Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TEORÍA FORMAL DE MÓNADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

CARLOS RAMÍREZ SARTILLO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

2007

1. Datos del alumno

Ramírez
Sartillo
Carlos
(246)4162973
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
095543240

2. Datos del tutor

Dr.
Francisco
Marmolejo
Rivas

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Francisco Federico
Raggi
Cárdenas

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Martha
Takane
Imay

5. Datos del sinodal 3

M. en C.
Hugo
Juárez
Anguiano

6. Datos del sinodal 4

Dr.
José
Ríos
Montes

7. Datos del trabajo escrito

Teoría Formal de mónadas
119 p.
2007

Agradecimientos

Dr Francisco no hay palabras para agradecer todo lo que ha hecho por mí. Señores sinodales gracias por toda su ayuda en este importante momento de mi formación académica.

La generosidad de que han dado muestras señora Tomaza, señor Andrés y cada uno de los miembros de su familia tiene un lugar especial en mi corazón. Mamá, Verónica; lamento corresponder con algo tan pequeño a todo lo grande que ustedes han realizado. Papá, hermanos; gracias. Gracias a toda mi familia.

Índice general

Introducción

Nuestro propósito es iluminar y extender la Teoría de mónadas considerandolas, no en la 2-categoía **Cat**, sino en una 2-categoría general sujeta a determinadas condiciones. El presente trabajo es en realidad la exposición de la mayor parte del material reunido en [**1**].

El primer capítulo consta de dos temas en particular, ambos son en realidad un primer acercamiento a los conceptos elementales de las teorías de categorías y 2-categorías. Se dan la definición y algunos ejemplos de categorías, funtores y transformaciones naturales de categorías. Sobre estos conceptos descanzan las ideas básicas de la teoría de 2-categorías (el contexto en el cual se inscribe el resto de nuestro trabajo) como son 2-categoría, 2-funtor, transformaciones 2-naturales, etc. Finalizamos enunciando la definición de 2-adjunción, demostramos una manera equivalente de definir una 2-adjunción y el lema de Yoneda para 2-categorías. Con gran acierto decimos que [**2**] es una experiencia agradable para quienes desean ioniciarse en el tema de categorías; para 2-categorías sugerimos la consulta de [**3**].

Nos introducimos en el segundo capítulo a la la busqueda de un 2-adjunto derecho para el 2-funtor particular $Inc_{\mathfrak{C}}$ (cuando tal 2-adjunto existe diremos que la 2-categoría admite la consturcción de álgebras) para lo cual, partiendo de $\mathfrak{C}$, construimos la 2-categoría de mónadas en $\mathfrak{C}$. Tambíen hablamos de la adjunción de 1-celdas para cualquier 2-categoría $\mathfrak{C}$ y dando por hecho que la 2-categoría $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras establecemos en un teorema que toda mónada en $\mathfrak{C}$ está generada por una adjunción. Por último, para cualquier mónada (X, S) exhibimos la existencia salvo isomorfismo de una adjunción que la genere y además "factoriza" a toda adjunción que genere a (X, S). Un tratamiento más amplio de tales ideas lo encontramos en [**4**].

La idea de 2-categoría está inspirada en la estructura algebraica de Cat, no es ninguna sorpresa que la existencia de la categoría de S-álgebras X^S [**5**] haya inspirado la definición de cuando una 2-categoría $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras. Empezamos el tercer capítulo con la demostración de que Cat admite la construcción de álgebras. La demostración de que hay un isomorfismo 2-natural $\mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}}) \cong \mathfrak{C}(Y, \ )^{\mathfrak{C}(Y, \ )}$ (el 2-funtor de la izquierda es el resultado de componer los 2-funtores $Alg_{\mathfrak{C}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}(Y, \ ) : \mathfrak{C} \to Cat$; mientras que el de la derecha es la composición de los 2-funtores $\mathfrak{C}(Y, \ )^* : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(Cat)$ y $Alg_{Cat} : Mnd(Cat) \to Cat$, el primero de estos últimos será construido explícitamente), esto nos permitirá concluir que una adjunción $J \dashv E$ en una 2-categoría $\mathfrak{C}$ es monádica si y sólo si para cada Y objeto de $\mathfrak{C}$ la adjunción $\mathfrak{C}(Y, J) \dashv \mathfrak{C}(Y, E)$ es monádica.

Las 2-categorías $\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{C}_*$ y $\mathfrak{C}^*_*$ son construidas en el capítulo cuatro; una adjunción en la 2-categoría $\mathfrak{C}$ permite obtener adjunciones en tales 2-categorías. El comportamiento de aquellas mónadas que son generadas por una adjunción nos permite mostrar que cada mónada en $\mathfrak{C}$ está generada por una adjunción bajo el supuesto de que $\mathfrak{C}^*$ admite la construcción de álgebras. Además, traducimos a la 2-categoría $\mathfrak{C}$ lo que entendemos por objeto, 1-celda y 2-celda en algunas de las 2-categorías $Mnd(\mathfrak{C}^*)$, $Mnd(\mathfrak{C}_*)$, $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$, etc para construir el 2-funtor $\overline{Alg_{\mathfrak{C}}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ y mostrar que existe un 2-adjunto para tal funtor. Cerramos este capítulo demostrando que $\mathfrak{C}_*$ admite la construcción de álgebras cuando $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras y si existen 2-funtores $()^{op} : \mathfrak{C}_* \to \mathfrak{C}$, $()_{op} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}_*$ tales que $()^{op}()_{op} = 1$ y $()_{op}()^{op} = 1$.

En el capítulo cinco identificamos leyes distributibas con los objetos de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$, $Mnd(\mathfrak{C})$ es la 2-categoría de mónadas en $\mathfrak{C}$, y expresamos mucha de la información sobre leyes distributibas por medio de la observción de que Mnd es una mónada en $2-\mathbf{Cat}$. La génesis de tal tema se desarrolla en [**6**].

Al igual que en el tercer capítulo, sólo que ahora las 2-categorías en cuestión son Cat^*, Cat^*_*, lo primero que hacemos en el capítulo seis es demostrar que estas 2-categorías admiten la construcción de álgebras.

Hacemos notar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & Cat^*(Set, (X_S)_{po}) \arrow[d, "{[Cat^*_*(Set, J_{S_{po}})]^{op} = T^{op}}"] \\ X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set, X_{po}) \end{tikzcd}$$

es un pullback. Aquí, Γ es la subcategoría plena de $Cat^*(Set, (X_S)_{po})$ que consta de aquellos funtores $U : Set \to (X_S)_{po}$ tal que $UJ_{S_{po}}$ es representable.

Pero la demostración de que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X^S \arrow[r, "\overline{R}"] \arrow[d, "E_S"'] & \mathcal{C}^{op} \arrow[d, "(J^Q)^{op}"] \\ X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set, X_{po}) \end{tikzcd}$$

es un pullback y que el funtor $(J^Q)^{op}$ es la composición de los funtores

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \arrow[rr, "\cong", "\Theta"'] \arrow[dr, "(J^Q)^{op}"'] & & Cat^*(Set, J_{S_{po}}) \arrow[dl, "{[Cat^*_*(Set, J_{S_{po}})]^{op}}"] \\ & Cat^*(Set, X_{po}) & \end{tikzcd}$$

sugieren que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X^S \arrow[r, "\Theta\overline{R}"] \arrow[d, "E_S"'] & Cat^*(Set, (X_S)_{po}) \arrow[d, "{[Cat^*_*(Set, J_{S_{po}})]^{op} = T^{op}}"] \\ X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set, X_{po}) \end{tikzcd}$$

también es un pullback. Todos estas afirmaciones forman parte de la demostración del Teorema6.6 con el cual finalizamos el capítulo.

CAPíTULO 1

Preliminares.

1. Categorías

Iniciamos dando la definición de categoría y damos algunos ejemplos.

DEFINICIÓN 1.1. *Para definir una categoría $\mathcal{C}$ debemos dar cuatro datos.*

(i) *Una clase $|\mathcal{C}|$ cuyos elementos $a, b, c, \ldots$ serán llamados objetos de la categoría $\mathcal{C}$.*
(ii) *Para cada par de objetos a, b, de $\mathcal{C}$; un conjunto $\mathcal{C}(a, b)$ cuyos elementos $f, g, h, \ldots$ serán llamados morfismos de a en b.*
(iii) *Para cada tercia de objetos a, b y c de $\mathcal{C}$, una ley de composición*
$$\circ : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$
cuya acción sobre la pareja (f, g) se denota como $g \circ f$ o sólo como gf.
(iv) *Para cada objeto a de $\mathcal{C}$, un morfismo $1_a \in \mathcal{C}(a, a)$ llamado la identidad en a.*

Además debe cumplir con los siguientes axiomas.

A_1 *: Los conjuntos $\mathcal{C}(a, b), \mathcal{C}(c, d)$ son disjuntos salvo que $a = c, b = d$.*
A_2 *: Dados $f : a \to b, g : b \to c, h : c \to d$, entonces $h(gf) = (hg)f$ (Ley asociativa para la composición).*
A_3 *: Para cualesquiera morfismos$f : a \to b, g : c \to a$, se tiene que $f1_a = f, 1_a g = g$ (Existencia de identidades).*

DEFINICIÓN 1.2. *Una categoría $\mathcal{C}$ es pequeña cuando la clase $|\mathcal{C}|$ de sus morfismos es un conjunto.*

DEFINICIÓN 1.3. *Decimos que un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo (o invertible o unidad) si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A, fg = 1_B$. Si tal g existe, es único y escribimos $g = f^{-1}$. Dos objetos A y B son isomorfos en la categoría $\mathfrak{C}$ si existe un isomorfismo $e : A \to B$; escribimos $A \cong B$.*

Esta relación tiene nombres especiales en diferentes categorías (correspondencia uno a uno de conjuntos, isomorfismos de grupos, homeomorfismos de espacios topológicos) pero es importante observar que es un concepto categórico.

Ejemplos de categorías.

EJEMPLO 1.4. *La categoría **Set** de conjuntos y funciones.*

EJEMPLO 1.5. *La categoría **Top** de espacios topológicos y funciones continuas.*

EJEMPLO 1.6. *La categoría **Grp** de grupos y homomorfismos.*

EJEMPLO 1.7. *La categoría **Ab** de grupos abelianos y homomorfismos.*

EJEMPLO 1.8. *La categoría D_k de espacios vectoriales sobre el campo K y transformaciones lineales.*

EJEMPLO 1.9. *La categoría **R-Mod** de módulos izquierdos sobre un anillo R y los morfismos entre ellos.*

EJEMPLO 1.10. *Para cualquier grupo G, la categoría $\mathcal{C}_G$ consta de sólo un objeto, al que llamamos 0. Definimos $\mathcal{C}_G(0,0) = G$, esto es , el conjunto de morfismos es justamente el conjunto subyacente de G. Composición de morfismos es la multiplicación del grupo. Ya que cada elemento del grupo tiene inverso, vemos que cada morfismo de $\mathcal{C}_G$ es un isomorfismo. Un grupo es así una categoría con un objeto, en la que cada morfismo es una unidad.*

EJEMPLO 1.11. *Sea S un conjunto preordenado. Esto es, S es un conjunto con una relación $\leq$ que es reflexiva y transitiva. Formamos la categoría $\mathcal{C}_S$. Primero, los objetos de $\mathcal{C}_S$ son los elementos de S. Segundo, $\mathcal{C}_S(x,y)$ consta de un solo elmento si $x \leq y$ ó es vacío en caso contrario.*

EJEMPLO 1.12. *Dada cualquier categoría $\mathcal{C}$, podemos formar una nueva categoría $\mathcal{C}^{op}$. Los objetos de $\mathcal{C}^{op}$ son los objetos de $\mathcal{C}$, los morfismos de $\mathcal{C}^{op}$ son morfismos f^{op} en correspondencia uno a uno $f : a \to b \mapsto f^{op} : b \to a$ con los morfismos $f : a \to b$ de $\mathcal{C}$. La composición $f^{op}g^{op} = (gf)^{op}$ está definida en $\mathcal{C}^{op}$ exactamente cuando la composición gf está definida en $\mathcal{C}$. Llamamos a $\mathcal{C}^{op}$ la categoría opuesta de $\mathfrak{C}$.*

DEFINICIÓN 1.13. *Un objeto I de $\mathcal{C}$ es inicial si el conjunto $\mathcal{C}(I,X)$ tiene exactamente un elemento para todo objeto X de $\mathcal{C}$. Un objeto T es terminal (o coinicial) si el conjunto $\mathcal{C}(X,T)$ tiene exactamente un elemento para todo objeto X de $\mathcal{C}$.*

EJEMPLO 1.14. *En la categoría **Set**, el conjunto vacío es objeto inicial y cualquier conjunto con un exactamente un elemento es terminal.*

EJEMPLO 1.15. *En **Grp**, el grupo con exactamente un elemento es inicial y terminal.*

DEFINICIÓN 1.16. *Un objeto Z de $\mathcal{C}$ es objeto cero si es inicial y terminal.*

EJEMPLO 1.17. *Las categorías **Ab** y **R-Mod** tienen objetos cero. A saber el grupo abeliano* 0 *con exactamente un elemento, y de manera similar en el caso de **R-Mod**.*

Es fácil verificar que cualesquiera dos objetos iniciales en una categoría son canónicamante isomorfos. Lo mismo sucede si hablamos de objetos terminales u objetos cero.

2. Funtores

El concepto de funtor para categorías juega un papel semejante al que tiene la idea de función para los conjuntos.

DEFINICIÓN 1.18. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, un Funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consta de*

(i) *Una aplicación $|\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ entre las clases de objetos de las categorías; denotamos por $F(a)$ o sólo Fa a la imagen de un objeto a de $\mathcal{C}$.*
(ii) *Para cada par de objetos a, b de $\mathcal{C}$ una función $\mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa,Fb)$; la imagen de un morfismo $f \in \mathcal{C}(a,b)$ se denota como $F(f)$ o solo Ff.*
Además se daben cumplir los siguientes axiomas.
(1) *Para morfismos $f \in \mathcal{C}(a,b)$ y $g \in \mathcal{C}(b,c)$ se tiene $F(gf) = F(g)F(f)$.*
(2) *Para cada objeto a de $\mathcal{C}$ se tiene $F1_a = 1_{Fa}$.*

EJEMPLO 1.19. *Si consideramos grupos como categorías, los funtores son precisamente homomorfismos.*

EJEMPLO 1.20. *Si consideramos los conjuntos preordenados como categorías, los funtores son precisamente las funciones que preservan el orden.*

EJEMPLO 1.21. *Ahora describimos un funtor de* $\boldsymbol{Grp}$ *a Gru. Sea* G *un grupo. Si* G' *es el subgrupo generado por* $\{xyx^{-1}y^{-1}!x, y \in G\}$. *Entonces* G' *es un subgrupo normal de* G *llamado el subgrupo conmutador de* G. *El grupo cociente* G/G' *es un grupo abeliano, llamado el* abelianizado *de* G. *Ahora definimos un funtor* $Abel : Gru \to Gru$. *Si* $G \in Gru$, $Abel(G) = G/G'$, *donde* G' *es el subgrupo conmutador. Si* $f : G \to H$ *es un homomorfismo, entonces* $g = Abel(f) : G/G' \to H/H'$ *es el homorfismo inducido:*

$g(xG') = (fx)H', x \in G$.

Esta definición tiene sentido ya que $fG' \subseteq H'$, *y esto hace claramente que Abel sea un funtor.*

EJEMPLO 1.22. *El funtor conjunto potencia.*
Definimos un funtor $P : Set \to Set$ *como sigue. Si* $S \in Set, PS = 2^S$, *la colección de subconjuntos de S. Si* $f : X \to Y, Pf = 2^f$ *donde* $2^f(A) = fA, A \subseteq X$.

Es obvio que P *es un funtor.*

EJEMPLO 1.23. *Un funtor que simplemente olvida parte o toda la estructura de un objeto algebraico o de otra naturaleza (topológico, por ejemplo) es comúnmente llamado funtor que olvida. Así el funtor que olvida* $U : Grp \to Set$ *asigna a cada grupo* G *el conjunto* UG *de sus elementos (olvidando la multiplicación y por tanto la estructura de grupo), y asigna a cada morfismo* $f : G \to G'$ *de grupos la misma función, considerada sólo como una función entre conjuntos. Así, tenemos también funtores que olvidan* $U : D_K \to Ab$ *y* $U : Top \to Set$ *respectivamente.*

EJEMPLO 1.24. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría tal que para cada par* a, b *de objetos,* $\mathcal{C}(a, b)$ *es un conjunto pequeño. Tenemos para cada objeto* a *de* $\mathcal{C}$ *el funtor* $\mathcal{C}(a, \ ) : \mathcal{C} \to Set$ *tal que:*

$$b \mapsto \mathcal{C}(a, \ )(b) = \mathcal{C}(a, b) \qquad y \qquad f : b \to c \mapsto \mathcal{C}(a, \ )(f) = \mathcal{C}(a, f),$$

donde $\mathcal{C}(a, f)$ *es la función definida en* $h : a \to b \mapsto \mathcal{C}(a, f)(h) = fh$.

OBSERVACIÓN 1.25. *Dados funtores* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}, \ \ G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, *la composición de funciones*

$$a \mapsto G(Fa) \qquad y \qquad f \mapsto G(Ff),$$

sobre objetos y morfismos de $\mathcal{A}$ *define un funtor* $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, *(o simplemente* GF*) llamado la composición de* F *con* G. *Esta composición es asociativa. Para cada categoría* $\mathcal{A}$ *hay un funtor identidad* $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *que actúa como una identidad para esta composición.*

EJEMPLO 1.26. *Sea* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *un funtor. La aplicación* $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$ *definida por*

$$a \mapsto F^{op}a = Fa$$
$$f^{op} \mapsto F^{op}f^{op} = (Ff)^{op}$$

es un funtor. Llamamos a F^{op} *el funtor opuesto de* F.

DEFINICIÓN 1.27. *Sean* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un funtor y* x, y *objetos de* $\mathcal{C}$. *Entonces* F *induce una función* $F_* : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(Fx, Fy)$. F *es* fiel *si cada una de las funciones inducidas es inyectiva.* F *es* pleno *si cada una de las funciones inducidas es sobreyectiva.*

3. Transformaciones naturales

Una transformación natural es una relación “especial”entre dos funtores.

DEFINICIÓN 1.28. *Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Un transformación natural $\tau : F \to G$ es una familia de morfismos*

$$\langle \tau_c : Fc \to Gc \rangle$$

de $\mathcal{D}$ indicados por los objetos de $\mathcal{C}$ tal que, para cada morfismo $f : c \to d$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fd \arrow[r, "\tau_d"'] & Gd \end{tikzcd}$$

conmuta.

EJEMPLO 1.29. *Consideramos la categoría $\mathcal{D}_K$. Supongamos que V es un objeto de $\mathcal{D}_K$. Entonces V^* es un objeto de $\mathcal{D}_K$, donde V^* es el espacio dual de las transformaciones lineales de V a K. Si V es de dimensión finita, entonces V es isomorfo a V^*. Similarmente podemos formar V^{**}, y si V es de dimensión finita, V es isomorfo a V^{**}. En realidad, para cualquier V objeto de $\mathcal{D}_K$, sea $v \in V$, y definimos $\tilde{v} \in V^{**}$ como sigue:*

$$\tilde{v}(f) = f(v), f \in V^* \quad .$$

La función

$$\eta_V : V \to V^{**}$$

definida como:

$$v \mapsto \eta_V(v) = \tilde{v}$$

es una transformación lineal de V a V^{**}, que es un isomorfismo si V es de dimensión finita. Así, denotamos por $1_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ al funtor identidad y por $^{**} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ al funtor dado por $^{**}(V) = V^{**}$ sobre objetos. Si $f : V \to W$, entonces f^{**} es la transformación lineal

$$f^{**} : V^{**} \to W^{**}$$

definida por

$$\phi \mapsto (f^{**}v^{**})\phi = v^{**}(f^*(\phi)) \ ,$$

donde $v^{**} : V^* \to K, \phi : W \to K$, así que $v^{**} \in V^{**}, \phi \in W^*$, y

$$f^* : W^* \to V^*$$

está dada por

$$\phi \mapsto f^*(\phi) : V \to K$$

tal que:

$$v \mapsto (f^*(\phi))(v) = \phi(fv), \ \textit{para } v \in V \quad .$$

Tenemos una transformación natural

$$\eta : 1_{D_K} \to^{**}$$

tal que:

$$V \mapsto \eta(V) = \eta_V$$

para cada objeto V de D_K. La naturalidad de η es la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

para cada $f : V \to W$ en D_K.

En el caso donde consideramos 1_{D_K} y ** como funtores sobre la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, $\eta : 1_{D_K} \to^{**}$ es una equivalencia natural*, de acuerdo a la siguiente definición.*

Definición 1.30. *Una transformación natural $\tau : F \to G$ es una equivalencia natural o isomorfismo natural si, para cada objeto a de $\mathcal{C}$, τ_a es un isomorfismo. Diremos que F y G son naturalmente equivalentes o naturalmente isomorfos.*

Dadas categorías $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y funtores $F,\ G,\ H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Si $\tau : F \to G$ y $\sigma : G \to H$ son transformaciones naturales i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad (\tau \Downarrow,\ \sigma \Downarrow)$$

La familia de morfismos

$$\langle (\sigma.\tau)_c : Fc \to Hc \rangle$$

donde $(\sigma.\tau)_c = \sigma_c \tau_c$, son la familia de morfismos de la transformación natural $\sigma.\tau : F \to H$. Llamamos a $\sigma.\tau$ la "composición vertical" de τ con σ. Esta composición "vertical" de transformaciones naturales es asociativa; además cada funtor F tiene una transformación natural identidad $1_F : F \to F$ con componentes $1_F c = 1_{Fc}$.

Hay también una composición "horizontal" de transformaciones naturales. Dados funtores y transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\tau \Downarrow"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\tau' \Downarrow"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

La transformación natural $\tau' \circ \tau$ tiene como familia de morfismos a

$$\langle (\tau' \circ \tau)_a : GFa \to G'F'a \rangle$$

Donde $(\tau' \circ \tau)_a = \tau'_{F'a} G\tau_a = G'\tau_a \tau'_{Fa}$. Esta composición es también asociativa. Además tiene identidades. Si $1_\mathcal{C} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es el funtor identidad para la catagoría $\mathcal{C}$ y $1_\mathcal{C} : 1_\mathcal{C} \to 1_\mathcal{C}$ la transformación natural identidad para el mismo funtor, tenemos que $1_\mathcal{C} \circ \tau = \tau$ y $\tau' \circ 1_\mathcal{C} = \tau'$

Lema 1.31. *(Yoneda). Si $K : \mathcal{D} \to Set$ es un funtor y r un objeto de $\mathcal{D}$ (para $\mathcal{D}$ una categoría con hom-sets pequeños), hay una biyección*

$$y : Nat(\mathcal{D}(r, -), K) \cong Kr$$

que manda a cada transformación natural $\alpha : \mathcal{D}(r, -) \to K$ a $\alpha_r 1_r$, la imagen de la identidad.

Definición 1.32. *Un producto fibrado o pullback de*

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

en la categoría $\mathcal{C}$ es un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} b \times_a d \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & d \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

con la siguiente propiedad universal:
si $h : c \to d$, $k : c \to b$ son morfismos que satisfacen $gh = fk$ entonces existe un morfismo único $w : c \to b \times_a d$ tal que $qw = h$ y $pw = k$.

Lema 1.33. *Un producto fibrado de*

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

es único salvo ismorfismo.

Demostración. Consultar [**2**]. □

Definición 1.34. *Sean A y X categorías. Una adjunción entre X y A es una tercia $\langle F, G, \phi \rangle$ donde F y G son funtores*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "F"] & A \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd} ,$$

mientras que ϕ es una función que asigna a cada par de objetos x de X y a de A, una biyección

$$\phi = \phi_{x,a} : A(Fx, a) \cong X(x, Ga)$$

que es natural en x y en a.

Dada una adjunción, se dice que el funtor F es el adjunto izquierdo de G, mientras que G es llamado el adjunto derecho de F y se abrevia $F \dashv G$.

4. 2-categorías

Sea **Cat** la clase de todas las categorías pequeñas. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ objetos de **Cat**, para funtores y transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \quad \tau \Downarrow,\ \sigma \Downarrow$$

hemos definido la composición "vertical"$\sigma.\tau$. Tal composición es asociativa y tiene unidades. Es decir, la colección de funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y las transformaciones naturales entre ellos con la composición vertical como ley de composición es una categoría. Hay también definida una composición de funtores la cual es asociativa y tiene identidades para cada objeto $\mathcal{A}$ de **Cat**. Lo mismo sucede con la composición horizontal de transformaciones naturales. Pero lo que sale a relucir es la relación que existe entre la composición vertical y horizontal de transformaciones naturales que es la siguiente:
Para funtores y transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "F'"] \arrow[r, "G'" description] \arrow[r, bend right=50, "H'"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \quad \tau \Downarrow,\ \sigma \Downarrow,\ \alpha \Downarrow,\ \beta \Downarrow$$

se satisface

$$(\beta \circ \sigma).(\alpha \circ \tau) = (\beta.\alpha) \circ (\sigma.\tau) \ .$$

Todas estas observaciones serán aclaradas a la luz de la definición de 2-categoría, pues en esencia **Cat** es el estereotipo de tal concepto.

DEFINICIÓN 1.35. *Una 2-categoría $\mathfrak{C}$ consta de:*

(i) *Una clase $Ob(\mathfrak{C})$ cuyos elementos $A, B, C, \ldots$ serán llamados "objetos de la 2-categoría $\mathfrak{C}$".*

(ii) *Para cada par de objetos A, B de $\mathfrak{C}$, una categoría $\mathfrak{C}(A, B)$. Los objetos de $\mathfrak{C}(A, B)$ son llamados 1-celdas o 1-morfismos de $\mathfrak{C}$ con dominio A y codominio B; escribiremos $f : A \to B$ para decir que f es un objeto de $\mathfrak{C}(A, B)$. Las flechas de la categoría $\mathfrak{C}(A, B)$ son llamadas 2-celdas ó 2-morfismos de $\mathfrak{C}$; para f y g 1-celdas con el mismo dominio y codominio, escribimos $\alpha : f \Rightarrow g$ para indicar que α es una 2-celda con dominio f y codomio g; composición en $\mathfrak{C}(A, B)$ (i.e. composición vertical de 2-celdas) es denotada por "." (así la composición de $\alpha : f \Rightarrow g$ y $\beta : g \Rightarrow h$ es denotada por $\beta.\alpha$) y la identidad de f es denotada por id_f o simplemente 1_f.*

(iii) *Para cada A de $\mathfrak{C}$, un objeto de $\mathfrak{C}(A, A)$ llamada flecha identidad $1_A : A \to A$.*

(iv) *Para cada triple de objetos A, B, C de $\mathfrak{C}$, un funtor de composición*

$$\circ_{A,B,C} : \mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \to \mathfrak{C}(A, C).$$

Denotamos la composición horizontal de 1-celdas ($\circ$) simplemente por yuxtaposición i.e. $gf = \circ_{A,B,C}(f, g)$, en el caso de composición horizontal de 2-celdas tendremos $\alpha\beta = \circ_{A,B,C}(\alpha, \beta)$. Funtorialidad de $\circ_{A,B,C}$ equivale a:
la composición de 1-celdas

$$f : A \to B, g : B \to C \longmapsto gf : A \to C$$

y las dos composiciones de 1-celdas con 2-celdas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "hg"'] \arrow[r, phantom, "h\alpha\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "hf"'] \arrow[r, phantom, "\beta f\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

donde $h\alpha = \circ_{A,B,C}(\alpha, 1_h), \beta f = \circ_{A,B,C}(1_f, \beta)$ *y en la situación*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd} hf \arrow[r, "h\alpha"] \arrow[d, "\beta f"'] & hg \arrow[d, "\beta g"] \\ if \arrow[r, "i\alpha"'] & ig \end{tikzcd}$$

conmuta en la categoría $\mathfrak{C}(A, C)$. *De hecho tenemos que* $\beta\alpha$*(composición horizontal de 2-celdas) es la diagonal común del diagrama anterior, i.e.*

$$(\beta g)(h\alpha) = (i\alpha)(\beta f).$$

Nos referimos a instancias del diagrama conmutativo como casos de naturalidad interna, o más específicamente, naturalidad de β. *Además en el caso del ejemplo estereotípico de la 2-categoría CAT (el cual daremos más adelante), la conmutatividad del diagrama es consecuencia de la naturalidad de la transformación natural* β.

Dados $f, g, h : A \to B, i, j, k : B \to C;$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] A \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\beta\Downarrow"] & B \arrow[r, bend left=50, "i"] \arrow[r, "j" description] \arrow[r, bend right=50, "k"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\gamma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\delta\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

tenemos

$$i(\beta\alpha) = (i\beta)(i\alpha), \qquad (\delta\gamma)f = (\delta f)(\gamma f);$$

y en la situación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_h"] & C \end{tikzcd}$$

tenemos

$$h1_f = 1_{hf} = 1_h f.$$

(v) *Con* $1_A, 1_B$ *las 1-celdas identidad, y*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

$$f1_A = f, \alpha 1_A = \alpha, 1_B f = f, 1_B \alpha = \alpha$$

(vi) *Para cualesquiera objetos* A, B, C, D *de* $\mathfrak{C}$*, el diagrama de funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,B) \times \mathfrak{C}(B,C) \times \mathfrak{C}(C,D) \arrow[r, "\circ_{A,B,C} \times 1_{\mathfrak{C}(C,D)}"] \arrow[d, "1_{\mathfrak{C}(A,B)} \times \circ_{B,C,D}"'] & \mathfrak{C}(A,C) \times \mathfrak{C}(C,D) \arrow[d, "\circ_{A,C,D}"] \\ \mathfrak{C}(A,B) \times \mathfrak{C}(B,D) \arrow[r, "\circ_{A,B.D}"'] & \mathfrak{C}(A,D) \end{tikzcd}$$

conmuta.
Esta condición es la asociatividad de la composición orizontal y puede ser expresada equivalentemente como sigue: en la situación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \arrow[r, bend left, "j"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & D \end{tikzcd}$$

tenemos

$$j(h\alpha) = (jh)\alpha, j(\beta f) = (j\beta)f, (\gamma h)f = \gamma(hf).$$

Ejemplos de 2-categorías.

EJEMPLO 1.36. *El ejemplo estándar de 2-categoría es* ***CAT****; sus objetos son todas las categorías, 1-celdas todos los funtores, y 2-celdas todas las transformaciones naturales.*
De igual forma tenemos a ***SET*** *la categoría de todos los conjuntos y* ***Cat*** *(sub-2-categoría de categorías pequeñas).*

EJEMPLO 1.37. *El ejemplo trivial de 2-categoría es considerar cualquier categoría como una 2-categoría con solamente 2-celdas identidad.*

EJEMPLO 1.38. *Tomando una 2-categoría fija* $\mathfrak{C}$*, tenemos una 2-categoría End*$\mathfrak{C}$ *: sus objetos son endo-2-funtores* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$*, sus 1-celdas son transformaciones 2-naturales* $\eta : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{H}$ *y sus 2-celdas son modificaciones* $\rho : \eta \to \xi$ *(los términos 2-funtor, transformación 2-natural y modificación serán definidos más adelante).*

EJEMPLO 1.39. *La 2-categoría* ***Ord****, la cual tiene como objetos conjuntos parcialmente ordenados* $(X, \leq)$*, 1-celdas*

$$(X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \leq)$$

son funciones monótonas y 2-celdas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\leq"] & Y \end{tikzcd}$$

$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X(f(x) \leq g(x))$ *son desigualdades puntuales.*

Ejemplo 1.40. *Para una categoría $\mathcal{A}$, la categoría coma $CAT \setminus \mathcal{A}$: un objeto de la cual es una categoría $\mathcal{B}$ junto con un funtor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y una 1-celda de $(\mathcal{B}, F)$ a $(\mathcal{C}, G)$ es un funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "T"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Las 2-celdas $\tau : T \Rightarrow S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, son las transformaciones naturales $\tau : T \Rightarrow S$ para las cuales $G\tau = 1_F$.

Ejemplo 1.41. *A partir de una 2-categoría $\mathfrak{C}$ construimos la 2-categoría $\mathfrak{C}^*_*$. Los objetos de $\mathfrak{C}^*_*$ son los objetos de $\mathfrak{C}$, las 1-celdas de $\mathfrak{C}^*_*$ son 1-celdas $f^* : B \to A$, en correspondencia uno a uno $f : A \to B \mapsto f^*$ con 1-celdas de $\mathfrak{C}$ y las 2-celdas de $\mathfrak{C}^*_*$ son 2-celdas $\sigma^* : g^* \Rightarrow f^*$, en correspondencia uno a uno $\sigma : f \Rightarrow g \mapsto \sigma^*$ con 2-celdas de $\mathfrak{C}$. La composición $f^*g^* = (gf)^*$ está definida en $\mathfrak{C}^*_*$ exactamente cuando la composición gf está definida en $\mathfrak{C}$. La composición horizontal y vertical de 2-celdas se definen de manera semejante. Desde luego, tenemos la 2-categoría $\mathfrak{C}_*$ cuyos objetos y 1-celdas son las de $\mathfrak{C}$, mientras que sus 2-celdas son las 2-celdas de $\mathfrak{C}$ "invertidas". Por último, se tiene la 2-categoría $\mathfrak{C}^*$ cuyos objetos y 2-celdas son las de $\mathfrak{C}$, mientras que sus 1-celdas son las 1-celdas de $\mathfrak{C}$ "invertidas".*

Ejemplo 1.42. *A partir de 2-categorías dadas $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ construimos una nueva 2-categoría $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$, llamada el producto de $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, como sigue. Un objeto de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ es un par (C, D) de objetos C de $\mathfrak{C}$ y D de $\mathfrak{D}$; una 1-celda $(C, D) \to (C', D')$ de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ es un par (f, g) de 1-celdas $f : C \to C'$ y $g : D \to D'$; una 2-celda $(f, g) \to (f', g')$ de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ es un par (σ, τ) de 2-celdas $\sigma : f \Rightarrow f'$ y $\tau : g \Rightarrow g'$. La composición de 1-celdas*

$$(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (C, D) \xrightarrow{(f',g')} (C', D')$$

está definida en términos de la composición en $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ por

$$(f', g')(f, g) = (f'f, g'g) \ ;$$

la composición vertical de 2-celdas

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] (A, B) \arrow[r, bend left, "(f,g)"] \arrow[r, "(f_1,g_1)" description] \arrow[r, bend right, "(f_2,g_2)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "(\sigma,\tau)\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "(\sigma_1,\tau_1)\Downarrow"] & (C, D) \end{tikzcd}$$

está definida en términos de la composición en $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ por

$$(\sigma_1, \tau_1).(\sigma, \tau) = (\sigma_1.\sigma, \tau_1.\tau) \ ;$$

la composición horizontal se define de modo semejante.

Ejemplo 1.43. *La 2-categoría **Cat** consta de:*

(i) *La clase $|\boldsymbol{Cat}|$ de todas las categorías pequeñas.*
(ii) *Para cada par de objetos A, B de **Cat** la categoría $\boldsymbol{Cat}(A, B)$ tiene como 1-celdas a todos los los funtores de A en B, para F, G 1-celdas de $\boldsymbol{Cat}(A, B)$ el conjunto*

$\boldsymbol{Cat}(A,B)(F,G)$ *tiene como elementos a las transformaciones naturales de* F *en* G. *Finalmente, para cada tres objetos* F,G *y* H, *la función composición*

$$\cdot_{F,G,H} : \boldsymbol{Cat}(A,B)(F,G) \times \boldsymbol{Cat}(A,B)(G,H) \longrightarrow \boldsymbol{Cat}(A,B)(F,H)$$

está definida por $\cdot_{F,G,H}(\tau,\beta) = \beta.\tau$ *tal que* $(\beta.\tau)_a = \beta_a\tau_a$.

(iii) *Para cada* A *objeto de* $\boldsymbol{Cat}$, $1_A : A \to A$ *es el funtor identidad.*
(iv) *Para cada tres objetos* A,B *y* C *de* $\boldsymbol{Cat}$ *el funtor composición*

$$\circ_{A,B,C} : \boldsymbol{Cat}(A,B) \times \boldsymbol{Cat}(B,C) \longrightarrow \boldsymbol{Cat}(A,C)$$

se define como

$$\circ_{A,B,C}(F,G) = GF \qquad \circ_{A,B,C}(\tau,\alpha) = \alpha \circ \tau$$

donde $(\alpha \circ \tau)_a = \alpha_{F_1 a} G\tau_a$.
En el caso de la composición de 2-celdas denotamos $\alpha \circ \tau$ *simplemente como* $\alpha\tau$.
(v) *Para* $1_A, 1_B$ *las 1-celdas identidad, y*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & B \end{tikzcd}$$

tenemos

$$F1_A = F, \qquad \tau 1_A = \tau, \qquad 1_B F = F, \qquad 1_B\tau = \tau.$$

(vi) *Para cualesquiera objetos* A,B,C *y* D *objetos de* $\boldsymbol{Cat}$, *el diagrama de funtores*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Cat}(A,B) \times \boldsymbol{Cat}(B,C) \times \boldsymbol{Cat}(C,D) \arrow[r, "\circ_{A,B,C} \times 1_{\boldsymbol{Cat}(C,D)}"] \arrow[d, "1_{\boldsymbol{Cat}(A,B)} \times \circ_{B,C,D}"'] & \boldsymbol{Cat}(A,C) \times \boldsymbol{Cat}(C,D) \arrow[d, "\circ_{A,C,D}"] \\ \boldsymbol{Cat}(A,B) \times \boldsymbol{Cat}(B,D) \arrow[r, "\circ_{A,B.D}"'] & \boldsymbol{Cat}(A,D) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sabemos que un funtor relaciona a dos categorías en el sentido de que asigna objetos a objetos y morfismos a morfismos, además de preservar composiciones e identidades. Para el caso de 2-categorías definimos la idea un poco más elaborada de 2-funtor tomando como modelo a la idea de funtor.

Definición 1.44. *Dadas 2-categorías* $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *un 2-funtor* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *consta de:*

(i) *Una aplicación* $Ob(\mathfrak{C}) \to Ob(\mathfrak{D})$*(también denotada por* $\mathcal{F}$*), escribimos* $\mathcal{F}(A)$ *o sencillamente* $\mathcal{F}A$ *para el objeto asignado a el objeto* A.
(ii) *Para cada par de objetos* A,B *de* $\mathfrak{C}$, *un funtor*

$$\mathcal{F}_{A,B} : \mathfrak{C}(A,B) \to \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$$

Escribimos $\mathcal{F}f$ *para* $\mathcal{F}_{A,B}(f)$*, y* $\mathcal{F}\alpha$ *para* $\mathcal{F}_{A,B}(\alpha)$*; así para*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}A \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}f"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{F}g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathcal{F}\alpha"] & \mathcal{F}B \end{tikzcd}$$

La funtorialidad de $\mathcal{F}_{A,B}$ *es expresada por las identidades*

$$\mathcal{F}(1_f) = 1_{\mathcal{F}f}, \quad \mathcal{F}(\beta\alpha) = \mathcal{F}(\beta)\mathcal{F}(\alpha).$$

(iii) *Para cada objeto* A *de* $\mathfrak{C}$*,* $1_{\mathcal{F}A} = \mathcal{F}(1_A)$*.*
(iv) *Para cada triple de objetos* A, B, C *de* $\mathfrak{C}$*, la siguiente igualdad de funtores*

$$(\circ_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}) \circ (\mathcal{F}_{A,B} \times \mathcal{F}_{B,C}) = (\mathcal{F}_{A,C}) \circ (\circ_{A,B,C}).$$

De manera equivalente tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,B) \times \mathfrak{C}(B,C) \arrow[r, "\circ_{A,B,C}"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{A,B}\times\mathcal{F}_{B,C}"'] & \mathfrak{C}(A,C) \arrow[d, "\mathcal{F}_{A,C}"] \\ \mathfrak{D}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}B) \times \mathfrak{D}(\mathcal{F}B,\mathcal{F}C) \arrow[r, "\circ_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}"'] & \mathfrak{D}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}C) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para $f : A \to B$ *y* $h : B \to C$*, tenemos la igualdad* $\mathcal{F}h\mathcal{F}f = \mathcal{F}(hf)$*. Además en la situación*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd}$$

tenemos las siguientes igualdades

$$\mathcal{F}h\mathcal{F}\alpha = \mathcal{F}(h\alpha) \quad y \quad \mathcal{F}\beta\mathcal{F}f = \mathcal{F}(\beta f).$$

Un 2-funtor de gran utilidad y que utilizaremos frecuentemente en nuestro trabajo tiene la característica de estar construido de una forma muy "natural", en detalle:

Observación 1.45. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una 2-categoría tal que para cada par* A, B*,* $\mathfrak{C}(A,B)$ *es una categoría pequeña, por tanto un objeto de la 2-categoría* ***Cat****. Tenemos para cada objeto* A *de* $\mathfrak{C}$ *el 2-funtor*

$$\mathfrak{C}(A, \ ) : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Cat}$$

que consta de:

(i) *La función objeto* $Ob(\mathfrak{C}) \to Ob(\boldsymbol{Cat})$ *(también denotada por* $\mathfrak{C}(A, \ )$*) dada por:*

$$B \mapsto \mathfrak{C}(A, \ )(B) = \mathfrak{C}(A,B)$$

(ii) *Antes de definir al funtor*

$$\mathfrak{C}(A, \ )_{B,C} : \mathfrak{C}(B,C) \to \boldsymbol{Cat}(\mathfrak{C}(A,B), \mathfrak{C}(A,C))$$

primero hallemos los candidatos

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathfrak{C}(A,B) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(A,\ )(f)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(A,\ )(g)"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{C}(A,\ )(\sigma)\Downarrow"] & \mathfrak{C}(A,C) \end{tikzcd}$$

en $\boldsymbol{Cat}(\mathfrak{C}(A,B),\mathfrak{C}(A,C))$ *que asignara dicho funtor a*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

en $\mathfrak{C}(B,C)$.

Sea $f : B \to C$ *una 1-ceda en* $\mathfrak{C}$*; veamos que*

$$\mathfrak{C}(A,f) : \mathfrak{C}(A,B) \to \mathfrak{C}(A,C)$$

definido como:

$$i : A \to B \mapsto \mathfrak{C}(A,f)(i) = fi$$
$$\alpha : i \Rightarrow j \mapsto \mathfrak{C}(A,f)(\alpha) = f\alpha$$

es un funtor.

Ya que para

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] A \arrow[r, bend left=40, "i"] \arrow[r, "k" description] \arrow[r, bend right=40, "j"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\beta\Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

tenemos

$$\mathfrak{C}(A,f)(\beta.\alpha) = f(\beta.\alpha) = f\beta.f\alpha = \mathfrak{C}(A,f)(\beta).\mathfrak{C}(A,f)(\alpha) \quad ,$$

y dado que para

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "1\Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

se satisface

$$\mathfrak{C}(A,f)1 = f1 = 1_{fi} = 1_{\mathfrak{C}(A,f)i} \ .$$

entonces $\mathfrak{C}(A,f) : \mathfrak{C}(A,B) \to \mathfrak{C}(A,C)$ *es funtor.*

Por otra parte, si

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

es una 2-celda en $\mathfrak{C}$ *obtenemos la aplicación*

$$\mathfrak{C}(A,\sigma) : \mathfrak{C}(A,f) \to \mathfrak{C}(A,g)$$

definida como:

$$h : A \to B \mapsto \mathfrak{C}(A,\sigma)(h) = \sigma h \ \ .$$

Ya que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\alpha \Downarrow"] & B \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\sigma \Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

se ilustra que $g\alpha.\sigma h = \sigma k.f\alpha$, *en consecuencia el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,f)h \arrow[r, "\mathfrak{C}(A,\sigma)h"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,f)\alpha"'] & \mathfrak{C}(A,g)h \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,g)\alpha"] \\ \mathfrak{C}(A,f)k \arrow[r, "\mathfrak{C}(A,\sigma)k"'] & \mathfrak{C}(A,g)k \end{tikzcd}$$

es conmutativo para

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\alpha \Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

en $\mathfrak{C}(A,B)$. *En otras palabras, tenemos que* $\mathfrak{C}(A,\sigma)$ *es una transformación natural.*

Una vez dado nuestro primer paso, para cada par de objetos A, B *de* $\mathfrak{C}$ *tenemos que*

$$\mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C} : \mathfrak{C}(B,C) \to \boldsymbol{Cat}(\mathfrak{C}(A,B),\mathfrak{C}(A,C))$$

definido como:

$$f \mapsto \mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C}(f) = \mathfrak{C}(A,f)$$
$$\sigma \mapsto \mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C}(\sigma) = \mathfrak{C}(A,\sigma)$$

es un funtor. Escribimos $\mathfrak{C}(A,\ \ )(f)$ *para* $\mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C}(f)$, *y* $\mathfrak{C}(A,\ \ )(\sigma)$ *para* $\mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C}(\sigma)$.

