UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“UNA GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON EN CINCO DIMENSIONES”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER

México, D.F. 2007

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
Romero
Sanpedro
Juan Manuel
01-75-972-34-999
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
091562072

2. Datos del tutor
Dr
José David
Vegara
Oliver

3. Datos del sinodal 1
Dr
Rodolfo Patricio
Martínez
y Romero

4. Datos del sinodal 2
Dr
Ángel
Prieto
Ruiz

5. Datos del sinodal 4
Dr
Miguel
Socolovsky
Vajovsky

6. Datos del sinodal 5
Dr
Genaro
Toledo
Sánchez

7. Datos del trabajo escrito
Una generalización de la ecuación de Klein-Gordon en cinco dimensiones
87 p
2007

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi madre Lorenza Sanpedro y la memoria de mi amigo Froylan Amado.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. José David Vegara por darme la oportunidad de realizar mi tesis bajo su dirección, así como por todos sus comentarios y sugerencias.

Agradezco a los doctores Rodolfo Patricio Martínez y Romero, Ángel Prieto Ruiz, Miguel Socolovsky Vajovsky y Genaro Toledo Sánchez por revisar esta tesis y por todos todos sus comentarios.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Ciencias Nucleares por todas las oportunidades y facilidades dadas para mi formación académica.

A mis compañeros de la Facultad de Ciencias especialmente a Ricardo Luengas, Roberto Agueda, Alma Heredia, Raúl Velázquez, Raúl Anaya, Marta, etc por brindarme su amistad y compartir sus conocimientos y experiencias.

En especial agradezco el apoyo económico dado por mi familia para completar este trabajo y la carrera.

Índice general

0.1. Introducción

Un resultado importante de la mecánica cuántica es que cantidades físicas como la energía y el momento angular tienen espectro discreto. De hecho con la hipótesis de Planck sobre los quantum de luz nace esta teoría. Inicialmente la explicación de estos espectros discretos se dio mediante reglas como las de Bohr-Sommerfeld, que son un límite semiclásico de la mecánica cuántica. Sin embargo, la explicación de estos espectros se da de manera natural con las ecuaciones de Heisenberg (o la ecuación de Schrödinger), es decir, al asociar operadores no conmutativos a cantidades del espacio fase. Por ejemplo, la energía se cuantiza debido a la dinámica cuántica, a través del Hamiltoniano. Sin embargo, otras cantidades, como el espín, no representan propiedades dinámicas, si no cantidades propias de las partículas. La cuantización del espín no es consecuencia de una ecuación dinámica si no del álgebra de los operadores que representa esta cantidad.

Hasta ahora no existe una teoría cuántica de la gravedad. Sin embargo, algunos resultados sugieren que la versión cuántica de la gravedad implica la cuantización de objetos geométricos. Por ejemplo, mediante argumentos heurísticos se puede mostrar que el área del horizonte de eventos de un hoyo negro debe tener espectro discreto. La demostración se basa en el principio de Ehrenfest [1], el cual establece que a todo invariante adiabático clásico le corresponde un espectro discreto en su versión cuántica. Así, como esta área es proporcional a la entropía del hoyo negro, que es un invariante adiabático clásico, Bekenstein propone que debe tener un espectro discreto a nivel cuántico de la forma [2, 3]

$$A_n \approx \gamma l_p^2 n, \quad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

Aquí γ es una constante de proporcionalidad y $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$ es la longitud de Planck. Se espera que la versión correcta de la gravedad cuántica sea consistente con esta propuesta. Otro indicio de que la gravedad cuántica implica objetos geométricos discretos se encuentra en la gravedad en $(2+1)$ dimensiones. Este sistema es interesante pues la gravedad en esa dimensionalidad sí se puede cuantizar [4]. G. 't Hooft mostró que en esta teoría de manera efectiva se obtiene un espacio-tiempo discreto que es consistente con la simetría de Lorentz [5]. Este espacio tiempo es el llamado espacio de Snyder.

El espacio de Snyder tiene una larga historia que inicia con Heisenberg en 1930. Heisenberg pensaba que si el espacio tiempo fuera no conmutativo, es decir si los operadores $\hat{x}^\mu$ satisfacían relación del tipo $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \neq 0$, se podrían eliminar divergencias de teorías cuánticas de campos [6]. Heisenberg no trabajó en el tema, pero se la comentó a Pauli, quien le planteó la idea a Oppenheimer. Oppenheimer puso a trabajar a su alumno H. Snyder en el tema. Finalmente en 1947 Snyder publicó el primer trabajo sobre espacios no conmutativos [7]. Debido al éxito de otros métodos para eliminar infinitos en teoría de campos, este trabajo fue olvidado. Sin embargo, por los resultados de 't Hooft, antes mencionados, se puede esperar que la gravedad cuántica en espacios de dimensión mayor a $(2+1)$ implique espacios del tipo Snyder. Cabe señalar que existen algunas propuestas alternativas para cuantizar la gravedad basadas en el espacio de Snyder [8].

Este trabajo consta de dos temas relacionados entre sí. Uno de estos temas es la construcción de sistemas mecánicos que al cuantizarlos de un espacio tiempo tipo Snyder. El otro es la construcción de espacios tipos Snyder, es decir, discretos y consistentes con la simetría de Lorentz.

Sobre el primer tema debemos notar que los sistemas mecánicos usuales tienen los paréntesis de Poisson $\{x^\mu, x^\nu\} = 0$, por lo que al cuantizar se obtiene un espacio tiempo conmutativo. Así, para obtener espacio no conmutativos se debe recurrir a sistemas mecánicos especiales. En particular deben ser sistemas mecánicos que permitan deformar los paréntesis de Poisson, es decir, la estructura simpléctica usual. Los sistemas que permiten este tipo de deformaciones son los que tienen libertad de norma. En estos sistemas, para que la dinámica sea consistente, se deben cambiar los paréntesis de Poisson por los llamados paréntesis de Dirac [9]. Así, para cuantizar el sistema de forma canónica se deben cambiar los paréntesis de Dirac por conmutadores. Los paréntesis de Dirac dependen del sistema y de la libertad de norma, por lo que se pueden manipular algunos parámetros de tal forma que se obtengan paréntesis de Dirac del tipo $\{x^\mu, x^\nu\}^* \neq 0$. De donde, al cuantizar el sistema se tendría un espacio no conmutativo. En este trabajo, estudiamos de forma general los sistemas mecánicos con libertad de norma para posteriormente ver en que forma se pueden obtener espacios no comutativos. Se estudian dos sistemas en particular, la partícula libre relativista y una generalización de ella. En estos sistemas la libertad de norma está dada por la libertad de elegir el tiempo. Por lo general para estudiar la partícula libre relativista se elije el tiempo propio o el tiempo coordenado. Sin embargo, existen más opciones y algunas de ellas implican espacios no conmutativos. En particular se ha mostrado que se puede elegir el tiempo de tal forma que los paréntesis de Dirac sean la versión clásica del espacio de Snyder [10]. Esta realización del espacio de Snyder tiene un problema, pues los paréntesis de Dirac dependen del inverso de la masa de la partícula. Así, para partículas sin masa el sistema pierde sentido. En este trabajo propondremos una generalización de la partícula relativista la cual permite una realización de espacio de Snyder que tiene sentido aún para partículas sin masa. También veremos que esta generalización de la partícula relativista permite una realización de un espacio tipo Snyder, el cual es no conmutativo, discreto en el tiempo y consistente con la simetría de Lorentz. Basados en estos resultados propondremos una acción general para sistemas mecánicos en espacios no conmutativos tipo Snyder.

Cabe señalar que la generalización de la partícula relativista con que trabajamos da una generalización de la ecuación de Klein-Gordon. Para obtener esta ecuación seguimos la referencia [11], sin embargo esta fue originalmente propuesta por E. C. G. Stueckelberg [12]. Posteriormente fue redescubierta independientemente por Fock [13] y Y. Nambu [14]. En ella trabajó R. P. Feynman [15] y más recientemente L. P. Horwitz [16] y J. R. Fanchi [17]. Una de las propiedades interesantes de esa generalización de la ecuación de Klein-Gordon es que permite cuantizar la masa. En particular veremos que bajo el potencial de un oscilador armónico se tiene un espectro de la forma

$$M_n^2 \propto (n + l + 3/2)\,, \quad n, l, = 1, 2, ... \tag{2}$$

Esto es interesante, pues el área de un hoyo negro es de la forma $A \propto M^2$, esto implica que esta área se cuantiza de forma similar a (1).

Para el segundo tema estudiaremos la construcción original del espacio de Snyder. Partiendo de esta, veremos que introduciendo una coordenada temporal extra es posible construir un nuevo espacio tiempo no conmutativo. Este espacio es discreto en el tiempo, pero continuo en las coordenadas espaciales. Este espacio también es consistente con el grupo de Lorentz. Cabe mencionar que C. N. Yang [18] mostró que el espacio de Snyder no es compatible con el grupo traslacional, por lo que construyó una versión modificada del espacio de Snyder que si es compatible con este grupo. Nosotros veremos que es posible construir dos nuevos espacio tipo Yang que son no conmutativos; discretos en el tiempo; continuos en las coordenadas espaciales; compatibles con el grupo de Lorentz y el de traslaciones.

El trabajo está ordenado de la siguiente forma. En el primer capítulo hacemos un estudio general de los sistemas mecánicos con libertad de norma, el llamado método de Dirac. En el segundo capítulo estudiamos la partícula libre relativista y veremos que es posible elegir el tiempo de tal forma que se induzca un espacio no conmutativo. También daremos la generalización de la partícula libre relativista y se obtienen realizaciones de espacios no conmutativos tipo Snyder. En el tercer capítulo mostramos la construcción de los tres nuevos espacios no conmutativos discretos. En el cuarto capítulo mostramos la generalización de la ecuación de Klein-Gordon. En el quinto capítulo se dan las conclusiones.

Los resultados presentados en los capítulos 2 y 3 se publicaron en la referencia [19].

Capítulo 1

Método de Dirac

1.1. Introducción

En este capítulo haremos una introducción al estudio de los sistemas mecánicos con libertad de norma. El análisis de estos sistemas se debe originalmente a Dirac [9]. Actualmente existe una amplia literatura sobre el tema, sin embargo aún existen preguntas sin responder. Nuestro versión se basa en las notas de Dirac [9] y en [20]. Otras referencias que tratan el tema son [21, 22, 23, 24].

1.2. Principio de acción

Para iniciar veamos el principio de acción. Recordemos que si tenemos una partícula de masa m en un potencial $V(x)$ la segunda ley de Newton establece que la función $x(t)$, que describe la trayectoria de la partícula, satisface la ecuación

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}, \tag{1.1}$$

que es la segunda ley de Newton. Por otra parte, consideremos la funcional

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x),$$

e impongamos la igualdad

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Como vemos esta igualdad coincide con Eq. (1.1). Esto no es una casualidad, se debe a un principio fundamental, el principio de acción.

Supongamos que tenemos un sistema con n grados de libertad descrito por las funciones

$$q_i(t) \qquad \text{con} \qquad i = 1, 2..., n, \tag{1.2}$$

las cuales nombraremos coordenadas generalizadas. El principio de acción establece que la trayectoria, $q_i(t)$, que sigue el sistema para pasar de la posición q_{i0} a la posición q_{i1} en el tiempo $t_0 - t_1$, es un extremo de la funcional

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dtL(q_i(t), \dot{q}_i(t)). \tag{1.3}$$

L es una funcional que depende del espacio $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ que supondremos conocida. A L le llamaremos Lagrangiana y a $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ espacio de configuraciones.

Así, según el principio de acción, la trayectoria del sistema es un extremo de la funcional Eq. (1.3) que cumplen las condiciones de borde

$$q_i(t_1) = q_{i1}, \qquad q_i(t_2) = q_{i2}. \tag{1.4}$$

Supongamos que $\{q_i(t)\}$ extrema a la acción Eq. (1.3) y satisface las condiciones de borde (1.4). Ahora, consideremos una trayectoria de la forma

$$q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t), \tag{1.5}$$

aquí $\delta q_i(t)$ es una variación infinitesimal que cumple

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \tag{1.6}$$

y definamos

$$\delta S = S' - S = \int_{t_0}^{t_1} dtL(q_i'(t), \dot{q}_i') - \int_{t_0}^{t_1} dtL(q_i(t), \dot{q}_i). \tag{1.7}$$

Entonces, desarrollando en serie de potencias de δq_i a $L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t))$ y considerando sólo términos de primer orden, obtenemos

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right). \tag{1.8}$$

Además, como

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i, \tag{1.9}$$

se tiene

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.10}$$

Teniendo en cuenta que las funciones $\delta q_i(t)$ son variaciones arbitrarias que cumplen las condiciones a la frontera Eq. (1.5), se cumple $\delta S = 0$ sólo si

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \tag{1.11}$$

Por lo tanto, si las funciones $q_i(t)$ describen la trayectoria del sistema, deben satisfacer Eq. (1.11) con las condiciones de borde Eq. (1.4). A las ecuaciones (1.11) se les llama de **Euler-Lagrange**.

El principio de acción es extremadamente importante en la física. Sin embargo, se deben tener en cuenta algunos puntos. Por ejemplo, dado un sistema de ecuaciones de movimiento no siempre existe una Lagrangiana de la cual se puedan deducir. Además si existe la Lagrangiana esta no necesariamente es única, ver [25] y sus referencias. También se puede notar que el principio de acción de ninguna manera nos garantiza que exista solución del sistema de ecuaciones, tampoco que la solución sea única. Por ejemplo, consideremos la Lagragiana

$$L = 3t\dot{q} + q.$$

Eq. (1.11) para este caso es: 1=3.

Veamos el ejemplo concreto de la mecánica clásica. La Lagrangiana en este caso es

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^i \dot{q}_i - V(q), \tag{1.12}$$

por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i},$$

que es la segunda ley de Newton.

Desarrollando Eq. (1.11) obtenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j. \tag{1.13}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange son un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden. Todo sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden se puede plantear como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Para el caso particular de las ecuaciones de Euler-Lagrange, definiendo las variables

$$z^i = \dot{q}^i, \tag{1.14}$$

podemos escribir Eq. (1.13) como

$$\dot{z}^j \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial z^j} + z^j \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{1.15}$$

$$z^i = \dot{q}^i. \tag{1.16}$$

Note que solo estamos cambiando del espacio $(q^i, \dot{q}^i)$ al espacio (q^i, z^i). Estas no son las únicas ecuaciones de primer orden equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por ejemplo, si definimos los momentos canónicos como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{1.17}$$

las Eqs. (1.11) tienen la forma

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^i}, \tag{1.18}$$

$$\dot{q}^i = z^i(q, p). \tag{1.19}$$

Ahora pasamos del espacio $(q^i, \dot{q}^i)$ al espacio (q^i, p_i), a este último se le llama espacio fase. Es claro que este cambio de coordenadas se puede hacer solo si es invertible la matriz Jacobiana

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \tag{1.20}$$

Sin embargo, independientemente de la forma de esta matriz, para cualquier Lagrangiana podemos definir los momentos canónicos Eq. (1.17). De Eq. (1.13) se puede observar que las aceleraciones, $\ddot{q}^i$, se pueden poner en términos de las velocidades, las coordenadas y el tiempo sólo cuando (1.20) es invertible.

Ahora veremos una función interesante que se puede definir en el espacio fase. Independientemente de que la matriz (1.20) sea invertible, siempre podemos definir la cantidad

$$H = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}), \tag{1.21}$$

que llamaremos Hamiltoniana. Note que si ocupamos la Lagrangiana Eq. (1.12) la Hamiltoniana que se obtiene representa la energía. Haciendo una variación en Eq. (1.21) y tomando en cuenta Eq. (1.11) y Eq. (1.17), tenemos que

$$\delta H = \delta p \cdot \dot{q} - \dot{p} \cdot \delta q. \tag{1.22}$$

Por lo tanto, para cualquier Lagrangiana, la Hamiltoniana Eq. (1.21) sólo depende del espacio fase, (q^i, p_i). Entonces, Eq. (1.22) también se puede escribir como

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i. \tag{1.23}$$

Igualando Eq. (1.22) con Eq. (1.23) obtendremos

$$\delta p_i \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q^i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = 0. \tag{1.24}$$

Si la matriz Eq. (1.20) es invertible las variables q^i y p_i son independientes, entonces Eq. (1.24) implica

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1.25}$$

A las Eqs. (1.25) se les llama **ecuaciones de Hamilton**. Cuando Eq. (1.20) es invertible, se puede verificar que las ecuaciones de Hamilton Eqs. (1.25) son completamente equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange Eqs. (1.11).

Las ecuaciones de Hamilton también se pueden obtener de un principio variacional. En efecto, definamos la acción Hamiltoniana como

$$S_H = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{q} \cdot p - H(q, p)], \tag{1.26}$$

entonces, como las variables (q^i, p_i) son independientes, al extremar esta funcional con las condiciones de borde Eq. (1.4), se obtiene Eq. (1.25) con las condiciones de borde Eq. (1.4).

Como acabamos de ver, si la matriz W_{ij} no es singular, podemos escribir las ecuaciones de movimiento en el espacio de configuraciones o en el espacio fase. Sin embargo, el espacio fase tiene propiedades que no tiene el espacio de configuraciones. En particular, en el espacio fase se puede definir una estructura algebraica no trivial, veamos como definir esta estructura. Supongamos que F

es una función del espacio fase, $F = F(q,p)$, por lo que la evolución de F está dada por

$$\dot{F} = \dot{q}^i \frac{\partial F}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1.27}$$

Entonces, si tenemos dos funciones del espacio fase $F(q,p)$ y $G(q,p)$, podemos definir

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}, \tag{1.28}$$

que son los paréntesis de Poisson. De donde, Eq. (1.27) se puede escribir como

$$\dot{F} = \{F,H\}. \tag{1.29}$$

En particular las ecuaciones de Hamilton Eqs. (1.25) se pueden escribir de la forma

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \tag{1.30}$$

Para las variables base el espacio fase se tiene

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \text{y} \qquad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \tag{1.31}$$

Además, se puede probar que se cumple

$$\begin{aligned}
\{F,G\} &= -\{G,F\}, & (1.32)\\
\{F,G+M\} &= \{F,G\} + \{F,M\}, & (1.33)\\
\{F,GM\} &= \{F,G\}M + \{F,M\}G, & (1.34)\\
\{F,\{G,M\}\} &= -\{G,\{M,F\}\} - \{M,\{F,G\}\}. & (1.35)
\end{aligned}$$

Las propiedades (1.32)-(1.35) definen un álgebra de Poisson.

Las propiedades algebraicas de los paréntesis de Poisson son importantes en la física. Por ejemplo, a nivel cuántico las coordenadas en el espacio fase son sustituidas por operadores en el espacio de Hilbert del sistema cuántico y las funciones del espacio fase son sustituidas por arreglos de estos operadores. Además, el álgebra de los operadores cuánticos es una copia del álgebra de Poisson del sistema clásico. Por lo tanto, es importante tener bien definida la versión Hamiltoniana de un sistema clásico. Además de la mecánica cuántica, para otras áreas de la Física es más natural expresar sus principios en términos de variables del espacio fase. Por ejemplo, la física estadística expresa sus fundamentos tomando como base las variables del espacio fase y no existe una formulación Lagrangiana de esta teoría. Por ello es importante entender cualquier sistema mecánico desde el punto de vista Hamiltoniano.

1.3. Lagrangianas Singulares

Ahora iniciaremos el estudio de los sistemas tales que la matriz W_{ij} definida en Eq. (1.20) es singular. Antes de iniciar un estudio general primero veamos un ejemplo concreto y observemos algunas de sus características. Consideremos el sistema

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2. \tag{1.36}$$

Los momentos canónicos son:

$$p_y = 0, \qquad p_x = \dot{x} - y, \tag{1.37}$$

claramente se cumple que det W_{ij}=0, por lo que tenemos un sistemas singular. Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{y} - \ddot{x} = 0, \qquad y - \dot{x} = 0. \tag{1.38}$$

Podemos ver que estas ecuaciones no son independientes y, por lo tanto, no pueden tener soluciones con condiciones iniciales independientes. Las únicas condiciones iniciales que podemos pedir son de la forma

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad \dot{x}(0) = v_{x0} = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_{y0}. \tag{1.39}$$

La solución del sistema de ecuaciones con las condiciones Eq. (1.39) está dada por

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + y_0\tau + \frac{1}{2}v_{y0}\tau^2 + \int_0^\tau d\tau\psi(t), \\ y(\tau) &= y_0 + v_{y0}\tau + \psi(\tau), \end{aligned} \tag{1.40}$$

con $\psi(\tau)$ una función arbitraria que cumple $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, por ejemplo $\psi(\tau) = a\tau^n$ con $n >= 2$. Esto nos indica que la "trayectoria" del sistema no es única.

