UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCAMIENTO A LAS CÓNICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

DIANA KARINA HERNÁNDEZ CASTRO

D I R I G I D A P O R :

CONCEPCION RUIZ RUIZ-FUNES

2007

FACULTAD DE CIENCIAS

UNAM

1. Datos del alumno.
Hernandez
Castro
Diana Karina
56 79 28 08
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Facultad de Ciencias
Matematicas
400093914

2. Datos del asesor.
Mat
Concepcion
Ruiz
Ruiz-Funes

3. Datos del sinodal 1
Dra
Maria de la Paz
Alvarez
Scherer

4. Datos del sinodal 2
Mat
Sara Alejandra
Pando
Figueroa

5. Datos del sinodal 3
Dr
Alejandro Ricardo
Garciadiego
Dantan

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Laura
Pastrana
Ramirez

7. Datos de la tesis.
Acercamiento a las Conicas
33p

2007

Dedicatoria

A mis padres:

Por darme la vida con tanto amor.
Por enseñarme con el ejemplo a conseguir lo que desee.
Por apoyarme en todo momento.
Los amo

A mi hermano:

Por ser mi compañero en esta vida.
Por ser la razón para ser mejor.
Te amo

Agradecimientos

A mi familia:

Por ser un ejemplo de vida.
Por el cariño que me han dado.
Los quiero mucho.

A mis amigas:

Por estar conmigo en las buenas
y en las malas.
Por compartir conmigo sus vidas
y dejarme ser parte de ellas.
Gracias.

Mat. Concepción Ruiz Ruiz-Funes:

Por el tiempo,
la paciencia,
el apoyo y los consejos recibidos.

A cada uno de mis sinodales:

Por compartir sus conocimientos.
Por ayudarme cuando lo necesite.
Por los comentarios que
enriquecieron mi trabajo.

Si estuviese convencida de que el simple conocimiento de las matemáticas es suficiente para saber enseñarlas bien, no habría requerido buscar otra forma trasmitir mis conocimientos matemáticos.

Índice

III ”El 1,2,3 de las Cónicas” (CD)

- Plano Cartesiano

  Definición

  Lugar Geométrico

  Lenguaje Algebraico

  Ecuación = Frase

- Distancia entre dos puntos
- Inclinación y pendiente
- Pendiente dados dos puntos
- Ecuación de la recta

  Rectas vistas

  ¿Cómo saber si un punto pertenece o no a una recta?

  Recta $y = m\,x$

  Recta $y = m\,x + n$

  Recta dado un punto y la pendiente

- Intersección de rectas

  Representación de intersecciones

  Rectas paralelas

  Punto de intersección de dos rectas

  Rectas perpendiculares

- Cono
- Circunferencia

  Definición

  Circunferencia $r^2 = x^2 + y^2$

  Circunferencia $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Introducción

En todo sistema de enseñanza, las matemáticas han ocupado un papel muy importante a la vez que han despertado sentimientos encontrados. La gran mayoría de los estudiantes sienten por ellas una mezcla de respeto y aversión; sienten que no son capaces de dominarlas, sino, por el contrario, son dominados por ellas. Son realmente muy pocos los que las aman y están dispuestos a estudiarlas con rigor y pasión.

Las matemáticas han sido consideradas como una disciplina de gran valor formativo y por ello, a lo largo de muchas décadas, diversas escuelas de psicología y de pedagogía han intentado encontrar las estrategias óptimas para su enseñanza y aprendizaje.

Ligadas a los marcos teóricos que se han desarrollado para tal propósito, han surgido herramientas concretas que intentan facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Desde el desarrollo de materiales didácticos para primaria hace muchos años, hasta el desarrollo de programas de software muy elaborados, hoy en día disponemos de una enorme gama de materiales para la enseñanza de las matemáticas.

Sabemos bien que todos los procesos educativos deben ir ligados, necesariamente, con la dinámica de cambio y adaptación constante en la relación que se establece entre el conocimiento científico, el desarrollo tecnológico, las necesidades sociales, los intereses individuales, y la vida cotidiana. Por ello, desde la perspectiva educativa, el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas es hoy ineludible.

Hay que partir del hecho de que en procesos de enseñanza y aprendizaje constituyen, entre otras muchas cosas, un cúmulo de experiencias conducidas y mediadas, esto es, reproducen, de determinada manera, la realidad que se va a aprender y a enseñar.

Dada mi experiencia particular como estudiante y como docente a nivel bachillerato, estoy convencida, de que las relaciones entre el alumno y el maestro, entre el alumno y las matemáticas, y entre el alumno y las estrategias didácticas, deben ser cuidadosamente diseñadas con el fin de garantizar procesos de enseñanza y aprendizaje exitosos, en el que la autoestima del estudiante, no sólo no se vea dañada, sino dónde éste sea realmente el protagonista del proceso.

Por lo anterior, y en función de mi experiencia previa, estructuré mi trabajo de tesis de la siguiente manera. El primer capítulo: "Didáctica de las matemáticas", pretende aportar un panorama general sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas. El segundo capítulo, "Historia de las cónicas", pretende enfocar, a través de la historia, los temas de geometría analítica a enseñar en esta tesis: Plano cartesiano, distancia entre dos puntos, cono, circunferencia y parábola. Temas que forman parte del programa oficial del plan de estudios de la escuela nacional preparatoria y del colegio de Ciencias y Humanidades. El tercer capítulo es ya la propuesta didáctica en concreto: Una animación desarrollada en *Flash Mx* a través de la cual el estudiante de bachillerato podrá repasar los temas de geometría analítica antes mencionados en un ambiente agradable, ameno a la vez que riguroso y didáctico.

Capítulo 1

Didáctica de las matemáticas

En realidad, las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad: En los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas. En el pasado, las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la combinación de ambos (como en el álgebra).

En Babilonia y Egipto, hace alrededor de 1,000 años, las matemáticas estaban dominadas por la aritmética, sin embargo, en geometría encontraron las reglas correctas para calcular el área de triángulos, rectángulos, trapecios, y el volumen de varios cuerpos sólidos. Con el tiempo, los babilonios desarrollaron unas matemáticas más sofisticadas que les permitieron encontrar las raíces positivas de una ecuación de segundo grado. Fueron capaces de encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado, y resolvieron problemas más complicados al utilizar El teorema de Pitágoras.

Con los griegos, el avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. Este último se centró en la importancia del estudio de los números para poder entender el mundo. Algunos de sus discípulos hicieron importantes descubrimientos sobre la teoría de números y la geometría, que se atribuyen al propio Pitágoras, quien desarrolló una escuela alrededor del conocimiento matemático.

La matemática fue utilizada también como una forma de disciplina para el pensamiento en el Medioevo y ha sido usada como herramienta esencial para la exploración del universo, a partir del Renacimiento. Contribuyó como guía del pensamiento filosófico, entre los pensadores del racionalismo y filósofos contemporáneos. Ha sido un instrumento de creación de belleza artística, no sólo para los matemáticos sino también para los artistas que, sin pretender han contribuido al desarrollo de las matemáticas en todos los tiempos.

Al mismo tiempo en México, los mayas desarrollaron el sistema de escritura más complejo de todos los pueblos indígenas mesoamericanos. Con él escribieron todo tipo de textos: de medicina, de botánica, de historia, de matemáticas, de astronomía. Utilizaban un sistema de numeración vigesimal posicional. También tenían un signo para representar el cero, y así poder realizar operaciones matemáticas complejas; gracias a estos conocimientos desarrollaron un calendario muy preciso, con un año de 365 días y fracción.

El estudio detallado de la geometría prácticamente se inició en los tiempos de René Descartes en el siglo XVII, en el cual ocurrieron importantes acontecimientos dentro del mundo de la matemática. El *Discurso del Método*, mostraba cómo aplicar el álgebra que se conocía desde el Renacimiento hasta ese momento, naciendo así la geometría analítica.

También los fundamentos de las matemáticas fueron completamente transformados durante el siglo XIX. Para el siglo XX, diferentes científicos y filósofos habían contribuido de forma sustancial en casi todas las ramas de las matemáticas, pese a que en esta época la especialización en matemáticas impedía entrar en ella fácilmente.

