



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

PUNTES MARKOVIANOS

PUNTES MARKOVIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

LUZ JUDITH RODRIGUEZ ESPARZA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MOGENS BLADT PETERSEN

MÉXICO, D. F.

JUNIO 2007.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PUENTES MARKOVIANOS

LUZ JUDITH RODRÍGUEZ ESPARZA
Maestría en Ciencias Matemáticas.

Director de tesis : MOGENS BLADT

17 de junio de 2007

Agradecimientos

Gracias a mi padre Dios por darme la vida y llevarme de su mano.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	III
1. Propiedades básicas de los procesos de Markov	1
1.1. Introducción	1
1.2. Procesos de Markov	1
1.2.1. Procesos de Feller	7
1.2.2. Propiedad fuerte de Markov	8
1.3. Movimiento Browniano	9
1.4. Procesos de difusión	12
1.4.1. Caracterización de los procesos de difusión	14
1.4.2. Ejemplos de procesos de difusión	17
1.4.3. Procesos de difusión condicionados	19
1.5. Generadores infinitesimales	21
2. Puentes	25
2.1. Introducción	25
2.2. Construcción de puentes	26
2.3. Puente Browniano (o de Wiener)	31
2.3.1. Proceso de Wiener estándar d -dimensional	32
2.4. Puentes derivados de un proceso Ornstein-Uhlenbeck multidimensional	38
2.5. Puentes Markovianos	41
2.5.1. Fórmula para las densidades de transición	41
2.6. Procesos de Markov con puentes idénticos	49
2.7. Fórmula de condicionamiento	51
2.8. Puentes que se empalman (<i>Splicing bridges</i>)	54

2.9. Interpretación general probabilística de las medidas Palm . . .	58
3. Simulación	61
3.1. Introducción	61
3.2. Muestreo por rechazo retrospectivo para difusiones	62
3.2.1. El caso cuando ϕ está acotada	65
3.3. Descomposición de una trayectoria browniana	66
3.3.1. Extensión del algoritmo exacto	69
3.4. La eficiencia del Algoritmo Exacto	70
3.5. Aplicación: Modelo logístico de crecimiento	73
3.6. Aplicaciones del algoritmo exacto	74
3.6.1. Máxima verosimilitud Monte Carlo para difusiones disc- retas observadas	74
3.7. Simulación de un puente de difusión	77
3.8. Estudio de simulación	81
Conclusiones	87
Anexos	89
Bibliografía.	101

Introducción

Los puentes Markovianos son procesos estocásticos obtenidos precisamente de los procesos de Markov bajo ciertas condiciones. Los puentes más estudiados son los Brownianos y los de Bessel, éstos tienen numerosas aplicaciones en áreas como economía y finanzas.

En el presente trabajo construiremos puentes derivados de un proceso de Markov usando sólo sus densidades de transición. Daremos condiciones suficientes para su existencia y unicidad (en ley). Probaremos que la ley de la parte radial de un puente con puntos extremos cero derivado de un proceso Ornstein-Uhlenbeck multidimensional es igual a la ley del puente con puntos extremos cero derivado de la parte radial del mismo proceso Ornstein-Uhlenbeck.

Además, presentaremos un algoritmo, para simulación exacta de una clase de difusiones. Demostramos que cuando el algoritmo es aplicable, es también directo simular las difusiones condicionadas para empezar en valores específicos en los casos predeterminados del tiempo.

Propondremos un método general y simple para la simulación de puentes de difusión.

Capítulo 1

Propiedades básicas de los procesos de Markov

En este capítulo daremos a conocer las características principales que definen a los procesos de Markov, además definiremos los conceptos básicos que nos ayudarán al entendimiento de la teoría de los puentes Markovianos.

1.1. Introducción

Los procesos de Markov o cadenas de Markov forman parte de los procesos estocásticos representando una herramienta que se basa en las probabilidades y que es necesaria en la toma de decisiones debido a que estudia la evaluación de ciertos sistemas de ensayos repetitivos en un intervalo de tiempo dado. Esta toma de decisiones se realiza en distintas áreas como biología, contabilidad, administración, entre otras.

1.2. Procesos de Markov

Un proceso estocástico es un modelo matemático para la ocurrencia, en cada momento después de un tiempo inicial, de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad es capturada por la introducción de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , llamado *espacio muestral*.

Definición 1.2.1 Sea τ un conjunto de índices, un proceso estocástico se define como un conjunto de variables aleatorias $X = \{X_t\}_{t \in \tau}$ definidas en

2CAPÍTULO 1. PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS PROCESOS DE MARKOV

un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y con valores en el espacio de estados (E, \mathcal{E}) .

Para un punto muestral fijo $\omega \in \Omega$, la función $t \mapsto X_t(\omega)$, $t \geq 0$, es la trayectoria muestral (realización) del proceso X asociada con ω .

Definición 1.2.2 *Las distribuciones finito dimensionales o de dimensión finita, correspondientes a un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \in \tau}$, son las distribuciones de los vectores con dimensión finita X_{t_1}, \dots, X_{t_n} ,*

$$P(X_{t_1}(\omega) \in A_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \in A_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_n), \quad (1.1)$$

$\forall t_i \in \tau$, $A_i \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ (finito) y F medida en (E^n, \mathcal{E}^n) .

Si F es intercambiable, es decir, para cualquier permutación ρ de índices t_1, \dots, t_n se tiene

$$F_{t_1, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_n) = F_{t_{\rho_1}, \dots, t_{\rho_n}}(A_{\rho_1}, \dots, A_{\rho_n})$$

y además cumple con

$$F_{t_1, \dots, t_{n-1}, t_n}(A_1, \dots, A_{n-1}, E) = F_{t_1, \dots, t_{n-1}}(A_1, \dots, A_{n-1}),$$

$\forall t_i \in \tau$, $\forall A_i \in \mathcal{E}$. Entonces se dice que F satisface las condiciones de consistencia de Kolmogorov.

Teorema 1.2.1 *Supongamos que E es un espacio métrico, medible y separable. Si una familia de distribuciones finito dimensionales satisface las condiciones de consistencia de Kolmogorov entonces existe un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \in \tau}$ (llamado proceso coordinado), tal que (1.1) se cumple para toda n finita y $A_i \in \mathcal{E}$.*

Ver demostración en [9].

Un proceso X con un espacio de estados (E, \mathcal{E}) es un proceso de Markov si, dado el valor de X_s , los valores de X_t , $t > s$, no dependen de los valores de X_u , $u < s$; esto es, la probabilidad de cualquier comportamiento futuro del proceso, cuando el estado presente se conoce exactamente, no se altera por el conocimiento adicional concerniente al comportamiento pasado.

La mínima σ -álgebra que hace medible a X al tiempo s es la σ -álgebra $\mathcal{F}_s^0 = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$. Luego, consideremos la siguiente probabilidad condicional

$$P(X_t \in A | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)),$$

donde $A \in \mathcal{E}$, $s < t$. Si X es de Markov, en el sentido intuitivo descrito anteriormente, esta probabilidad debería ser una función de X_s y obviamente de X_t , esto es, X es de Markov si para toda función g , (E, \mathcal{E}) -medible satisface:

$$E(g(X_t) | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)) = E(g(X_t) | \sigma(X_s)),$$

donde $\sigma(X_s)$ denota la σ -álgebra generada por X_s .

Así, un proceso Markoviano está caracterizado mediante sus probabilidades de transición, denotadas como

$$p_{s,t}(x, A) := P(X_{t+s} \in A | X_s = x),$$

$A \in \mathcal{E}$. Si $p_{s,t}(\cdot, \cdot)$ depende del tiempo únicamente a través de la diferencia $t - s$, es decir, $p_{s,t} = p_{0,t-s} =: p_{t-s}$ se dice que el proceso es homogéneo en el tiempo,

$$p_t(x, A) = P(X_t \in A | X_0 = x).$$

Sea K un espacio de Banach y $\mathcal{B}(K, K)$ el conjunto de operadores acotados de K en K .

Definición 1.2.3 Una familia $\{G(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(K, K)$ es un semigrupo de operadores acotados (o simplemente semigrupo) si:

- (i) $G(0) = I$,
- (ii) $\forall s, t \geq 0, G(s+t) = G(s)G(t)$.

Si un semigrupo $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ satisface además

- (iii) $\|G(t) - I\| \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} 0$,

decimos que es un semigrupo uniformemente continuo. Donde $\|G\| := \sup_{f \in K, \|f\|=1} \|Gf\|$.

Definición 1.2.4 Sea (E, \mathcal{E}) un espacio medible. Un kernel N en E es un mapeo de $E \times \mathcal{E}$ a $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que

4CAPÍTULO 1. PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS PROCESOS DE MARKOV

- (i) para cada $x \in E$, el mapeo $A \mapsto N(x, A)$ es una medida positiva en \mathcal{E} ,
- (ii) para cada $A \in \mathcal{E}$, el mapeo $x \mapsto N(x, A)$ es \mathcal{E} -medible.

El kernel π es llamado probabilidad de transición si $\pi(x, E) = 1$ para cada $x \in E$.

Sea \mathcal{E}_+ el espacio de funciones positivas Borel medibles. Si $f \in \mathcal{E}_+$ y N es un kernel, definimos la función Nf en E por

$$Nf(x) = \int_E N(x, dy)f(y).$$

Si M y N son dos kernel, entonces

$$MN(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E M(x, dy)N(y, A),$$

que es nuevamente un kernel.

Si tenemos un proceso X , con probabilidad de transición $p_{s,t}(X_s, A) = P(X_t \in A | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s))$, ($s < t$), entonces para cualquier $f \in \mathcal{E}_+$ tenemos que $E[f(X_t) | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)] = p_{s,t}f(X_s)$. Y si $s < t < v$ entonces

$$\begin{aligned} P[X_v \in A | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)] &= E(P[X_v \in A | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)] | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)) \\ &= E[p_{t,v}(X_t, A) | \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)] \\ &= \int p_{s,t}(X_s, dy)p_{t,v}(y, A). \end{aligned}$$

Definición 1.2.5 Una función de transición (f.t) en (E, \mathcal{E}) es una familia de probabilidades de transición $\{p_{s,t}\}_{0 \leq s < t}$ en (E, \mathcal{E}) tal que para s, t, v números reales, $s < t < v$ se tiene

$$\int p_{s,t}(x, dy)p_{t,v}(y, A) = p_{s,v}(x, A),$$

para $x \in E$ y $A \in \mathcal{E}$. Esta relación se llama Ecuación de Chapman-Kolmogorov. Si la f.t es homogénea la ecuación de Chapman-Kolmogorov quedaría como

$$p_{s+t}(x, A) = \int p_s(x, dy)p_t(y, A),$$

para $s, t \geq 0$. En otras palabras $\{p_t\}_{t \geq 0}$ forma un semigrupo.

Hay una razón muy importante, de incluir σ -álgebras en el estudio de procesos estocásticos. La característica temporal del proceso estocástico sugiere un flujo de tiempo, en más allá del cual en cada momento, podemos hablar del pasado, presente y futuro. Se puede preguntar cuánto sabe un observador del proceso actualmente, con respecto a cuánto él sabía en un cierto punto en el pasado o sabrá en un cierto punto en el futuro. Es por ello que anexamos al espacio muestral una *filtración*, es decir, una familia no decreciente $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F} : \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para $0 \leq s < t < \infty$. Tomamos $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Definición 1.2.6 *El proceso estocástico X es \mathcal{F}_t -adaptado (adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$), si para cada $t \geq 0$, X_t es una variable aleatoria \mathcal{F}_t -medible.*

A continuación definiremos los tiempos de paro, que son muy importantes en el estudio de los procesos estocásticos.

Definición 1.2.7 *Consideremos un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Un tiempo aleatorio T es un tiempo de paro de la filtración si el evento $\{T \leq t\}$ pertenece a la σ -álgebra \mathcal{F}_t , para cada $t \geq 0$.*

Ahora tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.8 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espacio de probabilidad filtrado, un proceso adaptado X es un proceso de Markov respecto a (\mathcal{F}_t) con función de transición $p_{s,t}$ si para cada $f \in \mathcal{E}_+$ y cualquier par (s, t) con $s < t$,*

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = p_{s,t} f(X_s), \quad P - c.s.$$

Si X es de Markov respecto a (\mathcal{F}_t) , entonces es de Markov respecto a la filtración natural \mathcal{F}_t^0 .

Proposición 1.2.1 *Un proceso X es un proceso de Markov con respecto a \mathcal{F}_t^0 con función de transición $p_{s,t}$ y medida inicial ν si y sólo si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ y $f_i \in \mathcal{E}_+$,*

$$E \left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \right) = \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E p_{0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \dots \int_E p_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k) \quad (1.2)$$

Demostración

Supongamos que X es de Markov, podemos escribir

$$\begin{aligned} E \left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \right) &= E \left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) E[f_k(X_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_{k-1}}^0] \right) \\ &= E \left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) p_{t_{k-1}, t_k} f_k(X_{t_{k-1}}) \right) \end{aligned}$$

esta expresión es la misma que (1.2), pero con una función menos y f_{k-1} reemplazado por $f_{k-1} p_{t_{k-1}, t_k} f_k$; procediendo de esta manera obtenemos la fórmula requerida.

Ahora bien, probaremos que X es de Markov, es suficiente, por el teorema de clases monótonas, mostrar que para los tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq t < \nu$ y las funciones f_1, f_2, \dots, f_k, g

$$E \left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) g(X_\nu) \right) = E \left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) p_{t, \nu} g(X_t) \right),$$

pero esta igualdad se sigue aplicando la igualdad de la hipótesis en ambos lados. ■

Pudimos haber escrito la expresión (1.2) como

$$P[X_{t_0} \in dx_0, X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_k} \in dx_k] = \nu(dx_0) p_{0, t_1}(x_0, dx_1) \dots p_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k)$$

y significa que la posición inicial x_0 del proceso es elegido de acuerdo a la medida de probabilidad ν , la posición x_1 al tiempo t_1 de acuerdo a $p_{0, t_1}(x_0, \cdot)$ y así sucesivamente.

Recordemos que un espacio *Polish* es un espacio topológico homeomorfo a algún espacio métrico completo separable. Ahora bien, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.2 *Dada una función de transición $p_{s,t}$ en (E, \mathcal{E}) (espacio Polish con la σ -álgebra de Borel), entonces para cualquier medida de probabilidad ν en (E, \mathcal{E}) , existe una única medida de probabilidad p_ν en $(E^{\mathbb{R}^+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}^+})$ tal que X es de Markov con respecto a \mathcal{F}_t^0 , con función de transición $p_{s,t}$ y medida inicial ν .*

Demostración

Dado X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , las distribuciones finito dimensionales están dadas por:

$$p_\nu^{t_1, \dots, t_n}(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n) = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} p_{0,t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} p_{t_1,t_2}(x_1, dx_2) \dots \int_{A_n} p_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n)$$

luego por el teorema 1.2.1 y por la proposición 1.2.1 el proceso coordinado X es de Markov para la medida de probabilidad p_ν . ■

1.2.1. Procesos de Feller

Sea $C_0(E)$ el espacio de las funciones continuas en E . Definimos la familia del semigrupo de operadores

Definición 1.2.9 *Un semigrupo de Feller en $C_0(E)$ es una familia $\{T_t\}_{t \geq 0}$, de operadores lineales positivos en $C_0(E)$ tal que*

- (i) $T_0 = I$ y $\|T_t\| \leq 1$ para cada t ;
- (ii) $T_{s+t} = T_s T_t$ para $s, t \geq 0$;
- (iii) $\|T_t f - f\| = \sup_{x \in E} |T_t f(x) - f(x)| \rightarrow 0$ cuando $t \downarrow 0$ y para cada $f \in C_0(E)$.

Proposición 1.2.2 *A cada semigrupo de Feller en E se le puede asociar una única función de transición homogénea P_t , $t \geq 0$ en (E, \mathcal{E}) tal que*

$$T_t f(x) = P_t f(x)$$

para cada $f \in C_0$ y cada $x \in E$.

Demostración

Para cualquier $x \in E$, el mapeo $f \mapsto T_t f(x)$ es una forma lineal positiva en C_0 ; por el teorema de Riesz (teorema de representación para el dual de C_0), existe una medida $P_t(x, \cdot)$ en \mathcal{E} tal que

$$T_t f(x) = \int P_t(x, dy) f(y),$$

para cada $f \in C_0$. El mapeo $x \mapsto \int P_t(x, dy)f(y)$ está en C_0 , entonces es Borel y por el teorema de clases monótonas se sigue que $x \mapsto P_t(x, A)$ es Borel para cualquier $A \in \mathcal{E}$. Así, hemos definido probabilidades de transición P_t , que forman una f.t que se sigue de la propiedad (ii) del semigrupo de T_t y una aplicación del teorema de clases monótonas. ■

Definición 1.2.10 *Una función de transición asociada a un semigrupo de Feller es llamada una función de transición de Feller.*

Una función de transición es de Feller si y sólo si

- (i) $P_t C_0 \subset C_0$, para cada t ;
- (ii) $\forall f \in C_0, \forall x \in E, \lim_{t \downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$.

Definición 1.2.11 *Un proceso de Markov que tiene una función de transición de Feller es llamado proceso de Feller.*

1.2.2. Propiedad fuerte de Markov

Sea ψ una variable aleatoria (v.a) asociada a un proceso continuo $\{X_t\}$, $0 \leq t < \infty$; es decir, asociada a cada realización X_t , la cual denotamos por $\psi(X_t)$. La v.a σ , decimos que es un tiempo de Markov relativo a $\{X_t\}$ si para X_t y Y_t , dos realizaciones del proceso son tales que $X_\zeta = Y_\zeta$ para $0 \leq \zeta \leq s$ y $\psi(X_t) < s$ entonces $\psi(X_t) = \psi(Y_t)$.

Veamos algunos ejemplos de tiempos de Markov.

1. Si tenemos una cadena de Markov que comienza en el estado j_0 , es decir, $X_0 \equiv j_0$. Tomando

$$\psi(X_t) = \inf \{ \zeta | X_\zeta = i \},$$

donde i es un estado fijo. El ínfimo es tomado como $+\infty$ si no existe ζ para el cual $X_\zeta = i$, entonces ψ es un tiempo de Markov. De hecho, supongamos que para una realización fija X_t se cumple que $\psi(X_t) < s$. Esto significa que existe $t' < s$ para el cual $X_{t'} = i$. Ahora si $X_\zeta = Y_\zeta$ para $0 \leq \zeta \leq s$, entonces $Y_{t'} = i$ y ciertamente $\psi(Y_t) \leq \psi(X_t)$. Luego por simetría, $\psi(X_t) = \psi(Y_t)$. La variable aleatoria ψ significa la primera vez que el proceso llega al estado i .

2. Similarmente si C es una colección finita de estados que no contienen a $X_0 = j_0$ definida por

$$\psi(X_t) = \inf \{ \zeta | X_\zeta \in C \},$$

es un tiempo de Markov.

La propiedad de Markov de un proceso estacionario de Markov $\{X_t\}_{t \geq 0}$ afirma lo siguiente: *Si conocemos los valores de X_s (que en adelante lo denotaremos por $X(s)$) para $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n = t_0$, ($t_0 > 0$ fijo), la distribución de probabilidad de*

$$X(t_0 + t_1), X(t_0 + t_2), \dots, X(t_0 + t_k), \quad (0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k), \quad (1.3)$$

depende solamente del valor de $X(t_0)$.

La distribución de probabilidad de (1.3) bajo la condición de que conocemos la trayectoria $X(s)$ en los tiempos $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n = t_0$, o más generalmente, si conocemos la historia completa de $X(s)$ hasta el tiempo t_0 ($0 \leq s \leq t_0$), coincide con la distribución de probabilidad de

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k), \quad \text{dado } X(0).$$

Es decir, podemos calcular la ley de (1.3) trasladando la escala del tiempo de modo que $t_0 = 0$ y tomando como el punto inicial el valor de $X(t_0)$.

Si para cualquier tiempo de Markov σ , la distribución de probabilidad de

$$X(t_1 + \psi), X(t_2 + \psi), \dots, X(t_k + \psi), \quad (t_1 < t_2 < \dots < t_k), \quad (1.4)$$

dado $X(s)$, $s \leq \psi$ y $X(\psi) = x$, es idéntica con la distribución de probabilidad de

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k), \quad (t_1 < t_2 < \dots < t_k),$$

dado $X(0) = x$, entonces se dice que el proceso tiene *la propiedad fuerte de Markov*.

1.3. Movimiento Browniano

Movimiento Browniano es el nombre dado al movimiento irregular del polen, suspendido en agua, observado por el botánico Robert Brown en 1828.

El rango de aplicación del movimiento Browniano va más allá del estudio microscópico de partículas en suspensión, incluye modelos de los instrumentos financieros, del ruido termal en circuitos eléctricos, de cierto comportamiento limitador en sistemas de colas e inventarios, de perturbaciones aleatorias en sistemas físicos, biológicos, económicos y de gerencia, entre otras muchas aplicaciones.

Definición 1.3.1 Sea E un espacio topológico y \mathcal{E} la σ -álgebra de los subconjuntos Borelianos. Un proceso B con valores en (E, \mathcal{E}) es continuo c.s. si para casi todo ω la función $t \mapsto B_t(\omega)$ es continua.

Al proceso $\{B_t\}_{t \geq 0}$ lo llamamos *movimiento Browniano lineal estándar* o simplemente *movimiento Browniano* (MB), si:

1. $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes y estacionarios.
2. $B_0 = 0$.
3. $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ($\mathcal{N}(x, y)$ denota la distribución normal con media x y varianza y).
4. $t \mapsto B_t(\omega)$ son continuas c.s.

Si B es un movimiento Browniano y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, entonces los incrementos $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^n$ son independientes y la distribución de $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ depende de t_j y t_{j-1} a través de la diferencia $t_j - t_{j-1}$, su distribución es normal con media cero y varianza $t_j - t_{j-1}$. Es por eso que decimos que el proceso B tiene incrementos independientes y estacionarios. Así, para $s < t$, los incrementos $B_t - B_s$ son normales estándar con varianza $t - s$, además podemos escribir

$$B_t = B_s + (B_t - B_s),$$

y usando la independencia de B_s y $B_t - B_s$, obtenemos que la función característica de B_t , denotada por ϕ_{B_t} , está dada por

$$\phi_{B_t}(u) = \phi_{B_s}(u)\phi_{B_t - B_s}(u),$$

como $B_s \sim \mathcal{N}(0, s)$ y $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ entonces $\phi_{B_s}(u) = -\frac{1}{2}u^2 s$ y $\phi_{B_t - B_s}(u) = -\frac{1}{2}u^2(t - s)$. Luego,

$$\phi_{B_t}(u) = \exp\left(-\frac{su^2}{2}\right) E[\exp(iu(B_t - B_s))],$$

donde $E[\exp(iu(B_t - B_s))] = \exp\left(-\frac{(t-s)}{2}u^2\right)$.

Veamos algunos ejemplos de la construcción del MB.

1. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, el proceso $X_t^x = x + B_t$ es llamado *Movimiento Browniano que comienza en x* ($MB(x)$). Para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P[X_t^x \in A] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-(y-x)^2/2t} dy$$

2. Si $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d$ son d copias independientes de B_t , definimos un proceso X con espacio de estados \mathbb{R}^d estipulando que la i -ésima componente de X_t es B_t^i . Este proceso es llamado *movimiento Browniano d -dimensional*.
3. Por la continuidad de las trayectorias tenemos que $\sup\{B_s, 0 \leq s \leq t\} = \sup\{B_s, 0 \leq s \leq t, s \in \mathbb{Q}\}$ y así podemos definir el proceso S tomando $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$.

Proposición 1.3.1 *Sea B un MB lineal estándar. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) *Homogeneidad. Para cualquier $s > 0$, el proceso $B_{t+s} - B_s, t \geq 0$ es un MB independiente de $\sigma(B_u, u \leq s)$.*
- (ii) *Simetría. El proceso $-B_t, t \geq 0$ es un MB.*
- (iii) *Escalamiento. Para cada $c > 0$, el proceso $cB_{t/c^2}, t \geq 0$ es un MB.*
- (iv) *Inversión. El proceso X definido por $X_0 = 0, X_t = tB_{1/t}$ para $t > 0$ es un MB.*

Demostración

(i) se sigue del hecho de que el proceso es $X_t = B_{t+s} - B_s$ es normal estándar, con trayectorias continuas, incrementos independientes y varianza t , entonces es un MB. La propiedad (ii) es obvia y (iii) se obtiene justamente de (i).

Para probar (iv), observamos que X es un proceso normal estándar con covarianza mín $\{s, t\}$ (ver Anexos (4)); así, será un MB si sus trayectorias son continuas, pero ellas claramente lo son en $(0, \infty)$, luego es suficiente probar que $\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0$. Pero $X_t, t \in (0, \infty)$ es equivalente a $B_t, t \in (0, \infty)$, si $\lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}} B_t = 0$ se sigue que $\lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}} X_t = 0$ c.s. Como X es continua en $(0, \infty)$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}^+} X_t = 0$ c.s. ■

El espacio de Wiener (Browniano), $W(\mathbb{R})$, es el conjunto de todas las trayectorias continuas $w : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen que $w(0) = 0$. También puede ser un espacio medible con la σ -álgebra \mathcal{F} , generada por todas las proyecciones $w \mapsto w(t)$ (o la completación de ésta bajo la medida de Wiener, que se definirá a continuación).

Definición 1.3.2 Si W_t es un movimiento Browniano, la medida de distribución P inducida por $W(\mathbb{R})$ es llamada medida de Wiener. Esto es P es la única medida de probabilidad en $W(\mathbb{R})$ tal que para cualquier sucesión finita de tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n$ y de conjuntos Borel $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$, se cumple

$$P(\{w : w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n\}) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

donde $p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

1.4. Procesos de difusión

Definición 1.4.1 Un proceso estocástico continuo $\{X(t), t \geq 0\}$, que posee la propiedad fuerte de Markov y para el cual las trayectorias $X(t)$ son funciones continuas de t , c.s., lo llamamos proceso de difusión.

Definición 1.4.2 Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso de difusión cuyo espacio de estados es el intervalo I con puntos extremos l y r tales que $l < r$, I necesariamente de la forma (l, r) , $(l, r]$, $[l, r)$ ó $[l, r]$, (inclusive puede ser que $l = -\infty$ y $r = +\infty$), tal proceso se dice que es regular si partiendo de cualquier punto en el interior de I se puede llegar a cualquier otro punto de I con probabilidad positiva.