Otra característica del sistema es que la acción Eq. (1.36) es invariante bajo las transformaciones "de norma"

$$x \longmapsto x' = x + \mu(\tau), \qquad y \longmapsto y\prime = y + \dot{\mu}(\tau), \tag{1.41}$$

con $\mu(\tau)$ una función arbitraria de τ. Ahora, la Hamiltoniana canónica del sistema definida por Eq. (1.21) es

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + p_x y. \tag{1.42}$$

Para este caso las variables del espacio fase (1.37) no son independientes, por lo que las ecuaciones de Hamilton definidas por (1.25) no son correctas. En este caso las ecuaciones (1.25) son

$$\dot{x} = p_x + y, \tag{1.43}$$
$$\dot{p}_x = 0, \tag{1.44}$$
$$\dot{y} = 0 \tag{1.45}$$
$$\dot{p}_y = -p_x. \tag{1.46}$$

Como podemos ver, a diferencia de un sistema con Lagrangiana no singular, para este sistema las ecuaciones Hamiltonianas (1.25) no son equivalentes a las ecuaciones Lagrangianas Eqs. (1.38). El comportamiento de este sistema nos indica que cuando la matriz W_{ij} es singular debemos cambiar algunas cosas para que el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano coincidan.

Veamos que consecuencias tiene el hecho de que la matriz W_{ij} no sea invertible. Primero recordemos que el espacio $(q^i, \dot{q}^i)$ se considera independiente, por lo que tiene dimensión $2n$. También recordemos que W_{ij} es de $n \times n$ y que es la matriz Jacobiana para pasar del espacio de configuraciones al espacio fase (q^i, p_i). Por lo tanto, si W_{ij} es invertible el espacio fase tiene dimensión $2n$. Pero si la matriz no es invertible y tiene rango $R < n$, no todas las variables de (q^i, p_i) pueden ser independientes. De hecho la dimensión del espacio fase accesible al sistema es $n + R$. Esto implica que deben existir $M = n - R$ variables del espacio fase que se puenden escribir en términos de las otras, es decir, deben existir relaciones de la forma

$$\phi_m(q, p) = 0, \qquad m = 1, ..., M. \tag{1.47}$$

A las relaciones (1.47) les llamaremos constricciones primarias y a la superficie definida por éstas le llamaremos superficie de constricción primaria.

Ahora veremos como obtener las ecuaciones Hamiltonianas cuando el sistema es singular. Anteriormente vimos que la Hamiltoniana canónica Eq. (1.21) y la acción Hamiltoniana Eq. (1.26) siempre se puede definir. Para obtener las ecuaciones Hamiltonianas de un sistema singular supondremos que el principio de acción aplicado a la acción Hamiltoniana Eq. (1.26) sigue siendo válido. Evidentemente, que para extremar a S_H debemos tomar en cuenta las constricciones (1.47). Por lo tanto, para obtener las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas correctas debemos extremar S_H con las condiciones

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad q^i(\tau_1) = q_1^i, \quad q^i(\tau_2) = q_2^i. \tag{1.48}$$

El problema de extremar funciones bajo una restricción es bien conocido en cálculo diferencial [26] y se puede extender al cálculo de variaciones [27]. Este problema se resuelve mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. El cual nos dice que debemos introducir un conjunto de multiplicadores de Lagrange $\{u^m\}$ y extremar la acción

$$S_T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [p \cdot \dot{q} - H - u^m \phi_m], \tag{1.49}$$

suponiendo que las variables (q^i, p_i, u^m) son independientes. De un cálculo directo se puede ver que las ecuaciones de movimiento que se obtienen son

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, && (1.50) \\ \dot{p}_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \right), && (1.51) \\ \phi_m(q, p) &= 0. && (1.52) \end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento en su forma Hamiltoniana para un sistema que tiene constricciones. Como se puede observar los parámetros u^m son arbitrarios y son la cantidad de parámetros independientes extras que se requiere para que la dimensión del espacio (q^i, p_i, u^m) concuerde con la dimensión del espacio (q^i, z^i). Además, de Eq. (1.50), Eq. (1.51) y Eq. (1.52) se puede ver que con los parámetros extras y las constricciones primarias podemos recuperar todas las velocidades, es decir, tenemos una transformación que nos lleva del espacio fase al espacio (q^i, z^i).

Los multiplicadores de Lagrange dan una forma natural para extender la Hamiltoniana canónica fuera de la superficie de constricción, pues podemos definir

$$H_T = H + u^m \phi_m. \tag{1.53}$$

A esta extensión le llamaremos Hamiltoniana total, mientras que a S_T definida en (1.49) le llamamos acción total.

Apliquemos estas ideas a la acción Eq. (1.36). Este sistema solo tiene una constricción

$$\phi = p_y = 0. \tag{1.54}$$

Luego, para este sistema la Hamiltoniana total Eq. (1.53) y la acción total Eq. (1.26) son:

$$H_T = \frac{1}{2} p_x^2 + p_x y + u p_y, \tag{1.55}$$

$$S_H = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \left(\frac{1}{2}p_x^2 + p_x y + up_y\right)\right], \qquad (1.56)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento Eq. (1.50) y Eq. (1.51) son

$$\dot{x} = p_x + y, \qquad (1.57)$$
$$\dot{y} = u, \qquad (1.58)$$
$$\dot{p}_x = 0, \qquad (1.59)$$
$$\dot{p}_y = -p_x, \qquad (1.60)$$
$$p_y = 0, \qquad (1.61)$$

es decir,

$$\ddot{y} = \dot{u}, \qquad \dot{x} = y, \qquad p_x = 0, \quad \text{y} \quad p_y = 0. \qquad (1.62)$$

La solución de estas ecuaciones con las condiciones de borde Eq. (1.39) son Eq. (1.40) y , por lo tanto, este sistema de ecuaciones es equivalente a las ecuaciones Lagrangianas del sistema Eq. (1.38). Otra forma de comprobar que la acción Eq. (1.56) describe al mismo sistema que la acción Eq. (1.36) es observando que sustituyendo Eq. (1.57) en Eq. (1.56) se obtiene Eq. (1.36).

Existen diferentes formas para representar a una superficie. Sin embargo, para que sea aplicable el método de los multiplicadores de Lagrange, se debe pedir que la representación de la superficie satisfaga las condiciones de regularidad [26, 27]. Las condiciones de regularidad pueden formularse de las tres formas siguientes:

(1).- Localmente los gradientes $d\phi_1, ..., d\phi_M$ son linealmente independientes sobre la superficie de constricción.

(2).-Las funciones ϕ_m pueden ser tomadas localmente como las primeras M coordenadas de un nuevo sistema coordenado regular en cualquier vecindad de la superficie de constricción.

(3).- Las variaciones de ϕ_m son de orden ϵ para variaciones arbitrarias δq^i y δp_i de orden ϵ (formulación de Dirac).

Con las condiciones de regularidad se pueden demostrar dos teoremas importantes [20]:

Teorema 1. Si una función suave, $G = G(q^i, p_i)$, del espacio fase se anula sobre la superficie de constricción (1.47), entonces,

$$G = g^m \phi_m, \tag{1.63}$$

para algunas funciones g^m.

Teorema 2. Si se cumple

$$\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0, \tag{1.64}$$

para variaciones arbitrarias de δq^i y δp_i tangentes a la superficie de constricción, entonces

$$\lambda_i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \qquad \mu^i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}. \tag{1.65}$$

El teorema 2 da una forma alternativa para obtener las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas. En efecto, recordemos que Eq. (1.24) es válida siempre, luego, por el teorema 2, se deben cumplir Eq (1.50) y Eq. (1.51).

Las condiciones de regularidad nos garantizan la validez del método de los multiplicadores de Lagrange. De hecho, tomando una representación de la superficie de constricción que no cumple estas condiciones se pueden cometer errores graves. Para ilustrar esto, en nuestro ejemplo consideremos como constricción

$$\phi = \frac{1}{2} p_y^2 = 0, \tag{1.66}$$

que no cumple las condiciones de regularidad, en lugar de $\phi = p_y = 0$ que sí las cumple. Con esta constricción la Hamiltoniana total es

$$H_T = \frac{1}{2} p_x^2 + p_x y + u^1 \frac{1}{2} p_y^2. \tag{1.67}$$

Luego, las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas son

$$\dot{x} = p_x + y, \qquad \dot{y} = u^1 p_y, \qquad \dot{p}_x = 0, \qquad \dot{p}_y = 0, \qquad p_y^2 = 0, \tag{1.68}$$

es decir,

$$\ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad p_x = 0, \quad p_y = 0. \tag{1.69}$$

Estas ecuaciones tienen como solución

$$x = x_0 + y_0 \tau, \qquad y = y_0, \qquad p_y = p_x = 0. \tag{1.70}$$

Claramente estas trayectorias no son equivalentes a Eq. (1.40).

1.3.1. Ecuaciones débiles y fuertes

Al trabajar en el espacio fase completo es importante hacer notar cuando una igualdad es válida sólo en la superficie de constricción y cuando lo es sobre todo el espacio fase. Para el primer caso se dice que se tiene una igualdad "débil", y se denota con "$\approx$". Para el segundo caso decimos que tenemos una igualdad "fuerte", y la denotamos con "=".

Por ejemplo, si dos funciones del espacio fase, F y G, son iguales sobre la superficie de constricción se escribe $F \approx G$. Note que aplicando el teorema 1 esta igualdad se puede escribir como $F = G + \mu^m \phi_m$. Con esta notación las constricciones (1.47) se pueden escribir como $\phi_m \approx 0$. En general, esta notación nos permitirá escribir ecuaciones en una forma más compacta. Por ejemplo, si tenemos una función del espacio fase, $F = F(q,p)$, entonces

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i. \tag{1.71}$$

Ocupando las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas Eq. (1.50) y Eq. (1.51) tenemos

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^m\{F, \phi_m\}. \tag{1.72}$$

Por otra parte, con la Hamiltoniana total se tiene

$$\{F, H_T\} = \{F, H\} + u^m\{F, \phi_m\} + \phi_m\{F, u^m\}. \tag{1.73}$$

Estas dos ecuaciones difieren sólo por un término que se anula en la superficie de constricción, es decir,

$$\{F, H_T\} \approx \{F, H\} + u^m\{F, \phi_m\}. \tag{1.74}$$

De donde, podemos escribir

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \tag{1.75}$$

En particular las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas (1.50), (1.51) y (1.52) tienen la forma

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_T\}, \tag{1.76}$$
$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_T\}, \tag{1.77}$$
$$\phi_m(q,p) \approx 0. \tag{1.78}$$

En lo que resta de este capítulo ocuparemos esta notación.

1.4. Condiciones de consistencia

En principio la dinámica ocurre en la superficie de constricción primaria (1.47). Sin embargo, nada nos asegura que esta superficie sea consistente con la evolución del sistema. Así, por consistencia debemos pedir que todas las constricciones primarias cumplan

$$\dot{\phi}_n = \{\phi_n, H\} + u^m\{\phi_n, \phi_m\} \approx 0, \qquad \text{con} \qquad m, n = 1, ..., M. \tag{1.79}$$

Este es un conjunto de M ecuaciones lineales con M incógnitas para u^m. Note que si la matriz $C_{nm} = \{\phi_n, \phi_m\}$ es invertible, el conjunto de ecuaciones tiene solución única dada por

$$u^m \approx -C^{mn}\{H, \phi_n\}, \tag{1.80}$$

con C^{mn} la matriz inversa de C_{nm}. De esta forma se pueden determinar todos los multiplicadores de Lagrange. Pero, si C_{nm} no es invertible no podemos determinar todos los multiplicadores de Lagrange. En general Eq. (1.79) puede implicar tres casos:
a) que algunas ecuaciones se cumplan idénticamente;
b) que algunas ecuaciones determinen multiplicadores de Lagrange;
c) que algunas ecuaciones den lugar a nuevas constricciones $\phi_s(q, p)$, independientes de las anteriores. A estas nuevas constricciones les llamaremos secundarias.

Dada la forma de la condición de consistencia (1.79), con los multiplicadores de Lagrange que se determinan, u^β, puede ocurrir dos casos. El primero es que se determinen completamente, por lo que los u^β deben ser funciones del espacio fase. Pero también puede ocurrir que queden en términos de multiplicadores de Lagrange que no se determinan u^a. Así, la forma más general que tienen los multiplicadores de Lagrange que se determinan es

$$u^\beta = f^\beta(q, p) + g^\beta_a(q, p)u^a, \tag{1.81}$$

Sustituyendo este resultado en H_T tendremos

$$H_T = H + f^\beta\phi_\beta + u^a(\phi_a + g^\beta_a\phi_\beta). \tag{1.82}$$

Si ocurre el tercer caso definiremos una nueva superficie de constricción dada por

$$\phi_I = 0, \tag{1.83}$$

donde I es un índice que corre por el conjunto de constricciones primarias y secundarias. A esta nueva superficie también le debemos aplicar la condición de consistencia, es decir,

$$\dot{\phi}_I \approx \{\phi_I, H_T\} \approx 0. \tag{1.84}$$

Aquí la igualdad débil se define sobre la superficie definida por Eq. (1.83). Es claro que de nuevo puede ocurrir cualquiera de los tres casos, por lo tanto aplicaremos otra vez la condición de consistencia. El proceso se detiene hasta que ya no ocurra el tercer caso.

Como resultado de este proceso obtendremos una Hamiltoniana total de la forma

$$H_T = H' + u^a(\phi_a + g_a^\beta \phi_\beta) \tag{1.85}$$

con

$$H' = H + f^\beta \phi_\beta \tag{1.86}$$

Aquí a corre en el conjunto de multiplicadores de Lagrange que no se pueden determinar y β por el de los que sí se determinan. Ahora, como el conjunto de constricciones

$$(\phi_m) = (\phi_\beta, \phi_a)$$

es completo, también lo es el conjunto definido por

$$\bar{\phi}_\beta = \phi_\beta \tag{1.87}$$

$$\bar{\phi}_a = (\phi_a + g_a^\beta \phi_\beta). \tag{1.88}$$

Por lo tanto, podemos usar al conjunto $(\bar{\phi}_m)$ en lugar de (ϕ_m). De donde podemos escribir $H_T = H' + u^a \bar{\phi}_a$.

Al sustituir los multiplicadores de Lagrange en Eq. (1.50), Eq. (1.51) y Eq. (1.52) tenemos

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H\} + f^\beta(q,p)\{q^i, \bar{\phi}_\beta\} + u^a\{q^i, \bar{\phi}_a\}, \tag{1.89}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H\} + f^\beta(q,p)\{p_i, \bar{\phi}_\beta\} + u^a\{p_i, \bar{\phi}_a\}, \tag{1.90}$$

$$\bar{\phi}_m(q,p) \approx 0. \tag{1.91}$$

Por otra parte, si el número total de constricciones secundarias es N, entonces el conjunto de constricciones que define la superficie de constricción está dado por

$$\phi_I \approx 0, \qquad \text{con} \qquad I = 1, ..., M, M+1, ..., M+N, \tag{1.92}$$

donde las primeras M constricciones son primarias y las restantes son secundarias. Supondremos que todas estas constricciones están escritas de tal forma que satisfacen las condiciones de regularidad.

1.5. Clasificación de constricciones

Antes de continuar haremos una clasificación de las constricciones.

Sea F una función del espacio fase, $F = F(p,q)$, entonces si

$$\{F, \phi_I\} \approx 0, \qquad \text{con} \qquad I = 1, ..., M+N \tag{1.93}$$

se dice que F es una función de primera clase. En caso contrario, se dice que F es de segunda clase. Ocupando el teorema 1, esta igualdad se puede poner como

$$\{F, \phi_I\} = f_I^{I'} \phi_{I'}. \tag{1.94}$$

Note que si F y G son funciones de primera clase, entonces $\{F, G\}$ es de primera clase. En efecto, si ϕ_I es una constricción cualquiera, entonces por la identidad de Jacobbi

$$\begin{aligned} \{\{F,G\}, \phi_I\} &= \{F, \{G, \phi_I\}\} - \{G, \{F, \phi_I\}\} \\ &= \{F, g_I^{I'}\}\phi_{I'} + g_I^{I'} f_{I'}^{I''} \phi_{I''} - \{G, f_I^{I'}\}\phi_{I'} - f_I^{I'} g_{I'}^{I''} \phi_{I''} \approx 0, \end{aligned}$$

por lo que $\{F, G\}$ es de primera clase.

Anteriormente vimos que hay constricciones para las cuales no se puede determinar su multiplicador de Lagrange asociado. Esta propiedad está íntimamente relacionada con la clase de constricción, veamos por qué ocurre esto. Primero recordemos que una vez terminado el proceso de consistencia la ecuación (1.84) se cumple idénticamente, por lo que H_T es una función de primera clase. Además, como los multiplicadores de Lagrange u^a no se pueden determinar y están asociados con las constricciones $\bar{\phi}_a$, el hecho de que (1.84) se cumpla idénticamente implica que

$$\{\phi_I, \bar{\phi}_a\} \approx 0 \quad \text{para} \quad \text{toda} \qquad I. \tag{1.95}$$

En efecto si no se cumple esta igualdad los multiplicadores u^a se pueden determinar. Claramente (1.95) implica que las constricciones $\{\bar{\phi}_a\}$ son de primera clase. Es decir, hay multiplicadores de Lagrange indeterminados cuando tenemos constricciones de primera clase. También podemos ver que la función $H' = H_T - u^a \bar{\phi}_a$ también es de primera clase.

Debido a que los multiplicadores de Lagrange indeterminados están asociados a constricciones de primera clase, hay una distinción importante entre las constricciones de primera y segunda clase, por ello ocuparemos diferente notación para distinguirlas. Denotaremos con γ a las constricciones de primera clase y con χ a las de segunda clase.

1.5.1. Separación en constricciones de primera y segunda clase

Por lo general, dado un conjunto de constricciones ϕ_I $(I = 1, ..., M+N)$ no es claro que haya constricciones de primera clase. Por lo que se requiere clasificar los elementos del conjunto según su clase, veamos de que forma se puede hacer esta clasificación. Definamos la matriz $C_{IJ} = \{\phi_I, \phi_J\}$, es claro que si hay una constricción de primera clase, entonces det $C_{IJ} \approx 0$. Ahora supongamos que det $C_{IJ} \approx 0$, entonces el núcleo de esta matriz no es el vector cero, es decir, existe un conjunto de vectores, de dimensión $N+M$, $\{\lambda_a \not\approx 0\}$ $(a = 1, ..., A)$ tal que

$$\lambda_a^I C_{IJ} = \lambda_a^I \{\phi_I, \phi_J\} \approx 0. \tag{1.96}$$

Note que la constricción $\gamma_a = \lambda_a^I \phi_I$ es de primera clase. Por lo tanto, el conjunto $\{\phi_I\}$ tiene constricciones de primera clase si y solo si det $C_{IJ} \approx 0$. También es claro que la dimensión del núcleo de C_{IJ} nos da el número de constricciones de primera clase que se tienen.

Ahora, con los vectores λ_a podemos construir los primeros, A, renglones de una matriz a_J^I invertible tal que

$$\phi_I \qquad \longmapsto \qquad \tilde{\phi}_I = a_I^J \phi_J, \tag{1.97}$$

donde las primeras A constricciones $\tilde{\phi}_I$ serán de primera clase $\{\gamma_a\}$ y las restantes constricciones, $M+N-A$, sean de segunda clase $\{\chi_\alpha\}$. Así, si cambiamos el conjunto completo de constricciones (ϕ_I) por el conjunto (γ_a, χ_α), que también es completo, tendremos separadas las constricciones de primera clase de las de segunda clase.

Es claro que el conjunto de constricciones primarias $(\bar{\phi}_m)$ definido por Eq. (1.87)-(1.88) ya está separado en constricciones de primera y de segunda clase. Una vez construido el conjunto $(\bar{\phi}_m)$ sólo nos "resta" clasificar las constricciones secundarias. En lo que resta de este capítulo supondremos que las constricciones $\bar{\phi}_m$ están en el conjunto (γ_a, χ_α).

