UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

DELGADO ESCALANTE, PIETRA ADRIANA

ASESOR: GALEANA SÁNCHEZ, HORTENSIA

MÉXICO, D. F. 2007

Núcleos por trayectorias monocromáticas

Pietra Delgado Escalante

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi mentora, Hortensia, por su paciencia y preocupación, por su inigualable dedicación y confianza en mi. Gracias por ser mi brújula.

Agradezco y dedico este trabajo a mis amigos, porque estas líneas son también un símbolo que resume los últimos dos años que han reunido momentos muy dolorosos pero también otros que han sido de los más plenos de mi vida y todos ellos los compartí con ustedes:

A mi Alexei, por cambiarme la vida.

A Ana, por estar siempre cerca, iluminando.

A Daniel, por cuidarme aún desde lejos.

A Gero por ser enseñarme a disfrutar los detalles con sutil delicadeza.

Índice general

Presentación

Iniciaré este texto mostrando de manera indiscutible una de las grandes cualidades de la Teoría de Gráficas, y no me refiero a aquellas, igualmente evidentes, concernientes a su belleza y elegancia (que como en cualquier otro caso pueden ser consideradas cualidades subjetivas), no, me refiero a su versátil capacidad de modelar problemas de cualquier índole, ora de matemáticas igualmente abstractas, ora de matemáticas financieras, ya sea de biología o de ciencias de la computación, teoría de decisiones, teoría de juegosprobabilidad en fin. Comenzaré pues, planteando de manera muy sencilla un problema cuya solución, en contraste, puede ser muy complicada de encontrar: el problema de cómo tomar una decisión

Y es que, aunque tomar una decisión es quizá de las actividades que más asiduamente gusta el ser humano de realizar, también es una tarea la mayor de las veces, sumamente difícil. ¿Cómo elegir de entre un conjunto de opciones distintas, la mejor?. Vaya pregunta. Restrinjamos primero el problema de la elección a una sola persona o a un grupo cuyos integrantes eligen por igual (el lector candoroso bien puede suponer que eso es posible como consecuencia directa de la democracia o la cordura masiva, aunque bien puede ser que la decisión unánime se deba a la imposición de uno o varios sobre los demás, lo cierto es que este no es el problema), para después abordar el problema en su generalidad. Ahora bien, permítame el lector filósofo omitir la discusión del significado de lo que es mejor, pues ello depende del criterio que se considerará para hacer una elección, sin embargo si aludiremos a la consistencia de aquel o aquellos que elegirán (supondremos que su elección será siempre igual y acorde con otras decisiones, es decir, que si se prefiere la opción b sobre la opción a, y se prefiere la opción c sobre la opción b, entonces también se prefiere la opción c sobre la opción a). Notemos que el problema de elegir la mejor opción de

un conjunto $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, se simplifica si primero se hace la elección por parejas, es decir, si para cualesquiera dos opciones distintas p_i y p_j, se decide cuál es la mejor entre ellas (de esta manera puede establecerse un orden parcial en el conjunto de opciones, bajo la relación "ser mejor"). El lector puede ya dilucidar la digráfica que modela este problema: sea D la digráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de opciones en entre las cuales se elegirá la mejor, es decir $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, y diremos que p_i es adyacente hacia p_j en la digráfica sí y sólo si p_j se prefiere sobre p_i. Si la digráfica es semicompleta (será así en el caso en que siempre pueda elegirse de entre dos opciones la mejor) y transitiva (gracias a la consistencia del que elige, como se mencionó antes) entonces existe un vértice que representa a la opción que es mejor que todas las demás, es decir de exgrado cero, en otras palabras, siempre es posible determinar la mejor opción. Claramente no toda digráfica que resulta de modelar este problema satisface las características de ser transitiva y semicompleta (el lector no puede negar que es casi imposible pedir que la congruencia sea una constante al momento de tomar una decisión), así que una pregunta natural es si en toda digráfica se cumple que hay una mejor opción en los términos que hemos detallado[1]. Otro punto latente es que es usual que la toma de decisiones no sea realizada por una, sino por varias personas que no forzosamente acuerdan, de manera unánime, por una única opción; con el fin de modelar esta generalización del problema, dotamos de color a las flechas de la digráfica y cada uno de ellos representará a cada una de las diversas personas que están realizando una elección. Lo interesante ahora radica en saber qué propiedades de la digráfica coloreada por flechas, aseguran que el problema tiene solución. En esta tesis presentamos y demostramos algunas.
El problema arriba planteado fue formalizado en el ámbito de Teoría de Juegos por Von Neumann y Morgenstern [?] y abordado por primera vez en el contexto de Teoría de Gráficas en la década de los setenta por Claude Berge [?], quien dio nombre a la solución: núcleo de la digráfica. Un núcleo de D es un subconjunto $N \subseteq V(D)$ tal que para cualesquiera

[1] La respuesta, aunque negativa -basta pensar en el ciclo dirigido de longitud 3-, da pie a toda una línea de investigación encaminada a discernir condiciones suficientes para la existencia de una solución. Este no es el tema de la presente tesis, pero se invita al lector a leer interesantes resultados en [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?] entre otras referencias.

dos vértices distintos en él, no existe una flecha entre ellos y además de cualquier vértice de la digráfica y que no pertenece a N, existe una flecha hacia algún vértice de N. Sin embargo en el problema antes planteado y en el que se realiza una elección por parte de un conjunto de personas, es menester generalizar el concepto de núcleo: si D es una digráfica m-coloreada, un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es un subconjunto $N \subseteq V(D)$ tal que para cualesquiera dos vértices distintos en él, no existe una trayectoria dirigida monocromática entre ellos y además de cualquier vértice de la digráfica y que no pertenece a N, existe una trayectoria dirigida monocromática hacia algún vértice de N. En este modelo, como se mencionó antes, cada color representa a cada una de las personas que están realizando una elección. Así, en el problema original, N es el conjunto de mejores opciones para las m personas.
Se ha detallado una de muchas de las aplicaciones que el concepto de núcleo tiene. No es mi objetivo enfatizar y detallar aún más en ello, sin embargo si el lector se muestra interesado en leer al respecto, no dude en acudir a [**?**].
Lo que sí encontrará el lector en las siguientes páginas es el resultado de una fructífera búsqueda de condiciones suficientes que aseguren la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas m-coloreadas específicas: los torneos. La búsqueda no es fácil, pero eso no es lo que nos congratula de nuestra pesquisa, sino la búsqueda en sí misma que nos ha permitido entender parte del comportamiento de las digráficas con núcleo por trayectorias monocromáticas y que hacen ver, primero, que nuestras condiciones son -permítame el lector abusar del lenguaje coloquial-, sumamente amigables, pues permiten ser verificadas en tiempo polinomial, y segundo, que nuestras condiciones no son equivalentes ni entre ellas ni con las condiciones ya existentes en referencias previas.
Con respecto a la estructura de esta tesis de maestría, es forzoso adelantar el carácter de los capítulos que la conforman. La primer parte, que son, por cierto, dos capítulos sin número y bajo el título de Preliminares y Prefacio respectivamente, son, el primero, un breve compendio de los conceptos básicos de digráficas -el lector avezado en el tema puede, sin vacilar, omitir su lectura-,y el segundo, una breve introducción al tema de núcleos por trayectorias monocromáticas así como una recapitulación de los resultados alrededor del mismo tema. El primer capítulo en sentido

estricto, presenta un único resultado que permite entender un comportamiento general de las digráficas sin núcleo, y es que las digráficas que carecen de núcleo por trayectorias monocromáticas y sin ciclos de longitud 3 de tres colores, tienen ciclos que cumplen características muy peculiares; este capítulo anuncia a los siguientes, que presentan condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas. Tales condiciones hacen alusión a la existencia de determinadas subdigráficas y coloraciones de las mismas que dan título a cada uno de los últimos capítulos: Subdivisiones de ciclos, Subdigráficas de orden pequeño y Subdigráficas de orden $k \geq 4$. Las últimas dos secciones son, una, destinada a la Notación utilizada a lo largo del texto y, finalmente, la Bibliografía. Sin más preámbulos, iniciaré con la que no es sino la narración de las pesquisas que dotaron de sazón a mis dos años de maestría y que claramente serían una mezcla insípida de no ser por la creativa, paciente y generosa mano de quien la dirigió, Hortensia Galeana Sánchez.

Preliminares

Este capítulo inicial tiene como objetivo presentar conceptos y resultados básicos concernientes a digráficas. Se incluyen las pruebas de algunos de los teoremas que serán utilizados más adelante, sin embargo también son incluidas las referencias a las que el lector puede acudir.

1. Digráficas. Conceptos básicos

Definición 1. Una **digráfica** D es la pareja $(V(D), F(D))$ tal que $V(D)$ es un conjunto no vacío de objetos llamados vértices y $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos denominadas flechas. Una digráfica es de **orden** n si $V(D)$ consta de n elementos. Comúnmente denotaremos por D a una digráfica y por razones de praxis evitaremos mencionar que se trata de una digráfica, excepto en los casos en que se realice un cambio de notación.

A lo largo de la presente investigación restringimos nuestro estudio a digráficas simples (sin lazos). A continuación algunas definiciones imprescindibles:

Definición 2. Sea $f = (u, v)$ **flecha** de D con u y v vértices de D. Decimos que u y v son los **extremos de** f, u es el extremo inicial y v es el extremo final. Diremos que u **es adyacente hacia** v y que v es adyacente desde u en D.

Definición 3. Sea $v \in V(D)$. El **ingrado** o grado interior de v en D, denotado por $\delta_D^-(v)$, es el número de flechas de D que inciden hacia v . El **exgrado** o grado exterior de v en D, denotado por $\delta_D^+(v)$, es el número de flechas de D que inciden desde v (omitiremos el subíndice en caso de ser obvio a qué digráfica se está haciendo referencia).

Definición 4. H es una **subdigráfica** de una digráfica D si es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$, y la denotamos por $H \subseteq D$. Diremos que H es **una subdigráfica propia** de D si $V(H) \subset V(D)$ y $F(H) \subset F(D)$ y la denotamos por $H \subset D$.

Definición 5. Una **subdigráfica** H de D es **generadora** si $V(H) = V(D)$.

Definición 6. Si $S \subseteq V(D)$ es no vacío entonces la **subdigráfica** $D[S]$ **inducida por** S es la digráfica que tiene a S como conjunto de vértices y cuyo conjunto de aristas consta de todas las flechas de D que hacen adyacentes a vértices de S.

Definición 7. Una flecha $(z_1, z_2) \in F(D)$ es llamada **asimétrica (simétrica)** si $(z_2, z_1) \notin F(D)$ (resp. $(z_2, z_1) \in F(D)$). La **parte asimétrica de** D (resp. **parte simétrica**) denotada por $Asim(D)$ (resp. $Sim(D)$) es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas (resp. simétricas) de D. D es denominada una **digráfica asimétrica** si $Asim(D) = D$.

Definición 8. La flecha $(z_1, z_2) \in F(D)$ es llamada una **S_1S_2-flecha** siempre que $z_1 \in S_1 \subseteq V(D)$ y $z_2 \in S_2 \subseteq V(D)$. Denotaremos con $[z_1, z_2]_D$ a uno de las dos posibles flechas entre los vértices z_1 y z_2.

Definición 9. D es una **digráfica transitiva** si para cualesquiera tres vértices u, v y w tales que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$, se cumple que $(u, w) \in F(D)$.

Definición 10. Si W es un camino dirigido entonces denotaremos con $\ell(W)$ su **longitud**. Si $(z_1, z_2) \in V(W)$ entonces (z_1, W, z_2) es el **z_1z_2-camino dirigido** contenido en W. Sea $I \subseteq V(D)$ y $z \in V(D)$. Un **zI-camino** es un zx-camino para algún $x \in I$. Denotaremos con C_n al **ciclo dirigido** de longitud n.

A lo largo de la presente tesis omitiremos especificar que las trayectorias y ciclos a los que se hace alusión, son dirigidos todos.

2. Digráficas coloreadas

Definición 11. Diremos que D es una **digráfica m-coloreada** si sus flechas están coloreadas con m colores. En particular diremos que D

es **bicolor** si D es 2-coloreada y es a lo más (al menos) k**-coloreada** si para colorear sus flechas se hace uso de a lo más (al menos) k colores.

Definición 12. Una digráfica D es **monocromática** si todas sus flechas tienen la misma coloración, es **casimonocromática** si con a lo más una excepción todas sus flechas tienen el mismo color, y es **policromática** si D es al menos 3-coloreada.

Definición 13. Sea D una digráfica m-coloreada. La **cerradura por colores** de D, denotada por $C(D)$, es una multidigráfica m-coloreada tal que $V(C(D)) = V(D)$ y $F(C(D)) = \{(u, v)$ de color i tal que existe una uv-trayectoria dirigida de color i contenida en $D\}$.

3. Digráficas y subdigráficas importantes

Definiremos ahora digráficas sobre las cuales hemos realizado parte de nuestra investigación, para después presentar algunos resultados relacionados a las mismas y cuya prueba se puede encontrar en la referencia mencionada.

Definición 14. Una digráfica es llamada **semicompleta** si para cualesquiera dos vértices distintos u y v, al menos una de las flechas (u, v) o (v, u) pertenece a D.

Definición 15. Una digráfica semicompleta y asimétrica es llamada **torneo**.

Definición 16. Sea D un torneo. $T \subseteq D$ es **triángulo** si es una subdigráfica de D inducida por tres vértices (i.e. $T \cong C_3$ o bien T es un torneo transitivo de longitud 3).

Definición 17. Sea $C_k = (z_0, z_1, \ldots, z_k = z_0) \subseteq D$. Una $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$**-subdivisión de** C_k m-coloreado es un ciclo C de longitud $\Sigma_{i=1}^{k} a_i$ y de la forma $\bigcup_{i=1}^{k} T_i$, donde T_i es una $z_i z_{i+1}$-trayectoria de longitud a_{i+1} y del mismo color que (z_i, z_{i+1}) (las sumas serán tomadas módulo k) que cumple que $T_i \cap T_{i+1} = \{z_{i+1}\}$ y $T_i \cap T_j = \emptyset$ para toda $j \in \{i+1, i-1\}$. En particular si $C_2 = (z_0, z_1, z_2 = z_0)$ es bicolor, con (z_0, z_1) de color a y $(z_1, z_2 = z_0)$ de color b, entonces una $(2, k-2)$**-subdivisión del** C_2**-bicolor** es un ciclo $C = T_1 \cup T_2$, en donde T_1 es una $z_0 z_1$-trayectoria de longitud 2 de color a y T_2 es una $z_1 z_2$-trayectoria de longitud $k-2$ de color b. Por igual si $C_2 = (z_0, z_1, z_2, z_3 = z_0)$ es 3-coloreado, con (z_0, z_1) de color

a, (z_1, z_2) de color b y $(z_2, z_3 = z_0)$ de color c, entonces una $(1, 1, k-2)$-**subdivisión del** C_3 **3-coloreado** es un ciclo $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ en donde $T_1 = (z_0, z_1)$, $T_2 = (z_1, z_2)$ y T_3 es una z_2z_3-trayectoria de longitud $k-2$ y de color c.

Definición 18. Una subdigráfica H of D será llamada $\mathcal{T}_k$ si H consiste de una trayectoria (dirigida) de longitud $k-1$, digamos $(z_0, z_1, \ldots, z_{k-1})$, y la flecha (z_0, z_{k-1}).

Definición 19. Sea $\mathcal{T}_3$=$(z_0, z_1, z_2) \cup (z_0, z_2) \subseteq D$ 3-coloreado con (z_0, z_1) de color a, (z_1, z_2) de color b y (z_0, z_2) de color c. Una $(1, 1, k-2)$-**subdivisión del** $\mathcal{T}_3$ **3-coloreado** es $\mathcal{T}_k$=$(z_0, z_1, z_2) \cup T$ en donde T es una z_0z_2-trayectoria de longitud $k-2$ y color c.

Definición 20. Una subdigráfica H de D será llamada $\mathcal{S}_k$ si H es la unión de dos trayectorias internamente ajenas T_1 y T_2 tales que la primera es una trayectoria (dirigida) de longitud $k-2$, digamos $(z_0, z_1, \ldots, z_{k-2})$, y la segunda, una de longitud 2 de la forma (z_0, z_{k-1}, z_{k-2}).

Prefacio. Núcleos por trayectorias monocromáticas

Iniciaremos con un conjunto de imprescindibles definiciones para después abordar los antecedentes del problema que hemos planteado en la presentación: **determinar condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en torneos m-coloreados**. Finalizaremos este capítulo con una nota importante relativa a la forma en la que nos enfrentaremos a nuestro problema.

4. Definiciones

DEFINICIÓN 21. $I \subseteq V(D)$ es **independiente** si $F(D[I]) = \emptyset$.

DEFINICIÓN 22. $N \subseteq V(D)$ es **núcleo** de D si es independiente y si para todo $z \in V(D) - N$ existe una zN-flecha en D (una flecha de z a algún elemento de N).

DEFINICIÓN 23. D es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, y es **núcleo imperfecta crítica** si toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo y D no tiene núcleo.

Resultados clásicos y del problema de existencia de núcleos en una digráfica pueden ser consultados en [?], [?], [?], [?], [?], [?] y [?].

DEFINICIÓN 24. $I \subseteq V(D)$ es **independiente por trayectorias monocromáticas** si para todo u,$v \in I$, $u \neq v$, no existe una trayectoria monocromática entre ellos en D.

DEFINICIÓN 25. $I \subseteq V(D)$ es **absorbente por trayectorias monocromáticas** si para todo $z \in V(D) - I$ existe una zI-trayectoria monocromática en D (una trayectoria monocromática de z a algún elemento de N).

Definición 26. Se dice que $N \subseteq V(\mathrm{D})$ es **núcleo por trayectorias monocromáticas** de D si es independiente y absorbente por trayectorias monocromáticas en D.

Definición 27. Sea D una digráfica m-coloreada. La **cerradura por colores** de D, denotada por $C(\mathrm{D})$, es la multidigráfica m-coloreada tal que $V(C(\mathrm{D})) = V(D)$ y $F(C(D)) = \{(u, v)$ de color i tal que existe una uv-trayectoria dirigida de color i contenida en $D\}$.

Es tiempo ya de recrear la situación en la que ha nacido esta historia: los antecedentes.

5. Antecedentes

Estudiando los resultados relativos al concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas que hasta ahora se conocen, bien puede afirmarse que existe una fuerte línea de investigación impulsada por determinar condiciones suficientes que aseguren la existencia de un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas m-coloreadas, y es que definitivamente no toda digráfica m-coloreada goza de tal propiedad (basta pensar en el ciclo dirigido de longitud 3 y 3-coloreado) y la búsqueda de tales condiciones, es ardua. La investigación al respecto se ha dirigido en algunos casos a ciertas clases de digráficas, como son los torneos, las digráficas bipartitas y las k-partitas. En otros casos se ha examinado la posible relación entre algunas operaciones en digráficas m-coloreadas y la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas (por ejemplo, tal es el caso de la digráfica de líneas y digráfica subdivisión de una digráfica m-coloreada, o ciertos productos entre digráficas). También puede observarse el interés por relacionar este concepto con algunas aplicaciones en Teoría de Juegos, autómatas y lenguajes, según tengo noción (ver [**?**], [**?**]). En [**?**], Sawer et. al. probaron que para toda digráfica 2-coloreada se cumple que su cerradura por colores, $C(D)$, es núcleo perfecta. En particular demostraron que para todo torneo 2-coloreado existe un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria monocromática de x a v (i.e. $\{v\}$ es núcleo de $C(T)$). En la misma referencia, los autores plantearon el problema de determinar si un torneo 3-coloreado en el que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, tiene la propiedad de que su cerradura por colores es núcleo perfecta.
Seis años después, en 1988 Shen Minggang da una respuesta a la pregunta

planteada por Sawer et.al. y mencionada en el párrafo previo. Minggang prueba en [?] que si a un torneo T se le pide no solamente que todo ciclo dirigido de longitud 3 sea casimonocromático, sino también que todo torneo transitivo de orden 3 contenido en T sea, por igual, casimonocromático, entonces efectivamente $C(T)$ tiene núcleo. El autor prueba además que para el caso en que $m \geq 5$, las hipótesis arriba mencionadas, son justas, de manera específica se demuestra lo siguiente:

1: Para todo $m \geq 5$ existe un torneo m-coloreado que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, y

2: Para todo $m \geq 5$ existe un torneo m-coloreado que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y tal que todo torneo transitivo de orden 3 es casimonocromático.