Esto también se puede expresar a través del concepto tiempo de llegada de variables aleatorias. Para cualquier $z \in I$ denotamos a T_z como la variable aleatoria donde el proceso alcanza el valor z , por convención si z nunca es alcanzado escribimos $T_z = \infty$. Así, el proceso es regular si

$$P \{T_z < \infty | X(0) = x\} > 0,$$

donde $l < x, z < r$.

Además, un proceso de difusión satisface la siguiente condición: para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P \{|X(t+h) - x| > \epsilon | X(t) = x\} = 0, \quad \forall t \in I. \quad (1.5)$$

Casi todos los procesos de difusión que han aparecido en la literatura que modelan fenómenos físicos y biológicos están caracterizados por dos condiciones básicas del argumento de (1.5) que describen la media y la varianza del desplazamiento infinitesimal. Sea $\Delta_h X(t) = X(t+h) - X(t)$, entonces

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[\Delta_h X(t) | X(t) = x] = \mu(x, t) \quad (1.6)$$

y

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[\{\Delta_h X(t)\}^2 | X(t) = x] = \sigma^2(x, t), \quad (1.7)$$

siempre que $l < x < r$. Las funciones $\mu(x, t)$ y $\sigma^2(x, t)$ se llaman parámetros infinitesimales del proceso, en particular $\mu(x, t)$ es llamado el parámetro de deriva o media infinitesimal y $\sigma^2(x, t)$ es llamado el parámetro de difusión o varianza infinitesimal.

Generalmente $\mu(x, t)$ y $\sigma^2(x, t)$ son funciones continuas de x y t . Un proceso regular tiene $\sigma^2(x, t)$ positiva para $l < x < r$ y $t > 0$. Algunas veces se define a $\{X(t), t \geq 0\}$ como una difusión si, $X(t)$ es un proceso de Markov que satisface (1.5), (1.6) y (1.7).

Definición 1.4.3 Un proceso es llamado de difusión con muerte si sus trayectorias tienen un comportamiento como el de una difusión regular hasta un tiempo ζ (posiblemente aleatorio y/o infinito), que es cuando el proceso muere.

A este proceso lo denotamos por $\{X(t), 0 \leq t < \zeta\}$. Si $\zeta = \infty$ a partir de todos los puntos iniciales $X(0) = x$, entonces decimos que el proceso es conservativo y escribimos $\{X(t), t \geq 0\}$. Es decir, una difusión regular $\{X(t)\}$ en I es conservativo si

$$P[X(t) \in I | X(0) = x] = P[\zeta > t | X(0) = x] = 1, \quad \forall t \geq 0, x \in I.$$

Para un proceso de difusión con muerte y para cada punto x , existe una probabilidad $k(x)dt + o(dt)$ donde el proceso cesa (muere) en el tiempo infinitesimal $(t, t + dt)$.

Definición 1.4.4 El tiempo de llegada del proceso $\{X(t), 0 \leq t < \zeta\}$ a un nivel z es:

$$T_z = \begin{cases} \infty & \text{si } X(t) \neq z \text{ para } 0 \leq t < \zeta. \\ \inf \{t \geq 0; X(t) = z\} & \text{ecop.} \end{cases}$$

Donde *ecop* significa en cualquier otra parte.

1.4.1. Caracterización de los procesos de difusión

Definición 1.4.5 Un proceso fuerte de Markov $\{X(t), t \geq 0\}$ es llamado estándar si sus trayectorias poseen las siguientes propiedades de regularidad:

(i) $X(t)$ es continua por la derecha; es decir, para todo $s \geq 0$,

$$\lim_{t \downarrow s} X(t) = X(s).$$

(ii) El límite por la izquierda existe; es decir,

$$\lim_{t \uparrow s} X(t)$$

existe, para todo $s > 0$.

(iii) $X(t)$ es continua por la izquierda a través de tiempos de Markov, es decir, si $T_1 \leq T_2 \leq \dots$, son tiempos de Markov que convergen a $T < \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} X(T_n) = X(T)$ cuando $T < \infty$.

Todo proceso fuerte de Markov $\{X(t) : t \geq 0\}$ continuo en probabilidad y a sujeta a condiciones suaves de regularidad posee una versión equivalente $\{\bar{X}(t) : t \geq 0\}$ el cual es un proceso regular.

Una condición suficiente para un proceso de difusión estándar es la condición de Dynkin:

$$\frac{1}{h} P \{ |X(t+h) - X(t)| > \epsilon | X(t) = x \} \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

cuando $\epsilon > 0$ y $h \downarrow 0$, cuya convergencia es uniforme para toda x restringida a cualquier subintervalo compacto de (l, r) y t en cualquier intervalo finito.

Teorema 1.4.1 Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estándar y supongamos que cumple la condición de Dynkin. Entonces $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso de difusión.

Demostración

Daremos la prueba suponiendo que el espacio de estados I es un intervalo cerrado y acotado, además de que la convergencia en la condición de Dynkin (1.8) se cumple uniformemente para todo x .

Tomemos un $\delta > 0$ arbitrario, un número fijo $N > 0$ y una sucesión de enteros $k = 1, 2, \dots$. Consideremos el evento

$$A_N(k, i) = \left\{ \left| X\left(\frac{iN}{k}\right) - X\left(\frac{(i-1)N}{k}\right) \right| > \frac{1}{2}\delta \right\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Esto es $A_N(k, i)$ consiste de todas las trayectorias que se mueven más de $\frac{1}{2}\delta$ entre los tiempos $(i-1)N/k$ y iN/k . Consideremos el evento

$$B_\delta = \left\{ \sup_{0 < t < N} |X(t) - X(t-1)| > \delta \right\},$$

que consiste de todas las realizaciones exhibiendo un brinco mayor a δ en el intervalo $0 < t < N$. Como todas las trayectorias tienen límite por la izquierda y son continuas por la derecha, así

$$B_\delta \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \bigcup_{i=1}^k A_N(k, i). \quad (1.9)$$

Además, para cualquier trayectoria en B_δ debe tener un punto t ($0 < t < N$), donde $|X(t) - X(t-)| > \delta$. Para toda k suficientemente grande e i apropiado satisfaciendo $(i-1)N/k < t \leq iN/k$, podemos garantizar la validez de (1.9) por las propiedades de $X(t)$. Ahora de (1.9) podemos deducir que

$$\begin{aligned} P(B_\delta) &\leq P\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \bigcup_{i=1}^k A_N(k, i)\right\} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} P\left\{\bigcap_{k=j}^{\infty} \bigcup_{i=1}^k A_N(k, i)\right\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} P\left\{\bigcup_{i=1}^k A_N(k, i)\right\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k P\{A_N(k, i)\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Con $h = N/k$, la uniformidad en la condición de Dynkin (1.8) implica

$$P(A_N(k, i)) \leq \epsilon(\delta, k)(N/k),$$

donde $\epsilon(\delta, k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además,

$$\sum_{i=1}^k P\{A_N(k, i)\} \leq N\epsilon(\delta, k). \tag{1.11}$$

Tomando $k \rightarrow \infty$, y comparando (1.10) y (1.11), deducimos que

$$P(B_\delta) \leq N \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon(\delta, k) = 0. \tag{1.12}$$

Esto se cumple para cada $\delta > 0$. Consecuentemente,

$$P\left\{\sup_{0 < t < N} |X(t) - X(t-)| > 0\right\} \leq \sum_{\delta > 0 \text{ racional}} P\left\{\sup_{0 < t < N} |X(t) - X(t-)| > \delta\right\} = 0.$$

Así, con probabilidad 1, cada trayectoria es continua por la izquierda, y además continua para $0 < t < N$. Pero N es arbitraria y un proceso estándar es continuo por la derecha, así $X(t)$ es continua para toda $t \geq 0$. ■

Lema 1.4.1 *Si un proceso estándar satisface las condiciones infinitesimales de momentos*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E[|\Delta_h X(t)|^p | X(t) = x] = 0,$$

para algún $p > 2$, uniformemente para x en cualquier subintervalo compacto de (l, r) y t en un intervalo finito, entonces se satisface la condición de Dynkin.

Demostración

Aplicando la desigualdad de Chebyshev obtenemos

$$\frac{1}{h} P \{ |\Delta_h X(t)| > \epsilon | X(t) = x \} \leq \frac{E[|\Delta_h X(t)|^p | X(t) = x]}{h\epsilon^p}$$

y así obtenemos el resultado. ■

1.4.2. Ejemplos de procesos de difusión

- (i) *Movimiento Browniano*. Es un proceso de difusión regular en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con $\mu(x) = 0$ y $\sigma^2(x) = \sigma^2$, para toda x . Podemos calcular estos parámetros infinitesimales sabiendo que $\Delta_h X = X(h) - X(0)$ se distribuye normal con media cero y varianza $\sigma^2 h$ de donde

$$E[\Delta_h X | X(0) = x] = 0$$

y

$$E[(\Delta_h X)^2 | X(0) = x] = \sigma^2 h.$$

- (ii) *Movimiento Browniano absorbente y reflejante*. Son procesos de difusión definidos en un espacio de estados $I = [0, \infty)$. Comenzando de un punto $X(0) = x$ en el interior del intervalo, esto es, $x > 0$, ambos procesos se comportan como un movimiento Browniano hasta que el nivel cero es alcanzado. Entonces los parámetros son $\mu(x) = 0$ y $\sigma^2(x) = \sigma^2$ para $0 < x < \infty$.
- (iii) *Proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU)*. Este proceso de difusión tiene espacio de estados $I = (-\infty, \infty)$ con parámetros infinitesimales $\mu(x) = -\alpha x$ y $\sigma^2(x) = \sigma^2$, $\alpha, \sigma > 0$. Donde el parámetro de deriva refleja una fuerza de restauración dirigida hacia el origen y con una magnitud proporcional a la distancia.

Si el movimiento Browniano representa la posición de una partícula, la derivada del movimiento Browniano debería representar la velocidad de la partícula, pero esta derivada no existe en cualquier tiempo. Los procesos de OU son modelos alternativos que superan este defecto directamente, modelando la velocidad de la partícula en función del tiempo.

Teorema 1.4.2 Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ una difusión regular cuyo espacio de estados es un intervalo I con puntos extremos l y r . Supongamos que $\{X(t)\}$ tiene parámetros infinitesimales $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$. Sea g una función estrictamente monótona en I con segunda derivada continua para $l < x < r$. Entonces, $Y(t) = g[X(t)]$ define un proceso de difusión regular en el intervalo con puntos extremos $g(l)$ y $g(r)$, además $\{Y(t)\}$ tiene parámetros infinitesimales

$$\begin{aligned}\mu_Y(y) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)g''(x) + \mu(x)g'(x); \\ \sigma_Y^2(y) &= \sigma^2(x)[g'(x)]^2\end{aligned}$$

donde $y = g(x)$.

Ver demostración en [12] pág. 173-175.

(iv) *Movimiento Browniano Geométrico.* Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano con parámetros μ y σ^2 . El proceso definido por $Y(t) = e^{X(t)}$ es el movimiento Browniano geométrico cuyo espacio de estados es $(0, \infty)$ y los parámetros infinitesimales son

$$\mu_Y(y) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)y$$

y

$$\sigma_Y^2(y) = \sigma^2 y^2.$$

(v) *Proceso de Bessel.* Sea $Z(t) = X_1(t)^2 + \dots + X_n(t)^2$ donde $\{X_i(t), t \geq 0\}$ son movimientos Brownianos independientes. Si $X_i(t) = x_i$, $i = 1, \dots, n$ entonces

$$X_i(t + \Delta t) = x_i + \Delta X_i$$

y

$$Z(t + \Delta t) = z + \Delta Z,$$

donde $z = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Entonces

$$\begin{aligned}\Delta Z &= [X_1(t + \Delta t)]^2 - x_1^2 + \dots + [X_n(t + \Delta t)]^2 - x_n^2 \\ &= 2(x_1 \Delta X_1 + \dots + x_n \Delta X_n) + [(\Delta X_1)^2 + \dots + (\Delta X_n)^2],\end{aligned}$$

donde $\Delta X_1, \dots, \Delta X_n$ son independientes y normalmente distribuidos con media cero y varianza Δt . De esto se tiene que

$$E[\Delta Z | Z(t) = z] = n\Delta t$$

y

$$\begin{aligned} E[(\Delta Z)^2 | Z(t) = z] &= 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\Delta t + o(\Delta t) \\ &= 4z\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

donde $o(\Delta t)$ representa las esperanzas de los términos de la forma $(\Delta X_i)^4$ y de orden mayores. Podemos usar el hecho de que los términos ΔX_i se distribuyen normal para concluir que estos términos en total son de menor orden que Δt . Así pues, $Z(t)$ es una difusión con parámetros infinitesimales

$$\mu(z) = n; \quad \sigma^2(z) = 4z.$$

El proceso de Bessel es $Y(t) = g[Z(t)]$ para $g(z) = \sqrt{z}$. Si $y = g(z)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(z) &= n; \quad \sigma^2(z) = 4y^2, \\ g'(z) &= 1/(2\sqrt{z}) = 1/(2y); \quad g''(z) = -1/(4z^{3/2}) = -1/(4y^3). \end{aligned}$$

Por el teorema 1.4.2 los parámetros infinitesimales del proceso de Bessel son

$$\mu_Y(y) = (n - 1)/(2y); \quad \sigma_Y^2(y) = 1.$$

Para $n = 1$ el proceso de Bessel se puede identificar con el reflejo del movimiento Browniano para el cual $\mu_Y(y) = 0$ y $\sigma_Y^2(y) = 1$ como se indicó anteriormente.

1.4.3. Procesos de difusión condicionados

Consideremos un proceso de difusión regular $(X_t)_{t \geq 0}$ con espacio de estados $[0, 1]$, media y varianza infinitesimal $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$ respectivamente. Supongamos que 0 y 1 son cotas existentes y sea $p(t, x, y)$ la densidad de transición de X_t . Sea $(X_t^*)_{t \geq 0}$ el proceso confinado con trayectorias aleatorias con participación en la última absorción en 1. X_t^* exhibe solamente trayectorias continuas, entonces X_t^* es simplemente una restricción de X_t . Además, X_t^* es un proceso de Markov tal como lo es X_t , la historia pasada no puede afectar donde ocurre la absorción, de aquí que X_t^* es un proceso de difusión (decimos que es un proceso de difusión condicionado). Ahora determinaremos los parámetros infinitesimales de este proceso. Supongamos, que los extremos del intervalo $[0, 1]$ son alcanzables en un tiempo finito, es

decir, $E[T_0 \wedge T_1] < \infty$, (T_z denota el primer tiempo de llegada al punto z). Definimos

$$s(\xi) = \exp\left(-\int_0^\xi \frac{2\mu(\eta)}{\sigma^2(\eta)} d\eta\right)$$

y

$$S(x) = \int_0^x s(\xi) d(\xi).$$

Como los extremos del intervalo $[0, 1]$ existen por hipótesis, $S(x)$ y $S(1)$ son finitos y $P(T_1 < T_0 | X_0 = x) = S(x)/S(1)$, para $0 \leq x \leq 1$. Para simplificar el desarrollo supongamos que $S''(x) = s'(x) = -[2\mu(x)/\sigma^2(x)]s(x)$ es acotada para $0 \leq x \leq 1$. Sea $p^*(t, x, y)$ la densidad de transición de X_t^* , o equivalentemente, la densidad de X_t condicionado al evento $T_1 < T_0$. Como $P(X_t | T_1 < T_0) > 0$, por la regla de Bayes obtenemos que

$$\begin{aligned} p^*(t, x, y) dy &= P(y \leq X_t < y + dy | X_0 = x, T_1 < T_0) \\ &= \frac{P(y \leq X_t < y + dy | X_0 = x) P(T_1 < T_0 | X_0 = x, X_t = y)}{P(T_1 < T_0 | X_0 = x)}. \end{aligned}$$

Por la propiedad de Markov,

$$P(T_1 < T_0 | X_0 = x, X_t = y) = P(T_1 < T_0 | X_0 = y) = S(y)/S(1),$$

luego

$$p^*(t, x, y) = \frac{p(t, x, y) S(y)}{S(x)}. \quad (1.13)$$

Ahora bien, podemos construir procesos extraídos de un proceso Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ imponiendo ciertas restricciones sobre el espacio muestral. Sean α y β números reales fijos y sea W_t^* para $0 \leq t \leq 1$ el movimiento Browniano condicionado a

$$\alpha < B_1 < \beta. \quad (1.14)$$

Intuitivamente, W_t^* es un proceso de difusión con parámetro de tiempo confinado en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Sea $\pi_{x,t}$ la probabilidad que del estado x al tiempo t la trayectoria aleatoria de B_t satisfaga (1.14) al tiempo 1. Si $p(t, x, y)$ denota la densidad de transición del proceso no condicionado al tiempo t entonces la densidad de transición de W_t^* está dada por

$$\begin{aligned} p^*(t, x : s, y) dy &= \mathbb{P}(y < W_s^* \leq y + dy | W_t^* = x) \\ &= \frac{p(s-t, x, y) \pi_{y,s} dy}{\pi_{x,t}}, \quad 0 < t < s < 1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

La justificación de (1.15) se sigue de (1.13).

1.5. Generadores infinitesimales

La importancia de la teoría de los procesos de Markov es debido a distintos hechos. Los procesos de Markov proporcionan modelos para diferentes fenómenos naturales puesto que el presente contiene toda la información necesitada del pasado para hacer una predicción en el futuro.

Definición 1.5.1 Sea X un proceso de Feller; una función f en C_0 decimos que pertenece al dominio \mathcal{D}_A de un generador infinitesimal de X si el límite

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f)$$

existe en C_0 . El operador $A : \mathcal{D}_A \rightarrow C_0$ así definido es llamado el generador infinitesimal del proceso X o del semigrupo P_t .

Para el proceso de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ con semigrupo (P_t) , si f es una función Borel acotada se tiene que

$$E[f(X_{t+h}) - f(X_t) | \mathcal{F}_t] = P_h f(X_t) - f(X_t).$$

Si $f \in \mathcal{D}_A$, escribimos

$$E[f(X_{t+h}) - f(X_t) | \mathcal{F}_t] = hAf(X_t) + o(h).$$

Así, A aparece como una media que describe cómo el proceso se mueve de un punto a otro, en un intervalo de tiempo infinitesimal.

Ahora daremos algunas propiedades de A .

Proposición 1.5.1 Si $f \in \mathcal{D}_A$ entonces

(i) $P_t f \in \mathcal{D}_A$ para cada t ;

(ii) la función $t \mapsto P_t f$ es diferenciable en C_0 y

$$\frac{d}{dt} P_t f = A P_t f = P_t A f;$$

(iii) $P_t f - f = \int_0^t P_s A f ds = \int_0^t A P_s f ds$.

Demostración

Para un t fijo, usando la propiedad de semigrupo se tiene,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P_s(P_t f) - P_t f] = \lim_{s \rightarrow 0} P_t \left(\frac{1}{s} (P_s f - f) \right) = P_t A f$$

lo cual prueba (i) y $A P_t f = P_t A f$. También, $t \mapsto P_t f$ tiene derivada por la derecha la cual es igual a $P_t A f$.

Ahora consideremos la función $t \mapsto \int_0^t P_s A f ds$. Esta función es diferenciable y su derivada es igual a $P_t A f$. Como dos funciones continuas las cuales tienen las mismas derivadas por la derecha difieren solamente por una constante, tenemos que $P_t f = \int_0^t P_s A f ds + g$ para alguna g , lo cual completa la prueba de (ii); tomando $t = 0$ se sigue que $g = f$ lo cual prueba (iii). ■

Proposición 1.5.2 *El generador A de un semigrupo de Feller satisface el principio del máximo positivo: Si $f \in \mathcal{D}_A$ y si x_0 es tal que $0 \leq f(x_0) = \sup \{f(x), x \in E\}$ entonces*

$$A f(x_0) \leq 0.$$

Demostración

Tenemos que $A f(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} (P_t f(x_0) - f(x_0))$ y

$$P_t f(x_0) - f(x_0) \leq f(x_0)(P_t(x_0, E) - 1) \leq 0.$$

■

Ahora bien, sea X un proceso de Feller con función de transición (P_t) .

Proposición 1.5.3 *Si $f \in \mathcal{D}_A$ entonces el proceso*

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t A f(X_s) ds$$

es una (\mathcal{F}_t^0, P_ν) -martingala para cada ν . Si en particular, $A f = 0$, entonces $f(X_t)$ es una martingala.

Demostración

Como f y Af son acotadas, M_t^f es integrable para cada t . Además

$$E_\nu[M_t^f | \mathcal{F}_s^0] = M_s^f + E_\nu[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Af(X_u)du | \mathcal{F}_s^0].$$

Por la propiedad de Markov, la esperanza condicional del lado derecho es igual a

$$E_{X_s}[f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} Af(x_u)du].$$

Pero para cada $y \in E$,

$$E_y[f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} Af(x_u)du] = P_{t-s}f(y) - f(y) - \int_0^{t-s} P_u Af(y)du,$$

el cual sabemos que es cero por la proposición 1.5.1 y con esto termina la prueba. \blacksquare

Por otro lado tenemos,

Proposición 1.5.4 Si $f \in C_0$ y si existe una función $g \in C_0$ tal que

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)ds \tag{1.16}$$

es una (\mathcal{F}_t, P_x) -martingala para cada x , entonces $f \in \mathcal{D}_A$ y $Af = g$

Demostración

Para cada x tenemos, integrando

$$P_t f(x) - f(x) - \int_0^t P_s g(x)ds = 0, \tag{1.17}$$

luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t P_s g ds$$

y como $g \in C_0$, entonces $f \in \mathcal{D}_A$. Además, de 1.17 se tiene que

$$\frac{1}{t}(P_t f - f) = \frac{1}{t} \int_0^t P_s g ds, \tag{1.18}$$

luego,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(P_t f - f) - g \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t P_s g ds - g \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (P_s g - g) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|P_s g - g\| ds, \end{aligned}$$

y esta última expresión se va a cero cuando t va a cero. ■

Si X es un movimiento Browniano lineal, entonces $Af(x) = \frac{1}{2}f''(x)$ para cada $f \in \mathcal{L}$ (\mathcal{L} es el espacio Schwartz de funciones f infinitamente diferenciables tal que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x)P(x) = 0$ para cualquier polinomio P y cualquier entero k). Y si $X = \sigma B$ donde B es un movimiento Browniano, entonces $Af(x) = \frac{\sigma^2}{2}f''(x)$, $f \in \mathcal{L}$. En este caso, podemos de hecho caracterizar el espacio \mathcal{D}_A . Denotamos a C_0^2 al espacio de funciones con segundas derivadas continuas f en \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) tal que las derivadas de orden uno y dos de f están en C_0 .

Proposición 1.5.5 *Para $d \geq 2$, el generador infinitesimal de un MB^d es igual a $\frac{1}{2}\Delta$ en el espacio C_0^2 .*

Ver demostración en [13].

Capítulo 2

Puentes

En este capítulo daremos la construcción de puentes derivados de un proceso de Markov utilizando solamente sus densidades de transición. Además daremos condiciones suficientes para su existencia y unicidad (en ley). Incluso construiremos puentes derivados del proceso general multidimensional Ornstein-Uhlenbeck.

2.1. Introducción

Un puente de a a b sobre $[0, T]$ derivado de un proceso de Markov Z es un proceso obtenido condicionando Z a comenzar en a al tiempo 0 y llegar a b al tiempo T , donde $T > 0$. Para construir estos puentes sólo utilizaremos sus densidades de transición. Los puentes de Wiener y de Bessel han sido extensamente estudiados además de que tienen numerosas aplicaciones. Por otra parte llamaremos Parte Radial de un proceso con valores en \mathbb{R} a su norma euclideana.

Examinaremos que las operaciones derivadas de puentes y partes radiales conmutan comenzando del mismo proceso de Markov en el caso de un proceso de Wiener estándar multidimensional y en el caso del proceso Ornstein-Uhlenbeck multidimensional considerando puentes con puntos extremos cero.

2.2. Construcción de puentes

Sea (E, \mathcal{E}) un espacio métrico completo separable con la σ -álgebra de Borel, para $T > 0$, sea $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso de Markov homogéneo con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y densidades de transición $(p_t^Z)_{0 < t \leq T}$ con respecto a la medida fija σ -finita λ sobre \mathcal{E} , es decir,

$$P(Z_t \in A | Z_s) = \int_A p_{t-s}^Z(Z_s, y) \lambda(dy), \quad P - c.s.,$$

para todo $A \in \mathcal{E}, 0 \leq s < t \leq T$. Sean $a, b \in E$, si $p_t^Z(x, b) > 0$ para todo $x \in E, 0 < t \leq T$, y

$$p_{s,t}(x, y) := \frac{p_{t-s}^Z(x, y) p_{T-t}^Z(y, b)}{p_{T-s}^Z(x, b)}, \quad x, y \in E, 0 \leq s < t \leq T, \quad (2.1)$$

entonces por un puente de a a b sobre $[0, T]$ derivado de Z podríamos entenderlo como un proceso de Markov $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ con distribución inicial $P(Y_0 = a) = 1$ y con densidades de transición $(p_{s,t})_{0 \leq s < t \leq T}$ a condición de que existe tal proceso (ver la proposición 2.5.1).

Para el caso del puente de Bessel d -dimensional con $d > 1$ y con $b = 0$, donde las densidades de transición $(p_t^R)_{t > 0}$ del proceso de Bessel d -dimensional $(R_t)_{t > 0}$ tiene $p_t^R(x, 0) = 0$ para toda $x \geq 0, t > 0$ donde

$$p_t^R(x, y) := t^{-1} (y/x)^\nu y \exp(-(x^2 + y^2)/2t) I_\nu(xy/t) \quad \text{para } x, t > 0.$$

Ahora bien, para $\epsilon > 0$, denotemos por $B(b, \epsilon)$ la bola abierta en E centrada en b y con radio ϵ . Sea $(Y_t^\epsilon)_{0 \leq t \leq T}$ el proceso $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ condicionado a que $Z_T \in B(b, \epsilon)$. Así, para $x, y \in E, 0 \leq s < t \leq T$, y por (1.15) las densidades de transición de Y^ϵ están dadas por

$$p_{s,t}^{Y^\epsilon}(x, y) = p_{t-s}^Z(x, y) \frac{\int_{B(b, \epsilon)} p_{T-t}^Z(y, z) \lambda(dz)}{\int_{B(b, \epsilon)} p_{T-s}^Z(x, z) \lambda(dz)}, \quad (2.2)$$

donde $\int_{B(b, \epsilon)} p_{T-s}^Z(x, z) \lambda(dz) \neq 0$. Además, como

$$P(Y_t^\epsilon \in A | Y_s^\epsilon = x) = P(Z_t \in A | Z_s = x, Z_T \in B(b, \epsilon)), \quad (2.3)$$

se tiene que

$$P(Y_t^\epsilon \in A | Y_s^\epsilon = x) = \int_A p_{s,t}^{Y^\epsilon}(x, y) \lambda(dy),$$

para todo $A \in \mathcal{E}$ (ver Anexos (1)). Podemos pensar en el puente deseado como el límite de Y^ϵ cuando $\epsilon \downarrow 0$, así tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.1 Para todo $x, y \in E$ y $0 \leq s < t < T$ definimos

$$p_{s,t}(x, y) := p_{t-s}^Z(x, y) \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\int_{B(b,\epsilon)} p_{T-t}^Z(y, z) \lambda(dz)}{\int_{B(b,\epsilon)} p_{T-s}^Z(x, z) \lambda(dz)}, \quad (2.4)$$

si el límite existe, y además $p_{s,t}(x, y) := 0$ en otro caso. Un puente de a a b sobre $[0, T]$ derivado de Z , es un proceso de Markov $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ con distribución inicial $P(Y_0 = a) = 1$, $P(Y_T = b) = 1$ y con densidades de transición $(p_{s,t})_{0 \leq s < t < T}$.

