UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS MEDIANTE EL MODELO BALCK-SCHOLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARÍA

P R E S E N T A :

ARMANDO JACIEL RAMÍREZ MÉNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS

MÉXICO, D.F 2007

Índice general

Introducción

La presente tesis trata de un tema en el ámbito financiero, se conoce como el *modelo Black-Scholes* en la valuación del precio de las opciones europeas, de tal manera que el lector adquiera un panorama general de todas las variables que intervienen en el modelo, con ello pueda aplicar las fórmulas para determinar el precio de estos productos financieros.

En el primer capítulo se definen los conceptos esenciales como son:

- Producto derivado.
- Opción.
- Opción de compra.
- Opción de venta.
- Valor de una opción.
- Paridad compra-venta

Estos conceptos permiten establecer las bases por medio de las cuales se desarrollan los modelos para determinar expresiones matemáticas para el precio de las opciones europeas.

En los distintos mercados financieros se trabaja continuamente con procesos estocásticos o aleatorios, en el segundo capítulo se presenta una clasificación de dichos procesos, se modela la serie histórica de los precios de una acción como un incremento del proceso generalizado de Wiener.

Utilizando cálculo estocástico se deduce una expresión para el incremento en el precio de los productos derivados, en un intervalo pequeño de tiempo, por ejemplo, segundos, minutos, horas, días, lo que permite hacer simulaciones de dicho incremento.

De acuerdo a las diferentes expresiones matemáticas desarrolladas en el capítulo dos, se realizan simulaciones de Monte Carlo, que permiten predecir el comportamiento de un proceso estocástico, como es el rendimiento de la serie histórica de precios de una acción en un periodo determinado, asimismo, se calcula la volatilidad de la serie de precios, con los modelos GARCH.

En el cuarto capítulo se utilizan las fórmulas para el incremento en el precio de las acciones y de los productos derivados, que utilizando un portafolio adecuado permite eliminar los factores estocásticos en un periodo, con ello se deduce la ecuación diferencial Black-Scholes, de tal forma que un derivado cumple con esta ecuación, asi mismo se determinan expresiones para el precio de las opciones financieras de compra y de venta en un contrato financiero en el tiempo presente.

Finalmente se analizan parámetros de riesgo, los cuales se utilizan para analizar como es afectado el precio de la opción por cambios en el precio del activo, volatilidad, tiempo y tasas de interés.

El *modelo Black-Scholes* fue publicado en el *Journal of Political Economy* de junio de 1973 en la bibliografía [2], aceptado desde entonces, como uno de los modelos matemáticos más influyentes en grandes decisiones financieras a nivel mundial. Se pretende hacer una divulgación de este modelo, que acaba de cumplir 33 años de vida, como un homenaje a sus autores.

Un derivado financiero cuyo valor es función del precio de otro objeto financiero, que puede ser un activo, una tasa de referencia o un índice, tales como una acción, una divisa o un producto físico. En todos los casos el activo del cual se deriva el precio, es llamado activo subyacente.

Aunque actualmente se utiliza en el mundo una amplísima gama de derivados financieros y múltiples combinaciones entre ellos, los derivados básicos, y más conocidos, siguen siendo las opciones, los forwards, los futuros y los swaps. Por ejemplo, si se tiene una opción sobre una acción, la opción es el derivado financiero, y el activo subyacente es la acción.

Los llamados productos derivados financieros han sido utilizados con diversos objetivos, pero, dependiendo de la intención que se tenga al utilizarlos, los agentes u operadores que intervienen en su uso siempre se pueden enmarcar dentro alguna de las siguientes categorías: coberturistas, especuladores o arbitrajistas.

El objetivo de un coberturista es cubrir el riesgo que afronta ante potenciales movimientos en un mercado variable. Los especuladores, utilizan los derivados para apostar acerca de la dirección futura de los mercados y tratar de obtener beneficio de esas tendencias. Los arbitrajistas toman posiciones compensatorias de activos o derivados, asegurándose un beneficio sin riesgo, y aprovechando situaciones coyunturales de los mercados.

Orígenes del modelo

Los orígenes de los modelos para la valuación de derivados financieros se encuentran en la ecuación de difusión, cuyo autor fue Joseph Fourier (1768-1830). Fourier publicó la *Théorie Analitique de la Chaleur* en 1822; pero desde 1807, aspirando al premio anual de la Academia de Ciencias, había presentado el primer trabajo relativo al tema de la conducción del calor. Ilustres matemáticos de la época, tales como Laplace, Lagrange y Legendre, que evaluaron la investigación, manifestaron sus reservas sobre el rigor lógico de algunas de sus deducciones, ya que por su condición de físico-matemático, los procedimientos de Fourier eran más empíricos que lógico-deductivos. Pero lo animaron a continuar su investigación, hasta que su persistencia y la relevancia de su teoría lo hicieron acreedor al Gran Premio de la Academia de Ciencias de París en 1812.

En 1827 el botánico inglés Robert Brown, analizó el movimiento de partículas de polen en el agua y lo asoció a las teorías vitalistas, argumentando que ese movimiento era propio de la materia viviente y relacionado con los mecanismos de la reproducción. Sin embargo, en sus trabajos finales, concluye que los movimientos erráticos eran de naturaleza mecánica y no dependía del carácter orgánico o inorgánico de los objetos considerados.

En 1905, casi un siglo después, Albert Einstein construyó un modelo matemático para explicar ese fenómeno, lo denomina movimiento Browniano en honor a su descubridor.

Las hipótesis básicas de ese modelo de Einstein eran que el desplazamiento de la partícula entre dos instantes es independiente de las posiciones anteriores que haya tenido, y la ley de probabilidad que rige el movimiento de la partícula sólo depende de la distancia temporal. Con estas hipótesis, Einstein llegó a demostrar que la función de distribución f de la posición de la partícula tenía que verificar la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}.$$

donde x es la variable espacial, t la variable temporal y D es una constante adecuada.

Esta ecuación, que ya era conocida como la ecuación de difusión, se ha constituido posteriormente en una de las vías a través de las cuales, haciendo algunos cambios de variables, se encuentran soluciones a la ecuación de Black-Scholes-Merton.

Por otro lado, el 29 de marzo de 1900, Louis Bachelier defendió exitosamente en la Universidad de la Sorbona su tesis *Theorie de la Spéculation* bajo la supervisión de Henri Poincaré. En ella propuso un movimiento Browniano como modelo asociado a los precios de las acciones. En [3] pueden encontrarse algunos comentarios actuales sobre el trabajo original de L. Bachelier en conmemoración del primer centenario de este trabajo pionero. El objetivo del modelo de Bachelier era determinar el valor de opciones accionarias, y aunque fue un buen principio para esa valoración, la fórmula que dedujo estaba basada en supuestos no realistas, asumía la inexistencia de tasas de interés y utilizaba un proceso estocástico que permitía que los precios de las acciones tomaran valores negativos. Posiblemente ésta fue una razón para que ese modelo fuera olvidado durante mucho tiempo.

Posteriormente, autores como Paul Samuelson y James Boness, se ocuparon de superar algunas de los inconvenientes del modelo de Bachelier, asumiendo la existencia de tasas de interés y una distribución de probabilidad más realista para los precios de las acciones; además tuvieron en cuenta que los inversionistas son adversos al riesgo, y que posiblemente estén dispuestos a asumirlo, pero a cambio de algún premio.

En particular, en 1960, el economista norteamericano Samuelson(premio Nobel de economía en 1970) propuso el movimiento browniano geométrico como modelo para los precios que están sujetos a incertidumbre. En 1964, Boness sugirió una fórmula más cercana a la de Black-Scholes, pero que todavía contaba con una tasa de interés desconocida, que Boness incluía como compensación por el riesgo asociado con el valor de la acción.

Para el modelo Black-Scholes-Merton, el movimiento Browniano es el modelo básico asociado a los movimientos de los precios. Pero además estos autores tuvieron en cuenta, y esto fue determinante, que el movimiento Browniano está asociado con la teoría matemática avanzada del cálculo estocástico o cálculo de Itô, desarrollado por el matemático japonés Kiyosi Itô desde 1940, que considera aspectos análogos a los del cálculo clásico de Newton y Leibtniz, pero en condiciones aleatorias como se analiza en su obra [7].

Fisher Black y Myron Scholes, quienes fueron los creadores originales del modelo, lograron plasmarlo en un artículo en octubre de 1970 que titularon *A Theoretical Valuation Formula for Options, Warrants and Other Securities.*

Al tratar de publicarlo en el *Journal of Political Economy*, de la Universidad de Chicago, el trabajo fue rechazado por ser excesivamente especializado. Posteriormente intentaron de nuevo en *Review of Economic and Statistics*, de Harvard, y volvieron a fracasar. Reescribieron el artículo en enero de 1971, con nuevo título *Capital Market Equilibrium and the Pricing of Corporate Liabilities* pero, otra vez tuvieron una respuesta negativa.

Pero insistieron y triunfó su persistencia, lograron que la versión final, de mayo de 1972, titulada *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, apareciera en el *Journal of Political Economy* de mayo/junio de 1973, un año después de que, en un artículo del *Journal of Finance*, explicara que su fórmula había sido verificada empíricamente.

El modelo toma su nombre de Black y Scholes porque fueron ellos los primeros en deducirlo, basando sus estudios en el Capital Asset Pricing Model (CAPM), por el cual Sharpe ganó el premio Nobel de economía en 1990.

Pero mientras preparaban su trabajo de 1973, la influencia de Robert C. Merton resultó decisiva. Las sugerencias de Merton, que también trabajaba en la valuación de opciones -dice Black en un artículo de 1989- mejoraron su trabajo. En particular, Merton señaló que si se asume un cambio continuo entre la opción y la acción, puede mantenerse entre ellas una relación que esté, literalmente, libre de riesgo. En la versión final del modelo, Black y Sholes, tuvieron en cuenta los aportes de Merton, que pueden encontrarse en [11].

Por lo tanto, fue Merton quien advirtió que el equilibrio de mercado no es un requisito para la valuación de la opción; basta con que no exista oportunidad alguna de arbitraje, supuesto fuerte mencionado en el libro [12]. El método descrito en el caso particular de las opciones mencionado se basa, precisamente, en la ausencia de arbitraje y en el cálculo estocástico. Esta idea puede ser generalizada para la valuación de otros tipos de derivados. En un trabajo de 1973, Merton publicó un escrito en el que incluyó la fórmula de Black-Scholes, generalizada a otras cuestiones, por ejemplo, dejó que la tasa de interés fuera estocástica. Cuatro años más tarde, también desarrolló un método más general de derivar la fórmula, al basarse en la posibilidad de crear opciones, sintéticamente, mediante el cambio de la acción subyacente y un bono libre de riesgo. Estas son las razones por las cuales es usual mencionar a los tres autores cuando se hace alguna referencia al modelo, aunque Black y Scholes publicaron sus resultados tres meses antes que Merton.

Merton y Scholes recibieron en 1997 el Premio Nobel de Ciencias Económicas por su trabajo sobre la valoración. El jurado que otorgó dicho galardón también reconoció las aportaciones de Black, que no pudo compartir el premio con sus colegas por haber fallecido el 30 de agosto de 1995.

Aplicaciones

El modelo de valoración de opciones fue la solución a un problema de más de 70 años. Y constituyó, por ende, un importante logro científico. Sin embargo, la principal contribución de Black, Merton y Scholes está vinculada a la importancia teórica y práctica de su método de análisis, presente en la resolución de muchos otros problemas económicos.

El método -que después se aplicaría a otras áreas de la economía, tales como crecimiento económico neoclásico en un contexto incierto, empresa competitiva con precio incierto, tasas estocásticas de inflación y crecimiento en una economía abierta en ambiente de incertidumbre que se pueden encontrar en el siguiente libro [18]- produjo un impresionante auge de nuevos instrumentos financieros y facilitó un manejo más eficaz del riesgo, no solo entre los agentes económicos que se sienten inclinados a tomarlo, sino también entre aquellos que son adversos a él. La importancia práctica del modelo radica en que ha hecho posible una administración científica del riesgo, y ésta a su vez, ha generado un rápido crecimiento, en las tres últimas décadas, de los mercados de derivados.

El modelo de Black-Scholes-Merton, desde su aparición, produjo un impresionante auge en el uso de derivados para diseñar innovadoras estrategias de negociación, para protegerse contra los riesgos financieros y para especular con ellos en los mercados financieros. Ha sido reconocido como el modelo matemático capaz de generar millones de dólares de rendimientos en pequeños períodos de tiempo, pero también, como culpable de pérdidas astronómicas en cuestión de horas.

En este punto, es necesario hacer mención sobre la utilidad de modelos matemáticos en todos los campos, y su culpabilidad de resultados no esperados. Todo modelo es una representación de un fenómeno real. En particular, al modelar matemáticamente una situación real se pretende facilitar su análisis y disponer de un soporte que permita tomar decisiones racionales en torno a esa situación. Por esta razón es ideal que el modelo represente tan fielmente como sea posible el fenómeno real. Pero la aproximación entre el modelo y la realidad tiene un precio, normalmente mientras más fidelidad se pretenda en el modelo, éste es más complejo. La complejidad del modelo implica aspectos como las condiciones, hipótesis o supuestos, bajo las cuales es aplicable.

En muchas situaciones reales han ocurrido catástrofes financieras al utilizar ciertos modelos matemáticos, pero los especialistas están absolutamente de acuerdo sobre la razón de esos fracasos: Se utilizan modelos en situaciones en las cuales no se cumplen los supuestos, se asignan todas las decisiones trascendentes a una sola persona, el modelo no se conoce suficientemente y se confía sin recelo en algún software específico, ignorando sus limitaciones. En algunos casos, seguramente la ambición desmedida de poder económico, haya sido la razón de estruendosos fracasos financieros. Pero definitivamente no es la matemática o los modelos los que fallan, sino el uso indiscriminado de ellos.

Pero la importancia práctica de la labor científica desarrollada por Black, Merton y Scholes se refleja, también, en otros hechos. El *Chicago Board Options Exchange* introdujo el negocio de opciones en abril de 1973, un mes antes de la publicación de la fórmula de valuación de opciones. En 1975, los traders ya habían comenzado a aplicarla para valuar y proteger sus posiciones. Actualmente, miles de traders e inversores la usan a diario en distintos mercados de todo el mundo. Tan rápida y extendida aplicación de un resultado teórico fue una novedad para la economía, fundamentalmente porque el ambiente matemático en el que descansa la fórmula no formaba parte de la instrucción práctica o académica de aquellos tiempos.

