



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

”Fenómenos Transitorios en Mecánica Cuántica”

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias (Física)

Presenta:

Emerson Leao Sadurní Hernández

Director de Tesis: Dr. Marcos Moshinsky Borodiansky
Comité Tutorial: Dr. Shahen Hacyan Saleryan, Dr. Eugenio Ley Koo

México D.F., Mayo 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Fenómenos Transitorios en Mecánica Cuántica

Emerson Sadurní

Instituto de Física

Departamento de Física Teórica

Universidad Nacional Autónoma de México

Apartado Postal 20-364, 01000 México D.F., México

sadurni@fisica.unam.mx

Agradecimientos

Si se ha de aceptar que la materialización de este trabajo es el producto de una dinámica, se está obligado a razonar de dos maneras. La primera consiste en considerar un sistema cerrado en el que esta tesis es la evolución de un solo estado inicial. En ese caso debería escribirse un solo agradecimiento, pero soy incapaz de discernir cuál era dicho estado. Por ende, desecho la posibilidad aunque tenga la virtud de ser breve. La otra manera es considerar un sistema abierto que, aunque sea determinista, su evolución puede estar influenciada por infinitas intervenciones externas. Desde luego estoy agradecido a todas ellas, pero me es imposible completar una lista detallada en estas breves líneas.

Dado lo anterior me permito dar una lista restringida, reconociendo a todos mis maestros y compañeros del posgrado por aquellas grandes y pequeñas intervenciones que se han convertido en los aciertos contenidos en estas páginas (los posibles errores son sólo míos). Mi especial agradecimiento al Dr. Marcos Moshinsky por compartir generosamente su experiencia como científico y como persona. Al Dr. Eugenio Ley Koo, cuya capacidad docente me ayudó a disipar numerosas dudas. Contribuyeron a la versión final de esta tesis las valiosas observaciones de: Dr. Octavio Castaños, Dr. Alejandro Frank, Dr. Shahen Hacyan, Dr. Thomas Seligman, Dr. Carlos Villegas. Este trabajo fue apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología a través de la beca-crédito 171839. Gracias a todos.

E. Sadurní

México D.F., 21 de Mayo de 2007.

Índice general

1. Introducción	6
2. Propagador para sistemas que involucran acoplamiento espín órbita	9
2.1. Hamiltoniano General	9
2.2. Propagador del oscilador armónico con acoplamiento espín órbita a través de la simetría en el espacio fase	11
2.3. Aplicaciones	13
2.3.1. Evolución de una distribución gaussiana	13
2.3.2. Descomposición espectral y fórmulas de suma	14
2.4. Acoplamiento espín órbita como perturbación repentina	18
3. Fenómenos transitorios para sistemas cuánticos con estados ligados	20
3.1. Dos partículas sujetas a un campo electrostático repentino	20
3.2. La función de onda del sistema de dos nucleones a tiempo $t > 0$ en un campo electrostático repentino	23
3.3. Densidad de probabilidad del sistema de dos nucleones en el campo electrostático repentino	24
3.4. Tres partículas sujetas a campo electrostático repentino	25
3.5. Densidad de probabilidad para tres nucleones en el campo electrostático	26
3.6. Resultados generales para el caso de n nucleones	27
4. Procedimiento general para analizar fenómenos transitorios causados por perturbaciones repentinas	28
4.1. Ejemplo: estados coherentes del oscilador armónico	30
5. Partículas compuestas cuánticas relativistas: un tratamiento general	33
5.1. Invariancia de Poincaré de partículas relativistas compuestas	34
5.2. La transformación FW para el Hamiltoniano de muchos cuerpos	36
5.3. Problema de dos cuerpos	38
5.3.1. Espectro de masas para el problema de dos cuerpos	40
5.4. Problema de tres cuerpos	45
5.4.1. Espectro de masas para el problema de tres cuerpos	46

5.5.	Propagadores a través de la transformación FW	49
6.	Fenómenos transitorios para estados ligados cuánticos relativistas	50
6.1.	Problemas de una sola partícula de espín 1/2	51
6.1.1.	El oscilador de Dirac	51
6.1.2.	Propagador libre	52
6.1.3.	Evolución libre de un estado de oscilador de Dirac	53
6.1.4.	Propagador del oscilador de Dirac	56
6.1.5.	Problema dinámico: cambio de frecuencia	58
6.2.	Problemas de dos partículas de Dirac	61
6.2.1.	Propagador de dos partículas de Dirac libres	61
6.2.2.	Desintegración	62
6.2.3.	Oscilador de Dirac de dos partículas	64
6.2.4.	Propagador del oscilador de Dirac de dos partículas	66
6.2.5.	Cambio repentino en la interacción	68
6.3.	Problemas de tres partículas relativistas	72
6.3.1.	Oscilador de Dirac de tres partículas	72
6.3.2.	Propagador del oscilador de Dirac de tres partículas	74
6.3.3.	Cambio repentino en la interacción	76
7.	Fenómenos transitorios en segunda cuantización	81
7.1.	Propagador de la molécula lineal	82
7.2.	Límite continuo del propagador de la molécula lineal	83
7.3.	Molécula lineal localizada y su límite continuo	85
7.4.	La cuerda bajo un campo electrostático repentino y la partícula relativista con fuente	88
A.	Apéndice	91
A.1.	Cálculo de los elementos de matriz de \mathbf{R}	91
A.2.	Identidades para las integrales I_1, I_2, I_3	92
A.3.	Funciones de onda del oscilador de Dirac de dos partículas	93
A.4.	Diagonalización de la matriz V_N	94

Índice de figuras

4.1. Densidad de probabilidad en el tiempo para el estado coherente aproximado por tres funciones de oscilador	32
5.1. Comparación de energías para el bottomonio. Sólidas: experimental. Punteadas: teórico.	43
5.2. Comparación de energías para el charmonio. Sólidas: experimental. Punteadas: teórico.	44
5.3. Espectro de bariones Σ . Punteadas: teórico. Sólidas: experimental	47
6.1. Densidad de probabilidad en el tiempo del estado de oscilador de Dirac en propagación libre	56
6.2. Contorno de integración para $\pm t > 0$ en el propagador del oscilador de Dirac	58
6.3. Desarrollo en el tiempo del estado base del oscilador de Dirac tras disminuir la frecuencia a la mitad de su valor original. El parámetro temporal se indica en la parte superior de cada gráfica en unidades naturales	60
6.4. Contorno de integración para $t < 0$ en el propagador del oscilador de Dirac de dos partículas. La línea punteada indica un camino alternativo.	67
6.5. Contorno de integración para $t > 0$ en el propagador del oscilador de Dirac de dos partículas. La línea punteada indica un camino alternativo.	68
6.6. Desarrollo en el tiempo de un perfil gaussiano para dos cuerpos en la coordenada relativa tras disminuir la frecuencia 10 veces	70
6.7. Desarrollo en el tiempo de un perfil gaussiano de dos cuerpos en la coordenada relativa tras aumentar la frecuencia 10 veces	71
6.8. Espectro para $\omega = 0,03$ en el oscilador de Dirac de tres partículas. Las energías se distribuyen en cuatro grupos alrededor de los valores $-3, -1, 1, 3$	74
6.9. Espectro para $\omega = 0,1$ y $N = 2$ en el oscilador de Dirac de tres partículas, cuyas energías se utilizan en la aplicación numérica del propagador.	75
6.10. Espectro para $\omega = 1$ y $N = 2$ en el oscilador de Dirac de tres partículas	75
6.11. Contorno de integración para el problema de tres partículas. La banda $[-3, 3]$ ha sido excluida.	76
6.12. Visualización de las coordenadas de Jacobi de tres partículas. \mathbf{r}_1 es la coordenada relativa entre las partículas 1 y 2, \mathbf{r}_2 es la coordenada relativa entre 3 y el centro de masa de 1 y 2	77
6.13. Densidad de probabilidad de tres cuerpos en función de las coordenadas de Jacobi y el tiempo (indicado en la parte superior en unidades naturales)	78
6.14. Continuación de la figura 6.13 para $30 < t < 70$	79

6.15. Continuación de la figura 6.14 para $t \geq 70$	80
7.1. Número promedio de partículas para $k = \frac{10Mc}{\hbar}$ (sólida) y $k = \frac{5Mc}{\hbar}$ (punteada) al utilizar estados localizados como condiciones iniciales	88

Índice de cuadros

4.1. Valores de los polos y residuos de los coeficientes a_n en el desarrollo del estado coherente de oscilador	31
5.1. Espectro experimental para el bottomonio y los resultados de nuestro modelo	41
5.2. Espectro experimental para el charmonio y los resultados de nuestro modelo	42
5.3. Parámetros ω y M en función de J^P para calcular el espectro del sistema de tres cuerpos	48
6.1. Tabla de estados de oscilador hasta $N_{max} = 2$ para el problema de tres cuerpos con espín $1/2$	74

Resumen

Este trabajo consta de 7 capítulos y se divide en dos partes: sistemas no relativistas y sistemas relativistas. El capítulo 1 consiste en una introducción al tema, en donde se justifica el estudio de problemas dependientes del tiempo en mecánica cuántica. Además se indica la metodología a seguir, *i.e.* el cálculo de propagadores para diversos sistemas físicos exactamente solubles. En el capítulo 2 tratamos sistemas esféricamente simétricos con acoplamiento espín órbita y calculamos la forma explícita del propagador correspondiente incluyendo un tratamiento detallado para el caso del oscilador armónico con dicho acoplamiento. Armados con estos resultados estudiamos algunas aplicaciones como el desarrollo en el tiempo de condiciones iniciales específicas así como aplicaciones matemáticas relacionadas con funciones especiales. En el capítulo 3 nos ocupamos de un sistema binario ligado por interacciones de oscilador (un modelo simplificado para el deuterón) sujeto a la acción repentina de un campo electrostático uniforme, calculando el desarrollo en el tiempo del estado base correspondiente. En este mismo capítulo indicamos una extensión para sistemas de tres nucleones (modelos solubles para Tritio y ^3He) y los resultados generales para el caso de N nucleones. Concluimos la parte no relativista en el capítulo 4, con un método general y aproximado a través de la transformada de Laplace para tratar la evolución de sistemas con cambio repentino en sus interacciones. En lo que toca a la parte relativista, en el capítulo 5 se introduce una forma de tratar problemas de muchos cuerpos de espín $1/2$ respetando la invariancia de Lorentz. También indicamos una generalización de la transformación de Foldy-Wouthuysen para muchos cuerpos, dando acceso a las energías positivas del sistema y, por ende, a los estados físicos en una aproximación cuasi relativista pero a orden arbitrario en potencias inversas de la masa en reposo. Con ello obtenemos el espectro de un sistema de dos y tres cuerpos con aplicaciones a espectros de mesones como el bottomonio (compuesto por dos *quarks*: *bottom-antibottom*), charmonio (compuesto por dos *quarks*: *charm-anticharm*) y bariones como partículas Σ (compuestas por tres *quarks*). En el capítulo 6 analizamos fenómenos transitorios para estados ligados relativistas de solución exacta en el espectro y funciones de onda; concretamente sistemas ligados por el oscilador de Dirac. Los problemas dinámicos a tratar consisten en la evolución libre de un estado del oscilador de Dirac de una y dos partículas como modelo de desintegración así como cambios repentinos en la intensidad de la interacción en sistemas de una, dos y tres partículas mediante una correcta formulación de la descomposición espectral del propagador. El capítulo 7 está dedicado a un estudio simple de fenómenos transitorios en la segunda cuantización de un campo escalar como límite de un sistema discreto correspondiente a una molécula lineal. Algunos resultados útiles se incluyen en el apéndice.

Abstract

This thesis (entitled Transient Phenomena in Quantum Mechanics) comprises 7 chapters and it is divided in two parts: non-relativistic and relativistic systems. Chapter 1 consists of an introduction to the subject, where a motivation for the study of time dependent problems in quantum mechanics is given. The methodology followed throughout this work is also indicated, *i.e.* the calculation of propagators for diverse systems which are exactly solvable and the introduction of sudden interactions. In chapter 2, spherically symmetric systems with spin-orbit coupling are treated. We compute the explicit form of the corresponding propagator including a detailed treatment for the harmonic oscillator with such coupling. Furnished with these results we give some applications of the propagator, namely the time development of specific initial conditions as well as mathematical results related to special functions. In chapter 3 we analyze a binary system bound by an oscillator potential (which can be regarded as a simplified model for a deuteron) subjected to a sudden homogeneous electrostatic field. The evolution of the ground state is computed. In this chapter it is also indicated an extension of these results for systems with three nucleons (solvable models for Tritium and ^3He) and some general results for N nucleons. The non-relativistic part is concluded in chapter 4 with an approximate method constructed by means of the Laplace transform. Such method allows to calculate the wave function of a suddenly perturbed system in terms of the complete set corresponding to the unperturbed problem. Starting with the relativistic part, chapter 5 deals with a Lorentz invariant formulation for problems of many particles of spin $1/2$. A generalization of the Foldy-Wouthuysen transformation for many bodies is also included, giving access to the positive part of the energy spectrum and therefore, the physical states in a quasi relativistic expansion in terms of inverse powers of the rest mass. As an application the mass spectrum of systems with two and three quarks is given, namely charmonium and bottomonium in the case of mesons and sigma particles in the case of baryons. In chapter 6, transient phenomena for relativistic systems bound by the Dirac oscillator interaction are studied. The dynamical problems involved in this chapter are: 1) The free evolution for the Dirac oscillator ground state of one and two particles (as a model of desintegration), 2) Sudden changes in the intensity of interactions for one, two and three particles by means of a suitable formulation of the spectral decomposition for the Dirac oscillator propagator. Chapter 7 is devoted to a simple study of transient phenomena in the second quantization of a scalar field. Such field is constructed as the continuum limit of a discrete system corresponding to a quantum chain (linear molecule). Some useful results are included in an appendix.

Capítulo 1

Introducción

La aparición del término 'transitorio' en el título de este trabajo centra el objetivo de estudio y por tanto merece una justificación. La formulación de la mecánica cuántica en los años 20, ya sea en la imagen de Heisenberg o de Schroedinger, fue de principio dinámica, permitiendo el estudio de problemas dependientes del tiempo. Consideramos, desde luego, que la dependencia temporal se extiende también a las observables físicas asociadas a estos. Llamaremos entonces 'transitorio' a dicha dependencia en el tiempo en contraste con aquello que es estacionario en el sentido de la ecuación de eigenvalores de Schroedinger

$$H\Psi = E\Psi \quad (1.1)$$

siendo H el hamiltoniano del sistema en cuestión y Ψ el estado de energía en el que se encuentra. La formulación (1.1), dicho sea de paso, constituye un caso particular de dependencia temporal que es trivial, pero cuyo uso ha sido extenso y exitoso y no estará del todo ausente en nuestras consideraciones.

A pesar de lo anterior, la manera mas natural de discutir fenómenos transitorios es a través de la formulación de Feynman de la mecánica cuántica propuesta en los años 40. En ella, el concepto de propagador (llámese K) es de vital importancia, ya que relaciona funciones de onda a un tiempo arbitrario con condiciones iniciales mediante una cuadratura, *i.e.*

$$\Psi(x, t) = \int dx' K(x, x'; t, t_0) \Psi(x', t_0) \quad (1.2)$$

donde x, x' son variables espaciales y t_0 el tiempo inicial. El propagador K , además, queda determinado por la integral de camino de Feynman

$$K(x, x'; t, t') = \lim_{x_i - x_{i+1} \rightarrow 0} \prod_{i=0}^n dx_i \int_{x=x_0}^{x'=x_n} e^{-i \int_t^{t'} dt L(x_i, \dot{x}_{i+1}; t)} := \int_x^{x'} \mathcal{D}[x(t)] e^{-i \int_t^{t'} dt L} \quad (1.3)$$

[1], [2] donde L es la función lagrangiana del problema. Esta expresión ha sido de gran importancia tanto conceptual como computacionalmente; sin embargo existen otras formas de obtener propagadores que explotaremos en la medida de su simplicidad. Lo definitivo es que tendremos especial

interés en el propagador K de cada problema, siendo la vía analítica más efectiva para discutir evolución de funciones de onda. En nuestras discusiones trataremos también problemas relativistas a través de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac. Ellas poseen propagadores tanto en el sentido de las funciones de Green, v. gr.

$$(-i\gamma^\nu \partial_\nu + m) K_{\text{Dirac}}(x_\mu - x'_\mu) = -i\delta^4(x_\mu - x'_\mu) \quad (1.4)$$

[3] como en el sentido mecánico cuántico no relativista: la representación espacial del operador de evolución U

$$K(x, x'; t, t') = \langle x|U(t, t')|x'\rangle \quad (1.5)$$

De esta forma K permite ser expresado en términos de energías y estados estacionarios, de modo que su uso también adquiere sentido en el caso relativista. En cualquiera de las tres formulaciones equivalentes de la mecánica cuántica que hemos mencionado, el tratamiento de sistemas multipartículas es posible extendiendo el espacio de configuración tridimensional de una partícula a $3n$ -dimensional para n de ellas. En el contexto relativista también es posible generalizar el tratamiento para sistemas de varias partículas como se indicará ulteriormente.

Pero además de las generalidades indicadas sobre la panoplia de métodos a emplear en dinámica cuántica, debemos centrar nuestra atención en problemas de un tipo bien definido. En este trabajo analizaremos, principalmente, sistemas compuestos de una o varias partículas y la dinámica que obedecen tras la modificación de las interacciones entre ellas o de la interacción con una perturbación externa. Ciertamente existe una gama de métodos de cálculo que incluyen la fuerza bruta de las recetas numéricas en la solución de las ecuaciones diferenciales que emergen en este tipo de problemas. Sin embargo, a través de diversos modelos simples, el comportamiento a estudiar puede calcularse de forma analítica y es así como procederemos. Como un ejemplo tradicional de lo anterior tenemos la llamada 'difracción en el tiempo' [7]. La virtud en esta forma de trabajar es, claramente, la vía para formar una intuición sobre problemas mucho más complicados que involucran sistemas ligados cambiantes en el tiempo.

Típicamente lidiaremos con situaciones físicas dependientes del tiempo en donde una perturbación es aplicada a un sistema en estado estacionario. A pesar de tener hamiltonianos dependientes del tiempo de forma explícita, el análisis puede efectuarse a través de la propagación de condiciones iniciales específicas. Debemos aclarar que el término "perturbación", en este trabajo, alude a interacciones cuya intensidad no necesariamente es pequeña. La teoría de perturbaciones en mecánica cuántica, a pesar de ser de gran utilidad, resulta inadecuada en cuanto a que los problemas dependientes del tiempo eluden una correcta descripción a tiempos muy largos. Esto es debido a que, en general, una serie perturbativa de operadores de evolución puede truncarse cuando existe un compromiso entre intensidades de la perturbación y el tiempo posterior al que se desea estudiar el sistema.

Para aclarar el punto anterior pensemos en un caso simple que exhibe las características aludidas. Para un sistema descrito por un hamiltoniano $H_1 + \epsilon H_2$ con $\epsilon \ll 1$ y los hamiltonianos constituyentes tales que $[H_1, H_2] = 0$, el operador de evolución está dado por $U = e^{-iH_1 t} e^{-i\epsilon H_2 t}$. Una serie perturbativa del propagador requiere el desarrollo del exponencial de H_2 . Tal desarrollo se escribe

$$K = \sum_n^{\infty} (\epsilon t)^n K_n \quad (1.6)$$

Sin necesidad de discutir la convergencia de esta serie, se observa que esta es truncable cuando la variable del desarrollo satisface $|(\epsilon t)^n K_n| > |(\epsilon t)^{n+1} K_{n+1}|$, o bien $|t| < |K_n/(\epsilon K_{n+1})|$ considerando sin perder generalidad que los coeficientes K_n son escalares. En vista de lo anterior un orden fijo del desarrollo y una intensidad fija ϵ limitan el tiempo al que la desacripción es válida.

A continuación damos una breve descripción del contenido y organización de este trabajo, que consta de 7 capítulos. Se dividen en dos categorías: sistemas no relativistas y sistemas relativistas. En el capítulo 2 tratamos sistemas esféricamente simétricos con acoplamiento espín órbita y calculamos la forma explícita del propagador correspondiente incluyendo un tratamiento detallado para el caso del oscilador armónico con dicho acoplamiento. Armados con estos resultados estudiamos algunas aplicaciones como el desarrollo en el tiempo de condiciones iniciales específicas así como aplicaciones matemáticas relacionadas con funciones especiales. En el capítulo 3 nos ocupamos de un sistema binario ligado por interacciones de oscilador (un modelo simplificado para el deuterón) sujeto a la acción repentina de un campo electrostático uniforme, calculando el desarrollo en el tiempo del estado base correspondiente. En este mismo capítulo indicamos una extensión para sistemas de tres nucleones (modelos solubles para Tritio y ^3He) y los resultados generales para el caso de N nucleones. Concluimos la parte no relativista en el capítulo 4, con un método general y aproximado a través de la transformada de Laplace para tratar la evolución de sistemas con cambio repentino en sus interacciones. En lo que toca a la parte relativista, en el capítulo 5 se introduce una forma de tratar problemas de muchos cuerpos de espín 1/2 respetando la invariancia de Lorentz. También indicamos una generalización de la transformación de Foldy-Wouthuysen para muchos cuerpos, dando acceso a las energías positivas del sistema y, por ende, a los estados físicos en una aproximación cuasi relativista pero a orden arbitrario en potencias inversas de la masa en reposo. Con ello obtenemos el espectro de un sistema de dos y tres cuerpos con aplicaciones a espectros de mesones como el bottomonio (compuesto por dos *quarks*: *bottom-antibottom*), charmonio (compuesto por dos *quarks*: *charm-anticharm*) y bariones como partículas Σ (compuestas por tres *quarks*). En el capítulo 6 analizamos fenómenos transitorios para estados ligados relativistas de solución exacta en el espectro y funciones de onda; concretamente sistemas ligados por el oscilador de Dirac. Los problemas dinámicos a tratar consisten en la evolución libre de un estado del oscilador de Dirac de una y dos partículas como modelo de desintegración así como cambios repentinos en la intensidad de la interacción en sistemas de una, dos y tres partículas mediante una correcta formulación de la descomposición espectral del propagador. El capítulo 7 está dedicado a un estudio simple de fenómenos transitorios en la segunda cuantización de un campo escalar como límite de un sistema discreto correspondiente a una molécula lineal. Algunos resultados útiles se incluyen en el apéndice.

Capítulo 2

Propagador para sistemas que involucran acoplamiento espín órbita

Existe una gran variedad de problemas de interés físico en el dominio cuántico que se pueden considerar. Sin embargo, muchos de estos sistemas, v. gr. el átomo de hidrógeno con o sin perturbaciones externas, ofrecen resistencia al cálculo exacto de sus propagadores. Por ello, centramos nuestra atención en aquellos problemas para los que una expresión cerrada y simple del propagador se puede determinar. Lo anterior usualmente nos remite a sistemas descritos por lagrangianas o hamiltonianos cuadráticos ya sea en coordenadas y velocidades o en variables de espacio fase respectivamente. Para estos existe una gama de fórmulas de integrales de Feynman [6] listas para emplearse. Aún así la panoplia de propagadores que se nos ofrece, hasta donde podemos constatar, no contiene sistemas no relativistas (o cuasi relativistas) que involucren espín.

El objetivo de este capítulo es encontrar una forma explícita para el propagador correspondiente a sistemas idealizados que pueden tener una contraparte física en el estudio de núcleos atómicos así como en sistemas cuasi relativistas descritos por hamiltonianos provenientes de una transformación de Foldy-Wouthuysen. En particular, centramos nuestra atención en la forma explícita del propagador para un hamiltoniano que consta de dos términos: uno de ellos esféricamente simétrico y con propagador conocido, el otro el acoplamiento espín órbita. Con el propagador a la mano es posible estudiar desde la evolución de condiciones iniciales específicas hasta la evaluación de series de funciones especiales. El contenido está basado completamente en [4].

2.1. Hamiltoniano General

Elegimos unidades en las que $\hbar = 1$. Comencemos con un hamiltoniano independiente del tiempo dado por

$$H = H_1 + H_2 \tag{2.1}$$

donde H_1 y H_2 conmutan pero pueden depender de las mismas variables de espacio fase. Fijamos nuestra atención en el operador de evolución que se escribe

$$\exp(-iHt) = \exp(-iH_1t) \exp(-iH_2t) \quad (2.2)$$

Por tanto, el propagador correspondiente puede expresarse como

$$K(x, x'; t) = \langle x | \exp(-iHt) | x' \rangle = \int dx'' \langle x | \exp(-iH_1t) | x'' \rangle \langle x'' | \exp(-iH_2t) | x' \rangle \quad (2.3)$$

o bien

$$K(x, x'; t) = \int dx'' \langle x | \exp(-iH_2t) | x'' \rangle \langle x'' | \exp(-iH_1t) | x' \rangle = \int dx'' K_1(x, x''; t) K_2(x'', x'; t). \quad (2.4)$$

Siendo esta última expresión útil cuando ambos propagadores $K_1(x, x''; t)$, $K_2(x'', x'; t)$ se conocen de forma explícita, con el problema remanente de evaluar la integral de su producto. La función K_2 se puede escribir como

$$\langle x | \exp(-iH_2t) | x'' \rangle = \exp(-itH_2(-i\frac{\partial}{\partial x}, x)) \delta(x - x'') \quad (2.5)$$

y sustituyendo en (2.3) obtenemos

$$K(x, x'; t) = \exp(-itH_2(-i\frac{\partial}{\partial x}, x)) K_1(x, x'; t) \quad (2.6)$$

lo cual es, hasta ahora, bastante general. La ecuación (2.6) también es válida al intercambiar índices 1 y 2. A partir de ahora nos restringimos al caso $H_2 = \alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ y H_1 esféricamente simétrico tal que $[H_1, H_2] = 0$. Así, (2.6) se vuelve

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \exp(-it\alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) K_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$, *i.e.* la representación diferencial del momento angular orbital. El operador en el miembro derecho de (2.7) tiene una forma similar a una rotación de las coordenadas \mathbf{r} en su representación funcional, a pesar de que los 'parámetros' S_i no sean conmutativos. El llamar a esto una rotación reside en el hecho de que se trata de un operador unitario y es posible encontrar su representación finita actuando en las coordenadas espaciales. De hecho resulta sencillo probar la siguiente fórmula

$$\exp(i\phi \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) f(\mathbf{r}) = f(\exp(\phi \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{r}) \quad (2.8)$$

para cualquier f localmente analítica y S_i no abelianos. Hemos definido el vector de matrices $(\mathbf{M}_{ij})_k = \epsilon_{ijk}$, *i.e.* los generadores antisimétricos de una rotación en su representación cartesiana. ϕ es real. La demostración de (2.8) se da a continuación:

Sea $R := e^{\mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \phi}$ y $U := e^{i\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \phi}$. Para f analítica tenemos

$$\begin{aligned} f(R\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \phi^n} \Big|_{\phi=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \left(\frac{\partial r'_i}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial r'_i} \right)^n f(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \left(\frac{\partial (R\mathbf{r})_i}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} \frac{\partial}{\partial r'_i} \right)^n f(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \left((\mathbf{M}_{ji})_k S_k \mathbf{r}_i \frac{\partial}{\partial r_j} \right)^n f(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} (-i\epsilon_{ijk} r_i \frac{\partial}{\partial r_j} S_k)^n f(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \phi} f(\mathbf{r}) = U f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

de modo que la regla de la cadena es suficiente para probar (2.8), sin importar la estructura de grupo de los S_i . Nótese, sin embargo, que el resultado de la operación $R\mathbf{r}$ no necesariamente se encuentra en el espacio de configuración, a pesar de que el producto r^2 se preserve.

Teniendo (2.8) en cuenta, la forma general del propagador es

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = K_1(\exp(-t\alpha\mathbf{M} \cdot \mathbf{S})\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (2.10)$$

y es claro que K se puede conocer explícitamente siempre que K_1 se suponga también conocido. Es necesario señalar que (2.10) puede ser útil sólo si el operador $\exp(-t\alpha\mathbf{M} \cdot \mathbf{S})\mathbf{r}$ puede encontrarse explícitamente. Dejamos esto para el apéndice. Se puede confirmar (2.10) a través de la ecuación del propagador

$$\{H(-i\nabla, \mathbf{r}, \mathbf{S}) - i\frac{\partial}{\partial t}\}K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t), \quad (2.11)$$

notando que

$$\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} - i\frac{\partial}{\partial t} = \exp(-i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t)(-i\frac{\partial}{\partial t})\exp(i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t) \quad (2.12)$$

y

$$\exp(-i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t)H_1(\mathbf{p}, \mathbf{r})\exp(i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t) = H_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \quad (2.13)$$

(2.11) equivale a

$$\exp(-i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t)\{H_1(-i\nabla, \mathbf{r}) - i\frac{\partial}{\partial t}\}\exp(i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t)K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \quad (2.14)$$

y puede escribirse como

$$\begin{aligned} \{H_1(-i\nabla, \mathbf{r}) - i\frac{\partial}{\partial t}\}K(\exp(\alpha\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}t)\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) &= -i\exp(i\alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \\ &= -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

llegando a la última igualdad con ayuda de $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$. Finalmente, (2.15) implica

$$K_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = K(\exp(t\alpha\mathbf{M} \cdot \mathbf{S})\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (2.16)$$

siendo esto equivalente a (2.10). Queremos señalar que una generalización de este método es posible en caso de tener la suma de un Hamiltoniano con los generadores de sus simetrías en producto escalar con operadores constantes.

2.2. Propagador del oscilador armónico con acoplamiento espín órbita a través de la simetría en el espacio fase

¿Por qué las lagrangianas cuadráticas (implicando también hamiltonianos cuadráticos en coordenadas y momentos) dan propagadores del tipo gaussiano?. Una respuesta a esto se encuentra en [8]. La evolución temporal asociada a hamiltonianos cuadráticos está dada por una transformación canónica que conserva la forma simpléctica y que es, además, lineal. Dicha transformación provee el grupo dinámico del problema. Los elementos de matriz espaciales de su representación unitaria arrojan, a través de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden [17], propagadores

gaussianos. El oscilador armónico es un ejemplo típico, pero la posibilidad de incluir espín es lo que estudiaremos en esta sección.

Por simplicidad elegimos $m = 1/2, \omega = 2$ para la masa y la frecuencia del oscilador respectivamente. El hamiltoniano de nuestro problema es

$$H = \mathbf{p}^2 + \mathbf{r}^2 + \alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{S} \quad (2.17)$$

con \mathbf{S} el operador de espín con peso arbitrario s . La simetría en el espacio fase de este problema puede encontrarse fácilmente aplicando una transformación canónica lineal (dependiente del espín) a los vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} *i.e.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}' \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

con $D\tilde{A} - C\tilde{B} = I, B\tilde{A} = A\tilde{B}, C\tilde{D} = D\tilde{C}$ y donde la tilde denota transposición matricial. Para respetar la simetría del oscilador sin acoplamiento es necesario que (2.18) sea un elemento de $O(6)$. La invariancia del término espín órbita admite una transformación del espín dada por $\mathbf{S}' = R\mathbf{S}$ con R elemento de $O(3)$, mientras que el momento angular orbital se transforma como

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{p}' = (A\mathbf{r} + B\mathbf{p}) \times (C\mathbf{r} + D\mathbf{p}) = R(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (2.19)$$

Esta última igualdad es válida para todo \mathbf{r}, \mathbf{p} si y sólo si A, B, C, D son proporcionales a R , lo cual escribimos así

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha R & \beta R \\ \gamma R & \delta R \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Tanto la ortogonalidad como la condición simpléctica obligan a las constantes de proporcionalidad a ser funciones trigonométricas, *i.e.* $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1$ and $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Por lo tanto, la transformación canónica de simetría de H más general posible es

$$\begin{pmatrix} \cos \phi R & \sin \phi R \\ -\sin \phi R & \cos \phi R \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

siendo ϕ un parámetro real. La representación espacial de la transformación unitaria U correspondiente satisface la ecuación conocida como Mello-Moshinsky escrita en [17], ecuación (36.21). La solución de dicha ecuación correspondiente a la transformación (2.21) está dada por

$$\langle \mathbf{r}' | U | \mathbf{r} \rangle = (2\pi \sin \phi)^{-3/2} \exp\left(\frac{-i}{2} \{(r^2 + r'^2) \cot \phi - 2 \csc \phi (R\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'\}\right) \quad (2.22)$$

donde $\phi = 0$ corresponde a una transformación diagonal en x, p , *i.e.* una simple transformación de coordenadas. La singularidad de (2.22) en $\phi = 0$ corresponde a una función delta. Cuando U es el operador de evolución de nuestro sistema, el miembro izquierdo de (2.22) es el propagador a calcular. El interés se centra entonces en encontrar la forma explícita de las funciones $\phi(t), R(t)$ a partir de la ecuación

$$\left\{ H - i \frac{\partial}{\partial t} \right\} \langle \mathbf{r}' | U | \mathbf{r} \rangle = -i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t) \quad (2.23)$$

Para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ la ecuación anterior es homogénea. Reemplazando (2.22) y (2.17) en (2.23) encontramos derivadas temporales así como espaciales de primer y segundo orden actuando sobre $\langle \mathbf{r}' | U | \mathbf{r} \rangle$, que

a su vez son iguales a $\langle \mathbf{r}|U|\mathbf{r}' \rangle$ multiplicando a cierto polinomio en r^2 , r'^2 y rr' . Así, $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ en (2.23) da lugar a una conjunto de ecuaciones homogéneas para los coeficientes del polinomio en cuestión. Aquellos coeficientes que no acompañan a rr' satisfacen ecuaciones equivalentes y por ello únicamente escribimos la que corresponde al coeficiente de r'^2

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \cot \phi}{\partial t} + \csc^2 \phi = 0 \quad (2.24)$$

cuya solución es $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -2$. El coeficiente de rr' arroja

$$\alpha \csc \phi R_{lj} \epsilon_{ijk} S_k + \frac{\partial}{\partial t} (\csc \phi R^{-1})_{il} - 2 \cot \phi \csc \phi (R^{-1})_{il} = 0 \quad (2.25)$$

adoptando la convención de suma sobre el índice repetido $j = 1, 2, 3$. Con la solución de (2.24), (2.25) se puede simplificar a

$$-\alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial R}{\partial t} R^{-1} \quad (2.26)$$

con solución $R = \exp(-\alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} t)$. Se ha fijado la constante de integración a modo de que R sea en efecto un operador ortogonal. Regresando a la solución general (2.22) con estos resultados encontramos que

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \langle \mathbf{r}|U|\mathbf{r}' \rangle = K_{oscilador}(R\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (2.27)$$

donde la fórmula para $K_{oscilador}$ puede encontrarse en [6]. Escribimos finalmente la expresión completa del propagador restaurando la frecuencia ω y la masa m

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega t} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{im\omega}{2} \{ (r^2 + r'^2) \cot \omega t - 2 \csc \omega t (e^{-\alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} t} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}' \} \right). \quad (2.28)$$

De este modo hemos llegado al propagador que satisface (2.10) siguiendo un camino alterno. Además de confirmar nuestros primeros resultados, se ha desarrollado este ejemplo para ilustrar que el estudio directo de simetrías en el espacio fase puede llevar a expresiones cerradas para $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$.