En ese momento fueron planteados como problemas abiertos los casos en que m= 3 y $m = 4$ (si T es un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas), aunque el caso en que $m = 4$ fue probado hace dos años por Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy en [?]. Menester es mencionar que la forma en la que aquí redactamos estos resultados, haciendo uso de la cerradura por colores de D, no es la forma original en la que fueron presentados en las referencias correspondientes, pero el peso del concepto y su uso en los siguientes capítulos, lo justifica.

En 1994 en [?], Hortensia Galeana-Sánchez propone y prueba nuevas condiciones suficientes para asegurar que la cerradura por colores de un torneo m-coloreado es núcleo perfecta, algunas son las siguientes:

1: Todo ciclo de longitud 3 y 4 contenidos en T, son casimonocromáticos (prueba además que tal condición no implica ni es implicada por la propuesta por Shen Minggang),

2: Todo ciclo de longitud 3 contenido en T, es monocromático.

Es en la misma referencia donde la autora introduce el concepto de cerradura por colores de una digráfica m-coloreada y aún más, la definición de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En [?] Galeana-Sánchez demuestra que las digráficas obtenidas de un torneo eliminando una única flecha, pertenecen a la clase de las digráficas tales que toda $\{C_3, C_4\}$-m-coloración libre es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas (en donde una $\{C_3, C_4\}$-m-coloración libre de una digráfica D es aquella coloración de D tal que toda ciclo de longitud a lo más 4 es casimonocromático). Más tarde, con respecto a las mismas digráficas, en [**?**] Galeana-Sánchez y García-Ruvalcaba prueban que pertenecen a la clase de las digráficas tales que toda $\{C_3, T_3\} - m$-coloración libre es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas (en donde una $\{C_3, T_3\} - m$-coloración libre de una digráfica D es aquella coloración de D tal que toda subdigráfica inducida de D y de orden 3 es casimonocromática).

Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy prueban en diversas referencias una vasta serie de resultados, como se detallan a continuación:

En [**?**] demuestran que la cerradura por colores de los torneos bipartitos m-coloreados cuyos ciclos de longitud 4 son monocromáticos, es una digráfica núcleo perfecta, tiempo después en [**?**] dan a conocer una generalización: todo torneo k-partito m-coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 en él contenido sea monocromático, cumple que su cerradura por colores es núcleo perfecta. En [**?**] prueban que si el conjunto de colores asignado a la vecindad interior de cada vértice de un torneo m-coloreado es menor o igual a 2 y si además pasa una de las siguientes: a) $m \neq 3$ o, b) $m = 3$ y T no contiene ciclos de longitud 3 3-coloreados; entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. En [**?**]:

1: Demuestran que toda digráfica cuasitransitiva m-coloreada y tal que todo triángulo dirigido es monocromático cumple que su cerradura por colores en núcleo perfecta.

2: Proporcionan un contraejemplo al hasta entonces problema abierto planteado en [**?**]: encuentran un torneo 4-coloreado donde todo C_3 es casimonocromático y tal que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (la prueba también se puede encontrar en [**?**]).

3: Prueban que todo torneo 3-coloreado tal que todo C_3 es casimonocromático y todo vértice del torneo tiene vecindad a lo más bicolor cumple que su cerradura es núcleo perfecta.

4: Justifican que si la digráfica m-coloreada D no tiene trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores entonces la digráfica subdivisión, $S(D)$, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

5: Si D no tiene trayectorias monocromáticas infinitas exteriores ni ciclos monocromáticos, entonces $S(D)$ tiene un único núcleo por trayectorias monocromáticas.

Hahn et al. demuestran en [**?**] que si para algún $s > 3$, todo ciclo de longitud s contenido en T es casimonocromático y todo ciclo contenido en T de longitud $\ell < s$ es a lo más 2-coloreado, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
Algunos de los resultados que se presentan en [**?**] (en particular me refiero a los últimos dos arriba mencionados, con numeración 4 y 5) responden a la pesquisa de relacionar varias operaciones en digráficas m-coloreadas con la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas. En la misma línea, cuatro años antes, Galeana-Sánchez y Pastrana-Ramírez definieron una m-coloración específica para la digráfica de líneas de una digráfica m-coloreada y probaron en [**?**] que bajo ciertas condiciones de la digráfica, el número de núcleos por trayectorias monocromáticas de la digráfica de líneas bajo la m-coloración dada, es igual al número de núcleos por trayectoria dirigidas monocromáticas de la digráfica original. El año pasado, I. Wloch probó en [**?**] condiciones suficientes y necesarias para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en un determinado producto (que denomina la D-unión) de digráficas, condiciones suficientes para que ese mismo producto sea una digráfica núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas y además calcula el número total de núcleos por trayectorias monocromáticas en el mismo.
Finalmente P. Arpin y V. Linek le asocian a una digráfica D una multidigráfica G cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D, denotan como un D-camino a un camino en G si colores consecutivos también forman un camino en D y definen a) un D-sumidero como un conjunto de vértices en G con la propiedad de ser absorbente por D-caminos y b) un conjunto D-independiente (resp. independiente) como un conjunto de vértices de G tal que para cualesquiera dos vértices en él no existe un D-camino (resp. una flecha) entre ellos. Denotan con $\mathcal{B}_2$ (resp. $\mathcal{B}_3$) a la clase de las digráficas finitas D cuyas gráficas coloreadas por flechas G siempre tienen un D-sumidero independiente (resp. D-independiente) y por $\mathcal{B}_1$ a la clase de los torneos que siempre tienen un D-sumidero (de un único vértice). Los autores dan una clasificación de la clase $\mathcal{B}_1$, realizan algunas observaciones con respecto a la clase $\mathcal{B}_2$ y muestran la contención estricta ($\mathcal{B}_3 \subsetneq \mathcal{B}_2 \subsetneq \mathcal{B}_1$).

6. Notas importantes

Nosotras, en la presente tesis, exponemos nuevas condiciones suficientes para asegurar la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos m-coloreados, para cada una de ellas justificamos que no son implicadas por otras condiciones y además presentamos una serie de problemas abiertos relacionados.
Es importante mencionar nuevamente que una de las características que justifican a nuestras condiciones, radica en que son condiciones que pueden verificarse en tiempo polinomial, pues basta recurrir a alguno de los ya numerosos algoritmos de búsqueda de ciclos de orden pequeño o a alguna modificación de los mismos para detectar otras subdigráficas como son los $\mathcal{T}_k$ y los $\mathcal{S}_k$.
Por otra parte, recordemos que en los Antecedentes fue mencionado que en [**?**] Hortensia Galeana-Sánchez introdujo la definición que se ha presentado previamente a inicio de este capítulo, la cerradura por colores de una digráfica. Con ese concepto se logra dilucidar con notable claridad el comportamiento de los torneos m-coloreados con relación a la posible existencia de núcleos por trayectorias (dirigidas) monocromáticas y es que gracias al concepto de la cerradura por colores logra hacerse abstracción de la digráfica rescatando solamente la información relativa a las posibles trayectorias monocromáticas (y por consiguiente, a la posible existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en la digráfica), como se prueba a continuación.

LEMA 1. *Sea D una digráfica m-coloreada. N es núcleo de $C(D)$ si y sólo si N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.*

DEMOSTRACIÓN. N es un conjunto independiente en $C(D)$ si y sólo si para cualesquiera n_1 y n_2 vértices distintos de N no existe flecha entre ellos en $C(D)$, lo cual es cierto si y sólo si no existe una trayectoria (dirigida) monocromática entre tales vértices en D. Por otra parte N es absorbente en $C(D)$ si y sólo si para cualquier vértice $n \in V(C(D)) - N$ existe flecha hacia un vértice de N, lo cual se cumple sí y sólo si existe una nN-trayectoria (dirigida) monocromática D. □

LEMA 2. *Si $C(D)$ es núcleo perfecta entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. $C(D)$ es núcleo perfecta así que toda subdigráfica inducida de $C(D)$ tiene núcleo, en particular $C(D)$, así que se sigue del Lema anterior que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. $\square$

CAPíTULO 1

Un Lema de gran utilidad

Claude Berge y Pierre Duchet probaron en [**?**] que la propiedad de una digráfica semicompleta de ser núcleo perfecta es equivalente a asegurar que todo ciclo contenido en tal digráfica tiene al menos una flecha simétrica. Note el lector entonces que si suponemos que una digráfica no es núcleo perfecta entonces se sigue del resultado mencionado que existe al menos un ciclo en la misma con la peculiar característica de estar totalmente contenido en la parte asimétrica de la digráfica en cuestión. Ahora bien, si aplicamos este resultado a la cerradura por colores de un torneo m-coloreado y agregamos además la característica de que tal torneo no tiene ciclos de longitud 3 y 3-coloreados, obtenemos una clara imagen del comportamiento de las digráficas con estas propiedades, como se prueba en el siguiente Lema **??**. No obstante antes de presentarlo enunciaremos el resultado ya antes probado por Berge y Duchet en [**?**]:

TEOREMA 1. [**?**] *Sea D una digráfica. Si todo ciclo contenido en D tiene al menos una flecha simétrica entonces D es núcleo perfecta.*

LEMA 1. *Si T es un torneo m-coloreado sin C_3 3-coloreado y tal que $C(T)$ no es núcleo perfecta, entonces existe un ciclo $\gamma = (z_0, z_1, z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0) \subseteq C(T)$ que cumple las siguientes propiedades:*

a) $\ell(\gamma) \geq 4$

b) $\gamma \subseteq T$

c) $(z_0, z_1) \in F(T)$ *es de color a,* $(z_1, z_2) \in F(T)$ *es de color b y existe* $\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0)$ $(p \geq 2)$*, una z_2z_0-trayectoria en T de color c, con $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$, digamos que a=rojo, b=azul, c=negro.*

d) No existe una z_1z_0-trayectoria monocromática en T y no existe una z_2z_1-trayectoria monocromática en T.

e) $(z_2, z_0) \notin F(T)$ *(y por lo tanto* $(z_0, z_2) \in F(T)$*).*

f) Todas las flechas entre z_1 y los vértices internos de α son de color distinto de negro.

Demostración. Como $C(T)$ no es núcleo perfecta entonces por el Teorema **??**, existe un ciclo $\Gamma \subseteq Asim(C(T))$.
Sea $\Gamma = (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z_0)$ un ciclo de longitud mínima con la propiedad de estar totalmente contenido en $Asim(C(T))$.
A continuación serán probadas diversas afirmaciones respecto a Γ:

1: $\ell(\Gamma) = n \geq 3$.
La digráfica no admite lazos ($n \neq 1$) y Γ no tiene flechas simétricas ($n \neq 2$).

2: $\Gamma \subseteq T$.
Procediendo por contradicción, supongamos que existe $(z_j, z_{j+1}) \in F(\Gamma)$ tal que $(z_j, z_{j+1}) \notin F(T)$. T es torneo, así que $(z_{j+1}, z_j) \in F(T)$ y por definición de $C(T)$ se sigue que $(z_{j+1}, z_j) \in F((C(T))$, de donde $(z_j, z_{j+1}) \in F(Sim(C(T)) \cap \Gamma)$, contradicción.

3: $(z_0, z_1) \in F(T)$ es de color a, $(z_1, z_2) \in F(T)$ es de color b y existe $\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0)$ $(p \geq 2)$, una z_2z_0-trayectoria de color c; con con $a \neq b$, $b \neq c$ y $a \neq c$.
Observemos primero que Γ no es monocromático, de lo contrario en particular la trayectoria

$$(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$$

es monocromática y por definición de $C(T)$, $(z_0, z_{n-1}) \in F(C(T))$, de donde $(z_{n-1}, z_0) \in (Sim(C(T)) \cap \Gamma)$, contradicción. Por lo tanto Γ no es monocromático, así que existen dos flechas consecutivas con diferente color. Sin pérdida de generalidad digamos que $(z_0, z_1) \in F(\Gamma)$ es roja y que $(z_1, z_2) \in F(\Gamma)$ es azul.

4: Para todo z_i, $z_j \in V(\Gamma)$ tales que $j \notin \{i-1, i+1\}$, se cumple que $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(T))$.
Sean z_i, $z_j \in V(\Gamma)$ tales que $j \notin \{i-1, i+1\}$. Tenemos que $(z_i, z_j) \in F(T)$ o $(z_j, z_i) \in F(T)$ (T es torneo), sin pérdida de generalidad supongamos que $(z_i, z_j) \in F(T)$. Entonces

$$\Gamma' = (z_i, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{i-1}, z_i)$$

es un ciclo de longitud menor que la longitud de Γ, por lo tanto Γ'$\nsubseteq$ $Asim(C(T))$ y se sigue que $(z_i,\ z_j)\in$ $F(Sim(C(T))$, es decir, $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(T))$.

5: $(z_2,\, z_0) \notin F(T)$.
$[z_2, z_0]_T$ pues T es torneo. Si $(z_2,\, z_0) \in F(T)$ entonces existe

$$C_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0) \subseteq T,$$

el cual no es 3-coloreado por hipótesis, de donde $(z_2, z_0) \in F(T)$ es roja o azul. Si es roja entonces $(z_2,\, z_0,\, z_1) \subseteq T$ es una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática y $(z_1,\, z_2) \in F(Sim(C(T)) \cup \Gamma)$, contradicción. Si $(z_2,\, z_0) \in F(T)$ es azul entonces $(z_1,\, z_2,\, z_0) \subseteq T$ es una $z_1 z_0$-trayectoria monocromática y $(z_0,\, z_1) \in F(Sim(C(T)) \cup \Gamma)$, contradicción. Por lo tanto $(z_2,\, z_0) \notin F(T)$.

Ahora bien, $(z_2,\, z_0) \in F(C(T))$ (inciso 4), por lo tanto existe una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática contenida en T de longitud al menos 2 (inciso 5). Sea

$$\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0) \subseteq T$$

una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática de longitud mínima ($p \geq 2$).

6: α no es roja ni azul.
Si α es roja entonces $\alpha \cup (z_0,\, z_1)$ es una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática contenida en T y $(z_2,\, z_1) \in F(Sim(C(T)) \cap \Gamma)$, contradicción. Si α es azul entonces $(z_1, z_2) \cup \alpha \subseteq T$ es una $z_1 z_0$- trayectoria monocromática y $(z_1,\, z_0) \in F(Sim(C(T)) \cap \Gamma)$, contradicción.

Sin pérdida de generalidad supongamos que α es negra.

7: $z_1 \notin V(\alpha)$.
En otro caso $z_1 \in V(\alpha)$ y $(z_2,\, \alpha,\, z_1)$ es una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática contenida en T y $(z_1,\, z_2) \in Sim(C(T))$, contradicción.

Sea $\gamma = (z_0, z_1, z_2) \cup \alpha$. Claramente γ es un ciclo que satisface las primeras tres propiedades enunciadas en el Lema. Concluiremos la prueba con las siguientes dos afirmaciones:

8: No existe una $z_1 z_0$-trayectoria monocromática en T y no existe una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática en T.
Consecuencia de que $\{(z_0,\, z_1),\, (z_1,\, z_2)\} \subseteq Asim(C(T))$.

9: Todas las flechas entre z_1 y los vértices internos de α son de color distinto de negro.
Si existe i, $1 \leq i \leq p-1$ tal que $(i, z_1) \in F(T)$ es negra (respectivamente $(z_1$, i$) \in F(T))$, entonces

$$(z_2 = 0, \alpha, i) \cup (i, z_1) \subseteq T$$

(respectivamente $(z_1, i) \cup (i, \alpha, z_0)$) es una z_2z_1-trayectoria monocromática (respectivamente una z_1z_0)-trayectoria monocromática), una contradicción.

$\square$

Concluimos así esta pequeña sección en la que proporcionamos lo suficiente para entender con grácil naturalidad los resultados que a continuación presentaremos.

CAPíTULO 2

Subdivisiones de ciclos

En esta sección presentamos dos resultados que prueban que si T es un torneo m-coloreado por flechas que no contiene determinadas subdivisiones de ciclos entonces tal torneo tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. El primer resultado generaliza la bien conocida condición de Shen Minggang probada en 1988 en [**?**], mientras que el segundo generaliza un resultado publicado por Hahn et al. en 2004 en [**?**].

1. Resultados

1.1. Condición I.

Definición 1. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T tiene la propiedad PI_k si cumple una de las siguientes condiciones:
a) Todo triángulo en T es casimonocromático (y por tanto a lo más bicolor), o bien
b) Para algún entero fijo k≥4 se cumple que todo ciclo $C_k \subseteq T$ es a lo más bicolor y no es una $(2, k-2)$-subdivisión de C_2- bicolor
y si además todo ciclo $C_t \subseteq T$ $(t < k)$ es a lo más bicolor (de manera que no es policromático).

Teorema 1. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad PI_k, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Si T satisface la condición a) entonces el resultado se sigue como consecuencia directa del Teorema de Shen Minggang. Supongamos entonces que la condición a) no se cumple mas no así la condición b). Procediendo por contradicción supongamos ahora que $C(T)$ no es núcleo perfecta. Entonces se sigue del Lema **??** la existencia del ciclo $\gamma = (z_0, z_1, z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0)$ el cual satisface las propiedades (a) to (e) del Lema mencionado.

1: $p > k-2$.
De la propiedad c) del Lema **??** se tiene que γ es 3-coloreado, entonces se sigue de la hipótesis del Teorema 1 que $p > k-2$.

2: Para toda i, $p-(k-2) \geq i \geq 0$, se cumple lo siguiente: si $(z_1, i) \in F(T)$ entonces para toda j, p>i+j(k-2)≥i, se tiene que $(z_1$, i+j(k-2)) ∈ F(T).
Sea i tal que $p-(k-2) \geq i \geq 0$ y supongamos que $(z_1, i) \in F(T)$. Si existe j, $p > i + j(k-2) \geq i$, tal que $(z_1, i+j(k-2)) \notin F(T)$, entonces sea

$$j_0 = \text{mín}\{j \mid p > i + j(k-2) \geq i \quad y \quad (z_1, i+j(k-2)) \notin F(T)\}.$$

Como T es un torneo entonces $(i + j_0(k-2), z_1) \in F(T)$ y se sigue de la elección de j_0 que $(z_1, i + j_0(k-2) - (k-2)) \in F(T)$ (observe el lector que $i + j_0(k-2) - (k-2) \geq i$ ya que $(z_1, i) \in F(T)$), entonces existe

$$\begin{aligned} C_k = (z_1, & i + j_0(k-2) - (k-2)) \cup (i + j_0(k-2) - (k-2), \alpha, \\ & i + j_0(k-2)) \cup (i + j_0(k-2), z_1) \subseteq T \end{aligned}$$

y es a lo más bicolor por hipótesis de manera que $(z_1, i + j_0(k-2) - (k-2))$ y $(i + j_0(k-2), z_1)$ tienen ambas el mismo color y distinto de negro (Lema **??**-f). Entonces C_k es una $(2, k-2)$-subdivisión de C_2-bicolor, una contradicción. Podemos entonces concluir la afirmación.

3: Para cada i tal que $p \geq i > k-2$ se cumple que: si $(i, z_1) \in F(T)$ entonces para toda j tal que $p-(k-2) \geq i - j(k-2) > 0$ se cumple que $(i - j(k-2), z_1) \in F(T)$.
Sea i tal que $p \geq i > k-2$ e $(i, z_1) \in F(T)$. Si existe j, $p-(k-2) \geq i - j(k-2) > 0$, tal que $(i - j(k-2), z_1) \notin F(T)$, entonces consideremos

$$\begin{aligned} j_0 = \text{mín}\{j \mid p-(k-2) \geq & i - j(k-2) > 0 \quad e \\ & (i - j(k-2), z_1) \notin F(T)\}. \end{aligned}$$

Como en el inciso anterior se tiene que $(z_1, i - j_0(k-2)) \in F(T)$ (ya que T es un torneo) de manera que

$$(z_1, i - j_0(k-2) + (k-2) = i - (j_0 - 1)(k-2)) \in F(T)$$

(consecuencia de (2) dado que $p-(k-2) \geq i - j_0(k-2) \geq 0$), contradiciendo la elección de j_0.