Hoy en día, la habilidad para usar opciones y otros derivados, con miras a manejar riesgos, es un activo muy valioso. Las innovaciones financieras se orientan fundamentalmente hacia una efectiva compra-venta de volatilidad. Los gestores de carteras, por ejemplo, compran opciones de venta con el fin de reducir el riesgo de grandes bajas en los precios de los activos financieros.

Las compañías usan opciones y otros instrumentos derivados para reducir sus propios riesgos. Los bancos y otras instituciones financieras apelan al método desarrollado por Black, Merton y Scholes para desarrollar y determinar el valor de nuevos productos, o vender soluciones financieras a la medida a sus clientes. Pero también lo aprovechan para reducir los riesgos que surgen de su actuación en los mercados financieros.

Capítulo 1

Definiciones esenciales del modelo

En el presente capítulo se definen los conceptos esenciales, que son la base para poder entender la valuación de opciones europeas mediante el *modelo Black-Scholes*. Se inicia con la definición de un producto derivado, así como de reglas que establece Mexder, Mercado Mexicano de Derivados. Debemos tener presente que la información contenida en este capítulo, referida al contexto regulatorio, está sujeta a cualquier modificación de los reglamentos y manuales de *MexDer* que se pueden consultar en la página de internet [19]. Las definiciones de este capítulo fueron tomadas de [10].

1.1. Producto derivado

Los *productos derivados* son instrumentos financieros cuyo valor es función de otros parámetros financieros ya existentes. Esta definición es consistente al describir estos productos flexibles, dentro de los que destacan las opciones. Al activo sobre el que se define los productos derivados se le llama *bien o activo subyacente* que pueden ser las acciones o un índice, por ejemplo, el Indice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC). Los productos derivados han sido un gran logro en materia financiera en lo que concierne a reducir el riesgo, se pueden elaborar portafolios que protejan al inversionista ante un riesgo provocado por la incertidumbre del comportamiento de las variables financieras, como puede ser la volatilidad que tiene una divisa. El Mercado Mexicano de Derivados ha ampliado la gama de productos que ofrece al público inversionista, al listar opciones financieras sobre algunas de las principales acciones listadas en la

Bolsa Mexicana de Valores, así como del Indice de Precios y Cotizaciones (IPC) a partir del 2004. Se debe tener en cuenta que hay factores externos, como la situación general de la economía, oferta y demanda en el mercado, tasas de interés, volatilidad de las acciones, liquidez, que afectan al precio de las opciones. La intermediación en opciones es una actividad especializada. Los intermediarios de MexDer tienen operadores especializados en opciones. Sus operadores y promotores tienen la obligación de estar certificados por la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles y acreditados por esta bolsa.

1.2. Opción

Una *opción* es un contrato financiero que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender activos llamados subyacentes, como son las acciones o índices, por ejemplo, el IPC, a un precio predeterminado llamado precio de ejercicio, en una fecha concreta, denominada fecha de vencimiento, a cambio de una cantidad de dinero. Esta cantidad, como se verá más adelante es el precio de la opción, de acuerdo con [13]. Existen dos clases de opciones: de compra y de venta. Inicialmente, MexDer ha decidido listar opciones sobre el Indice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores y sobre las siguientes acciones:

Acción	**Código de Opción**
América Móvil L	AX
Cemex CPO	CX
Femsa UBD	FE
G Carso A1	GC
G Modelo C	GM
Naftrac 02	NA
Telmex L	TX
Televisa CPO	TV
Walmex	WX

1.2.1. Opción de compra

Una *opción de compra o call* es un contrato financiero, que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar un activo subyacente o un índice, a un precio predeterminado llamado precio de ejercicio, en una fecha concreta denominada fecha de vencimiento, pagando una prima. El vendedor de la opción call tiene la obligación de vender el activo en caso que el comprador ejerza el derecho a comprar. Las primas de las opciones sobre acciones se cotizan en pesos con dos decimales por cada acción. Las primas de las opciones sobre IPC se cotizan en puntos de IPC, valiendo cada punto 10 pesos.

1.2.2. Opción de venta

Una *opción de venta o put* es un contrato financiero, que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, de vender un activo subyacente o un índice, a un precio predeterminado llamado precio de ejercicio, en o antes de una fecha concreta llamada fecha de vencimiento. El vendedor de la opción put tiene la obligación de comprar el activo en caso que el comprador ejerza el derecho a vender.

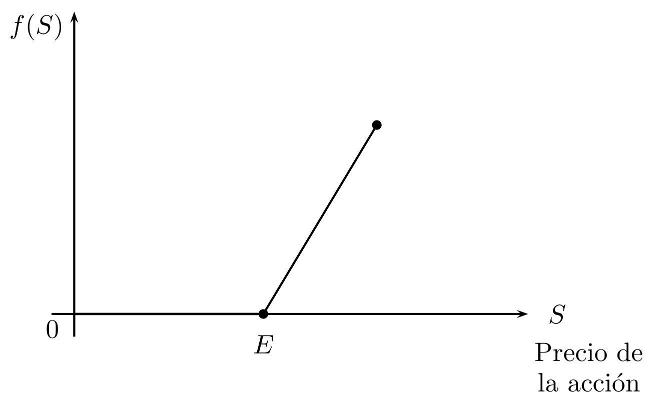
1.3. El valor de una opción

El *valor de una opción* es el precio al cual se realiza la operación, es la prima de negociación de acuerdo a [4]. Dicho precio es pagado por el comprador de la opción al vendedor de la misma. En un contrato de opciones existen dos partes, la que ha tomado la posición larga, es decir, compra la opción. En la otra parte, está quien toma la posición corta, es decir, el que suscribe o vende la opción. A cambio de recibir la prima, el vendedor de la opción call está obligado a vender el activo al comprador si éste la ejerce. De la misma manera, el vendedor de la opción put está obligado a comprar el activo al comprador si éste la ejerce. El que vende la opción siempre se queda con la prima, se ejerza o no la opción. El precio de la opción está en función de una serie de parámetros, antes se define el valor intrínseco de una opción.

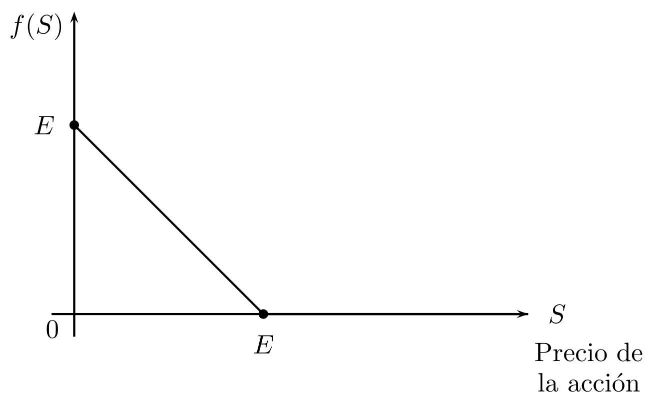
1.4. Valor intrínseco de una opción

El *valor intrínseco de una opción* en un momento dado, es el valor que tiene la opción en caso de ser ejercida inmediatamente. Se define como sigue:

Sea S el precio de la acción y E el de ejercicio en un tiempo dado. El valor intrínseco para un call es $f(S) = \max(S - E, 0)$ lo cual se puede apreciar en la gráfica siguiente:



y para un put es $f(S) = \text{máx}(E - S, 0)$, cuya gráfica se muestra a continuación:



El transcurso del tiempo influye en la cantidad que un comprador pagaría en la esperanza de que cambios en el bien subyacente aumentará el valor intrínseco de la opción. Por ejemplo, se considera una opción call, sobre una acción que actualmente vale \$10. Si el precio de ejercicio es de \$8 y la opción vale \$3 entonces el valor intrínseco es \$2. Ahora de los tres que vale la opción, \$2 son por el valor intrínseco y el \$1 restante es el valor por el transcurso del tiempo. El valor total de una opción puede ser visto como la suma del valor intrínseco y de su valor por el paso del tiempo.

Otro concepto importante en las opciones es el *arbitraje*. Se habla de una posibilidad de arbitraje cuando por desajustes en los precios es posible obtener ganancias sin invertir nada. A eso se le llama oportunidad de arbitraje en el mercado. Uno de los grandes supuestos en la valuación de opciones es que no existen este tipo de oportunidades, o que sólo existen por periodos de tiempo muy cortos que impiden beneficiarse de ellos, por que el mercado financiero tienden a eliminar estas oportunidades.

El precio de una opción depende principalmente de seis factores:

1. **Precio del activo subyacente**: Es el precio de la acción o valor de un índice en un tiempo determinado, es un dato público y conocido en el que no hay discrepancias.

2. **Precio de ejercicio**: Es el precio predeterminado del *activo subyacente*, se fija al momento de listar el contrato en la bolsa, es conocido por el comprador y el vendedor. El precio de ejercicio es el precio al cual:

    a. se compra el activo si el comprador de un call ejerce su derecho a comprar.

    b. se vende el activo si el comprador de un put ejerce su derecho a vender.

    Los precios de ejercicio distarán uno del otro dependiendo del precio del activo subyacente. En el caso de índices, el precio de ejercicio se expresa en puntos enteros. Regularmente MexDer mantiene abiertos a negociación un rango de precios de ejercicio que cubre las necesidades del mercado financiero.

3. **Tiempo de la opción**: Es el número de días que restan para el vencimiento de la opción. Es un dato importante sobre todo en los últimos días antes del vencimiento.

4. **Volatilidad del precio del activo subyacente**: Es una medida en la variación que tiene un activo desde el día de la negociación hasta su vencimiento. Es uno de los datos que más afecta el valor de la prima de la opción, de tal manera que existe una correspondencia unívoca, para la cual dada una prima, existe una volatilidad implícita.

5. **Tasa de interés libre de riesgo del mercado**: Es una tasa de intéres interbancaria que se usa para calcular el valor presente del valor intrínseco de una opción.

6. **Dividendos.** Son utilidades que se les da a los inversionistas de las opciones. En el presente trabajo, se supone que las acciones no pagan dividendos en la vida de una opción.

De acuerdo a su valor intrínseco en un momento determinado, las opciones se pueden clasificar de la siguiente manera:

a. Una opción está en dinero *(at the money)* si el precio del bien subyacente es igual al precio de ejercicio.

b. Una opción está dentro de dinero *(in the money)* si el precio del bien subyacente es mayor al precio de ejercicio.

c. Una opción está fuera de dinero *(out of the money)* si el precio del bien subyacente es menor que el precio de ejercicio.

Si la opción está dentro de dinero, cuesta más, pues con certeza será ejercida, a mayor tiempo de vida de la opción mayores cambios en el valor intrínseco de la opción se puede dar.

Existen dos tipos de opciones, las *opciones de estilo europeo* que sólo pueden ser ejercidas al vencimiento, en el mercado mexicano de derivados son las correspondientes al IPC y las *opciones de estilo americano* que pueden ser ejercidas en cualquier momento, entre el día de la negociación hasta el vencimiento, en este caso son las opciones sobre acciones.

Se analizan los límites máximos y mínimos entre los que se mueve el precio de una opción que no paga dividendos, como un primer intento de calcularlo. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
S_0 &: \text{ Precio de la acción al tiempo inicial 0.}\\
S_T &: \text{ Precio de la acción al tiempo } T.\\
K &: \text{ Precio de ejercicio.}\\
T &: \text{ Tiempo de vencimiento de la opción.}\\
Ca &: \text{ Precio de un call americano.}\\
Ce &: \text{ Precio de un call europeo.}\\
Pa &: \text{ Precio de un put americano.}\\
Pe &: \text{ Precio de un put europeo.}\\
r &: \text{ Tasa libre de riesgo del mercado.}
\end{aligned}$$

Una primera relación entre opciones americanas y europeas es que el precio de las opciones americanas es mayor que el de las europeas, pues otorgan más derechos que éstas últimas, ya que se pueden ejercer en cualquier momento. Entonces se tienen las relaciones:

$$\text{Ce} \leq \text{Ca} \;\; \text{y} \;\; \text{Pe} \leq \text{Pa}.$$

Para un call, ya sea americano o europeo, su precio jamás será mayor que el precio del bien subyacente al tiempo inicial, de otra manera, se pueden obtener ganancias mediante arbitraje. Por ejemplo, si el precio del call fuera $5 y la acción inicialmente vale $2, se puede ganar $3 sin riesgo si se compra la acción y se vende el call, por lo que:

$$\text{Ca} \leq \text{S}_0 \;\; \text{y} \;\; \text{Ce} \leq \text{S}_0.$$

Para un put americano o europeo su precio jamás será mayor que el precio de ejercicio. Puesto que un put da el derecho de vender una acción por K a cambio de $Pe($ o $Pa)$; evidentemente no es un negocio atractivo pagar $Pe($ o $Pa)$ a cambio del derecho de vender una acción a K si K es menor estricto que $Pe($o $Pa)$, de tal forma:

$$Pe \leq K \;\; \text{y} \; Pa \leq K.$$

Como eso se verifica en todo momento, entonces en el caso de un put europeo que sólo se puede ejercer al término de su vida, se verifica que

$$Pe \leq Ke^{-rT}.$$

De la misma forma, el precio de un call europeo no puede ser mayor que el valor presente del precio de ejercicio. De otra manera existen oportunidades de arbitraje, basta suscribir la opción en el mercado e invertir a la tasa libre de riesgo. Por ejemplo, si el precio del call fuera de $9, el precio de ejercicio $10, el tiempo de vida de un año y la tasa libre de riesgo 15.0 %, entonces

$$\text{Ce} = 9 > Ke^{-rT} = (10)e^{-0 \cdot 15} = 8 \cdot 61.$$

Se invierten los $9 de la opción al 15 %. Al final del año se tiene $10.45. Lo peor que podría pasar es que el comprador ejerciera la opción, en cuyo caso se tendría que comprar una acción a $10; obteniendo una ganancia de $0.45, en otro caso, si la acción baja de precio, menor que K se obtiene una ganancia mayor.

1.4.1. Límite inferior de un call europeo

Un límite inferior para un call europeo es

$$\mathrm{S}_0 - Ke^{-rT}.$$

Esto se verifica si no existen oportunidades de arbitraje en el mercado. Para demostrarlo se forman dos portafolios:

$$\begin{aligned} \text{Portafolio I} &: \text{ Un call europeo y una cantidad en efectivo de } Ke^{-rT}. \\ \text{Portafolio II} &: \text{ Una acción.} \end{aligned}$$

Si la cantidad en efectivo se invierte a la tasa libre de riesgo, al final de la vida de la opción el portafolio I valdrá

$$\max(S_T - K, O) + K.$$

Si $S_T > K$, es decir, si se ejerce la opción, vale $S_T - K$ y el portafolio I tendría un valor de

$$S_T - K + K = S_T.$$

Si $K > S_T$, es decir, si no se ejerce la opción, vale cero y el portafolio vale K.

