frac{(1 + |\zeta|^2)}{2J} \{\zeta^*, \mathcal{H}\}. \quad (3.84)$$

Si realizamos el cambio de variable $\zeta = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$, las ecuaciones de movimiento (3.84), quedan de la siguiente manera

$$\dot{\theta} = \frac{1}{J \sin \theta} \{\theta, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\phi} = -\frac{1}{J \sin \theta} \{\phi, \mathcal{H}\}. \quad (3.85)$$

3.5. Elementos de Matriz de los Operadores de su(2)

Para calcular los elementos de matriz de los operadores de su(2) observemos los siguientes hechos. El estado coherente normalizado está dado en términos del estado no normalizado como

$$|\zeta\rangle = \frac{e^{\zeta^* \hat{J}_+}}{(1 + |\zeta|^2)^J} | -J \rangle = \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^J} |\zeta\rangle. \quad (3.86)$$

El producto interno del estado no normalizado está dado por

$$\{\zeta | \zeta\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{2J}. \quad (3.87)$$

Por lo tanto el valor esperado [15] de cualquiera de los operadores del álgebra está dado por

$$\langle \zeta | O | \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{-2J} \{\zeta | O | \zeta\rangle. \quad (3.88)$$

Si $O = \hat{J}_+$; de acuerdo con la sección (3.2) tenemos $\hat{J}_+ = 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}$, ésto implica

$$\langle \zeta | \hat{J}_+ | \zeta \rangle = \frac{1}{\{\zeta | \zeta\rangle} (2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \{\zeta | \zeta\rangle) = 2J \left(\zeta - \zeta^2 \frac{\zeta^*}{1 + \zeta \zeta^*} \right) = \frac{2J\zeta}{1 + |\zeta|^2}. \quad (3.89)$$

En el caso de $O = \hat{J}_-$, este operador en el espacio de Bargmann [12] tiene la forma $O = \hat{J}_- = \frac{\partial}{\partial \zeta}$; por lo tanto

$$\langle \zeta | \hat{J}_- | \zeta \rangle = \frac{1}{\{\zeta | \zeta\rangle} \frac{\partial}{\partial \zeta} \{\zeta | \zeta\rangle = \frac{2J\zeta^*}{1 + |\zeta|^2}. \quad (3.90)$$

Los productos entre estos operadores se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle \zeta | \hat{J}_+ \hat{J}_- | \zeta \rangle &= \frac{2J\zeta}{\{\zeta|\zeta\}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \{\zeta|\zeta\} - \frac{\zeta^2}{\{\zeta|\zeta\}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \{\zeta|\zeta\} = 2J \frac{\zeta \zeta^*}{1 + \zeta \zeta^*} - \frac{\zeta^* \zeta^3 2J(2J-1)}{1 + \zeta \zeta^*} \\ &= \frac{4J|\zeta|^2 + 2J|\zeta|^4}{1 + |\zeta|^2}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

El elemento de matriz del adjunto del producto anterior, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle \zeta | \hat{J}_- \hat{J}_+ | \zeta \rangle &= \frac{2J\{\zeta|\zeta\}}{\{\zeta|\zeta\}} + \frac{2J\zeta}{\{\zeta|\zeta\}} \frac{\partial \{\zeta|\zeta\}}{\partial \zeta} - \frac{2\zeta}{\{\zeta|\zeta\}} \frac{\partial \{\zeta|\zeta\}}{\partial \zeta} - \frac{\zeta^2}{\{\zeta|\zeta\}} \frac{\partial^2 \{\zeta|\zeta\}}{\partial \zeta^2} \\ &= \frac{2J + 4J^2|\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Los cuadrados de los operadores \hat{J}_+ y \hat{J}_- están dados por

$$\langle \zeta | \hat{J}_+^2 | \zeta \rangle = \frac{1}{\{\zeta|\zeta\}} (2J\zeta - \zeta^2 \partial / \partial \zeta)^2 \{\zeta|\zeta\} = \frac{2J(2J-1)\zeta^2}{(1 + |\zeta|^2)^2}, \quad (3.93)$$

$$\langle \zeta | \hat{J}_-^2 | \zeta \rangle = \frac{1}{\{\zeta|\zeta\}} \frac{\partial^2 \{\zeta|\zeta\}}{\partial \zeta^2} = \frac{2J(2J-1)\zeta^{*2}}{(1 + |\zeta|^2)^2}. \quad (3.94)$$

Otros elementos de matriz se pueden obtener utilizando los elementos de matrices obtenidos anteriormente, o con las representaciones de los operadores en el espacio de Bargmann.

Capítulo 4

Transiciones de Fase en el Modelo de LMG

En los capítulos 3 y 4 se demostró que en la representación de estados coherentes las ecuaciones de movimiento se reducen al caso clásico para hamiltonianos lineales en los generadores de $su(2)$ o $hw(1)$, o a lo más de grado dos. En éste capítulo se presenta el trabajo presentado por los doctores Octavio Castañón, Ramón López Peña, Enrique López Moreno y Jorge G. Hirsch [2, 3], en este trabajo se analiza el modelo LMG cuántica y clásicamente; se hace la comparación entre ambos análisis a través del modelo de la separatriz.

4.1. Análisis Cuántico Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick

El modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) [18] fue concebido como un modelo de prueba en la física nuclear. Este modelo asume que el núcleo es un sistema de fermiones el cual puede ocupar dos niveles con la misma degeneración Ω , los cuales están separados por una energía ϵ . Existen interacciones residuales las cuales pueden dispersar pares de partículas entre los dos niveles sin cambiar el número de partículas que ocupan los estados. En el formalismo de cuasi-espín el hamiltoniano está dado por

$$H = \epsilon \hat{J}_z + \frac{\lambda}{2} (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2) + \frac{\gamma}{2} (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+), \quad (4.1)$$

con energías $\epsilon = \pm\omega$ y espaciamiento $\epsilon = 2\omega$ en los niveles de energía. En el hamiltoniano (4.1) el término que multiplica λ aniquila un par de partículas en un nivel y crea otro par de partículas en el siguiente nivel, y el término que multiplica γ dispersa una partícula en el nivel de más alta energía y otra en el nivel más bajo de energía.

Para un número fijo de partículas N , donde $N = 2J$, el hamiltoniano (4.1) conmuta con el operador \hat{J}^2 . Partiendo la matriz Hamiltoniana de dimensión 2^N ; vemos que esta se descompone en submatrices de dimensión $2J + 1$, cada una de ellas asociada con una diferente representación irreducible del álgebra $su(2)$. Como es usual en este tipo de problemas, por simplicidad sólo se considera el caso de máxima simetría, reduciendo el tamaño de la matriz a diagonalizar a $N + 1$.

4.1.1. Caso Diagonal $\lambda = 0$

En éste caso, el hamiltoniano (4.1), se reduce a

$$H = \epsilon \hat{J}_z + \frac{\gamma}{2} (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+), \quad (4.2)$$

si utilizamos la identidad $\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2$, podemos reescribir el hamiltoniano anterior

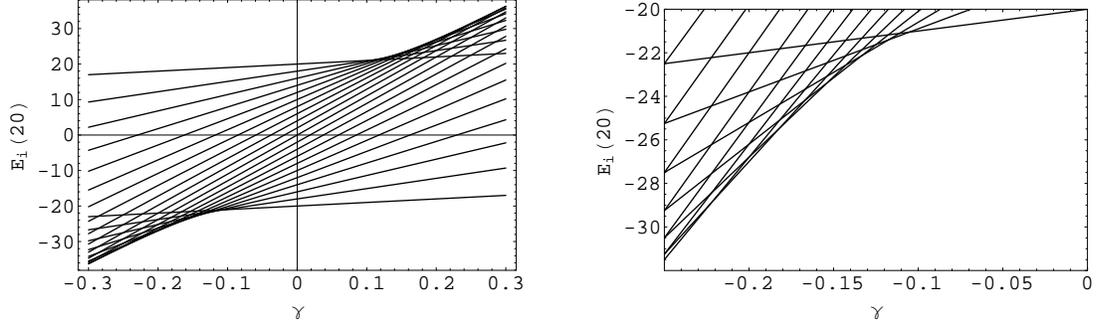


Figura 4.1: El espectro de energía es mostrado para el caso diagonal, con $N = 20$ y $\epsilon = 2$, en el lado izquierdo el intervalo de γ va de -0.3 a 0.3 . En el lado derecho el intervalo de γ se cambia a $(-0.25, -0.05)$.

en términos de los operadores \hat{J}_z y \hat{J}_z^2 , como

$$H = \epsilon \hat{J}_z + \frac{\gamma}{2}(\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2). \quad (4.3)$$

El correspondiente espectro de energías se obtiene tomando el valor esperado del hamiltoniano (4.3) en el estado $|J, M\rangle$, resultando

$$\langle J, M | H | J, M \rangle = \epsilon \langle J, M | \hat{J}_z | J, M \rangle + \gamma \langle J, M | (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2) | J, M \rangle = \epsilon M + \gamma [J(J+1) - M^2]. \quad (4.4)$$

Sin embargo, nos gustaría tener nuestras energías en términos del número de partículas, para ello tenemos que utilizar la base $\{|Nn\rangle\}$, que fue construida explícitamente en el capítulo 4 sección (4.1); y que está dada por la siguiente relación

$$|Nn\rangle = \sqrt{\frac{(N-n)!}{(N)!(n)!}} \hat{J}_+^n |N0\rangle, \quad (4.5)$$

donde $n = J + M$, toma valores entre 0 y N . El estado $|N0\rangle$ es el estado base no perturbado, es decir el estado para el cual $\lambda = \gamma = 0$, y todas las partículas ocupan el estado más bajo de energía. Por lo tanto, expresando el hamiltoniano (4.3) en términos de N y n , mediante las relaciones $M = n - \frac{N}{2}$ y $J = \frac{N}{2}$, resulta

$$E_n(N) = \epsilon \left(n - \frac{N}{2} \right) + \gamma \left\{ \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) - \left(n - \frac{N}{2} \right)^2 \right\}. \quad (4.6)$$

De la ecuación (4.6), tenemos que N es fijo y $n = 0, 1, \dots, N$. Si deseamos encontrar la degeneración de los niveles de energía tenemos que plantear la ecuación para la intersección de los niveles de energía consecutivos, que difieren por dos unidades, por tres unidades, etc. Al final resulta que sólo se deben considerar dos casos:

$$E_k(N) = E_{k+1}(N) \quad \text{o} \quad E_m(N) = E_{m+2}(N), \quad (4.7)$$

que corresponden a las intersecciones entre niveles de energía con distinta paridad o la misma, respectivamente.

En el primer caso se tiene por solución

$$\gamma_k^{(1)} = -\frac{\epsilon}{N - 2k - 1}, \quad (4.8)$$

con $k = 0, 1, \dots, N - 1$. En el segundo caso

$$\gamma_m^{(2)} = -\frac{\epsilon}{N - 2m - 1}, \quad (4.9)$$

con $m = 0, 1, \dots, N - 2$. Para todos estos valores de γ existe degeneración en el caso diagonal. Este procedimiento nos permite contar el número de degeneraciones de un sistema para un número N dado de partículas.

En la Figura 4.1 se muestra el espectro de energías para $N = 20$ y $\epsilon = 2$. En la gráfica del lado izquierdo se muestran tres diferentes regiones. De $-\infty < \gamma \leq -2/19$ existen intersecciones, exactamente en los valores dados por las expresiones (4.8) y (4.9). En la región $-2/19 < \gamma < 2/19$ no existen intersecciones entre los niveles de energía. Finalmente para la región $2/19 < \gamma < \infty$ nuevamente existen degeneraciones, la gráfica es simétrica intercambiando $E \rightarrow -E$ y $\gamma \rightarrow -\gamma$ como lo podemos ver de la expresión (4.6).

Para la gráfica del lado derecho de la Figura 4.1, se muestra con mayor detalle lo que sucede en la figura anterior. Así se pueden apreciar las intersecciones para las diferentes energías, para valores negativos de γ y positivos, siendo el estado base el que más intersecciones posee.

Para el caso más general, el hamiltoniano (4.1) tiene simetría de paridad. Únicamente se pueden conectar estados con la misma paridad de partículas: pares con pares, o impares con impares. Para el caso diagonal la paridad nos permite la clasificación de los estados propios del sistema. Cada vez que el estado base es par, el primer estado excitado es impar, y viceversa. Existen $N/2$ intersecciones entre el estado base y los primeros estados excitados si N es par, y $(N + 1)/2$ si N es impar.

4.1.2. Caso General $\lambda \neq 0$

Para el caso general la matriz Hamiltoniana (4.1) ya no es diagonal, ya que en este caso incluyen términos de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}(\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2)|J, M\rangle &= \frac{\lambda}{2}\sqrt{(J - M)(J - M - 1)(J + M + 1)(J + M + 2)}|J, M + 2\rangle \\ &+ \frac{\lambda}{2}\sqrt{(J + M)(J + M - 1)(J - M + 1)(J - M + 2)}|J, M - 2\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

o en la base $|N, n\rangle$, tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}(\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2)|N, n\rangle &= \frac{\lambda}{2}\sqrt{(N - n)(N - n - 1)(n + 1)(n + 2)}|N, n + 2\rangle \\ &+ \frac{\lambda}{2}\sqrt{n(n - 1)(N - n + 1)(N - n + 2)}|N, n - 2\rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por lo tanto tenemos que diagonalizar la matriz para un N fijo. Haciendo ésto para $N = 20$ y $\gamma = 0$, tenemos el espectro de energías mostrado en la Figura 4.2. En (a) de la Figura 4.2 puede apreciarse que no existen degeneraciones o intersecciones para valores finitos de λ . Sin embargo, en el límite $\lambda \rightarrow \pm\infty$, los niveles de energía se degenerarán por pares. En (b) de la Figura 4.2 se muestra el espectro de energías en función de λ , para $\gamma = -2.5$. Aquí se muestran las regiones donde existen intersecciones y regiones donde existen anti-intersecciones. Las regiones donde existen anti-intersecciones son asociadas con niveles de repulsión, y sólo pueden tener lugar en niveles con la misma paridad.

Para $\gamma \neq 0$ y $\lambda \neq 0$, las regiones en el espacio de parámetros donde se producen las intersecciones y las anti-intersecciones en los niveles cuánticos de energía obedecen al siguiente conjunto de hipérbolas

$$\gamma_k = \pm \sqrt{\lambda^2 + (\gamma_k^{(1)})^2}, \quad (4.12)$$

$$\gamma_m = \pm \sqrt{\lambda^2 + (\gamma_m^{(2)})^2}, \quad (4.13)$$

con $\gamma_k^{(1)}$ y $\gamma_m^{(2)}$ dadas por las ecuaciones (4.8) y (4.9), respectivamente. Cuando $\lambda = 0$ se produce

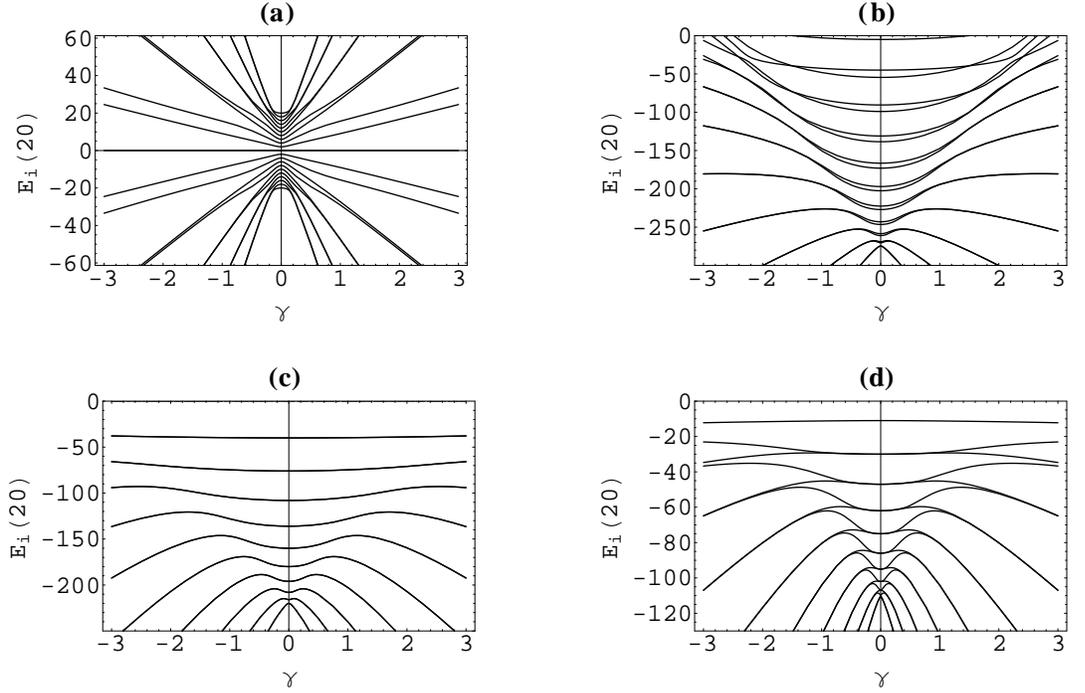


Figura 4.2: Gráficas de los niveles de energía como función del parámetro λ para $N = 20$ y $\epsilon = 2$. En la gráfica (a) se tiene $\gamma = 0$; no hay intersecciones en este caso. En la gráfica (b) $\gamma = -2.5$; en este caso existen intersecciones. En la gráfica (c) γ está relacionada con λ por la ecuación $\gamma = -\sqrt{\lambda^2 + 1}$. En la gráfica (d) γ está relacionada con λ por la ecuación $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

el caso diagonal y también muestra que no hay intersecciones cuando $\gamma = 0$, para algunos valores de λ .

El primer conjunto de hipérbolas está asociado con las intersecciones de los niveles de energía con diferente paridad. El número de intersecciones va de uno para $k = 0$, hasta $N/2$ o $(N+1)/2$ para $k = N - 1$ dependiendo de si el número de partículas es par o impar respectivamente. El segundo conjunto de hipérbolas está asociado a anti-intersecciones de los niveles de la misma paridad. Para las hipérbolas (4.12) con $m = 0$ existe un par de niveles con energías muy cercanas; para valores de m más grandes el número de pares de niveles de energía muy cercanos se incrementa hasta $N - 2$, donde existen $(N - 2)/2$ o $(N - 3)/2$ pares de energías muy cercanas, dependiendo de si N es par o impar. Estos pares de niveles se degenerarán en exactamente cuando $\lambda = 0$.

En (c) y (d) de la Figura 4.2 son mostrados dos espectros de energía en función de λ , para un sistema con $N = 20$ partículas, donde las intersecciones y anti-intersecciones pueden ser observadas. En la gráfica (c) el hamiltoniano fue diagonalizado para el conjunto de puntos (λ, γ) que están situados en la hipérbola equilátera

$$\gamma = -\sqrt{\lambda^2 + 4}, \quad (4.14)$$

la cual da la máxima degeneración entre los niveles de energía. Es decir todos los valores que coinciden con esta hipérbola están degenerados, excepto para el más alto valor de la energía.