Mostremos que tal afirmación es verdadera. Por ser $\mathfrak{C}(A,f)$ *funtor y* $\mathfrak{C}(A,\sigma)$ *transformación natural,* $\mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C}$ *está bien definido.*

Sean

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" near start] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\sigma \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\tau \Downarrow"] & C \end{tikzcd}$$

en $\mathfrak{C}(B,C)$. *Para* $i : A \to B$ *tenemos*

$$\mathfrak{C}(A,\tau.\sigma)i = (\sigma.\tau)i = \tau i.\sigma i = \mathfrak{C}(A,\tau)i.\mathfrak{C}(A,\sigma)i \ \ .$$

Además, para el funtor $\mathfrak{C}(A,f)$ *tenemos que* $1_{\mathfrak{C}(A,f)}(i) = 1_{fi}$; *pero como* $\mathfrak{C}(A,1_f)i = 1_f i = 1_{fi}$ *entonces* $1_{\mathfrak{C}(A,f)} = \mathfrak{C}(A,1_f)$. *Por lo tanto* $\mathfrak{C}(A,\ \ )_{B,C}$ *es funtor.*

(iii) *Sea B un objeto de $\mathfrak{C}$. Así, para*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i"] \arrow[r, bend right, "j"'] \arrow[r, phantom, "\alpha \Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

tenemos que

$$\mathfrak{C}(A, 1_B)h = 1_B h = h \quad y \quad \mathfrak{C}(A, 1_B)\alpha = 1_B\alpha = \alpha \quad .$$

De modo que

$$\mathfrak{C}(A, 1_B) = 1_{\mathfrak{C}(A,B)} \quad .$$

(iv) *Es fácil mostrar que la siguiente igualdad de funtores*

$$\mathfrak{C}(A, \ \ )_{B,D} \circ (\circ_{B,C,D}) = \circ_{\mathfrak{C}(A,B),\mathfrak{C}(A,C),\mathfrak{C}(A,D)} \circ (\mathfrak{C}(A, \ \ )_{B,C} \times \mathfrak{C}(A, \ \ )_{C,D})$$

se cumple.

Por lo tanto $\mathfrak{C}(A, \ \ )$ es 2-funtor.

En el mismo contexto tenemos el 2-funtor contravariante, para cada objeto A de $\mathfrak{C}^*$

$$\mathfrak{C}(\ \ , A) : \mathfrak{C}^* \to \boldsymbol{Cat} \quad .$$

Sea $f^* : B \to C$ la 1-celda en $\mathfrak{C}^*$ correspondeinte a la 1-celda $f : C \to B$ en $\mathfrak{C}$. Es sencillo verificar que la aplicación

$$\mathfrak{C}(f^*, A) : \mathfrak{C}(B, A) \to \mathfrak{C}(C, A)$$

dada por

$$i \mapsto \mathfrak{C}(f^*, A)(i) = if \quad y \quad \alpha \mapsto \mathfrak{C}(f^*, A)(\alpha) = \alpha f$$

es un funtor.

Mediante una rápida inspección se observa también que para cualquier 2-celda $\sigma : f^* \Rightarrow g^*$ la aplicación

$$\mathfrak{C}(\sigma, A) : \mathfrak{C}(f^*, A) \Rightarrow \mathfrak{C}(g^*, A)$$

tal que

$$h \mapsto \mathfrak{C}(\sigma, A)(h) = h\sigma$$

es una transformación natural.

En pocas palabras, el 2-funtor $\mathfrak{C}(\ \ , A) : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Cat}$ está definido como:

$$\begin{aligned} B &\mapsto \mathfrak{C}(\ \ , A)(B) = \mathfrak{C}(B, A) \\ f^* &\mapsto \mathfrak{C}(\ \ , A)(f^*) = \mathfrak{C}(f^*, A) \\ \sigma^* &\mapsto \mathfrak{C}(\ \ , A)(\sigma) = \mathfrak{C}(\sigma, A) \quad . \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.46. *Dados 2-funtores $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{D}'$ construimos un nuevo 2-funtor $\mathcal{F} \times \mathcal{G} : \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}' \times \mathfrak{D}'$ definido explícitamente sobre objetos, 1-celdas y 2-celdas como:*

$$\begin{aligned} (C, D) &\mapsto (\mathcal{F} \times \mathcal{G})(C, D) = (\mathcal{F}C, \mathcal{G}D) \\ (f, g) &\mapsto (\mathcal{F} \times \mathcal{G})(f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{G}g) \\ (\sigma, \tau) &\mapsto (\mathcal{F} \times \mathcal{G})(\sigma, \tau) = (\mathcal{F}\sigma, \mathcal{G}\tau) \quad . \end{aligned}$$

Dados 2-funtores $\mathcal{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, la composición de aplicaciones $\mathcal{GF} : Ob(\mathfrak{A}) \to Ob(\mathfrak{D})$ y para cada par de objetos A, B la composición de funtores $\mathcal{G}_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B}\mathcal{F}_{A,B}$ $\mathfrak{A}(A,B) \to \mathfrak{D}(\mathcal{GF}A, \mathcal{GF}B)$ define un 2-funtor $\mathcal{G} \triangleleft \mathcal{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ (o sencillamente $\mathcal{GF}$) llamado la composición de $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$. Esta composición resulta ser asociativa. El 2-funtor identidad $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, donde cada 1-celda de la definición es una identidad, así mismo para cada 2-celdas, funciona como la identidad para la composición de 2-funtores.

La tónica de nuestro trabajo continúa siendo "generalizar" conceptos categóricos a 2-categorías. Toca turno a las transformaciones 2-naturales.

Definición 1.47. *Dadas 2-categorías $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ y 2-funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, una transformación 2-natural $\phi : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ consta de:*

(i) *Una familia $\langle \phi_A \rangle_{A \in Ob(\mathfrak{C})}$ de 1-celdas $\phi_A : \mathcal{F}A \to \mathcal{G}A$.*

(ii) *Para cada 1-celda $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$, tenemos que $\mathcal{G}f\phi_A = \phi_B\mathcal{F}f$, es decir naturalidad en el sentido ordinario*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\phi_B"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

(iii) *Siempre que*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\tau \Downarrow"] & B
\end{tikzcd}$$

esté en $\mathfrak{C}$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}f"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{F}g"'] \arrow[r, phantom, "\mathcal{F}\alpha \Downarrow"] & \mathcal{F}B \arrow[r, "\phi_B"] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\phi_A"] & \mathcal{G}A \arrow[r, bend left, "\mathcal{G}f"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}g"'] \arrow[r, phantom, "\mathcal{G}\alpha \Downarrow"] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

esto lo podemos visualizar en la siguiente igualdad de diagramas en $\mathfrak{D}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, bend right, "\mathcal{F}g"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}f"] \arrow[d, phantom, "\mathcal{F}\alpha \Leftarrow"] & \mathcal{G}A \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\phi_B"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"] & \mathcal{G}A \arrow[d, bend right, "\mathcal{G}g"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{G}f"] \arrow[d, phantom, "\mathcal{G}\alpha \Leftarrow"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\phi_B"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

y nos referimos a esta propiedad como 2-naturalidad.

Observación 1.48. *Ahora consideramos transformaciones 2-naturales entre 2-funtores $\mathcal{H}, \mathcal{H}' : \mathfrak{A} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$. Sea γ una aplicación que asigna a cada par de objetos A de $\mathfrak{A}$, C de $\mathfrak{C}$ una 1-celda*

$$\gamma(A,C) : H(A,C) \to H'(A,C)$$

en $\mathfrak{D}$. Decimos que γ es 2-natural en A si para cada C de $\mathfrak{C}$ las componentes $\gamma(A, C)$ para toda A definen una transformación 2-natural

$$\gamma(\ \ , C) : H(\ \ , C) \Rightarrow H'(\ \ , C)$$

entre los 2-funtores $\mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$. Es realmente sencillo verificar la validez del siguiente "enunciado":

Para los 2-funtores $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$, la aplicación γ (descrita en el párrafo anterior) es una transformación 2-natural si y sólo si $\gamma(A, C)$ es 2-natural en A para cada C de $\mathfrak{C}$ y es 2-natural en C para cada A de $\mathfrak{A}$.

Describimos a grandes rasgos la composición horizontal y vertical de transformaciones 2-naturales y como estas satisfacen la propiedad asociativa y poseen identidades.

Dadas 2-categorías $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y 2-funtores $\mathcal{F},\ \mathcal{G},\ \mathcal{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$. Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son 2-transformaciones naturales i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "\phi \Downarrow \mathcal{G}" description] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{H}"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\psi \Downarrow"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

La familia de 1-celdas

$$\langle (\psi \centerdot \phi)_C : \mathcal{F}C \to \mathcal{H}C \rangle$$

donde $(\psi \centerdot \phi)_C = \psi_C . \phi_C$, son la familia de 1-celdas de la 2-transformación natural $\psi \centerdot \phi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$. Llamamos a $\psi \centerdot \phi$ la "composición vertical" de ϕ con ψ. Esta composición "vertical" de 2-transformaciones naturales es asociativa; además cada 2-funtor $\mathcal{F}$ tiene una 2-transformación natural identidad $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ con componentes $1_{\mathcal{F}}C = 1_{\mathcal{F}C}$.

Hay también una composición "horizontal" de transformaciones 2-naturales. Dados 2-funtores y transformaciones 2-naturales

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{F}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{F}'"'] \arrow[r, phantom, "\phi \Downarrow"] & \mathfrak{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{G}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{G}'"'] \arrow[r, phantom, "\gamma \Downarrow"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

La 2-transformación natural $\gamma \triangleleft \phi$ tiene como familia de 1-celdas a

$$\langle (\gamma \triangleleft \phi)_A : \mathcal{G}\mathcal{F}A \to \mathcal{G}'\mathcal{F}'A \rangle$$

Donde $(\gamma \triangleleft \phi)_A = \gamma_{\mathcal{F}'A} \mathcal{G}\phi_A = \mathcal{G}'\phi_A \gamma_{\mathcal{F}a}$. Esta composición es también asociativa. Además tiene identidades. Si $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ es el 2-funtor identidad para la 2-catagoría $\mathfrak{C}$ y $1_{1_{\mathfrak{C}}} : 1_{\mathfrak{C}} \to 1_{\mathfrak{C}}$ la 2-transformación natural identidad para el mismo 2-funtor, tenemos que $1_{1_{\mathfrak{C}}} \triangleleft \phi = \phi$ y $\gamma \triangleleft 1_{1_{\mathfrak{C}}} = \gamma$. En particular la composición horizontal

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{F}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{F}"'] \arrow[r, phantom, "1_{\mathcal{F}} \Downarrow"] & \mathfrak{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{G}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{G}'"'] \arrow[r, phantom, "\gamma \Downarrow"] & \mathfrak{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{H}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{H}"'] \arrow[r, phantom, "1_{\mathcal{H}} \Downarrow"] & \mathfrak{E} \end{tikzcd}$$

es también escrita como

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathfrak{C} \arrow[r, bend left, "\mathcal{G}"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}'"'] \arrow[r, phantom, "\gamma \Downarrow"] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathcal{H}"] & \mathfrak{E}
\end{tikzcd}
$$

y denotada por $\mathcal{H}\gamma\mathcal{F}$.

Tenemos el símil de isomorfismo natural de funtores para 2-funtores.

Definición 1.49. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 2-funtores. Diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son 2-naturalmente equivalentes o 2-naturalmente isomorfos si existen transformaciones 2-naturales*

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "\mathcal{G}" description] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{F}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\phi \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\phi' \Downarrow"] & \mathfrak{D}
\end{tikzcd}
$$

tales que

$$\phi' \centerdot \phi = 1 \;\; y \;\; \phi \centerdot \phi' = 1$$

Al trabajar con transformaciones 2-naturales la idea de modificación nos será de gran utilidad. Definimos lo que es una modificación y describimos detalladamente la composición vertical de modificaciones, observando que para definir la composición horizontal de modificaciones el tratamiento es muy semejante.

Definición 1.50. *Dadas 2-categorías $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$, 2-funtores $\mathcal{L}, \mathcal{M} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, y transformaciones 2-naturales $\phi, \psi : L \Rightarrow M$, una modificación $\upsilon : \phi \to \psi$ consta de:*

(i) *Una familia $\langle \upsilon_A \rangle_{A \in Ob(\mathfrak{K})}$ de 2-celdas $\upsilon_A : \phi_A \Rightarrow \psi_A$ tal que:*
(ii) *para cualquier 1-celda $f : A \to B$ en $\mathfrak{K}$ tenemos*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}A \arrow[r, bend left, "\phi_A"] \arrow[r, bend right, "\psi_A"'] \arrow[r, phantom, "\upsilon_A \Downarrow"] & \mathcal{M}A \arrow[r, "\mathcal{M}f"] & \mathcal{M}B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}A \arrow[r, "\mathcal{L}f"] & \mathcal{L}B \arrow[r, bend left, "\phi_B"] \arrow[r, bend right, "\psi_B"'] \arrow[r, phantom, "\upsilon_B \Downarrow"] & \mathcal{M}B
\end{tikzcd}
$$

Dadas modificaciones

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, bend left=50, "\sigma"] \arrow[r, "\tau" description] \arrow[r, bend right=50, "\alpha"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\nu \downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\rho \downarrow"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}
$$

La familia de 2-celdas

$$\langle (\rho.\nu)_A : \sigma_A \to \alpha_A \rangle$$

donde $(\rho.\nu)_C = \rho_A.\nu_A$, son la familia de 2-celdas de la modificación $\rho.\nu : \sigma \to \alpha$. Llamamos a $\rho.\nu$ la “composición vertical” de ν con ρ.

Puesto que para cualquier 1-celda $f : A \to B$ tenemos

$$(\rho_B.\nu_B)\mathcal{F}f = (\rho_B\mathcal{F}f).(\nu_B\mathcal{F}f) = (\mathcal{G}f\rho_A).(\mathcal{G}f\nu_A) = \mathcal{G}f(\rho_A.\nu_A) \;\; ,$$

entonces $\rho.\nu$ es una modificación.

Sean

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{F} \arrow[r, bend left=60, "\sigma"] \arrow[r, bend left=20, "\tau"'] \arrow[r, bend right=20, "\alpha"] \arrow[r, bend right=60, "\beta"'] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\nu\downarrow"] \arrow[r, phantom, "\rho\downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=5, "\delta\downarrow"] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

modificaciones. Por ser asociativa la composición vertical de 2-celdas en $\mathfrak{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$ hallamos que:

$$(\delta.(\rho.\nu))_A = \delta_A.(\rho_A.\nu_A) = (\delta_A.\rho_A).\nu_A = ((\delta.\rho).\nu)_A \ .$$

Esto significa que la composición vertical de modificaciones es asociativa.

Sea

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathfrak{C} \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

una transformación 2-natural. La familia de 2-celdas

$$\langle 1_{\alpha_A} : \alpha_A \Rightarrow \alpha_A \rangle$$

son las componentes de la modificación $1_\alpha : \alpha \to \alpha$. En primera instancia, para $f : A \to B$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}A \arrow[r, bend left, "\alpha_A"] \arrow[r, bend right, "\alpha_A"'] \arrow[r, phantom, "1_{\alpha_A}\Downarrow"] & \mathcal{G}A \arrow[r, "\mathcal{G}f"] & \mathcal{G}B \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{F}A \arrow[r, "\mathcal{F}f"] & \mathcal{F}B \arrow[r, bend left, "\alpha_B"] \arrow[r, bend right, "\alpha_B"'] \arrow[r, phantom, "1_{\alpha_B}\Downarrow"] & \mathcal{G}B \end{tikzcd}$$

pues por ser α 2-natural, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}A \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\ \mathcal{F}B \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathcal{G}B \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Agregar que en la situación

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{F} \arrow[r, bend left=60, "\sigma"] \arrow[r, bend left=20, "\alpha"'] \arrow[r, bend right=20, "\alpha"] \arrow[r, bend right=60, "\tau"'] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\nu\downarrow"] \arrow[r, phantom, "1_\alpha\downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=5, "\rho\downarrow"] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

tenemos

$$(1_\alpha.\nu)_A = 1_{\alpha_A}.\nu_A = \nu_A$$

por lo que $1_\alpha.\nu = \nu$. Obviamente también $\rho, 1_\alpha = \rho$. En resumen, la composición vertical de modificaciones es asociativa y tiene identidades.

Sea $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to$ un 2-funtor. Establecemos en el próximo lema la relación que hay entre la categoría 2-Nat($\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}$) (las transformaciones 2-naturales son objetos y las modificaciones son morfismos) y la categoría $\mathcal{H}A$; para lo cual, aclaramos que 2-Nat($\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}$) es una categoría y después exponemos el lema con su demostración.

La categoría 2-Nat($\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}$) tiene como objetos a las transformaciones 2-naturales de $\mathfrak{C}(A,\ \ )$ en $\mathcal{H}$; el conjunto de morfismos 2-Nat(σ, τ) consta de las modificaciones de σ en τ.

Para cada tres objetos σ, τ, α de 2-Nat($\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}$) la ley de composición

$$2 - Nat(\sigma, \tau) \times 2 - Nat(\tau, \alpha) \xrightarrow{\quad\circ\quad} 2 - Nat(\sigma, \tau)$$

está dada por

$$(\nu, \rho) \mapsto \circ(\nu, \rho) = \rho.\nu \ \ .$$

Hemos visto ya que tal composición es asociativa y tiene unidades para todo objeto α de 2-Nat($\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}$). Por lo que 2-Nat($\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}$) es una categoría.

Lema 1.51. *(Yoneda para 2-categorías). Si $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to$ **Cat** es un 2-funtor y A es un objeto de $\mathfrak{C}$ (la 2-categoría $\mathfrak{C}$ es tal que para cada par de objetos B, D, $\mathfrak{C}(B, D)$ es una categoría pequeã), entonces hay un isomorfismo de categorías*

$$Y : 2 - Nat(\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}) \cong \mathcal{H}A \ \ .$$

Demostración. Construimos el funtor Y.

En la 2-categoría $\mathfrak{C}$, sean las transformaciones 2-naturales y la modificación

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,\ \ ) \arrow[r, bend left, "\sigma"] \arrow[r, bend right, "\tau"'] \arrow[r, phantom, "\nu \downarrow"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

Sabemos que

$$\langle \sigma_c \rangle \quad y \quad \langle \nu_c \rangle$$

para todo objeto C de $\mathfrak{C}$, son familias de 1-celdas y 2-celdas respectivamente en **Cat**, esto implica que para cada C objeto de $\mathfrak{C}$

$$\sigma_c \quad y \quad \nu_c$$

son funtores y transformaciones naturales respectivamente. Para el funtor y la transformación natural

$$\begin{tikzcd} (A, C) \arrow[r, bend left, "\sigma_c"] \arrow[r, bend right, "\tau_c"'] \arrow[r, phantom, "\nu_c \Downarrow"] & \mathcal{H}C \end{tikzcd}$$

en **Cat**, escribimos $\sigma_{c,h}$ para $(\sigma_c)(h)$ y $\nu_{c,h}$ para $(\nu_c)(h)$.

La aplicación $Y : 2 - Nat(\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H}) \to \mathcal{H}A$ definida por

$$\sigma \mapsto Y(\sigma) = \sigma_{A,1_A}$$
$$\nu \mapsto Y(\nu) = \nu_{A,1_A}$$

respeta composión e identidades puesto que

$$Y(\rho.\nu) = (\rho.\nu)_A(1_A) = \rho_A(1_A).\nu_A(1_A) = Y(\rho).Y(\nu) \ \ ;$$

y como σ_A es funtor entonces $1_{(\sigma_A)}$ es la transformación natural identidad de tal funtor, por lo que

$$Y(1_\sigma) = (1_\sigma)_{A,1_A} = (1_\sigma)_A(1_A) = 1_{\sigma_A(1)} = 1_{Y(\sigma)} \ .$$

Así Y es funtor.

Veamos ahora que a partir de un objeto x y un morfismo $i : x \to y$ en la categoría $\mathcal{H}A$ podemos obtener una transformación 2-natural $\sigma_x : \mathfrak{C}(A, \ ) \Rightarrow \mathcal{H}$ y una modificación $\nu_i : \sigma_x \to \sigma_y$; lo que nos permitira construir un funtor $Y' : \mathcal{H} \to 2 - Nat(\mathfrak{C}(A, \ ), \mathcal{H})$ tal que $YY' = 1$ y $Y'Y = 1$.

Sea x un objeto de $\mathcal{H}A$. La aplicación $\sigma_{x,B} = (\sigma_x)_B : \mathfrak{C}(A, B) \to \mathcal{H}B$ dada por

$$h \mapsto \sigma_{x,B}(h) = (\mathcal{H}h)(x)$$
$$\beta \mapsto \sigma_{x,B}(\beta) = (\mathcal{H}\beta)(x)$$

donde $\sigma_{x,A}(1_A) = x$, es un funtor puesto que por ser $\mathcal{H}$ 2-funtor para

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=40, "h"] \arrow[r, "k" description] \arrow[r, bend right=40, "h'"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\beta \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\gamma \Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

se sigue que

$$\sigma_{x,B}(\gamma.\beta) = (\mathcal{H}[\gamma.\beta])(x) = (\mathcal{H}\gamma.\mathcal{H}\beta)(x) = \mathcal{H}\gamma(x)\mathcal{H}\beta(x) = \sigma_{x,B}(\gamma).\sigma_{x,B}(\beta)$$

y como $\mathcal{H}(1_h) = 1_{\mathcal{H}h}$ es la transformación natural identidad

$$\sigma_{x,B}(1_h) = (\mathcal{H}1_h)(x) = (1_{\mathcal{H}h})(x) = 1_{(\mathcal{H}h)(x)} = 1_{\sigma_{x,B}(h)} \ .$$

Al considerar a la familia de 1-celdas

$$\langle \sigma_{x,B} \rangle$$

para toda B en $\mathfrak{C}$ y que según

$$(\mathcal{H}f\sigma_{x,B})(h) = \mathcal{H}f([\mathcal{H}h](x)) = (\mathcal{H}fh)(x) = \sigma_{x,c}(fh) = (\sigma_{x,c}\mathfrak{C}(A, f))(h)$$
$$(\mathcal{H}\sigma\sigma_{x,B})(h) = \mathcal{H}\sigma([\mathcal{H}h](x)) = \mathcal{H}\sigma_{(\mathcal{H}h)x} = (\mathcal{H}[\sigma h])(h) = (\sigma_{x,c}\mathfrak{C}(A, \sigma))(h)$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] \mathfrak{C}(A,B) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(A,f)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(A,g)"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{C}(A,\sigma) \Downarrow"] \arrow[d, "\sigma_{x,B}"] & \mathfrak{C}(A,C) \arrow[d, "\sigma_{x,c}"] \\ \mathcal{H}B \arrow[r, bend left, "\mathcal{H}f"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{H}g"'] \arrow[r, phantom, "\mathcal{H}\sigma \Downarrow"] & \mathcal{H}C \end{tikzcd}$$

es conmutativo, concluimos que $\sigma_x : \mathfrak{C}(A, \ ) \Rightarrow \mathcal{H}$ es transformación 2-natural.

Por otra parte. Sea $i : x \to y$ en $\mathcal{H}A$, la aplicación $\nu_{i,B} : \sigma_{x,B} \to \sigma_{y,B}$ para B objeto de $\mathfrak{C}$ definida como

$$h \mapsto \nu_{i,B}(h) = (\mathcal{H}h)(i) = (\mathcal{H}h)(\nu_{i,A}(1_A))$$

nos da una transformación natural. Tenemos que por ser $\mathcal{H}$ 2-funtor el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{H}h)(x) \arrow[r, "(\mathcal{H}h)(i)"] \arrow[d, "(\mathcal{H}\beta)(x)"'] & (\mathcal{H}h)(y) \arrow[d, "(\mathcal{H}\beta)(y)"] \\
(\mathcal{H}h')(x) \arrow[r, "(\mathcal{H}h')(i)"'] & (\mathcal{H}h')(y)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En otras palabras

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{x,B}(h) \arrow[r, "\nu_{i,B}(h)"] \arrow[d, "\sigma_{x,B}(\beta)"'] & \sigma_{y,B}(h) \arrow[d, "\sigma_{y,B}(\beta)"] \\
\sigma_{x,B}(h') \arrow[r, "\nu_{i,B}(h')"'] & \sigma_{y,B}(h')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien, sean la familia de 2-celdas

$$\langle \nu_{i,B} \rangle$$

para todo objeto B de $\mathfrak{C}$ y $f : B \to C$ una 1-celda en $\mathfrak{C}$; ya que

$$(\mathcal{H}f\nu_{i,B})(h) = \mathcal{H}f([\mathcal{H}h](i)) = (\mathcal{H}f\mathcal{H}h)(i) = (\mathcal{H}[fh])(h) = \nu_{i,c}(fh) = (\nu_{i,c}\mathfrak{C}(A, f))(h)$$

se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(A,B) \arrow[r, bend left, "\sigma_{x,B}"] \arrow[r, bend right, "\sigma_{y,B}"'] \arrow[r, phantom, "\nu_{i,B} \Downarrow"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,f)"'] & \mathcal{H}B \arrow[d, "\mathcal{H}f"] \\
\mathfrak{C}(A,C) \arrow[r, bend left, "\sigma_{x,c}"] \arrow[r, bend right, "\sigma_{y,c}"'] \arrow[r, phantom, "\nu_{i,c} \Downarrow"] & \mathcal{H}C
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo que $\nu_i : \sigma_x \to \sigma_y$ es una modificación.

No existe dificultad alguna para mostrar que $Y' : \mathcal{H} \to 2 - Nat(\mathfrak{C}(A,\ \ ), \mathcal{H})$ definida como

$$x \mapsto Y'(x) = \sigma_x \ \ y \ \ i : x \to y \mapsto Y'(i) = \nu_i$$

es un funtor.

Sean

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(A,\ \ ) \arrow[r, bend left, "\tau"] \arrow[r, bend right, "\sigma"'] \arrow[r, phantom, "\nu \downarrow"] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

τ, σ transformaciones 2-natural y ν una modificación. Para

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,A) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(A,h)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(A,h')"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{C}(A,\beta)\Downarrow"] \arrow[d, "\tau_A"] & \mathfrak{C}(A,B) \arrow[d, "\tau_B"] \\ \mathcal{H}A \arrow[r, bend left, "\mathcal{H}h"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{H}h'"'] \arrow[r, phantom, "\mathcal{H}\beta\Downarrow"] & \mathcal{H}B \end{tikzcd}$$

conmuta. i.e.

$$\tau_B(h) = (\mathcal{H}h)(\tau_A(1_A))$$
$$\tau_B(\beta) = (\mathcal{H}\beta)(\tau_A(1_A)) \ .$$

Finalmente, por ser ν una modificación el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,A) \arrow[r, bend left, "\tau_A"] \arrow[r, bend right, "\sigma_A"'] \arrow[r, phantom, "\nu_A\Downarrow"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,h)"'] & \mathcal{H}A \arrow[d, "\mathcal{H}h"] \\ \mathfrak{C}(A,B) \arrow[r, bend left, "\tau_B"] \arrow[r, bend right, "\sigma_B"'] \arrow[r, phantom, "\nu_B\Downarrow"] & \mathcal{H}B \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego

$$\nu_B(h) = (\mathcal{H}h)(\nu_A(1_A)) \ .$$

Sea σ en 2-Nat$(\mathfrak{C}(A,\ \ ),\mathcal{H})$. La transformación 2-natural

$$Y'Y(\sigma) = Y'(\sigma_A(1_A)) : \mathfrak{C}(A,\ \ ) \to \mathcal{H}$$

es tal que para cada B en $\mathfrak{C}$ el funtor

$$\sigma_{z,B} : \mathfrak{C}(a,B) \to \mathcal{H}B$$

hacemos $\sigma_A(1_A) = z$, está definido como

$$\sigma_{z,B}(h) = (\mathcal{H}h)(z) = (\mathcal{H}h)\sigma_A(1_A) = \sigma_B(h)$$
$$\sigma_{z,B}(\beta) = (\mathcal{H}h)(z) = (\mathcal{H}\beta)\sigma_A(1_A) = \sigma_B(\beta) \ .$$

Mientras que para

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,\ \ ) \arrow[r, bend left, "\sigma"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\nu\downarrow"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

la modificación $Y'Y(\nu) = Y'(\nu_{A,1_A}) = Y'(i)$ (hacemos $i = \nu_{A,1_A}$) es tal que para cada objeto B de $\mathfrak{C}$ la transfomación natural

$$\nu_{i,B} : \sigma_{z,B} \longrightarrow \tau_{z',B}$$

está definida como

$$\nu_{i,B}(h) = (\mathcal{H}h)(\nu_{A,1_A}) = (\mathcal{H}h)(\nu_A(1_A)) = \nu_B(h) \ \ .$$

Por lo que $Y'Y(\sigma) = \sigma$ y $Y'Y(\nu) = \nu$. Por lo tanto $Y'Y = 1$. La demostración de que $YY' = 1$ es parecida.

$\square$

Por supuesto, para el 2-funtor $\mathfrak{C}(\ \ , A) : \mathfrak{C}^* \to \mathbf{Cat}$ en el mismo espíritu que 1.51 , también establecemos el siguiente lema cuya demostración es sustancialmente parecida.

LEMA 1.52. *(Dual de Yoneda para 2-categorías). Si $\mathcal{H} : \mathfrak{C}^* \to \boldsymbol{Cat}$ es un 2-funtor y A es un objeto de $\mathfrak{C}^*$ (la 2-categoría $\mathfrak{C}^*$ es tal que para cada par de objetos B, D, $\mathfrak{C}^*(B, D)$ es una categoría pequeña), entonces hay un isomorfismo de categorías*

$$Y : 2 - Nat(\mathfrak{C}(\ \ , A), \mathcal{H}) \cong \mathcal{H}A \ \ .$$

En los siguientes capítulos nuestra constante es la idea de 2-adjución. Damos su definición y en el próximo lema establecemos una manera equivalente de difinirla, ésta involucra la existencia de dos trasformaciones 2-naturales que satisfacen ciertas igualdades triangulares.

DEFINICIÓN 1.53. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ 2-categorías. Una 2-adjunción de $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{D}$ es una tercia $\langle \mathcal{F}, \mathcal{U}, \Theta \rangle$, donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{U}$ son 2-funtores*

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathfrak{D} \xrightarrow{\mathcal{U}} \mathfrak{C} \ \ ;$$

mientras Θ es una aplicación que asigna a cada par de objetos A de $\mathfrak{C}$, B de $\mathfrak{D}$ un isomorfismo de categorías

$$\mathfrak{D}(\mathcal{F}A, B) \cong \mathfrak{C}(A, \mathcal{U}B)$$

que es 2-natural en A y en B.

Tanto $\mathfrak{D}(\mathcal{F},\ \ )$ como $\mathfrak{C}(\ \ , \mathcal{U})$ son 2-funtores por ser la composición de 2-funtores. Aquí los detalles:

Por $(\mathcal{F}f)^*$ entendemos la 1-celda en $\mathfrak{D}^*$ correspondiente a la la 1-celda $\mathcal{F}f$ en $\mathfrak{D}$. El 2-funtor $(\mathcal{F} \times 1) : \mathfrak{C}^* \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^* \times \mathfrak{D}$ es tal que:

$$\begin{aligned} (A, B) &\mapsto (\mathcal{F} \times 1)(A, B) = (\mathcal{F}A, B) \\ (f, g) &\mapsto (\mathcal{F} \times 1)(f, g) = ((\mathcal{F}f)^*, g) \\ (\sigma, \tau) &\mapsto (\mathcal{F} \times 1)(\sigma, \tau) = (\mathcal{F}\sigma, \tau) \ \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, sean

$$\begin{tikzcd} (A,B) \arrow[r, bend left, "{(f,g)}"] \arrow[r, bend right, "{(f',g')}"'] \arrow[r, phantom, "{(\sigma,\tau)\Downarrow}"] & (A',B') \end{tikzcd}$$

en $\mathfrak{D}^* \times \mathfrak{D}$; tenemos al funtor

$$\mathfrak{D}(A',g)\mathfrak{D}(f,B) : \mathfrak{D}(A,B) \to \mathfrak{D}(A',B') \ \ ;$$

y a la transformación natural

$$\mathfrak{D}(\sigma,\tau) : \mathfrak{D}(A',g)\mathfrak{D}(f,B) \to \mathfrak{D}(A',g')\mathfrak{D}(f',B)$$

tal que:

$$h \mapsto \mathfrak{D}(\sigma,\tau)(h) = \tau h \sigma \ \ .$$

Así, el 2-funtor $Hom : \mathfrak{D}^* \times \mathfrak{D} \to \mathbf{Cat}$ está definido como:

$$\begin{aligned} (A,B) &\mapsto Hom(A,B) = \mathfrak{D}(A,B) \\ (f,g) &\mapsto Hom(f,g) = \mathfrak{D}(A',g)\mathfrak{D}(f,B) \\ (\sigma,\tau) &\mapsto Hom(\sigma,\tau) = \mathfrak{D}(\sigma,\tau) \ \ . \end{aligned}$$

Luego, el 2-funtor $\mathfrak{D}(\mathcal{F},\ \ )$ es la composición de los 2-funtores

$$\mathfrak{C}^* \times \mathfrak{D} \xrightarrow{\mathcal{F}\times 1} \mathfrak{D}^* \times \mathfrak{D} \xrightarrow{Hom} \mathbf{Cat}$$

que asigna a cada par de objetos (A,B) la categoría $\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,B)$.

El 2-funtor $\mathfrak{C}(\ \ ,\mathcal{U})$ es una composición semejante de 2-funtores.

Dada una 2-adjunción, decimos el 2-funtor $\mathcal{F}$ es el 2-adjunto izquierdo de $\mathcal{U}$, mientras que $\mathcal{U}$ es el 2-adjunto derecho de $\mathcal{F}$; esto lo denotamos como $\mathcal{F} \dashv \mathcal{U}$.

En realidad una 2-adjunción está determinada por la existencia de dos transfomaciones 2-naturales que satisfacen ciertas identidades "triangulares". Establecemos esto en el siguiente:

Teorema 1.54. *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ 2-categorías y $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ 2-funtores*

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathfrak{D} \xrightarrow{\mathcal{U}} \mathfrak{C} \ \ ;$$

$\mathcal{F}$ es el 2-adjunto izquierdo de $\mathcal{U}$ si y sólo si existen transformaciones 2-naturales

$$\eta : 1 \Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{F} \ \ y \ \ \epsilon : \mathcal{F}\mathcal{U} \Rightarrow 1 \tag{1}$$

que satisfacen las ecuaciones:

$$\epsilon\mathcal{F} \centerdot \mathcal{F}\eta = 1_{\mathcal{F}} \qquad y \qquad \mathcal{U}\epsilon \centerdot \eta\mathcal{U} = 1_{\mathcal{U}}.$$

Es decir, las siguientes ecuaciones

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[rr, "1_{\mathfrak{C}}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\eta\Downarrow"] & & \mathfrak{C} \arrow[dr, "\mathcal{F}"] & \\ & \mathfrak{D} \arrow[ur, "\mathcal{U}"] \arrow[rr, "1_{\mathfrak{D}}"'] \arrow[urr, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & & \mathfrak{D} \end{tikzcd} \quad = \quad 1_{\mathcal{F}}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} \arrow[rr, "1_{\mathfrak{C}}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] \arrow[d, phantom, "\epsilon \Downarrow"] & \arrow[d, phantom, "\eta \Downarrow"] & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{D} \arrow[ur, "\mathcal{U}"] \arrow[rr, "1_{\mathfrak{D}}"'] & & \mathfrak{D} \arrow[ur, "\mathcal{U}"'] & \end{tikzcd} \quad = \quad 1_{\mathcal{U}}$$

se cumplen.

Demostración. Sea $\eta : 1 \to \mathcal{U}\mathcal{F}$ definida como:

$$A \mapsto \eta_A = \Theta_A(1_A) : A \Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{F}A \ .$$

Las composiciones

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}A) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}f)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}g)"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}\sigma) \Downarrow"] \arrow[d, "\Theta"] & \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}A') \arrow[d, "\Theta"] \\ \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}A) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}f)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}g)"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}\sigma) \Downarrow"] & \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}A') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathfrak{D}(\mathcal{F}A', \mathcal{F}A') \arrow[r, bend left, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}f,\mathcal{F}A')"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}g,\mathcal{F}A')"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}\sigma, \mathcal{F}A') \Downarrow"] \arrow[d, "\Theta"] & \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}A') \arrow[d, "\Theta"] \\ \mathfrak{C}(A',\mathcal{U}\mathcal{F}A') \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(f,\mathcal{U}\mathcal{F}A')"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(f,\mathcal{U}\mathcal{F}A')"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{C}(\sigma,\mathcal{U}\mathcal{F}A') \Downarrow"] & \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}A') \end{tikzcd}$$

son iguales por la 2-naturalidad de Θ, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\mathcal{F}f\eta_A &= \Theta(\mathcal{F}f1_{\mathcal{F}A}) = \Theta(1_{\mathcal{F}A'}\mathcal{F}f) = \eta_{A'}f \\ \mathcal{U}\mathcal{F}\sigma\eta_A &= \Theta(\mathcal{F}\sigma1_{\mathcal{F}A}) = \Theta(1_{\mathcal{F}A'}\mathcal{F}\sigma) = \eta_{A'}\sigma \end{aligned}$$

por lo que η es 2-natural.

La biyección Θ puede expresarse en términos de η como:

$$\begin{gathered} f : \mathcal{F}A \to B \mapsto \Theta(f) = \mathcal{U}(f)\eta_A \\ \sigma : f \Rightarrow g \mapsto \Theta(\sigma) = \mathcal{U}(\sigma)\eta_A \end{gathered} \tag{2}$$

esto puede observarse al elegir 1 en el cuadrado conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}A) \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,f)"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,g)"'] \arrow[rr, phantom, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}A,\sigma)\Downarrow"] \arrow[d, "\Theta"] & & \mathfrak{D}(\mathcal{F}A,B) \arrow[d, "\Theta"] \\
\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\mathcal{F}A) \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}f)"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}g)"'] \arrow[rr, phantom, "\mathfrak{C}(A,\mathcal{U}\sigma)\Downarrow"] & & \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}B)
\end{tikzcd}
$$

La transformación 2-natural $\epsilon : \mathcal{F}\mathcal{U} \Rightarrow 1$ es tal que

$$
\begin{gathered}
B \mapsto \epsilon_B = \Theta_B^{-1}(1_{\mathcal{U}B}) : \mathcal{F}\mathcal{U}B \Rightarrow B \\
y \\
h : A \to \mathcal{U}B \mapsto \Theta^{-1}(h) = \epsilon_B \mathcal{F}h \ .
\end{gathered} \tag{3}
$$

Finalmente, para $A = \mathcal{U}B$

$$1_{\mathcal{U}B} = \Theta(\Theta^{-1}(1_{\mathcal{U}B})) = \Theta(\epsilon_B) = \mathcal{U}(\epsilon_B)\eta_{\mathcal{U}B}$$

Esto es, la composición

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\eta\mathcal{U}} \mathcal{U}\mathcal{F}\mathcal{U} \xrightarrow{\mathcal{U}\epsilon} \mathcal{U}$$

es la transformación 2-natural identidad. La demostración de que

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F}\eta} \mathcal{F}\mathcal{U}\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon\mathcal{F}} \mathcal{F}$$

es la transformación 2-natural identidad es parecida.

Supongamos que existen transformaciones 2-naturales

$$\eta : 1 \Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{F} \ \ y \ \ \epsilon : \mathcal{F}\mathcal{U} \Rightarrow 1$$

que satisfacen las ecuaciones:

$$\epsilon\mathcal{F} \centerdot \mathcal{F}\eta = 1_{\mathcal{F}} \qquad y \qquad \mathcal{U}\epsilon \centerdot \eta\mathcal{U} = 1_{\mathcal{U}}.$$

Sea $\Theta : \mathfrak{D}(\mathcal{F}, \ \ ) \to \mathfrak{C}(\ \ ,\mathcal{U})$ tal que para cada A de $\mathfrak{C}$ y B de $\mathfrak{D}$, la aplicación $\Theta_{A,B} : \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, B) \to \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}B)$ está definida por:

$$
\begin{gathered}
f : \mathcal{F}A \to B \mapsto \Theta_{A,B}(f) = \mathcal{U}(f)\eta_A \\
\sigma : f \Rightarrow g \mapsto \Theta_{A,B}(\sigma) = \mathcal{U}(\sigma)\eta_A
\end{gathered}
$$

Es inmediato que $\Theta_{A,B}$ es funtor.

Por ser η transformación 2-natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma \Downarrow"] \arrow[d, "\eta_A"] & & A' \arrow[d, "\eta_{A'}"] \\
\mathcal{U}\mathcal{F}A \arrow[rr, bend left, "\mathcal{U}\mathcal{F}f"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{U}\mathcal{F}g"'] \arrow[rr, phantom, "\mathcal{U}\mathcal{F}\sigma \Downarrow"] & & \mathcal{U}\mathcal{F}A'
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\Theta_{A,B}\mathfrak{D}(\mathcal{F}f, B)(h) &= \mathfrak{C}(f,\mathcal{U}B)\Theta_{A',B}(h) \\
\Theta_{A,B}\mathfrak{D}(\mathcal{F}f, B)(\alpha) &= \mathfrak{C}(f,\mathcal{U}B)\Theta_{A',B}(\alpha) \\
\Theta_{A,B}\mathfrak{D}(\mathcal{F}\sigma, B)(h) &= \mathfrak{C}(\sigma,\mathcal{U}B)\Theta_{A',B}(h) \quad .
\end{aligned}$$

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(\mathcal{F}A', B) \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}f{,}B)"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}g{,}B)"'] \arrow[rr, phantom, "\mathfrak{D}(\mathcal{F}\sigma{,} B) \Downarrow"] \arrow[d, "\Theta_{A',B}"] & & \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, B) \arrow[d, "\Theta_{A,B}"] \\
\mathfrak{C}(A',\mathcal{U}B) \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{C}(f{,}\mathcal{U}B)"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{C}(g{,}\mathcal{U}B)"'] \arrow[rr, phantom, "\mathfrak{C}(\sigma{,}\mathcal{U}B) \Downarrow"] & & \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. i.e. Θ es 2-natural en A.

La demostración de que Θ es 2-natural en C es semejante. Entonces por 1.48 Θ es una transformación 2-natural.

Sea $\Theta' : \mathfrak{C}(\ ,\mathcal{U}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{F},\ )$ tal que para cada A de $\mathfrak{C}$ y B de $\mathfrak{D}$, el funtor $\Theta'_{A,B} : \mathfrak{C}(A,\mathcal{U}B) \to \mathfrak{D}(\mathcal{F}A, B)$ está definido como sigue:

$$\begin{aligned}
h &\mapsto \epsilon_B\mathcal{F}h \\
\alpha &\mapsto \epsilon_B\mathcal{F}\alpha \quad .
\end{aligned}$$

Debido a que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{U}$ satisfacen las identidades triangulares, y por ser ϵ transformación 2-natural el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\mathcal{U}\mathcal{F}A \arrow[rr, bend left, "\mathcal{U}\mathcal{F}h"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{U}\mathcal{F}k"'] \arrow[rr, phantom, "\mathcal{U}\mathcal{F}\alpha\Downarrow"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathcal{F}A}"] & & \mathcal{F}\mathcal{U}B \arrow[d, "\epsilon_B"] \\
\mathcal{F}A \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[rr, bend right, "k"'] \arrow[rr, phantom, "\alpha\Downarrow"] & & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces

$$\Theta'_{A,B}\Theta_{A,B}(h) = \epsilon_B\mathcal{F}(\mathcal{U}h\eta_A) = h\epsilon_{\mathcal{F}A}\mathcal{F}\eta_A = h$$
$$\Theta'_{A,B}\Theta_{A,B}(\alpha) = \epsilon_B\mathcal{F}(\mathcal{U}\alpha\eta_A) = \alpha\epsilon_{\mathcal{F}A}\mathcal{F}\eta_A = \alpha \quad .$$

Es decir, $\Theta'_{A,B}\Theta_{A,B} = 1$. La prueba de que $\Theta_{A,B}\Theta'_{A,B} = 1$ es análoga.