Supongamos que tenemos un conjunto completo de constricciones que hemos separado, (γ_a, χ_α). Mediante un pequeño cálculo, podemos mostrar que si F es una función de primera clase, entonces

$$\{F, \gamma_a\} = C_a^b(q,p)\gamma_b + T_a^{\alpha\beta}(q,p)\chi_\alpha\chi_\beta.$$

Así, los paréntesis de Poisson entre las constricciones tienen la forma

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} \quad = C_{ab}{}^c(q,p)\gamma_c + T_{ab}{}^{\alpha\beta}(q,p)\chi_\alpha\chi_\beta, \tag{1.98}$$

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_a, \chi_\alpha\} &= C^b_{a\alpha}(q,p)\gamma_b + C^\beta_{a\alpha}(q,p)\chi_\beta, && (1.99)\\
\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} &= C_{\alpha\beta}(q,p), && (1.100)
\end{aligned}
$$

con $C_{\alpha\beta}$ una matriz invertible. En esta nueva base C_{IJ} tiene la forma

$$
C_{IJ} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.
$$

Si se cumple que el rango de C_{IJ} es constante en todo el espacio fase, entonces $C_{\alpha\beta}$ es una matriz invertible en todo el espacio fase.
Por otra parte, como $C_{\alpha\beta}$ es una matriz invertible y antisimétrica, debe tener dimensión par. Por lo tanto, el número de constricciones de segunda clase siempre es par.

1.6. Hamiltoniana extendida

Una vez concluido el proceso de consistencia y clasificadas las constricciones las ecuaciones de movimiento (1.89)-(1.91) se pueden escribir de la forma

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^i &\approx \{q^i, H_E\}, && (1.101)\\
\dot{p}_i &\approx \{p_i, H_E\}, && (1.102)\\
\gamma_c &\approx 0, && (1.103)\\
\chi_\beta &\approx 0, && (1.104)
\end{aligned}
$$

con $H_E = H' + u^a\gamma_a$. Veamos de qué acción se obtienen estas ecuaciones de movimiento. Note que ahora tenemos la Hamiltoniana canónica H y un conjunto de constricciones

$$
\chi_\beta \approx 0 \qquad \text{y} \qquad \gamma_b \approx 0, \tag{1.105}
$$

donde β y b corren por todas las constricciones de segunda y primera clase, respectivamente. La dinámica ocurre en la superficie (1.105) y no en la superficie de constricción primaria. Así, para tener ecuaciones de movimiento consistentes con la superficie Eq. (1.105) debemos extremar a S_H, definida en Eq. (1.26), con las condiciones

$$
\chi_\beta \approx 0, \qquad \gamma_b \approx 0, \qquad q^i(\tau_1) = q^i_1 \qquad \text{y} \qquad q^i(\tau_2) = q^i_2. \tag{1.106}
$$

Por lo tanto, la acción a extremar es

$$
S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\dot{q}\cdot p - H(q,p) - u^\beta\chi_\beta - u^b\gamma_b]. \tag{1.107}
$$

Por simplicidad, cambiaremos los multiplicadores de Lagrange u^β por otros, igualmente arbitrarios, de la forma

$$u^\beta = u'^\beta + f^\beta,$$

con f^β definido en Eq. (1.86). Entonces Eq. (1.107) tienen la forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{q} \cdot p - H' - u'^\beta \chi_\beta - u^b \gamma_b]. \tag{1.108}$$

Al aplicar el principio de acción a Eq. (1.108) obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H'\} + u^b\{q^i, \gamma_b\} + u'^\beta\{q^i, \chi_\beta\}, \tag{1.109}$$
$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H'\} + u^b\{p_i, \gamma_b\} + u'^\beta\{p_i, \chi_\beta\}, \tag{1.110}$$
$$\gamma_c \approx 0, \tag{1.111}$$
$$\chi_\beta \approx 0. \tag{1.112}$$

Para la superficie Eq. (1.105) también se debe cumplir la condición de consistencia. Como H' es de primera clase, para las constricciones de primera clase es claro que

$$\dot{\gamma}_b \approx 0.$$

Pero, para una constricción de segunda clase arbitraria se tiene la restricción

$$\dot{\chi}_\alpha \approx \{\chi_\alpha, H'\} + u^c\{\chi_\alpha, \gamma_c\} + u'^\beta\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx u'^\beta\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0. \tag{1.113}$$

Como $\{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$ es invertible, $u'^\beta \approx 0$. Entonces, las ecuaciones (1.109)-(1.112) toman la forma de las ecuaciones (1.101)-(1.104).

Para la Hamiltoniana H_E podemos definir la acción

$$S_E(u^a, p, q) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{q}^i p_i - H_E] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{q}^i p_i - H' - u^c \gamma_c]. \tag{1.114}$$

Como vemos, la necesidad de extender la Hamiltoniana total a H_E no es inducida por la teoría Lagrangiana, ésta proviene de las características inherentes al esquema Hamiltoniano y tiene como consecuencia producir ecuaciones más generales que las generadas por H_T, es decir, por las ecuaciones de movimiento Lagrangianas originales. Es claro que cuando tomamos a los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones secundarias de primera clase como nulos se recupera la acción Hamiltoniana total.

1.7. Transformaciones de norma y paréntesis de Dirac

Ahora veremos qué ocurre con la evolución de las funciones del espacio fase cuando se tienen constricciones de primera clase, es decir, multiplicadores de Lagrange indeterminados.

Supongamos que tomamos un conjunto, $\{u^a\}$, de multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones de primera clase. Si F es una función del espacio fase, tenemos que

$$\dot{F}_u \approx \{F, H'\} + u^a\{F, \gamma_a\}. \tag{1.115}$$

Pero como los multiplicadores de Lagrangen son arbitrarios, podemos tomar otro conjunto de multiplicadores de Lagrange, por ejemplo v^a. Con estos nuevos multiplicadores de Lagrange se tiene

$$\dot{F}_v \approx \{F, H'\} + v^a\{F, \gamma_a\}. \tag{1.116}$$

Así, la evolución de F es arbitraria, pues depende de la elección de los multiplicadores de Lagrange.

Veamos qué diferencia hay entre tomar la evolución con el conjunto $\{u^a\}$ y tomar la evolución con el conjunto $\{v^a\}$. Su pongamos que al tiempo inicial τ_1 la función F vale $F_1 = F(q(\tau_1), p(\tau_1))$. Entonces, al tiempo $\tau' = \tau_1 + \delta\tau$ tendremos

$$F_u(\tau') = F(\tau_1) + \delta\tau(\{F, H'\} + u^a\{F, \gamma_a\}). \tag{1.117}$$

Pero también tenemos

$$F_v(\tau') = F(\tau_1) + \delta\tau(\{F, H'\} + v^a\{F, \gamma_a\}). \tag{1.118}$$

Por lo que la diferencia en la evolución entre tomar un conjunto de multiplicadores de Lagrange u otro está dada por

$$\delta F = F_u(\tau') - F_v(\tau') = \delta\tau(u^a - v^a)\{F, \gamma_a\} = \epsilon^a\{F, \gamma_a\}. \tag{1.119}$$

Note que a primer orden δF nos permite pasar de una evolución a otra. En otras palabras, δF es una transformación para pasar de F_u a F_v al tiempo τ', a esta le llamaremos transformación de norma. También note que esta transformación es generada por las constricciones de primera clase, es decir, las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma.

Sin embargo, no todas las funciones del espacio fase tienen evolución arbitraria, claramente la funciones, O, que satisfacen

$$\{O, \gamma_a\} \approx 0, \qquad \text{para} \quad \text{toda} \quad a, \tag{1.120}$$

no tienen evolución arbitraria. Estas funciones cumple $\delta O = \epsilon^a \{O, \gamma_a\} = 0$, es decir, las transformaciones de norma no las afectan. A las funciones que cumplen (1.120) se les llama observables o invariantes de norma.

Ahora, si partimos del hecho que las cantidades físicas no tienen evolución arbitraria. Entonces, cuando exista libertad de norma en un sistema las únicas funciones del espacio fase que pueden representar cantidades físicas deben ser observables, es decir, invariantes de norma.

Es claro que para los observables la evolución es la misma con las Hamiltonianas H', H_T y H_E. Por lo tanto, el formalismo extendido describe al mismo sistema de observables. La acción extendida simplemente contiene variables adicionales de norma pura, los nuevos multiplicadores de Lagrange, y, consecuentemente, invariantes de norma adicionales. Sin embargo, para cualquier variable que no sea invariante de norma la evolución debe tomarse con la Hamiltoniana extendida.

1.7.1. Paréntesis de Dirac

Anteriormente vimos que si dos funciones del espacio fase, F y G, son de primera clase, entonces $\{F, G\}$ es de primera clase. Por lo que, con el paréntesis de Poisson se puede definir un álgebra de funciones de primera clase. Ahora sabemos que las funciones interesantes del espacio son los observables (1.120). Sin embargo, si O_1 y O_2 son observables, no es posible asegurar que $\{O_1, O_2\}$ es observable. Veamos como podemos construir una estructura semejante a los paréntesis de Poisson que respete la propiedad de observable.

Se puede mostrar que si O un observable y $\{l^\beta\}$ un conjunto de funciones del espacio fase, entonces, $O^* = O + l^\beta \chi_\beta$ también es observable. Ahora es claro que $O \approx O^*$, es decir, en la superficie de constricción no hay diferencia entre O y O^*. Veamos si podemos fijar valores de l^β de tal forma que O^* sea de primera clase, esto equivale a pedir que para toda χ_α se satisfaga la ecuación

$$\{O^*, \chi_\alpha\} \approx \{O, \chi_\alpha\} + l^\beta C_{\beta\alpha} \approx 0, \quad \text{con} \quad C_{\beta\alpha} = \{\chi_\beta, \chi_\alpha\}. \tag{1.121}$$

De donde concluimos que

$$O^* = O - \{O, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \chi_\beta \tag{1.122}$$

es de primera clase, con $C^{\alpha\beta}$ la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$. Por lo tanto, a cada observable, O, le podemos asociar una función de primera clase, O^*, con la cual coincide sobre la superficie de constricción. En general a cualquier función, F, del espacio fase le podemos asociar la función

$$F^* = F - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \chi_\beta. \tag{1.123}$$

En particular, para cualquier constricción de segunda clase se tiene

$$\chi_\beta^* = 0. \tag{1.124}$$

Ahora, si F y G son dos funciones del espacio fase, se puede mostrar que

$$\{F^*, G^*\} \approx \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}, \tag{1.125}$$

entonces, definiremos los paréntesis de Dirac como:

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}. \tag{1.126}$$

Con estos nuevos paréntesis tenemos que

$$\{\chi_\alpha, F\}^* \approx 0 \tag{1.127}$$

para cualquier función, F, del espacio fase.

También se puede probar que los paréntesis de Dirac satisfacen las propiedades

$$\begin{aligned}
\{F, G\}^* &= -\{G, F\}^*, && (1.128)\\
\{F_1 + F_2, G\}^* &= \{F_1, G\}^* + \{F_2, G\}^*, && (1.129)\\
\{F_1 F_2, G\}^* &= F_2\{F_1, G\}^* + F_1\{F_2, G\}^*, && (1.130)\\
\{\{F, G\}^*, H\}^* &= -\{\{G, H\}^*, F\}^* - \{\{H, F\}^*, G\}^*, && (1.131)
\end{aligned}$$

Que son las propiedades de un álgebra de Poisson. Además, si G es una función de primera clase se cumple

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\}, \tag{1.132}$$

con F una función del espacio fase cualquiera. En particular se tiene que $\{O, \gamma_a\} \approx 0$ si y sólo si $\{O, \gamma_a\}^* \approx 0$. Por lo tanto, podemos definir observable con los paréntesis de Poisson o de Dirac. Además, con Eq. (1.131) se puede mostrar que si O_1 y O_2 son observables, $\{O_1, O_2\}^*$ es observable. Por lo tanto, con los paréntesis de Dirac los observables forman un álgebra.

Ahora, los generadores de las transformaciones de norma son funciones de primera clase, las transformaciones de norma también se pueden expresar en términos de los paréntesis de Dirac, es decir,

$$\delta F = \epsilon^a \{F, \gamma_a\} \approx \epsilon^a \{F, \gamma_\alpha\}^*.$$

Con los paréntesis de Dirac las ecuaciones de movimiento para q^i y p_i tienen la forma

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_E\}^*, \tag{1.133}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_E\}^*. \tag{1.134}$$

En general la evolución para cualquier variable $F(q, p)$ es

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}^*. \tag{1.135}$$

Así, con los paréntesis de Dirac la evolución de un observable es la misma si se toma con la Hamiltoniana canónica, total o extendida.

Es claro que para el sistema físico es lo mismo cambiar todas los observables O del espacio fase por su asociada O^* que cambiar los paréntesis de Poisson $\{,\}$ por los de Dirac $\{,\}^*$. Operativamente es más viable tomar el segundo camino. En ambos casos todos los observables coinciden con las funciones de primera clase.

Por Eq. (1.127) y Eq. (1.124), podemos hacer fuertemente igual a cero las constricciones de segunda clase, antes o después de evaluar los paréntesis de Dirac. Por lo tanto, en lo sucesivo, todas las ecuaciones de la teoría son formuladas en términos de los paréntesis de Dirac y las constricciones de segunda clase son identidades que expresan algunas variables canónicas en términos de otras, es decir, las tomaremos como ecuaciones fuertes.

1.8. Invariancia de norma de la acción Hamiltoniana extendida

Ahora veamos que efectos tienen las transformaciones de norma en la acción extendida

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{q}^i p_i - (H' + u^a \gamma_a)\right]. \tag{1.136}$$

Supongamos que tenemos la función infinitesimal $\mathcal{G}(t,q,p)$, entonces podemos definir las variaciones

$$\delta p_i = \{p_i, \mathcal{G}\}, \qquad \delta q_i = \{q_i, \mathcal{G}\}, \tag{1.137}$$

$$\delta H' = \{H', \mathcal{G}\}, \qquad \delta\gamma_a = \{\gamma_a, \mathcal{G}\}, \tag{1.138}$$

en esta sección los índices a, b y c corren en todas las constricciones de primera clase. Con estas variaciones δS_E tiene la forma

$$\begin{aligned} \delta S_E &= \left[p_i \delta q^i - \mathcal{G}\right]\Big|_{t_1}^{t_2} + \\ &\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - (\{H', \mathcal{G}\} + u^a\{\gamma_a, \mathcal{G}\} + \delta u^a \gamma_a)\right]. \end{aligned} \tag{1.139}$$

Por lo tanto, si δu^a es tal que

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - (\{H', \mathcal{G}\} + u^a\{\gamma_a, \mathcal{G}\} + \delta u^a \gamma_a) = 0, \tag{1.140}$$

se cumple

$$\delta S_E = \left[p_i \delta q^i - \mathcal{G}\right]\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.141}$$

En general dada una $\mathcal{G}$ no es fácil encontrar a δu^a, pero si

$$\mathcal{G} = \epsilon^a(t,p,q)\gamma_a, \tag{1.142}$$

con $\epsilon^a(t,p,q)$ una función cualquiera y tomando en cuenta que

$$\{H', \gamma_a\} = V_a^b \gamma_b, \qquad \{\gamma_a, \gamma_b\} = C_{ab}^c \gamma_c,$$

tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - (\{H', \mathcal{G}\} + u^a\{\gamma_a, \mathcal{G}\} + \delta u^a \gamma_a) = \\ \gamma_a &\left[\frac{\partial \epsilon^a}{\partial t} + \{\epsilon^a, H'\} + \{\epsilon^a, \gamma_c\}u^c + u^c \epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a - \delta u^a\right]. \end{aligned} \tag{1.143}$$

Entonces, si

$$\delta u^a = \frac{\partial \epsilon^a}{\partial t} + \{\epsilon^a, H'\} + \{\epsilon^a, \gamma_c\}u^c + u^c \epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a, \tag{1.144}$$

la ecuación (1.141) tiene la forma

$$\delta S_E = \left[p_i \frac{\partial(\epsilon^a \gamma_a)}{\partial p_i} - \epsilon^a \gamma_a\right]\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.145}$$

Así, siempre que Eq. (1.145) se anule en los extremos, la acción es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon p_i &= \{p_i, \epsilon^a \gamma_a\}, && (1.146)\\ \delta_\epsilon q^i &= \{q^i, \epsilon^a \gamma_a\}, && (1.147)\\ \delta u^a &= \frac{\partial \epsilon^a}{\partial t} + \{\epsilon^a, H'\} + \{\epsilon^a, \gamma_c\} u^c + u^c \epsilon^b C^a_{bc} - \epsilon^b V^a_b. && (1.148)\end{aligned}$$

Para terminar esta sección veamos las simetrías de norma del sistema que presentamos al principio de este capítulo. Como la Hamiltoniana total es Eq. (1.55) y la única constricción es Eq. (1.54), la condición de consistencia implica que

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_T\} = -p_x \approx 0, \tag{1.149}$$

y nada más. Entonces la Hamiltoniana extendida y la acción extendida son, respectivamente,

$$\begin{aligned}H_E &= \frac{1}{2} p_x + y p_x + \lambda^1 p_y + \lambda^2 p_x, && (1.150)\\ S_E &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x} p_x + \dot{y} p_y - \left(\frac{1}{2} p_x + y p_x + \lambda^1 p_y + \lambda^2 p_x \right) \right]. && (1.151)\end{aligned}$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento extendidas son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x + y + \lambda^2, && (1.152)\\ \dot{y} &= \lambda^1, && (1.153)\\ \dot{p}_x &= 0, && (1.154)\\ \dot{p}_y &= -p_x, && (1.155)\\ p_x &= 0, && (1.156)\\ p_y &= 0. && (1.157)\end{aligned}$$

Como se esperaba, estas ecuaciones son más generales que las ecuaciones Lagrangianas. Para este sistema las transformaciones de norma son

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon x &= \epsilon^2, && (1.158)\\ \delta_\epsilon y &= \epsilon^1, && (1.159)\\ \delta_\epsilon p_x &= 0, && (1.160)\\ \delta_\epsilon p_y &= 0, && (1.161)\\ \delta_\epsilon \lambda^1 &= \dot{\epsilon}^1, && (1.162)\\ \delta_\epsilon \lambda^2 &= \dot{\epsilon}^2 - \epsilon^1. && (1.163)\end{aligned}$$

Cuando ocurre que $\delta_\epsilon \lambda^2 = 0$ tendremos

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon x &= \epsilon^2, && (1.164)\\
\delta_\epsilon y &= \dot{\epsilon}^2, && (1.165)\\
\delta_\epsilon \lambda^1 &= \ddot{\epsilon}^2, && (1.166)\\
\delta_\epsilon \lambda^2 &= 0. && (1.167)
\end{aligned}$$

Esta es la versión infinitesimal de las transformaciones Eq. (1.41). Sin embargo, es claro que éste es sólo un caso particular de las simetrías de S_E.

Para este sistema, con cualquier transformación de norma, Eq. (1.145) se anula idénticamente. Por lo tanto, la acción Eq. (1.151) es invariante ante cualquier transformación de norma.

1.9. Fijación de la norma

Cuando tenemos constricciones de primera clase y, por lo tanto, libertad de norma los multiplicadores de Lagrange asociados a estas constricciones son indeterminados. De hecho, dentro de la teoría no tenemos forma de determinarlos. Por lo que debemos recurrir a elementos exteriores a la teoría para fijar estos parámetros.

Una forma natural para determinar los multiplicadores de Lagrange es implementando nuevas constricciones $N(p,q) = 0$. Estas constricciones deben ser tantas como parámetros arbitrarios haya. Esto implica que tenemos una nueva superficie de constricción

$$\chi_\beta(q,p) = 0, \qquad \gamma_a(q,p) = 0, \qquad N_a(q,p) = 0. \qquad (1.168)$$

Las constricciones N_a deben satisfacer las condiciones de regularidad y deben ser tales que la condición de consistencia aplicada a Eq. (1.168) implique que se determinen todos los multiplicadores de Lagrange. Para que esto se cumpla debe pasar que

$$\det\{N_a, \gamma_b\} \not\approx 0. \qquad (1.169)$$

Esta condición implica que en Eq. (1.168) ya no hay constricciones de primera clase, ni transformaciones de norma. A las constricciones N_a les llamaremos condiciones de norma.