Un hecho que no se pudo imaginar fue la invención de la computadora digital programable. Si bien los orígenes de las computadoras fueron las calculadoras de relojería con las que se intentaba tener un conteo más exacto en las votaciones locales debido a una inexactitud de datos, esta herramienta sería utilizada para el desarrollo de las matemáticas del futuro.

Este avance ha dado un gran impulso a ciertas ramas de las matemáticas, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y ha generado nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se ha convertido en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta.

Las matemáticas, a través de la historia, nos han llevado a diferentes situaciones que en la actualidad hemos podido aplicar a nuestra vida cotidiana. Por ser una ciencia en constante evolución la convierte en una actividad que no puede ser abordada fácilmente.

Este trabajo consiste, esencialmente, en la elaboración de una herramienta para la didáctica de las matemáticas, y para ello me pareció importante hacer una breve revisión de cómo ha ido transformándose la enseñanza de esta disciplina a lo largo de la historia.

La principal obra de Euclides, los "Elementos", estuvo vigente como texto básico en la enseñanza en muchos lugares hasta el siglo XX. La edad moderna trajo cambios profundos de orientación científica y didáctica, porque aunque se siguió trabajando con los "Elementos" se completó este trabajo modificando la forma de enseñanza y aplicando este método en otras áreas de la matemática. Así pues surgió la Escuela Normal y la Politécnica en Europa.

A fines del siglo XIX y principios del siglo XX ocurrieron cambios importantes en la concepción de las matemáticas. Motivados por la aparición de las geometrías no euclidianas, los matemáticos se ocuparon intensamente en tratar de establecer las bases de su ciencia de modo irrefutable.

A nivel internacional, a principios del siglo XX, en la educación matemática apenas se habían producido cambios de consideración conrespecto al siglo XIX. A mediados del siglo XX tuvo lugar un movimiento de renovación en educación matemática, gracias al interés inicialmente despertado por el matemático alemán Félix Klein.

El movimiento de renovación de los años 1960 y 1970 hacia la matemática moderna trajo consigo una transformación radical de la enseñanza de las matemáticas. Entre las principales características del movimiento y los efectos por él producidos se pueden contar los siguientes:

- Se enfatizó la abstracción en diversas áreas, especialmente en álgebra.
- Se buscó fundamentar los problemas en la lógica, dejando de lado los aspectos operativos.
- Se tomó como plataforma para la enseñanza la teoría de conjuntos y las bases del algebra, ya que con esto se puede formalizar fácilmente el conocimiento trasmitido.
- Como la geometría es más difícil de formalizar, se deja de lado esta área de las matemáticas.

Al minimizar el uso de la geometría en la enseñanza se reducen significativamente el estudio de problemas interesantes como la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con el área igual a la de un círculo dado), la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo (construir un cubo que tiene por volumen dos veces el de un cubo dado) que nos enseñan que podemos entender el problema intuitivamente, aunque en ocasiones el resultado no sea tan fácil de obtener. Por el contrario, el álgebra con sus procedimientos intrínsecos, en su búsqueda por llegar a lo más elemental, deja de lado el surgimiento del problema. Este movimiento, más que ayudar en la enseñanza la dificultó, creando así más problemas que los que pretendía resolver.

En los siguientes años se discutió sobre estos problemas, al buscar los pros y los contras y traer con esto nuevas formas de afrontar los retos de la enseñanza matemática por parte de los matemáticos.

Pese a todos estos cambios, en México en 1970, comenzaba a aplicarse la matemática moderna sin tomar en cuenta los problemas que este método traería a nuestro país.

A últimas fechas se ha manifestado mayormente la ambigüedad de los conocimientos trasmitidos a las últimas generaciones. Esto nos obliga a desarrollar nuevas técnicas de enseñanza basadas en la realidad en la que vivimos, sin dejar de aprovechar la tecnología con la que contamos en la actualidad (sobre todo en las ciudades).

La enseñanza ideal debería de reflejar los inconvenientes en la búsqueda de resultados positivos, al humanizar así la matemática. De esta forma se busca atraer el interés de los estudiantes. Proponer problemas, en lugar de sólo dar recetas para solucionarlos, ayudará a estimular a los alumnos, ya que son ellos mismos los que encontrarán la solución, guiados por el profesor.

La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y la computadora ha comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar la educación matemática, de forma que se aprovechen al máximo estas herramientas. Es claro que, por diversas circunstancias sociales, económicas, ideológicas, aún no se ha logrado encontrar modelos plenamente satisfactorios. Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para la interacción con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro.

Es importante resaltar que no siempre el alumno está en disposición para entender lo que el profesor le quiere enseñar. Algunas de las razones de que esto suceda tienen que ver con la personalidad de cada quien. Es claro que una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de los estudiantes tienen su origen en que psicológicamente están mentalizados a no entender, junto con una mala dirección del profesor. Por eso se intenta también, a través de diversos medios, que los estudiantes perciban las matemáticas no sólo como números sin sentido, sino también como algo de lo que se puede aprender sin necesidad de tantos números, como algo más gráfico.

Los medios de comunicación y la opinión pública nacional han recibido con sorpresa los recientes resultados de la última medición de la calidad de nuestra educación. Sin duda, estos resultados son parciales y sólo miden algunos aspectos muy reducidos de los aprendizajes que nuestros estudiantes asimilan. Una parte de estos resultados tiene que ver con las prácticas de enseñanza, la formación de profesores, la sobrecarga horaria y los escasos tiempos asignados a preparación de clases, nuestros valores culturales sobre la importancia de la educación y de cómo esto se refleja en el hogar a la hora de asignar recursos y tiempos de atención a nuestros hijos, nuestras predilecciones sobre las diferentes formas de recreación (que va desde lo que leemos hasta lo que miramos en la televisión), etc.

Estos resultados son ahora más alarmantes, ya que son más públicos y por el creciente interés de los padres respecto a la educación de sus hijos. Ya no basta con saber leer y escribir y con conocer las cuatro operaciones. Es necesario contar con toda una población mucho más educada, capaz de buscar permanentemente nuevas tendencias y experimentar cómo conectar los fenómenos emergentes con potenciales oportunidades. En definitiva, un buen nivel de educación de la población es hoy en día la principal ventaja competitiva de las naciones.

Esta creciente preocupación por la educación no es patrimonio exclusivo de México. Muchos años atrás, en 1983, un muy debatido informe llamado Una Nación en Riesgo, advertía en Estados Unidos los peligros asociados a una educación de calidad deficiente en comparación con la de otros países. Posteriormente, este tema ha adquirido en todo el mundo un rol cada vez más preponderante en campañas presidenciales, donde candidatos de las más diversas tendencias han comprometido aumentos sustanciales de recursos para contener el creciente abismo educacional con otras naciones.

En los estudios comparativos, el aprendizaje de las matemáticas domina la discusión. Esto se debe en parte a los crecientes requerimientos de conocimientos matemáticos de la nueva economía, pero también a las profundas diferencias entre naciones.

Un reciente estudio entre la educación básica en matemáticas de Estados Unidos y China muestra concluyentemente enormes diferencias en la calidad de los aprendizajes a favor de los estudiantes chinos. Estas diferencias se deben, antes que nada, al dominio que poseen los profesores de los conceptos matemáticos básicos. El estudio realizado por Liping Ma, ex profesora básica de China y ahora investigadora de la Universidad de California en Berkeley, ha provocado entre educadores y matemáticos airadas reacciones por el hecho que revela la importancia del conocimiento de contenidos por sobre aspectos netamente pedagógicos. Todos los profesores de una gran muestra fueron expuestos a cuatro problemas matemáticos considerados fundamentales. Los profesores norteamericanos exhibieron graves deficiencias conceptuales, a pesar de que el promedio no sólo ha estudiado cuatro años de educación sino que además uno o dos años deuna maestría en educación. En cambio, los profesores chinos, casi unánimemente, mostraron una comprensión correcta y profunda, lo que contrasta con el hecho de que en su mayoría esos profesores sólo habían cursado hasta noveno año de educación básica y dos o tres años en una escuela normal.