2.3. Aplicaciones

2.3.1. Evolución de una distribución gaussiana

Estamos ahora en la posición de discutir ciertas aplicaciones. Tomemos ψ como función de onda inicial dada por

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \phi(\mathbf{r}) \chi := A e^{-\frac{1}{2} \omega (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2} \chi \quad (2.29)$$

con χ un espinor cualquiera y A la constante de normalización apropiada. La parte espacial de ψ es meramente una traslación del estado base para el oscilador armónico simple de frecuencia ω y masa $m = 1$. Es bien sabido que dicha distribución experimenta un movimiento oscilatorio alrededor del origen y, de hecho, explotaremos esto más adelante para estudiar el comportamiento de un sistema similar bajo la acción de un campo electrostático repentino. Por ahora, simplemente encontraremos la distribución de probabilidad al tiempo t debido a (2.29). Cuando calculamos

$$\int d^3r'' K_{oscilador}(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; t) \phi(\mathbf{r}'') = \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.30)$$

obtenemos una densidad de probabilidad

$$|\phi(\mathbf{r}, t)|^2 = |A|^2 e^{-\omega(\mathbf{r} - \cos(\omega t)\mathbf{r}_0)^2}. \quad (2.31)$$

De acuerdo con (2.27), la condición inicial (2.29) debe evolucionar como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r'' K_{oscilador}(e^{\alpha\mathbf{M}\cdot\mathbf{S}t}\mathbf{r}, \mathbf{r}''; t) \psi(\mathbf{r}'') \quad (2.32)$$

cuya densidad de probabilidad está dada por

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |A|^2 \chi^\dagger e^{-\omega(e^{\alpha\mathbf{M}\cdot\mathbf{S}t}\mathbf{r} - \cos(\omega t)\mathbf{r}_0)^2} \chi = |A|^2 \chi^\dagger e^{-\omega(\mathbf{r} - \cos(\omega t)e^{-\alpha\mathbf{M}\cdot\mathbf{S}t}\mathbf{r}_0)^2} \chi \quad (2.33)$$

y observamos de aquí que el acoplamiento espín órbita transforma periódicamente la dirección en la que el movimiento vibratorio tiene lugar. De hecho, el parecido de esa transformación a un movimiento rotacional de \mathbf{r}_0 se puede entender fácilmente cuando consideramos la presencia de un campo magnético \mathbf{B} homogéneo y constante actuando sobre un oscilador sin acoplamiento espín - órbita. Aparece así el término $\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}$ análogo a $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. El propagador del oscilador con este término adicional es

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = K_{oscilador}(e^{\alpha\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}t}\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t). \quad (2.34)$$

Cuando (2.34) se aplica al estado inicial $\phi(\mathbf{r})$ obtenemos una densidad

$$|\phi(\mathbf{r}, t)|^2 = |A|^2 e^{-\omega(\mathbf{r} - \cos(\omega t)e^{-\alpha\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}t}\mathbf{r}_0)^2} \quad (2.35)$$

la cual experimenta un movimiento rotacional genuino en \mathbf{r}_0 tal y como se espera para una partícula cargada en un campo magnético.

2.3.2. Descomposición espectral y fórmulas de suma

En este apartado escribimos la descomposición espectral de (2.10) y aprovechamos sus propiedades. Sea $H_1 \phi_{\{N\}} = E_{\{N\}}^{(1)} \phi_{\{N\}}$ la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo para eigenfunciones con números cuánticos $\{N\}$. Si H_1 tiene simetría esférica los eigenestados pueden separarse como

$$\phi_{\{N\}} = R_{nl}(r) Y_l^m(\hat{r}) e^{-iE_{nl}^{(1)}t} \quad (2.36)$$

siendo R_{nl} las funciones radiales que corresponden al problema y Y_l^m son armónicos esféricos. El propagador de H_1 se descompone espectralmente como se indica

$$K_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{nl}(r) R_{nl}(r') Y_l^m(\hat{r}) Y_l^{m*}(\hat{r}') e^{-iE_{nl}^{(1)}t}. \quad (2.37)$$

El acoplamiento espín órbita introduce la siguiente modificación de eigenfunciones y energías

$$(H_1 + \alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \psi_{\{N\}} = (E_{\{N\}}^{(1)} + E_{\{N\}}^{(2)}) \psi_{\{N\}} = E_{\{N\}} \psi_{\{N\}} \quad (2.38)$$

siendo $E_{\{N\}}^{(2)} = E_{jls}^{(2)} = \frac{\alpha}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$ los eigenvalores de $\alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ y las funciones de onda dadas por

$$\psi_{\{N\}} = R_{nl}(r) \mathcal{Y}_{jls}^m(\hat{r}) e^{-iE_{njls}t} \quad (2.39)$$

con restricciones $-j \leq m \leq j$ and $|l-s| \leq j \leq l+s$. \mathcal{Y}_{jls}^m son armónicos esféricos espinoriales. El propagador completo tiene entonces una descomposición espectral

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = K_1(e^{\alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}t} \mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=|l-s|}^{l+s} \sum_{m=-j}^j R_{nl}(r) R_{nl}(r') \mathcal{Y}_{jls}^m(\hat{r}) \left[\mathcal{Y}_{jls}^m(\hat{r}') \right]^\dagger e^{-iE_{njls}t}. \quad (2.40)$$

Nótese que (2.40) es una expresión cerrada para una serie y que puede utilizarse para encontrar fórmulas para series de funciones especiales.

A continuación nos restringimos al caso $s = \frac{1}{2}$, $S_i = \frac{\sigma_i}{2}$ y $H_1 = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \mathbf{r}^2}{2}$. El propagador completo es

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{nl}(r) R_{nl}(r') e^{-i\omega(2n+l+\frac{3}{2})t} \sum_{j=|l-\frac{1}{2}|}^{l+\frac{1}{2}} \sum_{m=-j}^j \mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m(\hat{r}) \left[\mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m(\hat{r}') \right]^\dagger e^{-i\frac{\alpha}{2}t(j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4})}. \quad (2.41)$$

En esta expresión encontramos la suma de las funciones radiales (Polinomios de Laguerre y gaussianas) sobre n . Después de consultar el propagador para oscilador armónico radial escrito en [6] pg. 225, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{nl}(r) R_{nl}(r') e^{-i\omega(2n+l+3/2)t} = \frac{\omega \sqrt{rr'}}{i \sin \omega t} \exp\left(\frac{i\omega}{2}\{r^2 + r'^2\} \cot \omega t\right) I_{l+1/2}\left(\frac{\omega rr'}{i \sin \omega t}\right), \quad (2.42)$$

con I_k la función de Bessel modificada de orden k . Reemplazamos entonces (2.42) en la parte radial de (2.41). En (2.41) también está presente la suma de funciones angulares

$$K_l := \sum_{j=|l-\frac{1}{2}|}^{l+\frac{1}{2}} \sum_{m=-j}^j \mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m(\hat{r}) \left[\mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m(\hat{r}') \right]^\dagger e^{-i\frac{\alpha}{2}t(j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4})} \quad (2.43)$$

Cuyo cálculo puede ser intrincado pero útil y por tanto lo incluimos a continuación. Primero recordemos que las funciones angulares espinoriales están dadas por

$$\mathcal{Y}_{j=l\pm\frac{1}{2}, l, \frac{1}{2}}^m = \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}} \chi_+ + \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}} \chi_- \quad (2.44)$$

siendo χ_{\pm} la base canónica de los espinores para $s = 1/2$. Por comodidad definimos

$$\lambda(l, j = l - 1/2) := -(l+1), \quad \lambda(l, j = l + 1/2) := l \quad (2.45)$$

$$K_l^{\pm} := \sum_m e^{-i\alpha \lambda(l, l \pm \frac{1}{2})t/2} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}*} \\ \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}*} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

tal que la suma adicional sobre signos superior e inferior dé

$$K_l = K_l^+ + K_l^- . \quad (2.47)$$

En forma matricial escribimos

$$K_l^\pm = \sum_m \frac{e^{-i\alpha\lambda(l, l \pm \frac{1}{2})t/2}}{2l+1} \times \begin{pmatrix} (l \pm m + \frac{1}{2})Y_l^{m-\frac{1}{2}}Y_l^{m-\frac{1}{2}*} & \pm\sqrt{(l \pm m + \frac{1}{2})(l \mp m + \frac{1}{2})}Y_l^{m-\frac{1}{2}}Y_l^{m+\frac{1}{2}*} \\ \pm\sqrt{(l \pm m + \frac{1}{2})(l \mp m + \frac{1}{2})}Y_l^{m-\frac{1}{2}}Y_l^{m+\frac{1}{2}*} & (l \mp m + \frac{1}{2})Y_l^{m+\frac{1}{2}}Y_l^{m+\frac{1}{2}*} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Por conveniencia redefinimos el índice de suma para la proyección de momento angular total. Sea $\mu = m - \frac{1}{2}$ para $j = l + \frac{1}{2}$ y $\mu = m + \frac{1}{2}$ para $j = l - \frac{1}{2}$ de modo que $\mu = -l - 1, \dots, l$ para $j = l + \frac{1}{2}$ y $\mu = -l + 1, \dots, l$ para $j = l - \frac{1}{2}$. Las dos partes de K_l son ahora

$$K_l^+ = \sum_{\mu=-l-1}^l \frac{e^{-i\alpha l t/2}}{2l+1} \begin{pmatrix} (l + \mu + 1)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & \sqrt{l + \mu + 1}\sqrt{l - \mu}Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu+1*}(\hat{r}') \\ \sqrt{l - \mu}\sqrt{l + \mu + 1}Y_l^{\mu+1}(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & (l - \mu)Y_l^{\mu+1}(\hat{r})Y_l^{\mu+1*}(\hat{r}') \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$K_l^- = \sum_{\mu=-l+1}^l \frac{e^{i\alpha(l+1)t/2}}{2l+1} \begin{pmatrix} (l - \mu + 1)Y_l^{\mu-1}(\hat{r})Y_l^{\mu-1*}(\hat{r}') & -\sqrt{l + \mu}\sqrt{l - \mu + 1}Y_l^{\mu-1}(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \\ -\sqrt{l + \mu}\sqrt{l - \mu + 1}Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu-1*}(\hat{r}') & (l + \mu)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Cada uno de los coeficientes en la matriz espinorial puede reproducirse a través de operadores diferenciales actuando en las funciones angulares. Utilizando la representación diferencial de momentos angulares

$$L_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad L_\pm = -ie^{\pm i\phi}\left(\pm i\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \quad (2.51)$$

tenemos que para el signo superior en (2.48) se cumple

$$K_l^+ = \sum_{\mu=-l-1}^l \frac{e^{-i\alpha l t/2}}{2l+1} \begin{pmatrix} (l + L_3 + 1)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & L_-Y_l^{\mu+1}(\hat{r})Y_l^{\mu+1*}(\hat{r}') \\ L_+Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & (l - L_3 + 1)Y_l^{\mu+1}(\hat{r})Y_l^{\mu+1*}(\hat{r}') \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

mientras que el signo inferior

$$K_l^- = \sum_{\mu=-l+1}^l \frac{e^{i\alpha(l+1)t/2}}{2l+1} \begin{pmatrix} (l - L_3)Y_l^{\mu-1}(\hat{r})Y_l^{\mu-1*}(\hat{r}') & -L_-Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \\ -L_+Y_l^{\mu-1}(\hat{r})Y_l^{\mu-1*}(\hat{r}') & (l + L_3)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

En este punto reexpresamos las sumas

$$\sum_{\mu=-l-1}^l Y_l^{\mu+1}Y_l^{\mu+1*} = \sum_{\mu=-l}^l Y_l^\mu Y_l^{\mu*} \quad (2.54)$$

$$\sum_{\mu=-l+1}^l Y_l^{\mu-1}Y_l^{\mu-1*} = \sum_{\mu=-l}^l Y_l^\mu Y_l^{\mu*} - Y_l^l Y_l^{l*}. \quad (2.55)$$

y el término extra proveniente de (2.55) desaparece después de aplicar los operadores diferenciales en (2.53). De esta forma las sumas sobre μ en (2.52) y (2.53) son tales que $\mu = -l, \dots, l$ y se tiene

$$K_l^+ = \sum_{\mu=-l}^l \frac{e^{-i\alpha l t/2}}{2l+1} \begin{pmatrix} (l+L_3+1)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & L_-Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \\ L_+Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & (l-L_3+1)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$K_l^- = \sum_{\mu=-l}^l \frac{e^{i\alpha(l+1)t/2}}{2l+1} \begin{pmatrix} (l-L_3)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & -L_-Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \\ -L_+Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') & (l+L_3)Y_l^\mu(\hat{r})Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

También usaremos las relaciones

$$\frac{2i}{t} \frac{\partial e^{-\frac{i}{2}\alpha l t}}{\partial \alpha} = l e^{-\frac{i}{2}\alpha l t}, \quad \frac{2i}{t} \frac{\partial e^{\frac{i}{2}\alpha(l+1)t}}{\partial \alpha} = -(l+1) e^{\frac{i}{2}\alpha(l+1)t}, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_3 & L_- \\ L_+ & -L_3 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

de forma que (2.56) y (2.57) se vuelven

$$K_l^+ = \left[\frac{2i}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] \sum_{\mu=-l}^l \frac{e^{-i\alpha l t/2}}{2l+1} Y_l^\mu(\hat{r}) Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \quad (2.59)$$

$$K_l^- = - \left[\frac{2i}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] \sum_{\mu=-l}^l \frac{e^{i\alpha(l+1)t/2}}{2l+1} Y_l^\mu(\hat{r}) Y_l^{\mu*}(\hat{r}'). \quad (2.60)$$

Añadiendo ambas partes llegamos por fin a

$$K_l = \left[\frac{2i}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] \sum_{\mu=-l}^l \frac{(e^{-i\alpha l t/2} - e^{i\alpha(l+1)t/2})}{2l+1} Y_l^\mu(\hat{r}) Y_l^{\mu*}(\hat{r}') \\ = \left[\frac{2i}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] (-2i e^{i\alpha t/4}) \sin((l+\frac{1}{2})\alpha t/2) P_l(\cos \gamma) \quad (2.61)$$

con P_k el k -ésimo polinomio de Legendre y γ el ángulo entre \hat{r} y \hat{r}' .

De esta fórmula emanan dos resultados. El primero se consigue substituyendo (2.61) y (2.42) en (2.41), llevándonos a

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \frac{\omega \sqrt{rr'}}{i \sin \omega t} \exp\left(\frac{i\omega}{2} \{r^2 + r'^2\} \cot \omega t\right) \left[\frac{2i}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] (-2i e^{i\alpha t/4}) \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \sin((l+\frac{1}{2})\alpha t/2) P_l(\cos \gamma) I_{l+1/2}\left(\frac{\omega r r'}{i \sin \omega t}\right) \quad (2.62)$$

y con la ayuda de (2.28) para $m = 1$, los factores gaussianos pueden cancelarse obteniendo una fórmula no trivial para una serie funciones de Legendre, Fourier y Bessel involucrando matrices de Pauli

$$\left[\frac{2i}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] \sum_{l=0}^{\infty} \sin((l+\frac{1}{2})\alpha t/2) P_l(\cos \gamma) I_{l+1/2}\left(\frac{\omega r r'}{i \sin \omega t}\right) = \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega e^{-i\alpha t/2}}{2\pi i r r' \sin \omega t}} e^{-i\omega \csc \omega t (e^{-\alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} t} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{r}')} \quad (2.63)$$

donde los elementos de matriz de $e^{-\alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} t}$ pueden encontrarse en el apéndice.

El segundo resultado proveniente de (2.61) es el siguiente. Consideremos solamente el término espín órbita con ($s = \frac{1}{2}$) como el hamiltoniano total del sistema y cuyo propagador llamaremos propagador de espín órbita. En ese caso la descomposición espectral correspondiente es

$$K_{so}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) := \langle \mathbf{r} | e^{-i\alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} t} | \mathbf{r}' \rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l \pm \frac{1}{2}} \sum_{m=-j}^j \mathcal{Y}_{j \frac{1}{2}}^m(\hat{r}) \left[\mathcal{Y}_{j \frac{1}{2}}^m(\hat{r}') \right]^\dagger e^{-i\alpha \lambda(l,j)t/2} \quad (2.64)$$

a través de la definición (2.46) junto con el resultado (2.61) convertimos (2.62) en

$$K_{so}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \left[\frac{2i}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 1 \right] (-2ie^{i\alpha t/4}) \sum_{l=0}^{\infty} \sin((l + \frac{1}{2})\alpha t/2) P_l(\cos \gamma) \quad (2.65)$$

Es sencillo verificar [9] que la suma sobre l en (2.65) está dada por la fórmula

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sin((l + \frac{1}{2})\alpha t/2) P_l(\cos \gamma) = \text{sign}(\sin(\alpha t/4)) \frac{u(\cos(\gamma) - \cos(\alpha t/2))}{\sqrt{2(\cos(\gamma) - \cos(\alpha t/2))}} \quad (2.66)$$

donde u es la función escalón

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

De esta forma el propagador K_{so} también tiene una expresión cerrada, ecs. (2.65) y (2.67).

2.4. Acoplamiento espín órbita como perturbación repentina

En capítulos posteriores el interés se ubica en problemas donde perturbaciones externas actúan repentinamente como campos externos o supresión de interacciones. Sin embargo, consideramos conveniente discutir en este punto el efecto de tal perturbación cuando se trata del término de acoplamiento espín órbita.

Consideremos un sistema descrito por un hamiltoniano H_1 para todo tiempo $t < 0$ y $H_1 + \alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ para $t > 0$. Supongamos también que nuestro sistema se encuentra en uno de sus eigenestados ϕ_n para tiempos negativos. Como ha sido usual a lo largo de este capítulo, tomamos

$$[H_1, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}] = 0 \quad (2.68)$$

e investigamos el comportamiento de la función de onda para tiempos positivos. Para este efecto, denotemos ϕ_n por un ket del momento angular orbital en producto directo con un espinor, *i.e.* $|l, m_l\rangle|s, m_s\rangle$. Este, a su vez, puede expandirse en términos de kets del momento angular total j que son los eigenestados del sistema a tiempos positivos,

$$|l, m_l\rangle|s, m_s\rangle = \sum_{j=|l-s|}^{l+s} \sum_{m=-j}^j \langle j, m|l, m_l, s, m_s\rangle|j, m, s, l\rangle \quad (2.69)$$

Para encontrar el ket a $t > 0$ aplicamos el operador de evolución $U = \exp -i(H_1 + \alpha\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})t$ a ambos miembros de (2.69), encontrando

$$U|n, l, m_l\rangle|s, m_s\rangle = \sum_{j=|l-s|}^{l+s} \sum_{m=-j}^j \langle j, m|l, m_l, s, m_s\rangle e^{-iE_{n,j,s}t}|n, j, m, s, l\rangle \quad (2.70)$$

con $E_{n,j,s,l}$ los eigenvalores de $H_1 + \alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. Ya que la suma es finita, (2.70) es una expresión cerrada. La densidad de probabilidad exhibe interferencia entre diferentes j 's. Para el estado base se tiene $l = 0$ y no se observa fenómeno transitorio.

En general podemos afirmar que cualquier perturbación repentina que introduzca un espectro finito y que conmute con H_1 da lugar a la interferencia (2.70) con los coeficientes apropiados. En este caso el término dominante en la combinación lineal de la función de onda es aquel que contiene el coeficiente de Clebsch Gordan para $j = l + s$. La contribución dominante en la densidad de probabilidad está dada por el cuadrado de dicho término (máximo momento angular total $j = l + s$) seguida de términos oscilatorios. El efecto transitorio es en general cuasiperiódico; la periodicidad es posible en el caso excepcional del oscilador armónico cuya frecuencia ω sea conmensurable con la intensidad α del acoplamiento espín-órbita.

Dado que las contribuciones relativistas a los hamiltonianos no son controlables en la forma en la que lo son los campos externos, la introducción repentina del término $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ puede no corresponder a una situación física. Sin embargo puede corresponder a la acción de un campo de norma no abeliano sobre una partícula con coordenadas \mathbf{r} . El grupo de norma necesario es $SU(2)$ con generadores \mathbf{S} , siendo el potencial vectorial correspondiente $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{S} \times \mathbf{r}$. En un hamiltoniano para una partícula no relativista y usando la regla de acoplamiento mínimo para la introducción de este potencial vectorial, el término espín-órbita aparece de forma natural, además de incluir una modificación al potencial escalar de la forma $\alpha^2 r^2$ que no afecta la simetría esférica orbital.

Capítulo 3

Fenómenos transitorios para sistemas cuánticos con estados ligados

El uso del concepto de propagador adquiere una dimensión más práctica con la aparición de un manual de soluciones exactas que data del año 1998 [6]. Sea \mathbf{x} el vector que contiene las coordenadas de un sistema. Los problemas que se discuten en este capítulo, a pesar de ser muy particulares, pertenecen al tipo general en los que un potencial $V_-(\mathbf{x})$ que admite estados ligados para un tiempo $t < 0$ experimenta a $t = 0$ un cambio repentino a $V_+(\mathbf{x})$, *i.e.* un potencial que contiene el anterior más una interacción externa dada por $V_+(\mathbf{x}) - V_-(\mathbf{x})$. Si nuestro vector \mathbf{x} está expresado en coordenadas cartesianas la energía cinética será entonces la suma de términos $(m_s \dot{x}_{qs}^2)$, con $s = 1, \dots, n$ el índice que enumera a las partículas y $q = 1, \dots, m$ el índice de la dimensión de una sola partícula. De este modo la lagrangiana del problema queda bien definida y es posible buscar en las tablas de [6] la fórmula del propagador que le corresponda en caso de que esta exista. Así procedemos a analizar el siguiente problema.

3.1. Dos partículas sujetas a un campo electrostático repentino

Aunque el propagador sea de gran utilidad para resolver problemas dependientes del tiempo, no siempre es posible tener una expresión cerrada para este. Existen problemas de interés físico en los que la obtención del propagador representa un obstáculo, v. gr. el átomo de hidrógeno en una perturbación repentina. En vista de lo anterior elegimos enfocarnos en un problema para el que pueda determinarse una expresión cerrada y simple del propagador. Esto nos conduce a sistemas descritos por lagrangianas cuadráticas en coordenadas y velocidades; para ellas existe un extensa lista de propagadores dada en [6].

Como sistema a estudiar consideramos dos partículas ligadas por un potencial en la coordenada relativa, siendo una de ellas de carga eléctrica positiva y la otra neutra. Esto puede representar un modelo simplificado para el deuterón, el cual está formado por un protón y un neutrón cuya masa m es aproximadamente la misma. Consideramos que los nucleones están ligados por una interacción de oscilador armónico de frecuencia ω como usualmente se supone en física nuclear.

Tomando unidades $\hbar = m = 1$ y aplicando al tiempo $t = 0$ un campo electrostático homogéneo en la dirección z afectando únicamente al protón, la lagrangiana queda dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) - \frac{1}{2}\omega^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - \mathcal{E} z_1 \quad (3.1)$$

donde índices 1 y 2 corresponden respectivamente a protón y neutrón, \mathcal{E} es la intensidad de campo de un potencial lineal multiplicado por la carga de la partícula y que es generado por las placas de un condensador. Lo recomendable es visualizar el sistema en coordenadas de Jacobi, siendo en este caso coordenadas similares a la relativa y centro de masa. La transformación es ortogonal y dada por

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \quad (3.2)$$

que transforma \mathcal{L} en

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{r}^2 - \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}z \right) + \left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}Z \right) \quad (3.3)$$

donde las componentes de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{R} están indicadas respectivamente por

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad \mathbf{R} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z \quad (3.4)$$

con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas. Una función lagrangiana expresada como la suma de dos términos de variables independientes da lugar a un propagador que es el producto de propagadores asociados a cada una de las partes. Dado que el cuadrado de los vectores \mathbf{r}, \mathbf{R} están dados por

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (3.5)$$

es adecuado analizar el problema en coordenadas cartesianas. En ellas la lagrangiana (3.3) se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + \frac{1}{2}(\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) + \frac{1}{2}(\dot{z}^2 - \omega^2 z^2 - \sqrt{2}\mathcal{E} z) \right] \\ & + \left[\frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}(\dot{Z}^2 - \sqrt{2}\mathcal{E} Z) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Así, de la observación hecha en el párrafo anterior, el propagador asociado a \mathcal{L} es el producto de propagadores unidimensionales correspondientes a las seis lagrangianas independientes que aparecen en (3.6). Para $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ el propagador está dado en [6] p. 178 fórmula (6.2.33) como

$$\left[\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega t} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2i} \left[(x^2 + x'^2) \cot \omega t - \frac{2xx'}{\sin \omega t} \right] \right\} \quad (3.7)$$

Para $\frac{1}{2}(\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)$ el propagador nuevamente tiene la forma (3.7) pero x, x' reemplazando a y, y' . Para $\frac{1}{2}(\dot{z}^2 - \omega^2 z^2 - \sqrt{2}\mathcal{E} z)$ completamos el cuadrado usando la variable \bar{z} definida por

$$\bar{z} = z + (\mathcal{E} / \sqrt{2}\omega^2) \quad (3.8)$$

de modo que la lagrangiana unidimensional se convierte en

$$\frac{1}{2}(\dot{\bar{z}}^2 - \omega^2 \bar{z}^2) + \frac{\mathcal{E}^2}{4\omega^2} \quad (3.9)$$

dato que $\dot{\bar{z}} = \dot{z}$. Para el término constante ($\mathcal{E}^2/4\omega^2$) aplicamos la relación entre propagadores y funciones de Green de la ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo, mencionada por ejemplo en [6] pag.2, para ver que su contribución consiste en un factor de fase $\exp[-i(\mathcal{E}^2/4\omega^2)t]$ mientras que el resto de (3.9) corresponde a la lagrangiana de un oscilador armónico unidimensional. Para el propagador de esta utilizamos (3.7) sustituyendo x, x' por \bar{z}, \bar{z}' . Para tener una notación uniforme añadimos las definiciones del resto de las coordenadas en términos de variables con barra

$$\bar{x} = x, \bar{y} = y \quad (3.10)$$

ya que en estas tenemos potencial de oscilador sólo para x, y . Con las definiciones

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2, \quad \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\bar{x} + \mathbf{j}\bar{y} + \mathbf{k}\bar{z} \quad (3.11)$$

y tomando en cuenta el factor de fase asociado a ($\mathcal{E}^2/4\omega^2$) obtenemos la parte del propagador relacionada a la coordenada relativa del sistema $\bar{\mathbf{r}}$

$$\exp\left[-i(\mathcal{E}^2/4\omega^2)t\right] \left[\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega t}\right]^{3/2} \exp\left\{-\frac{\omega}{2i}\left[(\bar{r}^2 + \bar{r}'^2) \cot \omega t - \frac{2\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{r}}'}{\sin \omega t}\right]\right\} \quad (3.12)$$

Ahora analizamos la parte de la expresión (3.6) escrita con variables en mayúsculas, comenzando con $\frac{1}{2}\dot{X}^2$ la cual, a través de [6] p. 174 fórmula (6.2.10) da lugar a

$$\frac{1}{(2\pi i t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{i}{2t}(X - X')^2\right] \quad (3.13)$$

Para $\frac{1}{2}\dot{Y}^2$ usamos la misma fórmula (3.13) pero reemplazando X, X' por Y, Y' . Para $(\frac{1}{2}\dot{Z}^2 - \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}Z)$ utilizamos [6] p. 175 fórmula (6.2.18) para obtener

$$\frac{1}{(2\pi i t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{i\left[\frac{(Z - Z')^2}{2t} - \frac{\mathcal{E}t}{2\sqrt{2}}(Z + Z') - \frac{\mathcal{E}^2 t^3}{48}\right]\right\} \quad (3.14)$$

Multiplicando (3.13), la expresión correspondiente para Y, Y' , y (3.14) obtenemos el kernel para el centro de masa del sistema

$$\frac{1}{(2\pi i t)^{3/2}} \exp\left\{i\left[\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{2t} - \frac{\mathcal{E}t}{2\sqrt{2}}(Z + Z') - \frac{\mathcal{E}^2 t^3}{48}\right]\right\} \quad (3.15)$$

El propagador completo de la lagrangiana (3.6) es entonces el producto de (3.12) y (3.15).

Para el deuterón a un tiempo $t < 0$ el estado base es

$$A \exp(-\frac{1}{2}\omega r^2) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}) \quad (3.16)$$

siendo A la constante de normalización de la parte gaussiana

$$A = (\omega/\pi)^{3/4} \quad (3.17)$$

y \mathbf{K} el vector de onda proporcional al momento del centro de masa. Para encontrar la función de onda al tiempo $t > 0$ no hace falta más que aplicar el propagador que corresponde a (3.6) al estado inicial (3.16) y que llevaremos a cabo en el siguiente apartado.