Una vez determinados los multiplicadores de Lagrange los podemos sustituir en las ecuaciones de movimiento, lo que nos dará como resultado:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H'\} + u^b(q,p,\tau)\{q^i, \gamma_b\}, \tag{1.170}$$
$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H'\} + u^b(q,p,\tau)\{p_i, \gamma_b\}. \tag{1.171}$$

Este sistema de ecuaciones estará definido sobre la superficie Eq. (1.168) y tiene las condiciones de borde Eq. (1.4). Para que tenga sentido este problema definido sobre la superficie Eq. (1.168), debemos imponer que N_a sea tal que:

(a) Las condiciones de norma deben satisfacer las condiciones de frontera del principio de acción. Es decir, se debe cumplir que

$$N_a(q_1^i, p) = 0, \qquad N_a(q_2^i, p) = 0. \tag{1.172}$$

Por otra parte, la forma de fijar la norma no debe afectar los elementos observables de la teoría. Por lo tanto, el conjunto de constricciones N_a también debe satisfacer que:

(b) Las constricciones N_a deben ser accesibles. Es decir, dado cualquier conjunto de variables canónicas que cumplen

$$\chi_\beta(q,p) = 0, \qquad \gamma_a(q,p) = 0 \tag{1.173}$$

debe existir una transformación de norma para pasar del conjunto dado de variables q^i, p_i a un conjunto que satisfaga las condiciones Eq. (1.168). Esta transformación debe ser obtenida por iteración de transformaciones $\delta u^a\{F, \gamma_a\}$.

Esta condición nos asegura que las condiciones de norma no modificarán las propiedades físicamente relevantes del sistema, pero sí restringen la libertad de norma. Al conjunto de variables canónicas que satisfacen Eq. (1.168) se le llama espacio reducido. Si imponemos dos conjuntos de condiciones de norma accesibles, N_{a1} y N_{a2}, entonces, mediante una trasformación de norma, la condición (**b**) nos permite pasar del espacio reducido definido por N_{a1} al definido por N_{a2}.

Si tomamos una norma que no satisfaga la condición **(a)**, tendremos que cambiar las condiciones de borde Eq. (1.4) a Eq. (1.170) y Eq. (1.171). Esto implica cambiar de principio variacional. Si imponemos condiciones de norma que no son accesibles, por ejemplo si hay variables canónicas de primera clase que no cumplen Eq. (1.168), tendremos trayectorias en las superficie de constricción que no están en el espacio reducido Eq. (1.168) y no podemos conectarlas con Eq. (1.168) mediante transformaciones de norma. Entonces esas condiciones de norma definirán un espacio reducido desconectados de un sector de la superficie de constricción.

Una vez fijada la norma podemos pasar al paréntesis de Dirac. Finalmente, tendremos un teoría libre de constricciones en el sentido de que todas las constricciones podrán ser consideradas como identidades que expresan algunas variables en términos de otras.

1.10. Número de grados de libertad

Hasta ahora hemos visto que cuando un sistemas tiene constricciones no todas las variables del espacio fase son independientes, también hemos visto que en algunos casos debemos introducir parámetros indeterminados, sin embargo no nos hemos preocupado por contar los grados de libertad efectivos del un sistema. Veamos como se pueden contar estos grados de libertad.

Cuando el sistema sólo tiene constricciones de segunda clase, y por lo tanto no tiene libertad de norma, no tenemos parámetros indeterminados. Entonces, contar los grados de libertad efectivos es trivial. En efecto, supongamos que $\mathbf{N_F}$ es el número de grados de libertad físicos del sistema, N_T el número total de variables canónicas y N_χ el número de constricciones de segunda clase, entonces

$$\mathbf{N_F} \equiv \frac{1}{2}[N_T - N_\chi]. \tag{1.174}$$

Como N_T y N_χ son número pares, el número $\mathbf{N_F}$ está bien definido. Ahora, si el sistema tiene libertad de norma, sea N_γ el número de constricciones de primera clase y N_n el número de condiciones de norma, entonces el número de grados de libertad efectivos es

$$\begin{aligned} \mathbf{N_F} &\equiv \frac{N_{ca}}{2} = \frac{1}{2}[N_T - N_\chi - N_\gamma - N_n] \\ &= \frac{1}{2}[N_T - N_\chi - 2N_\gamma]. \end{aligned} \tag{1.175}$$

Este conteo está bien definido y no es ambiguo para un número finito de grados de libertad.

1.11. Cuantización por el Método de Dirac

Existen varios métodos para cuantizar un sistema con constricciones [20]. Una forma es fijar la norma en el sistema clásico y promover los paréntesis de Dirac a conmutadores. También es posible cuantizar al sistema sin fijar la norma. En este caso, el primer paso es promover las constricciones de primera clase $\gamma_a(q,p)$ a operadores de la forma $\hat{\gamma}_a(\hat{q},\hat{p})$. Generalmente se tienen problemas de ordenamiento para construir dichos operadores, estos problemas deben ser resueltos con algún criterio adicional. Estos operadores serán los generadores de las transformaciones de norma infinitesimales en el formalismo cuántico, es decir, si $\hat{A}$ es un operador

$$\delta\hat{A} = \epsilon^a[\hat{A},\hat{\gamma}_a]$$

representa una transformación de norma. Debemos recordar que una vez separadas las constricciones de primera y segunda clase se tomarán los paréntesis de Dirac y no los de Poisson, así la asignación al cuantizar será de la forma

$$\{\ \ ,\ \ \}^* \qquad \rightarrow \qquad i[\ \ ,\ \ ]. \tag{1.176}$$

Aquí, paréntesis de Dirac se construyen con las constricciones de segunda clase que se tienen antes de fijar la norma.

Ahora, es claro que los estados físicos $|\Psi>$ del sistema deben ser invariantes de norma. Por lo tanto, deben satisfacer que

$$\mathrm{e}^{\alpha^a\hat{\gamma}_a}|\Psi>=|\Psi>, \tag{1.177}$$

con α_a un parámetro cualquiera. Esta restricción implica que

$$\hat{\gamma}_a|\Psi>=0. \tag{1.178}$$

Se definen como operadores observables de la teoría a todos aquellos operadores hermíticos que conmutan con todas las constricciones de primera clase, es decir,

$$\hat{F}=\hat{F}^\dagger \text{ es observable} \Longleftrightarrow \qquad \delta\hat{F}=[\hat{F},\epsilon^a\hat{\gamma}_a]=0.$$

De esta forma se construye la versión cuántica de un sistema con libertad de norma. Sin embargo, se tienen problemas sin resolver, pues, por ejemplo, las constantes de estructura del álgebra de constricciones de primera clase son funciones del espacio fase, por lo que puede haber problemas de ordenamiento serios. Por otra parte, el método de Dirac no da una regla para definir el producto escalar de los estados físicos, luego, no tenemos directamente una interpretación probabilística de la teoría. Sin embargo, se tiene la ventaja de no necesitar fijar la norma antes de cuantizar al sistema.

1.12. Partícula no relativista reparametrizada

Como ejemplo de un sistema con libertad de norma veremos la partícula no relativista reparametrizada.

La acción para la partícula no-relativista en un potencial $V(x)$ es

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{m}{2} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx^i}{dt} - V(x) \right], \qquad i = 1, ..., d. \tag{1.179}$$

Reparametrizando al tiempo, t, con un nuevo parámetro, τ, de tal forma que $t = t(\tau)$ sea monótona y creciente, se obtiene

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{m}{2} \frac{\dot{x}_i^2}{\dot{t}} - V(x)\dot{t} \right]. \tag{1.180}$$

Donde $\dot{x}_i$ y $\dot{t}$ denotan la derivada con respecto τ. Es fácil ver que (1.180) es invariante ante reparametrizaciones.

Los momentos canónicos de este sistema son

$$P_i = m\frac{\dot{x}_i}{\dot{t}}, \tag{1.181}$$

$$P_t = -\frac{m}{2} \frac{\dot{x}_i^2}{\dot{t}^2} - V(x). \tag{1.182}$$

De estos momentos canónicos tenemos la constricción

$$\phi = P_t + H_0 \approx 0, \quad \text{con} \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + V(x), \quad P^2 = P_i P^i. \tag{1.183}$$

De Eq. (1.180) podemos ver que la Hamiltoniana canónica resulta ser nula:

$$H_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\dot{t} - L = 0. \tag{1.184}$$

Por otra parte, como tenemos sólo una constricción, ϕ, ésta es de primera clase. Por lo tanto, la Hamiltoniana total está dada por

$$H_T = \lambda\phi. \tag{1.185}$$

Con esta Hamiltoniana total, es evidente que la evolución de la constricción no producirá nuevas constricciones, entonces $H_E = H_T$. Así, la acción extendida para este sistema es

$$S_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{t}P_t + \dot{X}^i P_i - \lambda \left(P_t + \frac{P^2}{2m} + V(x) \right) \right]. \tag{1.186}$$

Por último, según el método de cuantización de Dirac, como ϕ es una constricción de primera clase, los estados físicos cuántico son tales que satisfacen

$$\hat{\phi}|\psi\rangle = [\hat{P}_t + \hat{H}_0]|\psi\rangle = 0. \tag{1.187}$$

Si en la representación de coordenadas hacemos las asignaciones

$$\hat{P}_t = -i\hbar\partial_t \qquad \text{y} \qquad \hat{P}_i = -i\hbar\partial_i, \tag{1.188}$$

los estados físicos son aquellos que satisfacen la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\partial_t|\psi >= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i^2 + V(x)\right]|\psi > . \tag{1.189}$$

Es importante hacer notar que hemos deducido la ecuación de Schrödinger imponiendo la condición de que la teoría clásica sea invariante bajo reparametrizaciones. Así, la imposición de esta simetría dicta la evolución cuántica del sistema.

En el próximo capítulo estudiaremos la partícula relativista, su simetría de norma y algunas condiciones de norma.

Capítulo 2

Una generalización de la partícula relativista

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la partícula relativista y su simetría de norma. También veremos que se pueden elegir condiciones de norma tales que impliquen paréntesis de Dirac consistentes con espacios no conmutativos. En particular se muestra que se puede obtener una realización del espacio de Snyder. Además se construye una generalización de la partícula relativista que permite una realización de un espacio no conmutativo que es más general que el espacio de Snyder. Por último se construye una acción Hamiltoniana para un sistema con Hamiltoniana arbitraria que está en un espacio no conmutativo tipo Snyder.

2.2. La partícula relativista y su simetría de norma

Para iniciar veamos algunas propiedades de la partícula relativista. La acción de este sistema es

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu}}. \tag{2.1}$$

Este sistema es invariante bajo reparametrizaciones. En efecto, si tomamos $\tau = \tau(\sigma)$ obtenemos que

$$S \;\; = \;\; -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\frac{dX^{\mu}}{d\tau}\frac{dX_{\mu}}{d\tau}}$$

$$= \quad -mc\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\sqrt{\frac{dX^\mu}{d\sigma}\frac{dX_\mu}{d\sigma}}. \tag{2.2}$$

Como podemos ver esta simetría es local, es decir, de norma. Note que esta libertad de norma está directamente relacionada al hecho de que hay arbitrariedad para elegir el parámetro de evolución. En otras palabras, fijar la norma equivale a elegir cierto tiempo.

Ahora veamos las ecuaciones de movimiento, de Eq. (2.1) se tiene que

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = -mc\frac{\dot{X}_\mu}{\sqrt{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}, \tag{2.3}$$

por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$-mc\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{X}_\mu}{\sqrt{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Si $m = 0$ estas ecuaciones de movimiento son una identidad.

2.2.1. Acción extendida

De los momentos canónicos (2.3) se tiene la constricción

$$\phi = P_\mu P^\mu - m^2c^2 \approx 0. \tag{2.5}$$

Además, la Hamiltoniana canónica resulta nula

$$H_c = \dot{X}^\mu P_\mu - L = -mc\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{\sqrt{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} + \frac{mc\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{\sqrt{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} = 0. \tag{2.6}$$

Así, la Hamiltoniana total solo contiene la constricción ϕ

$$H_T = \frac{\lambda}{2}\left(P_\mu P^\mu - m^2c^2\right), \tag{2.7}$$

como ϕ es la única constricción y $H_c = 0$, no hay constricciones secundarias. Por lo tanto, ϕ es de primera clase y la Hamiltoniana extendida coincide con la Hamiltoniana total. De donde, la acción extendida toma la forma

$$S_E = \int d\tau\left(\dot{X}^\mu P_\mu - \frac{\lambda}{2}\left(P_\mu P^\mu - m^2c^2\right)\right). \tag{2.8}$$

Las ecuaciones de movimiento de esta acción son

$$\begin{aligned}
\dot{X}^{\mu} &= \lambda P^{\mu}, && (2.9)\\
\dot{P}^{\mu} &= 0, && (2.10)\\
\phi &= P_{\mu}P^{\mu} - m^2c^2 \approx 0. && (2.11)
\end{aligned}$$

Note que estas ecuaciones de movimiento y la acción extendida tienen sentido en el caso $m = 0$.

2.3. Acciones equivalentes

Antes de continuar veremos un resultado que ocuparemos posteriormente.

Dada una Lagrangiana, $L = L(q, \dot{q})$, existen otras que dan las mismas ecuaciones de movimiento. Un caso trivial es sumar a L una derivada total de una función de q. Sin embargo, existen casos más sofisticados. Por ejemplo, supongamos que F es una función cuya segunda derivada no es cero, entonces la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau F(L), \qquad (2.12)$$

es equivalente a

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[F(\lambda) + (L - \lambda)F'(\lambda)\right], \qquad (2.13)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange y $F' = \frac{dF}{d\lambda}$. Para probar esta afirmación basta notar que la ecuación de movimiento para el multiplicador de Lagrange es

$$L - \lambda = 0, \qquad (2.14)$$

sustituyendo esta igualdad en Eq. (2.13) se obtiene Eq. (2.12). Aplicaciones de esta equivalencia se pueden ver en [28].

Otro caso interesante se encuentra en la acción

$$S = K \int d\tau \sqrt{L}, \qquad K = \mathrm{cte}, \qquad (2.15)$$

que es equivalente a la acción

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left[\frac{L}{\lambda} + \lambda K^2\right]. \qquad (2.16)$$

En efecto, la ecuación de movimiento para λ es

$$\lambda = \frac{\sqrt{L}}{K}, \tag{2.17}$$

al sustituir este resultado en Eq. (2.16) se obtiene Eq. (2.15). Este resultado es interesante, pues existen varios sistemas físicos cuya acción es de la forma (2.15), por ejemplo la cuerda relativista [29], el sistema de Nielsen-Olesen [30], la electrodinámica de Born-Infeld [31] y la partícula libre relativista.

En este trabajo solo nos limitaremos a estudiar la partícula libre relativista, cuya acción es (2.1), por lo que su acción equivalente es

$$S_* = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{\dot{X}^2}{\lambda} + \lambda m^2 c^2\right]. \tag{2.18}$$

En este caso $K = -mc$. Note que esta acción tiene sentido en el caso $m = 0$. Para esta acción las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{X}^\mu}{\lambda}\right) &= 0 & (2.19)\\ -\frac{\dot{X}^2}{\lambda^2} + m^2c^2 &= 0. & (2.20) \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene

$$\lambda = \frac{\sqrt{\dot{X}^2}}{mc}, \tag{2.21}$$

Sustituyendo este resultado en (2.19) se obtiene (2.4).

2.4. Elección de norma y el tiempo

Dado un sistema con libertad de norma, existen diferentes condiciones de norma que se pueden imponer. El caso de la partícula relativista es particularmente interesante pues la elección de norma está relacionada con la elección del tiempo. En esta sección veremos diferentes forma de elegir el tiempo.

2.4.1. Tiempo coordenado

Una elección natural del parámetro de evolución es el tiempo coordenado X^0. En este caso la elección de norma es

$$\chi = X^0 - c\tau \approx 0. \tag{2.22}$$

La condición de consistencia implica

$$\dot{\chi} = \partial_\tau \chi + \{\chi, H_E\} = -c + \lambda P_0 = 0, \tag{2.23}$$

de donde

$$\lambda = \frac{c}{P_0}. \tag{2.24}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento reducidas toman la forma

$$\dot{X}^i = \frac{c}{P_0} P^i, \tag{2.25}$$

$$\dot{P}^i = 0. \tag{2.26}$$

Además, de la constricción

$$P_\mu P^\mu - m^2c^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2c^2 = 0, \tag{2.27}$$

se obtiene

$$P_0 = \pm\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}. \tag{2.28}$$

Así, la acción reducida toma la forma

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left(\dot{X}^\mu P_\mu - \frac{\lambda}{2}(P_\mu P^\mu - m^2c^2) \right) = \int d\tau \left(cP_0 + \dot{X}^i P_i \right) \\ &= \int d\tau \left(\dot{X}^i P_i - H_r \right), \end{aligned} \tag{2.29}$$

con $H_r = -cP_0 = \mp c\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}$, que toma el papel del Hamiltoniano reducido. Esta acción reducida es consistente con las ecuaciones de movimiento reducidas (2.25) y (2.26).

Ahora, definiendo $\chi_1 = \chi$ y $\chi_2 = \phi$ se obtiene $C_{12} = \{\chi_1, \chi_2\} = P_0$. Entonces, tenemos la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = \begin{pmatrix} 0 & P_0 \\ -P_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

cuya inversa es

$$C^{\alpha\beta} = \frac{1}{P_0}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

De donde, si A y B son dos funciones del espacio fase, los paréntesis de Dirac toman la forma

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + \frac{P_\mu}{P_0}\left(\{A,X^0\}\{P^\mu,B\} - \{A,P^\mu\}\{X^0,B\}\right). \tag{2.32}$$

En particular si $A = (X^i, P^i)$ y $B = H_r = -cP_0$ se obtiene

$$\dot{X}^i = \{X^i, H_r\}^* = \frac{cP^i}{P_0}, \tag{2.33}$$

$$\dot{P}^i = \{P^i, H_r\}^* = 0. \tag{2.34}$$

Que son las ecuaciones de movimiento reducidas.

2.4.2. El tiempo y los espacios no conmutativos

De acuerdo al método de Dirac, cualquier función χ tal que $\{\chi,\phi\} \neq 0$ es una buena condición de norma. Por ejemplo, podemos imponer

$$\chi = X^0 + \theta^i P_i - c\tau \approx 0, \qquad \theta^i = \text{cte}, \tag{2.35}$$

pues

$$\{\chi,\phi\} = P_0 \neq 0. \tag{2.36}$$

En este caso la condición de consistencia implica

$$\dot{\chi} = \partial_\tau \chi + \{\chi, H_E\} = -c + \lambda P_0 = 0, \tag{2.37}$$

de donde

$$\lambda = \frac{c}{P_0}. \tag{2.38}$$

Este es el mismo multiplicador de Lagrange que se obtuvo en la sección anterior. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento reducidas son (2.25)-(2.26). También en este caso, de la constricción ϕ se obtiene

$$P_0 = \pm\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}. \tag{2.39}$$

De donde, la acción reducida toma forma

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left(\dot{X}^\mu P_\mu - \frac{\lambda}{2}(P_\mu P^\mu - m^2c^2) \right) = \int d\tau \left(P_0 \left(c - \theta^i \dot{P}_i \right) + \dot{X}^i P_i \right) \\ &= \int d\tau \left(\pm c \sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2} - \dot{P}_i \left(\pm \sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}\theta^i + X^i \right) - \frac{d}{d\tau}(P_i X^i) \right). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de esta acción son consistentes con (2.25)-(2.26).

Ahora, definiendo $\chi_1 = \chi$ y $\chi_2 = \phi$ se obtiene $C_{12} = \{\chi_1, \chi_2\} = P_0$, por lo que $C_{\alpha\beta}$ está dada por (2.30) y $C^{\alpha\beta}$ está dada por (2.31). Por lo tanto, si A y B son dos funciones del espacio fase, los paréntesis de Dirac toman la forma

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} + \frac{P_\mu}{P_0} \left(\{A, X^0 + \theta^i P_i\}\{P^\mu, B\} - \{A, P^\mu\}\{X^0 + \theta^i P_i, B\} \right).$$

En particular, tenemos

$$\{X^i, X^j\}^* = \frac{1}{P_0} \left(P^i \theta^j - P^j \theta^i \right), \tag{2.40}$$

$$\{X^i, P_j\}^* = \delta^i_j, \tag{2.41}$$

$$\{P_i, P_j\}^* = 0. \tag{2.42}$$

Además, si $H_r = -cP_0$ se obtiene

$$\dot{X}^i = \{X^i, H_r\}^* = \frac{cP^i}{P_0}, \tag{2.43}$$

$$\dot{P}^i = \{P^i, H_r\}^* = 0. \tag{2.44}$$

Que son las ecuaciones de movimiento reducidas.