Este paradójico hallazgo ha dado mucho de qué hablar y ha dejado a muchos completamente desconcertados. Esta incongruencia no sólo se observa en pruebas tradicionales de conocimientos, sino que también en las diferentes prácticas pedagógicas de los profesores. Por ejemplo, en el uso de material concreto se encontró que muchos profesores norteamericanos no sólo los subutilizaban, sino que muchas veces los utilizaban equivocadamente. En cambio, los profesores chinos aprovechan el milenario ábaco para profundizar el entendimiento correcto de la notación posicional y los algoritmos aritméticos basados en ella.

En el más importante estudio internacional comparativo de educación matemática, TIMMS, en el que participan más de 40 países, adicionalmente a los test a estudiantes, se compararon grabaciones en video de clases de profesores norteamericanos y japoneses. Las diferencias aquí también fueron enormes. Estas apuntan a metodologías de enseñanza, estrategias de preparación de clases y planes de perfeccionamiento. Entre los profesores japoneses existe una verdadera preocupación por diseñar clases que conecten con los problemas cotidianos que sus estudiantes enfrentan o que tendrán que abordar en su futura vida laboral. Esta preocupación se traduce en la formación de equipos de cuatro a cinco profesores de establecimientos vecinos que pasan hasta un año perfeccionando una lección de cincuenta minutos, tal como los deportistas junto con su equipo de trabajo. Así, cada año se producen en todo el país decenas de miles de clases preparadas y probadas por los mismos profesores, y que luego son compartidas y publicadas, formando una creciente e invaluable base de experiencias y conocimientos.

Los estudiosos en pedagogía y didáctica cuestionaban sobre el "lugar" de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje; algunos teóricos pensaron que su lugar era ser parte de un programa escolar, mientras que otros plantearon que su función era la de facilitar la enseñanza como recurso de apoyo educativo.

Posteriormente se cuestionaba la compatibilidad de la tecnología con los enfoques psicopedagógicos, particularmente con las siguientes teorías:

- Constructivismo (Vygostky). El constructivismo que partiendo de los tres elementos fundamentales de toda situación de aprendizaje: contenidos (qué aprende el alumno), procesos (cómo aprende) y condiciones (entorno que facilita su aprendizaje y experiencias).
- Conversación (Pask),
- Conocimiento situado (Young)

- Acción comunicativa (Habermas).

Internet y sus recursos amplían la capacidad de interacción personal con estos elementos. Con la teoría de la conversación de Pask, que supone que aprender es por naturaleza un fenómeno social, existe también compatibilidad por la red de relaciones que ofrecen las nuevas tecnologías. La teoría del conocimiento situado de Young señala que el conocimiento es una relación activa entre el individuo y un determinado entorno, y además el aprendizaje se produce cuando el aprendiz está envuelto activamente en un contexto complejo y real; en este caso también Internet propicia innovadores entornos. Y, finalmente, la teoría de acción comunicativa de Habermas, sustentada en el rigor, la racionalidad y la crítica, impulsando cierta capacidad de expresarse, hacerse entender y actuar coherentemente, también es congruente con las aristas de la telemática y sus recursos lógicos.

Existe otro factor importante asociado a las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones: la información. En efecto, una de las mayores preocupaciones actuales de los sistemas educativos, en los países desarrollados, es el acceso y la producción de información.

Esta revolución del pensamiento, implica una verdadera transformación educativa. Las teorías o corrientes pedagógicas han oscilado en enfoques más o menos centrados en el docente o en el estudiante. Con todo, en la actualidad, ante la globalidad, las sociedades se debaten en la transición para llegar a constituirse en sociedades de la información, sociedades del conocimiento o sociedades del aprendizaje, sustentadas en las nuevas tecnologías de la información. Ante estos retos es necesario replantear el quehacer pedagógico como base educativa para formar al ciudadano de estas posibles ciudades. Estos escenarios demandan una nueva arquitectura educativa que apunte al aprendizaje de por vida y apueste por él, lo que implica entablar una nueva hipótesis educativa: Enseñar a aprender y sobre todo utilizar adecuadamente la información en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se plantea entonces una nueva hipótesis, un nuevo enfoque para comprender el quehacer educativo llamado *pedagogía de la información*, ante el cual los docentes y estudiantes deben asumir un nuevo papel de mediador entre la experiencia humana y la información existente, y sobre todo caer en la cuenta de que la información debe ser punto de partida y de llegada en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Capítulo 2

Historia de las Cónicas

Por su nombre: geometría en griego alude a medir la tierra, los conocimientos geométricos tuvieron un origen práctico. Por lo menos, así lo atestigua Herodoto en un conocido pasaje de su *Historia*:

> El rey de Egipto dividió el suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual extensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada poseedor pagaba anualmente. Si el río arrasaba una parte del lote de un habitante, éste se presentaba al rey y le exponía lo ocurrido, a lo cual el rey enviaba personas a examinar y medir la extensión exacta de la perdida y más adelante la renta exigida era proporcional al tamaño reducido del lote. Es en virtud de esta práctica que, pienso, comenzó a conocerse la geometría en Egipto de donde pasó a Grecia.

Mas no sólo el hombre midió la tierra: Otras mediciones exigió la construcción de sus viviendas y tumbas, de sus graneros y canales. Como resultado surgieron nuevas nociones geométricas de las formas y figuras con que el hombre decoró y ornamentó sus viviendas y sus objetos, así como de la observación de formas que atrajeron su atención por su sencillez o su simetría: la línea (línea viene de lino), el circulo, los polígonos[i] y poliedros[ii] regulares. El ladrillo, de esa época, aportó probablemente la noción de ángulo recto, mientras que otras formas geométricas salían de los movimientos: ya sea de las danzas humanas, o de la observación del movimiento de los astros.

[i] Figuras planas, ejemplos: cuadrado, circulo, triangulo, etc
[ii] Figuras con volumen, ejemplos: cubo, esfera, pirámide, etc.

Los babilonios (Milenio II a. C.)

Fue en esa época en la que se realizaron tablillas matemáticas con textos cuneiformes, las cuales fueron descifradas en el siglo XX. Sin duda, el conocimiento geométrico más interesante que revelan las tablillas es el del llamado Teorema de Pitágoras, y, en especial, como consecuencia, la ley de formación de los "tripletes pitagóricos", es decir, tomar tres números enteros, *a, b* y *c*, que, además de representar medidas de los lados de triángulos rectángulos, expresan la posibilidad aritmética de descomponer un número cuadrado en suma de dos cuadrados, es decir $a^2 = b^2 + c^2$.

El conocimiento del Teorema de Pitágoras, un milenio largo antes de la existencia de su pretendido autor, se pone de manifiesto en distintos problemas cuya solución correcta no podía lograrse sin ese teorema.

Los egipcios

Los conocimientos geométricos desarrollados por los egipcios fueron extensos: Disponían de reglas exactas para el área de triángulos, rectángulos y trapecios, así como para el volumen de prismas y pirámides. En un ejemplo aparece la determinación de la inclinación del plano oblicuo de una pirámide, aunque entendida más como factor de proporcionalidad que medida angular. El máximo logro de la geometría egipcia debe verse en la determinación correcta del volumen del tronco de la pirámide truncada de base cuadrada, mediante un cálculo de difícil interpretación. Además, se debe a los calculistas egipcios una excelente aproximación de π.

Los griegos (siglo VI a. C.)

La matemática griega cuenta con Tales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, primero a quien se dio ese nombre, no por sus ideas ni estilo de vida, sino por el hecho de estudiar los secretos de la naturaleza y dar a conocer sus investigaciones.

A Tales se le atribuye, una predicción de un eclipse de Sol, entre otras cosas, de las cuales se duda si fueron realmente hechas por él o simplemente se debe a la fama que tuvo tanto en su época como en generaciones posteriores.

Algo semejante podría decirse con respecto a las contribuciones matemáticas, o mejor geométricas, que se atribuyen a Tales y que consisten en algunas propiedades teóricas y en un par de problemas prácticos, cuyo interés reside esencialmente en que tanto unas como otros se refieren a propiedades generales de rectas, igualdades entre ángulos, y semejanzas de figuras, es decir, propiedades cuya índole las distingue del conocimiento empírico de los egipcios, con el cual directa o indirectamente Tales pudo entrar en contacto.