3.2. La función de onda del sistema de dos nucleones a tiempo $t > 0$ en un campo electrostático repentino

Como ya hemos obtenido el propagador de (3.12,3.15) podemos aplicarlo al estado (3.16) de modo que a través de la integración correspondiente obtengamos el estado a tiempos positivos. El cálculo involucra integrales de exponenciales cuadráticas en \mathbf{r}' y \mathbf{R}' , las cuales pueden obtenerse completando cuadrados. Desarrollaremos entonces un ejemplo y daremos el resultado completo para $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ a tiempos positivos. Recordando que para la componente x del vector relativo \mathbf{r} tenemos el propagador (3.7), cuando este se le aplica a la parte $\exp(-\frac{1}{2}\omega x^2)$ de (3.16) aparece la integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} A^{1/3} \left(\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega t} \right)^{1/2} \exp \left\{ (i\omega/2) \left[(x^2 + x'^2) \cot \omega t - 2xx'(\sin \omega t)^{-1} \right] e^{-\frac{1}{2}\omega x'^2} \right\} dx' \\ & = A^{1/3} \left(\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[(i\omega/2)x^2 \cot \omega t] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x'^2 + \alpha x'} dx' \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$\beta = (\omega/2)(1 - i \cot \omega t), \quad \alpha = -ix\omega(\sin \omega t)^{-1} \quad (3.19)$$

y β tiene parte real positiva. A partir de [9] se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x'^2 + \alpha x') dx' = (\pi/\beta)^{\frac{1}{2}} \exp(\alpha^2/4\beta) \quad (3.20)$$

y de (3.19) se tiene

$$\beta = (\omega/2i)(\sin \omega t)^{-1} \exp(i\omega t), \quad (\alpha^2/4\beta) = i\frac{\omega}{2}x^2 \cot \omega t - \frac{1}{2}\omega x^2 \quad (3.21)$$

de modo que reemplazando en (3.20) y luego en (3.18) obtenemos

$$A^{1/3} \exp(-\frac{1}{2}\omega x^2) \exp(-i\omega t/2) \quad (3.22)$$

lo cual es, tal y como se esperaba, la fase correspondiente a la energía $(\omega/2)$ del estado base del oscilador. El mismo resultado es válido para la variable y y tanto x como y pueden reemplazarse por \bar{x}, \bar{y} , ya que el potencial electrostático se aplica únicamente en la dirección z . Para el caso en el que la función inicial es $A^{1/3} \exp(-\omega z^2/2)$, lo mejor es sustituir z por $[\bar{z} - (\mathcal{E}/\sqrt{2}\omega^2)]$, como se indica en (3.8), y utilizar para la variable \bar{z} el propagador de oscilador que da lugar solamente al factor de fase discutido después de (3.9). En las coordenadas de centro de masa del deuterón, denotadas por mayúsculas, el propagador es aquel asociado a la partícula libre para X, Y . Aplicándolo a la parte de la onda plana $\exp(iK_X), \exp(iK_Y)$ se tiene tan solo un factor de fase

$$\exp(iK_x X) \exp(-iK_x^2 t/2), \quad \exp(iK_y Y) \exp(-iK_y^2 t/2) \quad (3.23)$$

Para la componente Z del centro de masa se aplica a $\exp(iK_z Z)$ el propagador (3.14) y las integrales que emergen de ahí pueden evaluarse con un procedimiento similar al indicado desde (3.18) hasta (3.22). Combinando todos los resultados, podemos establecer que para $t > 0$ nuestra función de onda $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ es finalmente

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) &= A \left(e^{-\frac{1}{2}m\omega r^2} e^{-i(3/2)\omega t} \right) \exp \left[i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} - \frac{1}{2}K^2 t) \right] \\
&\exp(-i\mathcal{E}^2 t / 4\omega^2) \exp \left\{ (\mathcal{E} / \sqrt{2}\omega)(e^{-i\omega t} - 1)z + (\mathcal{E}^2 / 2\omega^3)[e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \omega t)] + \frac{i \sin 2\omega t}{4} \right\} \\
&\exp \left\{ -i \left[\frac{\mathcal{E} t^3}{12} + K_z \frac{\mathcal{E} t^2}{2\sqrt{2}} - \frac{Z\mathcal{E} t}{\sqrt{2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

3.3. Densidad de probabilidad del sistema de dos nucleones en el campo electrostático repentino

La información física sobre el comportamiento temporal de un sistema se encuentra en la densidad de probabilidad como función del espacio y la forma en la que esta evoluciona. De este modo, es necesario escribir $|\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)|^2$ a partir de la función de onda (3.24). Observamos que la parte concerniente al centro de masa está constituida únicamente de factores unimodulares y que, por tanto, desaparecen; esto a pesar de que el centro de masa no está descrito por una onda plana debido a la presencia del campo. Así, X, Y, Z desaparecen, tal y como lo harían para la función de onda a $t = 0$ dada en (3.16). Para las coordenadas relativas mantendremos en el exponente de (3.24) únicamente términos reales y afectados por un factor 2, de modo que

$$\begin{aligned}
|\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)|^2 &= A^2 \exp \left\{ -\omega r^2 - (2\mathcal{E} / \sqrt{2}\omega)(1 - \cos \omega t) \right. \\
&- \left. (\mathcal{E}^2 / 2\omega^3) \left[-2 \cos \omega t + (1 + \cos^2 \omega t) \right] \right\} \\
&= A^2 \exp[-\omega(x^2 + y^2)] \exp \left\{ -\omega \left[z^2 + 2(\mathcal{E} / \sqrt{2}\omega)(1 - \cos \omega t)z + (\mathcal{E}^2 / 2\omega^4)(1 - \cos \omega t)^2 \right] \right\} \\
&= A^2 \exp[-\omega(x^2 + y^2)] \exp \left\{ -\omega \left[z + (\mathcal{E} / \sqrt{2}\omega)(1 - \cos \omega t) \right]^2 \right\} \\
&= A^2 \exp[-\omega(x^2 + y^2)] \exp \left\{ -\omega \left[z + (\sqrt{2}\mathcal{E} / \omega) \sin^2(\omega t / 2) \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

donde usamos una relación trigonométrica en la última igualdad. Así, tenemos un comportamiento transitorio muy simple y que depende únicamente de las coordenadas relativas y en el que x, y exhiben el comportamiento gaussiano estándar de rango $\omega^{-1/2}$ en nuestras unidades, mientras que z oscila alrededor de este rango con una amplitud $(\sqrt{2}\mathcal{E} / \omega^2) \sin^2(\omega t / 2)$. El período de oscilación es

$$(\omega T / 2) = \pi, \text{ o bien } T = (2\pi / \omega) \tag{3.26}$$

mientras que la amplitud queda dada por $(\sqrt{2}\mathcal{E} / \omega^2)$. Nótese que las coordenadas del protón y el neutrón en la dirección del campo son, respectivamente

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z + z), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - z) \tag{3.27}$$

y al elegir el centro de masa como origen de nuestro sistema coordenado, la distancia entre protón y neutrón es proporcional a $\sqrt{2}z$. De esta forma el deuterón vibra con una amplitud proporcional a

$(2\mathcal{E}/\omega^2) \sin^2(\omega t/2)$ con la posibilidad de emitir radiación. Es claro que para campos electrostáticos suficientemente intensos, el deuterón puede desintegrarse. Esta información puede obtenerse también de la discusión clásica del problema. También es posible discutir el caso en el que el campo electrostático es dependiente del tiempo a través de los diversos propagadores disponibles y que proporcionan una forma más realista de introducir interacciones externas. Podemos citar, por ejemplo, la fórmula (6.2.17), p. 175 de [6].

3.4. Tres partículas sujetas a campo electrostático repentino

Consideramos un sistema análogo al de la sección anterior para tres partículas. El problema tiene interés cuando al menos uno de las partículas es de naturaleza diferente al resto. Este modelo soluble representa de forma simplificada sistemas como el Tritio y ${}^3\text{He}$, admitiendo que las partículas involucradas sean protones y neutrones según su carga. Las interacciones entre partículas se supondrán iguales, *i.e.* independientes de isospín y también de la carga eléctrica, siendo la contribución de los potenciales coulombianos despreciable. Nuevamente los potenciales son de oscilador armónico y las masas $m = 1$ para protón y neutrón. A tiempo positivo se introduce un campo de intensidad \mathcal{E} en la dirección z . Los hamiltonianos para $t < 0$, *i.e.* en ausencia de perturbación, no necesariamente son iguales para los dos sistemas: nnp (${}^3\text{He}$) y npp (Tritio). Sin embargo para efectos del análisis tomamos frecuencias de oscilación ω en ambos casos. Coordenadas y momentos de partículas se denotarán por \mathbf{r}_i y \mathbf{p}_i respectivamente, con $i = 1, 2, 3$. Dado que trabajamos con el formalismo hamiltoniano, abandonamos la notación de variables puntuadas para derivadas en el tiempo, reservándola para la transformación de coordenadas de Jacobi. Los hamiltonianos para todo tiempo t son

$$H_{pnn} = T + V + \theta(t)\mathcal{E} z_1 \quad (3.28)$$

$$H_{ppn} = T + V + \theta(t)\mathcal{E} (z_1 + z_2) \quad (3.29)$$

donde la enumeración de las partículas consiste en etiquetar los protones primero. Además $T = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2)$ es la energía cinética y $V = \frac{\omega^2}{6}(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2)$ el potencial, θ es la función escalón que modula la entrada del campo electrostático. Utilizando las coordenadas de Jacobi

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

similarmente para coordenadas $\dot{\mathbf{r}}$ y \mathbf{r} , los hamiltonianos (3.28) y (3.29) para $t > 0$ son entonces

$$H_{pnn} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_1^2 + \dot{\mathbf{p}}_2^2 + \dot{\mathbf{p}}_3^2) + \frac{\omega^2}{2}(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) + \mathcal{E} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \dot{z}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \dot{z}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{z}_3 \right) \quad (3.31)$$

$$H_{ppn} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_1^2 + \dot{\mathbf{p}}_2^2 + \dot{\mathbf{p}}_3^2) + \frac{\omega^2}{2}(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) + \mathcal{E} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \dot{z}_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{z}_3 \right) \quad (3.32)$$

Resulta conveniente redefinir nuestras variables de modo que para el tritio

$$\mathbf{P}_i = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad \mathbf{R}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{R}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{2\mathcal{E}}{\sqrt{6}\omega^2} \mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_3 = \dot{\mathbf{r}}_3 \quad (3.33)$$

y para las coordenadas de Jacobi de ${}^3\text{He}$

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad \bar{\mathbf{R}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}\omega^2} \mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{R}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{6}\omega^2} \mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{R}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_3 \quad (3.34)$$

donde \mathbf{k} es el vector unitario en la dirección z . De esta forma llegamos a los hamiltonianos

$$H_{pnn} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_1^2 + \omega^2 \mathbf{R}_1^2) + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_2^2 + \omega^2 \mathbf{R}_2^2) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{P}_3^2 + \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}} Z_3\right) - \frac{\mathcal{E}^2}{3\omega^2} \quad (3.35)$$

$$H_{ppn} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{P}}_1^2 + \omega^2 \bar{\mathbf{R}}_1^2) + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{P}}_2^2 + \omega^2 \bar{\mathbf{R}}_2^2) + \left(\frac{1}{2}\bar{\mathbf{P}}_3^2 + \frac{2\mathcal{E}}{\sqrt{3}} \bar{Z}_3\right) - \frac{\mathcal{E}^2}{3\omega^2} \quad (3.36)$$

En estas variables se aprecia de inmediato que los propagadores correspondientes son aquellos de oscilador armónico para coordenadas relativas y de potencial lineal para centro de masa, ecs. (3.12) y (3.15) reemplazando debidamente las variables por (3.35) o (3.36) según sea el caso. El estado inicial al que aplicaremos el propagador estará dado por el estado base para $t < 0$ según pnn o ppn

$$\psi_{pnn}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3, 0) = A\chi_{pnn} e^{-i\mathbf{K}\cdot\dot{\mathbf{r}}_3} e^{-\frac{1}{2}\omega(\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2)} \quad (3.37)$$

$$\psi_{ppn}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3, 0) = A\chi_{ppn} e^{-i\mathbf{K}\cdot\dot{\mathbf{r}}_3} e^{-\frac{1}{2}\omega(\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2)} \quad (3.38)$$

donde A es un factor de normalización de la gaussiana, \mathbf{K} es el momento inicial del centro de masa y χ es un espinor normalizado que contiene la información sobre espín y espín isotópico. Debido a la simetría de (3.37) o (3.38) bajo permutaciones de partículas, χ determina la paridad de la función de onda; sin embargo, su presencia es irrelevante ya que es invisible tanto a los hamiltonianos como a los propagadores.

3.5. Densidad de probabilidad para tres nucleones en el campo electrostático

Llevando a cabo un análisis similar al que se efectuó para encontrar la densidad de probabilidad del deuterón es posible encontrar el mismo comportamiento oscilatorio en las coordenadas relativas y una propagación del centro de masa dada meramente por factores de fase. La observación fundamental consiste en entender que la traslación de coordenadas en (3.33) y (3.34) es directamente la amplitud de las vibraciones para la densidad de probabilidad a tiempos positivos, la cual escribimos para cada caso

$$|\psi_{pnn}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3, t)|^2 = A^2 e^{-\omega(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)} \exp\left(-\omega\left[\left(\dot{z}_1 + \frac{\mathcal{E} \sin^2(\omega t/2)}{\sqrt{2}\omega^2}\right)^2 + \left(\dot{z}_2 + \frac{\mathcal{E} \sin^2(\omega t/2)}{\sqrt{6}\omega^2}\right)^2\right]\right) \quad (3.39)$$

$$|\psi_{ppn}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3, t)|^2 = A^2 e^{-\omega(\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \dot{\mathbf{r}}_3^2)} \exp\left(-\omega\left(\dot{z}_2 + \frac{\sqrt{2}\mathcal{E} \sin^2(\omega t/2)}{\omega^2}\right)^2\right) \quad (3.40)$$

La presencia del campo es capaz de excitar ciertos modos de oscilación y a ciertas amplitudes según la carga de las partículas. Podemos establecer este resultado para el caso general en el que se tiene un número n de nucleones ligados por interacción de oscilador. Ello se discute en el apartado siguiente.

3.6. Resultados generales para el caso de n nucleones

En caso de tener un sistema de n partículas las consideraciones que se han hecho para los casos anteriores no cambian significativamente. Si preservamos la numeración de las partículas como en el apartado anterior (los protones tienen los primeros índices) entonces el hamiltoniano a analizar es

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^2 + \frac{\omega^2}{2n} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \theta(t)\mathcal{E} \sum_{i=1}^{N_p} z_i \quad (3.41)$$

donde N_p es el número de protones en el sistema y es proporcional a la carga total. Empleando la transformación de Jacobi para n partículas

$$\dot{\mathbf{p}}_s = [s(s+1)]^{-1/2} \sum_{t=1}^s (\mathbf{p}_t - \mathbf{p}_{s+1}), \quad s = 1, \dots, n-1, \quad \dot{\mathbf{p}}_n = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \mathbf{p}_t \quad (3.42)$$

obtenemos un hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \theta(t)\mathcal{E} N_p \sum_{s=n-N_p}^n [s(s+1)]^{-1/2} \dot{z}_i \quad (3.43)$$

cuyo propagador aplicaremos al estado base

$$\psi(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, 0) = A\chi e^{-i\mathbf{K}\cdot\dot{\mathbf{r}}_n} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \sum_{s=1}^{n-1} \dot{\mathbf{r}}_s^2\right) \quad (3.44)$$

donde consideraciones similares al caso del sistema de tres partículas se mantienen para A , χ , \mathbf{K} . Recurriendo a la observación hecha para el caso de tres partículas, la traslación de coordenadas para completar cuadrados en (3.43) es igual a las amplitudes de oscilación que experimenta (3.44) después de la aplicación del campo. Establecemos entonces que las amplitudes están dadas por

$$A_{N_p, s} = \frac{\mathcal{E} N_p}{\omega^2 \sqrt{s(s+1)}}, \quad N_p < s < n-1, \quad A_{N_p, s} = 0 \quad \text{de otro modo} \quad (3.45)$$

siendo s la etiqueta para la coordenada de Jacobi que está en vibración, la cual también indica el número de partículas que participan en su definición y por tanto el número de participantes del movimiento oscilatorio. Observamos que (3.45) es proporcional al número de protones, es decir, a la carga total. Por ello, en este modelo, es más probable disociar núcleos con carga mayor; sin embargo, la cantidad de modos de oscilación disminuye con N_p .

Capítulo 4

Procedimiento general para analizar fenómenos transitorios causados por perturbaciones repentinas

Mientras que el propagador $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ es muy útil para discutir fenómenos transitorios, en general no contamos con su forma explícita para un potencial cualquiera $V_+(\mathbf{x})$. Por ello es necesario desarrollar un método aproximado al cual se pueda recurrir. Nuestro método está basado en la transformada de Laplace de las funciones de onda dependientes del tiempo en contraste con las de Fourier, ya que de esta forma podemos lidiar de forma explícita con la condición inicial del problema. Denotando H_{\pm} los hamiltonianos asociados a los potenciales V_{\pm} tenemos que

$$H_- = T + V_-, \quad H_+ = T + V_+ = H_- + (V_+ - V_-) \quad (4.1)$$

donde T es la energía cinética. Suponemos entonces que H_- tiene, de principio, un espectro que es únicamente discreto. En caso de que dicho espectro contenga una parte continua, podemos reducir la situación al caso anterior mediante la inserción del sistema en una caja. Sean las energías y eigenfunciones de H_- tales que

$$H_- \phi_n = E_n \phi_n \quad (4.2)$$

donde

$$E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_{n-1} \leq E_n \leq E_{n+1} \dots \quad (4.3)$$

Para H_+ buscamos una solución $\psi(\mathbf{x}, t)$ de la ecuación dependiente del tiempo (usando unidades c.g.s.)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_+ \psi = [H_- + (V_+ - V_-)] \psi \quad (4.4)$$

con valores iniciales

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \phi_\nu(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

siendo ν un entero. La transformada de Laplace de $\psi(\mathbf{x}, t)$ se define por

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} \psi(\mathbf{x}, t) dt \quad (4.6)$$

Aplicando dicha transformación a (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned} i\hbar \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt &= i\hbar \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (e^{-st} \psi(\mathbf{x}, t)) dt + i\hbar s \bar{\psi}(\mathbf{x}, s) \\ &= -i\hbar \psi(\mathbf{x}, 0) + i\hbar s \bar{\psi}(\mathbf{x}, s) = [H_- + (V_+ - V_-)] \bar{\psi}(\mathbf{x}, s) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dado que las eigenfunciones ϕ_n de H_- forman un conjunto completo ortonormal efectuamos el desarrollo

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) \phi_n(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

de modo que la ec. (4.7) se convierte en

$$\begin{aligned} -i\hbar \phi_\nu(\mathbf{x}) + i\hbar s \sum_n a_n(s) \phi_n(\mathbf{x}) \\ = [H_- + (V_+ - V_-)] \sum_n a_n(s) \phi_n(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Multiplicando por $\phi_{n'}^*(\mathbf{x})$ e integrando sobre la variable \mathbf{x} arroja

$$\begin{aligned} -i\hbar \delta_{n'\nu} + i\hbar s a_{n'}(s) \\ = E_{n'} a_{n'}(s) + \sum_n \langle n' | V_+ - V_- | n \rangle a_n(s) \end{aligned} \quad (4.10)$$

habiendo definido

$$\langle n' | V_+ - V_- | n \rangle = \int \phi_{n'}^*(\mathbf{x}) [V_+(\mathbf{x}) - V_-(\mathbf{x})] \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.11)$$

La ecuación (4.10) corresponde a un conjunto infinito de ecuaciones algebraicas lineales para los coeficientes $a_n(s)$. Estas se pueden resolver de forma aproximada haciendo una suposición usual, que consiste en suprimir todos los coeficientes después de cierto valor N del índice. Naturalmente la precisión de la solución aumenta con el valor del número máximo de cuantos N que participen. Una vez obtenidos los coeficientes $a_n(s)$ para $n = 0, 1 \dots N$ podemos escribir la función $\bar{\psi}(\mathbf{x}, s)$ en la forma

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, s) = \sum_{n=0}^N a_n(s) \phi_n(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

Siendo nuestro objetivo determinar $\psi(\mathbf{x}, t)$, es necesario emplear la transformación inversa de Laplace

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\psi}(\mathbf{x}, s) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty+i\hbar c}^{\infty+i\hbar c} \exp(-iEt/\hbar) \bar{\psi}(\mathbf{x}, -iE/\hbar) dE \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde sustituimos la variable s por

$$s = -i(E/\hbar) \quad (4.14)$$

y la variable E se integra a lo largo de la línea ubicada por encima de todos los polos reales de $\bar{\psi}(\mathbf{x}, -iE\hbar^{-1})$ en el plano complejo. Nótese que el contorno de integración se puede completar con un círculo por debajo de estos polos y obtener esencialmente los residuos en valores de E determinados por el conjunto de ecuaciones lineales homogéneas

$$(E - E_{n'})a_{n'} = \sum_n \langle n'|V_+ - V_-|n \rangle a_n \quad (4.15)$$

o bien

$$Ea_{n'} = \sum_n \langle n'|H_+|n \rangle a_n \quad (4.16)$$

lo cual arroja las energías de los niveles asociados al hamiltoniano H_+ .

4.1. Ejemplo: estados coherentes del oscilador armónico

Para conectar el tratamiento de este capítulo con los sistemas ya estudiados (partículas cargadas interactuando con potenciales de oscilador), aplicamos ahora el método que se ha desarrollado a un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω bajo un campo electrostático cuya acción comienza repentinamente a un tiempo $t = 0$. Si bien el ejemplo es bastante simple, lo hemos elegido como punto de comparación para contrastar el método con resultados conocidos. Como ya hemos visto en los sistemas tratados en capítulos anteriores la coordenada paralela al campo sufre una traslación proporcional a la amplitud del mismo y el comportamiento del estado base es oscilatorio con frecuencia ω . Esto es equivalente a la evolución que manifiestan los llamados estados coherentes del oscilador. A continuación ilustramos el uso de nuestro método para este conocido problema.

Los hamiltonianos de nuestro sistema son

$$H_- = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad H_+ = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \mathcal{E}x \quad (4.17)$$

con m la masa de la partícula y \mathcal{E} la intensidad de campo multiplicada por la carga eléctrica. La diferencia de potenciales tiene los elementos de matriz

$$\langle n'|V_+ - V_-|n \rangle = \mathcal{E} \langle n'|x|n \rangle = \mathcal{E} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}) \quad (4.18)$$

donde hemos usado estados de oscilador $|n\rangle$ del problema inicial. Como estamos interesados en una aplicación numérica, escogemos las constantes $\mathcal{E} = m = \omega = \hbar = 1$. Si el método se utiliza de forma aproximada debemos truncar la serie en el miembro derecho de (4.10) y (4.12). Elegimos $N = 2$ a modo de aproximar $\psi(x, t)$ con tres funciones de oscilador. Para obtener estados coherentes seleccionamos el estado base como condición inicial, *i.e.* $\nu = 0$. Las ecuaciones (4.10) para $a_n = 0$ con $n \geq 3$ se escriben

$$(E - 5/2)a_2 = a_1, \quad (E - 3/2)a_1 = a_2 + a_0/\sqrt{2}, \quad -i + (E - 1/2)a_0 = a_1/\sqrt{2} \quad (4.19)$$

con soluciones

$$a_0(E) = \frac{-i[(E - 3/2)(E - 5/2) - 1]}{1/2(E - 5/2) - (E - 1/2)[(E - 3/2)(E - 5/2) - 1]} \quad (4.20)$$

$$a_1(E) = \frac{-i2^{-1/2}(E - 5/2)}{1/2(E - 5/2) - (E - 1/2)[(E - 3/2)(E - 5/2) - 1]} \quad (4.21)$$

$$a_2(E) = \frac{-i2^{-1/2}}{1/2(E - 5/2) - (E - 1/2)[(E - 3/2)(E - 5/2) - 1]} \quad (4.22)$$

cuya forma revela la misma estructura de polos para los tres coeficientes. La función de onda se escribe $\psi(x, t) = c_0(t)\phi_0(x) + c_1(t)\phi_1(x) + c_2(t)\phi_2(x)$, donde

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} dE a_n(E) e^{-iEt} \\ &= Res_0 a_n e^{-iE'_0 t} + Res_1 a_n e^{-iE'_1 t} + Res_2 a_n e^{-iE'_2 t} \end{aligned} \quad (4.23)$$

además E'_i es el i -ésimo polo de a_n y $Res_i a_n$ el residuo correspondiente. En nuestro caso los valores numéricos de las cantidades involucradas se indican en la tabla, con los cuales elaboramos un gráfico de la densidad de probabilidad resultante en función de x y t .

j	0	1	2
E'_j	0.030	1.296	3.172
$Res_j a_1$	0.660	0.317	0.021
$Res_j a_2$	-0.438	0.358	0.080
$Res_j a_3$	0.177	-0.297	0.119

Cuadro 4.1: Valores de los polos y residuos de los coeficientes a_n en el desarrollo del estado coherente de oscilador

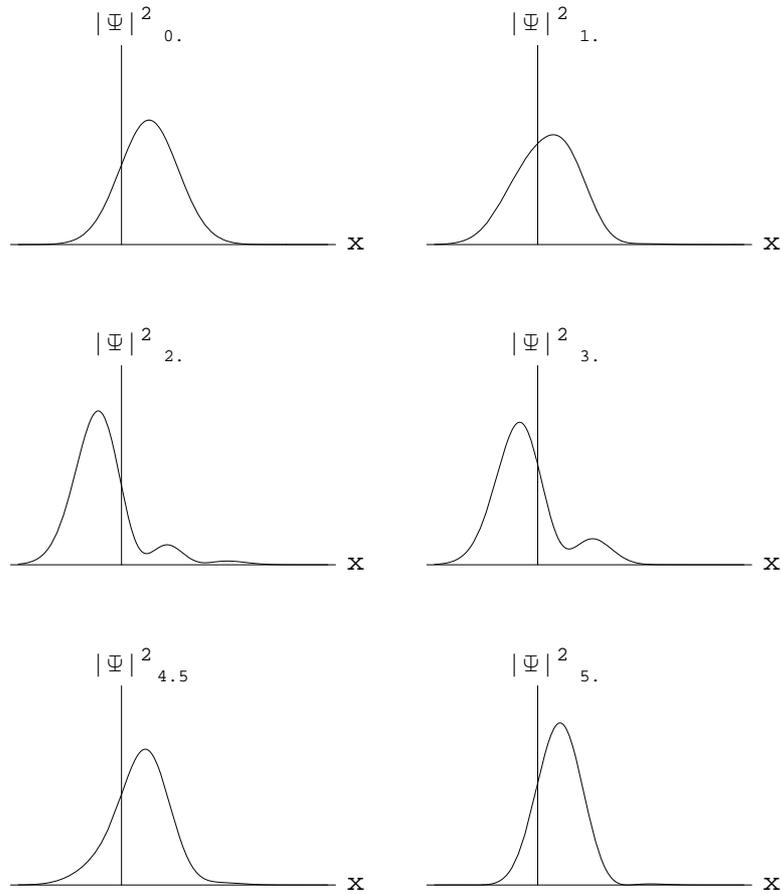


Figura 4.1: Densidad de probabilidad en el tiempo para el estado coherente aproximado por tres funciones de oscilador

En la figura 4.1 se indica el parámetro temporal en la parte superior de cada gráfica (unidades naturales). Se observa el típico comportamiento oscilatorio del paquete inicial cuyo centro está trasladado en una cantidad proporcional a la intensidad del campo \mathcal{E} aplicado a $t = 0$. Sabemos que el resultado exacto es un paquete que preserva su integridad y cuyo movimiento asemeja al de un oscilador clásico, mientras que en este caso, si bien hay un comportamiento oscilatorio, la forma de la distribución varía debido al truncamiento de la serie hasta tres términos. Sin embargo, consideramos que esta es una aproximación razonable en cuanto al comportamiento cualitativo del estado resultante y en función de la aplicabilidad del método. Este puede llevarse a cabo con una cantidad de términos arbitraria, mejorando la precisión.

Capítulo 5

Partículas compuestas cuánticas relativistas: un tratamiento general

A lo largo de la parte no relativista hemos dejado clara la importancia de tener un propagador para poder estudiar fenómenos dependientes del tiempo. Sin embargo, expresiones cerradas para estos objetos son difíciles de obtener y en la mayoría de los casos se desconoce su forma. Sabemos, además, que los propagadores admiten una descomposición espectral y que el estudio completo del problema estacionario de un sistema nos da la posibilidad de escribir propagadores en desarrollo de eigenfunciones. Por ello y antes de hacer un estudio de los fenómenos transitorios en el régimen relativista, dedicamos este capítulo a la formulación general invariante de Lorentz de sistemas compuestos y la posibilidad de obtener sus espectros y funciones de onda a través de un método aproximado. Concretamente analizaremos sistemas de dos y tres cuerpos como modelos de mesones y bariones, a modo de fijar los valores de las energías comparando con datos experimentales [5].

En mecánica cuántica no relativista es sencillo considerar partículas compuestas que están conformadas por otras más elementales. En la ausencia de interacciones y espines las partículas elementales están caracterizadas únicamente por su masa m_s , $s = 1, \dots, n$ y dan origen a aquellas que son compuestas, cuyo Hamiltoniano es

$$H = \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{2m_s} p_s^2 \right) \quad (5.1)$$

siendo \mathbf{p}_s el vector momento de la partícula s . Es posible entonces añadir a este Hamiltoniano un potencial de interacción dependiente de las coordenadas así como espines y otras observables con el fin de obtener algo que se conoce como Hamiltoniano de muchos cuerpos. De ahí podemos desarrollar técnicas [10] para obtener los autovalores *i.e.* los espectros así como los autoestados de estos Hamiltonianos.

La situación es más complicada en el caso relativista, ya que debemos lidiar tanto con los estados de una sola partícula como con el hecho de que la ecuación de onda resultante para el sistema compuesto debe exhibir invariancia de Poincaré; esto siempre y cuando se quiera representar un problema relativista de muchos cuerpos *bonafide* [11].

Por simplicidad nos restringimos a partículas compuestas por aquellas que tienen espín $\frac{1}{2}$ regidas por la ecuación de Dirac. En ese caso, el Hamiltoniano de una partícula no interactuante puede escribirse[12]

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta \quad (5.2)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ y β son las conocidas matrices de Dirac [12], c es la velocidad de la luz y m la masa de la partícula.

A primera impresión la extensión de la Ec.(5.2) para un sistema de partículas no interactuantes parece estar dado en forma similar a la Ec.(5.1), *i.e.*

$$H = \sum_{s=1}^n [(\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s) + m_s\beta_s] \quad (5.3)$$

A partir de aquí utilizamos unidades donde $\hbar = c = M = 1$, siendo M la masa total

$$M = \sum_{s=1}^n m_s \quad (5.4)$$

El Hamiltoniano Ec.(5.3) tiene inmediatamente el problema de no ser invariante de Poincaré, comenzando por el hecho de estar formulado en términos de tri- en vez de cuadri-vectores y por tanto no está expresado en variables de espacio-tiempo. Trataremos de superar esta dificultad en la siguiente sección.

5.1. Invariancia de Poincaré de partículas relativistas compuestas

Como ya se mencionó, la Ec.(5.3) no es invariante de Poincaré, pero notamos que esto también se cumple para el problema de una partícula si lo expresamos en términos de $\boldsymbol{\alpha}$ y β . Resulta útil entonces introducir el cuadri-vector contravariante de matrices γ_s^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ con las definiciones [6]

$$\gamma_s^0 = \beta_s, \quad \gamma_s^i = \beta_s \alpha_{is}, \quad i = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2 \dots n \quad (5.5)$$

y los cuadri-vectores covariantes de momentos $p_{\mu s}$. Como las matrices γ_s^μ también son cuadri-vectores, la contracción sobre el índice μ

$$\gamma_s^\mu p_{\mu s} \quad (5.6)$$

es un escalar de Lorentz.

Para obtener el Hamiltoniano invariante de Poincaré para una partícula compuesta, comenzamos por denotar u_μ un cuadri-vector unitario temporaloide, lo que significa que para cierto sistema inercial éste toma la forma

$$(u_\mu) = (1, 0, 0, 0). \quad (5.7)$$

Con la ayuda del cuadri-vector (5.5) podemos definir los escalares de Lorentz [5], [20]

$$\Gamma \equiv \prod_{r=1}^n \left(\gamma_r^\mu u_\mu \right), \quad \Gamma_s \equiv \left(\gamma_s^\mu u_\mu \right)^{-1} \Gamma, \quad (5.8)$$

donde $(\gamma_s^\mu u_\mu)^{-1}$ elimina el término correspondiente en Γ y Γ_s está dado aún en forma de producto.

Proponemos ahora que en lugar de la Ec. (5.3) tenemos la siguiente, que es invariante de Lorentz [13]

$$\sum_{s=1}^n \Gamma_s (\gamma_s^\mu p_{\mu s} + m_s) \psi = 0 \quad (5.9)$$

Esta es una ecuación diferencial que contiene n tiempos correspondientes a las n partículas; sin embargo, es posible reducirla a una ecuación para un solo tiempo en el marco de referencia apropiado, el cual permite expresar (5.9) en forma hamiltoniana. A continuación indicamos los pasos a seguir. Con la ayuda del cuadri-vector total de energía momento

$$P_\mu = \sum_{s=1}^n p_{\mu s}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (5.10)$$

mostramos que, en el marco de referencia donde $(u_\mu) = (1, 0, 0, 0)$, la Ec. (5.9) toma la forma

$$\left[\Gamma^0 \sum_{s=1}^n p_{0s} + \sum_{s=1}^n \Gamma_s^0 (\boldsymbol{\gamma}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s) \right] \psi = 0, \quad (5.11)$$

donde las letras negritas denotan tri-vectores y

$$\Gamma^0 \equiv \prod_{r=1}^n \gamma_r^0, \quad \Gamma_s^0 \equiv (\gamma_s^0)^{-1} \Gamma^0, \quad (5.12)$$

Multiplicando la Ec. (5.9) por Γ^0 y utilizando las Ecs. (5.5,5.10,5.12) obtenemos

$$\left[-P^0 + \sum_{s=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s \beta_s) \right] \psi = 0 \quad (5.13)$$

habiendo utilizado una métrica en la que $P_0 = -P^0$, siendo ésta última la componente cero de P^μ i.e. la energía total del sistema. Es deseable que la Ec. (5.9) represente el sistema de partículas en el que el centro de momento se encuentre en reposo; esto puede lograrse si definimos

$$u_\mu = P_\mu (-P_\tau P^\tau)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

tal que si $P_i = 0, i = 1, 2, 3$, tenemos $u_i = 0, u_0 = 1$. El signo $-$ en (5.14) se debe a que P_μ es un vector temporaloide, por lo que la expresión dentro del radical es explícitamente positiva. Al identificar P^0 con el operador $i \frac{\partial}{\partial t}$ obtenemos que (5.13) es una ecuación tipo Schroedinger cuyo tiempo corresponde al sistema centro de momento.

Por otra parte, los sistemas que nos interesan pueden contener interacciones, en cuyo caso debemos establecer nuevamente la invariancia de Poincaré. Para interacciones que dependen de la coordenada relativa

$$x_\mu^{st} \equiv x_{\mu s} - x_{\mu t}, \quad (5.15)$$

podemos definir

$$x_{\perp \mu}^{st} \equiv x_\mu^{st} - (x_\tau^{st} u^\tau) u_\mu \quad (5.16)$$

y así, suprimiendo los índices s, t , tenemos que

$$r^2 \equiv (x_{\perp \mu} x_{\perp}^\mu) \quad (5.17)$$

es un invariante de Poincaré. Esto también es cierto para cualquier función de dicho invariante.

La ecuación (5.13) es idéntica a Ec. (5.3) siempre y cuando interpretemos H como \mathbf{P}^0 y así, siendo un caso particular de la Ec. (5.9), su invariancia de Poincaré queda asegurada.