En la gráfica (d) de la Figura 4.2, los niveles de energía son calculados para los valores de los parámetros (λ, γ) que están asociados con la hipérbola

$$\gamma = -\sqrt{\lambda^2 + 1}, \quad (4.15)$$

donde se encuentra el máximo intervalo de anti-intersecciones. Para este caso, existe degeneración sólo en $(\lambda = 0, \gamma)$ y en el límite asintótico $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

4.1.3. Estado Base y Primer Estado Excitado

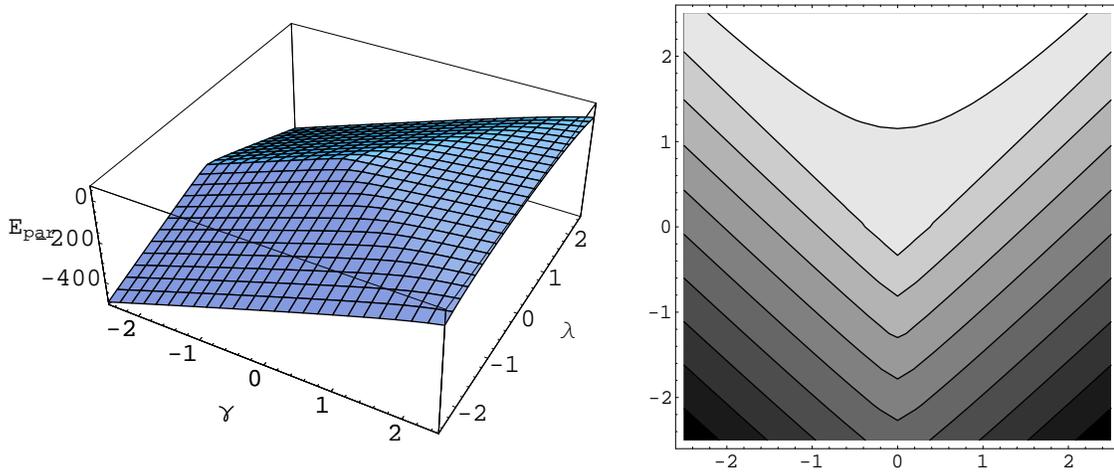


Figura 4.3: Superficies de energía del estado par y sus curvas de nivel, en ambos casos se grafica en función de λ y γ .

En esta sección los resultados para el estado base y el primer estado excitado son presentados para un sistema con $N = 20$ partículas, $\epsilon = 2$, y los parámetros de intensidad γ y λ , que van de $-2,5$ a $2,5$. La más baja energía con paridad par, como función de los parámetros γ y λ , define una superficie de energía, la cual es mostrada en la Figura 4.3. En esta figura (lado izquierdo) se puede apreciar claramente que la superficie de energía cuántica exhibe súbitos cambios en las pendientes para ciertos valores de γ y λ , estos cambios están aproximadamente asociados con las transiciones de fase del modelo clásico como se verá más adelante. En la gráfica del lado derecho se muestran las curvas de nivel, las cuales muestran la dependencia de λ con respecto a γ . Aquí puede observarse como se originan las hipérbolas, que como sabemos rigen las intersecciones y anti-intersecciones, y están dadas por las ecuaciones (4.12) y (4.13). Para valores pequeños de n , éstas son aproximadamente $\gamma = |\lambda|$.

Éstas intersecciones tienen un carácter universal, en el sentido de que el conjunto de que una de estas hipérbolas coincide para toda N . Ésto significa que si por ejemplo $N = 2$ existe sólo una

hipérbola. Para $N = 4$ existen dos, una de ellas siendo la misma que la del caso $N = 2$, para $N = 6$

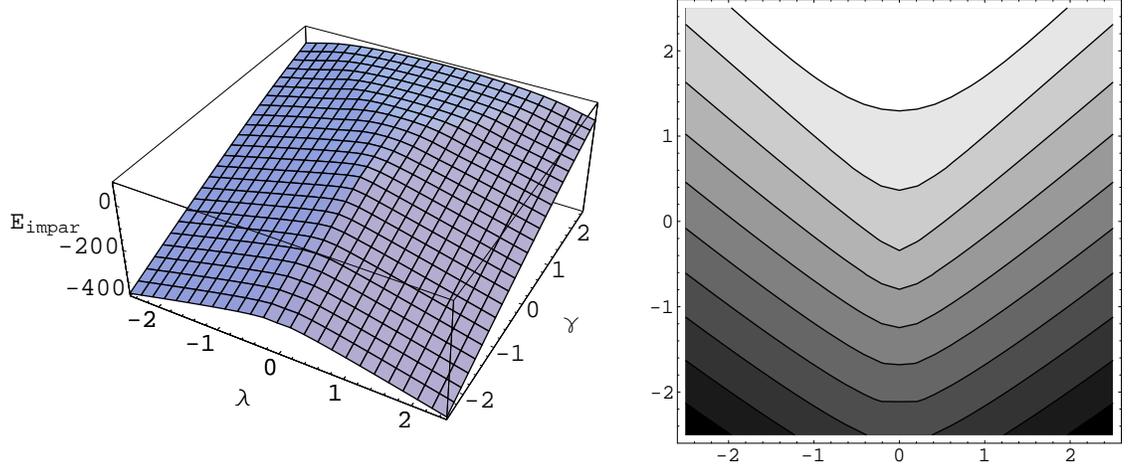


Figura 4.4: Superficies de energía del primer estado impar y sus curvas de nivel en ambos casos se grafica en función de λ y γ .

existen tres, las dos anteriores más una nueva. Cuando el número de partículas es impar la situación es similar.

En la Figura 4.4 se muestra la superficie de energía cuántica para el primer estado impar. En esta figura se puede apreciar los cambios en la pendiente para algunos valores de los parámetros γ y λ .

En el lado derecho de esta figura se muestran las curvas de nivel para el mismo intervalo de parámetros asociado con la superficie.

4.2. Análisis Semiclásico

Ahora nos gustaría obtener el hamiltoniano clásico del modelo de LMG. para ello tenemos que utilizar los estados coherentes de $su(2)$. Para realizar ésto tenemos que calcular el valor esperado de (4.1) en la base de los estados coherentes. Ésto lo podemos lograr multiplicando (4.1) por $\langle \zeta |$ y $|\zeta \rangle$ por la izquierda y la derecha respectivamente . De manera que nuestro hamiltoniano toma la siguiente forma

$$\mathcal{H} = \epsilon \langle \zeta | \hat{J}_0 | \zeta \rangle + \frac{\lambda}{2} (\langle \zeta | \hat{J}_+^2 | \zeta \rangle + \langle \zeta | \hat{J}_-^2 | \zeta \rangle) + \frac{\gamma}{2} (\langle \zeta | \hat{J}_+ \hat{J}_- | \zeta \rangle + \langle \zeta | \hat{J}_- \hat{J}_+ | \zeta \rangle). \quad (4.16)$$

Si ahora utilizamos nuestros elementos de matriz de la sección (3.6) el valor esperado del hamiltoniano, toma la forma

$$\mathcal{H} = -J\epsilon \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2} \right) + J(2J - 1)\lambda \left(\frac{\zeta^2 + \zeta^{*2}}{(1 + |\zeta|^2)^2} \right) + J\gamma \left(\frac{4J|\zeta|^2 + |\zeta|^4 + 1}{(1 + |\zeta|^2)^2} \right). \quad (4.17)$$

Utilizando el cambio de variable $\zeta = \tan(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}$, el primer término de la relación anterior se reduce a

$$\frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2} = \cos(\theta). \quad (4.18)$$

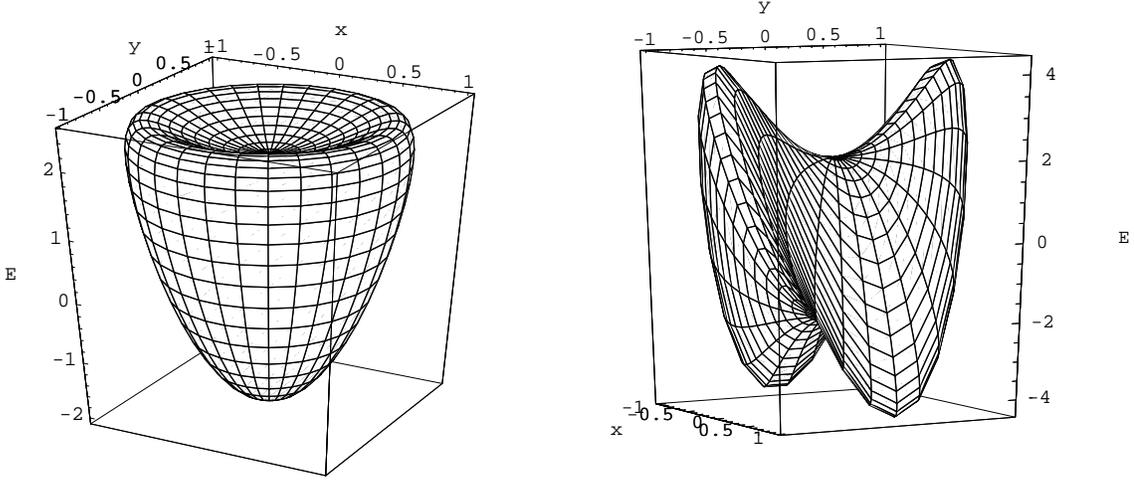


Figura 4.5: Superficies de energía clásica. En la gráfica del lado izquierdo se utilizaron los siguientes valores de los parámetros: $\gamma_x = 2$ y $\gamma_y = 2$. En la gráfica de la derecha fueron elegidos los valores $\gamma_x = -4$ y $\gamma_y = 4$.

El segundo término

$$\frac{\zeta^2 + \zeta^{*2}}{(1 + |\zeta|^2)^2} = \frac{1}{2}(\sin^2\theta\cos^2\phi - \sin^2\theta\sin^2\phi). \quad (4.19)$$

Por último el tercer término

$$\frac{4J|\zeta|^2 + |\zeta|^4 + 1}{(1 + |\zeta|^2)^2} = J\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{1}{2}. \quad (4.20)$$

Sumando las tres relaciones anteriores y multiplicando por las constantes que se encuentran delante de las mismas, nuestro hamiltoniano (5.4) queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{H} = \epsilon J \cos(\theta) + \frac{\lambda J(2J-1)}{2}(\sin^2\theta\cos^2\phi - \sin^2\theta\sin^2\phi) + J^2\gamma\sin^2\theta + J\gamma\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{J\gamma}{2}. \quad (4.21)$$

Definiendo x , y y z contenidas dentro de una esfera unitaria, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta) \cos(\phi), \\ y &= \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z &= -\cos(\theta), \end{aligned} \quad (4.22)$$

el hamiltoniano anterior (ecuación 4.21), se reduce a

$$\mathcal{H} = \mp\epsilon J\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{\lambda}{2}J(2J-1)(x^2-y^2) + (J^2\gamma - \frac{J\gamma}{2})(x^2+y^2) + J\gamma. \quad (4.23)$$

Agrupando las potencias de x y y , tenemos

$$\mathcal{H} = \mp 2\epsilon J\sqrt{1-x^2-y^2} + \left[\frac{(2J-1)(\gamma+\lambda)}{\epsilon} \right] x^2 + \left[\frac{(2J-1)(\gamma-\lambda)}{\epsilon} \right] y^2 + \frac{2\gamma}{\epsilon}. \quad (4.24)$$

Si dividimos entre ϵJ , restamos $\frac{2\gamma}{\epsilon}$ y definimos

$$\gamma_x = \frac{(2J-1)(\gamma+\lambda)}{\epsilon} \quad \text{y} \quad \gamma_y = \frac{(2J-1)(\gamma-\lambda)}{\epsilon}, \quad (4.25)$$

entonces el hamiltoniano anterior queda de la siguiente manera

$$\mathcal{E}^\pm = \mp 2\sqrt{1-x^2-y^2} + \gamma_x x^2 + \gamma_y y^2. \quad (4.26)$$

En términos de los ángulos, ésta toma la forma

$$\mathcal{E} = -2 \cos \theta + \gamma_x \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \gamma_y \sin^2 \theta \sin^2 \phi. \quad (4.27)$$

Estos dos últimos hamiltonianos son nuestra aproximación clásica del hamiltoniano cuántico, en coordenadas cartesianas y esfericas respectivamente.

En la Figura 4.5 se muestran las superficies de la energía (ecuación 4.26), para dos conjuntos de parámetros $\gamma_x = 2$, $\gamma_y = 2$ y $\gamma_x = -4$, $\gamma_y = 4$. En la figura del lado izquierdo se tienen dos máximos y dos mínimos; los máximos se encuentran en los puntos $(x, y) = (0.94, 0.28)$ y $(x, y) = (0.86, 0.27)$ con los valores $\mathcal{E}_{max} = 1.49$ y $\mathcal{E}_{max} = 2.49$ para el primer punto y para el segundo respectivamente; los mínimos se encuentran en los puntos $(x, y) = (0.45, 0.16)$ y $(x, y) = (0.45, 0.16)$ con los valores $\mathcal{E}_{min} = -1.30$ y $\mathcal{E}_{min} = 2.21$ para el primer punto y para el segundo respectivamente. Los mínimos se presentarán en los mismos puntos, los máximos en puntos diferentes. En la figura del lado derecho se tienen dos máximos y dos mínimos como en el caso anterior. Los máximos se encuentran en los puntos $(x, y) = (0.45, 0.16)$ y $(x, y) = (0.45, 0.16)$ con los valores $\mathcal{E}_{max} = -2.46$ y $\mathcal{E}_{max} = 1.06$ para el primer punto y para el segundo respectivamente; los mínimos se encuentran en los puntos $(x, y) = (-0.94, 0.28)$ y $(x, y) = (-0.94, 0.28)$ con los valores $\mathcal{E}_{min} = -3.61$ y $\mathcal{E}_{min} = -2.77$ para el primer punto y para el segundo respectivamente.

4.2.1. Puntos Críticos

Una vez obtenida nuestra aproximación clásica del hamiltoniano (4.1), todas las propiedades dinámicas están contenidas en (4.26). Para poder obtener las superficies de máxima y de mínima energía tenemos que calcular los máximos y mínimos de (4.26). Para ello tenemos que calcular los puntos críticos. Ésto se logra derivando con respecto a x y y , e igualando a cero ambas derivadas, de modo que

Tabla I. Puntos críticos para la raíz positiva y negativa de la función de la energía \mathcal{E}^\pm , y condiciones en las cuales las raíces son reales.

(x_c, y_c)	Condiciones de Existencia Sobre los Parámetros (\mathcal{E}^\mp)
$(0, 0)$	Ninguna
$(\pm\sqrt{1-1/\gamma_x^2}, 0)$	$\gamma_x < -1, \quad \gamma_x > 1$
$(0, \pm\sqrt{1-1/\gamma_y^2})$	$\gamma_y < -1, \quad \gamma_y > 1$
$x_c^2 + y_c^2 = 1 - 1/\gamma_0^2$	$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_0 < -1$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\pm}{\partial x} = 2x \left(\gamma_x \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\pm}{\partial y} = 2y \left(\gamma_y \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = 0. \quad (4.29)$$

Uno de los punto críticos es $(x_c, y_c) = (0, 0)$. El segundo lo obtenemos haciendo $y_c = 0$, por lo cual se tiene $x_c = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_x^2}}$. El tercero sería $(x_c, y_c) = (0, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_y^2}})$. Finalmente si se cumple $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_0$, tenemos un cuarto punto, que satisface $x_c^2 + y_c^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_0^2}$. Sólo nos interesan los puntos críticos reales, por lo cual los parámetros tienen que satisfacer ciertas condiciones, las cuales resumimos en la tabla I.

El comportamiento dinámico de un sistema clásico alrededor de un punto crítico está determinado por la matriz hessiana (ver apéndice C). Por lo tanto calculemos las segundas derivadas de (4.26)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}^\pm}{\partial x^2} = \pm \frac{2(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} + 2\gamma_x, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}^\pm}{\partial y^2} = \pm \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} + 2\gamma_y, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}^\pm}{\partial x \partial y} = \pm \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}^\pm}{\partial y \partial x}. \quad (4.32)$$

La matriz hessiana para la raíz positiva está dada por

$$\mathcal{H}^+ = \begin{pmatrix} \frac{2(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} + 2\gamma_x & \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} + 2\gamma_y \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

y el determinante por

$$\det \mathcal{H}^+ = \left(\frac{2(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} + 2\gamma_x \right) \left(\frac{2(1-x^2)}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} + 2\gamma_y \right) - \frac{4x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^3}. \quad (4.34)$$

Los conjuntos de bifurcación, son obtenidos de la condición $\det \mathcal{H}^+ = 0$. Examinemos los puntos críticos por separado

Tabla II. Los puntos críticos para la raíz positiva de la función de la energía \mathcal{E}^+ son indicados en la primer columna. En la segunda columna son dadas la regiones en las cuales estos puntos son máximos, mínimos o puntos silla. El corchete nos dice el caracter del punto crítico en las regiones en las cuales se dan dichos resultados.

(x_c, y_c)	Región de parámetros y caracter
(0, 0)	$1 + \gamma_x \geq 0$
	$1 + \gamma_x \geq 0$
	$1 + \gamma_x < 0$
	$1 + \gamma_x < 0$
	$1 + \gamma_x \leq 0$
	$1 + \gamma_x \geq 0$
$(\pm\sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}, 0)$	$\gamma_x < -1$
	$\gamma_x > \gamma_y$
	$\gamma_x < -1$
	$\gamma_x < \gamma_y$
$(0, \pm\sqrt{1 - 1/\gamma_y^2})$	$\gamma_y < -1$
	$\gamma_x > \gamma_y$
	$\gamma_y < -1$
	$\gamma_x < \gamma_y$
$x_c^2 + y_c^2 = 1 - 1/\gamma_0^2$	$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_0 < -1$ Indeterminado

$$(1) \quad (x_c, y_c) = (0, 0).$$

Para éste punto crítico la matriz hessiana es

$$\mathcal{H}^+ = \begin{pmatrix} 2(1 + \gamma_x) & 0 \\ 0 & 2(1 + \gamma_y) \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

y su determinante

$$\det \mathcal{H}^+ = 4(1 + \gamma_x)(1 + \gamma_y). \quad (4.36)$$

De la condición $\det \mathcal{H}^+ = 0$, tenemos

$$\gamma_x = -1, \quad \gamma_y = -1. \quad (4.37)$$

Los eigenvalores de \mathcal{H}^+ son $2(1 + \gamma_x)$ y $2(1 + \gamma_y)$, de los cuales se tiene: es un mínimo si $\gamma_x > -1$ y $\gamma_y > -1$, es máximo si $\gamma_x < -1$ y $\gamma_y < -1$. En los demás casos es un punto silla.

$$(2) \quad (x_c, y_c) = (\pm \sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}, 0) \text{ y } \gamma_x < -1.$$

Ahora la matriz hessiana está dada por

$$\mathcal{H}^+ = \begin{pmatrix} 2\gamma_x(1 - \gamma_x^2) & 0 \\ 0 & 2(\gamma_y - \gamma_x) \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

y el determinante por

$$\det \mathcal{H}^+ = 4\gamma_x(\gamma_y - \gamma_x)(1 - \gamma_x^2). \quad (4.39)$$

De la condición $\det \mathcal{H}^+ = 0$, tenemos

$$\gamma_y = \gamma_x. \quad (4.40)$$

De los eigenvalores de esta matriz se puede observar que, para uno de ellos siempre se cumple que $2\gamma_x(1 - \gamma_x^2) > 0$, por la condición $\gamma_y < -1$. Por otra parte, si $\gamma_x < \gamma_y$ el segundo eigenvalor es positivo, por lo tanto, se tiene un mínimo y si $\gamma_x > \gamma_y$ se tiene un punto silla.

$$(3) \quad (x_c, y_c) = (0, \pm \sqrt{1 - 1/\gamma_y^2}) \text{ y } \gamma_y < -1.$$

En este caso la matriz hessiana está dada por

$$\mathcal{H}^+ = \begin{pmatrix} 2(\gamma_x - \gamma_y) & 0 \\ 0 & 2\gamma_y(1 - \gamma_y^2) \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

y el determinante por

$$\det \mathcal{H}^+ = 4\gamma_y(\gamma_x - \gamma_y)(1 - \gamma_y^2). \quad (4.42)$$

De la condición $\det \mathcal{H}^+ = 0$, tenemos

$$\gamma_y = \gamma_x. \quad (4.43)$$

Los eigenvalores de (4.41) están dados por los elementos de la diagonal. Para el segundo elemento de esta matriz se cumple que $2\gamma_y(1 - \gamma_y^2) > 0$, por la condición $\gamma_y < -1$. El primer elemento de esta matriz, se tiene que $\gamma_y < \gamma_x$ se tiene un mínimo y si $\gamma_x < \gamma_y$ se tiene un punto silla.

$$(4) \quad (x_c, y_c) \text{ es tal que } x_c^2 + y_c^2 = 1 - 1/\gamma_0^2 \text{ y } \gamma_0 = \gamma_x = \gamma_y < -1.$$

En este último caso la matriz hessiana está dado por

$$\mathcal{H}^+ = \begin{pmatrix} -2\gamma_0^3 x_c^2 & 2\gamma_0^3 x_c y_c \\ 2\gamma_0^3 x_c y_c & -2\gamma_0^3 y_c^2 \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

y su determinante

$$\det \mathcal{H}^+ = 4\gamma^6 x_c^2 y_c^2 - 2\gamma^3 x_c y_c, \quad (4.45)$$

el cual es cero con la condición $x_c^2 + y_c^2 = 1 - 1/\gamma_0^2$. Por lo cual nuestro criterio nos dice nada acerca de la naturaleza de este punto crítico.