Notemos que el proceso de Markov $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ (si existe) es en general no homogéneo. Sin embargo, adicionando condiciones sobre $(p_t^Z)_{0 < t \leq T}$ aseguramos que $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ admita una versión teniendo trayectorias aleatorias con propiedades de regularidad como la continuidad.

Lema 2.2.1 Supongamos que $(p_{s,t})$ definido por (2.4) satisface las siguientes propiedades:

- (i) para todo $0 \leq s < t < T$, la función $(x, y) \mapsto p_{s,t}(x, y)$ es medible,
- (ii) para todo $x \in E$ y $0 \leq s < t < T$, la función $(x, y) \mapsto p_{s,t}(x, y)$ es una densidad,
- (iii) para todo $x, z \in E$ y $0 \leq s < t < T$ se cumple la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$p_{s,u}(x, z) = \int_E p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z) \lambda(dy).$$

Entonces existe una única medida de probabilidad $P_{a,b,T}^Z$ sobre $(E^{[0,T]}, \mathcal{E}^{[0,T]})$ tal que el proceso coordinado (X_t) sobre $(E^{[0,T]}, \mathcal{E}^{[0,T]})$ bajo $P_{a,b,T}^Z$ es un puente de a a b sobre $[0, T]$ derivado de Z . Consecuentemente, si (Y_t) es un puente de a a b sobre $[0, T]$ derivado de Z entonces su ley sobre $(E^{[0,T]}, \mathcal{E}^{[0,T]})$ es $P_{a,b,T}^Z$.

Demostración

Para $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ y $0 \leq s < t < T$, sea $\mu_{s,t}(x, A) := \int_A p_{s,t}(x, y) \lambda(dy)$, $\mu_{s,T}(x, A) := 1_A(b)$, donde 1_A denota la función indicadora del conjunto A .

Entonces $\mu_{s,t}$ es una probabilidad de transición para todo $0 \leq s < t < T$. Por medio de la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tiene que

$$\mu_{s,t}(x, A) = \int_E \mu_{s,t}(x, dy) \mu_{t,u}(y, A),$$

para toda $x \in E$ (ver Anexos (2)). Luego, por el teorema 1.2.2 existe una única medida de probabilidad $P_{a,b,T}^Z$ sobre $(E^{[0,T]}, E^{[0,T]})$ tal que el proceso coordinado (X_t) es de Markov bajo $P_{a,b,T}^Z$ con probabilidades de transición $(\mu_{s,t})$ y con distribución inicial $P_{a,b,T}^Z(X_0 = a) = 1$. Además, $P_{a,b,T}^Z(X_T = b) = P_{a,b,T}^Z(X_T = b | X_0 = a) = \mu_{0,T}(a, b) = 1$. ■

Lema 2.2.2 *Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x, \epsilon))} \int_{B(x, \epsilon)} f(z) \lambda(dz) = f(x) \quad (2.5)$$

para todo $x \in E$. Consecuentemente, si $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tal que $f(z) = g(z)$ λ -c.s. $z \in E$ entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in E$.

Ver demostración en [7].

Lema 2.2.3 *Si para cada $0 < t \leq T$, la densidad $p_t^Z(x, y)$ satisface las propiedades*

(i) *la función $(x, y) \mapsto p_t^Z(x, y)$ es continua,*

(ii) *para todo $x_0 \in E$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in B(x_0, \delta)} \sup_{y \in E} p_t^Z(x, y) < \infty,$$

(iii) *para todo $y_0 \in E$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in E} \sup_{y \in B(y_0, \delta)} p_t^Z(x, y) < \infty,$$

(iv) *para todo $y \in E$ tenemos que*

$$\int_E p_t^Z(x, y) \lambda(dx) < \infty,$$

entonces la ecuación de Chapman-Kolmogorov dada por

$$p_{s+t}^Z(x, z) = \int_E p_s^Z(x, y) p_t^Z(y, z) \lambda(dy) \quad (2.6)$$

se cumple para todo $x, z \in E$ y todo $s, t > 0$ con $s + t \leq T$.

Demostración

Para $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ y $0 < t \leq T$, sea $\mu_t^Z(x, A) := \int_A p_t^Z(x, y) \lambda(dy)$. Tomemos a $s, t > 0$ con $s + t \leq T$. Entonces para $A \in \mathcal{E}$ la ecuación de Chapman-Kolmogorov $\mu_{s+t}^Z(x, A) = \int_E \mu_s^Z(x, dy) \mu_t^Z(y, A)$ se cumple P_{Z_s} - c.s., $x \in E$, donde P_{Z_s} denota la distribución de Z_s , pues

$$\mu_{s+t}^Z(x, A) = \int_E \mu_s^Z(x, dy) \mu_t^Z(y, A).$$

(Ver Anexos (3)).

Entonces, hemos obtenido que para P_{Z_s} c.s. $x \in E$, la ecuación (2.6) se cumple λ - c.s. para $z \in E$. Por las suposiciones (i) y (iii) y el teorema de convergencia dominada, ambos lados de la ecuación (2.6) son continuas para $z \in E$ y para cada fijo $x \in E$. Por el lema 2.2.2, si $x \in E$ tal que (2.6) se cumple λ - c.s. $z \in E$ entonces se vale para toda $z \in E$. Por las suposiciones (i), (ii) y (iv) y el teorema de convergencia dominada, ambos lados de la ecuación (2.6) son continuos en $x \in E$ y para cada fijo $z \in E$. La medida P_{Z_s} es σ -finita, entonces por el lema 2.2.2 concluimos que (2.6) se vale para todo $x, z \in E$ y todo $s, t > 0$ con $s + t \leq T$. ■

Lema 2.2.4 *Supongamos que las densidades $(p_t^Z)_{0 < t \leq T}$ satisfacen las siguientes propiedades:*

- (i) *para todo $0 < t \leq T$, la función $(x, y) \mapsto p_t^Z(x, y)$ es continua,*
- (ii) *para todo $x, z \in E$, $s, t > 0$ con $s + t \leq T$ la ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.6) se cumple,*
- (iii) *para todo $x \in E$ y todo $0 < t \leq T$, tenemos que $p_t^Z(x, b) > 0$.*

Entonces (2.1) se cumple, y las funciones $(p_{s,t})$ satisfacen las condiciones del lema 2.2.1.

Demostración

Claramente, las suposiciones (i), (iii) y el lema 2.2.2 implican (2.1) por la continuidad $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{B(b, \epsilon)} p_{T-t}^Z(y, z) \lambda(dz) = p_{T-t}^Z(y, b)$. Usando (i) y (ii) las funciones $(p_{s,t})$ satisfacen las condiciones del lema 2.2.1, pues la medibilidad se sigue de que (p_t^Z) son continuas y la ecuación de Chapman-Kolmogorov de:

$$\begin{aligned} \int_E p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z) \lambda(dy) &= \int_E \left(\frac{p_{t-s}^Z(x, y) p_{T-t}^Z(y, b) p_{u-t}^Z(y, z) p_{T-u}^Z(z, b)}{p_{T-s}^Z(x, b) p_{T-t}^Z(y, b)} \right) \lambda(dy) \\ &= \frac{p_{T-u}^Z(z, b)}{p_{T-s}^Z(x, b)} \int_E p_{t-s}^Z(x, y) p_{u-t}^Z(y, z) \lambda(dy) \\ &= \frac{p_{u-s}^Z(x, z) p_{T-u}^Z(z, b)}{p_{T-s}^Z(x, b)} \\ &= p_{s,u}(x, z), \end{aligned}$$

donde se utilizaron las ecuaciones 2.1 y 2.6. ■

Lema 2.2.5 *Sea $E = [0, \infty]$, λ la medida de Lebesgue en $[0, \infty]$ y sea $b = 0$. Supongamos que las densidades $(p_t^Z)_{0 \leq t \leq T}$ satisfacen las siguientes propiedades:*

- (i) *para todo $0 < t \leq T$, la función $(x, y) \mapsto p_t^Z(x, y)$ es continua,*
- (ii) *para todo $x, z \in E$, $s, t > 0$ con $s + t \leq T$ la ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.6) se cumple,*
- (iii) *para todo $x, y \in E$ y todo $0 \leq s < t < T$, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{p_{T-t}^Z(y, \epsilon)}{p_{T-s}^Z(x, \epsilon)}$ existe,*
- (iv) *para todo $0 \leq s < t < T$ y todo $x \in E$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\sup_{y \in E} \sup_{0 < \epsilon < \delta} \frac{p_{T-t}^Z(y, \epsilon)}{p_{T-s}^Z(x, \epsilon)} < \infty.$$

Entonces para todo $x, y \in E$, $0 \leq s < t < T$, tenemos

$$p_{s,t}(x, y) = p_{T-s}^Z(x, y) \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{p_{T-t}^Z(y, \epsilon)}{p_{T-s}^Z(x, \epsilon)}, \quad (2.7)$$

y las funciones $(p_{s,t})_{0 \leq s < t < T}$ satisfacen las condiciones del lema 2.2.1.

Demostración

Suponiendo (i), (iii) y la regla de L'Hospital obtenemos (2.7). Para cada $0 \leq s < t < T$, la medibilidad de $(x, y) \mapsto p_{s,t}(x, y)$ se sigue de (2.7) y de las suposiciones (i) y (iii). Para cada $0 \leq s < t < T$ y $x \in E$, la función $y \mapsto p_{s,t}(x, y)$ es una densidad, esto debido a la suposición (iv) y el teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_{s,t}(x, y)dy &= \int_0^\infty \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{p_{t-s}^Z(x, y)p_{T-t}^Z(y, \epsilon)}{p_{T-s}^Z(x, \epsilon)} dy \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{p_{T-s}^Z(x, \epsilon)} \int_0^\infty p_{t-s}^Z(x, y)p_{T-t}^Z(y, \epsilon) dy \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{p_{T-s}^Z(x, \epsilon)} p_{(t-s)+(T-t)}^Z(x, \epsilon) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para cada $0 \leq s < t < u < T$ y $x, z \in E$, la ecuación de Chapman-Kolmogorov $p_{s,u}(x, z) = \int_0^\infty p_{s,t}(x, y)p_{t,u}(y, z)dy$ se sigue de (2.7) y de las suposiciones (i) – (iii). ■

2.3. Puente Browniano (o de Wiener)

Un puente Browniano es un proceso gaussiano estándar definido en $[0, 1]$ y con covarianza $\Gamma(s, t) = s(1-t)$, ($s \leq t$). La forma más fácil de probar que Γ es una covarianza es observando que para el proceso $X_t = B_t - tB_1$ donde $B = \{B_t\}$ es un movimiento Browniano, $E[X_s X_t] = s(1-t)$ para $s \leq t$, pues la función de covarianza para B está dada por

$$\Gamma_B(s, t) = s,$$

(ver Anexos (4)), es decir, $\Gamma_B(s, t) = \min(s, t)$. Así $\Gamma_X(s, t) = E(X_s X_t) = s(1-t)$. Esto también nos da una versión de continuidad del puente Browniano. Observemos que si $X_1 = 0$ c.s. entonces todas las trayectorias van casi seguramente de 0 al tiempo 0 a 0 al tiempo 1. Más generalmente, podemos considerar el puente Browniano X^y entre 0 y y el cual puede ser realizado tomando

$$X_t^y = B_t - t(B_1 - y) = X_t^0 + ty, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

donde $X_t^0 = X_t$ es un puente de Browniano con puntos extremos cero.

2.3.1. Proceso de Wiener estándar d -dimensional

Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener estándar d -dimensional y $T > 0$ fijo. Sea $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ el puente con puntos extremos cero sobre $[0, T]$ derivados de $(B_t)_{t \geq 0}$ (llamado el puente de Wiener d -dimensional entre 0 y 0 sobre $[0, T]$). Sea $R_t = \|B_t\|$, $t \geq 0$ la parte radial de $(B_t)_{t \geq 0}$ (llamado el proceso de Bessel d -dimensional), donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídeana. Sea $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ el puente con puntos extremos cero sobre $[0, T]$ derivado de (R_t) (llamado el puente de Bessel d -dimensional entre 0 y 0 sobre $[0, T]$). Veremos además, que las leyes de $(\|X_t\|)_{0 \leq t \leq T}$ y $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ coinciden. Intuitivamente, tomando los puentes con puntos extremos cero y tomando las partes radiales conmutan en el caso del proceso de Wiener estándar, o en otras palabras, la parte radial de un puente de Wiener con puntos extremos cero es un puente de Bessel con puntos extremos cero. Mostraremos este resultado calculando las densidades de transición de los procesos $(\|X_t\|)_{0 \leq t \leq T}$ y $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Sabemos que la densidad de transición del proceso $(B_t)_{t \geq 0}$ es

$$p_t^B(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{\|x - y\|^2}{2t} \right\}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Consideremos la parte radial de $(B_t)_{t \geq 0}$ para $d \geq 2$.

Proposición 2.3.1 *Para cada $d \geq 1$, (R_t) es un proceso de Markov homogéneo con respecto a cada \mathbb{P}_x , (medida de probabilidad de B_t comenzando en x), $x \in \mathbb{R}^d$. Para $d \geq 2$, su semigrupo P_t^d está dado en $[0, \infty]$ por las densidades*

$$p_t^d(a, b) = (a/t)(b/a)^{d/2} I_{d/2-1}(ab/t) \exp(-(a^2 + b^2)/(2t)), \quad a, b > 0,$$

donde I_ν es la función de Bessel modificada indexada por ν .

Demostración

Sea f una función Borel positiva en $[0, \infty]$. Para $s < t$,

$$E_x[f(R_t)|\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(|B_{t-s}|)] = P_{t-s}\tilde{f}(B_s), \quad \mathbb{P}_x - c.s.$$

donde $\tilde{f}(x) = f(|x|)$ y P_t es el semigrupo del movimiento Browniano. Para $d \geq 2$, tenemos

$$P_t\tilde{f}(x) = (2\pi t)^{-d/2} \int \exp(-|x - y|^2/2t) f(|y|) dy,$$

y usando coordenadas polares

$$P_t \tilde{f}(x) = (2\pi t)^{-d/2} \int \exp(-(|x|^2 + r^2)/2t) \exp(-|x|r \cos \theta/t) f(r) r^{d-1} dr \sigma(d\eta),$$

donde η es el elemento genérico de la esfera unitaria y θ es el ángulo entre x y η . Vemos que $P_t \tilde{f}(x)$ depende sólo de $|x|$ lo cual prueba la primera parte de la proposición ($d = 1$). Además, tomando $P_t^d f(a) = P_t \tilde{f}(x)$ donde x es cualquier punto tal que $|x| = a$, vemos que P_t^d tiene una densidad dada por

$$(2\pi t)^{-d/2} b^{d-1} \exp(-(a^2 + b^2)/2t) \int_{S^{d-1}} \exp(-ab \cos \theta/t) \sigma(d\eta),$$

lo cual era lo que esperabamos. ■

Notemos que un proceso de Markov con semigrupo P_t^d es el proceso de Bessel d -dimensional.

Ahora bien, usando las ideas de la proposición 2.3.1, consideremos $t > 0$, $0 < t_1 < \dots < t_n$, $b > 0$ y $x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}, x \in \mathbb{R}^d$, tenemos

$$\begin{aligned} P(R_{t_n+t} < b | B_{t_1} = x^{(1)}, \dots, B_{t_{n-1}} = x^{(n-1)}, B_{t_n} = x) &= P(R_{t_n+t} < b | B_{t_n} = x) \\ &= P(R_t < b | B_0 = x) \\ &= \int_{\|y\| < b} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}\right\} dy, \end{aligned}$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^d$ (con respecto a la medida de Lebesgue). Introduciendo coordenadas polares $y = (y_1, \dots, y_d)$ dadas por

$$y_1 = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{d-3} \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1}$$

$$y_2 = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{d-3} \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}$$

$$y_3 = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{d-3} \cos \theta_{d-2}$$

$$\vdots$$

$$y_{d-1} = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$y_d = r \cos \theta_1,$$

y así obtenemos (ver Anexos (5)),

$$P(R_t < b | B_0 = x) = \int_0^b \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{\|x\|^2 + r^2}{2t} \right\} G_d(r, x) dr,$$

para $x \in \mathbb{R}^d$, donde

$$G_d(r, x) = \int_{[0, 2\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi]} r^{d-1} (\sin \theta_1)^{d-2} \cdots (\sin \theta_{d-2}) \exp \left\{ \frac{1}{t} \sum_{k=1}^d x_k y_k \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_{d-1},$$

con $x = (x_1, \dots, x_d)$. Como la integral $\int_{\|y\| < b} \exp \left\{ -\frac{\|x-y\|^2}{2t} \right\} dy$ es una función de x que depende solamente de $\|x\|$, entonces haciendo $x = (0, \dots, \|x\|)$ obtenemos

$$P(R_t < b | B_0 = x) = \int_0^b \frac{r^{d-1}}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{\|x\|^2 + r^2}{2t} \right\} H_d(r, x) dr,$$

para $x \in \mathbb{R}^d$, donde

$$H_d(r, x) = 2\pi \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{d-2} \exp \left\{ \frac{r \|x\|}{t} \cos \theta_1 \right\} d\theta_1 \prod_{k=2}^{d-2} \int_0^\pi (\sin \theta_k)^{d-k-1} d\theta_k.$$

Si $x \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{d-2} \exp \left\{ \frac{r \|x\|}{t} \cos \theta_1 \right\} d\theta_1 &= \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{r \|x\|}{2t}\right)^\nu} I_\nu \left(\frac{r \|x\|}{t} \right) \\ &= \frac{(2t)^\nu}{(r \|x\|)^\nu} \Gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\pi} I_\nu \left(\frac{r \|x\|}{t} \right), \end{aligned}$$

donde $\nu = \frac{d}{2} - 1$ e I_ν denota la función de Bessel indexada por ν definida por

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}, \quad z > 0.$$

Además, si k es un entero positivo entonces $\int_0^\infty (\sin \theta)^k d\theta = c_k \frac{(k-1)!!}{k!!}$, donde $c_k = \pi$ si k es par y $c_k = 2$ si k es impar, donde $k!! = k(k-1)(k-3) \cdots 1$ (Ver Anexos (6)).

Consecuentemente,

$$P(R_{t_n+t} < b | B_{t_1} = x^{(1)}, \dots, B_{t_{n-1}} = x^{(n-1)}, B_{t_n} = x) = \int_0^b p_t^R(\|x\|, r) dr,$$

donde

$$p_t^R(x, y) = \begin{cases} \frac{y^{\nu+1}}{tx^\nu} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2t}\right\} I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) & \text{si } x, y > 0 \\ \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu t^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} & \text{si } x = 0, y > 0 \end{cases}$$

y $p_t^R(x, 0) := \lim_{y \downarrow 0} p_t^R(x, y)$ si $x \geq 0$. Entonces

$$P(R_{t_n+t} < b | B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \int_0^b p_t^R(R_{t_n}, r) dr, \quad P - c.s.$$

Claramente el proceso $(R_t)_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ donde $(\mathcal{F}_t^B) := \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$, entonces concluimos que (R_t) es un proceso de Markov a tiempo continuo con densidades $(p_t^R)_{t > 0}$. Notemos que p_t^R es válido para $d = 1$ con $p_t^R(x, 0) := \lim_{y \downarrow 0} p_t^R(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}$ si $x \geq 0$ (ver por ejemplo [13] pág. 446).

Obviamente, para todo $t > 0$ y $z \in \mathbb{R}^d$, tenemos

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}^d} p_t^B(x, y) = (2\pi t)^{-d/2},$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} p_t^B(x, z) dx = 1,$$

entonces por los lemas 2.2.1, 2.2.3 y 2.2.4 obtenemos la existencia del puente de Wiener (X_t) y sus densidades de transición

$$p_{s,t}^X(x, y) = \left(\frac{T-s}{2\pi(t-s)(T-t)}\right)^{d/2} \exp\left\{-\frac{\|x-y\|}{2(t-s)} - \frac{\|y\|}{2(T-t)} + \frac{\|x\|}{2(T-s)}\right\},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ y todo $0 \leq s < t < T$. En el caso del proceso de Bessel, podemos probar que (X_t) es nuevamente un proceso de Markov y sus densidades de transición son:

$$p_{s,t}^{\|X\|}(x, y) = \frac{y^{\nu+1}}{(t-s)x^\nu} \left(\frac{T-s}{T-t} \right)^{\nu+1} \exp \left\{ -\frac{x^2 - y^2}{2(t-s)} - \frac{y^2}{2(T-t)} + \frac{x^2}{2(T-s)} \right\} I_\nu \left(\frac{xy}{t-s} \right),$$

para todo $0 \leq s < t < T$ y todo $x, y > 0$. Además,

$$p_{s,t}^{\|X\|}(0, y) = \frac{y^{\nu+1}}{2^\nu (t-s)^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{T-s}{T-t} \right)^{\nu+1} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2(t-s)} - \frac{y^2}{2(T-t)} \right\},$$

para todo $0 \leq s < t < T$ y todo $y > 0$. Mostraremos ahora que las densidades $(p_t^R)_{t>0}$ satisfacen las condiciones de los lemas 2.2.3 y 2.2.5. Sabemos que

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} [1 + O(z^2)], \quad z \downarrow 0,$$

$$I_\nu(z) = \frac{(e)^z}{\sqrt{2\pi z} [1 + O(z^{-1})]}, \quad z \rightarrow \infty,$$

(ver [8]).

Entonces,

$$c_1 [z^\nu 1_{(0,1)}(z) + z^{-1/2} e^z 1_{[1,\infty)}(z)] \leq I_\nu(z) \leq c_2 [z^\nu 1_{(0,1)}(z) + z^{-1/2} e^z 1_{[1,\infty)}(z)],$$

para algunos $0 < c_1 < c_2$ y para todo $z > 0$. Así,

$$\begin{aligned} c_1 \left[\left(\frac{xy}{t} \right)^\nu 1_{(0,1)} \left(\frac{xy}{t} \right) + \left(\frac{xy}{t} \right)^{-1/2} e^{(\frac{xy}{t})} 1_{[1,\infty)} \left(\frac{xy}{t} \right) \right] &\leq I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right) \\ &\leq c_2 \left[\left(\frac{xy}{t} \right)^\nu 1_{(0,1)} \left(\frac{xy}{t} \right) + \left(\frac{xy}{t} \right)^{-1/2} e^{(\frac{xy}{t})} 1_{[1,\infty)} \left(\frac{xy}{t} \right) \right], \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{xy}{t} \right)^\nu 1_{(0,1)} \left(\frac{xy}{t} \right) + \left(\frac{xy}{t} \right)^{-1/2} e^{(\frac{xy}{t})} 1_{[1,\infty)} \left(\frac{xy}{t} \right) \right] \frac{y^{\nu+1}}{tx^\nu} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2t} \right) &= \\ \frac{y^{2\nu+1}}{t^{\nu+1}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2t} \right) 1_{(0,1)} + \frac{y^{d/2-1/2}}{t^{1/2} \nu^{\nu+1/2}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2t} + \frac{xy}{t} \right) &1_{[1,\infty)}, \end{aligned}$$

así,

$$c_1 f_t(x, y) \leq p_t^R(x, y) \leq c_2 f_t(x, y) \quad (2.8)$$

para todo $x, y, t > 0$, donde

$$f_t(x, y) := t^{-d/2} y^{d-1} e^{-(x^2+y^2)/(2t)} \mathbf{1}_{(0,1)}(xy/t) + t^{-1/2} (y/x)^{(d-1)/2} e^{-(x-y)^2/(2t)} \mathbf{1}_{[1,\infty]}(xy/t).$$

Usando (2.8) obtenemos que $\sup_{x \geq 0} \sup_{y \geq 0} p_t^R(x, y) < \infty$ para todo $t > 0$. Además, para todo $t > 0$ tenemos

$$\sup_{0 < xy < t} p_t^R(x, y) \leq c_2 t^{-d/2} \sup_{y > 0} y^{d-1} e^{-y^2/(2t)} < \infty,$$

$$\sup_{xy \geq 0, y \geq x} p_t^R(x, y) \leq c_2 t^{-1/2},$$

$$\sup_{xy \geq 0, y \geq x} p_t^R(x, y) = \sup_{\alpha \geq 1} \sup_{xy \geq t, y = \alpha x} p_t^R(x, y) = \sup_{\alpha \geq 1} \sup_{x \geq \sqrt{t/\alpha}} p_t^R(x, \alpha x)$$

$$\leq \sup_{\alpha \geq 1} \sup_{x \geq \sqrt{t/\alpha}} c_2 t^{-1/2} \alpha^{(d-1)/2} e^{-(\alpha-1)^2 x^2/(2t)}$$

$$= c_2 t^{-1/2} \sup_{\alpha \geq 1} \alpha^{(d-1)/2} e^{-(\alpha-1)^2/(2\alpha)} < \infty.$$

Y para todo $y, t > 0$ tenemos

$$\int_0^\infty p_t^R(x, y) dx \leq c_2 t^{-d/2} y^{d-1} \left(\int_0^{t/y} e^{-x^2/(2t)} dx + \int_{t/y}^\infty e^{-(x-y)^2/(2t)} dx \right) < \infty.$$

Por (2.8), para todo $x > 0$ y $0 \leq s < t < T$, se tiene

$$\sup_{y > 0} \sup_{0 < \epsilon < (T-s)/x} \frac{p_{T-t}^R(y, \epsilon)}{p_{T-s}^R(x, \epsilon)} \leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{T-s}{T-t} \right)^{d/2} \exp \left\{ \frac{x^2}{2(T-s)} + \frac{T-s}{2x^2} \right\}.$$

Usando $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\nu} I_\nu(z) = 1/(2^\nu \Gamma(\nu + 1))$ y los lemas 2.2.1, 2.2.3 y 2.2.5, podemos probar la existencia del puente de Bessel $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ y calcular sus densidades de transición. Por el lema 2.2.1 las leyes de los procesos $(\|X_t\|)_{0 \leq t \leq T}$ y $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ coinciden.