Por lo tanto el portafolio I vale:

$$\max(S_T, K).$$

Mientras que el portafolio II vale S_T al final del periodo. Entonces se verifica que el valor del portafolio I es mayor o igual que el portafolio II. Si no existen oportunidades de arbitraje, i.e. si éstos portafolios ahorran lo mismo que un instrumento libre de riesgo, entonces esta desigualdad se verifica en este instante. Trayendo a valor presente ambos miembros:

$$\mathrm{Ce} + Ke^{-rT} \geq S_0,$$

de donde se obtiene

$$\mathrm{Ce} \geq S_0 - Ke^{-rT}. \tag{1.1}$$

1.4.2. Límite inferior de un put europeo

De igual manera se determina el límite inferior para el valor de un put europeo. El precio de un put europeo no puede ser menor que

$$Ke^{-rT} - S_0.$$

Para demostrarlo se forman dos portafolios:

$$\begin{aligned} \text{Portafolio I} &: \text{ Un put europeo más una acción.} \\ \text{Portafolio II} &: \text{ Una cantidad en efectivo de } Ke^{-rT}. \end{aligned}$$

En el portafolio I, la opción será ejercida si $S_T<K$ y el portafolio valdrá

$$K - S_T + S_T.$$

Si la opción no se ejerce, $S_T>K$, entonces el portafolio vale S_T. El valor del portafolio I es

$$\max(S_T, K).$$

El portafolio II vale K al final del periodo si se invierte a la tasa libre de riesgo. Entonces el portafolio I vale más o al menos tanto como el portafolio II al final del periodo. Los portafolios deben de ahorrar lo mismo que un instrumento libre de riesgo. Lo que implica que la desigualdad se verifica ahora y se expresa:

$$\text{Pe} + S_0 \geq Ke^{-rT}.$$

De donde se obtiene

$$\text{Pe} \geq Ke^{-rT} - S_0. \tag{1.2}$$

Dadas las dos desigualdades tenemos los siguientes ejemplos:

Supongamos que $S_0 = \$10$, $K = \$7$, $r = 15\,\%$ al año, T =1 año. De (1.1) tenemos que el límite mínimo para un call será

$$10 - 7e^{-0{\cdot}15} = 3{\cdot}98.$$

Si el call costara \$2 entonces se puede aprovechar una oportunidad de arbitraje, comprando el call, y se vende la acción. Obtendríamos un ingreso de \$10-\$2=\$8. Invirtiéndolos a la tasa libre de riesgo tendríamos \$9.29 al final de un año. Al final del año, si el precio de la acción está arriba de \$7, se ejerce la opción y se compra la acción en \$7, cerramos nuestra posición vendiendo la acción, obteniendo una ganancia de

$$\$9{\cdot}29 - \$7 = \$2{\cdot}29.$$

Si el precio de la acción es menor a \$7, tanto mejor, no ejercemos, compramos la acción en el mercado y obtenemos una ganancia mayor. Ahora, si no se verifica (1.2), existiría también una oportunidad de arbitraje. Supongamos, que $S_0 = \$15$, $K = \$20$, $r = 15\,\%$ al año, $T = 1$ año, entonces la desigualdad (1.2) queda

$$20e^{-0{\cdot}15} - 15 = 2{\cdot}21.$$

Si el precio del put es menor que \$2.21 entonces habría oportunidades de arbitraje. Por ejemplo, si el put costara \$1; podríamos obtener un préstamo al 15 %, por \$16 para comprar la acción y el put. Al final del año tendríamos que pagar \$18.59. Si el precio de la acción permanece abajo de \$20, ejercemos la opción y vendemos la acción por \$20, pagamos el préstamo, con una ganancia de

$$\$20 - \$18{\cdot}59 = \$1{\cdot}41.$$

Si el precio sube de \$20, no ejercemos, vendemos la acción en el mercado a un precio mayor que \$20, se puede cubrir el préstamo y obtenemos una ganancia aún mayor.

1.5. Paridad Compra-Venta

Entre los precios de un put y un call europeos existe una relación que es de gran utilidad y que es de particular importancia en la teoría de la valuación de opciones. La llamada *paridad Compra-Venta* (Put-Call parity) nos permite saber el precio de un put dado el de un call con las mismas características (i.e. mismo subyacente, mismo precio de ejercicio y misma edad). Para derivarla se forman los siguientes dos portafolios:

Portafolio I	:	Un call europeo más una cantidad de efectivo igual a Ke^{-rT}.
Portafolio II	:	Un put europeo más una acción.

Ambos portafolios valen, al final del periodo de vida de las opciones:

$$\text{máx}(S_T, K),$$

por los mismos argumentos que se utilizó en la derivación de los límites inferiores. Si queremos evitar oportunidades de arbitraje ambos portafolios deben de tener idénticos valores en este momento, por lo que se tiene:

$$Ce + Ke^{-rT} = Pe + S_0,$$

que es la llamada paridad Put-Call.

Si no se verifica esta igualdad, entonces existen oportunidades de arbitraje. En otras palabras, podemos usarla para detectar oportunidades de arbitraje. Si el portafolio I está sobrevaluado respecto al II se puede hacer una ganancia sin riesgo, comprando el portafolio II, y se vende el portafolio I. Por ejemplo, supongamos $S_0 = \$20$, $K = \$18$, $r = 15\,\%$ anual, $T = 1$ año, $Ce = \$4$ y $Pe = \$3$.

$$\begin{aligned} \text{Portafolio I} &: \quad Ce + Ke^{-rT} = 4 + 18e^{-0 \cdot 15} = 19{\cdot}49. \\ \text{Portafolio II} &: \quad Pe + S_0 = 3 + 20 = 23. \end{aligned}$$

Aquí el portafolio II está sobrevaluado respecto al I, por lo tanto la estrategia a usar es comprar el I y se vende el portafolio II.

Si el precio del call fuera de \$7 y el del put \$1 entonces:

$$\begin{aligned} \text{Portafolio I} &: \quad 7 + 18e^{-0 \cdot 15} = 22{\cdot}49. \\ \text{Portafolio II} &: \quad 1 + 20 = 21. \end{aligned}$$

En este caso el portafolio I está sobrevaluado respecto al portafolio II, la estrategia es comprar el II y vender el I.

Esta igualdad nos garantiza que una vez que tengamos una expresión para calcular un call(o un put), automáticamente podemos encontrar la expresión para el put(o call).

Se han encontrado límites para el precio de una opción basándonos en la existencia de no arbitraje del mercado. Este supuesto es básico en la teoría de la valuación de opciones como se ve en los próximos capítulos.

1.6. Tipos de opciones

Existen diferentes tipos de opciones dentro de las cuales se mencionan las siguientes tomadas de una publicación del Chicago Mercantile Exchange [15].

1. Opciones sobre acciones. Con este contrato se obtiene el derecho de comprar o vender un determinado número de acciones a un precio dado.

2. Opciones sobre divisas. Se adquiere el derecho de comprar o vender alguna moneda a un tipo de cambio dado. En el Chicago Mercantile Exchange se comercian, entre otros, con opciones en libra esterlina, dólar canadiense o yen japonés.

3. Opciones sobre índices. Se adquiere el derecho de comprar o vender un determinado número de veces algún índice. Por ejemplo 100 veces el IPC. En el Chicago Mercantile Exchange encontramos opciones en el índice Nikie o el IPC mexicano.

4. Opciones sobre futuros. Se adquiere una posición larga (call) o corta (put) en un contrato de futuros. En el Chicago Mercantile Exchange se comercian sobre futuros en ganado vivo, índice Nikkie, dólares canadienses, entre otros.

5. Opciones Exóticas. Entre éstas están las opciones Asiáticas que se valúan sobre el precio promedio del bien, las de tipo Bermudas que sólo son ejercibles en ciertos días.

1.7. Invertir en opciones

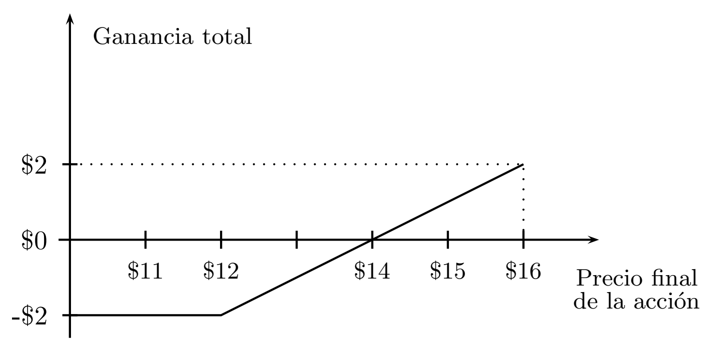
El invertir en opciones trae consigo diferentes beneficios algunos de los cuales son:

1. Apalancamiento. El inversionista de opciones puede anticipar un cambio en el precio de las acciones o en el valor del IPC. El comprador de un call se ve favorecido por un incremento en el precio del activo subyacente, el de un put por una baja. Se generan más ganancias con la inversión en opciones, que usando la misma cantidad invertida en los activos subyacentes.

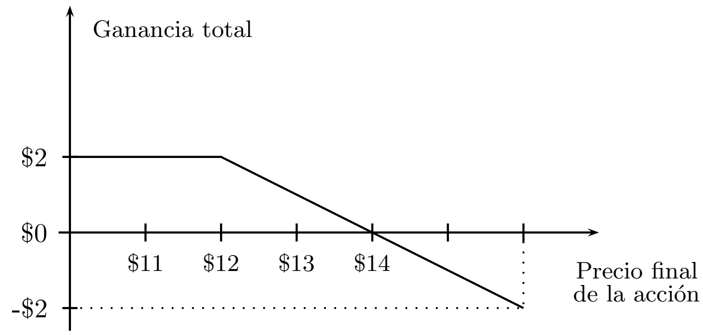
2. Obtener ingresos adicionales. Un inversionista puede decidir vender opciones call o put, simplemente porque su expectativa sobre la dirección que seguirán los precios de las acciones o el valor del índice, le sugieren que podrá conservar las primas recibidas producto de la venta de las opciones.

3. Protección contra movimientos de precios. El inversionista puede protegerse contra un incremento al precio de los activos, comprando calls, o contra una disminución, mediante la compra de puts.

Ejemplo. Se compra una opción call tipo europea sobre una acción de Televisa con precio de \$2, cuyo valor actual de la acción es \$10, precio de ejercicio \$12, y periodo de maduración 2 meses, por lo que estamos comprando el derecho de adquirir una acción de Televisa al término de 2 meses a \$12. Si el precio de la acción al final de los dos meses es menor que \$12, no ejercemos la opción perdiendo nuestra inversión de \$2. Por lo contrario, si el precio sube más de \$12, nos convendrá ejercer. Podemos comprar la acción a \$12 y venderla en el mercado. Por ejemplo si sube a \$15 se obtendría una ganancia de \$3 por acción lo que significa una ganancia total de \$1 por acción, restamos la inversión inicial de \$2 para pagar la opción. En la siguiente gráfica se observa como se comporta nuestra ganancia total respecto al precio final de la acción.



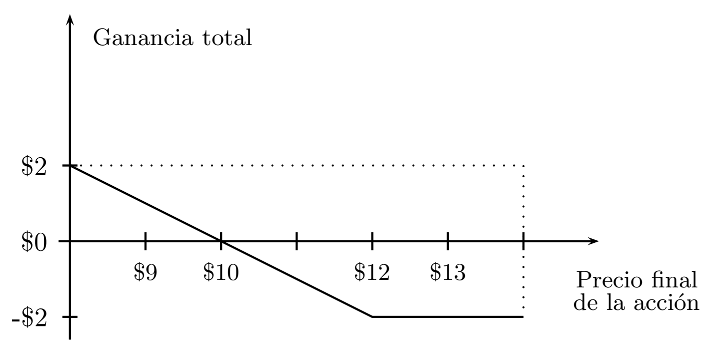
Si el precio de la acción es menor de \$12 perdemos los \$2 iniciales, de \$12 a \$14 también se pierde, pues la ganancia en la venta de la acción no compensa el pago de la opción, si el precio es mayor a \$14 se obtiene una ganancia, la cual es mostrada en la gráfica. Para el que vende la opción call, es decir, la contraparte, en este ejemplo, la función de ganancias por vender una opción call sobre una acción de Televisa a un precio de ejercicio de \$12 es la siguiente:



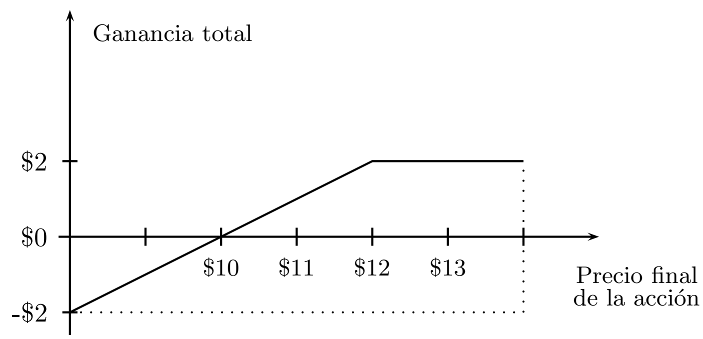
Para el caso de un put se analiza el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Se compra un put sobre una acción de Televisa con idénticos parámetros, precio de ejercicio de \$12 y precio \$2. Si el precio de la acción no pasa de \$12 ejercemos la opción y se vende la acción a \$12 cuando en el mercado esten más baratas. Por ejemplo, si la acción queda en \$9, se puede comprar la acción en \$9 en el mercado y se vende la opción a nuestra contraparte al precio de \$12, lo que se obtiene una ganancia de \$3 sobre la transacción con las acciones y una ganancia total de \$1 por acción, descontado el precio de la opción.

Si la acción sube de \$12 no ejercemos pues se puede vender acciones a mayor precio a otra persona en el mercado. En la gráfica siguiente se muestra la relación de las ganancias sobre la opción put.



Para el que vende la opción put, es decir, la contraparte, en este ejemplo, la función de ganancias por vender una opción put sobre una acción de Televisa a un precio de ejercicio de $12 es la siguiente:



1.7.1. El contrato de las opciones negociadas en MexDer

La unidad de acciones en un contrato de opciones es de 100, esto quiere decir que, aún cuando la prima se cotiza en pesos con dos decimales por cada acción, la unidad mínima para operar es un contrato equivalente a 100 acciones. No se pueden contratar fracciones de un contrato como lo establece [19].