Para el caso de \mathcal{E}^- , el análisis es totalmente análogo por lo que no lo haremos aquí. Los resultados son resumidos en la Tabla III.

Tabla III. Los puntos críticos para la raíz negativa de la función de la energía \mathcal{E}^- son indicados en la primer columna. En la segunda columna son dadas la regiones en las cuales estos puntos son máximos, mínimos o puntos silla.

(x_c, y_c)	Región de parámetros y caracter	
(0, 0)	$1 - \gamma_x \geq 0$	} Máximo
	$1 - \gamma_x \geq 0$	
	$1 - \gamma_x < 0$	} Mínimo
	$1 - \gamma_x < 0$	
	$1 - \gamma_x \leq 0$	} Silla
	$1 - \gamma_x \geq 0$	
	$1 - \gamma_x \geq 0$	} Silla
	$1 - \gamma_x \geq 0$	
$(\pm\sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}, 0)$	$\gamma_x > 1$	} Silla
	$\gamma_x < \gamma_y$	
	$\gamma_x > 1$	} Máximo
	$\gamma_x > \gamma_y$	
$(0, \pm\sqrt{1 - 1/\gamma_y^2})$	$\gamma_y > 1$	} Máximo
	$\gamma_x < \gamma_y$	
	$\gamma_y > 1$	} Silla
	$\gamma_x > \gamma_y$	
$x_c^2 + y_c^2 = 1 - 1/\gamma_0^2$	$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_0 < -1$	Indeterminado

De los resultados anteriores podemos concluir que al hacer un cambio de parámetro $\gamma_x \rightarrow -\gamma_x$ y $\gamma_y \rightarrow -\gamma_y$ se tiene que $\mathcal{E}^- \rightarrow -\mathcal{E}^+$. Por lo tanto la naturaleza de esta reflexión nos dice que los puntos que son máximos en un hemisferio serán mínimos en el otro.

El comportamiento de las superficies de energía, se obtienen evaluando el punto crítico en la ecuación (4.26). Iniciando con el punto (0, 0), tenemos

$$\mathcal{E}^+ = -2, \quad \text{para } \gamma_x \geq -1, \gamma_y \geq -1,$$

$$\mathcal{E}^- = 2, \quad \text{para } \gamma_x \geq 1, \gamma_y \geq 1. \quad (4.46)$$

Es decir, en esta región la superficie de energía presenta dos mínimos; el más bajo corresponde a un valor constante $\mathcal{E}^+ = -2$. Para las demás superficies de energía, nuevamente evaluamos en los puntos críticos, obteniéndose

$$\mathcal{E}^+(x_c, y_c) = \Gamma + \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.47)$$

donde hemos definido

$$\Gamma = \begin{cases} \gamma_x, & \text{cuando } \gamma_x < -1, \text{ y } \gamma_x < \gamma_y \\ \gamma_y, & \text{cuando } \gamma_y < -1, \text{ y } \gamma_y < \gamma_x \\ \gamma_0, & \text{cuando } \gamma_x = \gamma_y = \gamma_0, \text{ y } \gamma_0 < -1 \end{cases}$$

Para \mathcal{E}^- , se realiza el siguiente conjunto de transformaciones $\mathcal{E}^- \rightarrow -\mathcal{E}^+$, $\gamma_x \rightarrow -\gamma_x$ y $\gamma_y \rightarrow -\gamma_y$, como ya se había notado.

4.2.2. Transiciones de Fase

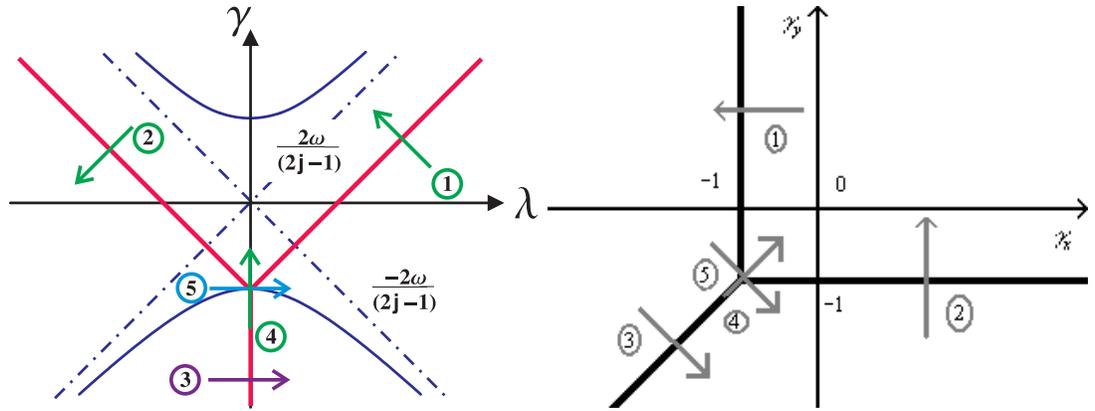


Figura 4.6: Separatriz dada en función de λ y γ (lado izquierdo), asociada a los conjuntos de bifurcación $\gamma_x = -1$, $\gamma_y = -1$ y $\gamma_x = \gamma_y$ con la condición $\gamma_x < -1$. Las flechas nos indican las regiones donde las transiciones de fase tienen lugar. Separatriz dada en función de γ_x y γ_y (lado derecho); para el conjunto de bifurcación $\gamma_x = -1$, $\gamma_y = -1$ y $\gamma_x = \gamma_y$ con la condición $\gamma_x < -1$.

Un punto crítico pertenece a un conjunto de Maxwell cuando sus energías en dos o más puntos críticos son iguales, y bajo pequeños cambios en los parámetros de control satisfacen las ecuaciones de Clausius-Clapeyron las cuales como sabemos están vinculadas con transiciones de fase de primer orden a P presión y T temperatura constantes. Cuando existen pequeños cambios en los parámetros de control, un conjunto de Maxwell es cruzado, la superficie de energía salta de una rama de un punto crítico a otro, y entonces una transición de fase tiene lugar.

Los conjuntos de Maxwell deben satisfacer

$$\mathcal{E}^{(p)} = \mathcal{E}^{(q)},$$

$$\{\partial\mathcal{E}^{(p)}/\partial\gamma_k - \partial\mathcal{E}^{(q)}/\partial\gamma_k\}\delta\gamma_k = 0, \quad (4.48)$$

con p y q corriendo sobre los diferentes puntos críticos. Los conjuntos de bifurcación están en el lugar geométrico del espacio de parámetros donde la función \mathcal{E} cambia, y los puntos de equilibrio son creados o destruidos. De acuerdo a las conclusiones de las secciones anteriores los conjuntos de bifurcación están dados por

$$\gamma_x = \pm 1; \quad \gamma_y = \pm 1; \quad \gamma_x = \gamma_y \quad \text{con} \quad |\gamma_x| \leq 1. \quad (4.49)$$

El orden de la transición de fase puede ser determinado siguiendo el criterio de clasificación de Ehrenfest [6], para transiciones de fase. Una transición de fase tiene lugar entre las ramas p y q de los puntos críticos, y es de n -ésimo orden, si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^i \mathcal{E}^{(p)}}{\partial s^i} \Big|_{s_0 - \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^i \mathcal{E}^{(q)}}{\partial s^i} \Big|_{s_0 + \delta}, \quad (4.50)$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$, pero falla para $i = n$. Como un ejemplo, consideremos la función $\mathcal{E}^+(x, y)$ cuando la línea $\gamma_x = -1$ es cruzada a lo largo de la línea recta $\gamma_y = \pm 2$, la flecha está mostrada en la Figura 4.6.

Consideremos para los parámetros de control las ecuaciones paramétricas

$$\gamma_x = -1 + \delta, \quad \gamma_y = 2, \quad (4.51)$$

luego la superficie de energía $\mathcal{E}^+(x, y)$ evaluada en los puntos críticos $(0, 0)$ y $(x_c, 0)$ están dadas por

$$\mathcal{E}^+(0, 0) = -2, \quad \mathcal{E}^+(x_c, 0) = \frac{1}{-1 + \delta} - 1 + \delta. \quad (4.52)$$

Seguindo la definición de Ehrenfest de una transición de fase es inmediato que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(0,0),(-1+\delta,2)}^+ &= \mathcal{E}_{(x_c,0),(-1+\delta,2)}^+, \\ \frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial \gamma_x} \Big|_{(0,0),(-1+\delta,2)} &= \frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial \gamma_x} \Big|_{(x_c,0),(-1+\delta,2)}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}^+}{\partial \gamma_x^2} \Big|_{(0,0),(-1+\delta,2)} &\neq \frac{\partial^2 \mathcal{E}^+}{\partial \gamma_x^2} \Big|_{(x_c,0),(-1+\delta,2)}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde las diferentes expresiones se han evaluado en los puntos críticos $(x_c = 0, y_c = 0)$ y $(x_c = 0, y_c = 0)$, y los parámetros de control $(\gamma_x = -1 + \delta, \gamma_y = 2)$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Por lo tanto, cuando de cruza la curva $(\gamma_x = -1)$, se trata de una transición de segundo orden. En general las transiciones de segundo orden tienen lugar cuando las líneas rectas $\gamma_x = -1$ (arreglo 1), $\gamma_y = -1$ (arreglo 2) y el punto $(\gamma_x, \gamma_y) = (-1, -1)$ (flecha 4 y 5). Las intersecciones de la líneas $\gamma_x = \gamma_y$ (flecha 3) corresponde a una transición de fase de primer orden. Se debe poner especial atención a las intersecciones de los puntos $(\gamma_x, \gamma_y) = (-1, -1)$ a lo largo de la línea recta $\gamma_y = -\gamma_x - 2$, ya que en este caso existe un trasiación de fase de tercer orden.

Los conjuntos de bifurcación de Maxwell asociados a las superficies de mínima energía, en términos de los parámetros de intensidad del modelo de Lipkin-Meshkov-Glick, están dados por las siguientes expresiones

$$\gamma \leq |\lambda| - \frac{\epsilon}{2J-1}, \quad \gamma = \pm \lambda - \frac{\epsilon}{2J-1}. \quad (4.54)$$

En la Figura 4.6 se muestran los conjuntos de bifurcación asociados a las transiciones de fase entre mínimos son mostrados con líneas grises. Estos máximos pueden ser obtenidos por medio de una reflexión a lo largo de la línea horizontal $\gamma = 0$. Note que existen transiciones de segundo orden cuando el mínimo del sistema salta del punto crítico $(0, 0) \rightarrow (x_c, 0)$, $(0, y_c) \rightarrow (0, 0)$ y $(x_c, y_c) \rightarrow (0, 0)$, además el punto $(x_c, 0) \rightarrow (0, y_c)$ es de primer orden. Cuando cruzamos el punto $(0, -\epsilon/(2J-1))$ a lo largo d ela línea recta $\gamma = -\epsilon/(2J-1)$, se tiene una transición de tercer orden.

También en ésta figura se muestra el espacio de parámetros dividido en tres regiones por las hipérbolas equiláteras

$$\gamma^2 - \lambda^2 = \left(\frac{\epsilon}{2J-1} \right)^2, \quad (4.55)$$

que son obtenidas al igualar las superficies de energía con diferente paridad, en los puntos críticos que tienen un mínimo absoluto. Ésta función tiene consecuencias en la determinación de las regiones en el espacio de parámetros en donde existen intersecciones y anti-intersecciones. Es decir, la rama superior de las hipérbolas equilateras existen intersecciones entre los máximos con diferente paridad, y la parte inferior se produce un fenómeno similar sólo que ahora para mínimos en las superficies de energía.

4.2.3. Trayectorias

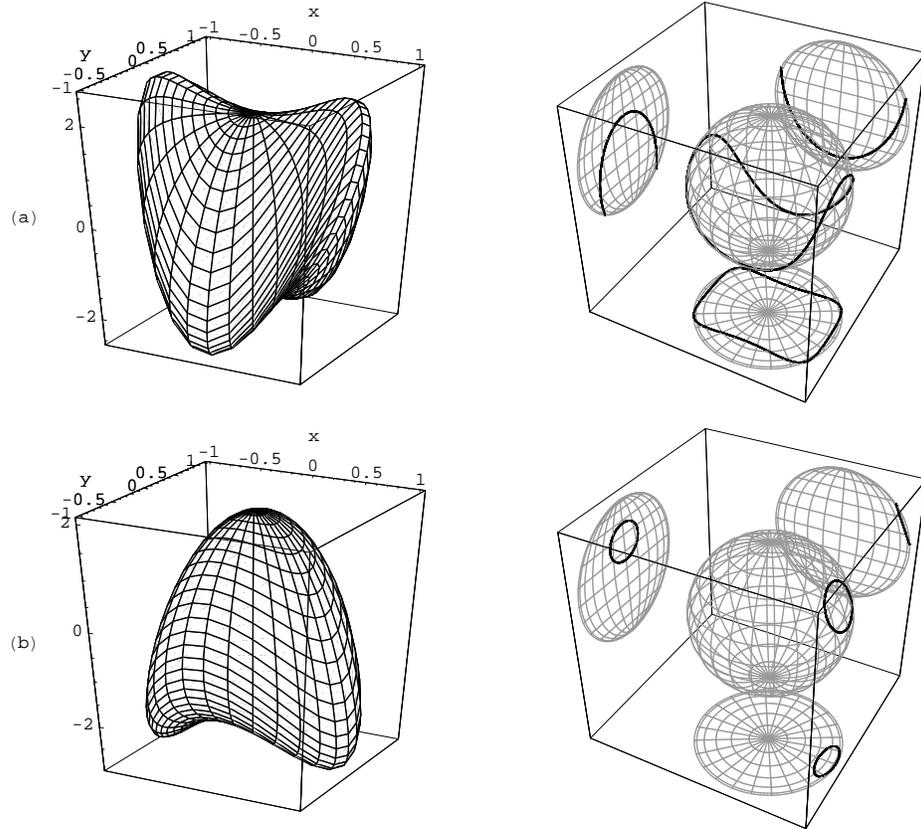


Figura 4.7: Superficies de energía y trayectorias; para condiciones iniciales y valores de los parámetros dados. (a) Valores de los parámetros $\gamma_x = 2$ y $\gamma_y = -2$ con condiciones iniciales $x(0) = 0.9$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0.4$. (b) Valores de los parámetros $\gamma_x = -2.5$ y $\gamma_y = -0.5$, y condiciones iniciales $x(0) = 0.87$, $y(0) = 0.3$ y $z(0) = 0.4$.

En esta sección obtendremos las ecuaciones de movimiento. Primero, en términos de θ y ϕ , para posteriormente obtenerlas en términos de las variables cartesianas x , y y z . Para ello utilicemos nuestra función de energía, la cual está dada por la ecuación (4.26). Introduzcamos esta función dentro de los corchetes de Poisson, ecuaciones (3.85). Realizando las operaciones tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\theta}{dt} = 2[\gamma_x - \gamma_y] \sin \theta \cos \phi \sin \theta,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 2 + 2[\gamma_x \cos^2 \phi + \gamma_y \sin^2 \phi] \cos \theta. \quad (4.56)$$

En términos de las coordenadas cartesianas x , y y z se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2(1 - \gamma_y z)y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2(1 - \gamma_x z)x, \\ \frac{dz}{dt} &= (\gamma_x - \gamma_y)xy. \end{aligned} \quad (4.57)$$

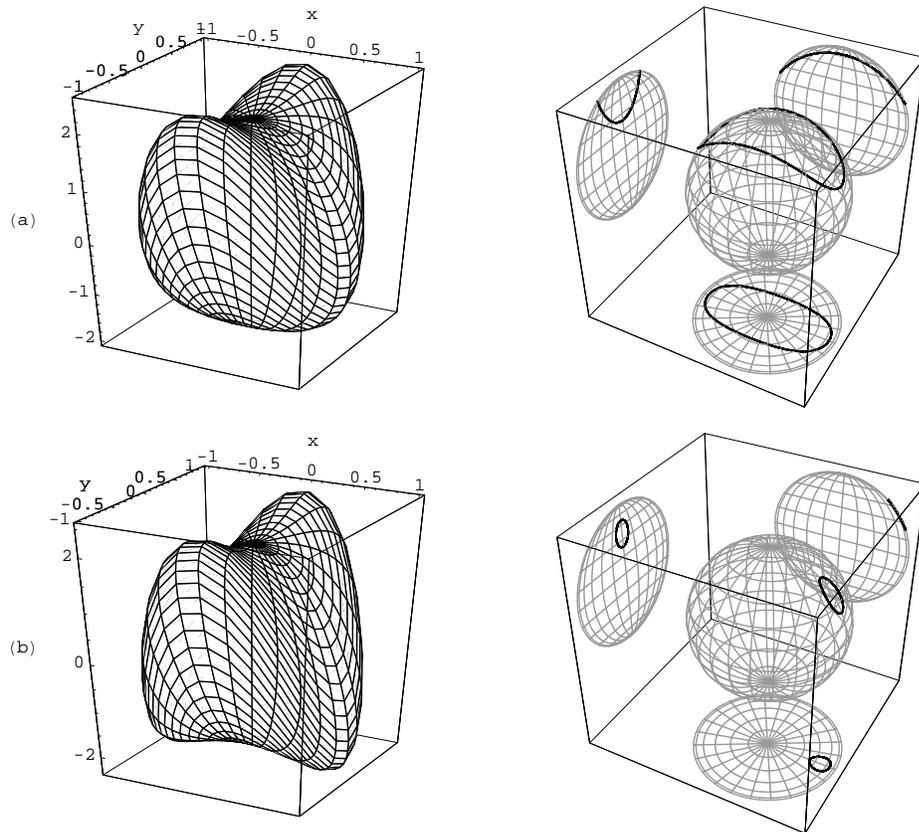


Figura 4.8: Superficies de energía y trayectorias; para condiciones iniciales y valores de los parámetros dados. (a) Valores de los parámetros $\gamma_x = -0.7$ y $\gamma_y = 2$ con condiciones iniciales $x(0) = 0.9$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0.4$. (b) Valores de los parámetros $\gamma_x = -1.7$ y $\gamma_y = 2$, y condiciones iniciales $x(0) = 0.9$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0.4$.