Y si Tales, el primero entre los siete sabios, había sido también el primero, cronológicamente, en poner de manifiesto las exigencias de la razón en el campo de la naturaleza mediante la explicación racional de sus fenómenos, ¿por qué no dotarlo de igual capacidad en el campo matemático, atribuyéndole el invento de la demostración, en vista de la similitud de los fundamentos de ambos procesos? Pueden ser o no exagerados los meritos que las generaciones futuras asignaron a Tales, lo que es notorio es que Tales marcó una etapa importante en la historia de las matemáticas.

Los pitagóricos

Pitágoras, filósofo que habría vivido a lo largo de gran parte del siglo VI a. C. y cuya vida y doctrinas han sido deformadas por la atmósfera mística que las envolvió, contribuyendo sin duda a esa deformación la imposición del secreto y del silencio místicos que regían en la escuela que había fundado Pitágoras, en especial, en lo referente a los conocimientos. Se sabe que los pitagóricos utilizaban, como símbolo de reconocimiento de la secta, un pentágono cóncavo: La estrella de cinco puntas.

Pitágoras y su escuela pertenecen por igual a la ciencia y a la filosofía, a la mística y a la política; pues Pitágoras no fue sólo un filósofo, sino también un sacerdote de ritos arcaicos y hasta un político, pues fueron las luchas políticas de mediados del siglo V a. C. las que provocaron la destrucción de la escuela fundada por Pitágoras en Cretona (Italia) y la emigración de los pitagóricos y de sus doctrinas a la metrópoli, donde hacia esa época comenzaron a difundirse.

Dos tendencias rigen la geometría de los pitagóricos: Por un lado, el sentido de armonía universal que se destaca en su metafísica y, por el otro, la preocupación por el estudio de las propiedades de figuras concretas, planas o sólidas, probable herencia de conocimientos orientales pero ahora, claro es, amasados con el método deductivo.

De tal combinación surge la preferencia que se advierte en la geometría pitagórica por los polígonos y poliedros regulares. Así es de origen pitagórico el teorema que enumera las escasas posibilidades (triángulos, cuadrados, hexágonos) de llenar un área con polígonos regulares. En cambio, la construcción geométrica de esos polígonos exige mayores conocimientos. Si bien tal construcción es muy sencilla cuando se trata del cuadrado y del hexágono, y de los infinitos polígonos que derivan de ellos, la cosa no es tan simple cuando se trata del pentágono.

En cuanto al conocimiento y construcción de los poliedros regulares parece natural que los pitagóricos se interesaran por estos cuerpos simétricos y armoniosos; los cuales constituyeron uno de los temas de la geometría pitagórica.

La matemática del siglo V a.c.

La labor de los pitagóricos había dejado dos saldos importantes, uno de carácter general: La exigencia de la demostración; y, otro de carácter circunstancial: La consagración casi exclusiva de los matemáticos a las investigaciones geométricas.

De ahí que los matemáticos del siglo V se dedicaron a la búsqueda de nuevas propiedades de las figuras, ya de carácter general: Nuestros teoremas, ya de carácter particular: Nuestras construcciones, que deben considerarse como teoremas de existencia pues para los antiguos construir una figura, partiendo de elementos dados y con propiedades prefijadas, era demostrar que tal figura existe o, lo que es lo mismo, deducir su existencia de propiedades conocidas.

Como las primeras figuras de las que partieron los griegos fueron la recta y la circunferencia, todas las proposiciones geométricas, fueran teoremas o construcciones, debían fundarse sobre esas dos figuras y sus relaciones y conexiones mutuas.

Por su parte, y esta es otra de las características de la matemática del siglo V a.c., muchas de esas nuevas propiedades fueron logradas mediante la búsqueda y la persecución de algunos problemas particulares que, a manera de polos atrajeron la atención de los matemáticos. Esos problemas, hoy llamados los problemas clásicos de la geometría, fueron tres: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo.

La Academia y el Liceo

En el siglo IV a.C. las dos escuelas filosóficas más importantes de Atenas: la Academia fundada por Platón en 387 a. C., y el Liceo de Aristóteles que éste funda en 335, ejercerán en distinta medida su influencia en el desarrollo de la matemática del siglo.

La matemática del siglo IV a.c.

La matemática griega de la primera mitad del siglo IV ofrece el espectáculo de una aritmética estancada y de un cúmulo de propiedades geométricas aún no sistematizadas, obtenidas en gran parte mediante la búsqueda de la solución de problemas particulares, como los problemas clásicos y otros. Quedaban, en efecto, aún en pie dos obstáculos importantes: El de las cantidades inconmensurables[iii] que en número cada vez mayor aparecían invadiendo la geometría, y un grupo de problemas de equivalencia, entre ellos, la cuadratura del círculo, y la cubatura de la pirámide y de la esfera, para los que no se habían dado aún demostraciones rigurosas que facilitaran su solución.

Por su parte, el acontecimiento matemático más notable de la segunda mitad del siglo fue la aparición de unas curvas nuevas: Nuestras cónicas, cuyo estudio adquirirá un gran desarrollo en manos de Arquímedes y de Apolonio.

Se ha atribuido ese descubrimiento a Menecmo y aunque se ha conjeturado que se debió al empleo de los relojes de sol, ya que la sombra del extremo de la barra vertical que servía de reloj (el *gnomon)* dibuja arcos de cónicas en el suelo durante la marcha del Sol. Lo que si sabemos es que cónicas es una abreviatura de secciones cónicas lo que nos da una pista de su origen, pues se obtienen de la intersección de un plano secante[iv] con un cono circular recto, con la condición de que el plano secante no pase por el vértice del cono. Esas curvas son distintas según la posición del plano secante.

Alejandría (Siglo III a.C.)

En Alejandría (ciudad situada al norte de Egipto) es donde nacen y se desarrollan las dos grandes instituciones científicas que caracterizan al período alejandrino: El Museo y la Biblioteca.

[iii] Se refiere a dos magnitudes que no se pueden comparar.
[iv] Secante, es una recta que corta en dos puntos a una circunferencia.

Las actividades del Museo se desarrollaron alrededor de cuatro secciones o departamentos principales: Matemática, astronomía, medicina, letras y, por supuesto, la Biblioteca, aunque es posible que en vista de la importancia que tomó la Biblioteca, ésta más adelante se convirtió en una institución en cierto modo independiente.

Así como el Museo resultó el centro de las investigaciones del campo de las ciencias exactas y naturales, la Biblioteca de Alejandría lo fue de las humanidades, en especial de la filología y la gramática y, su dirección, en especial en el período inicial, fue confiada a verdaderos sabios.

Con este ambiente científico de Alejandría se vinculan, directa o indirectamente, las tres figuras máximas de la matemática griega, los tres grandes: Euclides, Arquímedes y Apolonio, cuyo brillo justifica, por sí sólo, que se considere la época alejandrina como edad de oro de la matemática griega.

Euclides

Euclides fue un sabio que vivió hacia el 300 a.c., autor de numerosas obras científicas, entre ellas sus célebres *Elemento,* cuya importancia científica se mantuvo indiscutida hasta el advenimiento de las geometrías no euclidianas en la primera mitad del siglo XIX y cuyo valor didáctico se mantuvo hasta comienzos del siglo XX, cuando aún algunas escuelas utilizaban los *Elementos* como texto escolar. Por lo demás, Euclides y sus *Elementos* han sido siempre considerados como sinónimo de Geometría.

Los Elementos no contienen toda la geometría griega de la época, ni constituyen un resúmen de toda ella; sin duda contiene una buena parte de la matemática elaborada por los matemáticos griegos anteriores a Euclides y por Euclides mismo, pero esa parte no fue tomada al azar, sino seleccionada cuidadosamente a través de un método para obtener así un sistema estructurado.

Ese sistema y este método resultaron ser tan buenos, que no sólo la obra de Euclides eclipsó otros *Elementos* redactados anteriormente sino que no se poseen datos de obras análogas posteriores a la de Euclides.