5.2. La transformación FW para el Hamiltoniano de muchos cuerpos

Para encontrar la transformación FW del Hamiltoniano de n cuerpos revisaremos brevemente el análisis correspondiente al caso de un solo cuerpo.

El Hamiltoniano es [14]

$$H \equiv \mathcal{O} + \mathcal{E} + V \quad (5.18)$$

donde la parte impar \mathcal{O} es $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$, la parte par es $\mathcal{E} = \beta m$ y V es el potencial como función del escalar r . Siguiendo a Foldy y Wouthuysen [15] y, en particular, el libro de Bjorken y Drell [14], es posible encontrar un operador unitario

$$U = \exp(iS'') \exp(iS') \exp(iS) \quad (5.19)$$

que nos permita transformar H en una serie de potencias inversas de la masa en reposo m e identificar la parte correspondiente a las energías positivas de H . Los operadores hermitianos en (5.19) están dados por

$$S = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}, \quad S' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}', \quad S'' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}'' \quad (5.20)$$

con

$$\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathcal{O}' = \beta \frac{[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, V]}{2m}, \quad \mathcal{O}'' = -\frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})p^2}{3m^2} \quad (5.21)$$

y el Hamiltoniano de energía positiva H' queda como

$$H' = \hat{H} + V, \quad \hat{H} = \beta \left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} \right) + \frac{1}{4m^2} \mathbf{s} \cdot \left[(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) \right] + \frac{1}{8m^2} \nabla^2 V \quad (5.22)$$

donde el desarrollo en la energía cinética se ha hecho hasta orden $1/m^3$ y el desarrollo en las interacciones hasta orden $1/m^2$. La intensidad de campo \mathbf{E} está dada por

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (5.23)$$

y \mathbf{s} es el espín de la partícula, $\mathbf{s} = -\frac{i}{4}\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}$.

Una vez teniendo estos resultados conocidos podemos pasar al problema de n cuerpos. Comenzando con el caso de dos cuerpos se tiene

$$H = H_1 + H_2 + V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (5.24)$$

con

$$H_s = \boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + \beta_s m_s, \quad s = 1, 2 \quad (5.25)$$

Reescribimos H como

$$H = [H_1 + V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + H_2 \quad (5.26)$$

apliquémosle primero la transformación unitaria

$$U_1 = \exp(iS_1'') \exp(iS_1') \exp(iS_1) \quad (5.27)$$

donde S_1'', S_1', S_1 están dados por S'', S', S en (5.20) y además $\beta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}$ exhiben el índice 1 *i.e.* $\beta_1, \boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{p}_1$ para indicar su dependencia en la partícula 1. Como los operadores S_1'', S_1', S_1 dependen únicamente de las variable correspondientes a la partícula 1 es claro que no afectan H_2 en (5.26) y que para $(H_1 + V)$ nos da lo obtenido en (5.22) con el índice para la variable *i.e.*

$$U_1 H U_1^\dagger = \hat{H}_1 + (H_2 + V) \quad (5.28)$$

donde \hat{H}_1 está dado por (5.22) con índice 1 para todas las variables.

Apliquemos ahora la transformación unitaria para la segunda partícula *i.e.*

$$U_2 = \exp(iS_2'') \exp(iS_2') \exp(iS_2) \quad (5.29)$$

con S_2'', S_2', S_2 dados por S'', S', S en (5.20) colocando en $\beta, \mathbf{x}, \mathbf{p}$ el índice 2 *i.e.* $\beta_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{p}_2$. Claramente la transformación unitaria U_2 no tiene efecto en \hat{H}_1 ya que los únicos términos que podría afectar son $(\nabla_1^2 V / 8m^2)$ y $\frac{1}{4m^2} \mathbf{S} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \times \mathbf{p})]$ y estos corresponden a un orden mayor que el orden máximo que hemos propuesto.

Tenemos entonces que U_2 sólo actúa en $(H_2 + V)$ resultando en

$$U_2 (H_2 + V) U_2^\dagger = \hat{H}_2 + V \quad (5.30)$$

Aquí el operador \hat{H}_2 es aquel dado en (5.22) y todas sus variable contienen el índice 2. Así, si consideramos $U_2 U_1$ como nuestra transformación unitaria tenemos

$$U_2 U_1 (H_1 + H_2 + V) U_1^\dagger U_2^\dagger = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + V \quad (5.31)$$

El procedimiento para el problema de dos partículas sugiere la forma de proceder en el caso general de n cuerpos donde $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Podemos llevar a cabo la transformación

$$H' = U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 H U_1^\dagger U_2^\dagger \cdots U_n^\dagger = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \cdots + \hat{H}_n + V \quad (5.32)$$

con

$$\hat{H}_t = \beta_t \left(m_t + \frac{p_t^2}{2m_t} - \frac{p_t^4}{8m_t^3} \right) + \frac{1}{4m_t^2} \mathbf{s}_t \cdot (\mathbf{p}_t \times \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_t \times \mathbf{p}_t) + \frac{1}{8m_t^2} \nabla_t^2 V, \quad (5.33)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

No debemos olvidar que en nuestra ecuación (5.30) hay que tomar en cuenta que el momento total es $\mathbf{P} = 0$, lo cual se logra pasando de nuestro sistema coordinado al de Hamilton-Jacobi tal y como será indicado en los ejemplos discutidos en la próxima sección.

Extendemos así la transformación FW aproximada al caso de ecuaciones de onda relativistas que describen sistemas multipartículas. Para transformaciones FW exactas del problema de dos y tres cuerpos cuando no hay interacción véanse las referencias [16].

5.3. Problema de dos cuerpos

En el caso de dos cuerpos cuando el momento total es $\mathbf{P} = 0$ y las masas $m_1 = m_2 = m$ se tiene

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad \text{ó} \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p} \quad (5.34)$$

y denotaremos el vector de coordenada relativa por $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Además, por simplicidad, tomaremos el potencial V de un oscilador armónico, *i.e.*, $V = \frac{1}{4}m\omega^2 r^2$.

De (5.33) y utilizando la notación \mathbf{p}, \mathbf{r} obtenemos que

$$\begin{aligned} H' = & (\beta_1 + \beta_2) \left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} \right) + V \\ & + \frac{1}{4m^2} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \cdot \left[(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) \right] + \frac{1}{4m^2} \nabla^2 V \end{aligned} \quad (5.35)$$

dado que

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{m\omega^2 \mathbf{r}}{2} \quad \text{and} \quad \nabla_1^2 V = \nabla_2^2 V = 3\frac{m\omega^2}{2} \quad (5.36)$$

cuando $V = \frac{1}{4}m\omega^2 r^2$. Introduciendo el momento angular orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y usando (5.36) reducimos H' a

$$H' = (\beta_1 + \beta_2) \left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} \right) + \frac{m\omega^2 r^2}{4} + \frac{\omega^2}{4m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} + 3\frac{\omega^2}{8m} \quad (5.37)$$

con

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \quad (5.38)$$

y siendo \mathbf{S} el vector de espín total, los valores del espín solo pueden ser 1 ó 0.

Notamos también que en la ec. (5.37) además de contener términos familiares en mecánica cuántica no relativista, contiene las matrices β_1 and β_2 . Estas pueden escribirse en términos de productos directos [13]

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

donde I_2 es la matriz unidad 2×2 y así

$$\beta_1 + \beta_2 = 2 \begin{bmatrix} I_4 & & \\ & 0_8 & \\ & & -I_4 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

siendo I_4 y 0_8 la matriz unidad 4×4 y la matriz nula 8×8 respectivamente.

Nuestro interés se centra en la parte positiva de la energía para la función de onda, lo que implica que $\beta_1 + \beta_2$ debe reemplazarse por 2 teniendo finalmente la expresión

$$H' = \left(2m + 3\frac{\omega^2}{8m} \right) + \left(\frac{p^2}{m} + \frac{m\omega^2 r^2}{4} + \frac{\omega^2}{4m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right) - \frac{p^4}{4m^3} \quad (5.41)$$

Dado que el segundo paréntesis corresponde al oscilador armónico con acoplamiento espín-órbita y cuyas eigenfunciones y eigenvalores están bien determinados utilizaremos estos como conjunto completo para expresar H' en forma matricial con entradas numéricas.

Antes de calcular los eigenvalores de H' en (5.41) resulta conveniente efectuar la transformación canónica

$$\boldsymbol{\pi} = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\rho} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\mathbf{r} \quad (5.42)$$

para escribir H' como

$$H' = 2m + 3\frac{\omega^2}{8m} + \frac{\omega}{2}(\pi^2 + \rho^2) + \frac{\omega^2}{4m}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} - \frac{\omega^2}{16m}\pi^4 \quad (5.43)$$

donde en el segundo paréntesis tenemos el Hamiltoniano de oscilador de frecuencia 1 y el término espín-órbita permanece inalterado $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\pi}$ mientras que p^4 se reemplaza por $\frac{1}{4}m^2\omega^2\pi^4$.

Para convertir H' en una matriz numérica podemos utilizar estados comunes del oscilador armónico y del cuadrado de momento angular total J^2 , momento angular orbital L^2 y espín total S^2 , i.e.,

$$|nl, \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) S; j, m \rangle \equiv \sum_{\mu, \sigma} \langle l\mu, S\sigma | jm \rangle |nl\mu \rangle \left| \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) S\sigma \right\rangle \quad (5.44)$$

donde J^2 , L^2 y S^2 conmutan con el Hamiltoniano (5.43) y por ende son integrales de movimiento. Los estados $|nl\mu \rangle$ corresponden al oscilador armónico de frecuencia 1 [17] y $\left| \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) S\sigma \right\rangle$ son los estados de espín total.

Los elementos de matriz que queremos determinar son entonces

$$\begin{aligned} & \langle n'l, \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) S; j, m | H' | nl, \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) S; j, m \rangle \\ &= \left(2m + \frac{3\omega^2}{8m} + \omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) + \frac{\omega^2}{8m} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \right) \delta_{nn'} \\ & \quad - \frac{\omega^2}{16m} \langle n'l' | \pi^4 | nl \rangle \end{aligned} \quad (5.45)$$

El último término en (5.45) puede calcularse comenzando con la relación $\langle n'l | \pi^4 | nl \rangle = \sum_{n''} \langle n'l | \pi^2 | n''l \rangle \langle n''l | \pi^2 | n'l \rangle$ y utilizando la expresión para $\langle n'l | \pi^2 | nl \rangle$ dada en la pág. 7, Eq. (3.11) de la referencia [17]. Llegamos entonces a lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle n'l | \pi^4 | nl \rangle &= \sqrt{n(n-1)(n+l+\frac{1}{2})(n+l-\frac{1}{2})} \delta_{n' n-2} \\ & \quad + (4n+2l+1) \sqrt{n(n+l+\frac{1}{2})} \delta_{n' n-1} \\ & \quad + [(2n+l+\frac{3}{2})(2n+l+\frac{5}{2}) + 2n(n+l+\frac{1}{2})] \delta_{n' n} \\ & \quad + (4n+2l+5) \sqrt{(n+1)(n+l+\frac{3}{2})} \delta_{n' n+1} \\ & \quad + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+l+\frac{3}{2})(n+l+\frac{5}{2})} \delta_{n' n+2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nótese que al utilizar unidades donde $\hbar = c = 1$, el término adimensional ω/m para unidades c.g.s. se escribe

$$\frac{\omega}{m} \rightarrow \frac{h\omega}{mc^2} \quad (5.47)$$

y puede tratarse como un parámetro pequeño. En la siguiente sección comparamos los resultados de nuestro análisis con el espectro experimental de masas de sistemas binarios. En particular estudiaremos mesones compuestos por un *quark* y su antipartícula (sistema denominado *quarkonium* en analogía al positronio), por ejemplo el charmonio (*charm-anticharm*) y el bottomonio (*bottom-antibottom*).

5.3.1. Espectro de masas para el problema de dos cuerpos

Comenzamos con el problema de eigenvalores

$$H'\psi = E_{nl}\psi \quad (5.48)$$

para el Hamiltoniano de dos cuerpos (5.45).

Para encontrar el espectro debemos diagonalizar la matriz (5.45) lo cual puede hacerse mediante métodos numéricos. Para obtener el espectro consideramos un término adicional correspondiente a un potencial cuártico

$$V = \frac{m\omega^2 r^2}{4} + V', \quad V' = -\frac{am\omega^4 r^4}{16} \quad (5.49)$$

donde a es una constante pequeña y adimensional.

La reducción FW (5.31) no cambia el término perturbativo dado que es de orden $(\frac{\omega}{m})^4$; sin embargo nuestro cambio de variables $r \rightarrow \rho$ resulta en

$$-\frac{am\omega^4 r^4}{16} \rightarrow V'' = -\frac{a\omega^2 \rho^4}{4m}$$

Así, $\tilde{H}' = H' + V''$ es el Hamiltoniano que nos interesa.

La representación matricial de V'' se obtiene fácilmente comenzando por la representación de ρ^2 dada en la pág. 7, Ec. (3.11) de la referencia [17]:

$$\begin{aligned} \langle nl|\rho^2|nl \rangle &= 2n + l + \frac{3}{2}, \\ \langle n'l|\rho^4|nl \rangle &= \sqrt{n(n-1)(n+l+\frac{1}{2})(n+l-\frac{1}{2})}\delta_{n' n-2} \\ &\quad - (4n+2l+1)\sqrt{n(n+l+\frac{1}{2})}\delta_{n' n-1} \\ &\quad + [(2n+l+\frac{3}{2})(2n+l+\frac{5}{2}) + 2n(n+l+\frac{1}{2})]\delta_{n' n} \\ &\quad - (4n+2l+5)\sqrt{(n+1)(n+l+\frac{3}{2})}\delta_{n' n+1} \\ &\quad + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+l+\frac{3}{2})(n+l+\frac{5}{2})}\delta_{n' n+2} \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde este resultado se obtiene en forma similar al de π^4 en la ec. (5.46). Comparamos nuestros resultados con aquellos obtenidos experimentalmente para el charmonio y bottomonio [18]. Tomamos $m = 4.5$ GeV para el bottomonio y $m = 1.4$ GeV para el charmonio. A través de un programa computacional encontramos las constantes de acoplamiento ω y a que corresponden a la mínima desviación (dispersión cuadrática) del espectro respecto a los datos experimentales.

Masas (en GeV) para los parámetros $m = 4.5$, $\omega = 0.34$, $a = 0.92$

	Experimental	Teórico
$l = 0, j = 1$		
$\Upsilon(2S) - \Upsilon(1S)$	0.563	0.550
$\Upsilon(3S) - \Upsilon(1S)$	0.895	0.920
$\Upsilon(4S) - \Upsilon(1S)$	1.118	1.256
$l = 1, j = 0$		
$\chi_{b0}(1P) - \Upsilon(1S)$	0.400	0.287
$\chi_{b0}(2P) - \Upsilon(1S)$	0.772	0.756
$l = 1, j = 1$		
$\chi_{b1}(1P) - \Upsilon(1S)$	0.432	0.293
$\xi_{b1}(2P) - \Upsilon(1S)$	0.794	0.762
$l = 1, j = 2$		
$\chi_{b2}(1P) - \Upsilon(1S)$	0.453	0.305
$\chi_{b1}(2P) - \Upsilon(1S)$	0.808	0.775

Cuadro 5.1: Espectro experimental para el bottomonio y los resultados de nuestro modelo

La notación en la primera columna de la tabla 5.1 indica el nombre histórico de la partícula cuya masa se ha calculado en la última columna, escribiendo entre paréntesis la notación espectroscópica que le corresponde en función de su momento angular (S,P,D,...) así como el estado de excitación (v. gr. $2s, 3s, 4s, \dots$). Estos estados se forman gracias a que las masas en reposo de los quarks involucrados impiden que estos estén degenerados en un multiplete, a diferencia de lo que ocurre con quarks ligeros [21] (*up, down, strange*). En la tabulación 5.1 se ha sustraído por comodidad la energía del estado base $\Upsilon(1S)$ a todos los niveles. El acuerdo con el experimento es razonable en la mayoría de los estados exceptuando los de menor energía. Sabemos que es la teoría de las interacciones fuertes (QCD) la que debe determinar los valores de las masas de estos niveles; sin embargo, es sabido también que los estados ligados ocurren en la llamada esclavitud infrarroja de la teoría y que este régimen está fuera de la teoría de perturbaciones, escapando a cualquier cálculo analítico. Existen otras formas de abordar estos problemas como QCD reticular (*lattice QCD*), que descansan en métodos numéricos. Aquí hemos puesto a prueba nuestro modelo de sistemas compuestos partiendo de una formulación invariante de Poincaré desde el inicio y capturando las propiedades que las partículas compuestas deben poseer incluyendo su espectro.

Masas (en GEV) para los parámetros $\omega = 0.51$, $m = 1.4$, $a = 0.05$

	Experimental	Teórico
$l = 0, j = 1$		
$\Psi(2S) - J/\Psi(1S)$	0.589	0.616
$\Psi(3S) - J/\Psi(1S)$	0.943	0.944
$l = 1, j = 0$		
$\chi_{c0}(1P) - J/\Psi(1S)$	0.308	0.320
$l = 1, j = 1$		
$\chi_{c1}(2P) - J/\Psi(1S)$	0.413	0.367
$l = 1, j = 2$		
$\chi_{c2}(3P) - J/\Psi(1S)$	0.459	0.534

Cuadro 5.2: Espectro experimental para el charmonio y los resultados de nuestro modelo

Al igual que en la tabla 5.1, en 5.2 se ha sustraído la energía del estado base J/Ψ a todos los niveles, mientras que la notación incluye nuevamente el nombre histórico de los estados acompañados de la nomenclatura espectroscópica. El acuerdo con el experimento es desde luego mejor para el charmonio, ya que los datos experimentales a ajustar son sólo seis, utilizando dos parámetros en el hamiltoniano.

Cabe mencionar que los modelos de oscilador para estos sistemas se han empleado principalmente en el contexto no relativista, dado que se habla de una teoría de norma a bajas energías. Esto es consistente con nuestro tratamiento, basado en un desarrollo en potencias inversas de la masa en reposo. Para comparar con otro modelo relativista similar véase [19]. Resultados con este modelo pero con otro juego de parámetros se encuentran en [20].

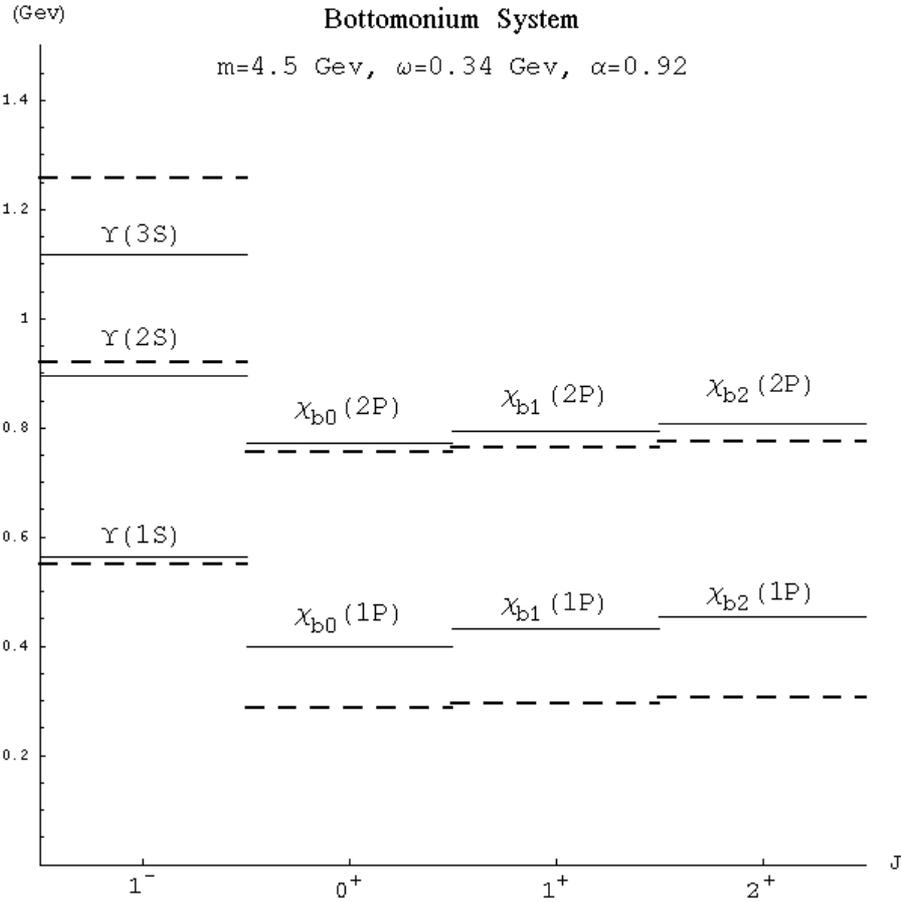


Figura 5.1: Comparación de energías para el bottomonio. Sólidas: experimental. Punteadas: teórico.

En la gráfica 5.1 se muestran los mismos resultados que en la tabla 5.1. Ahora hemos sustraído la masa en reposo del sistema, *i.e.* el doble de la masa del bottomonio dada en [18]. La abscisa indica el valor de las integrales de movimiento J (momento angular) y P (paridad), mientras que la ordenada es el valor de la energía que corresponde a cada estado acompañado de su nomenclatura.

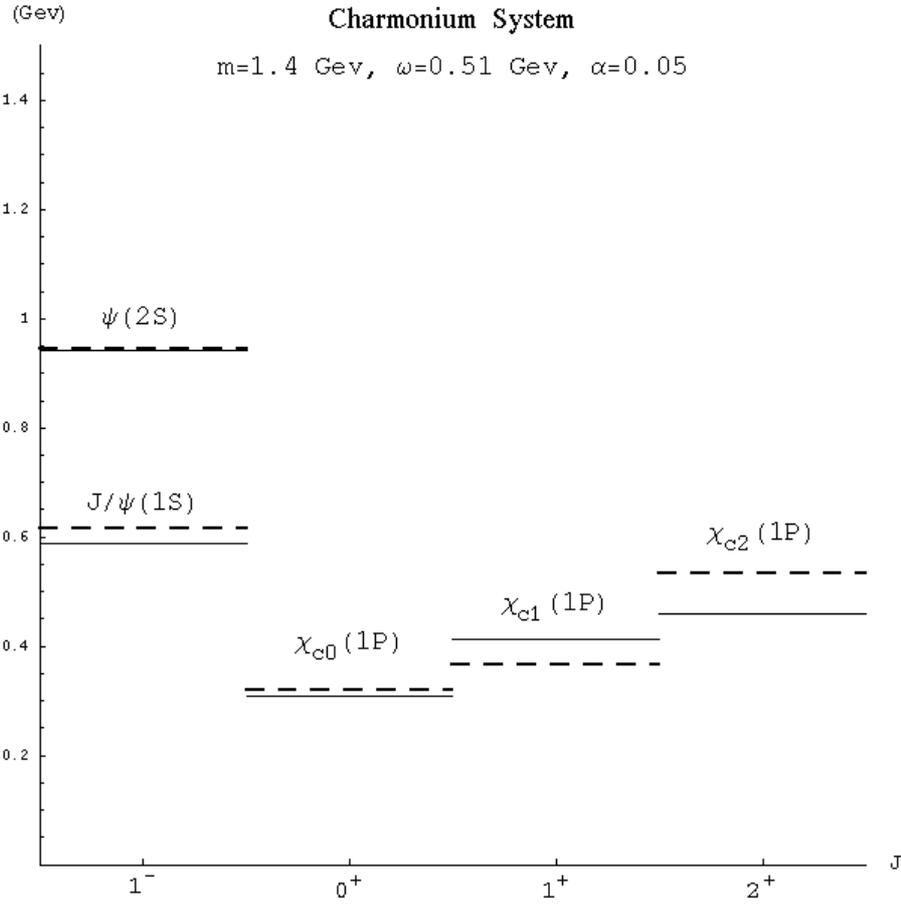


Figura 5.2: Comparación de energías para el charmonio. Sólidas: experimental. Punteadas: teórico.

En la gráfica 5.2 se muestran los resultados indicados en la tabla 5.2. Nuevamente se ha sustraído la masa en reposo, esta vez el doble de la masa del quark *charm*. Abscisa: integrales de movimiento J^P . Ordenada: masa de los estados.

5.4. Problema de tres cuerpos

El tratamiento en esta sección está basado en [5]. De las ecs.(5.32) y (5.33) tenemos una forma explícita del Hamiltoniano cuasi relativista de n cuerpos que proviene del problema invariante de Poincaré en el marco inercial donde el momento total $\mathbf{P} = 0$. Para tres cuerpos tenemos

$$H' = \sum_{t=1}^3 \beta_t \left(m_t + \frac{p_t^2}{2m_t} - \frac{p_t^4}{8m_t^3} \right) + \frac{1}{4m_t^2} \mathbf{s}_t \cdot (\mathbf{p}_t \times \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_t \times \mathbf{p}_t) + \frac{1}{8m_t^2} \nabla_t^2 V + V \quad (5.51)$$

donde $\mathbf{E}_t = -\nabla_t V$ y V es un potencial que depende de las proyecciones espaciales de las coordenadas. Como el momento total es nulo debemos tomar en cuenta que $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$. Una forma simple de considerar esto es introduciendo las variables de Jacobi para tres cuerpos que denotamos con puntos arriba y que para los momentos se escribe

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Por simplicidad consideramos potenciales de oscilador armónico entre pares de partículas. Escribimos entonces V de la siguiente forma

$$V = \frac{M\omega^2}{6} \left[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2 \right] \quad (5.53)$$

siendo M la masa total del sistema y ω la frecuencia de oscilación. Invirtiendo la fórmula (5.52) para expresar \mathbf{p}_i en términos de $\dot{\mathbf{p}}_i$ así como \mathbf{r}_i en términos de $\dot{\mathbf{r}}_i$ y sustituyendo en el potencial obtenemos

$$V = \frac{M\omega^2}{2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) \quad (5.54)$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{M\omega^2}{2} \left(\sqrt{2}\dot{\mathbf{r}}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\mathbf{r}}_2 \right) \\ \mathbf{E}_2 &= -\frac{M\omega^2}{2} \left(-\sqrt{2}\dot{\mathbf{r}}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\mathbf{r}}_2 \right) \\ \mathbf{E}_3 &= 2M\omega^2 \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\mathbf{r}}_2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

y

$$\nabla_t^2 V = 2M\omega^2 \quad (5.56)$$

con lo que, finalmente, reducimos el Hamiltoniano a lo siguiente

$$\begin{aligned}
H' = & Mc^2 + \left(\frac{1}{4}\dot{p}_1^2 + \frac{1}{12}\dot{p}_2^2\right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \frac{1}{3m_3}\dot{p}_2^2 + \frac{1}{\sqrt{12}}\dot{p}_{12} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) \\
& - \frac{1}{8m_1^3c^2} \left(\frac{1}{4}\dot{p}_1^4 + \frac{1}{36}\dot{p}_2^4 + \frac{1}{3}\dot{p}_{12}^2 + \frac{1}{6}\dot{p}_1^2\dot{p}_2^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{p}_{12}\dot{p}_1^2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\dot{p}_{12}\dot{p}_2^2\right) \\
& - \frac{1}{8m_2^3c^2} \left(\frac{1}{4}\dot{p}_1^4 + \frac{1}{36}\dot{p}_2^4 + \frac{1}{3}\dot{p}_{12}^2 + \frac{1}{6}\dot{p}_1^2\dot{p}_2^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{p}_{12}\dot{p}_1^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\dot{p}_{12}\dot{p}_2^2\right) + \frac{1}{18m_3^3c^2}\dot{p}_2^4 \\
& + \frac{M\omega^2}{8c^2} \left[\frac{1}{m_1^2} \mathbf{S}_1 \cdot \left(\dot{\mathbf{L}}_1 + \frac{1}{3}\dot{\mathbf{L}}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\mathbf{L}}_{12}\right) + \frac{1}{m_2^2} \mathbf{S}_2 \cdot \left(\dot{\mathbf{L}}_1 + \frac{1}{3}\dot{\mathbf{L}}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\mathbf{L}}_{12}\right) - \frac{8}{3m_3^2} \mathbf{S}_3 \cdot \dot{\mathbf{L}}_2 \right] \\
& + \frac{M\hbar^2\omega^2}{8c^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2}\right) + V
\end{aligned} \tag{5.57}$$

después de haber regresado a las unidades cgs. Hemos eliminado el momento total y la coordenada $\dot{\mathbf{r}}_3$, además hemos definido $\dot{\mathbf{L}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$, $\dot{\mathbf{L}}_{12} = \dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_2 + \dot{\mathbf{r}}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_1$ con $i = 1, 2$ y $\dot{p}_{12} \equiv \dot{\mathbf{p}}_1 \cdot \dot{\mathbf{p}}_2$. La ecuación $H'\Psi = E\Psi$ relacionada con nuestro problema no puede resolverse de manera exacta pero puede expresarse en forma matricial si utilizamos la base de estados

$$|n_1, l_1, n_2, l_2, L; \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) T \frac{1}{2} S; jm \rangle = \sum_{\mu, \sigma} \langle L\mu, S\sigma | jm \rangle |n_1, l_1, n_2, l_2, L\mu \rangle \left| \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) T \frac{1}{2} S\sigma \right\rangle \tag{5.58}$$

siendo $|n_1, l_1, n_2, l_2, L\mu \rangle$ el autovector correspondiente al oscilador armónico de dos partículas con variables $\dot{\mathbf{r}}_1$ y $\dot{\mathbf{r}}_2$ acopladas a un momento angular total \mathbf{L} y el estado $\left| \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) T \frac{1}{2} S\sigma \right\rangle$ es el ket para los tres espines, los dos primeros acoplados a T y el último acoplado al espín total S .

La matriz numérica cuyos elementos están dados por

$$\langle n'_1, l'_1, n'_2, l'_2, L'; \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) T' \frac{1}{2} S'; j'm' | H' | n_1, l_1, n_2, l_2, L; \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) T \frac{1}{2} S; jm \rangle \tag{5.59}$$

pueden calcularse utilizando técnicas del álgebra de Racah apareciendo símbolos de $6j$ y $9j$. Limitándonos nuevamente a cierto número N de cuantos obtenemos una matriz finita cuya diagonalización arroja el espectro de energías correspondiente a una partícula compuesta de tres quarks.

5.4.1. Espectro de masas para el problema de tres cuerpos

A diferencia del problema de dos cuerpos, nuestras integrales de movimiento se ven reducidas en número. Naturalmente, el momento angular total j , el espín total s y la paridad P son integrales de movimiento con los valores

$$\begin{aligned}
j &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \\
s &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\
P &= (-1)^{l_1+l_2} = (-1)^N
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Sin embargo, el número cuántico L de nuestros estados (5.58) no es una integral de movimiento. Por ello, construimos la matriz a diagonalizar con estados cuya paridad, momento angular y espín coincidan; para hacer participar en la matriz los diferentes valores de L recurrimos a las restricciones impuestas sobre l_1, n_1, l_2 y n_2

$$\begin{aligned}
|l_1 - l_2| &\leq L \leq l_1 + l_2 \\
|j - s| &\leq L \leq j + s
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Para un número máximo de cuantos $N = 2(n_1 + n_2) + l_1 + l_2$ obtenemos un número finito de estados después de tomar en cuenta las restricciones (5.61). Incluimos los valores del espectro arrojados por la diagonalización de la matriz correspondiente.

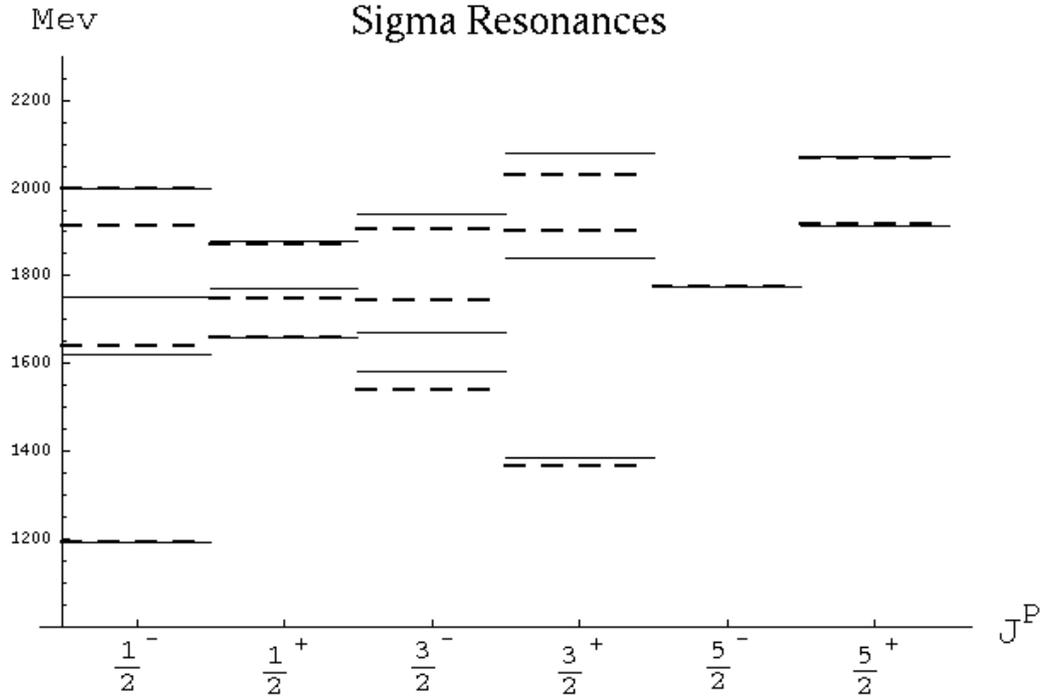


Figura 5.3: Espectro de bariones Σ . Punteadas: teórico. Sólidas: experimental

En la gráfica mostramos los valores del espectro de masas (ordenada) en función de las integrales de movimiento del sistema J^P (abscisa) de tres partículas. En este caso hemos considerado que la configuración de *quarks* es $\Sigma^0 = uds$. Al tratarse de *quarks* ligeros, debemos señalar que las masas en reposo (del orden de 10^2 MeV) que les asignamos son masas efectivas que dan cuenta en buena parte de las interacciones que tienen dentro del barión. Para los valores de dichas masas (*strange, up, down*) tomamos los recomendados en [24]. Los parámetros ajustables en este modelo son la frecuencia de oscilador ω y la cantidad M como factor que afecta la masa en reposo total, preservando las razones de las masas de los constituyentes.