Las ecuaciones (4.56) y (4.57) son totalmente equivalentes, y describen el mismo movimiento en la esfera unitaria. Cabe mencionar que los puntos de equilibrio de estas ecuaciones de movimiento son los mismos encontrados en la sección 4.3, para la función de la energía.

El caso $\gamma_x = \gamma_y$, tiene una solución analítica dejando $z(t) = z(0)$ como una constante de movimiento. Si resolvemos las ecuaciones para x y y . Primero introduciendo la condición para z , se

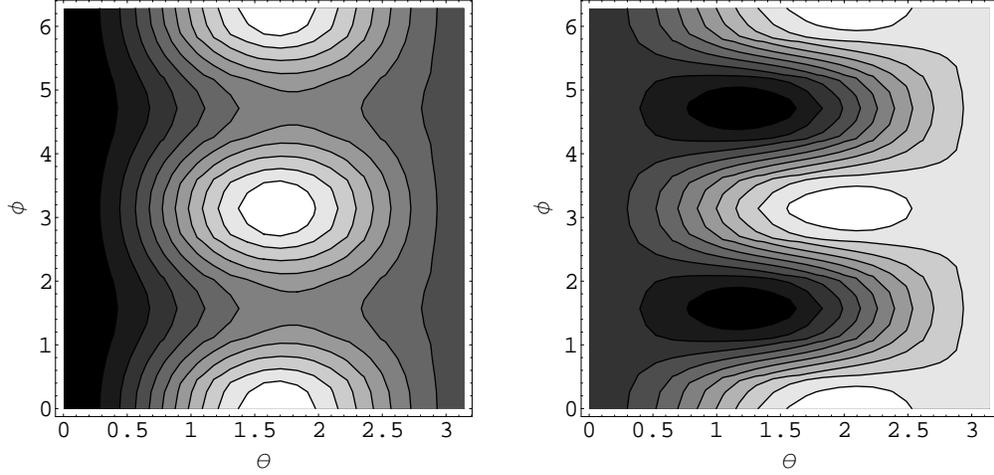


Figura 4.9: Curvas de nivel de la función de energía; con dos conjuntos de valores de los parámetros $\gamma_x = 10$, $\gamma_y = 4$ y $\gamma_x = 2.5$, $\gamma_y = -3$. Las curvas de nivel en ambas gráficas están dadas en función de los ángulos θ y ϕ .

tiene que resolver el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2(1 - \gamma_y z(0))y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2(1 - \gamma_x z(0))x.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Despejando $y(t)$ de la primer ecuación se tiene

$$y(t) = -\frac{1}{1 - \gamma_y z(0)} \frac{dx}{dt}.\tag{4.59}$$

Derivándola con respecto a t ; e introduciéndola en la segunda tenemos la ecuación de segundo grado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4(1 - \gamma_x z(0))^2 x.\tag{4.60}$$

Escribiendo $2(1 - \gamma_x z(0)) = \omega_0$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x,\tag{4.61}$$

que tiene por solución

$$x(t) = x(0) \sin \omega_0 t + y(0) \cos \omega_0 t.\tag{4.62}$$

Por lo tanto las soluciones para las tres coordenadas son

$$\begin{aligned}z(t) &= z(0) \\ x(t) &= x(0) \sin \omega_0 t + y(0) \cos \omega_0 t \\ x(t) &= y(0) \sin \omega_0 t - x(0) \cos \omega_0 t\end{aligned}\tag{4.63}$$

Para el caso $\gamma_x \neq \gamma_y$, el sistema de ecuaciones debe ser resuelto numéricamente. De acuerdo con la separatriz del sistema, las regiones de transición de fase en el espacio de parámetros están indicados en la Figura 4.6, a través de flechas numeradas del 1 al 5. Cada flecha muestra las regiones que al ser cruzadas se presentan transiciones de fase. En las Figuras 4.7 y 4.8, graficamos para algunos valores de los parámetros y poder apreciar las transiciones entre las regiones del espacio de parámetros. Las condiciones iniciales $x(0)$, $y(0)$ y $z(0)$ son seleccionadas de tal manera que siempre se encuentren sobre la esfera unitaria.

En la figura 4.7 (a) graficamos para los valores $\gamma_x = 2$ y $\gamma_y = -2$ en los parámetros con condiciones iniciales $x(0) = 0.9$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0.4$. En esta figura puede apreciarse que la trayectoria es cerrada y que se encuentra sobre los dos hemisferios de la esfera. Las proyecciones sobre los planos nos ayudan a ver en qué paralelo y meridiano se encuentran dichas trayectorias. Para este conjunto de valores de los parámetros la función de energía posee dos máximos y dos mínimos; los máximos con el valor $\mathcal{E}_{max} = 2.5$ en los puntos $(x, y) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Los mínimos con el mismo valor $\mathcal{E}_{min} = -2$, en los puntos $(x, y) = (0, \pm 1)$.

En la Figura 4.7 (b) se graficó para valores $\gamma_x = -2.5$ y $\gamma_y = -0.5$, con condiciones iniciales $x(0) = 0.87$, $y(0) = 0.3$ y $z(0) = 0.4$. Para este conjunto de valores de los parámetros la función de energía posee un máximo y dos mínimos; el máximo con el valor $\mathcal{E}_{max} = 1.2$ en el punto $(x, y) = (0.4, 0.2)$. Los mínimos con el valor $\mathcal{E}_{min} = -1.8$, en los puntos $(x, y) = (\pm 0.9, 0.3)$.

En la Figura 4.8 (a) se graficó para valores $\gamma_x = -0.7$ y $\gamma_y = 2$, con condiciones iniciales $x(0) = 0.9$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0.4$. Para este conjunto de valores de los parámetros la función de energía posee dos máximos y dos mínimos; el máximo con el valor $\mathcal{E}_{max} = 1.7$ en los puntos $(x, y) = (0.4, \pm 0.2)$. Los mínimos con el valor $\mathcal{E}_{min} = 0.03$, en los puntos $(x, y) = (\pm 0.9, 0.3)$.

En la Figura 4.8 (b) se graficó para valores $\gamma_x = -1.7$ y $\gamma_y = 2$, con condiciones iniciales $x(0) = 0.9$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0.4$. Para este conjunto de valores de los parámetros la función de energía posee dos máximos y dos mínimos; el máximo con el valor $\mathcal{E}_{max} = 1.5$ en los puntos $(x, y) = (0.4, \pm 0.2)$. Los mínimos con el valor $\mathcal{E}_{min} = 0.9$, en los puntos $(x, y) = (\pm 0.9, 0.3)$.

En la Figura 4.9 se graficó las curvas de nivel de la función de energía en términos de los ángulos θ y ϕ , para dos conjuntos de valores de los parámetros $\gamma_x = 10$, $\gamma_y = 4$ y $\gamma_x = 2.5$, $\gamma_y = -3$. Recuérdese que las curvas de nivel de la función de energía son trayectorias de las ecuaciones diferenciales (4.56) (soluciones) para diferentes valores constantes de la energía.

4.3. Comparación Entre el Análisis Cuántico y Clásico

Hemos visto que la dinámica de nuestro modelo clásico depende de las regiones del espacio de parámetros clasificadas por la separatriz del hamiltoniano. Ésto se puede apreciar en las superficies de energía; si variamos los parámetros de tal manera que tengamos valores en las diferentes regiones del espacio de parámetros, por ejemplo, un punto mínimo puede ser transformado a máximo o punto silla o viceversa, al producirse las transiciones de fase. Ésto también tiene consecuencias evidentes en las trayectorias; trayectorias que se encuentran en un hemisferio de la esfera al producirse la transición de fase pueden encontrarse en el otro hemisferio o pasar de una trayectoria que se encuentra alrededor de un mínimo a un máximo o un punto silla o cualquiera de estas combinaciones, cambiando la estabilidad del punto.

El comportamiento del sistema cuántico por otra parte puede ser también descrito en términos del modelo de la separatriz, ésto lo podemos ver en las superficies de la energía del primer estado par e impar; las pendientes de dichas superficies sufren súbitos cambios al variar los parámetros. Estos cambios son descritos aproximadamente por la separatriz del modelo clásico. En estas superficies puede observarse que existen tres regiones con diferentes pendientes, asociadas con las transiciones de fase clásica.

El modelo de la separatriz no sólo describe las transiciones de fase cuánticas, sino también las regiones donde se producen las intersecciones y las anti-intersecciones, siendo éstas descritas por el mismo conjunto de hipérbolas que describen las transiciones de fase, y las rectas que describen los valores de intersección para el caso diagonal.

En las gráficas de la figura 4.10 se muestran las curvas de nivel para el primer par de estados par e impar. Las líneas grises delgadas nos muestran la región donde se llevan a cabo los cambios en las pendientes de las superficies de energía cuántica, para los primeros estados par e impar. La parábola que se observa en la parte superior de ambas gráficas y las rectas grises, son las graficas asociadas aproximadamente a la separatriz graficada en términos de los parámetros del hamiltoniano

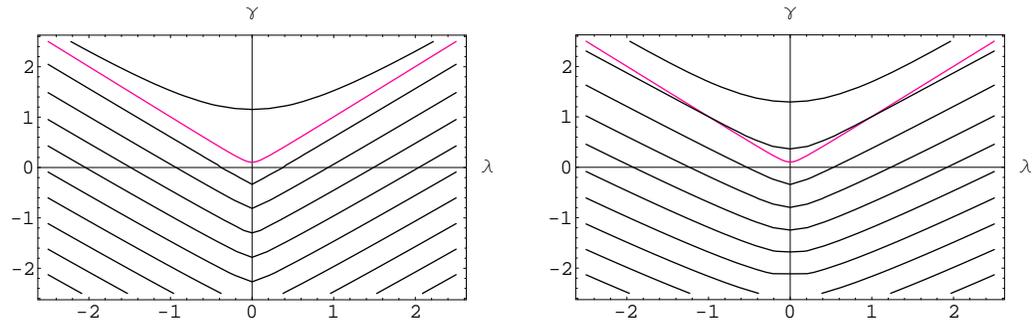


Figura 4.10: Curvas de nivel de la función de energía exacta cuántica para los primeros estados par e impar. Las líneas grises delgadas nos muestran las regiones donde se llevan a cabo las transiciones de fase en dichas superficies.

del modelo LMG de la sección 4.4. Las restantes rectas están asociadas con las ecuaciones 4.8 y 4.9 del caso diagonal, mostrándonos la fuerte relación que existe entre el modelo clásico y cuántico.

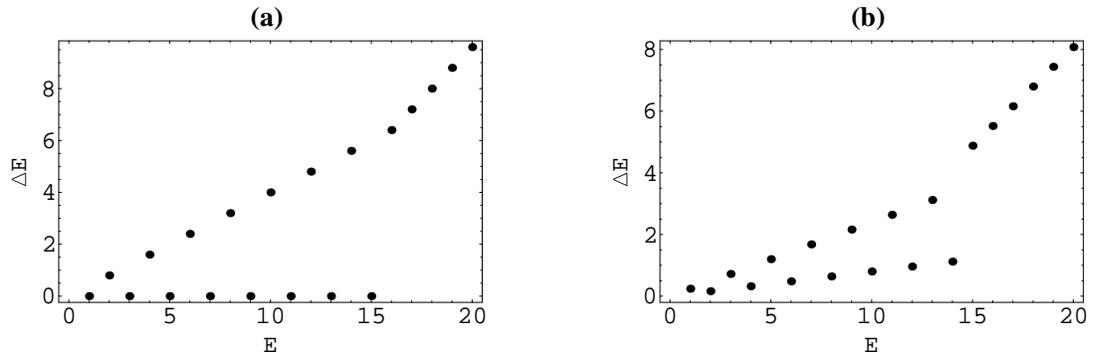


Figura 4.11: Diferencias de energía entre de los estados vecinos en función de la energía, para el caso diagonal. (a) $\gamma = -0.4$, para este valor existen nueve estados de energía degenerados. (b) $\gamma = -0.32$, para este valor la degeneración se rompe y sólo existen siete estados de energía degenerados. Para ambos casos se graficó para $N = 20$ y $\epsilon = 2$.

En la figura 4.11 se grafican las diferencias de energía de los estados próximos en función de la energía, para dos diferentes valores del parámetro γ . En estas gráficas puede apreciarse cómo al cambiar el valor del parámetro γ de $\gamma = -0.4$ a $\gamma = -0.32$ la degeneración es rota, y ésta pasa de

nueve niveles de energía degenerados a siete, presentándose nuevamente cambios importantes en las propiedades del sistema, con la variación de los parámetros en las diferentes regiones de la separatriz.

En la figura 4.12 se presentan las gráficas de las diferencias de energía entre los niveles de energía próximos en función de la energía, para el caso no diagonal. En la parte (a) de la figura se observan

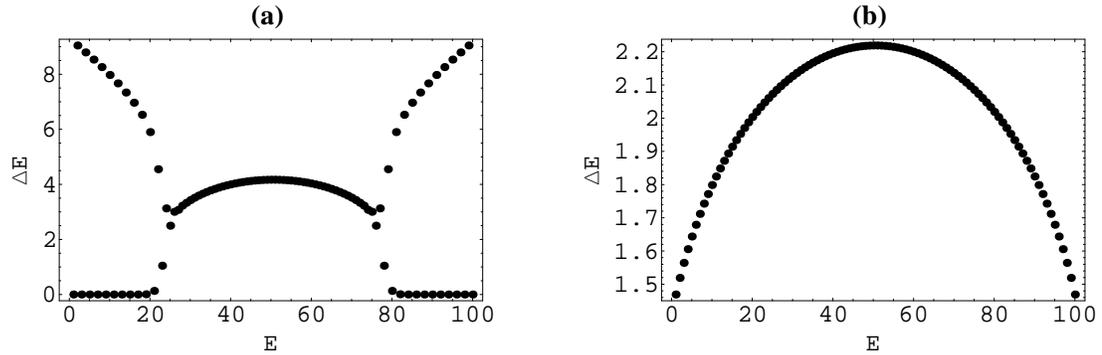


Figura 4.12: Diferencias de energía entre los estados próximos en función de la energía, para el caso no-diagonal. (a) $\lambda = -0.068$, para este valor existen dos regiones de niveles de energía degenerados, con una zona intermedia de separación de los niveles de energía aproximadamente constante. (b) $\lambda = -0.014$, para este valor el número de niveles de energía degenerados desaparece y la zona intermedia aumenta. Para ambos casos se graficó para $N = 100$, $\gamma = 0$ y $\epsilon = 2$.

dos regiones en las cuales los niveles de energía presentan degeneración, con una zona central en la cual los niveles de energía presentan una separación aproximadamente constante. La degeneración del lado izquierdo de esta gráfica corresponde a los niveles de más baja energía incluyendo al estado base, mientras que el lado derecho corresponde a los niveles de máxima energía. La parte (b) de la figura presenta un comportamiento totalmente diferente al anterior. Los niveles de energía en este caso no presentan degeneración, además de presentar aproximadamente el mismo espaciamiento.

Capítulo 5

Transiciones de Fase en el Modelo JC

En el capítulo anterior se mostró que los estados coherentes de $su(2)$ son una buena aproximación al caso clásico cuando el hamiltoniano depende a lo más en potencias cuadráticas en los operadores. Se utilizó este hecho para construir la función de energía clásica del hamiltoniano del modelo LMG, y comparar con el caso cuántico. Si bien este modelo sólo tenía dependencia de los generadores del álgebra $su(2)$, ésto no implica que no se pueda aplicar a algún modelo que mezcle las álgebras $su(2)$ y $hw(1)$. En este capítulo se presenta el modelo de Jaynes-Cummings que contiene una mezcla de los operadores de $su(2)$ y $hw(1)$, se hace el análisis de la función de energía clásica y se utiliza el modelo de la separatriz descrito en el capítulo para mostrar que dicho modelo describe propiedades no sólo del modelo clásico sino también del modelo cuántico.

5.1. Análisis Cuántico del Modelo de Jaynes-Cummings

Considere una pequeña muestra de material que contiene partículas de espín semi-entero localizadas dentro de una cavidad en la cual existe un campo eléctrico que tiene sólo una componente en la dirección x . Como mostramos en el capítulo (1), la energía del modo del campo está dada por

$$H_{campo} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (5.1)$$

donde ω es la frecuencia del modo bajo consideración.

El hamiltoniano de la parte atómica está dada por

$$H_{atom} = \omega_0 \hat{J}_0. \quad (5.2)$$

Por último la interacción está dada por

$$H_{in} = \kappa(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\hat{J}_x, \quad (5.3)$$

donde \hat{J}_x , puede ser escrito en términos de los operadores de ascenso y descenso, es decir, $\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2}$, por lo tanto (5.3) queda de la siguiente manera

$$H = \omega_0 \hat{J}_0 + \frac{\kappa}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-). \quad (5.4)$$

De manera que la suma de los hamiltonianos del campo, atómico e interacción nos da el hamiltoniano total

$$H = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_0 + \frac{\kappa}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-). \quad (5.5)$$

Este hamiltoniano puede ser simplificado tomando en cuenta la siguientes consideraciones. Cuando $\kappa = 0$, es decir, cuando no hay interacción, los operadores de Heisenberg tienen dependencia temporal de la siguiente manera

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}, \quad (5.6)$$

$$\hat{J}_+(t) = \hat{J}_+(0)e^{-i\omega_0 t}, \quad \hat{J}_-(t) = \hat{J}_-(0)e^{i\omega_0 t}. \quad (5.7)$$

Si sustituimos estos últimos operadores en el hamiltoniano (5.5), tenemos que cerca de la resonancia ($\omega \approx \omega_0$), los términos de interacción $\hat{a}\hat{J}_+$ y $\hat{a}^\dagger\hat{J}_-$ son prácticamente términos del campo, además los términos varían muy rápidamente con frecuencias $\pm(\omega + \omega_0)$. En el régimen de altas frecuencias, estos últimos términos promedian a cero, por lo que podemos escribir el hamiltoniano (5.5) simplemente como

$$H = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_0 + \frac{\kappa}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+). \quad (5.8)$$

Esta aproximación es equivalente a la descomposición de una onda linealmente polarizada [13], en dos ondas circularmente polarizadas en dirección opuesta, que sólo mantienen la rotación en la misma dirección en la que precede el espín.¹

El problema en esta etapa es resolver la ecuación de Schrödinger para el hamiltoniano (5.8). Presentaremos una solución debida a Jaynes y Cummings [14].