Figura 1: Si $(z_1, i) \in F(T)$ e $(i + j_0(k-2), z_1) \in F(T)$

Finalizaremos la prueba analizando los siguientes dos casos:

Caso A. $p = m(k-2)$, con $m \in N$ y $m \geq 2$ (recuerde el lector que $p > k-2$).
$(z_1, z_2 = 0) \in F(T)$ así que el inciso (2) implica que $(z_1, p-(k-2)) \in F(T)$. Entonces existe $C_k = (z_1, p-(k-2)) \cup (p-(k-2), \alpha, p = z_0) \cup (z_0, z_1) \subseteq T$ y dado que es un ciclo a lo más bicolor por hipótesis entonces $(z_1, p-(k-2)) \in F(T)$ es de color rojo (no es negra según el Lema **??**-f). Por lo tanto

$$C_k = (z_1, p-(k-2)) \cup (p-(k-2), \alpha, p = z_0) \cup (z_0, z_1) \subseteq T$$

es una $(2, k-2)$-subdivision of C_2-bicolor, contradicción.

Caso B. $p = m(k-2) + r$, con $m, r \in N$, $m \geq 1$ y $k - 2 > r > 0$.

4: $(z_1, p - r) \in F(T)$ y es de color rojo.
$(z_1,\ z_2 = 0) \in F(T)$ así que $(z_1, m(k-2) = p - r) \in F(T)$ (inciso 2). Entonces

$$C_t = (z_1, p - r) \cup (p - r, \alpha, p = z_0) \cup (z_0, z_1) \subseteq T$$

es un ciclo de longitud $t = r + 2$ $(t < k)$ y es a lo más bicolor por hipótesis, por lo tanto $(z_1, p - r) \in F(T)$ es negra o roja, pero según el Lema **??**-f tal flecha no puede ser negra.

5: $(r, z_1) \in F(T)$ y es azul.
Como $(z_0, z_1) \in F(T)$ entonces se sigue del inciso (3) que $(p - m(k - 2) = r, z_1) \in F(T)$. Existe entonces el ciclo

$$C_t = (z_1, z_2 = 0) \cup (0, \alpha, p - m(k-2) = r) \cup (r, z_1) \subseteq T$$

el cual tiene longitud $t = r + 2 < k$ y es a lo más bicolor por hipótesis, de manera que $(r, z_1) \in F(T)$ es de color negro o azul. Ahora bien, se sigue del inciso (f) del Lema **??** que $(r, z_1) \in F(T)$ es de color azul.

6: $(z_0, r) \in F(T)$.
Si $(r, z_0) \in F(T)$ entonces existe

$$C_s = (r, z_0, z_1, z_2 = 0) \cup (z_2 = 0, \alpha, r) \subseteq T$$

ciclo de longitud $s = r + 3 \leq k$ y el cual es 3-coloreado (nótese que $k \geq 4$ y $k - 3 \geq r \geq 1$), una contradicción.

Existe entonces

$$C_q = (z_0 = p, r, z_1, p - r) \cup (p - r, \alpha, z_0) \subseteq T$$

es cual es 3-coloreado (es importante que el lector note que dado que $r \leq k - 3$ entonces $q \leq k$).
Esta contradicción finaliza la prueba. □

Corolario 1. *El Teorema 1 generaliza el Teorema B de Hahn et. al. (véase el Prefacio, sección Ancecedentes, y el Apéndice)*

1.2. Condición II.

Definición 2. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T satisface la propiedad PII_k para algún entero fijo $k \geq 3$ si:
a) no existe alguna $(1, 1, k-2)$-subdivisión de C_3 3-coloreado en T,

Figura 2: Conclusión del Caso B

b) no existe alguna $(1,1,k-2)$-subdivisión de $\mathcal{T}_3$ 3-coloreado en T y
c) no existe alguna $(1,1,t-2)$-subdivisión de C_3 3-coloreado en T, con $t<k$ y $t\geq 3$.

Teorema 2. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad PII_k, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $C(T)$ no es núcleo perfecta. Entonces se sigue del Lema **??** que existe un ciclo

$$\gamma=(z_0,z_1,z_2=0,1,2,\ldots,p=z_0)$$

que satisface las propiedades enunciadas en el mismo.

1: $p>k-2$.
Si $p=k-2$ entonces $\gamma\subseteq T$ es una $(1,1,k-2)$-subdivisión de un C_3 3-coloreado en T, una contradicción. Por otro lado, si $p<k-2$ entonces

entonces $\gamma \subseteq T$ es una $(1,1,t)$-subdivisión de un C_3 3-coloreado en T (nótese que $p+2<k$), nuevamente una contradicción.

2: Para cada i tal que $p-(k-2)>i\geq 0$ se cumple lo siguiente: si $[z_1,i]_T$ tiene color a (observe el lector que $a\neq$ negro según el Lema **??**-f) entonces para toda j tal que $p>i+j(k-2)\geq i$ se tiene que $[z_1,i+j(k-2)]_T$ tiene color a.
Probaremos esta afirmación por inducción sobre j. Sea i fijo, con $0\leq i<p-(k-2)$.
Para $j=1$ supongamos, por contradicción, que $[z_1,i]_T$ tiene color a y que $[z_1,i{+}(k{-}2)]_T$ tiene color b, con $a{\neq}b$. Ahora bien, si $(z_1,i)\in F(T)$ y $(z_1,i+(k-2))\in F(T)$, entonces

$$T_k=(z_1,i)\cup(i,\alpha,i+(k-2))\cup(z_1,i+(k-2))\subseteq T$$

es una $(1,1,k-2)$-subdivisión de un T_3 3-coloreado en T, contradiciendo la hipótesis del Teorema. Si en cambio $(z_1,i)\in F(T)$ y $(i+(k-2),z_1)\in F(T)$, entonces

$$C_k=(z_1,i)\cup(i,\alpha,i+(k-2))\cup(i+(k-2),z_1)\subseteq T$$

es una $(1,1,k{-}2)$-subdivisión de un C_3 3-coloreado en T, nuevamente una contradicción. Si $(i,z_1)\in F(T)$ y $(z_1,i{+}(k{-}2))\in F(T)$, entonces existe

$$S_k=(i,z_1,i+(k-2))\cup(i,\alpha,i+(k-2))\subseteq T$$

que es una $(1,1,k-2)$-subdivisión de un T_3 3-coloreado en T, una contradicción. De otro modo si $(i,z_1)\in F(T)$ e $(i{+}(k{-}2),z_1)\in F(T)$, entonces

$$T_k=(i,\alpha,i+(k-2))\cup(i+(k-2),z_1)\cup(i,z_1)\subseteq T$$

es una $(1,1,k{-}2)$-subdivisión de un T_3 3-coloreado, una contradicción de nuevo.
Supongamos que la afirmación se cumple para $j=n$ $(p-(k-2))>i+n(k-2)\geq i)$. Para $j=n+1$ $(p>i+(n+1)(k-2)\geq i+(k-2))$ procedemos como en la base de inducción.

3: Para cada i tal que $p\geq i>k-2$ se cumple lo siguiente: si $[z_1,i]_T$ tiene color a ($a\neq$ negro), entonces para cada j tal que $p-(k-2)\geq i-j(k-2)>0$ se tiene que $[z_1,i-j(k-2)]_T$ tiene color a.
Procederemos por inducción sobre j. Sea i fija tal que $p\geq i>(k{-}2)$ y $[z_1,i]_T$ tiene color a. Para $j=1$ si suponemos que $[z_1,i{-}(k{-}2)]_T$ es de

Figura 3: Si $[z_1, i]_T$ es de color $a \neq$negro y $[i + j_0(k-2), z_1]_T$ es de color b, con $b \neq a$ y $b \neq$negro

color b con $a \neq b$, entonces se sigue del inciso anterior que $[z_1, i]_T$ tiene color b, lo cual es una contradicción, así que la afirmación se cumple para $j = 1$. Supongamos que la afirmación es cierta para $j = n$ (notemos que $p-(k-2) \geq i-n(k-2) > k-2$). Ahora bien, para $j = n+1$ $(p-2(k-2) \geq i-(n+1)(k-2) > 0)$ si $[z_1, p-(n+1)(k-2)]_T$ es de color b, entonces es consecuencia del inciso anterior que $[z_1, p-n(k-2)]_T$ tiene color b, nuevamente una contradicción ya que $[z_1, p-n(k-2)]_T$ es de color a por hipótesis inductiva.

Dependiendo la longitud de α resta analizar los siguientes casos:

Caso A. $p = m(k-2)$ com $m \in N$ y $m \geq 2$ ($p > k-2$ por el inciso 1).
$(z_1, z_2 = 0) \in F(T)$ es azul y $[z_1, p-(k-2)]_T$ es también azul según el inciso 2). Ahora bien, si $(z_1, p-(k-2)) \in F(T)$ entonces

$$C_k = (p = z_0, z_1, p-(k-2)) \cup (p-(k-2), \alpha, p = z_0) \subseteq T$$

es una $(1,1,k-2)$-subdivisión de C_3 3-coloreado en T. En cambio, si $(p-(k-2), z_1) \in F(T)$, entonces existe

$$T_k = (p-(k-2), \alpha, p = z_0) \cup (p = z_0, z_1) \cup (p-(k-2), z_1) \subseteq T,$$

el cual es una $(1,1,k-2)$-subdivisión de un T_3 3-coloreado en T. En ambos casos hemos obtenido una contradicción, la que nos permiten afirmar que el Caso A es imposible.

Figura 4: Caso A. Si $(p-(k-2), z_1) \in F(T)$ y es azul

Caso B. $p = m(k-2) + r$, con $m, r \in N$, $m \geq 1$ y $1 \leq r < k-2$.

4: $(p-r, z_1) \in F(T)$ y es azul.
$(z_1, z_2 = 0) \in F(T)$ y es de color azul así que $[z_1, m(k-2) = p-r]_T$ es también azul (consecuencia del inciso 2). Si $(z_1, p-r) \in F(T)$ entonces existe

$$C_t = (z_1, p-r) \cup (p-r, \alpha, p = z_0) \cup (z_0, z_1) \subseteq T$$

$(t < k)$, el cual es una $(1, 1, t-2)$-subdivisión de C_3 3-coloreado en T, una contradicción. Por lo tanto $(p-r, z_1) \in F(T)$ y es de color azul.

Sean $h = (k-2) - r$, $A_1 = \{j(k-2) \mid m \geq j \geq 0\}$, $A_2 = \{p - j(k-2) \mid m \geq j \geq 0\}$ y $A = A_1 \cup A_2$. Observe el lector que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ya que $0 < r < k-2$.

5: Para toda $i \in A$ se cumple que $(z_1, i) \in F(T)$.
Procediendo por contradicción definamos primero

$$f = \text{mín}\{u \in A \mid (u, z_1) \in F(T)\}$$

($f > 0$ ya que $(z_1, 0) \in F(T)$). Definamos ahora $f - h = w$ siempre que $f \in A_1$ y $f - r = w$ siempre que $f \in A_2$. Entonces se sigue de la definición de f que $(z_1, w) \in F(T)$ (nótese que si $f \in A_1$ entonces $w \in A_2$ y que si $f \in A_2$ entonces $w \in A_1$).
Ahora, si $f \in A_1$ entonces $w \in A_2$, $(f, z_1) \in F(T)$ es azul (consecuencia de que $(z_1, z_2) \in F(T)$ es azul y por el inciso 2) y $(z_1, w) \in F(T)$ es de color rojo (esto porque $(z_0, z_1) \in F(T)$ es roja y por el inciso 3). Entonces existe

$$C_t = (f, z_1) \cup (z_1, w) \cup (w, \alpha, f) \subseteq T$$

($h < k-2$ así que $t < k$) que resulta ser un ciclo 3-coloreado, lo cual es una contradicción.
Análogamente, si $f \in A_2$ entonces $w \in A_1$, $(z_1, w) \in F(T)$ es azul (ya que $(z_1, z_2) \in F(T)$ es azul y por el inciso 2) y $(f, z_1) \in F(T)$ es roja (pues $(z_0, z_1) \in F(T)$ es roja y por el inciso 3). Entonces

$$C_t = (f, z_1) \cup (z_1, w) \cup (w, \alpha, f) \subseteq T$$

($t < k$ ya que $r < k-2$) es un ciclo 3-coloreado, obteniendo una contradicción de nuevo.

En particular se sigue del inciso anterior que $(z_1, p-r = m(k-2)) \in F(T)$, contradiciendo el punto 4).

$\square$

Figura 5: Caso B. Si $f \in A_1$

Corolario 2. *El Teorema 2 es una generalización del Teorema de Shen Minggang (ver la sección de Antecedentes en el Prefacio y el Apéndice).*

2. Observaciones

A continuación se realizarán una serie de afirmaciones relativas a cómo se relacionan los Teoremas presentados en este capítulo con algunos de los ya conocidos previamente y mencionados en el Prefacio de esta tesis. Para facilitar al lector la identificación de tales Teoremas, puede hacerse uso del anexo en donde se incluye una tabla con esa información.

Observación 1. Si en el Teorema 1 solamente se pide que todo $C_k \subseteq T$ sea a lo más bicolor y no sea una $(2, k-2)$-subdivisión de C_2-bicolor

Figura 6: Caso B. Si $f \in A_2$

(es decir, se omite la hipótesis de que todo $C_t \subseteq T$ $(t < k)$ es a lo más 2-coloreado, según la definición 1), entonces el resultado enunciado es falso.

Demostración. Como prueba, considérese el torneo D de orden 4 de la Figura 7-izq. Existe $C_t = (1, 2, 3, 1) \subseteq D$ $(3 = t < k = 4)$ que es 3-coloreado y, aunque todo $C_k \subseteq D$ es a lo más 2-coloreado (k=4) y no es una (2,$k-2$)-subdivisión de C_2-bicolor (lo cual se cumple por vacuidad), se puede observar que D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Nótese que podemos construir de manera recursiva una familia infinita de contraejemplos de la siguiente forma: sea D_n el torneo de orden n con $V(D_n) = \{1, 2, 3, ..., n\}$ y $F(D_n) = F(D_{n-1}) \cup \{(n, i)$ *de color* $a, i \in \{1, 2, ..., n-1\}\}$. La figura 7a-der. muestra un ejemplo para $n = 6$. $\square$

Observación 2. Si se omite la última hipótesis c) en el Teorema 2 (ver definición 2), entonces el resultado es falso (considere el torneo de la Figura 7a y el argumento de la observación anterior).

Figura 7: Observación 1.

Observación 3. Las condiciones de Shen Minggang y de Galeana-Sánchez no implican las condiciones de los Teoremas 1 y 2.

Demostración. Observe la Figura 8:

1: La Condición II no implica la condición de Shen Minggang: para probarlo considere el torneo T de la Figura 8a.T cumple las hipótesis de la condición II para k=5: nótese que si existe una subdigráfica $S \subseteq T$ 3-coloreada, con $S \equiv \mathcal{T}_k$ o $S \equiv C_s$ $(s \leq k = 5)$, entonces $\{(z_0, z_1), (z_2, z_1)\} \subset F(S)$, por lo tanto $S \not\equiv C_k$; además no existe una z_0z_5-trayectoria de longitud mayor o igual que 2 y no existe una z_0z_5-trayectoria de longitud mayor o igual que 2, por lo tanto $S \equiv \mathcal{T}_k$. Sin embargo existe $\mathcal{T}_3$=$(z_4, z_2, z_1) \cup (z_4, z_1) \subseteq T$ 3-coloreado (de manera que la condición de Shen Minggang no se cumple).

2: La condición de Shen Minggang no implica la condición II:
Sea T un torneo 3-coloreado y de orden 6, como se muestra en la Figura 8b. Todo $C_3 \subseteq T$ y todo $\mathcal{T}_3 \subseteq T$ son a lo más bicolores (nótese que si existe $S \subseteq T$ 3-coloreado, con |V(S)|=3, entonces $\{(z_0,\ z_1),\ (z_1,\ z_2)\} \subset F(S)$ o bien $\{(z_0,\ z_2),\ (z_1,\ z_2)\} \subset F(S)$ y en cualquiera de los dos casos $S \not\equiv \mathcal{T}_3$ y $S \not\equiv C_3$), sin embargo existe C_6=(z_0, z_1, $z_2 = a, b, c, d, e = z_0) \subseteq T$, una (1, 1, k-2)-subdivisión de C_3 3-coloreado, de manera que la condición II no se cumple.

3: La condición de Galeana-Sánchez no implica la condición II:
Considérese el torneo T que se muestra en la Figura 8c.

4: La Condición II no implica la condición de Galeana-Sánchez:
Para demostrarlo basta exhibir el torneo de la Figura 8d.

5: La Condición I no implica la condición de Shen Minggang:
Sea T el torneo 3-coloreado de orden 4 de la Figura 8e.Nótese que no existen ciclos contenidos en T (pues $\delta^+(z_4)$=0), así que las hipótesis de la condición I se cumplen por vacuidad, y existe $\mathcal{T}_3 = (z_1, z_2, z_3) \cup (z_1, z_3)$ 3-coloreado.

6: La condición de Shen Minggang no implica la Condición I:
Considere la digráfica de la Figura 8f: todo triángulo es 2 coloreado pero existe $C = (z_0, z_1, 0, 1, 2, 3, 4)$ una (1,1,k-2)-subdivisión de C_3 3-coloreado, con k=6.

7: La Condición I no implica la condición de Galeana-Sánchez:
Para demostrarlo basta exhibir la digráfica de la Figura 8g que cumple las hipótesis de la Condición I y no cumple las hipótesis de la condición del Teorema de Galeana-Sánchez (existe C_4=(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4=z_0) $\subseteq$ T no casimonocromático).

8: La condición de Galeana-Sánchez no implica la condición I:
Considérese el torneo T de la Figura 8hen el que todo C_4⊆T es casimonocromático y existe una (1, k-2)-subdivisión de C_2-bicolor, a saber (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5=z_0).

□

Figura 8: Observación 3

Figura 9: Observación 3

3. Problemas Abiertos

Problema abierto 1. Sea T un torneo m-coloreado. Si existe un entero fijo $k \geq 3$ tal que todo $C_s \subseteq T$ $(s \leq k)$ es a lo más bicolor, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta.

Problema abierto 2. Sea T un torneo m-coloreado. Si existe un entero fijo $k \geq 3$ tal que T no contiene ni $(1, 1, k-2)$-subdivisiones de C_3 3-coloreado ni $(1, 1, t-2)$-subdivisiones de C_3 3-coloreado $(3 \leq t < k)$, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta.

Problema abierto 3. Sea T un torneo m-coloreado. Si existe un entero fijo $k \geq 3$ tal que T no contiene ni $(1, 1, k-2)$-subdivisiones de T_3 3-coloreado ni $(1, 1, t-2)$-subdivisiones de C_3 3-coloreado $(3 \leq t < k)$, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta.

CAPíTULO 3

Subdigráficas de orden pequeño

En esta sección presentamos tres nuevas condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias en torneos m-coloreados. Tales condiciones obligan que determinadas subdigráficas de T de orden pequeño (a saber, 4 y 5) cumplan coloraciones específicas, como es la coloración casimonocromática y a lo más bicolor. Se prueba además que las condiciones presentadas no se implican mutuamente.

1. Resultados

1.1. Condición I.

DEFINICIÓN 1. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T tiene la propiedad P si:
a) Todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática de T y
b) Todo $C_3 \subseteq T$ es a lo más bicolor.

TEOREMA 1. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad P entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por contradicción. Supongamos que $C(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta. Entonces se sigue del Lema **??** la existencia del ciclo $\gamma = (z_0,\ z_1,\ z_2 = 0, 1, 2, \ldots,\ p = z_0)$ que satisface las propiedades enunciadas en el mismo.

1: $p \geq 2$:
Si $p < 2$ entonces según el Lema **??**-c se tiene que γ es un ciclo 3-coloreado de longitud 3, contradiciendo la hipótesis b) de la definición **??**.