Notemos además, que por la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$\int_0^\infty p_s^R(x, y) p_t^R(y, z) = p_{s+t}^R(x, z),$$

se cumple $\forall x, z \geq 0$ y $\forall s, t > 0$, entonces

$$\int_0^\infty ye^{\gamma y^2} I_\nu(\alpha y) I_\nu(\beta y) dy = \frac{1}{2\gamma} \exp\left\{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}\right\} I_\nu\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right), \quad (2.9)$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0$.

2.4. Puentes derivados de un proceso Ornstein-Uhlenbeck multidimensional

Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE) multidimensional

$$dZ_t = AZ_t dt + \Sigma dW_t, \quad t \geq 0, \quad (2.10)$$

donde $Z_0 = 0$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times r}$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener estándar r -dimensional. Sabemos que existe una solución de (2.10), a saber

$$Z_t = \int_0^t e^{(t-s)A} \Sigma dW_s, \quad t \geq 0. \quad (2.11)$$

El proceso $(Z_t)_{t \geq 0}$ es un proceso Gauss-Markov a tiempo continuo, llamado un proceso general de Ornstein-Uhlenbeck (OU) d -dimensional. De (2.11) obtenemos

$$\begin{aligned} Z_t &= \int_0^s e^{(t-u)A} \Sigma dW_u + \int_s^t e^{(t-u)A} \Sigma dW_u \\ &= \int_0^s e^{[(t-s)+(s-u)]A} \Sigma dW_u + \int_s^t e^{(t-u)A} \Sigma dW_u \\ &= e^{(t-s)A} \int_0^s e^{(s-u)A} \Sigma dW_u + \int_s^t e^{(t-u)A} \Sigma dW_u \\ &= e^{(t-s)A} Z_s + \int_s^t e^{(t-u)A} \Sigma dW_u \end{aligned}$$

para todo $0 \leq s < t$. Así, la distribución condicional de Z_t dado $Z_s = x$ es una distribución normal con media $e^{(t-s)A}x$ y matriz de varianza

$$\int_s^t e^{(t-u)A} \Sigma \Sigma' e^{(t-u)A'} du = \int_0^{t-s} e^{(t-s-v)A} \Sigma \Sigma' e^{(t-s-v)A'} dv.$$

2.4. PUENTES DERIVADOS DE UN PROCESO ORNSTEIN-UHLENBECK MULTIDIMENSIONAL

Entonces si $\Sigma\Sigma'$ es una matriz definida positiva (necesariamente $r \geq d$) entonces $(Z_t)_{t \geq 0}$ tiene densidades de transición $(p_t^Z)_{t > 0}$ dadas por

$$p_t^Z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(V_t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - e^{tA}x)' V_t^{-1} (y - e^{tA}x) \right\}, \quad (2.12)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ y $\forall t > 0$, donde

$$V_t = \int_0^t e^{(t-v)A} \Sigma \Sigma' e^{(t-v)A'} dv, \quad t > 0.$$

Ver detalles en [2].

También tenemos que

$$p_t^Z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\tilde{V}_t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - e^{tA}y)' \tilde{V}_t^{-1} (x - e^{tA}y) \right\},$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ y $\forall t > 0$, donde

$$\tilde{V}_t = \int_0^t e^{-vA} \Sigma \Sigma' e^{-vA'} dv, \quad t > 0.$$

Si todos los eigenvalores de A tiene parte real negativa entonces $V_t = V - e^{tA} V e^{tA'}$, $t > 0$, donde V es la solución única de $AV + VA' = -\Sigma\Sigma'$ dada por $V = \int_0^\infty e^{uA} \Sigma \Sigma' e^{uA'} du$. Ver por ejemplo [11].

Obviamente, para todo $t > 0$ y $z \in \mathbb{R}^d$ tenemos

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}^d} p_t^Z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(V_t)}},$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} p_t^Z(x, z) dx = \det(e^{-tA}).$$

Ver detalles en [2].

Entonces por los lemas 2.2.1, 2.2.3 y 2.2.4 obtenemos la existencia del puente Ornstein-Uhlenbeck (X_t) sobre $[0, T]$ con puntos extremos cero y su densidad de transición es

$$p_{s,t}^X(x,y) = \sqrt{\frac{\det(\tilde{V}_{T-s})}{(2\pi)^d \det(\tilde{V}_{t-s}\tilde{V}_{T-t})}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - e^{-(t-s)A}y)' \tilde{V}_{t-s}^{-1}(x - e^{-(t-s)A}y) - \frac{1}{2}y' \tilde{V}_{T-t}^{-1}y + \frac{1}{2}x' \tilde{V}_{T-s}^{-1}x \right\} \quad (2.13)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ y todo $0 \leq s < t < T$.

Consideremos la EDE d -dimensional

$$dZ_t = aZ_t dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0, \quad (2.14)$$

donde $Z_0 = 0$, $a, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener d -dimensional. Por (2.11), la EDE (2.14) tiene como solución

$$Z_t = \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW_s, \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

y la parte de unicidad para (2.14) se cumple. Sea $T > 0$ fijo. Sea $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un puente con puntos extremos cero sobre $[0, T]$ derivado de $(Z_t)_{t \geq 0}$. Sea $R_t := \|Z_t\|$, $t \geq 0$, la parte radial de $(Z_t)_{t \geq 0}$. Sea $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ el puente con puntos extremos cero sobre $[0, T]$ derivado de $(R_t)_{t \geq 0}$. Mostraremos que las densidades de transición de los procesos $(\|X_t\|)_{0 \leq t \leq T}$ y $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ coinciden. De hecho, ya obtuvimos este resultado para el caso especial cuando $a = 0$ y $\sigma = 1$.

De (2.12) obtuvimos que la densidad de transición del proceso OU $(Z_t)_{t \geq 0}$ es:

$$p_t^Z(x,y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2\kappa(a,t))^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{\|y - e^{at}x\|^2}{2\sigma^2\kappa(a,t)} \right\}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$$

donde $\kappa(a,t) = \frac{e^{2at}-1}{2a}$ para $a \neq 0$ y $\kappa(0,t) = t$, ver [11]. Como en el caso de Bessel d -dimensional, podemos probar que $(R_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov homogéneo con densidad de transición

$$p_t^R(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\nu t} y^{\nu+1}}{\sigma^{2\nu} \kappa(a,t)^{\nu}} \exp \left\{ -\frac{e^{2at}x^2 + y^2}{2\sigma^2 \kappa(a,t)} \right\} I_\nu \left(\frac{e^{at}xy}{\sigma^2 \kappa(a,t)} \right) & \text{si } x, y > 0 \\ \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu (\sigma^2 \kappa(a,t))^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\sigma^2 \kappa(a,t)} \right\} & \text{si } x = 0, y > 0 \end{cases}$$

donde $\nu = \frac{d}{2} - 1$ y $p_t^R(x, 0) := \lim_{y \downarrow 0} p_t^R(x, t) = 0$ si $d \geq 2$, $x \geq 0$ y $p_t^R(x, 0) := \lim_{y \downarrow 0} p_t^R(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2\kappa(a, t)}} \exp\left\{-\frac{e^{2at}x^2}{2\sigma^2\kappa(a, t)}\right\}$ si $d = 1$, $x \geq 0$.

Por (2.13) la densidad de transición del puente $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ (OU) es

$$p_{s,t}^X(x, y) = \left(\frac{\kappa(a, T-s)}{2\pi\sigma^2\kappa(a, t-s)\kappa(a, T-t)} \right)^{d/2} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\|y - e^{a(t-s)}x\|^2}{2\sigma^2\kappa(a, t-s)} - \frac{e^{2a(T-t)}\|y\|^2}{2\sigma^2\kappa(a, T-t)} + \frac{e^{2a(T-s)}\|x\|^2}{2\sigma^2\kappa(a, T-s)} \right\},$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ y $\forall 0 \leq s < t < T$. En el caso del proceso de Bessel d -dimensional, podemos probar que $(\|X_t\|)_{0 \leq t \leq T}$ es nuevamente un proceso de Markov y podemos calcular sus densidades de transición:

$$p_{s,t}^{\|X\|}(x, y) = \frac{e^{-a\nu(t-s)}y^{\nu+1}}{\sigma^2\kappa(a, t-s)x^\nu} \left(\frac{\kappa(a, T-s)}{\kappa(a, T-t)} \right)^{\nu+1} \\ \times \exp \left\{ -\frac{e^{2a(t-s)}x^2 - y^2}{2\sigma^2\kappa(a, t-s)} - \frac{e^{2a(T-t)}y^2}{2\sigma^2\kappa(a, T-t)} + \frac{e^{2a(T-s)}x^2}{2\sigma^2\kappa(a, T-s)} \right\} I_\nu \left(\frac{e^{a(t-s)}xy}{\sigma^2\kappa(a, t-s)} \right),$$

$\forall 0 \leq s < t < T$ y $\forall x, y > 0$, y

$$p_{s,t}^{\|X\|}(0, y) = \frac{y^{\nu+1}}{2^\nu(\sigma^2\kappa(a, t-s))^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\kappa(a, T-s)}{\kappa(a, T-t)} \right)^{\nu+1} \\ \times \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\sigma^2\kappa(a, t-s)} - \frac{y^2}{2\sigma^2\kappa(a, T-t)} \right\},$$

$\forall 0 \leq s < t < T$ y $\forall y > 0$.

Podemos observar que las densidades $(p_t^R)_{t>0}$ satisfacen las condiciones de los lemas 2.2.3 y 2.2.5 y así obtenemos la existencia del puente $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ con su densidad de transición. Por el lema 2.2.1 las leyes de los procesos $(\|X_t\|)_{0 \leq t \leq T}$ y $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ sobre $([0, \infty)^{[0, T]}, (\mathcal{B}([0, \infty)))^{[0, T]})$ coinciden.

2.5. Puentes Markovianos

2.5.1. Fórmula para las densidades de transición

Sea $\Delta = \{(s, t) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : s < t\}$ y (E, \mathcal{E}) un espacio medible. Consideremos dos familias de *kernel* en E , $P_{s,t}$ y $\hat{P}_{s,t}$ indexadas por Δ , tal que para $s < r < t$,

$$P_{s,t} = P_{s,r} \circ P_{r,t}, \quad \hat{P}_{s,t} = \hat{P}_{r,t} \circ \hat{P}_{s,r}, \quad (2.16)$$

$(P_{s,t})$ y $(\hat{P}_{s,t})$ son llamadas funciones *hacia delante* y *hacia atrás*, respectivamente. Sea (μ_t) una familia de medidas σ -finitas en E . Supongamos que $P_{s,t}(x, \cdot)$ es μ_t -absolutamente continua y $\hat{P}_{s,t}(x, \cdot)$ es μ_s -absolutamente continua para todo $s < t$, $x \in E$ y tal que $(P_{s,t})$ y $(\hat{P}_{s,t})$ están en dualidad con respecto a (μ_t) , es decir,

$$\int f P_{s,t} g d\mu_s = \int \hat{P}_{s,t} f g d\mu_t, \quad s < t, f, g \in \mathcal{E}_+. \quad (2.17)$$

Supongamos que $p_{st}(x, \cdot)$ es la densidad de $P_{s,t}(x, \cdot)$ y $\hat{p}_{st}(y, \cdot)$ la de $\hat{P}_{s,t}(y, \cdot)$.

Lema 2.5.1 *Para $x, y \in E$ fijos, $\int p_{sr}(x, z) \hat{p}_{rt}(y, z) \mu_r(dz)$ no depende de r para $s < r < t$.*

Demostración

Sea v tal que $s < r < v < t$. Primero probaremos que

$$\int_E P_{r,v}(w, dz) \hat{p}_{vt}(y, z) = \hat{p}_{rt}(y, w), \quad \mu_r(dw) - c.s. \quad (2.18)$$

Multipliquemos ambos lados por $f(w)$, ($f \in \mathcal{E}_+$) e integremos con respecto a $\mu_r(dw)$. El lado derecho da $\hat{P}_{r,t}(y, f)$ por definición de \hat{p}_{rt} . El lado izquierdo puede ser escrito, (si tomamos a $\phi = \hat{p}_{vt}(y, \cdot)$) como

$$\int f P_{r,v} \phi d\mu_r = \int \hat{P}_{r,v} f \phi d\mu_v.$$

Por definición $\phi d\mu_v$ es la medida $\hat{P}_{v,t}(y, \cdot)$ y por (2.16) el lado derecho de esta última expresión es igual a $\hat{P}_{r,t}(y, f)$.

Ahora probaremos el lema. Multipliquemos ambos lados de la ecuación 2.18 por $p_{sr}(x, w)$ e integremos con respecto a $\mu_r(dw)$. En el lado izquierdo reemplazamos $p_{sr}(x, w) \mu_r(dw)$ por $P_{s,r}(x, dw)$ y

$$\begin{aligned} \int P_{s,r}(x, dw) P_{r,v}(w, dz) \hat{p}_{vt}(y, z) &= \int P_{s,v}(x, dz) \hat{p}_{vt}(y, z) \\ &= \int p_{sv}(x, z) \hat{p}_{vt}(y, z) \mu_v(dz). \end{aligned}$$

Del lado derecho tenemos $\int p_{sr}(x, w)\hat{p}_{rt}(y, w)\mu_v(dw)$ y así el lema es probado. ■

Dado este lema, podemos tomar sin ambigüedad

$$p(s, t, x, y) = \int p_{sr}(x, z)\hat{p}_{rt}(y, z)\mu_r(dz), \quad s < r < t. \quad (2.19)$$

Si la σ -álgebra \mathcal{E} es separable y todas las medidas $P_{s,t}(x, \cdot)$, $\hat{P}_{s,t}(x, \cdot)$ son acotadas, sabemos que $p_{sr}(\cdot, \cdot)$ y $\hat{p}_{rt}(\cdot, \cdot)$ pueden ser elegidas como $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ -medibles y por el teorema de Fubini $p(s, t, \cdot, \cdot)$ es automáticamente $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ -medible.

Teorema 2.5.1 *La función p definida como (2.19) satisface las siguientes propiedades, las cuales caracterizan su unicidad: para $s < r < t$*

$$P_{s,t}(x, dy) = p(s, t, x, y)\mu_t(dy), \hat{P}_{s,t}(x, dy) = p(s, t, y, x)\mu_s(dy), \quad (2.20)$$

$$p(s, t, x, y) = \int p(s, r, x, z)p(r, t, z, y)\mu_r(dz). \quad (2.21)$$

Si además $P_{s,t}(x, \cdot)$ es medible en $(s, x) \in (-\infty, t) \times E$ y $\hat{P}_{t,u}(x, \cdot)$ medible en $(u, x) \in (t, +\infty) \times E$ para todo x, t fijos, la densidad de transición $p(s, t, x, y)$ es conjuntamente medible en $\Delta \times E \times E$.

Demostración

Sean p y p' dos funciones que satisfacen las propiedades 2.20 y 2.21. Para $s < r < t$ y para x, y fijos tenemos μ_r -c.s.

$$p(s, r, x, \cdot) = p'(s, r, x, \cdot), \quad p(r, t, \cdot, y) = p'(r, t, \cdot, y).$$

Usando (2.21) encontramos que $p(s, t, x, y) = p'(s, t, x, y)$.

Así, la unicidad ha sido establecida, ahora probaremos la primera parte de (2.20) (la segunda parte es una consecuencia de (2.19) y (2.18)). Para $f \in \mathcal{E}_+$, tenemos por (2.19)

$$\int p(s, t, x, y)f(y)\mu_t(dy) = P_{s,t}(x, f).$$

Ver detalles en [15].

Y así (2.20) ha sido probada. Notemos que la función p definida en (2.19) no depende de la elección de las versiones preliminares de las densidades. Podemos tomar ahora $p_{sr}(x, z) = p(s, r, x, z)$ y $\hat{p}_{rt}(y, z) = p(r, t, z, y)$ y (2.21) se sigue de (2.19).

Ahora probaremos la medibilidad. En (2.19) fijamos a r racional, y elegimos las versiones preliminares tales que $p_{sr}(x, z)$ es medible en $(-\infty, r) \times E \times E$ y $\hat{p}_{rt}(y, z)$ medible en $(r, +\infty) \times E \times E$. De esto se sigue que $p(s, t, x, y)$ es conjuntamente medible en $\Delta_r \times E \times E$, donde Δ_r es el conjunto de todos los (s, t) tales que $s < r < t$. Tomando una unión sobre r obtenemos la medibilidad conjunta sobre Δ . ■

Sean (P_t) y (\hat{P}_t) densidades de transición en E , que están en dualidad con respecto a la medida σ -finita μ , y absolutamente continuas con respecto a ésta. Definimos

$$\mu_t = \mu, \quad P_{s,t} = P_{t-s}, \quad \hat{P}_{s,t} = \hat{P}_{t-s} \quad s, t \in \mathbb{R}, s < t.$$

Teorema 2.5.2 *Sean (P_t) y (\hat{P}_t) densidades de transición en dualidad con respecto a μ y absolutamente continuas. Entonces existe una única función $p(t, x, y)$ en $(0, \infty) \times E \times E$, medible en (x, y) para t fijo, tal que*

$$P_t(x, dy) = p(t, x, y)\mu(dy); \quad \hat{P}_t(x, dy) = p(t, y, x)\mu(dy), \quad (2.22)$$

$$p(s+t, x, y) = \int p_s(x, z)p_t(z, y)\mu(dz). \quad (2.23)$$

Demostración

Aplicando el teorema 2.5.1 y de (2.19) podemos elegir versiones preliminares $p_{sr}(x, z)$ y $\hat{p}_{rt}(y, z)$ dependiendo solamente de $r - s$ y $t - r$. Así es claro que $p(s, t, y, z)$ depende solamente de $t - s$. ■

Ahora bien, consideremos a $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados E . Fijemos $T > 0$ y sea (X, S) un punto del espacio-tiempo elegido según una distribución conveniente sobre $E \times [0, T]$. Condicionando sobre $X = x, S = s$ sea Y la concatenación de dos puentes independientes derivados de Z , el primero un (z, s, x) -puente y el segundo un $(x, T - s, y)$ -puente. Entonces la distribución de Y es absolutamente continua con respecto a la ley de un (z, T, y) -puente.

Consideremos además al semigrupo de transición P_t de Z_s . Así, Z es un proceso fuerte de Markov con trayectorias continuas por la derecha. Supongamos además que E es Lusinian (es decir homeomorfo para un subespacio Borel de algún espacio métrico compacto), P_t mapea funciones Borel a funciones Borel y las trayectorias de Z son *cadlag*, es decir, continuas por la derecha con límite por la izquierda. Esto nos permite tomar a Z como un proceso coordinado sobre el espacio muestral Ω para todas las trayectorias *cadlag* de $[0, \infty)$ a E . La ley de Z cuando comienza en x es \mathbb{P}_x . Escribimos como $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ a la filtración natural de Z y $(\theta_t)_{t \geq 0}$ para el cambio usual de operadores, es decir, $Z_s \circ \theta_t = Z_{s+t}$.

Denotemos a las densidades de transición de Z como

$$P_t(x, dy) = p_t^Z(x, y)\lambda(dy) \quad (2.24)$$

donde λ es una medida σ -finita sobre E . Note que esta condición prohíbe saltos en los tiempos fijos:

$$\mathbb{P}_x(Z_t = Z_{t-}) = 1, \quad \forall t > 0, x \in E. \quad (2.25)$$

Denotemos a \mathcal{E} a la σ -álgebra de Borel sobre E y consideremos las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1 (*Dualidad*) Existe una medida σ -finita λ en (E, \mathcal{E}) y un proceso \hat{Z} con trayectorias *cadlag* y tiempos de vida infinitos tal que el semigrupo \hat{P}_t de \hat{Z} está en dualidad con P_t relativo a λ :

$$\int_E f(x)P_t g(x)\lambda(dx) = \int_E \hat{P}_t f(x)g(x)\lambda(dx), \quad (2.26)$$

para todo $t > 0$ y f, g funciones positivas \mathcal{E} -medibles.

Hipótesis 2 (*Densidades de Transición*) Existe una función $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{(0, \infty)} \otimes \mathcal{E}$ -medible (utilizamos \otimes para indicar la σ -álgebra producto), $(x, t, y) \mapsto p_t(x, y) \in (0, \infty)$ tal que

$$P_t f(x) = \int_E p_t(x, y)f(y)\lambda(dy), \quad \forall t > 0, \quad (2.27)$$

y

$$\hat{P}_t f(x) = \int_E p_t(y, x)f(y)\lambda(dy), \quad \forall t > 0, \quad (2.28)$$

para cualquier función f acotada \mathcal{E} -medible.

Además, suponemos que se cumple la identidad de Chapman-Kolmogorov

$$p_{t+s}(x, y) = \int_E p_t(x, z)p_s(z, y)\lambda(dz), \quad \forall s, t > 0, x, y \in E. \quad (2.29)$$

Por la hipótesis de dualidad y por el teorema 2.5.2 se cumple que

$$\hat{P}(x, dy) = p_t^Z(y, x)\lambda(dy). \quad (2.30)$$

Notemos, por ejemplo, que cualquier proceso de difusión 1-dimensional regular sin cota absorbente satisface las hipótesis 1 y 2.

Se utiliza el método de Doob de h -transformaciones para construir las leyes $\mathbb{P}_{x,y}^T$ de los puentes, las cuales para cada x y T servirán como una familia de leyes condicionales regulares \mathbb{P}_x para $(Z_t)_{0 \leq t < T}$ dado $Z_{T-} = y$. En vista de (2.25), estas $\mathbb{P}_{x,y}^T$ también servirán como leyes condicionales dado $Z_T = y$. Pero con el acercamiento de la h -transformación es natural pensar sobre todo en términos de condicionar el límite izquierdo, (ver detalles en [13]).

Fijemos $x, y \in E$ y $T > 0$ tal que $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$. Usando (2.29) el proceso

$$H_t = p_{T-t}^Z(Z_t, y), \quad 0 \leq t < T,$$

es una martingala bajo \mathbb{P}_x . Así, la fórmula

$$Q(A) = \int_A H_t(\omega)\mathbb{P}_x(d\omega), \quad A \in \mathcal{F}_t, 0 \leq t < T, \quad (2.31)$$

define una función $Q = Q_{x,y}^T$ sobre el álgebra $\mathcal{G} = \cup_{0 \leq t < T} \mathcal{F}_t$ tal que la restricción $Q|_{\mathcal{F}_t}$ es σ -aditiva. Q se extiende a la medida \mathcal{F}_{T-} , la σ -álgebra generada por \mathcal{G} . Esta extensión, cuando normalizamos por $p_T^Z(x, y)$ será la ley $\mathbb{P}_{x,y}^T$.

Sea Ω_T el espacio de las trayectorias continuas por la derecha de $[0, T)$ a E que tienen límites por la izquierda sobre $(0, T)$. Podemos ver a Q como una medida finita aditiva sobre Ω_T . El punto es que Ω_T junto con su filtración natural $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t < T}$ es proyectivamente cerrada y podemos aplicar el teorema de proyección del límite para concluir que Q se extiende a la medida Q^* (σ -aditiva) sobre la σ -álgebra $\cup_{0 \leq t < T} \mathcal{G}_t$. Si Q^* es una medida completa

para el conjunto de trayectorias con límites por la izquierda en T , entonces podríamos identificar a Q^* con una medida sobre $(\Omega, \mathcal{F}_{T-})$ y ésta debería ser la extensión deseada.

Aquí es donde la hipótesis de dualidad (2.26) toma juego. Podemos hacer la construcción dual, obteniendo una medida \hat{Q}^* sobre Ω_T correspondiente a que \hat{Z} comience en y y condicionado a tener a x como límite por la izquierda al tiempo T . Sea Ω_T^+ el espacio de mapeos *cadlag* de $(0, T)$ a E . Podemos ver a ambas medidas Q^* y \hat{Q}^* como medidas sobre Ω_T^+ . Usando (2.26) vemos que las distribuciones finito dimensionales muestran que Q^* es la imagen de \hat{Q}^* bajo el tiempo reversible el cual manda trayectorias $\omega \in \Omega_T$ a trayectorias $(\omega((T-t)-))_{0 < t < T}$. Como \hat{Q}^* está concentrada sobre ambas trayectorias las cuales tienen límite por la derecha al tiempo 0 y es igual a y , entonces Q^* concentra su masa sobre ambas trayectorias que tienen límite por la izquierda al tiempo T y es igual a y .

Así, existe una medida $Q = Q_{x,y}^T$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_{T-})$ tal que se cumple (2.31). Definamos

$$\mathbb{P}_{x,y}^T = [p_T^Z(x, y)]^{-1} Q_{x,y}^T, \quad 0 < p_T^Z(x, y) < \infty.$$

Proposición 2.5.1 *Bajo las suposiciones (2.24), de dualidad y de densidades de transición, si $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$ entonces existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_{x,y}^T$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_{T-})$ tal que*

$$\mathbb{P}_{x,y}^T(F) p_T^Z(x, y) = \mathbb{P}_x(F p_{T-t}^Z(Z_t, y)), \quad (2.32)$$

para toda función positiva F , \mathcal{F}_t -medible y para todo $0 \leq t < T$. Bajo $\mathbb{P}_{x,y}^T$ el proceso coordinado $(Z_t)_{0 \leq t < T}$ es un proceso de Markov no homogéneo con densidades de transición

$$p_{s,t}^{y,T}(z, z') = p_{s,t}(z, z') = \frac{p_{t-s}^Z(z, z') p_{T-t}^Z(z', y)}{p_{T-s}^Z(z, y)}, \quad 0 < s < t < T. \quad (2.33)$$

Además $\mathbb{P}_{x,y}^T(Z_0 = x, Z_{T-} = y) = 1$. Finalmente, si $F \geq 0$ es \mathcal{F}_t -medible y $g \geq 0$ es una función Borel sobre E , entonces

$$\mathbb{P}_x(Fg(Z_{T-})) = \int_E \mathbb{P}_{x,y}^T(F) g(y) p_T^Z(x, y) \lambda(dy), \quad (2.34)$$

en la cual podemos poner Z_T en lugar de Z_{T-} . Así, $(\mathbb{P}_{x,y}^T)_{y \in E}$ es una versión regular de la familia de distribuciones de probabilidad condicional $\mathbb{P}(\cdot | Z_{T-} = y)$, $y \in E$, de igual forma para Z_T .