Por conveniencia, definamos dos nuevos operadores

$$\hat{S}_+ = \hat{J}_+ \hat{a}, \quad \hat{S}_- = \hat{J}_- \hat{a}^\dagger. \quad (5.9)$$

De las relaciones de conmutación (1.6) y (3.9), se puede demostrar que

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{S}_\pm] = \pm \hat{S}_\pm, \quad [\hat{J}_0, \hat{S}_\pm] = \pm 2\hat{S}_\pm, \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = \frac{1 + \hat{J}_0}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{J}_0. \quad (5.10)$$

Podemos encontrar que las ecuaciones de movimiento de Heisenberg [5] para estos operadores no son lineales. Sin embargo, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento, y sus constantes de movimiento. Verifiquemos directamente que los operadores

$$\hat{C}_1 = \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_0), \quad \hat{C}_2 = \kappa(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) - \Delta\omega \hat{J}_0, \quad (5.11)$$

donde $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, conmutan con el hamiltoniano (5.8) y que por lo tanto son constantes de movimiento. Se puede observar inmediatamente de (5.11) que

$$H = \hat{C}_1 + \hat{C}_2, \quad (5.12)$$

por lo tanto la relación anterior muestra que \hat{C}_1 y \hat{C}_2 no son independientes de H . Además se puede mostrar que

$$[\hat{C}_1, \hat{C}_2] = 0. \quad (5.13)$$

¹Ésta es llamada la aproximación de onda rotante y es válida sólo para acoplamiento débil.

Cuando no existe acoplamiento entre el espín y el campo de radiación, tenemos un conjunto completo de vectores base. Denotémoslos como $|n\rangle$, para el campo de radiación, y $|J, M\rangle$, para los espines [5], y su producto tensorial como $|n\rangle \otimes |J, M\rangle = |n; J, M\rangle$. Podemos utilizar este conjunto completo de estados para expandir los vectores de estado del sistema acoplado. Puede verse que

$$\hat{C}_1|n; J, M\rangle = \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{J}_0)|n; J, M\rangle = \omega(n + M)|n; J, M\rangle, \quad (5.14)$$

tal que los eigenvalores de \hat{C}_1 son $\omega(n+M)$ con eigenestados $|n; J, M\rangle$. Además en esta representación \hat{C}_1 es diagonal. Sin embargo, \hat{C}_2 en esta representación no es diagonal, pero de la relación (5.13) tenemos que \hat{C}_1 y \hat{C}_2 conmutan [5]. Por lo tanto, existe una base de eigenvalores comunes a \hat{C}_1 y \hat{C}_2 . En la base $|n; J, M\rangle$, \hat{C}_2 es tridiagonal.

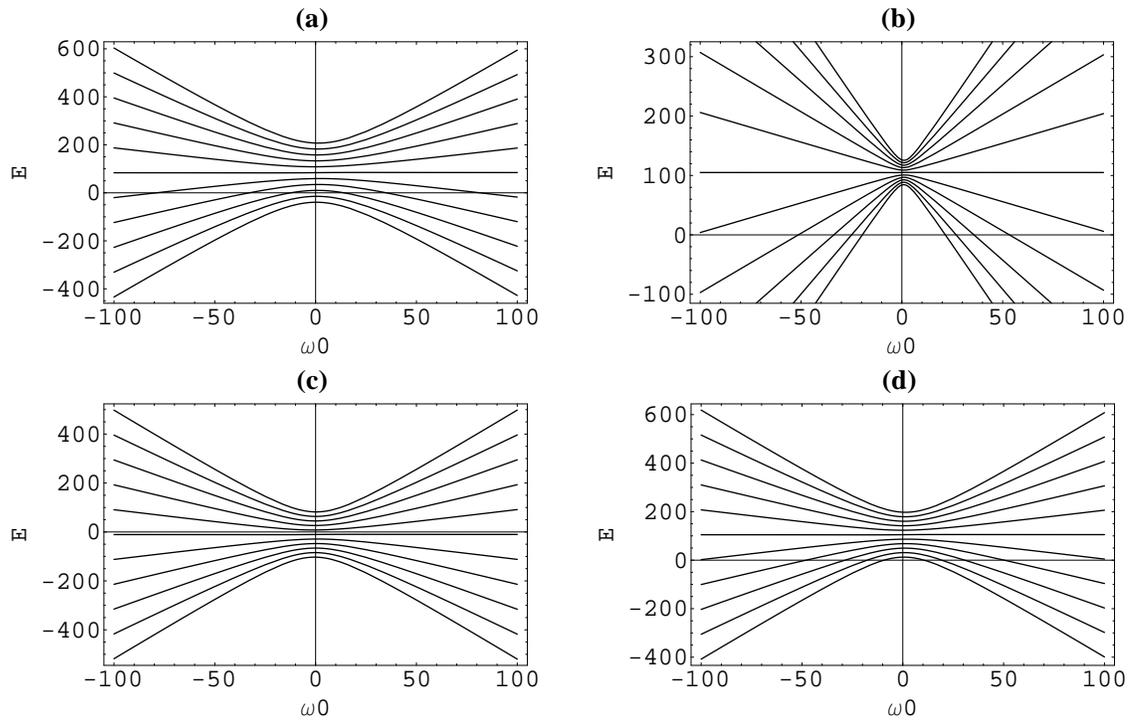


Figura 5.1: Espectro de energías cuánticas exactas, con valores en los parámetros siguientes: (a) $\omega = 0.8$ y $\kappa = 1.2$. (b) $\omega = 1$ y $\kappa = -0.2$. (c) $\omega = 1$ y $\kappa = -0.9$. (d) $\omega = 1$ y $\kappa = 3.9$. En todos los casos se tomo $J = 5$ y $n = 100$.

Comencemos observando que \hat{C}_1 es una constante de movimiento. Ésto implica que $\omega(n + M) = \text{constante}$, por lo que podemos escribir $n + M = N$ [21]. Apliquemos el operador \hat{C}_2 a este estado, de manera que después de una sencilla simplificación obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{C}_2|N - M; J, M\rangle &= \kappa\sqrt{(N - J + 1)(J + M)(J - M + 1)}|N - (M - 1); J, M - 1\rangle \\ &+ \kappa\sqrt{(N - J)(J - M)(J + M + 1)}|N - (M + 1); J, M + 1\rangle - \Delta\omega M|N - M; J, M\rangle, \end{aligned} \quad (5.15)$$

Si aplicamos $\langle N - M'; J, M' |$ por el lado izquierdo tenemos el siguiente elemento de matriz:

$$\langle N - M'; J, M' | \hat{C}_2 | N - M; J, M \rangle = \kappa\sqrt{(N - J + 1)(J + M)(J - M + 1)}\delta_{M', M-1} \quad (5.16)$$

$$+\kappa\sqrt{(N-J)(J-M)(J+M+1)}\delta_{M',M+1} - \Delta\omega M\delta_{M',M}$$

donde $\delta_{M',M}$ es la función delta de Kronecker. Para $J = \frac{1}{2}$ se tiene la matriz

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta\omega}{2} & \kappa\sqrt{(n+1)} \\ \kappa\sqrt{(n+1)} & \frac{\Delta\omega}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

con eigenvalores

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \kappa^2(n+1)}. \quad (5.18)$$

Por lo tanto, las energías del hamiltoniano para $J = \frac{1}{2}$ están dados por (ver W. H. Louisell referencia [21])

$$E_{1,2} = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \kappa^2(n+1)}. \quad (5.19)$$

Para valores más grandes de J se tienen que diagonalizar matrices tridiagonales de dimensión $2J+1$, donde J es el número cuántico de momento angular [5].

En las gráficas de la figura 5.1 se graficó para $J = 5$, y diferentes valores en los parámetros. En las gráficas se puede apreciar cómo para ningún valor de los parámetros para los cuales se graficó las energías se intersectan, o dicho de manera más precisa, las energías cuánticas exactas para estos valores de los parámetros están degenerados. Recordemos que en el caso del modelo LMG las intersecciones se producían aproximadamente en la separatriz del sistema clásico. En este modelo tal fenómeno parece no producirse. Sin embargo, como mostraremos más adelante las diferencias entre próximos vecinos en función de la energía nos muestran la relación que estas diferencias tienen con el modelo de la separatriz.

5.2. Análisis Semiclásico

Para obtener la función de energía clásica del hamiltoniano de Jaynes-Cummings (5.8), hagamos una pequeña observación; el hamiltoniano del modelo de LMG teníamos sólo operadores del álgebra $\text{su}(2)$ [7] por lo que sólo se utilizaron estados coherentes de dicha álgebra, en el hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings (JC) se mezclan operadores de las álgebras $\text{hw}(1)$ y $\text{su}(2)$, por lo tanto, tenemos que utilizar un estado que contenga a ambos estados. Ésto lo podemos lograr tomando el producto tensorial de ambos estados $|z\rangle \otimes |\zeta\rangle = |z, \zeta\rangle$. Haciendo ésto el valor esperado del hamiltoniano (5.8) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \langle z, \zeta | H | z, \zeta \rangle = \omega \langle z, \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | z, \zeta \rangle + \omega_0 \langle z, \zeta | \hat{J}_0 | z, \zeta \rangle + \kappa (\langle z, \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{J}_- | z, \zeta \rangle + \langle z, \zeta | \hat{a} \hat{J}_+ | z, \zeta \rangle) \\ &= \omega |z|^2 - \omega_0 J \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2} \right) + 2J\kappa \left(\frac{z\zeta^* + z^*\zeta}{1 + |\zeta|^2} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde cada uno de los estados del producto $|z\rangle \otimes |\zeta\rangle = |z, \zeta\rangle$, actúa sólo en los operadores de su álgebra. Utilizando los cambios de variable $\zeta = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$ y $z = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$, se obtiene

$$|z|^2 = \frac{q^2 + p^2}{2},$$

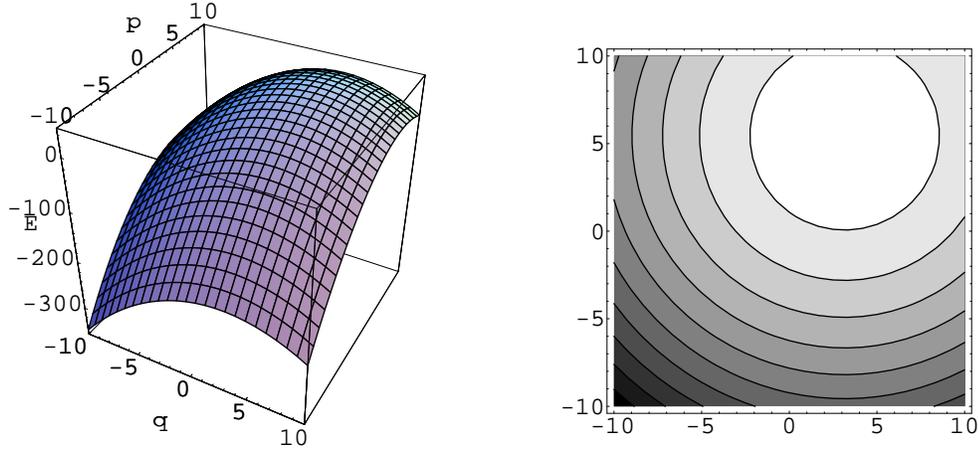


Figura 5.2: Superficie de energía y curvas de nivel para la función de energía \mathcal{E}^- , con x y y constantes. En esta figura los valores de los parámetros son: $J = 10$, $\omega = -1.9$, $\kappa = 1.2$ y $\omega_0 = 0.5$ con $x = 0.35$ y $y = 0.61$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2} &= -\cos \theta, \\ \frac{z\zeta^* + z^*\zeta}{1 + |\zeta|^2} &= \frac{q \sin \theta \cos \phi + p \sin \theta \sin \phi}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

por lo tanto, (5.20) queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}(q, p, \theta, \phi, \omega, \omega_0, \kappa, J) = \omega \frac{q^2 + p^2}{2} - \omega_0 J \cos \theta + \sqrt{2} J \kappa (q \sin \theta \cos \phi + p \sin \theta \sin \phi). \quad (5.22)$$

Definiendo $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$ y $z = -\cos \theta = \mp \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, tenemos

$$\mathcal{E}^\pm(q, p, x, y, \omega, \omega_0, \kappa, J) = \frac{\omega(q^2 + p^2)}{2} \mp \omega_0 J \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{2} J \kappa (qx + py). \quad (5.23)$$

Esta última expresión es nuestra aproximación clásica del modelo de Jaynes-Cummings, la cual llamaremos función de energía.

En las figuras 5.2 y 5.3 se muestran las superficies de energía así como sus curvas de nivel para algunos valores de los parámetros. En la figura 5.2 se graficó para x y y constantes. En la figura 5.3 se graficó para q y p constantes. Cada una de las curvas de nivel mostradas nos indican trayectorias en el espacio fase, observándose trayectorias cerradas alrededor del origen aproximadamente para el caso en el cual x y y son constantes, y trayectorias cerradas y periódicas para el caso en el cual q y p son constantes. Las zonas van de negras a blancas pasando por diferentes tonos de gris, las negras corresponden a trayectorias con las energías más pequeñas, yendo hasta las blancas las cuales son las de más grande energía. Las zonas grises corresponden a diferentes valores de la energía, acotadas por las energías más grandes y más pequeñas.

5.2.1. Puntos Críticos y Separatriz del Sistema

Para obtener los puntos críticos de la función de la energía clásica (5.23), calculemos las derivadas de primer orden. Hagámoslo para ambas raíces:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\pm}{\partial q} = \omega q + \sqrt{2} J \kappa x = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}^\pm}{\partial p} = \omega p + \sqrt{2} J \kappa y = 0, \quad (5.24)$$

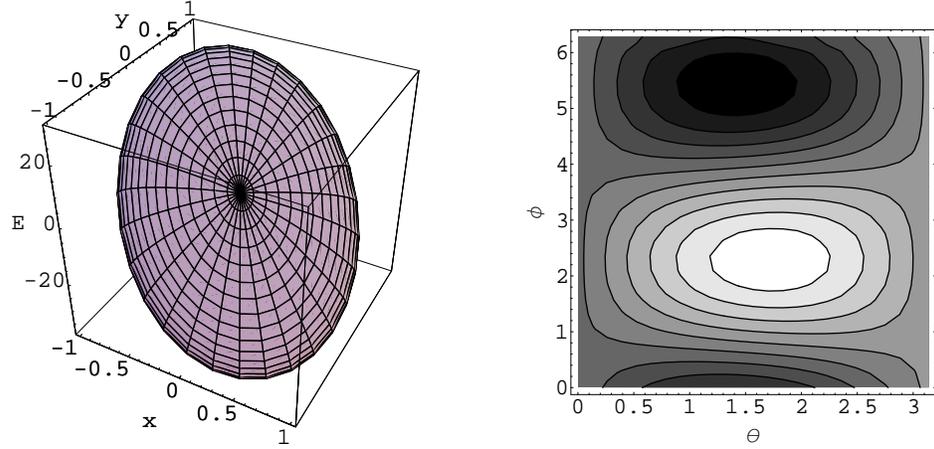


Figura 5.3: Superficies de energía y curvas de nivel para la función de energía dada en términos de los ángulos. En esta figura los valores de los parámetros son: $J = 10$, $\omega = -1.9$, $\kappa = 1.2$ y $\omega_0 = 0.5$ con $q = -1.3$ y $p = 1.5$.

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\pm}{\partial x} = \pm \frac{\omega_0 J x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{2} J \kappa q = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}^\pm}{\partial y} = \pm \frac{\omega_0 J y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{2} J \kappa p = 0. \quad (5.25)$$

Las raíces de estas cuatro ecuaciones simultáneas las resumimos en la siguiente tabla, con la condición

$$q_c = -\frac{\sqrt{2} J \kappa}{\omega} x_c \quad y \quad p_c = -\frac{\sqrt{2} J \kappa}{\omega} y_c. \quad (5.26)$$

Tabla I. Puntos críticos de la función de la energía, ecuación (5.23), y condiciones en las cuales estos puntos críticos son reales.

(x_c, y_c)	Condiciones de Existencia Sobre los Parámetros (\mathcal{E}^\pm)
$(0, 0)$	Ninguna
$(\pm \sqrt{1 - (\frac{\omega_0 \omega}{2J\kappa^2})^2}, 0)$	$ \frac{\omega_0 \omega}{2J\kappa^2} < 1$
$(0, \pm \sqrt{1 - (\frac{\omega_0 \omega}{2J\kappa^2})^2})$	$ \frac{\omega_0 \omega}{2J\kappa^2} < 1$
$x^2 + y^2 = 1 - (\frac{\omega_0 \omega}{2J\kappa^2})^2$	$ \frac{\omega_0 \omega}{2J\kappa^2} < 1$

Para obtener los conjuntos de bifurcación y con ello determinar la separatriz del sistema [6], debemos calcular la matriz hessiana en cada uno de los puntos críticos, e imponer la condición sobre el determinante de la matriz hessiana $\det \mathcal{H}^\pm(q_c, p_c, x_c, y_c) = 0$.

Caso 1. $(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0)$.

Para este caso se tiene la siguiente matriz hessiana [17], para \mathcal{E}^+ y \mathcal{E}^- respectivamente

$$\mathcal{H}^\pm(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \sqrt{2} J \kappa & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \sqrt{2} J \kappa \\ \sqrt{2} J \kappa & 0 & \pm \omega_0 J & 0 \\ 0 & \sqrt{2} J \kappa & 0 & \pm \omega_0 J \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

Sus determinantes y sus respectivos eigenvalores están dados por

$$\det \mathcal{H}^{\pm}(0, 0, 0, 0) = J^2(\omega\omega_0 \mp 2J\kappa^2)^2 \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{\pm}_{1,2} &= \frac{\omega \pm J\omega_0 - \sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega \mp J\omega)^2}}{2}, \\ \lambda^{\pm}_{3,4} &= \frac{\omega \pm J\omega_0 + \sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega \mp J\omega)^2}}{2}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

De la condición $\det \mathcal{H}^{\pm}(0, 0, 0, 0) = 0$ [6], se desprende que $\omega\omega_0 = 2J\kappa^2$ y $\omega\omega_0 = -2J\kappa^2$ para \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- respectivamente.

Tabla II. Los puntos críticos son indicados en la primer columna. En la segunda columna se dan la regiones en las cuales estos puntos son máximos, mínimos o puntos silla. Esta tabla corresponde a las dos funciones de energía \mathcal{E}^+ y \mathcal{E}^- .