J^P	ω (en Mev)	M
$\frac{1}{2}^+$	96	1.00
$\frac{1}{2}^-$	184	1.00
$\frac{3}{2}^+$	187	1.27
$\frac{3}{2}^-$	179	0.93
$\frac{5}{2}^+$	137	1.11
$\frac{5}{2}^-$	137	1.03

Cuadro 5.3: Parámetros ω y M en función de J^P para calcular el espectro del sistema de tres cuerpos

En la tabla 5.3 indicamos la dependencia de los parámetros en las integrales de movimiento del sistema. Esta dependencia se ha propuesto como una forma de ajustar mejor con el experimento, *i.e.* todos aquellos efectos de la interacción que dependan del momento angular o la paridad pueden incluirse a modo de parámetros sin afectar los eigenestados. Aún así observamos que dicha dependencia tiene una variación razonablemente pequeña (M se encuentra alrededor de 1 y ω cerca de 100 Mev).

El modelo de quarks constitutivos para bariones consiste nuevamente en considerar a los primeros como partículas puntuales de espín $\frac{1}{2}$ e introducir un operador hamiltoniano cuyo espectro reproduzca el espectro hadrónico. Dicho hamiltoniano tiene como variables dinámicas las posiciones así como los momentos de los quarks en cuestión; en él, las interacciones están descritas por potenciales de confinamiento y otros refinamientos fenomenológicos. El punto importante es que el estado base contiene la contribución de las masas en reposo, y éstas deben ser del orden de 10^2 MeV para lograr un acuerdo con el experimento. Ello sugiere que dentro de estas energías en reposo hay una componente cromodinámica considerada de forma efectiva, dando lugar a las llamadas masas *constitutivas* y que son superiores por más de un orden de magnitud a aquellas propuestas en [18] como masas de los *quarks*.

Dentro de este tipo de tratamientos se encuentran los trabajos de N. Isgur [22]. En esta serie de artículos publicados entre 1977 y 1986 encontramos un estudio sistemático de los espectros bariónicos constituidos por quarks ligeros a través de hamiltonianos no relativistas y potenciales de confinamiento simples como el oscilador armónico entre pares de partículas. Así mismo, se introducen términos cromomagnéticos análogos a las interacciones entre momentos magnéticos en la electrodinámica; ello con el fin de explicar la diferencia de masas entre bariones cuyos constituyentes son los mismos, pero no sus espines. Aún así, acoplamientos espín-órbita partícula-partícula son ignorados por razones puramente fenomenológicas. En el último de estos trabajos se sugiere un hamiltoniano relativista con energías cinéticas de la forma $\sqrt{p^2 + m^2}$.

En una dirección alternativa pero heredada de los métodos de la física nuclear, tenemos los modelos algebraicos propuestos por Bijker, Iachello y Leviatan [23]. En ellos, se considera que los bariones son constructos con densidades de carga en forma de tres cuerdas atadas por un mismo extremo y se estudian sus múltiples modos vibracionales. A través del modelo de bosones inter-

actuantes se da un tratamiento cuántico de estos sistemas y el espectro proviene de hamiltonianos bilineales en las variables dinámicas. Con diez o siete parámetros ajustables según sean bariones con o sin extrañeza se obtienen resultados en buen acuerdo con el experimento. La utilización de funciones bilineales de operadores de creación y destrucción en el desarrollo del cuadrado de la energía nos hace pensar en un tratamiento relativista, pero que no necesariamente es el correcto.

5.5. Propagadores a través de la transformación FW

Como se ha visto, la diagonalización de expresiones como (5.41), (5.57) arroja espectros que pueden contrastarse con situaciones realistas. Dicha diagonalización permite de paso la determinación de las funciones de onda en términos de estados $|\{n\}\rangle$ que corresponden a (5.44) en el problema de dos cuerpos o (5.58) en el de tres. Las funciones son entonces

$$\Psi = \sum_{\{n\}}^N C_{\{n\}} |\{n\}\rangle \quad (5.62)$$

donde los coeficientes $C_{\{n\}}$ son las componentes de los eigenvectores de (5.41) o (5.57) y N es el número de cuanta al que se limita el cálculo. Con ello y sin mayor complicación podemos escribir el desarrollo espectral del propagador hasta cierto número de cuantos N

En el caso de dos partículas, los parámetros ω, α resultan constantes independientes de las integrales de movimiento. Sin embargo, el caso de tres partículas contiene parámetros ω, M que exhiben una dependencia en momento angular y paridad en virtud de la tabla 3. Esto no es una dificultad esencial, ya que tales cantidades pueden escribirse como funciones de los números cuánticos j, P y el propagador correspondiente como

$$K = \sum_{n,j,s,P}^N \Psi_{n,j,s,P}(\mathbf{r}_i; \omega_{j,P}, M_{j,P}) \Psi_{n,j,s,P}^\dagger(\mathbf{r}'_i; \omega_{j,P}, M_{j,P}) e^{-iE_{n,j,s,P}t} \quad (5.63)$$

donde se ha indicado explícitamente la dependencia en ω y M .

A todo esto queremos subrayar que de acuerdo con lo discutido en la introducción sobre la inconveniencia de la teoría de perturbaciones, el desarrollo del hamiltoniano en potencias del cociente entre frecuencia y masa en reposo nos conduce a una descripción confiable a tiempos cortos, excluyendo la posibilidad de encontrar la persistencia o la disipación de algún comportamiento específico. En capítulos subsecuentes evitamos estas dificultades estudiando interacciones para las que los problemas estacionarios correspondientes son exactamente solubles.

Capítulo 6

Fenómenos transitorios para estados ligados cuánticos relativistas

Hemos dado ya una formulación relativista para sistemas de varias partículas. Hemos señalado también que hay una forma perturbativa de la solución correspondiente y que esta puede no conducirnos a una descripción correcta a tiempos largos, tal y como ocurre en caso de tener una interacción arbitraria. Sin embargo, existen interacciones que nos permiten calcular de manera exacta espectros y funciones de onda (para el átomo de hidrógeno relativista véase [29]), como lo es la formulación del oscilador de Dirac de varias partículas. Esta formulación y sus aplicaciones pueden encontrarse en [17] y [30], mientras que el oscilador de Dirac en sí ha dado lugar a una extensa literatura [27], [28], [31], [32], [33], [34]. Este capítulo está, en efecto, dedicado a sistemas ligados por dichas interacciones. Las aplicaciones que se han dado para estos modelos (estrictamente modelos, ya que el oscilador de Dirac no es una interacción que se deduzca de las interacciones conocidas en la naturaleza) consisten en el cálculo de espectros para mesones y bariones demandando un tratamiento relativista de sus componentes. En este sentido pueden interesarnos dos tipos de problemas dinámicos. Primeramente aquellos donde las interacciones cesan de existir a un tiempo determinado, describiendo una desintegración del sistema compuesto. En segundo lugar, pero de forma más general, aquellos casos en donde la intensidad de la interacción cambia de forma repentina a un valor arbitrario. Aunque el primer caso está contenido en el segundo, resulta conveniente estudiarlos por separado dada la naturaleza matemática de los propagadores correspondientes.

Pensemos, pues, en un escenario físico donde las interacciones entre partículas puedan cambiar bruscamente. En ciertos procesos de reacción que ocurren en la escala nuclear o subnuclear, es posible dar una descripción dispersiva según la teoría de perturbaciones en segunda cuantización. Tales procesos pueden dar lugar a un cambio en la naturaleza de los constituyentes de un sistema compuesto como, v. gr. $\pi^+ + e^- \rightarrow \pi^0 + \nu_e$ donde π es el sistema binario, o bien $\Sigma^+ + e^- \rightarrow \Lambda^0 + \nu_e$ donde el sistema ternario es $\Sigma^+ = uus$ cambiando a $\Lambda^0 = uds$. Dado que el proceso dispersivo puede pensarse como una colisión entre el sistema compuesto y una partícula muy ligera, podemos ignorar el cambio en la cantidad de movimiento del sistema mas pesado y pensar que su centro de masa se encuentra en reposo para todo tiempo t pero que la naturaleza de sus constituyentes y las interacciones entre ellos cambia para a un tiempo posterior a la colisión.

Dado que es el propagador el objeto que nos interesa, se debe puntualizar que la contribución de este trabajo consiste en formular las descomposiciones espectrales de dicho objeto para cada problema, además de aplicarlas a condiciones iniciales específicas para obtener resultados analíticos. Véase [35], [36].

6.1. Problemas de una sola partícula de espín 1/2

6.1.1. El oscilador de Dirac

En este capítulo tratamos con la ecuación de Dirac con un acoplamiento no mínimo que es lineal en las coordenadas espaciales. A este sistema se le conoce como el oscilador de Dirac [27]. Utilizaremos unidades tales que $c = \hbar = m = 1$ con m la masa de la partícula de Dirac en cuestión. La ecuación de onda covariante de Lorentz para un oscilador de Dirac de frecuencia ω esta dada por

$$(\gamma^\mu [p_\mu - i\omega r_{\perp\mu} u_\nu \gamma^\nu] + 1) \Psi = 0 \quad (6.1)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac. Hemos definido

$$r_{\perp\mu} = r_\mu - (r^\nu u_\nu) u_\mu \quad (6.2)$$

siendo u_ν un cuadvivector temporal unitario tal que en cierto marco inercial $(u_\nu) = (1, 0, 0, 0)$. En tal marco de referencia es posible establecer una forma hamiltoniana para (6.1)

$$H\Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (6.3)$$

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - i\omega\beta\mathbf{r}) + \beta \quad (6.4)$$

con las definiciones usuales $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \beta\gamma^i$, $i = 1, 2, 3$.

El problema de nuestro interés es obtener la evolución temporal de ciertos estados iniciales debida a este hamiltoniano. En este tipo de análisis puede ser útil tener una expresión exacta del propagador siempre y cuando sea posible. Desafortunadamente el presente caso no es así, de modo que para lograr nuestro objetivo es mejor hacer uso de la descomposición espectral del operador de evolución (lo cual es una práctica común) y considerar una condición inicial adecuada para su estudio. Comenzamos así por la versión estacionaria de (6.3)

$$H\Psi = E\Psi \quad (6.5)$$

Las soluciones de (6.5) pueden escribirse [17] como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

tal que satisfagan

$$(p^2 + \omega^2 r^2 + 1 - 3\omega - 4\omega \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \psi_1 = E^2 \psi_1 \quad (6.7)$$

$$(p^2 + \omega^2 r^2 + 1 + 3\omega + 4\omega \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \psi_2 = E^2 \psi_2 \quad (6.8)$$

$$\psi_2 = (E + 1)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + i\omega \mathbf{r}) \psi_1 \quad (6.9)$$

$$\psi_1 = A_{Njl} |N(l, \frac{1}{2})jm\rangle \quad (6.10)$$

y cuyos eigenvalores son

$$E_{Njl}^2 = 1 + \omega \begin{cases} 2(N-j)+1 & \text{si } l = j - \frac{1}{2} \\ 2(N+j)+3 & \text{si } l = j + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.11)$$

La constante A_{Njl} es la normalización de la función de onda tal que $\int d^3r |\Psi|^2 = 1$. Dado que (6.7) admite energías E positivas y negativas, haremos la distinción entre las soluciones correspondientes

$$\Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\pm} \\ \psi_2^{\pm} \end{pmatrix}, \quad \text{si } \pm E > 0 \quad (6.12)$$

Se ha probado en [28] que las eigenfunciones de este problema forman un conjunto completo incluyendo energías positivas y negativas. Sin embargo, también es cierto que soluciones con el mismo valor absoluto de la energía pero con distinto signo no son ortogonales, como puede verificarse calculando el bracket correspondiente.

6.1.2. Propagador libre

Como ya se mencionó, nuestro interés se centra en la evolución de funciones de onda del oscilador de Dirac cuando la interacción se suprime al tiempo $t = 0$. Sea H_{free} el hamiltoniano que corresponde a la partícula libre de Dirac. El sistema que estudiaremos está descrito por el operador de energía

$$H = H_{\text{free}} + \theta(-t)V \quad (6.13)$$

de modo que para tiempos negativos el sistema se encuentra en algún estado ligado Ψ_n producido por el potencial V y al tiempo $t = 0$ dicha interacción desaparece repentinamente. Para estudiar el comportamiento de la condición inicial a tiempos positivos tan sólo debemos emplear el propagador libre [25], [3] correspondiente a H_{free} , *i.e.*

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' K_{\text{free}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \Psi_n(\mathbf{r}', 0) \quad (6.14)$$

Sabemos que $K_{\text{free}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ representa también el elemento de matriz espacial del operador de evolución $U = e^{-iH_{\text{free}}t}$ y por ende satisface

$$\left(H_{\text{free}} - i\frac{\partial}{\partial t}\right) K_{\text{free}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \quad (6.15)$$

Todavía más, es posible escribir K_{free} en términos del propagador de Klein Gordon [26], esto es

$$K_{\text{free}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \left(H_{\text{free}} + i\frac{\partial}{\partial t}\right) K_{\text{KG}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (6.16)$$

donde K_{KG} puede darse, por ejemplo, como la integral de ondas planas

$$K_{\text{KG}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \int d^4k \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+ik_0t}}{k_\mu k^\mu + m^2} \quad (6.17)$$

Desde el punto de vista covariante de Lorentz, observamos que K_{free} satisface la ecuación

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \beta K_{\text{free}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = -i\delta^4(r_\mu - r'_\mu) \quad (6.18)$$

donde $\beta = \gamma_0$. Por lo tanto βK_{free} es el propagador en su definición usual [3] para la partícula libre. Nótese, sin embargo, que β es una matriz unitaria y que cualquier densidad de probabilidad que calculemos es independiente de la definición del propagador.

6.1.3. Evolución libre de un estado de oscilador de Dirac

Consideremos un oscilador de Dirac de masa m y frecuencia ω y definamos $\lambda = \sqrt{m\omega}$ para uso ulterior. Las eigenfunciones de este problema fueron obtenidas desde que el oscilador de Dirac fue propuesto por Moshinsky y Szczepaniak [27]; posteriormente se mostró su completitud en [28]. De sendas referencias extraemos la expresión del estado base en coordenadas esféricas entendiendo por estado base aquel de menor energía entre los que poseen degeneración finita

$$\Psi_{0,1,\frac{1}{2}}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_{01}(r)\Omega_{\frac{1}{2}}(\hat{r}) \\ iQ_{01}(r)\Omega_{-\frac{1}{2}}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Este corresponde a número principal $n = 0$, momento angular $j = 1/2$ y proyección de momento angular $m_j = 1/2$. Las funciones en (6.19) están dadas por

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\lambda(E_{01} + m)}{\Gamma(5/2)E_{01}}} (\lambda r)^2 e^{-\lambda^2 r^2/2}, \quad \Omega_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

$$iQ_{01} = \sqrt{\frac{\lambda(E_{01} - m)}{\Gamma(3/2)E_{01}}} \lambda r e^{-\lambda^2 r^2/2}, \quad \Omega_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

y corresponden al eigenvalor

$$E_{01} = m\sqrt{1 + 6\omega/m} \quad (6.22)$$

Sea entonces nuestra condición inicial $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{0,1,\frac{1}{2}}(\mathbf{r}, 0)$. Dado que a partir de (6.16,6.17) el propagador libre se escribe

$$K_{\text{free}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \left(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta - i\frac{\partial}{\partial t} \right) K_{\text{KG}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (6.23)$$

la ecuación (6.14) contiene sólo tres integrales relevantes:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + ik_0t - \lambda^2 r'^2/2}}{k^2 - k_0^2 + m^2}, \quad (6.24)$$

proveniente de la primera componente de $\Omega_{-1,\frac{1}{2}}$,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{r' \cos \theta' e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + ik_0t - \lambda^2 r'^2/2}}{k^2 - k_0^2 + m^2}. \quad (6.25)$$

de la función P_{01} y la primer componente de $\Omega_{1,\frac{1}{2}}$,

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{r' \sin \theta' e^{i\phi'} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + ik_0t - \lambda^2 r'^2/2}}{k^2 - k_0^2 + m^2} \quad (6.26)$$

de P_{01} y la segunda componente de $\Omega_{1,\frac{1}{2}}$. El operador entre paréntesis de (6.23) se aplicará posteriormente.

Puede probarse fácilmente que $I_2 = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial I_1}{\partial z}$, $I_3 = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right) I_1$ (véase apéndice). Por lo tanto basta calcular la primera de ellas, I_1 .

A partir de (6.24) observamos que tras integrar sobre \mathbf{r}' , k_0 (tomando cuenta sólo el polo de energía positiva) y sobre el ángulo sólido de \mathbf{k} (en coordenadas esféricas) se obtiene

$$I_1 = \frac{(2\pi)^{5/2}}{\lambda^3 r} \int_0^{\infty} dk \frac{k \sin(kr) e^{-k^2/(2\lambda^2) - i\sqrt{k^2 + m^2}t}}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (6.27)$$

A simple vista esta integral resulta poco familiar; sin embargo, es posible desarrollar la gaussiana $e^{-k^2/(2\lambda^2)}$ en una serie de potencias de λ^{-1} a modo de hallar un resultado aproximado truncando dicha serie. La aproximación a la que nos referimos corresponde a una función de onda inicial de una partícula concentrada en el origen, siendo los términos de orden superior correcciones a una distribución del tipo delta. Notamos también que la paridad del integrando en (6.27) permite extender los límites de integración a $(-\infty, \infty)$

$$I_1 = \frac{(2\pi)^{3/2}\pi}{\lambda^3 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2\lambda^2)^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^{2n+1} \sin(kr) e^{-i\sqrt{k^2+m^2}t}}{\sqrt{k^2+m^2}} \quad (6.28)$$

El cambio de variable $\sqrt{k^2+m^2} = \frac{m}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$, $k = \frac{m}{2}(\zeta - \zeta^{-1})$ y la representación integral de la función de Bessel modificada K dada por [9]

$$K_\nu(xy) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \int_0^\infty d\zeta \frac{e^{-\frac{x}{2}(\zeta+y^2/\zeta)}}{\zeta^{\nu+1}} \quad (6.29)$$

da como resultado

$$I_1 = \frac{\pi^{5/2}m}{i\sqrt{2}r\lambda^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-m^2}{2\lambda^2}\right)^n \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{(-)^l (2n+1)! 2^{2l} K_{2(l-n)-1}(im\sqrt{t^2-r^2})}{l!(2n+1-l)! (t^2-r^2)^{l-n-1/2}} \times \left((t-r)^{2(l-n)-1} - (t+r)^{2(l-n)-1}\right) \quad (6.30)$$

La evaluación numérica de la función de onda completa se puede efectuar a cualquier orden en el parámetro λ^{-1} , pero resulta de particular interés analizar el primer término en la serie como única contribución: la función de onda inicial está concentrada alrededor del origen. En este caso vemos que solamente I_1 contribuye con

$$I_1 \approx \frac{5\sqrt{2}\pi^{5/2}m}{i\lambda^3} \frac{K_1(im\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} \quad (6.31)$$

y la función de onda al tiempo t queda dada por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{5\sqrt{2}\pi^{5/2}m}{i\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{E_{01}-m}{\Gamma(3/2)E_{01}}} \begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial z} \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ -m + i\frac{\partial}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{K_1(im\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} \quad (6.32)$$

Restaurando las unidades cgs, la aproximación que hemos considerado corresponde a $\omega\hbar \gg mc^2$. Una energía en reposo pequeña comparada con la intensidad de la interacción indica que nos encontramos en el régimen ultrarrelativista. Usando (6.32), la densidad de probabilidad puede calcularse de forma directa. El perfil de la distribución $|\Psi|^2$ se describe en la figura a tiempos diferentes. Por comodidad definimos A como el factor que se encuentra frente al operador diferencial en (6.32), *i.e.*

$$A = \frac{5\sqrt{2}\pi^{5/2}m}{i\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{E_{01}-m}{\Gamma(3/2)E_{01}}} \quad (6.33)$$

Usamos esta definición para elaborar la figura 6.1 a continuación

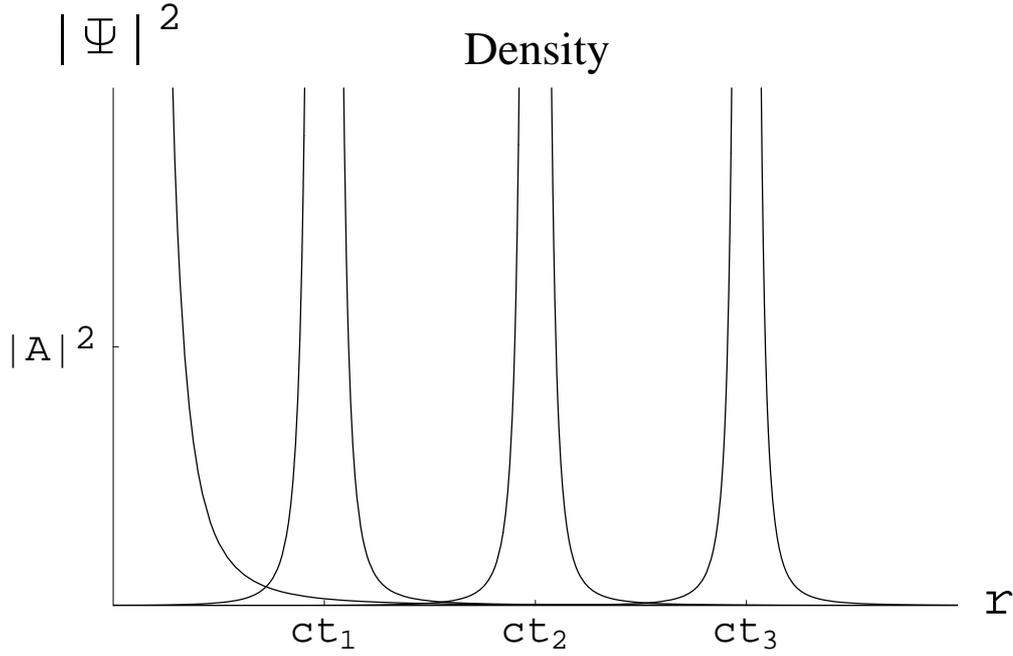


Figura 6.1: Densidad de probabilidad en el tiempo del estado de oscilador de Dirac en propagación libre

Observamos un desplazamiento de la densidad de probabilidad y cuyo centro tiene posiciones indicadas por ct_1, ct_2, ct_3 a tiempos t_1, t_2, t_3 (c es la velocidad de la luz). Claramente, la integridad de la distribución se preserva alrededor del cono de luz (el ancho del pico debe disminuir con el radio por conservación de probabilidad), como si el tiempo permaneciera congelado, evitando la disipación a la que estamos familiarizados en el caso no relativista. Las correcciones de orden superior a la evolución de la función de onda son de naturaleza anisotrópica y lidian esencialmente con el hecho de que la condición inicial tiene momento angular distinto de cero. Se ha analizado un problema relativista específico pero el procedimiento puede extenderse a cualquier otro caso de interacciones con espectro conocido, incluyendo sistemas multipartículas. La única limitación computacional surge cuando las integrales involucradas no son evaluables analíticamente.

6.1.4. Propagador del oscilador de Dirac

Dado el hamiltoniano H en (6.4), estamos interesados en el kernel K que satisface

$$\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = -iI_4\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \quad (6.34)$$

con I_4 la matriz identidad 4×4 . Esto proviene, desde luego, del hecho de que K es la representación espacial del operador de evolución $U = e^{-iHt}$, *i.e.*

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \langle \mathbf{r} | U | \mathbf{r}' \rangle \quad (6.35)$$

Cabe señalar que (6.34) posee una versión covariante de Lorentz que puede escribirse como

$$(\gamma^\mu [p_\mu - i\omega r_{\perp\mu} u_\nu \gamma^\nu] + 1) \bar{K}(r_{\perp\tau}, r'_{\perp\tau}; t - t') = -iI_4 \delta^{(4)}(r_\tau - r'_\tau) \quad (6.36)$$

con $\bar{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \beta K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$. La ecuación (6.36) se reduce a (6.34) en el marco inercial en el que $u_\nu = (1, 0, 0, 0)$, lo cual puede verificarse fácilmente. De la mecánica cuántica no relativista, sabemos que (6.35) implica una descomposición espectral para K . Esta descomposición se alcanza mediante la inserción en (6.35) de conjuntos completos $|\{n\}\rangle$ de eigenestados de H con valores propios $E_{\{n\}}$. Así se tiene que

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \sum_{\{n\}} \langle \mathbf{r} | \{n\} \rangle \langle \{n\} | \mathbf{r}' \rangle e^{-iE_{\{n\}}t} \quad (6.37)$$

pero tomando en cuenta la no ortogonalidad entre estados de energías de signo contrario pero mismos número cuánticos, el conjunto $|\{n\}\rangle$ que contiene energías positivas y negativas da lugar a un propagador inapropiado. Esto es debido a que cualquier condición inicial de energía positiva tendrá una proyección distinta de cero en estados de energía negativa, dañando la interpretación usual de estados de energía negativa como partículas propagándose exclusivamente hacia el pasado. A continuación aclaramos este punto.

Sea $\Psi_{\{n\}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \{n\} \rangle$. La solución K de la ecuación (6.34) puede construirse directamente escribiendo el miembro derecho en la forma

$$I_4 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_n \Psi_{\{n\}}(\mathbf{r}) \Psi_{\{n\}}^\dagger(\mathbf{r}') e^{-iEt} \quad (6.38)$$

de la cual es claro que K debe contener los eigenvalores inversos de $(H - i\frac{\partial}{\partial t})$, *i.e.*

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_n \Psi_{\{n\}}(\mathbf{r}) \Psi_{\{n\}}^\dagger(\mathbf{r}') \frac{e^{-iEt}}{E_n - E} \quad (6.39)$$

Tomando E_{Njlm} como positivo, dividimos la suma en dos partes según el signo de la energía

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(\sum_{Njlm} \Psi_+(\mathbf{r}) \Psi_+^\dagger(\mathbf{r}') \frac{e^{-iEt}}{E_{Njlm} - E} + \sum_{Njlm} \Psi_-(\mathbf{r}) \Psi_-^\dagger(\mathbf{r}') \frac{e^{-iEt}}{-E_{Njlm} - E} \right) \quad (6.40)$$

Es la integración sobre E de lo que debemos preocuparnos y lo haremos a través de un procedimiento estándar [3]. Exigiendo condiciones de frontera tales que $E > 0$ conduzca a propagación futura (propagador retardado) y $E < 0$ a propagación al pasado (propagador avanzado), debemos escoger un contorno de integración que abarque el polo positivo si $t > 0$ y el polo negativo si $t < 0$. Los contornos se describen en la figura 6.2.

Lo anterior también puede lograrse adoptando la prescripción $E \rightarrow E \pm i\epsilon$ si $\pm E > 0$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. El resultado de este proceso es

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \theta(t) K^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) + \theta(-t) K^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (6.41)$$

con

$$K^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) := \sum_{Njlm} \Psi_\pm(\mathbf{r}) \Psi_\pm^\dagger(\mathbf{r}') e^{\mp iE_{Njlm}t} \quad (6.42)$$

lo que asegura la propagación futura para condiciones iniciales de energía positiva a través de K^+ .

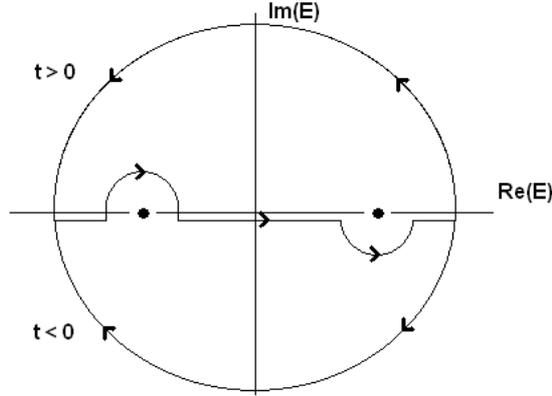


Figura 6.2: Contorno de integración para $\pm t > 0$ en el propagador del oscilador de Dirac

6.1.5. Problema dinámico: cambio de frecuencia

En esta sección analizamos el caso en que ocurre un cambio de la frecuencia del oscilador de Dirac, digamos $\omega \rightarrow 1$ en $t = 0$. Dado que todas las funciones serán de energía positiva, ya no es necesario hacer distinciones de signo. Sin embargo, lidiar con dos frecuencias exige indicar explícitamente la dependencia en ω a menos que $\omega = 1$. Para $t < 0$ supondremos que el sistema se encuentra en uno de sus eigenestados y posteriormente describiremos el comportamiento de la función de onda al tiempo $t > 0$. El hamiltoniano correspondiente puede expresarse como

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - i(\theta(-t)\omega + \theta(t))\beta\mathbf{r}) + \beta \quad (6.43)$$

mientras que la condición inicial es de la forma

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \Psi_{Njlm}(\mathbf{r}; \omega) \quad (6.44)$$

con esta función dada por [17]

$$\Psi_{Njlm} = A_{Njl}(\omega) \left(\frac{|N(l, \frac{1}{2})jm\rangle_{\omega}}{E_{Njl}(\omega)+1} \left(-\sqrt{N+l+1}|N-1(l-1, \frac{1}{2})jm\rangle_{\omega} + \sqrt{N-l}|N-1(l+1, \frac{1}{2})jm\rangle_{\omega} \right) \right) \quad (6.45)$$

Usando nuestro resultado (6.41) encontramos que

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{N',j',l',m'} e^{-iE_{N'j'l'm'}t} C_{N'j'l'm';Njlm}(\omega) \Psi_{N'j'l'm'}(\mathbf{r}) \quad (6.46)$$

con el coeficiente C dado por

$$C_{N'j'l'm';Njlm}(\omega) = \int d^3r' \Psi_{N'j'l'm'}^{\dagger}(\mathbf{r}') \Psi_{Njlm}(\mathbf{r}'; \omega) \quad (6.47)$$

Nuestro objetivo ahora es calcular este último coeficiente. Recordemos primeramente que en coordenadas esféricas r, θ, ϕ

$$\langle \mathbf{r} | N(l, \frac{1}{2})jm \rangle_{\omega} = \sum_{\mu\sigma} \sqrt{2j+1} (-)^{l-\frac{1}{2}+m} \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ \mu & \sigma & -m \end{pmatrix} R_{Nl}(\sqrt{\omega}r) Y_{l\mu}(\theta, \phi) \chi_{\sigma} \quad (6.48)$$

donde hemos utilizado el símbolo $3j$, Y representa el armónico esférico usual y χ es un espinor canónico. Con la definición

$$I_{N,N'}^l = \int_0^{\infty} dr' r'^2 R_{Nl}(\sqrt{\omega}r') R_{N'l}(r') \quad (6.49)$$

y recurriendo a (6.48) se puede calcular directamente el bracket

$$\langle N'(l', \frac{1}{2})j'm' | N(l, \frac{1}{2})jm \rangle_{\omega} = \delta_{j,j'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} (\delta_{j-\frac{1}{2},l} + \delta_{j+\frac{1}{2},l}) I_{N,N'}^l \quad (6.50)$$

el cual hace posible obtener los coeficientes (6.47) a través de la relación (6.45). Con todo ello el desarrollo de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ queda determinado. Como un ejemplo, tomemos el caso más simple caracterizado por $N = 0, j = \frac{1}{2}, l = 0, m = \frac{1}{2}$. Se tiene entonces

$$C_{N'j'l'm'; Njlm}(\omega) = \left(1 + \frac{2(2N'+1)}{(\sqrt{2N'+1}+1)^2} \right)^{-1/2} \delta_{\frac{1}{2},j'} \delta_{\frac{1}{2},m'} \delta_{0,l'} I_{0,N'}^0 \quad (6.51)$$

y

$$I_{0,N'}^0 = \sqrt{\frac{8\Gamma(N'/2+3/2)}{\pi^{1/2}(N'/2)!}} \frac{(\sqrt{\omega}-1)^{N'} \omega^{1/2}}{(\sqrt{\omega}+1)^{N'+3}} \quad (6.52)$$

después de usar (6.49) y la fórmula [9]

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{-s\tau} \tau^{\alpha} L_n^{\alpha}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(s-1)^n}{n!s^{\alpha+n+1}} \quad (6.53)$$

Finalmente la función de onda es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{N'=0,2,\dots}^{\infty} e^{-i\sqrt{2N'+1}t} \left(1 + \frac{2(2N'+1)}{(\sqrt{2N'+1}+1)^2} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{8\Gamma(N'/2+3/2)}{\pi^{1/2}(N'/2)!}} \frac{(\sqrt{\omega}-1)^{N'} \omega^{1/2}}{(\sqrt{\omega}+1)^{N'+3}} \Psi_{N',1/2,0,1/2}(\mathbf{r}) \quad (6.54)$$

Mediante (6.45) para $\omega = 1$ podemos evaluar (6.54) y la densidad de probabilidad $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Como una aplicación numérica podemos truncar la serie (6.54) y considerar los primeros 60 términos.