Ejemplo: Un contrato en la compra de un call de Telmex L con precio de ejercicio 16.20 pesos, con una prima de 0.70 pesos por acción, concede el derecho a comprar 100 acciones de Telmex a 16.20 pesos por acción, es decir, un precio de contrato por 1,620 pesos. El costo total de la prima por contrato es 70 pesos.

El contrato para las opciones sobre IPC es de 10 pesos por cada punto, el valor del contrato está en función del número de puntos que tenga el IPC en esos momentos. Las primas se cotizan en puntos del IPC, por tanto, para saber su valor monetario final hay que multiplicar por 10 pesos.

1.7.2. El calendario de negociación

Todos los días son hábiles excepto sábados, domingos y aquellos que establezca la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) como inhábiles bancarios. Para la negociación de las opciones sobre acciones, son los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Por ejemplo, en un día de enero de 2006 los meses abiertos a negociación serán: marzo 06, junio 06, septiembre 06 y diciembre 06. En las opciones sobre IPC los meses abiertos a negociación serán los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre, conocido como ciclo trimestral de marzo. Por ejemplo, en un día posterior al vencimiento de marzo del 2006, los meses abiertos a negociación serán junio 06, septiembre 06, diciembre 06 y marzo 07. En ambos contratos, el último día de negociación es el mismo día de vencimiento.

1.7.3. Derechos y obligaciones en Mexder

Los derechos y obligaciones de las opciones se adquieren con Asigna, Compensación y Liquidación, dependiente de Mexder, que es contraparte en todos los casos, no hay derechos entre comprador y vendedor en términos bilaterales, el que ejercita el derecho a comprar o vender lo hace ante Asigna, el comprador de opciones sobre acciones o índice sólo tiene derechos y ninguna obligación. A cambio, paga una prima y sólo él puede decidir si ejerce o no la opción, o negociarla en el mercado (vender la opción comprada), en cuyo momento acaban sus derechos. Si el comprador de opciones sobre acciones call o put decide ejercer su derecho se obliga automáticamente, a efectuar la liquidación de ese ejercicio, por lo tanto, Asigna le exigirá aportaciones para cubrir el riesgo de incumplimiento de dicha liquidación.

El vendedor de opciones sólo tiene obligaciones y ningún derecho. A cambio, cobra una prima y está a expensas de que el comprador ejerza su derecho, o bien en todo momento puede negociar (comprar la opción vendida), en cuyo momento cesan sus obligaciones.

Asigna exige aportaciones iniciales mínimas al vendedor de opciones ya sea call o put sobre acciones o índice, mientras las mantenga vendidas, y al comprador, si ejerce su derecho sobre las opciones en acciones que el vendedor le haya vendido, durante el tiempo de la negociación de la opción, con lo que se asegura el cumplimiento de las obligaciones en caso de que el comprador ejerza sus derechos, ante Asigna. Estas aportaciones varían en función de los movimientos de las acciones o del índice IPC .

1.7.4. El importe de las aportaciones

El importe de las aportaciones es variable. La cantidad a depositar depende de tres factores: la volatilidad del activo, el tiempo que resta al vencimiento y si la opción está *at the money, in the money, out of the money*. Cuanto más dentro del dinero esté una opción más aportaciones se piden. En función de lo anterior las aportaciones varían en torno de un 15 a

25 porciento del valor nominal del activo, sin embargo, en realidad depende de qué tanto esté la opción en el dinero.

Capítulo 2

Introducción al modelo Black-Scholes

Los contratos de futuros y opciones existen desde hace algunos siglos en diferentes partes del mundo, sin embargo, intentos de valuarlos de manera rigurosa son recientes. A partir de la década de 1970 empiezan formalmente a negociarse en mercados organizados como el *New York Stock Exchange*.

El modelo Black-Scholes es utilizado por su reducción de parámetros, además no tienen demasiadas variables y su estudio es relativamente fácil.

En el presente capítulo se da por hecho que el lector posee conocimientos básicos de probabilidad, estadística y cálculo elemental. El análisis culmina con un modelo para el incremento del precio de los productos derivados, para lo cual se tienen que entender diferentes conceptos, como tipos de procesos estocásticos, ya que el precio del bien subyacente, sobre el que depende el precio de la opción sigue un tipo especial de proceso estocástico. Se utilizó material bibliográfico de [16] para la definición y clasificación de dichos procesos.

2.1. Procesos estocásticos

Definición. Un proceso estocástico o proceso aleatorio se define como un conjunto de variables aleatorias $\{z_t : t \in T\}$*, en donde* T *es un conjunto llamado espacio parametral. Las variables* z_t *toman valores en* $S \subseteq R$*. El espacio parametral* T *se puede interpretar como un conjunto de tiempos.*

La evolución de los precios de las acciones a lo largo del tiempo se puede modelar mediante un proceso estocástico. Por ejemplo, la variable aleatoria z_t corresponde al precio de la acción al tiempo t.

Los procesos estocásticos se clasifican de acuerdo a:

1. El rango de valores que toma z_t ó su espacio de estados.

   a. De variable continua: Cuando el valor que toma la variable aleatoria es un conjunto continuo de elementos, por ejemplo, un intervalo de números reales.

   b. De variable discreta: Cuando los valores que toma la variable aleatoria es un conjunto numerable de elementos.

2. Por el espacio parametral.

   a. De tiempo continuo. Cuando el parámetro t toma valores de un conjunto continuo de elementos, por ejemplo, $t \in (a, b)$ donde a, b pertenecen a los números reales.

   b. De tiempo discreto. Cuando el parámetro t toma valores de un conjunto numerable de elementos.

3. Por la relación que guardan entre sí las variables aleatorias.

De acuerdo a esta clasificación, la serie del precio de las acciones, se modela con un proceso estocástico de variable y tiempo continuo, en un intervalo determinado del tiempo. En particular, el proceso de Markov es un modelo importante para representar el comportamiento del precio de las acciones.

2.2. Proceso de Markov

El proceso de Markov, que recibe su nombre del matemático ruso Andrei Markov es el siguiente:

Definición. Un proceso de Markov es una serie z_{t_1}, z_{t_2},$\cdots$ de variables aleatorias, que cumplen la siguiente propiedad:

$$P[z_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | z_{t_n} \leq x_n, \cdots, z_{t_1} \leq x_1] = P[z_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | z_{t_n} \leq x_n],$$

con $t_{n+1} \geq t_n \geq t_{n-1} \geq \cdots \geq t_1 \in T$ el espacio parametral y números reales $x_{n+1}, x_{n-1}, \cdots x_1$.

En efecto, este proceso tiene memoria, recuerda la última variable aleatoria y condiciona las probabilidades de la variable futura. Esta dependencia distingue al proceso de Markov de las series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado.

De esta forma, si se supone que el precio de una acción de telmex sigue un proceso de Markov, por ejemplo, que el precio es de \$10 el día de hoy, cualquier pronóstico para dicha acción depende únicamente de este precio, y no depende del precio de ayer, una semana ó un mes atrás, toda esa información es irrelevante, según este modelo. La propiedad Markoviana es consistente con la propiedad débil del mercado, la cual afirma que toda la información que afecta el precio futuro de la acción, está contenida en su precio actual, por lo que la información pasada es irrelevante. El modelo con esta propiedad permite afirmar que la serie histórica de los precios de las acciones es un proceso de Markov, con espacio parametral de tiempo continuo y espacio de estados de variable continua. Las secciones siguientes contienen material de [5] y [8].

2.3. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano o proceso de Wiener es utilizado en el modelo Black-Scholes, para la modelación del precio de las acciones.

Sea el periodo de tiempo $[0, T]$ dividido en N subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ con $t_k = k\frac{T}{N}$ para $k = 0, \cdots, N-1$ y $t_N = T$. El incremento en el k-ésimo intervalo del proceso estocástico $\{z_t : 0 \leq t \leq T\}$ es $\Delta z_k = z_{t_{k+1}} - z_{t_k}$ para $0 \leq k \leq N-1$. De esta forma el movimiento Browniano se define formalmente mediante la siguiente: *Definición. Un movimiento Browniano es un proceso estocástico de variable y tiempo continuo,* $\{z_t : 0 \leq t \leq T\}$ *que cumple con la propiedad de Markov y es tal que:*

1. *El cambio* Δz_k *en* $[t_k, t_{k+1}]$ *esta dado por:*

$$\Delta z_k = \varepsilon_k \sqrt{t_{k+1} - t_k}, \tag{2.1}$$

   donde

$$\varepsilon_k \sim N(0, 1).$$

2. *Los incrementos* Δz_k *para* $k = 1, \cdots, N-1$ *son independientes.*

El comportamiento errático de la serie histórica del precio de las acciones, permite modelarse con un movimiento Browniano. Se tienen entonces los siguientes resultados.

Proposición

Para el movimiento Browniano $\{z_t : 0 \leq t \leq T\}$ *se tiene que:*

1. *la variable $z_T - z_0$ se puede escribir como*

$$z_T - z_0 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t},$$

en donde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son independientes con distribución normal estándar.

2. $E(z_T - z_0) = 0$.

3. *Var*$(z_T - z_0) = T$.

4. $z_T - z_0 \sim N(0, T)$.

Demostración. La primera igualdad se obtiene del hecho de que $z_T - z_0$ es la suma de n incrementos de la variable aleatoria z_t durante los n intervalos de tiempo de longitud $\Delta t = T/n$. Para la segunda igualdad tenemos que por independencia

$$E(z_T - z_0) = E(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta t}\, E(\varepsilon_i) = 0.$$

Mientras que la varianza es

$$\mathrm{Var}(z_T - z_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\varepsilon_i \sqrt{\Delta t}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t = n\Delta t = T.$$

De los resultados anteriores y dado que la suma de variables aleatorias independientes normales es una variable aleatoria independiente con distribución normal se obtiene que $z_T - z_0 \sim \mathrm{N}(0, T)$.

Q.E.D.

2.4. Proceso generalizado de Wiener

La siguiente definición utiliza la misma partición de $[0, T]$. *Definición. Un proceso generalizado de Wiener es un proceso estocástico de variable, tiempo continuo $\{z_t : 0 \le t \le T\}$, que cumple con la propiedad de Markov y es tal que:*

1. *El cambio Δz_k en $[t_k, t_{k+1}]$ esta dado por:*

$$\Delta z_k = a\Delta t + b\varepsilon_k \sqrt{\Delta t}, \tag{2.2}$$

donde a, b, son constantes arbitrarias y

$$\varepsilon_k \sim N(0, 1).$$

2. Los incrementos Δz_k para $k = 0, \cdots, N-1$ son independientes.

De acuerdo a esta definición se modela el comportamiento de la serie histórica de precios de una acción en el periodo de tiempo $[0, T]$, sea x_t el precio de la acción al tiempo t, el cambio en el precio de la acción en el periodo de tiempo $[t_k, t_{k+1}]$ para toda $k = 0, \cdots, N-1$ es $\Delta x_k = x_{t_{k+1}} - x_{t_k}$.

La serie histórica de precios de una acción, muestra tendencias, para modelar este comportamiento, se utiliza la media y la varianza general de la serie, es decir μ y σ, dado que el término μ representa la tendencia general de la serie y el término σ es la volatilidad de los precios con respecto a la media, por lo que el incremento en cada intervalo k para un valor determinado de la acción s es:

$$\Delta x_k = \mu s \Delta t + \sigma s \varepsilon_k \sqrt{\Delta t}. \tag{2.3}$$

donde $\varepsilon_k \sim N(0,1)$, s es el precio de la acción en t_m y $t_m \in [t_k, t_{k+1}]$, esta expresión tiene la forma de un incremento del proceso generalizado de Wiener, es la fórmula general del modelo en el incremento del precio de una acción en dicho periodo de tiempo, con la cual se realizarán diferentes simulaciones en el siguiente capítulo.

Para la siguiente sección, se consultó [9].

2.5. Cálculo estocástico

El desarrollo del modelo del precio de los productos derivados, esta basado en el cálculo de Itô, para lo cual se tiene que entender una serie de definiciones, las cuales son las siguientes:

Definición. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, se dice que $\{F_t\}_{t\geq 0}$ es una filtración en (Ω, F) si es una familia creciente de σ-álgebras en F. Es decir, $F_s \subseteq F_t$ $\forall s \leq t$. El conjunto $\{F_t\}_{t\geq 0}$ representa la información disponible al instante t. Es posible construir una filtración a partir de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$, si se toma a $F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ como las σ-álgebras generadas hasta el instante t.

Definición. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, entonces el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a $\{F_t\}_{t\geq 0}$ si $\forall t \geq 0$ X_t es una variable aleatoria F_t-medible. De esta forma es posible dar otra definición del Movimiento Browniano con respecto a su filtración.

Definición. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Se dirá que el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un F_t-Movimiento Browniano si toma valores reales, con *trayectorias continuas y además cumple que:*

- X_t *es una variable aleatoria* F_t*-medible* $\forall t \geq 0$.
- *Si* $s \leq t$, $X_t - X_s$ *es una variable independiente de* F_s.
- *Si* $s \leq t$, *la densidad de* $X_t - X_s$ *es idéntica a la de* $X_{t-s} - X_0$.

Definición. Un Movimiento Browniano es estándar si se cumple que:

- $X_0 = 0$.
- $E[X_0] = 0$.
- $E[X_t^2] = t$.

2.5.1. Integral Estocástica

Sean (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, $\{F_t\}_{t\geq 0}$ una filtración, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un F_t-Movimiento Browniano estándar y $T \in \Re^+$.

Definición. Se dice que un proceso estocástico $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ *adaptado a* F_t *es un proceso elemental si es un proceso con la siguiente forma:*

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(w) I_{(t_{i-1},t_i]}(t),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ y φ_i variable aleatoria $F_{t_{i-1}}$-medible y acotada, $i \in 1 \cdots p$.

Definición. Se define la integral estocástica de un proceso elemental $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ *como el proceso:*

$$\int_0^{t^*} H_s dW_s = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \varphi_{k+1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}),$$

sí $t^* \in (t_k, t_{k+1}]$.

2.5.2. Proceso de Itô

Definición. Sea (Ω, F, P) *un espacio de probabilidad con relación a una filtración* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ *y* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *un* F_t*-Movimiento Browniano. Un proceso estocástico* $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ *que toma valores en* $\Re$ *es un proceso de Itô si es tal* *que,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s.$$

- X_0 *es* F_0*-medible.*
- $\{K_t\}_{0\leq t\leq T}$ *y* $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ *son dos procesos adaptados a* F_t.
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$.
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$.