2: $(z_0,\ z_2) \in F(T)$:
Si $(z_2,\ z_0) \in F(T)$, entonces es de color rojo o azul (de no ser así entonces existe un ciclo $C_3 \subseteq T$ 3-coloreado, a saber $C_3 = (z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_0)$,

lo cual es una contradicción) de donde se sigue que $(z_2,\, z_0,\, z_1) \subseteq T$ es una trayectoria de color rojo o bien $(z_1,\, z_2,\, z_0) \subseteq T$ es una trayectoria de color azul, respectivamente. En ambos casos se ha llegado a una contradicción.

3: Para cada i tal que $0 \leq i \leq p-2$ se cumple lo siguiente: si $(z_1, i) \in F(T)$, entonces para cada $m \in N$ tal que $i+2 \leq i+2m < p$ es cierto que $(i+2m, z_1) \in F(T)$ siempre que m es impar y $(z_1, i+2m) \in F(T)$ cada vez que m es par.
Probaremos la afirmación por inducción sobre m. Supondremos primero que $(z_1, i) \in F(T)$ para alguna i tal que $0 \leq i \leq p-2$.
Supongamos ahora, por contradicción, que $(i+2, z_1) \notin F(T)$. Entonces $(z_1, i+2) \in F(T)$ (ya que T es un torneo) de manera que existe

$$\mathcal{T}_4 = (z_1, i, i+1, i+2) \cup (z_1, i+2) \subseteq T$$

el cual no es una subdigráfica casimonocromática como consecuencia del Lema **??**-f (pues (z_1, i) y $(z_1, i+2)$ no pueden tener color negro), contradiciendo que todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática por hipótesis. De la misma forma podemos concluir que $(z_1, i+4) \in F(T)$ (supongamos, por contradicción, que $(z_1, i+4) \notin F(T)$, de manera que $(i+4, z_1) \in F(T)$, por tanto existe

$$\mathcal{T}_4 = (i+2, i+3, i+4, z_1) \cup (i+2, z_1) \subseteq T$$

que es no casimonocromático nuevamente como consecuencia del Lema **??**-f, lo cual, como antes, es una contradicción.
Supongamos ahora que para toda n tal que $i+2 \leq i+2n \leq p-2$ se cumple lo siguiente: si n es par entonces $(z_1, i+2n) \in F(T)$, en cambio, si m es impar entonces $(i+2n, z_1) \in F(T)$.
A continuación probaremos la afirmación para $n+1$. Si n es par supongamos, por contradicción, que $(z_1, i+2(n+1)(k-2)) \in F(T)$; entonces existe

$$\mathcal{T}_4 = (z_1, i+2n, i+2n+1, i+2(n+1)) \cup (z_1, i+2(n+1)) \subseteq T$$

(nótese que $(z_1, i+2n) \in F(T)$ por hipótesis de inducción) el cual no es una subdigráfica casimonocromática según el Lema **??**)-f (el cual implica que $(z_1, i+2n)$ y $(z_1, i+2(n+1))$ no son negras), contradicción. Por otro lado si n es impar supongamos, nuevamente por contradicción, que $(i+2(n+1)(k-2), z_1) \in F(T)$; entonces existe

$$\mathcal{T}_4 = (i+2n, i+2n+1, i+2(n+1), z_1) \cup (i+2n, z_1) \subseteq T$$

(obsérvese que $(i+2n(k-2), z_1) \in F(T)$ por hipótesis inductiva) el cual no es casimonocromático (por el Lema **??**)-f se tiene que $(z_1, i+2n)$ y $(z_1, i+2(n+1))$ no son negras), una contradicción.

4: Para cada i tal que $2 \leq i \leq p$ se cumple lo siguiente: si $(i, z_1) \in F(T)$, entonces para toda $m \in N$ tal que $0 \leq i-2m \leq i-2$, $(z_1, i-2m) \in F(T)$ si m es impar e $(i-2m, z_1) \in F(T)$ si m es par.
Sea i tal que $2 \leq i \leq p$ e $(i, z_1) \in F(T)$. Sea m tal que $0 \leq i-2m \leq i-2$. Si m es impar entonces, procediendo por contradicción, supongamos que $(z_1, i-2m) \notin F(T)$ así que $(i-2m, z_1) \in F(T)$ (T es torneo) y por el inciso previo (tomando $i-2m$ como i) se tiene que $(z_1, i) \in F(T)$, una contradicción. Un argumento completamente análogo sirve para el caso en que m es par.

Figura 1: Flechas entre z_1 y los vértices de α, con $k=4$ y $m=1,2$

5: $(z_1, 1) \in$F(T) :
Si $(1, z_1) \in F(T)$, entonces existe C_3=$(z_1, z_2, 1, z_1) \subseteq T$ el cual es a lo más bicolor por hipótesis así que $(1, z_1) \in F(T)$ es de color negro o azul. Ahora, se sigue del Lema **??**-f que $(1, z_1) \in F(T)$ es azul por lo que

$$\mathcal{T}_4 = (z_0, z_2, 1, z_1) \cup (z_0, z_1)$$

es una subdigráfica 3-coloreada, contradicción.

6: (p-1, z_1)$\in F(T)$.
Si $(z_1, p-1) \in F(T)$, entonces existe C_3=$(z_1, p-1, z_0, z_1) \subseteq T$ y es una subdigráfica casimonocromática por hipótesis, de manera que $(z_1, p-1)$ es negra o roja. Pero es consecuencia del Lema **??**-f que $(z_1, p-1)$ es roja. Entonces

$$\mathcal{T}_4 = (z_1, p-1, p = z_0, z_2 = 0) \cup (z_1, z_2) \subseteq T$$

no es una subdigráfica bicolor, contradicción.

Figura 2: $(p-1, z_1) \in F(T)$ si $k = 4$

Caso A. $p = 2m$**, para alguna** $m \in N$
Subcaso A1. $p = 2m$, con m impar.
$(p-1, z_1) \in F(T)$ por el inciso 6) así que se sigue del inciso (**??**) que $(1, z_1) \in F(T)$, contradiciendo el punto **??**.

Figura 3: Conclusión del subcaso A1

Subcaso A2. $p = 2m$, con m par.

$(z_0,\ z_1) \in F(T)$ así que se sigue del inciso (**??**) que $(z_2{=}0,\ z_1) \in F(T)$ (con $i = p$), una contradicción.

Caso B. $p = 2m + 1$**, para alguna** $m \in N$

Subcaso B1. $p = 2m + 1$, con m par.

$(z_1,\ z_2{=}0) \in F(T)$ así que por el punto (**??**) tenemos que $(z_1, p - 1) \in F(T)$, lo cual contradice el punto (**??**).

Subcaso B2. $p = 2m + 1$, con m impar.

7: $(1,\ z_0) \in F(T)$:

Si $(z_0,\ 1) \in F(T)$ entonces $\mathcal{T}_4 = (z_0, z_1, z_2 = 0, 1) \cup (z_0, 1) \subseteq T$ es no casimonocromático, una contradicción.

8: $(z_2, p - 1) \in F(T)$:

Si $(p{-}1, z_2) \in F(T)$ entonces $\mathcal{T}_4 = (p{-}1, z_0, z_1, z_2 = 0) \cup (p{-}1, z_2) \subseteq T$ es no casimonocromático, una contradicción.

Entonces existen las siguientes subdigráficas:

$$\mathcal{T}_{4_A} = (z_1, 1, z_0, z_2) \cup (z_1, z_2) \subseteq T$$
$$\mathcal{T}_{4_B} = (z_0, z_2, p - 1, z_1) \cup (z_0, z_1) \subseteq T$$
$$C_3' = (z_0, z_1, 1, z_0) \subseteq T.$$

9: $\mathrm{color}(z_2, p - 1) \neq \mathrm{color}(p - 1, z_1)$ (de lo contrario tales flechas forman una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática en T, contradiciendo el Lema **??**).

10: color(z_1, 1)$\neq$color(1, z_0) (de lo contrario existe una $z_1 z_0$-trayectoria monocromática en T, contradiciendo el Lema **??**).

Figura 4: $\mathcal{T}_{4_A}$, $\mathcal{T}_{4_B}$ y C_3'

11: (z_1, 1)$\in F(T)$ es de color rojo o bien (1, z_0)$\in F(T)$ es de color rojo.

De no cumplirse esta afirmación entonces C_3' es un ciclo 3-coloreado, contradicción.

Subcaso B2-a. (1, z_0)$\in F(T)$ es roja.

12: (z_1, 1)$\in F(T)$ es azul (esto debido a que $\mathcal{T}_{4_A}$ es casimonocromático y al inciso **??**).

13: (z_0, z_2)$\in$ $F(T)$ es azul (pues $\mathcal{T}_{4_A}$ es casimonocromático y por el punto previo).

14: (p-1, z_1)$\in A(\mathcal{T}_{4_B})$ y ($z_2 = 0, p-1) \in A(\mathcal{T}_{4_B})$ son ambos rojos o son ambos azules:

$(z_0, z_2) \in A(\mathcal{T}_{4_B})$ es azul (punto anterior), $(z_0, z_1) \in F(T)$ is roja (Lema **??**) y $\mathcal{T}_{4_B}$ es una subdigráfica casimonocromática.

Entonces $(z_2, p-1, z_1) \subseteq T$ es una $z_2 z_1$-trayectoria monocromática, contradicción.

Figura 5: Conclusión del subcaso B2-a

Subcaso B2-b. $(z_1,\, 1) \in F(T)$ es roja.

15: $(1,\, z_0) \in F(T)$ es azul (ya que $\mathcal{T}_{4_A}$ es una subdigráfica casimonocromática y por el inciso **??**).

16: $(z_0,\, z_2) \in F(T)$ es azul (debido a que $\mathcal{T}_{4_A}$ es casimonocromático y por el inciso previo).

17: (p-1, z_1)$\in F(\mathcal{T}_{4_B})$ y $(z_2 = 0, p-1) \in F(\mathcal{T}_{4_B})$ son ambos rojos o ambos azules. (se sigue del inciso anterior ya que $\mathcal{T}_{4_B}$ es una subdigráfica casimonocromática).

Entonces $(z_2, p-1, z_1) \subseteq T$ es una z_2z_1-trayectoria monocromática.
Esta contradicción concluye la prueba.

Figura 6: Conclusión del subcaso B2-b

□

1.2. Condición II.

Definición 2. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T tiene la propiedad Q si cumple las siguientes condiciones:
a) Todo $S_4 \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática en T y
b) Todo $C_t \subseteq T$ $(t \leq 4)$ es a lo más bicolor.

Teorema 2. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad Q, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que la cerradura $C(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta, así que se sigue del Lema **??** la existencia del ciclo $\gamma = (z_0,\ z_1,\ z_2{=}0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p\ =\ z_0)$ que satisface las propiedades a-f enunciadas en el mismo. Añadiremos a continuación nuevas propiedades que nos permitirán llegar a una contradicción.

1: p$\geq$3.
Del Lema **??**-c se tiene que $p \geq 2$. Ahora, si $p = 2$ entonces γ es un $C_4 \subseteq T$ 3-coloreado, contradiciendo la hipótesis del Teorema.

2: (p-1, z_2)$\in F(T)$.
Si (z_2, p-1)$\in F(T)$, entonces existe el ciclo 3-coloreado $C_4 = (p-1,$ $z_0,\ z_1,\ z_2,\ p-1) \subseteq T$, contradicción.

3: (z_0, 1)$\in F(T)$.
Si (1, z_0)$\in F(T)$, entonces C_4=(1, z_0, z_1, z_2, 1)$\subseteq T$ es un ciclo 3-coloreado, contradicción

4: Si (1, z_1)$\in F(T)$, entonces es de color azul.
Esto se sigue del Lema **??**-f (tal flecha no puede ser negra) ya que C_3=(1, z_1, z_2, 1)$\subseteq T$ es a lo más bicolor por hipótesis.

5: Si (z_1, 1)$\in F(T)$, entonces es de color rojo y por lo tanto (z_0, z_2)$\in F(T)$ es roja.
Si (z_1, 1)$\in F(T)$, entonces existe S_4=(z_0, z_1, 1)$\cup$(z_0, z_2, 1)$\subseteq T$ el cual es una subdigráfica casimonocromática de T por hipótesis. Por lo tanto (z_1, 1)$\in F(T)$ es negra o roja. Según el Teorema **??**-f tal flecha no es negra así que la afirmación se cumple.

6: Si (z_1, p-1)$\in F(T)$, entonces es de color rojo.
Si (z_1, p-1)$\in F(T)$, entonces existe C_3=(z_1, $p-1$, z_2, 1, z_1)$\subseteq T$ que es un ciclo a lo más bicolor por hipótesis, así que $(z_1, p-1) \in F(T)$ es negra o roja. Haciendo uso del Lema **??**-f concluimos que la coloración de tal flecha es rojo.

7: Si ($p-1$, z_1)$\in F(T)$, entonces es de color azul y por lo tanto (z_0, z_2)$\in F(T)$ es también azul.
Suponiendo que ($p-1$, z_1)$\in F(T)$ entonces existe

$$S_4 = (p-1, z_1, z_2) \cup (p-1, z_0, z_2) \subseteq T$$

el cual es casimonocromático por hipótesis, con lo cual podemos afirmar que ($p-1$, z_1)$\in F(T)$ es negra o azul. Sin embargo no puede ser negra como consecuencia directa del Lema **??**-f. Por lo tanto ($p-1$,

z_1)$\in F(T)$ es azul y aludiendo de nuevo a la casimonocromacidad del S_4 mencionado se tiene que (z_0, z_2)$\in F(T)$ es también azul.

Continuaremos la prueba considerando varios casos a analizar:

Caso I. ($p-1$, z_1)$\in F(T)$ y (z_1, 1)$\in F(T)$.

Existe entonces la subdigráfica 3-coloreada

$$S_4 = (p-1, z_0, z_2) \cup (p-1, z_1, z_2) \subseteq T$$

(consecuencia de los puntos 5 y 7), contradiciendo la hipótesis del Teorema.

Figura 7: Caso AI. ($p-1$, z_1)$\in F(T)$ y (z_1, 1)$\in F(T)$.

Caso II. ($p-1$, z_1)$\in F(T)$ y (1, z_1)$\in F(T)$.

Subcaso II-A. $p \geq 4$.

8: (1, $p-1$) $\in F(T)$ y es azul.

Para probar que (1, $p-1$) $\in F(T)$ supongamos lo contrario, es decir, asumamos que $(p-1, 1) \in F(T)$. Entonces existe

$$S_4 = (p-1, 1, z_1) \cup (p-1, z_0, z_1) \subseteq T$$

que es una subdigráfica 3-coloreada (consecuencia del punto 4), contradicción. Entonces (1, p-1)$\in F(T)$ (pues T es torneo) de manera que existe el ciclo

$$C_4 = (1, p-1, z_1, z_2, 1) \subseteq T$$

el cual es a lo más bicolor por hipótesis del Teorema. Ahora, como (p-1, z_1) es azul (inciso 7), entonces (1, p-1)$\in F(T)$ es negra o azul. Finalmente se descarta la coloración negra de la misma debido a la minimalidad de la elección de α).

9: $(p-2,\ z_1)\in F(T)$ y color$(p-2, z_1)$=color$(p-1, z_2)$=azul.
Primero, para probar la existencia de la flecha en cuestión, supongamos que $(z_1, p-2) \in F(T)$. Entonces existe

$$C_3 = (z_1, p-2, p-1, z_1) \subseteq T$$

(recuerde el lector que $(p-1,\ z_1)\in F(T)$ por hipótesis del Caso II) el cual no es un ciclo policromático por hipótesis así que$(z_1, p-2) \in F(T)$ es azul (consecuencia del punto (**??**) y del Lema **??**-f) y por lo tanto existe el ciclo 3-coloreado

$$C_4 = (z_1, p-2, p-1, z_0, z_1) \subseteq T$$

, contradicción que nos permite asegurar que $(p-2,\ z_1)\in F(T)$. Entonces existe

$$S_4 = (p-2, z_1, z_2) \cup (p-2, p-1, z_2) \subseteq T$$

(remítase el lector al inciso 2) el cual es una subdigráfica casimonocromática por hipótesis. Finalmente la afirmación se sigue directamente del Lema **??**-f.

10: $(z_0,\ 1)\in F(T)$ es negra (la existencia de tal flecha se justifica en el inciso 3).
Como S_4=$(p-1,\ z_2,\ 1)\cup$(p-1, z_0, 1)$\subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática y $(p-2,\ z_1)\in F(T)$ es azul (inciso anterior), entonces la afirmación se cumple.

11: $(p-2,\ z_0)\in F(T)$.
De lo contrario $(z_0, p-2) \in F(T)$ (T es torneo) y por lo tanto existe

$$S_4 = (z_0, p-2, p-1) \cup (z_0, 1, p-1) \subseteq T$$

el cual, al ser casimonocromático por hipótesis, obliga a que $(z_0 p-2) \in F(T)$ sea de color negro (las demás flechas del mencionado S_4 ya están coloreadas, a saber $(z_0,\ 1)$ es negra por el inciso 10 y $(1,\ p-1)$ es azul por el inciso 8, de manera que

$$S_4 = (z_0, p-2, z_1) \cup (z_0, 1, z_1) \subseteq T$$

no es casimonocromático, una contradicción.
Para finalizar el análisis del Caso II-A basta observar que

$$S_4 = (p-2, p-1, z_1) \cup (p-2, z_0, z_1) \subseteq T$$

es una subdigráfica 3-coloreada, contradicción.

Figura 8: Caso AII. $(p-1,\ z_1) \in F(T)$ y $(1,\ z_1) \in F(T)$.

Subcaso II-B. p=3.

12: $(2,\ z_2) \in F(T)$ es azul.
Esto debido a la casimonocromacidad de S_4=$(1,\ 2,\ z_2) \cup (1,\ z_1,\ z_2) \subseteq T$ (ver inciso 2 con p-1=2) y aludiendo al inciso 4 (el inciso 2 justifica la existencia de la flecha $(2,\ z_2)$ y por lo tanto la del S_4 en cuestión; por otro lado todas las flechas a excepción de $(2,\ z_2)$ ya están coloreadas: las que pertenecen a α, $(z_1,\ z_2)$ son negras y finalmente $(1,\ z_1) \in F(T)$ que es azul por el inciso 4).

13: $(z_0,\ 1)$∈F(T) es negra.
La existencia de esta flecha se sigue del inciso 3. Entonces, aludiendo de nuevo al inciso 2 para justificar que $(2,\ z_2) \in F(T)$, existe

$$S_4 = (p-1 = 2, z_0, 1) \cup (p-1 = 2, z_2, 1) \subseteq T$$

el cual es casimonocromático por hipótesis y sabemos además la coloración de todas excepto una de sus flechas: (2, z_2)$\in F$(T) es azul por el inciso anterior, y (p-1=2, z_0) junto con (z_2, 1) que son negras.

14: (2, z_0)$\notin A(Asim(C(T)))$.

Pues (z_0=3, 1, 2)$\subseteq T$ es una $z_0$2-trayectoria monocromática en T. ((z_0=3, 1) es negra según el punto 13).

15: Existe $v \notin${z_0=3, z_1, z_2=0, 1, 2} tal que

$$(v, z_0) \in F(T) \cap F(Asim(C(T))) :$$

En la prueba del Lema **??** fue exhibido que existe $v \notin${z_0, z_1, z_2} tal que $(v, z_0)\in F(Asim(C(T))$. Además se sigue de los puntos **??** y **??** que $v \notin${1, 2}.

Digamos que (v, z_0)$\in F(T)$ es de color x.

16: (v, z_1)$\in F(T)$.

De lo contrario $(z_1, v) \in F(T)$ y por lo tanto existe el no policromático por hipótesis C_3=(z_1, v, z_0, z_1)$\subseteq T$ de manera que (z_1, v)$\in F(T)$ es roja o de color x. Ahora, si $(z_1, v) \in F(T)$ es roja entonces (z_0=3, $z_1, v) \subseteq T$ es una z_0v-trayectoria monocromática, contradiciendo el punto (**??**). Por otro lado, si $(z_1, v) \in F(T)$ tiene color x entonces (z_1, v, z_0=3)$\subseteq T$ es una z_1z_0-trayectoria monocromática, una contradicción nuevamente (Lema **??**-e).

17: (v, z_2)$\in F(T)$.