Demostración

De la propiedad fuerte de Markov de $(Z_t)_{0 \leq t < T}$ bajo $\mathbb{P}_{x,y}^T$ se sigue (2.32). Por el teorema de clases monótonas para probar (2.34) es suficiente considerar a F , \mathcal{F}_t -medible, donde $0 < t < T$. Para tal F , por la propiedad de Markov al tiempo t , y por (2.32) y (2.25) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(Fg(Z_{T-})) &= \mathbb{P}_x(FP_{T-t}g(Z_t)) \\ &= \mathbb{P}_x\left(F \int p_{T-t}^Z(Z_t, y)g(y)\lambda(dy)\right) \\ &= \int \mathbb{P}_x(Fp_{T-t}^Z(Z_t, y)g(y))\lambda(dy) \\ &= \int \mathbb{P}_{x,y}^T(F)p_T^Z(x, y)g(y)\lambda(dy). \end{aligned}$$

■

Observación.

Notemos que si $p_T^Z(x, y) < \infty$ entonces el teorema del muestreo opcional (que nos dice que bajo ciertas condiciones el valor esperado de una martingala en un tiempo de paro es igual a su valor inicial) aplicado a la martingala $H_t = p_{T-t}^Z(Z_t, y)$ muestra que $\{(x, t) : p_{T-t}^Z(x, y) = \infty\}$ cumple con $\mathbb{P}_x(p_{T-t}^Z(Z_t, y) = \infty \text{ para algún } t \in (0, T)) = 0$.

Corolario 2.5.1 *Supongamos $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$. La ley del proceso reverso $\{Z_{(T-t)}\}_{0 \leq t < T}$ es $\hat{\mathbb{P}}_{y,x}^T$, que es la ley del puente (y, T, x) para el proceso dual \hat{Z} .*

Corolario 2.5.2 *Supongamos $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$. Para cada tiempo de paro L la distribución condicional regular $\mathbb{P}_{x,y}^T$ para $\{Z_{L+u}\}_{0 \leq u < T-L}$ dada \mathcal{F}_L sobre $(L < T)$ está dada por $\mathbb{P}_{Z_L, y}^{T-L}$.*

Este resultado aplicado al proceso dual después del tiempo reversible y condicionando sobre Z_T , implica la descomposición del proceso de Markov original Z en tiempos aleatorios τ que corresponden a tiempos de paro del proceso reverso.

Definición 2.5.1 *Un proceso Hunt es un proceso fuerte de Markov que es casi continuo por la izquierda con respecto a la mínima filtración completa admisible.*

Corolario 2.5.3 *Supongamos que Z es un proceso Hunt. Para cada tiempo aleatorio ζ , ($\zeta \geq t$), tal que está en la σ -álgebra generada por $(Z_{t+u}, u \geq 0)$, una distribución condicional regular para $(Z_t, 0 \leq t < \zeta)$ dado que $(\zeta, Z_{\zeta-}, Z_{\zeta+u}, u \geq 0)$ está dada por $\mathbb{P}_{x, Z_{\zeta-}}^{\zeta}$.*

Para la demostración de los corolarios anteriores ver [5] y [6].

2.6. Procesos de Markov con puentes idénticos

Sean $X = (X_t, \mathbb{P}_x)$ y $Y = (Y_t, \mathbb{Q}_x)$ procesos de difusión regulares en \mathbb{R} . Sea $\mathbb{P}_{x,y}^t$ la ley condicional de $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ dado $X_0 = x, X_t = y$. Sea $\mathbb{Q}_{x,y}^t$ la ley análoga del puente para Y . Recientemente, Benjamín y Lee (véase [10]) probaron el siguiente resultado:

Teorema 2.6.1 *Supongamos que X es un movimiento Browniano estándar y Y es una solución de la ecuación diferencial estocástica*

$$dY_t = dB_t + \mu(Y_t)dt, \quad (2.35)$$

donde B es un movimiento Browniano estándar, el parámetro de deriva μ está acotado y es dos veces diferenciable. Si $\mathbb{Q}_{x,x}^t = \mathbb{P}_{x,x}^t$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y todo $t > 0$, entonces (i) $\mu(x) \equiv k$ ó (ii) $\mu(x) = k \tanh(kx + c)$ para algunas constantes reales k y c .

Así, dado un parámetro de deriva μ si definimos $\phi(x) := \exp \int_0^x \mu(y)dy$, entonces se cumple el teorema 2.6.1 si y sólo si

$$\frac{1}{2}\phi''(x) = m\phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $m := k^2/2$. Luego, el teorema 2.6.1 puede ser expresado como sigue: Si X es un movimiento Browniano y si Y es un movimiento Browniano con parámetro de deriva μ entonces X y Y tienen ley común del puente si y sólo si, μ es la derivada logarítmica de una eigenfunción estrictamente positiva

de un generador local infinitesimal de X , en cuyo caso las leyes de X y Y están relacionadas por

$$\frac{d\mathbb{Q}_x}{d\mathbb{P}_x} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-mt} \frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)}. \quad (2.36)$$

Sea E un espacio de Banach de mapeos continuos en $[0, 1]$ sobre \mathbb{R} y sea λ la medida de Wiener sobre subconjuntos de Borel de E . Además, sea $X = (X_t, \mathbb{P}_x)$ el movimiento Browniano asociado en E , esto es, la difusión E -valuada con semigrupo de transición dado por

$$P_t(x, f) := \int_E f(x + \sqrt{ty}) \lambda(dy).$$

Ahora bien, dado $z \in E$, sea $Y = (Y_t, \mathbb{Q}_x)$ el movimiento Browniano en E con parámetro de deriva z y semigrupo de transición

$$Q_t(x, f) := \int_E f(x + tz + \sqrt{ty}) \lambda(dy).$$

Ahora bien, tenemos el siguiente resultado,

Teorema 2.6.2 *Sean X y Y procesos fuertes de Markov como se describieron anteriormente, que satisfacen las hipótesis de dualidad y la de densidades de transición. Supongamos además que existe $t_0 > 0$ tal que $\mathbb{Q}_{x,x}^{t_0} = \mathbb{P}_{x,x}^{t_0}$ para todo $x \in E$. Entonces*

- (a) $\mathbb{P}_x|_{\mathcal{F}_t} \sim \mathbb{Q}_x|_{\mathcal{F}_t}$ y $\hat{P}^y|_{\mathcal{F}_t} \sim \hat{Q}^y|_{\mathcal{F}_t}$, para todo $x, y \in E$ y $t > 0$
- (b) Existe una constante $l \in \mathbb{R}$, una función continua Borel $\phi : E \rightarrow (0, \infty)$ y una función continua Borel $\hat{\phi} : E \rightarrow (0, \infty)$ tal que para todo $t > 0$,

$$P_t \phi(x) = e^{lt} \phi(x), \quad \forall x \in E, \quad (2.37)$$

$$\hat{P}_t \hat{\phi}(x) = e^{lt} \hat{\phi}(x), \quad \forall x \in E, \quad (2.38)$$

$$\mathbb{Q}_x|_{\mathcal{F}_t} = e^{-lt} \frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)} \mathbb{P}_x|_{\mathcal{F}_t}, \quad \forall x \in E, \quad (2.39)$$

$$\hat{\mathbb{Q}}_x|_{\mathcal{F}_t} = e^{-lt} \frac{\hat{\phi}(X_t)}{\hat{\phi}(X_0)} \hat{\mathbb{P}}_x|_{\mathcal{F}_t}, \quad \forall x \in E, \quad (2.40)$$

La función $\phi\hat{\phi}$ es una versión Borel de la derivada de Radon-Nikodym $d\lambda_Y/d\lambda_X$.

(c) $\mathbb{Q}_{x,y}^t = \mathbb{P}_{x,y}^t$ para todo $(x, t, y) \in E \times (0, \infty) \times E$;

Ver demostración en [5].

2.7. Fórmula de condicionamiento

Recordemos que un funcional continuo aditivo (CAF) de Z es un proceso continuo creciente adaptado $(A_t)_{t \geq 0}$ tal que para todo $s, t \geq 0$, \mathbb{P}_x -c.s. $\omega \in \Omega$,

$$A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t \omega). \quad (2.41)$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que (2.41) se cumple para todo $s, t \geq 0$ y todo $\omega \in \Omega$, tal que $t \mapsto A_t(\omega)$ es continua para toda $\omega \in \Omega$ y A_t es \mathcal{F}_{t+}^* -medible para cada $t \geq 0$, donde \mathcal{F}_{t+}^* es la completación universal de $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s, 0 \leq s \leq t)$, (véase [14]).

Fijemos un CAF, $A = (A_t)$ tal que

$$\mathbb{P}_x(A_t < \infty) = 1, \quad \forall t > 0, x \in E. \quad (2.42)$$

La medida de Revuz ν asociada con A está definida por

$$\nu(g) = t^{-1} \mathbb{P}_\lambda \left(\int_0^t g(Z_s) dA_s \right), \quad (2.43)$$

donde g es cualquier función Borel positiva sobre E . El hecho de que el lado derecho de (2.43) no depende de $t > 0$ es una consecuencia de (2.41) y de la invarianza de λ . El papel de ν está expresado en la siguiente fórmula: Si f es una función medible positiva en $E \times [0, \infty)$, entonces para todo $x \in E$ y $t > 0$

$$\mathbb{P}_x \left(\int_0^t f(Z_s, s) dA_s \right) = \int_0^t ds \int_E \nu(dy) p_s^Z(x, y) f(y, s). \quad (2.44)$$

Lema 2.7.1 *Sea $T > 0$ fijo, $x, y \in E$ tal que $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$. Entonces para $0 \leq t \leq T$ y $f \geq 0$ Borel,*

$$\mathbb{P}_{x,y}^T \left(\int_0^t f(Z_s, s) dA_s \right) = \int_0^t ds \int_E \nu(dz) \left(\frac{p_s^Z(x, z) p_{T-s}^Z(z, y)}{p_T^Z(x, y)} \right) f(z, s). \quad (2.45)$$

Demostración

Es suficiente probar el lema para el caso $0 < t < T$. Usando (2.32) tenemos

$$\mathbb{P}_{x,y}^T \left(\int_0^t f(Z_s, s) dA_s \right) p_T^Z(x, y) = \mathbb{P}_x \left(\int_0^t f(Z_s, s) dA_s p_{T-t}^Z(Z_t, y) \right). \quad (2.46)$$

Pero para t fijo, la \mathbb{P}_x -proyección opcional del proceso $s \mapsto p_{T-t}^Z(Z_t, y)$, $0 \leq s \leq t$, es el proceso $s \mapsto P_{t-s}(Z_s, p_{T-t}^Z(\cdot, y))$, $0 \leq s \leq t$, la cual coincide con $p_{t-s}^Z(Z_s, y)$ por Chapman-Kolmogorov. Aplicando esto a (2.46) y usando (2.44) obtenemos la ecuación (2.45). ■

Ahora probaremos la fórmula de condicionamiento para nuestro *CAF* para las leyes \mathbb{P}_x . Definamos un proceso predecible.

Definición 2.7.1 *La única σ -álgebra generada en $\Omega \times \mathbb{R}_+$ por:*

- (i) *el espacio de procesos elementales,*
- (ii) *el espacio de procesos adaptados continuos por la izquierda en $(0, \infty)$,*
- (iii) *el espacio de los procesos adaptados continuos,*

es llamada la σ -álgebra predecible denotada por $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$. Un proceso Z es predecible si el mapeo $(w, t) \mapsto Z_t(w)$ es medible respecto a \mathcal{P} .

Proposición 2.7.1 *Si $H \geq 0$ es un proceso predecible y $f \geq 0$ es una función Borel sobre $E \times [0, \infty)$ entonces*

$$\mathbb{P}_x \left(\int_0^t H_s f(Z_s, s) dA_s \right) = \mathbb{P}_x \left(\int_0^t \mathbb{P}_{x, Z_s}^s(H_s) f(Z_s, s) dA_s \right). \quad (2.47)$$

Demostración

Por el teorema de clases monótonas necesitamos solamente considerar el proceso H de la forma $H_s = 1_{(a,b]}(s)C$ donde $0 \leq a < b \leq t$ y $C \in \mathcal{F}_a$ es positiva y acotada. Para cada H el lado izquierdo de (2.47) produce

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x \left(C \int_a^b f(Z_s, s) dA_s \right) &= \mathbb{P}_x \left(C \left(\int_0^{b-a} f(Z_u, u+a) dA_u \right) \circ \theta_a \right) \\ &= \mathbb{P}_x \left(C \mathbb{P}_{Z_a} \left(\int_0^{b-a} f(Z_u, u+a) dA_u \right) \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

y el lado derecho de (2.47) produce

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x \left(C \int_a^b \mathbb{P}_{x, Z_s}^s(C) f(Z_s, s) dA_s \right) &= \int_a^b ds \int_E \nu(dz) \mathbb{P}_{x,z}^s(C) p_s^Z(x, z) f(z, s) \\ &= \int_a^b ds \int_E \nu(dz) \mathbb{P}_x(C p_{s-a}^Z(Z_a, z)) f(z, s) \\ &= \mathbb{P}_x(Cg(Z_a)), \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_a^b ds \int_E \nu(dz) p_{s-a}^Z(y, z) f(z, s) \\ &= \mathbb{P}_y \left(\int_0^{b-a} f(Z_u, u+a) dA_u \right). \end{aligned}$$

De (2.48) y (2.49) obtenemos (2.47). ■

Observación.

La medida de difusión dA_s no contiene el conjunto de discontinuidades de Z , así, en (2.47) podemos reemplazar Z_s por Z_{s-} . Observemos que la proposición 2.7.1 es válida si Z es un proceso Hunt y A es un funcional aditivo predecible (posiblemente discontinuo), así Z_s es reemplazado por Z_{s-} en (2.43) y (2.47). De hecho se puede hacer este cambio en (2.44) para A predecible, pues la continuidad de A no se utiliza explícitamente en la demostración de la proposición 2.7.1. Si además, la medida de referencia λ es invariante, entonces se tiene que Z deberá tener un proceso dual \hat{Z} (que es fuerte de Markov) tal que (2.26) se cumple. La forma del puente de (2.47) se sigue de la proposición 2.7.1 de la misma manera que el lema 2.7.1 siguió de (2.44).

Proposición 2.7.2 Si $H \geq 0$ es un proceso predecible, $f \geq 0$ es una función Borel sobre $E \times [0, \infty)$ y $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$, entonces para $0 \leq t \leq T$,

$$\mathbb{P}_{x,y}^T \left(\int_0^t H_s f(Z_s, s) dA_s \right) = \mathbb{P}_{x,y}^T \left(\int_0^t \mathbb{P}_{x,Z_s}^s (H_s) f(Z_s, s) dA_s \right). \quad (2.50)$$

Véase [6].

Existen versiones más generales de las proposiciones 2.7.1 y 2.7.2, en las cuales $\int_0^t f(Z_s, s) dA_s$ se reemplaza por un funcional arbitrario aditivo predecible del proceso espacio-tiempo y también es válido si Z es un proceso Hunt.

2.8. Puentes que se empalman (*Splicing bridges*)

Fijemos $x, y \in E$ y $T > 0$ tal que $0 < p_T^Z(x, y) < \infty$. También fijemos una distribución de probabilidad sobre $E \times (0, T)$ de la forma $\rho(z, t) \nu(dz) dt$, donde $\rho(z, t) = 0$ siempre que $p_t(x, z) p_{T-t}(z, y) = 0$ y donde ν es la medida Revuz de un CAF, $A = (A_t)$. Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$:

$$\Omega^* = E \times (0, T) \times \Omega \times \Omega,$$

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{(0,T)} \otimes \mathcal{F}_{T-} \otimes \mathcal{F}_{T-},$$

$$\mathbb{P}^*(dz, dt, d\omega, d\omega') = \rho(z, t) \nu(dz) dt \mathbb{P}_{x,z}^t(d\omega) \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}(d\omega').$$

(Una trayectoria elegida de $\mathbb{P}_{x,z}^t$ es continua más allá del tiempo t con valor constante z ; identificamos a $\mathbb{P}_{x,z}^t$ con una ley sobre \mathcal{F}_{T-} concentrada sobre $(\omega : \omega(s) = \omega(t-), t \leq s < T)$). Escribimos $\omega^* = (z, t, \omega, \omega')$ el punto genérico de Ω^* y $(\omega/t/\omega')$ la trayectoria obtenida de empalmar ω y ω' al tiempo t . Esto es,

$$(\omega/t/\omega')(s) = \begin{cases} \omega(s) & \text{si } 0 \leq s < t, \\ \omega'(t-s) & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

Notemos que $\omega = (\omega/t/\theta_t \omega)$. Definamos

$$X(\omega^*) = x, \quad S(\omega^*) = t,$$

$$Y_s(\omega^*) = Z_s(\omega/t/\omega'), \quad 0 \leq s < T,$$

$$A_s^*(\omega^*) = A_s(\omega/t/\omega'), \quad 0 \leq s \leq T.$$

Así,

$$\mathbb{P}^*(X \in dx, S \in dt) = \rho(x, t)\nu(dx)dt,$$

y la distribución condicional de Y dado $(X = x, S = t)$ es la ley $\mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_{T-})$ definida por

$$\mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbb{P}_{x,z}^t(d\omega) \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}(d\omega') H(\omega/t/\omega'). \quad (2.51)$$

Esto es, bajo $\mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}$ las trayectorias fragmentadas $(Y_s)_{0 \leq s < t}$ y $(Y_{t+s})_{0 \leq s < T-t}$ son independientes, con leyes $\mathbb{P}_{x,z}^t$ y $\mathbb{P}_{z,y}^{T-t}$ respectivamente. El siguiente refinamiento de la proposición 2.7.2 es clave para el resultado principal.

Lema 2.8.1 *Sea A un CAF de Z asociado a ν como en la sección anterior, y escribimos*

$$K = \int_0^T f(Z_t, t) dA_t \quad (2.52)$$

donde f es una función Borel positiva en $E \times (0, T)$. Si $H \geq 0$ es \mathcal{F}_{T-} -medible, entonces

$$\mathbb{P}_{x,y}^T(HK) = \int_0^T dt \int_E \nu(dz) \left(\frac{p_t^Z(x, z) p_{T-t}^Z(z, y)}{p_T^Z(x, y)} \right) f(z, t) \mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}(H). \quad (2.53)$$

Observación

Sea ξ_T una medida aleatoria en $E \times (0, T)$ que es la imagen de dA_t (una medida en $(0, T)$) del mapeo $t \mapsto (Z_t, t)$, este lema nos dice que bajo $\mathbb{P}_{x,y}^T$ las probabilidades $\mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}$ sirven como una familia de distribuciones Palm de ξ_T .

Demostración

Consideremos el proceso

$$J_t(z, \omega) = \int_{\Omega} \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}(d\omega') H(\omega/t/\omega'), \quad 0 \leq t < T.$$

Es fácil ver que $((\omega, t), z) \mapsto J_t(z, \omega)$ es $\mathcal{P}_T \otimes \mathcal{E}$ -medible, donde \mathcal{P}_T es la σ -álgebra predecible restringida a $\Omega \times [0, T)$ y \mathcal{E} es la σ -álgebra de Borel en E .

Además, $J_t(X_t(\omega), \omega)$ es una versión de $\mathbb{P}_{x,y}^T$ -proyección opcional del proceso $t \mapsto H$. (Esto es fácil de ver si H tiene la forma $\Pi_k f_k(Z_{t_k})$) Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x,y}^T(HK) &= \mathbb{P}_{x,y}^T \left(\int_0^T H f(Z_t, t) dA_t \right) \\ &= \mathbb{P}_{x,y}^T \left(\int_0^T J_t(X_t, \cdot) f(Z_t, t) dA_t \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

y si aplicamos la proposición 2.7.2 en el último término de (2.54) entonces se sigue (2.53). \blacksquare

Apliquemos el lema 2.8.1 con una función específica f en la definición (2.52) de K para enunciar la siguiente proposición. Tomemos

$$f(z, t) = \rho(z, t) \left(\frac{p_T(x, y)}{p_t(x, z)p_{T-t}(z, y)} \right). \quad (2.55)$$

Proposición 2.8.1 Sean X, S y Y definidos en $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$ descritos como en el principio de la sección. Si $H \geq 0$ es \mathcal{F}_{T-} -medible, entonces

$$\mathbb{P}^*(H(Y)) = \mathbb{P}_{x,y}^T(HK), \quad (2.56)$$

donde $K = \int_0^T f(Z_t, t) dA_t$ y f está dada por (2.55). Además, la distribución condicional de (X, S) dado Y está determinada por

$$\mathbb{P}^*(g(X, S)) = \frac{\int_0^T g(Y_t, t) f(Y_t, t) dA_t^*}{\int_0^T f(Y_t, t) dA_t^*}, \quad (2.57)$$

y $\mathbb{P}^*(0 < \int_0^T f(Y_t, t) dA_t^* < \infty) = 1$.

Demostración

Sea $H \geq 0$ una función \mathcal{F}_{T-} -medible sobre Ω y sea $g \geq 0$ una función Borel sobre $E \times (0, T)$. Entonces por el lema 2.8.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(H(Y)g(X, S)) &= \int_0^T dt \int_E \nu(dz) \rho(z, t) \mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}(H)g(z, t) \\ &= \int_0^T dt \int_E \nu(dz) \left(\frac{p_t^Z(x, z)p_{T-t}^Z(z, y)}{p_T^Z(x, y)} \right) f(z, t) \mathbb{P}_{x,z}^t \circ \mathbb{P}_{z,y}^{T-t}(H)g(z, t) \\ &= \mathbb{P}_{x,y}^T(H\tilde{K}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde $\tilde{K} = \int_0^T g(Z_t, t) f(Z_t, t) dA_t$. La primera parte de la proposición se sigue tomando $g = 1$ en (2.58). Luego, $A_s^* = A_s \circ Y$ es medible sobre \mathbb{P}^* (completación de $\sigma(Y)$), pues A_s es medible sobre la completación universal de \mathcal{F}_s . Sea $K^* = \int_0^T f(Y_t, t) dA_t^*$, así, $K^* = K \circ Y$. Por (2.58),

$$\mathbb{P}^*(K^* = 0) = \mathbb{P}_{x,y}^T(K; K = 0) = 0,$$

y

$$\mathbb{P}^*(K^* > \lambda) = \mathbb{P}_{x,y}^T(K; K > \lambda) \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

entonces $\mathbb{P}_{x,y}^T(K) = \int_0^T dt \int_E \nu(dz) \rho(z, t) = 1$, así, $\mathbb{P}^*(0 < K^* < \infty) = 1$. Ahora (2.57) se sigue de (2.58). ■

Observación.

De la proposición 2.8.1 se sigue que si $Q^* = (K^*)^{-1} \mathbb{P}^*$ entonces $Q^*(Y \in \cdot) = \mathbb{P}_{x,y}^T$, mientras que $Q^*((X, S) \in \cdot | Y) = \mathbb{P}^*((X, S) \in \cdot | Y)$.

Ejemplo.

Supongamos que $x \in E$ es un punto regular de Z . Esto es, $\mathbb{P}_x(\inf(t > 0 : Z_t = z) = 0) = 1$. Entonces Z admite un tiempo local en z , es decir, un CAF $L_t = L_t^z$ de Z tal que $L_t = \int_0^t 1_z(Z_s) dL_s$ para todo $t > 0$. La medida de Revuz de L es proporcional al punto con masa en z . Normalizamos a L con $\nu = \nu_L = \epsilon_z$. Así, escribimos $p(s) = p_s^Z(z, z)$,

$$\mathbb{P}_x(L_t) = \int_0^t p(s) ds, \quad t > 0,$$

y

$$\mathbb{P}_{z,z}^T = \int_0^t \left(\frac{p(s)p(T-s)}{p(T)} \right) ds, \quad 0 < t \leq l.$$

Sea ρ una densidad sobre $(0, T)$ y definamos $f(z, t) = f(t) = \rho(t)p(T)/(p(t)p(T-t))$. La proposición 2.8.1 nos dice que si empalmamos dos puentes (comenzando y terminando en z) en un tiempo independiente S con ley $\rho(t)dt$ entonces la ley del proceso resultante Y es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}_{z,z}^T$ con derivada de Radon-Nicodym $\int_0^T f(t) dL_t$ (ver [7] pág. 91). En particular, si elegimos $\rho(t) = (p(t)p(T-t))/(p(T)c(T))$, donde $c(T) = \mathbb{P}_{z,z}^T(L_T)$, $f \equiv 1/c(T)$, el factor de densidad es $L_T/c(T)$.

Existe una versión multivariada de estos resultados, reemplazando (X, S) por $(X_1, S_1), \dots, (X_n, S_n)$, donde $S_1 < S_2 < \dots < S_n$. Haciendo una elección de la densidad conjunta de $(X_1, S_1), \dots, (X_n, S_n)$ podemos obtener un proceso empalmado cuya densidad relativa del puente Z es un múltiplo de $(A_T)^n/n!$.

2.9. Interpretación general probabilística de las medidas Palm

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $(E, \mathcal{B}(E))$ un espacio medible y ξ una medida aleatoria en E basada en (Ω, \mathcal{F}, P) , esto es, $\xi(\omega, A)$ es una función \mathcal{F} -medible para $\omega \in \Omega$, $(A \in \mathcal{B}(S))$ fijo y una medida en $(S, \mathcal{B}(S))$ como una función de A ($\omega \in \Omega$ fijo). La medida de intensidad de ξ es:

$$\lambda(A) = \int \xi(\omega, A)P(d\omega), \quad A \in \mathcal{B}(E), \quad (2.59)$$

la cual suponemos que es σ -finita. Supongamos que la bimedida

$$P(\xi(A); B), \quad A \in \mathcal{B}(E), B \in \mathcal{F},$$

admite una desintegración

$$P(\xi(A); B) = \int_A \lambda(dx)P^x(B), \quad (2.60)$$

donde $(x, B) \mapsto P^x(B)$ es un *kernel* de Markov de $(E, \mathcal{B}(E))$ a (Ω, \mathcal{F}) , (para que una desintegración como en (2.60) exista, es suficiente que Ω sea un espacio Polish y que \mathcal{F} sea la correspondiente σ -álgebra de Borel).