Por lo tanto $\mathcal{F} \dashv \mathcal{U}$.

□

A la transformación 2-natural η la llamamos unidad, y a la transmación 2-natural ϵ la counidad de la 2-adjunción.

COROLARIO 1.55. *Cualesquiera 2-adjuntos izquierdos* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ *de un 2-funtor* $\mathcal{U} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *son 2-naturalmente equivalentes.*

COROLARIO 1.56. *Cualesquiera 2-adjuntos derechos* $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ *de un 2-funtor* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *son 2-naturalmente equivalentes.*

CAPíTULO 2

Mónadas con respecto a una 2-categoría

Nuestra primera tarea en este capítulo será construir una nueva 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C})$ partiendo de una 2-categoría $\mathfrak{C}$. Los objetos de esta nueva 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C})$ son llamados mónadas; sus 1-celdas, funtores de mónadas y sus 2-celdas, transformaciones de funtores de mónadas. Términos que definimos ahora.

Definición 2.1. *Una mónada* (X, S) *consta de un objeto* X*, una 1-celda* $S : X \to X$*, y un par de 2-celdas* $\eta : 1 \Rightarrow S, \quad \mu : SS \Rightarrow S$ *(llamadas la unidad y la multiplicación de la mónada, respectivamente; los mismos símbolos son usados para todas las mónadas) que satisfacen los diagramas conmutativos*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "S\eta"] \arrow[dr, "1"'] & SS \arrow[d, "\mu"] & S \arrow[l, "\eta S"'] \arrow[dl, "1"] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SSS \arrow[r, "S\mu"] \arrow[d, "\mu S"'] & SS \arrow[d, "\mu"] \\ SS \arrow[r, "\mu"'] & S \end{tikzcd}$$

Definición 2.2. *Un funtor de mónadas* $(U, \phi) : (X, S) \to (Y, T)$ *consta de una 1-celda* $U : X \to Y$ *y una 2-celda* $\phi : TU \Rightarrow US$*,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\phi"] & Y \arrow[d, "T"] \\ X \arrow[r, "U"'] & Y \end{tikzcd}$$

que satisfacen los diagramas conmutativos

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} & TU \arrow[dd, "\phi"] \\ U \arrow[ur, "\eta U"] \arrow[dr, "U\eta"'] & \\ & US \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & TUS \arrow[r, "\phi S"] & USS \arrow[dd, "U\mu"] \\ TTU \arrow[ur, "T\phi"] \arrow[dr, "\mu U"'] & & \\ & TU \arrow[r, "\phi"'] & US \end{tikzcd}$$

Definición 2.3. *Una transformación de funtores de mónadas* $\sigma : (U, \phi) \to (U', \phi')$ *es una 2-celda* $\sigma : U \Rightarrow U'$ *que satisface el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "T\sigma"] \arrow[d, "\phi"'] & TU' \arrow[d, "\phi'"] \\
US \arrow[r, "\sigma S"'] & U'S
\end{tikzcd}$$

Antes de pasar a la construcción explícita de $Mnd(\mathfrak{C})$ damos la definición local de adjunción para una 2-categoría y demostramos que a toda adjunción podemos asociarle una mónada.

Definición 2.4. *Si* $E : A \to X$, $J : X \to A$ *son 1-celdas en* $\mathfrak{C}$ *y* $\epsilon : JE \to 1$, $\eta : 1 \to EJ$ *son 2-celdas tal que* $E\epsilon.\eta E = 1$, $\epsilon J.J\eta = 1$, *entonces decimos que* J *es adjunto izquierdo de* E *en* $\mathfrak{C}$ *con counidad* ϵ *y unidad* η, *y escribimos* $J \dashv E$.

Lema 2.5. *Sean* $E : A \to X$, $J : X \to A$ *1-celdas en* $\mathfrak{C}$. *Si* J *es el adjunto izquierdo de* E, *con counidad* ϵ *y unidad* η. *Entonces* (X, EJ) *es una mónada con unidad* η *y multiplicación* $E\epsilon J$.

Demostración. Por ser J adjunto izquierdo de E hallamos:

$$E\epsilon J.EJ\eta = E(\epsilon J.J\eta) = EJ \quad y$$
$$E\epsilon J.\eta EJ = (E\epsilon.\eta E)J = EJ \; .$$

Además, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "J"] & A \arrow[r, "E"] \arrow[rr, bend right, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "\epsilon \Downarrow"] & X \arrow[r, "J"] & A \arrow[r, "E"] \arrow[rr, bend right, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "\epsilon \Downarrow"] & X \arrow[r, "J"] & A \arrow[r, "E"] & X
\end{tikzcd}$$

ilustra la situación

$$E\epsilon J.EJ(E\epsilon J) = E(\epsilon.JE\epsilon)J = E(\epsilon\epsilon) =$$
$$E(\epsilon.\epsilon JE)J = E\epsilon J.(E\epsilon J)EJ \quad .$$

Por lo tanto los diagramas

$$\begin{tikzcd}
EJ \arrow[r, "EJ\eta"] \arrow[dr, "1"'] & EJEJ \arrow[d, "E\epsilon J"] & EJ \arrow[l, "\eta EJ"'] \arrow[dl, "1"] \\
& EJ &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
EJEJEJ \arrow[r, "EJ(E\epsilon J)"] \arrow[d, "(E\epsilon J)EJ"'] & EJEJ \arrow[d, "E\epsilon J"] \\
EJEJ \arrow[r, "E\epsilon J"'] & EJ
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

□

Definición 2.6. *Sean* (X, S) *una mónada y* $E : A \to X$, $J : X \to A$ *1-celdas en* $\mathfrak{C}$ *tal que* $J \dashv E$. *La mónada* (X, S) *está generada por la adjunción* $J \dashv E$ *si* $(X, EJ) = (X, S)$.

Hemos llegado a nuestro primer objetivo.

Sea $\mathfrak{C}$ una 2-categoría. La 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C})$ consta de:

(i) Una clase $Ob(Mnd(\mathfrak{C}))$ cuyos objetos (X,S) son mónadas en $\mathfrak{C}$.

(ii) Para cada par de objetos $(X,S),(Y,T)$ de $Mnd(\mathfrak{C})$, una categoría $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]$. Los objetos de $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]$ son funtores de mónadas; para

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left=40, "(U,\phi)"] \arrow[r, "(U_1,\phi_1)"'] \arrow[r, bend right=40, "(U_2,\phi_2)"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, bend right=20, "\sigma_1\Downarrow"] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

en $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]$, la composición σ con σ_1 es $\sigma_1.\sigma$ (composición vertical en $\mathfrak{C}$), por lo que también denotamos por "." a la composición en $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]$. Como $\mathfrak{C}(X,Y)$ es una categoría entonces $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]$ es una categoría.

(iii) Para cada objeto (X,S) de $Mnd(\mathfrak{C})$, $1_{(X,S)} = (1_X, 1_S) : (X,S) \to (X,S)$

(iv) Para cada tres objetos $(X,S),(Y,T),(Z,W)$ de $Mnd(\mathfrak{C})$ el funtor composición

$$Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)] \times Mnd(\mathfrak{C})[(Y,T),(Z,W)] \xrightarrow{\diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}} Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Z,W)]$$

está definido como

$$[(U,\phi),(V,\psi)] \longmapsto \diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}[(U,\phi),(V,\psi)] = (VU, V\phi.\psi U)$$

$$(\sigma,\tau) \longmapsto \diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}(\sigma,\tau) = \circ_{X,Y,Z}(\sigma,\tau)$$

Denotamos la composición horizontal de 1-celdas ($\diamond$) simplemente por yuxtaposición i.e. $(V,\psi)(U,\phi) = \diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}[(U,\phi),(V,\psi)]$, en el caso de composición horizontal de 2-celdas tendremos $\tau \diamond \sigma = \circ_{X,Y,Z}(\sigma,\tau)$.
Por (1.35), (iv) $\diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}$ es funtor.

(v) Por (1.35), (v) y el anterior inciso, para $1_{(X,S)} = (1_X,1_S), 1_{(Y,T)} = (1_Y,1_T)$ las 1-celdas identidad, y

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left=40, "(U,\phi)"] \arrow[r, bend right=40, "(U_1,\phi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

tenemos

$$(U,\phi)1_{(X,S)} = (U,\phi), \quad \sigma \diamond 1_{(X,S)} = \sigma, \quad 1_{(Y,T)}(U,\phi) = (U,\phi), \quad 1_{(Y,T)} \diamond \sigma = \sigma.$$

(vi) Para cualesquiera objetos $(X,S),(Y,T),(Z,W),(Q,R)$ el funtor obtenido de la composición de $\circ_{(X,S),(Y,T),(Z,W)} \times 1_{Mnd(\mathfrak{C})[(Z,W),(Q,R)]}$ con $\circ_{(X,S),(Z,W),(Q,R)}$; es también el resultado de componer $1_{Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]} \times \circ_{(Y,T),(Z,W),(Q,R)}$ con $\circ_{(X,S),(Y,T),(Q,R)}$

A cada objeto A de $\mathfrak{C}$ podemos asignar un objeto de $Mnd(\mathfrak{C})$, lo mismo es posible para 1-celdas y 2-celdas. Es posible ir en dirección contraria, asignar objetos, 1-celdas y 2-celdas de $\mathfrak{C}$ a objetos, 1-celdas y 2-celdas de $Mnd(\mathfrak{C})$. Hacemos esto con la construcción de los 2-funtores $Inc_{\mathfrak{C}}$ y $Und_{\mathfrak{C}}$ respectivamente. Por último establecemos que $Und_{\mathfrak{C}} \dashv Inc_{\mathfrak{C}}$.

Dada cualquier 2-categoría $Inc_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to Mnd(\mathfrak{C})$ denota el 2-funtor inclusión, el cual está definido de la siguiente manera:

$$X \mapsto Inc_{\mathfrak{C}}(X) = (X, 1_X)$$

$$U : X \to Y \mapsto Inc_{\mathfrak{C}}(U) = (U, 1_U)$$

$$\sigma : U \Rightarrow U' \mapsto Inc_{\mathfrak{C}}(\sigma) = \sigma.$$

Es fácil mostrar que $Inc_{\mathfrak{C}}$ es un 2-funtor.

Sea $\mathfrak{C}$ cualquier 2-categoría, $Und_{\mathfrak{C}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to \mathfrak{C}$ denota al 2-funtor que olvida, el cual se define como :

$$(X, S) \mapsto Und_{\mathfrak{C}}[(X, S)] = X$$

$$(U, \phi) : (X, S) \to (Y, T) \mapsto Und_{\mathfrak{C}}[(U, \phi)] = U$$

$$\sigma : (U, \phi) \Rightarrow (V, \psi) \mapsto Und_{\mathcal{C}}(\sigma) = \sigma.$$

Mostrar que $Und_{\mathfrak{C}}$ es un 2-funtor es un ejercicio de rutina.

Teorema 2.7. *El 2-funtor que olvida es el 2-adjunto izquierdo del 2-funtor inclusión de $\mathfrak{C}$ en $Mnd(\mathfrak{C})$.*

Demostración. Tenemos transformaciones 2-naturales

$$1_{Und_{\mathfrak{C}}} : Und_{\mathfrak{C}} \to Und_{\mathfrak{C}} \quad y \quad 1_{Inc_{\mathfrak{C}}} : Inc_{\mathfrak{C}} \to Inc_{\mathfrak{C}} \quad ,$$

definidas como:

$$1_{Und_{\mathfrak{C}}}(X, S) = 1_X \quad y \quad 1_{Inc_{\mathfrak{C}}}(X) = (1_X, 1_{1_X}) \quad .$$

Identificamos a quien será la unidad de la 2-adjunción.

La transformación 2-natural $\Sigma : 1 \to Inc_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}}$, para cada (X, S) está definido por

$$\Sigma_{(X,S)} = (1, \eta^S) : (X, S) \to (X, 1) \quad .$$

Por ser (X, S) una mónada $\Sigma_{(X,S)}$ es funtor de mónadas.

Sean

$$\begin{tikzcd} (X,S) \arrow[rr, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[rr, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma \Downarrow"] & & (Y,T) \end{tikzcd}$$

en la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C})$. La conmutatividad (garantizada por ser (X, S) una mónada) de

$$\begin{tikzcd} (X,S) \arrow[r, "{(1,\eta^S)}"] \arrow[d, "{(U,\phi)}"'] & (X,1) \arrow[d, "{(U,1)}"] \\ (Y,T) \arrow[r, "{(1,\eta^T)}"'] & (Y,1) \end{tikzcd}$$

junto con la siguiente igualdad

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(X,S) \arrow[rr, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[rr, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma\Downarrow"] & & (Y,T) \arrow[r, "{(1,\eta^T)}"] & (Y,1) & = & (X,S) \arrow[r, "{(1,\eta^S)}"] & (X,1) \arrow[rr, bend left, "{(U,1)}"] \arrow[rr, bend right, "{(U_1,1)}"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma\Downarrow"] & & (Y,1)
\end{tikzcd}$$

nos dicen que Σ es en realidad una transfomación 2-natural.
Ahora bien, la transformación 2-natural $\Delta : Und_{\mathfrak{C}} Inc_{\mathfrak{C}} \to 1$ tal que $\Delta_X = 1_X$ para cada X de $\mathfrak{C}$, será la counidad de la 2-adjunción.
Sea (X,S) en $\mathfrak{C}$, para hallar $(Und_{\mathfrak{C}}\Sigma)_{(X,S)}$ consideramos

$$Und_{\mathfrak{C}} 1_{Mnd(\mathfrak{C})} \xrightarrow{Und_{\mathfrak{C}}\Sigma} Und_{\mathfrak{C}} Inc_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{1_{Und_{\mathfrak{C}}} Inc_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}}} Und_{\mathfrak{C}} Inc_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}}$$

que evaluado en (X,S) nos permite obtener

$$Und_{\mathfrak{C}}(X,S) \xrightarrow{Und_{\mathfrak{C}}(1,\eta^S)} Und_{\mathfrak{C}}(X,1) \xrightarrow{1_{Und_{\mathfrak{C}}}(X,1)} Und_{\mathfrak{C}}(X,1)$$

por lo que $(Und_{\mathfrak{C}}\Sigma)_{(X,S)} = 1_X 1_X = 1_X$.
Por otra parte, para calcular $(\Delta Und_{\mathfrak{C}})_{(X,S)}$ tenemos que considerar la composición

$$Und_{\mathfrak{C}} Inc_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{Und_{\mathfrak{C}} Inc_{\mathfrak{C}}(1_{Und_{\mathfrak{C}}})} Und_{\mathfrak{C}} Inc_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{\Delta Und_{\mathfrak{C}}} 1_{\mathfrak{C}} Und_{\mathfrak{C}}$$

así, $(\Delta Und_{\mathfrak{C}})_{(X,S)} = 1_X 1_X = 1_X$.
Entonces $(\Delta Und_{\mathfrak{C}})_{(X,S)}.(Und_{\mathfrak{C}}\Sigma)_{(X,S)} = 1_X$. Por lo tanto se satisface la igualdad

$$\begin{tikzcd}
Mnd(\mathfrak{C}) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "Und_C"'] \arrow[r, phantom, "\Sigma\Downarrow"] & & Mnd(\mathfrak{C}) \arrow[dr, "Und_C"] \arrow[d, phantom, "\Delta\Downarrow"] & \\
& \mathfrak{C} \arrow[ur, "Inc_C"] \arrow[rr, "1"'] & & \mathfrak{C} \quad = \quad 1_{Und_C}
\end{tikzcd}$$

La igualdad

$$\begin{tikzcd}
& Mnd(\mathfrak{C}) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "Und_{\mathfrak{C}}"] \arrow[r, phantom, "\Sigma\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\Delta\Downarrow"] & & Mnd(\mathfrak{C}) \\
\mathfrak{C} \arrow[ur, "Inc_{\mathfrak{C}}"] \arrow[rr, "1"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ur, "Inc_C"'] & \quad = \quad 1_{Inc_C}
\end{tikzcd}$$

se obtiene de manera semejante.

□

Damos ahora la definición más importante de este trabajo.

Definición 2.8. *Una 2-categoría $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras cuando el 2-funtor inclusión de $\mathfrak{C}$ en $Mnd(\mathfrak{C})$ tiene un 2-adjunto derecho. Cuando este 2-adjunto derecho existe, lo denotamos como $Alg_{\mathfrak{C}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to \mathfrak{C}$; y, para una mónada (X,S), denotamos $Alg_{\mathfrak{C}}(X,S)$ como X^S.*

De acuerdo con (2.5) a toda adjunción podemos asociar una mónada. Nos ocupamos ahora en hallar las condiciones bajo las cuales es posible establecer el recíproco de tal lema.

Sea $\mathfrak{C}$ una 2-categoría que admite la construcción de álgebras. Denotamos la counidad de la 2-adjunción evaluada en (X,S) por $(E^S,\chi):(X^S,1)\to(X,S)$; los diagramas para el funtor de mónadas (E^S,χ) son

$$\begin{tikzcd}
E^S \arrow[r, "\eta E^S"] \arrow[dr, "1"'] & SE^S \arrow[d, "\chi"] \\
& E^S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
SSE^S \arrow[r, "S\chi"] \arrow[d, "\mu E^S"'] & SE^S \arrow[d, "\chi"] \\
SE^S \arrow[r, "\chi"'] & E^S
\end{tikzcd}$$

Por (3) el 2-isomorfismo natural $C(Y,X^S)\cong Mnd(C)[(Y,1),(X,S)]$ de categorías está dado por

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & X^S
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
(Y,1) \arrow[r, bend left, "{(E^SU,\chi U)}"] \arrow[r, bend right, "{(E^SU_1,\chi U_1)}"'] \arrow[r, phantom, "E^S\sigma\Downarrow"] & (X,S)
\end{tikzcd}$$

Busquemos 1-celdas $J:X\to A$ y $E:A\to X$, tal que $J\dashv E$ sea una adjunción que genere a (X,S).

Note que $(S,\mu):(X,1)\to(X,S)$ es un funtor de mónadas ya que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
& SS \arrow[dd, "\mu"] \\
S \arrow[ur, "\eta^S S"] \arrow[dr, "S"'] & \\
& S1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& SS1 \arrow[r, "\mu 1"] & S11 \arrow[dd, "S"] \\
SSS \arrow[ur, "S\mu"] \arrow[dr, "\mu S"'] & & \\
& SS \arrow[r, "\mu"'] & S1
\end{tikzcd}$$

por ser (X,S) una mónada. Así, existe una única 1-celda $J^S:X\to X^S$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,1) \arrow[rr, "{(S,\mu)}"] \arrow[dr, "{(J^S,1)}"'] & & (X,S) \\
& (X^S,1) \arrow[ur, "{(E^S,\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta en $Mnd(\mathfrak{C})$; esto es, $S=E^SJ^S \quad y \quad \mu=\chi J^S$.

Justificamos por que $J^S\dashv E^S$.

$(E^SJ^SE^S,\mu E^S):(X^S,1)\to(X,S)$ es un funtor de mónadas. Para $E^S:X^S\to X$ tenemos que $Inc_{\mathfrak{C}}(E^S)=(E^S,1):(X^S,1)\to(X,1)$ es un funtor de mónadas; además, por ser (X,S) una mónada $(E^SJ^S,\mu):(X,1)\to(X,S)$ es un funtor de mónadas, entonces $(E^SJ^S,\mu)(E^S,1)=(E^SJ^SE^S,\mu E^S)$ es un funtor de mónadas.

Es fácil ver que

$$\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[r, bend left, "{(E^SJ^SE^S,\chi E^S)}"] \arrow[r, bend right, "{(E^S,\chi)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\chi"] & (X,S)
\end{tikzcd}$$

es una transformación funtor de mónadas, ya que la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} SE^SJ^SE^S \arrow[r, "S\chi"] \arrow[d, "\mu E^S"'] & SE^S \arrow[d, "\chi"] \\ E^SJ^SE^S1 \arrow[r, "\chi 1"] & E^S1 \end{tikzcd}$$

no es más que una de las condiciones para que (E^S, χ) sea funtor de mónadas; así, hay una única 2-celda

$$\begin{tikzcd} X^S \arrow[r, bend left, "J^SE^S"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & X^S \end{tikzcd}$$

tal que

$$E^S\epsilon = \chi. \tag{5}$$

Por la propiedad universal de (E^S, χ),

$$E^S(\epsilon J^S.J^S\eta) = E^S\epsilon J^S.E^SJ^S\eta = \mu.S\eta = 1_S$$

lo que implica $\epsilon J^S.J^S\eta = 1_{J^S}$; también $E^S\epsilon.\eta E^S = \chi.\eta E^S = 1_{E^S}$.
Por lo tanto $J^S \dashv E^S$.

Se ha demostrado la veracidad del siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Si $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras entonces cada mónada en $\mathfrak{C}$ está generada por una adjunción.*

Sean $\mathfrak{C}$ una 2-categoría que admite la contrucción de álgebras y $J \dashv E$ una adjunción que genera a la mónada (X, S). Terminamos este capítulo estableciendo la existencia de una 1-celda que relaciona la adjunción $J^S \dashv E^S$ con $J \dashv E$.

Teorema 2.10. *Si $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras y la adjunción $J \dashv E$ genera la mónada (X, S), entonces existe una única 1-celda $N : A \to X^S$ tal que $E^SN = E$ y $E^SN\epsilon^A = E^S\epsilon N$. Además, esta N satisface $NJ = J^S$ y $N\epsilon^A = \epsilon N$.*

Demostración. Sean las 1-celdas $J : X \to A$, $\quad E : A \to X$ y las 2-celdas
$\eta^A : 1 \to EJ$, $\quad \epsilon^A : JE \to 1$ (unidad y counidad de $J \dashv E$).
Veamos que $(E, E\epsilon^A) : (A, 1) \to (X, S)$ es funtor de mónadas.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "E"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "E\epsilon^A \swarrow"] & X \arrow[d, "EJ"] \\ A \arrow[r, "E"'] & X \end{tikzcd}$$

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & EJE \arrow[dd, "E\epsilon^A"] \\
E \arrow[ur, "\eta E"] \arrow[dr, "E1"'] & \\
 & E1
\end{tikzcd}$$

conmuta por que $J \dashv E$.
Tenemos, por otra parte que $E1.E\epsilon^A 1.SE\epsilon^A = E\epsilon^A 1.SE\epsilon^A = E\epsilon^A 1.EJE\epsilon^A = E(\epsilon^A 1.JE\epsilon^A) = E(\epsilon^A\epsilon^A)$ y $E\epsilon^A.\mu E = E\epsilon^A.E\epsilon^A JE = E(\epsilon^A.\epsilon^A EJ) = E(1\epsilon^A.\epsilon^A JE) = E(\epsilon^A\epsilon^A)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "E"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & X \arrow[r, "J"] \arrow[d, phantom, "\epsilon^A \Downarrow"] & A \arrow[r, "E"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & X \arrow[r, "J"] \arrow[d, phantom, "\epsilon^A \Downarrow"] & A \arrow[r, "E"] & X \\
 & {} & & {} & &
\end{tikzcd}$$

aclara dicha afirmación. De modo que la conmutatividada de

$$\begin{tikzcd}
 & EJE1 \arrow[r, "E\epsilon^A 1"] & E11 \arrow[dd, "E1"] \\
SSE \arrow[ur, "SE\epsilon^A"] \arrow[dr, "\mu E"'] & & \\
 & EJE \arrow[r, "E\epsilon^A"'] & E1
\end{tikzcd}$$

se cumple. Como $(E, E\epsilon^A)$ es un funtor de mónadas existe una única 1-celda $N : A \to X^S$ tal que

$$\begin{tikzcd}
(A,1) \arrow[rr, "{(N,1)}"] \arrow[dr, "{(E,E\epsilon^A)}"'] & & (X^S,1) \arrow[dl, "{(E^S,\chi)}"] \\
 & (X,S) &
\end{tikzcd}$$

conmuta, esto es, tal que $E^S N = E$ y $E\epsilon^A = \chi N$; pero $E^S(N\epsilon^A) = E\epsilon^A = \chi N = E^S(\epsilon N)$, entonces por la propiedad universal de (E^S, χ) se sigue que $N\epsilon^A = \epsilon N$.
Además, $E^S(NJ) = EJ = S$, $\chi(NJ) = E\epsilon^A J = \mu$; así NJ tiene la propiedad que determina la unicidad de J^S, entonces $NJ = J^S$. Llamamos a $N : A \to X^S$ la 1-celda comparación derecha de la adjunción $J \dashv E$. Si tal 1-celda es un isomorfismo decimos que la adjunción $J \dashv E$ es monádica. $\square$

CAPíTULO 3

Identificación de X^S

Sea la 2-categoría **Cat**. Si la categoría X^S existe para una mónada (X, S), está satisface un isomorfismo 2-natural

$$Mnd(Cat)((Y, 1), (X, S)) \cong Cat(Y, X^S).$$

Un objeto de X^S es un funtor de la categoría 1 a X^S. Haciendo $Y = 1$ en el isomorfismo, los objetos de X^S serán funtores de mónadas de $(1, 1)$ a (X, S); esto es pares (x, ξ_x) donde x es un objeto de X y $\xi_x : Sx \to x$ es una flecha de X, tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "1"'] & Sx \arrow[d, "\xi_x"] \\ & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SSx \arrow[r, "\mu_x"] \arrow[d, "S\xi_x"'] & Sx \arrow[d, "\xi_x"] \\ Sx \arrow[r, "\xi_x"'] & x \end{tikzcd}$$

conmutan en X. Tomando $Y = 2$, encontramos que las flechas $f : (x, \xi_x) \to (y, \xi_y)$ son flechas $f : x \to y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Sx \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\xi_x"'] & Sy \arrow[d, "\xi_y"] \\ x \arrow[r, "f"'] & y \end{tikzcd}$$

conmuta. Para $Y = 3$, encontramos que la composición en X^S es la composición de X. No hay ninguna dificultad para mostrar que X^S, cuyos objetos (x, ξ_x) y morfismos $f : (x, \xi_x) \to (y, \xi_y)$ con la composición antes mencionada, es una categoría. Llamamos a X^S la categoría de S-álgebras. Siguiendo por este camino nos encontramos en condiciones de demostrar que:

TEOREMA 3.1. *La 2-categoría **Cat** admite la construcción de álgebras.*

Sea $D : Mnd(Cat) \to$ **Cat** el 2-funtor que consta de:

(i) La función objeto $Ob(Mon(Cat)) \to Ob($**Cat**$)$ (también denotada por D) tal que

$$(X, S) \mapsto D[(X, S)] = X^S$$

(ii) Sean

$$\begin{tikzcd} (X,S) \arrow[r, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\sigma \Downarrow"] & (Y,T) \end{tikzcd}$$

funtores de mónadas y una transformación de funtores de mónadas. Obtenemos el funtor $D(U,\phi) : X^S \to Y^T$ tal que:

$$(x,\xi_x) \mapsto D(U,\phi)(x,\xi_x) = (Ux, U\xi_x\phi_x)$$
$$f : (x,\xi x) \to (y,\xi_y) \mapsto D(U,\phi)(f) = Uf \quad ;$$

y la transformación natural $D(\sigma) : D(U,\phi) \to D(V,\varphi)$ definida como

$$D(\sigma)(x,\xi_x) = \sigma_x$$

para cada (x,ξ_x) de X^S. Exponemos las razones por la cual tal afirmación es cierta.

De los diagramas

$$\begin{tikzcd} Ux \arrow[r, "\eta^T_{Ux}"] \arrow[dr, "U\eta^S_x"'] & TUx \arrow[d, "\phi_x"] \\ & USx \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ux \arrow[r, "U\eta^S_x"] \arrow[dr, "1"'] & USx \arrow[d, "U\xi_x"] \\ & Ux \end{tikzcd}$$

el de la izquierda conmuta por ser (U,ϕ) funtor de mónadas y el de la derecha también conmuta pues no es más que el funtor U evaluado en la primera identidad de la S-álgebra (x,ξ_x). Combinando ambas identidades llegamos a que $U\xi_x\phi_x\eta^T_{Ux} = 1$.
De las igualdades $\phi_x\mu^T_{Ux} = U\mu^S_x\phi_{Sx}T\phi_x$ ((U,ϕ) funtor de mónadas),
$U\xi_xU\mu^S_x = U\xi_xUS\xi_x$ (U aplicado a la segunda identidad de la S-algebra (x,ξ_x)) y $US\xi_x\phi_{Sx} = \phi_xTU\xi_x$ (ϕ transformación natural) tenemos

$$U\xi_x\phi_x\mu^T_{Ux} = U\xi_xU\mu^S_x\phi_{Sx}T\phi_x = U\xi_xUS\xi_x\phi_{Sx}T\phi_x = U\xi_x\phi_xTU\xi_xT\phi_x.$$

Por lo tanto $(Ux, U\xi_x\phi_x)$ es T-álgebra.
Sea $f : (x,\xi_x) \to (y,\xi_y)$ en X^S, en el diagrama

$$\begin{tikzcd} TUx \arrow[r, "TUf"] \arrow[d, "\phi_x"'] & TUy \arrow[d, "\phi_y"] \\ USx \arrow[r, "USf"] \arrow[d, "U\xi_x"'] & USy \arrow[d, "U\xi_y"] \\ Ux \arrow[r, "Uf"'] & Uy \end{tikzcd}$$

el cuadrado superior conmuta por ser ϕ transformación natural y el cuadrado inferior también conmuta por que se ha aplicado el funtor U al cuadrado conmutativo que define a f, entonces Uf es un morfismo en Y^T. Así $D(U,\phi)$ está bien definido.
Si en la categoría X^S tenemos

$$(x,\xi_x) \xrightarrow{f} (y,\xi_y) \xrightarrow{g} (z,\xi_z)\ ,$$

luego $\qquad D(U,\phi)(gf) = U(gf) = UgUf = D(U,\phi)(g)D(U.\phi)(f).$
Además como $1_x = 1_{(x,\xi_x)} : (x,\xi_x) \to (x,\xi_x)$, entonces

$$D(U,\phi)(1_{(x,\xi_x)}) = D(U,\phi)(1_x) = U(1_x) = 1_{Ux} = 1_{(Ux,U\xi_x\phi_x)} = 1_{D(U,\phi)(x,\xi_x)}\ ,$$

por lo que $D(U,\phi)$ es funtor.
El siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
TUx \arrow[r, "T\sigma_x"] \arrow[d, "\phi_x"'] & TU_1x \arrow[d, "\phi_{1x}"] \\
USx \arrow[r, "\sigma_{Sx}"] \arrow[d, "U\xi_x"'] & U_1Sx \arrow[d, "U_1\xi_x"] \\
Ux \arrow[r, "\sigma_x"'] & U_1x
\end{tikzcd}$$

es conmutativo; el cuadrado superior conmuta por ser σ transformación funtor de mónadas; mientras el cuadrado inferior conmuta por ser σ transformación natural. De esta forma $D(\sigma)(x,\xi_x)$ es morfismo de T-álgebras, por lo que $D(\sigma)$ está bien definida.
El cuadrado

$$\begin{tikzcd}
D(U,\phi)(x,\xi_x) \arrow[r, "D\sigma(x\text{,}\xi_x)"] \arrow[d, "D(U\text{,}\phi)(f)"'] & D(U_1,\phi_1)(x,\xi_x) \arrow[d, "D(U_1\text{,}\phi_1)(f)"] \\
D(U,\phi)(y,\xi_y) \arrow[r, "D\sigma(y\text{,}\xi_y)"] & D(U_1,\phi_1)(y,\xi_y)
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $f : (x,\xi_x) \to (y,\xi_y)$, ya que el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
(Ux,U\xi_x\phi_x) \arrow[r, "\sigma_x"] \arrow[d, "U(f)"'] & (U_1x,U_1\xi_x\phi_x) \arrow[d, "U_1(f)"] \\
(Uy,U\xi_y\phi_y) \arrow[r, "\sigma_y"] & (U_1y,U_1\xi_y\phi_y)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo por ser σ transformación natural. Entonces $D(\sigma)$ es transformación natural.

Para cada par de objetos $(X,S),(Y,T)$ de $Mnd(Cat)$ el funtor

$$D_{(X,S),(Y,T)} : Mnd(Cat)[(X,S),(Y,T)] \to \mathbf{Cat}(X^S,Y^T)$$

está definido como :

$$\begin{aligned}(U,\phi) &\mapsto D_{(X,S),(Y,T)}(U,\phi) = D(U,\phi)\\ \sigma &\mapsto D_{(X,S),(Y,T)}(\sigma) = D(\sigma)\quad .\end{aligned}$$

Por ser $D(U,\phi)$ funtor y $D(\sigma)$ transformación natural $D_{(X,S),(Y,T)}$ está bien definido.

Si en la 2-categoría $Mnd(Cat)$ tenemos morfismos

$$(U,\phi) \xrightarrow{\sigma} (U_1,\phi_1) \xrightarrow{\sigma_1} (U_2,\phi_2)\ ,$$

entonces

$$D(\sigma_1.\sigma)(x,\xi_x) = (\sigma_1.\sigma)_x = \sigma_{1x}.\sigma_x =$$
$$D(\sigma_1)(x,\xi_x).D(\sigma)(x,\xi_x) = [D(\sigma_1).D(\sigma)](x,\xi_x)\ .$$

La transformación natural $1_{D(U,\phi)} : D(U,\phi) \to D(U,\phi)$ está definida como

$$1_{D(U,\phi)}(x,\xi_x) = 1_{Ux}$$

Pero, además

$$D(1_{(U,\phi)})(x,\xi_x) = D(1_U)(x,\xi_x) = 1_U(x) = 1_{Ux}$$

Así $D(1_{(U,\phi)}) = D(1_U) = 1_{D(U,\phi)}$. Por lo tanto $D_{(X,S),(Y,T)}$ es funtor.

(iii) Considerando a $1_{(X,S)}$ hallamos que

$$D(1_{(X,S)})(x,\xi_x) = D(1_X,1_S)(x,\xi_x) = (1_X x, 1_X\xi_x 1_{SX}) = (x,\xi_x) \quad y$$

$$D(1_{(X,S)})(f) = D(1_X,1_S)(f) = 1_X(f) = f$$

Por lo tanto $D(1_{(X,S)}) = 1_{D(X,S)}$.

(iv) Para cada tres objetos $(X,S),(Y,T),(Z,W)$ de $Mnd(Cat)$, se satisface la siguiente igualdad de funtores

$$\big(\circ_{X^S,Y^T,Z^W}\big)\big(D_{(X,S),(Y,T)} \times D_{(Y,T),(Z,W)}\big) = \big(D_{(X,S)(Z,W)}\big)\big(\diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}\big).$$

Sea $[(U,\phi),(V,\varphi)] \in Mnd(Cat)[(X,S),(Y,T)] \times Mnd(Cat)[(Y,T),(Z,W)]$.

Así, tenemos que $\diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}[(U,\phi),(V,\varphi)] = (VU, V\phi.\varphi U)$, entonces para cada (x,ξ_x), objeto de X^S

$$D(VU,V\phi.\varphi U)(x,\xi_x) = (VUx, VU\xi_x V\phi_x\varphi_{Ux}).$$

Además $\quad D_{(X,S),(Y,T)}(U,\phi) \times D_{(Y,T),(Z,W)}(V,\varphi) = \big(D(U,\phi), D(V,\varphi)\big) \quad$ y

$$\diamond_{X^S,Y^T,Z^W}\big(D(U,\phi),D(V,\varphi)\big) = D(V,\phi)D(U,\phi).$$

Así que para cada (x,ξ_x), objeto de X^S

$$D(V,\phi)D(U,\phi)(x,\xi_x) = D(V,\phi)(Ux, U\xi_x\phi_x) = (VUx, V(U\xi_x\phi_x)\varphi_{Ux}).$$

Por lo que $D(VU,V\phi.\varphi U)(x,\xi_x) = D(V,\phi)D(U,\phi)(x,\xi_x)$.

Para $f : (x,\xi_x) \to (y,\xi_y)$ se tiene

$D(VU,V\phi.\varphi U)(f) = (VU)(f) = V(U(f)) = D(V,\varphi)(U(f)) = \big(D(V,\phi)D(U,\phi)\big)(f)$.

De esta manera $D(VU,V\phi.\varphi U) = D(V,\phi)D(U,\phi)$.

Al considerar $(\sigma,\tau) : [(U,\phi),(V,\varphi)] \to [(U_1,\phi_1),(V_1,\varphi_1)]$, es decir

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & (Y,T) \arrow[r, bend left, "{(V,\varphi)}"] \arrow[r, bend right, "{(V_1,\varphi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & (Z,W)
\end{tikzcd}$$

hallamos que $\diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}(\sigma,\tau) = \circ_{X,Y,Z}(\sigma,\tau) = \tau\sigma$ (composición horizontal de 2-celdas en **Cat**), entonces $D(\tau\sigma)(x,\xi_x) = (\tau\sigma)(x)$. Donde $(\tau\sigma)(x) = \tau_{U_1x}V\sigma_x$.
Pero, además $\big(D_{(X,S),(Y,T)} \times D_{(Y,T),(Z,W)}\big)(\sigma,\tau) = (D\sigma, D\tau)$ y $\circ_{X^S,Y^T,Z^W}(D\sigma,D\tau) = D\tau D\sigma$ (composición horizontal de 2-celdas en **Cat**).
Ahora bien, apartir de

$$\begin{tikzcd} X^S \arrow[r, bend left, "D(U,\phi)"] \arrow[r, bend right, "D(U_1,\phi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow D\sigma"] & Y^T \arrow[r, bend left, "D(V,\varphi)"] \arrow[r, bend right, "D(V_1,\varphi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow D\tau"] & Z^W \end{tikzcd}$$

obtenemos

$$D(V,\varphi)(D\sigma_x) : (VUx, VU\xi_x V\phi_x\varphi_x) \to (VU_1x, VU_1\xi_x V\phi_{1x}\varphi_{U_1x}) \quad y$$

$$(D\tau)(U_{1x}, U_1\xi_x\phi_{1x}) : (VU_1x, VU_1\xi_x V\phi_{1x}\varphi_{U_1x}) \to (V_1U_1x, V_1U_1\xi_x V_1\phi_{1x}\varphi_{1U_1x})$$

por lo que $(D\tau D\sigma)(x,\xi_x) = (D\tau)(U_{1x}, U_1\xi_x\phi_{1x})D(V,\varphi)(D\sigma_x) = \tau_{U_1x}V\sigma_x$. Entonces $D(\tau\sigma) = D\tau D\sigma$. Por lo tanto se tiene la igualdad de funtores

$$\big(\circ_{X^S,Y^T,Z^W}\big)\big(D_{(X,S),(Y,T)} \times D_{(Y,T),(Z,W)}\big) = \big(D_{(X,S)(Z,W)}\big)\big(\diamond_{(X,S),(Y,T),(Z,W)}\big).$$

Por lo que D es un 2-funtor.

Procedemos a describir quienes serán la unidad y la counidad de la 2-adjunción.

La unidad es la transformación 2-natural $\Delta : Inc_{Cat}D \to 1$.
En cada (X,S) tenemos el funtor de mónadas $\Delta_{(X,S)} = (E^S, \chi^S) : (X^S, 1) \to (X,S)$ definido de la siguiente manera:

$$E^S(x,\xi_x) = x, \qquad E^S(f) = f, \qquad y \qquad \chi^S(x,\xi_x) = \xi_x : Sx \to x.$$

Es fácil verificar que (E^S, χ^S) es funtor de mónadas.
En $Mnd(Cat)$ sea $(U,\phi) : (X,S) \to (Y,T)$. Obtenemos $D(U,\phi) : X^S \to Y^T$ en $Mnd(Cat)$.
Finalmente aplicando Inc_{Cat} se tiene $\big(D(U,\phi),1\big) : (X^S,1) \to (Y^T,1)$.
En $Mnd(Cat)$ para las 1-celdas

$$(X^S,1) \xrightarrow{(D(U,\phi),1)} (Y^T,1) \xrightarrow{\Delta_{(Y,T)}} (Y,T)$$

hallamos, $\Delta_{(Y,T)} \diamond (D(U,\phi),1) = (E^T, \chi_T) \diamond (D(U,\phi),1) = \big(E^T D(U,\phi), \chi^T D(U,\phi)\big)$.

Para el funtor $E^T D(U,\phi)$, tenemos

$$E^T D(U,\phi)(x,\xi_x) = E^T(Ux, U\xi_x\phi_x) = Ux \quad y \qquad E^T D(U,\phi)(f) = E^T(Uf) = Uf.$$

Además, basta observar que $D(U,\phi)(x,\xi_x) = (Ux, U\xi_x\phi_x)$ con lo que

$$\chi^T D(U,\phi)(x,\xi_x) = \chi^T(Ux, U\xi_x\phi_x) = U\xi_x\phi_x\ .$$

De modo análago, en $Mnd(Cat)$ la composición de los funtores de mónadas

$$(X^S,1) \xrightarrow{(E^S,\chi^S)} (X,S) \xrightarrow{(U,\phi)} (Y,T)$$

es tal que $(U,\phi)(E^S,\chi^S) = (UE^S, U\chi^S.\phi E^S)$, donde para el funtor UE^S tenemos

$$UE^S(x,\xi_x) = Ux \qquad y \qquad UE^S(f) = Uf.$$

Mientras la transformación natural $U\chi^S.\phi E^S$ en cada (x, ξ_x) está dada por

$$(U\chi^S.\phi E^S)(x,\xi_x) = \big(1_U(E^S 1_{X^S})U\chi^S\big)(x,\xi_x)\big(\phi E^S TU1_{E^S}\big)(x,\xi_x) = U\xi_x\phi_x.$$

Así, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[r, "(E^S,\chi^S)"] \arrow[d, "(D(U,\phi){,}1)"'] & (X,S) \arrow[d, "(U,\phi)"] \\
(Y^T,1) \arrow[r, "(E^T,\chi^T)"'] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

conmuta.
La composición horizontal de las transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[r, "(E^S,\chi^S)"] & (X,S) \arrow[r, bend left, "(U,\phi)"] \arrow[r, bend right, "(U_1,\phi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\sigma \Downarrow"] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

(definida en términos de la composición horizontal en **Cat**), es simplemente

$$(\sigma 1)(x,\xi_x) = \sigma_x \; .$$

Se llevan a cabo pasos similares para obtener que la composición $(E^T,\chi^T)D(\sigma,1)$ para toda (x,ξ_x) es $(E^T,\chi^T)D(\sigma,1)(x,\xi_x) = \big(1_{E^T}D(\sigma,1)\big)(x,\xi_x) = \sigma_x$.
Por lo tanto Δ es transfomación 2-natural.

Para cada $X \in \mathbf{Cat}$, $\quad D[Inc_{Cat}(X)] = D(X,1_X) = X^{1_X}$.
La categoría X^{1_X} tiene por objetos $(a,1_a)$ con a objeto de X y 1_a es la identidad en el objeto a. Para $(a,1_a)$ y $(b,1_b)$ en X^{1_X} tenemos $X^{1_X}[(a,1_a),(b,1_b)] = X(a,b)$.
Sea $\Sigma : 1 \to DInc_{Cat}$ tal que, para cada $X \in \mathbf{Cat}$, $\quad \Sigma_X : X \to X^{1_X}$ es el funtor definido como $\qquad \Sigma_X(x) = (x,1_x) \quad$ y $\quad \Sigma_X(f) = f$ para $f : x \to y$.
Es un ejercicio de rutina checar que Σ es transformación 2-natural.

Se mostrará que las transformaciones 2-naturales Σ y Δ satisfacen las igualdades triangulares

$$\begin{tikzcd}
Cat \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "Inc_{Cat}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\Sigma\Downarrow"] & & Cat \arrow[dr, "Inc_{Cat}"] & \\
& Mnd(Cat) \arrow[ur, "D"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[urr, phantom, "\Delta\Downarrow"] & & Mnd(Cat)
\end{tikzcd} \; = \; 1$$

$$\begin{tikzcd}
& Cat \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "Inc_{Cat}"] \arrow[drr, phantom, "\Sigma\Downarrow"] & & Cat \\
Mnd(Cat) \arrow[ur, "D"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Delta\Downarrow"] & & Mnd(Cat) \arrow[ur, "D"'] &
\end{tikzcd} \; = \; 1_D$$

Para el 2-funtor Inc_{Cat} tenemos la transformación 2-natural $1^* : Inc_{Cat} \to Inc_{Cat}$ definida para toda $X \in \mathbf{Cat}$ por $1^*(X) = 1_{(X,1)} = (1_X, 1_1)$.