Si $(z_2, v)\in F(T)$, entonces existe C_4=(v, z_0, z_1, z_2, v)$\subseteq T$, quien no es policromático por hipótesis, así que (z_2, v) es roja o azul y $x \in$ {rojo, azul}. Si (z_2, v)$\in F(T)$ es azul entonces (z_0, z_2, v)$\subseteq T$ es una z_0v-trayectoria monocromática (pues (z_0, z_2)$\in F(T)$ es azul según el inciso point (**??**)), lo cual es una contradicción. Entonces (z_2, v)$\in F(T)$ es roja y por lo tanto

$$S_4 = (z_2, v, z_1) \cup (z_2, 1, z_1) \subseteq T$$

(punto 4) es una subdigráfica 3-coloreada, una contradicción.

18: $(v, 2) \in F(T)$.

Si (2, v) $\in F(T)$, entonces existe S_4=(2, v, z_2)$\cup$(2, z_0, z_2)$\subseteq T$, casimonocromática por hipótesis, de donde (2, v) $\in F(T)$ es negra o azul. Tal flecha no puede tener coloración negra (de ser así (z_0, 1, 2, v) $\subseteq T$ es una z_0v-trayectoria monocromática (ver inciso 13), contradiciendo el punto **??**) así que invariablemente es de color azul y por lo tanto

$$S_4 = (2, v, z_1) \cup (2, z_0, z_1) \subseteq T$$

(ver punto 16) es una subdigráfica 3-coloreada, contradicción.

19: $(v,\ z_0)\in F(T)$ y $(v, 2) \in F(T)$ son ambas de color azul (así que x=azul).

S_4=(v, z_0, z_1)$\cup$(v, 2, z_1)$\subseteq$T es una subdigráfica casi-monocromática de manera que $(v,\ z_0)\in F(T)$ y $(v, 2) \in F(T)$ son ambas rojas o ambas azul; de suceder lo primero entonces

$$S_4 = (v, z_0, z_2) \cup (v, 2, z_2) \subseteq T$$

no es una subdigráfica casimonocromática (remítase el lector a los puntos 12 y 17), lo cual es una contradicción. Así que la afirmación se cumple.

Figura 9: Caso II-B. Orientación y coloración de las flechas.

Con la información recopilada hasta ahora podemos notar que $(v,\ z_0,\ z_1)\subseteq T$ es una trayectoria bicolor contenida en $Asim(C(T))$ lo que implica que z_0 cumple las propiedades ostentadas por z_1 en el Lema **??**, así, todas los resultados enunciados en tal Teorema, se cumplen. En particular, podemos asegurar que existe una z_1v-trayectoria monocromática en T de longitud al menos 2 y de color $y \notin$\{rojo, azul\} (Lema **??**-c). Como consecuencia existe $w \in V(T)$-\{z_0, z_1, z_2, v, 1, 2\} ($w \notin$\{z_0, z_1, z_2, v, 1, 2\} ya que T es un torneo y debido a cómo es la dirección de las flechas que tienen un extremo en z_1) tal que (z_1, w)$\in F(T)$ es de color y. Concluyamos el caso II con las siguientes observaciones:

20: $(v, w) \in F(T)$.
Si $(w, v) \in F(T)$, entonces existe el ciclo 3-coloreado C_4=(w, v, z_0, z_1, w)$\subseteq T$, contradicción.

21: $(z_0, w) \in F(T)$.
Si (w, z_0)$\in F(T)$, entonces existe C_4=(w, z_0, 1, z_1, w)$\subseteq T$ el cual no es policromático por hipótesis de manera que y=negro (recuerde el lector que y no es ni rojo ni azul) y además color(w, z_0)$\in$\{negro, azul\} (se sigue de los puntos 4 y 13). Ahora, si (w, z_0)$\in$F(T) es negro, entonces (z_1, w, z_0)$\subseteq T$ es una z_1z_0-trayectoria monocromática, contradicción. Podemos entonces suponer que (w, z_0)$\in F(T)$ es azul y por tanto C_3=(z_1, w, z_0, z_1)$\subseteq T$ es un ciclo 3-coloreado, contradicción.

22: (w, z_2)$\in F(T)$.
Supongamos que (z_2, w)$\in F(T)$. Entonces S_4=(z_0, z_2, w)$\cup$(z_0, z_1, w)$\subseteq T$ es una subdigráfica 3-coloreada (se sigue del inciso 7 ya que $y \notin$\{rojo, azul\}), contradicción.

23: (z_0, w)$\in F(T)$ y (z_1, w)$\in F(T)$ son ambas negras.
S_4=(2, z_0, w)$\cup$(2, z_1, w)$\subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática e $y \notin$\{rojo, azul\} (inciso 7).

Para concluir observemos que S_4=(z_0, w, z_2)$\cup$(z_0, z_1, z_2)$\subseteq T$ es 3-coloreado, contradicción.

Caso III. (z_1, p-1)$\in$F(T) y (z_1, 1)$\in$F(T).

Subcaso III-A. p$\geq$5

24: (1,p-1)$\in F(T)$ y es roja.
Si ($p-1$, 1)$\in F(T)$, entonces S_4=(z_1, $p-1$, 1)$\cup$(z_1, z_2, 1)$\subseteq T$ es una subdigráfica 3-coloreada ((z_1, $p-1$)$\in F(T)$ es roja según el inciso 6), contradicción. Así que (1, $p-1$)$\in F(T)$ y C_4=(z_1, 1, $p-1$, z_0, z_1)$\subseteq$T cumple por hipótesis ser no policromático de manera que (1, p-1)$\in F(T)$ es roja o negra (por el inciso 5 se sabe que (z_1, 1) es una flecha roja), la última opción se descarta por a la minimalidad de α.

25: (z_1, 2)$\in F(T)$ y color(z_1, 2)=color(z_0, 1)=azul.
Si (2, z_1)$\in F(T)$, entonces es azul (C_4=(z_1, z_2=0, 1, 2, z_1)$\subseteq T$ es a lo

Figura 10: Caso II-B. Conclusión.

más bicolor por hipótesis así que la flecha en cuestión es negra o azul, pero se descarta la posibilidad de que sea negra como consecuencia del Lema **??**-f de manera que C_3=(2, z_1, 1, 2)$\subseteq T$ es un ciclo 3-coloreado (ver inciso 5), contradicción. Así que (z_1, 2)$\in F(T)$ y entonces existe

$$S_4 = (z_0, z_1, 2) \cup (z_0, 1, 2) \subseteq T$$

(en el inciso (**??**) se demostró que (z_0, 1)$\in F(T)$) el cual es casimonocromático por hipótesis y como consecuencia se tiene que tanto (z_1, 2)$\in F(T)$ como (z_0, 1)$\in F(T)$ son ambas rojas o negras. Se concluye que su coloración es roja ya que (z_1, 2) no puede ser negra según el Lema **??**-f.

26: ($p-1$, z_2)$\in F(T)$ es negra.

La existencia de la flecha se justificó en el inciso 2 y de ella se sigue que existe

$$S_4 = (p-1, z_0, 1) \cup (p-1, z_2, 1) \subseteq T$$

que es casimonocromático por hipótesis. Entonces considerando lo probado en el punto anterior, la afirmación es cierta.

27: (z_1, p-2)$\in F(T)$ y además es de color rojo.

Si suponemos primero que (p-2, z_1)$\in F(T)$, entonces existe

$$S_4 = (p-2, z_1, z_2) \cup (p-2, p-1, z_2) \subseteq T,$$

casimonocromático por hipótesis. Se sigue entonces que (p-2, z_1)$\in F(T)$ es negra (remítase el lector al inciso 26), contradiciendo el Lema **??**-f. Por lo tanto (z_1, p-2)$\in F(T)$ y podemos concluir que es roja ya que existe el ciclo no policromático C_4=(z_1, $p-2$, $p-1$, p=z_0, z_1)$\subseteq T$ y (z_1, p-2)$\in F(T)$ no puede ser negra (Lema **??**-f.

28: (1, p-2)$\in F(T)$ is es roja.

Si (p-2, 1)$\in F(T)$ entonces S_4=(z_1, z_2, 1)$\cup$(z_1, $p-2$, 1)$\subseteq T$ es una subdigráfica 3-coloreada (ver inciso 27), una contradicción. Por lo tanto (1, $p-2$)$\in$F(T). Ahora, existe

$$C_4 = (z_0, 1, p-2, p-1, p = z_0) \subseteq T$$

y no es policromático por hipótesis, así que (1, p-2)$\in F(T)$ es roja o negra, sin embargo la última opción se descarta debido a la minimalidad de α).

29: (z_0, $p-2$)$\in F(T)$ y es de color rojo.

Si suponemos que ($p-2$, z_0)$\in F(T)$, entonces existe S_4=(z_1, $p-2$, z_0)$\cup$(z_1, $p-1$, z_0)$\subseteq T$ y dado que éste es casimonocromático por hipótesis, se tiene que ($p-2$, z_0)$\in F(T)$ es roja (considerando además las afirmaciones probadas en los incisos 6 y 27), de donde se sigue que (z_1, $p-2$, z_0)$\subseteq T$ es una $z_1 z_0$-trayectoria monocromática, una contradicción. Por lo tanto (z_0, $p-2$)$\in F(T)$. Existe entonces

$$S_4 = (z_0, z_1, p-1) \cup (z_0, p-2, p-1) \subseteq T$$

y dada la casimonocromacidad del mismo (por hipótesis[1]) se puede afirmar que (z_0, p-2)$\in F(T)$ es roja.

30: ($p-2$, z_2)$\in F(T)$ y es roja.

Si (z_2, $p-2$)$\in F(T)$, entonces existe S_4=($p-1$, z_0, p-2)$\cup$($p-1$, z_2, p-2)$\subseteq T$, éste es casimonocromático y por tanto (z_2, p-2)$\in F(T)$ es negra (considerando los incisos 26 y 29), lo que contradice la minimalidad de α. Entonces (p-2, z_2)$\in F(T)$, de manera que existe S_4=(z_1, p-2, z_2)$\cup$(z_1, $p-1$, z_2)$\subseteq T$ y al ser éste casimonocromático entonces (p-2, z_2)$\in F(T)$ es forzosamente roja (véanse los incisos 6, 26 y 27).

[1]En lo subsecuente ya no se recordará al lector esta hipótesis del Teorema.

31: (z_1, p-3)∈F(T) y es roja.

Si (p-3, z_1)∈F(T,) entonces ya que S_4=(p-3, p-2, $p-1$)∪(p-3, z_1, $p-1$)⊆ T es casimonocromático, se tiene que (p-3, z_1)∈ $F(T)$ es negra, contradiciendo el Lema **??**. Así que (z_1, p-3)∈ $F(T)$ y por tanto existe la subdigráfica casimonocromática

$$S_4 = (z_1, p-3, p-2) \cup (z_1, 1, p-2) \subseteq T$$

de donde se puede afirmar que (z_1, $p-3$)∈ $F(T)$ es roja (ver incisos 5 y 28).

32: (p-3, z_2)∈ $F(T)$ y es roja.

Si (z_2, p-3)∈ $F(T)$, entonces dado que se implica la existencia del S_4=(z_2, $p-3, p-2$)∪(z_2, 1, $p-2$)⊆ T casimonocromático, se tiene que (z_2, p-3)∈F(T) es negra, contradiciendo la minimalidad de α. Por lo tanto (p-3, z_2)∈ $F(T)$ y existe entonces

$$S_4 = (z_1, p-3, z_2) \cup (z_1, p-1, z_2) \subseteq T,$$

que al ser casimonocromático, implica que (p-3, z_2)∈ $F(T)$ sea roja (ver incisos 6, 26 y 31).

33: (p-3, $p-1$)∈ $F(T)$.

Si ($p-1$, p-3)∈ $F(T)$ entonces es de color rojo (pues existe la subdigráfica casimonocromática S_4=($p-1$, $p-3$, z_2)∪($p-1$, z_0, z_2)⊆ T y por los incisos 5 y 32) de manera que se forma S_4=($p-1$, z_0, $p-2$)∪($p-1$, $p-3, p-2$)⊆ T , quien no es casimonocromático (29), contradicción.

Con la información hasta ahora obtenida podemos concluir que ($p-3$, $p-1$)∈F(T) es negra (S_4=(p-3, $p-1$, z_2)∪(p-3, p-2, z_2)⊆ T es casimonocromático y se sigue de los incisos 26, 30, 31 y 33), contradiciendo de nuevo la elección de α. Finalizamos así el análisis del Subcaso III-A.

Subcaso III-B. p=3

34: (z_0, 1)∈ $F(T)$ es roja (ver inciso 3).

La flecha existe según se probó en el inciso 3. Para finalizar la prueba, nótese que S_4=(z_0, z_1, $p-1$=2) ∪(z_0, 1, $p-1$=2)⊆ T es casimonocromático y (z_1, 2) no puede ser negra (Lema **??**-f) y es de hecho roja (6).

35: ($p-1$=2, z_2)∈ $F(T)$ es negra (recuérdese el inciso 2).

S_4=($p-1$=2, z_2, 1)∪($p-1$, p=z_0, 1)⊆ T es casimonocromático así que la afirmación se sigue del punto **??**.

Figura 11: Caso III-A. (z_1, $p-1$)$\in$ $F(T)$ y (1, z_1)$\in$ $F(T)$ (p=5:abajo, $p \geq 6$:arriba)

36: (z_2, 1)$\notin$ $F(Asim(C(T)))$.
(1, 2, z_2)$\subseteq$ T es una 1z_2-trayectoria monocromática.

37: Existe $v \notin \{z_0=3,\ z_1,\ z_2=0,\ 1,\ 2\}$ tal que

$$(z_2, v) \in F(T) \cap F(Asim(C(T))) :$$

De la prueba del Lema **??** tenemos que existe v$\notin\{z_0,\ z_1,\ z_2\}$ tal que $(z_2,\ v)$∈F(Asim(C(T)) $((z_1,\ z_2) \in F(Asim(C(T))$, así que v$\neq z_1$ y si sucediera que v$=z_0$ entonces existe $\gamma=(z_0,\ z_1,\ z_2,\ v=z_0) \subseteq T$, que es a lo más bicolor por hipótesis, de donde $(z_2,\ v) \in F(T)$ es forzosamente roja o azul, implicando que exista una $z_2 z_1$-trayectoria roja o una $z_1 z_0$-trayectoria azul respectivamente, en ambos casos, una contradicción).
Ahora bien, de los incisos **??** y **??** se tiene que v$\notin\{1,\ 2\}$.
Digamos que $(z_2,\ v) \in F(T)$ es de color x.

Figura 12: Conclusión del Caso III-B.

38: $(z_1,\ v) \in F(T)$.
Supongamos por el contrario que (v, $z_1) \in F(T)$, entonces existe el ciclo no policromático $C_3=(z_1,\ z_2,\ v,\ z_1) \subseteq T$, de donde $(v,\ z_1) \in F(T)$ es azul o roja. Si $(v,\ z_1) \in F(T)$ es azul entonces $(v,\ z_1,\ z_2) \subseteq T$ es una vz_2-trayectoria monocromática, contradiciendo el punto **??**. De

otro modo, si $(v,\ z_1)\in F(T)$ es de color x entonces $(z_2,\ v,\ z_1)\subseteq T$ es una z_2z_1-trayectoria monocromática, nuevamente una contradicción (Lema **??**-d).

39: $(z_0,\ v)\in F(T)$.
Si $(v,\ z_0)\in F(T)$ entonces existe $C_4=(z_0,\ z_1,\ z_2,\ v,\ z_0)\subseteq T$ que al no ser policromático implica que $(v,\ z_0)\in F(T)$ es roja o azul. Si $(v,\ z_0)\in F(T)$ es roja, entonces $(v,\ z_0,\ z_2)\subseteq T$ es una vz_2-trayectoria monocromática ($(z_0,\ z_2)\in F(T)$ es roja según el inciso 5), contradicción. Concluimos entonces que $(v,\ z_0)\in F(T)$ es azul. Así que

$$S_4 = (z_1, v, z_0) \cup (z_1, 2, z_0) \subseteq T$$

es una subdigráfica 3-coloreada (inciso 16), contradicción.

40: $(1,\ v)\in F(T)$.
Si $(v,\ 1)\in F(T)$, entonces existe $S_4=(z_1,\ v,\ 1)\cup(z_1,\ z_2,\ 1)\subseteq T$, éste es casimonocromático así que $(v,\ 1)\in F(T)$ es negra o azul y no puede ser negra pues de ser así entonces $(v,\ 1,\ p-1=2,\ z_2)\subseteq T$ es una vz_2-trayectoria monocromática, contradiciendo el punto **??**), de manera que $(v,\ 1)\in F(T)$ es azul, implicando que

$$S_4 = (z_0, z_2, 1) \cup (z_0, v, 1) \subseteq T$$

es 3-coloreado (punto 5), contradicción.

41: $(2,\ v)\in F(T)$.
Si $(v,\ 2)\in F(T)$, entonces existe el ciclo no policromático $C_4=(v,\ 2,\ z_0,\ z_2,\ v)\subseteq T$ por lo que $(v,\ 2)\in F(T)$ es negra o roja y $(z_2,\ v)\in F(T)$ es también negra o roja (i.e. x$\in${rojo, negro}). Ahora bien, $(v,\ 2)\in F(T)$ no puede ser negra (de lo contrario $(v,\ p-1=2,\ z_2)\subseteq T$ es una vz_2-trayectoria monocromática, contradiciendo el inciso **??**) así que es de color rojo. Aún más, x=color$(z_2,\ v)$ es también roja (existe la subdigráfica casimonocromática $S_4=(z_1,\ z_2,\ v)\cup(z_1,\ 1,\ v)\subseteq T$ y por el inciso 5). Además la flecha $(z_0,\ v)\in F(T)$ es negra ($S_4=(2,\ z_0,\ v)\cup(2,\ z_2=0,\ v)\subseteq T$ es casimonocromático y por el inciso 35). Entonces

$$S_4 = (z_0, v, 2) \cup (z_0, 1, 2) \subseteq T$$

($(z_0,\ 1,)\in F(T)$ es una subdigráfica no casimonocromática (haciendo uso de la observación hecha en el punto **??**), contradicción.

Figura 13: $(1, v) \in F(T)$, inciso 40.

Figura 14: $(2, v) \in F(T)$, inciso **??**

42: $(z_2, v) \in F(T)$ y $(1, v) \in F(T)$ son ambas de color rojo (i.e. x=rojo).
$S_4 = (z_1, z_2, v) \cup (z_1, 1, v) \subseteq T$ y $S_4 = (z_0, z_2, v) \cup (z_0, 1, v) \subseteq T$ son ambas

subdigráficas casimonocromáticas (incisos 5 y **??**).

Note el lector que (z_1, z_2, v)$\subseteq$ T es una trayectoria bicolor contenida en $Asim(C(T))$ y que z_2 cumple las propiedades que exhibe z_1 en el Lema **??**, así que cumple los resultados enunciados en tal Lema, en particular, existe una vz_1-trayectoria monocromática en T de longitud al menos 2 y de color $y \notin${rojo, azul} (Lema **??**-c). Como consecuencia, existe $w \in V(T)$-{z_0, z_1, z_2, v, 1, 2} tal que (w, z_1)$\in$ $F(T)$ es de color y ($w \notin${z_0, z_1, z_2, v, 1, 2} debido a cuál es la dirección de las flechas con extremo en z_1 y dado que T es un torneo, además recuérdese que $y \notin${rojo, azul}.) Para finalizar la prueba añadamos las siguientes afirmaciones:

43: (w, z_2)$\in$ $F(T)$.
Si (z_2, w)$\in$ $F(T)$, entonces y=negro y (z_2, w)$\in$ $F(T)$ es roja o negra (C_4=(w, z_1, 2, z_2, w)$\subseteq$ T no es un ciclo policromático y por los incisos 6 y 35). Sin embargo si (z_2, w)$\in$ $F(T)$ es negra, entonces (z_2, w, z_1)$\subseteq$ T es una z_2z_1-trayectoria monocromática, contradiciendo que (z_1, z_2)$\in$ $F(Asim(C(T)))$. Por lo tanto (z_2, w)$\in$ $F(T)$ es roja y así C_3=(z_1, z_2, w, z_1)$\subseteq$ T es un ciclo 3-coloreado, obteniéndose una contradicción nuevamente.