Y además, la descomposición es única, esto es, si

$$X_t = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s$$

entonces,

$$\begin{aligned} X_0 &= X_0^{'}. \\ H_s &= H_s^{'}. \\ K_s &= K_s^{'}. \end{aligned}$$

Proposición

Sea $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ *un proceso de Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

y sea f *una función de clase* C^2*, entonces*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s) d\left\langle X, X\right\rangle_s$$

donde, por definición

$$\left\langle X, X\right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

y

$$\int_0^t f^{'}(X_s) dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s) K_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s) H_s dW_s.$$

Equivalentemente, si

$$f : (R, R) \to R.$$

Se tiene que $(t, x) \to f(t, x)$ *es una función de clase* $C^{1,2}$*, es decir, es una función dos veces diferenciable en* x*, una vez diferenciable en* t *y donde estas derivadas son continuas en* (t, x)*, se tiene,*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, X_s)ds + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s)dX_s +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s, X_s)d\left\langle X, X\right\rangle_s.$$

Para la demostración de este teorema consultar [6].

2.5.3. Ejemplos de la utilización de la fórmula de Itô

Sea $f(x) = x^2$ y $X_t = W_t$ $\forall t \geq 0$, donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano estándar.

Entonces

$$\begin{aligned} X_t &= W_t. \\ &= \int_0^t 1 dW_s. \end{aligned}$$

por lo tanto X_t es un proceso de Itô con $K_t = 0$ y $H_t = 1$ $\forall t \geq 0$. (Claramente se cumplen las condiciones de la definición).

Y f es una función de clase C^2, entonces de acuerdo a la fórmula de Itô

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f^{'}(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(W_s)d\left\langle W, W\right\rangle_s$$

donde, por definición

$$\left\langle W, W\right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

y

$$\int_0^t f^{'}(W_s)dW_s = \int_0^t f^{'}(W_s)K_s ds + \int_0^t f^{'}(W_s)H_s dW_s,$$

donde $f^{'}(x) = 2x$ y $f^{''}(x) = 2$, entonces:

$$W_t^2 = W_0^2 + \left(\int_0^t 2W_s(0)ds + \int_0^t 2W_s(1)dW_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t 2(1)ds.$$

$$\begin{aligned} &= W_0^2 + \int_0^t 2W_s dW_s + t. \\ &= 0 + \int_0^t 2W_s dW_s + t. \end{aligned}$$

Entonces,

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s.$$

Se considera ahora el siguiente ejemplo si $f(x) = ln(x)$ y

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s,$$

$\forall t \in [0, T]$ esta última expresión se puede escribir como

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dW_s).$$

Se aplicará la fórmula de Itô, aunque f no es una función de clase C^2 en $\Re$ ya que $\frac{1}{x}$ y $-\frac{1}{x^2}$ no son continuas en 0. Este detalle no será tomado en cuenta, ya que la fórmula funciona aún en este caso, sólo que en lugar de considerar $\Re$ se considerará en $\Re^+$, por lo tanto, se supondrá que $S_t > 0$

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{1}{x}. \\ f^{''}(x) &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} ln(S_t) &= ln(x_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}\mu S_s ds + \int_0^t \frac{1}{S_s}\sigma S_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}(\sigma S_s)^2 ds. \\ &= ln(x_0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds. \end{aligned}$$

Entonces $\forall t \in [0, T]$

$$S_t = x_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

es una solución de

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s.$$

Con la teoría anteriormente expuesta se desarrolla el siguiente modelo en el comportamiento del precio del subyacente y de la valuación de los productos derivados.

2.5.4. Modelo del precio de los productos derivados

El precio de un producto derivado $S(x,t)$ depende del precio del subyacente x y del tiempo t, se define $\Delta S_k(x_{t_m},t_m) = S(x_{t_{k+1}},t_{k+1}) - S(x_{t_k},t_k)$ el cambio en el precio del producto derivado en $[t_k,t_{k+1}]$ dentro de la misma partición de $[0,T]$ que se ha tomado en las secciones anteriores. *Sea $S(x,t)$ una función diferenciable, con segunda derivada continua en x y primer derivada continua en t. Sea $\{x_t : 0 \leq t \leq T\}$ un proceso generalizado de Wiener, con incremento en $[t_k,t_{k+1}]$ dado por $\Delta x_k = a_k\Delta t + b_k\varepsilon_k\sqrt{\Delta t}$, a_k y b_k constantes, donde $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Dadas estas condiciones, se puede modelar el incremento de $\{S(x_t,t) : 0 \leq t \leq T\}$ en el intervalo $[t_k,t_{k+1}]$ de la siguiente manera:*

$$\Delta S_k(x_{t_m},t_m) = (\frac{\partial S}{\partial x}(x_{t_m},t_m)a_k + \frac{\partial S}{\partial t}(x_{t_m},t_m) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_{t_m},t_m)b_k^2)\Delta t$$

$$+(\frac{\partial S}{\partial x}(x_{t_m},t_m)b_k)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t},$$

donde $t_m \in [t_k,t_{k+1}]$ y x_{t_m} es el precio de la acción al tiempo t_m.

Capítulo 3

Parámetros del modelo

En el presente capítulo se realiza una simulación de Monte Carlo para los rendimientos de las acciones, se generan números aleatorios, los cuales son importantes para dicho proceso, los datos simulados se comparan con los datos reales.

La serie histórica de precios de una acción involucra dos parámetros, μ y σ. El parámetro μ es la tasa de rendimiento que va ganando un inversionista por año. Muchos inversionistas requieren tasas de rendimiento altas para inducir a tomar altos riesgos. Esto depende de las tasas de interés en la economía. El parámetro σ es la volatilidad de los precios de una acción, es un valor importante para la determinación del valor de muchos derivados. Los procedimientos para la estimación de σ será analizado en este capítulo, generalmente los valores de σ para una acción están en el rango del 20 al 40 %.

3.1. Simulación de Monte Carlo

Una simulación de Monte Carlo, es un procedimiento que permite predecir el comportamiento de un proceso estocástico, se realizará una simulación para el rendimiento de las acciones. Sean P_t, R_t el precio y el rendimiento de una acción al tiempo t respectivamente, los rendimientos se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{3.1}$$

Los precios del IPC del 04/01/2006 al 18/01/2006 que fueron tomados de [19] donde $P_0 = 13237$ es el precio del IPC el 03/01/2006, por lo que la ecuación (3.1) se aplica iterativamente a los precios siguientes, los rendimientos son mostrados en la siguiente tabla:

Tiempo	**Fecha**	**Precio IPC**	**Rendimientos**
1	04/01/2006	13014	-0.016990
2	05/01/2006	12839	-0.013538
3	06/01/2006	12914	0.005825
4	07/01/2006	12699	-0.016789
5	10/01/2006	12667	-0.002523
6	11/01/2006	12453	-0.017039
7	12/01/2006	12529	0.006084
8	13/01/2006	12652	0.009769
9	14/01/2006	12886	0.018326
10	17/01/2006	12964	0.006035
11	18/01/2006	13190	0.017283

La simulación de Monte Carlo, se realiza aplicando la ecuación (2.3), para un valor k particular dentro del periodo de tiempo $[0, T]$, se definen las igualdades siguientes $\Delta x_k = \Delta R_t$, $\mu s = \mu R_{t-1}$, $\sigma s = \sigma R_{t-1}$.

$$\Delta R_t = \mu R_{t-1}\Delta t + \sigma R_{t-1}\varepsilon_k\sqrt{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Donde μ es la media, σ es la volatilidad de la serie histórica de precios de una acción y R_t es el rendimiento en un tiempo t en el periodo particular $[t_k, t_{k+1}]$.

Utilizando el programa de eviews generamos una lista de números aleatorios con distribución Normal (0,1), es decir, de media cero y desviación estándar 1, aplicando la fórmula (3.2) que en este caso el valor de $\mu = -0{\cdot}000501$ y $\sigma = 0{\cdot}009665$, se obtienen los valores simulados de los rendimientos en la siguiente tabla, donde el primer rendimiento real, del 04/01/2006 es -0.016990, el primer incremento simulado es -0.00000868, de esta forma continuamos con nuestra simulación hasta obtener el último valor con fecha 18/01/2006.

Tiempo	**Número aleatorio**	**Incremento pronóstico**	**Rendimiento Simulado**
04/01/2006	0.03		-0.016990
05/01/2006	0.72	-0.00000868	-0.016999
06/01/2006	0.54	-0.00000802	-0.017007
07/01/2006	0.86	-0.00001467	-0.017022
10/01/2006	0.68	-0.00001299	-0.017035
11/01/2006	0.60	-0.00001247	-0.017047
12/01/2006	0.03	-0.00000053	-0.017048
13/01/2006	0.84	-0.00002019	-0.017068
14/01/2006	0.29	-0.00000732	-0.017075
17/01/2006	0.19	-0.00000501	-0.017080
18/01/2006	0.41	-0.00001141	-0.017092

De esta tabla se analizan los rendimientos simulados del IPC y se comparan con los datos reales, siendo el dato del 11/01/2006 el más próximo al rendimiento real de esa fecha.

3.2. El logaritmo del precio de las acciones

El logaritmo de la serie histórica de precios de una acción a lo largo del periodo de tiempo $[0, T]$ dado por $\{\ln s_t : 0 \leq t \leq T\}$, es un proceso estocástico de variable y tiempo continuo. La diferencia de los logaritmos del precio final y el precio inicial dado por $\Delta s_T = \ln S_T - \ln S_0$ en $[0, T]$, se puede modelar mediante la siguiente distribución:

$$\mu + \sigma\varepsilon\sqrt{T}. \tag{3.3}$$

$$\varepsilon \sim N(0, 1).$$

Donde μ, σ son respectivamente la media y la varianza de la serie histórica de precios de una determinada acción.

Aplicando esperanza y varianza a (3.3) resulta una distribución normal con media μ y varianza $\sigma^2 T$.

3.2.1. Propiedad lognormal del precio de las acciones

Una variable tiene distribución lognormal si el logaritmo natural de la variable está distribuido normalmente. De la ecuación (3.3) la diferencia de los logaritmos del precio final y el precio inicial está distribuido normalmente así que:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim N(\mu, \sigma^2 T).$$

Aplicando una de las propiedades de la distribución normal se tiene:

$$\ln S_T \sim N(\ln S_0 + \mu, \sigma^2 T). \tag{3.4}$$

Esta ecuación muestra que $\ln S_T$ está distribuido normalmente, por lo que S_T tiene una distribución lognormal. Ello implica que el precio de la acción al tiempo T, dado el precio inicial, está distribuido lognormal.

Ejemplo

Se considera una acción con un precio inicial de \$40, una tasa de rendimiento esperada del 16 % y una volatilidad del 20 % por año. De la ecuación (3.4) la distribución de probabilidad del logaritmo del precio de la acción al tiempo T, $\ln S_T$, en el tiempo de seis meses está dado por:

$$\ln S_T \sim N(3{\cdot}848, 0{\cdot}02).$$

El valor en tablas para el intervalo de confianza del 95 % para esta distribución es de 1.96. Por lo tanto, con 95 % de confianza se tiene:

$$32{\cdot}55 < S_T < 56{\cdot}56.$$

Entonces hay un 95 % de probabilidad de que el precio de la acción en seis meses se encontrará entre 32.55 y 56.56.

Existen diferentes especificaciones para el valor esperado de S_T, una fórmula de [17], está dada por:

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T}.$$

Y la varianza de S_T

$$Var[S_T] = S_0^2 e^{2\mu T}[e^{\sigma^2 T} - 1].$$

Ejemplo

Se considera una acción donde el precio actual es de \$20, la tasa de rendimiento esperada es de 20 % y la volatilidad del 40 % por año. El precio de la acción esperada en un año es

$$E[S_T] = 20e^{0{\cdot}2} = \$24{\cdot}43.$$

La varianza del precio de la acción en un año es

$$Var[S_T] = \$103{\cdot}54.$$

3.3. Volatilidad

Los modelos GARCH, son utilizados para encontrar la volatilidad de la serie histórica de precios de una acción, los cuales son procesos autorregresivos generalizados con heterocedasticidad condicional, es decir, modelos que suponen que la varianza cambia a través del tiempo, existen diferentes especificaciones. A continuación se describe con detalle el modelo conocido como GARCH (1,1) de acuerdo a [17].

Modelo GARCH (1,1)

Este modelo estima la varianza condicional (volatilidad), en función del cuadrado de los errores rezagados un periodo y de la varianza condicional del periodo anterior (término autorregresivo). El modelo se define como sigue:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \tag{3.5}$$

Donde $\varepsilon_t = R_t - \mu$ y R_t son los rendimientos anteriormente especificados. Para que el modelo sea estacionario, es decir, que converja a la media de la serie histórica, se requiere que los parámetros cumplan con las siguientes restricciones:

$$\alpha > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \alpha_1 + \beta_1 \leq 1.$$

Donde a la suma $\alpha_1 + \beta_1$ se le conoce como *coeficiente de la volatilidad*. Mientras mayor es la suma, mayor es la volatilidad. El coeficiente α contiene la información de la volatilidad de largo plazo. Si se supone que en el largo plazo:

$$\sigma^2 = \sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 = (R_{t-1} - \mu)^2,$$

la ecuación (3.5) equivale a:

$$\sigma^2 = \left[\frac{\alpha}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \right].$$

La estimación en Excel utilizando el modelo GARCH, se inicia con t=1, los rendimientos han sido calculados anteriormente, para la varianza, nuestra fórmula es la siguiente $\sigma_t^2 = \alpha + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ iniciando con $\sigma_1^2 = \varepsilon_1^2 = (R_1 - \mu)^2$ el primer rendimiento menos la media al cuadrado. Los datos los podemos observar en la siguiente tabla donde la volatilidad para el 18/01/2005 es de 0.000105. La estimación de los parámetros en eviews es la siguiente:

Variable Dependiente: IPC, Método: ML - GARCH, Observaciones: 11, Parámetros: $\alpha = 0.0000181$. $\alpha_1 = 0.094421$. $\beta_1 = 0.691219$. En esta tabla se analizan los diferentes valores para σ_t^2 de la serie histórica de los rendimientos del IPC.