La composición horizontal de 1^* y Σ evaluada en X

$$\begin{tikzcd} Cat \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "DInc_{Cat}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Sigma"] & Cat \arrow[r, bend left, "Inc_{Cat}"] \arrow[r, bend right, "Inc_{Cat}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1^*"] & Mnd(Cat) \end{tikzcd}$$

Es la composición de

$$Inc_{Cat}1_{Cat} \xrightarrow{Inc_{Cat}\Sigma} Inc_{Cat}DInc_{Cat} \xrightarrow{1^*DInc_{Cat}} Inc_{Cat}DInc_{Cat}$$

Es decir

$$(X,1) \xrightarrow{(\Sigma_X,1)} (X^{1_X},1) \xrightarrow{1_{(X^{1_X},1)}} (X^{1_X},1)$$

Entonces $(Inc_{Cat}\Sigma)(X) = (1^* \triangleleft \Sigma)(X) = 1^*DInc_{Cat}(X)Inc_{Cat}\Sigma(X) = (\Sigma_X, 1)$.
Un argumento semejante nos muestra que la composición horizontal de 1^* y Δ evaluada en X

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Cat} \arrow[r, bend left, "Inc_{Cat}"] \arrow[r, bend right, "Inc_{Cat}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1^*"] & Mnd(Cat) \arrow[r, bend left, "Inc_{Cat}D"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Delta"] & Mnd(Cat) \end{tikzcd}$$

implica que $\quad \Delta 1^*(X) = \Delta Inc_{Cat}(X)Inc_{Cat}D1^*(X) = (E^{1_X}, \chi^{1_X})$.

Es trivial que $\quad E^{1_X}\Sigma_X = 1_X \;\; y \;\; \chi^{1_X} = 1_{E^{1_X}}$.

Así $\quad (\Delta Inc_{Cat}.Inc_{Cat}\Sigma)(X) = (E^{1_X}, \chi^{1_X})(\Sigma_X, 1) = (1_X, 1) = 1^*(X)$.
Por lo que $\Delta Inc_{Cat} \centerdot Inc_{Cat}\Sigma = 1^*$.
Como también se satisface la igualdad $D\Delta \centerdot \Sigma D = 1_D$, entonces **Cat** admite la construcción de álgebras.

Sea $\mathfrak{C}$ una 2-categoría que admite la construcción de álgebras. Sean (X,S) un objeto de $Mnd(\mathfrak{C})$ y Y un objeto de $\mathfrak{C}$, luego $Alg_{\mathfrak{C}}(X,S)$ es un objeto de $\mathfrak{C}$ y por lo tanto $\mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}}(X,S))$ es un objeto de **Cat**. Por otro lado, $(\mathfrak{C}(Y,X), \mathfrak{C}(Y,S))$ es un objeto de $Mnd(Cat)$. Así, $\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$ es un objeto de **Cat**. ¿Cuál es la relación que guardan los objetos $\mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}}(X,S))$ y $\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$?. Si en lugar de haber iniciado con un objeto en $Mnd(\mathfrak{C})$ iniciaramos con 1-celdas ó 2-celdas tal pregunta sigue teniendo sentido. Respondemos a tal interrogante en el siguiente:

TEOREMA 3.2. *Si $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras entonces hay un isomorfismo 2-natural*

$$\mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}}) \cong \mathfrak{C}(Y, \;\;)^{\mathfrak{C}(Y,\;\;)}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Construimos el 2-funtor $\mathfrak{C}(Y, \;\;)^* : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(Cat)$; la composición de este con $D : Mnd(Cat) \to \mathbf{Cat}$ resulta ser el 2-funtor

$$\mathfrak{C}(Y, \;\;)^{\mathfrak{C}(Y,\;\;)} : Mnd(\mathfrak{C}) \to Cat\,.$$

El 2-funtor $\mathfrak{C}(Y, \;\;)^* : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(Cat)$ consta de:

(i) La función objeto $Ob(Mnd(\mathfrak{C})) \to Ob(Mnd(Cat))$ (también denotada por $\mathfrak{C}(Y, \;\;)^*$) está dada por:

$$(X,S) \mapsto \mathfrak{C}(Y, \;\;)^*(X,S) = ((Y,X),(Y,S))$$

$\mathfrak{C}(Y, \;\;)^*(X,S)$ es una mónada por ser (X,S) mónada y $\mathfrak{C}(Y, \;\;)$ 2-funtor.

(ii) Para cada par de objetos $(X,S),(Z,W)$ de $Mnd(\mathfrak{C})$ el funtor $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}$ de la categoría $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Z,W)]$ en la categoría $Mnd(Cat)[(\mathfrak{C}(Y,X),\mathfrak{C}(Y,S)),(\mathfrak{C}(Y,Z),\mathfrak{C}(Y,W))]$, está definido como sigue:

$$\begin{aligned}(U,\phi) &\mapsto \mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}(U,\phi) = (\mathfrak{C}(Y,U),\mathfrak{C}(Y,\phi))\\ \sigma:(U,\phi)\Rightarrow(U_1,\phi_1) &\mapsto \mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}(\sigma) = \mathfrak{C}(Y,\sigma)\ .\end{aligned}$$

Escribimos $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(U,\phi)$ para $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}(U,\phi)$, y $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(\sigma)$ para $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}(\sigma)$. $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}$ está bien definido por ser $\mathfrak{C}(Y,\ \ )$ 2-funtor.

Ahora bien, para $\sigma:(U,\phi)\Rightarrow(U_1,\phi_1)$ y $\sigma_1:(U_1,\phi_1)\Rightarrow(U_2,\phi_2)$ tenemos que

$$\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(\sigma_1.\sigma) = \mathfrak{C}(Y,\sigma_1.\sigma) = \mathfrak{C}(Y,\sigma_1).\mathfrak{C}(Y,\sigma) = \mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(\sigma_1).\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(\sigma)\ .$$

Por otro lado, sabemos que $1_{(U,\phi)} = 1_U$; de este modo

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathfrak{C}(Y,X) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(Y,U)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(Y,U)"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{C}(Y,1)\Downarrow"] & \mathfrak{C}(Y,Z) \end{tikzcd}$$

está definida como:

$$h\mapsto \mathfrak{C}(Y,1)(h) = 1h\ .$$

Mientras que para $1_{\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(U,\phi)} = 1_{(\mathfrak{C}(Y,U),\mathfrak{C}(Y,\phi))} = 1_{\mathfrak{C}(Y,U)}$, tenemos que

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathfrak{C}(Y,X) \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}(Y,U)"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{C}(Y,U)"'] \arrow[r, phantom, "1_{\mathfrak{C}(Y,U)}\Downarrow"] & \mathfrak{C}(Y,Z) \end{tikzcd}$$

está definida por

$$h\mapsto \mathfrak{C}(Y,U)(h) = Uh\ .$$

Así, $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(1_{(U,\phi)}) = 1_{\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(U,\phi)}$. Por lo tanto $\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(Z,W)}$ es funtor.

(iii) Es fácil mostrar que para cada objeto (X,S) de $Mnd(\mathfrak{C})$, se tiene

$$1_{\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(X,S)} = \mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(1_{(X,S)})\ .$$

(iv) Sean

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] (X,S) \arrow[r, bend left, "(U,\phi)"] \arrow[r, bend right, "(U_1,\phi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & (Z,W) \arrow[r, bend left, "(V,\psi)"] \arrow[r, bend right, "(V_1,\psi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & (H,P) \end{tikzcd}$$

en la categoría $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Z,W)]\times Mnd(\mathfrak{C})[(Z,W),(H,P)]$. De manera que tenemos

$$\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*_{(X,S),(H,P)}\circ(\circ_{(X,S),(Z,W),(H,P)}((U,\phi),(V,\psi)) = (\mathfrak{C}(Y,VU),\mathfrak{C}(Y,V\phi.\psi U))$$

y la composición

$$\circ_{\mathfrak{C}(Y,\ )^*(X,S),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(Z,W),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(H,P)} \circ \left(\mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(X,S),(Z,W)} \times \mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(Z,W),(H,P)}\right)$$

evaluada en $((U,\phi),(V,\psi))$ es igual a

$$\begin{aligned}\circ_{\mathfrak{C}(Y,\ )^*(X,S),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(Z,W),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(H,P)}&[(\mathfrak{C}(Y,U),\mathfrak{C}(Y,\phi)),(\mathfrak{C}(Y,V),(Y,\psi))] = \\ &(\mathfrak{C}(Y,V)\mathfrak{C}(Y,U),\quad \mathfrak{C}(Y,V)\mathfrak{C}(Y,\phi).\mathfrak{C}(Y,\psi)\mathfrak{C}(Y,U))\ .\end{aligned}$$

También es cierto que

$$\mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(X,S),(H,P)} \circ \left(\circ_{(X,S),(Z,W),(H,P)}(\sigma,\tau)\right)$$

es igual a la composición

$$\circ_{\mathfrak{C}(Y,\ )^*(X,S),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(Z,W),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(H,P)} \circ \left(\mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(X,S),(Z,W)} \times \mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(Z,W),(H,P)}\right)$$

evaluada en (σ,τ). Entonces el funtor

$$\mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(X,S),(H,P)} \circ \left(\circ_{(X,S),(Z,W),(H,P)}\right)$$

es igual al funtor

$$\circ_{\mathfrak{C}(Y,\ )^*(X,S),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(Z,W),\mathfrak{C}(Y,\ )^*(H,P)} \circ \left(\mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(X,S),(Z,W)} \times \mathfrak{C}(Y,\ )^*_{(Z,W),(H,P)}\right)\ .$$

Por lo tanto $\mathfrak{C}(Y,\ )^*$ es 2-funtor.

En seguida mostramos que $Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),\ ) = \mathfrak{C}(Y,\ )^{\mathfrak{C}(Y,\ )}$.

Sean (X,S) y Y, objetos de las 2-categorías $Mnd(\mathfrak{C})$ y $\mathfrak{C}$ respectivamente. Por ser $\mathfrak{C}(Y,\ ) : \mathfrak{C} \to Cat$ 2-funtor, $\big(\mathfrak{C}(Y,X),\mathfrak{C}(Y,S)\big)$ es una mónada en $Mnd(Cat)$. Un objeto (F,ξ_F) de $\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$ consta de objeto F de $\mathfrak{C}(Y,X)$ y la 1-celda $\xi_F : SF \to F$, que satisfacen las identidades

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\overline{\eta}F"] \arrow[dr, "1"'] & \mathfrak{C}(Y,S)F \arrow[d, "\xi_F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{C}(Y,S)\mathfrak{C}(Y,S)F \arrow[r, "\overline{\mu}_F"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(Y,S)\xi_F"'] & \mathfrak{C}(Y,S)F \arrow[d, "\xi_F"] \\ \mathfrak{C}(Y,S)F \arrow[r, "\xi_F"'] & F \end{tikzcd}$$

Las cuales nos garantizan la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd} & SF \arrow[dd, "\xi_F"] \\ F \arrow[ur, "\eta^S F"] \arrow[dr, "1"'] & \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & SF \arrow[r, "\xi_F"] & F \arrow[dd, "F"] \\ SSF \arrow[ur, "S\xi_F"] \arrow[dr, "\mu^S F"'] & & \\ & SF \arrow[r, "\xi_F"'] & F \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(F,\xi_F) : (Y,1) \to (X,S)$ es funtor de mónadas.

Para cualquier morfismo $k : (F, \xi_F) \to (G, \xi_G)$ en la categoría $\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$, la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} SF \arrow[r, "Sk"] \arrow[d, "\xi_F"'] & SG \arrow[d, "\xi_G"] \\ S \arrow[r, "k"'] & G \end{tikzcd}$$

nos dice que k es transformación funtor de mónadas.

Así $\quad \mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \subseteq Mnd(\mathfrak{C})\big((Y,1),(X,S)\big)$.
Es inmediato que $Mnd(\mathfrak{C})\big((Y,1),(X,S)\big) \subseteq \mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$ también se cumple.
Por lo tanto $\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} = Mnd(\mathfrak{C})\big((Y,1),(X,S)\big)$.

Sea la 1-celda $(U,\phi) : (X,S) \to (Z,W)$ en $Mnd(\mathfrak{C})$. Para el funtor

$$D\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(U,\phi) : \mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \to \mathfrak{C}(Y,Z)^{\mathfrak{C}(Y,W)}$$

tenemos que

$$D(\mathfrak{C}(Y,U),\mathfrak{C}(Y,\phi))(F,\xi_F) = (\mathfrak{C}(Y,U)F, \mathfrak{C}(Y,U)\xi_F\mathfrak{C}(Y,\phi)F) =$$
$$(UF, U\xi_F\phi F)$$
$$y$$
$$D(\mathfrak{C}(Y,U),\mathfrak{C}(Y,\phi))k = \mathfrak{C}(Y,U)k = Uk$$

para $k : (F,\xi_F) \to (G,\xi_G)$ en $\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$.

Pero, para el funtor

$$Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),(U,\phi)) : Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),(X,S)) \to Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),(Z,W))$$

se tiene que:

$$Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),(U,\phi))(F,\xi_F) = (U,\phi)(F,\xi_F) = (UF, U\xi_F\phi F)$$
$$Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),(U,\phi))K = (U,\phi)k = Uk.$$

Por lo que

$$D\mathfrak{C}(Y,\ \ )^*(U,\phi) = Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),\ \ )(U,\phi).$$

Es sencillo mostrar que

$$D(\mathfrak{C}(Y,\sigma) = Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),\sigma)$$

para cualquier 2-celda $\sigma : (U,\phi) \Rightarrow (U_1,\phi_1)$.

Por lo tanto:

$$Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),\ \ ) = \mathfrak{C}(Y,\ \ )^{\mathfrak{C}(Y,\ \ )}$$

Ahora procedemos a exhibir un isomorfismo 2-natural

$$\Phi : \mathfrak{C}(Y,\ \ )^{\mathfrak{C}(Y,\ \ )} \to \mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}})\ \ .$$

Tenemos los 2-funtores

$$\mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}}) : Mnd(\mathfrak{C}) \to \mathbf{Cat}$$
$$Mnd(\mathfrak{C})((Y,1),\ \ ) : Mnd(\mathfrak{C}) \to \mathbf{Cat}\ \ .$$

El primero de ellos es 2-funtor por ser la composición de

$$Mnd(\mathfrak{C}) \xrightarrow{Alg_{\mathfrak{C}}} \mathfrak{C} \xrightarrow{\mathfrak{C}(Y,\ \ )} \mathbf{Cat}$$

mientras que el último es 2-funtor por 1.45, la 2-categoría en turno es $Mnd(\mathfrak{C})$ y $A = (Y, 1)$.

Por hipótesis para los 2-funtores

$$\mathfrak{C}^* \times Mnd(\mathfrak{C}) \xrightarrow{Mnd(\mathfrak{C})(Inc_{\mathfrak{C}},\ \ ), \mathfrak{C}(\ \ , Alg_{\mathfrak{C}})} \mathbf{Cat}$$

hay un isomorfismo 2-natural Θ

$$Mnd(\mathfrak{C})((Y, 1), (X, S)) \cong \mathfrak{C}(Y, X_S)$$

el cual es 2-natural en Y y (X, S). Por 1.48, Θ es 2-natural en (X, S) para cada Y. Entonces, para Y objeto de $\mathfrak{C}$ obtenemos la transformación 2-natural

$$\Phi : Mnd(\mathfrak{C})((Y, 1),\ \ ) \to \mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}})$$

cuya familia de 1-celdas es

$$\langle \Phi_{(X,S)} = \Theta_{Y,(X,S)} \rangle \ ;$$

y además $(\Phi_{(X.S)})^{-1} = (\Theta_{Y,(X,S)})^{-1}$ para cada (X, S) en $Mnd(\mathfrak{C})$. Ya que

$$Mnd(\mathfrak{C})((Y, 1),\ \ ) = \mathfrak{C}(Y,\ \ )^{\mathfrak{C}(Y,\ \ )} \ ,$$

Φ nos da un isomorfismo 2-natural de 2-funtores

$$\mathfrak{C}(Y, Alg_{\mathfrak{C}}) \cong \mathfrak{C}(Y,\ \ )^{\mathfrak{C}(Y,\ \ )} \ .$$

$\square$

Lo que nos ocupará el resto del capítulo es resolver cuando es cierto el recíproco de la situación:
Sea $J \dashv E$ una adjunción monádica que genera a (X, S), entonces $\mathfrak{C}(Y, J) \dashv \mathfrak{C}(Y, E)$ es una adjunción monádica que genera a $((Y, X), (Y, S))$.

En primer lugar utilizamos 3.2 para mostrar que $\mathfrak{C}(Y, N) = KM^Y$ para una 1-celda $K : \mathfrak{C}(Y, X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \to \mathfrak{C}(Y, X^S)$, $N : A \to X^S$ es la 1-celda comparación derecha de $J \dashv E$ y $M^Y : \mathfrak{C}(Y, A) \to \mathfrak{C}(Y, X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$ es la 1-celda comparación derecha de $\mathfrak{C}(Y, J) \dashv \mathfrak{C}(Y, E)$. Por último establecemos el lema y para su demostración hacemos uso de 1.52 .

Sea $J \dashv E$ una adjunción que genera la mónada (X, S). Por ser $\mathfrak{C}(Y,\ \ )$ 2-funtor $\mathfrak{C}(Y, J) \dashv \mathfrak{C}(Y, E)$ es una adjunción que genera la mónada $(\mathfrak{C}(Y, X), \mathfrak{C}(Y, S))$. Para cada Y objeto de $\mathfrak{C}$, $M^Y : \mathfrak{C}(Y, A) \to \mathfrak{C}(Y, X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}$ denota la 1-celda comparación derecha de la adjunción $\mathfrak{C}(Y, J) \dashv \mathfrak{C}(Y, E)$. Es decir, el diagrama

(6)
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(Y,X) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{C}(Y,J)"] \arrow[d, shift right, "J^{\mathfrak{C}(Y,S)}"'] & \mathfrak{C}(Y,A) \arrow[l, shift left, "\mathfrak{C}(Y,E)"] \arrow[dl, "M^Y"] \\
\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \arrow[u, shift right, "E^{\mathfrak{C}(Y,S)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La mónada $(\mathfrak{C}(Y,X),\mathfrak{C}(Y,S))$ también está generada por la adjunción $\mathfrak{C}(Y,J^S)\dashv\mathfrak{C}(Y,E^S)$ por ser $\mathfrak{C}(Y,\ \ )$ funtor y (X,S) estar generada por $J^S\dashv E^S$. Llamamos K' a la 1-celda comparación derecha de tal adjunción. El correspondiente diagrama conmutativo es

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(Y,X) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{C}(Y,J^S)"] \arrow[d, shift right, "J^{\mathfrak{C}(Y,S)}"'] & \mathfrak{C}(Y,X^S) \arrow[l, shift left, "\mathfrak{C}(Y,E^S)"] \arrow[dl, "K'"] \\
\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \arrow[u, shift right, "E^{\mathfrak{C}(Y,S)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Hallamos también la 1-celda comparación derecha K para la adjunción $J^{\mathfrak{C}(Y,S)}\dashv E^{\mathfrak{C}(Y,S)}$ considerando el 2-isomorfismo natural

$$\mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)}\cong\mathfrak{C}(Y,X^S).$$

Obtemos el siguiente digrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(Y,X) \arrow[r, shift left, "J^{\mathfrak{C}(Y,S)}"] \arrow[d, shift right, "\mathfrak{C}(Y,J^S)"'] & \mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \arrow[l, shift left, "E^{\mathfrak{C}(Y,S)}"] \arrow[dl, "K"] \\
\mathfrak{C}(Y,X^S) \arrow[u, shift right, "\mathfrak{C}(Y,E^S)"'] &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

La 1-celda $K'K$ satisface

$$\begin{aligned} K'KJ^{\mathfrak{C}(Y,S)} &= K'\mathfrak{C}(Y,J^S)=J^{\mathfrak{C}(Y,S)} \\ E^{\mathfrak{C}(Y,S)}K'K &= \mathfrak{C}(Y,E^S)K=E^{\mathfrak{C}(Y,S)}\ . \end{aligned}$$

Por (2.10) tenemos, $K'K=1$. La identidad $KK'=1$ se obtiene de modo semejante.

Puesto que $N:A\to X^S$ es la 1-celda comparación derecha de la adjunción $J\dashv E$ y por ser $\mathfrak{C}(Y,\ \ )$ 2-funtor, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(Y,X) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{C}(Y,J)"] \arrow[d, shift right, "\mathfrak{C}(Y,J^S)"'] & \mathfrak{C}(Y,A) \arrow[l, shift left, "\mathfrak{C}(Y,E)"] \arrow[dl, "\mathfrak{C}(Y,N)"] \\
\mathfrak{C}(Y,X^S) \arrow[u, shift right, "\mathfrak{C}(Y,E^S)"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $\mathfrak{C}(Y,N)$ es la 1-celda comparación de la adjunción $\mathfrak{C}(Y,J) \dashv \mathfrak{C}(Y,E)$. Además

$$KM^Y\mathfrak{C}(Y,J) = KJ^{\mathfrak{C}(Y,S)} = \mathfrak{C}(Y,J^S)$$

$$y$$

$$\mathfrak{C}(Y,E^S)KM^Y = E^{\mathfrak{C}(Y,S)}M^Y = \mathfrak{C}(Y,E) \ .$$

Así, por (2.10), se cumple

$$KM^Y = \mathfrak{C}(Y,N) \ . \tag{8}$$

De esta forma, por 6 , 7 y 8 , el siguiente diagrama en **Cat** es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(Y,A) \arrow[rr, "\mathfrak{C}(Y,N)"] \arrow[dr, "M^Y"'] \arrow[ddr, "\mathfrak{C}(Y,E)"'] & & \mathfrak{C}(Y,X^S) \arrow[ddl, "\mathfrak{C}(Y,E^S)"] \\
& \mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \arrow[ur, "K"'] \arrow[d, "E^{\mathfrak{C}(Y,S)}"] & \\
& \mathfrak{C}(Y,X) &
\end{tikzcd}$$

Corolario 3.3. *Una adjunción $J \dashv E$ en una 2-categoría $\mathfrak{C}$ es monádica si y sólo si, para cada $Y \in \mathfrak{C}$, la adjunción $\mathfrak{C}(Y,J) \dashv \mathfrak{C}(Y,E)$ es monádica.*

Demostración. Sea $N' : X^S \to A$ tal que $N'N = 1$ y $NN' = 1$, entonces

$$\mathfrak{C}(Y,N)\mathfrak{C}(Y,N') = 1 \quad y \quad \mathfrak{C}(Y,N')\mathfrak{C}(Y,N) = 1.$$

De modo que

$$\mathfrak{C}(Y,N')KM^Y = \mathfrak{C}(Y,N')\mathfrak{C}(Y,N) = 1 \quad y$$

$$M^Y\mathfrak{C}(Y,N')K = K'\mathfrak{C}(Y,N)\mathfrak{C}(Y,N')K = 1$$

Por lo tanto la adjunción $\mathfrak{C}(Y,J) \dashv \mathfrak{C}(Y,E)$ es mónadica.

Supongamos que existe $M' : \mathfrak{C}(Y,X)^{\mathfrak{C}(Y,S)} \to \mathfrak{C}(Y,A)$ para la cual

$$MM' = 1 \quad y \quad M'M = 1$$

Tenemos $M'K'\mathfrak{C}(Y,N) = M'M^Y = 1$ y $\mathfrak{C}(Y,N)M'K' = KM^YM'K' = 1$.
Por 1.52 existe una única 1-celda $H : X^S \to A$ tal que
$\mathfrak{C}(Y,H) = M'K' : \mathfrak{C}(Y,X^S) \to \mathfrak{C}(Y,A)$ con $NH = 1$ y $HN = 1$.
Por lo tanto la adjunción $J \dashv E$ es monádica.

$\square$

CAPíTULO 4

Dualidad

Los resultados de este capítulo se dan o hacen referencia a 2-categorías que tienen características peculiares, pues están involucradas 2-categorías nuevas que son el resultado de invertir el sentido de 1-celdas, 2-celdas o ambas en una 2-categoría $\mathfrak{C}$. No empleamos el rigor formal para mostrar que tales construcciones son 2-categorías.

Sea $\mathfrak{C}$ una 2-categoría. $\mathfrak{C}^*$ denota la 2-categoría obtenida a partir de $\mathfrak{C}$ invirtiendo el sentido de las 1-celdas (así que $\mathfrak{C}^*(X,Y) = \mathfrak{C}(Y,X)$), $\mathfrak{C}_*$ denota la 2-categoría obtenida a partir de $\mathfrak{C}$ invirtiendo el sentido de las 2-celdas (así que $\mathfrak{C}_*(X,Y) = \mathfrak{C}(X,Y)^{op}$), y sea $\mathfrak{C}^*_*$ la 2-categoría obtenida a partir de $\mathfrak{C}$ invirtiendo el sentido de 1-celdas y 2-celdas (es decir $\mathfrak{C}^*_*(X,Y) = \mathfrak{C}(Y,X)^{op}$).

Sean $E : A \to X, J : X \to A$ 1-celdas de $\mathfrak{C}$ y $J \dashv E$, con unidad $\eta : 1 \to EJ$ y counidad $\epsilon : JE \to 1$. Obtenemos una adjunción para cada una de las 2-categorías del párrafo anterior a partir de tal adjunción. En $\mathfrak{C}^*$, $E : X \to A, J : A \to X$ son 1-celdas; $E \dashv J$ con unidad $\eta : 1 \to JE$ y counidad $\epsilon : EJ \to 1$. En $\mathfrak{C}_*$, $E : A \to X, J : X \to A$ son 1-celdas; $E \dashv J$ con unidad $\epsilon : 1 \to JE$ y counidad $\eta : EJ \to 1$. Finalmente, en $\mathfrak{C}^*_*$, $E : X \to A, J : A \to X$ son 1-celdas; $J \dashv E$ con unidad $\epsilon : 1 \to EJ$ y counidad $\eta : JE \to 1$.

Desde luego, tenemos también a las 2-categorías $Mnd(\mathfrak{C}^*)$, $Mnd(\mathfrak{C}_*)$, $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$, etc. Una mónada en $\mathfrak{C}^*$ es una mónada en $\mathfrak{C}$. Una mónada en $\mathfrak{C}_*$ es llamada una comónada en $\mathfrak{C}$; una comónada (X, G) en $\mathfrak{C}$ consiste de un objeto X de $\mathfrak{C}$, una 1-celda $G : X \to X$ de $\mathfrak{C}$ y dos 2-celdas $\epsilon : G \to 1, \delta : G \to GG$ (llamadas la counidad y la comultiplicación), que satisfacen los diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
G & GG \arrow[l, "G\epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon G"] & G \\
& G \arrow[ul, "1"] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GGG & GG \arrow[l, "\delta G"'] \\
GG \arrow[u, "G\delta"] & G \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
$$

Una mónada en $\mathfrak{C}^*_*$ es también una comónada en $\mathfrak{C}$.

Sean $(X, S), (Y, T)$ mónadas y $J : Y \to X$ adjunto izquierdo de $E : X \to Y$ en $\mathfrak{C}$. Mostramos primero, en el próximo teorema, un resultado evidente a simple vista:
$\mathfrak{C}(X,Y)(TE, ES) \cong \mathfrak{C}(Y,X)(JT, SJ)$. También en el mismo teorema demostramos el siguiente hecho no tan evidente: existe una biyección entre 1-celdas (E, ψ) de $Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)]$ y 1-celdas (J, w) de $Mnd(\mathfrak{C}^*)^*[(Y,T),(X,S)]$.

Antes necesitamos describir la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C}^*)^*$. Sus objetos son mónadas de $\mathfrak{C}$. Una 1-celda $(U, \psi) : (X,S) \to (Y,T)$ (llamada opfuntor de mónadas de $\mathfrak{C}$), consiste de una 1-celda

$U : X \to Y$ de $\mathfrak{C}$ y una 2-celda $\psi : US \Rightarrow TU$ de $\mathfrak{C}$ que satisfacen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
 & US \arrow[dd, "\psi"] \\
U \arrow[ur, "U\eta^S"] \arrow[dr, "\eta^T U"'] & \\
 & TU
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & TUS \arrow[r, "T\psi"] & TTU \arrow[dd, "\mu^T U"] \\
USS \arrow[ur, "\psi S"] \arrow[dr, "U\mu^S"'] & & \\
 & US \arrow[r, "\psi"'] & TU
\end{tikzcd}$$

Una 2-celda $\tau : (U, \psi) \to (U', \psi')$ de $Mnd(\mathfrak{C}^*)^*$, llamada transformación de opfuntores de mónadas de $\mathfrak{C}$, es una 2-celda $\tau : U \to U'$ de $\mathfrak{C}$ tal que $T\tau.\psi = \psi'.\tau S$.

Teorema 4.1. *En una 2-categoría $\mathfrak{C}$, supongamos que $(X, S), (Y, T)$ son mónadas y que $J : Y \to X$ es adjunto izquierdo de $E : X \to Y$ en $\mathfrak{C}$. Entonces la adjunción $J \dashv E$ da una biyección de conjuntos $\mathfrak{C}(X, Y)(TE, ES) \cong \mathfrak{C}(Y, X)(JT, SJ)$, que induce una biyección entre el conjunto de 2-celdas $\chi : TE \to ES$ tales que $(E, \chi) : (X, S) \to (Y, T)$ es un funtor de mónadas, y el conjunto de 2-celdas $\omega : JT \to SJ$ tales que $(J, \omega) : (Y, T) \to (X, S)$ es un opfuntor de mónadas.*

Demostración. Sean

$$\Theta : \mathfrak{C}(X, Y)(TE, ES) \to \mathfrak{C}(Y, X)(JT, SJ)$$

la función definida en $\psi : TE \Rightarrow ES$ como

$$\Theta(\psi) = \epsilon SJ.J\psi J.JT\eta \ ,$$

y la función

$$\Theta' : \mathfrak{C}(Y, X)(JT, SJ) \to \mathfrak{C}(X, Y)(TE, ES)$$

definida como

$$\Theta'(\lambda) = ES\epsilon.E\lambda E.\eta TE$$

para $\lambda : JT \Rightarrow SJ$.

Para $\psi \in \mathfrak{C}(X, Y)(TE, ES)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "J"] \arrow[r, phantom, shift right=5, "\Downarrow\eta"] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\psi"] & Y \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "J"] \arrow[r, phantom, shift right=5, "\Downarrow\eta"] & Y \\
X \arrow[u, "E"] \arrow[r, "1"'] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\Downarrow\epsilon"] & X \arrow[u, "E"] \arrow[r, "S"'] & X \arrow[u, "E"] \arrow[r, "1"'] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\Downarrow\epsilon"] & X \arrow[u, "E"']
\end{tikzcd}$$

Por lo que $(\Theta'\Theta)(\psi) = \psi$.

De manera semejante se llega a que $\Theta\Theta' = 1$. Por lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Sea $(J,\omega):(Y,T)\to(X,S)$ un opfuntor de mónadas. Tenemos

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\omega"] & Y \arrow[d, "J"] \\
X \arrow[r, "S"'] & X
\end{tikzcd}$$

y los correspondientes diagramas conmutativos, en $\mathfrak{C}$,

(9)
$$\begin{tikzcd}
 & JT \arrow[dd, "\omega"] \\
J \arrow[ur, "J\eta^T"] \arrow[dr, "\eta^S J"'] & \\
 & SJ
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & SJT \arrow[r, "S\omega"] & SSJ \arrow[dd, "\mu^S J"] \\
JTT \arrow[ur, "\omega T"] \arrow[dr, "J\mu^T"'] & & \\
 & JT \arrow[r, "\omega"'] & SJ
\end{tikzcd}$$

Para el funtor de mónadas $(E,\psi):(X,S)\to(Y,T)$ con sus respectivas "igualdades"

(10)
$$\psi.\eta^T E = E\eta^S \quad y \quad \psi.\mu^T E = E\mu^S.\psi S.T\psi \ \ ,$$

tenemos la 2-celda $\epsilon SJ, J\psi J.JT\eta : JT \Rightarrow SJ$.
El diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "J"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\eta"] & Y \arrow[r, "T"'] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\eta^T \Downarrow"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\psi"] & Y \arrow[dr, "J"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\epsilon"] & \\
 & X \arrow[u, "E"] \arrow[r, "S"'] & X \arrow[u, "E"'] \arrow[r, "1"'] & X
\end{tikzcd}$$

corresponde a la composición vertical de las 2-celdas $J\eta^T, JT\eta, J\psi J$ y ϵSJ.
Tenemos así que por (10)

$$\epsilon SJ.J\psi J.JT\eta.J\eta^T = \epsilon SJ.J\psi J.(J\eta^T\eta) = \epsilon SJ.J\psi J.J\eta^T EJ.J\eta = \epsilon SJ.JE\eta^S J.J\eta$$

Además, según los diagramas

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "J"'] \arrow[rrr, bend left=20, "1"] & X \arrow[r, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\eta\Downarrow"] \arrow[r, bend right=50, "S"'] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\eta^S \Downarrow"] & X \arrow[r, "E"] \arrow[rr, bend right=30, "1"'] & Y \arrow[r, "J"] \arrow[d, phantom, "\epsilon \Downarrow"] & X \\
 & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, bend left=40, "J"] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "1_J \Downarrow"] \arrow[r, "J"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\eta^S J \Downarrow"] \arrow[r, bend right=40, "SJ"'] & X \arrow[r, bend left=40, "JE"] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\epsilon \Downarrow"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "1_1 \Downarrow"] \arrow[r, bend right=40, "1"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\epsilon SJ.JE\eta^S J.J\eta = \epsilon\eta^S J.J\eta = 1_1\eta^S J.\epsilon J.J\eta = \eta^S J \ \ .$$

A la composición vertical de las 2-celdas $\mu^S J, S(\epsilon SJ.J\psi J.JT\eta)$ y $(\epsilon SJ.J\psi J.JT\eta)T$ corresponde el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "J"] \arrow[rr, bend left=40, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\eta\Downarrow"] & X \arrow[r, "E"] \arrow[drr, "S"'] \arrow[drrrr, bend right=50, "S"'] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\psi\Downarrow"] & Y \arrow[r, "J"] \arrow[rr, bend left=40, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\eta\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & X \arrow[r, "E"] \arrow[dr, "S"] \arrow[d, phantom, "\mu^S\Downarrow"] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\psi\Downarrow"] & Y \arrow[r, "J"] \arrow[d, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & Y \\
& & & X \arrow[u, "E"'] \arrow[ur, "1"'] & & X \arrow[ur, "E"] \arrow[urr, "1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

De esta forma

$$
\begin{gathered}
\mu^S J.S(\epsilon SJ.J\psi J.JT\eta).(\epsilon SJ.J\psi J.Jt\eta)T = \mu^S J.\big((\epsilon S.J\psi)(\epsilon S.J\psi)\big)J.JT\eta T\eta = \\
\mu^S J.(\epsilon S.J\psi)SJ.JTE(\epsilon S.J\psi)J.JT\eta TEJ.JTT\eta = \\
\mu^S T.(\epsilon S.J\psi)SJ.JTE\epsilon SJ.JT\eta ESJ.JT\psi J.JTT\eta = \mu^S J.(\epsilon S.J\psi)SJ.JT\psi J.JTT\eta
\end{gathered}
$$

En la anterior sucesión de igualdades la última igualdad es cierta ya que $E\epsilon.\eta E = 1$; entonces se modifica nuestro diagrama de la siguiente manera

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "J"] \arrow[rr, bend left=40, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\eta\Downarrow"] & X \arrow[r, "E"] \arrow[drr, "S"'] \arrow[drrr, bend right=50, "S"'] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\psi\Downarrow"] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\psi\Downarrow"] & Y \arrow[r, "J"] \arrow[d, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & X \\
& & & X \arrow[u, "E"'] \arrow[r, "S"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\mu^S\Downarrow"] & X \arrow[u, "E"'] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Continuando el cálculo de la composición vertical de las 2-celdas hallamos que

$$
\begin{gathered}
\mu^S J.(\epsilon S.J\psi)SJ.JT\psi J.JTT\eta = \mu^S J.\epsilon SSJ.J\psi SJ.JT\psi J.JTT\eta = \\
\epsilon SJ.JE\mu^S J.J\psi SJ.JT\psi J.JTT\eta = \epsilon SJ.J\psi J.J\mu^T EJ.JTT\eta
\end{gathered}
$$

La última de dichas igualdades se tiene por (10). Luego, nuestro digrama anterior se simplifica

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "J"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\eta\Downarrow"] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right=20, "T"'] \arrow[d, phantom, shift right=1ex, "\psi\Downarrow"] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\mu^T\Downarrow"] & Y \arrow[r, "J"] \arrow[d, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & X \\
& X \arrow[u, "E"'] \arrow[dr, "S"'] & & & \\
& & X \arrow[uur, "E"] \arrow[uurr, "1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, $\epsilon SJ.J\psi J.J\mu^T EJ.JTT\eta = \epsilon SJ.J\psi J.JT\eta J\mu^T$.
Por lo tanto, según (9), $(J, \epsilon SJ.J\psi J.TT\eta) : (Y,T) \to (X,S)$ es opfuntor de mónadas.

El caso en que $(J,\omega) : (Y,T) \to (X,S)$ es un opfuntor de mónadas y a partir de él obtenemos un funtor de mónadas $(E,\psi) : (X,S) \to (Y,T)$ es de manera similar. La existencia de Θ junto con que a partir de un funtor de mónadas $(E,\psi) : (X,S) \to (Y,T)$ obtenemos un opfuntor de mónadas $(J,\Theta(\psi)) : (Y,T) \to (X,S)$ y viceversa, muestra que la segunda parte del teorema se cumple.

Si ψ, ω se corresponden bajo la biyección del teorema, entonces decimos que (J,ω) es adjunto izquierdo de (E,ψ) y lo escribimos $(J,\omega) \dashv (E,\psi)$.

$\square$

Ya al principio del capítulo la situación de tener 1-celdas $E : A \to X, J : X \to A$ de $\mathfrak{C}$ tal que $J \dashv E$, con unidad $\eta : 1 \to EJ$ y counidad $\epsilon : JE \to 1$; se interpreta en $\mathfrak{C}^*$ como: $E : X \to A, J : A \to X$ son 1-celdas tal que $E \dashv J$ con unidad $\eta : 1 \to JE$ y counidad $\epsilon : EJ \to 1$. Analizamos ahora cómo se comportan aquellas mónadas que son generadas por una adjunción.

Teorema 4.2. *Sea (X,S) una mónada en $\mathfrak{C}$ (por lo tanto también en $\mathfrak{C}^*$). Entonces la adjunción $J \dashv E$ en $\mathfrak{C}$ genera la mónada (X,S) si y sólo si la adjunción $E \dashv J$ en $\mathfrak{C}^*$ genera (X,S).*

Demostración. En la 2-categoría $\mathfrak{C}$ sean (X,S) una mónada, con sus diagramas

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "S\eta"] \arrow[dr, "1"'] & SS \arrow[d, "E\epsilon J"] & S \arrow[l, "\eta S"'] \arrow[dl, "1"] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SSS \arrow[r, "SE\epsilon J"] \arrow[d, "E\epsilon JS"'] & SS \arrow[d, "E\epsilon J"] \\ SS \arrow[r, "E\epsilon J"'] & S \end{tikzcd}$$

conmutativos, $J : X \to Y$ *y* $E : Y \to X$ 1-celdas en $\mathfrak{C}$ tales que $J \dashv E$ y las 2-celdas

$$\eta : 1 \to EJ, \quad \epsilon : JE \to 1$$

que satisfacen

$$\epsilon J.J\eta = 1 \ \ y \ \ E\epsilon.\eta E = 1 \ .$$

Además, se tiene que $(X,S) = (X, EJ, \eta, E\epsilon J)$

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría $\mathfrak{C}^*$ tenemos la mónada (X,S), con sus diagramas

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta S"] \arrow[dr, "1"'] & SS \arrow[d, "J\epsilon E"] & S \arrow[l, "S\eta"'] \arrow[dl, "1"] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SSS \arrow[r, "J\epsilon ES"] \arrow[d, "SJ\epsilon E"'] & SS \arrow[d, "J\epsilon E"] \\ SS \arrow[r, "J\epsilon E"'] & S \end{tikzcd}$$

conmutativos, las 1-celdas $E : X \to Y$ *y* $J : Y \to X$ tales que $E \dashv J$ y las 2-celdas

$$\eta : 1 \to JE \quad , \quad \epsilon : EJ \to 1 \ ,$$

las cuales cumplen

$$J\epsilon.\eta J = 1 \quad y \quad \epsilon E.E\eta = 1 \ .$$

Se tiene también que $(X,S) = (X, JE, \eta, J\epsilon E)$.

$\square$

Combinando (2.9) y (4.2), tenemos

Corolario 4.3. *Si $\mathfrak{C}^*$ admite la construcción de álgebras, entonces cada mónada en $\mathfrak{C}$ está generada por una adjunción.*

La 2-categoría $\mathfrak{C}^*$ admite la construcción de álgebras cuando $Inc_{\mathfrak{C}^*}$ tiene 2-adjunto derecho $Alg_{\mathfrak{C}^*} : Mnd(\mathfrak{C}^*) \to \mathfrak{C}^*$. Esto es lo mismo que decir que $(Inc_{\mathfrak{C}^*})^* : \mathfrak{C} \to Mnd(\mathfrak{C}^*)^*$ tiene 2-adjunto izquierdo $(Alg_{\mathfrak{C}^*})^* : Mnd(\mathfrak{C}^*)^* \to \mathfrak{C}$. Escribimos $(Alg_{\mathfrak{C}^*})^*(X, S) = X_S$ y $(J_S, \omega) : (X, S) \to (X_S, 1)$ para el opfuntor de mónadas en $\mathfrak{C}$ que es la unidad evaluada de la adjunción. Entonces $E_S : X_S \to X$ está definida por $S = E_S J_S, \quad \mu = E_S\omega$.

Describimos la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ pues nuestro propósito es construir el 2-funtor $\overline{Alg_{\mathfrak{C}}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$.

(X, G) es un objeto de $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_* \Leftrightarrow (X, G)$ es un objeto de $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^* \Leftrightarrow (X, G)$ es un objeto de $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$.
En la 2-categoría $\mathfrak{C}^*_*$: $G : X \to X$, $\eta : 1 \Rightarrow G$ y $\mu : GG \Rightarrow G$ tales que $\mu.G\eta = \mu.\eta G = 1_G$ y $\mu.\mu S = \mu.S\mu \Leftrightarrow$ en la 2-categoría $\mathfrak{C}$, $G : X \to X$, $\eta : G \Rightarrow 1$ y $\mu : G \Rightarrow GG$ con $\eta S.\mu = S\eta.\mu = 1$ y $S\mu.\mu = \mu S.\mu$. Por lo tanto, (X, G) es una comónada en $\mathfrak{C}$.
Sea la 1-celda $(U, \phi) : (X, G) \to (Y, H)$ en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_* \Leftrightarrow (U, \phi) : (Y, H) \to (X, G)$ es 1-celda en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$.
En la 2-categoría $\mathfrak{C}^*_*$ tenemos $\phi : GU \Rightarrow UH$, $\phi.\eta^G U = U\eta^H$ y $\phi.\mu^G U = U\mu^H.\phi H.G\phi \Leftrightarrow$ en la 2-categoría $\mathfrak{C}$, $\phi : HU \Rightarrow UG$, $U\eta^G.\phi = \eta^H U$ y $U\mu^G.\phi = \phi G.H\phi.\mu^H U$. (U, ϕ) es llamada un opfuntor de comónadas.
En la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ tenemos $\sigma : (U, \phi) \Rightarrow (U', \phi') \Leftrightarrow$ en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$ $\sigma : (U', \phi') \Rightarrow (U, \phi)$.
En la 2-categoría $\mathfrak{C}^*_*$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
GU' \arrow[r, "G\sigma"] \arrow[d, "\phi'"'] & GU \arrow[d, "\phi"] \\
U'H \arrow[r, "\sigma H"'] & UH
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto en la 2-categoría $\mathfrak{C}$, $\phi'.H\sigma = \sigma G.\phi$. La 2-celda $\sigma : (U, \phi) :\Rightarrow (U', \phi')$ es llamada una transformación de opfuntores de comónadas.

Sean la 2-categoría que admite la construcción de álgebras y

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[rr, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[rr, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma \Downarrow"] & & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

objetos, 1-celdas y 2-celdas en $Mnd(\mathfrak{C})$. Construimos

$$\begin{tikzcd}
(X^S, E^S J^S) \arrow[rr, bend left, "{(\overline{U},\overline{\phi})}"] \arrow[rr, bend right, "{(\overline{U_1},\overline{\phi_1})}"'] \arrow[rr, phantom, "\overline{\sigma} \Downarrow"] & & (Y^T, E^T J^T)
\end{tikzcd}$$

objetos, 1-celdas y 2-celdas en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$.