44: (z_0, w)$\in$ $F(T)$.
Si (w, z_0)$\in$ $F(T)$, entonces es de color rojo (pues S_4=(w, z_0, 1)$\cup$(w, z_1, 1)$\subseteq$ T es una subdigráfica casimonocromática y dado que y$\neq$rojo). Entonces S_4=(w, z_0, z_2)$\cup$(w, z_1, z_2)$\subseteq$ T es 3-coloreado (haciendo uso de los incisos 5 y 34), contradicción.

45: (w, z_1)$\in$ $F(T)$ y (w, z_2)$\in$ $F(T)$ son ambas de color negro.
S_4=(w, z_1, 1)$\cup$(w, z_2, 1)$\subseteq$ T es casimonocromático, y$\notin${rojo, azul} y por el inciso 5.

Concluimos este caso observando que $S_4 = (z_0, w, z_2) \cup (z_0, z_1, z_2) \subseteq T$ es una subdigráfica 3-coloreada (remítase el lector a los incisos 43 y 44).

Caso III-C. p=4

46: (1,3)$\in$ $F(T)$ y es de color rojo.
Si (3,1)$\in$ $F(T)$, entonces S_4=(z_1, 3, 1)$\cup$(z_1, z_2, 1)$\subseteq$ T es una subdigráfica 3-coloreada (considérese el inciso 6), contradicción. Por lo tanto (1, 3)$\in$ $F(T)$ así que existe

$$C_4 = (z_0, z_1, 1, 3, z_0) \subseteq T,$$

el cual es a lo más bicolor por hipótesis, de manera que (1,3)$\in F(T)$ es roja (se sigue del inciso 5 y del hecho de que no puede ser negra debido a la elección de α en el Lema **??**).

47: (z_1, 2)$\in F(T)$.
Si (2, z_1)$\in F(T)$, entonces existe C_4=(z_1, z_2, 1, 2, z_1)$\subseteq T$ y el mismo es no policromático por hipótesis, de ello y del Lema **??**-f se sigue que (2, z_1)$\in F(T)$ es azul. Entonces C_3=(2, z_1, 1, 2)$\subseteq T$ es un ciclo 3-coloreado (véase el inciso 5), contradicción.

48: (z_0, 1)$\in F(T)$ y (z_1, 2)$\in F(T)$ son ambas rojas (considere el lector a los incisos 2 y 3).
Se sigue de la existencia de la subdigráfica casimonocromática S_4=(z_0, z_1, 2)$\cup$(z_0, 1, 2)$\subseteq T$ y del Lema **??**-f.

49: (3, z_2)$\in F(T)$ es negra.
S_4=($p-1$=3, z_0, 1)$\cup$($p-1$=3, z_2, 1)$\subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática y por el inciso previo.

50: (2, z_2)$\in F(T)$ y además es roja.
Si (z_2, 2)$\in F(T)$ entonces existe la subdigráfica 3-coloreada S_4=(z_1, z_2, 2)$\cup$(z_1, 1, 2)$\subseteq T$ (punto 5), contradicción. Entonces (2, z_2)$\in F(T)$ y dado que S_4=(z_1, 2, z_2)$\cup$(z_1, $p-1$=3, z_2)$\subseteq T$ es casimonocromático por hipótesis (aludiendo a los incisos 6, 48 y 49) entonces (2, z_2)$\in F(T)$ es roja.

Finalmente podemos asegurar la existencia del no casimonocromático S_4=(1, 2, z_2)$\cup$(1, $p-1$=3, z_2)$\subseteq T$ (se recomienda al lector remitirse a los incisos 46, 49 y 50). Esta contradicción concluye la prueba del tercer caso.

Caso IV. (z_1, $p-1$)$\in F(T)$ y (1, z_1)$\in F(T)$.
Entonces C_4=(z_1, $p-1$, z_2, 1, z_1)$\subseteq T$ es un ciclo 3-coloreado (ver incisos 2, 4 y 6), contradicción. Concluimos así la prueba del Teorema.

□

1.3. Condición III.

Definición 3. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T tiene la propiedad R si se cumplen las siguientes afirmaciones:
a) Todo $S_4\subseteq T$ y todo $S_5\subseteq T$ son subdigráficas no policromáticas (a lo más bicolores),
b) Todo $C_3\subseteq T$ es un ciclo no policromático y
c) No existe en T una (1, 1, 2)-subdivision de un C_3 3-coloreado.

Figura 15: Caso III-C. p=4

Teorema 3. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad R entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Procediendo por contradicción. Supongamos que $C(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta. Entonces del Lema **??** se sigue que existe el ciclo $\gamma = (z_0,\ z_1,\ z_2{=}0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p = z_0)$ el cual satisface las propiedades enunciadas en el mismo. Añadiremos a continuación ciertas observaciones que nos permitirán encontrar una contradicción.

1: p$\geq$3.
Se sigue del Lema **??**-c que $p\ \geq$2. Ahora bien, si p=2 entonces γ es una (1,1,2)-subdivision de un C_3 3-coloreado, una contradicción.

2: Si $(1,\ z_1)\in F(T)$, entonces es azul.
Si $(1,\ z_1)\in F(T)$, entonces existe $C_3{=}(1,\ z_1,\ z_2{=}0,\ 1)\subseteq T$, que es un ciclo no policromático, de manera que $(1,\ z_1)\in F(T)$ es negra o azul, pero no es negra como consecuencia del Lema **??**-f.

3: Si $(p-1,\ z_1)\in F(T)$, entonces es azul.
Si $(p-1,\ z_1)\in F(T)$, entonces existe $S_4{=}(p-1,\ z_1,\ z_2)\cup(p-1,\ z_0,$

$z_2)\subseteq T$, que al no ser policromático implica que $(p-1,\ z_1)\in F(T)$ es azul o negra, la última opción se descarta directamente del Lema **??**-f.

4: Si $(z_1,\ 1)\in F(T)$, entonces es roja.
Si $(z_1,\ 1)\in F(T)$, entonces existe S_4=(p, z_2, 1)∪(p, z_1, 1)$\subseteq T$, de donde $(z_1,\ 1)\in F(T)$ es roja (no puede ser negra según el Lema **??**-f).

5: Si $(z_1,\ p-1)\in F(T)$, entonces es roja.
C_3=(z_1, $p-1$, p=z_2, z_1)$\subseteq T$ no es un ciclo policromático.

Caso I. (1, z_1)$\in F(T)$
Si (z_2, $p-1$)$\in F(T)$, entonces S_5=(z_2=0, $p-1$, p, z_1)∪(z_2=0, 1, z_1)$\subseteq T$ es 3-coloreado ((1, $z_1\in$(A)T) es azul según el inciso **??**), contradicción. Entonces ($p-1$, z_2)$\in F(T)$ y existe así el 3-coloreado S_5=($p-1$, p, z_1)∪($p-1$, z_2, 1, z_1)$\subseteq T$ (inciso 2), contradicción que finaliza el presente caso.

Figura 16: Caso I. (1, z_1)$\in F(T)$

Caso II. (z_1, 1)$\in F(T)$ y (z_1, $p-1$)$\in F(T)$.
Si (z_0, 1)$\in F(T)$ entonces S_5=(z_1, z_2, 1)∪(z_1, $p-1$, z_0, 1)$\subseteq T$ es 3-coloreado (inciso 4), contradicción. Por lo tanto (1, z_0)$\in F(T)$ y es roja debido a la existencia del no policromático S_4=(z_1, $p-1$, p)∪(z_1, 1, z_0=p)$\subseteq T$ ((1, z_0)$\in F(T)$ no puede ser negra como consecuencia de la elección de α).

Entonces $(z_1,\ 1,\ z_0)\subseteq T$ es una z_1z_0-trayectoria roja ($(z_1,\ 1)\in F(T)$ es roja por el inciso **??**), contradiciendo el Lema **??**-d.

Figura 17: Caso II. $(z_1,\ 1)\in F(T)$ y $(z_1,\ p-1)\in F(T)$

Caso III. $(z_1,\ 1)\in F(T)$ y $(p-1,\ z_1)\in F(T)$.

Claramente este caso no es factible pues existe la subdigráfica 3-coloreada S_5=$(p-1,\ z_1,\ 1)\cup(p-1,\ \text{p}=z_0,\ z_2=0,\ 1)\subseteq T$ ($(p-1,\ z_1)\in F(T)$ es azul según el inciso **??** y $(z_1,\ 1)$ tiene color rojo como se probó en el inciso 4), contradicción. Con esto finalizamos la prueba del Teorema.

□

1.4. Condición IV.

Teorema 4. *Sea T un torneo m-coloreado. Si todo $C_3\subseteq T$ y todo $\mathcal{T}_4\subseteq T$ es una subdigráfica no policromática, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $C(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta, entonces se sigue del Lema **??** que existe el ciclo $\gamma=(z_0,\ z_1,\ z_2=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p=z_0)$ que satisface las propiedades enunciadas en el mismo. Observemos algunas más que nos permitirán llegar a una contradicción.

1: $(z_1, 1) \in F(T)$.
Si por el contrario $(1, z_1) \in F(T)$ entonces es de color azul (pues C_3=(1, z_1, z_2=0, 1)$\subseteq T$ es no policromático por hipótesis) así que existe el policromático $\mathcal{T}_4$=(z_0, z_2=0, 1, z_1)∪(z_0, z_1))$\subseteq T$, contradicción.

2: $p \geq 3$.
Se sigue del Lema **??**-c que $p \geq 2$; ahora bien, si p=2 entonces deben ser analizados los dos siguientes casos: Si $(z_1, 1) \in F(T)$ entonces es de color rojo (C_3=(z_1, 1, z_0, z_1)$\subseteq T$ es a lo más bicolor y por el Lema **??**-f) y existe entonces la subdigráfica policromática

$$\mathcal{T}_4 = (z_1, 1, z_0, z_2) \cup (z_1, z_2) \subseteq T,$$

una contradicción. El otro caso consiste en que $(1, z_1) \in F(T)$ y de ser así entonces tal flecha es de color azul (C_3=(1, z_1, z_2, 1)$\subseteq T$ es a lo más bicolor y por el Lema **??**-f) de manera que existe la subdigráfica policromática

$$\mathcal{T}_4 = (z_0, z_2, 1, z_1) \cup (z_0, z_1) \subseteq T,$$

una contradicción.

3: $(p-1, z_1) \in F(T)$.
Si $(z_1, p-1) \in F(T)$, entonces es azul (C_3=(z_1, $p-1$, z_0, z_1)$\subseteq T$ es un ciclo no policromático y por el Lema **??**-f). Así que $\mathcal{T}_4$=(z_1, $p-1$, z_0, z_2)∪(z_1, z_2))$\subseteq T$ es una subdigráfica policromática, contradicción.

4: $(1, z_0) \in F(T)$.
Si $(z_0, 1) \in F(T)$, entonces $\mathcal{T}_4$=(z_0, z_1, z_2=0, 1)∪(z_0, 1))$\subseteq T$ es policromático, contradicción.

Con todo esto podemos justificar la existencia de

$$\mathcal{T}_4 = (p-1, z_1, 1, z_0) \cup (p-1, z_0) \subseteq T$$

que es no policromático por hipótesis general del Teorema, de donde, junto con el Lema **??**-c,f, se sigue que color(z_1, 1)=color(1, z_0)≠negro así que (z_1, 1, z_0)$\subseteq T$ es una z_1z_0-trayectoria monocromática en T, contradicción que concluye la prueba.

□

2. Observaciones

A continuación se realizarán una serie de afirmaciones relativas a cómo se relacionan los Teoremas presentados en este capítulo con los ya conocidos previamente y mencionados en el Prefacio de esta tesis. Para facilitar al lector la identificación de tales Teoremas, puede hacerse uso del anexo en donde se incluye una tabla con esa información.

Observación 1. Si en el Teorema **??** se pide solamente que todo $C_3 \subseteq T$ sea a lo más bicolor, entonces el resultado es falso. Ver Figura 19-izq.

Demostración. La digráfica G_5 introducida por primera vez en [**?**] cumple que todo $C_3 \subseteq G_5$ es a lo más bicolor, y existe un $\mathcal{T}_4 \subseteq G_5$ no casimonocromático, a saber, $(v_2, v_4, v_1, v_3) \cup (v_2, v_3)$. Además G_5 no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. □

Observación 2. Si en el Teorema **??** solamente se pide que todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ sea casimonocromático en T, entonces el resultado es falso. Ver Figura 19-izq.

Demostración. El torneo T cumple que todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática (solamente existe $(4, 1, 2, 3) \cup (4, 3)$), y existe un ciclo de longitud 3 3-coloreado, a saber $(3, 2, 1, 3)$. Además T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (1 no absorbe a 2, 2 no absorbe a 3, 3 no absorbe a 1 y 4 no absorbe a 3). □

Observación 3. La condición de Shen Minggang y la del Teorema **??** no se implican mutuamente.

Demostración. Para probarlo basta exhibir un contraejemplo en cada caso. Con el fin de probar que la condición de Minggang no implica la del Teorema **??** considere el torneo T de la Figura 20-izq. en donde, aunque toda subdigráfica de orden 3 es una subdigráfica casimonocromática (pues T es una digráfica bicolor), existe $\mathcal{T}_4=(v_1, v_2, v_3, v_4) \cup (v_1, v_4) \subseteq T$ que es no casimonocromático.
Por otro lado también puede probarse que la condición del Teorema **??** no implica la de Shen Minggang: considere el torneo T de la Figura 20-der. en donde $\mathcal{T}_4=(v_3, v_4, v_1, v_2) \cup (v_3, v_2)$ es la única de tales subdigráficas y es casimonocromático y además existe $\mathcal{T}_3=(v_1, v_3, v_2) \cup (v_1, v_2) \subseteq T$ que es 3-coloreado. □

Observación 4. La propiedad Q no implica la propiedad R.

Demostración. Para probarlo basta exhibir un contraejemplo. Considere para ello el torneo T de la figura 21-izq. (en necesario mencionar que las flechas que no se han dibujado pueden tener cualquiera de las dos direcciones posibles). Todo $S_4 \subseteq T$ es casimonocromático: de existir $S_4' \subseteq T$ no casimonocromático entonces $\{(v_5, v_4), (v_5, v_3)\} \subseteq F(S_4')$ lo cual es una contradicción (v_1 es el único vértice adyacente desde v_4 y v_1 no es adyacente desde v_3). Además todo C_4 es un ciclo no policromático: de existir $C_4' \subseteq T$ policromático entonces $\{(v_5, v_4), (v_5, v_3)\} \subseteq A(C_4')$, contradiciendo que para todo vértice $v \in C_4'$ se tiene que $\delta^+_{C_4}(v)=2$. Sin embargo $S_5=(v_5, v_3, v_2, v_1) \cup (v_5, v_4, v_1) \subseteq T$ es una subdigráfica policromática. □

Observación 5. La propiedad R no implica la propiedad Q.

Demostración. Proporcionaremos un contraejemplo. Considérese el torneo T de la figura 21-der. en donde todo $S_4 \subseteq T$ y todo $S_5 \subseteq T$ no es una subdigráfica policromática (pues T es un torneo bicolor) pero existe $S_4 \subseteq T$ no policromático, a saber $S_4=(v_3, v_2, v_1) \cup (v_3, v_4, v_1) \subseteq T$. □

3. Problemas abiertos

Problema abierto 1. Sea T un torneo m coloreado tal que no contiene C_3 3-coloreados y tal que todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ es a lo más una subdigráfica 3-coloreada. Entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Problema abierto 2. Sea T un torneo m coloreado tal que todo $C_t \subseteq T$ y todo $S_t \subseteq T$ ($t \leq 4$) son subdigráficas coloreadas con a lo más 2 colores. Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Figura 18: Caso III. $(z_1,\, 1) \in F(T)$ y $(p-1,\, z_1) \in F(T)$

Figura 19: Observaciones 4 y 5 (izq. y der. resp.)

Figura 20: Observación 6

Figura 21: Observaciones ?? y ??

CAPíTULO 4

Subdigráficas casimonocromáticas de orden k≥4

En este capítulo presentamos dos condiciones de coloración sobre los torneos que implican que la cerradura del mismo es núcleo perfecta y que por tanto T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (Lema **??**). Tales condiciones consisten en pedir una coloración de tipo casimonocromático en ciertas subdigráficas de orden $k \geq 4$ y una de tipo no policromática en ciclos de cierta longitud en T. Es menester mencionar que la primera condición aquí redactada es una generalización de la condición del Teorema 1.

1. Resultados

1.1. Condición I. Subdigráficas $\mathcal{T}_k$.

Definición 1. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T tiene la propiedad P_k para algún entero fijo k ≥4 si cumple las siguientes condiciones:
a) Todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática en T y
b) Todo ciclo $C_t \subseteq T$ $(t < k)$ es a lo más bicolor.

Teorema 1. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad P_k para algún entero fijo k ≥4, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que la cerradura, $C(T)$, no es núcleo perfecta, entonces se sigue del Lema **??** que existe un ciclo $\gamma = (z_0,\ z_1,\ z_2{=}0,\ 1,\ 2,\ ...,\ p = z_0)$ que satisface las propiedades enunciadas en el mismo. Observemos ahora lo siguiente.

1: $p \geq k-2$.

Si $p < k-2$ entonces se sigue de la propiedad c) del Lema **??** que γ

es un ciclo 3-coloreado y además de longitud $\ell < k$, contradiciendo la hipótesis del Teorema.

2: $(z_0,\ z_2)\in F(T)$.
Si $(z_2,\ z_0)\in F(T)$, entonces es de color azul o rojo (de no ser así entonces existe el ciclo 3-coloreado $C_3{=}(z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_0)$, contradicción) de manera que $(z_2,\ z_0,\ z_1)\subseteq T$ es una trayectoria roja o bien $(z_1,\ z_2,\ z_0)\subseteq T$ es una trayectoria azul respectivamente, en ambos casos, una contradicción.

3: Para cada i tal que 0≤i≤ $p-(k-2)$ se cumple lo siguiente: si $(z_1, i) \in F(T)$, entonces para todo $m \in \mathbf{N}$ tal que $i+(k-2) \leq i+m(k-2) \leq p$, es cierto que $(i+m(k-2),\ z_1)\in F(T)$ siempre que m es impar y se cumple que $(z_1,\ i+m(k-2))\in F(T)$ si m es par.
Probaremos la afirmación por inducción sobre m. Primero supongamos que $(z_1, i)\in F(T)$ para algún i tal que $0\leq i \leq p-(k-2)$ y supongamos, procediendo por contradicción, que $(i+(k-2),\ z_1)\notin F(T)$, entonces $(z_1,\ i+(k-2))\in F(T)$ (T es torneo) y por lo tanto existe el no casimonocromático

$$\mathcal{T}_k = (z_1, i) \cup (i, \alpha, i+(k-2)) \cup (z_1, i+(k-2)) \subseteq T$$

(pues se sigue del Lema **??**-f que $(z_1,\ i)$ y $(z_1,\ i+(k-2))$ no son negras), contradicción. De la misma forma se puede concluir que $(z_1,\ i+2(k-2))\in F(T)$ (suponga, procediendo por contradicción, que $(z_1,\ i+2(k-2))\notin F(T)$ así que $(i+2(k-2),\ z_1)\in F(T)$ y por lo tanto existe

$$\mathcal{T}_k = (i+(k-2), \alpha, i+2(k-2)) \cup (i+2(k-2), z_1) \\ \cup (i+(k-2), z_1) \subseteq T$$

el cual no es casimonocromático según el Lema **??**-f, contradicción).
Ahora, supongamos que para toda n tal que $i+(k-2) \leq i+n(k-2) \leq p-(k-2)$ se cumple lo siguiente: si m es par, entonces $(z_1,\ i{+}n(k{-}2))\in F(T)$, de otro modo, si m es impar entonces $(i{+}n(k{-}2),\ z_1)\in F(T)$. Probaremos que la afirmación es cierta para $n{+}1$.
Si n es par entonces procediendo nuevamente por contradicción supongamos que $(z_1,\ i+(n+1)(k-2))\in F(T)$. Existe entonces

$$\mathcal{T}_k = (z_1, i+n(k-2)) \cup (i+n(k-2), \alpha, i+(n+1)(k-2)) \\ \cup (z_1, i+(n+1)(k-2)) \subseteq T,$$

el cual no es casimonocromático según el Lema **??**-f (pues (z_1, $i+n(k-2)$) y (z_1, $i+(n+1)(k-2)$) no son negras), contradicción. Por otro lado, si n es impar, entonces como antes, procediendo por contradicción, supongamos que ($i+(n+1)(k-2)$, z_1)$\in F(T)$. Así, existe

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_k = (i+n(k-2), \alpha, i+(n+1)(k-2))&\\ \cup (i+(n+1)(k-2), z_1)&\\ \cup (i+n(k-2), z_1) \subseteq T,&\end{aligned}$$

que es una subdigráfica no casimonocromática según el Lema **??**-f, una contradicción de nuevo.