Un hecho notable es que al cuantizar el sistema con esta norma se tiene un espacio no conmutativo en las coordenadas. Un estudio más detallado de este sistema se puede ver en [32, 33].

2.4.3. El tiempo y el espacio de Snyder

Otra condición de norma para la partícula relativista que da lugar a un espacio no conmutativo es

$$\chi = P_\mu X^\mu - mc^2\tau. \tag{2.45}$$

Si la partícula tiene masa, esta es una buena condición de norma, pues

$$\{\chi, \phi\} = P_\mu P^\mu = P^2 \neq 0. \tag{2.46}$$

De donde, si

$$\dot{\chi} = \partial_\tau \chi + \{\chi, H_E\} = -mc^2 + \lambda P_\mu P^\mu = 0, \tag{2.47}$$

se tiene

$$\lambda = \frac{mc^2}{P_\mu P^\mu}. \tag{2.48}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento reducidas toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= \frac{mc^2}{P^2} P^i, && (2.49) \\ \dot{P}^i &= 0. && (2.50) \end{aligned}$$

Ahora, de $\chi = 0$ y $\phi = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} X^0 &= \frac{mc^2 - P_i X^i}{P_0}, && (2.51) \\ P_0 &= \pm\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}. && (2.52) \end{aligned}$$

Así, la acción reducida toma la forma

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left(\dot{X}^0 P_0 + \dot{X}^i P_i \right) \\ &= \int d\tau \left(-\frac{mc^2 - X^i P_i}{\sqrt{P_i P_i + m^2c^2}} P_i \dot{P}_i + \dot{X}^i P_i + \frac{d}{dt}(mc^2 - X^i P_i) \right). \end{aligned} \tag{2.53}$$

De esta acción, la ecuación de Euler-Lagrange para X^i toma la forma

$$\dot{P}_i - \frac{P_i P_j \dot{P}_j}{P_k P_k + m^2c^2} = g_{ij} P_j = 0, \qquad g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{P_i P_j}{P_k P_k + m^2c^2}. \tag{2.54}$$

Como la matriz g_{ij} tiene inversa

$$g_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + \frac{P_i P_j}{m^2c^2}, \tag{2.55}$$

la ecuación de movimiento Eq. (2.54) se puede poner como

$$\dot{P}_i = 0. \tag{2.56}$$

Mientras que las ecuaciones de Euler-Lagrange para P_i se puede escribir como

$$g_{ij}\dot{X}_j = \frac{mc^2}{P_j P_j + m^2c^2} P_i, \tag{2.57}$$

de donde

$$\dot{X}_i = \frac{P_i}{m}. \tag{2.58}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción reducida coinciden con la ecuaciones reducidas Eq. (2.49,2.50).

Un punto interesantes de las ecuaciones de Euler-Lagrange es que la métrica g_{ij} depende de los momentos.

Ahora, definiendo $\chi_1 = \chi$ y $\chi_2 = \phi$ se obtiene $C_{12} = \{\chi_1, \chi_2\} = P^2$, por lo que se tiene la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = \begin{pmatrix} 0 & P^2 \\ -P^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.59}$$

cuya inversa es

$$C^{\alpha\beta} = \frac{1}{P^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.60}$$

De donde, si A y B son dos funciones del espacio fase, los paréntesis de Dirac toman la forma

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} + \frac{P_\nu}{P^2}\left(\{A, X^\beta P_\beta\}\{P^\nu, B\} - \{A, P^\nu\}\{X^\beta P_\beta, B\}\right)$$

En particular, se tiene que

$$\{X^\mu, X^\nu\}^* = \frac{1}{P^2}\left(P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu\right) \tag{2.61}$$

$$\{X^\mu, P_\nu\}^* = \delta^\mu_\nu - \frac{1}{P^2} P^\mu P_\nu \tag{2.62}$$

$$\{P_\mu, P_\nu\}^* = 0. \tag{2.63}$$

Este resultado es interesante, pues al cuantizar este sistema se tendrá un espacio tiempo no conmutativo. De hecho las reglas de cuantización que se obtienen son consistentes con reglas de conmutación del llamado espacio de Snyder [7].

Así, tenemos una realización del espacio de Snyder. En el próximo capítulo veremos algunas propiedades de ese espacio. En particular veremos que en este espacio las coordenadas espaciales tienen valores propios discretos. Para el caso particular de la realización que hemos obtenido las coordenadas espaciales se cuantizan en cuantos de la longitud de Compton $a = \hbar/mc$.

Más detalles de la realización del espacio de Snyder aquí mostrada se puede ver en [10]. Esta realización tiene un problema, pues si $m = 0$, pierden sentido los paréntesis de Dirac. Posteriormente daremos una realización de este espacio sin dicho problema.

2.4.4. Tiempo propio

Otro parámetro que se puede ocupar como tiempo es el tiempo propio. Este tiempo se define como el tiempo en el sistema de referencia de la partícula. Recordemos que para una partícula libre en cualquier sistema de referencia el elemento de línea es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^i dx_i. \tag{2.64}$$

En el sistema de referencia de la partícula, (ct', x'^i), se tiene $dx'^i = 0$, por lo que,

$$ds^2 = c^2 dt'^2. \tag{2.65}$$

Así, el tiempo propio se define como

$$dt' = d\tau_p = \frac{dS}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \tag{2.66}$$

Esta elección de tiempo es invariante relativista, pues ds es un escalar de Lorentz. De (2.66) se puede ver que al tomar el tiempo propio como parámetro de evolución, es decir, $d\tau = ds$, se tiene

$$1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{dX^\mu}{ds}\frac{dX_\mu}{ds}}. \tag{2.67}$$

Con este parámetro de evolución las ecuaciones de movimiento Lagrangianas (2.4) toman la forma

$$\frac{d^2 X_\mu}{d\tau_p^2} = 0. \tag{2.68}$$

Para las ecuaciones de movimiento de la acción equivalente (2.19)-(2.20) tomar este parámetro de evolución equivale a tomar la condición

$$\lambda = \frac{1}{m}. \tag{2.69}$$

En este caso la acción reducida equivalente (2.18) toma la forma

$$S_* = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(m\dot{X}^2 + mc^2\right). \tag{2.70}$$

Si $m = 0$ no existe definición de tiempo propio, pues $dS^2 = 0$. Sin embargo, en este caso en la acción (2.18) podemos tomar la condición $\lambda = 1/m_\nu$, con $m_\nu = h\nu/c^2$ por lo que la acción reducida toma la forma

$$S_* = \frac{m_\nu}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{X}^2\right). \tag{2.71}$$

Mientras que, si $m = 0$, las ecuaciones de movimiento (2.19)-(2.20) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2X^\mu}{ds^2} &= 0 \\ \dot{X}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Que son consistentes con las ecuaciones de movimiento para una partícula libre sin masa.

Ahora, si definimos $m_\gamma = m$ si $m \neq 0$ y $m_\gamma = h\nu/c^2$ si $m = 0$ las acciones Eq. (2.70) y Eq. (2.71) se pueden poner como

$$S_* = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(m_\gamma\dot{X}^2 + mc^2\right). \tag{2.73}$$

En la próxima sección ocuparemos esta acción para generalizar la partícula relativista.

2.5. Generalización de la Partícula Relativista

En la sección anterior vimos que si tomamos como parámetro de evolución al tiempo propio, la acción Eq. (2.18) toma la forma (2.73). Claramente (2.73) ya no es invariante bajo reparametrizaciones. Ahora, si reparametrizamos nuevamente a esta acción obtenemos

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \left(m_\gamma \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{\dot{\zeta}} + mc^2 \dot{\zeta} \right). \tag{2.74}$$

Esta acción es invariante bajo reparametrizaciones y es una generalización de la partícula relativista, note en el caso $\dot{\zeta} = 1$ se obtiene el caso usual en la norma del tiempo propio. Al hacer la reparametrización de (2.73) hemos introducido el parámetro ζ en el espacio de configuraciones, supondremos que éste es invariante ante el grupo de transformaciones de Lorentz.

Para ver como difiere este nuevo sistema con el usual, pasemos al formalismo canónico. Los momentos canónicos que se obtienen de Eq. (2.74) son

$$P_\mu = m_\gamma \frac{\dot{X}_\mu}{\dot{\zeta}}, \tag{2.75}$$

$$P_\zeta = \frac{1}{2}\left(-m_\gamma \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{\dot{\zeta}^2} + mc^2 \right). \tag{2.76}$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{P}_\mu = 0, \tag{2.77}$$

$$\dot{P}_\zeta = 0. \tag{2.78}$$

De donde se obtiene la constricción

$$\phi = P_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma}\left(P_\mu P^\mu - m^2 c^2 \right) \approx 0. \tag{2.79}$$

Note que esta constricción implica que, si $P_\zeta \neq 0$, entonces $P_\mu P^\mu - m^2 c^2 \neq 0$, es decir cambia la relación de dispersión. Además de Eq. (2.76) se obtiene

$$\frac{\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{\dot{\zeta}^2} = \left(c^2 - \frac{2}{m_\gamma} P_\zeta \right), \tag{2.80}$$

y tomando a $\tau = \tau_p$, con τ_p el tiempo propio, por la Eq. (2.66) se obtiene

$$\frac{1}{\dot{\zeta}^2} = \left(1 - \frac{2}{m_\gamma c^2} P_\zeta \right), \tag{2.81}$$

de donde

$$\tau_p = \zeta \left(1 - \frac{2}{m_\gamma c^2} P_\zeta \right)^{\frac{1}{2}} = \zeta \left(1 - \left(P_\mu P^\mu + m^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.82}$$

Por lo tanto, hay una relación entre ζ y el tiempo propio τ_p. También note que esta relación implica

$$P_\zeta \leq \frac{m_\gamma c^2}{2}. \tag{2.83}$$

Para el caso $P_\zeta < 0$, Eq. (2.79) se puede poner como

$$P_\mu P^\mu - m_{eff}^2 c^2 = 0, \tag{2.84}$$

con

$$m_{eff}^2 = m^2 + \frac{2m_\gamma |P_\zeta|}{c^2}.$$

Por lo que se modifica la masa de la partícula.

Ahora, se puede ver que la Hamiltoniana canónica es nula, por lo que no tendremos más constricciones. Por lo tanto, la constricción Eq. (2.79) es de primera clase y la Hamiltoniana total es igual a la Hamiltoniana extendida:

$$H_T = H_E = \lambda \left(P_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma} \left(P_\mu P^\mu - m^2 c^2 \right) \right). \tag{2.85}$$

La acción extendida toma la forma

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left[P_\zeta \dot{\zeta} + P_\mu \dot{X}^\mu - \lambda \left(P_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma} \left(P_\mu P^\mu - m^2 c^2 \right) \right) \right]. \tag{2.86}$$

Posteriormente ocuparemos esta acción para dar una propuesta de la acción de un sistema Hamiltoniano en un espacio no conmutativo.

2.5.1. Condiciones de norma

Para este sistema existen diferentes condiciones de norma. Veamos algunas de ellas.

Claramente una buena condición de norma es

$$\chi = \zeta - \tau. \tag{2.87}$$

Para este caso las ecuaciones de movimiento reducidas se pueden escribir como

$$\ddot{X}_\mu = 0, \tag{2.88}$$

$$\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu = c^2 l, \qquad l = \text{cte}. \tag{2.89}$$

Si $l = 0$ tenemos las ecuaciones de movimiento de una partícula relativista sin masa, si $l < 0$ tenemos una partícula relativista con masa, si $l > 0$ tenemos un taquión.

2.5.2. El quantum del espacio y el quantum del tiempo

Hay otras condiciones de norma que se pueden imponer a este sistema, una particularmente interesante está dada por

$$\chi_1 = A\tau + B\zeta + C\eta P_\zeta + X^\mu P_\mu, \qquad A, B, C = \text{cte.} \tag{2.90}$$

Esta es una buena condición de norma pues si definimos $\chi_1 = \chi$, y $\chi_2 = \phi$, se cumple

$$\begin{aligned} C_{12} = \{\chi_1, \chi_2\} &= B + CP_\zeta + \frac{1}{m_\gamma} P_\mu P^\mu \\ &= B + \frac{1}{m_\gamma}\left[\left(1 - \frac{C}{2}\right) P_\mu P^\mu + C\frac{m^2c^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Por lo que se tiene la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = \{\chi_1, \chi_2\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.92}$$

cuya inversa es

$$C^{\alpha\beta} = \frac{1}{\{\chi_1, \chi_2\}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.93}$$

De donde, los paréntesis de Dirac son

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} + \frac{1}{\{\chi_1, \chi_2\}} \left(\{A, \chi\}\{\phi, B\} - \{A, \phi\}\{\chi, B\}\right). \tag{2.94}$$

Si A y B solo dependen del espacio fase reducido, es decir, si $A = A(X^\mu, P^\mu)$, $B = B(X^\mu, P^\mu)$, se tiene

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* &= \{A, B\} + \frac{P_\alpha}{m_\gamma\{\chi_1, \chi_2\}}\Big(\{A, X^\beta P_\beta\}\{P^\alpha, B\} - \\ &\qquad \{A, P^\alpha\}\{X^\beta P_\beta, B\}\Big). \end{aligned} \tag{2.95}$$

En particular

$$\{X_\mu, X_\nu\}^* = \frac{-b}{\hbar^2} L_{\mu\nu}, \qquad L_{\mu\nu} = \left(X_\mu P_\nu - P_\mu X_\nu\right), \tag{2.96}$$

$$\{X_\mu, P_\nu\}^* = \eta_{\mu\nu} - \frac{b}{\hbar^2} P_\mu P_\nu, \tag{2.97}$$

$$\{P_\mu, P_\nu\}^* = 0, \tag{2.98}$$

con

$$b=\frac{\hbar^2}{Bm_\gamma+\left(1-\frac{C}{2}\right)P_\mu P^\mu+\frac{C}{2}m^2c^2}. \tag{2.99}$$

Ahora, de acuerdo al formalismo canónico para cuantizar este sistema debemos promover los paréntesis de Dirac a conmutadores. Por lo tanto, con este sistema tenemos una realización de un espacio-tiempo no conmutativo semejante al de Snyder [7]. Note que b tiene sentido aún para el caso $m=0$. En principio, el hecho de que b dependa del momento podría implicar un problema de ordenamiento en las reglas de cuantización, sin embargo, como se cumple

$$\{P_\alpha P^\alpha, X_\mu P_\nu - P_\mu X_\nu\}^* = \{P_\alpha P^\alpha, P_\mu P_\nu\}^* = 0 \tag{2.100}$$

no existe este problema.

Como se puede observar, en general b no es una constante. No obstante, para el caso particular $C=2, B=m_\gamma c^2$ se tiene

$$b^2=\frac{\hbar^2}{m_\gamma^2c^2+m^2c^2}. \tag{2.101}$$

Por lo que con estos valores para C y B se obtiene un espacio de Snyder. En el próximo capítulo veremos que en este caso los cuantos de longitud están dados por

$$b=\frac{\hbar}{\sqrt{m_\gamma^2c^2+m^2c^2}}. \tag{2.102}$$

Sin embargo, si $B<2$ entonces b es constante solo en límite $P_\mu P_\mu << 1$, es decir, en este límite tendremos espacio discreto. Para el límite $P_\mu P_\mu >> 1$ se tiene $b\rightarrow 0$, por lo que se recupera el espacio continuo.

Ahora, si tomamos $C=2$ y $B=-2m_\gamma c^2$, entonces se tiene $d=-a^2$ negativa, por lo que los paréntesis de Dirac toman la forma

$$\{X_\mu, X_\nu\}^* = \frac{a^2}{\hbar^2}L_{\mu\nu}, \tag{2.103}$$

$$\{X_\mu, P_\nu\}^* = \eta_{\mu\nu}+\frac{a^2}{\hbar^2}P_\mu P_\nu, \tag{2.104}$$

$$\{P_\mu, P_\nu\}^* = 0. \tag{2.105}$$

Con estos parámetros también se tiene un espacio-tiempo no conmutativo. En el próximo capítulo veremos que este espacio tiene las coordenadas continuas y el tiempo discreto. De hecho el tiempo se cuantiza en unidades de

$$\frac{a}{c} = \frac{\hbar}{c^2\sqrt{2m_\gamma^2 - m^2}}. \tag{2.106}$$

Cabe mencionar que esta realización de espacios no conmutativos no pierde sentido cuando $m = 0$.

2.5.3. Condiciones de Borde y la acción general

Las condiciones de borde son un elemento importante para cuantizar la teoría [34], por esta razón veremos las condiciones de borde consistente con este sistema

Como las variables X^μ no conmutan, no es posible fijarlas en la frontera al mismo tiempo. Ahora, partiendo de (2.96)–(2.98) se puede mostrar que $\{P_\zeta, P_\mu\}^* = 0$. Entonces, (P_ζ, P_μ) forman un conjunto de variables que se pueden fijar en la frontera. En este caso la acción correspondiente es

$$\begin{aligned} S_{sp} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big(-\zeta \dot{P}_\zeta - X^\mu \dot{P}_\mu \\ &\quad -\lambda\left(P_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma}\left(P_\mu P^\mu - m^2c^2\right)\right)\Big). \end{aligned} \tag{2.107}$$

Si sustituimos en esta acción las constricciones χ_1 y χ_2, se obtiene

$$S_{rsp} = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(X^\mu + \frac{P^\mu}{m_\gamma}\left(\frac{A + X^\alpha P_\alpha}{B - Ch}\right)\right)\dot{P}_\mu, \tag{2.108}$$

con $h = \frac{1}{2m_\gamma}(P_\mu P^\mu - m^2c^2)$. Para esta acción las condiciones de borde son

$$P_\mu(\tau_1) = P_{\mu 1}, \qquad P_\mu(\tau_2) = P_{\mu 2}. \tag{2.109}$$

Note que si tomamos $A = 0$ en la constricción χ_1, los paréntesis de Dirac (2.96)-(2.98) no cambian, considerando este caso y usando (2.102) podemos definir

$$G^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \frac{P^\alpha P^\beta}{m_\gamma(B - Ch)} = \eta^{\alpha\beta} + \frac{P^\alpha P^\beta d}{\hbar^2 - P_\mu P^\mu d},$$

por lo que (2.108) toma la forma

$$S_{rsp} = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau G^{\alpha\beta}(P) X_\alpha \dot{P}_\beta. \tag{2.110}$$

A $G^{\alpha\beta}(P)$ la podemos interpretar como el inverso de una métrica $G_{\alpha\beta}(P)$ que depende de los momentos. Así, Eq. (2.110) se puede interpretar como una acción con una métrica que depende de los momentos. Ahora, para un sistema con Hamiltoniana H en un espacio tiempo curvo con métrica $G_{\alpha\beta}(X)$, la acción Hamiltoniana es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big(d\tau G_{\alpha\beta}(X) \dot{X}^{\alpha} P^{\beta} - H(X, P) \Big). \tag{2.111}$$

Entonces, si tenemos un sistema Hamiltoniano $H(X, P)$ en un espacio tiempo con una métrica $g_{\alpha\beta}(P)$ que depende de los momentos, tomando como analogía la acción (2.111), proponemos la acción Hamiltoniana del sistema como

$$S_S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big(-g^{\alpha\beta}(P) X_{\alpha} \dot{P}_{\beta} - H(X, P) \Big). \tag{2.112}$$

Veamos cual es la dinámica de esta acción, las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir como

$$\dot{P}_{\alpha} = -g_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial X_{\beta}}, \tag{2.113}$$

$$\dot{X}_{\alpha} = -g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g^{\rho\gamma}}{\partial P_{\beta}} - \frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial P_{\rho}} \right) X_{\gamma} g_{\rho\nu} \frac{\partial H}{\partial X_{\nu}} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial P_{\beta}}. \tag{2.114}$$

Note que ocupando $g_{\nu\beta} g^{\beta\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu}$ se tiene que

$$g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\beta\alpha}}{\partial P_{\gamma}} = -g^{\beta\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial P_{\gamma}}, \tag{2.115}$$

por lo que, renombrando índices, la ecuación de movimiento para X se puede escribir como

$$\dot{X}_{\alpha} = \left(g_{\alpha\beta} g^{\rho\gamma} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial P_{\beta}} - g_{\nu\beta} g^{\rho\gamma} \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial P_{\beta}} \right) X_{\gamma} \frac{\partial H}{\partial X_{\nu}} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial P_{\beta}}. \tag{2.116}$$

Veamos que tipo de estructura simpléctica es consistente con este sistema. Definiendo la estructura simpléctica del sistema como las matrices antisimétricas

$$\{X_{\alpha}, X_{\beta}\} = -\{X_{\beta}, X_{\alpha}\}, \tag{2.117}$$

$$\{P_{\alpha}, P_{\beta}\} = -\{P_{\beta}, P_{\alpha}\}, \tag{2.118}$$

$$\{P_{\alpha}, X_{\beta}\} = -\{X_{\beta}, P_{\alpha}\}, \tag{2.119}$$

tales que

$$\dot{P}_\alpha = \{P_\alpha, X_\beta\}\frac{\partial H}{\partial X_\beta} + \{P_\alpha, P_\beta\}\frac{\partial H}{\partial P_\beta}, \tag{2.120}$$

$$\dot{X}_\alpha = \{X_\alpha, X_\beta\}\frac{\partial H}{\partial X_\beta} + \{X_\alpha, P_\beta\}\frac{\partial H}{\partial P_\beta}, \tag{2.121}$$

se tiene

$$\{X_\alpha, X_\beta\} = \left(g_{\alpha\beta}g^{\rho\gamma}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial P_\beta} - g_{\nu\beta}g^{\rho\gamma}\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial P_\beta}\right)X_\gamma, \tag{2.122}$$

$$\{X_\alpha, P_\beta\} = g_{\alpha\beta}, \tag{2.123}$$

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0. \tag{2.124}$$

Si $g_{\alpha\beta}$ es constante se tiene el caso usual. Sin embargo, en el caso genérico se tiene una nueva estructura simpléctica. Por ejemplo, si (2.122) no es cero al cuantizar el sistema se tiene un espacio tiempo no conmutativo. En particular si consideramos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - f(P^2)P_\mu P_\nu, \tag{2.125}$$

cuya inversa es

$$g^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{f(P^2)P_\mu P_\nu}{1 - f(P^2)P^2}, \tag{2.126}$$

se tiene

$$\{X_\alpha, X_\beta\} = -f(P^2)\left(X_\alpha P_\beta - X_\beta P_\alpha\right), \tag{2.127}$$

$$\{X_\alpha, P_\beta\} = \eta_{\mu\nu} - f(P^2)P_\mu P_\nu, \tag{2.128}$$

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0. \tag{2.129}$$

Que son consistentes con los paréntesis de Dirac (2.96)-(2.98). Sin embargo, se debe notar que en este caso la no conmutatividad no surge por imponer una condición de norma, como sí ocurre en los ejemplo vistos anteriormente. Para este sistema la no conmutatividad surge por tomar una métrica que depende de los momentos $g^{\mu\nu}(P)$.