Varios factores favorecieron la labor de Euclides. En primer lugar la posibilidad de disponer del tiempo y de la herramienta necesarios para su labor científica. Por otra parte, Euclides tuvo a su disposición una gran cantidad de propiedades matemáticas acumuladas en especial por obra de los pitagóricos, que le permitió seleccionar el material adecuado para organizar, con añadidos propios y por primera vez, un sistema de conocimientos matemáticos sujeto a una estructura unitaria.

Además, gracias a la lógica aristotélica, Euclides pudo exponer un conocimiento tan sólido que resistió siglos de críticas de otros matemáticos. Con esa estructura, Euclides instaura un método hoy llamado axiomático, que resultó el método científico por excelencia. Método que Aristóteles alababa como único a seguirse en toda ciencia deductiva y que fue adoptado por otros científicos griegos y luego por científicos modernos para convertirse hoy en el método general empleado en la matemática y en otras ciencias. Este método consiste en enunciar previamente las propiedades que han de admitirse sin demostración para deducir de ellas, sin otro recurso que la lógica, todo el conjunto de proposiciones del sistema. Esas propiedades básicas son las que se llaman axiomas y que Euclides designó con los nombres de postulados y de nociones comunes.

Lo que hoy llamamos *Los Elementos* de Euclides es un texto que ha llegado hasta hoy mediante una redacción de Teón de Alejandría del siglo IV y dado que pasaron seis siglos desde que se escribió hasta la redacción de Teón, pudieron haberse introducido muchas modificaciones.

Los Elementos se componen de trece libros con un total de cuatrocientos sesenta y cinco proposiciones: noventa y tres problemas y trescientos setenta y dos teoremas. Gran parte de los libros se abre con un grupo de definiciones o, mejor términos según el vocablo utilizado por Euclides, a las que en el primer libro se agregan las proposiciones básicas, nuestros axiomas, que Euclides distingue en postulados y nociones comunes.

Hoy sabemos que la geometría de *Los Elementos* no es *la* geometría sino *una* geometría, de ahí que las definiciones configuran el ámbito y la índole de los entes que caracterizan a esa geometría. Así, son características las definiciones de término, como extremo de algo, y de figura como lo que está comprendido entre uno o más términos, definiciones que revelan el espíritu de la geometría euclidiana puesto de manifiesto en la predilección hacia lo visual, lo limitado, lo finito, que entraría en crisis con la introducción de las paralelas, cuya definición: "Son paralelas aquellas rectas de un plano que prolongadas por ambas partes en ninguna de éstas se encuentran", evidentemente implica un comportamiento de las figuras que excede todo término.

El número de axiomas sobre los que funda Euclides su sistema es reducido: Trece en total, cinco postulados y ocho nociones comunes. Los postulados se refieren a los entes básicos específicamente geométricos y su función, es decir, consiste en fijar la posibilidad constructiva de las figuras formadas por rectas y circunferencias determinando así su existencia y unicidad. En efecto, los tres primeros postulados aseguran la existencia y unicidad de una recta, es decir, de un segmento prolongado indefinidamente cuando se dan dos puntos de ella; mientras que un cuarto postulado fija la existencia de una circunferencia cuando se da un punto (su centro) y un segmento (su radio).

Esos cuatro postulados fijan la existencia de rectas y circunferencias concebidas en forma independiente; quedaba por fijar sus vinculaciones mutuas. Por razones intuitivas, o quizá llevado por la concepción que entrañaba la definición de figura, Euclides admite la naturaleza de las posibles intersecciones de rectas con circunferencias, con rectas y de circunferencias. Quedaba pues a Euclides únicamente demostrar o postular las posibilidades de la intersección entre dos rectas que, por su propiedad de prolongarse indefinidamente, configuraban una estructura, no una figura, a la cual la intuición no podía acoplar ni justificar comportamiento alguno.

El reconocimiento de este hecho pone de manifiesto uno de los rasgos geniales de Euclides, pues éste fija aquel comportamiento por medio de un postulado: El último de la serie y que más tarde se destacó como el Quinto postulado, por la celebridad y notoriedad que alcanzó en vista de las discusiones a que dio lugar. Y las geometrías no euclidianas que nacieron cerca de veintidós siglos más tarde no hicieron sino corroborar el acertado sentido matemático y lógico que llevó a Euclides a adoptar tan genial decisión.

En cuanto a las nociones comunes, que Euclides acepta sin demostración no son sino las operaciones fundamentales entre magnitudes sean geométricas o no.

Los primeros cuatro libros de *Los Elementos,* de probable origen pitagórico, comprenden las proposiciones más importantes de geometría plana elemental, referentes a triángulos, paralelogramos, equivalencias, Teorema de Pitágoras, con quien se cierra el primer libro, circunferencias e inscripción y circunscripción de polígonos regulares.

Los tres últimos libros de *Los Elementos* son de un contenido más bien heterogéneo: Podrían calificarse de geometría superior, no por su factura sino por tratar cuestiones de geometría del espacio, que implican nociones del actual análisis infinitesimal. En efecto, el libro XI expone algunos teoremas de geometría del espacio, necesarios para los dos libros siguientes: el XII comprende en cambio teoremas del plano o del espacio que exigen para su demostración la aplicación del método de exhaución, mientras que el XIII se ocupa exclusivamente de los cinco poliedros regulares y de su inscripción y circunscripción en la esfera.

Los editores antiguos agregaron a los trece libros de *Los Elementos* un par de libros más (apócrifos) relacionados con los poliedros regulares. El llamado Libro XIV de *Los Elementos* se debe a un matemático importante de la primera mitad del siglo II a. C.: Hipsicles de Alejandría; en verdad es una continuación natural del último libro de Euclides, pues se ocupa de los poliedros regulares anotando, entre otras, esta interesante propiedad: Si en una esfera se inscriben un cubo, un dodecaedro y un icosaedro, los lados del cubo y del icosaedro son proporcionales a las áreas y a los volúmenes del dodecaedro y del icosaedro, dependiendo el factor de proporcionalidad de la razón entre los segmentos que divide una recta en media y extrema razón.

Además de *Los Elementos* indudablemente su obra máxima, se deben a Euclides otros escritos matemáticos algunos existentes, otros perdidos. Entre los escritos de índole geométrica figuran los *Datos,* obra que parece haber sido escrita para aquellos que habiendo completado el estudio de los *Elementos* deseaban ejercitarse en la resolución de problemas que exigían el conocimiento de las propiedades del tratado de Euclides. En efecto, *Datos* se compone de un centenar de proposiciones en las que se demuestra el partir de ciertos datos —de ahí el nombre— quedaba determinada una figura ya en posición, ya en magnitud o ya en su forma.

De las restantes obras geométricas de Euclides, o que se le atribuyen, se han perdido los originales griegos. De la obra *Sobre la división de las figuras* se dispone de versiones árabes; de los *Porismas* de función probablemente semejante a *Datos* no se tiene sino noticias; menos aún se conoce acerca de sus *Paralogismos* o *Sofismas* probablemente una obra didáctica escrita para adiestrar a los discípulos en el razonamiento correcto; de sus *Cónicas,* en cuatro libros que sería un tratado sobre este tema comprendido entre los de Aristeo y de Apolonio; y de sus *Lugares superficiales,* respecto del cual no hay todavía una opinión aceptada sobre el significado del título.

Otra obra geométrica (pérdida) sobre la cual se han tejido numerosas conjeturas es *Porismas* de la cual, sobre la base de las noticias que trae Pappus, se han hecho varias reconstrucciones. Pappus dice que esta obra en tres libros, compuesta de treinta y ocho lemas y ciento setenta y un teoremas, era "una colección ingeniosa de una cantidad de cosas útiles para resolver los problemas más difíciles"[v]. El mismo significado del título no es claro, pues "porisma" puede significar "corolario", pero también tiene otro sentido al cual se refiere Pappus al decir que "los diversos tipos de porismas no son ni teoremas ni problemas, representando en cierto sentido una forma intermedia". De ahí que Chasles, que es uno de los matemáticos que reconstruyó la obra, dice que los porismas son teoremas incompletos que expresan ciertas relaciones entre elementos que varían de acuerdo con una ley determinada, y que tendrían por objeto, no sólo demostrar esas relaciones, sino

[v] Rey Pastor, Julio y Babini, José. *Historia de la Matemática* Volumen I. Editorial Gedisa. España. 2000, pp.89

completarlas determinando la magnitud y posición de las figuras que satisfarán aquellas relaciones.