La colección $\{P^x : x \in S\}$ es de la familia de las distribuciones Palm asociada con la medida aleatoria ξ . Cuando ξ es una medida aleatoria de conteo correspondiente a un proceso puntual con puntos no múltiples, P^x puede ser interpretada intuitivamente como P condicional a que ξ pone un punto en x . En el caso cuando ξ es una medida más general, en particular de difusión, el significado intuitivo de la medida Palm es menos claro. Aún así, la siguiente proposición ofrece una interpretación probabilística general de las medidas Palm en términos de expandir el espacio de probabilidad.

Proposición 2.9.1 *Supongamos que tenemos definido en un espacio de probabilidad $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$, una variable aleatoria X , E -valuada, y una variable aleatoria W , Ω -valuada. Si*

$$P^*(X \in dx) = f(x)\lambda(dx) \quad (2.61)$$

para alguna densidad f en E , relativa a la medida de intensidad λ y

$$P^*(W \in d\omega|X = x) = g(\omega|x)P^x(d\omega), \quad (2.62)$$

para alguna medida conjunta $g(\omega|x)$, entonces,

$$P^*(W \in d\omega) = h(\omega)P(d\omega), \quad (2.63)$$

$$P^*(X \in dx|W = \omega) = j(x|\omega)\xi(\omega, dx), \quad (2.64)$$

donde

$$h(\omega) = \int_S f(x)g(\omega|x)\xi(\omega, dx), \quad (2.65)$$

$$j(x|\omega) = f(x)g(\omega|x)/H(\omega), \quad (2.66)$$

Inversamente, si la ley conjunta de W y X tal que (2.63) y (2.64) se cumplen para alguna densidad de probabilidad h relativa a P y una medida conjunta $j(x|\omega)$, entonces (2.61) y (2.62) se cumplen con

$$f(x) = \int_{\Omega} h(\omega)j(x|\omega)P^*(d\omega), \quad (2.67)$$

$$g(\omega|x) = h(\omega)j(x|\omega)/f(x). \quad (2.68)$$

La prueba justamente usa la definición de las distribuciones Palm: $P(d\omega)\xi(\omega, dx) = \lambda(dx)P^*(d\omega)$ y un cálculo estándar de Bayes.

En conclusión, en los recientes años existen argumentos que incluyen medidas aleatorias y sus medidas Palm asociadas que han jugado un importante papel en la teoría de procesos de Markov. Las leyes de los puentes pueden ser interpretadas como distribuciones Palm, así pueden ser leyes de excursiones.

Capítulo 3

Simulación

En este capítulo presentaremos un algoritmo, para simulación exacta de un tipo de difusiones. Además, propondremos un método general y simple para la simulación de puentes de difusión.

3.1. Introducción

Los modelos de difusión se aplican en áreas como finanzas, biología, física e ingeniería. La evolución de algunos fenómenos se describen mediante un proceso estocástico $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$, determinado como la solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE) del tipo:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

conducido por el movimiento Browniano $\{B_t; 0 \leq t \leq T\}$. El parámetro de deriva b y el coeficiente σ satisfacen las condiciones de regularidad (localmente Lipschitz con crecimiento acotado) que garantizan la existencia de una única solución de (3.1). Nos restringiremos al caso de la EDE del tipo

$$dX_t = \alpha(X_t)dt + dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (3.2)$$

para algún parámetro de deriva α , (3.1) puede ser transformada en una EDE bajo condiciones adicionales sobre σ , aplicando la transformación $X_t \mapsto \eta(X_t)$, donde

$$\eta(x) = \int_z^x \frac{1}{\sigma(u)} du \quad (3.3)$$

con z algún elemento de espacio de estados de X .

La simulación e inferencia de EDE's de la forma (3.1) generalmente requieren algunos tipos de aproximación discreta, una de estas aproximaciones es la Euler:

$$X_{t+\Delta} = X_t + \alpha(X_t)\Delta + \mathcal{N}(0, \Delta).$$

El algoritmo exacto utiliza el muestreo por rechazo usando trayectorias Brownianas y regresa esqueletos de la EDE (3.2), obtenida para algunos tiempos aleatorios. Los esqueletos pueden ser independientes de X por la interpolación de puentes Brownianos.

3.2. Muestreo por rechazo retrospectivo para difusiones

Sea $C \equiv C([0, T], \mathbb{R})$ el conjunto de mapeos continuos de $[0, T]$ a \mathbb{R} y ω un elemento de C . Consideremos el mapeo coordinado $B_t : C \mapsto \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, tal que para cualquier t , $B_t(\omega) = \omega(t)$ y la σ -álgebra $\mathcal{C} = \sigma(\{B_t; 0 \leq t \leq T\})$. Denotaremos a $W^x = \{W_t^x; 0 \leq t \leq T\}$ al movimiento Browniano que comienza en $x \in \mathbb{R}$.

Sea \mathbb{Q} la medida de probabilidad inducida por la solución X de (3.2) en (C, \mathcal{C}) , es decir, la medida en la cual el proceso coordinado $B = \{B_t; 0 \leq t \leq T\}$ está distribuido de acuerdo a X , y \mathbb{W} corresponde a la medida de probabilidad para W^x . Por la transformación de Girsanov en medidas tenemos que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) = \exp \left\{ \int_0^T \alpha(B_t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha^2(B_t) dt \right\}.$$

Bajo la condición de que α es diferenciable en todas partes, por el lema de Ito deducimos que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) = \exp \left\{ A(B_t) - A(x) - \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha^2(B_t) + \alpha'(B_t)) dt \right\},$$

donde $A(u) := \int_0^u \alpha(y) dy$, $u \in \mathbb{R}$.

Para eliminar el hecho de que A es no acotado y para simplificar la derivada de Radon-Nicodym en dos medidas de probabilidad usaremos trayectorias

3.2. MUESTREO POR RECHAZO RETROSPECTIVO PARA DIFUSIONES63

candidatas de un proceso idéntico a W^x excepto por la distribución de sus puntos extremos, llamamos a tal proceso un movimiento Browniano sesgado.

Sea $\hat{W} \stackrel{d}{=} (W^x|W_T^x \sim h)$ un movimiento Browniano sesgado, con h una densidad proporcional a $\exp\{A(u) - (u-x)^2/2T\}$, $u \in \mathbb{R}$, es necesario que esta función sea integrable. Sea \mathbb{Z} la medida de probabilidad inducida por este proceso en (C, \mathcal{C}) . Las medidas \mathbb{Z} y \mathbb{W} son equivalentes y su derivada de Radon-Nicodym puede derivarse de la siguiente proposición:

Proposición 3.2.1 Sean $M = \{M_t; 0 \leq t \leq T\}$ y $N = \{N_t; 0 \leq t \leq T\}$ dos procesos estocásticos en (C, \mathcal{C}) , con las correspondientes medidas de probabilidad \mathbb{M} y \mathbb{N} . Supongamos que f_M y f_N son las densidades de los puntos extremos M_T y N_T respectivamente, con soporte idéntico \mathbb{R} . Si se cumple que $(M|M_T = \rho) \stackrel{d}{=} (N|N_T = \rho)$, para todo $\rho \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{N}}(\omega) = \frac{f_M}{f_N}(B_T).$$

Demostración

Recordemos que B_t , $t \in [0, T]$, es el mapeo coordinado en (C, \mathcal{C}) , esto es, $B_t(\omega) = \omega(t)$ para cualquier $\omega \in C$. La propiedad $(M|M_T = \rho) \stackrel{d}{=} (N|N_T = \rho)$, para todo $\rho \in \mathbb{R}$, puede ser expresada en forma rigurosa de la forma:

$$\mathbb{M}[A|\sigma(B_T)] = \mathbb{N}[A|\sigma(B_T)], \quad \mathbb{N} - c.s.,$$

para cualquier $A \in \mathcal{C}$. Es suficiente probar que:

$$\mathbb{M}[A] = E_{\mathbb{N}}[\mathbb{I}_A \cdot \frac{f_M}{f_N}(B_T)], \quad A \in \mathcal{C},$$

donde el índice de la esperanza muestra la medida de probabilidad que se está utilizando. Algunos cálculos nos dan:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{N}}[\mathbb{I}_A \cdot \frac{f_M}{f_N}(B_T)] &= E_{\mathbb{N}}[E_{\mathbb{N}}[\mathbb{I}_A \cdot \frac{f_M}{f_N}(B_T)|\sigma(B_T)]] \\ &= E_{\mathbb{N}}[\frac{f_M}{f_N}(B_T) \cdot \mathbb{N}[A|\sigma(B_T)]] \\ &= E_{\mathbb{M}}[\mathbb{N}[A|\sigma(B_T)]] \\ &= E_{\mathbb{M}}[\mathbb{M}[A|\sigma(B_T)]] \\ &= \mathbb{M}[A]. \end{aligned}$$

Así, $d\mathbb{W}/d\mathbb{Z}(\omega) = \mathcal{N}_{x,T}h(B_T) \propto \exp\{-A(B_T)\}$, donde $\mathcal{N}_{x,T} = \mathcal{N}(x, T)$ representa la densidad de la distribución normal con media x y varianza T , y:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}}(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) \frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Z}}(\omega) \propto \exp\left\{-\int_0^T \left(\frac{1}{2}\alpha^2(B_t) + \frac{1}{2}\alpha'(B_t)\right) dt\right\}.$$

Supongamos ahora que $(\alpha^2 + \alpha')/2$ está acotada superiormente. Entonces podemos obtener una función ϕ no negativa tal que:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}}(\omega) \propto \exp\left\{-\int_0^T \phi(B_t) dt\right\} \leq 1, \quad \mathbb{Z} - c.s. \quad (3.4)$$

Analíticamente ϕ se define como:

$$\phi(u) = \frac{\alpha^2(u) + \alpha'(u)}{2} - k, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

para un número fijo $k \leq \inf_{u \in \mathbb{R}} (\alpha^2 + \alpha')(u)/2$.

Resumiendo, las condiciones que nos permiten la derivada (3.4) son:

1. La función parámetro de deriva α es diferenciable.
2. La función $\exp\{A(u) - (u - x)^2/2T\}$, $u \in \mathbb{R}$ para $A(u) = \int_0^u \alpha(y)dy$ es integrable.
3. La función $(\alpha^2 + \alpha')(u)/2$ está acotada superiormente.

En un contexto de simulación, es posible dibujar las trayectorias continuas $\omega \sim \mathbb{Z}$ en $[0, T]$ y calcular analíticamente la integral incluida en (3.4), así, el muestreo por rechazo sobre las medidas de probabilidad \mathbb{Q} y \mathbb{Z} debería ser directo. El algoritmo exacto evita estas dificultades para realizar el muestreo exacto por rechazo usando solamente la información finita sobre las trayectorias propuestas de \mathbb{Z} .

La verdad o la falsedad de este hecho puede ser determinada después de revelar ω solamente en una colección finita de casos del tiempo. El esquema del muestreo por rechazo se realiza de una manera retrospectiva puesto que la realización de la variable aleatoria propuesta (la trayectoria $\omega \sim \mathbb{Z}$)

3.2. MUESTREO POR RECHAZO RETROSPECTIVO PARA DIFUSIONES 65

en algunos casos sigue el de las variables aleatorias que se deciden para la aceptación.

Presentamos un teorema que demuestra el método.

Teorema 3.2.1 *Sea ω cualquier elemento de $C([0, T], \mathbb{R})$ y $M(\omega)$ una cota superior para el mapeo $t \mapsto \phi(\omega_t)$, $t \in [0, T]$. Si Φ es un proceso Poisson homogéneo con intensidad 1 en $[0, T] \times [0, M(\omega)]$ y $N =$ número de puntos de Φ por arriba de la gráfica $\{(t, \phi(B_t)); t \in [0, T]\}$, entonces:*

$$P[N = 0 | \omega] = \exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t) dt \right\}.$$

Demostración

Condicionando sobre ω , N sigue una distribución Poisson con media $\int_0^T \phi(B_t) dt$.

■

El teorema 3.2.1 nos dice que es posible generar trayectorias $\omega \sim \mathbb{Z}$ de un movimiento Browniano sesgado \tilde{W} , luego podemos aplicar el muestreo por rechazo sobre \mathbb{Q}, \mathbb{Z} sin tener la evaluación incluida en (3.4); solamente tendríamos que generar una realización del proceso Poisson Φ y verificar si todos los puntos de Φ caen por encima de ϕ -gráfica para así decidir si aceptamos ω (o en otro caso rechazar).

La dificultad técnica radica en localizar un rectángulo para la realización del proceso de Poisson, o equivalente a un límite superior para el mapeo $t \mapsto \phi(\omega_t)$, que impone algunas restricciones ante la aplicabilidad del algoritmo.

3.2.1. El caso cuando ϕ está acotada

Sea M una cota superior de ϕ , este es el caso más simple. Basado en el teorema 3.2.1 y en (3.4), podemos generar un esquema de muestreo por rechazo justamente tomando retrospectividad, es decir, primero realizamos el proceso Poisson y entonces construimos la trayectoria $\omega \sim \mathbb{Z}$ solamente en el tiempo requerido para determinar N .

ALGORITMO EXACTO (EA1)

1. Produce una realización $\{x_1, x_2, \dots, x_\tau\}$ de un proceso Poisson Φ en $[0, T] \times [0, M]$, donde $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2})$, $1 \leq i \leq \tau$.
2. Simula un esqueleto de $\omega \sim \mathbb{Z}$ en los tiempos $\{x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{\tau,1}\}$.
3. Evalúa N .
4. Si $N = 0$ ir a 5, si no ir a 1.
5. Haga salir el esqueleto actualmente construido $S(\omega)$ de ω .

Este algoritmo regresa un esqueleto exacto de X y muestra la corrida en un tiempo finito. Cuando un esqueleto $S(\omega)$ es aceptado como una realización de \mathbb{Q} , podemos continuar construyéndolo de acuerdo a \mathbb{Z} , es decir, usando puentes Brownianos entre los casos actualmente revelados sucesivos de ω . De esta forma la correspondiente trayectoria de \mathbb{Q} puede ser realizada en cualquier tiempo requerido.

Sabemos que es posible construir una trayectoria browniana (o una trayectoria sesgada browniana como \hat{W}) en un intervalo de tiempo acotado después de simular primero su mínimo (o máximo) y entonces el resto de la trayectoria usar procesos de Bessel.

Utilizaremos la descomposición de las trayectorias brownianas para presentar una extensión del EA1 cuando $\limsup_{u \rightarrow \infty} \phi(u) < \infty$ ó $\limsup_{u \rightarrow -\infty} \phi(u) < \infty$. Sin pérdida de generalidad, consideraremos el caso cuando $\limsup_{u \rightarrow \infty} \phi(u) < \infty$, entonces es posible identificar una cota superior $M(\omega)$ para el mapeo $t \mapsto \phi(\omega_t)$, $t \in [0, T]$ después de descomponer la trayectoria ω en su mínimo, digamos b , y considerando:

$$M(\omega) \equiv M(b) = \sup \{\phi(u); u \geq b\} < \infty. \quad (3.6)$$

Por simetría, la misma teoría se da para el caso $\limsup_{u \rightarrow -\infty} \phi(u) < \infty$.

3.3. Descomposición de una trayectoria browniana

Sea $W = \{W_t; 0 \leq t \leq T\}$ un movimiento Browniano que comienza en 0, $m_T = \inf \{W_t; 0 \leq t \leq T\}$ y $\theta_T = \sup \{t \in [0, T] : W_t = m_T\}$. Entonces, para

cualquier $a \in \mathbb{R}$,

$$P[m_T \in db, \theta_T \in dt | W_T = a] \propto \frac{b(b-a)}{\sqrt{t^3(T-t)^3}} \exp \left\{ -\frac{b^2}{2t} - \frac{(b-a)^2}{2(T-t)} \right\} dbdt, \quad (3.7)$$

con $b \leq \min\{a, 0\}$ y $t \in [0, T]$. La siguiente proposición describe un algoritmo para dibujar a (3.7). Denotemos por $Unif(0, 1)$ a la distribución uniforme en $(0, 1)$ y por $IGau(\mu, \lambda)$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$, a la distribución inversa Gaussiana con densidad:

$$IGau(\mu, \lambda, u) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi u^3}} \exp \left\{ -\frac{\lambda(u-\mu)^2}{2\mu^2 u} \right\}, \quad u > 0.$$

Proposición 3.3.1 *Sea $E(1)$ una variable aleatoria distribuida exponencialmente con media 1 y sea $Z_1 = (a - \sqrt{2TE(1) + a^2})/2$. Si $Z_1 = b$ es una realización de Z_1 , sean $c_1 = (a-b)^2/2T$ y $c_2 = b^2/2T$. Sea $U \sim Unif(0, 1)$, $I_1 \sim IGau(\sqrt{c_1/c_2}, 2c_1)$ e $I_2 \sim 1/IGau(\sqrt{c_2/c_1}, 2c_2)$. Definamos*

$$V = \mathbb{I}[U < (1 + \sqrt{c_1/c_2})^{-1}]I_1 + \mathbb{I}[U \geq (1 + \sqrt{c_1/c_2})^{-1}]I_2.$$

Entonces el par (Z_1, Z_2) para $Z_2 := T/(1+V)$ se distribuye de acuerdo a (3.7).

Demostración

De [11] (pág. 95) obtenemos:

$$P[m_T \in db | W_T = a] = \frac{2}{T}(a-2b) \exp \left\{ -\frac{(a-2b)^2}{2T} + \frac{a^2}{2T} \right\} db, \quad b \leq \min\{a, 0\}.$$

Podemos fácilmente derivar la representación:

$$[m_T | W_T = a] \stackrel{d}{=} (a - \sqrt{2TE(1) + a^2})/2 \equiv Z_1.$$

Por (3.7) se tiene que:

$$P[\theta_T \in dt | m_T = b, W_T = a] \propto \frac{1}{\sqrt{t^3(T-t)^3}} \exp \left\{ -\frac{b^2}{2t} - \frac{(a-b)^2}{2(T-t)} \right\} dt, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Si $V := (T - \theta_T)/\theta_T$ y f denota la densidad de V condicional a $W_T = a$, $m_T = b$ entonces:

$$f(y) \propto y^{-3/2} \exp\left(-\frac{c_1}{y} - c_2 y\right) + y^{-1/2} \exp\left(-\frac{c_1}{y} - c_2 y\right), \quad y \geq 0, \quad (3.8)$$

para $c_1 = (a-b)^2/2T$, $c_2 = b^2/2T$. Esta densidad puede ser identificada como la mezcla de una $IGau(\sqrt{c_1/c_2}, 2c_1)$ y una $1/IGau(\sqrt{c_2/c_1}, 2c_2)$. La razón de la integral del sumando izquierdo de (3.8) para la integral de f es:

$$p = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}},$$

así, con probabilidad p la dibujamos $I_1 \sim IGau(\sqrt{c_1/c_2}, 2c_1)$ y con probabilidad $(1-p)$, $I_2 \sim 1/IGau(\sqrt{c_2/c_1}, 2c_2)$. Si usamos $U \sim Unif(0, 1)$ para decidir sobre la elección entre las densidades de la mezcla podemos obtener que para Z_2 definida en esta proposición, $[Z_2|Z_1 = b] \stackrel{d}{=} [\theta_T|m_T = b, W_T = a]$. ■

Recordemos que de la definición de \hat{W} para construir una trayectoria $\omega \sim \mathbb{Z}$ es necesario dibujar primero los puntos extremos. Así, de hecho tenemos que descomponer un puente Browniano en su mínimo que justifica el condicionamiento de W_T en (3.7). La proposición 3.3.1 nos da precisamente el método para dibujar el mínimo y el tiempo cuando éste se realiza para una trayectoria $\omega \sim \mathbb{Z}$ dados los puntos extremos; el siguiente teorema da la forma de completar el resto de ω .

Denotemos por $R(\delta) = \{R_t(\delta); 0 \leq t \leq 1\}$ un puente de Bessel 3-dimensional de longitud uno de 0 a $\delta \geq 0$ y $W^c = (W|m_T = b, \theta_T = t, W_T = a)$ el movimiento Browniano de longitud T que comienza en 0 y condicionado a obtener su mínimo en b en el tiempo t y concluir en a .

Teorema 3.3.1 *Los procesos $\{W_s^c; 0 \leq s \leq t\}$, $\{W_s^c; t \leq s \leq T\}$ son independientes, con*

$$\{W_s^c; 0 \leq s \leq t\} \stackrel{d}{=} \sqrt{t} \{R_{(t-s)/t}(\delta_1); 0 \leq s \leq t\} + b,$$

$$\{W_s^c; t \leq s \leq T\} \stackrel{d}{=} \sqrt{T-t} \{R_{(s-t)/(T-t)}(\delta_2); t \leq s \leq T\} + b,$$

donde $\delta_1 = -b/\sqrt{t}$ y $\delta_2 = (a-b)/\sqrt{T-t}$.

Demostración

Esta es la proposición 2 de [1] con la diferencia que reescalamos el proceso de Bessel para obtener puentes de longitud uno y la trayectoria browniana a incorporar para el caso que la descomposición de una trayectoria de longitud arbitraria T , está solicitada. ■

Sabemos que si W_1^b, W_2^b, W_3^b son tres puentes Brownianos independientes (puentes de longitud 1 que comienzan y terminan en 0) entonces podemos construir un puente de Bessel $R(\delta)$ tal que:

$$R_t(\delta) = \sqrt{(\delta t + W_{1,t}^b)^2 + (W_{2,t}^b)^2 + (W_{3,t}^b)^2}, \quad t \in [0, 1].$$

Un puente Browniano estándar W^b puede ser expresado en términos de un movimiento Browniano W (no condicional) que comienza en 0 por medio de la transformación $W_t^b = W_t - tW_1$.

3.3.1. Extensión del algoritmo exacto

El teorema 3.3.1 nos da la posibilidad de construir una subrutina, digamos *Descompóngase* $(T, \beta_0, \beta_T, t, b, s)$ y regresa la localización en los tiempos $s = \{s_1, \dots, s_n\}$ de la trayectoria browniana en $[0, T]$ que comienza en β_0 , condicionado a obtener su mínimo en b en el tiempo t y terminar en β_T . Además de la proposición 3.3.1, podemos extender el EA1 para la simulación exacta de (3.2) cuando el funcional $\phi \geq 0$ considerado en (3.4) no necesariamente es acotado superiormente, pero satisface la condición $\limsup_{u \rightarrow \infty} \phi(u) < \infty$. El proceso Poisson Φ definido en el teorema 3.2.1 en este caso es un proceso puntual sobre rectángulos cuya altura depende de la actual trayectoria propuesta ω .

ALGORITMO EXACTO 2 (EA2)

1. Inicializar una trayectoria $\omega \sim \mathbb{Z}$ en $[0, T]$ dibujando $\omega_T \sim h$.
2. Simular su mínimo m y el momento cuando éste es alcanzado θ .
3. Encuentra la cota superior $M(m)$ para $t \mapsto \phi(\omega_t), t \in [0, T]$.
4. Produce una realización $\{x_1, x_2, \dots, x_\tau\}$ de Φ en $[0, T] \times [0, M(m)]$.

5. Llamar a *Descompóngase()* para construir ω en $x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{\tau,1}$.
6. Evaluar N .
7. Si $N = 0$ ir a 8 si no ir a 1.
8. Haga salir el esqueleto actualmente construido $S(\omega)$ de ω .

Notemos que, en comparación con el esqueleto obtenido por el algoritmo EA1, este esqueleto $S(\omega)$ es más informativo acerca de la trayectoria continua ω donde incluye su mínimo y el momento cuando éste es alcanzado. Como en el algoritmo EA1, podemos continuar rellenando el esqueleto aceptado $S(\omega)$ en cualquier otro tiempo bajo la dinámica de dos puentes de Bessel independientes.

3.4. La eficiencia del Algoritmo Exacto

Podemos explotar la propiedad de Markov del proceso de difusión X (3.2) y fusionar esqueletos de alguna longitud apropiada digamos T (o de varias longitudes) para construir un esqueleto completo en un intervalo mayor. Denotemos a T como la longitud del intervalo de tiempo sobre el cual el Algoritmo Exacto es aplicado (y el cual es típicamente más pequeño de longitud, digamos l , de la trayectoria de interés).

Supongamos que aplicamos el Algoritmo Exacto a X en el intervalo de tiempo $[0, T]$ para algún punto inicial $x \in \mathbb{R}$. Denotemos a ϵ como la probabilidad de aceptar una trayectoria propuesta y D el número de puntos del proceso Poisson necesitados para decidir si aceptamos la trayectoria propuesta. Sea $N(T)$ el número total de puntos del proceso Poisson necesitados hasta la primera trayectoria aceptada.

Proposición 3.4.1 *Considere el EA1 con $\phi \leq M$. Entonces,*

$$\epsilon \geq \exp(-MT), \quad E[D] = M \times T.$$

Para el EA2 con $M = M(\omega)$ definido como en (3.6):

$$\epsilon \geq \exp\{-E[M(\hat{m})]T\}, \quad E[D] = E[M(\hat{m})] \times T,$$

donde \hat{m} es el mínimo de una trayectoria propuesta $\omega \sim \mathbb{Z}$. En ambos casos:

$$E[N(T)] \leq E[D]/\epsilon.$$

Demostración

Cuando $\phi \leq M$, es claro que de (3.4), $\epsilon \geq \exp(-M \cdot T)$. El teorema 3.2.1 nos da que $E[D] = M \times T$.

Cuando $\limsup_{u \rightarrow \infty} \phi(u) < \infty$ y $M(b) = \sup \{\phi(u); u \geq b\}$, $b \in \mathbb{R}$ entonces podemos acotar ϵ usando la desigualdad de Jensen:

$$\epsilon = E[\exp \left\{ - \int_0^T \phi(\omega_t) dt \right\}] \geq E[\exp \{-M(\hat{m}) \cdot T\}] \geq \exp \{-E[M(\hat{m})] \cdot T\}.$$

También, $E[D] = E[E[D|\hat{m}]] = E[M(\hat{m})] \times T$. Para ambos casos, para estimar $N(T)$, supongamos que $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ es una sucesión de trayectorias propuestas, D_i , es el número de puntos del proceso Poisson necesitados para decidir acerca del rechazo o aceptación de la i -ésima trayectoria propuesta para $i \geq 1$ e $I = \inf \{i \geq 1 : \omega_i \text{ es aceptado}\}$. Supongamos que $E[D|A]$, $E[D|A^c]$ son el número esperado de puntos del proceso Poisson condicionados a aceptar o rechazar la trayectoria propuesta, respectivamente. Entonces, si $E[D] < \infty$:

$$\begin{aligned} E[N(T)] &= E[D_1 + D_2 + \dots + D_I] \\ &= E[E[D_1 + D_2 + \dots + D_I|I]] \\ &= E[(I-1) \cdot E[D|A^c] + E[D|A]] \\ &= \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) E[D|A^c] + E[D|A] \\ &= \frac{E[D]}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Si $E[D] = \infty$ entonces $E[N(T)] = \infty$. ■

Ver más detalles de la demostración en [3].