Ahora, supongamos que tenemos un espacio Θ_a ($a = 1, ..., 2n$) que tiene estructura simpléctica $\{\Theta_a, \Theta_b\}$, entonces si A y B funciones de Θ_a el paréntesis de Poisson generalizado se define como [35]

$$\{A, B\} = \{\Theta_a, \Theta_b\}\frac{\partial A}{\partial \Theta_a}\frac{\partial B}{\partial \Theta_b}. \tag{2.130}$$

En particular para la estructura simpléctica (2.122)-(2.124) se tiene

$$\{A, B\} = \{X_\alpha, X_\beta\}\frac{\partial A}{\partial X_\alpha}\frac{\partial B}{\partial X_\beta} + g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial A}{\partial X_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\beta} - \frac{\partial A}{\partial P_\beta}\frac{\partial B}{\partial X_\alpha}\right). \tag{2.131}$$

Un punto interesante de estos sistemas es que con la transformación de coordenadas en el espacio fase

$$\tilde{X}^\alpha = g^{\alpha\beta}(P)X_\beta, \tag{2.132}$$
$$\tilde{P}_\alpha = P_\alpha, \tag{2.133}$$

la estructura simpléctica (2.122)-(2.124) toma la forma usual

$$\{\tilde{X}_\mu, \tilde{X}_\nu\} = 0, \tag{2.134}$$
$$\{\tilde{X}^\mu, \tilde{P}_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \tag{2.135}$$
$$\{\tilde{P}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = 0. \tag{2.136}$$

Donde ahora el Hamiltoniano es $H(X(\tilde{X}, \tilde{P}), \tilde{P})$. Esta transformación corresponde a la llamada transformación de Darboux [35]. Sin embargo, esta transformación tiene problemas de ordenamiento a nivel cuántico, por lo que posiblemente se obtengan sistemas inequivalentes. Un estudio más detallado de sistemas de este tipo lo veremos en un trabajo posterior.

En la próximo capítulo veremos algunos ejemplos de espacios tipo Snyder y estudiaremos algunas de sus propiedades interesante.

Capítulo 3

Espacios discretos

3.1. Introducción

En el capítulo anterior vimos sistemas que dan origen a algunos espacios no conmutativos, en particular el espacio de Snyder. También dijimos que esos espacios tienen un sector discreto. Por completez, ahora veremos que efectivamente esos espacios son discretos y estudiaremos algunas de sus propiedades. Primero mostraremos la construcción original del espacio de Snyder y partiendo de esta construiremos otros espacios no conmutativos.

3.2. Espacios tipos Snyder

Para entender la construcción original del espacio de Snyder, supongamos que tenemos un espacio de dimensión $D+2$ con $\zeta^A = (\zeta^0, \zeta^1, ..., \zeta^D, \zeta^{D+1})$ un vector y la métrica plana η, con la signatura $sig(\eta) = (+1, -1, -1, ..., -1)$, es decir

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{ii} = -1, \qquad (i = 1, ..., D+1) \tag{3.1}$$

y cero en cualquier otro caso. Las transformaciones Λ que dejan invariante la forma cuadrática $\tilde{S}^2 = \zeta^T \eta \zeta = (\zeta^0)^2 - (\zeta^1)^2 - (\zeta^2)^2 - ... - (\zeta^D)^2 - (\zeta^{D+1})^2$ deben cumplir

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{3.2}$$

Se puede mostrar que el conjunto de las transformaciones Λ forma un grupo, el grupo de Lorentz, $SO(D+1,1)$, en $D+2$ dimensiones. Ahora, si tenemos una transformación infinitesimalmente cercana a la identidad, $\Lambda = I + \epsilon M$, con I la matriz identidad, entonces (3.2) implica

$$(I + \epsilon M)^T \eta (I + \epsilon M) = \eta, \tag{3.3}$$

de donde $M^T \eta = -\eta M$. En componentes se tiene

$$M_{AB} = -M_{BA}. \tag{3.4}$$

Estas matrices son los generadores del grupo $SO(D+1, 1)$ [36]. Para obtener los generadores del grupo en el espacio de ζ^B basta considerar la transformación infinitesimal $\delta\zeta^A = \epsilon M^A{}_B \zeta^B$ [36], con la que se define

$$V = \delta\zeta^A \frac{\partial}{\partial \zeta^A}. \tag{3.5}$$

De forma explícita se tiene

$$\begin{aligned} V &= \epsilon M^A{}_B \zeta^B \frac{\partial}{\partial \zeta^A} = \epsilon M_{AB} \zeta^B \frac{\partial}{\partial \zeta_A} \\ &= \epsilon M_{0i} \left(\zeta^i \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \right) + \epsilon \frac{1}{2} M_{ji} \left(\zeta^i \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \zeta^j \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Así, podemos definir los operadores

$$l^{0i} = \zeta^i \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_i}, \tag{3.7}$$

$$l^{ji} = \zeta^i \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \zeta^j \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \tag{3.8}$$

Ahora, nos restringiremos al espacio de dimensión $D+1$, con $\zeta^\mu = (\zeta^0, \zeta^1, ..., \zeta^D)$ y a las transformaciones de $SO(D+1, 1)$ en este espacio reducido, el cual es el grupo de Lorentz $SO(D, 1)$. Note que bajo esas transformaciones restringidas la variable ζ^{D+1} es invariante. Por lo que, en ese espacio reducido el vector $R^\mu = l^{\mu D+1}$ es contravariante. Con este vector se puede definir el operador hermítico

$$\hat{X}^\mu = -ia \left(\zeta^{D+1} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} - \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta_{D+1}} \right), \tag{3.9}$$

con a una constante con unidades de longitud. Por lo que se puede definir el operador de pseudodistancia

$$\hat{S}^2 = \hat{X}_\mu \hat{X}^\mu, \tag{3.10}$$

que es invariante de Lorentz. Así el espacio tiempo compuesto por $\hat{X}_\mu$ es compatible con las transformaciones de Lorentz.

Una propiedad interesante de este espacio tiempo es que tiene un sector discreto, veamos como ocurre esto. Primero notemos que si $\varphi_0 = \text{arctanh}\frac{\zeta^0}{\zeta^{D+1}}$, entonces $\psi_0 = e^{-iL\varphi_0}$ es función propia de $\hat{X}_0$

$$\hat{X}_0\psi_0 = aL\psi_0. \tag{3.11}$$

En este caso L puede tomar cualquier valor real.

Ahora, si $\varphi_i = \arctan\frac{\zeta^i}{\zeta^{D+1}}$, entonces $\psi_i = e^{-i\tilde{L}\varphi_i}$ es función propia de $\hat{X}_i$

$$\hat{X}_i\psi_i = a\tilde{L}\psi_i. \tag{3.12}$$

Como la función tangente tiene periodo 2π, entonces $\varphi_i + 2\pi = \arctan\frac{\zeta^i}{\zeta^{D+1}}$. Por lo tanto, para que la función de onda no sea multivaluada se debe restringir los valores de $\tilde{L}$ a los números enteros,

$$\hat{X}_i\psi_i = aN\psi_i, \tag{3.13}$$

con N un entero. Esto quiere decir que el espacio se discretiza en cuantos de a. Por lo tanto, el espacio de Snyder es un espacio discreto consistente con la simetría de Lorentz.

Además si definimos

$$\hat{P}_\mu = \frac{-\hbar}{a}\frac{\zeta_\mu}{\zeta^{D+1}}, \tag{3.14}$$

se tiene las reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
\left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right] &= -\frac{ia^2}{\hbar}\left(\hat{X}_\mu\hat{P}_\nu - \hat{X}_\nu\hat{P}_\mu\right), && (3.15)\\
\left[\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu\right] &= i\hbar\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{a^2}{\hbar^2}\hat{P}_\mu\hat{P}_\nu\right), && (3.16)\\
\left[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu\right] &= 0. && (3.17)
\end{aligned}$$

Esta son las reglas de conmutación del espacio de Snyder [7]. Así el espacio tiempo de Snyder es consistente con las transformaciones de Lorentz, discreto en las coordenadas espaciales y no conmutativo.

De los paréntesis de Dirac Eq. (2.61-2.63) se puede ver que en ese caso $a = \hbar/mc$ que es la longitud de Compton. Por lo tanto, para ese sistema el espacio se discretiza en términos de la longitud de Compton. Note que si $m \to 0$ entonces $a \to \infty$, lo cual no tiene sentido. Pero para los paréntesis de Dirac Eq. (2.96-2.98) con $C = 2, B = m_\gamma c^2$ los cuantos de longitud están dados por

$$b = \frac{\hbar}{\sqrt{m_\gamma^2 c^2 + m^2 c^2}}, \tag{3.18}$$

que no pierde sentido para partículas sin masa. Es interesante notar que en estos dos modelos las propiedades cuánticas del espacio tiempo está determinado por la masa.

El espacio de Snyder originalmente fue propuesto en 1947 para regularizar infinitos en teoría de campos, pero sin éxito. Este espacio parece ser muy exótico, sin embargo recientemente G. 't Hooft mostró que en la gravedad cuántica de $(2 + 1)$ dimensiones de manera efectiva se obtiene un espacio-tiempo tipo Snyder [5]. Esto sugiere que la gravedad cuántica en otras dimensiones puede implicar espacios no conmutativos semejantes al de Snyder. Otra propiedad que hace interesante al espacio de Snyder es que se puede relacionar con el espacio-tiempo llamado k-Minkowski [8], que es una arena de la teoría llamada "Relatividad especial doble", que es una propuesta alternativa para cuantizar la gravedad.

En lo que resta de este capítulo veremos otros espacios con propiedades semejantes a las del espacio de Snyder.

3.2.1. El espacio de Snyder II

Ahora veremos que es posible construir un espacio compatible con las transformaciones de Lorentz y discreto en el tiempo.

Para construir el espacio de Snyder se introdujo una dimensión espacial extra. Otra posibilidad es introducir una variable temporal extra. Supongamos que tenemos un espacio de dimensión $D + 2$ con $\zeta^A = (\zeta^0, \zeta^{0'}, \zeta^1, ..., \zeta^D)$ un vector y la métrica η, con las componentes

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{0'0'} = 1, \quad \eta_{ii} = -1, \quad i = 1, ..., D \tag{3.19}$$

y cero en otro caso. Las transformaciones Λ que dejan invariante la forma cuadrática $\tilde{S}^2 = \zeta^T \eta \zeta = (\zeta^0)^2 + (\zeta^0)^2 - (\zeta^1)^2 - (\zeta^2)^2 - ... - (\zeta^D)^2$ deben cumplir

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{3.20}$$

Estas transformaciones forman el grupo $SO(D,2)$, que es el grupo conforme. Para las transformaciones infinitesimalmente cercanas a la identidad $\Lambda = I + \epsilon M$, se tiene

$$(I+\epsilon M)^T \eta (I+\epsilon M) = \eta, \tag{3.21}$$

de donde $M^T\eta = -\eta M$. Por lo que

$$M_{AB} = -M_{BA}. \tag{3.22}$$

Entonces, podemos definir la transformación infinitesimal

$$\delta\zeta^A = \epsilon M^A{}_B \zeta^B.$$

Por lo que los generadores de $SO(D,2)$, son

$$\begin{aligned} V &= \epsilon M_{AB}\zeta^B \frac{\partial}{\partial \zeta_A} \\ &= \epsilon M_{00'}\left(\zeta^{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta_0} - \zeta^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_{0'}}\right) \\ &+ \epsilon M_{0'i}\left(\zeta^{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_{0'}} - \zeta^{0'} \frac{\partial}{\partial \zeta_{i}}\right) \\ &+ \epsilon M_{0i}\left(\zeta^{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_{0}} - \zeta^{0} \frac{\partial}{\partial \zeta_{i}}\right) \\ &+ \epsilon \frac{1}{2} M_{ji}\left(\zeta^{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_{j}} - \zeta^{j} \frac{\partial}{\partial \zeta_{i}}\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Así, podemos definir los operadores

$$l^{00'} = \zeta^{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta_0} - \zeta^0\frac{\partial}{\partial\zeta_{0'}}, \tag{3.24}$$

$$l^{i0'} = \zeta^{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta_i} - \zeta^i\frac{\partial}{\partial\zeta_{0'}}, \tag{3.25}$$

$$l^{0i} = \zeta^{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_0} - \zeta^0\frac{\partial}{\partial\zeta_{i}}, \tag{3.26}$$

$$l^{ji} = \zeta^{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_j} - \zeta^j\frac{\partial}{\partial\zeta_{i}}. \tag{3.27}$$

Ahora nos restringiremos al espacio de dimensión $(D+1)$ con $\zeta^\mu = (\zeta^0, \zeta^1, ..., \zeta^D)$ y a las transformaciones de Lorentz de este espacio reducido, que es $SO(D,1)$. Bajo esas transformaciones restringidas la variable $\zeta^{0'}$ es invariante. Por lo que, en ese espacio reducido, podemos definir el vector contravariante $R^\mu = l^{\mu 0'}$, es decir

$$\begin{aligned} R^0 = l^{00'} &= \zeta^{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta_0} - \zeta^0\frac{\partial}{\partial\zeta_{0'}}, \\ R^i = l^{i0'} &= \zeta^{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta_i} - \zeta^i\frac{\partial}{\partial\zeta_{0'}}. \end{aligned}$$

También podemos definir el operador hermítico

$$\hat{X}^\mu = -ia\left(\zeta^{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta_\mu} - \zeta^\mu\frac{\partial}{\partial\zeta_{0'}}\right), \qquad \mu = 0, 1, ..., D, \tag{3.28}$$

con a una constante con unidades de longitud. Ahora, si $\varphi_i = \text{arctanh}\frac{\zeta^i}{\zeta^{0'}}$, entonces $\psi_i = e^{-i\tilde{L}\varphi_i}$ es función propia de $\hat{X}^i$,

$$\hat{X}^i\psi_i = a\tilde{L}\psi_i. \tag{3.29}$$

En este caso $\tilde{L}$ puede tomar cualquier valor. Por otra parte, si $\varphi_0 = \arctan\frac{\zeta^0}{\zeta^{0'}}$, entonces $\psi_0 = e^{iL\varphi_0}$ es función propia de $\hat{X}^0$,

$$\hat{X}^0\psi_0 = aL\psi_0. \tag{3.30}$$

Como la función tangente tiene periodo 2π, entonces $\varphi_0 + 2\pi = \arctan\frac{\zeta^0}{\zeta^{0'}}$. Así, para que ψ_0 no sea multivaluada se debe restringir los valores de L a los números enteros. Entonces, el tiempo se cuantiza de la forma

$$t_N = N\frac{a}{c},$$

con N un entero. Es decir, tenemos un espacio tiempo discreto en el tiempo que es consistente con las transformaciones de Lorentz.

Además si definimos

$$\hat{P}_\mu = \frac{-\hbar}{a}\frac{\zeta_\mu}{\zeta^{0'}}, \tag{3.31}$$

se tiene las reglas de conmutación

$$\left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right] = \frac{ia^2}{\hbar}\left(\hat{X}_\mu\hat{P}_\nu - \hat{X}_\nu\hat{P}_\mu\right), \tag{3.32}$$

$$\left[\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu\right] = i\hbar\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{a^2}{\hbar^2}\hat{P}_\mu\hat{P}_\nu\right), \tag{3.33}$$

$$\left[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu\right] = 0. \tag{3.34}$$

Así tenemos un espacio no conmutativo consistente con la simetría de Lorentz y que es discreto en el tiempo.

Ahora, si en (2.99) se toman los valores $C = 2, B = -2m_\gamma c^2$ los paréntesis de Dirac (2.96)-(2.98) son consistentes con las reglas de conmutación (3.32)-(3.34). En este caso los cuantos del tiempo están dados por

$$\frac{a}{c} = \frac{\hbar}{c^2\sqrt{2m_\gamma^2 - m^2}}. \tag{3.35}$$

Cabe mencionar que esta realización no pierde sentido cuando $m = 0$.

Otros modelos discretos en el tiempo se pueden ver en [37, 38, 39], la referencia [38] es particularmente notable pues es un modelo invariante de Lorentz. También cabe mencionar que recientemente se han propuesto algunos modelos con más de una coordenada temporal. Por ejemplo en [40] se propuso un sistema mecánico con dos coordenadas temporales que funciona como un modelo de unificación a nivel de mecánica clásica. Una propuesta con dos coordenadas temporales a nivel de teoría de cuerdas se puede ver en [41].

3.3. Espacios tipo Yang

Ahora veremos que es posible construir cuatro espacios no conmutativos compatibles con la simetría de Lorentz y traslacional.

Un problema que tiene el espacio de Snyder es que no es invariante bajo traslaciones. Basado en esta observación C. N. Yang propuso otra versión de espacio no conmutativo que es invariante bajo traslaciones infinitesimales [18]. El espacio de Yang también es discreto en las coordenadas espaciales.

En esta sección veremos que, además del espacio de Yang, es posible construir otros espacios no conmutativos que son invariantes bajo las trasformaciones de Lorentz y traslaciones infinitesimales. Todos esos espacios resultan ser discretos en las coordenadas espaciales o en la coordenada temporal.

La construcción del espacio de Yang se basa en introducir una variable extra en el espacio de Snyder y considerar una definición de momento diferente a (3.14). Veamos como se construye este espacio. Supongamos que tenemos un espacio tiempo plano de dimensión $D+3$ con las coordenadas $(\zeta^0, \zeta^1, ..., \zeta^D, \zeta^r, \zeta^{r'})$.

Donde las componentes diferentes de cero de la métrica son

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{ii} = -1, \quad \eta_{rr} = (-)^s, \quad \eta_{r'r'} = (-)^{s'}. \tag{3.36}$$

Aquí, $s = 0$ ($s' = 0$) si ζ^r ($\zeta^{r'}$) es coordenada temporal y $s = 1$ ($s' = 1$) si ζ^r ($\zeta^{r'}$) es coordenada espacial.