Arquímedes

Si Euclides es un maestro y un sistematizador, no muy original, la figura que le sigue cronológicamente Arquímedes de Siracusa es el arquetipo de el matemático original, que al igual que los científicos de hoy, no escribe sino monografías o memorias originales, relativas a los más variados campos de la matemática antigua en sentido lato: Aritmética, geometría, astronomía, estática e hidrostática.

El hecho indudable de haber muerto Arquímedes en el saqueo que siguió a la caída de Siracusa en manos de los romanos en 212, combinado con otro dato, según el cual Arquímedes habría vivido setenta y cinco años, ubica la fecha de su nacimiento en el año 287 a.C.

Las actividades de su padre, astrónomo, influyeron sin duda en la vocación y formación científica de Arquímedes que, desde joven, estuvo en Alejandría donde, sin pertenecer al Museo, trabó amistad con varios maestros alejandrinos, sucesores de Euclides, con quienes mantuvo luego correspondencia científica al regresar a Siracusa, dedicó su vida a la investigación científica.

Su muerte misma fue rodeada de cierta atmósfera novelesca v narrada de diferentes maneras: El acto del soldado romano que atraviesa con su espada al viejo sabio absorto ante una demostración geométrica.

No es fácil establecer un nexo lógico o cronológico entre los escritos de Arquímedes. En parte por la índole monográfica de los mismos, en parte por el distinto contenido que se refiere a matemática, a astronomía y a física, sin olvidar que probablemente algunos de sus escritos se han perdido.

Se conocen de Arquímedes, en versión original, cuatro escritos de geometría. De estos, dos son de geometría plana: *De las espirales; De la medida del círculo, y* dos de geometría del espacio: *De la esfera y del cilindro* (dos libros) y *De los conoides y de los esferoide.* Siguiendo la norma euclidea, hay definiciones en todos esos escritos, excepto *De la medida del circulo, y* postulados en *De la esfera y del cilindro.*

El primer libro de este escrito puede considerarse un complemento de los *Elementos* de Euclides, al demostrar una serie de teoremas, relativos a las áreas y volúmenes de los cuerpos redondos, omitidos en el primero.

El segundo libro del escrito comporta una serie de problemas, algunos de los cuales, nada fáciles, conducen a problemas del tipo de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.

En cierto sentido el único libro de *De los conoides y de los esferoides* es una continuación del anterior, pues en él se estudian las propiedades métricas de los sólidos que Arquímedes designa con el nombre de conoides (nuestro paraboloide y rama del hiperboloide de dos hojas, de revolución) y esferoides (nuestro elipsoide de revolución).

Una última contribución conocida de Arquímedes a la geometría del espacio, de índole diferente de las anteriores, la proporciona Pappus cuando al hablar de las figuras inscritas en la esfera, cita los poliedros regulares y trece poliedros semirregulares que, según él, habría descubierto Arquímedes, pero sin señalar cómo llegó a ellos.

En geometría plana la contribución más original de Arquímedes es el escrito *De las espirales,* uno de los más difíciles por sus largas demostraciones, la concisión de su texto, que subentiende muchas relaciones intermediarias, la aplicación de expresiones en forma geométrica de la suma de términos en progresión aritmética o de sus cuadrados. Todo hace su lectura nada fácil, circunstancia que explica que en los siglos XVII y XVIII hubiera matemáticos que desistieron de entender este escrito y hasta quién, frente a sus dificultades, prefiriera considerar erróneos sus resultados. También en este escrito aparecen problemas no resolubles con regla y compás que Arquímedes da por resueltos aunque sin señalar la construcción correspondiente.

El escrito *De la medida del círculo,* muy breve, es uno de los más importantes de Arquímedes, pues en él no sólo demuestra la equivalencia de los problemas de la rectificación de la circunferencia y el de la cuadratura del círculo, sino que al dar una solución aproximada de esos problemas, con un valor muy útil para nuestro número π, aporta cuestiones aritméticas muy interesantes.

Queda aún un tema de geometría plana que Arquímedes trata en un escrito que, desde el punto de vista de hoy, no es exclusivamente geométrico. El tema se discute en la

Cuadratura de la parábola, primer ejemplo de cuadratura de una figura mixtilínea y que Arquímedes logra por un doble camino: uno exclusivamente geométrico y otro al emplear los recursos de la estática, mediante la ley de la palanca que él mismo había demostrado.

Por último, se atribuye a Arquímedes un llamado *Libro de los lemas,* conocido en su versión árabe, que contiene una serie de proposiciones de geometría plana, algunas muy elementales, pero otras con interesantes equivalencias entre figuras circulares que es muy posible que sean originales del geómetra de Siracusa.

Apolonio de Perga

El tercero, cronológicamente, de los grandes matemáticos griegos de la edad de oro, es Apolonio de Perga.

Se sabe que estudió en Alejandría, donde probablemente también enseñó y que residió en Éfeso y en Pérgamo, ciudad esta última que constituyó otro de los centros culturales del mundo griego. De todos modos debe considerarse posterior a Arquímedes ubicándose su mejor época a fines del siglo III a. C. o comienzos del II.

Así como el nombre de Euclides está indisolublemente ligado a sus *Elementos,* el nombre de Apolonio lo está con el de *Cónicas,* su escrito más famoso y de cuyos ocho libros se poseen: los cuatro primeros en su texto original, los tres siguientes mediante traducciones árabes y el último, totalmente perdido, por noticias de Pappus y una reconstrucción parcial del astrónomo Halley.

En el libro primero, Apolonio define, en general, las superficies cónicas de directriz circular y vértice un punto no perteneciente al plano de la directriz, y demuestra algunas propiedades de estas superficies, entre las cuales la existencia de dos series de secciones circulares en los conos oblicuos. Estudia luego los tres tipos de secciones que se obtienen al cortar el cono con un plano que no pase por el vértice e introduce los actuales nombres: Parábola, elipse e hipérbola. Apolonio denomina hipérbola a una de las dos ramas de esta curva, al denominar secciones opuestas a esas dos ramas. En cambio, introduce el concepto de pares de hipérbolas conjugadas para nuestro par de hipérbolas de iguales asíntotas y ejes.

De los ocho libros, cuyo contenido resume Apolonio en la introducción al libro primero dedicado a un Eudemo de Pérgamo, los primeros cuatro abarcan la teoría general de las cónicas y sus propiedades más importantes, al completar en este campo la obra de Arquímedes. En cambio, los libros siguientes se refieren a propiedades especiales y deben considerarse más bien como monografías.

Algunas indicaciones que aparecen en las introducciones a los dos primeros libros, pueden dar alguna idea de cómo se trasmitían los conocimientos en su época. Así dice Apolonio a Euderno en la introducción al libro segundo: "He puesto en manos de mi hijo Apolonio el libro II de *Cónicas* que he escrito para que te lo entregue. Léelo con cuidado y comunícaselo a quien se interese por él. Hazlo conocer también al geómetra Filónides que te he presentado en Éfeso, si por casualidad llega a Pérgamo".

Además, por comentaristas posteriores en especial Pappus, se atribuyen a Apolonio otros escritos matemáticos: 1) un grupo de problemas semejante al anterior: *Sobre las secciones determinadas; Sobre las secciones de áreas;* 2) un segundo grupo de problemas, vinculados en general con los lugares geométricos. Cabe recordar que los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres tipos: lugares planos, que se resolvían con rectas y circunferencias; lugares sólidos, que se resolvían mediante cónicas; y lugares lineales, que exigían otras líneas para su solución. Entre los escritos atribuidos a Apolonio y vinculados con los lugares, figuran: uno *Sobre los lugares planos* con distintos problemas y otro denominado *Sobre los contactos,* donde se estudian muchos casos particulares de un problema que, generalizado, toma el nombre de problema de Apolonio y que consiste en determinar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas; 3) se atribuyen también a Apolonio escritos sobre los temas: *Elementos* de Euclides, sobre los poliedros regulares, la cuadratura del círculo, sobre el problema de Délos y sobre sistemas de numeración.