Es natural preguntarse cómo implementar (respecto al orden) el algoritmo para simular difusiones en el intervalo de tiempo $[0, KT]$, para algún entero positivo K . La proposición 3.4.1 sugiere que la implementación del algoritmo de muestreo por rechazo en un intervalo entero incurrirá en costos computacionales denotados por $O(KMTe^{KMT})$, el cual será enorme incluso para valores moderados de K . De otra forma el problema de simulación puede ser analizado en K simulaciones realizadas secuencialmente, cada una realizada en el intervalo de longitud T , e incurriendo en un costo de $O(MTe^{MT})$, para

así tener un costo global de $O(KMTe^{KMT})$, es decir, lineal en la longitud del intervalo de tiempo requerido.

Proposición 3.4.2 *Supongamos que el parámetro de deriva α está acotada superiormente y que existe $k > 0$ y b_0 tal que $M(b) \leq \exp(-kb)$ para $b \leq b_0$. Entonces, para cualquier valor inicial x y cualquier longitud T del intervalo de tiempo bajo consideración $E[M(\hat{m})] < \infty$. Así, para EA2, el número esperado de puntos Poisson propuestos necesarios para aceptar la trayectoria aleatoria es finito.*

Demostración

$E_x[M(\hat{m})]$ es decreciente en x ; el mínimo de la \mathbb{Z} -trayectoria es estocásticamente creciente en x y $M(b) = \sup\{\phi(u); u \geq b\}$ es decreciente. Para simplificar la prueba elegimos $x < b_0$, para esta x , $M(\hat{m}) \leq \exp(-k\hat{m})$ para cualquier \hat{m} en el dominio $(-\infty, x)$. Consideremos un real δ tal que $\alpha(u) \geq \delta$, $u \in \mathbb{R}$.

$$\text{MB sesgado } \hat{W} \stackrel{\text{estoc.}}{\geq} \text{MB con parámetro de deriva } \delta, \quad (3.9)$$

donde ambos procesos están en $[0, T]$ y para el mismo punto inicial x . Después de representar el MB con parámetro de deriva δ como un MB sesgado con punto final distribuido de acuerdo a $f(u) \propto \exp\{\delta u - (u-x)^2/2T\}$. Recordemos que el punto final de \hat{W} se distribuye de acuerdo a $h(u) \propto \exp\{A(u) - (u-x)^2/2T\}$. También,

$$\left\{ \log \left(\frac{h}{f} \right) \right\}'(u) = \alpha(u) - \delta \geq 0,$$

entonces h/f es creciente. Esto indica que la distribución con densidad h es estocásticamente más grande que la distribución con densidad f (por (3.9)).

Denotemos por m_δ al mínimo del MB con parámetro de deriva δ . De (3.9) tenemos

$$E[M(\hat{m})] \leq E[M(m_\delta)] \leq E[\exp(-k \cdot m_\delta)]. \quad (3.10)$$

Usando el teorema de Girsanov podemos derivar la densidad de m_δ :

$$P[m_\delta \in db]/db = 2\mathcal{N}_{x+\delta T, T}(b) + 2\delta \cdot \exp\{2\delta(b-x)\} \cdot \Phi\left(\frac{b-x+\delta T}{\sqrt{T}}\right), \quad b \in (-\infty, x),$$

donde $\mathcal{N}_{\mu, \sigma^2}(b)$ es la densidad de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 evaluada en b y $\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \mathcal{N}_{0,1}(y)dy$, $u \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que esta

densidad tiene esperanzas exponenciales finitas, es decir, $E[\exp(-k \cdot m_\delta)] < \infty$. ■

Notemos que hemos establecido un resultado teórico acerca de la finitud de $E[M(\hat{m})]$, podemos proceder por medio de la estimación de Monte Carlo para encontrar su valor actual.

3.5. Aplicación: Modelo logístico de crecimiento

El EA2 puede ser aplicado al modelo logístico de crecimiento:

$$dV_t = rV_t(1 - V_t/K)dt + \beta V_t dB_t, \quad V_0 = \nu > 0, t \in [0, T], \quad (3.11)$$

para $r, \beta, K > 0$. Esta difusión modela el crecimiento de poblaciones. La población de algunas especies V_t crece, en ausencia de alojamientos, de manera exponencial en t , con razón de crecimiento per cápita igual a r . La evolución actual de la población es inhibida por la saturación que induce el término $(1 - V_t/K)$. La constante $K > 0$ es llamada capacidad de carga del ambiente y usualmente representa la población máxima que se puede apoyar por los recursos del ambiente. El parámetro β representa el efecto del ruido de las dinámicas de V .

Si $X_t = -\log(V_t)/\beta$ obtenemos la EDE:

$$dX_t = \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{r}{\beta} + \frac{r}{\beta K} \exp(-\beta X_t) \right\} dt + dB_t, \quad X_0 = x = -\frac{\log(\nu)}{\beta}, t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

Podemos mostrar que el proceso original V con probabilidad 1 no llega a 0 en un tiempo finito para cualquier valor que tomen los parámetros, si consideramos $\log(V_t)$ es válido. Sea α el parámetro de deriva de la EDE (3.12).

Entonces

$$(\alpha^2 + \alpha')(u) = \frac{r^2}{\beta^2 K^2} \exp(-2\beta u) - \frac{2r^2}{\beta^2 K} \exp(-\beta u) + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{r}{\beta} \right)^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Este mapeo (α) está acotado superiormente y tiene la propiedad de $\limsup_{u \rightarrow +\infty} (\alpha^2 + \alpha')(u) < \infty$, así se satisfacen las condiciones requeridas para aplicar el EA2.

El punto final del movimiento Browniano sesgado \hat{W} se distribuirá de acuerdo a la densidad h proporcional a:

$$\exp \left\{ \left(\frac{\beta}{2} - \frac{r}{\beta} \right) u - \frac{r}{\beta^2 K} e^{\beta u} - \frac{(u-x)^2}{2T} \right\} \propto \exp \left\{ -\frac{(u-g_1)^2}{2T} - g_2 e^{-\beta u} \right\}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

para $g_1 = x + T(\beta/2 - r/\beta)$, $g_2 = r/(\beta^2 K)$. Podemos dibujar esta densidad de una forma eficiente vía muestreo por rechazo con la función

$$\exp \left\{ -\frac{(u-g_1)^2}{2T} - g_2 e^{-\beta g_1} (1 - \beta(u-g_1)) \right\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Esta función es proporcional a la densidad de una $\mathcal{N}(g_1 + T\beta g_2 e^{-\beta g_1}, T)$. Podemos obtener (3.4) para \mathbb{Z} , la medida de probabilidad correspondiente a \hat{W} con punto final \hat{W}_T distribuido de acuerdo a (3.13) y:

$$\phi(u) = \frac{r^2}{2\beta^2 K^2} e^{-2\beta u} - \frac{r^2}{\beta^2 K} e^{-\beta u} + \frac{r^2}{2\beta^2} \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Si b es el mínimo de la trayectoria propuesta $\omega \sim \mathbb{Z}$ podemos usar (3.6) para encontrar la cota superior del mapeo $t \mapsto \phi(\omega_t)$:

$$M(\omega) \equiv M(b) = \max \{ \phi(b), r^2/2\beta^2 \}.$$

Evidencias empíricas muestran que la eficiencia del EA2 para este problema es sensible para r , β y el cociente ν/K .

3.6. Aplicaciones del algoritmo exacto

3.6.1. Máxima verosimilitud Monte Carlo para difusiones discretas observadas

Un importante problema en inferencia de difusiones radica en el cálculo de estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de un conjunto discreto finito de observaciones de las difusiones. Supongamos que el parámetro de deriva b y el coeficiente de difusión σ de la EDE (3.1) tienen formas paramétricas

las cuales dependen de un cierto parámetro desconocido ϕ . El propósito es encontrar los EMV de ϕ basados en observaciones discretas (en el tiempo) de X , digamos $X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n$. Es común tomar a $t_0 = 0$ y tomar al primer punto x_0 fijo. Sea $p_\phi(t, x, y)$ la densidad de transición del proceso de difusión, es decir, la densidad de transición de la medida de Lebesgue $P[X_t \in dy | X_0 = x]$. La función de verosimilitud es la densidad de los datos observados x_1, \dots, x_n (condicionada a $X_{t_0} = x_0$) como una función de ϕ ,

$$L(\phi) = \prod_{i=1}^n p_\phi(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) = \prod_{i=1}^n L_i(\phi) \quad (3.14)$$

donde

$$L_i(\phi) = p_\phi(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

es la contribución de la verosimilitud del i -ésimo punto. La factorización de (3.14) es debido a la propiedad de Markov. Debemos maximizar (3.14) como función de ϕ , que es una tarea difícil por la forma de la densidad $p_\phi(t, x, y)$. El método de Monte Carlo es simple, rápido y eficiente que estima $L_i(\phi)$, $i = 1, \dots, n$ para cualquier valor de ϕ .

La aproximación es aplicable siempre que el EA1 y el EA2 se puedan simular de un proceso de difusión el cual genera datos.

Sea $\tilde{p}_\phi(t, x, y)$ la densidad de transición del proceso transformado con coeficiente de difusión la unidad, esto es, el proceso obtenido de la transformación $X_t \mapsto \eta(X_t)$, donde η está definido como en (3.3). Entonces

$$p_\phi(t, x, y) = \tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)) |\eta'(y)|,$$

donde η podría depender de ϕ . Sea S el esqueleto del proceso transformado que comienza en $\eta(X_0) = \eta(x)$ que se obtiene por el algoritmo exacto en $[0, t + \gamma]$, $\gamma > 0$, para $t \equiv t_1$ el instante del primer dato. Podemos escribir,

$$S = \{(u_0, \eta(X_{u_0})), \dots, (u_l, \eta(X_{u_l}))\},$$

donde $u_0 = 0, u_l = t + \gamma$ y $\eta(X_{u_0}) = \eta(x)$ y para $0 < i < l$ los tiempos u_i son aleatorios. Definamos además

$$\tilde{p}_\phi(t, z, w | \cdot) = P[\eta(X_t) \in dw | \eta(X_0) = z, \cdot] / dw$$

que es la densidad de $\eta(X_t)$ dado el valor inicial y cualesquiera otros elementos aleatorios. Por la propiedad estándar de la esperanza condicional se tiene que

$$\tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)) = \begin{cases} E[\tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)|S)], & \phi \text{ acotada} \\ E[\tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)|S, m_{t+\gamma}, \theta_{t+\gamma})], & \limsup_{u \rightarrow \infty} \phi(u) < \infty \end{cases}$$

donde $m_{t+\gamma}$ es el mínimo de la trayectoria y $\theta_{t+\gamma}$ es el tiempo donde ocurre el mínimo. El primer caso es cuando se aplica EA1, y se debe a la propiedad de Markov

$$\tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)|S) \equiv \tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)|\eta(X_{t_-}), \eta(X_{t_+})) \quad (3.15)$$

donde $t_- \equiv \sup \{u_i, i = 0, \dots, l : u_i < t\}$ y $t_+ \equiv \inf \{u_i, i = 0, \dots, l : u_i > t\}$.

Por construcción, t_- y t_+ están bien definidos, además el esqueleto contiene al menos $u_0 \equiv 0 < t$ y $u_l \equiv t + \gamma > t$. Dado el esqueleto, la distribución del proceso en cualquier tiempo $s \in (0, t + \gamma)$ está dada por la ley del puente Browniano entre los puntos del esqueleto adyacentes a s . De (3.15) obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi Var}} \exp \left\{ -\frac{1}{2Var} \left(\eta(y) - \eta(X_{t_-}) - \frac{t - t_-}{t_+ - t_-} (\eta(X_{t_+}) - \eta(X_{t_-})) \right)^2 \right\}, \quad (3.16)$$

para $Var = (t - t_-)(t_+ - t)/(t_+ - t_-)$. Notemos que (3.16) no depende de ϕ .

Para el EA2, simulamos primero el mínimo de la trayectoria de la difusión, además

$$\tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)|S, m, \theta) \equiv \tilde{p}_\phi(t, \eta(x), \eta(y)|\eta(X_{t_-}), \eta(X_{t_+}), m, \theta). \quad (3.17)$$

Ahora bien, sea $q(t, z, w)$ la densidad de transición del proceso de Bessel 3-dimensional. Usando el teorema 3.3.1 vemos que (3.17) es

$$\begin{cases} \frac{q\left(\frac{t-t_-}{t_+-\theta}, \frac{\eta(X_{t_-})-m}{\sqrt{t_+-\theta}}, \frac{\eta(X_t)-m}{\sqrt{t_+-\theta}}\right) \times q\left(\frac{t_+-t}{t_+-\theta}, \frac{\eta(X_t)-m}{\sqrt{t_+-\theta}}, \frac{\eta(X_{t_+})-m}{\sqrt{t_+-\theta}}\right)}{q\left(\frac{t_+-t_-}{t_+-\theta}, \frac{\eta(X_{t_-})-m}{\sqrt{t_+-\theta}}, \frac{\eta(X_{t_+})-m}{\sqrt{t_+-\theta}}\right) \sqrt{t_+-\theta}} & \theta < t \\ \frac{q\left(\frac{t_+-t}{\theta}, \frac{\eta(X_{t_+})-m}{\sqrt{\theta}}, \frac{\eta(X_t)-m}{\sqrt{\theta}}\right) \times q\left(\frac{t-t_-}{\theta}, \frac{\eta(X_t)-m}{\sqrt{\theta}}, \frac{\eta(X_{t_-})-m}{\sqrt{\theta}}\right)}{q\left(\frac{t_+-t_-}{\theta}, \frac{\eta(X_{t_+})-m}{\sqrt{\theta}}, \frac{\eta(X_{t_-})-m}{\sqrt{\theta}}\right) \sqrt{\theta}} & \theta \geq t \end{cases}$$

(3.18)

el cual como en (3.16) no depende de ϕ .

Así, podemos construir un algoritmo Monte Carlo para la estimación insesgada de $\hat{L}_1(\phi)$, para cualquier valor de ϕ .

ESTIMACIÓN MONTE CARLO DE $L_1(\phi)$

1. Para $j = 1 : k$, repetir:
2. Usando el algoritmo exacto (1 ó 2) obtener un esqueleto S^j en $[0, t + \gamma]$ comenzando de $\eta(X_{t_0}) = \eta(x_0)$.
Sea (θ^j, m^j) el tiempo y valor del mínimo de S^j .
3. Calcular $\tilde{p}(t_1, \eta(x_0), \eta(x_1) | S^j, m^j, \theta^j)$ de acuerdo a (3.18).
4. Ir a 1.
5. Estimar $\hat{L}_1(\phi) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \tilde{p}(t_1, \eta(x_0), \eta(x_1) | S^j, m^j, \theta^j) |\eta'(x_1)|$.

3.7. Simulación de un puente de difusión

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ una difusión ergódica dada la EDE

$$dX_t = \alpha(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (3.19)$$

donde W es un proceso Browniano y los coeficientes α y σ son suficientemente regulares y la ecuación (3.19) tiene una única solución que es un proceso fuerte de Markov. Sean a y b puntos dados del espacio de estados de X . Simularemos una muestra aleatoria de X tal que $X_0 = a$ y $X_1 = b$. Una solución de (3.19) en el intervalo $[t_1, t_2]$ tal que $X_{t_1} = x_1$ y $X_{t_2} = x_2$ se llamará (t_1, x_1, t_2, x_2) -puente. Sea $p_t(x, y)$ la densidad de transición de X , la densidad condicional de X_{s+t} dada $X_s = x$ es $y \mapsto p_t(x, y)$. Denotemos el espacio de estados de X por (l, r) donde $-\infty \leq l < r \leq \infty$.

Condición 1

El parámetro de deriva y el coeficiente de la difusión α y σ respectivamente, satisfacen que

$$\int_l^r [s(x; \theta) \sigma^2(x; \theta)]^{-1} dx < \infty, \quad (3.20)$$

donde

$$s(x; \theta) = \exp \left(-2 \int_{x^\#}^x \frac{\alpha(y; \theta)}{\sigma^2(y; \theta)} dy \right),$$

con $x^\#$ denotando un punto arbitrario en el espacio de estados de X . Además,

$$\int_{x^\#}^r s(x; \theta) dx = \int_l^{x^\#} s(x; \theta) dx = \infty,$$

si una o ambas de estas integrales es finita, la correspondiente cota es instantáneamente rechazada.

Esta condición también implica que la difusión es ergódica y tiene medida de probabilidad invariante con densidad proporcional a $[s(x; \theta)\sigma^2(x; \theta)]^{-1}$.

Sean W^1 y W^2 dos procesos Brownianos estándar independientes y definamos a X^1 y X^2 como las soluciones de

$$dX_t^i = \alpha(X_t^i)dt + \sigma(X_t^i)dW_t^i, \quad X_0^1 = a, X_0^2 = b.$$

La idea es usar el proceso reverso de X^2 y realizar un $(0, a, 1, b)$ -puente simulando el proceso X^1 de a hacia adelante en el tiempo y X^2 de b hacia atrás en el tiempo. Si las trayectorias muestreadas de los dos procesos se intersectan, ellos pueden ser combinados para una realización del puente.

Teorema 3.7.1 Sea $\tau = \inf \{0 \leq t \leq 1 | X_t^1 = X_{1-t}^2\}$ ($\inf \emptyset = +\infty$) y definamos

$$Z_t = \begin{cases} X_t^1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ X_{1-t}^2 & \text{si } \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces la distribución de $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ condicionado al evento $\{\tau \leq 1\}$ es igual a las distribuciones condicionales de $\{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ dado $X_0 = a$ y $X_1 = b$, es decir, Z es un $(0, a, 1, b)$ -puente.

Demostración

Sea W^3 un proceso de Wiener estándar independiente de W^1 y sea X^3 una solución de

$$dX_t^3 = \alpha(X_t^3)dt + \sigma(X_t^3)dW_t^3,$$

donde la distribución de X_0^3 tiene una densidad μ . Sea τ el primer tiempo de llegada de la difusión X^3 a la trayectoria aleatoria de X^1 . Por la propiedad fuerte de Markov, el proceso

$$Y_t = \begin{cases} X_t^1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ X_t^3 & \text{si } \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tiene la misma distribución que X^1 . Condicionando sobre $X_1^3 = b$ (o $Y_1 = b$), entonces Y es un $(0, a, 1, b)$ -puente. Supongamos que $\mu(x) = p_1(b, x)$, entonces X^3 es un proceso reverso, es decir, la distribución de $\{X_{1-t}^3\}_{0 \leq t \leq 1}$ es igual a la de $\{X_t^2\}_{0 \leq t \leq 1}$ y podemos concluir que Z tiene la misma distribución que Y (bajo la condición de que $X_1^3 = b$), es decir, Z es un $(0, a, 1, b)$ -puente de difusión. ■

La densidad condicional de X_1^3 dada $X_\tau^3 = w$ es $y \mapsto p_{1-u}(w, y)$, y la densidad de X_u^1 es $w \mapsto p_u(a, w)$. Como $X_\tau^3 = X_u^1$, la densidad conjunta de (X_τ^3, X_1^3) es $p_u(a, w)p_{1-u}(w, y)$, así, la densidad condicional de X_τ^3 dada $X_1^3 = b$ y $\tau = u$ es

$$f_u(w) = \frac{p_u(a, w)p_{1-u}(w, b)}{\int_l^r p_u(a, v)p_{1-u}(v, b)dv} = \frac{p_u(a, w)p_{1-u}(w, b)}{p_1(a, b)}, \quad (3.21)$$

donde utilizamos la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Si $\tau = u$, denotamos a la densidad condicional de Z_t dada $Z_s = x$ ($s < t$) por $y \mapsto q_u(x, s, y, t)$. Por el corolario 2.5.3 el proceso $\{X_t^3\}_{u \leq t \leq 1}$ condicionado a $X_\tau^3 = w$ es un $(u, w, 1, b)$ -puente. Entonces para $u < s < t$,

$$q_u(x, s, y, t) = \frac{p_{t-s}(x, y)p_{1-t}(y, b)}{p_{1-s}(x, b)},$$

(ver la fórmula (2.33)). Similarmente cuando $s < u < t$ la densidad condicional de X_t^3 dado $X_\tau^3 = w$ es $p_{t-u}(w, y)p_{1-t}(y, b)/p_{1-u}(w, b)$ y por (3.21) la densidad condicional de Z_τ dado $Z_s = x$ es $p_{u-s}(x, w)p_{1-u}(w, b)/p_{1-s}(x, b)$. Entonces,

$$\begin{aligned} q_u(x, s, y, t) &= \frac{p_{1-t}(y, b)}{p_{1-s}(x, b)} \int_l^r p_{u-s}(x, w)p_{t-u}(w, y)dw \\ &= \frac{p_{t-s}(x, y)p_{1-t}(y, b)}{p_{1-s}(x, b)}, \end{aligned}$$

por la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Finalmente para $s < t < u$, si $Z_\tau = w$, entonces para $\{X_t^1\}_{0 \leq t \leq u}$ es un $(0, a, u, w)$ -puente. La densidad condicional de X_t^1 dado X_s^1 es $p_{t-s}(x, y)p_{u-t}(y, w)/p_{u-s}(x, w)$. Por (3.21) tenemos,

$$\begin{aligned} q_u(x, s, y, t) &= \int_l^r \frac{p_{t-s}(x, y)p_{u-t}(y, w)}{p_{u-s}(x, w)} \frac{p_{u-s}(x, w)p_{1-u}(w, b)}{p_{1-s}(x, b)} \\ &= \frac{p_{t-s}(x, y)p_{1-t}(y, b)}{p_{1-s}(x, b)}, \end{aligned}$$

donde también se utilizó Chapman-Kolmogorov y el hecho de que la condición $X_s^1 = x$, Z es un $(s, x, 1, b)$ -puente. Así, $q_u(x, s, y, t)$ no depende de u integrando la densidad condicional de Z_t dada $Z_s = x$ obtenemos

$$q(x, s, y, t) = \frac{p_{t-s}(x, y)p_{1-t}(y, b)}{p_{1-s}(x, b)}, \quad (3.22)$$

la cual es la densidad de transición de un $(0, a, 1, b)$ -puente.

Por simetría, definimos el proceso \tilde{Z} como

$$\tilde{Z}_t = \begin{cases} X_t^1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - \tilde{\tau} \\ X_{1-t}^2 & \text{si } 1 - \tilde{\tau} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde $\tilde{\tau} = \inf \{0 \leq t \leq 1 | X_{1-t}^1 = X_t^2\}$ es un $(0, a, 1, b)$ -puente también.

Utilizamos X^1 hasta que el último tiempo que cruza la trayectoria de X_{1-t}^2 , el cual pasa en el tiempo $1 - \tilde{\tau}$. Utilizamos X^1 hasta que el último tiempo cruza a trayectoria de $\{X_{1-t}^2\}$, la cual pasa en el tiempo $1 - \tilde{\tau}$.

Ahora, para simular un puente de difusión en el intervalo $[0, \Delta]$, utilizaremos algunos métodos para simular las difusiones X^1 y X^2 . Sean $Y_{\delta i}^1$, $i = 0, 1, \dots, N$ y $Y_{\delta i}^2$, $i = 0, 1, \dots, N$ simulaciones independientes de X^1 y X^2 en $[0, \Delta]$ con tamaño de paso $\delta = \Delta/N$. Una simulación de un $(0, a, \Delta, b)$ -puente se obtiene del esquema de muestreo por rechazo. Mantenemos la simulación Y^1 y Y^2 hasta que las trayectorias se cruzan, es decir, hasta que existe un i tal que $Y_{\delta i}^1 \geq Y_{\delta(N-i)}^2$ y $Y_{\delta(i+1)}^1 \leq Y_{\delta(N-(i+1))}^2$ ó $Y_{\delta i}^1 \leq Y_{\delta(N-i)}^2$ y

$Y_{\delta(i+1)}^1 \geq Y_{\delta(N-(i+1))}^2$. Una vez que una trayectoria cruza, definamos

$$B_{\delta i} = \begin{cases} Y_{\delta i}^1 & \text{para } i = 0, 1, \dots, \nu - 1 \\ Y_{\delta(N-i)}^2 & \text{para } i = \nu, \dots, N \end{cases}$$

donde $\nu = \min \left\{ i \in 1, \dots, N \mid Y_{\delta i}^1 \leq Y_{\delta(N-i)}^2 \right\}$ si $Y_0^1 \geq Y_{\Delta}^2$ y $\nu = \min \left\{ i \in 1, \dots, N \mid Y_{\delta i}^1 \geq Y_{\delta(N-i)}^2 \right\}$ si $Y_0^1 \leq Y_{\Delta}^2$. Entonces B es una simulación de un $(0, a, \Delta, b)$ -puente. Notemos que si el método usado para simular X^1 y X^2 tiene orden mayor a γ , entonces $B_{\delta i}$ se cumple, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$E(|Z_{\delta i} - B_{\delta i}|) \leq C\delta^\gamma, \quad (3.23)$$

para cada $i = 1, \dots, N$ cuando δ es suficientemente pequeña. Un puente de difusión puede ser simulado utilizando el hecho que \tilde{Z} es un puente de difusión, la probabilidad de rechazo (probabilidad de que la trayectoria no cruce) depende del parámetro de deriva y del coeficiente de difusión (valores de a y b) y de la longitud del intervalo (δ). El número de rechazos es pequeño cuando a y b no están muy lejanos.

En las figuras (3.1), (3.2) y (3.3) se presentan tres puentes que se simularon de acuerdo al teorema 3.7.1 en el compilador FORTRAN, el programa respectivo se presenta en la parte de anexos.

3.8. Estudio de simulación

Consideramos el caso de un puente de Ornstein-Uhlenbeck, el cual es una solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t,$$

condicional a que $X_0 = a$ y $X_1 = b$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Podemos calcular las densidades de transición del puente OU por (3.22). Así, podríamos en principio simular un puente OU por muestreo de transiciones de estas densidades. El siguiente método alternativo, numéricamente es más estable.