La 1-celda $\overline{U} : X^S \to Y^T$ está definida por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[r, "(\overline{U},1)"] \arrow[d, "(E^S{,}\chi)"'] & ((Y^T,1) \arrow[d, "(E^T{,}\chi)"] \\
(X,S) \arrow[r, "(U{,}\phi)"'] & (Y,T)
\end{tikzcd} \tag{11}$$

en $Mnd(\mathfrak{C})$.

Mostramos que la 2-celda ϕE^S es transformación funtor de mónadas; en diagramas

$$\begin{tikzcd}
X^S \arrow[r, bend left, "J^TE^T\overline{U}"] \arrow[r, phantom, "\overline{\phi}\Downarrow"] \arrow[r, bend right, "\overline{U}J^SE^S"'] & Y^T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[r, bend left, "(E^T(J^TE^T\overline{U}){,}\chi J^TE^T\overline{U})"] \arrow[r, phantom, "\phi E^S\Downarrow"] \arrow[r, bend right, "(E^T(\overline{U}J^SE^S){,}\chi\overline{U}J^SE^S)"'] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

Si consideramos que por (5) y (11)

$$\begin{aligned} &U\mu^S.\phi S = U(E^S\epsilon^S J^S).\phi S = E^T\overline{U}\epsilon^S J^S.\phi S = \\ &(UE^S\epsilon^S.\phi E^S)J^S = (U\chi^S.\phi E^S)J^S = \chi^T\overline{U}J^S \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

Entonces por (4), (5) y (12)

$$\begin{gathered} \phi E^S.\chi^T J^T E^T\overline{U} = \phi E^S.E^T\epsilon^T J^T E^T\overline{U} = \phi E^S.\mu^T\epsilon^T\overline{U} = \phi E^S.\mu^T UE^S = \\ (\phi.\mu^T U)E^S = (U\mu^S.\phi S.T\phi)E^S = (\chi^T\overline{U}J^S.T\phi)E^S \end{gathered}$$

Así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TE^T(J^TE^T\overline{U}) \arrow[r, "T\phi E^S"] \arrow[d, "\chi^TJ^TE^T\overline{U}"'] & TE^T(\overline{U}J^SE^S) \arrow[d, "\chi^T\overline{U}J^SE^S"] \\
E^T(J^TE^T\overline{U})1 \arrow[r, "\phi E^S 1"'] & E^T(\overline{U}J^SE^S)1
\end{tikzcd}$$

conmuta; por lo tanto ϕE^S es transformación funtor de mónadas; entonces queda garantizada la existencia de $\overline{\phi}$ y

$$E^T\overline{\phi} = \phi E^S : TUE^S \Rightarrow USE^S \quad . \tag{13}$$

La 1-celda $(\overline{U},\overline{\phi}) : (X^S, E^SJ^S) \to (Y^T, E^TJ^T)$ es un opfuntor de comónadas. En detalle: Veamos que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& J^TE^T\overline{U} \arrow[dl, "\epsilon^T\overline{U}"'] \arrow[dd, "\overline{\phi}"] \\
\overline{U} & \\
& \overline{U}J^SE^S \arrow[ul, "\overline{U}\epsilon^S"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& J^TE^TJ^TE^T\overline{U} \arrow[r, "J^TE^T\overline{\phi}"] & J^TE^T\overline{U}J^SE^S \arrow[dd, "\overline{\phi}J^SE^S"] \\
J^TE^T\overline{U} \arrow[ur, "J^T\eta^TE^T\overline{U}"] \arrow[dr, "\overline{\phi}"'] & & \\
& \overline{U}J^SE^S \arrow[r, "\overline{U}J^S\eta^SE^S"'] & \overline{U}J^SE^SJ^SE^S
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Aplicando E^T a ambos diagramas, en primer lugar por (5) y (11) tenemos que

$$E^T(\overline{U}\epsilon^S.\overline{\phi}) = E^T\overline{U}\epsilon^S.E^T\overline{\phi} = UE^S\epsilon^S.\phi E^S = U\chi^S.\phi E^S = \chi^T\overline{U} = E^T\epsilon^T\overline{U} = E^T(\epsilon^T\overline{U}) \ ,$$

entonces, por la propiedad universal de E^T, $\overline{U}\epsilon^S.\overline{\phi} = \epsilon^T\overline{U}$.

Por otra parte en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "S"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\eta^S \Downarrow"] & X \arrow[r, "U"] \arrow[dr, "S"'] & Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\phi \Downarrow"] & Y \\
& & X \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

se observa que

$$US\eta^S.\phi = \phi S.TU\eta^S \tag{14}$$

Así por (11),(13),(14) y ya que (U,ϕ) es un funtor de mónadas, se sigue que:

$$\begin{gathered}
E^T(\overline{U}J^S\eta^S E^S.\overline{\phi}) = UE^S J^S\eta^S E^S.\phi E^S = (UE^S J^S\eta^S.\phi)E^S = \\
(US\eta^S.\phi)E^S = (\phi S.TU\eta^S)E^S = [\phi S.T(\phi.\eta^T U)] = (\phi S.T\phi.T\eta^T U)E^S = \\
\phi E^S J^S E^S.T\phi E^S.T\eta^T UE^S = E^T(\overline{\phi}J^S E^S.J^T E^T\overline{\phi}.J^T\eta^T E^T\overline{U})
\end{gathered}$$

por lo que $\overline{U}J^S\eta^S E^S.\overline{\phi} = \overline{\phi}J^S E^S.J^T E^T\overline{\phi}.J^T\eta^T E^T\overline{U}$.
Así $(\overline{U},\overline{\phi}) : (X^S, E^S J^S) \to (Y^T, E^T J^T)$ es un opfuntor de comónadas.

La propiedad universal de E^T nos dice que es suficiente que σE^S sea transformación funtor de mónadas para garantizar la existencia de $\overline{\sigma}$

$$\begin{tikzcd}
X^S \arrow[r, bend left=40, "\overline{U}"] \arrow[r, bend right=40, "\overline{U'}"'] \arrow[r, phantom, "\overline{\sigma} \Downarrow"] & Y^T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X^S, 1) \arrow[r, bend left=40, "(E^T\overline{U}{,}\chi\overline{U})"] \arrow[r, bend right=40, "(E^T\overline{U'}{,}\chi\overline{U'})"'] \arrow[r, phantom, "\sigma E^S \Downarrow"] & (Y, T)
\end{tikzcd}$$

Tenemos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^S \arrow[r, "E^S"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\chi^S \Swarrow"] & X \arrow[d, "S"] & \\
X^S \arrow[r, "E^S"'] & X \arrow[r, "U"] \arrow[r, bend right=40, "U'"'] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\sigma \Downarrow"] & Y
\end{tikzcd}$$

que se cumplen las igualdades:

$$\sigma E^S.U\chi^S = \sigma\chi^S \ \ y \ \ U'\chi^S.\sigma S E^S = \sigma\chi^S \tag{15}$$

Ahora bien por(5),(11), (13), (15) y por ser $(\overline{U},\overline{\phi})$ entonces

$$\sigma E^S.\chi^T\overline{U}=\sigma E^S.E^T\epsilon^T\overline{U}=\sigma E^S.E^T(\overline{U}\epsilon^S.\overline{\phi})=\sigma E^S.E^T\overline{U}\epsilon^S.E^T\overline{\phi}=$$

(16)

$$\sigma E^S.UE^S\epsilon^S.\phi E^S=\sigma E^S.U\chi^S.\phi E^S=(\sigma\chi^S).\phi E^S$$

Por otra parte utilizando que $(\overline{U'}.\overline{\phi'})$ es funtor de mónadas y que σ es transformación funtor de mónadas; además de (5),(11),(13) y (15), podemos decir que:

$$\chi^T\overline{U'}.T\sigma E^S=E^T\epsilon^T\overline{U'}.T\sigma E^S=E^T(\overline{U'}\epsilon^S.\overline{\phi'}).T\sigma E^S=$$
$$E^T\overline{U'}\epsilon^S.E^T\overline{\phi'}.T\sigma E^S=U'E^S\epsilon^S.\phi' E^S.T\sigma E^S=U'\chi^S.\phi' E^S.T\sigma E^S=U'\chi^S.(\phi'.T\sigma)E^S=$$
$$U'\chi^S.(\sigma S.\phi)E^S=U'\chi^S.\sigma SE^S.\phi E^S=(\sigma\chi^S).\phi E^S\quad .$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
TUE^S=TE^T\overline{U} \arrow[r, "T\sigma E^S"] \arrow[d, "\chi\overline{U}"'] & TE^T\overline{U'}=TU'E^S \arrow[d, "\chi\overline{U'}"] \\
UE^S=E^T\overline{U} \arrow[r, "\sigma E^S"'] & E^T\overline{U'}=U'E^S
\end{tikzcd}$$

conmuta. Así,

(17)
$$\sigma E^S=E^T\overline{\sigma}$$

es transformación funtor de mónadas y queda garantizada la existencia de $\overline{\sigma}$.

Que $\overline{\sigma}$ sea transformación funtor de mónadas quiere decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J^TE^T\overline{U} \arrow[r, "J^TE^T\overline{\sigma}"] \arrow[d, "\overline{\phi}"'] & J^TE^T\overline{U'} \arrow[d, "\overline{\phi'}"] \\
\overline{U}J^SE^S \arrow[r, "\overline{\sigma}J^SE^S"'] & \overline{U'}J^SE^S
\end{tikzcd}$$

conmute; lo cual se sigue de la propiedad universal de E^T, ya que por (13),(17) y por ser σ transformación funtor de mónadas se satisface:

$$E^T(\overline{\sigma}J^SE^S.\overline{\phi})=E^T\overline{\sigma}J^SE^S.E^T\overline{\phi}=\sigma E^SJ^SE^S.\phi E^S=$$
$$(\sigma E^SJ^S.\phi)E^S=(\sigma S.\phi)E^S=(\phi'.T\sigma)E^S=$$
$$\phi' E^S.E^TJ^T\sigma E^S=E^T\overline{\phi'}.E^TJ^TE^T\overline{\sigma}=E^T\big(\overline{\phi'}.J^TE^T\overline{\sigma}\big)\quad .$$

Por lo tanto $\overline{\sigma}$ es transformación funtor de mónadas.

El 2-funtor $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}:Mnd(\mathfrak{C})\to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ está definido como sigue:

$$\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S)=(X^S,E^SJ^S,\epsilon^S,E^S\eta^SJ^S),\ \ \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(U,\phi)=(\overline{U},\overline{\phi})\ \ y\ \ \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(\sigma)=\overline{\sigma}.$$

Verificamos que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}:Mnd(\mathfrak{C})\to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ es 2-funtor.

(i) $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}:Ob(Mnd(\mathfrak{C}))\to Ob(Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*)$ tal que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\big((X,S)\big)=(X^S,E^SJ^S)$.

(ii) $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}(X,S),(Y,T)} : Mnd(\mathfrak{C})[(X,S),(Y,T)] \to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*[(X^S, E^S J^S),(Y^T, E^T J^T)]$ es funtor.

En la situación

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(X,S) \arrow[rr, bend left=40, "{(U,\phi)}"] \arrow[rr, "{(U_1,\phi_1)}"] \arrow[rr, bend right=40, "{(U_2,\phi_2)}"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\sigma_1 \Downarrow"] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\sigma_2 \Downarrow"] & & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

Por definición de $\overline{\sigma_2.\sigma_1}$,$E^T(\overline{\sigma_2.\sigma_1}) = (\sigma_2.\sigma_1)E^S$, pero como

$$E^T(\overline{\sigma_2}.\overline{\sigma_1}) = E^T\overline{\sigma_2}.E^T\overline{\sigma_1} = \sigma_2 E^S.\sigma_1 E^S = (\sigma_2.\sigma_1)E^S$$

Así, por la propiedad universal de E^T tenemos que $\overline{\sigma_2.\sigma_1} = \overline{\sigma_2}.\overline{\sigma_1}$. Por lo tanto $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}(X,S),(Y,T)}(\sigma_2.\sigma_1) = \overline{Alg}_{\mathfrak{C}(X,S),(Y,T)}(\sigma_2).\overline{Alg}_{\mathfrak{C}(X,S),(Y,T)}(\sigma_1)$.
Ya que en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$, para

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(Y,H) \arrow[rr, bend left=30, "{(U,\phi)}"] \arrow[rr, "{(U_1,\phi_1)}"] \arrow[rr, bend right=30, "{(U_2,\phi_2)}"'] \arrow[rr, phantom, bend left=15, "\sigma \Downarrow"] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "\tau \Downarrow"] & & (X,G)
\end{tikzcd}$$

la composición vertical de σ y τ no es más que $\tau.\sigma$ (ésta es la composición vertical en $\mathfrak{C}^*_*$) entonces, para $(U,\phi) : (Y,H) \to (X,G)$ tenemos que $1_{(U,\phi)} = 1_U$ por lo que en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ $1_{(U,\phi)} = 1_U$ para $(U,\phi) : (X,G) \to (Y,H)$.
En $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$, $1_{(\overline{U},\overline{\phi})} = 1_{\overline{U}}$. Por definición de $\overline{1_U}, E^T\overline{1_U} = 1_U E^S$, pero
$E^T 1_{\overline{U}} = E^T\overline{U} = UE^S = 1_U E^S$. Entonces por la propiedad universal de E^T

$$\overline{Alg}_{\mathfrak{C}(X,S),(Y,T)}(1_{(U,\phi)}) = \overline{1_U} = 1_{\overline{U}} = 1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}\,(X,S),(Y,T)}(U,\phi)} \ .$$

Por lo tanto $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}(X,S),(Y,T)}$ es funtor.

(iii) En la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$, $1_{(X^S,E^S J^S)} = (1_{X^S}, 1_{E^S J^S})$ por lo que $1_{(X^S,E^S J^S)} = (1_{X^S}, 1_{E^S J^S})$ en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$. Sabemos que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\big((1_X, 1_S)\big) = (\overline{1_X}, \overline{1_S})$.
Como $\overline{1_X}$ es la única 1-celda que hace conmutativo al cuadrado

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
(X^S,1) \arrow[r, "{(\overline{1_X},1)}"] \arrow[d, "{(E^S,\chi)}"'] & (X^S,1) \arrow[d, "{(E^S,\chi)}"] \\
(X,S) \arrow[r, "{(1_X,1_S)}"'] & (X,S)
\end{tikzcd}$$

Luego se cumple $\overline{1_X} = 1_{X^S}$. En la 2-categoría $\mathfrak{C}$, $E^S\overline{1_S} = 1_S E^S$. Pero también, $E^S 1_{J^S E^S} = E^S J^S E^S = SE^S = 1_S E^S$, en consecuencia $(\overline{1_X}, \overline{1_S}) = (1_{X^S}, 1_{E^S J^S})$.
Por lo tanto $1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\left((X,S)\right)} = \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\big(1_{(X,S)}\big)$.

(iv) Sean (X,S), (Y,T), (Z,W) objetos de $Mnd(\mathfrak{C})$, tenemos

$$\begin{gathered}(\circ_{\overline{Alg}_{(X,S)}\,,\,\overline{Alg}_{(Y,T)}\,,\,\overline{Alg}_{(W,Z)}})(\overline{Alg}_{(X,S)\,,\,(Y,T)} \times \overline{Alg}_{(Y,T)\,,\,(Z,W)})\big((U,\phi)\,,\,(U_1,\phi_1)\big) = \\ (\circ_{\overline{Alg}_{(X,S)}\,,\,\overline{Alg}_{(Y,T)}\,,\,\overline{Alg}_{(W,Z)}})\big((\overline{U},\overline{\phi})\,,\,(\overline{U_1},\overline{\phi_1}) = (\overline{U_1}\,\overline{U},\overline{U_1}\,\overline{\phi}\,.\,\overline{\phi_1}\,\overline{U}) \quad y\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(\overline{Alg}_{(X,S)\,,\,(Z,W)})(\circ_{(X,S)\,,\,(Y,T)\,,\,(W,Z)})\big((U,\phi)\,,\,(U_1,\phi_1)\big) = \\ (\overline{Alg}_{(X,S)\,,\,(Z,W)})(U_1U,U_1\phi.\phi_1U) = (\overline{U_1U},\overline{U_1\phi.\phi_1U}) \ .\end{gathered}$$

Por definición de $\overline{U}$ y $\overline{U_1}$ los dos cuadrados pequeños con lado común (E^T,χ), en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[r, "(\overline{U}{,}1)"] \arrow[d, "(E^S{,}\chi)"'] & (Y^T,1) \arrow[r, "(\overline{U_1}{,}1)"] \arrow[d, "(E^T{,}\chi)"] & (Z^W,1) \arrow[d, "(E^W{,}\chi)"] \\
(X,S) \arrow[r, "(U{,}\phi)"'] & (Y,T) \arrow[r, "(U_1{,}\phi)"'] & (Z,W)
\end{tikzcd}$$

conmutan. Por lo tanto, el rectángulo resultante también conmuta, por lo que $\overline{U_1}\,\overline{U} = \overline{U_1U}$. Por definición, $E^W(\overline{U_1\phi.\phi_1U}) = (U_1\phi.\phi_1U)E^S$ pero,

$$E^W(\overline{U_1\phi}.\overline{\phi_1U}) = E^W\overline{U_1\phi}.E^W\overline{\phi_1U} = U_1E^T\overline{\phi}.\phi_1E^T\overline{U} = U_1\phi E^S.\phi_1UE^S = (U_1\phi.\phi_1U)E^S \ .$$

Entonces por la propiedad universal de E^W, $\overline{U_1\phi.\phi_1U} = \overline{U_1\phi}.\overline{\phi_1U}$.
Sean

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left, "(U{,}\phi)"] \arrow[r, bend right, "(U_1{,}\phi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & (Y,T) \arrow[r, bend left, "(V{,}\psi)"] \arrow[r, bend right, "(V_1{,}\psi_1)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & (Z,W)
\end{tikzcd}$$

2-celdas en $Mnd(\mathfrak{C})$. Por definición de $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}$ tenemos:

$$E^T\overline{\sigma} = \sigma E^S \ , \ E^W\overline{\tau} = \tau E^T \ \ y \ \ E^W(\overline{\tau\sigma}) = \tau\sigma E^S$$

pero, también $E^W(\overline{\tau}\ \overline{\sigma}) = \tau E^T\overline{\sigma} = \tau\sigma E^S$ entonces, por la propiedad universal de E^W, se tiene $\overline{\tau}\ \overline{\sigma} = \overline{\tau\sigma}$.
Así se satisface

$$\begin{gathered}(\circ_{\overline{Alg}_{(X,S)}\,,\,\overline{Alg}_{(Y,T)}\,,\,\overline{Alg}_{(W,Z)}})(\overline{Alg}_{(X,S)\,,\,(Y,T)} \times \overline{Alg}_{(Y,T)\,,\,(Z,W)}) = \\ (\overline{Alg}_{(X,S)\,,\,(Z,W)})(\circ_{(X,S)\,,\,(Y,T)\,,\,(W,Z)}) \ .\end{gathered}$$

Por lo tanto $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ es 2-funtor.

Teorema 4.4. *Si las 2-categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}^*_*$ admiten la construcción de álgebras entonces el 2-funtor $(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_* : Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_* \to Mnd(\mathfrak{C})$ es el 2-adjunto izquierdo de el 2-funtor $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}} : Mnd(\mathfrak{C}) \to Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$.*

Demostración. Hallamos el opfuntor de cómonadas $(K_G,k) : (Y,G) \to ((Y_G)^{S_G}, J^{S_G}E^{S_G})$ en $\mathfrak{C}$ que será la componente de la unidad evaluada en (Y,G).

Sea (Y, G, η_G, μ_G) una cómonada en $\mathfrak{C}$ entonces (Y, G, η_G, μ_G) es una mónada en $\mathfrak{C}^*_*$;

$$\begin{tikzcd}
(Y,1) \arrow[rr, "{(G,\mu)}"] \arrow[dr, "{(J_G,1)}"'] & & (Y,G) \\
& (Y_G,1) \arrow[ur, "{(E_G,\chi_G)}"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $J_G \dashv E_G$ y $(Y, E_G J_G, \eta_G, E_G \epsilon_G J_G) = (Y, G, \eta_G, \mu_G)$; además $(Y_G, J_G E_G, \epsilon_G, J_G \eta_G E_G)$ es cómonada en $\mathfrak{C}^*_* \Leftrightarrow (Y_G, S_G, \epsilon_G, E_G \eta_G J_G)$ es mónada en $\mathfrak{C}$ con $S_G = E_G J_G$;

$$\begin{tikzcd}
(Y_G,1) \arrow[rr, "{(S_G,\mu)}"] \arrow[dr, "{(J^{S_G},1)}"'] & & (Y_G,S_G) \\
& ((Y_G)^{S_G},1) \arrow[ur, "{(E^{S_G},\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $((Y_G)^{S_G}, J^{S_G} E^{S_G})$ es cómonada en $\mathfrak{C}$.
Ahora $(E_G, E_G \eta_G) : (Y, 1) \to (Y_G, S_G)$ es un funtor de mónadas; puesto que $E_G \eta_G . \epsilon_G E_G = 1_G$ se tiene por que $J_G \dashv E_G$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "E_G"] \arrow[rr, bend right, "1_Y"'] & Y_G \arrow[r, "J_G"] \arrow[d, phantom, "\eta_G \Downarrow"] & Y \arrow[r, "E_G"] \arrow[rr, bend right, "1_Y"'] & Y_G \arrow[r, "J_G"] \arrow[d, phantom, "\eta_G \Downarrow"] & Y \arrow[r, "E_G"] & Y_G \\
& {} & & {} & &
\end{tikzcd}$$

muestra que $E_G \eta_G . E_G \eta_G J_G E_G = E_G 1 . E_G \eta_G 1 . E_G J_G E_G \eta_G$; así, existe una única 1-celda $K_G : Y \to (Y_G)^{S_G}$ de $\mathfrak{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(Y,1) \arrow[rr, "{(E_G,E_G\eta_G)}"] \arrow[dr, "{(K_G,1)}"'] & & (Y_G,S_G) \\
& ((Y_G)^{S_G},1) \arrow[ur, "{(E^{S_G},\chi)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{18}$$

Además, tenemos que

$$E^{S_G} J^{S_G} E^{S_G} K_G = E^{S_G} J^{S_G} E_G = S_G E_G = E_G J_G E_G = E_G G = E^{S_G} K_G G \ .$$

Por lo que existe una única 2-celda $k : J^{S_G} E^{S_G} K_G \to K_G G$ tal que

$$E^{S_G} k = 1 : S_G E_G \to E_G G \tag{19}$$

De modo que $(K_G, k) : (Y, G) \to ((Y_G)^{S_G}, J^{S_G} E^{S_G})$ es un opfuntor de cómonadas en $\mathfrak{C}$; para ver esto, apliquemos E^{S_G} a los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
& J^{S_G} E^{S_G} K_G \arrow[dl, "\epsilon K_G"'] \arrow[dd, "k"] \\
K_G & \\
& K_G G \arrow[ul, "K_G \eta_G"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& J^{S_G} E^{S_G} J^{S_G} E^{S_G} K_G \arrow[r, "J^{S_G} E^{S_G} k"] & J^{S_G} E^{S_G} K_G G \arrow[dd, "kG"] \\
J^{S_G} E^{S_G} K_G \arrow[ur, "J^{S_G} \eta E^{S_G} K_G"] \arrow[dr, "k"'] & & \\
& K_G G \arrow[r, "K_G \mu_G"'] & K_G G G
\end{tikzcd}$$

de manera que por (5), (18) y (19)

$$E^{S_G}(K_G\eta_G.k) = E^{S_G}K_G\eta_G.E^{S_G}k = E_G\eta_G,1 = \chi K_G = E^{S_G}\epsilon K_G \ \ .$$

$E^{S_G}(K_G\eta_G.k) = E^{S_G}K_G\eta_G.E^{S_G}k = E_G\eta_G,1 = \chi K_G = E^{S_G}\epsilon K_G$.

También por (18) y (19)

$$\begin{gathered} E^{S_G}(K_G\mu_G.k) = E^{S_G}(K_GJ_G\epsilon_GE_G.k) = \\ E^{S_G}K_GJ_G\epsilon_GE_G.E^{S_G}k = E_GJ_G\epsilon_GE_G = S_G\epsilon_GE_G \ \ ; \end{gathered} \tag{20}$$

por otra parte el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "K_G"] \arrow[dr, "G"'] & (Y_G)^{S_G} \arrow[r, "E^{S_G}"] \arrow[d, phantom, "k\Downarrow"] & Y_G \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "J^{S_G}"'] & \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & Y_G \arrow[r, "J^{S_G}"] & (Y_G)^{S_G} \arrow[r, "E^{S_G}"] & Y_G \\
 & Y \arrow[rr, "K_G"] \arrow[drrr, "G"'] & & (Y_G)^{S_G} \arrow[ur, "E^{S_G}"'] \arrow[r, phantom, "k\Downarrow"] & {} & & \\
 & & & & Y \arrow[uur, "K_G"'] & &
\end{tikzcd}$$

muestra que la 1-celda

$$E^{S_G}J^{S_G}(E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G) \xrightarrow{E^{S_G}J^{S_G}(E^{S_G}k)} E^{S_G}J^{S_G}(E^{S_G}K_GG)$$

no es más que la 1-celda

$$E^{S_G}J^{S_G}(E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G) \xrightarrow{E^{S_G}J^{S_G}1} E^{S_G}J^{S_G}(E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G)$$

y la 1-celda

$$(E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G)G \xrightarrow{(E^{S_G}k)G} (E^{S_G}K_GG)G$$

no es más que la 1-celda

$$(E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G)G \xrightarrow{1G} (E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G)G$$

de manera que

$$\begin{gathered} E^{S_G}(kG.J^{S_G}E^{S_G}k.J^{S_G}\eta E^{S_G}K_G) = E^{S_G}kG.E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}k.E^{S_G}J^{S_G}\eta E^{S_G}K_G = \\ E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G.E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}J^{S_G}E^{S_G}K_G.E^{S_G}J^{S_G}\eta E^{S_G}K_G = \\ E^{S_G}J^{S_G}\eta E^{S_G}K_G = S_G\eta E_G \ \ ; \end{gathered} \tag{21}$$

como $J^{S_G} \dashv E^{S_G}$ con $(Y_G, E^{S_G}J^{S_G}, \eta, E^{S_G}\epsilon J^{S_G}) = (Y_G, S_G, \epsilon_G, E_G\eta_GJ_G)$, luego

$$S_G\epsilon_GE_G = S_G\eta E_G \ \ . \tag{22}$$

De (20), (21), (22) y por la propiedad universal de E^{S_G} se concluye que (K_G, k) es un opfuntor de comónadas.

Sea la 1-celda $(U, \phi) : (Y, G) \to (Y', G')$ en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ evaluamos $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*$ en (U, ϕ).

En $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ $(U,\phi):(Y,G)\to(Y',G')$ es 1-celda si y sólo si en la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$ tenemos la 1-celda $(U,\phi):(Y',G')\to(Y,G)$, entonces los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
(Y'_{G'},1) \arrow[r, "{(U_1,1)}"] \arrow[d, "{(E_{G'},\chi)}"'] & (Y_G,1) \arrow[d, "{(E_G,\chi)}"] \\
(Y',G') \arrow[r, "{(U,\phi)}"'] & (Y,G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(Y,1) \arrow[rr, "{(G,\mu_G)}"] \arrow[dr, "{(J_G,1)}"'] & & (Y,G) \\
& (Y_G,1) \arrow[ur, "{(E_G,\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutan; así en $\mathfrak{C}^*_*$

$J_G\dashv E_G \quad \delta J_G.J_G\beta=1 \quad E_G\delta.\beta E_G=1 \quad (Y,E_GJ_G,\beta,E_G\delta J_G)=(Y,G,\eta_G,\mu_G)$.

De modo que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*}(U,\phi)=(U_1,\phi_1):(Y'_{G'},E_{G'}J_{G'},\delta',E_{G'}\beta'J_{G'})\to(Y_G,E_GJ_G,\delta,E_G\beta J_G)$, con

$$E_GU_1=UE_{G'},\quad \chi U_1=U\chi.\phi E_{G'}\quad y\quad E_G\phi_1=\phi E_{G'}\ \ ,$$

en $\mathfrak{C}^*_*$.

Luego $(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*(U,\phi)=(U_1,\phi_1):(Y_G,E_GJ_G,\delta,E_G\beta J_G)\to(Y'_{G'},E_{G'}J_{G'},\delta',E_{G'}\beta'J_{G'})$ con

$$U_1E_G=E_{G'}U,\quad U_1\chi=E_{G'}\phi.\chi U,\quad y\quad \phi_1E_G=E_{G'}\phi\ \ , \tag{23}$$

en $\mathfrak{C}$.

En $\mathfrak{C}$ los diagramas

$$\begin{tikzcd}
((Y_G)^{S_G},1) \arrow[r, "{(U_2,1)}"] \arrow[d, "{(E^{S_G},\chi)}"'] & ((Y'_{G'})^{S_{G'}},1) \arrow[d, "{(E^{S_{G'}},\chi)}"] \\
(Y_G,S_G) \arrow[r, "{(U_1,\phi_1)}"'] & (Y_{G'},S_{G'})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(Y_G,1) \arrow[rr, "{(S_G,\mu)}"] \arrow[dr, "{(J^{S_G},1)}"'] & & (Y_G,S_G) \\
& ((Y_G)^{S_G},1) \arrow[ur, "{(E^{S_G},\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutan; así, en $\mathfrak{C}$

$J^{S_G}\dashv E^{S_G} \quad \epsilon J^{S_G}.J^{S_G}\eta=1 \quad E^{S_G}\epsilon.\eta E^{S_G}=1 \quad (E^{S_G}J^{S_G},\eta,E^{S_G}\epsilon J^{S_G})=(Y_G,S_G,\delta,E_G\beta J_G)$

por lo que

$\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(U_1,\phi_1)=(U_2,\phi_2):((Y_G)^{S_G},E^{S_G}J^{S_G},\epsilon,E^{S_G}\eta J^{S_G})\to((Y'_{G'})^{S_{G'}},E^{S_{G'}}J^{S_{G'}},\epsilon',E^{S_{G'}}\eta'J^{S_{G'}})$

con

$$U_1\chi.\phi_1E^{S_G}=\chi U_2\qquad E^{S_{G'}}U_2=U_1E^{S_G}\qquad \phi_1E^{S_G}=E^{S_{G'}}\phi_2 \tag{24}$$

en $\mathfrak{C}$.

La aplicación $\Sigma:1\to\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}.(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*$, que evaluada en (Y,G) objeto de $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$ está dada por $(K_G,k):(Y,G)\to((Y_G)^{S_G},E^{S_G}J^{S_G})$ es transfomación 2-natural. Veamos que tal afirmación es cierta.

Por (18), (23), (24) y ya que (U,ϕ) es opfuntor de comónadas, entonces

$$E^{S_{G'}}(U_2K_G)=U_1E^{S_G}K_G=U_1E_G=E_{G'}U=E^{S_{G'}}(K_{G'}U)\quad y$$
$$\chi(U_2K_G)=U_1\chi K_G.\phi_1E^{S_G}K_G=U_1E_G\eta_G.\phi_1E_G=$$
$$E_{G'}U\eta_G.E_{G'}\phi=E_{G'}(U\eta_G.\phi)=E_{G'}\eta'_{G'}U=\chi(K_{G'}U)\ \ ,$$

así, $U_2K_G = K_{G'}U$.

Ahora, utilizando (18), (19), (23) y (24), hallamos que

$$E^{S_{G'}}(U_2k.\phi_2K_G) = U_1E^{S_G}k.\phi_1E^{S_G}K_G = U_11.\phi_1E_G = E_{G'}\phi =$$
$$E^{S_{G'}}K_{G'}\phi = E^{S_{G'}}K_{G'}\phi.U = E^{S_{G'}}K_{G'}\phi.E^{S_{G'}}k'U = E^{S_{G'}}(K_{G'}\phi.k'U) \quad .$$

Así, el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
(Y,G) \arrow[r, "{(K_G,k)}"] \arrow[d, "{(U,\phi)}"'] & ((Y_G)^{S_G}, J^{S_G}E^{S_G}) \arrow[d, "{(U_2,\phi_2)}"] \\
(Y',G') \arrow[r, "{(K_{G'},k')}"] & ((Y_{G'})^{S_{G'}}, J^{S_{G'}}E^{S_{G'}})
\end{tikzcd}$$

conmuta en $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$.

Si $\sigma : (U,\phi) \to (U',\phi')$ es una 2-celda de $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*$, entonces $(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*\sigma = \sigma_1$ tal que, $\sigma_1E_G = E_{G'}\sigma$; $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\sigma_1 = \sigma_2$ y se satisface $E^{S_{G'}}\sigma_2 = \sigma_1E^{S_G}$. Entonces

$$E^{S_{G'}}\sigma_2K_G = \sigma_1E^{S_G}K_G = \sigma_1E_G = E_{G'}\sigma = E^{S_{G'}}K_{G'}\sigma \quad .$$

Por lo que $(K_{G'},k')\sigma = \sigma_2(K_G,k)$.

Hemos construido una transfomación 2-natural $\Sigma : 1 \to \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}.(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*$, ésta será la unidad de la 2-adjunción.

Siguiendo un razonamiento semejante al anterior hallamos $\Delta : (\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*\overline{Alg}_{\mathfrak{C}} \to 1$, la transfomación 2-natural que ha de ser la counidad de la 2-adjunción.

La transfomación 2-natural $\Delta : (\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*\overline{Alg}_{\mathfrak{C}} \to 1$ evaluada en (X,S) en $Mnd(\mathfrak{C})$ es la 1-celda

$$(N^S,v) : ((X^S)_{G^S}, E_{G^S}J_{G^S}, \epsilon^*, E_{G^S}\eta^*J_{G^S}) \longrightarrow (X,S) \ ,$$

dada por

$$N^SE_{G^S} = E^S, \quad N^S\chi = \eta E^S \quad y \quad vE_{G^S} = 1$$

en $\mathfrak{C}$; donde $G^S = J^SE^S$.

Sólo mostramos cómo está construida la componente de dicha transfomación en cada objeto (X,S) de $Mnd(\mathfrak{C})$; omitimos la demostración de que Δ es transformación 2-natural, pues tal razonamiento es parecido al que seguimos para mostrar que Σ es transformación 2-natural.

(X,S) comónada en $\mathfrak{C}^*_*$ entonces (X,S) es mónada en $\mathfrak{C}$, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,1) \arrow[rr, "{(S,\mu)}"] \arrow[dr, "{(J^S,1)}"'] & & (X,S) \\
& (X^S,1) \arrow[ur, "{(E_S,\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y en $\mathfrak{C}$, $\qquad J^S \dashv E^S, \qquad (X,S)=(X, E^S J^S, \eta^S, E^S\epsilon^S J^S)$.
Por tanto $(X^S, G^S, \epsilon^S, E^S\eta^S J^S)$, donde $G^S = E^S J^S$, es una mónada en $\mathfrak{C}^*_*$; luego el correspondiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X^S,1) \arrow[rr, "{(G^S, E^S\eta^S J^S)}"] \arrow[dr, "{(J_{G^S},1)}"'] & & (X^S,G^S) \\
& ((X^S)_{G^S},1) \arrow[ur, "{(E_{G^S},\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Tenemos que en $\mathfrak{C}^*_*$:

$$J_{G^S} \dashv E_{G^S}, \quad (X^S,G^S)=(X^S, E_{G^S}J_{G^S}, \eta^*, E_{G^S}\epsilon^* J_{G^S}) \quad y \tag{25}$$

$((X^S)_{G^S}, J_{G^S}E_{G^S}, \epsilon^*, J_{G^S}\eta^* E_{G^S})$ es una comónada.

En la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C}^*_*)$ $(E^S, E^S\eta^S) : (X,1) \to (X^S,G^S)$ es un funtor de mónadas. Por lo tanto, existe una única 1-celda $N^S : X \to (X^S)_{G^S}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,1) \arrow[rr, "{(E^S, E^S\eta^S)}"] \arrow[dr, "{(N^S,1)}"'] & & (X^S,G^S) \\
& ((X^S)_{G^S},1) \arrow[ur, "{(E_{G^S},\chi)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{26}$$

conmuta. Además tenemos $E_{G^S}J_{G^S}E_{G^S}N^S = E_{G^S}J_{G^S}E^S = G^S E^S = E^S J^S E^S = E_{G^S}N^S S$; entonces, existe una única 2-celda $v : J_{G^S}E_{G^S}N^S \to N^S S$ tal que:

$$E_{G^S}v = 1 : G^S E^S \to E^S S \quad . \tag{27}$$

Entonces $(N^S, v) : (X,S) \to ((X^S)_{G^S}, E_{G^S}J_{G^S}, \epsilon^*, E_{G^S}\eta^* J_{G^S})$ es un opfuntor de comónadas en $\mathfrak{C}^*_*$; la demostración de tal afirmación es semejante al de la unidad. Por lo que
$(N^S, v) : ((X^S)_{G^S}, E_{G^S}J_{G^S}, \epsilon^*, E_{G^S}\eta^* J_{G^S}) \to (X,S)$ es un funtor de mónadas en $Mnd(\mathfrak{C})$.

Veamos que las composiciones de 2-transformaciones natural en los diagramas

$$\begin{tikzcd}
Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_* \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Sigma\Downarrow"] & & Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_* \arrow[dr, "(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*"] & \\
& Mnd(\mathfrak{C}) \arrow[ur, "\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Delta\Downarrow"] & & Mnd(\mathfrak{C})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Mnd(\mathfrak{C}) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Uparrow\Delta"] & & Mnd(\mathfrak{C}) \arrow[dr, "\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}"] & \\
& Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_* \arrow[ur, "(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow\Sigma"] & & Mnd(\mathfrak{C}^*_*)^*_*
\end{tikzcd}$$

son las correspondientes 2-transformación natural identidad.

Tenemos que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S) = (X^S, G^S, \epsilon^S, E^S\eta^S J^S)$ y

$$\begin{aligned}(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}^*_*})^*_*(X^S, G^S, \epsilon^S, E^S\eta^S J^S) = ((X^S)_{G^S}, E_{G^S}J_{G^S}, \epsilon^*, E_{G^S}\eta^* J_{G^S}) = \\ ((X^S)_{G^S}, S_{G^S}, \epsilon^*, E_{G^S}\eta^* J_{G^S}) = (Y,T)\end{aligned} \tag{28}$$

Luego, el diagrama

$$\begin{tikzcd} (Y,1) \arrow[rr, "{(T,\mu)}"] \arrow[dr, "{(J^T,1)}"'] & & (Y,T) \\ & (Y^T,1) \arrow[ur, "{(E^T,\chi)}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta y

$$(Y,T) = (T, E^T J^T) \tag{29}$$

de manera que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(Y,T) = (Y^T, G^T) = (T^Y, E^T J^T, \sigma, E^T\delta J^T)$.
Por otra parte $(E_{G^S}, E_{G^S}\epsilon^S) : (X^S, 1) \to (Y,T)$ es un funtor de mónadas, luego, el diagrama

$$\begin{tikzcd} (X^S,1) \arrow[rr, "{(E_{G^S},E_{G^S}\epsilon^S)}"] \arrow[dr, "{(K_{G^S},1)}"'] & & (Y,T) \\ & (Y^T,1) \arrow[ur, "{(E^T,\chi)}"'] & \end{tikzcd} \tag{30}$$

conmuta.

También tenemos por (25), (30), (28) y (29) que:

$$E^{S_{G^S}} J^{S_{G^S}} E^{S_{G^S}} K_{G^S} = E^{S_{G^S}} J^{S_{G^S}} E_{G^S} = S_{G^S} E_{G^S} = E_{G^S} J_{G^S} E_{G^S} = E^{S_{G^S}} K_{G^S} G^S = E_{G^S} G^S \quad .$$

Por lo que existe una única 1-celda $k : J^{S_{G^S}} E^{S_{G^S}} K_{G^S} \to K_{G^S} G^S$ tal que:

$$E^{S_{G^S}} k = 1 : S_{G^S} E_{G^S} \to E_{G^S} G^S \tag{31}$$

Así $\Sigma(X^S, G^S) = (K_{G^S}, k) : (X^S, G^S) \to (Y^T, G^T)$ es la unidad evaluada en (X^S, G^S).

Sea $1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}} : \overline{Alg}_{\mathfrak{C}} \to \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}$ la 2-transformación natural identidad definida como

$$(1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}})(X,S) = 1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S)} \quad .$$

Así, para la composición $\Sigma\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}$ se tiene:

$$\begin{aligned}(\Sigma\overline{Alg}_{\mathfrak{C}})(X,S) = \Sigma(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S)) \circ 1(1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}}(X,S)) = \\ \Sigma((X^S, G^S)) \circ 1(1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S)}) = \Sigma_{(X^S,G^S)} 1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S)} = \Sigma_{(X^S,G^S)}\end{aligned}$$

y, para la composición $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\Delta$ se satisface:

$$\begin{aligned}(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\Delta)(X,S) = (1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}}(1))(X,S) \circ (\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(\Delta))(X,S) = \\ 1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}}(1(X,S)) \circ \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(\Delta(X,S)) = 1_{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(X,S)} \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(N^S, v) = \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(N^S, v) \quad .\end{aligned}$$

Mostraremos que la composición

$$(\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}\Delta) \bullet (\Sigma\overline{Alg}_{\mathfrak{C}})(X,S) = \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(\Delta(X,S))\Sigma_{(X^S,G^S)} = \overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(N^S, v)(K_{G^S}, k) \quad ,$$

es decir,

$$(X^S, G^S) \xrightarrow{(K_{G^S}, k)} (Y^T, G^T) \xrightarrow{\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(N^S, v)} (X^S, G^S) \quad ,$$

es la identidad. Note que $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}}(N^S, v) = (P, \pi)$ está dada por las ecuaciones

$$E^S P = N^S E^T, \quad \chi P = N^S \chi . v E^T \quad y \quad E^S \pi = v E^T \quad . \tag{32}$$

Por (26) y (28), tenemos que:

$$N^S T E_{G^S} = N^S E_{G^S} J_{G^S} E_{G^S} = E^S J_{G^S} E_{G^S} = E^S G^S \quad y \quad E^T k = E_{G^S} k = 1 \quad . \tag{33}$$

Utilizando (26), (30) y (32) justificamos que:

$$E^S P K_{G^S} = N^S E^T K_{G^S} = N^S E_{G^S} = E^S \quad ,$$

y

$$(S E^S P K_{G^S} \xrightarrow{\chi P K_{G^S}} E^S P K_{G^S}) \quad =$$

(por (32))

$$= \ (S N^S E^T K_{G^S} \xrightarrow{v E^T K_{G^S}} N^S T E^T K_{G^S} \xrightarrow{N^S \chi K_{G^S}} N^S E^T K_{G^S})$$

(por(30))

$$= \quad (S N^S E_{G^S} \xrightarrow{v E_{G^S}} N^S T E_{G^S} \xrightarrow{N^S E_{G^S} \epsilon^S} N^S E_{G^S})$$

(por (27) y (26))

$$= \quad (S E^S \xrightarrow{1} E^S G^S \xrightarrow{E^S \epsilon^S} E^S)$$

$$= \quad (S E^S \xrightarrow{\chi} E^S)$$

esto prueba que $P K_{G^S} = 1 : X^S \to X^S$. Remitiéndonos a (27), (30), (31) y (32), podemos justificar que:

$$E^S (P k . \pi K_{G^S}) = E^S P k . E^S \pi K_{G^S} =$$
$$N^S E^T k . v E^T K_{G^S} = N^S E^{S_{G^S}} k . v E^T K_{G^S} = 1 . v E_{G^S} = 1 \quad ;$$

esto prueba que $P k . \pi K_{G^S} = 1$. Así $(P, \pi) . (K_{G^S}, k) = 1$, como se quería.
La igualdad $\overline{Alg}_{\mathfrak{C}} \Delta \centerdot \Sigma \overline{Alg}_{\mathfrak{C}} = 1$ se calcula de modo parecido. Por lo tanto, queda demostrado el teorema.