Edad Media (siglos XIV al XVI)

En las enciclopedias romanas, además de las reglas para la determinación exacta del área del cuadrado, del rectángulo y del triángulo rectángulo, se encuentra una fórmula aproximada para el área del triángulo equilátero que supone tomar para 3 el valor bastante aproximado 26/15; otra para los cuadriláteros no rectángulos, que no es sino la antigua fórmula egipcia que adopta como área el producto de las dos semisumas de los lados opuestos; y una para el área del círculo tomando para π el valor de Arquímedes ($^{22}/7$). Agreguemos que los agrimensores romanos admitían como bastante exacta la determinación del área de una ciudad de forma irregular, sin más que medir su perímetro.

A la primera mitad del siglo XIV pertenece el teólogo inglés Thomas Bradwardine, que se ocupó de mecánica y de matemática. El más original de sus escritos matemáticos es una *Geometría especulativa*, donde considera los polígonos estrellados que no figuran en los *Elementos*, pero que hicieron su presencia en los comentarios de Boecio y en las versiones de Adelardo de Bath y de Campano. Bradwardine los crea sistemáticamente, mediante prolongación de los lados de los polígonos regulares de orden inferior (los polígonos de primer orden son los convexos) y da correctamente la fórmula para la suma de los ángulos internos de los polígonos estrellados de orden inferior (Campano la había dado para el pentágono estrellado).

Discípulo de Fiero della Francesca y vinculado con el mundo de artistas y técnicos del Renacimiento italiano, fue Luca Pacioli, a quien se debe, entre otras obras, una *Summa de Arithmetica, Geometría, Proportioni et Proportionalitá,* impresa en 1494, de carácter enciclopédico y resumen de todo el saber matemático de la época, cuyo objeto fue poner ese conocimiento a disposición de los técnicos, artistas y comerciantes, por lo cual la escribió en lengua vulgar, aunque con más precisión habría que decir en una mezcla de latín, de italiano y de todos los dialectos de las numerosas regiones que Pacioli visitó o en las que enseñó.

La *Summa* de Pacioli se compone de cinco partes, de las cuales la primera se ocupa de aritmética y de álgebra, las tres siguientes de aplicaciones al comercio, mientras que la última está dedicada a la geometría.

La quinta parte de la *Summa* se dedica a la geometría y en ella se exponen las propiedades, sin demostraciones, relativas a figuras planas y del espacio con sus áreas y volúmenes. Más original es el final del libro que comprende 100 problemas geométricos.

El Renacimiento

Frente a los progresos de la aritmética, del álgebra y de la trigonometría, sin duda notables, no cabe registrar iguales progresos en la geometría del siglo XVI, si se exceptúan las versiones y comentarios de las antiguas obras geométricas griegas, y la consolidación de la perspectiva como nueva rama de la geometría.

Es explicable el escaso interés que el siglo demostró por la geometría en sí. Por un lado, no era fácil superar los tratados perfectos de un Euclides, de un Arquímedes, de un Apolonio, que a través de versiones, ediciones y comentarios se difundieron durante el siglo. Por otro lado, la preferente atención que el siglo dedicaba a los problemas particulares y a las aplicaciones no dejaba mucho campo a la geometría pura, sin olvidar que muchos problemas geométricos se resolvían más fácilmente con el álgebra.

El Siglo XVII

Descartes y la geometría analítica

Ya ha tomado cuerpo la expresión revolución científica para señalar el proceso que en el campo científico se inicia en Occidente en las primeras décadas del siglo XVII. Para la matemática, ese proceso fue singularmente favorable y fecundo: a su abrigo nace una notable conjunción del álgebra con la geometría, que tomará más tarde el nombre de geometría analítica, por si eso no fuera bastante, el siglo asiste al nacimiento de la teoría de números, del cálculo de probabilidades y de la geometría proyectiva.

La primera, cronológicamente, de las nuevas ramas matemáticas del siglo XVII es la actual geometría analítica, cuyo advenimiento se vincula con la obra de Rene Descartes, que en este campo está ligada a la de sus predecesores y contemporáneos, aunque tal vinculación es difícil de establecer, en parte por la escasa propensión de Descartes a reconocer métodos ajenos, haciendo casi imposible averiguar en sus escritos cuáles autores conoce, y, en parte, por el lugar y el papel que atribuye a la matemática en el campo de los conocimientos. Una de las características del pensamiento cartesiano es lo que se ha llamado su afán cósmico, es decir, un anhelo de generalización y de absoluto, que le hace perseguir la realización de una física general, capaz de explicar completamente todo lo que el universo encierra, en la tierra y en los cielos, meta que cree alcanzar con sus *Principios de la filosofía* de 1644, aunque ese afán es visible desde 1619, fecha de sus primeros descubrimientos (entre los papeles de Descartes se encuentra un breve escrito con la frase inicial: "10 de noviembre de 1619, cuando lleno de entusiasmo, *i* descubrí los fundamentos de una ciencia admirable").

Es en virtud de ese afán que en Descartes la matemática no tiene un fin en sí: la considerará como modelo de la ciencia a la que dictará sus preceptos lógicos, servirá por eso admirablemente, a manera de cobayo, para ensayar su método, pero no será más que eso, un medio, un método. El uso que Descartes hace de los términos matemática y matemáticas da cuenta de este hecho. En efecto, Descartes habla de la segunda cuando se refiere a sus estudios escolares y destaca entre ellas el álgebra y la geometría, reconociendo en estas ramas cierta sencillez y prioridad respecto de las demás, aunque para él la geometría "está siempre tan ligada a consideraciones sobre las figuras que no pueden ejercer el intelecto sin cansar mucho la imaginación", y en el álgebra "se está tan sujeto a ciertas reglas y ciertas letras que en lugar de una ciencia que eduque a la mente se convierte en un arte oscuro y confuso que la turba"[vi]. De ahí que la vinculación que establecerá entre ambas ramas será precisamente para tomar "lo mejor del análisis geométrico y del álgebra, corrigiendo los defectos del uno por el otro".

Pero, más allá de estas matemáticas, Descartes aspira a una ciencia única, a una ciencia integral, ciencia que será la "matemática universal" —ahora en singular, restituyendo al vocablo su valor etimológico— que ha de explicar "todo aquello que pueda preguntarse acerca del orden y de la medida, no importando que la medida deba buscarse en números, figuras, astros, sonidos o cualquier otro objeto"; matemática universal de la cual las matemáticas constituirán —como él dice— la envoltura.

Aunque en la correspondencia y en los papeles póstumos de Descartes figuran cuestiones matemáticas, el único escrito matemático que publicó es *Géométrie,* tercero y último de los ensayos que figuran como apéndices del célebre *Discurso del método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. Además La Dióptrica, Los Meteoros y La Geometría, que son ensayos de este método,* aparecido en 1637. Ya en el primer capítulo del Libro primero de los tres que componen la *Geometría,* habla claramente de aquella unificación al titular su primer parágrafo: Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría[vii].

Esa unificación la lleva a cabo mediante un recurso muy simple. En efecto, una diferencia esencial entre los elementos geométricos (segmentos) y los elementos algebraicos (letras), que impedía su comparación, consistía en que mientras con las letras pueden realizarse operaciones aritméticas en número ilimitado obteniéndose nuevas combinaciones de letras, con los segmentos tales combinaciones quedan limitadas al caso en que la dimensión del resultado es 1, 2, 3, pues en los otros casos ese resultado deja de ser inteligible, es decir, de ser expresable en términos de figuras geométricas: líneas, superficies, sólidos.