4: Para cada j tal que $k-2 \leq j \leq p$ es cierto que: si (j, z_1)$\in F(T)$ entonces para toda $m \in \mathbf{N}$ tal que $0\leq j-m(k-2) \leq j-(k-2)$ se cumple que (z_1, $j-m(k-2)$)$\in F(T)$ siempre que m es impar, o bien, ($j-m(k-2)$, z_1)$\in F(T)$ en el caso en que m es par.
Sea j tal que $k-2 \leq j \leq p$ y (j, z_1)$\in F(T)$ y sea m tal que $0\leq j-m(k-2) \leq j-(k-2)$. Si m es impar entonces supongamos que (z_1, $j-m(k-2)$)$\notin F(T)$ así que ($j-m(k-2)$, z_1)$\in F(T)$ (T es torneo) y entonces se sigue del inciso previo (tomando $j-m(k-2)$ como i) que (z_1, j)$\in F(T)$, contradicción. Un argumento completamente análogo sirve para probar el caso en que m es par.

5: (z_1, k-3)$\in F(T)$:
Si ($k-3$, z_1)$\in F(T)$, entonces existe C_{k-1}=(z_1, z_2=0)$\cup$(0, α, $k-3$)$\cup$($k-3$, z_1)$\subseteq T$, la cual es una subdigráfica a lo más bicolor por hipótesis, por lo tanto ($k-3$, z_1)$\in F(T)$ es azul (no es negra como consecuencia del Lema **??**-f). De esto se sigue que $\mathcal{T}_k$=(z_0, z_2=0)$\cup$(0, α, $k-3$) $\cup$($k-3$, z_1)$\cup$(z_0, z_1)$\subseteq T$ es 3-coloreado (nótese que tal subdigráfica contiene al menos una flecha negra de α dado que k$\geq$4), contradicción.

Caso I. k**=4** (remítase el lector a la prueba del Teorema 1).

Caso II. k$\geq$5

6: (z_0=p, 1)$\in F(T)$.
Si (1, p)$\in F(T)$, entonces C_4=(1, p=z_0, z_1, z_2=0, 1$\subseteq T$ es un ciclo 3-coloreado, contradicción.

Caso II.A. p>$k-2$

$\mathcal{T}_k$=(p, 1)$\cup$(1, α, $k-2$)$\cup$($k-2$, z_1)$\cup$(z_0, z_1)$\subseteq T$ (nótese primero, que (p, 1)$\in F(T)$ según se muestra en el inciso 3, y segundo, que ($k-2$,

z_1)$\in F(T)$ por el inciso 3 con i=0), casimonocromático por hipótesis, tiene al menos dos flechas negras (k≥5) y una de color distinto de negro (a saber, (z_0, z_1)), de manera que ($k-2$, z_1)$\in F(T)$ es negra, contradiciendo el Lema **??**-f.

Caso II.B. p=$k-2$

7: (z_1, $p-1$=$k-3$)$\in F(T)$ es roja.
(z_1, $k-3$=$p-1$)$\in F(T)$ (inciso **??**) de manera que existe C_3=(z_1, $p-1$, z_0, z_1)$\subseteq T$, el cual es a lo más bicolor por hipótesis, entonces (z_1, $p-1$)$\in F(T)$ es negra o roja y se descarta la primer opción como consecuencia del Lema **??**-f.

8: (1, z_1)$\in F(T)$ y es de color azul.
Primero, si (z_1, 1)$\in F(T)$, entonces existe $\mathcal{T}_k$=(z_1, 1)∪(1, α, $k-2$=z_0)∪(z_0, z_2)∪(z_1, z_2)$\subseteq T$ (inciso 2), casimonocromático por hipótesis, así que (z_1, 1) es de color negro (dado que k≥5 entonces $\mathcal{T}_k$ tiene al menos dos flechas negras y una que no lo es, a saber (z_1, z_2)), contradicción (Lema **??**-f). Concluimos entonces que (1, z_1)$\in F(T)$. Ahora bien, existe entonces C_3=(z_1, z_2=0, 1, z_1)$\subseteq T$, el que es casimonocromático por hipótesis, y además (1, z_1)$\in F(T)$ no es negra por el Lema **??**-f así que (1, z_1)$\in F(T)$ es azul.

Finalmente, existe entonces el ciclo 3-coloreado C_4=(z_1, $k-3$, $k-2$=z_0, 1, z_1)$\subseteq T$ (nótese que 1$\neq k-3$ dado que k≥5 y recuérdense los incisos 3, 6 y **??**). Esta contradicción concluye la prueba del Teorema. □

Agregamos al anterior otro resultado.

TEOREMA 2. *Sea T un torneo m-coloreado. Si todo $C_3\subseteq T$, todo $\mathcal{T}_k\subseteq T$ y todo $C_k\subseteq T$ es una subdigráfica no policromática en T para algún $k\geq 4$ y si además T no contiene alguna (1, 1,t-2)-subdivisión de un C_3 3-coloreado ($t<k$), entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

DEMOSTRACIÓN. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $C(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta, entonces se sigue del Lema **??** que existe un ciclo $\gamma=(z_0, z_1, z_2{=}0, 1, 2, ..., p=z_0)$ que satisface las propiedades enunciadas en el mismo. Primero nótese que $p\geq k-2$, de lo contrario $p<k-2$ y se sigue de la propiedad expresada en el inciso (c) del Lema **??** que γ es una (1, 1, t-2)-subdivisión de un C_3 3-coloreado ($t<k$) y ello constituye una contradicción. Ahora bien, si (z_0, $k-3$)$\in F(T)$

Figura 1: Conclusión del caso II-B, para k=5 y m=3

entonces

$$\mathcal{T}_k = (z_0, z_1, z_2) \cup (z_2, \alpha, k-3) \cup (z_0, k-3) \subseteq T$$

es una subdigráfica policromática. De otro modo, si $(k-3,\ z_0) \in F(T)$ entonces es

$$C_k = (z_0, z_1, z_2) \cup (z_2, \alpha, k-3) \cup (k-3, z_0) \subseteq T$$

la subdigráfica policromática. En ambos casos, una contradicción. □

1.2. Condición II. Subdigráficas $\mathcal{S}_k$.

Definición 2. Sea T un torneo m-coloreado. Diremos que T tiene la propiedad M_k para algún $k \geq 5$ si cumple las siguientes condiciones:
a) Todo $\mathcal{S}_k \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática de T y
b) Todo $C_t \subseteq T$ $(t \leq k)$ es un ciclo no policromático.

Teorema 3. *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad M_k para algún entero $k \geq 5$, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Procediendo por contradicción supongamos que la cerradura, $C(T)$, no es una digráfica núcleo perfecta, así que se sigue del Lemma **??** que existe un ciclo $\gamma = (z_0,\ z_1,\ z_2{=}0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p = z_0)$ que satisface las propiedades enunciadas en el mencionado Lema. Añadamos algunas más para llegar a una contradicción.

1: $p > k - 2$.
Si suponemos que $p \leq k - 2$, entonces γ es un ciclo policromático de longitud menor o igual a $k - 2$, contradiciendo la hipótesis general del Teorema.

2: $(z_0,\ z_2) \in F(T)$.
Si $(z_2,\ z_0) \in F(T)$. entonces es de color azul o rojo (de no ser así entonces existe el ciclo 3-coloreado $C_3{=}(z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_0)$, contradicción) de manera que $(z_2,\ z_0,\ z_1) \subseteq T$ es una trayectoria roja o bien $(z_1,\ z_2,\ z_0) \subseteq T$ es una trayectoria azul respectivamente, en ambos casos, una contradicción.

3: Para toda i tal que $1 \leq i \leq k - 3$ y para toda j tal que $p - 1 \geq j \geq p - (k - 3)$ se cumple que $(z_0,\ i) \in F(T)$ y $(j,\ z_2) \in F(T)$.
Supóngase que existe i, $1 \leq i \leq k - 3$, tal que $(i,\ z_0) \in F(T)$. Entonces existe el ciclo policromático

$$C_t = (i, z_0) \cup (z_0, z_1, z_2) \cup (z_0, \alpha, i) \subseteq T$$

con $t \leq k$, contradicción. De la misma manera, si existe j, $p - 1 \geq j \geq p - (k - 3)$, tal que $(z_2,\ j) \in F(T)$ entonces existe el ciclo policromático

$$C_t = (z_0, z_1, z_2) \cup (z_2, j) \cup (j, \alpha, z_0) \subseteq T$$

con $t \leq k$, lo cual es una contradicción nuevamente.

4: $(p - 1,\ 1) \in F(T)$.
Si $(1,\ p - 1) \in F(T)$ entonces $C_5{=}(p - 1,\ p = z_0,\ z_1,\ z_2{=}0,\ 1,\ p - 1) \subseteq T$ es un ciclo policromático, imposible.

Caso I. $p \geq 2(k - 3)$

Subcaso IA. $(k - 3,\ z_1) \in F(T)$.

Figura 2: $(z_0,\ i)\in F(T)$ y $(j,\ z_2)\in F(T)$

5: $(k-3,\ z_1)\in F(T)$ es de color azul.
C_{k-1}=$(k-3,\ z_1)\cup(z_1,\ z_2)\cup(z_2,\ \alpha,\ k-3)\subseteq T$ es un ciclo no policromático (hipótesis) así que la afirmación se cumple por el Lema **??**-f.

6: $(z_1,\ k\text{-}4)\in F(T)$ y es de color azul.
Supongamos primero que $(k\text{-}4,\ z_1)\in F(T)$, entonces existe

$$C_{k-2}=(k-4,z_1,z_2)\cup(z_2,\alpha,k-4)\subseteq T$$

y es no policromático (hipótesis) así que por el Lema **??**-f se tiene que $(k-4,\ z_1)\in F(T)$ es azul. Por lo tanto

$$S_k=(p-1,z_2)\cup(z_2,\alpha,k-4)\cup(k-4,z_1)\\ \cup(p-1,z_0,z_1)\subseteq T$$

está coloreado con al menos 3 colores (recuérdese que $(p-1,\ z_2)\in F(T)$ como se probó en el inciso **??**), lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que $(z_1,\ k-4)\in F(T)$, y su coloración azul se debe a la existencia del ciclo no policromático C_3=$(z_1,\ k-4,\ k-3,\ z_1)\subseteq T$ (inciso anterior) y al Lema **??**-f.

7: Si p>2$(k-3)$ entonces $(k-3$, p-$(k-3))\in F(T)$.
Por el contrario, supongamos que (p-$(k-3)$, $k-3)\in F(T)$; entonces

$$S_k = (p-(k-3), \alpha, z_0) \cup (z_0, z_1) \\ \cup (p-(k-3), k-3, z_1) \subseteq T$$

(ver inciso **??**) es una subdigráfica 3-coloreada, contradicción.

8: $(z_0$, p-$(k-3))\in F(T)$.
Si (p-$(k-3)$, $z_0)\in F(T)$ entonces alguno de los siguientes

$$C_5 = (p-(k-3), z_0, z_1, k-4, k-3, p-(k-3)) \subseteq T$$
$$C_4 = (p-(k-3), z_0, z_1, k-4, k-3 = p-(k-3)) \subseteq T$$

son ciclos policromáticos (ver incisos **??** y **??**), dependiendo si p>2$(k-3)$ o p=2$(k-3)$ respectivamente. En cualquier caso, una contradicción.

Entonces existe la subdigráfica 3-coloreada S_k=$(z_0$, p-$(k-3)$, $z_2)\cup(z_2$, α, $k-4)\cup$ $(z_0$, z_1, $k-4)\subseteq T$ (observemos que (p-$(k-3)$, $z_2)\in F(T)$ como puede verificarse en el punto **??**, recuérdense además los incisos **??** y **??**) y tal contradicción concluye la prueba del Subcaso IA.

Figura 3: Subcaso I-A. p≥2$(k-3)$ y $(k-3$, $z_1)\in F(T)$.

Subcaso IB. $(z_1$, $k-3)\in F(T)$.

9: $(z_1,\, k-3) \in F(T)$ es roja.
S_k=$(z_0,\, z_1,\, k-3) \cup (z_0,\, z_2) \cup (z_2,\, \alpha,\, k-3) \subseteq T$ (inciso 2) no es una subdigráfica policromática según dicta la hipótesis del Teorema, así que la afirmación se sigue del Lema **??**-f.

10: $(z_1$, p-$(k-3)) \in F(T)$ y es roja.
Si (p-$(k-3)$, $z_1) \in F(T)$ entonces es azul (pues S_k=(p-$(k-3)$, α, $z_0) \cup (z_0,\, z_2) \cup$(p-$(k-3)$, z_1, $z_2) \subseteq T$ (inciso 2) no es policromático y por el Lema **??**-f), de donde

$$S_k = (p-(k-3), z_2) \cup (z_2, \alpha, k-3) \\ \cup (p-(k-3), z_1, k-3) \subseteq T$$

es 3-coloreado (note el lector que (p-$(k-3)$, $z_2) \in F(T)$ según se arguye en el inciso **??**, y recuerde el inciso **??**), contradicción. Por lo tanto $(z_1,\, p-(k-3)) \in F(T)$ y aún más, tal flecha es roja dada la existencia del ciclo no policromático

$$C_{k-1} = (z_0, z_1, p-(k-3)) \cup (p-(k-3), \alpha, z_0) \subseteq T$$

y al Lema **??**-f.

En conclusión podemos observar la existencia de la subdigráfica 3-coloreada S_k=$(z_1$, p-$(k-3)$$\cup$(p-$(k-3)$, α, $p-1) \cup (p-1,\, 1) \cup (z_1,\, z_2,\, 1) \subseteq T$ (ver puntos **??** y **??**). Surge la contradicción que nos permite concluir el Subcaso IB.

Caso II. $k-2 < p < 2(k-3)$.

Subcaso IIA. $(z_1,\, k-3) \in F(T)$

11: $(z_1,\, k-3) \in F(T)$ es roja.
C_t=$(z_0,\, z_1,\, k-3) \cup (k-3,\, \alpha,\, z_0) \subseteq T$ (t<k-1) es no policromático y por el Lema **??**-f.

12: $(z_1$, p-$(k-3)) \in F(T)$ y es roja.
Si (p-$(k-3)$, $z_1) \in F(T)$ entonces es azul (C_t=(p-$(k-3)$, z_1, $z_2) \cup (z_2$, α, p-$(k-3)) \subseteq T$ (t<k-1) es a lo más bicolor y una vez más haciendo uso del Lema **??**-f) así que

$$C_t = (p-(k-3), z_1, k-3, z_2) \cup (z_2, \alpha, p-(k-3)) \subseteq T$$

(**??**), $t < k$, es policromático (menester es observar que $(k-3,\, z_2) \in F(T)$ según se vio en el inciso **??**), contradicción que establece la

Figura 4: Subcaso I-B. p≥2$(k-3)$ y $(z_1$, $k-3)\in F(T)$

afirmación.[1].
Entonces podemos suponer que efectivamente $(z_1$, p-$(k-3))\in F(T)$. Ahora, esta flecha tiene color rojo y ello se sigue de la existencia del ciclo no policromático

$$C_{k-1} = (z_0, z_1, p-(k-3)) \cup (p-(k-3), \alpha, z_0) \subseteq T$$

y, como el lector bien puede vaticinar, del Lema **??**-f.[2]

13: $(z_1$, p-$(k-4))\in F(T)$ y es roja.
Si (p-$(k-4)$, $z_1)\in F(T)$ entonces es azul (C_t=(p-$(k-4)$, z_1, $z_2)\cup(z_2$, α, p-$(k-4))\subseteq T$ es a lo más bicolor, con t≤k-1 -Lemma **??**-f) y por tanto existe el ciclo 3-coloreado C_3=(p-$(k-4)$, z_1, p-$(k-3)$, p-$(k-4)))\subseteq T$ (inciso **??**), contradicción. Se ha determinado ya que $(z_1$,

[1]De manera alternativa el lector puede observar que existe entonces el ciclo policromático C_t=(p-$(k-3)$, z_1, $k-3)\cup(k-3$, α, p-$(k-3)) \subseteq T$ (t<k-1 dado que p<2$(k-3)$). De cualquier manera, una contradicción.

[2]Cercanos ya a finalizar el presente texto no cabe la menor duda de la importancia del Lema **??**, no es necesaria ahora una explicación para su ubicación en un capítulo especial. Prometemos no recordar más su peculiar uso en lo que resta de esta demostración.

p-$(k-4)) \in F(T)$ y ahora es factible afirmar que es de color rojo pues existe

$$C_{k-2} = (z_0, z_1, p-(k-4)) \cup (p-(k-4), \alpha, z_0) \subseteq T$$

que es a lo más bicolor (Lema **??**-f).

Entonces la siguiente es una subdigráfica 3-coloreada

$$S_k = (z_1, p-(k-4)) \cup (p-(k-4), \alpha, z_0) \cup (z_0, 1) \\ \cup (z_1, z_2, 1) \subseteq T$$

(basta observar que $(z_0,\ 1) \in F(T)$ según se demostró en el inciso **??**). Hemos hallado una contradicción que finalice este Subcaso.

Figura 5: Subcaso II-A. $k-2$<p<$2(k-3)$ y $(z_1,\ k-3) \in F(T)$.

Subcaso IIB. $(k-3,\ z_1) \in F(T)$.

14: $(k-3,\ z_1) \in F(T)$ es de color azul.

C_{k-1}=$(k-3,\ z_1,\ z_2) \cup (z_2,\ \alpha,\ k-3) \subseteq T$ es no policromático (Lema **??**-f).

15: $(k-4,\ z_1) \in F(T)$ y es azul.

Si $(z_1,\ k-4) \in F(T)$, entonces es roja (C_t=$(z_0,\ z_1,\ k-4) \cup (k-4,\ \alpha,\ z_0) \subseteq T$, con t≤k-1, es no policromático) así que C_3=$(k-3,\ z_1,$ k-, $k-3) \subseteq T$ es 3-coloreado (inciso **??**), contradicción. Entonces $(k-4,\ z_1) \in F(T)$

y es de color azul debido a la existencia del ciclo no policromático C_t=($k-4$, z_1, z_2)∪(z_2, α, $k-4$)⊆ T (t≤$k-2$).

Concluimos el Subcaso IIB observando la siguiente contradicción: S_k=($p-1$, z_2)∪(z_2, α, $k-4$)∪($k-4$, z_1)∪($p-1$, z_0, z_1)⊆ T es una subdigráfica 3-coloreada (véase el inciso **??**, además note que ($p-1$, z_2)∈ $F(T)$ como se arguye en el inciso **??**, y $k-4 \neq p-1$ según el inciso 1).

Figura 6: Subcaso II-B. $k-2$<p<2($k-3$) y ($k-3$, z_1)∈ $F(T)$.

□

2. Observaciones

De la misma forma en que se ha hecho previamente, a continuación se realizarán una serie de afirmaciones relativas a cómo se relacionan los Teoremas presentados en este capítulo con los ya conocidos previamente y mencionados en el Prefacio de esta tesis. Para facilitar al lector la identificación de tales Teoremas, puede hacerse uso del anexo en donde se incluye una tabla con esa información.

Observación 1. Si en el Teorema **??** se solicita de manera exclusiva que todo C_3⊆ T sea a lo más bicolor, entonces el resultado es falso. Ver

Figura 7: Observaciones 9 y 10 (izq. y der. resp.)

Figura 7-izq. (todo $C_3 \subseteq T$ es a lo más bicolor pero T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas).