De la misma forma que los casos anteriores, podemos definir la forma cuadrática $\tilde{S}^2 = \zeta^T \eta \zeta = (\zeta^0)^2 - (\zeta^1)^2 - (\zeta^2)^2 - ... - (\zeta^D)^2 + (-)^s (\zeta^r)^2 + (-)^{s'} (\zeta^{r'})^2$. Claramente las transformaciones Λ que dejan invariante esta forma cuadrática debe cumplir

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{3.37}$$

Estas transformaciones forman un grupo, el cual depende de los valores de s y s'. Ahora, bajo las transformaciones que dejan invariantes las coordenadas $\zeta^r, \zeta^{r'}$, que es el grupo de Lorentz $SO(D, 1)$, se tiene los vectores contravariantes

$$\begin{aligned} \hat{X}^\mu &= -ia \left(\zeta^r \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} - \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta_r} \right), \quad \mu = 0, 1, \cdots, D, & (3.38) \\ \hat{P}^\mu &= -i \frac{\hbar}{b} \left(\zeta^{r'} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} - \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta_{r'}} \right). & (3.39) \end{aligned}$$

Donde a y b son dos constantes con unidades de longitud. Note que estos dos operadores son hermíticos. Ahora considerando esos dos operadores se tiene

$$\begin{aligned} [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] &= i \frac{a^2}{\hbar} (-)^s \hat{l}^{\mu\nu} & (3.40) \\ [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] &= \frac{i\hbar\hat{\epsilon}}{b} \eta^{\mu\nu}, & (3.41) \\ [\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] &= i \frac{\hbar}{b^2} (-)^{s'} \hat{l}^{\mu\nu}, & (3.42) \end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned} \hat{l}^{\mu\nu} &= -i\hbar \left(\zeta^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} - \zeta^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \right), & (3.43) \\ \hat{\epsilon} &= -ia \left(\zeta^r \frac{\partial}{\partial \zeta_{r'}} - \zeta^{r'} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} \right). & (3.44) \end{aligned}$$

Si definimos $\hat{L}_{\mu\nu} = \hat{X}^\mu \hat{P}^\nu - \hat{X}^\nu \hat{P}^\mu$ esta las reglas de conmutación se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \hat{L}^{\mu\nu} &= \frac{\hat{\epsilon}}{b} \hat{l}^{\mu\nu} = \frac{i(-)^{s+1}\hbar\hat{\epsilon}}{a^2 b} [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] \\ &= \frac{i(-)^{s'+1} b \hat{\epsilon}}{\hbar} [\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu]. & (3.45) \end{aligned}$$

También se tiene

$$
\begin{aligned}
[\hat{X}^\mu, \hat{\epsilon}] &= i\frac{a^2 b}{\hbar}(-)^{s+1}\hat{P}^\mu, & (3.46)\\
[\hat{P}^\mu, \hat{\epsilon}] &= i\frac{\hbar}{b}(-)^{s'}\hat{X}^\mu, & (3.47)\\
[\hat{X}^\beta, \hat{l}^{\mu\nu}] &= i\hbar\left(\hat{X}^\mu\eta^{\beta\nu} - \hat{X}^\nu\eta^{\beta\mu}\right), & (3.48)\\
[\hat{P}^\beta, \hat{l}^{\mu\nu}] &= i\hbar\left(\hat{P}^\mu\eta^{\beta\nu} - \hat{P}^\nu\eta^{\beta\mu}\right). & (3.49)
\end{aligned}
$$

Ahora, es claro que (3.40)-(3.42) son compatibles con la simetría de Lorentz y considerando (3.48)-(3.49) se puede ver que $\hat{l}^{\mu\nu}$ son los generadores de esta simetría.

Como generador de traslaciones definiremos

$$
U(\alpha) = e^{-i\alpha_\mu \hat{P}^\mu} \approx 1 - i\alpha_\mu\hat{P}^\mu, \qquad \alpha_\mu = \text{const}, \tag{3.50}
$$

esta es una buena definición, pues considerando (3.46)-(3.49) se tiene

$$
U^{-1}(\alpha)\hat{X}^\mu U(\alpha) \approx \hat{X}^\mu + \frac{\hbar}{b}\alpha^\mu\hat{\epsilon}. \tag{3.51}
$$

También se cumple

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\alpha)\hat{P}^\mu U(\alpha) &\approx \hat{P}^\mu + \frac{\hbar}{b^2}(-)^{s'+1}\alpha_\nu\hat{l}^{\nu\mu}, & (3.52)\\
U^{-1}(\alpha)\hat{l}^{\mu\nu} U(\alpha) &\approx \hat{l}^{\mu\nu} + \hbar\left(\alpha^\mu\hat{P}^\nu - \alpha^\nu\hat{P}^\mu\right). & (3.53)
\end{aligned}
$$

Aplicando estas transformaciones se puede mostrar que las reglas de conmutación (3.40)-(3.42) son compatibles con traslaciones infinitesimales. Por lo tanto, para cualquier valor de s y s' esta reglas de conmutación son compatibles con el grupo de Poincaré, que es el grupo de Lorentz más las traslaciones.

Además, considerando lo visto en las dos secciones anteriores, estos espacios tiempos son discretos en el tiempo o en las coordenadas espaciales. Por ejemplo, si $s = 1, s' = 1$, es decir cuando las dos coordenadas extras son espaciales, las coordenadas espaciales son discretas y la temporal continua. Este es el espacio que originalmente construyo Yang [18]. Cabe mencionar que en ese caso el grupo de Lorentz surge como subgrupo de $SO(D+2,1)$. Para el caso $s = 1, s' = 0$, también se tiene que las coordenadas espaciales son discretas y la temporal continua. Aquí el grupo de Lorentz surge como subgrupo de

$SO(D+1,2)$, este espacio fue reportado recientemente en [42]. Para los otros dos casos, $s=0, s'=1$ y $s=0, s'=0$, las coordenadas espaciales son continuas y la coordenada temporal discreta. En el primer caso el grupo de Lorentz surge como subgrupo de $SO(D+1,2)$ y en el otro como subgrupo de $SO(D,3)$.

3.4. Espacios discretos III

También es posible construir un espacio discreto en el espacio y tiempo. En efecto, definamos

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= ia\left(\zeta_{0'}\frac{\partial}{\partial\zeta^0} - \zeta_0\frac{\partial}{\partial\zeta^{0'}}\right), \\ \hat{X}_i &= ia\left(\zeta^{D+1}\frac{\partial}{\partial\zeta^i} + \zeta_i\frac{\partial}{\partial\zeta^{D+1}}\right), \quad i=1,...,d=D-1 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Considerando los resultados de las secciones anteriores, es claro que este espacio es discreto tanto en la coordenada espacial como en la coordenada temporal. Pero, diferencia de los espacios que vimos anteriormente, este no es compatible con las transformaciones de Lorentz, solo es compatible con las rotaciones $SO(D)$.

Definiendo los momentos canónicos

$$\hat{P}_0 = \frac{\hbar}{a}\frac{\zeta_0}{\zeta^{0'}}, \tag{3.55}$$

$$\hat{P}_i = \frac{\hbar}{a}\frac{\zeta_i}{\zeta^{D}}, \tag{3.56}$$

se tiene las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} \left[\hat{X}_0, \hat{X}_i\right] &= 0, \\ \left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] &= -\frac{ia^2}{\hbar}\left(\hat{X}_i\hat{P}_j - \hat{X}_j\hat{P}_i\right), \\ \left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] &= i\hbar\left(\eta_{ij} - \frac{a^2}{\hbar^2}\hat{P}_i\hat{P}_j\right), \\ \left[\hat{X}_0, \hat{P}_0\right] &= i\hbar\left(1 + \frac{a^2}{\hbar^2}\hat{P}_0\hat{P}_0\right), \\ \left[\hat{X}_0, \hat{P}_i\right] &= \left[\hat{X}_i, \hat{P}_0\right] = 0, \\ \left[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu\right] &= 0, \end{aligned} \tag{3.57}$$

También se puede definir la versión tipo Yang para este espacio, el cual es invariante bajo traslaciones, pero no bajo el grupo de Lorentz.

Como se mencionó en la introducción, en el regimen de la gravedad cuántica existe la posibilidad de que el espacio tiempo sea discreto. Así, posiblemente alguno de los espacios aquí presentados tenga importancia a esa escala.

Capítulo 4

Una generalización de la ecuación de Klein-Gordon

Otra cosa muy interesante y divertida es preguntar:
si yo pudiera cambiar la naturaleza en algún aspecto,
cambiar una ley física, ¿Qué sucedería?....Y entonces
me divertí haciendo otra cosa.
Supongamos que hubiera dos tiempos.
Dos espacios y dos tiempos.
¿Que tipo de mundo sería ése con dos tiempos?
Richard P. Feynman [43].

4.1. Introducción

En el segundo capítulo vimos una generalización de la partícula relativista. Ahora veremos que al cuantizar este sistema se obtiene una generalización de la ecuación de Klein-Gordon. Mostraremos que esta nueva ecuación tiene dos posibles parámetros de evolución. También veremos que con algunos potenciales externos se pueden obtener masas cuantizadas.

4.2. Cuantización del sistema

En el segundo capítulo vimos que imponiendo una condición de norma a la generalización de la partícula relativista (2.74) se puede obtener espacios reducidos consistente con espacios no conmutativos. En este caso se impuso la norma antes de cuantizar. Sin embargo, el método de Dirac no da una forma de cuantizar sin imponer la norma. Ahora veremos la cuantización de este sistema con el método de Dirac.

Como vimos en el primer capítulo, si un sistema tiene libertad de norma existen constricciones de primera clase $\phi_a(q,p)$. Entonces, para cuantizar el sistema se promueve a operadores las variables del espacio fase $q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p}$ y se impone que los estados físicos, $|\psi>$, sean tales que

$$\phi_a(\hat{q},\hat{p})|\psi>=0. \tag{4.1}$$

Para la generalización de la partícula relativista (2.74) sólo tenemos la constricción de primera clase

$$P_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma}\left(P_\mu P^\mu - m^2c^2\right) = 0. \tag{4.2}$$

Por lo que, los estados físicos del sistema deben cumplir

$$\left[\hat{P}_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma}\left(\hat{P}_\mu \hat{P}^\mu - m^2c^2\right)\right]|\psi>=0. \tag{4.3}$$

Si hacemos las asignaciones de los operadores como:

$$\hat{P}_\mu = -i\hbar\partial_\mu \qquad \text{y} \qquad \hat{P}_\zeta = -i\hbar\partial_\zeta, \tag{4.4}$$

se obtiene la ecuación de onda

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{2m_\gamma}\left(-\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu - m^2c^2\right)\right]\psi(\zeta,x) = 0. \tag{4.5}$$

Esta es una generalización de la ecuación de Klein-Gordon en cinco dimensiones. En este caso la dimensión extra, ζ, es un parámetro invariante relativista y tiene una relación con el tiempo propio τ_p (2.82).

La forma en que se dedujo la ecuación (4.5) se encuentra en [11]. Sin embargo la ecuación se debe originalmente a E. C. G. Stueckelberg [12], posteriormente fue redescubierta independientemente por Fock [13] y Y. Nambu [14]. En ella trabajó R. P. Feynman [15] y más recientemente L. P. Horwitz [16] y J. R. Fanchi [17].

En lo que resta de este capítulo estudiaremos las propiedades de Eq. (4.5).

4.3. Ecuación de Continuidad

Veamos que ocurre con la ecuación de continuidad. Supongamos que ψ es solución de la ecuación de onda (4.5) y definamos

$$\rho = \psi\psi^*, \tag{4.6}$$

con ψ^* el complejo conjugado de la función de onda. Entonces,

$$\begin{aligned}
\partial_\zeta \rho &= -\frac{\hbar}{i2m_\gamma}\left(\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^*\right) \\
&= -\frac{\hbar}{i2m_\gamma}\partial_\mu\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

De donde, si

$$J^\mu = \frac{\hbar}{i2m_\gamma}\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right), \tag{4.8}$$

se cumple la ecuación de continuidad

$$\partial_\zeta\rho + \partial_\mu J^\mu = 0. \tag{4.9}$$

Suponiendo que los campos ψ se anulan en infinito del espacio-tiempo e integrando la ecuación de continuidad (4.9) en todo el espacio-tiempo, se puede probar que se conserva la cantidad

$$Q_\zeta = \int dtdx^3\rho = \int dx^4\psi\psi^*. \tag{4.10}$$

Como ρ es definida positiva, la podemos interpretar como una densidad de probabilidad. Ahora, supongamos que ψ y ϕ son dos estados del espacio de Hilbert del sistema, entonces podemos definir el producto escalar como una generalización formal de la carga conservada:

$$< \psi|\phi >= \int dx^4\psi\phi^*. \tag{4.11}$$

Note que este producto escalar está bien definido.

Al tomar la carga conservada Q_ζ implícitamente estamos tomando a ζ como parámetro de evolución, si bien tenemos una densidad de probabilidad conservada positiva definida resulta extraño integrar sobre todo el tiempo. Sin embargo, también tenemos la opción de tomar a t como el parámetro de evolución. Considerando este último caso, al integrar sobre el espacio y el parámetro ζ a Eq. (4.9), se tiene la carga conservada

$$Q_t = \int d\zeta d^3x J^0 = \int d\zeta d^3x \frac{1}{2im_\gamma} \left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right), \tag{4.12}$$

que es similar a la carga conservada de la ecuación de Klein-Gordon [44]. Para este caso el producto escalar es

$$< \psi|\phi >= \int dx^3 d\zeta \frac{1}{2im_\gamma} \left(\psi^* \partial_t \phi - \psi \partial_t \phi^*\right). \tag{4.13}$$

Con esta opción ya no integramos sobre todo el tiempo, mas no tendremos a ζ como variable temporal por lo que perdemos la relación que tiene ζ con el tiempo propio.

4.4. Propagador para la partícula libre

En esta sección obtendremos "él" propagador para la ecuación (4.5). En la sección anterior vimos que hay dos posibles parámetros de evolución, por lo cual tendremos dos posibles propagadores. Primero estudiaremos el propagador con el parámetro de evolución ζ y posteriormente veremos el caso t. En ambos casos se tienen resultados interesantes.

4.4.1. Propagador con parámetro de evolución ζ

Supongamos que ζ es el parámetro de evolución, entonces en la representación de Schrödinger Eq. (4.3) se puede escribir como

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(\zeta) >}{\partial \zeta} = \hat{H}_\zeta |\psi(\zeta) >, \tag{4.14}$$

con

$$\hat{H}_\zeta = \frac{1}{2m_\gamma} \left(\hat{P}^\mu \hat{P}_\mu - m^2c^2\right). \tag{4.15}$$

La solución para Eq. (4.14) está dada por

$$|\psi(\zeta) >= e^{-\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}} |\psi(\zeta_0) > . \tag{4.16}$$

En esta representación $|x^\mu>$ es la base completa para los operadores $\hat{x}^\mu$ y $|p_\mu>$ es la base completa para $\hat{p}_\mu$. Estas bases satisfacen

$$
\begin{aligned}
<x^\mu|x'^\mu> &= \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu), && (4.17)\\
<p^\mu|p'^\mu> &= (2\pi\hbar)^4\delta^{(4)}(p^\mu - p'^\mu), && (4.18)\\
<x^\mu|p^\mu> &= e^{i\frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}, && (4.19)\\
\int dx^4|x^\mu><x^\mu| &= \mathbf{1}, && (4.20)\\
\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int dp^4|p^\mu><p^\mu| &= \mathbf{1}. && (4.21)
\end{aligned}
$$

En la representación de Heisenberg se tiene

$$
\begin{aligned}
|x^\mu,\zeta> &= e^{\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}|x^\mu>, && (4.22)\\
\hat{x}^\mu(\zeta) &= e^{\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}\hat{x}^\mu e^{\frac{-i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}. && (4.23)
\end{aligned}
$$

Ahora, considerando $\psi(x^\mu,\zeta) =< x^\mu|\psi(\zeta)>$, (4.16) y (4.20) se cumple

$$
\begin{aligned}
\psi(x^\mu,\zeta) &= <x^\mu|\psi(\zeta)> = <x^\mu|e^{-\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}|\psi(\zeta_0)>\\
&= \int dx'^4 <x^\mu|e^{-\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}|x'^\mu><x'^\mu|\psi(\zeta_0)>\\
&= \int dx'^4 K(x^\mu,\zeta|x'^\mu,\zeta_0)\psi(x'^\mu,\zeta_0). && (4.24)
\end{aligned}
$$

Donde

$$
K(x^\mu,\zeta|x'^\mu,\zeta_0) =< x^\mu|e^{-\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}|x'^\mu>, \qquad (4.25)
$$

es el propagador del sistema. Además, ocupando (4.21) se tiene

$$
\begin{aligned}
K(x^\mu,\zeta|x'^\mu,\zeta_0) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int dp^4 <x^\mu|e^{-\frac{i\hat{H}_\zeta(\zeta-\zeta_0)}{\hbar}}|p^\mu><p^\mu|x'^\mu>\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int dp^4 e^{i\frac{p_\mu(x^\mu-x'^\mu)}{\hbar}} e^{-\frac{i\left(p_\mu p^\mu - m^2c^2\right)(\zeta-\zeta_0)}{\hbar 2m_\gamma}}\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} e^{i\frac{m^2c^2(\zeta-\zeta_0)}{\hbar 2m_\gamma}} \int dp^4 e^{-i\left(p_\mu p^\mu\frac{(\zeta-\zeta_0)}{\hbar 2m_\gamma} + \frac{p_\mu}{\hbar}(x^\mu-x'^\mu)\right)}\\
&= \frac{e^{i\frac{m^2c^2(\zeta-\zeta_0)}{\hbar 2m_\gamma}} e^{i\frac{\left(x^\mu-x'^\mu\right)^2 m_\gamma}{2\hbar(\zeta-\zeta_0)}}}{(2\pi\hbar)^4}\int dp^4 e^{-i\frac{(\zeta-\zeta_0)}{\hbar 2m_\gamma}\left(p_\mu + \frac{m_\gamma(x^\mu-x'^\mu)}{(\zeta-\zeta_0)}\right)^2}\\
&= \frac{m_\gamma^2}{4i\pi^2\hbar^2(\zeta-\zeta_0)} e^{i\frac{m^2c^2(\zeta-\zeta_0)}{\hbar 2m_\gamma}} e^{i\frac{\left(x^\mu-x'^\mu\right)^2 m_\gamma}{2\hbar(\zeta-\zeta_0)}}. && (4.26)
\end{aligned}
$$

Este resultado fue también obtenido por R. P Feynman por medio de integrales de trayectoria [15]. Algunas aplicaciones interesantes por tomar este parámetro de evolución se pueden ver en [45, 46].

4.4.2. Propagador con parámetro de evolución t

Ahora veremos que ocurre si tomamos a t como parámetro de evolución.