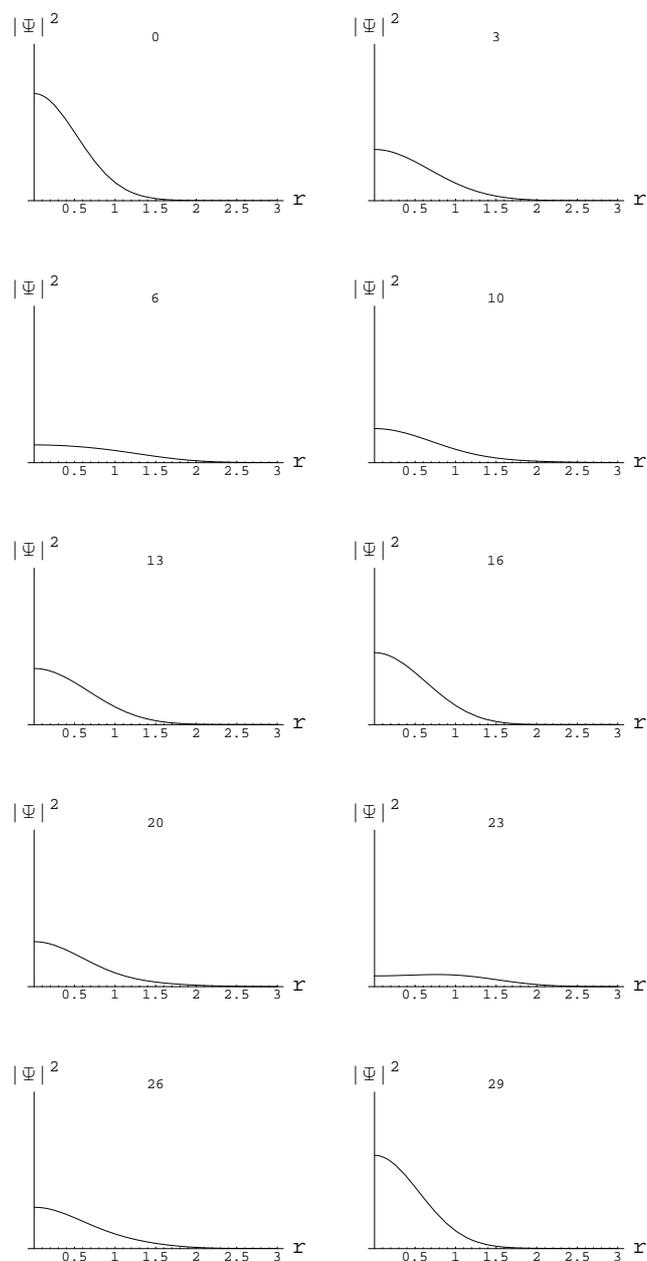


Figura 6.3: Desarrollo en el tiempo del estado base del oscilador de Dirac tras disminuir la frecuencia a la mitad de su valor original. El parámetro temporal se indica en la parte superior de cada gráfica en unidades naturales

En la gráfica 6.3 hemos cambiado la frecuencia de 2 a 1 (en unidades naturales). Como es de esperarse, una frecuencia menor permite que la distribución ocupe más espacio; sin embargo, al

tratarse de un problema con potencial atractivo tipo oscilador (aún cuando la frecuencia haya disminuído), la distribución no puede disiparse por completo y recupera aproximadamente su forma inicial alrededor del origen. Observamos un comportamiento oscilatorio pero que no es periódico debido a la naturaleza del espectro relativista. Esta es una clara diferencia con el caso no relativista, donde la descomposición espectral es una serie de Fourier. El comportamiento para tiempos posteriores es similar al que se describe.

6.2. Problemas de dos partículas de Dirac

6.2.1. Propagador de dos partículas de Dirac libres

En este apartado trataremos con un sistema de dos partículas de masas iguales inicialmente ligadas y cuya interacción se suprime bruscamente a partir de un tiempo $t = 0$. Sea H_i el hamiltoniano de una partícula libre etiquetada con $i = 1, 2$. El hamiltoniano que corresponde al sistema compuesto puede escribirse como

$$H = H_1 + H_2 + \theta(-t)V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (6.55)$$

donde V es un potencial atractivo del tipo de oscilador y \mathbf{r}_i son las coordenadas espaciales de la partícula i . Las expresiones para los hamiltonianos libres pueden encontrarse, v.gr. en [17].

$$H_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + m\beta_1 \quad (6.56)$$

$$H_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}_2 + m\beta_2 \quad (6.57)$$

con las matrices dadas por

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_4, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \otimes I_4 \quad (6.58)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = I_4 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = I_4 \otimes \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}_i$ las matrices de Pauli para la i -ésima partícula y denotando por I_n la matriz identidad $n \times n$. Para encontrar el desarrollo en el tiempo de cualquier condición inicial debemos escribir el propagador libre de dos partículas de Dirac en un modo conveniente. El operador de evolución para $t > 0$ está dado por $U = e^{-iHt} = e^{-iH_1t}e^{-iH_2t} := U_1U_2$ y el propagador es, por tanto

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; t) = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | U | \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2 \rangle = \langle \mathbf{r}_1 | U_1 | \mathbf{r}'_1 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | U_2 | \mathbf{r}'_2 \rangle := K_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; t) K_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; t) \quad (6.60)$$

i.e., el producto de los propagadores para cada partícula. Las diferentes K 's satisfacen

$$(H - i\frac{\partial}{\partial t})K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; t) = -i\delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)\delta^3(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)\delta(t) \quad (6.61)$$

$$(H_i - i\frac{\partial}{\partial t})K_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i; t) = -i\delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)\delta(t) \quad (6.62)$$

y pueden expresarse en términos del propagador de Klein-Gordon K_{KG}

$$K_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i; t) = (H_i + i\frac{\partial}{\partial t})K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i; t) \quad (6.63)$$

el cual, a su vez, es una superposición de ondas planas

$$K_{\text{KG}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \int d^4k \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + ik_0t}}{k_\mu k^\mu + m^2} \quad (6.64)$$

El producto en (6.60) arroja

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; t) &= H_1 H_2 K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; t) K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; t) + i H_1 K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; t) \frac{\partial}{\partial t} K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; t) \\ &+ i H_2 K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; t) \frac{\partial}{\partial t} K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; t) - \frac{\partial}{\partial t} (K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; t)) \frac{\partial}{\partial t} (K_{\text{KG}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; t)) \end{aligned} \quad (6.65)$$

y es en esta forma que lo utilizaremos posteriormente.

6.2.2. Desintegración

Para tiempos negativos suponemos que el sistema se encuentra en su estado base hasta que la interacción se suprime. Dicho estado se expresa en términos de las coordenadas de Jacobi (en este caso coordenada relativa y centro de masa) $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ tal que la dependencia en el centro de masa sea una onda plana. Todavía más, el valor del momento total del sistema puede escogerse como cero. Por lo anterior proponemos una condición inicial de la forma

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, 0) = \phi(\mathbf{r})\chi = A e^{-\lambda^2 r^2} \chi \quad (6.66)$$

donde A es el factor de normalización apropiado, λ juega el papel de una frecuencia y χ contiene la información espinorial e isoepinorial, *i.e.*

$$\chi = \frac{1}{2}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)(|n\rangle|p\rangle + |p\rangle|n\rangle) \quad (6.67)$$

correspondiente a espín total $s = 0$. La función de onda a tiempo $t > 0$ es

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \int d^3r' d^3R' K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; t) \psi(\mathbf{r}', \mathbf{R}', 0) = (H_1 H_2 I_1 + (H_1 + H_2) I_2 + I_3) \chi \quad (6.68)$$

con la integral I_1 dada por

$$I_1 = A \int d^3 r' d^3 R' d^3 k_1 d^3 k_2 \frac{e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) - i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) + i(\sqrt{k_1^2 + m^2} + \sqrt{k_2^2 + m^2})t - \lambda^2 r'^2 / 2}}{4\sqrt{k_1^2 + m^2}\sqrt{k_2^2 + m^2}} \quad (6.69)$$

esto tras efectuar las integrales de energía en las variables k_1^0 y k_2^0 y seleccionando sólo los polos positivos. Las otras integrales están definidas por

$$I_2 = \frac{i}{2} \frac{\partial I_1}{\partial t}, \quad I_3 = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2}. \quad (6.70)$$

Por tanto nos enfocaremos únicamente en el cálculo de I_1 . Consideremos los siguientes pasos para su evaluación. Primero proponemos un cambio de las variables $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ por coordenadas de Jacobi $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{r}', \mathbf{R}'$ e integramos sobre \mathbf{R}' . Dado que la condición inicial es independiente de esta variable obtendremos una función delta de la forma $\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Posteriormente integramos sobre \mathbf{k}_2 . El resultado es

$$I_1 = 2A \frac{\pi^{3/2}}{\lambda^3} \int d^3 k_1 \frac{e^{-k_1^2 / (2\lambda^2) + i\sqrt{2}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + i2\sqrt{k_1^2 + m^2}t}}{k_1^2 + m^2} \quad (6.71)$$

y este es independiente del centro de masa \mathbf{R} . Finalmente, efectuamos la integración en coordenadas esféricas del ángulo sólido correspondiente a la variable \mathbf{k}_1 y desarrollamos el exponencial en una serie de potencias en k_1^2 para llegar a

$$I_1 = 8A \frac{\pi^{5/2}}{\sqrt{2}i\lambda^3 r} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_1 \frac{k_1^{2n+1}}{(2\lambda^2)^n n!} \frac{\sin \sqrt{2}k_1 r e^{i2\sqrt{k_1^2 + m^2}t}}{k_1^2 + m^2} \quad (6.72)$$

que también puede expresarse como

$$I_1 = 8A \frac{\pi^{5/2}}{\sqrt{2}i\lambda^3 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda^2)^n n!} \frac{\partial^{2n} J}{\partial r^{2n}} \quad (6.73)$$

con

$$J = \int_0^{\infty} dk k \frac{\sin \sqrt{2}kr e^{i2\sqrt{k^2 + m^2}t}}{k^2 + m^2}. \quad (6.74)$$

La paridad del integrando en la expresión anterior permite la extensión de los límites a $(-\infty, \infty)$. El cambio de variables $\sqrt{k^2 + m^2} = \frac{m}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$, $k = \frac{m}{2}(\zeta - \zeta^{-1})$ y la representación integral de la función de Bessel modificada K dada por [9]

$$K_\nu(xy) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \int_0^{\infty} d\zeta \frac{e^{-\frac{\pi}{2}(\zeta + y^2/\zeta)}}{\zeta^{\nu+1}} \quad (6.75)$$

nos conduce a la expresión simple

$$J = -\frac{\sqrt{23}r}{32i}K_0(4im\sqrt{t^2 - r^2}) \quad (6.76)$$

La serie de potencias en λ^{-1} puede truncarse para describir estados iniciales altamente concentrados (las partículas constituyentes se encuentran cerca una de la otra) tal y como se indica en [35]. El primer término del desarrollo da un valor para I_1

$$I_1 = -\frac{A\pi^{5/2}}{8\lambda^3}K_0(4im\sqrt{t^2 - r^2}) \quad (6.77)$$

y el uso de (6.68), (6.70) arroja el resultado para la función de onda

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = -\frac{A\pi^{5/2}}{8\lambda^3} \left(H_1 H_2 + (H_1 + H_2) \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi K_0(4im\sqrt{t^2 - r^2}) \quad (6.78)$$

donde la acción del operador entre paréntesis se ha dejado indicada ya que esta es simple. Observamos una dependencia peculiar en el cono de luz, *i.e.* $\sqrt{t^2 - r^2}$. Esta característica ya estaba presente en los resultados para la evolución libre de un estado ligado de una sola partícula.

6.2.3. Oscilador de Dirac de dos partículas

El problema de dos partículas relativistas ligadas por una interacción tipo oscilador de Dirac también ha sido tratado en [17]. Dado que utilizaremos las eigenfunciones del sistema para construir el propagador incluimos brevemente la obtención de estas, así como de su espectro. Comenzamos con un hamiltoniano de la forma

$$H = (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) \cdot (\mathbf{p} - i\frac{\omega}{2}\mathbf{r}B) + \beta_1 + \beta_2 \quad (6.79)$$

donde hemos tomado masas iguales y unidades donde estas son la unidad. Este hamiltoniano sólo depende del momento y la coordenada relativa \mathbf{r} . La interacción contiene la matriz $B \equiv \beta_1\beta_2\gamma_{51}\gamma_{52}$ donde $\gamma_{5i} = i\gamma_{0i}\gamma_{1i}\gamma_{2i}\gamma_{3i}$. Es posible verificar que con este hamiltoniano, la ecuación $H\Psi = E\Psi$ proviene de la ecuación invariante de Poincaré (62.52) de [17], *i.e.*

$$\left[\sum_{s=1,2} \Gamma_s \left(\gamma_s^\mu (p_{\mu s} - i\omega x'_{\perp\mu s} \Gamma) + 1 \right) \right] \Psi = 0 \quad (6.80)$$

que contiene las coordenadas $x'_{\perp\mu s} = x_{\perp\mu s} - X_{\perp\mu}$ a las que se les ha sustraído la proyección perpendicular del centro de masa X_μ . Como en los casos anteriores, en el sistema de referencia en el que el centro de masa se encuentra en reposo, (6.80) se reduce a una ecuación tipo Schroedinger con hamiltoniano (6.79). Con las definiciones

$$c_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p} \pm i \frac{\omega}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r} \quad (6.81)$$

$$d_{\pm} = -\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p} \pm i \frac{\omega}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r} \quad (6.82)$$

el hamiltoniano (6.79) puede escribirse

$$H = \begin{pmatrix} 2 & c_- & d_+ & 0 \\ c_+ & 0 & 0 & d_- \\ c_- & 0 & 0 & d_+ \\ 0 & d_+ & c_- & -2 \end{pmatrix} \quad (6.83)$$

y por ello, las ecuaciones resultantes para las energías contienen expresiones cuadráticas en los operadores c_{\pm}, d_{\pm} . Estas sugieren que las funciones de onda deben etiquetarse con los números cuánticos N, s, P, j, m , donde N son cuantos de oscilador, s el espín, P la paridad y j, m el momento angular total y su proyección. A partir de las ecuaciones seculares (6.2.41), (6.2.44a) y (6.2.46) de [17], el espectro queda dado por

$$E_{N,s,j,m} = \begin{cases} 2 \sqrt{1 + \omega N}, 0 & \text{para } s = 0, P = (-)^j \\ 2 \sqrt{1 + \omega(N + 2)}, 0 & \text{para } s = 1, P = (-)^j \\ 2 \sqrt{1 + \omega(N + 1)}, 0 & \text{para } s = 1, P = -(-)^j \end{cases} \quad (6.84)$$

que como puede notarse tienen degeneración infinita, además de incluir energía cero. Las funciones de onda pueden obtenerse a través del procedimiento indicado nuevamente en [17].

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

y obtenemos de las ecuaciones de Schroedinger estacionarias correspondientes la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ a_+ - a_- \end{pmatrix} |N(j, 0)jm\rangle \quad (6.86)$$

para $s = 0$. Aquí a_+, a_- son coeficientes dependientes de la energía que satisfacen las ecuaciones (6.2.41) de [17]. Para $s = 1$ y $P = (-)^j$ tenemos

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_+ + b_- \\ b_+ - b_- \end{pmatrix} |N(j, 1)jm\rangle \quad (6.87)$$

donde b_+, b_- satisfacen (62.44a) de [17]. Para $s = 1$, $P = -(-)^j$ se tiene

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_{++} + c_{-+} \\ c_{-+} - c_{++} \end{pmatrix} |N(j+1, 1)jm\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_{+-} + c_{--} \\ c_{--} - c_{+-} \end{pmatrix} |N(j-1, 1)jm\rangle \quad (6.88)$$

con los coeficientes $c_{\pm\pm}$ satisfaciendo (62.46) de [17]. Tomando en cuenta el hamiltoniano (6.79), la ecuación de Schroedinger arroja las componentes complementarias para la función de onda

$$\psi_{21} = c_+ \psi_{11} + d_- \psi_{22}, \quad \psi_{12} = c_+ \psi_{22} + d_- \psi_{11} \quad (6.89)$$

las cuales pueden evaluarse utilizando álgebra de Racah. Las expresiones completas para Ψ pueden entonces calcularse de manera exacta. Incluimos las expresiones completas en el apéndice.

6.2.4. Propagador del oscilador de Dirac de dos partículas

Dado que el problema de funciones de onda y espectro ha sido resuelto a través de ecuaciones seculares que son de orden mayor al lineal en las energías, plantearemos primero el problema del propagador para un problema auxiliar de orden superior. Hemos mencionado que existe una degeneración infinita extraordinaria en este problema y que está asociada a los niveles de energía cero (como un reflejo del cucarachero presente en el problema libre correspondiente). Debido a lo anterior un planteamiento directo para el propagador en su descomposición espectral exige, por unitariedad, la inclusión de funciones de energía cero que son independientes del tiempo. Estas funciones constituyen una parte estática en el propagador y por tanto no física. Nuestro problema auxiliar debe entonces ayudarnos a eliminar dicha dificultad; este problema está dado por

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - H^2\right) \tilde{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; t) = -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t)I_{16} \quad (6.90)$$

donde I_{16} es la identidad 16×16 , H es el hamiltoniano (6.83) y \tilde{K} es el kernel a encontrar en función de la coordenada relativa \mathbf{r} . De aquí se muestra fácilmente que el propagador K del problema que nos interesa está dado por

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(H + i \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \quad (6.91)$$

ya que así K satisface

$$\left(H - i \frac{\partial}{\partial t}\right) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t)I_{16} \quad (6.92)$$

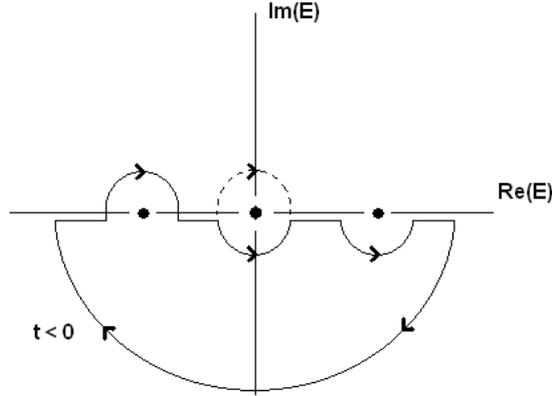


Figura 6.4: Contorno de integración para $t < 0$ en el propagador del oscilador de Dirac de dos partículas. La línea punteada indica un camino alternativo.

Debemos notar que esto es una generalización de la obtención del propagador de una partícula espinorial a partir de la ecuación de Klein-Gordon asociada. Por construcción, la ecuación (6.90) tiene una solución de la forma

$$\tilde{K} = \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iEt} \sum_{\{n\}} \frac{\Psi \Psi^\dagger}{E(E^2 - E_{\{n\}}^2)} \quad (6.93)$$

donde $\{n\}$ son los números cuánticos del problema, Ψ son las eigenfunciones y $E_{\{n\}}$ las energías correspondientes. Para asegurar la propagación futura de estados de energía positiva y propagación al pasado de aquellos de energía negativa, el camino de integración se elige sorteando los polos en la manera usual (ver figuras 6.4, 6.5).

Nótese que en este problema hay un polo ubicado en el origen y que su inclusión en el contorno de integración es inocua, ya que ello implica un sumando extra en el propagador \tilde{K} que resulta ser independiente del tiempo (estático) y de energía cero. Llamemos dicho término \tilde{K}_0 ; este satisface

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(H + i \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{K}_0 = 0 \quad (6.94)$$

y por tanto no contribuye en la expresión para K . Con ello hemos erradicado los estados no físicos (cucarachero). Tras efectuar la integración en (6.93) sobre el circuito indicado y reemplazando en (6.91) se obtiene finalmente

$$K = \theta(t)K_+ + \theta(-t)K_- \quad (6.95)$$

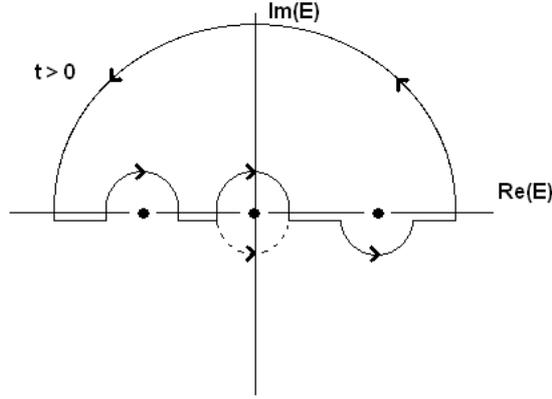


Figura 6.5: Contorno de integración para $t > 0$ en el propagador del oscilador de Dirac de dos partículas. La línea punteada indica un camino alternativo.

donde hemos hecho definiciones similares al caso de una partícula, *i.e.*

$$\tilde{K}_{\pm} = \sum_{N,J,P,S} \Psi_{\pm} \Psi_{\pm}^{\dagger} e^{-i\pm E_{N,J,P,S}t} \quad (6.96)$$

siendo N, J, P, S los números cuánticos para cada signo de la energía, $E_{N,J,P,S} > 0$ y Ψ_{\pm} tales que $H\Psi_{\pm} = \pm E_{N,J,P,S}\Psi_{\pm}$.

6.2.5. Cambio repentino en la interacción

Contando con el propagador para una frecuencia arbitraria ω analizaremos un problema cuyo hamiltoniano es

$$H' = H + \theta(t) (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot i\omega' \mathbf{r} B \quad (6.97)$$

donde H está dado en (6.79). Esto está en completa analogía con el problema de cambio de frecuencia para una sola partícula, pero en este caso tenemos que a $t = 0$ $\omega \mapsto \omega + \omega'$. Nuevamente consideraremos sin pérdida de generalidad $\omega \mapsto 1$ para $t > 0$. Si el sistema se encuentra inicialmente en el estado base para $t < 0$ la condición inicial es entonces

$$\Psi_0(\mathbf{r}, \omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle \mathbf{r} | 0(0,0)00 \rangle_{\omega} \quad (6.98)$$

Para encontrar la función de onda al tiempo $t > 0$ basta aplicar K evaluado en $\omega = 1$ a la función (6.98). Por ortogonalidad, los únicos estados que contribuyen son aquellos de la forma

$$\Psi_{N,s=0,l,j,m}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle \mathbf{r} | N(j, 0)jm \rangle_\omega \quad (6.99)$$

dando lugar a los coeficientes

$$\begin{aligned} \int d^3r \Psi_{N,s=0,l,j,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{0,0,0,0,0}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}} \langle N(j, 0)jm | 0(0, 0)00 \rangle_\omega \\ &= \delta_{m,0} \delta_{j,0} \frac{\sqrt{2} \Gamma(N/2 + 3/2)}{\sqrt{\pi} (N/2)!} \frac{(\omega - 1)^{N/2} \omega^{1/2}}{(\omega + 1)^{N/2+3/2}} \end{aligned} \quad (6.100)$$

donde hemos utilizado $\langle N(j, 0)jm | 0(0, 0)00 \rangle_\omega = \langle Njm | 000 \rangle_\omega$ calculado en (5.63). Finalmente nuestra función de onda es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{Npar} \begin{pmatrix} \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i2\sqrt{N+1}t} \frac{\sqrt{2} \Gamma(N/2 + 3/2)}{\sqrt{\pi} (N/2)!} \frac{(\omega - 1)^{N/2} \omega^{1/2}}{(\omega + 1)^{N/2+3/2}} \langle \mathbf{r} | N(0, 0)00 \rangle \quad (6.101)$$

donde

$$\langle \mathbf{r} | N(0, 0)00 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| + - \rangle - | - + \rangle) \langle \mathbf{r} | N00 \rangle \quad (6.102)$$

siendo $\langle \mathbf{r} | N00 \rangle$ funciones radiales de oscilador a frecuencia 1. La amplitud $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ se muestra en las figuras 6.6 y 6.7 para diferentes tiempos.

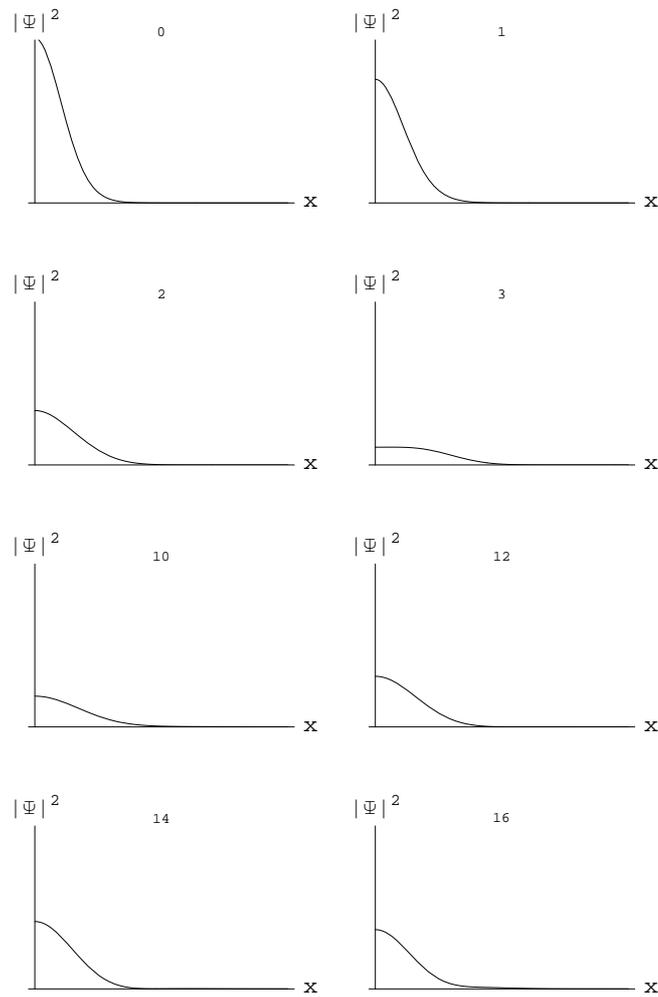


Figura 6.6: Desarrollo en el tiempo de un perfil gaussiano para dos cuerpos en la coordenada relativa tras disminuir la frecuencia 10 veces

Para construir la gráfica 6.6 hemos tomado inicialmente $\omega = 10$, disminuyéndola a $\omega = 1$ en $t = 0$. El comportamiento es muy similar al caso de una partícula, pero en este caso en la coordenada relativa. Observamos una caída abrupta del pico gaussiano (la densidad se distribuye en el espacio) pero se restituye a tiempos posteriores. El comportamiento a tiempos largos es similar al que se describe.

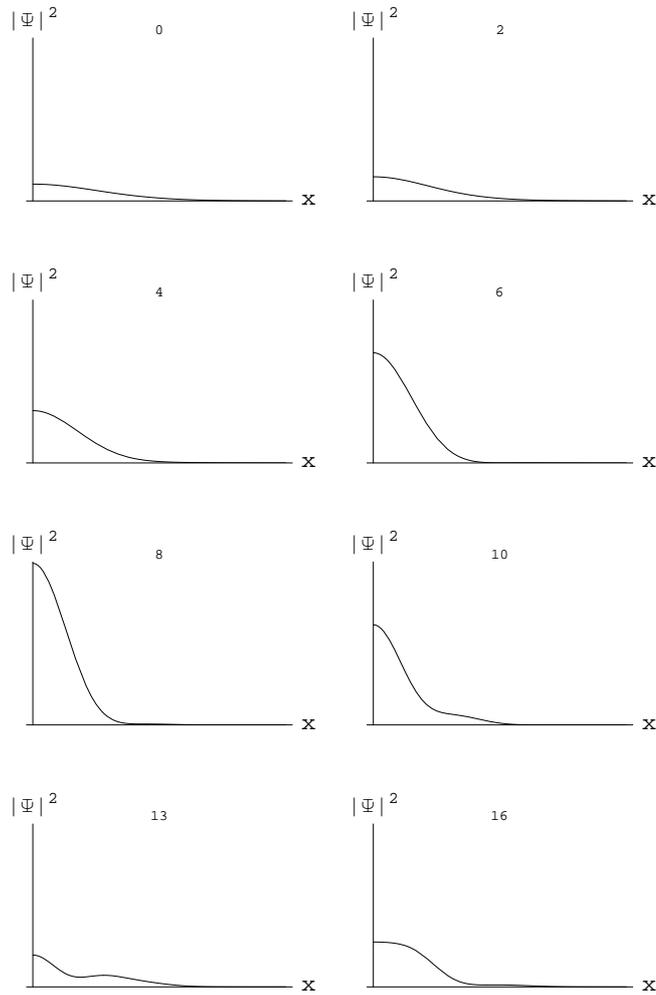


Figura 6.7: Desarrollo en el tiempo de un perfil gaussiano de dos cuerpos en la coordenada relativa tras aumentar la frecuencia 10 veces

Ahora la frecuencia inicial es $\omega = 0,1$, aumentando 10 veces a $t = 0$. Como es de esperar, la distribución se contrae, *i.e.* las partículas tiene mayor probabilidad de estar juntas. Posteriormente el pico cae nuevamente y observamos un comportamiento oscilatorio pero no periódico de la densidad de probabilidad, esto debido a la no conmensurabilidad de los valores del espectro.

6.3. Problemas de tres partículas relativistas

6.3.1. Oscilador de Dirac de tres partículas

La formulación del oscilador de Dirac de n cuerpos se ha dado en [30]. Partiendo de una ecuación generalizada de Dirac invariante de Poincaré

$$\left[n^{-1} \sum_{s=1}^n \Gamma_s(\gamma_s^\mu P_\mu) + \sum_{s=1}^n \gamma_s^\mu (p'_{\mu s} - i\omega x'_{\perp \mu s} \Gamma) + 1 \right] \Psi = 0 \quad (6.103)$$

donde P_μ es el cuadrivector de momento del centro de masa y $p'_{\mu s} = p_{\mu s} - n^{-1}P_\mu$, es posible tomar el centro de masa en reposo para reducir el problema a

$$H\Psi = \sum_{s=1}^n [\boldsymbol{\alpha}_s \cdot (\mathbf{p}'_s - i\omega x'_s B) + \beta_s] \Psi = E\Psi \quad (6.104)$$

donde $B = \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n$ y $E = P^0$. Para el caso de tres partículas de espín 1/2 estas ecuaciones pueden escribirse matricialmente como

$$\mathbf{M}\Psi_- = \mathbf{D}_+\Psi_+ \quad (6.105)$$

$$\mathbf{M}^\dagger\Psi_+ = \mathbf{D}_-\Psi_- \quad (6.106)$$

donde Ψ es ahora el producto directo de tres biespinores cuyas componentes pueden separarse como

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_{111} \\ \psi_{122} \\ \psi_{212} \\ \psi_{221} \end{pmatrix}, \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} \psi_{112} \\ \psi_{121} \\ \psi_{211} \\ \psi_{222} \end{pmatrix} \quad (6.107)$$

También hemos incluido las matrices

$$\mathbf{D}_+ = \begin{pmatrix} E-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_- = \begin{pmatrix} E-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E+3 \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

y hemos definido el operador

$$\mathbf{M} = 2i\sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}'_3 & \mathbf{S}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}'_2 & \mathbf{S}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}'_1 & 0 \\ \mathbf{S}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}'_2 & \mathbf{S}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}'_3 & 0 & \mathbf{S}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}'_1 \\ \mathbf{S}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}'_1 & 0 & \mathbf{S}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}'_3 & \mathbf{S}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}'_2 \\ 0 & \mathbf{S}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}'_1 & \mathbf{S}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}'_2 & \mathbf{S}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}'_3 \end{pmatrix}, \quad (6.109)$$

escrito en términos de los operadores de creación en su definición usual pero sustrayendo de ellos el centro de masa, *i.e.*

$$\boldsymbol{\eta}'_s = \boldsymbol{\eta}_s - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) \quad (6.110)$$

$$\boldsymbol{\xi}'_s = \boldsymbol{\eta}'_s \quad (6.111)$$

Las ecuaciones (6.106) se reducen a una ecuación para Ψ_+ operando con $\mathbf{M}(D_-)^{-1}$ en ambos lados de la segunda y utilizando la primera, obteniendo

$$\mathcal{O} \Psi_+ = 0 \quad (6.112)$$

donde $\mathcal{O} \equiv \mathbf{M}D_-^{-1}\mathbf{M}^\dagger - D_+$. En este punto introducimos coordenadas de Jacobi $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\xi}}_1, \dot{\boldsymbol{\xi}}_2$. Debido a nuestras definiciones (6.106) el centro de masa no debe aparecer, y el operador \mathcal{O} contiene únicamente funciones cuadráticas en los operadores de creación y aniquilación correspondientes a las coordenadas de Jacobi 1 y 2. Se observa de inmediato que la energía queda determinada de forma implícita, requiriendo la diagonalización del operador \mathcal{O} . A pesar de que lidiamos con una matriz finita, la diagonalización exacta de este operador no está al alcance. Por ello utilizaremos una base de estados para obtener una matriz numérica y efectuar el cálculo correspondiente. Es importante notar que los elementos de \mathcal{O} son operadores que conmutan con el número total de cuantos de dos osciladores con coordenadas de Jacobi y preservan, además, el momento angular total. El espín total de este sistema no es una integral de movimiento (a diferencia del problema de dos cuerpos), como tampoco el momento angular orbital. Con lo anterior elegimos nuestra base como

$$|n_1, l_1, n_2, l_2(L); \frac{1}{2} \frac{1}{2}(T) \frac{1}{2}(S); JM\rangle = \left[[(\dot{\mathbf{r}}_1 |n_1 l_1) \times (\dot{\mathbf{r}}_2 |n_2 l_2)]_L \times \left[\left[\left(1 \left| \frac{1}{2} \right) \times \left(2 \left| \frac{1}{2} \right) \right]_T \times \left(3 \left| \frac{1}{2} \right) \right]_S \right] \right]_{JM} \quad (6.113)$$

donde el número total de cuantos es $N = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = N_1 + N_2$. La matriz resultante es una matriz finita para cada número de cuantos, lo que le da a este problema el carácter de solubilidad *exacta* hasta por una relación implícita de las energías que es polinomial.