Tiempo	**Rendimiento**	$R_t - \mu$	σ_t^2
04/01/2005	-0.016990	-0.017491	0.000306
05/01/2005	-0.013538	-0.014039	0.000258
06/01/2005	0.005825	0.005324	0.000215
07/01/2005	-0.016789	-0.017290	0.000170
10/01/2005	-0.002523	-0.003024	0.000164
11/01/2005	-0.017039	-0.017540	0.000132
12/01/2005	0.006084	0.005583	0.000138
13/01/2005	0.009769	0.009268	0.000117
14/01/2005	0.018326	0.017825	0.000107
17/01/2005	0.006035	0.005534	0.000122
18/01/2005	0.017283	0.016782	0.000105

Capítulo 4

Ecuación Black-Scholes

La ecuación diferencial Black-Scholes es importante en la teoría de la valuación de opciones, en este capítulo se utiliza el modelo del incremento en el precio de los productos derivados, que con una elección de un portafolio apropiado permite eliminar el elemento estocástico, con ello se tiene una mayor certeza en las operaciones financieras, además se deducen las fórmulas para obtener el precio de las opciones europeas al tiempo inicial en un contrato financiero, de activos subyacentes que no pagan dividendos, finalmente se analizan distintos parámetros de riesgo usados en la comercialización de los productos financieros, estos temas fueron consultados de [9].

4.1. Ecuación diferencial Black-Scholes

Para el modelo Black-Scholes, el movimiento browniano es el modelo básico asociado al comportamiento del precio de las acciones. En esta sección vamos a deducir la ecuación diferencial en derivadas parciales que desde su descubrimiento en 1973 ha sido denominada la ecuación diferencial Black-Scholes.

Utilizando la misma partición de $[0, T]$, sea s el precio de la acción al tiempo t_m donde $t_m \in [t_k, t_{k+1}]$ con algún valor particular de k.

El incremento en el precio de la acción Δx_k, en $[t_k, t_{k+1}]$ de acuerdo a (2.3) es:

$$\Delta x_k = \mu s \Delta t + \sigma s \varepsilon_k \sqrt{\Delta t}.$$

El precio de un derivado financiero que se denota por $S(x, t)$ y utilizando el modelo del incremento del precio de los productos derivados, con $a_k = \mu s$, $b_k = \sigma s$, se utilizan estas constantes, ya que permiten establecer la tendencia y la volatilidad de la serie histórica de precios de una acción, el incremento en el precio del derivado en $[t_k, t_{k+1}]$ es:

$$\Delta S_k(s,t_m) = (\frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m)\mu s + \frac{\partial S}{\partial t}(s,t_m) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s,t_m)\sigma^2 s^2)\Delta t$$

$$+(\frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m)\sigma s)\varepsilon_k\sqrt{\Delta t}.$$

En donde Δx_k y ΔS_k son los cambios en el precio de la acción y del derivado respectivamente, en un incremento del tiempo igual a Δt.

Un portafolio de inversión es una combinación de activos financieros poseídos por una misma persona física o moral. Es diversificado cuando en el conjunto de activos se combinan acciones, derivados, modalidades de pago y riesgos diferentes.

El elemento estocástico ε_k en las ecuaciones anteriores es el mismo, por lo que tenemos que elegir un portafolio de activos subyacentes y derivados, de tal forma que sea eliminado, se propone que tiene que estar compuesto de:

$$\begin{aligned} +\frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m) &: \text{ activos subyacentes.} \\ -1 &: \text{ derivado.} \end{aligned}$$

La posición del portafolio es suscribir un derivado y comprar un monto de $+\frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m)$:activos subyacentes. Se define Π como el precio inicial del portafolio:

$$\Pi = -S(s,t_m) + \frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m)s. \tag{4.1}$$

El cambio $\Delta\Pi$ en el precio del portafolio en Δt es:

$$\Delta\Pi = -\Delta S_k(s,t_m) + \frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m)\Delta x_k. \tag{4.2}$$

Sustituyendo ΔS_k, Δx_k en (4.2) se obtiene:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial S}{\partial t}(s,t_m) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s,t_m)\sigma^2 s^2\right)\Delta t. \tag{4.3}$$

Esta ecuación no involucra ε_k, el portalio tiene menos riesgo durante el incremento de tiempo Δt, debe de tener la misma tasa que otros instrumentos libres de riesgo, además no existe la posibilidad de arbitraje en el mercado, por lo que:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t.$$

donde r es la tasa libre de riesgo. Sustituyendo (4.1), (4.3) en la ecuación anterior se tiene:

$$\left(-\frac{\partial S}{\partial t}(s,t_m) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s,t_m)\sigma^2 s^2\right)\Delta t = r(-S(s,t_m) + \frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m)s)\Delta t.$$

realizando las operaciones:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(s,t_m) + rs\frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s,t_m) = rS(s,t_m). \tag{4.4}$$

Donde s es el precio de la acción en el tiempo t_m, de esta manera se tiene la ecuación diferencial Black-Scholes.

Ejemplo

Un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos, es un derivado que depende de la acción y del tiempo, tal que debe satisfacer la ecuación (4.4). El precio del contrato forward $S(x,t)$, está dado en términos del precio de la acción x, en el tiempo $t \in [0,T]$ por:

$$S(x,t) = x - Ke^{-r(T-t)},$$

en donde K es el precio de ejercicio. Se aplican derivadas parciales a la función $S(x,t)$ en el punto (s,t_m):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial x}(s,t_m) &= 1. \\
\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s,t_m) &= 0. \\
\frac{\partial S}{\partial t}(s,t_m) &= -rKe^{-r(T-t_m)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados de acuerdo a la ecuación (4.4) obtenemos:

$$-rKe^{-r(T-t_m)} + rs = rS(s,t_m).$$

Lo cual implica:

$$S(s,t_m) = s - Ke^{-r(T-t_m)}.$$

Donde s es el precio de la acción en el tiempo t_m. Por lo que este derivado satisface las condiciones de la ecuación diferencial de Black-Scholes.

4.2. Los precios de los derivados

Cualquier función $S(x,t)$ que es solución de la ecuación diferencial (4.4), es el precio teórico de un derivado que es negociado. Un derivado con esta propiedad, no debe crear oportunidad de arbitraje. A la inversa, si una función no satisface la ecuación diferencial (4.4), no puede ser el precio de un derivado sin crear oportunidades de arbitraje para los negociadores. Para ilustrar este punto, consideremos primero la función exponencial. Esta no satisface la ecuación diferencial (4.4). Por lo tanto no es función de un derivado. Como otro ejemplo, consideremos la siguiente función, donde e es la constante exponencial:

$$\frac{e^{(\sigma^2-2r)(T-t)}}{x}.$$

esta ecuación satisface la ecuación diferencial (4.4) es, en teoría, el precio de una negociación segura. Es el precio de un derivado que paga $\frac{1}{S_T}$ al tiempo T.

Una propiedad de la ecuación diferencial Black-Scholes es que la ecuación no involucra ninguna variable que es afectada por las preferencias de riesgo de los inversionistas. Las variables que aparecen en la ecuación, son:

a. El precio de la acción.

b. El tiempo.

c. La tasa de interés libre de riesgo.

Estas variables son independientes de las preferencias de riesgo del inversionista. La ecuación diferencial Black-Scholes no sería independiente a ello si involucrara la tasa de rendimiento esperada de la acción, μ. Esto es, porque el valor de μ hace elegir a los inversionistas, por ejemplo, la tasa más alta en el mercado, de esta manera, si se tienen diferentes valores esperados para los rendimientos de las acciones, se haría una elección en la opciones, entre los diferentes negociadores del mercado financiero.

4.2.1. Aplicación de un contrato forward sobre una acción

Se considera un contrato forward, las tasas de interés son constantes e iguales a r, el tiempo de vencimiento T, con precio de ejercicio K. El precio del contrato al tiempo de vencimiento es $S_T - K$. Donde S_T es el precio de la acción al tiempo T, sea s el precio de la acción en un momento dado t_m. El precio del contrato forward al tiempo $t_m < T$ es el valor esperado del contrato al tiempo T, evaluado en t_m, con la tasa de interés libre de riesgo. Se denota el valor del contrato forward al tiempo t_m por $S(s, t_m)$:

$$S(s, t_m) = e^{-r(T-t_m)} E[S_T - K].$$

K es una constante, la ecuación anterior resulta:

$$S(s, t_m) = e^{-r(T-t_m)} E[S_T] - K e^{-r(T-t_m)}.$$

El valor esperado del precio de la acción s al vencimiento T, sin oportunidad de arbitraje en el mercado financiero es:

$$E[S_T] = s e^{r(T-t_m)}.$$

Aplicando este resultado tenemos:

$$S(s, t_m) = s - K e^{-r(T-t_m)}.$$

Esta ecuación satisface la ecuación diferencial Black-Scholes.

En la siguiente sección se deducirá el precio de las opciones europeas.

4.3. Resultado clave

El valor esperado de una opción call europea al tiempo de vencimiento T es:

$$E[\max(S_T - K, 0)].$$

Con los supuestos siguientes:

1. No paga dividendos.
2. Tiempo de maduración T.
3. Precio de ejercicio K.
4. Tasa libre de riesgo r.
5. Precio actual de la acción S_0.
6. Precio de la acción en la fecha de vencimiento S_T.
7. Volatilidad σ.

El siguiente resultado es fundamental para deducir las fórmulas de las opciones europeas, de acuerdo al capítulo tercero S_T está distribuido lognormal, con desviación estandar de $\ln S_T$ igual a $\sigma\sqrt{T}$.

Proposición

Si S_T está distribuido lognormal con desviación estandar del $\ln S_T$ igual a $\sigma\sqrt{T}$, con K una constante, entonces:

$$E[\text{máx}(S_T - K, 0)] = E(S_T)N(d_1) - KN(d_2).$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln[E(S_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(S_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Demostración. Se define $g(v)$ como la función de densidad de probabilidad de S_T. Lo cual implica:

$$E[\text{máx}\,(S_T - K, 0)] = \int_K^{\infty} (S_T - K)g(v)dv. \tag{4.5}$$

La variable $\ln S_T$ está distribuida normal con desviación estandar $\sigma\sqrt{T}$. De las propiedades de la distribución lognormal la media de $\ln S_T$ es m donde:

$$m = \ln[E(S_T)] - \sigma^2 T/2.$$

Definimos una nueva variable:

$$Q = \frac{\ln S_T - m}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{4.6}$$

Esta variable está distribuida normal con media cero y desviación estandar de 1. Denotamos la función de densidad para Q por $h(Q)$ así que:

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}.$$

De la ecuación (4.6) para convertir la expresión del lado derecho de la ecuación (4.5) de una integral sobre v a una integral sobre Q obtenemos:

$$E[\text{máx}\,(S_T - K, 0)] = \int_{(\ln K - m)/\sigma\sqrt{T}}^{\infty} (e^{Q\sigma\sqrt{T} + m} - K)h(Q)dQ.$$

o

$$\begin{aligned} E[\text{máx}\,(S_T - K, 0)] = &\int_{(\ln K - m)/\sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{Q\sigma\sqrt{T} + m} h(Q)dQ \\ &-K \int_{(\ln K - m)/\sigma\sqrt{T}}^{\infty} h(Q)dQ. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ahora

$$\begin{aligned} e^{Q\sigma\sqrt{T}+m}h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-Q^2+2Q\sigma\sqrt{T}+2m)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{[-(Q-\sigma\sqrt{T})^2+2m+\sigma^2T]/2} \\ &= \frac{e^{m+\sigma^2T/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{[-(Q-\sigma\sqrt{T})^2]/2} \\ &= e^{m+\sigma^2T/2}h(Q-\sigma\sqrt{T}). \end{aligned}$$

Lo cual implica

$$E[\text{máx}\,(S_T-K,0)] = e^{m+\sigma^2T/2}\int_{(\ln K-m)/\sigma\sqrt{T}}^{\infty} h(Q-\sigma\sqrt{T})dQ$$

$$-K\int_{(\ln K-m)/\sigma\sqrt{T}}^{\infty} h(Q)dQ. \tag{4.8}$$

Se define $N(x)$ la probabilidad de que una variable con media de cero y desviación estandar de 1, es menor que x. El primer integrando de (4.8) es

$$1-N[\frac{\ln K-m}{\sigma\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}]$$

o

$$N[\frac{m-\ln K}{\sigma\sqrt{T}}+\sigma\sqrt{T}].$$

Sustituyendo m en la ecuación anterior da

$$N\left[\frac{\ln[E(S_T)/K]+\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right]=N(d_1).$$

Similarmente el segundo integrando en la ecuación (4.8) es $N(d_2)$. La ecuación (4.8) resulta:

$$E[\text{máx}\,(S_T-K,0)] = e^{m+\sigma^2T/2}N(d_1)-KN(d_2).$$

Ya que

$$m=\ln[E(S_T)]-\sigma^2T/2.$$

Despejando $E(S_T)$:

$$E(S_T)=e^{m+\sigma^2T/2}.$$

Tenemos

$$E[\text{máx}\,(S_T - K, 0)] = E(S_T)N(d_1) - KN(d_2).$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln[E(S_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(S_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Q.E.D.

4.4. Las fórmulas para las opciones europeas call y put

El precio de la opción call europea Ce, es su valor esperado evaluado en el tiempo presente, con la tasa de interés libre de riesgo, es decir:

$$Ce = e^{-rT} E[\text{máx}\,(S_T - K, 0)]. \tag{4.9}$$

Aplicando el resultado clave a la ecuación (4.9) se tiene:

$$Ce = e^{-rT}[E(S_T)N(d_1) - KN(d_2)].$$

Uno de los supuestos fuertes del modelo Black-Scholes es que no existe la oportunidad de *arbritraje* por lo que el valor esperado de S_T es $E(S_T) = S_0 e^{rT}$. Con los supuestos mencionados anteriormente, se tiene la fórmula para el precio de una opción call tipo europea, al tiempo inicial $t = 0$:

$$Ce = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2). \tag{4.10}$$

Donde d_1 y d_2 son iguales a:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

De acuerdo a la paridad Put-Call vista en el capítulo 1:

$$Ce + Ke^{-rT} = Pe + S_0.$$

El valor del Pe resulta:

$$Pe = Ke^{-rT} - S_0 + S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2).$$

Simplificando esta expresión se puede escribir como:

$$Pe = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \tag{4.11}$$

Esta es la fórmula para determinar el precio de la opción put europea.