(q_c, p_c, x_c, y_c)	Región de parámetros y caracter
$(0, 0, 0, 0)$	$\omega_0 > \frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ } Mínimo $\omega_0 < \frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ } Silla $\omega_0 < -\frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ } Mínimo $\omega_0 > -\frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ } Silla
$(-\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}x_c, -\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}y_c, \pm\sqrt{1 - (\frac{\omega_0\omega}{2J\kappa^2})^2}, 0)$	$\omega\omega_0 > 0, \quad \kappa \neq 0$ } Silla
$(-\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}x_c, -\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}y_c, 0, \pm\sqrt{1 - (\frac{\omega_0\omega}{2J\kappa^2})^2})$	$\omega\omega_0 > 0, \quad \kappa \neq 0$ } Silla
$(-\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}x_c, -\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}y_c, \pm\sqrt{1 - (\frac{\omega_0\omega}{2J\kappa^2})^2}, 0)$	$\omega\omega_0 < 0, \quad \kappa \neq 0$ } Silla
$(-\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}x_c, -\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}y_c, 0, \pm\sqrt{1 - (\frac{\omega_0\omega}{2J\kappa^2})^2})$	$\omega\omega_0 < 0, \quad \kappa \neq 0$ } Silla
$p_c^2 + q_c^2 = \frac{2J^2\kappa^2}{\omega^2}(x_c^2 + y_c^2) \quad x_c^2 + y_c^2 = 1 - (\frac{\omega_0\omega}{2J\kappa^2})^2$	$\omega\omega_0 > 0, \quad \kappa \neq 0$ } Silla
$p_c^2 + q_c^2 = \frac{2J^2\kappa^2}{\omega^2}(x_c^2 + y_c^2) \quad x_c^2 + y_c^2 = 1 - (\frac{\omega_0\omega}{2J\kappa^2})^2$	$\omega\omega_0 < 0, \quad \kappa \neq 0$ } Silla

Para todos los eigenvalores se cumple que $\sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega \mp J\omega)^2}$ siempre es mayor que cero para todo valor en los parámetros. Para obtener $\lambda^+_{1,2} > 0$ y $\lambda^+_{3,4} > 0$ se tiene que cumplir $\omega + J\omega_0 > \sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega - J\omega)^2}$; elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad y cancelando términos iguales, se tiene $\omega_0 > \frac{2J\kappa^2}{\omega}$, desigualdad que tiene sentido sólo si ω y ω_0 son números positivos, ya que J es siempre positivo. Además tenemos que $\sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega - J\omega)^2}$ es siempre un número

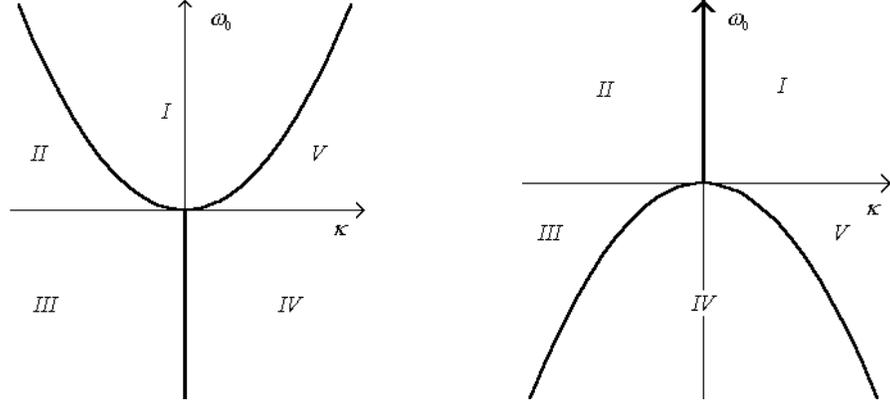


Figura 5.4: Separatrices para los siguientes conjuntos de bifurcación: Lado izquierdo (raíz positiva) y conjuntos $\omega_0 = \frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ y $\omega\omega_0 < 0$, $\kappa \neq 0$. Lado derecho (raíz negativa) y conjuntos $\omega_0 = -\frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ y $\omega\omega_0 > 0$, $\kappa \neq 0$. La numeración corresponde a: I mínimo, II, III, IV y V puntos silla para la separatriz del lado izquierdo. Para la separatriz del lado derecho, se tiene: I, II, III y V puntos silla y por último IV mínimos.

positivo, se tiene entonces que λ^+_{3} y λ^+_{4} son siempre mayor que cero. Por lo tanto si $\omega_0 > \frac{2J\kappa^2}{\omega}$ ($(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0)$) es un mínimo. En el caso de la desigualdad inversa, es decir, $\lambda^+_{1} < 0$ y $\lambda^+_{2} < 0$, tenemos $\omega + J\omega_0 < \sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega - J\omega^2)^2}$, elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, obtenemos $\omega_0 < \frac{2J\kappa^2}{\omega}$, pero se cumple siempre que la raíz $\sqrt{8J^2\kappa^2 + (\omega - J\omega^2)^2} > 0$ para cualquier valor de los parámetros; ésto implica que λ^+_{3} y λ^+_{4} son siempre mayor que cero, por lo cual tenemos que dos eigenvalores son positivos y dos negativos [17]. Por lo tanto, si se cumple $\omega_0 < \frac{2J\kappa^2}{\omega}$, ($(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0)$) es un punto silla.

Para los eigenvalores λ^-_{1} , λ^-_{2} , λ^-_{3} y λ^-_{4} los resultados son similares. Si $\omega_0 < -\frac{2J\kappa^2}{\omega}$, se cumple que los cuatro eigenvalores son positivos por lo cual ($(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0)$) es un mínimo. Si $\omega_0 > -\frac{2J\kappa^2}{\omega}$ se tiene dos eigenvalores positivos y dos negativos, por lo tanto, ($(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0)$) es un punto silla.

Caso 2. $(q_c, p_c, x_c, y_c) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Para estos casos las raíces restantes están dadas en la Tabla I, y la matriz hessiana [17] evaluado en éstos siempre es la misma, únicamente difieren en el signo para cada una de las raíces. Es decir, tenemos

$$\mathcal{H}^{\pm}(q_c, p_c, x_c, y_c) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \sqrt{2}J\kappa & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \sqrt{2}J\kappa \\ \sqrt{2}J\kappa & 0 & \pm \frac{8J^4\kappa^6|\omega\omega_0|}{\omega^4\omega_0^3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}J\kappa & 0 & \pm \frac{2\omega_0 J^2 \kappa^2}{|\omega\omega_0|} \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

Los determinantes y los eigenvalores están dados por

$$\det \mathcal{H}^{\pm} = \mp \frac{4J^4\kappa^4(4J^2\kappa^4 + \omega^2\omega_0^2)(|\omega\omega_0| \mp \omega\omega_0)}{\omega^3\omega_0^3}, \quad (5.31)$$

$$\lambda^{\pm}_{1,2} = \frac{\omega^3\omega_0 \pm 2J^2\kappa^2|\omega\omega_0| \pm \sqrt{4J^4\kappa^4\omega^2\omega_0^2 + 8J^2\kappa^2\omega^4\omega_0^2 + \omega^6\omega_0^2 \mp 4J^2\kappa^2\omega^3\omega_0|\omega\omega_0|}}{2\omega^2\omega_0}, \quad (5.32)$$

$$\lambda^{\pm}_{3,4} = \frac{\omega^5 \omega_0^3 \pm 8J^4 \kappa^6 |\omega \omega_0| \pm \sqrt{64J^8 \kappa^{12} \omega^2 \omega_0^2 + 8J^2 \kappa^2 \omega^8 \omega_0^6 + \omega^{10} \omega_0^6 \mp 16J^4 \kappa^6 \omega^5 \omega_0^3 |\omega \omega_0|}}{2\omega^3 \omega_0^3}.$$

En este caso si tomamos $\omega \omega_0 < 0$ y $\omega \omega_0 > 0$ cada uno de los determinantes $\det \mathcal{H}^+(q_c, p_c, x_c, y_c)$ y $\det \mathcal{H}^-(q_c, p_c, x_c, y_c)$ son diferentes de cero. Por lo tanto, la única forma en que se puede satisfacer la condición $\det \mathcal{H}^+(q_c, p_c, x_c, y_c) = 0$ y $\det \mathcal{H}^-(q_c, p_c, x_c, y_c) = 0$ es tomando $\kappa = 0$, para ambos determinantes.

Si pasamos la raíz de la desigualdad $\lambda^+_2 < 0$ del lado derecho, elevamos al cuadrado ambos miembros de la desigualdad y eliminamos términos semejantes, se obtiene $8J^2 \kappa^2 \omega^3 \omega_0 |\omega \omega_0| < 8J^2 \kappa^2 \omega^4 \omega_0^2$, la cual sólo tiene sentido si $\omega \omega_0 < 0$, por lo cual tenemos $16J^2 \kappa^2 \omega^4 \omega_0^2 > 0$, de aquí se desprende $\kappa^2 > 0$, es decir, $\kappa > 0$ o $\kappa < 0$. Por tener el primer eigenvalor λ^+_1 la raíz positiva, la cual siempre es positiva para cualquier valor de los parámetros, y ésta ser mayor que el primer término de este eigenvalor se cumple que $\lambda^+_1 > 0$. Para los dos eigenvalores restantes λ^+_3 y λ^+_4 se cumplen desigualdades similares, es decir, si de la desigualdad $\lambda^+_4 < 0$, pasamos la raíz cuadrada del lado derecho, elevamos al cuadrado y eliminamos términos semejantes se obtiene $24J^2 \kappa^6 \omega^5 \omega_0^3 |\omega \omega_0| < 24J^2 \kappa^6 \omega^8 \omega_0^6$, desigualdad que sólo tiene sentido si $\omega_0 \omega < 0$, de aquí se desprende $k^2 > 0$, es decir, $k > 0$ o $k < 0$. Por lo tanto, si $\omega \omega_0 < 0$ y $\kappa \neq 0$, se tiene que dos eigenvalores son negativos y dos positivos, y en consecuencia todos los puntos $(q_c, p_c, x_c, y_c) \neq (0, 0, 0, 0)$ son puntos silla.

Para los eigenvalores $\lambda^-_1, \lambda^-_2, \lambda^-_3$ y λ^-_4 , se cumplen relaciones semejantes a las anteriores. Tenemos un par de eigenvalores positivos y un par negativos, con las condiciones sobre los parámetros $\omega \omega_0 > 0$ y $\kappa \neq 0$. Por lo tanto, los puntos $(q_c, p_c, x_c, y_c) \neq (0, 0, 0, 0)$ son puntos silla. En la tabla II resumimos todo lo dicho acerca de la naturaleza de los puntos críticos.

En la figura 5.4 (lado izquierdo) se muestran la separatriz asociadas a los conjuntos de bifurcación $\omega_0 = \frac{2J^2 \kappa^2}{\omega}$ y $\omega \omega_0 < 0, \kappa \neq 0$. Región I, región donde se presentan mínimos. Regiones II, II, IV y V, regiones donde se presentan puntos silla.

En el lado derecho de la figura 5.4 se muestran la separatriz asociada los conjuntos de bifurcación $\omega_0 = -\frac{2J^2 \kappa^2}{\omega}$ y $\omega \omega_0 > 0, \kappa \neq 0$. Regiones I, II, III y V, regiones donde puntos silla. Región IV, región donde se presentan mínimos. Este mismo conjunto de separatrices fue encontrado por R. Gilmore y L. M. Narducci [8]. Sólo que a diferencia del trabajo aquí presentado, ellos utilizaron la ecuación 1.20 para obtener las ecuaciones de movimiento del hamiltoniano del modelo JC, al que se le había agregado un campo externo de la forma $\alpha(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$, donde α es un parámetro real y la aproximación de campo medio para poder tratar los valores operadores de ascenso, descenso, aniquilación y creación como independientes y hallar los puntos de equilibrio en los casos estacionario y no-estacionario. De las condiciones de equilibrio se obtuvo un potencial de cuarto orden el cual proporciono los puntos críticos en función de dos parámetros que a su vez dependían de los parámetros involucrados en el hamiltoniano del modelo JC. Cuando $\alpha = 0$ este hamiltoniano se reduce al estudiado en este capítulo.

5.2.2. Transiciones de Fase

En la figura 5.2.2 se muestran la superposición de las dos separatrices de la sección anterior. Las regiones numeradas son las regiones en las cuales estudiaremos las transiciones de fase [6].

La forma en que se pueden cruzar las regiones de I a III y de II a IV, es a través de un número infinito de rectas. Sin embargo, todas las podemos estudiar tan sólo con un par de rectas de la forma

$$\omega_0 = \pm \tan \theta \delta \quad \text{y} \quad \kappa = \delta, \quad (5.33)$$

donde $\tan \theta$ es la pendiente de cada una de las rectas y satisface la condición

$$-\frac{2J^2 \kappa}{\omega} < \tan \theta < \frac{2J^2 \kappa}{\omega}. \quad (5.34)$$

La cual nos asegura que las rectas no cortarían las parábolas. Las energías asociadas en estas regiones están dadas por

$$\mathcal{E}^{\pm}(q_c, p_c, x_c, y_c) = \mp J\omega_0, \quad (5.35)$$

correspondientes a las parábolas superior e inferior respectivamente. Con estas condiciones el criterio

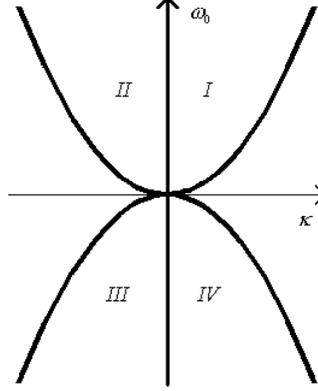


Figura 5.5: Separatrices superpuestas para ambos conjuntos de bifurcación $\omega_0 = \frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ y $\omega\omega_0 < 0$, $\kappa \neq 0$, y $\omega_0 = -\frac{2J^2\kappa^2}{\omega}$ y $\omega\omega_0 > 0$, $\kappa \neq 0$. Cuando se cruzan las regiones de II a III y de II a IV a través de las rectas $(\pm \tan \theta \delta, \delta)$ se producen transiciones de primer orden.

de Ehrenfest [6] nos da lo siguiente:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{E}^- \Big|_{(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0), (\tan \theta \delta, \delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{E}^+ \Big|_{(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0), (\tan \theta \delta, \delta)}, \quad (5.36)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{E}^-}{\partial \delta} \Big|_{(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0), (\tan \theta \delta, \delta)} \neq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial \delta} \Big|_{(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0), (\tan \theta \delta, \delta)}. \quad (5.37)$$

El cual nos indica que las transiciones de fase que tienen lugar al cruzar de la región I a la región III y de la región II a la IV son transiciones de primer orden.

5.2.3. Equivalencia entre el Modelo LMG y JC

Si resolvemos (5.24) para q y p obtenemos

$$q = -\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}x \quad y \quad p = -\frac{\sqrt{2}J\kappa}{\omega}y. \quad (5.38)$$

Si sustituimos este par de ecuaciones en la función de energía (5.23) se tiene

$$\mathcal{E}^{\pm}(q, p, x, y, \omega, \omega_0, \kappa, J) = \mp \omega_0 J \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{J^2 \kappa^4}{\omega} (x^2 + y^2). \quad (5.39)$$

Dividiendo entre $\omega_0 J$ y definiendo $\gamma_0 = \frac{2J\kappa^2}{\omega\omega_0}$, resulta

$$\mathcal{E}^{\pm}_{LMG}(x, y, \gamma_0) = \mp 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \gamma_0(x^2 + y^2), \quad (5.40)$$

la cual es exactamente la función de energía del modelo LMG (4.26), para el caso en el que se cumple $\gamma_x = \gamma_y = -\gamma_0$. Por lo tanto, en este contexto el modelo JC es equivalente al modelo LMG. Este

hecho ya había sido advertido por J. Reslen, L. Quiroga y N. F. Johnson [22, 23] y J. G. Brankov, N. S. Tonchev y V. A. Zagrebnov [1] en una serie de artículos y notas publicadas en el año 2005. El caso en el cual $\gamma_x = \gamma_y = -\gamma_0$ del modelo LMG, se tenía que los puntos críticos satisfacían la relación $x_c^2 + y_c^2 = 1 - 1/\gamma_0^2$, para los cuales el criterio del apéndice C fallaba, ya que en este caso el determinante de la matriz hessiana era cero.

5.2.4. Ecuaciones de Movimiento

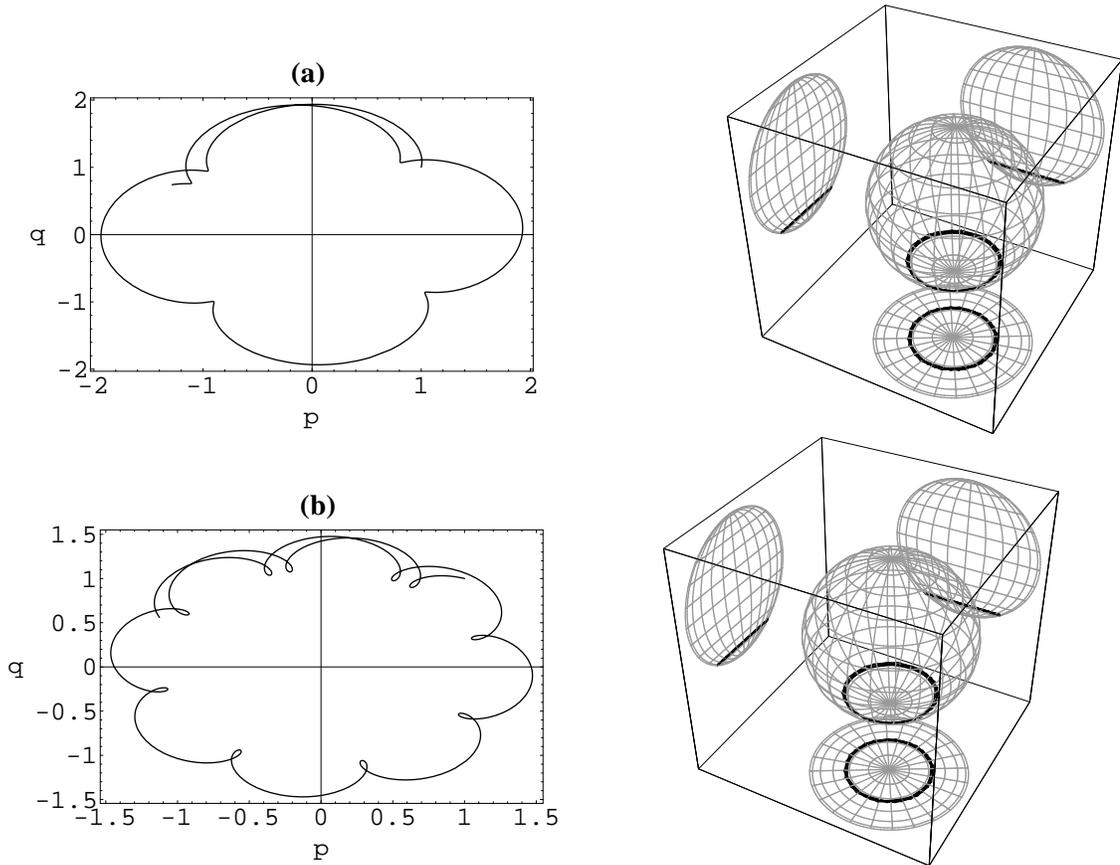


Figura 5.6: Trayectorias asociadas a la parte del campo electromagnético y al átomo. (a) Valores de los parámetros $\omega_0 = 5$, $\omega = 1$ y $\kappa = 0.03$. (b) Valores de los parámetros $\omega_0 = 9$, $\omega = 1$ y $\kappa = -0.04$. En los dos casos se utilizaron las mismas condiciones iniciales $q(0) = 1$, $p(0) = 1$, $\theta(0) = 10$ y $\phi(0) = 0$ con $J = 50$.