Lema 3.8.1 *Genera $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}$, donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$. Como $X_0 = x_0$ y*

$$X_{t_i} = e^{-\theta(t_i - t_{i-1})} X_{t_{i-1}} + W_i, \quad i = 1, \dots, n + 1$$

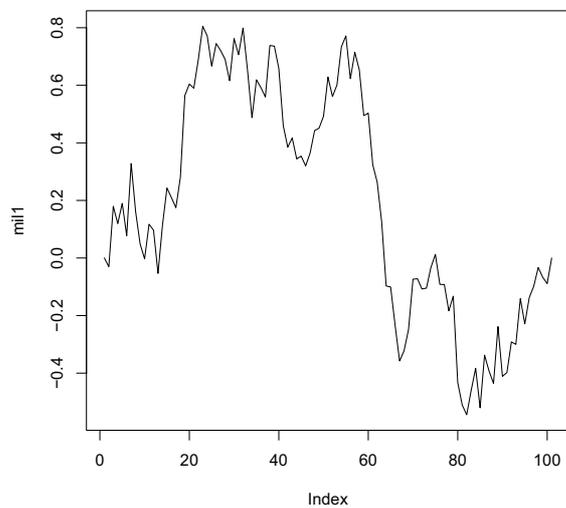


Figura 3.1: Puente Milstep $\theta_1 = 0, \theta_2 = -0,5, \theta_3 = 1, \theta_4 = 0$

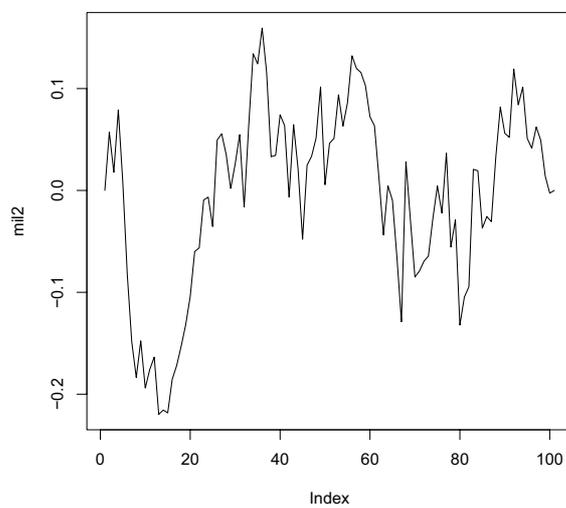


Figura 3.2: Puente Milstep $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1, \theta_3 = 0,5, \theta_4 = 0$

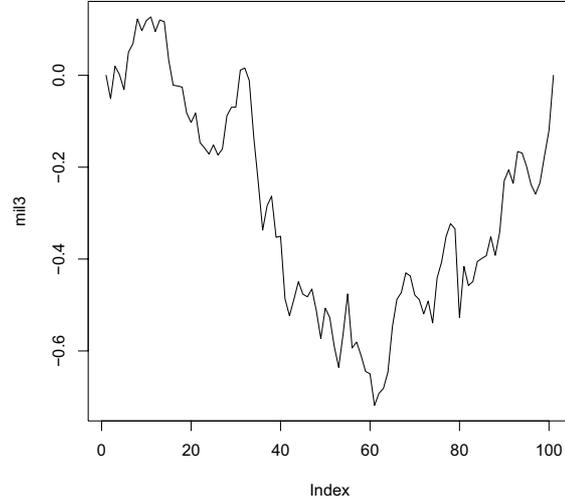


Figura 3.3: Puente Milstep $\theta_1 = 0, \theta_2 = -0,5, \theta_3 = -0,5, \theta_4 = 0$

donde las W_i 's son independientes y

$$W_i \sim N \left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}) \right).$$

Define

$$Z_{t_i} = X_{t_i} + (x - X_{t_{n+1}}) \frac{e^{\theta t_i} - e^{-\theta t_i}}{e^{\theta t_{n+1}} - e^{-\theta t_{n+1}}}, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Entonces $(Z_{t_0}, Z_{t_1}, \dots, Z_{t_{n+1}})$ se distribuye como un puente OU con $Z_{t_0} = x_0$ y $Z_{t_{n+1}} = x$.

Demostración

El resultado se sigue pues $Z = (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})^T$ es una transformación lineal de una distribución normal. Detallemos más. Sea Σ la matriz de covarianza de $X = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$ y definamos $c^T = (c_1, \dots, c_n)$, donde $c_i = Cov(X_{t_i}, X_{t_{n+1}}) = \sigma^2 e^{-\theta t_{n+1}} (e^{\theta t_i} - e^{-\theta t_i}) / (2\theta)$, $i = 1, \dots, n$. Como $Var(X_{t_{n+1}}) = \sigma^2 (1 - e^{-2\theta t_{n+1}}) / 2\theta$, se sigue que

$$Y = X - \frac{2\theta X_{t_{n+1}}}{\sigma^2 (1 - e^{-2\theta t_{n+1}})} c \sim \mathcal{N} \left(\xi - \frac{2\theta x_0 e^{-\theta t_{n+1}}}{\sigma^2 (1 - e^{-2\theta t_{n+1}})} c, \Sigma - \frac{2\theta}{\sigma^2 (1 - e^{-2\theta t_{n+1}})} c c^T \right),$$

donde $\xi^T = (x_0 e^{-\theta t_1}, \dots, x_0 e^{-\theta t_n})$. Así,

$$Y = X - \frac{2\theta x}{\sigma^2(1 - e^{-2\theta t_{n+1}})} c \sim \mathcal{N} \left(\xi + \frac{2\theta(x - x_0 e^{-\theta t_{n+1}})}{\sigma^2(1 - e^{-2\theta t_{n+1}})} c, \Sigma - \frac{2\theta}{\sigma^2(1 - e^{-2\theta t_{n+1}})} c c^T \right),$$

la cual es la distribución condicional de X dado $X_{t_{n+1}} = x$. ■

De acuerdo a este lema a continuación presentamos tres ejemplos de puentes Ornstein-Uhlenbeck con puntos extremos cero y para distintos valores de θ y σ . El programa se realizó en MATLAB y se presenta en anexos.

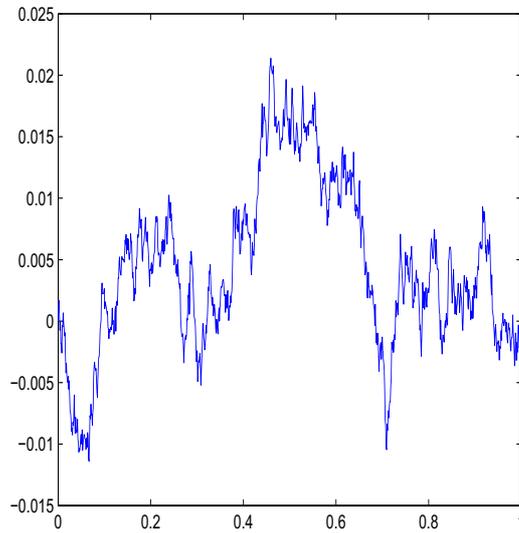


Figura 3.4: Puente Ornstein-Uhlenbeck con parámetros $\theta = 0,5$, $\sigma = 1,0$

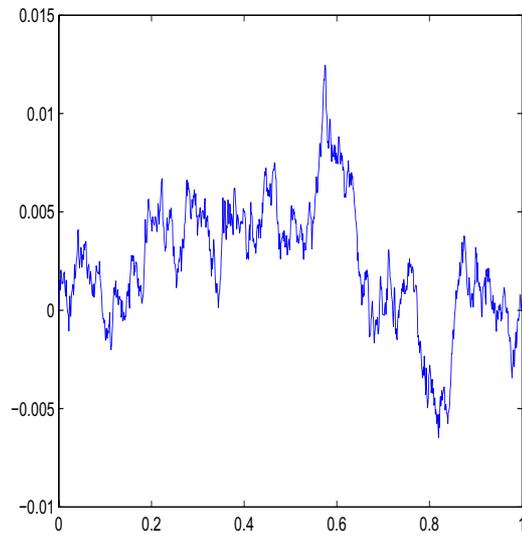


Figura 3.5: Puente Ornstein-Uhlenbeck con parámetros $\theta = 1,0, \sigma = 0,5$

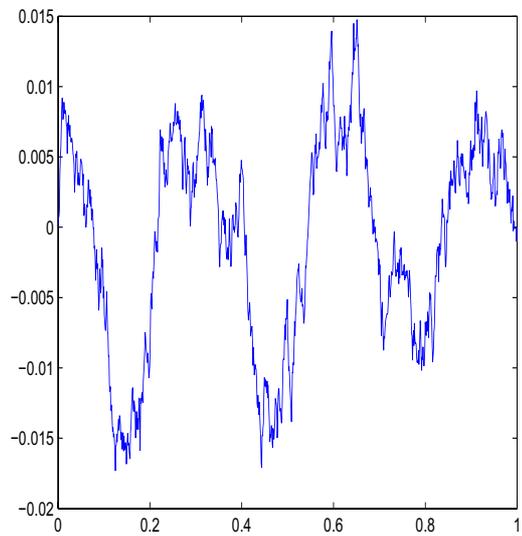


Figura 3.6: Puente Ornstein-Uhlenbeck con parámetros $\theta = 1,0, \sigma = 1,0$

Conclusiones

Puesto que para áreas como biología, finanzas, contabilidad, entre otras, los procesos de Markov, en particular los puentes de Markov son muy importantes, decidimos hacer un estudio de ellos.

En este trabajo presentamos las características principales que definen a los puentes Markovianos, de ahí que pudimos probar que la ley de la parte radial de un puente con puntos extremos cero derivado de un proceso Ornstein-Uhlenbeck multidimensional es igual a la ley del puente con puntos extremos cero derivado de la parte radial del mismo proceso Ornstein-Uhlenbeck.

Utilizamos de manera simple y rápida los algoritmos presentados en [4] para simular puentes del proceso Ornstein-Uhlenbeck con puntos extremos cero con diferentes parámetros. Vimos que la implementación de estos algoritmos para cualquier compilador resulta ser muy fácil y eficiente.

Anexos

1. De la ecuación (2.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
 P(Y_t^\epsilon \in A | Y_s^\epsilon = x) &= P(Z_t \in A | Z_s = x, Z_T \in B(b, \epsilon)) \\
 &= \frac{P(Z_t \in A, Z_T \in B(b, \epsilon) | Z_s = x)}{P(Z_T \in B(b, \epsilon) | Z_s = x)} \\
 &= \frac{\int_A \int_{B(b, \epsilon)} p_{t-s}^Z(x, y) p_{T-t}^Z(y, z) \lambda(dy) \lambda(dz)}{\int_{B(b, \epsilon)} p_{T-s}^Z(x, z) \lambda(dz)} \\
 &= \int_A p_{s,t}^{Y^\epsilon}(x, y) \lambda(dy),
 \end{aligned}$$

esta última igualdad se por la ecuación (2.2).

2.

$$\begin{aligned}
 \int_E \mu_{s,t}(x, dy) \mu_{t,u}(y, A) &= \int_E \left(\int_{dy} p_{s,t}(x, z) \lambda(dz) \right) \mu_{t,u}(y, A) \\
 &= \int_E p_{s,t}(x, y) \left(\int_A p_{t,u}(y, z) \lambda(dz) \right) \lambda(dy) \\
 &= \int_A \int_E p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z) \lambda(dy) \lambda(dz) \\
 &= \int_A p_{s,u}(x, z) \lambda(dz) \\
 &= \mu_{s,u}(x, A)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mu_{s+t}^Z(x, A) &= \int_A p_{s+t}^Z(x, u) \lambda(du) \\
&= \int_A \int_E p_s^Z(x, y) p_t^Z(y, u) \lambda(dy) \lambda(du) \\
&= \int_E p_s^Z(x, y) \left(\int_A p_t^Z(y, u) \lambda(du) \right) \lambda(dy) \\
&= \int_E \mu_s^Z(x, dy) \mu_t^Z(y, A).
\end{aligned}$$

4. Para $s < t$ tenemos que la función de covarianza de B (proceso que se distribuye normal estándar) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Gamma_B(s, t) &= E(B_s B_t) \\
&= E(B_s(B_t - B_s) + B_s^2) \\
&= E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) \\
&= E[E(B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s)] + s \\
&= E[B_s E(B_t - B_s | \mathcal{F}_s)] + s \\
&= E[B_s E(B_{t-s} | \mathcal{F}_s)] + s \\
&= E[B_s E(B_{t-s})] + s \\
&= s.
\end{aligned}$$

5. Como estamos trabajando con la norma euclídeana, entonces

$$\|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^d (x_i y_i)$$

y

$$\|y\|^2 = r^2,$$

entonces

$$-\frac{\|x - y\|^2}{2t} = -\frac{\|x\|^2 + r^2}{2t} + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^d (x_i y_i).$$

Por otro lado, debido a que $y \in \mathbb{R}^d$ y $\theta \in \mathbb{R}^{d-1}$ entonces calcularemos el Jacobiano absoluto de la siguiente forma:

$$J_T(u) = \sqrt{\det(T^*(u)T'(u))}$$

donde $T^* = (T')^t$ y

$$T' = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & \dots & (d-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (d) \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{d-1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_d}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_d}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial y_d}{\partial \theta_{d-1}} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

luego,

$$T^*T' = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & \dots & (d-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (d-1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} r^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r^2(\sin \theta_1)^2(\sin \theta_2)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^2(\sin \theta_1)^2 \dots (\sin \theta_{d-2})^2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

por tanto,

$$J_T = r^{d-1}(\sin \theta_1)^{d-2}(\sin \theta_2)^{d-3} \dots (\sin \theta_{d-3})^2(\sin \theta_{d-2})$$

6. Se tiene que

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}(d-3)!!}{2^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}} & \text{si } d \text{ es par} \\ \left(\frac{d-3}{2}\right)! = \frac{(d-3)!!}{2^{\frac{d-3}{2}}} & \text{si } d \text{ es impar} \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{d-2} \int_0^\pi (\sin \theta_k)^{d-k-1} d\theta_k &= \prod_{k=2}^{d-2} c_{d-k-1} \frac{(d-k-2)!!}{(d-k-1)!!} \\ &= \pi^* 2^\bullet \prod_{k=2}^{d-2} \frac{(d-k-2)!!}{(d-k-1)!!} \\ &= \frac{\pi^* 2^\bullet}{(d-3)!!}, \end{aligned}$$

donde $*$ y \bullet dependen si d es par o impar. Haciendo los cálculos, tenemos que,

$$\prod_{k=2}^{d-2} \int_0^\pi (\sin \theta_k)^{d-k-1} d\theta_k = \begin{cases} \frac{2^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \pi^{\frac{d-4}{2}}}{(d-3)!!} & \text{si } d \text{ es par} \\ \frac{(2\pi)^{\frac{d-3}{2}}}{(d-3)!!} & \text{si } d \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego,

$$\pi^{\frac{3-d}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \prod_{k=2}^{d-2} \int_0^\pi (\sin \theta_k)^{d-k-1} d\theta_k = 1.$$

PROGRAMA 1.
PUENTE ORNSTEIN-UHLENBECK

```
function[V]= oub(N,M,sigma,theta,x)
clf;
j=1;
l=(0:1:N+1)'/(N+1);
V=[];
while j_i=M
i=1;
while i_j=N+2
t(i)=i/(N+2);
if i==1
W(i)=0;
else
X(i)= normrnd(0,(sigma*(1-exp(-2*theta*(1/(N+1)))))/(2*theta));
W(i)=exp(-theta*(1/(N+2)))*W(i-1)+X(i);
end
i=i+1;
end
k=1;
while k_j=N+2
t(k)=(k-1)/(N+1);
Z(k)=W(k)+((x-W(N+2))*(exp(theta*(t(k)))-exp(-(theta)*t(k)))/(exp(theta)-exp(-(theta)))); V=[V;Z(k)];
k=k+1;
end
```

```

plot(1,Z)
j=j+1;
V=V;
end

```

```

PROGRAMA 2. MILSTEP (Teorema 3.7.1 )
implicit none
integer seed,numpara,numsteps
parameter (numpara=4)
real theta(4),time_begin,time_end
real points(0:1000000),h,x,y,totalrej
real bb(0:1000000),xj,xnum
integer i,numrej,j,numsim,meetingpoint,stats,mp
character*20 answer,file1,file2
common seed
seed=9485693
x=0.0
y=0.0
h=0.01
numsteps=100
c theta(1)=0.5
c theta(2)=-0.2
c theta(3)=sqrt(0.2)
c theta(4)=0.5
theta(1)=0.0
theta(2)=-0.5
theta(3)=-0.5
theta(4)=0.0
stats=0
print*, 'input names of file1 and file2'
read(*,*) file1,file2
open(1,file=file1)
open(2,file=file2)
c do i=1,100000
c call DiffusionBridge(numpara,theta,numsteps,h,x,y,
c *points,numrej,mp)
c write(1,*) points(10)
c if (mod(i,100).eq.0)print*,i

```

```

c enddo
totalrej=0.0
call CPU_TIME(time_begin)
do i=1,1
call FormerDiffusionBridge(numpara,theta,numsteps,h,x,y,
*points,numrej)
totalrej=totalrej+numrej
write(1,*) points(0:numsteps)
if (mod(i,100).eq.0)print*,i
enddo
call CPU_TIME(time_end)
print*, 'Elapsed CPU time for MBMS-sim',time_end-time_begin
c totalrej=100.0*totalrej/(100000+totalrej)
print*, 'proportion of rejections',totalrej
C Here e simulate a Brownian Bridge from 0 to 0 in [0,1]
theta(1)=0.0
theta(2)=0.0
theta(3)=1.0
theta(4)=0.0
call CPU_TIME(time_begin)
do i=1,100000
C First generate a Brownian motion from, 0 to 1
call diffusion(numpara,theta,h,0.0,numsteps,points)
C Construct Brownian Bridge
do j=0,numsteps
xj=j
xnum=numsteps
xj=xj/(xnum+1.0)
bb(j)=points(j)-xj*points(numsteps)
enddo
write(2,*) bb(10)
enddo
call CPU_TIME(time_end)
print*, 'CPU time for traditional BB-sim',time_end-time_begin
endfile(1)
endfile(2)
close(1)
close(2)

```

```

stop
end
subroutine DiffusionBridge(numpara,theta,nsteps,delta,x,y,
*points,numrej,mp)
implicit none
integer numpara,nsteps,i,numrej,j,mp
real points(0:1000000),x,y,theta(numpara),delta
real points1(0:1000000),points2(0:1000000),y1,y2
numrej=0
1 call diffusion(numpara,theta,delta,x,nsteps,points1)
i=1
points2(0)=y
5 if (y.gt.points1(nsteps)) then
call DriftParameter(numpara,theta,points2(i-1),y1)
call DiffusionParameter(numpara,theta,points2(i-1),y2)
call MilsteinStep(delta,points2(i-1),y1,y2,points2(i))
if (points2(i).lt.points1(nsteps-i)) then
do j=0,(nsteps-i)
points(j)=points1(j)
enddo
do j=1,i
points(nsteps-i+j)=points2(i-j)
enddo
mp=nsteps-i
goto 20
endif
if (i.lt.nsteps) then
i=i+1
goto 5
else
goto 15
endif
endif
10 if (y.lt.points1(nsteps)) then
call DriftParameter(numpara,theta,points2(i-1),y1)
call DiffusionParameter(numpara,theta,points2(i-1),y2)
call MilsteinStep(delta,points2(i-1),y1,y2,points2(i))
if (points2(i).gt.points1(nsteps-i)) then

```

```

do j=0,(nsteps-i)
points(j)=points1(j)
enddo
do j=1,i
points(nsteps-i+j)=points2(i-j)
enddo
mp=nsteps-i
goto 20
endif
if (i.lt.nsteps) then
i=i+1
goto 10
else
goto 15
endif
endif
15 numrej=numrej+1
goto 1
20 return
end
FUNCTION UNIF(IX)
K1=IX/127773
IX=16807*(IX-K1*127773)-K1*2836
IF (IX.LT.0)IX=IX+2147483647
UNIF=IX*4.656612875E-10
RETURN
END
subroutine BrownianStep(delta,startx,endx)
use IMSL
implicit none
real delta,startx,endx,NR(1)
call RNNOA(1,NR)
endx=startx+sqrt(delta)*NR(1)
return
end

```

c Milstein calculates for stepsize delta the next point in a diffusion.
c startx is the current location of the diffusion, alpha=alpha(startx) is
c the drift evaluated at startx and sigma=sigma(startx) is the diffusion

c coefficient at startx. endx is the next point in the diffusion (output).
 c alpha and sigma must be available by calling this routine.

```

    subroutine MilsteinStep(delta,startx,alpha,sigma,endx)
  implicit none
  real delta,startx,endx
  real alpha,sigma,W
  call BrownianStep(delta,0.0,W)
  endx=startx+alpha*delta+sigma*W
  return
  end

```

c Using the Milstein scheme we simulate a diffusion from startx, n steps ahead at

c stepsizes delta. Diffusion depends on external functions alpha and sigma.

```

subroutine diffusion(numpara,theta,delta,startx,nsteps,points)

```

```

  implicit none
  real delta,startx,points(0:1000000),y1,y2
  integer nsteps,i,numpara
  real theta(numpara)
  points(0)=startx
  do i=1,nsteps
    call DriftParameter(numpara,theta,points(i-1),y1)
    call DiffusionParameter(numpara,theta,points(i-1),y2)
    call MilsteinStep(delta,points(i-1),y1,y2,points(i))
  enddo
  return
  end

```

c Evaluates $y=\mu(x;\theta)$ where theta is a parameter vector of length numpara

```

subroutine DriftParameter(numpara,theta,x,y)

```

```

  implicit none
  integer numpara
  real theta(numpara),x,y
  y=theta(1)+theta(2)*x
  return
  end

```

```

subroutine DiffusionParameter(numpara,theta,x,y)

```

```

  implicit none

```

```

integer numpara
real theta(numpara),x,y
c y=theta(4)*alog(x)
c y=theta(3)*exp(y)
y=theta(3)
return
end
subroutine IteratedDiffusionBridge(numpara,theta,nsteps,delta,x,y,
*points,numrej)
implicit none
integer numpara,nsteps,i,numrej,j,mp,numsteps
real points(0:1000000),x,y,theta(numpara),delta
real points1(0:1000000),points2(0:1000000),y1,y2,yy
real points3(0:1000000)
numsteps=nsteps
yy=y
1 call diffusion(numpara,theta,delta,x,numsteps,points1)

      2 call diffusion(numpara,theta,delta,yy,numsteps,points2) do i=0,numsteps
points3(i)=points2(numsteps-i)
enddo
if (points3(0).lt.points1(0)) then
do i=0,numsteps
if (points3(i).gt.points1(i)) then
mp=i
do j=mp,numsteps
points(j)=points3(j)
enddo
goto 20
endif
enddo
endif
if (points3(0).gt.points1(0)) then
do i=0,numsteps
if (points3(i).lt.points1(i)) then
mp=i
do j=mp,numsteps
points(j)=points3(j)

```

```

enddo
goto 20
endif
enddo
endif
goto 2
20 numsteps=mp
yy=points(mp)
if (mp.gt.1) then
goto 1
else
points(0)=x
endif
return
end
subroutine FormerDiffusionBridge(numpara,theta,nsteps,delta,x,y,
*points,numrej)
implicit none
integer numpara,nsteps,i,numrej,j,mp,numsteps
real points(0:1000000),x,y,theta(numpara),delta
real points1(0:1000000),points2(0:1000000),y1,y2,yy
real points3(0:1000000)
numsteps=nsteps
yy=y
numrej=0.0

      1 call diffusion(numpara,theta,delta,x,numsteps,points1)

      2 call diffusion(numpara,theta,delta,yy,numsteps,points2)
do i=0,numsteps
points3(i)=points2(numsteps-i)
enddo

      if (points3(0).lt.points1(0)) then
do i=0,numsteps
if (points3(i).gt.points1(i)) then
mp=i
do j=mp,numsteps

```

```
points(j)=points3(j)
enddo
goto 20
endif
enddo
endif
if (points3(0).gt.points1(0)) then
do i=0,numsteps
if (points3(i).lt.points1(i)) then
mp=i
do j=mp,numsteps
points(j)=points3(j)
enddo
goto 20
endif
enddo
endif
numrej=numrej+1
goto 2
20 do i=0,(mp-1)
points(i)=points1(i)
enddo
return
end
```

Bibliográfia

- [1] Soren Asmussen, Peter Glynn and Jim Pitman. Discretization error in simulation of one-dimensional reflecting Brownian motion. *Ann. Appl. Probb.* **Vol. 5(4): 875-896** (1995).
- [2] Mátyás Barczy and Gyula Pap. Connection between deriving bridges and radial parts from multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Periodica Mathematica Hungarica.* **Vol. 50(1-2): 47-60** (2005).
- [3] Alexandros Beskos, Omiros Papaspiliopoulos and Gareth O. Roberts. Retrospective exact simulation of diffusion sample paths whit applications. *Bernoulli.* **Vol. 12: 1077-1098** (2005).
- [4] Mogens Bladt and Michael Sorensen. Simple simulation of diffussion bridges with application to likelihood inference for diffusions. *Pre-print* (2006).
- [5] P.J. Fitzsimmons. Markov processes with identical bridges. *Electronic Journal Probability.* **Vol. 3(12): 1-12** (1998).
- [6] P.J. Fitzsimmons, Jim Pitman and Marc Yor. Markovian bridges: construction, palm interpretation and splicing. *Seminar on Stochastic Processes.* **101-134** (1992).
- [7] Gerald B. Folland, *Real analysis.* Wiley-Interscience, second edition, 1999.
- [8] I. Gradstein and I. Ryzhik *Tables of Integrals, Series and Products.* Academic Press, 1980.
- [9] J. Hoffmann-Jorgensen, *Probability with a view toward statistics.* Chapman-Hall. Probability Series, 1994.

- [10] Benjamini I. and Lee S. Conditioned diffusions which are Brownian motions, *J. Theo. Probab.* **Vol. 10: 733-736** (1997).
- [11] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [12] Samuel Karlin and Howard M. Taylor. *A second course in stochastic processes*. Academic Press Inc. New York, 1981.
- [13] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [14] John B. Walsh. The perfection of multiplicative functionals. *Séminaire de probabilités*. **Tomo 6: 233-242** (1972).
- [15] Jia-An Yan. A formula for densities of transition functions. *Séminaire de probabilités*. **Tomo 22: 92-100** (1988).