El parámetro de evolución más natural es el tiempo t, pero en este caso dejamos de interpretar a ζ como una variable temporal y la tomaremos como una variable espacial más. Despejando a P_0 de Eq. (2.79) obtenemos

$$P_0 = \pm\sqrt{P_i^2 + m^2c^2 - 2m_\gamma P_\zeta}. \tag{4.27}$$

Pasando al formalismo cuántico, tenemos que los estados físicos $|\psi(t)>$ satisfacen:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)>}{\partial t} = \hat{H}_t|\psi(t)>, \tag{4.28}$$

con

$$\hat{H}_t = \sqrt{\hat{P}_i^2 + m^2c^2 - 2m_\gamma \hat{P}_\zeta}. \tag{4.29}$$

La solución de la ecuación (4.28) es

$$|\psi(t)>= e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}|\psi(t_0)> . \tag{4.30}$$

Para este caso $|\vec{x},\zeta>$ y $|\vec{p},p_\zeta>$ se satisfacen

$$\begin{aligned}
<\vec{x},\zeta|\vec{x}',\zeta'> &= \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(\zeta-\zeta'), &(4.31)\\
<\vec{p},p_\zeta|\vec{p}',p'_\zeta> &= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta\left(p_\zeta-p'_\zeta\right), &(4.32)\\
<\vec{x},\zeta|\vec{p},p_\zeta> &= e^{i\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}+p_\zeta\zeta}{\hbar}}, &(4.33)\\
\int dx^3 d\zeta|\vec{x},\zeta><\vec{x},\zeta| &= \mathbf{1}, &(4.34)\\
\int dp^3 dp_\zeta\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}|\vec{p},p_\zeta><\vec{p},p_\zeta| &= \mathbf{1}. &(4.35)
\end{aligned}$$

Además, en la representación de Heisenberg se tiene

$$\begin{aligned}
|\vec{x},\zeta,t> &= e^{i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}|\vec{x},\zeta>, &(4.36)\\
\hat{x}_i(t) &= e^{i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}\hat{x}_i e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}, &(4.37)\\
\hat{\zeta}(t) &= e^{i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}\hat{\zeta} e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}. &(4.38)
\end{aligned}$$

Ahora, la función de onda en el espacio de configuraciones es

$$\psi\left(\vec{x},\zeta,t\right) =< \vec{x},\zeta|\psi(t)> . \tag{4.39}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \psi\left(\vec{x},\zeta,t\right) &= < \vec{x},\zeta|e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}|\psi(t_0)> \\ &= \int dx'^3 d\zeta' < \vec{x},\zeta|e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}|\vec{x}',\zeta'>< \vec{x}',\zeta'|\psi(t_0)> \\ &= \int dx'^3 d\zeta' G\left(\vec{x},\zeta,t|\vec{x}',\zeta',t_0\right)\psi\left(\vec{x}',\zeta',t_0\right). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Aquí

$$G\left(\vec{x},\zeta,t|\vec{x}',\zeta',t_0\right) =< \vec{x},\zeta|e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}|\vec{x}',\zeta'> \tag{4.41}$$

es el propagador del sistema con el parámetro de evolución t. Ocupando (4.35) se tiene

$$\begin{aligned} G\left(\vec{x},\zeta,t|\vec{x}',\zeta',t_0\right) &= \int \frac{dp^3 dp_\zeta}{(2\pi\hbar)^4} < \vec{x},\zeta|e^{-i\frac{\hat{H}_t(t-t_0)}{\hbar}}|\vec{p},p_\zeta>< \vec{p},p_\zeta|\vec{x}',\zeta'> \\ &= \int \frac{dp^3 dp_\zeta}{(2\pi\hbar)^4} e^{i\frac{\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')+p_\zeta(\zeta-\zeta')}{\hbar}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4-2m_\gamma c^2 p_\zeta}\frac{(t-t_0)}{\hbar}} \\ &= \int_0^\infty dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty dp_\zeta \frac{p^2\sin\theta}{(2\pi\hbar)^4} e^{i\frac{p|\vec{x}-\vec{x}'|+p_\zeta(\zeta-\zeta')}{\hbar}} \\ &\quad \left(e^{-i\sqrt{p^2c^2+m^2c^4-2m_\gamma c^2 p_\zeta}\frac{(t-t_0)}{\hbar}}\right). \end{aligned}$$

Integrando sobre θ y φ obtenemos

$$\begin{aligned} G\left(\vec{x},\zeta,t|\vec{x}',\zeta',t_0\right) &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^\infty dp \int_{-\infty}^\infty dp_\zeta p \sin\left(\frac{p|\vec{x}-\vec{x}'|}{\hbar}\right) e^{i\frac{p_\zeta(\zeta-\zeta')}{\hbar}} \\ &\quad \left(e^{-i\sqrt{p^2c^2+m^2c^4-2m_\gamma c^2 p_\zeta}\frac{(t-t_0)}{\hbar}}\right). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Un resultado interesante es que si definimos

$$G_R(\vec{x},t|\vec{x}',t_0) = \int d\zeta G(x,\zeta,t|x',\zeta',t_0), \tag{4.43}$$

se tiene

$$\begin{aligned} G_R(\vec{x},t|\vec{x}',t_0) &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^2|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ &\quad \int_0^\infty dpp \sin\left(\frac{p|\vec{x}-\vec{x}'|}{\hbar}\right) e^{-i\frac{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}(t-t_0)}{\hbar}}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Este es el propagador de la partícula libre relativista estándar [44]. En este sentido la ecuación de Klein-Gordon usual es una versión efectiva de (4.5).

4.4.3. Kernel de calor y método del tiempo propio

El hecho de que al introducir una variable temporal extra nos de resultados interesantes se puede generalizar. En efecto, supongamos que $\hat{O}(\partial_\mu)$ es un operado que depende de ∂_μ, entonces se puede plantear la ecuación

$$\left(\hat{O}(\partial_\mu) - m\right)\psi(x^\mu) = 0. \tag{4.45}$$

Encontrar soluciones de esta ecuación puede ser fácil o difícil, dependiendo de $\hat{O}(\partial_\mu)$. Sin embargo, si introducimos un parámetro extra, τ, podemos plantear la ecuación generalizada

$$\left(\hat{O}(\partial_\mu) - i\partial_\tau\right)\psi(x^\mu, \tau) = 0. \tag{4.46}$$

Encontrar soluciones de esta ecuación suele ser más fácil que encontrar soluciones de (4.45). Por ejemplo, independientemente de $\hat{O}(\partial_\mu)$, se puede probar que

$$\psi(x^\mu, \tau) = e^{-i\hat{O}(\partial_\mu)\tau}\psi_0(x^\mu), \tag{4.47}$$

con $\psi_0(x^\mu)$ una función arbitraria, es solución de (4.46). Ahora, si $\psi(x^\mu, \tau)$ es solución de (4.46) con la condición $\psi(x^\mu, \tau = \pm\infty) = 0$, entonces

$$\psi_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(x, \tau) e^{im\tau} \tag{4.48}$$

es solución de (4.45).

Ahora, la ecuación de Green asociada a (4.45) es

$$\left(\hat{O}(\partial_\mu) - m\right) G(x^\mu - x'^\mu) = \delta^4(x^\mu - x'^\mu). \tag{4.49}$$

Mientras que la ecuación de Green asociada a (4.46) es

$$\left(\hat{O}(\partial_\mu) - i\partial_\tau\right) G(x^\mu - x'^\mu, \tau - \tau') = \delta^4(x^\mu - x'^\mu)\delta(\tau - \tau'). \tag{4.50}$$

Se puede probar que si $G(x^\mu - x'^\mu, \tau - \tau')$ es solución de (4.50) y se anula en $\tau \pm \infty$, entonces

$$G_m(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(x, \tau, x', \tau') e^{-im\tau} \tag{4.51}$$

es solución de (4.49). Una versión más sofisticada de este método se puede ver en [47].

4.5. Cuantización de la masa y Principio de acoplamiento mínimo

Hasta ahora solo hemos visto el caso de la partícula libre, veamos como podemos introducir interacciones electromagnéticas en el sistema que estamos tratando. Una forma de introducir estas interacciones en un sistema libre es con el principio de acoplamiento mínimo. Este principio establece que si P_μ es el momento del sistema libre y A_μ el cuadripotencial electromagnético, entonces el momento del sistema en un campo electromagnético está dado por

$$P_\mu - A_\mu. \tag{4.52}$$

En nuestro sistema, además del cuadrimomento P_μ, tenemos el momento P_ζ. Por lo que debemos cambiar el cuadripotencial electromagnético por

$$\mathbf{A} \equiv \left(A_\mu(x_\nu, \zeta), A_\zeta(x_\nu, \zeta)\right). \tag{4.53}$$

Al nuevo potencial $A_\zeta(x_\mu, \zeta)$, al igual que al parámetro ζ, le impondremos invariancia relativista. Así la nueva regla de acoplamiento mínimo es

$$P_\mu \longmapsto \left(P_\mu - A_\mu(x_\nu, \zeta)\right), \tag{4.54}$$

$$P_\zeta \longmapsto \left(P_\zeta - A_\zeta(x_\nu, \zeta)\right). \tag{4.55}$$

Por lo tanto, la versión de (4.3) con interacción electromagnética es

$$\left[(\hat{P}_\zeta - A_\zeta) + \frac{1}{2m_\gamma}\left[(\hat{P}_\mu - A_\mu)^2 - m^2c^2\right]\right] |\psi >= 0. \tag{4.56}$$

Note que la generalización del potencial electromagnético implica la generalización del campo electromagnético.

En la siguiente sección veremos algunos ejemplos con potenciales particulares.

4.5.1. Ejemplos

Ahora veamos algunos casos concretos de potenciales. Primero consideremos el caso donde $A_\zeta = 0$, entonces la ecuación será

$$\left[\hat{P}_\zeta + \frac{1}{2m_\gamma}\left[(\hat{P}_\mu - A_\mu)^2 - m^2c^2\right]\right] \psi = 0. \tag{4.57}$$

Propongamos una solución del tipo $\psi(x^\mu,\zeta) = e^{-i\frac{Mc^2}{2\hbar m_\gamma}\zeta}\varphi(x^\mu)$, por lo que la ecuación a resolver es

$$\left[(\hat{P}_\mu - A_\mu)^2 - \tilde{m}^2c^2\right]\varphi(x_\mu) = 0, \quad \tilde{m} = \sqrt{m^2+M^2}. \tag{4.58}$$

Como podemos ver en este caso el sistema adquiere la forma usual. Lo único que cambia es que la masa adquiere una corrección.

En particular con un potencial electrostático de Coulomb

$$A_0 = \frac{-z\mathbf{e}^2}{r}, \qquad A_i = 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{4.59}$$

tenemos el espectro

$$E_n^2 = c^4\frac{m^2+M^2}{\left[1+\frac{(z\alpha)^2}{\left((n-l-\frac{1}{2})+\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2-(z\alpha)^2}\right)^2}\right]}. \tag{4.60}$$

Ahora veamos un caso en que $A_\mu = 0$, pero $A_\zeta \neq 0$. Por simplicidad veamos la partícula sin masa. Para este caso tendremos la ecuación

$$\left[(\hat{P}_\zeta - A_\zeta) + \frac{1}{2m_\gamma}\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu\right]|\psi>= 0. \tag{4.61}$$

Proponiendo de nuevo $\psi(x_\mu,\zeta) = e^{-i\frac{M^2c^2\zeta}{2\hbar m_\gamma}}\varphi(x_\mu)$, obtenemos la ecuación

$$\frac{M^2c^2}{2m_\gamma}\varphi(x_\mu) = \left(\frac{\hbar^2}{2m_\gamma}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) + A_\zeta\right)\varphi(x_\mu) = 0. \tag{4.62}$$

Claramente este es un problema donde los valores propios están dados por la masa. Así, esta ecuación nos permitirá cuantizar M^2.

Por ejemplo, consideremos el potencial del oscilador armónico relativista

$$A_\zeta = -\frac{m_\gamma\omega^2}{2}x_\mu x^\mu. \tag{4.63}$$

El procedimiento para resolver este problema es relativamente sencillo ya que por el método de separación de variables se obtienen dos ecuaciones. Una de ellas corresponde a un oscilador unidimensional en el tiempo y la otra corresponde a un oscilador tridimensional en espacio, estas ecuaciones tienen soluciones bien conocidas. Finalmente obtenemos el espectro de masa

$$M_{n,l,n_0}^2 c^2 = 2m_\gamma \hbar\omega(2n + l + 1 - n_0). \quad (4.64)$$

El espectro de masa obtenido tiene tres números cuánticos, suponemos que ellos se combinan de tal manera que solo obtenemos masas con valores reales. Es importante hacer notar que en el caso del oscilador en el tiempo se pide que las funciones propias se anulen para tiempos muy grandes, esto físicamente significa que las partículas que se obtienen son tales que para tiempos muy grandes dejan de tener interacción, es decir, que su tiempo de decaimiento es finito.

Si suponemos que no hay oscilación temporal, es decir que el potencial es $A_\zeta = \frac{m_\gamma\omega^2}{2}\vec{x}^2$, entonces se tiene el espectro

$$M_{n,l}^2 c^2 = 2m_\gamma \hbar\omega(2n + l + 3/2). \quad (4.65)$$

Por otra parte, se puede mostrar que la entropía de un hoyo negro tiene la forma

$$S = \frac{A}{4}, \quad (4.66)$$

donde A es el área del horizonte de eventos [2]. También se puede mostrar que esta área es proporcional a la masa del hoyo negro, $A \propto M$. Ahora, considerando que A es un invariante adiabático y ocupando el principio de Ehrenfest, Bekenstein mostró que a nivel cuántico el área debe tener un espectro de la forma $A_n \propto n$, $(n = 1, 2, ...)$ [3]. Esto implica que M_n^2 también debe tener el mismo espectro, el cual coincide con (4.65).

Otro caso interesante es el potencial de Coulomb relativista

$$A_\zeta = \frac{z^2\mathbf{e}^4}{\sqrt{x_\mu x^\mu}}. \quad (4.67)$$

Para este potencial el espectro de masas es

$$M_n^2 = \frac{z^2\mathbf{e}^4}{2(n + l + 1)^2}. \quad (4.68)$$

La solución de este problema se puede ver en [48] .

Como vemos al introducir el potencial A_ζ, se puede relacionar con la masa. En ese sentido este potencial se toma un papel similar al campo de Higgs. Posiblemente un versión más sofisticada de este modelo nos podría dar una explicación del espectro de las masas de las diferentes partículas.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se propuso una generalización de la partícula relativista. Cabe mencionar que este sistema tiene libertad de norma. De hecho, una propiedad interesante del sistema es que tomando la norma adecuada se pueden obtener realizaciones de espacios no conmutativos. En particular es posible obtener una realización del espacio de Snyder. Cabe señalar que el espacio de Snyder es muy atractivo pues es discreto en las coordenadas espaciales y consistente con la simetría de Lorentz. También se mostró que esta generalización de la partícula relativista permite una realización de un nuevo espacio no conmutativo discreto en tiempo, continuo en las coordenadas espaciales y consistente con la simetría de Lorentz. Partiendo de estos resultados se propone una acción para sistemas con Hamiltoniana arbitraria en un espacio no conmutativo tipo Snyder. Además, considerando el nuevo espacio no conmutativo se construyen otros dos nuevos espacios no conmutativos que son consistentes con la simetría traslacional, la simetría de Lorentz y que son discretos en el tiempo. Estos dos nuevos espacios no conmutativos son una extención de los espacios de Yang [18].

Finalmente se muestra que al cuantizar el sistema con el método de Dirac se obtiene una generalización de la ecuación de Klein-Gordon. Una propiedad interesante de este sistema cuántico es que se tiene dos posibles parámetros de evolución, es decir, dos posibles tiempos. También se muestra que introduciendo el potencial adecuado se pueden obtener masas cuantizadas.

La mayor parte de los resultados de esta tesis se publicaron en la referencia [19].

Referencias

[1] P. Ehrenfest, *Collected Scientific Papers,* Edited by M. J. Klein, (North-Holland Pub. Co. 1959).

[2] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy,* Phys. Rev. D **7** 2333 (1973).

[3] J. D. Bekenstein, *Quantum black holes as atoms,* Proceedings of the Eight Marcel Grossmann Meeting, editores T. Piran y R. Ruffini. (World Scientific Singapore 1999), pp. 92-111, gr-qc/9710076.

[4] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space,* Annals Phys. **152**, 220 (1984);
E. Witten, *(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System,* Nucl. Phys. B **202**, 253 (1982).

[5] G. 't Hooft, *Quantization of Point Particles in 2+1 Dimensional Gravity and Space-Time Discreteness,* Class. Quant. Grav. **13** (1996) 1023-1040, gr-qc/9601014.

[6] W. Pauli, *Scientific Correspondence,* Vo. II, p.15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1985.

[7] H. S. Snyder, *Quantized Space-Time,* Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

[8] J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, *Non-commutative space-time of Doubly Special Relativity theories,* Int. J. Mod. Phys. D **12** (2003) 299, hep-th/0204245.

[9] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics,* Dover Publication, Inc (2001).

[10] F. Girelli, T. Konopka, J. Kowalski-Glikman, E.R. Livine, *The Free Particle in Deformed Special Relativity,* Phys. Rev. D **73** 045009 (2006), hep-th/0512107.

[11] J. L. Lucio-M, J. Antonio Nieto, J. David Vergara, *A generalized Klein-Gordon equation from a reparametrized Lagrangian,* Phys. Lett A **219** (1996) 150.

[12] E. C. G. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta **14** (1941) 372.

[13] V.A. Fock, *Selected Works: Quantum Mechanics and Quantum Field Theory,* Edited by L.D. Faddeev, L.A. Khalfin, I.V. Komarov, Chapman and Hall (2004) EU.

[14] Y. Nambu, *The use of the proper time in Quantum Electrodynamics,* Prog. Teor. Phys. **5**, 82 (1950).

[15] R. P. Feynman, *Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction,* Phys. Rev. **80**, 440 (1950).

[16] L. P. Horwitz, C. Piron, *Relativistic dynamics,* Helv. Phys. Acta **46** (1973) 316.

[17] J. R. Fanchi, *A generalized quantum field theory,* Phys. Rev. D **20** 3108 (1979);
J. R. Fanchi, *Parametrized Relativistic Quantum Theory,* Kluwer Academic Publishers, (1993).

[18] C. N. Yang, *On quantized space-time,* Phys. Rev. **72**, 874 (1947).

[19] Juan M. Romero, J. D. Vergara, J. A. Santiago *Noncommutative spaces, the quantum of time and the Lorentz symmetry,* Phys. Rev.D **75** 065008 (2007).

[20] M. Henneaux, C. Teiteboim, *Quantization of Gauge System*, Princeton University Press (1992).

[21] R. A. Mann, *The Classical Dynamics of Particles, Galilean and Lorentz Realativity,*

[22] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda, *Classical Mechanics in a Modern Perspective,* Wiley (1978).

[23] M. Chaichian, N. F. Nelipa, *Introduction to Field Teory,* Springer-Verlag, (1984).

[24] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Quantization of Field with Constraints,* Springer-Verlag (1990).

[25] R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978), Part I.; G. Morandi, C. Ferrario, G. Lo Vecchio, G. Marmo and C. Rubano, *The inverse problem in the calculus of variations and the geometry of the tangent bundle,* Phys. Rep. **188**, 147 (1990).

[26] R. Courant, F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 2,* Editorial Limusa (1993).

[27] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Matematical Physics Vol. I,* John Wiley and Sons (1989).

[28] E. Flanagan, *Palatini form of 1/R gravity,* Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 071101, astro-ph/0308111.

[29] J. Scherk, *An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings,* Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 125.

[30] H. B. Nielsen, P. Olesen, *Local field theory of the dual string,* Nucl. Phys. B **57** (1973) 367; *Vortex-line models for dual strings,* Nucl. Phys. B **61**, (1973) 45.

[31] M. Born, L. Infeld, *Foundation of the New Field Theory,* Proc. Roy. Soc. Lond. A **144** 425-451 (1934).

[32] A. Pinzul, A. Stern, *Space-Time Noncommutativity from Particle Mechanics,* Phys.Lett. B **593** (2004) 279-286, hep-th/0402220.

[33] R. Banerjee, B. Chakraborty, S. Gangopadhyay, *Noncommutativity and Reparametrisation symmetry,* J. Phys. A **38** (2005) 957-971, hep-th/0405178;

[34] M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. D. Vergara, *Gauge invariance for generally covariant systems,* Nucl. Phys. B **387**, 391 (1992), hep-th/9205092.

[35] J. E. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry,* (Springer-Verlag, New York, 2003).

[36] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications,* Dover Publications (2006).

[37] H. Matschull, M. Welling, *Quantum mechanics of a point particle in (2+1)-dimensional gravity,* Class. Quant. Grav. **15**, 2981 (1998).

[38] G. 't Hooft, *TransPlanckian particles and the quantization of time,* Class. Quant. Grav. **16**, 395 (1999).

[39] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology. 4. Discrete time evolution,* Class. Quant. Grav. **18**, 1071 (2001);
A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, A. G. Martins, P. Teotonio-Sobrinho, *Time-space noncommutativity: Quantised evolutions,* JHEP **0411**, 068 (2004).

[40] I. Bars, *Survey of two time physics,* Class. Quant. Grav. **18**, 3113 (2001);
I. Bars, *The Standard Model of Particles and Forces in the Framework of 2T-physics,* Phys. Rev. D **74**, 085019 (2006).

[41] C. Vafa, *Evidence for F theory,* Nucl. Phys. B **469**, 403 (1996).

[42] S. Tanaka, *Yang's quantized space-time algebra and holographic hypothesis,* hep-th/0406166.

[43] L. D. Mlodinow, *El arco iris de Feynman,* Crítica 2004.

[44] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization,* Springer New York (1996).

[45] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration,* Wiley New York (1981).

[46] J. B. Hartle, S. W. Hawking, *Path Integral Derivation Of Black Hole Radiance,* Phys. Rev. D **13** 2188 (1976).

[47] D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: User's manual,* Phys. Rept. **388** 279 (2003).

[48] R. I. Arshansky, L. P. Horwitz, J. Math. **30** (1989) 66.