4.5. Propiedades de las fórmulas de las opciones europeas

Las fórmulas Black-Scholes para el precio de las opciones call y put tipo europeas, con una acción que no paga dividendos, al tiempo presente son:

$$Ce = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2). \tag{4.12}$$

Y

$$Pe = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \tag{4.13}$$

Donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Para ver que las ecuaciones (4.12) y (4.13) tienen propiedades consistentes bajo las condiciones mencionadas, veamos que sucede para d_1 y d_2 cuando $T \to 0$. Si S_0 es mayor que K, ambas tienden a $+\infty$ así que $N(d_1)$=$N(d_2)$=1 y $N(-d_1) = N(-d_2) = 0$. Esto significa que las ecuaciones (4.12) y (4.13) dan como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned} Ce &= S_0 - K. \\ Pe &= 0. \end{aligned}$$

Si S_0 es menor que K, ambas d_1 y d_2 tienden a $-\infty$ cuando $T \to 0$ así que $N(d_1) = N(d_2) = 0$ y $N(-d_1) = N(-d_2) = 1$. Esto significa que las ecuaciones (4.12) y (4.13) dan como resultado:

$$\begin{aligned} Pe &= K - S_0. \\ Ce &= 0. \end{aligned}$$

Cuando σ tiende a cero, d_1 y d_2 tienden a $+\infty$ así que $N(d_1)$, $N(d_2)$ tienden a uno y la ecuación (4.12) da como resultado:

$$Ce = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Las ecuaciones de las opciones europeas satisfacen la ecuación diferencial Black-Scholes. El precio de un call europeo es función de x, es decir, del precio de la acción y del tiempo t, en este caso se evalúa en el tiempo inicial, es decir $t = 0$. Se denota la fórmula del call europeo como $S(x,t)$ tal que depende de x,t de la siguiente manera:

$$S(x,t) = Ce = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Se aplican las derivadas parciales de (4.4) a esta función $S(x,t)$ en el punto (x_{t_m}, t_m):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t}(x_{t_m}, t_m) &= -rKe^{-r(T-t_m)}N(d_2)\\
\frac{\partial S}{\partial x}(x_{t_m}, t_m) &= N(d_1)\\
\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_{t_m}, t_m) &= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados de acuerdo a la ecuación (4.4) obtenemos:

$$-rKe^{-r(T-t_m)}N(d_2) + rsN(d_1) = rS(x_{t_m}, t_m).$$

Lo cual implica:

$$S(x_{t_m}, t_m) = sN(d_1) - Ke^{-r(T-t_m)}N(d_2).$$

Con s el precio de la acción en el tiempo t_m y dado que se está evaluando en el tiempo inicial, es decir $t_m = 0$, se tiene que $s = S_0$ el precio inicial de la acción, por lo que:

$$Ce = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2).$$

De esta manera, la fórmula de un call europeo satisface la ecuación diferencial Black-Scholes. Ahora se analiza el put europeo, que es función de x el precio de la acción y del tiempo t, evaluado en el tiempo inicial $t = 0$. Escrito en forma análoga al de un call europeo se tiene:

$$S(x,t) = Pe = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - xN(-d_1).$$

Se aplican derivadas parciales a la función $S(x,t)$ en el punto (x_{t_m}, t_m):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t}(x_{t_m}, t_m) &= rKe^{-r(T-t_m)}N(-d_2) \\
\frac{\partial S}{\partial x}(x_{t_m}, t_m) &= -N(-d_1) \\
\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_{t_m}, t_m) &= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados de acuerdo a la ecuación (4.4) obtenemos:

$$rKN(-d_2)e^{-r(T-t_m)} - rsN(-d_1) = rS(x_{t_m}, t_m).$$

Lo cual implica:

$$S(x_{t_m}, t_m) = Ke^{-r(T-t_m)}N(-d_2) - sN(-d_1).$$

Con s el precio de la acción en el tiempo t_m y dado que se está evaluando en el tiempo inicial, es decir $t_m = 0$, implica $s = S_0$ el precio de la acción en el tiempo inicial, por lo que:

$$Pe = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1).$$

De esta manera, el valor de un put europeo satisface la ecuación diferencial Black-Scholes. Se considera el siguiente ejemplo.

4.5.1. Ejemplo

Se considera la situación donde el precio actual de la acción es de \$42, con seis meses de expiración, el precio de ejercicio de la opción es de \$40, la tasa de interés libre de riesgo es de 10 % por año y la volatilidad de 20 % por año. Esto significa que:

1. $S_0 = 42$.
2. $K = 40$.
3. $r = 0{\cdot}1$.
4. $\sigma = 0{\cdot}2$.
5. $T = 0{\cdot}5$.

Aplicando las ecuaciones

$$Ce = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2).$$

Y

$$Pe = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1).$$

Donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Tenemos que el valor del call es: $Ce = 4{\cdot}7594$ y el valor del $Pe = 0{\cdot}8086$. Para la siguiente sección se consultó [14].

4.6. Parámetros de riesgo

Para analizar como es afectado el precio de la opción por movimientos pequeños en las variables (bien subyacente, volatilidad, tiempo y la tasa de interés), se definen ciertos parámetros que miden la sensibilidad del precio de la opción a cambios en las variables. Son muy útiles en el cubrimiento de posiciones en opciones, cada parámetro recibe un nombre especial, es preciso recordar que el precio que se obtuvo, se deriva de un portafolio libre de riesgo *sólo durante un tiempo*, por lo que se podría pensar inútil el saber estos parámetros, pues el precio es indiferente a movimientos en esas variables, pero esto no es así, el precio es afectado por cambios en el mercado. De ahí que es necesario contar con herramientas para medir estas sensibilidades, prever riesgos y saber cubrirlos.

4.6.1. Delta

Se conoce como delta δ, a la derivada de la función de precios de la opción respecto al subyacente. Para el call europeo, delta es entonces:

$$\delta = \frac{\partial}{\partial x} Ce = N(d_1).$$

Este valor mide la sensibilidad del precio de la opción con respecto a cambios en el precio del bien subyacente, en este caso de la acción, es la cantidad necesaria de acciones que se deben poseer para cubrir la posición en la opción.

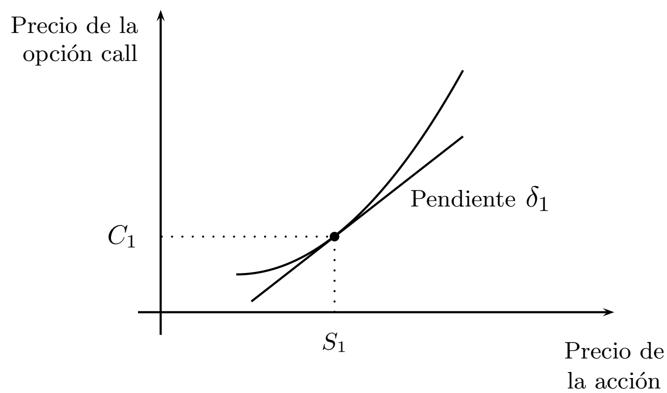
Un portafolio constituido por:

1. -1 opción (estar corto en la opción).

2. $+\delta$ acciones (estar largo en la acción).

Es un portafolio libre de riesgo por un instante, es decir, es indiferente a cambios en el subyacente pues las pérdidas (ganancias) en la posición de la opción, se cancelan con las ganancias (pérdidas) en la posición de la acción.

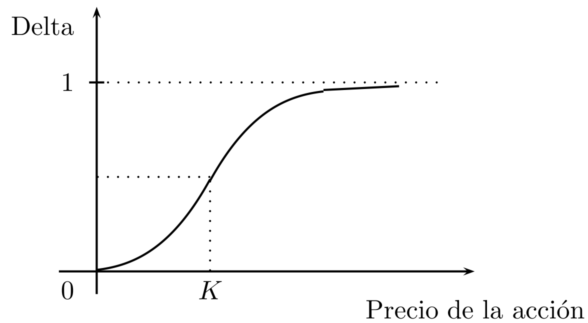
En la gráfica siguiente se observa el precio de un call en función del precio de la acción, su pendiente es siempre creciente y positiva, la delta es la pendiente de la recta tangente.



Por ejemplo, al precio S_1 le corresponde un precio C_1 que es el correcto para evitar oportunidades de arbitraje y que se deriva de un portafolio cubierto con una delta de δ_1.

Si el precio de la acción cambia, el precio de la opción también, por lo tanto, la delta de la opción. Como el tiempo transcurre la delta cambia, es decir, se ve la necesidad de cambiar la cobertura en el portafolio para que siga libre de riesgo. Es el principio de cobertura dinámica, de ahí la importancia de este parámetro. Delta es la función de distribución de una normal estándar valuada en d_1, la cual es intuitivamente la probabilidad de ejercicio de la opción.

Por ejemplo, en un call, si está dentro de dinero, S es grande respecto al precio de ejercicio K y por lo tanto d_1 es grande. En este caso la normal valuada en d_1 es cercana a 1, la opción se ejercerá seguramente. Al contrario, si el call está fuera de dinero d_1 se vuelve negativo (pues el logaritmo de un número menor que 1 es negativo) y la distribución valuada así será cercana a cero, la opción no se ejercerá. Si la opción está en dinero delta está cerca a 0.5, es decir, hay una incertidumbre total si se ejercerá o no. Delta es una función de la distribución normal, no es difícil ver que la gráfica es la siguiente:



Por la característica puntual de delta surge de manera natural otro parámetro, que mida la sensibilidad de delta respecto a los cambios en el subyacente. Es importante saber, una vez que se calcula la delta y se ha cubierto la posición, durante cuanto tiempo estamos cubiertos.

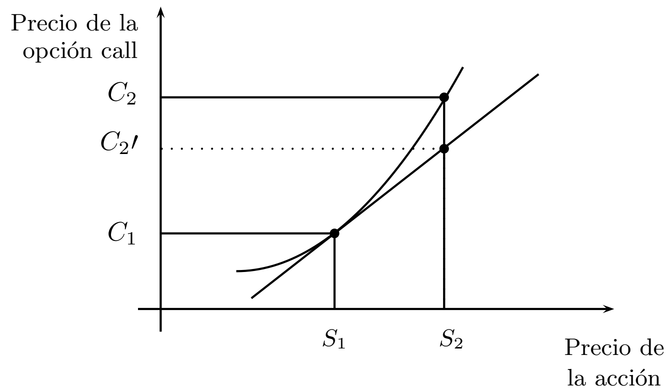
4.6.2. Gama

El parámetro Gama se define como:

$$\Gamma(S) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} e^{\frac{-(S-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Donde $\mu = K$ el precio de ejercicio, σ es la varianza y S es el precio de la acción.

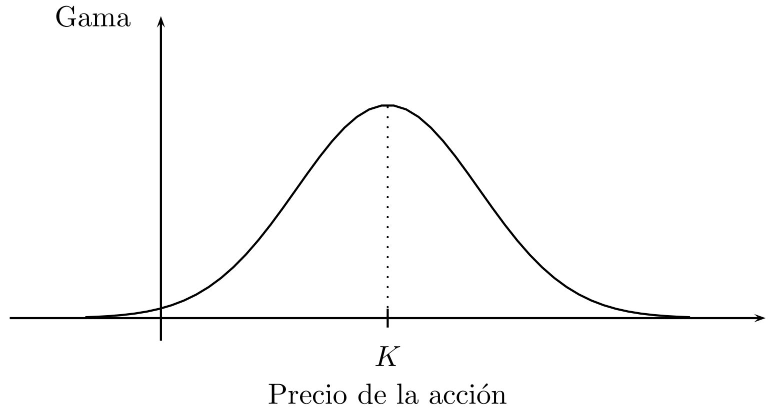
Este parámetro mide la sensibilidad de delta a cambios en el precio del bien subyacente. Si gama es grande se ajustará el delta frecuentemente, mientras si es pequeño casi no habrá necesidad de ajustar la cobertura δ. En la gráfica siguiente, Gama puede verse como la medida de curvatura de la función de precios de la opción.



Para S_1 se tiene un precio C_1 y su correspondiente delta que lo cubre durante ese instante. Si el precio de S se mueve a S_2 se tiene un precio correcto de C_2 y otra delta, pero si no ha cambiado la delta, entonces en S_2 se sigue usando una delta que corresponde a la pendiente de la recta tangente en S_1. Entre $C_2^{\prime}$ y C_2 hay una diferencia que se traduce en un error de cobertura. Este error es más grande mientras mayor sea la curvatura, si la curvatura es muy grande un pequeño cambio en S (cambio que se efectuará en un pequeño intervalo de tiempo) provocará un error muy grande en la cobertura. Por eso también se le conoce como una medida de curvatura. Así, mientras mayor sea la curvatura o la gama, la delta debe ser ajustada más frecuentemente para asegurar la neutralidad del portafolio.

Gama es muy alto cuando la incertidumbre sobre si se ejercerá o no la acción es total, es decir, cuando S esta cerca de K (si la opción esta *at the money*) y será baja cuando la opción este *out of the money* o *in the money*. Esto es, mientras más cerca este S del precio de ejercicio, cualquier movimiento en S cambia las probabilidades de ejercer, (cambia fácilmente de *out of the money a in the money* por lo que el cambio en delta debe ser drástico. Delta es muy sensible a cambios del precio de la acción cuando este se mueve alrededor del precio de ejercicio.

La gráfica de gama puede verse fácilmente que tiene la forma de una función de probabilidad normal casi centrada en K, la delta es muy sensible alrededor de K, es decir, gama alta y casi no cambia cuando S está lejos de K, lo cual se observa en la gráfica siguiente:



4.6.3. Omega

Este parámetro se define como:

$$\Omega = S\sqrt{T-t}.$$

De esta fórmula se deduce que el factor más importante, es el tiempo restante al vencimiento. Omega es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. Por lo que una opción a largo plazo debe tener una omega más alta que otra a corto plazo.

4.6.4. Theta

El parámetro Theta para un call europeo se define como:

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t}Ce = -rK[N(d_2)]e^{-r(T-t)}.$$

Y para un put europeo como:

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t}Pe = rK[N(-d_2)]e^{-r(T-t)}.$$

El parámetro Theta mide la sensibilidad de la opción al paso del tiempo, la opción pierde valor pues los beneficios se van haciendo menos conforme se acerca la fecha de ejercicio.

4.6.5. Rho

Esta se define para un call europeo como:

$$\rho = \frac{\partial}{\partial r}Ce = K[T-t]N(d_2)e^{-r(T-t)}.$$

Y para un put europeo como:

$$\rho = \frac{\partial}{\partial r} Pe = -K[T-t]N(-d_2)e^{-r(T-t)}.$$

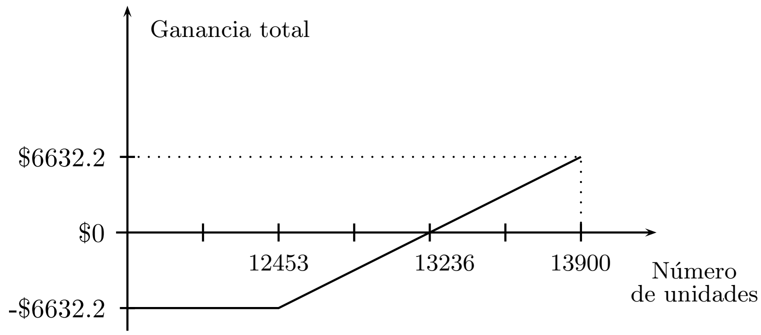
Con este parámetro se puede saber como es afectado el precio de una opción por cambios en la tasa libre de riesgo del mercado.