□

Sea $\mathfrak{C}$ una 2-categoría para la que se tienen 2-funtores $()^{op} : \mathfrak{C}_* \to \mathfrak{C}$ y $()_{op} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}_*$ tales que $()_{op}()^{op} = 1_{\mathfrak{C}_*}$ y $()^{op}()_{op} = 1$. Supongamos que $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras y sea (X, G) una mónada en $\mathfrak{C}_*$ luego, tiene sentido hablar de $\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op}, G^{op})\big)_{op}$; en el siguiente teorema establecemos la importante información que tal consideración proporciona sobre la la 2-categoría $\mathfrak{C}_*$.

Teorema 4.5. *Supongamos que* $\mathfrak{C}$ *es una 2-categoría para la que se tienen 2-funtores* $()^{op}:\mathfrak{C}_*\to\mathfrak{C}$ *y* $()_{op}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}_*$ *tales que* $()_{op}()^{op}=1_{\mathfrak{C}_*}$ *y* $()^{op}()_{op}=1$. *Entonces* (X,G) *es una comónada en* $\mathfrak{C}$ *(mónada en* $\mathfrak{C}_*$*) si y sólo si* (X^{op},S^{op}) *es una mónada en* $\mathfrak{C}$. *Además, si* $\mathfrak{C}$ *admite la construcción de álgebras entonces también* $\mathfrak{C}_*$*, y hay un isomorfismo 2-natural*

$$Alg_{\mathfrak{C}_*}(X,G)\cong\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},G^{op})\big)_{op}\quad .$$

Demostración. (X,G) mónada en $\mathfrak{C}_*$ si y sólo si (X^{op},G^{op}) es una mónada en $\mathfrak{C}$ se debe a las igualdades:

$$()_{op}()^{op}=1\quad y\quad ()^{op}()_{op}=1\quad .$$

Debido a que $\mathfrak{C}$ admite la construcción de álgebras existen 2-transformaciones naturales

$$\Psi:1\to Alg_{\mathfrak{C}}Inc_{\mathfrak{C}}\quad y\quad \Pi:Inc_{\mathfrak{C}}Alg_{\mathfrak{C}}\to 1\quad ,$$

que cumplen:

$$\Pi Inc_{\mathfrak{C}}.Inc_{\mathfrak{C}}\Psi=1\quad y\quad Alg_{\mathfrak{C}}\Pi.\Psi Alg_{\mathfrak{C}}=1\quad .$$

Observamos que el 2-funtor A 2-adjunto derecho de $Inc_{\mathfrak{C}_*}$ es el resultado de componer los 2-funtores $()_{op}$, $Alg_{\mathfrak{C}}$, H. La existencia de H es justificada a continuación.

Sea $H:Mnd(\mathfrak{C}_*)\to Mnd(\mathfrak{C})$ definido como:

$$\begin{gathered}(X,S)\mapsto H(X,S)=(X^{op},S^{op})\quad ,\\ (U,\phi):(X,S)\to(Y,T)\mapsto H(U,\phi)=(U^{op},\phi^{op})\quad y\\ \sigma:(U,\phi)\to(U',\phi')\mapsto H(\sigma)=\sigma^{op}\quad .\end{gathered}$$

Es un hecho (cuya demostración no damos) que H es 2-funtor.

Se define el 2-funtor $A:Mnd(\mathfrak{C}_*)\to\mathfrak{C}_*$ como $A=()_{op}Alg_{\mathfrak{C}}H$.

Ahora construimos transformaciones 2-naturales que habrán de ser unidad y counidad de la 2-adjunción.

El 2-funtor $H':Mnd(\mathfrak{C})\to Mnd(\mathfrak{C}_*)$ tal que:

$$\begin{gathered}(X,S)\mapsto H'(X,S)=(X_{op},S_{op})\quad ,\\ (U,\phi):(X,S)\to(Y,T)\mapsto H'(U,\phi)=(U_{op},\phi_{op})\quad y\\ \sigma:(U,\phi)\to(U',\phi')\mapsto H'(\sigma)=\sigma_{op}\quad ;\end{gathered}$$

será útil a tal própósito. La razón por la que no demostramos tal afirmación es por tratarse de un sencillo ejercicio.

Para $X\in\mathfrak{C}_*$ tenemos
$AInc_{\mathfrak{C}_*}(X)=A(X,1)=\big(()_{op}Alg_{\mathfrak{C}}\big)(X^{op},1)=()_{op}\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)\big)=\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)\big)_{op}$.
Como X^{op} es un objeto de $\mathfrak{C}$ entonces $\Psi_{X^{op}}:X^{op}\to Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)$; esto nos permite definir la 2-transformación natural

$$\overline{\Psi}:1\to Alg_{\mathfrak{C}_*}Inc_{\mathfrak{C}_*}\quad ,$$

tal que:

$$\overline{\Psi}_X=(\Psi_{X^{op}})_{op}:X\to\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},G^{op})\big)_{op}\quad .$$

Para $(X,S)\in Mnd(\mathfrak{C}_*)$ se tiene

$$\begin{gathered}(Inc_{\mathfrak{C}_*}A)(X,S)=\big(Inc_{\mathfrak{C}_*}()_{op}Alg_{\mathfrak{C}}\big)(X^{op},1)=\\ \big(Inc_{\mathfrak{C}_*}()_{op}\big)(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1))=Inc_{\mathfrak{C}_*}\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)\big)_{op}=[\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)\big)_{op},1]\end{gathered}$$

En la 2-categoría $Mnd(\mathfrak{C})$, tiene sentido hablar de $\Pi_{(X^{op},S^{op})} : [Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1),1] \to (X^{op},S^{op})$; apartir de evaluar H' en tal 1-celda obtenemos la 1-celda

$$\overline{\Pi}_{(X,S)} = \big(\Pi_{(X^{op},S^{op})}\big)_{op} : [\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)\big)_{op},1] \to (X,S)$$

correspondiente a la 2-transformación natural

$$\overline{\Pi} : Inc_{\mathfrak{C}_*}A \to 1 \quad ,$$

evaluada en (X,S).

Tanto $\overline{\Psi}$, como $\overline{\Pi}$ son 2-transformaciones naturales porque $\Psi \quad y \quad \Pi$ son 2-transformaciones naturales.

Mostramos que $\overline{\Psi}$ y $\overline{\Pi}$ satisfacen las identidades triangulares de la definición de 2-adjunción.

Sea X un objeto de $\mathfrak{C}_*$. Así para $(X,1)$ objeto de $Mnd(\mathfrak{C}_*)$, al aplicarle H obtemos $(X^{op},1)$ un objeto de $Mnd(\mathfrak{C})$ para el cual

$$\Pi_{(X^{op},1)}(\Psi_{X^{op}},1) = 1_{(X^{op},1)} \quad . \tag{34}$$

Es decir, la composición

$$(X^{op},1) \xrightarrow{(\Psi_{X^{op}},1)} [Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1),1] \xrightarrow{\Pi_{(X^{op},1)}} (X^{op},1)$$

es la 1-celda identidad.

Aplicando H' a (34), tenemos que en $Mnd(\mathfrak{C}_*)$

$$[\Pi_{(X^{op},1)}]_{op}((\Psi_{X^{op}})_{op},1) = 1_{(X,1)} \quad .$$

En otras palabras, la composición

$$((X^{op})_{op},1) \xrightarrow{((\Psi_{X^{op}})_{op},1)} [\big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},1)\big)_{op},1] \xrightarrow{[\Pi_{(X^{op},1)}]_{op}} ((X^{op})_{op},1)$$

es la 1-celda identidad.

Por lo que para la composición vertical

$$Inc_{\mathfrak{C}_*}1 \xrightarrow{Inc_{\mathfrak{C}_*}\overline{\Psi}} Inc_{\mathfrak{C}_*}AInc_{\mathfrak{C}_*} \xrightarrow{\overline{\Pi}Inc_{\mathfrak{C}_*}} 1Inc_{\mathfrak{C}_*}$$

se cumple $\overline{\Pi}Inc_{\mathfrak{C}_*} \centerdot Inc_{\mathfrak{C}_*}\overline{\Psi} = 1$.

También se cumple la igualdad $A\overline{\Pi} \centerdot \overline{\Psi}A = 1$. Por lo tanto $Inc_{\mathfrak{C}_*} \dashv A$. Finalmente, gracias a (1.56),

$$Alg_{\mathfrak{C}_*}(X,G) \cong \big(Alg_{\mathfrak{C}}(X^{op},G^{op})\big)_{op} \quad .$$

$\square$

CAPíTULO 5

Leyes Distributivas

Iniciamos con la definición de ley distributiva.

Definición 5.1. *Supongamos que* $(X,S),(X,T)$ *son mónadas en una 2-categoría* $\mathfrak{C}$. *Una 2-celda* $\lambda : ST \to TS$ *es llamada una ley distributiva cuando las siguientes condiciones equivalentes se satisfacen :*
(a). $(T,\lambda) : (X,S) \to (X,S)$ *es un funtor de mónadas, y la unidad y multiplicación de* T *son transformaciones de funtores de mónadas* $\eta^T : 1 \to (T,\lambda), \mu^T : (T,\lambda)(T,\lambda) \to (T,\lambda)$.
(b).$(S^*,\lambda)^* : (X,T^*) \to (X,T^*)$ *es un opfuntor de mónadas de* $\mathfrak{C}$, $\eta^S : 1 \to (S^*,\lambda)^*$ *y* $\mu^S : (S^*,\lambda)^*(S^*,\lambda)^* \to (S^*,\lambda)^*$, *la unidad y multiplicación de* S *son transformaciones de opfuntores de mónadas de* $\mathfrak{C}$ *(1-celda y 2-celdas de* $(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$*, respectivamente).*

Tenemos una explicación más detallada al anterior inciso (a).
(T,λ) funtor de mónadas significa la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
 & ST \arrow[dd, "\lambda"] \\
T \arrow[ur, "\eta^S T"] \arrow[dr, "T\eta^S"'] & \\
 & TS
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & STS \arrow[rr, "\lambda S"] & & TSS \arrow[dd, "T\mu^S"] \\
SST \arrow[ur, "S\lambda"] \arrow[dr, "\mu^S T"'] & & & \\
 & ST \arrow[rr, "\lambda"'] & & TS
\end{tikzcd}$$

Para la transformación funtor de mónadas

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[rr, bend left, "(1_X,1_S)"] \arrow[rr, bend right, "(T,\lambda)"'] \arrow[rr, phantom, "\eta^T \Downarrow"] & & (X,S)
\end{tikzcd}$$

tenemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
S1_X \arrow[r, "S\eta^T"] \arrow[d, "1_S"'] & ST \arrow[d, "\lambda"] \\
1_X S \arrow[r, "\eta^T S"'] & TS
\end{tikzcd} \tag{35}$$

conmuta.

De manera análoga para

$$\begin{tikzcd}(X,S) \arrow[rr, bend left, "{(TT,T\lambda.\lambda T)}"] \arrow[rr, bend right, "{(T,\lambda)}"'] \arrow[rr, phantom, "\mu^T \Downarrow"] & & (X,S)\end{tikzcd}$$

se tiene la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}STT \arrow[r, "S\mu^T"] \arrow[d, "T\lambda.\lambda T"'] & ST \arrow[d, "\lambda"] \\ TTS \arrow[r, "\mu^T S"'] & TS\end{tikzcd}$$

También damos una descripción más completa del inciso (b).

Sean $(S^*, \lambda)^* : (X, T^*) \to (X, T^*)$ opfuntor de mónadas de $\mathfrak{C}$, $\eta^S : 1 \to (S^*, \lambda)^*$ y $\mu^S : (S^*, \lambda)^*(S^*, \lambda)^* \to (S^*, \lambda)^*$, transformaciones de opfuntores de mónadas de $\mathfrak{C}$ (1-celda y 2-celdas de $(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$, respectivamente).

$$\Leftrightarrow$$

$(S^*, \lambda)^* : (X, T^*) \to (X, T^*)$, $\eta^S : 1 \to (S^*, \lambda)^*$ y $\mu^S : (S^*, \lambda)^*(S^*, \lambda)^* \to (S^*, \lambda)^*$, son 1-celda y 2-celdas de $Mnd\mathfrak{C}^*$.

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría $\mathfrak{C}^*$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} & T^*S^* \arrow[dd, "\lambda"] \\ S^* \arrow[ur, "\eta^T S^*"] \arrow[dr, "S^*\eta^T"'] & \\ & S^*T^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T^*S^*T^* \arrow[r, "\lambda T^*"] & S^*T^*T^* \arrow[dd, "S^*\mu^T"] \\ T^*T^*S^* \arrow[ur, "T^*\lambda"] \arrow[dr, "\mu^T S^*"'] & & \\ & T^*S^* \arrow[r, "\lambda"'] & S^*T^* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}T^*1_X \arrow[r, "T^*\eta^S"] \arrow[d, "1_T"'] & T^*S^* \arrow[d, "\lambda"] \\ 1_X T^* \arrow[r, "\eta^S T^*"'] & S^*T^*\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^*S^*S^* \arrow[r, "T^*\mu^S"] \arrow[d, "S^*\lambda.\lambda S^*"'] & T^*S^* \arrow[d, "\lambda"] \\
S^*S^*T^* \arrow[r, "\mu^S T^*"'] & S^*T^*
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría $\mathfrak{C}$ los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ST \arrow[dd, "\lambda"] & & TST \arrow[rr, "T\lambda"] & & TTS \arrow[dd, "\mu^T S"] \\
S \arrow[ur, "S\eta^T"] \arrow[dr, "\eta^T S"'] & & STT \arrow[ur, "\lambda T"] \arrow[dr, "S\mu^T"'] & & & \\
 & TS & & ST \arrow[rr, "\lambda"'] & & TS
\end{tikzcd} \tag{36}$$

$$\begin{tikzcd}
1_X T \arrow[r, "\eta^S T"] \arrow[d, "1_T"'] & ST \arrow[d, "\lambda"] \\
T1_X \arrow[r, "T\eta^S"'] & TS
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
SST \arrow[r, "\mu^S T"] \arrow[d, "\lambda S.S\lambda"'] & ST \arrow[d, "\lambda"] \\
TSS \arrow[r, "T\mu^S"'] & TS
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Observamos que los objetos $((X,S),(X,T))$ de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$ son exactamente pares de mónadas $(X,S),(X,T)$ y una ley distributiva $\lambda : ST \to TS$.

Sean $(X,S),(X,T)$ mónadas y $\lambda : ST \to TS$ una ley distributiva. Sabemos que $(T,\lambda) : (X,S) \to (X,S)$ es funtor de mónadas, mientras que $\eta^T : (1_X, 1_S) \to (T,\lambda)$ y $\mu^T : (T,\lambda)(T,\lambda) \to (T,\lambda)$ son transformaciones de funtores de mónadas. Por ser (X,T) una mónada y dado que la composición horizontal y vertical en $Mnd(\mathfrak{C})$ están definidas en términos de la composición horizontal y vertical de $\mathfrak{C}$ los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
(T,\lambda) \arrow[r, "\eta^T(T,\lambda)"] \arrow[dr, "1"'] & (T,\lambda)(T,\lambda) \arrow[d, "\mu^T"] & (T,\lambda) \arrow[l, "(T,\lambda)\eta^T"'] \arrow[dl, "1"] \\
& (T,\lambda) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(T,\lambda)(T,\lambda)(T,\lambda) \arrow[r, "(T,\lambda)\mu^T"] \arrow[d, "\mu^T(T,\lambda)"'] & (T,\lambda)(T,\lambda) \arrow[d, "\mu^T"] \\
(T,\lambda)(T,\lambda) \arrow[r, "\mu^T"'] & (T,\lambda)
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. Por lo tanto, $((X,S),(T,\lambda),\eta^T,\mu^T)$ es un objeto de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$.

Si (Γ,W,η^W,μ^W) es un objeto de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$, se tendría que $\Gamma=(X,S,\eta^S,\mu^S)\in Mnd(\mathfrak{C})$ y $W=(V,\varphi)$ es funtor de mónadas; mientras que $\eta^W:1\to(V,\varphi)$ y $\mu^W:(V,\varphi)(V,\varphi)\to(V,\varphi)$ son transformaciones de funtores de mónadas. Entonces (X,V,η^W,μ^W) es un objeto de $Mnd(\mathfrak{C})$ por ser (Γ,W) mónada y debido a que las operaciones vertical y horizontal en $Mnd(\mathfrak{C})$ están definidas en términos de las operaciones horizontal y vertical de $\mathfrak{C}$. Por lo que, $(X,S),(X,V,\eta^W,\mu^W)$ son mónadas y $\varphi:SV\to VS$ es una ley distributiva.

Para nuestro trabajo, 2-Cat denota la categoría de 2-categorías y 2-funtores. Establecemos la existencia del funtor $Mnd:2-Cat\to 2-Cat$ y el 2-funtor $Cmp_{\mathfrak{C}}:Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))\to Mnd(\mathfrak{C})$ para cada 2-categoría $\mathfrak{C}$.

Supongamos que $\mathcal{P}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}'$ es un 2-funtor. El 2-funtor $Mnd(\mathcal{P}):Mnd(\mathfrak{C})\to Mnd(\mathfrak{C}')$ está definido como sigue:

$$Mnd(\mathcal{P})(X,S)=(\mathcal{P}(X),\mathcal{P}(S)),\quad Mnd(\mathcal{P})(U,\psi)=(\mathcal{P}(U),\mathcal{P}(\psi))\quad y\quad Mnd(\mathcal{P})\sigma=\mathcal{P}\sigma\quad .$$

Por $Mnd:2-Cat\to 2-Cat$ entendemos el funtor definido como:

$$\mathfrak{C}\mapsto Mnd(\mathfrak{C})\quad y\quad \mathcal{F}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}\mapsto Mnd(\mathcal{F})\quad .$$

Supongamos que en 2-Cat tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathcal{G}"] & \mathfrak{A}
\end{tikzcd}$$

Dado el objeto (X,S) de $Mnd(\mathfrak{C})$ tenemos que:

$$Mnd(\mathcal{G})Mnd(\mathcal{F})(X,S)=Mnd(\mathcal{G})(\mathcal{F}X,\mathcal{F}S)=(\mathcal{G}\mathcal{F}X,\mathcal{G}\mathcal{F}S)=Mnd(\mathcal{G}\mathcal{F})(X,S)\quad .$$

Para $(U,\psi):(X,S)\to(Y,T)$ se satisface:

$$Mnd(\mathcal{G})Mnd(\mathcal{F})(U,\psi)=Mnd(\mathcal{G})(\mathcal{F}U,\mathcal{F}\psi)=(\mathcal{G}\mathcal{F}U,\mathcal{G}\mathcal{F}\psi)=Mnd(\mathcal{G}\mathcal{F})(U,\psi)\quad .$$

Finalmente para

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left, "(U,\chi)"] \arrow[r, bend right, "(V,\psi)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

en $Mnd(\mathfrak{C})$ observamos que:

$$Mnd(\mathcal{G})Mnd(\mathcal{F})\sigma = Mnd(\mathcal{G})\mathcal{F}\sigma = \mathcal{G}\mathcal{F}\sigma = Mnd(\mathcal{G}\mathcal{F})\sigma \quad .$$

Por lo que $Mnd(\mathcal{G})Mnd(\mathcal{F}) = Mnd(\mathcal{G}\mathcal{F})$.

Que $Mnd(1_{\mathfrak{D}}) = 1_{Mnd(\mathfrak{D})}$ es fácil de verificar. Por lo tanto $Mnd : 2-Cat \to 2-Cat$ es un funtor.

El 2-funtor $Cmp_{\mathfrak{C}} : Mnd(Mnd(\mathfrak{C})) \to Mnd(\mathfrak{C})$ consta de :

(i) Una función objeto $Ob(Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))) \to Ob(Mnd(\mathfrak{C}))$ (también denotada por $Cmp_{\mathfrak{C}}$) tal que:

$$((X,S),(T,\lambda),\eta^T,\mu^T) \mapsto Cmp_{\mathfrak{C}}((X,S),(T,\lambda),\eta^T,\mu^T) = (X, TS, \eta^T\eta^S, \mu^T\mu^S.T\lambda S) \quad .$$

Veamos que esto resulta ser una mónada. Por (35), se sigue que:

$$\mu^T\mu^S.T\lambda S.TS\eta^T\eta^S = \mu^T\mu^S.(T\lambda.TS\eta^T)\eta^S =$$
$$\mu^T\mu^S.T(\lambda.S\eta^T)\eta^S = \mu^T\mu^S.T(\eta^T S)\eta^S = (\mu^T.T\eta^T)(\mu^S.S\eta^S) = 1_{TS} \quad .$$

Ilustramos esto en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "S"'] \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\eta^S \Downarrow"] \arrow[drr, bend right, "S"'] & X \arrow[r, "T"'] \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\eta^T \Downarrow"] \arrow[dr, "S"] \arrow[d, phantom, "\mu^S \Downarrow"] & X \arrow[r, "S"] \arrow[d, phantom, "\lambda \Downarrow"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\mu^T \Downarrow"] & X \\
& & X \arrow[ur, "T"] \arrow[urr, bend right, "T"'] & &
\end{tikzcd}$$

Siguiendo un procedimiento similar hallamos que $\mu^T\mu^S.T\lambda S.\eta^T\eta^S TS = 1_{TS}$. De tal manera que

$$\begin{tikzcd}
TS \arrow[r, "TS\eta^T\eta^S"] \arrow[dr, "1"'] & TSTS \arrow[d, "\mu^T\mu^S.T\lambda S"] & TS \arrow[l, "\eta^T\eta^S TS"'] \arrow[dl, "1"] \\
& TS &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Como muestra el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[d, "T"] \\
& X \arrow[ur, "T"] \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "S"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "\mu^T \Downarrow"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & X \arrow[d, "S"] \\
X \arrow[ur, "S"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\overset{\mu^S}{\Rightarrow}"] & X \arrow[l, "S"] \arrow[r, "T"'] & X
\end{tikzcd}$$

hallamos la validez de la siguiente igualdad

(37) $$\lambda S.S\mu^T\mu^S = (\lambda.S\mu^T)\mu^S \quad .$$

Mientras que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "S"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda"] & X \arrow[d, "S"] \\
X \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[u, phantom, shift right=6ex, "\overset{\mu^S}{\Rightarrow}"] & X \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend right, "T"'] & X \arrow[r, "T"'] \arrow[d, phantom, "\mu^T \Downarrow"] & X \\
 & & {} &
\end{tikzcd}$$

ilustra que:

(38) $$(\mu^T S.T\lambda.\lambda T)\mu^S = (\mu^T S\mu^S).(T\lambda.\lambda T)SS \quad .$$

Por (36), (37) y (38) obtenemos:

(39)

$$\mu^T\mu^S.T\lambda S.TS(\mu^T\mu^S.T\lambda S) = \mu^T\mu^S.T\lambda S.TS\mu^T\mu^S.TST\lambda S = \mu^T\mu^S.T[(\lambda.S\mu^T)\mu^S].TST\lambda S =$$
$$\mu^T\mu^S.T[(\mu^T S.T\lambda.\lambda T)\mu^S].TST\lambda S = \mu^T\mu^S.T[(\mu^T S\mu^S).(T\lambda.\lambda T)SS].TST\lambda S \quad .$$

Finalmente, por ser (X,S), (X,T) mónadas y observando el siguiente diagrama

(40) $$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "S"'] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\underset{\mu^S}{\Leftarrow}"] & X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\mu^S"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda"] & X \arrow[d, "S"] \\
 & X \arrow[r, "1"'] & X \arrow[r, "T"'] \arrow[dr, "T"'] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"] \arrow[l, phantom, shift right=4ex, "\underset{\mu^T}{\Leftarrow}"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\overset{\mu^T}{\Rightarrow}"] & X \arrow[dl, "T"] \\
 & & & X &
\end{tikzcd}$$

se sigue que:

(41)

$$\mu^T\mu^S.T[(\mu^T S\mu^S).(T\lambda.\lambda T)SS].TST\lambda S = [(\mu^T.T\mu^T)(\mu^S.S\mu^S)].T(T\lambda.\lambda T)SS.TST\lambda S =$$
$$[(\mu^T.\mu^T T)(\mu^S.\mu^S S)].T(T\lambda.\lambda T)SS.TST\lambda S \quad .$$

Por (39) y (41) hallamos que:

(42) $$\mu^T\mu^S.T\lambda S.TS(\mu^T\mu^S.T\lambda S) = [(\mu^T.\mu^T T)(\mu^S.\mu^S S)].T(T\lambda.\lambda T)SS.TST\lambda S \quad .$$

Un razonamiento similar nos conduce a

$$\mu^T\mu^S.T\lambda S.\mu^T\mu^S TS.T\lambda STS = [(\mu^T.\mu^T T)(\mu^S.\mu^S S)].TT(\lambda S.S\lambda)S.T\lambda STS \quad . \tag{43}$$

Utilizamos (40) para corroborar que:

$$\begin{gathered} TT\lambda SS.T\lambda TSS.TST\lambda S = TT\lambda SS.T\lambda\lambda S = \\ TT\lambda SS.T(TS\lambda.\lambda ST)S = TT\lambda SS.TTS\lambda S.T\lambda STS \quad . \end{gathered} \tag{44}$$

Luego, por (42), (43) y (44) tenemos la siguiente igualdad:

$$\mu^T\mu^S.T\lambda S.TS(\mu^T\mu^S.T\lambda S) = \mu^T\mu^S.T\lambda S.(\mu^T\mu^S TS.T\lambda S)TS \quad .$$

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} TSTSTS \arrow[r, "TS(\mu^T\mu^S.T\lambda S)"] \arrow[d, "(\mu^T\mu^S TS.T\lambda S)TS"'] & TSTS \arrow[d, "\mu^T\mu^S.T\lambda S"] \\ TSTS \arrow[r, "\mu^T\mu^S.T\lambda S"'] & TS \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces $Cmp_{\mathfrak{C}}((X,S),(Y,\lambda),\eta^T,\mu^T) = (X,TS,\eta^T\eta^S,\mu^T\mu^S.T\lambda S)$ está bien definida.

(ii) Sean $(\Gamma,W) = ((X,S),(T,\lambda)),(\Gamma',W') = ((X',S'),(T',\lambda'))$ objetos de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$. Primero, a partir del objeto y del morfismo

$$\begin{gathered} [(U,Q),\pi] : [(X,S)(T,\lambda)] \to [(X',S')(T',\lambda')] \\ \sigma : [(U,Q),\pi] \to [(U',Q'),\pi'] \end{gathered}$$

obtenemos el objeto $(U,\pi S.T'Q)$ y el morfismo σ en la categoría $Mnd(\mathfrak{C})[(X,TS),(X',T'S')]$. Aquí los detalles.

Para la 1-celda $((U,Q),\pi) : [(X,S),(T,\lambda)] \to [(X',S'),(T',\lambda')]$ tenemos por una parte el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & (T',\lambda')(U,Q) \arrow[dd, "\pi"] \\ (U,Q) \arrow[ur, "\eta^{T'}(U,Q)"] \arrow[dr, "(U,Q)\eta^T"'] & \\ & (U,Q)(T,\lambda) \end{tikzcd}$$

En otras palabras $\pi.\eta^{T'}(U,Q) = \pi.\eta^{T'}1_U$ (donde la operación vertical en la izquierda es en $Mnd(\mathfrak{C})$ mientras que la del lado derecho es la operación vertical en $\mathfrak{C}$); como por la misma razón $(U,Q)\eta^T = 1_U\eta^T$ (ahora se trata de composición horizontal). Así,

$$\pi.\eta^{T'}U = U\eta^T \quad . \tag{45}$$

Por otra parte por razones semejantes a (45), del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (T',\lambda')(U,Q)(T,\lambda) \arrow[r, "\pi(T,\lambda)"] & (U,Q)(T,\lambda)(T,\lambda) \arrow[dd, "(U,Q)\mu^T"] \\
(T',\lambda')(T',\lambda')(T',\lambda') \arrow[ur, "(T',\lambda')\pi"] \arrow[dr, "\mu^{T'}(U,Q)"'] & & \\
 & (T',\lambda')(U,Q) \arrow[r, "\pi"'] & (U,Q)(T,\lambda)
\end{tikzcd}$$

se deduce que

(46) $$\pi.\mu^{T'}U = \pi.\mu^{T'}(U,Q) = (U,Q)\mu^T.\pi(T,\lambda).(T',\lambda')\pi = U\mu^T.\pi T.T'\pi \quad .$$

$$\begin{tikzcd}
(T',\lambda') \arrow[r, "\eta^S T"] \arrow[d, "T\eta^S"'] & (T',\lambda')(U,Q) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "S\lambda"] & (U,Q)(T,\lambda) \arrow[d, "\lambda S"] \\
(T',\lambda')(T',\lambda')(T',\lambda') \arrow[r, "\mu^S T"'] & STS \arrow[r, "\lambda"'] & TSS
\end{tikzcd}$$

Ilustramos en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "U"] \arrow[dr, "S"'] & X' \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, "S'"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\eta^{S'}\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "Q\Downarrow"] & X' \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\mu^{T'}\Downarrow"] & X' \\
 & X \arrow[ur, "U"'] & &
\end{tikzcd}$$

que:

(47) $$T'Q.\eta^{T'}\eta^{S'}U = \eta^{T'}(Q.\eta^{S'}U) \quad .$$

De esta manera por ser (U,Q) funtor de mónadas y (47) :

(48) $$\pi S.T'Q.\eta^{T'}\eta^{S'}U = \pi S.\eta^{T'}(Q.\eta^{S'}U) = \pi S.\eta^{T'}(U\eta^S) \quad .$$

Además por (45) y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, "S"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\eta^S\Downarrow"] & X \arrow[r, "U"'] \arrow[dr, "T"'] & X' \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\eta^{T'}\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\pi\Downarrow"] & X' \\
 & & X \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

se cumple que:

(49) $$\pi S.(\eta^{T'}U\eta^S) = (\pi.\eta^{T'}U)\eta^S = U\eta^T\eta^S \quad .$$

Por (48) y (49) el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & T'S'U \arrow[dd, "\pi S.T'Q"] \\
U \arrow[ur, "\eta^{T'}\eta^{S'}U"] \arrow[dr, "U\eta^T\eta^S"'] & \\
 & UTS
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Utilizamos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow Q"] & X' \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "S'"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\mu^{S'} \Leftarrow"] & X' \arrow[dl, "S'"] \arrow[dr, "T'"] & \\
X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \pi"] & X' \arrow[d, "T'"'] \arrow[dr, "T'"] \arrow[rr, phantom, "\lambda' \Leftarrow"] & & X' \arrow[dl, "S'"] \\
X \arrow[r, "U"'] & X' & X' \arrow[l, "T'"] \arrow[l, phantom, shift left=6, "\mu^{T'} \Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

para ilustrar que:

$$
\begin{gathered}
\pi S.T'Q.(\mu^{T'}\mu^{S'}.T'\lambda'S')U = \\
\pi S.T'Q.\mu^{T'}S'U.T'T'\mu^{S'}U.T'\lambda'S'U = (\pi.\mu^{T'}U)S.T'T'Q.T'T'\mu^{S'}U.T'\lambda'S'U \quad .
\end{gathered} \tag{50}
$$

Por (46), obtemos a partir del diagrama anterior, el siguiente

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "S'"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \lambda'"] & X' \arrow[d, "S'"] & \\
X' \arrow[ur, "S'"] \arrow[r, "S'"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "\mu^{S'} \Downarrow"] & X' \arrow[r, "T'"] & X' \arrow[r, "T'"] & X' \\
X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "S"'] \arrow[ur, phantom, "\searrow Q"] & X' \arrow[u, "U"'] \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend right, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\searrow \pi"] \arrow[rr, phantom, shift right=5, "\mu^T \Downarrow"] & X \arrow[u, "U"'] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\searrow \pi"] & X \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}
$$

para ver que:

(51)
$$
\begin{gathered}
(\pi.\mu^{T'}U)S.T'T'Q.T'T'\mu^{S'}U.T'\lambda'S'U = \\
(U\mu^{T}.\pi T.T'\pi)S.T'T'Q.T'T'\mu^{S'}U.T'\lambda'S'U = (U\mu^{T}.\pi T.T'\pi)S.T'T'(Q.\mu^{S'}U).T'\lambda'S'U \quad .
\end{gathered}
$$

Debido a que $Q.\mu^{S'}U = U\mu^{S}.QS.S'Q$ ((U,Q) funtor de mónadas) tenemos que:

(52)
$$
\begin{gathered}
(U\mu^{T}.\pi T.T'\pi)S.T'T'(Q.\mu^{S'}U).T'\lambda'S'U = \\
(U\mu^{T}.\pi T.T'\pi)S.T'T'(U\mu^{S}.QS.S'Q).T'\lambda'S'U \quad .
\end{gathered}
$$

Al sustituir $Q.\mu^{S'}U$ por $U\mu^{S}.QS.S'Q$ en el diagrama anterior, obtenemos

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr, "S'"] & & \\
X' \arrow[r, "S'"] & X' \arrow[r, "S'"] \arrow[ur, "T'"] & X' \arrow[u, phantom, "\lambda'\Downarrow"] \arrow[r, "T'"] & X' \arrow[r, "T'"] & X' \\
X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "S"'] \arrow[rr, bend right, "S"'] \arrow[ur, phantom, "Q\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "S"'] \arrow[ur, phantom, "Q\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\mu^{S}\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend right, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\pi\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\pi\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\mu^{T}\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \\
 & {} & & {} &
\end{tikzcd}
$$

En donde apreciamos:

(53)
$$
\begin{gathered}
(U\mu^{T}.\pi T.T'\pi)S.T'T'(U\mu^{S}.QS.S'Q).T'\lambda'S'U = \\
(U\mu^{T}.\pi T)\mu^{S}.T'[\pi SS.T'(QS.S'Q)].T'\lambda'S'U = \\
(U\mu^{T}.\pi T)\mu^{S}.T'[\pi SS.T'QS].T'(\lambda'Q) = \\
(U\mu T.\pi T)\mu^{S}.T'[\pi SS.T'QS].T'\lambda'US.T'S'T'Q \quad .
\end{gathered}
$$

Como $\pi : (T'\lambda')(U,Q) \to (U,Q)(T,\lambda)$ es transformación funtor de mónadas se tiene $U\lambda.QT.S'\pi = \pi S.T'Q.\lambda'U$. Cuando sustituimos $\pi S.T'Q.\lambda'U$ en el anterior diagrama por $U\lambda.QT.S'\pi$ se obtiene el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "S'"] & X' \arrow[r, "T'"] & X' \arrow[r, "S'"] & X' \arrow[r, "T'"] & X' \\
X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "S"'] \arrow[drr, bend right, "S"'] \arrow[ur, phantom, "Q\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "T"'] \arrow[dr, "S"] \arrow[ur, phantom, "\pi\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\mu^{S}\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "S"] \arrow[ur, phantom, "Q\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\lambda\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \arrow[r, "T"] \arrow[ur, phantom, "\pi\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\mu^{T}\Downarrow"] & X \arrow[u, "U"] \\
{} & {} & X \arrow[ur, "T"] \arrow[urr, bend right, "T"'] & {} &
\end{tikzcd}
$$

El que nos es útil para aclarar:

(54)
$$
\begin{gathered}
(U\mu T.\pi T)\mu^{S}.T'[\pi SS.T'QS].T'\lambda'US.T'S'T'Q = \\
(U\mu^{T}.\pi T)\mu^{S}.T'(U\lambda.QT.S'\pi)S.T'S'T'Q = \\
U\mu^{T}\mu^{S}.\pi TSS.T'(U\lambda.QT.S'\pi)S.T'S'T'Q = \\
U\mu^{T}\mu^{S}.\pi\lambda S.T'(QT.S'\pi)S.T'S'T'Q = \\
U\mu^{T}\mu^{S}.UT\lambda S.\pi STS.T'(QT.S'\pi)S.T'S'T'Q = \\
U(\mu^{T}\mu^{S}.T\lambda S).(\pi S.T'Q)TS.T'S'(\pi S.T'Q) \quad .
\end{gathered}
$$

Entonces por (50), (51), (52), (53) y (54) concluimos que:

$$U(\mu^T\mu^S.T\lambda S).(\pi S.T'Q)TS.T'S'(\pi S.T'Q) = \pi S.T'Q.(\mu^{T'}\mu^{S'}.T'\lambda' S')U \quad .$$

Por lo tanto $(U, \pi S.T'Q)$ es funtor de mónadas.

Por ser $\sigma : [(U,Q),\pi] \Rightarrow [(U',Q'),\pi']$ una 1-celda de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$ se tiene que $\sigma : (U,Q) \Rightarrow (U',Q')$ es 1-celda de $Mnd(\mathfrak{C})$.

Ahora, para cada par de objetos $(\Gamma,W) = ((X,S),(T,\lambda)), (\Gamma',W') = ((X',S'),(T',\lambda'))$ de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$

$$(Cmp_{\mathfrak{C}})_{(\Gamma,W),(\Gamma',W')} : Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))[(\Gamma,W),(\Gamma',W')] \to Mnd(\mathfrak{C})[(X,TS),(X',T'S')]$$

es el funtor tal que:

$$[(U,Q),\pi] : [(X,S)(T,\lambda)] \to [(X',S')(T',\lambda')] \mapsto Cmp_C[(U,Q),\pi] = (U,\pi S.T'Q) \quad y$$
$$\sigma : [(U,Q),\pi] \to [(U',Q'),\pi'] \mapsto Cmp_C(\sigma) = \sigma$$

(escribimos $Cmp_C[(U,Q),\pi]$ para $(Cmp_{\mathfrak{C}})_{(\Gamma,W),(\Gamma',W')}[(U,Q),\pi]$ y $Cmp_C(\sigma)$ para $(Cmp_{\mathfrak{C}})_{(\Gamma,W),(\Gamma',W')}(\sigma)$).

Hemos visto que $(Cmp_{\mathfrak{C}})_{(\Gamma,W),(\Gamma',W')}$ está bien definido.

Finalmente veamos que $Cmp_{\mathfrak{C}}(\sigma)$ es funtor.

En la situación

$$[(U,Q),\tau] \xrightarrow{\sigma} [(U',Q'),\tau'] \xrightarrow{\sigma_1} [(V,P),\delta]$$

$Cmp_{\mathfrak{C}}(\sigma_1.\sigma) = \sigma_1.\sigma$ (donde la composición vertical en el lado derecho está en $Mnd(\mathfrak{C})$).
Como $Cmp_{\mathfrak{C}}\sigma_1.Cmp_{\mathfrak{C}}\sigma = \sigma_1.\sigma$, entonces $Cmp_{\mathfrak{C}}(\sigma_1.\sigma) = Cmp_{\mathfrak{C}}\sigma_1.Cmp_{\mathfrak{C}}\sigma$.
Por la definición de $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$, $\quad 1_{[(U,Q),\tau]} = 1_{(U,Q)} = 1_U$, mientras que $1_{(U,\tau S.T'Q)} = 1_U$. Entonces $Cmp_{\mathfrak{C}}(1_{[(U,Q),\tau]}) = 1_{Cmp_{\mathfrak{C}}[(U,Q),\tau]}$.

(iii) Para $((X,S),(T,\lambda))$ y

$$((X',S'),(T',\lambda')) \xrightarrow{((U,Q),\tau)} ((X,S),(T,\lambda)) \xrightarrow{((1_X,1_S),1_T)} ((X,S),(T,\lambda))$$

tenemos en $Mnd(\mathfrak{C})$:

$$\begin{tikzcd}
(X',S') \arrow[r, "{(U,Q)}"] \arrow[d, "{(T',\lambda')}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\sigma"] & (X,S) \arrow[r, "{(1_X,1_S)}"] \arrow[d, "{(T,\lambda)}"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow 1_T"] & (X,S) \arrow[d, "{(T,\lambda)}"] \\
(X',S') \arrow[r, "{(U,Q)}"'] & (X,S) \arrow[r, "{(1_X,1_S)}"'] & (X,S)
\end{tikzcd}$$

Luego

$$[(1_X,1_S),1_T][(U,Q),\tau] = [(U,Q)(1_X,1_S),(1_X,1_S)\tau,1_T(U,Q)] =$$
$$[(U,Q),1_{1_X}\tau,1_T1_U] = [(U,Q),\tau] \quad .$$

Resulta que $[(U,Q),\tau][(1_X,1_S),1_T] = [(U,Q),\tau]$ es cierto por un argumento semejante al caso anterior. Por lo que $1_{[(X,S),(T,\lambda)]} = [(1_X,1_S),1_T]$.

Sabemos que $1_{Cmp_{\mathfrak{C}}[(X,S),(T,\lambda)]} = 1_{(X,TS)} = (1_X,1_{TS})$.

Ahora bien $\qquad Cmp_{\mathfrak{C}}[(1_X,1_S),1_T] = (1_X,1_TS.T1_S) = (1_X,1_{TS})$.

Por lo tanto $Cmp_{\mathfrak{C}}\big(1_{[(X,S),(T,\lambda)]}\big) = 1_{Cmp_{\mathfrak{C}}[(X,S),(T,\lambda)]}$.

(iv) Sean

$$\begin{tikzcd}[(X,S),(T,\lambda)] \arrow[r, bend left, "{[(U,Q),\tau]}"] \arrow[r, bend right, "{[(U_1,Q_1),\tau_1]}"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & {[(X_1,S_1),(T_1,\lambda_1)]} \arrow[r, bend left, "{[(V,P),\delta]}"] \arrow[r, bend right, "{[(V_1,P_1),\delta_1]}"'] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow"] & {[(X_2,S_2),(T_2,\lambda_2)]}\end{tikzcd}$$

De esta forma

(55) $$\begin{gathered}Cmp_{\mathfrak{C}}\big([(V,P),\delta][(U,Q),\tau]\big) = Cmp_{\mathfrak{C}}\big((V,P)(U,Q),(V,P)\tau.\delta(U,Q)\big) = \\ Cmp_{\mathfrak{C}}\big((VU,VQ.PU),(V,P)\tau.\delta(U,Q)\big) = \big(VU,(V\tau.\delta U)S.T_2(VQ.PU)\big) \quad .\end{gathered}$$

Pero, según

$$\begin{tikzcd}X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow Q"] & X_1 \arrow[r, "V"] \arrow[d, "S_1"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow P"] & X_2 \arrow[d, "S_2"] \\ X \arrow[r, "U"'] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \tau"] & X_1 \arrow[r, "V"'] \arrow[d, "T_1"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \delta"] & X_2 \arrow[d, "T_2"] \\ X \arrow[r, "U"'] & X_1 \arrow[r, "V"'] & X_2\end{tikzcd}$$

se satisface:

(56) $$(V\tau.\delta U)S.T_2(VQ.PU) = V\tau S.VT_1Q.\delta S_1U.T_2PU = V(\tau S.T_1Q).(\delta S_1.T_2P)U \quad .$$

Por lo tanto, según (55) y (56), tenemos que:

$$Cmp_{\mathfrak{C}}\big([(V,P),\delta][(U,Q),\tau]\big) = Cmp_{\mathfrak{C}}[(V,P),\delta]Cmp_{\mathfrak{C}}[(U,P),\tau] \quad .$$

No hay mayor dificultad para ver que $Cmp_{\mathfrak{C}}(\beta\sigma) = Cmp_{\mathfrak{C}}(\beta)Cmp_{\mathfrak{C}}(\sigma)$.

Por lo tanto $Cmp_{\mathfrak{C}}$ es un 2-funtor.

Las componentes $Inc_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to Mnd(\mathfrak{C})$ determinan una transformación natural $Inc : 1 \to Mnd$ y los 2-funtores $Cmp_{\mathfrak{C}}$ son los componentes de una transformación natural $Cmp : MndMnd \to Mnd$.

Nuestro siguiente resultado es:

Teorema 5.2. *El par (2-Cat,Mnd) con unidad* $Inc : 1 \to Mnd$ *y multiplicación* $Cmp : MndMnd \to Mnd$ *es una mónada en Cat.*

Demostración. Veamos que

(57) $$\begin{tikzcd}Mnd \arrow[r, "MndInc"] \arrow[dr, "1"'] & MndMnd \arrow[d, "Cmp_{\mathfrak{C}}"] & Mnd \arrow[l, "IncMnd"'] \arrow[dl, "1"] \\ & Mnd & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Mostramos que $Cmp_{\mathfrak{C}}MndInc_{\mathfrak{C}}$ evaluado en el objeto (X,S), la 1-celda (U,ϕ) y la 2-celda κ es la transformación natural identidad.