Para obtener las ecuaciones de movimiento, de la función de la energía se tienen que utilizar los corchetes de Poisson de las álgebras $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{hw}(1)$, dadas por las ecuaciones (2.80) y (3.85), realizando las operaciones que involucran estos corchetes se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones, para los ángulos

$$\dot{\theta} = \sqrt{2}\kappa(-q \cos \phi + p \operatorname{sen} \phi), \quad \dot{\phi} = -\omega_0 - \sqrt{2}\kappa \cot \theta (q \cos \phi + p \operatorname{sen} \phi). \quad (5.41)$$

Las ecuaciones para q y p son las siguientes:

$$\dot{q} = \omega p + \sqrt{2\kappa}J \sin \theta \cos \phi y \quad \dot{p} = -\omega q - p\sqrt{2\kappa}J \sin \theta \sin \phi. \quad (5.42)$$

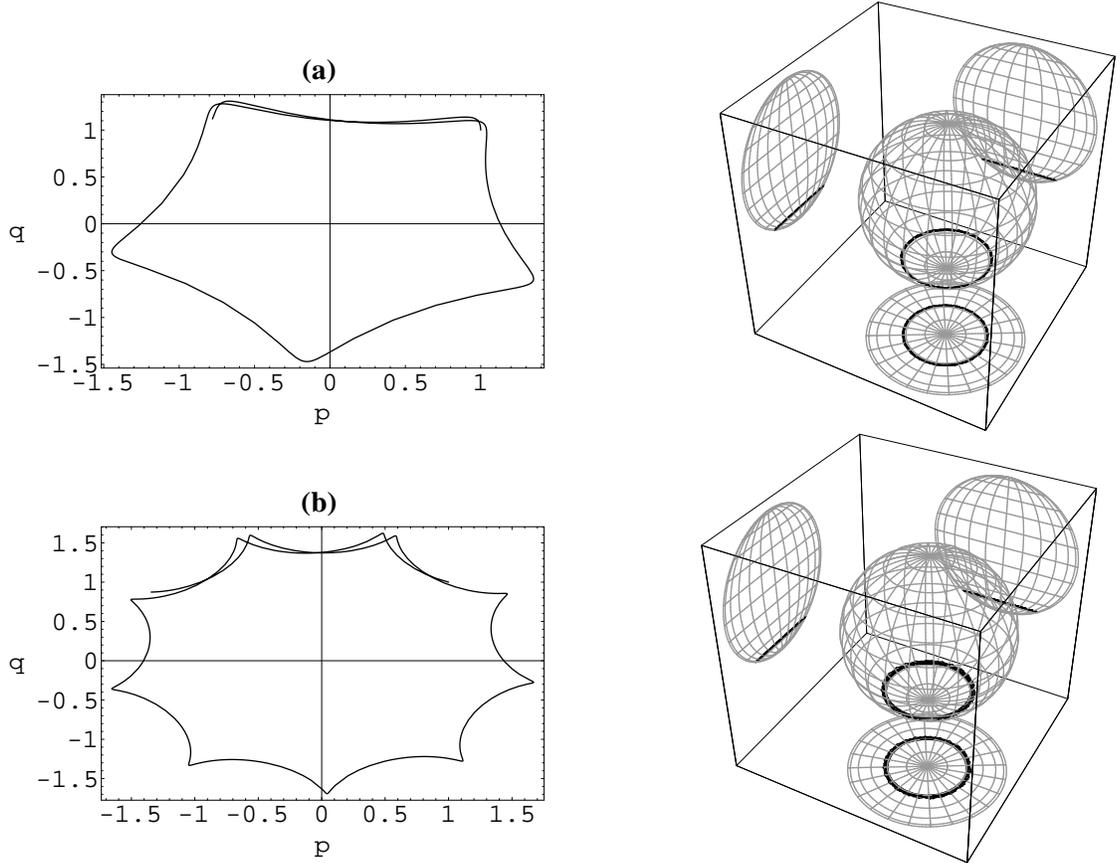


Figura 5.7: Trayectorias asociadas a la parte del campo eletromagnético y al átomo. (a) Valores en los parámetros $\omega_0 = -4$, $\omega = 1$ y $\kappa = 0.025$. (b) Valores en los parámetros $\omega_0 = -8$, $\omega = -0.037$ y $\kappa = 1$. En los dos casos se utilizarón las mismas condiciones iniciales $q(0) = 1$, $p(0) = 1$, $\theta(0) = 10$ y $\phi(0) = 0$ con $J = 50$.

Por lo tanto tenemos cuatro ecuaciones de movimiento, dos pertenecientes al álgebra $\mathfrak{su}(2)$ y dos a $\mathfrak{hw}(1)$. Sin embargo, existe un problema las trayectorias de estas ecuaciones no pueden ser graficadas como lo hicimos en el modelo de Lipkin-Meshkov-Glick [3, 2], ya que se encuentran en un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, podemos graficar separadamente la parte de $\mathfrak{su}(2)$ y la parte de $\mathfrak{hw}(1)$. Las gráficas siguientes muestran las trayectorias para diferentes valores de los parámetros y mismas condiciones iniciales.

En las figuras 5.6 y 5.7 se muestran algunas trayectorias para diferentes valores en los parámetros y mismas condiciones iniciales. Los valores en los parámetros fueron elegidos de tal modo que estos se encontraran en cada una de las regiones de la separatriz de la figura 5.2.2. En cada una de las figuras se muestra la parte asociada a las trayectorias debidas a la parte del campo electromagnético y a la parte del átomo. Las condiciones iniciales fueron elegidas idénticas en cada una de las trayectorias, para que se hiciera evidente el cambio en la trayectoria al cambiar los valores de los parámetros.

En la figura 5.6 las gráficas (a) y (b) están asociadas con las regiones I y II de la separatriz de la figura 5.2.2. En la figura 5.7 las gráficas (a) y (b) los parámetros fueron tomados en las regiones III y IV de la separatriz de la figura 5.2.2. En ambos casos las trayectorias se encontraban alrededor de un mínimo.

Las partes del campo electromagnético de las gráficas (a) de las figuras 5.6 y 5.7 muestran cambios en la trayectoria debido al cambio en los valores de los parámetros. Con la parte del átomo sucede algo diferente, ésta parte parece no presentar cambios al presentarse las transiciones de fase, las gráficas permanecen en el hemisferio sur de la esfera para todos los casos. Algo parecido sucede con las gráficas (b) de las figuras 5.6 y 5.7.

5.3. Comparación entre el Análisis Clásico y Cuántico

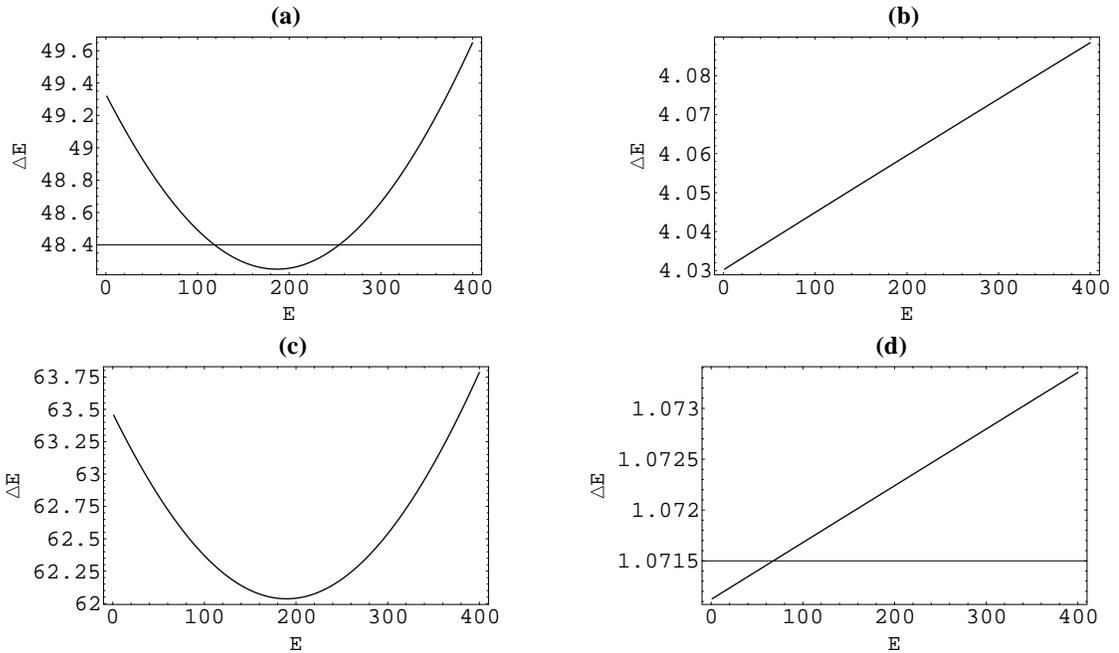


Figura 5.8: Diferencias de energía entre los estados vecinos en función de la energía. (a) Valores en los parámetros $\omega_0 = 0.3$, $\omega = 1$ y $\kappa = 0.7$. (b) Valores en los parámetros $\omega_0 = -3$, $\omega = 1$ y $\kappa = -0.01$. (c) Valores en los parámetros $\omega_0 = 0.3$, $\omega = 1$ y $\kappa = -0.9$. (d) Valores en los parámetros $\omega_0 = -0.07$, $\omega = 1$ y $\kappa = 0.001$. En todos los casos se utilizó $J = 200$ y $n = 1000$.

En la figura 5.8 se graficaron las diferencias de energía cuántica para niveles próximos [3, 2] en función de la energía. Para los valores de los parámetros graficados se puede apreciar. En (a) y (c) existe una simetría aproximadamente en la mitad de los valores de la energía teniendo diferencias de energía en los intervalos de 48 a 49.6 y 48 a 63.75 en (a) y (c) respectivamente, y apreciándose espaciamientos no constantes entre los niveles de energía. En (b) y (d) el comportamiento es completamente distinto del anterior, la diferencia de energía crece linealmente con la energía, encontrándose las diferencias de energía entre los intervalos de 4.03 a 4.03 y 0.9315 a 0.9335 para (b) y (d) respectivamente, y teniendo espaciamientos constantes entre los niveles de energía. Estos resultados nos muestran cómo los cambios en los parámetros al pasar de una rama de la separatriz a otra donde se

presentan las transiciones de fase, nos presentan cambios drásticos en los espaciamentos de las energías, confirmando que el modelo de la separatriz nos proporciona no sólo las propiedades dinámicas de las trayectorias clásicas, sino también una forma de saber en donde se presentarán espaciamentos constantes y no constantes entre los niveles de energía a nivel cuántico, cuando pasamos de una rama de la separatriz a otra. En este caso las transiciones de fase [6] estudiadas, son las presentadas para el caso en el cual superpusimos las separatrices de los dos conjuntos de bifurcación, correspondientes tanto a puntos críticos de la energía \mathcal{E}^+ como a la energía \mathcal{E}^- .

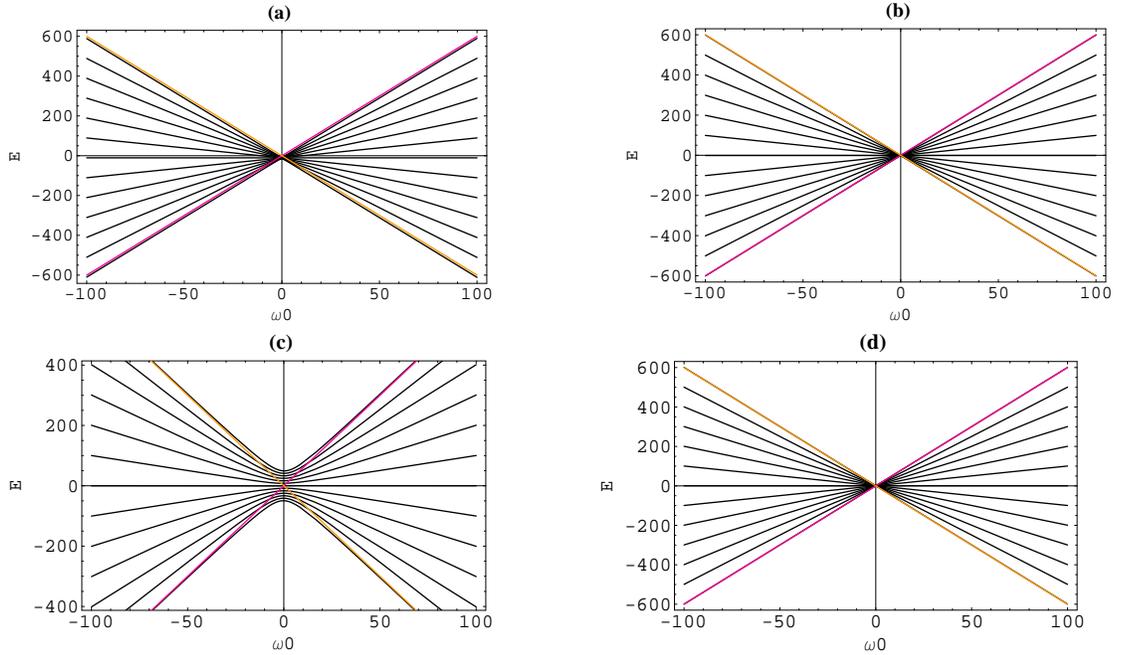


Figura 5.9: Espectro de energías cuánticas y energías clásicas superpuestas, para diferentes valores de los parámetros. (a) $\kappa = -0.04$ y $\omega = -0.1$. (b) $\kappa = -0.004$ y $\omega = -0.01$. (c) $\kappa = -0.4$ y $\omega = 0$. (d) $\kappa = 0.001$ y $\omega = 0.006$. En los cuatro casos ω_0 se encuentra en el intervalo $(-100, 100)$ y $J = 6$, con $n = 100$.

En la figura 5.9 se presenta la superposición de las energías cuánticas exactas y las energías clásicas para diferentes valores de los parámetros con $J = 6$. En esta figura se puede apreciar cómo las gráficas de las energías clásicas acotan a las energías cuánticas, para la energía en el punto crítico $(q_c, p_c, x_c, y_c) = (0, 0, 0, 0)$; para los puntos críticos $(q_c, p_c, x_c, y_c) \neq (0, 0, 0, 0)$ las gráficas se encuentran dentro del espectro de las energías cuánticas. Estos resultados nos muestran como la energía clásica representa una buena aproximación al estado base de la energía cuántica y al estado de máxima excitación. Aunque si bien este resultado no está ligado con el modelo de la separatriz es un resultado muy importante.

Capítulo 6

Conclusiones

El modelo de la separatriz clásica resultó ser un poderoso método de clasificación de transiciones de fase, tanto clásicas como cuánticas, llegando a coincidir los resultados cuando el número de partículas es muy grande. Esto lo pudimos constatar en los modelos LMG y JC, permitiéndonos establecer la relación que existe entre las transiciones de fase clásicas y cuánticas a través del valor esperado de sus hamiltonianos en la base de los estados coherentes.

En el modelo LMG las transiciones de fase clásicas son indicadas a través de flechas numeradas del uno al cinco en las separatrices mostradas en la figura 4.6. En la separatriz del lado izquierdo se graficó en función de los parámetros γ y λ , que caracterizan el hamiltoniano cuántico. La separatriz del lado derecho está graficada en términos de los parámetros γ_x y γ_y , los cuales caracterizan el valor esperado del hamiltoniano en la base de los estados coherentes (función de energía).

El orden de la transición de fase es calculado a través del criterio de Ehrenfest teniendo los resultados siguientes: Flecha 1, 2 y 4 transiciones de fase de segundo orden, flecha 3 transición de primer orden y por último flecha 5 transición de tercer orden.

Estas transiciones de fase nos caracterizan las trayectorias clásicas en la esfera unitaria, permitiéndonos saber la clase de estabilidad que posee el punto crítico alrededor del cual se encuentra la trayectoria. Algunas de estas transiciones de fase fueron graficadas sobre la esfera unitaria, por ejemplo, en la figura 4.7 se muestran las trayectorias para la transición de primer orden (flecha 3); en esta gráfica se puede observar como la trayectoria pasa de un punto inestable (punto silla) a un punto estable (mínimo). En la figura 4.8 se graficó las trayectorias que caracterizan la transición de segundo orden (flecha 1), las cuales se encuentran alrededor de un punto inestable.

La caracterización del modelo cuántico a través del modelo de la separatriz se presenta con la degeneración de los niveles de energía cuánticos y las transiciones de fase se presentan con la ruptura de la degeneración. Para el caso diagonal ($\lambda = 0$) las degeneraciones están gobernadas por un par de rectas $\gamma_k^{(1)} = -\frac{\epsilon}{N-2k-1}$ y $\gamma_m^{(2)} = -\frac{\epsilon}{N-2m-1}$, las cuales coinciden con la rama de la separatriz $\gamma_x = \pm 1$, o escrito en términos de los parámetros característicos del hamiltoniano cuántico $\gamma = \frac{\epsilon}{N-1}$ para $m = k = 0$, valores donde existe degeneración del estado base. Este resultado nos indica que el modelo de la separatriz sólo nos da una aproximación para el estado base del modelo cuántico.

Las transiciones de fase para el caso diagonal se manifestaron a través de la ruptura de la degeneración en los niveles de energía. Ésto pudo hacerse evidente en las gráficas de las diferencias de energía en función de la misma entre niveles próximos. En éstas la degeneración pasaba de un número definido de estados degenerados a uno menor. Por ejemplo, para los valores en $\gamma = -0.4$ y $\gamma = -0.32$, los estados degenerados (diferencias cero) pasaban de ocho niveles de energía degenerados a siete, para uno y otro valor respectivamente.

En el caso no diagonal el espectro de energía se graficó para 20 partículas y diferentes valores en los parámetros, cada uno de estos valores tomados sobre las ramas de la separatriz y fuera de ella.

Estas gráficas muestran intersecciones y anti-intersecciones en los niveles de energía, las cuales están gobernadas por las hipérbolas $\gamma_k = \pm\sqrt{\lambda^2 + (\gamma_k^{(1)})^2}$ y $\gamma_m = \pm\sqrt{\lambda^2 + (\gamma_m^{(2)})^2}$ respectivamente, éstas se reducen a las rectas el caso diagonal cuando $\lambda = 0$. Para este caso se graficó las superficies de energía para los primeros estados par e impar, mostrándose que los cambios de pendiente en las superficies de energía se presentan en aproximadamente las mismas ramas de la separatriz del sistema clásico figura 4.10.

Las gráficas de las diferencias entre niveles de energía próximos, nos muestran que las transiciones de fase a nivel cuántico se presentan con la degeneración de los niveles de energía y espaciamentos entre los mismos. Los valores en los parámetros fueron elegidos sobre la transición de fase clásica de tercer orden (flecha 5). Las gráficas 4.11 nos muestran como se manifiestan las transiciones de fase en las diferencias de energía; la gráfica (a) nos muestra valores en la degeneración de los niveles de energía más baja y más alta presentándose una zona intermedia con aproximadamente la misma separación en los niveles de energía; en la gráfica (b) cuando la transición de fase ha tenido lugar, la degeneración deja de presentarse, presentándose únicamente espaciamentos en los niveles de energía aproximadamente constantes.