4.7. Aplicación

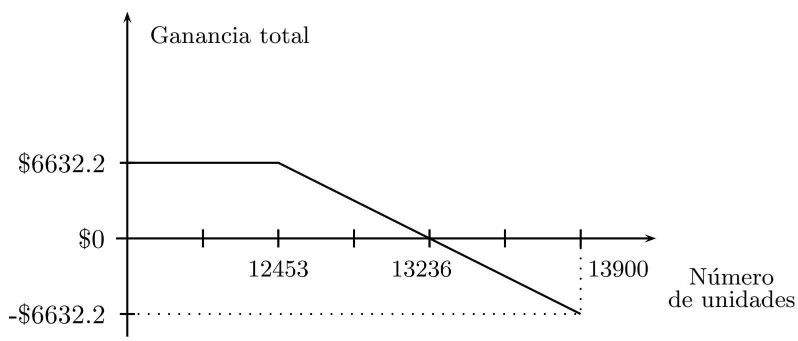
Se tiene un contrato financiero de un call europeo sobre el IPC, el número de unidades actualmente es de 12400, con seis meses de expiración, el precio de ejercicio de la opción es de 12453 unidades, la tasa de interés libre de riesgo es de 10 % por año y la volatilidad del 15 % por año. Esto significa que:

1. $S_0 = 12400$.
2. $K = 12453$.
3. $r = 0{\cdot}10$.
4. $\sigma = 0{\cdot}15$.
5. $T = 0{\cdot}5$.

El contrato financiero para el IPC es de 10 pesos por cada punto, el valor del contrato esta en función del número de puntos que tenga el IPC en esos momentos. Las primas se cotizan en puntos del IPC, por lo tanto, para saber su valor monetario final hay que multiplicar por 10 pesos. De esta forma el precio de este contrato es de \$124000. Se calcula el valor del call europeo utilizando las fórmulas Black-Scholes lo cual resulta $Ce = 836{\cdot}78$, la prima importa \$8367.8. Si el número de puntos es menor a las 12453 unidades no ejercemos la opción perdiendo nuestra inversión de \$8367.8. Por lo contrario, si el número de unidades sube más de 13236, conviene ejercer. Por ejemplo, si sube a 13900 unidades, restamos la inversión inicial de \$8367.8 para pagar la opción, se obtendría una ganancia total de \$6632.2. En la gráfica siguiente se observa como se comporta nuestra ganancia total respecto al número de unidades al final de los seis meses.



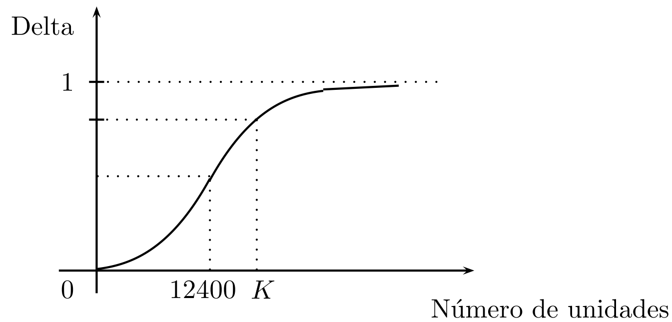
Si el número de unidades es menor de 12453 se pierden los $8367.8, de 12453 a 13236 también se pierde, pues la ganancia en la venta del contrato no compensa el pago de la opción, si el número de unidades es mayor a 13900 se obtiene una ganancia, la cual es mostrada en la gráfica. Para el que vende la opción call europea del IPC, es decir, la contraparte, en este ejemplo, la función de ganancias a un precio de ejercicio de 12453 unidades es la siguiente:



Ahora se analizan los parámetros de riesgo de este portafolio de inversión, empezando por delta:

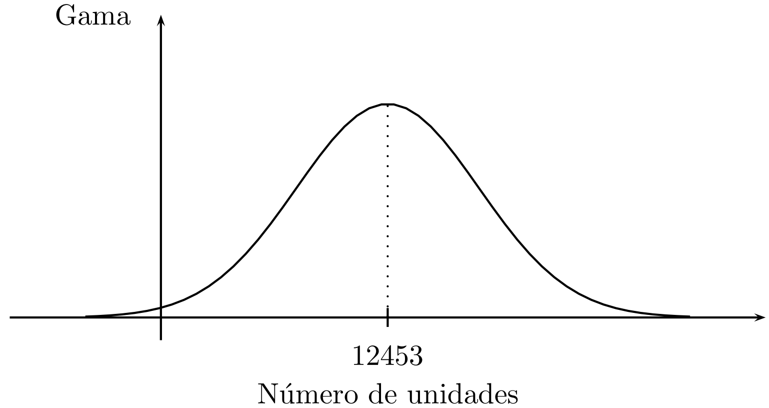
$$\delta = \frac{\partial}{\partial x} Ce = N(d_1) = 0{\cdot}7.$$

Su gráfica es la siguiente:



En este contrato, dado el valor del precio de ejercicio y del número de unidades del IPC en esos momentos, la normal valuada en d_1 es de 0.7 valor cercano a 1, por lo que la opción es probable que se realize.

El parámetro gama depende de que tan próximo este el número de unidades con respecto al precio de ejercicio, en este contrato, se realiza la gráfica de la distribución normal, con media igual al precio de ejercicio y varianza equivalente a la especificada en el contrato, el valor de gama es de 2.658 es un valor alto dentro de los valores que toma esta función, lo cual indica que es probable que se realize la opción.



Se calculan los parámetros omega, theta y rho en el tiempo inicial, estos valores cambiarán de acuerdo a modificaciones en la tasa de interés, número de unidades y el tiempo. En este ejemplo iguales a:

$$\begin{aligned} \Omega &= 8768. \\ \Theta &= -766. \\ \rho &= 3833. \end{aligned}$$

Para el caso de un put europeo se analiza el ejemplo siguiente:

Ejemplo. Se tiene un contrato financiero de un put europeo sobre el IPC, con los mismos parámetros del ejemplo anterior:

1. $S_0 = 12400$.

2. $K = 12453$.

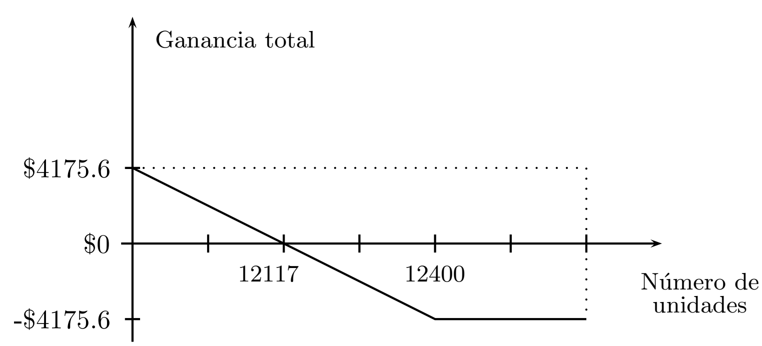
3. $r = 0{\cdot}10$.

4. $\sigma = 0{\cdot}15$.

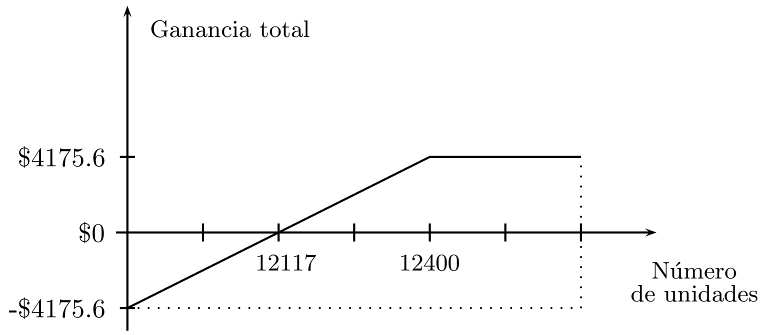
5. $T = 0{\cdot}5$.

Se calcula el valor del put europeo utilizando las fórmulas Black-Scholes lo cual resulta $Pe = 282{\cdot}44$, la prima importa \$2824.4. Si el número de unidades no pasa de 12117 no se ejerce la opción perdiendo la prima de \$2824.4. En otro caso, si el número de unidades queda en 11700, se vende la opción a la contraparte al precio de \$124000 por lo que se obtiene una ganancia de \$4175.6.

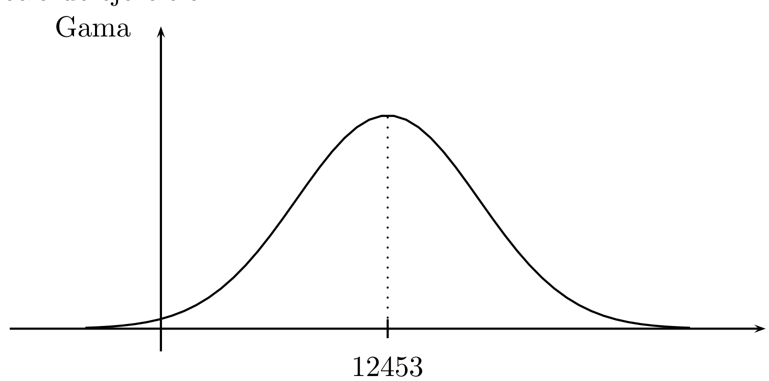
Si el número de unidades sube más de 12400 unidades no se ejerce. En la gráfica siguiente se muestra la relación de las ganancias sobre la opción put.



Para el que vende la opción put, es decir, la contraparte, en este ejemplo, la función de ganancias por vender una opción put sobre el IPC a un precio de contrato de \$124000 es la siguiente:



Se realiza el analisis de riesgo para este contrato, el parámetro gama depende de que tan próximo este el número de unidades con respecto al precio de ejercicio, se realiza la gráfica de la distribución normal, con media igual al precio de ejercicio y varianza equivalente a la especificada en el contrato, el valor de gama es de 2.658 es un valor alto dentro de los valores que toma esta función, lo cual indica que en este caso del put europeo, es una situación riesgosa, por los posibles valores que puede tomar el IPC, al estar próximos al precio de ejercicio.



Se calculan los parámetros omega, theta y rho en el tiempo inicial, estos valores cambiarán de acuerdo a modificaciones en la tasa de interés, número de unidades y el tiempo. En este ejemplo iguales a

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 3111. \\
\Theta &= -48. \\
\rho &= -2088.
\end{aligned}
$$

Conclusión

La presente tesis trató de un tema en el ámbito financiero, conocido como el *modelo Black-Scholes* en la valuación del precio de las opciones europeas, se analizarón todas las variables que intervienen en el modelo, con ello se aplican las fórmulas para determinar el precio de estos productos financieros, se presentarón distintos procesos aleatorios, de tal forma que la serie histórica de los precios de una acción se modelo como un incremento del proceso generalizado de Wiener, asimismo se encontró una expresión para el incremento en el precio de los productos derivados, en una cantidad pequeña de tiempo, por ejemplo, segundos, minutos, horas y días, lo que permite hacer simulaciones de dicho incremento.

De acuerdo a diferentes expresiones desarrolladas en el capítulo dos, se realizarón simulaciones de Monte Carlo, que permitierón predecir el comportamiento de un proceso estocástico, como es el rendimiento de la serie histórica de precios de una acción en un periodo de tiempo determinado. Se determinó la volatilidad de la serie histórica de precios de una acción con el modelo GARCH.

En el cuarto capítulo, utilizado las fórmulas para el incremento en el precio de las acciones, de los productos derivados y un portafolio adecuado, se eliminan factores estocásticos en un periodo de tiempo, con ello se presentó la ecuación diferencial Black-Scholes, de tal forma que un derivado satisface esta ecuación, se determinarón expresiones para el precio de las opciones financieras call y put en un contrato financiero en el tiempo presente.

Finalmente se analizarón parámetros de riesgo, los cuales se utilizan para analizar como es afectado el precio de la opción por cambios en el precio del activo, volatilidad, tiempo y tasas de interés, de esta forma se concluye la tesis, por lo que espero sea de gran utilidad para todas aquellas personas que les interese este tema tan importante en las finanzas.

Bibliografía

[1] Bartle Robert. *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* Limusa Wiley, 2001.

[2] Black Fisher, Scholes Michael. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, 1973.

[3] Courtault John. *Bachelier On the Centenary of Theorie of the Speculation.* Mathematical Finance, 2000.

[4] Cox John, Rubinstein Michael. *Options Markets.* Prentice Hall, 1985.

[5] DeGroot Morris. *Probability and Statistics.* Addison-Wesley publishing company, 1998.

[6] I.Karatzas,S.E.Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[7] Itô Kiyosi. *Stochastic Differential Equations in a Differentiable Manifold.* Nagoya Mathematics Journal, 1950.

[8] Karlin S, Taylor Howard. *An Introduction to Stochastic Modeling.* Academic Press, 1994.

[9] Lamberton D, Lapeyre B. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué á la Finance.* Ellipse, 1960.

[10] Lamothe Prosper. *Opciones Financieras.* Mc Graw Hill, 1993.

[11] Merton Robert. *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Countinous-Time Model.* Journal of Economic Theory, 1971.

[12] Merton Robert. *Theory of Rational Option Pricing.* The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973.

[13] Meurick John. *Financial Futures Markets: Structure, Pricing and Practice.* Harper & Row, New York, 1990.

[14] Morales Cortes, José. *Los Modelos Black-Scholes y Monte Carlo en la Valuación de Opciones.* Tesis licenciatura. Actuaría UNAM, 1996.

[15] Publication. *Options on Futures: An Introductory Guide.* Chicago Mercantile Exchange, 1996.

[16] Ross S. *A First Course in Probability.* Macmillan Publishing, 1998.

[17] Sanchez, Carlos. *Valor en Riesgo y Otras Aproximaciones.* SEI Investments de México, 2001.

[18] Wilmott Paul. *The Theory and Practice of Financial Engineering.* John Willey & Sons, 1998.

[19] www.mexder.com.mx, 1 de enero 2006.