Para cada número de cuantos N debemos efectuar la diagonalización indicada y nos limitaremos a los casos $N = 0, 1, 2$ dando lugar al cuadro 6.1 que contiene los estados posibles.

El cálculo implica evaluar elementos de matriz cuya expresión general es

$$\langle n'_1, l'_1, n'_2, l'_2(L'); \frac{1}{2} \frac{1}{2}(T') \frac{1}{2}(S'); JM | (\mathbf{S}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_u) (\mathbf{S}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_v) | n_1, l_1, n_2, l_2(L); \frac{1}{2} \frac{1}{2}(T) \frac{1}{2}(S); JM \rangle \quad (6.114)$$

donde $i, j = 1, 2, 3, u, v = 1, 2$. El cálculo se logra utilizando álgebra de Racah [37].

Incluimos el espectro para valores de la frecuencia 0,03, 0,1 y 1 de modo que se pueda apreciar su estructura en comparación con la masa en reposo del sistema. En las gráficas 6.8, 6.9 y 6.10 se muestran las energías sustrayendo la del estado base.

Las funciones de onda finalmente se obtienen encontrando los vectores que forman el espacio nulo de la matriz $\langle \mathcal{O} \rangle$ para cada energía. Las componentes complementarias, *i.e.* Ψ_- , se obtienen a través de (6.106).

N	N_1	N_2	n_1	n_2	l_1	l_2	P	L	J	S
0	0	0	0	0	0	0	+	0	S	$1/2, 3/2$
1	1	0	0	0	1	0	-	1	$ 1 - S \leq J \leq 1 + S$	$1/2, 3/2$
1	0	1	0	0	0	1	-	1	$ 1 - S \leq J \leq 1 + S$	$1/2, 3/2$
2	2	0	1	0	0	0	+	0	S	$1/2, 3/2$
2	0	2	0	1	0	0	+	0	S	$1/2, 3/2$
2	1	1	0	0	1	1	+	$0 \leq L \leq 2$	$ L - S \leq J \leq L + S$	$1/2, 3/2$
2	2	0	0	0	2	0	+	2	$ 2 - S \leq J \leq 2 + S$	$1/2, 3/2$
2	0	2	0	0	0	2	+	2	$ 2 - S \leq J \leq 2 + S$	$1/2, 3/2$

Cuadro 6.1: Tabla de estados de oscilador hasta $N_{max} = 2$ para el problema de tres cuerpos con espín $1/2$

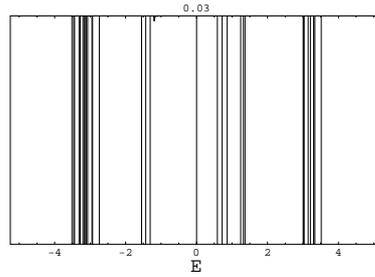


Figura 6.8: Espectro para $\omega = 0,03$ en el oscilador de Dirac de tres partículas. Las energías se distribuyen en cuatro grupos alrededor de los valores $-3, -1, 1, 3$.

6.3.2. Propagador del oscilador de Dirac de tres partículas

Como podemos apreciar en la figura 6.8, el espectro de este problema contiene energías tanto negativas como positivas. También observamos valores que se encuentran en la banda $[-3, 3]$ y que se acumulan alrededor de 1 y -1 para frecuencias suficientemente pequeñas. Las energías menores a la masa en reposo cuando la interacción desaparece no pueden ser de carácter físico. Los niveles indicados deben entonces suprimirse en la descomposición espectral de nuestro propagador. Nuevamente recurrimos a una expresión del propagador con centro de masa en reposo del tipo

$$K(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}'_1, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_1; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{\{n\}} e^{-iEt} \frac{\Psi \Psi^\dagger}{E - E_{\{n\}}} \quad (6.115)$$

que satisface

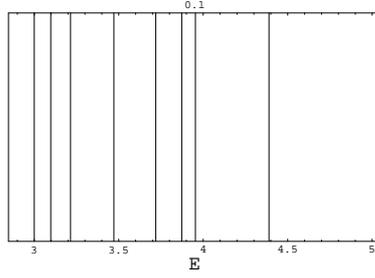


Figura 6.9: Espectro para $\omega = 0,1$ y $N = 2$ en el oscilador de Dirac de tres partículas, cuyas energías se utilizan en la aplicación numérica del propagador.

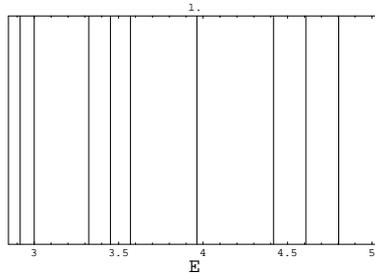


Figura 6.10: Espectro para $\omega = 1$ y $N = 2$ en el oscilador de Dirac de tres partículas

$$\left(H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) K(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}'_1, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_1; t) = -i \delta^3(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}'_1) \delta^3(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}'_2) \delta(t) I_{64} \quad (6.116)$$

con H el hamiltoniano en (6.104), I_{64} la identidad 64×64 . El camino de integración en la variable de energía se elige sorteando los polos en la forma usual para preservar nuestra interpretación de energías negativas como partículas que se propagan al pasado, pero también evitando todo nivel que se encuentre en la banda $[-3, 3]$ para erradicar los estados no físicos (ver figura 6.11).

Con este procedimiento tenemos la descomposición

$$K = \theta(-t)K_- + \theta(t)K_+ \quad (6.117)$$

con

$$K_{\pm} = \sum_{\text{Physical States}} \Psi \Psi^\dagger e^{\mp i E_{\{n\}} t}, \quad E_{\{n\}} > 0 \quad (6.118)$$

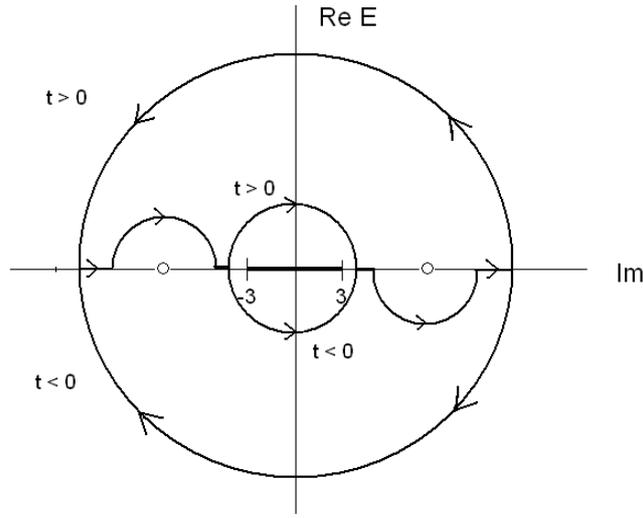


Figura 6.11: Contorno de integración para el problema de tres partículas. La banda $[-3, 3]$ ha sido excluida.

6.3.3. Cambio repentino en la interacción

Como una aplicación consideraremos el problema dinámico de cambio de frecuencia para este sistema. En completa analogía con los casos anteriores, nuestro hamiltoniano puede escribirse como

$$H' = H + \theta(t)(-i\omega') \sum_{s=1}^3 \alpha_s \cdot x'_s B \quad (6.119)$$

Estudiaremos la evolución de la condición inicial dada por el estado base del problema

$$\Psi(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, 0) = |0, 0, 0, 0(0); \frac{1}{2} \frac{1}{2}(0) \frac{1}{2}(\frac{1}{2}); \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle_{\omega} \quad (6.120)$$

donde el estado en el miembro derecho es como en (6.113) pero indicando la dependencia en ω . La función al tiempo t involucra únicamente estados de momento angular $j = 1/2$ pero puede contener estados de espín total $1/2, 3/2$. Como una aplicación numérica y siguiendo el procedimiento indicado en la sección anterior obtenemos funciones de onda de frecuencia final $\omega_f = 0,1$ para el propagador, mientras que para la condición inicial elegimos una frecuencia $\omega = 1$. La aplicación del propagador a la condición inicial da lugar a los siguientes coeficientes para $\omega = 0,1$:

$$\langle 0000(0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0000(0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_{\omega_f} = 8 \left(\frac{\omega_f}{\omega_f + 1} \right)^{3/2} \quad (6.121)$$

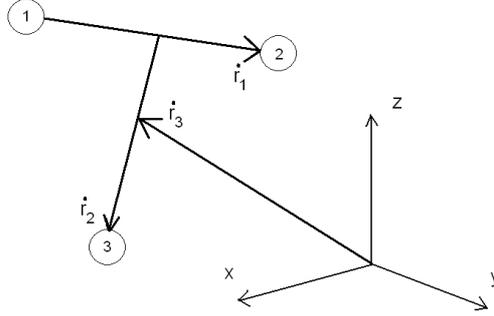


Figura 6.12: Visualización de las coordenadas de Jacobi de tres partículas. $\dot{\mathbf{r}}_1$ es la coordenada relativa entre las partículas 1 y 2, $\dot{\mathbf{r}}_2$ es la coordenada relativa entre 3 y el centro de masa de 1 y 2

$$\begin{aligned}
 \langle 1000(0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0000(0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_{\omega_f} &= 8 \left(\frac{\omega_f}{\omega_f + 1} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{(1 + \omega_f)^{3/2}} + \frac{2\omega_f}{(1 + \omega_f)^{5/2}} \right) \\
 &= \langle 0100(0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0000(0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_{\omega_f} \quad (6.122)
 \end{aligned}$$

excluyendo $N = 1$ ya que este sólo admite $L = 1$ y es ortogonal al estado base (6.120) que admite únicamente $L = 0$. Las partes espaciales de las funciones de onda involucradas en la descomposición espectral hasta $N = 2$ son de la forma

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_f} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2}\omega_f r^2}, \quad \left(\frac{2\pi}{\omega_f} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2}\omega_f r^2} \left(1 - \frac{2}{3}\omega_f r^2 \right) \quad (6.123)$$

donde r puede ser \dot{r}_1 o \dot{r}_2 . De este modo la densidad de probabilidad puede obtenerse y graficarse como función del tiempo y las magnitudes de las coordenadas de Jacobi \dot{r}_1 , \dot{r}_2 . En las figuras 6.13, 6.14 y 6.15 observamos un comportamiento oscilatorio de la densidad de probabilidad que, como en casos anteriores, no es periódico. Una característica notable son las oscilaciones alternantes en las coordenadas de Jacobi: la vibración entre dos partículas está fuera de fase respecto a la oscilación de la tercera alrededor del centro de masa de las dos primeras. Esta interpretación resulta fácil de ver a partir de la figura 6.12. La densidad de probabilidad es simétrica respecto a permutaciones de partículas pero no lo es respecto a permutaciones de coordenadas de Jacobi 1 y 2 como puede apreciarse. Se observa que el cambio de frecuencia de 1 a 0.1 provoca un movimiento oscilatorio en la distribución. El comportamiento se repite cualitativamente para tiempos posteriores ($30 < t < 70$ y $70 < t < 110$), los cuales se incluyen en figuras subsiguientes. Nótese que el movimiento no es periódico.

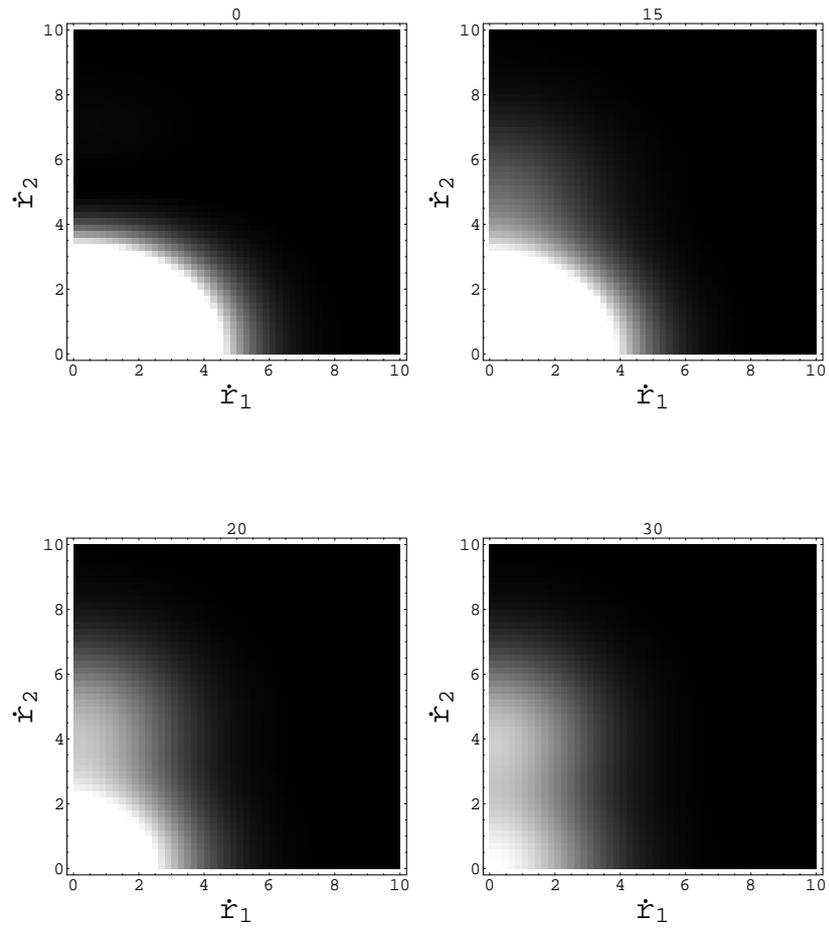


Figura 6.13: Densidad de probabilidad de tres cuerpos en función de las coordenadas de Jacobi y el tiempo (indicado en la parte superior en unidades naturales)

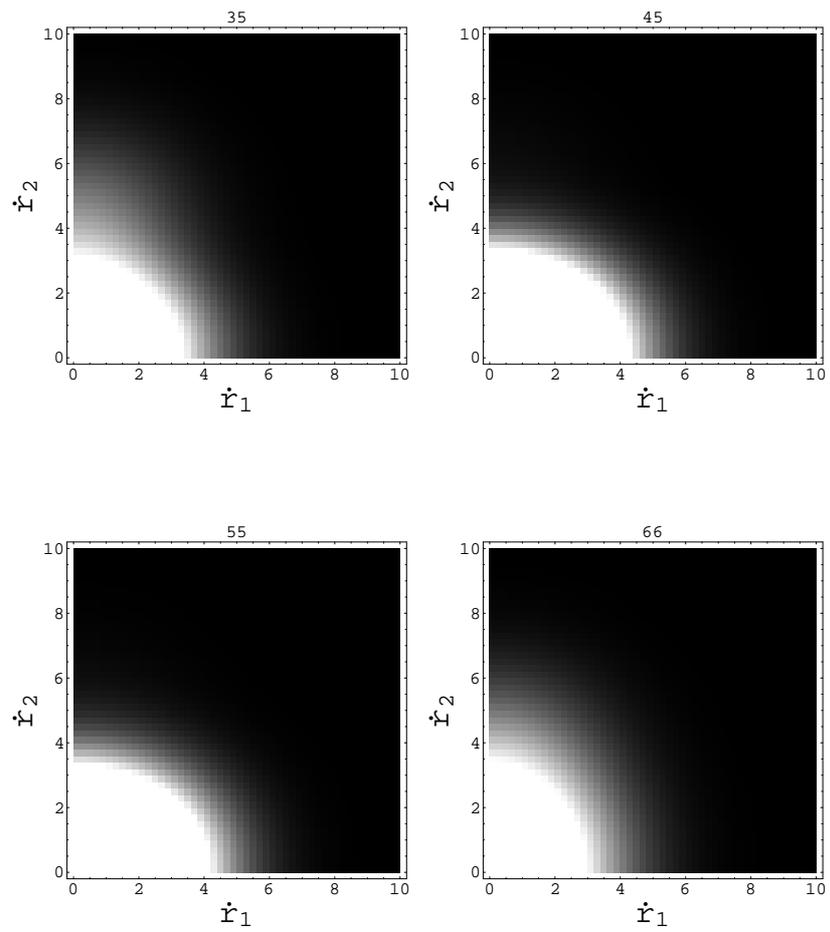


Figura 6.14: Continuación de la figura 6.13 para $30 < t < 70$

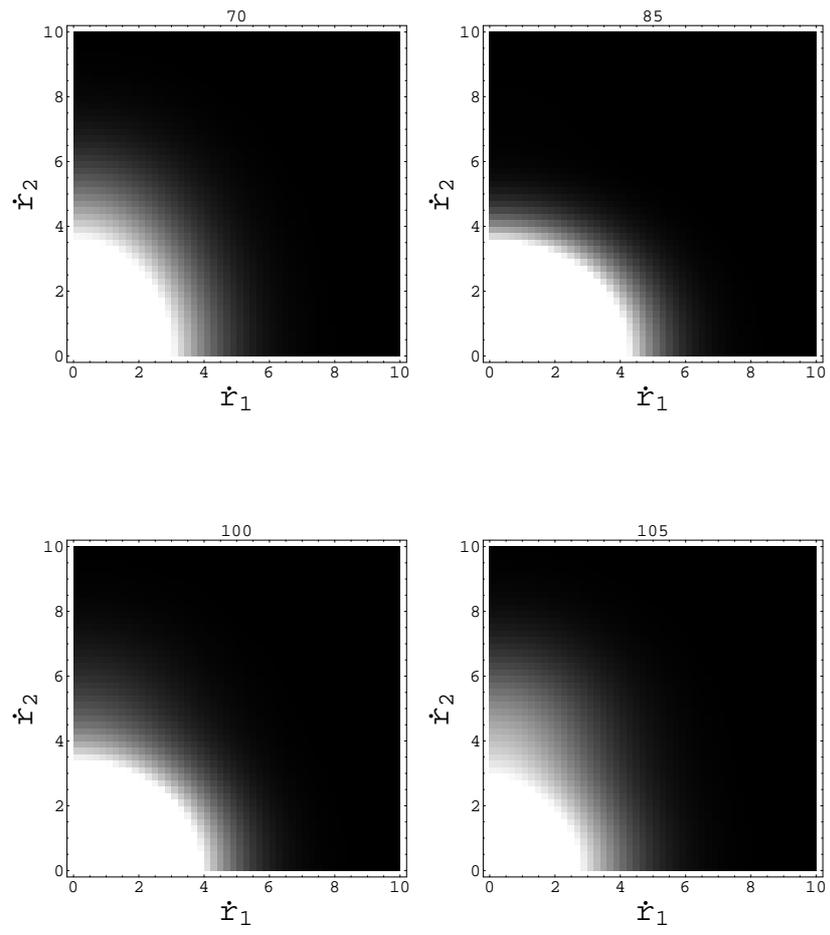


Figura 6.15: Continuación de la figura 6.14 para $t \geq 70$

Capítulo 7

Fenómenos transitorios en segunda cuantización

En diversos libros de texto (v. gr. [38]) encontramos tratamientos de medios continuos como cierto límite de sistemas discretos interrelacionados, todo ello en el contexto de la mecánica clásica. La analogía a la que aludimos puede explotarse también en el contexto cuántico a través de la formulación de Feynman del propagador del sistema conectándolo con lagrangianas clásicas [1], [2]. De esta forma existe la posibilidad de estudiar versiones discretizadas de ecuaciones de campo y cuantizarlas antes de tomar el límite continuo. Este orden en los límites (primero cuántico y luego continuo) permite efectuar cálculos relacionados con la dinámica del sistema, mientras que al tomar los límites en el orden usual terminamos con integrales de trayectoria sobre configuraciones de campo. Estas integrales son difíciles de manejar, sin mencionar que como objetos matemáticos pueden carecer de una definición rigurosa.

La idea principal en este capítulo consiste en reconocer la superposición de osciladores de la teoría de campo escalar cuántico para utilizar los resultados que hemos manejado a lo largo de este trabajo cuando se trata de un número finito de osciladores, incluyendo el caso en el que sufren una perturbación. Manejando adecuadamente el límite continuo (infinitos osciladores en una longitud finita) llegamos entonces a resultados analíticos para sistemas que además adquieren invariancia de Lorentz cuando la velocidad de propagación del medio continuo resultante se identifica con la velocidad de la luz. Este tipo de tratamientos es muy familiar en la teoría cuántica del estado sólido, en particular la teoría de fonones [43], [41]. Sin embargo, en nuestro sistema finito no se imponen condiciones de frontera periódicas a diferencia de lo que se muestra en textos estándar en el tema [40], [42]. Se debe notar también que el propagador en sí es un objeto poco utilizado, ya que la teoría cuántica del campo de vibraciones se desarrolla a través del esquema de cuantización canónica: imposición de reglas de conmutación para el campo en cuestión. Si bien es cierto que libros de texto como [44] incluyen un tratamiento detallado del propagador del campo libre o con fuente, estos se restringen a escribirlo en términos de estados coherentes y no en términos de estados del espacio de Fock, *i.e.* estados etiquetados con los números de ocupación. Para nosotros este último punto es clave para comprender la dinámica en segunda cuantización y es en términos

de números de ocupación como se exhiben los resultados de este capítulo.

Así pues, tomamos como sistema prototipo una molécula lineal de N átomos, calculando primeramente su propagador en la aproximación $N \gg 1$. Este propagador se ha expresado ya en trabajos como [45]; sin embargo nuestra contribución consiste en calcular explícitamente las frecuencias de los modos de oscilación para este sistema. A través de estos resultados podemos analizar fenómenos transitorios al introducir bruscamente campos externos o fuentes y finalmente investigar el límite continuo de las expresiones correspondientes, como lo son la dinámica de un estado localizado con mínima dispersión o la reacción del vacío ante la aplicación de un campo eléctrico repentino.

7.1. Propagador de la molécula lineal

Comenzamos con una lagrangiana en $1 + 1$ dimensiones para una cadena de N partículas de masa m , conectadas por resortes cuyas constantes son todas iguales y dadas por $k = m\omega^2$,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \left(\dot{x}_i^2 - \omega^2 (x_i - x_{i+1})^2 \right) \equiv \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i \quad (7.1)$$

Lo usual en este tipo de problemas es encontrar la transformación ortogonal que separa el problema en N lagrangianas independientes (modos normales) y así procederemos. Sea $(\mathbf{x})_i = x_i$ y

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (7.2)$$

Nuestra lagrangiana es entonces

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left(\dot{\mathbf{x}}^2 - \omega^2 \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \right) \quad (7.3)$$

y sólo resta diagonalizar \mathbf{V} . Puede mostrarse (ver apéndice) que los eigenvalores de \mathbf{V} están dados por

$$\lambda_n = 4 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2(N-1)} \right) + O(1/N), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.4)$$

expresión particularmente útil para N grande. De hecho $N \sim 10$ es ya una aproximación razonable como puede verificarse a través de algún método numérico de diagonalización. Recurrimos pues a la fórmula (7.4) ya que permite manipular nuestras expresiones simbólicamente. Notemos que en el límite $N \rightarrow \infty$ los eigenvalores (frecuencias de los modos normales) pueblan densamente el intervalo $[0, 4]$ distribuyéndose con una ley trigonométrica. Con lo anterior es inmediato escribir

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left(\dot{\mathbf{y}}^2 - \omega^2 \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} \right) \quad (7.5)$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{O}\mathbf{x}$, \mathbf{O} es la transformación ortogonal correspondiente a la diagonalización de \mathbf{V} en $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$. El propagador es entonces [6]

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t) = \prod_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m\omega\lambda_n^{1/2}}{2\pi i\hbar \sin(\omega\lambda_n^{1/2}t)}} \exp \left[\frac{im\omega\lambda_n^{1/2}}{2\hbar \sin(\omega\lambda_n^{1/2}t)} (\cos(\omega\lambda_n^{1/2}t)(y_n^2 + y_n'^2) - 2y_n y_n') \right] \quad (7.6)$$

y esta expresión es exacta siempre y cuando los valores de λ contengan correcciones $O(1/N)$; con todo ello dichas correcciones no alteran la forma funcional de (7.6). Nótese que el factor asociado a $n = N - 1$ corresponde a $\lambda_{N-1} = 0$ y se escribe entonces como

$$K_{N-1}(\mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{y}'_{N-1}; t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar t} (y_{N-1} - y'_{N-1})^2 \right] \quad (7.7)$$

que simplemente es el propagador libre, encontrando que y_{N-1} es la coordenada del centro de masa. Así, los grados de libertad significativos están indicados por \mathbf{y} , pero siempre podemos emplear la transformación inversa $\mathbf{x} = \mathbf{O}^T \mathbf{y}$ ya que \mathbf{O} puede encontrarse de forma explícita.

7.2. Límite continuo del propagador de la molécula lineal

Consideremos ahora el límite continuo de la molécula lineal tal y como se indica en [38] (o bien [3]). Recordemos primero que la lagrangiana (7.1) puede multiplicarse por un parámetro a con unidades de longitud, tal que

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N a \left(\frac{m}{2a} \dot{x}_i^2 - \frac{m\omega^2 a}{2} \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{a} \right)^2 \right) \quad (7.8)$$

$$\xrightarrow[N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0]{} \int_0^L d\xi \frac{\mu}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{\mu\Omega^2}{2} (\partial_\xi \phi)^2 \quad (7.9)$$

siempre y cuando $x_i(t) \rightarrow \phi(\xi, t)$, $a = \frac{L}{N} \rightarrow d\xi$, $\frac{m}{a} \rightarrow \mu$, $\omega a \rightarrow \Omega$. La constante L se puede interpretar como la longitud en reposo de la cuerda (clásica) resultante, mientras que Ω es tal que $\mu\Omega^2 = Y$, *i.e.* el módulo de Young. A pesar de estar bien familiarizados con esta forma del límite, en coordenadas normales \mathbf{y} se tiene

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N a \left(\frac{m}{2a} \dot{y}_i^2 - \frac{m\omega^2 \lambda_i}{2a} y_i^2 \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int_0^L d\gamma \frac{\mu}{2} (\partial_t \eta(\gamma, t))^2 - \frac{\mu\Omega^2}{2} \Lambda(\gamma) \eta(\gamma, t)^2 \quad (7.10)$$

con γ el parámetro de longitud, y las coordenadas $y_i(t) \rightarrow \eta(\gamma, t)$. Para los eigenvalores proponemos $\frac{\lambda_i}{a^2} \rightarrow \Lambda(\gamma)$, pero según lo que sabemos sobre los valores de λ_i observamos que $\Lambda(\gamma)$ alcanza ahora todos los valores reales positivos. Dado que las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$\left[\partial_t^2 - \Omega^2 \Lambda(\gamma) \right] \eta(\gamma, t) = 0 \quad (7.11)$$

se sugiere una parametrización $k^2 \equiv \Lambda(\gamma)$ y una redefinición de los campos

$$\eta^2(k, t) = 2k\eta^2(\gamma(k), t) \left(\frac{d\Lambda}{d\gamma} \Big|_{\gamma(k)} \right)^{-1} \quad (7.12)$$

con el fin de que $d\gamma\eta^2(\gamma, t) = dk\eta^2(k, t)$ y $\eta(k, t)$ puede, en efecto, relacionarse con $\phi(\xi, t)$ a través de una transformada de Fourier.

Para verificar el límite del propagador simplemente utilizamos la prescripción de Feynman

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) &= \left(\prod_{i=1}^N \int_{x_i(0)=x_0}^{x_i(t)=x_f} Dx_i(\cdot) \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i \right) \\ \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\phi(x_0, 0)}^{\phi(x_f, t)} D\phi(\cdot) &\exp \left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t \int_0^L d\tau d\xi \frac{\mu}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{\mu\omega^2}{2} (\partial_\xi \phi)^2 \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

que corresponde al propagador de una cuerda, barra elástica o una partícula escalar relativista sin masa cuando la longitud clásica $L \rightarrow \infty$ e identificando $\Omega \leftrightarrow c$. Nótese que las coordenadas normales preservan *medida*, *i.e.*

$$D\phi(\cdot) = D\eta(\cdot). \quad (7.14)$$

Definimos ahora

$$f(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m\omega\lambda_n^{1/2}}{2\pi i \hbar \sin \omega\lambda_n^{1/2} t}} \quad (7.15)$$

y recordando que $\sin(\omega\lambda_n^{1/2} t) \rightarrow \sin(\Omega\Lambda^{1/2}(\gamma)t) = \sin(\Omega kt)$, el propagador para configuraciones de una cuerda es

$$\begin{aligned} K_{\text{string}}(\eta, \eta'; t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} K(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t) \\ &= f(t) \exp \left[\int_0^L d\gamma \frac{i\mu\Omega}{2 \sin(\Omega\Lambda^{1/2}(\gamma)t)} \left[\cos(\Omega\Lambda^{1/2}(\gamma)t) (\eta^2(\gamma) + \eta'^2(\gamma)) - 2\eta(\gamma)\eta'(\gamma) \right] \right] \\ &= f(t) \exp \left[\int_{1/L}^\infty dk \frac{i\mu\Omega}{2 \sin(\Omega kt)} \left[\cos(\Omega kt) (\eta^2(k) + \eta'^2(k)) - 2\eta(k)\eta'(k) \right] \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

expresión que puede reescribirse de muchas formas posibles reparametrizando la integral en el exponencial. Fórmulas equivalentes para este propagador pueden obtenerse siguiendo el método del camino clásico directamente en la integral de trayectoria [3]. Sin embargo, la función se deja indicada como un límite o como una funcional al exigir cierta normalización para (7.16). En cualquier caso esto no es útil para nuestros propósitos.

La definición (7.15) merece comentarse un poco más. La convergencia de este producto infinito es un asunto delicado, ya que diferentes valores de μ y Ω pueden llevarnos a $f = \infty$ o $f = 0$, estropeando la expresión del propagador. Aún cuando esto sucediera, el propagador en si obedece una condición de normalización proveniente de su carácter de representación de un operador unitario, preservando norma. Por tanto, el límite en este punto parece no tener sentido a menos que este se tome bajo el signo de una integral en los campos tal y como se utiliza al aplicarse a un estado

específico, *i.e.* la integral $\int D\phi(\cdot)$ o su versión discretizada. Así es fácil ver que un reescalamiento de los campos $\bar{\phi} = \sqrt{\frac{\mu\Omega}{2\pi\hbar}}\phi$ nos ayuda a deshacernos del problema siempre y cuando aceptemos utilizar campos y propagadores adimensionales. De cualquier modo parece mucho más conveniente trabajar con el modelo molecular y su propagador (7.6) en el estudio de efectos dinámicos que involucran cuerdas o campos de partículas. Cualquier cantidad con significado físico que dependa del tiempo será tratada en el contexto discreto y el cálculo de los límites correspondientes se postergará al final del tratamiento.

Por completitud escribamos ahora el propagador para una partícula de Klein-Gordon de masa M . En primer lugar es necesario extender la molécula a toda la recta real. Posteriormente añadimos el término de masa $\frac{mM^2c^2}{2\hbar}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ a la lagrangiana (7.1). Dado que este término es invariante bajo la transformación ortogonal con matriz asociada \mathbf{O} , es suficiente reemplazar ω en (7.6) por $\omega_i = \sqrt{\omega^2 + \frac{M^2c^4}{\hbar^2\lambda_i^2}}$. Con esto en mente tomamos el límite continuo. Tras reescalar los campos $\eta \mapsto \sqrt{\mu}\eta$ para eliminar la densidad de masa que es irrelevante e identificando Ω con la velocidad de la luz c se tiene

$$K_{\text{KG}}(\eta, \eta'; t) = g(t) \exp \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{iE_k}{2\hbar^2 k \sin\left(\frac{E_k t}{\hbar}\right)} \left(\cos\left(\frac{E_k t}{\hbar}\right) (\eta^2(k) + \eta'^2(k)) - 2\eta(k)\eta'(k) \right) \right] \quad (7.17)$$

donde

$$g(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m\omega_n \lambda_n^{1/2}}{2\pi i \hbar \sin\left(\omega_n \lambda_n^{1/2} t\right)}} \quad (7.18)$$

y $E_k = \sqrt{\hbar^2 c^2 k^2 + M^2 c^4}$. Las unidades de nuestros campos son ahora $(\eta) = (\text{masa})^{1/2} \times (\text{longitud})^{1/2}$.