[vi] Rey Pastor, Julio y Babini, José. Historia de la Matemática Volumen II. Editorial Gedisa. España. 2000, pp. 43

[vii] Rey Pastor, Julio y Babini, José. *Historia de la Matemática* Volumen II. Editorial Gedisa. España. 2000, pp.45

De acuerdo con tales principios, Descartes inicia su *Geometría* al indicar cómo se realizan con segmentos las operaciones: Suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada. Señalada a continuación, al referirse a Cómo pueden emplearse letras en geometría, el significado de la unidad sobreentendida con el siguiente ejemplo: Si ha de extraerse la raíz cúbica de $a^2 b^2 — b$, debe entenderse que el primer término está dividido una vez por la unidad y el segundo término multiplicado dos veces por la unidad.

Pasa luego a la resolución gráfica de la ecuación de segundo grado, de la cual da dos procedimientos distintos, según tenga la ecuación una o dos raíces positivas. En el caso de raíces imaginarias el problema propuesto es imposible.

El primer libro termina con un ejemplo tomado de Pappus en el cual Descartes muestra, con legítimo orgullo, la excelencia de su método al resolver un problema que los antiguos sólo habían resuelto en casos particulares. Como en la resolución de ese problema pueden presentarse rectas o circunferencias (lugares planos), cónicas (lugares sólidos) u otra clase de curvas no conocidas por los antiguos, Descartes dice que antes de considerar el caso general "es necesario que diga algo en general de la naturaleza de las líneas curvas"[viii]. Tal es el objeto del segundo libro, en el cual, después de criticar la clasificación de los antiguos en problemas planos, sólidos y lineales, introduce una clasificación poco afortunada de las curvas planas algebraicas en géneros (en su *Geometría* no figuran curvas trascendentes, que denomina mecánicas), al dar a continuación dos métodos, con sus correspondientes trazados mecánicos, para obtener curvas de género cada vez mayor. Con notaciones actuales las curvas obtenidas por esos métodos tienen por ecuaciones, respectivamente, $x^{4m} = a^2 (x^2 + y^2)^{2n-1}$ y $xy = (y - a) Y$, donde Y es la ordenada de la curva de género inmediato inferior. Cuando Y es una función lineal se obtiene una hipérbola que, para Descartes, es entonces una curva de primer género, mientras que, si Y es la ordenada de una parábola de ecuación $y = (x^2 - b^2) : b$, se obtiene para $a = 2b$ la hoy llamada parábola cartesiana, curva de tercer grado que resuelve el problema de Pappus para el caso particular de cinco rectas, que los antiguos no habían resuelto. Un segundo problema, en el que Descartes pone a prueba su método, se refiere a la determinación de las

[viii] Rey Pastor, Julio y Babini, José. *Historia de la Matemática* Volumen II. Editorial Gedisa. España. 2000, pp.46

normales a las curvas planas, “problema que me atrevo a decir que es el más útil y general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría"[ix]. Se advierte la razón de esta afirmación cuando se piensa en la concepción cartesiana de la matemática, pues este problema se aplica, unas páginas más adelante, a la construcción de las normales a ciertos óvalos (hoy llamados *óvalos de Descartes),* que encuentran aplicación en su *Dióptrica.*

Si en la *Geometría* de Descartes la aplicación del álgebra a la geometría aparece más bien como un método, en otro matemático francés del siglo XVII, Fierre Fermat, esa aplicación se presenta más naturalmente como un recurso técnico. Profundo conocedor de las obras clásicas griegas: Euclides, Apolonio, Diofanto, es probable que el estudio de Apolonio, de quien reconstruyó obras perdidas, tuviera como consecuencia la memoria *Ad locos planos et solidos isagoge,* escrita antes de 1637 pero publicada póstumamente en 1679, donde aparecen los principios fundamentales del método de las coordenadas, si no en forma tan extensa como en la *Geometría* de Descartes, por lo menos en forma tan clara o más. Lo mismo que Descartes, toma un eje de referencia y en el un punto fijo que considera el origen de segmentos variables, a partir de cuyos extremos toma otros segmentos variables, en general perpendicularmente, de manera que este segundo segmento dibujará un lugar diferente según sea la relación algebraica que vincula a los dos segmentos variables.

En esa memoria, aparece la ecuación de la recta, que no figura explícitamente en Descartes. Si la recta pasa por el origen Fermat, que sigue el simbolismo de Viéte, escribe *D* in *A* aeq. *B* in E, es decir $ax = by$, mientras que en el caso general su notación equivale a $c^2 — ax = by$. Igualmente, da la ecuación de la circunferencia, con centro en el origen o en un punto cualquiera, y de las cónicas, elementos con los cuales resuelve algunos problemas geométricos relativos a lugares planos y sólidos. En conexión con esos problemas, Fermat estudia la resolución geométrica de ecuaciones mediante la intersección de curvas.

[ix] Rey Pastor, Julio y Babini, José. *Historia de la Matemática* Volumen II. Editorial Gedisa. España. 2000, pp.47

Debido a que la *Geometría* de Descartes se publicó como último apéndice de una obra en francés editada en Holanda, su difusión no fue inmediata. Se logró, en gran parte, debido a los esfuerzos del profesor holandés Franciscus van Schooten, que en 1649 dio la versión latina de la *Geometría* con comentarios y se dedicó después a difundir y perfeccionar el método de coordenadas. Entre otros perfeccionamientos cabe mencionar las fórmulas de transformación de coordenadas, dadas por el mismo Schooten, y la primera idea de coordenadas en el espacio, que aparece en un escrito de Philippe de La Hire de 1679; aunque no se desarrolla hasta mediados del siglo XVIII, sistematizándose así la nueva rama de la matemática denominada, más tarde, geometría analítica, como un saber matemático propio y distinto, tanto de la geometría de los antiguos como del álgebra de los árabes.

Ver Complemento Digital

Conclusiones

Cuando me propuse realizar este trabajo de tesis, el desafío que se presentaba ante mí, tenía una doble cara, por un lado se trataba de desarrollar un material que, en términos técnicos y tecnológicos, resultara riguroso e impecable; pero, por el otro, había que cuidar el marco teórico desde el que se abordaba el problema de enseñanza de las matemáticas.

Así, mi aprendizaje fue doble, logré desarrollar de manera muy satisfactoria la herramienta que me había propuesto y logré resolver la enorme cantidad de problemas a los que me enfrenté, por ejemplo, aprendí programación. Además, logré entender cabalmente ciertos problemas a los que se enfrentan aquellos que se dedican a la didáctica de las matemáticas: Llegar al nivel de un estudiante de bachillerato me costó más trabajo del que me había imaginado.

Realmente me siento satisfecha con el trabajo que hice y me da mucho gusto el pensar que éste será utilizado por los estudiante de bachillerato y no se quedará guardado en un cajón. Pienso que en este trabajo apliqué distintas facetas de mi carrera de matemáticas; mis conocimientos de geometría analítica, mis conocimientos de programación, los conocimientos adquiridos en los seminarios de enseñanza de las matemáticas y muchos más.

Realmente espero que esta tesis contribuya, aunque sea como un pequeño grano de arena, al desarrollo de nuevas estrategias de enseñanza que permitan que nuestros jóvenes se acerquen de manera gustosa a las matemáticas.

Bibliografía impresa

Collette, Jean Paul *Historia de las Matemáticas* Tomo I y II. Siglo XXI Editores. España. 2003.

Rey Pastor, Julio y Babini, José. *Historia de la Matemática* Tomo I y II. Editorial Gedisa. España. 2000.

Anfossi A. *Geometría Analítica* Editorial Progreso. México D.F. 1972.

Carbonel, Santiago. *Geometría Analítica*. Textos Universitarios S.A. Novena Edición Manuel Porrúa, S.A. 1975.

Bibliografía en Internet

http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm de Guzmán, Miguel. **"Enseñanza de las Ciencias y la Matemática"**.

http://www.organizacionessociales.segob.gob.mx/UAOS-Rev4/nueva_pedagogia.html Barraza Ozuna, Alan Josué. **"Nueva Pedagogía"**.

http://www.sectormatematica.cl/articulos/aldeag.htm Raúl Gouet, Roberto Araya, Pablo Dartnell, María Leonor Varas y Nancy Lacourly. **"Enseñar matemáticas en la aldea global"**.