Sea (X, S) un objeto de $Mnd(\mathfrak{C})$. Tenemos:

$$Cmp_{\mathfrak{C}}Mnd(Inc_{\mathfrak{C}})(X,S) = Cmp_{\mathfrak{C}}(Inc_{\mathfrak{C}}X, Inc_{\mathfrak{C}}S, Inc_{\mathfrak{C}}\eta^S, Inc_{\mathfrak{C}}\mu^S) =$$
$$Cmp_{\mathfrak{C}}[(X,1_X),(S,1_S),\eta^S,\mu^S] = (X, S1_X, \eta^S 1_{1_X}, \mu^S 1_{1_X}.S1_S1_X) = (X,S) \quad .$$

Ilustramos $\mu^S 1_{1_X}.S1_S1_X = \mu^S$ en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow 1_{1_X}"] & X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "1_X"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow 1_S"] & Y \arrow[d, "1_X"] & \\
Y \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "S"'] \arrow[rr, bend right, "S"'] & X \arrow[r, "S"] \arrow[d, phantom, "\mu^S \Downarrow"] & X \\
& & {} &
\end{tikzcd}$$

Para $(U, \phi) : (X, S) \to (Y, T) \in Mnd(\mathfrak{C})$ se tiene:

$$Mnd[Inc_{\mathfrak{C}}(U,\phi)] = (Inc_{\mathfrak{C}}U, Inc_{\mathfrak{C}}\phi) = ((U, 1_U), \phi) \quad .$$

Es decir en $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$

$$\begin{tikzcd}
(X,1_X) \arrow[r, "{(U,1_U)}"] \arrow[d, "{(S,1_S)}"'] \arrow[dr, phantom, "\phi \Swarrow"] & (Y,1_Y) \arrow[d, "{(T,1_T)}"] \\
(X,1_X) \arrow[r, "{(U,1_U)}"'] & (Y,1_Y)
\end{tikzcd}$$

Luego, $Cmp_{\mathfrak{C}}((U, 1_U), \phi) = (U, \phi 1_X.T1_U)$. Pero, según el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "1_U \Swarrow"] & Y \arrow[d, "1_Y"] & \\
X \arrow[r, "U"'] \arrow[dr, "S"'] & Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, phantom, "\phi \Downarrow"] & Y \\
& X \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

se cumple:

$$\phi 1_X.T1_U = \phi 1_{1_X}, 1_T 1_U = \phi, 1_{TU} = \phi \quad .$$

Entonces $Cmp_{\mathfrak{C}}Mnd(Inc_{\mathfrak{C}}(U, \phi)) = (U, \phi)$.

Finalmente, para

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\kappa \Downarrow"] & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

en $Mnd(\mathfrak{C})$, $Cmp_{\mathfrak{C}}(Mnd(Inc_{\mathfrak{C}}\kappa)) = Cmp_{\mathfrak{C}}(Inc_{\mathfrak{C}}\kappa) = \kappa$.
La demostración de que $Cmp_{\mathfrak{C}}IncMnd = 1$ es muy parecida. Por lo tanto tenemos la conmutatividad de (57).

Para completar nuestra demostración, justificamos la conmutatividad de

(58)
$$\begin{tikzcd}
MndMndMnd \arrow[r, "MndCmp"] \arrow[d, "CmpMnd"'] & MndMnd \arrow[d, "Cmp"] \\
MndMnd \arrow[r, "Cmp"'] & Mnd
\end{tikzcd}$$

Sea $\Delta = \big([(X,S),(T,\lambda)],[(U,\phi),\tau],\overline{\eta},\overline{\mu}\big)$ en $Mnd(Mnd(Mnd(\mathfrak{C})))$. Tenemos que:

$$\begin{gathered}
\Delta' = Mnd(Cmp_{\mathfrak{C}}\Delta) = \\
\big(Cmp_{\mathfrak{C}}[(X,S),(T,\lambda)], Cmp_{\mathfrak{C}}[(U,\phi),\tau], Cmp_{\mathfrak{C}}\overline{\eta}, Cmp_{\mathfrak{C}}\overline{\mu}\big) = \\
\big((X, TS, \eta^T\eta^S, \mu^T\mu^S.T\lambda S), (U, \tau S.T\phi), \overline{\eta}, \overline{\mu}\big)
\end{gathered}$$

en $Mnd(Mnd(\mathfrak{C}))$.

Así,

(59)
$$Cmp_{\mathfrak{C}}(\Delta') = (X, UTS, \overline{\eta}\eta^T\eta^S, \overline{\mu}(\mu^T\mu^S.T\lambda S).U(\tau S.T\phi)TS) \quad .$$

Por otra parte, $Cmp_{Mnd(\mathfrak{C})}\Delta = \big((X,S),(U,\phi)(T,\lambda),\overline{\eta}\eta^T,\overline{\mu}\mu^T, 1_U\tau 1_T\big)$. Por lo que:

(60)
$$Cmp_{\mathfrak{C}}(Cmp_{Mnd(\mathfrak{C})}\Delta) = (X, UTS, \overline{\eta}\eta^T\eta^S, (\overline{\mu}\mu^T, 1_U\tau 1_T)\mu^S.UT(U\lambda.\phi T)S) \quad .$$

En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "S"] \arrow[dr, bend right, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\mu^S \Downarrow"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\swArrow_{\lambda}"] & X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\swArrow_{\phi}"] & X \arrow[d, "S"] & & \\
& X \arrow[r, "T"] \arrow[ddr, bend right, "T"'] & X \arrow[r, "U"] \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\mu^T \Downarrow"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, phantom, "\tau \Downarrow"] & X \arrow[r, "U"] \arrow[d, phantom, "\overline{\mu} \Downarrow"] & X \\
& & & X \arrow[ur, "U"] \arrow[urr, bend right, "U"'] & &
\end{tikzcd}$$

se aclara que:

(61)
$$\begin{gathered}
\overline{\mu}(\mu^T\mu^S.T\lambda S).U(\tau S.T\phi)TS = \overline{\mu}\mu^T\mu^S.U\tau\lambda S.UT\phi TS = \\
\overline{\mu}\mu^T\mu^S.U\tau TSS.UT(U\lambda.\phi T)S = \\
\overline{\mu}\mu^T.U\tau T\mu^S.UT(U\lambda.\phi T)S = (\overline{\mu}\mu^T.U\tau T)\mu^S.UT(U\lambda.\phi T)S \quad .
\end{gathered}$$

Al considerar (59), (60) y (61) se sigue que $Cmp_{\mathfrak{C}}(Mnd(Cmp_{\mathfrak{C}}\Delta)) = Cmp_{\mathfrak{C}}(Cmp_{Mnd(\mathfrak{C})}\Delta)$.

Aplicando $MndCmp_{\mathfrak{C}}$ al diagrama

$$\begin{tikzcd}
((X,S),(T,\lambda)) \arrow[r, "{[(p,q),z]}"] \arrow[d, "{[(U,Q),\tau]}"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow x"] & ((X',S'),(T',\lambda')) \arrow[d, "{[(U',Q'),\tau']}"] \\
((X,S),(T,\lambda)) \arrow[r, "{[(p,q),z]}"'] & ((X',S'),(T',\lambda'))
\end{tikzcd}$$

el correspondiente en $Mnd(\mathfrak{C})$ es

$$\begin{tikzcd}
(X,TS) \arrow[r, "{(p,zS.T'q)}"] \arrow[d, "{(U,\tau S.T\phi)}"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow x"] & (X',T'S') \arrow[d, "{(U',\tau' S'.T'\phi')}"] \\
(X,TS) \arrow[r, "{(p,zS.T'q)}"'] & (X',T'S')
\end{tikzcd}$$

De manera que:

$$\begin{gathered} Cmp_{\mathfrak{C}}(Mnd[Cmp_{\mathfrak{C}}([(p,q),z],x)]) = \\ Cmp_{\mathfrak{C}}[(p,zS.T'q),x] = (p, xTS.U'(zS.T'q)) \quad . \end{gathered} \tag{62}$$

Además,

$$\begin{gathered} Cmp_{\mathfrak{C}}(Cmp_{Mnd(\mathfrak{C})}([(p,q),z],x)) = \\ Cmp_{\mathfrak{C}}[(p,q),x(T,\lambda).(U',\phi')z] = \big(p,[x(T,\lambda).(U',\phi')z]S.U'T'q\big) \quad . \end{gathered} \tag{63}$$

De acuerdo con (62) y (63) $Cmp_{\mathfrak{C}}(Mnd[Cmp_{\mathfrak{C}}([(p,q),z],x)]) = Cmp_{\mathfrak{C}}(Cmp_{Mnd(\mathfrak{C})}([(p,q),z],x))$.

En $Mnd(Mnd(Mnd(\mathfrak{C})))$, sea

$$\begin{tikzcd}
\langle((X,S),(T,\lambda)),[(U,\phi),\tau]\rangle \arrow[r, bend left, "{\langle[(p,q),z],x\rangle}"] \arrow[r, bend right, "{\langle[(p',q'),z'],x'\rangle}"'] \arrow[r, phantom, "\kappa \Downarrow"] & \langle((X',S'),(T',\lambda')),[(U',\phi'),\tau']\rangle
\end{tikzcd}$$

entonces $\quad Cmp_{\mathfrak{C}}(Mnd[Cmp_{\mathfrak{C}}(\kappa)]) = Cmp_{\mathfrak{C}}(Cmp_{\mathfrak{C}}(\kappa)) = Cmp_{\mathfrak{C}}(\kappa) = \kappa$ y
$Cmp_{\mathfrak{C}}(Cmp_{Mnd(\mathfrak{C})}(\kappa)) = Cmp_{\mathfrak{C}}(\kappa) = \kappa.$

Por lo tanto el diagrama (58) es conmutativo. Por lo que el teorema está demostrado.

$\square$

Para la categoría 2-Cat mostramos la existencia del funtor $Mnd^* : 2-Cat \to 2-Cat$, después hallamos transformaciones naturales $Inc^* : 1 \to Mnd^*$ y $(Cmp)^* : Mnd^*Mnd^* \to Mnd^*$. Finalmente mostramos que $(2-Cat, Mnd^*, Inc^*, (Cmp)^*)$ es una mónada.

No es difícil ver que la aplicación $\mathfrak{F}^*$ definida como:

$$X \mapsto \mathfrak{F}^*X = \mathfrak{F}X, \quad f^* : X \to Y \mapsto \mathfrak{F}^*f^* = (\mathfrak{F}f)^* \quad y \quad \mathfrak{F}^*\tau = \mathfrak{F}\tau \quad .$$

es un 2-funtor.

Se define el funtor $(\ )^* : 2-Cat \to 2-Cat$ como:

$$\mathfrak{C} \mapsto (\mathfrak{C})^* = \mathfrak{C}^* \quad y \quad \mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{F}^* : \mathfrak{C}^* \to \mathfrak{D}^* \quad .$$

Veamos que $(\ )^*$ es funtor.

Si

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathfrak{C} \xrightarrow{\mathfrak{G}} \mathfrak{D}$$

entonces, para

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f^*"] \arrow[r, bend right, "g^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

en $\mathfrak{C}^*$, tenemos que:

$$(\mathfrak{G}\mathfrak{F})^*X = \mathfrak{G}\mathfrak{F}X, \quad (\mathfrak{G}\mathfrak{F})^*f^* = (\mathfrak{G}\mathfrak{F}f)^* \quad y \quad (\mathfrak{G}\mathfrak{F})^*\tau = \mathfrak{G}\mathfrak{F}\tau \quad .$$

Pero, además:

$$\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}^*X = \mathfrak{G}\mathfrak{F}X, \quad \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}^*f^* = \mathfrak{G}^*(\mathfrak{F}f)^* = (\mathfrak{G}\mathfrak{F}f)^* \quad y \quad \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}^*\tau = \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}\tau = \mathfrak{G}\mathfrak{F}\tau \quad .$$

Así, $(\mathfrak{G}\mathfrak{F})^* = \mathfrak{G}^*\mathfrak{F}^*$.
Ahora bien, al considerar a $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ observamos que:

$$(1_{\mathfrak{C}})^*X = 1_{\mathfrak{C}}X = X, \quad (1_{\mathfrak{C}})^*f^* = (1_{\mathfrak{C}}f)^* = f^* \quad y \quad (1_{\mathfrak{C}})^*\tau = 1_{\mathfrak{C}}\tau = \tau \quad .$$

Por lo que $(1_{\mathfrak{C}})^* = 1_{\mathfrak{C}^*}$. Por lo tanto $(\ )^*$ es funtor.

Mnd^* denota el funtor obtenido como la composición de

$$2-Cat \xrightarrow{(\ )^*} 2-Cat \xrightarrow{Mnd} 2-Cat \xrightarrow{(\ )^*} 2-Cat \quad .$$

El cual está dado por

$$\mathfrak{C} \mapsto Mnd^*\mathfrak{C} = (Mnd\mathfrak{C}^*)^* \quad y \quad \mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \mapsto Mnd^*\mathfrak{F} = (Mnd\mathfrak{F}^*)^* \quad ,$$

donde $(Mnd\mathfrak{F}^*)^*$ es el 2-funtor tal que, para

$$\begin{tikzcd} (X,S) \arrow[r, bend left, "(U{,}\phi)^*"] \arrow[r, bend right, "(V{,}\psi)^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & (Y,T) \end{tikzcd}$$

en $(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$ se cumple:

$$\begin{gathered}(Mnd\mathfrak{F}^*)^*(X,S) = Mnd\mathfrak{F}^*(X,S) = (\mathfrak{F}^*X, \mathfrak{F}^*S),\\ (Mnd\mathfrak{F}^*)^*(U,\phi)^* = (Mnd\mathfrak{F}^*(U,\phi)^*)^* = ((\mathfrak{F}^*U, \mathfrak{F}^*\phi))^* \quad y\\ (Mnd\mathfrak{F}^*)^*\tau = Mnd\mathfrak{F}^*\tau = \mathfrak{F}^*\tau \quad .\end{gathered}$$

Sea $Inc^* : 1 \to Mnd^*$ tal que para cada $\mathfrak{C}$ objeto de $2-Cat$

$$Inc^*_{\mathfrak{C}} = (Inc_{\mathfrak{C}^*})^* : \mathfrak{C} \to Mnd(\mathfrak{C}^*)^*$$

El siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, "(Inc_{\mathfrak{C}^*})^*"] \arrow[d, "\mathfrak{F}"'] & Mnd(\mathfrak{C}^*)^* \arrow[d, "Mnd(\mathfrak{F}^*)^*"] \\ \mathfrak{D} \arrow[r, "(Inc_{\mathfrak{D}^*})^*"'] & Mnd(\mathfrak{D}^*)^* \end{tikzcd}$$

conmuta, por ser el funtor $(\ )^*$ evaluado en la transformación natural $Inc: 1 \to Mnd$ cuando se considera a $\mathfrak{F}^* : \mathfrak{C}^* \to \mathfrak{D}^*$ en 2-Cat. Así que $Inc^* : 1 \to Mnd^*$ es una transformación natural.

Un argumento similar nos permite hallar la transformación natural

$$(Cmp)^* : Mnd^* Mnd^* \to Mnd^*$$

tal que:

$$(Cmp_{\mathfrak{C}})^* = (Cmp_{\mathfrak{C}^*})^* : (MndMnd\mathfrak{C}^*)^* \to (Mnd\mathfrak{C}^*)^*$$

para cada objeto $\mathfrak{C}$ de 2-Cat.

Mostramos que $(2 - Cat, Mnd^*, Inc^*, (Cmp)^*)$ es una mónada.

Sea $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*$, si se aplica $(\ )^*$ a (57) y (58) obtemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
(Mnd\mathfrak{C}^*)^* \arrow[r, "(MndInc_{\mathfrak{C}^*})^*"] \arrow[dr, "1"'] & {[MndMnd\mathfrak{C}^*]^*} \arrow[d, "(Cmp_{\mathfrak{C}^*})^*"'] & (Mnd\mathfrak{C}^*)^* \arrow[l, "Inc_{Mnd\mathfrak{C}^*}"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & (Mnd\mathfrak{C}^*)^* &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{[Mnd(Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*))]^*} \arrow[r, "(MndCmp\mathfrak{C}^*)^*"] \arrow[d, "(Cmp_{Mnd\mathfrak{C}^*})^*"'] & {[Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)]^*} \arrow[d, "(Cmp_{\mathfrak{C}^*})^*"] \\
{[Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)]^*} \arrow[r, "(Cmp_{\mathfrak{C}^*})^*"'] & (Mnd\mathfrak{C}^*)^*
\end{tikzcd}$$

i.e. los diagramas

$$\begin{tikzcd}
Mnd^* \arrow[r, "Mnd^* Inc^*"] \arrow[dr, "1"'] & Mnd^* Mnd^* \arrow[d, "(Cmp)^*"'] & Mnd^* \arrow[l, "Inc^* Mnd^*"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & Mnd^* &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Mnd^* Mnd^* Mnd^* \arrow[r, "Mnd^* Cmp^*"] \arrow[d, "Cmp^* Mnd^*"'] & Mnd^* Mnd^* \arrow[d, "Cmp^*"] \\
Mnd^* Mnd^* \arrow[r, "Cmp^*"'] & Mnd^*
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Por lo tanto $(2 - Cat, Mnd^*)$ es una mónada.

A cada objeto de $(Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$ asignamos uno y solo un objeto de $Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$; lo mismo hacemos para 1-celdas y 2-celdas de $(Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$.

Sea $[(X, S), (T, \lambda)^*]$ un objeto de $(Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$

$$\Leftrightarrow$$

$[(X,S),(T,\lambda)^*]$ es un objeto de $Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*$.

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría $(Mnd(\mathfrak{C}))^*$ $(T,\lambda)^* : (X,S) \to (X,S)$ es 1-celda, $\eta^T : 1 \to (T,\lambda)^*$ y $\mu^T : (T,\lambda)^*(T,\lambda)^* \to (T,\lambda)^*$, son 2-celdas; además los diagramas

$$\begin{tikzcd}
(T,\lambda)^* \arrow[r, "(T,\lambda)^*\eta^T"] \arrow[dr, "1"'] & (T,\lambda)^*(T,\lambda)^* \arrow[d, "\mu^T"'] & (T,\lambda)^* \arrow[l, "\eta^T(T,\lambda)^*"'] \arrow[dl, "1"] \\
& (T,\lambda)^* &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(T,\lambda)^*(T,\lambda)^*(T,\lambda)^* \arrow[r, "\mu^T(T,\lambda)^*"] \arrow[d, "(T,\lambda)^*\mu^T"'] & (T,\lambda)^*(T,\lambda)^* \arrow[d, "\mu^T"] \\
(T,\lambda)^*(T,\lambda)^* \arrow[r, "\mu^T"'] & (T,\lambda)^*
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

$$\Leftrightarrow$$

Las mónadas (X,S), (X,T) y la 2-celda $\lambda : ST \Rightarrow TS$ satisfecen el inciso (a) de la definición de ley distributiva.

$$\Leftrightarrow$$

Las mónadas (X,S), (X,T) y la 2-celda $\lambda : ST \Rightarrow TS$ satisfecen el inciso (b) de la definición de ley distributiva.

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría $Mnd\mathfrak{C}^*$ tenemos: la 1-celda $(S^*,l) : (X,T^*) \to (X,T^*)$, las 2-celdas $\eta^S : 1 \to (S^*,l)$ y $\mu^S : (S^*,l)(S^*,l) \Rightarrow (S^*,l)$; además, los diagramas

$$\begin{tikzcd}
(S^*,\lambda) \arrow[r, "\eta^s(S^*,\lambda)"] \arrow[dr, "1"'] & (S^*,\lambda)(S^*,\lambda) \arrow[d, "\mu^S"'] & (S^*,\lambda) \arrow[l, "(S^*,\lambda)\eta^S"'] \arrow[dl, "1"] \\
& (S^*,\lambda) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(S^*,\lambda)(S^*,\lambda)(S^*,\lambda) \arrow[r, "\mu^S(S^*,\lambda)"] \arrow[d, "(S^*,\lambda)\mu^S"'] & (S^*,\lambda)(S^*,\lambda) \arrow[d, "\mu^S"] \\
(S^*,\lambda)(S^*,\lambda) \arrow[r, "\mu^S"'] & (S^*,\lambda)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

$$\Leftrightarrow$$

$[(X,T^*),(S^*,\lambda)^*]$ es un objeto de $Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$.

Sea $((U,Q)^*,\pi)^* : [(X,S),(T,\lambda)^*] \to [(X',S'),(T',\lambda')^*]$ en $(Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$.

$$\Leftrightarrow$$

$((U,Q)^*,\pi) : [(X',S'),(T',\lambda')^*] \to [(X,S),(T,\lambda)^*]$ en $Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*$.

$$\Leftrightarrow$$

En $(Mnd\mathfrak{C})^*$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
(X',S') \arrow[r, "(U,Q)^*"] \arrow[d, "(T',\lambda')^*"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\pi"] & (X,S) \arrow[d, "(T,\lambda)^*"] \\
(X',S') \arrow[r, "(U,Q)^*"'] & (X,S)
\end{tikzcd}$$

tal que:

$$\pi.\eta^T(U,Q)^* = (U,Q)^*\eta^{T'} \quad y \quad (U,Q)^*\mu^{T'}.\pi(T',\lambda')^*.(T,\lambda)^*\pi = \pi.\mu^T(U,Q)^* \quad .$$

Mientras que en $\mathfrak{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow Q"] & X' \arrow[d, "S'"] \\
X \arrow[r, "U"'] & X'
\end{tikzcd}$$

con:

$$Q.\eta^{S'}U = U\eta^S \quad y \quad U\mu^S.QS.S'Q = Q.\mu^{S'}U \quad .$$

$$\Leftrightarrow$$

En $Mnd\mathfrak{C}$ tenemos:

$$\begin{tikzcd}
(X',S') & (X,S) \arrow[l, "(U,Q)"'] \\
(X',S') \arrow[u, "(T',\lambda')"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow\pi"] & (X,S) \arrow[l, "(U,Q)"] \arrow[u, "(T,\lambda)"']
\end{tikzcd}$$

tal que:

$$\pi.(U,Q)\eta^T = \eta^{T'}(U,Q) \quad y \quad \mu^{T'}(U,Q).(T',\lambda')\pi.\pi(T,\lambda) = \pi.(U,Q)\mu^T \quad .$$

Mientras que en $\mathfrak{C}^*$

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "U^*"'] \\ X \arrow[u, "S^*"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow Q"] & X' \arrow[l, "U^*"] \arrow[u, "(S')^*"'] \end{tikzcd}$$

con

$$Q.U^*\eta^{S'} = \eta^S U^* \quad y \quad \mu^S U^*.S^*Q.Q(S')^* = Q.\mu^{S'}U^* \quad .$$

$$\Leftrightarrow$$

En $\mathfrak{C}$ tenemos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \pi"] & X \arrow[d, "U"] \\ X' \arrow[r, "T'"'] & X' \end{tikzcd}$$

Tal que se satisface:

$$\pi.U\eta^T = \eta^{T'}U \quad y \quad \mu^{T'}U.T'\pi.\pi T = \pi.U\mu^T \quad .$$

Mientras que en $\mathfrak{C}^*$

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "U^*"'] \\ X \arrow[u, "S^*"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow Q"] & X' \arrow[l, "U^*"] \arrow[u, "(S')^*"'] \end{tikzcd}$$

con:

$$Q.U^*\eta^{S'} = \eta^S U^* \quad y \quad \mu^S U^*.S^*Q.Q(S')^* = Q.\mu^{S'}U^* \quad .$$

$$\Leftrightarrow$$

En $\mathfrak{C}^*$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "U^*"] \arrow[d, "(T')^*"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \pi"] & X \arrow[d, "T^*"] \\ X' \arrow[r, "U^*"'] & X \end{tikzcd}$$

Tal que se satisface:

$$\pi.\eta^T U^* = U^*\eta^{T'} \quad y \quad U^*\mu^{T'}.\pi(T')^*.T^*\pi = \pi.\mu^T U^* \quad .$$

Y

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, phantom, "\swArrow Q"] & X' \arrow[l, "U^*"'] \\ X \arrow[u, "S^*"] & X' \arrow[l, "U^*"] \arrow[u, "(S')^*"'] \end{tikzcd}$$

con:

$$Q.U^*\eta^{S'} = \eta^S U^* \quad y \quad \mu^S U^*.S^*Q.Q(S')^* = Q.\mu^{S'}U^* \quad .$$

$$\Leftrightarrow$$

En $Mnd\mathfrak{C}^*$ tenemos:

$$\begin{tikzcd} (X',S') \arrow[r, "{(U^*,Q)}"] \arrow[d, "{((T')^*,\lambda')}"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \pi"] & (X,S) \arrow[d, "{(T^*,\lambda)}"] \\ (X',S') \arrow[r, "{(U^*,Q)}"'] & (X,S) \end{tikzcd}$$

Tal que:

$$\pi.\eta^T(U^*,Q) = (U^*,Q)\eta^{T'} \quad y \quad (U^*,Q)\mu^{T'}.\pi((T')^*,\lambda').(T^*,\lambda)\pi = \pi.\mu^T(U^*,Q) \quad .$$

Mientras que en $\mathfrak{C}^*$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, phantom, "\swArrow Q"] & X' \arrow[l, "U^*"'] \\ X \arrow[u, "S^*"] & X' \arrow[l, "U^*"] \arrow[u, "(S')^*"'] \end{tikzcd}$$

con

$$Q.U^*\eta^{S'} = U^*\eta^S U \quad y \quad \mu^S U^*.S^*Q.Q(S')^* = Q.U^*\mu^{S'} \quad .$$

$$\Leftrightarrow$$

En $Mnd\mathfrak{C}^*$

$$\begin{tikzcd} (X,T^*) \arrow[dr, phantom, "\swArrow Q"] & (X',(T')^*) \arrow[l, "{(U^*,\pi)}"'] \\ (X,T^*) \arrow[u, "{(S^*,\lambda)}"] & (X',(T')^*) \arrow[l, "{(U^*,\pi)}"] \arrow[u, "{((S')^*,\lambda')}"'] \end{tikzcd}$$

tal que:

$$Q.(U^*,\pi)\eta^{S'} = \eta^S(U^*,\pi) \quad y \quad \mu^S(U^*,\pi).(S^*,\lambda)Q.Q((S')^*,\lambda') = Q.(U^*,\pi)\mu^{S'} \quad .$$

Mientras que en $\mathfrak{C}^*$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "U^*"] \arrow[d, "(T')^*"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \pi"] & X \arrow[d, "T^*"] \\
X' \arrow[r, "U^*"'] & X
\end{tikzcd}$$

con:

$$\pi.\eta^T U^* = U^*\eta^{T'} \quad y \quad U^*\mu^{T'}.\pi(T')^*.T^*\pi = \pi.\mu^T U^* \quad .$$

$$\Leftrightarrow$$

$[(U^*,\pi)^*,Q] : [(X,T^*)(S^*,\lambda)^*] \to [(X',(T')^*)((S')^*,\lambda')^*]$ es objeto de $Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$.

Una sencilla inspección nos dice que

$$\begin{tikzcd}
{[(X,S),(T,\lambda)^*]} \arrow[r, bend left, "((U,Q)^*,\pi)^*"] \arrow[r, bend right, "((U',Q')^*,\pi')^*"'] \arrow[r, phantom, "\tau \Downarrow"] & {[(X',S'),(T',\lambda')^*]}
\end{tikzcd}$$

es 2-celda en $(Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$.

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{tikzcd}
{[(X,T^*),(S^*,\lambda)^*]} \arrow[r, bend left, "((U^*,\pi)^*,Q)"] \arrow[r, bend right, "((U'^*,\pi')^*,Q')"'] \arrow[r, phantom, "\tau \Downarrow"] & {[(X',T'^*),(S'^*,\lambda')^*]}
\end{tikzcd}$$

es 2-celda en $Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$.

Definimos $\Theta : Mnd^*Mnd \to MndMnd^*$ tal que para cada $\mathfrak{C}$, el 2-funtor

No es difícil mostrar que la aplicación $\Theta_{\mathfrak{C}} : (Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^* \to Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)^*$ definido como:

$$\Theta_{\mathfrak{C}}[(X,S),(T,\lambda)^*] = [(X,T^*),(S^*,\lambda)^*]$$
$$\Theta_{\mathfrak{C}}((U,Q)^*,\pi)^* = ((U^*,\pi)^*,Q) \quad y$$
$$\Theta_{\mathfrak{C}}\tau = \tau \quad .$$

es 2-funtor.

Veamos que $\Theta : Mnd^*Mnd \to MndMnd^*$ tal que:

$$\mathfrak{C} \mapsto \Theta_{cC}$$

es una transformación natural. Es decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^* \arrow[r, "\theta_{\mathfrak{C}}"] \arrow[d, "(Mnd(Mnd\mathfrak{F})^*)^*"'] & Mnd(Mnd\mathfrak{C}^*)^* \arrow[d, "Mnd(Mnd\mathfrak{F}^*)^*"] \\
((Mnd\mathfrak{D})^*)^* \arrow[r, "\Theta_{\mathfrak{D}}"'] & Mnd(Mnd\mathfrak{D}^*)^*
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $[(X,S),(T,\lambda)^*] \in (Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$, tenemos $\Theta_{\mathfrak{C}}[(X,S),(T,\lambda)^*] = [(X,T^*),(S^*,\lambda)^*]$. Entonces

$$Mnd(Mnd\mathfrak{F}^*)^*[(X,T^*),(S^*,\lambda)^*] = [(Mnd\mathfrak{F}^*)^*(X,T^*),(Mnd\mathfrak{F}^*)^*(S^*,\lambda)^*] =$$
$$[Mnd\mathfrak{F}^*(X,T^*),(Mnd\mathfrak{F}^*(S^*,\lambda))^*] = [(\mathfrak{F}^*X,\mathfrak{F}^*T^*),(\mathfrak{F}^*S^*,\mathfrak{F}^*\lambda)^*] =$$
$$[(\mathfrak{F}X,(\mathfrak{F}T)^*),((\mathfrak{F}S)^*,\mathfrak{F}\lambda)^*] \quad .$$

Por otra parte

$$((Mnd\mathfrak{F})^*)^*[(X,S),(T,\lambda)^*] = Mnd(Mnd\mathfrak{F})^*[(X,S),(T,\lambda)^*] =$$
$$[(Mnd\mathfrak{F})^*(X,S),(Mnd\mathfrak{F})^*(T,\lambda)^*] = [Mnd\mathfrak{F}(X,S),(Mnd\mathfrak{F}(T,\lambda))^*] =$$
$$[(\mathfrak{F}X,\mathfrak{F}S),(\mathfrak{F}T,\mathfrak{F}\lambda)^*] \quad .$$

Así, $\Theta_{\mathfrak{D}}[(\mathfrak{F}X,\mathfrak{F}S),(\mathfrak{F}T,\mathfrak{F}\lambda)^*] = [(\mathfrak{F}X,(\mathfrak{F}T)^*),((\mathfrak{F}S)^*,\mathfrak{F}\lambda)^*]$.
Para $((U,Q)^*,\pi)^* \in (Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$, se tiene que $\Theta_{\mathfrak{C}}((U,Q)^*,\pi)^* = ((U^*,\pi)^*,Q)$.
Por lo que

$$Mnd(Mnd\mathfrak{F}^*)^*((U^*,\pi)^*,Q) = ((Mnd\mathfrak{F}^*)^*(U^*,\pi)^*,(Mnd\mathfrak{F}^*)^*Q) =$$
$$((Mnd\mathfrak{F}^*(U^*,\pi))^*,Mnd\mathfrak{F}^*Q) = ((\mathfrak{F}^*U^*,\mathfrak{F}^*\pi)^*,\mathfrak{F}^*Q) = (((\mathfrak{F}U)^*,\mathfrak{F}\pi)^*,\mathfrak{F}Q) \quad .$$

Además,

$$(Mnd(Mnd\mathfrak{F})^*)^*((U,Q)^*,\pi)^* = Mnd(Mnd\mathfrak{F})^*((U,Q)^*,\pi)^* =$$
$$[(Mnd\mathfrak{F})^*(U,Q)^*,(Mnd\mathfrak{F})^*\pi]^* = [(Mnd\mathfrak{F}(U,Q))^*,Mnd\mathfrak{F}\pi]^* = ((\mathfrak{F}U,\mathfrak{F}Q)^*,\mathfrak{F}\pi)^* \quad .$$

Entonces $\Theta_{\mathfrak{D}} = ((\mathfrak{F}U,\mathfrak{F}Q)^*,\mathfrak{F}\pi)^* = (((\mathfrak{F}U)^*,\mathfrak{F}\pi)^*,Q)$.
Finalmente para $\tau \in (Mnd(Mnd\mathfrak{C})^*)^*$ se tiene
$Mnd(Mnd\mathfrak{F}^*)^*\Theta_{\mathfrak{C}}\tau = Mnd(Mnd\mathfrak{F}^*)^*\tau = (Mnd\mathfrak{F}^*)^*\tau = Mnd\mathfrak{F}^*\tau = \mathfrak{F}^*\tau = \mathfrak{F}\tau, \quad y$
$\Theta_{\mathfrak{D}}(Mnd(Mnd\mathfrak{F})^*)^*\tau = \Theta_{\mathfrak{D}}Mnd(Mnd\mathfrak{F})^*\tau = \Theta_{\mathfrak{D}}(Mnd\mathfrak{F})^*\tau = \Theta_{\mathfrak{D}}Mnd\mathfrak{F}\tau = \Theta_{\mathfrak{D}}\mathfrak{F}\tau = \mathfrak{F}\tau$.
De acuerdo a todo lo anterior hemos probado el siguiente:

TEOREMA 5.3. *Los dos* $(3-)$ *funtores* Mnd^*Mnd, $\quad MndMnd^* : 2-Cat \to 2-Cat$ *son naturalmente isomorfos.*

CAPíTULO 6

Aplicaciones a Cat

En el capítulo tres, mostramos que la 2-categoría **Cat** admite la construcción de álgebras y que X^S es la categoría de S-álgebras. La próxima categoría a tratar es Cat^*.

TEOREMA 6.1. *La 2-categoría Cat^* admite la construcción de álgebras.*

Nos ocupamos en primera instancia de mostrar al 2-adjunto derecho del 2-funtor Inc_{Cat^*}.
El 2-funtor $Alg_{Cat^*} : Mnd(Cat^*) \to Cat^*$ consta de:

(i) Una función objeto $Ob(Mnd(Cat^*)) \to Ob(Cat^*)$ (también denotada por Alg_{Cat^*}) tal que $(X, S) \mapsto Alg_{Cat^*}(X, S) = X_S$.

La categoría X_S es la construida por Kleisli. Sus objetos son los objetos de X. Un morfismo $f : x \to x'$ en X_S es un morfismo $f : x \to Sx'$ en X. La composición de $f : x \to x'$, $g : x' \to y$ en X_S es la composición

$$x \xrightarrow{f} Sx' \xrightarrow{Sg} SSy \xrightarrow{\mu_y} Sy$$

en X.

(ii) Iniciamos con 1-celdas y la 2-celda

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[rr, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[rr, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma \Downarrow"] & & (Y,T)
\end{tikzcd}$$

en la 2-categoría $Mnd(Cat^*)$, para obtener los funtores y la transformación natural

$$\begin{tikzcd}
X_S \arrow[rr, bend left, "{F(U,\phi)^*}"] \arrow[rr, bend right, "{F(U_1,\phi_1)^*}"'] \arrow[rr, phantom, "F(\sigma) \Downarrow"] & & Y_T
\end{tikzcd}$$

en la 2-categoría Cat^*.

Así, para $(U, \phi) : (X, S) \to (Y, T)$ objeto de $Mnd(Cat^*)$ con $\phi : TU \to US$ en Cat^* tenemos $\phi : UT \to SU$ en *na*.

En la 2-categoría **Cat** sea $F(U, \phi) : Y_T \to X_S$ definido por:

$$y \mapsto F(U, \phi)(y) = Uy \quad y \quad f : y \to y' \mapsto F(U, \phi)(f) = \phi_{y'}Uf\ .$$

Para $\sigma : (U, \phi) \Rightarrow (V, \varphi)$ en $Mnd(Cat^*)$, tenemos $\sigma : U \Rightarrow V$ *y* $\sigma S.\phi = \varphi.T\sigma$ en Cat^*.

Por lo que en **Cat** $\sigma : U \Rightarrow V$ *y* $\phi.S\sigma = \varphi.T\sigma$.

Definimos en **Cat**, $F(\sigma) : F(U,\phi) \Rightarrow F(V,\varphi)$ tal que:

$$F(\sigma)(y) = \eta^S_{Vy}\sigma_y : Uy \to Vy \ .$$

Mediante simple inspección se corrobora que $F(U,\phi)$ es funtor y que $F(\sigma)$ es transformación natural.

Para cada par de objetos (X,S), (Y,T) de $Mnd(Cat^*)$ el funtor

$$Mnd(Cat^*)\big((X,S),(Y,T)\big) \xrightarrow{(Alg_{Cat^*})_{(X,S).(Y,T)}} Cat^*(X_S, Y_T)$$

está definido como:

$$Alg_{Cat^*}(U,\phi) = F(U,\phi)^* \quad y \quad Alg_{Cat^*}(\sigma) = F(\sigma) \ .$$

(Escribimos $Alg_{Cat^*}(U,\phi)$ para $(Alg_{Cat^*})_{(X,S).(Y,T)}(U,\phi)$ y $Alg_{Cat^*}(\sigma)$ para $(Alg_{Cat^*})_{(X,S).(Y,T)}(\sigma)$).
En $Mnd(Cat^*)$ sean

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left=40, "{(U,\phi)}"] \arrow[r, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[r, bend right=40, "{(U_2,\phi_2)}"'] & (Y,T)
\end{tikzcd} \quad \sigma\Downarrow \ \ \tau\Downarrow$$

Luego en **Cat** se obtienen

$$\begin{tikzcd}
Y_T \arrow[r, bend left=40, "{F(U,\phi)}"] \arrow[r, "{F(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[r, bend right=40, "{F(U_2,\phi_2)}"'] & X_S
\end{tikzcd} \quad F\sigma\Downarrow \ \ F\tau\Downarrow$$

Así, en X_S

$$Uy \xrightarrow{F(\sigma)y} U_1y \xrightarrow{F(\tau)y} U_2y \quad ,$$

mientras que en X

$$Uy \xrightarrow{\sigma_y} U_1y \xrightarrow{\eta^S_{U_1y}} SU_1y$$

$$U_1y \xrightarrow{\tau_y} U_2y \xrightarrow{\eta^S_{U_2y}} SU_2y \ .$$

Como (X,S) es una mónada, se cumple $\mu^S_{U_2y}S\eta^S_{U_2y} = 1$; por ser η^S transformación natural se satisface $\eta^S_{U_2y}\tau_y = S\tau_y\eta^S_{U_1y}$. Entonces

$$F(\tau)_yF(\sigma)_y = \mu^S_{U_2y}S\eta^S_{U_2y}S\tau_y\eta^S_{U_1y}\sigma_y = S\tau_y\eta^S_{U_1y}\sigma_y = \eta^S_{U_2y}\tau_y\sigma_y = F(\tau\sigma)_y \ .$$

Por lo que $F\tau.F\sigma = F(\tau\sigma)$. Por lo tanto, $Alg_{Cat^*}(\tau\sigma) = Alg_{Cat^*}\tau.Alg_{Cat^*}\sigma$.

Para $(U,\phi) : (X,S) \to (Y,T)$, $1_{(U,\phi)} = 1_U$. Además $1_{F(U,\phi)} : F(U,\phi) \to F(U,\phi)$ es tal que $1_{F(U,\phi)}(y) = 1_{F(U,\phi)(y)} = \eta^S_{Uy}$. Ahora bien
$F(1_{(U,\phi)})(y) = F(1_U)(y) = \eta^S_{Uy}1_{Uy} = \eta^S_{Uy}$. De esta forma $1_{F(U,\phi)} = F(1_{(U,\phi)})$.

Por lo tanto, $\big(Alg_{Cat^*}\big)_{(X,S),(Y,T)}$ es funtor.

(iii) Para cada objeto (X,S) de $Mnd(Cat^*)$, se cumple $1_{Alg_{Cat^*}(X,S)} = 1_{X_S}$.
Ya que $1_{(X,S)} = (1_X, 1_S)$, mientras $F(1_{(X,S)}) : X_S \to X_S$ está dado por:

$$F(1_X, 1_S)(x) = 1_X(x) = x \quad y \quad F(1_X, 1_S)(f) = 1_{Sx'} 1_X f = f\ .$$

Por lo tanto, $1_{Alg_{Cat^*}(X,S)} = Alg_{Cat^*}(1_{(X,S)})$.

(iv) En la 2-categoría $Mnd(Cat^*)$ para la composición de

$$(X,S) \xrightarrow{(U,\phi)} (Y,T) \xrightarrow{(V,\varphi)} (Z,W)$$

tenemos en $Mnd(Cat^*)$

$$(X,S) \xrightarrow{(VU, V\phi.\varphi U)} (Z,W)\ .$$

Luego, en **Cat** se tiene

$$\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "U"'] & Z \arrow[l, "V"'] \\
X \arrow[u, "S"] \arrow[ur, phantom, "\phi\swarrow"] & Y \arrow[l, "U"] \arrow[u, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\varphi\swarrow"] & Z \arrow[l, "V"] \arrow[u, "W"']
\end{tikzcd}$$

Apartir de los cuales obtenemos $F(VU, V\phi.\varphi U) : Z_W \to X_S$ tal que:

$$F(VU, V\phi.\varphi U)(z) = UVz \quad y \quad F(VU, V\phi.\varphi U)(f) = \phi_{Vz'} U\varphi_{z'} UVf\ .$$

Por otra parte para

$$Z_W \xrightarrow{F(V,\varphi)} Y_T \xrightarrow{F(U,\phi)} X_S$$

hallamos que:

$$F(U,\phi)F(V,\varphi)(z) = F(U,\phi)V(z) = UV(z)$$
$$F(U,\phi)F(V,\varphi)(f) = F(U,\phi)(\varphi_{z'} Vf) = \phi_{Vz'} U\varphi_{z'} UVf\ .$$

Así, $F(VU, V\phi.\varphi U) = F(U,\phi)F(V,\varphi)$.
Por lo tanto, $Alg_{Cat^*}\big((V,\varphi),(U,\phi)\big) = Alg_{Cat^*}(V,\varphi)Alg_{Cat^*}(U,\phi)$.
Si en $Mnd(Cat^*)$ consideramos las 2-celdas

$$\begin{tikzcd}
(X,S) \arrow[r, bend left, "{(U,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(U_1,\phi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & (Y,T) \arrow[r, bend left, "{(V,\varphi)}"] \arrow[r, bend right, "{(V_1,\varphi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & (Z,W)
\end{tikzcd}$$

obtenemos en **Cat**

$$\begin{tikzcd}
Z_W \arrow[r, bend left, "{F(VU,V\phi.\varphi U)}"] \arrow[r, bend right, "{F(V_1U_1,V_1\phi_1.\varphi_1U_1)}"'] \arrow[r, phantom, "F(\tau\sigma)\Downarrow"] & X_S
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Z_W \arrow[r, bend left, "F(V,\varphi)"] \arrow[r, bend right, "F(V_1,\varphi_1)"'] \arrow[r, phantom, "F\tau \Downarrow"] & Y_T \arrow[r, bend left, "F(U,\phi)"] \arrow[r, bend right, "F(U_1,\phi_1)"'] \arrow[r, phantom, "F\sigma \Downarrow"] & X_S \end{tikzcd}$$

Ahora bien

$$F(\tau\sigma)(z) = \eta^S_{U_1V_1z}(\tau\sigma)(z) = \eta^S_{U_1V_1z}U_1\tau_z\sigma_{Vz}\ . \tag{64}$$

Por otra parte

$$S\phi_{1V_1z}SU_1\eta^T_{V_1z} = S\eta^S_{U_1V_1z}\ , \tag{65}$$

ya que se está evaluando S en una de las identidades que satisface (U_1, V_1) por ser funtor de mónadas; además

$$\mu^S_{U_1V_1z}S\eta^S_{U_1V_1z} = 1\ , \tag{66}$$

porque (X, S) es mónada y, también

$$\eta^s_{U_1V_1z}U_1\tau_z = SU_1\tau_z\eta^S_{U_1V_1z}\ , \tag{67}$$

por ser η^S transformación natural.