7.3. Molécula lineal localizada y su límite continuo

En este punto podemos ya aplicar el propagador (7.6) a ciertas condiciones iniciales. Consideremos que la molécula de N átomos se encuentra en un estado de mínima dispersión en espacio fase, *i.e.* una distribución gaussiana en espacio y momento para cada átomo:

$$\psi(\mathbf{x}', 0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/4} \exp \left[-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} x_i'^2 \right] \quad (7.19)$$

donde la anchura σ es la misma para todos los componentes. Esta función de onda tiene la propiedad

$$\psi(\mathbf{x}', 0) = \psi(\mathbf{Ox}', 0) = \psi(\mathbf{y}', 0). \quad (7.20)$$

Aplicamos ahora (7.6) a (7.20) integrando sobre \mathbf{y}' para obtener

$$\psi(\mathbf{y}, t) = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_i^2(t)} \right)^{1/4} \right) \exp \left[-\sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i'^2}{4\sigma_i^2(t)} \right] e^{i\Delta(t)} \quad (7.21)$$

con

$$\sigma_i(t) = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar^2}{2\omega^2 m^2 \sigma^4 \lambda_i} - 1 \right) \sin^2(\omega \lambda_i^{1/2} t)} \quad (7.22)$$

y siendo $\Delta(t)$ una fase irrelevante para la densidad de probabilidad:

$$|\psi(\mathbf{y}, t)|^2 = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_i^2(t)} \right)^{1/2} \right) \exp \left[- \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i^2}{2\sigma_i^2(t)} \right] \quad (7.23)$$

Aquí podemos observar un comportamiento oscilatorio de la anchura de la densidad y de su amplitud, dependiendo de que tan localizado esté el sistema completo respecto a las anchuras de los estados base en coordenadas normales. La distribución del centro de masa ($\lambda_{N-1} = 0$) exhibe disipación tal y como se esperaba. En el límite continuo la condición inicial se convierte en

$$\psi[\eta', 0] = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/4} \right) \exp \left[- \frac{1}{4s^2} \int_{1/L}^{\infty} dk \eta_k'^2 \right] = \psi(\phi', 0) \quad (7.24)$$

donde $\sigma^2 a \rightarrow s^2$. Observaciones similares a las que siguen de (7.16) pueden hacerse aquí. A pesar de que el límite del factor que precede al exponencial puede tener valores que incluyen 0 ó ∞ , tenemos $\int D\eta |\psi(\eta, t)|^2 = 1$ para toda t . Así, la funcional (7.24) es una amplitud de probabilidad que depende de configuraciones del campo, y su forma gaussiana indica el comportamiento más clásico que un campo puede tener siempre que su dispersión en espacio de configuración sea equivalente a la dispersión de su transformada de Fourier funcional

$$\tilde{\psi}[\chi, 0] = \int D\eta \quad \psi[\eta, 0] \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{1/L}^{\infty} dk \eta(k) \chi(k) \right] \quad (7.25)$$

i.e.

$$\frac{s}{L^{3/2}} = \frac{L^{3/2}}{2s}, \quad \text{o} \quad s = \frac{L^{3/2}}{\sqrt{2}} \equiv s_0. \quad (7.26)$$

Con esto, el límite continuo de (7.22) arroja una anchura

$$s_k(t) = s_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar^2}{2\Omega^2 \mu^2 s_0^4 k^2} - 1 \right) \sin^2(\Omega k t)} \quad (7.27)$$

cuyo valor máximo decrece con el momento k . Para la partícula de Kélin Gordon masiva el límite es diferente. Para el caso discreto se tiene

$$\sigma_i(t) = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar^2}{2\omega_i^2 m^2 \sigma^4 \lambda_i} - 1 \right) \sin^2(\omega_i \lambda_i^{1/2} t)} \quad (7.28)$$

Recurriendo a la redefinición de los campos que hace m desaparecer, obtenemos $(\sigma) = (s) = (\text{masa})^{1/2} \times (\text{longitud})^{1/2}$. Tomando el límite correspondiente en (7.28) y fijando $s_0 = \frac{\hbar}{c\sqrt{2M}}$ en analogía con (7.26) encontramos

$$s_k(t) = s_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar^3}{2E_k^2 s_0^4} - 1 \right) \sin^2 \left(\frac{E_k t}{\hbar} \right)} \quad (7.29)$$

que nuevamente es una cantidad oscilatoria pero cuya frecuencia es proporcional a la expresión relativista de la energía cinética. La configuración de campo más probable sigue siendo $\eta \equiv 0$, pero la localización del campo puede extenderse hasta por un factor $\sqrt{\hbar^3 / (2E_k^2 s_0^4)}$. Para ilustrar el significado de este resultado calculemos ahora el número promedio de cuantos para cada modo de oscilación utilizando nuestros estados en el tiempo $\psi(\mathbf{y}, t)$. Para el caso discreto se tiene

$$\langle N_i \rangle = \left\langle (\hbar\omega\lambda_i^{1/2})^{-1} H_{\text{oscillator}} \left(-i \frac{\partial}{\partial y_i}, y_i, \omega\lambda_i^{1/2} \right) - 1/2 \right\rangle \quad (7.30)$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar} \sigma_i^2(t) \lambda_i^{1/2} + \frac{3\hbar}{4m\omega} (\sigma_i^2(t) \lambda_i^{1/2})^{-1} - \frac{1}{2} \quad (7.31)$$

Tomando el límite continuo, el número de ocupación promedio resulta en

$$\langle N_k \rangle = \frac{\mu\Omega}{2\hbar} s_k^2(t) k + \frac{3\hbar}{4\mu\Omega} (s_k^2(t) k)^{-1} - \frac{1}{2} \quad (7.32)$$

con $s_k(t)$ dado por (7.27). Para la partícula relativista masiva el resultado es

$$\langle N_k \rangle = \frac{E_k}{2\hbar^2} s_k^2(t) + \frac{3\hbar^2}{4E_k} (s_k^2(t))^{-1} - \frac{1}{2} \quad (7.33)$$

con $s_k(t)$ dado en (7.29). Este número promedio se puede visualizar en la siguiente figura.

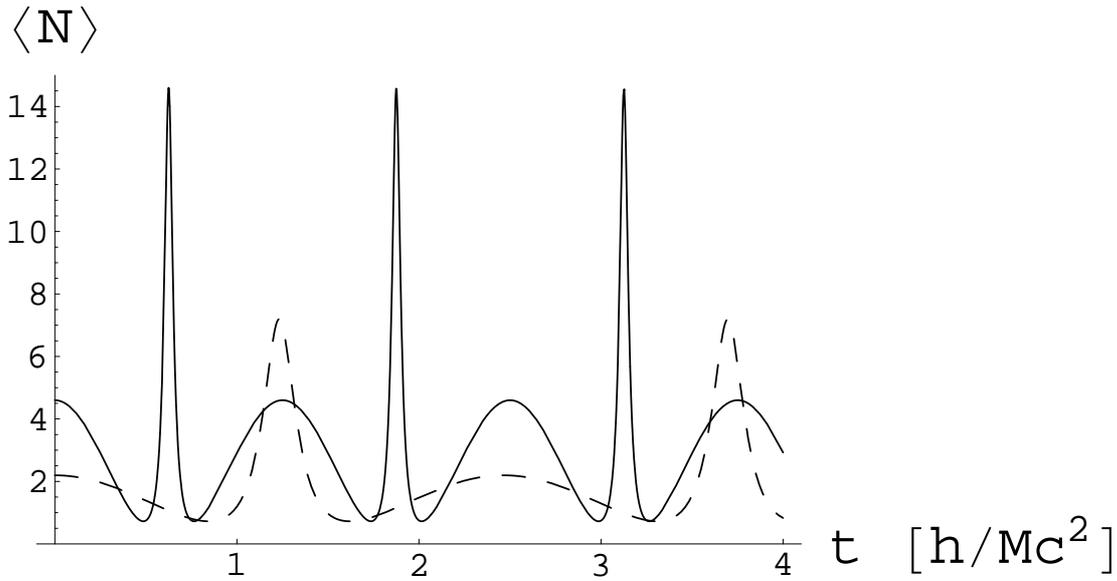


Figura 7.1: Número promedio de partículas para $k = \frac{10Mc}{\hbar}$ (sólida) y $k = \frac{5Mc}{\hbar}$ (punteada) al utilizar estados localizados como condiciones iniciales

En la figura 7.1 observamos un comportamiento oscilatorio del número de partículas, *i.e.* número de cuantos de los osciladores en función del número de onda o momento asignado a las partículas producidas. La frecuencia de oscilación es proporcional a su energía. El significado de este comportamiento es fácil de entender si reconocemos que una condición inicial localizada con mínima dispersión es una superposición de infinitas funciones de oscilador en coordenadas normales, o bien infinitos estados en el espacio de Fock. Dado que estos últimos se etiquetan con los números de ocupación según los momentos, encontramos una evolución que involucra todos los números de ocupación posibles. La importancia de este resultado radica en la elección de la condición inicial, ya que esta toma la función de onda de cada oscilador como un estado lo más localizado posible tanto en posiciones como en momentos, lo que puede interpretarse como una configuración inicial lo más clásica posible; todo esto para un problema con potenciales atractivos. Sin embargo, en el límite continuo hablamos de un campo *libre* cuya configuración inicial es como se ha descrito, y como resultado tenemos una evolución que involucra un número fluctuante de partículas para todas las energías con las que estas se producen.

7.4. La cuerda bajo un campo electrostático repentino y la partícula relativista con fuente

El ejemplo típico en este trabajo es la introducción de interacciones repentinas. Consideremos un sistema cuya lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \theta(t)\mathcal{E} \cdot \mathbf{x} \quad (7.34)$$

donde \mathcal{L} está dada en (7.1) y \mathcal{E} denota un campo electrostático multiplicado por la carga de la partícula i -ésima en la molécula, *i.e.* $\mathcal{E}_i = q_i E_i$ (recordemos que este es un ejemplo unidimensional y que los vectores contienen como componentes a los constituyentes de nuestro sistema). Fijando $\frac{q_i}{a} \rightarrow \rho(\xi)$ como la densidad lineal de carga, el límite de (7.34) es bien conocido:

$$\mathcal{L}' \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^L d\xi \left(\frac{\mu}{2} (\partial_t \phi(\xi, t))^2 - \frac{\mu \Omega^2}{2} (\partial_\xi \phi(\xi, t))^2 + \theta(t) \mathcal{E}(\xi) \phi(\xi, t) \right) \quad (7.35)$$

y nos conduce a las ecuaciones de movimiento [3]

$$\partial_t^2 \phi - \Omega^2 \partial_\xi^2 \phi = J(\xi) \quad (7.36)$$

habiendo definido una corriente $J(\xi) = \frac{2}{\mu} \mathcal{E}(\xi)$. Antes de tomar el límite continuo, supongamos primero que para $t < 0$ el sistema discreto se encuentra en el estado base (el vacío), *i.e.*

$$\psi(\mathbf{y}, 0) = \prod_{i=0}^{N-1} \left(\left(\frac{\hbar}{\pi m \omega \lambda_i^{1/2}} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{m \omega \lambda_i^{1/2}}{2 \hbar} y_i^2 \right] \right) = |0, \dots, 0\rangle \quad (7.37)$$

dado, desde luego, en coordenadas normales. El término fuente en (7.34) puede escribirse como

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{x} = \mathcal{E}' \cdot \mathbf{y}, \quad \mathcal{E}' = \mathbf{O} \mathcal{E} \quad (7.38)$$

Con esta transformación ortogonal del campo externo y para tiempos positivos podemos escribir de inmediato

$$\mathcal{L}'(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mathcal{E}'_i{}^2}{2 m \omega_i^2 \lambda_i} \quad (7.39)$$

donde $z_i \equiv y_i - \frac{\mathcal{E}'_i}{m \omega_i^2 \lambda_i}$. El propagador asociado tiene entonces la forma (7.6) pero evaluado en \mathbf{z} y con un factor de fase adicional (pero irrelevante) que contiene la energía del campo.

Resulta muy fácil aplicar este propagador al estado de vacío (7.37) y simplemente escribimos la densidad de probabilidad resultante calculada en [39] para cada modo

$$|\psi_i(\mathbf{y}, t)|^2 = \left(\frac{\pi \hbar}{m \omega \lambda_i^{1/2}} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m \omega \lambda_i^{1/2}}{\hbar} (y_i + \bar{y}_i(t))^2 \right] \quad (7.40)$$

de donde se observa un promedio de la distribución dependiente del tiempo y dado por

$$\bar{y}_i(t) = \frac{\mathcal{E}'_i \sin^2(\omega \lambda_i^{1/2} t/2)}{m \omega^2 \lambda_i^{1/2}}. \quad (7.41)$$

El límite continuo arroja

$$\bar{y}_i(t) \longrightarrow \frac{\mathcal{E}'(k) \sin^2(\Omega k t/2)}{\mu \Omega^2 k^2} \quad (7.42)$$

siendo $\mathcal{E}'(k)$ la transformada de Fourier de $\mathcal{E}(\xi)$ tal y como se anunció para los campos en (7.12). Similarmente, para la partícula relativista tenemos un promedio oscilatorio de la forma

$$\bar{\eta}_k(t) = \frac{J'(k) \sin^2(\Omega kt/2)}{2\Omega^2 k^2} \quad (7.43)$$

Nuevamente el caso masivo se obtiene reemplazando las frecuencias:

$$\bar{\eta}_k(t) = \frac{\hbar^2 J'(k) \sin^2\left(\frac{E_k t}{2\hbar}\right)}{2E_k^2} \quad (7.44)$$

El valor de expectación del número de partículas tomado respecto a los estados (7.40) es ahora

$$\langle N_k \rangle = \frac{\hbar^2 J'^2(k)}{4E_k^3} \sin^4\left(\frac{E_k t}{2\hbar}\right) \quad (7.45)$$

obtenido después de tomar el límite usual en el valor de expectación correspondiente al sistema discreto. Esta cantidad es positiva definida. Notamos que la corriente determina si el número de partícula incrementa con la energía o no, dependiendo de que $J(\xi)$ tenga oscilaciones fuertes. Otra característica inesperada es que, aún cuando la fuente se ha tomado constante en el tiempo (digamos, para $t > 0$), el número oscila con una frecuencia proporcional a la energía relativista de la partícula producida.

Para finalizar subrayamos que los sistemas discretos pueden ser útiles en el estudio de fenómenos transitorios para sistemas continuos que pueden ser difíciles de formular en la teoría cuántica de campos. Nuestro método permite interacciones no perturbativas pero cuya forma sea suficientemente simple.

Apéndice A

A.1. Cálculo de los elementos de matriz de R

Procedemos ahora a calcular los elementos de matriz de $R = e^{\xi \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}}$ en el espacio tridimensional (ξ es un parámetro real arbitrario). Esto significa que nuestros resultados estarán dados en términos de matrices espinoriales. Dichos resultados bastarán para encontrar la acción de $e^{\xi \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}}$ sobre cualquier vector tridimensional. Comencemos con la transformación

$$\mathbf{r}' = e^{\xi \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}} \mathbf{r} \quad (\text{A.1})$$

Dado que las componentes de \mathbf{r} son también funciones de las coordenadas $r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$, podemos escribir

$$x' = e^{i\xi \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}} x I_s, \quad y' = e^{i\xi \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}} y I_s, \quad z' = e^{i\xi \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}} z I_s \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbf{L} es el operador de momento angular en su representación diferencial. Además

$$I_s = \sum_{m_s=-s}^s |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \quad (\text{A.3})$$

es la matriz identidad en el espacio de espín. Para calcular cada transformación en (A.2), las coordenadas x, y, z deberán expresarse en términos de armónicos esféricos y $x I_s, y I_s, z I_s$ en términos de armónicos esféricos espinoriales utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan apropiados

$$\begin{aligned} x I_2 &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} r (Y_1^{-1} - Y_1^1) \sum_{m_s=-s}^s |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} r \sum_{m_s=-s}^s \sum_{j=|1-s|}^{1+s} \sum_{\mu=-j}^j (\langle j\mu|1, -1, s, m_s\rangle - \langle j\mu|1, 1, s, m_s\rangle) \mathcal{Y}_{j,1,s}^\mu \langle s, m_s| \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} y I_2 &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i r (Y_1^{-1} + Y_1^1) \sum_{m_s=-s}^s |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i r \sum_{m_s=-s}^s \sum_{j=|1-s|}^{1+s} \sum_{\mu=-j}^j (\langle j\mu|1, -1, s, m_s\rangle + \langle j\mu|1, 1, s, m_s\rangle) \mathcal{Y}_{j,1,s}^\mu \langle s, m_s| \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$z I_2 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^0 \sum_{m_s=-s}^s |s, m_s\rangle \langle s, m_s| = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r \sum_{m_s=-s}^s \sum_{j=|1-s|}^{1+s} \sum_{\mu=-j}^j \langle j\mu|1, 0, s, m_s\rangle \mathcal{Y}_{j,1,s}^\mu \langle s, m_s| \quad (\text{A.6})$$

El operador diferencial en (A.2) afecta al armónico esférico espinorial en la forma

$$e^{i\xi \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}} \mathcal{Y}_{jls}^m = e^{\frac{i\xi}{2}(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1))} \mathcal{Y}_{jls}^m \quad (\text{A.7})$$

Las funciones \mathcal{Y} pueden invertirse en términos de espinores canónicos y las coordenadas x, y, z :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{j,1,s}^\mu &= \sum_{m'_l, m'_s} \langle 1, m'_l, s, m'_s | j\mu 1s \rangle Y_1^{m'_l} |s, m'_s\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sum_{m'_s} \left\{ \frac{1}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s | j\mu 1s \rangle - \langle 1, 1, s, m'_s | j\mu 1s \rangle) x - \frac{i}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s | j\mu 1s \rangle + \langle 1, 1, s, m'_s | j\mu 1s \rangle) y \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0, s, m'_s | j\mu 1s \rangle z \right\} |s, m'_s\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto, reemplazando sucesivamente (A.4,A.5,A.6), (A.7) y (A.8) en (A.2) nos da las variables primadas como combinaciones lineales de x, y, z con matrices espinoriales como coeficientes

$$x' = \sum_{m_s, m'_s, j, \mu} |s, m'_s\rangle \langle s, m_s| e^{\frac{i\xi}{2}(j(j+1)-s(s+1)-2)} (\langle j\mu|1, -1, s, m_s\rangle - \langle j\mu|1, 1, s, m_s\rangle) \times \\ \left\{ \frac{1}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle - \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle) x - \frac{i}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle + \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle) y \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0, s, m'_s|j\mu 1s\rangle z \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$y' = i \sum_{m_s, m'_s, j, \mu} |s, m'_s\rangle \langle s, m_s| e^{\frac{i\xi}{2}(j(j+1)-s(s+1)-2)} (\langle j\mu|1, -1, s, m_s\rangle + \langle j\mu|1, 1, s, m_s\rangle) \times \\ \left\{ \frac{1}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle - \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle) x - \frac{i}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle + \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle) y \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0, s, m'_s|j\mu 1s\rangle z \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$z' = \sqrt{2} \sum_{m_s, m'_s, j, \mu} |s, m'_s\rangle \langle s, m_s| e^{\frac{i\xi}{2}(j(j+1)-s(s+1)-2)} \langle j\mu|1, 0, s, m_s\rangle \times \\ \left\{ \frac{1}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle - \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle) x - \frac{i}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle + \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle) y \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0, s, m'_s|j\mu 1s\rangle z \right\} \quad (\text{A.11})$$

Estos son entonces las fórmulas de transformación de \mathbf{r} , escritas como sumas finitas. Finalmente, los elementos de matriz del operador R pueden leerse de las expresiones (A.9,A.10,A.11)

$$R_{lk} = (e^{\xi \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}})_{lk} = \sum_{m_s, m'_s, j, \mu} |s, m'_s\rangle \langle s, m_s| e^{\frac{i\xi}{2}(j(j+1)-s(s+1)-2)} A_l B_k \quad (\text{A.12})$$

con

$$A_1 = \langle j\mu|1, -1, s, m_s\rangle - \langle j\mu|1, 1, s, m_s\rangle, \quad A_2 = i(\langle j\mu|1, -1, s, m_s\rangle + \langle j\mu|1, 1, s, m_s\rangle), \\ A_3 = \sqrt{2} \langle j\mu|1, 0, s, m_s\rangle \quad (\text{A.13})$$

$$B_1 = \frac{1}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle - \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle), \quad B_2 = \frac{-i}{2} (\langle 1, -1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle + \langle 1, 1, s, m'_s|j\mu 1s\rangle), \\ B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0, s, m'_s|j\mu 1s\rangle \quad (\text{A.14})$$

y esto es válido para cualquier espín.

A.2. Identidades para las integrales I_1, I_2, I_3

Probemos las identidades $I_2 = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial I_1}{\partial z}$, $I_3 = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) I_1$. La primera resulta de expresar I_2 en coordenadas cartesianas

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ik_0 t}}{k^2 - k_0^2 + m^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' z' e^{ik_3 z' - \lambda^2 z'^2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ik_1 x' - \lambda^2 x'^2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{ik_2 y' - \lambda^2 y'^2 / 2} \quad (\text{A.15})$$

Las integrales espaciales son triviales y obtenemos

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ik_0 t}}{k^2 - k_0^2 + m^2} \left(\frac{-i(2\pi)^{3/2} k_3}{\lambda^5} e^{-k^2 / (2\lambda^2)} \right) \quad (\text{A.16})$$

comparando (A.16) con (6.24) después de efectuar en esta expresión las integrales en las variables de espacio llegamos al resultado que se buscaba. Para I_3 se procede análogamente pero utilizando $r' \sin \theta' e^{i\phi'} = x' + iy'$.

A.3. Funciones de onda del oscilador de Dirac de dos partículas

Para calcular las partes complementarias de las funciones (6.88) basta utilizar (6.89). El resultado de aplicar los operadores (6.82) puede encontrarse evaluando los elementos de matriz

$$\langle N(j_1, s_1)jm_1 | \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{r} | N(j_2, s_2)jm_2 \rangle, \quad \langle N(j_1, s_1)jm_1 | \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{p} | N(j_2, s_2)jm_2 \rangle \quad (\text{A.17})$$

usando álgebra de Racah [37]. Escribimos pues los resultados para cada caso. Para $s = 0$ y $P = (-)^j$ tenemos

$$\Psi_{N,0,j,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ a_+ - a_- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle \mathbf{r} | N(j, 0)jm \rangle \quad (\text{A.18})$$

Para $s = 1$ y $P = (-)^j$ escribimos sólo las componentes complementarias

$$\begin{aligned} \psi_{21} &= -i24W(1/2, 1, 1/2, 1; 1/2, 1) \sqrt{\frac{\omega\pi}{6}} b_+(b_+ + b_-) \\ &\times (A|N-1(j-1, 1)jm\rangle + B|N-1(j+1, 1)jm\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= -i24W(1/2, 1, 1/2, 1; 1/2, 1) \sqrt{\frac{\omega\pi}{6}} b_+(b_+ - b_-) \\ &\times (A|N-1(j-1, 1)jm\rangle + B|N-1(j+1, 1)jm\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde

$$A = W(j, 1, j-1, 1; j, 1) \sqrt{(2j-1)(2j+1)(N+j+3)} H(j-1, j, 1) \quad (\text{A.21})$$

$$B = -W(j, 1, j+1, 1; j, 1) \sqrt{(2j+3)(2j+1)(N-j)} H(j+1, j, 1) \quad (\text{A.22})$$

Para $s = 1$ y $P = -(-)^j$ las componentes complementarias son

$$\begin{aligned} \psi_{21} &= -i24 \sqrt{\frac{\omega\pi}{6}} c_{++}(c_{++} + c_{--}) [W(1/2, 1, 1/2, 1; 1/2, 1) \\ &\times (A_1|N-1(j, 1)jm\rangle + B_1|N-1(j+2, 1)jm\rangle) + W(1/2, 1, 1/2, 0; 1/2, 1) \\ &\times (A_2|N-1(j, 0)jm\rangle + B_2|N-1(j+2, 0)jm\rangle)] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= -i24 \sqrt{\frac{\omega\pi}{6}} c_{++}(c_{++} - c_{--}) [W(1/2, 1, 1/2, 1; 1/2, 1) \\ &\times (A_1|N-1(j, 1)jm\rangle + B_1|N-1(j+2, 1)jm\rangle) + W(1/2, 1, 1/2, 0; 1/2, 1) \\ &\times (A_2|N-1(j, 0)jm\rangle + B_2|N-1(j+2, 0)jm\rangle)] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

con

$$A_1 = W(j+1, 1, j+2, 1; j, 1) \sqrt{(2j+5)(2j+3)(N+j+4)} H(j, 1, j+1) \quad (\text{A.25})$$

$$B_1 = -W(j+1, 1, j, 1; j, 1) \sqrt{(2j+3)(2j+1)(N-j-1)} H(j+2, 1, j+1) \quad (\text{A.26})$$

$$A_2 = W(j+1, 1, j+2, 0; j, 1) \sqrt{(2j+5)(2j+3)(N+j+4)} H(j, 1, j+1) \quad (\text{A.27})$$

$$B_2 = -W(j+1, 1, j, 0; j, 1) \sqrt{(2j+3)(2j+1)(N-j-1)} H(j+2, 1, j+1) \quad (\text{A.28})$$

Las funciones W son coeficientes de Racah (sus valores se tabulan en [37], [26]) y las funciones H están dadas en [17], página 33 ec. (10.26).

A.4. Diagonalización de la matriz V_N

Encontraremos la expresión (7.4). Sea la matriz \mathbf{V}_N como en (7.2) y sea también

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & \dots & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (\text{A.29})$$

Definimos los polinomios característicos como

$$\phi_N(\lambda) = |\mathbf{V}_N - \lambda \mathbf{I}_N|, \quad \chi_N(\lambda) = |\mathbf{M}_N - \lambda \mathbf{I}_N| \quad (\text{A.30})$$

Se puede verificar fácilmente que las siguientes relaciones de recursividad se cumplen

$$\begin{pmatrix} \phi_N(\lambda) \\ \chi_N(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{N-1}(\lambda) \\ \chi_{N-1}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

La matriz que aparece en el miembro derecho de (A.31) puede diagonalizarse y la recursión se resuelve entonces calculando las potencias de dicha matriz. Definimos ahora $a = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)})$ y elegimos como condiciones iniciales los polinomios ϕ_2, χ_2 dados por

$$\phi_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda, \quad \chi_2(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \quad (\text{A.32})$$

Siguiendo el procedimiento indicado en el párrafo anterior, *i.e.* encontrando la transformación de similitud apropiada, escribimos (A.31) como

$$\begin{pmatrix} \phi_N(\lambda) \\ \chi_N(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{(\lambda - a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{a}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - a)^{N-2} & 0 \\ 0 & (1 - \frac{\lambda}{a})^{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -a\lambda \\ -a^2 & a\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2(\lambda) \\ \chi_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

vector de cuya primera componente calculamos la forma explícita de la ecuación secular $\phi_N(\lambda) = 0$. Debemos notar que la condición de realidad de λ implica $a = e^{i\alpha}$ y por tanto $\lambda = 4 \cos^2(\alpha/2)$. Tras algunos pasos algebraicos encontramos que la ecuación secular es equivalente a

$$(\phi_2(\lambda) - 2\chi_2(\lambda)) \sin((N - 2)\alpha) \cos(\alpha/2) - \phi_2(\lambda) \cos((N - 2)\alpha) \sin(\alpha/2) = 0 \quad (\text{A.34})$$

Ahora podemos estimar las soluciones de (A.34) desarrollando en serie sobre la variable α alrededor de 0, $\pi/2$ o π , lo que nos deja con tres ecuaciones trigonométricas fáciles de resolver si la serie se trunca. Nótese que $N \gg 1$ implica que αN no debe tomarse como parámetro de expansión, ya que

no podremos truncar la serie resultante. Los tres casos arrojan expresiones equivalentes a (7.4) en sus dominios de validez respectivos, pero cubriendo todo el intervalo $0 \leq \alpha \leq \pi$ y esto completa la prueba.

Las ecuaciones para los eigenvectores de V_N también pueden escribirse en forma de recurrencias y resolverse en términos de los eigenvalores dados arriba.

Bibliografía

- [1] R. P. Feynman and A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* . McGraw-Hill (1965).
- [2] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys* **20** , 367-387 (1948).
- [3] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction* . Oxford University Press (1993).
- [4] M. Moshinsky and E. Sadurní, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** No 22 (2006) 7039-7050
- [5] M. Moshinsky and E. Sadurní, "Composite particles in relativistic quantum mechanics and their application to three quark systems". *Int. Phys. Conf. Ser.* No 185, 403-410. IOP (2005).
- [6] C. Grosche and F. Steiner *Handbook of Feynman Path Integrals* . Springer Tracts in Modern Physics, Volume 145, (1998).
- [7] M. Moshinsky, "Diffraction in time", *Phys. Rev.* **88**, 625 (1952).
- [8] M. Moshinsky and C. Quesne, *J.Math. Phys.* **12** , 1772 (1971).
- [9] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* . Academic Press, New York and London (1965).
- [10] K. T. Hecht, *Quantum Mechanics* . Springer (2000).
- [11] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics* . Oxford at the Clarendon Press, Third Edition (1947), pp. 252-274, 268-271.
- [12] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 392.
- [13] M. Moshinsky and G. Loyola, *Foundations of Physics* **23**, (1993) 197.
- [14] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* . McGraw Hill Book Company, 1964, pp. 46-51.
- [15] L. L. Foldy and S. S. Wouthuysen, *Phys. Rev* **78** (1950) 29.
- [16] A. G. Nikitin, *J. Phys. A* **31** (1998) 3297;
A. G. Nikitin and V. V. Tretynyk, *Int. J. Mod. Phys.* **12** (1997) 4369.
- [17] M. Moshinsky and Yu. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics* . Harwood Academic Publishers (1996).
- [18] Particle Data Group, *Eur. Phys. Journ. C* **15** (2000) 650.
- [19] M. Moshinsky and V. Riquer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 2163.

- [20] M. Moshinsky and A. Nikitin, "The many body problem in relativistic quantum mechanics", *Rev. Mex. Fís.* S **50** no. 2, pp. 66-73, 2004
- [21] F. Halzen and A. Martin, *Quarks and Leptons* . John Wiley and Sons (1984)
- [22] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **18** (1978) 4187;
 N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 2653;
 N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **20** (1979) 1191;
 N. Isgur, G. Karl and K. Chao, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 155;
 N. Isgur and S. Capstick, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 2809.
- [23] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Annals of Physics* **236** (1994) 69;
 R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Annals of Physics* **284** (2000) 89.
- [24] M. Karliner and H. Lipkin, arXiv:hep-ph/0307243.
- [25] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* Addison Wesley (1995)
- [26] A. Messiah, *Quantum Mechanics* Dover, New York (1999)
- [27] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J.Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) L817-L819
- [28] R. Szmtykowski and M. Gruchowski, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 4991-4997
- [29] R. P. Martínez y Romero, J. Saldana-Vega and A. L. Salas-Brito, *J.Math.Phys.* **40** (1999) 2324
- [30] M. Moshinsky, G. Loyola, A. Szczepaniak, C. Villegas and N. Aquino, "The Dirac oscillator and its contribution to the baryon mass formula", *Relativistic Aspects of Nuclear Physics* , Ed. T.Kodama (World Scientific 1990), pp. 271-307.
- [31] C. Quesne and M. Moshinsky, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990) 2263-2272
- [32] C. Quesne, "Supersymmetry and the Dirac oscillator", *Int. J. Modern Phys.* **A6** (1991) 1567.
- [33] M. Moshinsky, A. Del Sol Mesa and Yu. F. Smirnov, *Rev. Mex. Fís.* **41** (1995) 322.
- [34] M. Moshinsky, C. Quesne and Yu. F. Smirnov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 6447.
- [35] M.Moshinsky and E. Sadurní, "Time dependent problems in relativistic quantum mechanics" *Proc. XXIX Simposium on Nuclear Physics, Cocoyoc, México* (2006).
- [36] M.Moshinsky and E. Sadurní, "Transient effects in a relativistic quantum system" *Proc. XXX Simposium on Nuclear Physics, Cocoyoc, México* (2007).
- [37] M. E. Rose, *Elementary theory of angular momentum*. Dover, New York (1995).
- [38] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley (1980)
- [39] M. Moshinsky and E. Sadurní, *Proc. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* SIGMA1(2005)003.
- [40] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* . Wiley, New York (1996).
- [41] C. Kittel, *Quantum Theory of Solids* . Wiley, New York (1963).

- [42] P. Allen and J. Kelner, "Evolution of a vibrational wave packet in a disordered chain", *Am. J. Phys.* **66** (1998) 497-506.
- [43] H. Haken, *Quantum Field Theory of Solids: An Introduction* . North Holland Pub. Co., Amsterdam (1976).
- [44] G. Serman, *An introduction to Quantum Field Theory* . Cambridge University Press (1993).
- [45] V. V. Dodonov *et al.* , "Propagators for quantum oscillator chains", *Journal of Russian Laser Research* **12** (1991) 385-394.