Para el modelo JC las transiciones de fase a nivel cuántico se manifiestan con los espaciamentos de los niveles de energía próximos, caracterizados por transiciones de fase de primer orden en el modelo de la separatriz. En las gráficas de la figura 5.8 se presentan las diferencias de energías entre los niveles de energía próximos, para valores de los parámetros en las cuatro regiones de la separatriz 5.2.2 donde las transiciones de fase se presentan. Cuando los valores de los parámetros pasan de la región I a la región III, los espaciamentos pasan de no constantes a constantes; ésto se muestra en las figuras (a) y (b). Para valores en los parámetros en las regiones II y IV sucede algo similar, los espaciamentos pasan de ser no constantes a ser constantes; ésto se muestra en las gráficas (c) y (d).

Los puntos críticos del valor esperado del hamiltoniano del modelo JC, muestran que resolviendo x_c y y_c en términos de q_c y p_c e introduciéndolos en la función de energía, ésta se reduce a la función de energía del modelo LMG para el caso en el que $\gamma_x = \gamma_y = -\gamma_0$. En este contexto el modelo JC es equivalente al modelo LMG.

Las energías clásicas del modelo JC evaluadas en los diferentes puntos críticos, acotan el espectro de energías, o se encuentran dentro del mismo. Este hecho, sin embargo, no está relacionado con el modelo de la separatriz sino que es una característica de cualquier modelo de aproximación al caso cuántico. Ésto es presentado en las gráficas de la figura 5.9; en cada una de éstas gráficas se puede apreciar cómo la función de energía acota al espectro de energías cuánticas.

Apéndice A

Identidad de Baker-Campbell-Hausdorff

Sean \hat{A} y \hat{B} operadores lineales en un espacio de Hilbert. Se cumple entonces que: $e^{(\hat{A})}e^{(\hat{B})} = e^{(\hat{C})}$ donde $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$

Para demostrar ésta identidad conocida como fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, debemos expandir la exponencial $e^{\hat{A}t}$ en una serie de Taylor, es decir, $e^{\hat{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n t^n}{n!}$. Luego calculemos la siguiente relación

$$\begin{aligned}
 e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n t^n}{n!} \right) \hat{B} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n (-t)^n}{n!} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{B}\hat{A}^n (-t)^n}{n!} \right) \\
 &= \hat{B} - \hat{B}\hat{A}t + \frac{\hat{B}(\hat{A}t)^2}{2!} - \frac{\hat{B}(\hat{A}t)^3}{3!} + \frac{\hat{B}(\hat{A}t)^4}{4!} - \frac{\hat{B}(\hat{A}t)^5}{5!} + \frac{\hat{B}(\hat{A}t)^6}{6!} + \dots \\
 &+ \hat{A}\hat{B}t - \hat{A}\hat{B}\hat{A}t^2 + \frac{\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2 t^3}{2!} - \frac{\hat{A}\hat{B}\hat{A}^3 t^4}{3!} + \frac{\hat{A}\hat{B}\hat{A}^4 t^5}{4!} - \frac{\hat{A}\hat{B}\hat{A}^5 t^6}{5!} + \dots \\
 &+ \frac{\hat{A}^2 \hat{B}t}{2!} - \frac{\hat{A}^2 \hat{B}\hat{A}t^3}{2!} + \frac{\hat{A}^2 \hat{B}\hat{A}^2 t^4}{2!} - \frac{\hat{A}^2 \hat{B}\hat{A}^3 t^5}{2!3!} + \frac{\hat{A}^2 \hat{B}\hat{A}^2 t^6}{2!4!} - \dots \\
 &+ \frac{\hat{A}^2 \hat{B}\hat{A}^5 t^7}{2!5!} + \frac{\hat{A}^3 \hat{B}t^2}{3!} + \dots, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

si agrupamos los operadores que tengan la misma potencia en t , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} &= \hat{B} + (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})t + (\hat{A}^2\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^2)\frac{t^2}{2!} + (\hat{A}^3\hat{B} - 3\hat{A}^2\hat{B}\hat{A} \\
 &+ 3\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2 - \hat{B}\hat{A}^3)\frac{t^3}{3!} + \dots \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que el segundo término de la expansión anterior es $[\hat{A}, \hat{B}]$, el tercer término es $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]$, el cuarto es $[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]]$ y así sucesivamente, de manera que la expansión anterior queda de la siguiente manera

$$e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{-\hat{A}t} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]t + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]\frac{t^2}{2!} + [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]]\frac{t^3}{3!} + \dots \tag{A.3}$$

Ahora definamos la siguiente función:

$$F(t) = e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t}, \quad (\text{A.4})$$

con las propiedades

$$F(0) = 1 \quad \text{y} \quad F(1) = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}, \quad (\text{A.5})$$

si derivamos la anterior función con respecto a t se tiene

$$F'(t) = \hat{A} e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{\hat{B}t} = \hat{A} e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{-\hat{A}t} e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} = [\hat{A} + e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{-\hat{A}t}] F(t), \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo el término $e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{-\hat{A}t}$ por la expansión (A.3) tenemos

$$F'(t) = [\hat{A} + e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{-\hat{A}t}] F(t) = [\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]t + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] \frac{t^2}{2!} + [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] \frac{t^3}{3!} + \dots] F(t). \quad (\text{A.7})$$

Integrando con respecto a t de 0 a 1 la relación anterior, se obtiene

$$\int_0^1 (F(t))^{-1} F'(t) dt = \int_0^1 [\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]t + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] \frac{t^2}{2!} + [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] \frac{t^3}{3!} + \dots] dt. \quad (\text{A.8})$$

Una vez realizada la integración se tiene

$$\ln F(1) = \hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (\text{A.9})$$

esto implica que

$$F(1) = \exp(\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots), \quad (\text{A.10})$$

por lo tanto

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \exp(\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots). \quad (\text{A.11})$$

Lo que demuestra la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff.

Apéndice B

Relaciones de Ortogonalidad de las Funciones $D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma)$

Por definición las Funciones $D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma)$ de Wigner (ver referencia [4]) son elementos de matriz de las rotaciones entre los estados $\langle J, M' |$ y $|J, M\rangle$, es decir,

$$\begin{aligned} D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma) &= \langle J, M' | e^{-i\theta\hat{J}_z} e^{-i\phi\hat{J}_y} e^{-i\gamma\hat{J}_z} |J, M\rangle \\ &= e^{-i(\theta M' + \gamma M)} \langle J, M' | e^{-i\phi\hat{J}_y} |J, M\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Las funciones $D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma)$ son unitarias, por lo tanto, se cumple

$$D_{M',M}^{(J)\dagger}(\theta, \phi, \gamma) D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma) = D_{M',M}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma) D_{M',M}^{(J)\dagger}(\theta, \phi, \gamma) = \mathbf{1}, \quad (\text{B.2})$$

esto es

$$\sum_{M'} D_{M',M}^{(J)\dagger} D_{M',N}^{(J)} = \sum_{M'} D_{M',M}^{(J)} D_{N,M'}^{(J)\dagger} = \delta_{M,N}, \quad (\text{B.3})$$

si hacemos $N = M = 0$, las funciones de Wigner están dadas por

$$D_{M',0}^{(J)}(\theta, \phi, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} Y_{LM}(\theta, \phi). \quad (\text{B.4})$$

De este hecho se deduce que

$$\sum_M Y_{LM}(\theta, \phi) Y_{LM}^*(\theta, \phi) = \frac{2L+1}{4\pi}. \quad (\text{B.5})$$

Existe otra relación de ortogonalidad, en la cual se integra sobre los tres ángulos de Euler, es decir,

$$\int D_{M_1, M_1'}^{(J_1)} D_{M_2, M_2'}^{(J_2)} d\Omega = \sum_J \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle \langle JM' | J_1 M_1' J_2 M_2' \rangle$$

$$\times \int D_{M_1+M_2, M_1'+M_1'}^{(J)} d\Omega, \quad (\text{B.6})$$

donde $\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\gamma$ y

$$D_{M_1+M_2, M_1'+M_1'}^{(J)} = e^{-i[(M_1+M_2)\theta + (M_1'+M_1')\gamma]} d_{M_1+M_2, M_1'+M_1'}^{(J)}(\phi). \quad (\text{B.7})$$

Si hacemos $M_2 = -M_1$; $M_2' = -M_1'$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int D_{M_1 M_1', M_2 M_2'}^{(J)} d\Omega &= 4\pi^2 \delta_{M_1, -M_2} \delta_{M_1', -M_2'} \\ &\times \sum_J \left[\langle J_1 M_1 J_2 - M_1 | J 0 \rangle \langle J 0 | J_1 M_1' J_2 - M_1' \rangle \int d_{00}^J(\phi) \sin \phi d\phi \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Por definición J es $J = L + M$; si $M = 0$ entonces $J = L$, por lo que

$$d_{00}^J(\phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_{L0}^*(\phi, 0) = \frac{4\pi}{\sqrt{2L+1}} Y_{L0}^*(\phi, 0) Y_{00}(\phi, 0), \quad (\text{B.9})$$

luego

$$\int d_{00}^J(\phi) \sin \phi d\phi \frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi\sqrt{2L+1}} \int Y_{L0}^*(\phi, 0) Y_{00}(\phi, 0) \sin \phi d\phi d\alpha = 2\delta_{L0} \quad (\text{B.10})$$

De manera que (B.6) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\int D_{-M_1 - M_1'}^{(J_1)} D_{M_2 M_2'}^{(J_2)} d\Omega \\ &= 8\pi^2 \delta_{J_1, J_2} \delta_{M_1, M_2} \delta_{M_1', M_2'} \langle J_1 - M_1 J_1 M_1 | 00 \rangle \langle J_1 - M_1' J_1 M_1' | 00 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Pero $\langle J_1 - M_1 J_1 M_1 | 00 \rangle = \frac{(-1)^{J_1+M_1}}{\sqrt{2J_1+1}}$; ésto implica que $\langle J_1 - M_1 J_1 M_1 | 00 \rangle \langle J_1 - M_1' J_1 M_1' | 00 \rangle = \frac{(-1)^{2J_1+M_1+M_1'}}{2J_1+1}$

Por lo tanto, la integral (B.11), se reduce a

$$(-1)^{2J_1+M_1+M_1'} \left(\frac{2J_1+1}{8\pi^2} \right) \int D_{-M, -N}^{(J)} D_{M', N'}^{(J)} d\Omega = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{N, N'}. \quad (\text{B.12})$$

Además se cumple que

$$D_{-M, -N}^{(J)} = (-1)^{2J+M+N} D_{M, N}^{(J)*} \quad (\text{B.13})$$

por lo tanto la integral (B.12) es

$$\left(\frac{2J+1}{8\pi^2} \right) \int D_{-M, -N}^{(J)} D_{M', N'}^{(J)*} d\Omega = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{N, N'}. \quad (\text{B.14})$$

En nuestro caso $M = J$, $N = -J$ y $\gamma = 0$. Esto implica que la integral anterior se reduce a

$$\left(\frac{2J+1}{8\pi^2} \right) \int D_{J, -J}^{(J)*}(\theta, \phi, 0) D_{J, -J}^{(J)}(\theta, \phi, 0) d\Omega = \delta_{J, J} \delta_{-J, -J}. \quad (\text{B.15})$$

Por definición tenemos $\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\gamma = 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi$. Por lo tanto la integral anterior queda de la siguiente forma

$$\frac{2J+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_{J, -J}^{(J)*}(\theta, \phi, 0) D_{J, -J}^{(J)}(\theta, \phi, 0) \sin \phi d\phi d\theta = \delta_{J, J} \delta_{-J, -J}. \quad (\text{B.16})$$

Apéndice C

Matriz Hessiana

Consideraremos el problema de maximizar o minimizar las funciones de varias variables (ver referencia [17]). En particular, quisiéramos determinar la naturaleza de los puntos críticos de una función vectorial de valor real $w = F(\mathbf{x})$. Si la función es una forma cuadrática, $w = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{0}$ es un punto crítico. Si es un punto máximo, mínimo o silla depende de los eigenvalores de A . De manera más general, si la función que será extremizada es lo suficientemente diferenciable, se comporta de manera local como una cuadrática. Por lo tanto, se puede probar cada punto crítico determinando los signos de los eigenvalores de la matriz de su forma cuadrática asociada.

Definición. Sea $F(\mathbf{x})$ una función de valor real en \mathbf{R}^n . Se dice que un punto \mathbf{x}_0 en \mathbf{R}^n es un punto estacionario de F si todas las derivadas parciales de F en \mathbf{x}_0 existen y son igual a cero.

Definición. Se dice que una forma cuadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ es definida positiva si toma sólo un signo cuando \mathbf{x} varía con respecto a todos los vectores distintos de cero en \mathbf{R}^n . La forma es definida positiva si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ para toda \mathbf{x} distinta de cero en \mathbf{R}^n y definitivamente negativa si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$ para toda \mathbf{x} distinta de cero en \mathbf{R}^n . Se dice que es indefinida si toma valores de distinto signo. Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ y asume el valor cero para alguna $\mathbf{x} \neq 0$, entonces se dice que $f(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva.

Definición. Se dice que una matriz simétrica real A es

1. **Definida positiva** si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ para toda \mathbf{x} distinta de cero en \mathbf{R}^n
2. **Definida negativa** si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$ para toda \mathbf{x} distinta de cero en \mathbf{R}^n
3. **Semidefinida positiva** si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ para toda \mathbf{x} distinta de cero en \mathbf{R}^n
4. **Semidefinida negativa** si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$ para toda \mathbf{x} distinta de cero en \mathbf{R}^n

Si los eigenvalores de A son todos positivos se tiene que A es definida positiva. Si los eigenvalores de A son todos negativos se tiene que A es definida negativa y si difieren de signo se dice que es indefinida.

Supóngase ahora que tenemos una función $F(x, y)$ con un punto estacionario (x_0, y_0) . Si F tiene terceras derivadas parciales continuas en una vecindad de (x_0, y_0) , puede expandirse en una serie de Taylor con respecto a ese punto, es decir,

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + [hF_x(x_0, y_0) + kF_y(x_0, y_0)] + \frac{1}{2}[h^2F_{xx}(x_0, y_0) + 2hkF_{xy}(x_0, y_0) + k^2F_{yy}(x_0, y_0)] + R = F(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(ah^2 + 2bhk + ck^2) + R, \quad (\text{C.1})$$

donde $a = F_{xx}(x_0, y_0)$, $b = F_{xy}(x_0, y_0)$ y $c = F_{yy}(x_0, y_0)$, y el residuo está dado por

$$R = \frac{1}{6}[h^3 F_{xxx}(\mathbf{z}) + 3h^2 k F_{xxy}(\mathbf{z}) + 3hk^2 F_{xyy}(\mathbf{z}) + k^3 F_{yyy}(\mathbf{z})], \quad (\text{C.2})$$

donde $\mathbf{z} = (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$; $0 < \theta < 1$.

Si h y k son suficientemente pequeños, $|R|$ será menor que el módulo de $\frac{1}{2}(ah^2 + 2bhk + ck^2)$ y por lo tanto $[F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0)]$ tendrá el mismo signo que $\frac{1}{2}(ah^2 + 2bhk + ck^2)$. La expresión

$$f(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2, \quad (\text{C.3})$$

es una forma cuadrática en las variables h y k y que tiene asociada la matriz

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} F_{xx}(x_0, y_0) & F_{xy}(x_0, y_0) \\ F_{xy}(x_0, y_0) & F_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Por lo tanto, $F(x_0, y_0)$ tendrá un mínimo, máximo o punto silla local en (x_0, y_0) si y sólo si para los eigenvalores de \mathcal{H} se cumple

1. F tiene un mínimo en (x_0, y_0) si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
2. F tiene un máximo en (x_0, y_0) si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$
3. F tiene un punto silla en (x_0, y_0) si λ_1 y λ_2 difieren de signo.

Ahora podemos generalizar nuestro método de calificación de puntos estacionarios a funciones de más de dos variables. Sea $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n)$ una función de variable real cuyas terceras derivadas parciales son todas continuas. Sea \mathbf{x}_0 un punto estacionario de F y defínase la matriz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)$ por medio de

$$h_{ij} = F_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0), \quad (\text{C.5})$$

donde $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0)$ se conoce como hessiana de F en \mathbf{x}_0 . El punto estacionario puede calificarse de la siguiente manera:

1. \mathbf{x}_0 es un mínimo local de F si $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva.
2. \mathbf{x}_0 es un máximo local de F si $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa.
3. \mathbf{x}_0 es un punto silla de F si $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0)$ es indefinida.

Bibliografía

- [1] J. G. Brankov, N. S. Tonchev y V. A. Zagrebnov . Europhys. Lett., **72**, pp. 151-152 (2005).
- [2] O. Castaños, R. López-Peña, J. G. Hirsch, and E. López-Moreno. Phys. Rev. B **74**, 104118 (2006).
- [3] O. Castaños, R. López-Peña, J. G. Hirsch, and E. López-Moreno. Phys. Rev. B **72**, 012406 (2005).
- [4] M. Chaichian and R. Hagedorn, *Symmetries in Quantum Mechanics*, Graduate Student Series in Physics, Philadelphia, 1998, 199 pp.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics Vol. I and II*, John Wiley and Sons, New York, 1977, 482 pp.
- [6] R. Gilmore, *Catastrofe Theory for Scientists and Engineers*, Wiley, New York, 1981.
- [7] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications*, J. Wiley and Sons, New York, 1974.
- [8] R. Gilmore y L. M. Narducci. Phys. Rev. A **17**, 1747 (1978).
- [9] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Editorial Reverté, México, 2000, 495 pp.
- [10] G. W. Greiner and R. Joachim, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1996.
- [11] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Particles and Strings*, Addison-Wesley, 1992.
- [12] K. T. Hecht, *The Vector Coherent State Method and Its Application to Problems of Higher Symmetries*, Springer, Berlin, 1987, 154 pp.
- [13] J. D. Jackson, *Clasical Electrodynamics*, J. Wiley and Sons, New York, 1975.
- [14] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. I.R.E. **51**, 89 (1963).
- [15] H. Karatsuji and T. Suzuki, J. Math. Phys. **21**, 472, (1980).
- [16] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic theory*, Pergamon Press, Oxford, 1976, 677 pp.

- [17] S. J. Leon, *Álgebra Lineal con Aplicaciones*, Continental, México, 1998.
- [18] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick. Nucl. Phys. **62**, 188 (1965); **62**, 199 (1965); **62**, 211 (1965).
- [19] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley and Sons, 1973.
- [20] I. Obregón , *Teoría de la Probabilidad*, Limusa, México, 1991, 128 pp.
- [21] T. Poston and I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitma, 1978.
- [22] J. Reslen, L. Quiroga y N. F. Johnson. Europhys. Lett., **69**, pp. 8-14 (2005).
- [23] J. Reslen, L. Quiroga y N. F. Johnson. Europhys. Lett., **72**, pp. 153-154 (2005).
- [24] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1987.
- [25] J. Vidal, S. Dusuel y T. Barthel, 2007 J. Stat. Mech. P010115, y referencias aquí citadas.
- [26] D. F. Walls, and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, New York, 1995, 351 pp.
- [27] J. M. Ziman, *Elements of Advanced Quantum Theory*, Cambridge University Press, London, 1969, 269 pp.