Si consideramos que $F(\sigma)_{F(V,\varphi)z}$ es

$$UVz \xrightarrow{\sigma_{Vz}} U_1Vz \xrightarrow{\eta^S_{U_1Vz}} SU_1Vz$$

y que para $F(\tau)_z$ se tiene

$$Vz \xrightarrow{\tau_z} V_1z \xrightarrow{\eta^T_{V_1z}} TV_1z \quad ,$$

con lo que $F(U_1, \phi_1)F(\tau)_z$ es

$$U_1Vz \xrightarrow{U_1\tau_z} U_1V_1z \xrightarrow{U_1\eta^T_{V_1z}} U_1TV_1z \xrightarrow{\phi_{1V_1z}} SU_1V_1z$$

Entonces por (65), (66) y (67)

$$\begin{gathered} F(U_1,\phi_1)F(\tau)_zF(\sigma)_{F(V,\varphi)z} = \mu^S_{U_1V_1z}S\big(F(U_1,\phi_1)F(\tau)_z\big)F(\sigma)_{F(V,\varphi)z} = \\ \mu^S_{U_1V_1z}S\phi_{1V_1z}SU_1\eta^T_{V_1z}SU_1\tau_z\eta^S_{U_1Vz}\sigma_{Vz} = \mu^S_{U_1V_1z}S\eta^S_{U_1V_1z}SU_1\tau_z\eta^S_{U_1Vz}\sigma_{Vz} = \\ 1SU_1\tau_z\eta^S_{U_1Vz}\sigma_{Vz} = \eta^S_{U_1V_1z}U_1\tau_z\sigma_{Vz}\ . \end{gathered} \tag{68}$$

Así, remitiéndonos a (64) y (68) $F(\tau\sigma)(z) = F(\tau)F(\sigma)(z)$. Lo que significa que $Alg_{Cat^*}(\tau\sigma) = Alg_{Cat^*}(\tau)Alg_{Cat^*}(\sigma)$. Por lo tanto, Alg_{Cat^*} es un 2-funtor.

Damos en seguida a quiénes serán la unidad y la counidad de la 2-adjunción.

Exhibimos a la componente de la counidad evaluada en la mónada (X, S) objeto de $Mnd(Cat^*)$.

En **Cat** definimos $U^X : X \to X_S$ como:

$$U^X(x) = x \quad y \quad U^X(f) = \eta_{x'}f\ .$$

La transformación natural

$$\begin{tikzcd}
X_S & X \arrow[l, "U^X"'] \\
X_S \arrow[u, "1"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow \phi^X"] & X \arrow[l, "U^X"] \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

es tal que:

$$\phi^X(x) = 1_{Sx}$$

Naturalmente U^X es un funtor, ϕ^X es transformación natural y (U^X, ϕ^X) es un funtor de mónadas.

Veamos que la aplicación $\Delta : Inc_{Cat^*}Alg_{Cat^*} \to 1$ dada por $\Delta_{(X,S)} = (U^X, \phi^X)$ es una transformación 2-natural.

En la 2-categoría $Mnd(Cat^*)$ sea (X, S), de manera que en Cat^*

$$\begin{tikzcd}
X_S \arrow[r, "U^X"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \phi^X"] & X \arrow[r, "U"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \phi"] & Y \arrow[d, "T"] \\
X_S \arrow[r, "U^X"] & X \arrow[r, "U"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Así, en **Cat** tenemos

$$\begin{tikzcd}
X_S & X \arrow[l, "U^X"'] & Y \arrow[l, "U"'] \\
X_S \arrow[u, "1"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow \phi^X"] & X \arrow[l, "U^X"'] \arrow[u, "S"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow \phi"] & Y \arrow[l, "U"] \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

El funtor $U^X U : Y \to X_S$ está dado por:

$$U^X Uy = Uy \;\; y \;\; U^X Uf = \eta^S_{Uy'} Uf \; ; \tag{69}$$

además $\phi_y : UTy \to SUy$, luego $U^X(\phi_y)$ es

$$UTy \xrightarrow{\phi_y} SUy \xrightarrow{\eta_{SUy}} SSUy \quad ;$$

mientras que $\phi^X_{Uy} = 1_{SUy}$ entonces,

$$(\phi^X U . U^X \phi)(y) = \phi^X_{Uy} U^X(\phi_y) = \mu_{Uy}\eta_{SUy}\phi_y = \phi y \; . \tag{70}$$

Para (X, S) de $Mnd(Cat^*)$, tenemos en Cat^*

$$\begin{tikzcd}
X_S \arrow[r, "Alg_{Cat^*}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow 1"] & Y_T \arrow[r, "U^Y"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \phi^X"] & Y \arrow[d, "T"] \\
X_S \arrow[r, "Alg_{Cat^*}"'] & Y_T \arrow[r, "U"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Así, en **Cat** tenemos

$$\begin{tikzcd} X_S & Y_T \arrow[l, "F(U{,}\phi)"'] & Y \arrow[l, "U^X"'] \\ X_S \arrow[u, "1"] \arrow[ur, phantom, "1_{F(U,\phi)} \swArrow"] & Y_T \arrow[l, "F(U\phi)"] \arrow[u, "S"] \arrow[ur, phantom, "\phi^X \swArrow"] & Y \arrow[l, "U^X"] \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

El funtor $F(U,\phi)U^Y : Y \to X_S$ está dado por:

$$F(U,\phi)U^Y y = Uy \quad y \quad F(U,\phi)U^Y f = \phi_{y'}U(\eta^T)_{y'}Uf \ . \tag{71}$$

Ya que $F(U,\phi)(1_{Ty}) = \phi_y U 1_{Ty}$ y $1_{F(U,\phi)}U^Y y = 1_{F(U,\phi)y} = 1_{Uy} = \eta^S_y$; luego, se sigue que:

$$(1_{F(U,\phi)}U^Y.F(U,\phi)\phi^Y)_y = \mu_{Uy}S\eta^S_{Uy}\phi_y 1_{UTy} = \phi_y \ . \tag{72}$$

Como consecuencia de (69), (71) y por ser (U,ϕ) funtor de mónadas, se satisface:

$$U^X U = F(U,\phi)U^Y \ . \tag{73}$$

De manera que por (70), (72) y (73)

$$(U,\phi)\Delta_{(X,S)} = \Delta_{(Y,T)} Inc_{Cat^*} Alg_{Cat^*}(X,S) \ .$$

No hay mayor dificultad en mostrar que para

$$\begin{tikzcd} (X,S) \arrow[rr, bend left, "(U{,}\phi)"] \arrow[rr, bend right, "(V{,}\varphi)"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma \Downarrow"] & & (Y,T) \end{tikzcd}$$

se cumple $\sigma\Delta_{(X,S)} = \Delta_{(Y,T)} Inc_{Cat^*} Alg_{Cat^*}\sigma$. Por lo tanto, Δ es una transformación 2-natural.

La transformación 2-natural $1_{Alg_{Cat^*}} : Alg_{Cat^*} \to Alg_{Cat^*}$ está dada para cada (X,S) por:

$$(1_{Alg_{Cat^*}})_{(X,S)} = 1_{Alg_{Cat^*}(X,S)} = 1_{X_S} \ .$$

Por definición de la categoría X_S tenemos que

$$(X_S)_{1_{X_S}} = X_S \tag{74}$$

La transformación 2-natural $\Sigma : 1 \to Alg_{Cat^*} Inc_{Cat^*}$ para cada X de **Cat** es $\Sigma_X = 1_X$.

Ahora mostramos que Δ y Σ cumplen las igualdades triangulares de la definición de 2-adjunción.

Tenemos

$$(\Sigma Alg_{Cat^*})_{(X,S)} = (\Sigma Alg_{Cat^*})_{(X,S)} 1_{Cat^*}(1_{Alg_{Cat^*}})(X,S) =$$
$$\Sigma_{X_S} 1_{Cat^*}(1_{X_S}) = \Sigma_{X_S} = 1_{X_S} \ ;$$

además de:

$$(1_{Alg_{Cat^*}}\Delta)(X,S) = (1_{Alg_{Cat^*}}1)(X,S)(Alg_{Cat^*}\Delta)(X,S) =$$
$$1_{Alg_{Cat^*}(X,S)} Alg_{Cat^*}(U^X,\phi^X) = Alg_{Cat^*}(U^X,\phi^X) \ .$$

Por lo que:

$$(Alg_{Cat^*}\Delta.\Sigma Alg_{Cat^*})(X,S) = Alg_{Cat^*}(U^X,\phi^X) \ .$$

Vemos que para $F(U^X,\phi^X) : X_S \to (X_S)_{1_{X_S}}$ se cumple:

$$(U^X,\phi^X)x = U^X x = x \quad y \quad F(U^X,\phi^X)f = \phi^X_{x'}U^X f = \mu_{x'}S(1_{Sx}\eta_{x'})f = f$$

para x objeto de X_S y $f : x \to x'$ en X_S. La igualdad $\mu_{x'}S(1_{Sx}\eta_{x'})f = f$ es cierta ya que (X,S) es funtor de mónadas.

De manera que por (74) $1_{X_S} = F(U^X,\phi^X)$. Así

$$Alg_{Cat^*}(U^X,\phi^X) = (1_{X_S})^* = 1_{X_S} = (1_{Alg_{Cat^*})(X,S)} \,.$$

i.e. tenemos que

$$\begin{tikzcd} & Cat^* \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "Inc_{Cat^*}"] & \arrow[d, phantom, "\Sigma\Downarrow"] & Cat^* = \quad 1 \\ Mnd(Cat^*) \arrow[ur, "Alg_{Cat^*}"] \arrow[rr, "1"'] & \arrow[u, phantom, "\Delta\Downarrow"] & Mnd(Cat^*) \arrow[ur, "Alg_{Cat^*}"'] & \end{tikzcd}$$

se satisface. La identidad $\Sigma Inc_{Cat^*}.Inc_{Cat^*}\Delta$ se calcula de manera semejante.

Combinando los teoremas 3.1 ,4.5 y 6.1 tenemos el siguiente resultado para **Cat**.

Corolario 6.2. *Cada una de las 2-categorías **Cat**, Cat_*, Cat^* y Cat^*_* admite la construcción de álgebras.*

Nuestro trabajo ahora será mostrar que la 2-categoría Cat^*_* admite la construcción de álgebras.

Primero mostramos que existen 2-funtores $()_{po} : Cat^* \to Cat^*_*$, $()^{po} : Cat^*_* \to Cat^*$ tales que $()^{po}()_{po} = 1$ y $()_{po}()^{po} = 1$. Damos sólo la construcción del 2-funtor $()_{po}$; la construcción de $()^{po}$ es muy semejante.

Nuestro primer paso es el siguiente:

Observación 6.3. *Si $F^*, G^* : A \to B$ son 1-celdas y $\tau : F \Rightarrow G$ es una 2-celda en Cat^* i.e.*

(75)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F^*"] \arrow[r, bend right, "G^*"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow$$

*En la 2-categoría **Cat** tenemos*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & B \arrow[l, bend right, "F"'] \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Para cada b objeto de B se tiene $\tau_b : Fb \to Gb$ en A.

Entonces τ induce una transformación natural $\overline{\tau}$ tal que:

$$\overline{\tau}_b = \tau_b^{op} : G^{op}b \to F^{op}b$$

i.e.

$$\begin{tikzcd} B^{op} \arrow[r, bend left, "G^{op}"] \arrow[r, bend right, "F^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\overline{\tau}\Downarrow"] & A^{op} \end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría Cat^*_*

$$\begin{tikzcd} A^{op} \arrow[r, bend left, "(F^{op})^*"] \arrow[r, bend right, "(G^{op})_*"'] \arrow[r, phantom, "(\overline{\tau})_*\Downarrow"] & B^{op} \end{tikzcd}$$

Apartir de (6.3) definimos el 2-funtor

$$()_{po} : Cat^* \to Cat^*_* \ ,$$

el cual consta de:

(i) La aplicación $Ob(Cat^*) \to Ob(Cat^*_*)$ (también denotada por $()_{po}$) definida como:

$$(X)_{po} = X^{op} \ ,$$

la categoría opuesta de X, para cada X objeto de **Cat**.

(ii) Para cada par de objetos $A,\ B$, de Cat^* el funtor

$$[()_{po}]_{A,B} : Cat^*(A, B) \to Cat^*_*(A^{op}, B^{op})$$

está definido como:

$$()_{po}(F^*) = (F^{op})^* \ \ y \ \ (\tau)_{po} = (\overline{\tau})_*$$

Escribimos $(F^*)_{po}$ para $[()_{po}]_{A,B}(F^*)$ y $(\tau)_{po}$ para $[()_{po}]_{A,B}(\tau)$. Mostramos la validez de tal afirmación.

En la 2-categoría Cat^*, sean:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=60, "F^*"] \arrow[r, "G^*" description] \arrow[r, bend right=60, "H^*"'] & B \end{tikzcd} \quad (\tau\Downarrow,\ \sigma\Downarrow) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F^*"] \arrow[r, bend right, "H^*"'] \arrow[r, phantom, "\sigma.\tau\Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría **Cat**

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] & A \end{tikzcd} \quad (\tau\Downarrow,\ \sigma\Downarrow) \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\sigma.\tau\Downarrow"] & A \end{tikzcd}$$

Así, en la 2-categoría **Cat** hallamos:

$$
\begin{tikzcd}
B^{op} \arrow[rr, bend left, "H^{op}"] \arrow[rr, "G^{op}" description] \arrow[rr, bend right, "F^{op}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\overline{\tau}\Downarrow"] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\overline{\sigma}\Downarrow"] & & A^{op}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^{op} \arrow[rr, bend left, "H^{op}"] \arrow[rr, bend right, "F^{op}"'] \arrow[rr, phantom, "\overline{\sigma.\tau}\Downarrow"] & & A^{op}
\end{tikzcd}
$$

Tales que:

$$(\overline{\tau}\ .\ \overline{\sigma})_b = \overline{\tau}_b\ .\ \overline{\sigma}_b = \tau_b^{op}.\sigma_b^{op} = (\sigma_b.\tau_b)^{op} = (\overline{\sigma.\tau})_b\ .$$

Por lo que:

$$\overline{\sigma}_*.\overline{\tau}_* = (\overline{\tau}\ .\ \overline{\sigma})_* = (\overline{\sigma.\tau})_*\ .$$

Por la tanto,

$$(\sigma.\tau)_{po} = (\sigma)_{po}.(\tau)_{po}\ .$$

No hay mayor dificultad en mostrar que:

$$1_{(F)_{po}} = (1_F)_{po}\ .$$

Por lo tanto,

$$[()_{po}]_{A,B} : Cat^*(A,B) \to Cat^*_*(A^{op}, B^{op})$$

es funtor.

(iii) Para las 1-celdas

$$B \xrightarrow{F^*} A^{op} \xrightarrow{G^*} C$$

en la 2-categoría Cat^*_* tenemos:

$$1_{(A)_{po}} = (1_{A^{op}})^* = ((1_A)^{op})^* = (1_A)_{po}\ ;$$

pues la respectivas 1-celdas en Cat son:

$$C \xrightarrow{G} A^{op} \xrightarrow{F} B$$

(iv) Sea (F^*, G^*) un objeto de $Cat^*(A,B) \times Cat^*(B,C)$; obsérvese que:

$$
\begin{gathered}
[()_{po}]_{A,C} G^* F^* = [()_{po}]_{A,C}(FG)^* = [(FG)^{op}]^* = \\
(F^{op}G^{op})^* = (G^{op})^*(F^{op})^* = [()_{po}]_{B,C}(G^*)[()_{po}]_{A,B}(F^*)\ .
\end{gathered}
\tag{76}
$$

Para las 2-celdas

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F^*"] \arrow[r, bend right, "F'^*"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & B \arrow[r, bend left, "G^*"] \arrow[r, bend right, "G'^*"'] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "G^*F^*"] \arrow[r, bend right, "G'^*F'^*"'] \arrow[r, phantom, "\beta\tau\Downarrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

en la 2-categoría Cat^*, obtenemos las correspondientes 2-celdas

$$
\begin{tikzcd}
C^{op} \arrow[r, bend left, "G'^{op}"] \arrow[r, bend right, "G^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\overline{\tau}\Downarrow"] & B^{op} \arrow[r, bend left, "F'^{op}"] \arrow[r, bend right, "F^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\overline{\beta}\Downarrow"] & A^{op}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C^{op} \arrow[r, bend left, "(F'G')^{op}"] \arrow[r, bend right, "(FG)^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\overline{\beta\tau}\Downarrow"] & A^{op}
\end{tikzcd}
$$

en la 2-categoría **Cat**. Para dichas 2-celdas se tiene:

$$(\overline{\tau}\,\overline{\beta})_c = \overline{\tau}_{G^{op}c} F'^{op}\overline{\beta}_c = (\tau_{Gc})^{op} F'^{op}(\beta_c)^{op} =$$
$$(\tau_{Gc})^{op}(F'\beta_c)^{op} = (F'\beta_c\tau_{Gc})^{op} = (\beta\tau_c)^{op} = (\overline{\beta\tau})_c \ .$$

Por lo que:

$$(\overline{\beta\tau})_* = (\overline{\tau}\,\overline{\beta})_*$$

i.e.

$$[()_{po}]_{A,C}(\beta\tau) = (\overline{\beta\tau})_* = (\overline{\tau}\,\overline{\beta})_* = \overline{\beta}_*\overline{\tau}_* = [()_{po}]_{B,C}(\beta)[()_{po}]_{A,B}(\tau) \ . \tag{77}$$

Por (76) y (77) hemos mostrado la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
Cat^*(A,B)\times Cat^*(B,C) \arrow[r, "\circ_{A,B,C}"] \arrow[d, "{[()_{po}]_{A,B}\times[()_{po}]_{B,C}}"'] & Cat^*(A,C) \arrow[d, "{[()_{po}]_{A,C}}"] \\
Cat^*_*((A)_{po},(B)_{po})\times Cat^*_*((B)_{po},(C)_{po}) \arrow[r, "\circ_{(A)_{po},(B)_{po},(C)_{po}}"'] & Cat^*_*((A)_{po},(C)_{po})
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $()_{po} : Cat^* \to Cat^*_*$ es 2-funtor.

Para definir el 2-funtor $()^{po} : Cat^*_* \to Cat_*$ tenemos:

Observación 6.4. *Si $F^*, G^* : A \to B$ son 1-celdas y $\tau_* : F \Rightarrow G$ es una 2-celda en Cat^*_* i.e.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F^*"] \arrow[r, bend right, "G^*"'] \arrow[r, phantom, "\tau_*\Downarrow"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow$$

*En la 2-categoría **Cat** tenemos*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & B \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[l, bend left, "F"]
\end{tikzcd}$$

Para cada b objeto de B se tiene $\tau_b : Gb \to Fb$ en A.

Entonces τ induce una transformación natural $\tilde{\tau}$ tal que:

$$\tilde{\tau}_b = \tau_b^{op} : F^{op}b \to G^{op}b$$

i.e.

$$\begin{tikzcd}
B^{op} \arrow[r, bend left, "F^{op}"] \arrow[r, bend right, "G^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\tilde{\tau}\Downarrow"] & A^{op}
\end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría Cat^*

$$\begin{tikzcd} A^{op} \arrow[r, bend left, "(F^{op})^*"] \arrow[r, bend right, "(G^{op})^*"'] \arrow[r, phantom, "(\tilde{\tau})\Downarrow"] & B^{op} \end{tikzcd}$$

En el mismo espíritu con el que se utiliza (6.3) para definir el 2-funtor $()_{po} : Cat^* \to Cat^*_*$, ahora partiendo de (6.4) tendremos que si $F^*, G^* : A \to B$ son 1-celdas y $\tau_* : F \Rightarrow G$ es una 2-celda en Cat^*_* la asignación:

$$A \mapsto (A)^{po} = A^{op}, \qquad F^* \mapsto (F^*)^{po} = (F^{op})^* \quad y \quad \tau \mapsto (\tau)^{po} = \tilde{\tau}$$

respectivamente, nos permiten hablar del 2-funtor

$$()^{po} : Cat^*_* \to Cat^* \; .$$

La justificación de la existencia de dicho 2-funtor tiene la misma tónica que seguimos para contruir el 2-funtor $()_{po}$.

Mostraremos que

$$()^{po}()_{po} = 1 \quad y \quad ()^{po}()_{po} = 1$$

se satisface.

Es inmediato que:

$$()^{po}()_{po}(A) = A \quad y \quad ()^{po}()_{po}(F^*) = F^* \; .$$

Al evaluar $()_{po}$ en los objetos, las 1-celdas y la 2-celda en (75) obtemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{op} \arrow[r, bend left, "(F^{op})^*"] \arrow[r, bend right, "(G^{op})_*"'] \arrow[r, phantom, "(\overline{\tau})_*\Downarrow"] & B^{op} \end{tikzcd}$$

en la 2-categoría Cat^*_*, donde $\overline{\tau}$ está dada por:

$$\overline{\tau}_b = \tau_b^{op} : G^{op}b \to F^{op}b$$

Finalmente, aplicamos el 2-funtor $()^{po}$ a objetos, 1-celdas y a la 2-celda del anterior diagrama para obtener

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F^*"] \arrow[r, bend right, "G^*"'] \arrow[r, phantom, "\tilde{\overline{\tau}}\Downarrow"] & B \end{tikzcd}$$

en la 2-categoría Cat^*, donde $\tilde{\overline{\tau}}$ es tal que:

$$(\tilde{\overline{\tau}})_b = (\overline{\tau}_b)^{op} = ((\tau_b)^{op})^{op} : Fb \to Gb$$

En pocas palabras se ha mostrado que $(()^{po}()_{po})(\tau) = \tau$. Por lo tanto $()^{po}()_{po} = 1$.

También es cierto que $()_{po}()^{po} = 1$ y la demostración es parecida al caso anterior.

Como la 2-categoría Cat^* y los 2-funtores $()po : Cat^* \to Cat^*_*$, $()^{po} : Cat^*_* \to Cat^*$ satisfacen la hipótesis en (4.5) entonces Cat^*_* admite la construcción de álgebras y

$$Alg_{Cat^*_*}(X_{po}, S_{po}) \cong \big(Alg_{Cat^*}(X, S)\big)_{po} = (X_S)_{po} \ . \tag{78}$$

De la afirmación anterior deducimos que existe un isomorfismo 2-natural

$$Cat^*_*(Set, (X_S)_{po}) \cong Cat^*_*(Set, Alg_{Cat^*_*}(X_{po}, S_{po})) \cong \mathcal{C} \ ,$$

con

$$\big(Cat^*_*(Set, (X_{po})\big)^{Cat^*_*(Set, S_{po})} = \mathcal{C} \ .$$

Para (X, S, η, μ) objeto de Cat^* se sigue que $(X_{po}, S_{po}, \eta_{po}, \mu_{po})$ es una mónada en Cat^*_*. Así,

$$[Cat^*_*(Set, X_{po}), Cat^*_*(Set, S_{po}) = \overline{S}, \overline{\eta}, \overline{\mu}] = (P, Q)$$

es una mónada en **Cat** donde:

$$\overline{S} : Cat^*_*(Set, X_{po}) \to Cat^*_*(Set, X_{po})$$

es el funtor tal que:

$$\overline{S}(F) = S_{po}F \quad y \quad \overline{S}(\sigma) = S_{po}\sigma \ ,$$

y las transformaciones naturales

$$\overline{\eta} : 1 \to \overline{S} \quad y \quad \overline{\mu} : \overline{SS} \to \overline{S}$$

están definidas como:

$$\overline{\eta}_F = \eta_{po}F \quad y \quad \overline{\mu}_F = \mu_{po}F \ .$$

En la 2-categoría **Cat** tenemos la counidad

$$(J^Q, \chi) : (\mathcal{C}, 1) = (P^Q, 1) \to \big(Cat^*_*(Set, X_{po}), (Set, S_{po})\big) = (P, Q) \ .$$

por ser $(\overline{S}, \overline{\mu})$ funtor de mónadas el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Cat^*_*(Set, X_{po}), 1) \arrow[rr, "(\overline{S},\overline{\mu})"] \arrow[dr, "(E^Q{,}1)"'] & & (P, Q) \\
& (\mathcal{C}, 1) \arrow[ur, "(J^Q{,}\chi)"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por (3.2)

$$Cat^*_*(Set, Alg_{Cat^*_*}(X_{po}, S_{po})) \cong \big(Cat^*_*(Set, (X_{po})\big)^{Cat^*_*(Set, S_{po})} = \mathcal{C} \ . \tag{79}$$

Así, por (79) y (78)

$$Cat^*_*(Set, (X_S)_{po}) \cong Cat^*_*(Set, Alg_{Cat^*_*}(X_{po}, S_{po})) \cong \mathcal{C} \ . \tag{80}$$

Probaremos que existe un producto fibrado para el par de flechas

$$X \xrightarrow{\quad R \quad} Cat^*(Set, X_{po}) \xleftarrow{\quad (J^Q)^{op} \quad} \mathcal{C}^{op}$$

Damos una descripción del 2-funtor $(J^Q)^{op}$ que nos será de gran utilidad más adelante y después decimos quien es el 2-funtor R.

Sea $(J_{S_{po}}, \chi) : ((X_S)_{po}, 1) \to (X_{po}, S_{po})$ la counidad evaluada en (X_{po}, S_{po}), de manera que por ser (S_{po}, μ_{po}) funtor de mónadas, existe una única 1-celda $E_{S_{po}}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X_{po}, 1) \arrow[rr, "{(S_{po},\mu_{po})}"] \arrow[dr, "{(E_{S_{po}},1)}"'] & & (X_{po}, S_{po}) \\
& ((X_S)_{po}, 1) \arrow[ur, "{(J_{S_{po}},\chi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dada la adjunción $E_{S_{po}} \dashv J_{S_{po}}$ que genera la mónada (X_{po}, S_{po}) tenemos que la adjunción $Cat^*_*(Set, E_{S_{po}}) \dashv Cat^*_*(Set, J_{S_{po}})$ genera la mónada (P, Q), luego aplicando (2.10) y por (80), el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Cat^*_*(Set, X_{po}) \arrow[r, shift left, "{Cat^*_*(Set,E_{S_{po}})}"] \arrow[d, shift right, "E^Q"'] & Cat^*_*(Set, (X_S)_{po}) \arrow[l, shift left, "{Cat^*_*(Set,J_{S_{po}})}"] \arrow[dl, "\cong"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, shift right, "J^Q"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "J^Q"'] & & Cat^*_*(Set, (X_S)_{po}) \arrow[dl, "{Cat^*_*(Set,J_{S_{po}})}"] \\
& Cat^*_*(Set, X_{po}) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Aplicamos al anterior diagrama el 2-funtor $()_{op} : \mathbf{Cat} \to Cat_*$ para obtener el siguiente diagrama

(81)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{op} \arrow[rr, "\cong", "\Theta"'] \arrow[dr, "(J^Q)^{op}"'] & & Cat^*(Set, J_{S_{po}}) \arrow[dl, "{[Cat^*_*(Set,J_{S_{po}})]^{op}}"] \\
& Cat^*(Set, X_{po}) &
\end{tikzcd}$$

también conmutativo.

A grandes rasgos damos una descripción de el 2-funtor $()_{op} : \mathbf{Cat} \to Cat_*$.

Si $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son 1-celdas y $\tau : F \Rightarrow G$ es una 2-celda en Cat i.e.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\tau \Downarrow"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Entonces τ induce una transformación natural τ' tal que:

$$(\tau')_a = (\tau_a)^{op} : G^{op} b \to F^{op} b$$

i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[r, bend left, "G^{op}"] \arrow[r, bend right, "F^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\tau' \Downarrow"] & \mathcal{B}^{op} \end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow$$

En la 2-categoría Cat_*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[r, bend left, "F^{op}"] \arrow[r, bend right, "G^{op}"'] \arrow[r, phantom, "(\tau')^* \Downarrow"] & \mathcal{B}^{op} \end{tikzcd}$$

El 2-funtor $()_{op} : \mathbf{Cat} \to Cat_*$ es tal que

$$A \mapsto ()_{op}\mathcal{A} = \mathcal{A}^{op}$$
$$F \mapsto ()_{op}F = F^{op}$$
$$\tau \mapsto ()_{op}\tau = (\tau')^* \quad .$$

Por otra parte para cada $x \in X \quad y \quad a : x \to x'$ se obtienen respectivamente:
$$X(\ ,x) : X^{op} \to Set \quad y \quad X(\ ,a) : X(\ ,x) \to X(\ ,x')$$
un funtor y una transformación natural.

En la categoría $\mathbf{Cat}(X_{po}, Set)$ tenemos

$$\begin{tikzcd} X_{po} \arrow[r, bend left, "X(\ {,}x)"] \arrow[r, bend right, "X(\ {,}x')"'] \arrow[r, phantom, "X(\ {,}a) \Downarrow"] & Set \end{tikzcd}$$

Por lo que en $Cat_*^*(Set, X_{po})$

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left, "X(\ {,}x')"] \arrow[r, bend right, "X(\ {,}x)"'] \arrow[r, phantom, "X(\ {,}a) \Downarrow"] & X_{po} \end{tikzcd}$$

Entonces en $Cat^*(Set, X_{po}) = [Cat_*^*(Set, X_{po})]^{op}$

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left, "X(\ {,}x)"] \arrow[r, bend right, "X(\ {,}x')"'] \arrow[r, phantom, "{[X(\ {,}a)]^{op}} \Downarrow"] & X_{po} \end{tikzcd}$$

Sea $R : X \to Cat^*(Set, X_{po})$ el funtor representación de Yoneda definido como:

$$x \mapsto X(\ ,x) \quad y \quad a : x \to x' \mapsto [X(\ ,a)]^{op}\ .$$

Ahora construimos el funtor $\overline{R}$ y mostramos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X^S \arrow[r, "\overline{R}"] \arrow[d, "E_S"'] & \mathcal{C}^{op} \arrow[d, "(J^Q)^{op}"] \\ X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set, X_{po}) \end{tikzcd} \tag{82}$$

es un producto fibrado.

Definición 6.5. *Por $\overline{R} : X^S \to \mathcal{C}^{op}$ entendemos al funtor tal que :*

$$(x, \varepsilon_x) \mapsto \overline{R}(x, \varepsilon_x) = (U_x, \gamma_x) \quad y \quad g : (x, \varepsilon_x) \to (y, \varepsilon_y) \mapsto \overline{R}(g) = (X(\ ,g))^{op}\ .$$

Donde

$$U_x = X(\ ,x) \quad y \quad \gamma_x : S^{op}X(\ ,x) \to X(\ ,x)\ ;$$

*ya que en **Cat***

$$\gamma_x = X(\ ,\varepsilon_x)X(S,S) : X(\ ,x) \to X(S,x)$$

es tal que:

$$k \mapsto \gamma_x(k) = \varepsilon_x Sk\ .$$

Una sencilla inspección sugiere que $\overline{R}$ está bien definido.

Sean

$$(U, \gamma) \xrightarrow{H} (U_x, \gamma_x) \xrightarrow{G} (V, \delta)$$

en $\mathcal{C}$. Luego $X(\ ,1_x)H = H \quad y \quad GX(\ ,1_x) = G$, dado que en $Cat^*_*(Set, X_{po})$ para

$$U \xrightarrow{H} U_x \xrightarrow{G} V$$

tenemos que $X(\ ,1_x)H = H \quad y \quad GX(\ ,1_x) = G$, debido a que en $\mathbf{Cat}(X_{po}, Set)$ para los morfismos

$$U \xleftarrow{H} U_x \xleftarrow{G} V$$

se satisface $HX(\ ,1_x) = H \quad y \quad X(\ ,1_x)G = G$. Por lo tanto $1_{(U_x,\gamma_x)} = X(\ ,1_x)$ en $\mathcal{C}$, luego en $\mathcal{C}^{op}$ $[X(\ ,1_x)]^{op} = [1_{(U_x,\gamma_x)}]^{op} = 1_{(U_x,\gamma_x)}$ y como $\overline{R}(1_{(x,\varepsilon_x)}) = \overline{R}(1_x) = [X(\ ,1_x)]^{op}$ entonces $\overline{R}(1_{(x,\varepsilon_x)}) = 1_{\overline{R}(x,\varepsilon_x)}$.

Sean

$$(x, \varepsilon_x) \xrightarrow{g} (y, \varepsilon_y) \xrightarrow{k} (z, \varepsilon_z) \quad y \quad (x, \varepsilon_x) \xrightarrow{kg} (z, \varepsilon_x)$$

en X^S. Puesto que para $X(\ ,g) : X(\ ,x) \to X(\ ,y)$ y $X(\ ,k) : X(\ ,y) \to X(\ ,z)$ se tiene $X(\ ,k)X(\ ,g) = X(\ ,kg) \in Cat(X_{po}, Set) \Leftrightarrow X(\ ,g)X(\ ,k) = X(\ ,kg) \in Cat^*_*(Set, X_{po})$ y en consecuencia para

$$(U_z, \gamma_z) \xrightarrow{X(\ ,k)} (U_y, \gamma_y) \xrightarrow{X(\ ,g)} (U_z, \gamma_z)$$

$X(\ ,g)X(\ ,k) = X(\ ,kg)$ en $\mathcal{C}$, luego en $\mathcal{C}^{op}$ se cumple $[X(\ ,g)X(\ ,k)]^{op} = [X(\ ,kg)]^{op}$, pero como $[X(\ ,g)X(\ ,k)]^{op} = [X(\ ,k)]^{op}[X(\ ,g)]^{op}$ entonces $\overline{R}(kg) = \overline{R}(K)\overline{R}(g)$.

Por lo tanto $\overline{R}$ es funtor.

Mostramos que el diagrama (82) es un producto fibrado.

Sea (x, ε_x) en X^S, tenemos $RE_S(x, \varepsilon_x) = Rx = X(\ ,x)$ y $(J^Q)^{op}\overline{R}(x, \varepsilon_x) = (J^Q)^{op}[U_x, \gamma_x] = X(\ ,x)$.
Sea $f : (x, \varepsilon_x) \to (y, \varepsilon_y)$ de manera que $RE_S(f) = R(f) = [X(\ ,f)]^{op}$ y $(J^Q)^{op}\overline{R}(f) = (J^Q)^{op}[X(\ ,f)]^{op} = [J^Q X(\ ,f)]^{op} = [X(\ ,f)]^{op}$. Por lo tanto tal cuadrado es conmutativo.
Supongamos que para la categoría A existen funtores $F_1 : A \to X$ y $F_2 : A \to \mathcal{C}^{op}$ tal que $RF_1 = (J^Q)^{op}F_2$.

Ilustramos esta situación en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, "F_2"] \arrow[ddr, "F_1"'] & & \\
& X^S \arrow[r, "\overline{R}"] \arrow[d, "E_S"'] & \mathcal{C}^{op} \arrow[d, "(J^Q)^{op}"] \\
& X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set, X_{po})
\end{tikzcd}$$

Para $a \in A$, sean $F_1 a = x_a$ y $F_2 a = (U_a, \gamma_a)$, como $RF_1 a = Rx_a = X(\ ,x_a)$ se satisface, entonces

$$U_a = X(\ ,x_a)\ . \tag{83}$$

Por ser γ_a transformación natural, para x_a tenemos que el rectángulo

$$\begin{tikzcd}
X(x_a, x_a) \arrow[r, "(\gamma_a)_{x_a}"] \arrow[d, "X(h, x_a)"'] & X(Sx_a, x_a) \arrow[d, "X(Sh, x_a)"] \\
X(y, x_a) \arrow[r, "(\gamma_a)_y"'] & X(Sy, x_a)
\end{tikzcd}$$

conmuta. i.e.

$$(\gamma_a)_y(h) = \varepsilon_a Sh\ . \tag{84}$$

Desde luego en $Cat^*_*(Set, X_{po})$

$$\begin{tikzcd}
Set \arrow[r, "U_a"] \arrow[rr, bend right, "U_a"'] & X_{po} \arrow[r, "S_{po}"] \arrow[d, phantom, "\gamma_a \Downarrow"] & X_{po} \\
& \ &
\end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow$ en $\mathbf{Cat}(X_{po}, Set)$

$$\begin{tikzcd} Set & X_{po} \arrow[l, "U_a"'] \arrow[d, phantom, "\gamma_a \Uparrow"] & X_{po} \arrow[l, "S_{po}"'] \arrow[ll, bend left, "U_a"] \\ & {} & \end{tikzcd}$$

Así para $x_a \in X_{po}$ tenemos $(\gamma_a)_{x_a} : X(x_a, x_a) \to X(Sx_a, x_a)$. Tomamos $\varepsilon_a = (\gamma_a)_{x_a}(1_{x_a})$. Ya que (U_a, γ_a) es un objeto de $\mathcal{C}$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[r, "U_a"] \arrow[dr, "1"'] & \overline{S}U_a \arrow[d, "\gamma_a"] \\ & U_a \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{S}\overline{S}U_a \arrow[r, "\overline{\mu}U_a"] \arrow[d, "\overline{S}\gamma_a"'] & \overline{S}U_a \arrow[d, "\gamma a"] \\ \overline{S}U_a \arrow[r, "\gamma_a"'] & U_a \end{tikzcd}$$

son conmutativos en $Cat^*_*(Set, X_{po})$. De esta manera en $\mathbf{Cat}(X_{po}, Set)$ tenemos garantizada la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} U_a & U_a S_{po} \arrow[l, "U_a\tilde{\eta}"'] \\ & U_a \arrow[ul, "1"] \arrow[u, "\gamma_a"'] \end{tikzcd}$$

Así al considerar que $U_a\tilde{\eta} = X(\tilde{\eta}, x_a) : X(S_{po}, x_a) \to X(\ , x_a)$ está definido por:

$$h : S_{po}y \to x_a \mapsto h\eta_y : y \to x_a \ .$$

De esta manera a partir del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X(x_a, x_a) \arrow[r, "(\gamma_a)_{x_a}"] \arrow[dr, "1"'] & X(Sx_a, x_a) \arrow[d, "U_a\tilde{\eta}_{x_a}"] \\ & X(x_a, x_a) \end{tikzcd}$$

obtenemos $1_{x_a} = \varepsilon_a \eta_{x_a}$.

Análogamente de $\gamma_a \overline{S}\gamma_a = \gamma_a \overline{\mu} U_a$ tenemos que $\varepsilon_{x_a}\mu_{x_a} = \varepsilon_{x_a} S\varepsilon_{x_a}$. Por lo tanto (x_a, ε_{x_a}) es un objeto de X^S.

Sea $f : a \to b$ en A con lo que $F_1 f : x_a \to x_b$ en X. Como $F_2 f : (U_{x_a}, \gamma_{x_a}) \to (U_{x_b}, \gamma_{x_b})$ en $\mathcal{C}^{op}$ se cumple la conmutatividad en $Cat^*_*(Set, X_{po})$ de

$$\begin{tikzcd} \overline{S}U_b \arrow[r, "\overline{S}F_2 f"] \arrow[d, "\gamma_b"'] & \overline{S}U_a \arrow[d, "\gamma_a"] \\ U_b \arrow[r, "F_2 f"'] & U_a \end{tikzcd}$$

(85)

De la cual se infiere que $\varepsilon_{x_b} SF_1 f = F_1 f \varepsilon_{x_a}$. Por lo que $F_1 f$ es morfismo de S-álgebras. Se define el funtor $w : A \to X^S$ por:

$$a \mapsto (x_a, \varepsilon_a) \quad y \quad f : a \to b \mapsto wf = F_1 f \ .$$

Hemos justificado que w está bien definido y w es funtor porque F_1 es funtor.

Claramente $E^S w = F_1$.

Nos remitimos a (84) y (6.5) para justificar la veracidad de:

$$\gamma_a = \gamma_{x_a} \ . \tag{86}$$

Por (83) y (86) se tiene que:

$$\overline{R}wa = \overline{R}(x_a, \varepsilon_a) = (X(\ , x_a), \gamma_{x_a}) = (X(\ , x_a), \gamma_a) = (U_a, \gamma_a) = F_2 a \ .$$

Considerando que:

$$\overline{R}wf = \overline{R}F_1 = [X(\ , F_1 f)]^{op} \quad y$$
$$RF_1 f = [X(\ , F_1 f)]^{op} = (J^Q)^{op} F_2 f = (J^Q (F_2 f)^{op})^{op} = [(F_2 f)^{op}]^{op} \ .$$

entonces $\overline{R}wf = F_2 f$. Por lo tanto $\overline{R}w = F_2$.

Sea $\overline{w} : A \to X^S$ tal que $\overline{R}\,\overline{w} = F_2$ y $E_S \overline{w} = F_1$. Para $f : a \to b \in A$ tenemos que $\overline{w} f = F_1 f$. Si $\overline{w}(a) = (x, \varepsilon)$, significa que $x = x_a$. Ahora bien $\overline{R}\,\overline{w}(a) = F_2(a)$, pero

$$F_2 a = (U_a, \gamma_a) = [X(\ , x_a), X(\ , \varepsilon_a) X(S, S)] \quad y$$
$$\overline{R}\,\overline{w}(a) = \overline{R}(x, \varepsilon) = (U_x, \gamma_x) = (X(\ , x_a), X(\ , \varepsilon) X(S, S)) \ .$$

En consecuencia $\varepsilon_a = \varepsilon$.

Por lo que $\overline{w}(a) = (x, \varepsilon) = (x_a, \varepsilon_a) = w(a)$. i.e. $\overline{w} = w$.

Así el cuadrado en (82) es un producto fibrado.

Finalmente, nos proponemos demostrar que la categoría X^S es isomorfa a una subcategoría plena de $Cat^*(Set, (X_S)_{po})$.

Combinando los diagramas en (81) y (82) obtenemos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
X^S \arrow[r, "\Theta\overline{R}"] \arrow[d, "E_S"'] & Cat^*(Set, (X_S)_{po}) \arrow[d, "{[Cat^*_*(Set, J_{S_{po}})]^{op} = T^{op}}"] \\
X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set, X_{po})
\end{tikzcd}$$

i.e. X^S es pullback sobre la categoría $Cat^*(Set, X_{po})$; en este producto fibrado el funtor $\Theta\overline{R}$ es fiel y pleno, mientras que el funtor T^{op} está dado por:

$$T^{op}(F) = J_{S_{po}} F \quad y \quad T^{op}(\sigma) = (T\sigma)^{op} = (J_{S_{po}} \sigma)^{op} \ .$$

Donde $T = Cat^*_*(Set, J_{S_{po}}) : Cat^*_*(Set, (X_S)_{po}) \to Cat^*_*(Set, X_{po})$ es el funtor dado por :

$$T(F) = J_{S_{po}} F \quad y \quad T(\sigma) = J_{S_{po}} \sigma \ .$$

Cualquier categoría que también sea pullback sobre la categoría $Cat^*(Set, X_{po})$ necesariamente ha de ser isomorfa a X^S.

Nuestra candidata es Γ, la subcategoría plena de $Cat^*(Set,(X_S)_{po})$ que consta de aquellos funtores $U : Set \to (X_S)_{po}$ tales que $UJ_{S_{po}}$ es representable.
Sean $U,\ V : (X_S)_{po} \to Set$ tales que $UJ_{S_{po}} = X(\ ,x_U) \quad y \quad VJ_{S_{po}} = X(\ ,x_V)$. Por el $Lema de Yoneda$ para cada $\sigma : U \to V$ existe un único morfismo $f_\sigma : x_U \to x_V$ tal que $J_{S_{po}}\sigma = X(\ ,f_\sigma)$.
Ahora bien, tenemos a $i : \Gamma \to Cat^*(Set,(X_S)_{po})$ el funtor inclusión; por otra parte definimos al funtor $\pi : \Gamma \to X$ como:

$$U \mapsto \pi U = x_U \quad y \quad \sigma \mapsto \pi\sigma = f_\sigma\ .$$

Hallamos después de una simple inspección que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & Cat^*(Set,(X_S)_{po}) \arrow[d, "{[Cat^*_*(Set,J_{S_{po}})]^{op}=T^{op}}"] \\
X \arrow[r, "R"'] & Cat^*(Set,X_{po})
\end{tikzcd}$$

es también un producto fibrado. De manera que se ha demostrado lo siguiente:

TEOREMA 6.6. *La categoría X^S de álgebras de Eilenberg-Moore de una mónada (X,S) en Cat es isomorfa a la subcategoría plena Γ de la categoría $Cat^*(Set,X_{po})$, que consta de aquellos funtores $U : Set \to (X_S)_{po}$ tal que $UJ_{S_{po}}$ es representable.*

Índice alfabético

Bibliografía

[1] R. Street, The formal Theory of monads, J. Pure and Applied Algebra, 2 (1972), 149-168.
[2] M. Saunders, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York, 1971.
[3] G.M Kelly and R.H. Street, Review of the elements of 2-categories, Lecture Notes in Math. 420 (1974), 75-100.
[4] Barr, Michael Toposoes, triples and theories/ Michael Barr, Charles Wells New York: Springer, c 1985.
[5] S. Eilenberg and J.C. Moore, Adjoint funtors and triples, Illinois J. Math. 9 (1965) 381-398.
[6] Beck, J. Distributive laws, Lecture Notes in Mathematics 80, Springer-Verlag, 1969, 119-140.