Observación 2. Si en el Teorema **??** se exige solamente que todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ sea una subdigráfica casimonocromática, entonces el resultado es falso. Ver Figura 7-der. para k=4 (todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ es casimonocromático pero T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas).

Observación 3. La condición establecida en el Teorema **??** no implica la del Teorema de Shen Minggang.

Demostración. Para probarlo basta considerar el torneo T con $V(T)=\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ tal que para toda i, $4 \leq \text{i} \leq \text{k}$, y para toda j, $\text{j}<\text{i}$, se cumple que $(v_i, v_j) \in F(T)$ y tiene color 1 (ver Figura 8); y tal que es un torneo que satisface además que existe la subdigráfica 3-coloreada $\mathcal{T}_3=(v_3, v_2, v_1) \cup (v_3, v_1) \subseteq T$. Obsérvese que todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática en T. $\square$

Observación 4. La condición establecida en el Teorema de Shen Minggang no implica la condición del Teorema **??**.

Demostración. Considere el torneo de la Figura 9 en el que todo $\mathcal{T}_3 \subseteq T$ y todo $C_3 \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática (T es un torneo 2-coloreado), sin embargo $\mathcal{T}_k=(v_0, v_2, ..., v_{k-1}) \cup (v_0, v_{k-1}) \subseteq T$ es una subdigráfica no casimonocromática. $\square$

Figura 8: Observación 11.

Figura 9: Observación 12.

Figura 10: Observación 13.

Observación 5. La propiedad de que todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática no implica la propiedad de que todo $\mathcal{T}_{k-1} \subseteq T$ es también una subdigráfica casimonocromática (de esta afirmación se sigue que la condición establecida en el Teorema **??** no implica la Condición del Teorema de Shen Minggang).

Demostración. Considere el Torneo de la Figura 10. Las flechas no dibujadas tienen dirección arbitraria y color rojo. Además se tiene que $\delta_T^+(v_k) = 0$. Todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática en T (de existir algún $\mathcal{T}_k$'$\subseteq T$ no casimonocromático se tiene entonces que $\{f_1, f_2\} \subseteq$F($\mathcal{T}_k$') y $v_k \in$V($\mathcal{T}_k$') por lo que existe una $v_0 v_{k-3}$-trayectoria P en T tal que $v_k \in V(T)$, contradiciendo que $\delta_T^-(v_k)$=0), sin embargo $\mathcal{T}_{k-1}$=(v_1, v_2, ..., v_{k-2})$\cup$(v_{k-2}, v_{k-1})$\subseteq T$ no es casimonocromático. $\square$

Observación 6. La propiedad P_k no implica la P_{k-1}.

Demostración. Considere el torneo 3-coloreado de la Figura 11. Las flechas que no han sido dibujadas tiene dirección arbitraria. Además, $\delta_T^+(v_{k-2})$=0 y $\delta_T^-(v_k)$=0. T satisface la propiedad P_k: no existe $C_t \subseteq T_k$ (t<k) policromático (de existir C_t'$\subseteq T$ policromático, $t < k$, entonces

Figura 11: Observación 14.

$\{f_1=(v_{k-1}, v_{k-2}), f_2=(v_{k-3}, v_{k-2})\} \subseteq F(C_t$') de manera que $\delta^-_{C'_t}(v_{k-2})$=2, contradicción) y todo $\mathcal{T}_k\subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática (de existir $\mathcal{T}_k$'$\subseteq TT_k$ no casimonocromático entonces $\{f_1,\ f_2)\}\subseteq F(\mathcal{T}_k$') y como f_1 y f_2 son flechas adyacentes entre ellas entonces existen solamente dos casos posibles: si $f_2\subseteq\mathcal{T}_k$' es la última flecha de la trayectoria de longitud $k-1$ en $\mathcal{T}_k$', entonces se sigue de la definición de $\mathcal{T}_k$' que existe una $v_{k-1}v_{k-3}$-trayectoria R$\subseteq\mathcal{T}_k$' tal que $v_k\in V(R)$; en el otro caso, si $f_1\subseteq\mathcal{T}_k$' es la última flecha de la trayectoria de longitud $k-1$ en $\mathcal{T}_k$', entonces se tiene que existe una $v_{k-3}v_{k-1}$-trayectoria Q en $\mathcal{T}_k$' tal que $v_k\in V(Q)$; en ambos casos, una contradicción (pues $\delta^-_T(v_k)$=0). Sin embargo T no satisface la propiedad P_{k-1} dado que existe la subdigráfica policromática $\mathcal{T}_{k-1}$=(v_0=v_k, v_1, ..., v_{k-2})∪(v_{k-1}, v_{k-2})$\subseteq T$. □

Observación 7. Si todo $S_k\subseteq T$ (k≥5) y todo $C_t\subseteq T$ ($t \leq k$) son a lo más bicolores, entonces no forzosamente todo $S_4\subseteq T$ es casimonocromático.

Demostración. Sea T_n (n≥5) la familia de torneos tal que S_4'=(v_3, v_2, v_1)∪(v_3, v_4, v_1)$\subseteq T_n$, con la propiedad de que color(v_3, v_4)=color(v_2,

v_1)=2 y color(v_4, v_1)=color(v_3, v_2)=1. El resto de las flechas tienen color 1 ó 2 y tienen dirección indistinta. Ver Figura 12.
Entonces todo $S_k \subseteq T_n$ (k≥4) y todo $C_t \subseteq T_n$ (t≤k) no son policromáticos (el torneo es bicolor), sin embargo existe $S_4 \subseteq T_n$ no casimonocromático, a saber S_4'. □

Observación 8. La propiedad M_k no implica la propiedad R (ver definiciones 3.3 y 4.2 resp.).

Demostración. Definiremos la siguiente familia de digráfica como prueba. Es importante observar que todas las flechas no especificadas tienen dirección arbitraria. Ver Figura 13.

$$\begin{aligned} T_4 :& V(T_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ & F(T_4) \subset F(S'_4) = ((v_3, v_4, v_1) \cup (v_3, v_2, v_1)) \\ T_k :& V(T_k) = V(T_{k-1}) \cup \{v_k\} \\ & F(T_k) = F(T_{k-1}) \cup \{(v_k, v_i) \mid i \leq k-1\}. \end{aligned}$$

Se cumple además que color(v_3, v_4)=2, color(v_3, v_2)=3 y todas las flechas restantes tienen color 1. Ver figura 8. Observe que no existe algún $S_k \subseteq T_k$ (k ≥5) policromático: de lo contrario, si existe S_k'$\subseteq T_k$ policromático entonces {(v_3, v_4), (v_3, v_2)}⊆F(S_k') y v_k∈V(S_k'), sin embargo $\delta^-_{T_k}(v_k)$=0, contradiciendo la definición de S_k'. Por otro lado S_4' es no casimonocromático. □

Observación 9. La propiedad R no implica la propiedad M_k (ver definiciones 4.2 y 3.3 resp.).

Demostración. Como prueba considérese el torneo T_6 de la Figura 14. Obsérvese que todo $S_4 \subseteq T_6$ y todo $S_5 \subseteq T_6$ son subdigráficas no policromáticas, sin embargo S_6=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)∪(v_1, v_6, v_5)$\subseteq T_6$ es policromático. □

3. Problemas abiertos

Problema abierto 1. Sea T un torneo m-coloreado. T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si existe un entero fijo $k \geq 4$ tal que todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática o casimonocromática o monocromática de T y una de las siguientes condiciones:
a) No existe $C_3 \subseteq T$ policromático o T no es un C_3 policromático.

Figura 12: Observación 15.

b) No existe $C_3\subseteq T$ policromático o T no es un C_3 policromático y todo $\mathcal{T}_t\subseteq T$ $(t<k)$ es una subdigráfica no policromática o casimonocromática o monocromática de T.

Figura 13: Observación 16.

Figura 14: Observación 17.

c) No existe $C_3 \subseteq T$ policromático o T no es un C_3 policromático y todo $C_k \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática o casimonocromática o monocromática de T.

d) No existe $C_3 \subseteq T$ policromático o T no es un C_3 policromático y todo $\mathcal{T}_{k-1} \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática o casimonocromática o monocromática de T.

Problema abierto 2. Sea T un torneo m-coloreado tal que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica casimonocromática de T. Entonces T contiene algún $C_t \subseteq T$ (t≥3) 3-coloreado.

Anexo

La siguiente Tabla reúne algunos de los resultados mencionados en el Prefacio y los demostrados a lo largo de la tesis. Permitirá al lector una más ágil lectura de la sección de Observaciones en cada capítulo pues podrá realizar un análisis comparativo de las mismas.

Año	Autores	Resultados
1982	Sands, et.al. [?]	Sea D 2-coloreada. Entonces $C(D)$, es núcleo perfecta. En particular si T es torneo 2-coloreado, entonces existe $v \in V(T)$ tal que para todo $x \in V(T) - \{v\}$ existe una xv-trayectoria monocromática en T.
1988	Minggang [?]	Sea T un torneo m-coloreado tal que todo triángulo contenido en T es casi-monocromático, entonces $C(T)$ tiene núcleo. Además si $m \geq 5$, entonces las hipótesis arriba mencionadas, son justas.
1990	Berge, Duchet [?]	Sea D una digráfica. Si todo ciclo contenido en D tiene al menos una flecha simétrica entonces D es núcleo perfecta.
1994	Galeana-Sánchez: [?]	Sea T un torneo m-coloreado: **1:** Sea Si todo $C_3 \subseteq T$ y todo $C_4 \subseteq T$ son casimonocromáticos, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta (además se prueba que esta condición no es implicada ni implica la de Minggang. **2:** Sea T un torneo m-coloreado tal que todo ciclo en T es monocromático, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta. En este artículo se introduce el concepto de cerradura.
1998	Galeana-Sánchez [?]	Las digráficas obtenidas de un torneo eliminando una única flecha, pertenecen a la clase de las digráficas tales que toda $\{C_3, C_4\}$-m-coloración libre es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.

Año	**Autor**	**Resultados**
2001	Galeana, García [?]	Las digráficas obtenidas de un torneo eliminando una única flecha, pertenecen a la clase de las digráficas tales que toda $\{C_3, T_3\} - m$-coloración libre es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.
2002	Galeana, Rojas [?]	Sea D una digráfica m-coloreada: **1:** Si D es cuasitransitiva y todo triángulo dirigido en D es monocromático, entonces $C(D)$ es núcleo perfecta. **2:** Si D es un torneo, m=3, todo C_3 es casimonocromático y todo vértice del torneo tiene vecindad a lo más bicolor, entonces su cerradura es núcleo perfecta. **3:** Si D no tiene trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores entonces la digráfica subdivisión, $S(D)$, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. **4:** Si D no tiene trayectorias monocromáticas infinitas exteriores ni ciclos monocromáticos, entonces $S(D)$ tiene un único núcleo por trayectorias monocromáticas.
2004	Hahn, et.al [?]	Si para algún $s > 3$, todo ciclo de longitud s contenido en T es casimonocromático y todo ciclo contenido en T de longitud $\ell < s$ es a lo más 2-coloreado, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

continúa en la siguiente página

Año	Autor	Resultados
2004	Galeana, Rojas [?]	La cerradura de los torneos bipartitos m-coloreados cuyos ciclos de longitud 4 son monocromáticos, es una digráfica núcleo perfecta.
2005	Galeana, Rojas	Si el conjunto de colores asignado a la vecindad interior de cada vértice de un torneo m-coloreado es menor o igual a 2 y si además pasa una de las siguientes: a) $m \neq 3$ o, b) $m = 3$ y T no contiene ciclos de longitud 3 3-coloreados; entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.
2005	Galeana, Rojas:	Proporcionan un contraejemplo al hasta entonces problema abierto planteado en [?]: encuentran un torneo 4-coloreado donde todo C_3 es casimonocromático y tal que no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
2006	Galeana, Rojas: [?]	Todo torneo k-partito m-coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 en él contenido sea monocromático, cumple que su cerradura por colores es núcleo perfecta.
2006	Galeana, Rojas: [?]	Todo torneo k-partito m-coloreado tal que todo ciclo de longitud 4 en él contenido sea monocromático, cumple que su cerradura por colores es núcleo perfecta.

En la siguiente tabla, nuestros resultados.

Nuestros resultados

Lema **??** Si T es un torneo m-coloreado sin C_3 3-coloreado y tal que $C(T)$ no es núcleo perfecta, entonces existe un ciclo $\gamma = (z_0, z_1, z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0) \subseteq C(T)$ que cumple las siguientes propiedades:

1: $\ell(\gamma) \geq 4$

2: $\gamma \subseteq T$

3: $(z_0, z_1) \in F(T)$ es de color a, $(z_1, z_2) \in F(T)$ es de color b y existe $\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0)$ $(p \geq 2)$, una z_2z_0-trayectoria en T de color c, con $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$, digamos que a=rojo, b=azul, c=negro.

4: No existe una z_1z_0-trayectoria monocromática en T y no existe una z_2z_1-trayectoria monocromática en T.

5: $(z_2, z_0) \notin F(T)$ (y por lo tanto $(z_0, z_2) \in F(T)$).

6: Todas las flechas entre z_1 y los vértices internos de α son de color distinto de negro.

Teorema **??** Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface que todo ciclo $C_t \subseteq T$ $(t < k)$ es a lo más bicolor (de manera que no es policromático, y una de las dos siguientes condiciones: a) Todo triángulo en T es casimonocromático (y por tanto a lo más bicolor), o bien b) Para algún entero fijo k$\geq$4 se cumple que todo ciclo $C_k \subseteq T$ es a lo más bicolor y no es una $(2, k-2)$-subdivisión de C_2-bicolor. Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Nuestros resultados

Teorema **??** Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad PII_k para algún entero fijo $k \geq 3$:

1: no existe alguna $(1, 1, k-2)$-subdivisión de C_3 3-coloreado en T,

2: no existe alguna $(1, 1, k-2)$-subdivisión de T_3 3-coloreado en T y

3: no existe alguna $(1, 1, t-2)$-subdivisión de C_3 3-coloreado en T, con $t < k$ y $t \geq 3$.

Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Teorema **??** Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad P:

1: Todo $T_4 \subseteq T$ es una subdigráfica casi-monocromática de T y

2: Todo $C_3 \subseteq T$ es a lo más bicolor.

Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Teorema **??** Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad Q:

1: Todo $S_4 \subseteq T$ es una subdigráfica casi-monocromática en T y

2: Todo $C_t \subseteq T$ $(t \leq 4)$ es a lo más bicolor.

Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Teorema **??** Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad R:

1: Todo $S_4 \subseteq T$ y todo $S_5 \subseteq T$ son subdigráficas no policromáticas (a lo más bicolores),

2: Todo $C_3 \subseteq T$ es un ciclo no policromático y

3: No existe en T una (1, 1, 2)-subdivision de un C_3 3-coloreado.

Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Nuestros resultados

Teorema **??** Sea T un torneo m-coloreado. Si todo $C_3 \subseteq T$ y todo $\mathcal{T}_4 \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática, entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Teorema 1 Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad P_k para algún entero fijo $k \geq 4$:

1: Todo $\mathcal{T}_k \subseteq T$ es una subdigráfica casi-monocromática en T y

2: Todo ciclo $C_t \subseteq T$ $(t < k)$ es a lo más bicolor.

Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Teorema 3 Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad M_k para algún entero $k \geq 5$:

1: Todo $\mathcal{S}_k \subseteq T$ es una subdigráfica no policromática de T y

2: Todo $C_t \subseteq T$ $(t \leq k)$ es un ciclo no policromático.

Entonces $C(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Notación

Símbolo	**Significado**
D	usualmente denotará a la digráfica en cuestión
(u, T, v)	subsucesión de la trayectoria T de u a v
C_k	ciclo dirigido de longitud k
$H \subseteq D$	H es una subdigráfica de D
$H \subset D$	H es una subdigráfica propia de D
$D[S]$	H es la subdigráfica inducida por $S \subseteq V(D)$
$\ell(T)$	longitud de T
$Sim(D)$	La parte simétrica de D
$Asim(D)$	La parte asimétrica de D
$\delta_D^-(v)$	ingrado de $v \in V(D)$ en D
$\delta_D^+(v)$	exgrado de $v \in V(D)$ en D
zI-camino	camino del vértice z a un vértice en $I \subseteq V(D)$
D k-coloreada	digráfica cuyas flechas se colorean con k colores
$\mathcal{T}_k$	subdigráfica $\mathcal{T}_k$ de orden k
$\mathcal{S}_k$	subdigráfica $\mathcal{S}_k$ de orden k
$C(D)$	cerradura transitiva por colores de D
$[a, b]_D$	adyacencia entre los vértices a y b en D
z_1z_2-camino	camino del vértice z_1 al vértice z_2

Bibliografía

[AyL] P. Arpin y Válclav Linek, *Reachability problems in edge-colored digraphs*, 2004. En imprenta.

[Be] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[ByD90] C. Berge y P. Duchet, *Recent problems and results about kernels in directed graphs*, Discrete Math. 86 (1990) 27-31.

[Du80] P. Duchet, *Graphes noyau-parfaits*, Ann. Discrete Math. 9 (1980), 93-101.

[Du87] P. Duchet, *A sufficient condition for a digraph to be kernel perfect*, J. Graph Theory II (1)(1987), 81-85.

[DyM81] P. Duchet y H. Meyniel, *A note on kernel-critical graphs*, Discrete Math. 33 (1981), 103-105.

[E] Delgado-Escalante, *Seminúcleos, núcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2003.

[EyG1] Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez, *Kernels and Cycles' Subdivisions in arc-colored tournaments*, enviado.

[EyG2] Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and small bicolored subdigraphs in arc-colored tournaments*, enviado.

[GS96] H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge colored tournaments*, Discrete Math. 156 (1996)103-112.

[GS98] H. Galeana-Sánchez, *Kernels ind edge-colored digraphs*, Discrete Math. 184 (1998) 87-99.

[GyG00] Galeana-Sánchez y García-Ruvalcaba, *Kernels in the closure of colored digraphs*, D. Mathematicae-Graph Theory 20 (2000), 243-254.

[GyG01] Galeana-Sánchez y García-Ruvalcaba, *Kernels in* $\{C_3, T_3\}$*-free arc colorations of* K_n*-e*, D. Mathematicae-Graph Theory 21 (2001), 77-93.

[GyN84] Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, *Kernels and semikernels of digraphs*, Discrete Mathematics, 48 (1984), 67-76.

[GyP] Galeana-Sánchez y Pastrana-Ramírez, *Kernels in edge-colored line digraph*, D. Mathematicae-Graph Theory 18 (1998), 91-98.

[GyR04] Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy, *On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge-colored bipartite tournaments*, Discrete Math. 285 (2004) 313-318.

[GyR06] Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy, *Torneos K-partitos con* C_3 *y* C_4 *monocromáticos*, sumbimited.

[GyR05a] Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-colored tournaments*, Discrete Math. 282 (2004), 275-276.

[GyR05b] Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy, *On monochromatic paths and at most 2-colored arc sets in edge colored tournaments*, Graphs and Combinatorics 21 (2005) 307-317.

[GS95] H. Galeana-Sánchez, *B1- and B2-orientable graphs in kernel theory*, Discrete Math. 143 (1995) 269-274.

[GyN86] Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Mathematics, 59 (1986), 257-265.

[GyN84] Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Mathematics, 59 (1986), 257-265.

[HIW] G. Hahn, P. Ille y R. Woodrow, *Absorbing sets in arc-coloured tournaments*, Discrete Math. 283 (1-3), (2004) 93-99.

[NL] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos y núcleos*, Anales del Instituto de Matemáticas, Vol. 11, UNAM (1971), 55-62.

[NyM] J. von Newmann y O. Morgernsten, *Theory of games and economic behavior*, Princeton, New Jersey; Princeton University, 2004.

[RM] Rojas-Monroy, *Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m-coloreadas*, Tesis de Doctorado, UNAM, 2002.

[SM] Shen Minggang *On monochromatic paths in m-colored tournaments*, J. Combin. Theory Ser. B 45 (1988) 108-111.

[SSW] B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-colored digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B 33 (1982) 271-275.

[W] I. Wloch, *On kernels by monochromatic paths in D-join*, 2006. Enviado, revisado y aceptado.