



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**“PROCESOS DE LÉVY, ECUACIONES DE DIFUSIÓN,
E INTEGRALES DE CAMINO.
APLICACIÓN A MERCADOS FINANCIEROS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

PEDRO CONTRÓ PRADO

TUTOR: DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2007





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Apellido paterno: Apellido materno: Nombre(s): Teléfono: Universidad: Facultad o escuela: Carrera: Número de cuenta:	1. Datos del alumno Contró Prado Pedro 55 95 29 68 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 402034995
2. Datos del tutor Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	2. Datos del tutor Dr. Pablo Padilla Longoria
3. Datos del sinodal 1 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	3. Datos del sinodal 1 Dr. Ramón Peralta y Fabi
4. Datos del sinodal 2 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	4. Datos del sinodal 2 Dr. Victor Manuel Romero Rocín
5. Datos del sinodal 3 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	5. Datos del sinodal 3 Dr. Mogens Bladt Petersen
6. Datos del sinodal 4 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	6. Datos del sinodal 4 Dr. Iván Santamaría Holek
7. Datos del trabajo escrito. Título: Subtítulo: Número de páginas: Año:	7. Datos del trabajo escrito. Procesos de Lévy, ecuaciones de difusión, e integrales de camino Aplicación a mercados financieros 68 p 2007

Agradecimientos

Quisiera agradecer especialmente a todos mis maestros. A todos aquellos sin los cuales este trabajo jamás hubiera podido ser. Han aparecido en muchas partes de mi vida, y una lista completa sería imposible, pero quisiera dedicarles este trabajo. Reconozco que he tenido una enorme fortuna de haberlos conocido y haber podido aprender de ellos. Gracias y por favor sigan enseñando.

En particular quisiera agradecer al Dr. Pablo Padilla, por todo el tiempo que me pudo dedicar de su atareadísima agenda; siempre ha sido una fuente de inspiración. Fue él quien me introdujo al tema, y quien hábilmente me fue dando sugerencias, aclaraciones y referencias para que este trabajo llegara felizmente a término.

Quisiera mencionar a los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNAM que tuvieron una especial influencia en mi formación. Entre ellos, en orden de aparición, quisiera mencionar muy en especial al Dr. Juan Manuel Lozano, al Dr. Ramón Peralta, al Dr. Antonmaría Minzoni, al Dr. Javier Páez, al Dr. Victor Romero, al Dr. Javier Bracho, al Dr. Michael Barot, al Dr. Pedro Miramontes, al Dr. Miguel Alcubierre y al Dr. Luis Benet. Gracias por sus inspiradoras clases, y por compartir generosamente su entendimiento.

Me gustaría también mencionar a mis compañeros en la aventura, a todos los alumnos de la generación de Física 2002. En especial a mis queridos amigos, con los que compartí grandes retos y alegrías: Enrique Balp, Nicolás Gaudenzi, Melina Gastélum, Tania Espinosa, Oscar Ávila, Diego Hartasánchez, Carlo Altamirano, Osvaldo Jiménez, y muy en especial a Jorge Seman.

Por último, un afectuoso agradecimiento a toda mi familia, que ha sido siempre una parte muy especial en mi vida. A mi madre, a mi padre, a todos mis tíos y primos, y a mi maravillosa abuelita.

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard... »

H. Poincaré

Índice

1. Introducción.....	9
1.1 Descripción global del trabajo.....	9
2. Introducción a los Mercados Financieros.....	11
2.1 Mercados financieros.....	11
2.2 Acciones, contratos adelantados (<i>forwards</i>), y opciones	11
3. Econofísica	14
3.1 Algunos antecedentes	14
3.1.1 Bachelier.....	15
3.1.2 Einstein y el Movimiento Browniano.....	16
3.1.3 Fama	18
3.1.4 Mandelbrot	18
3.2 Hipótesis sobre la estructura del mercado	19
3.3 Teorema del Límite Central.....	21
3.4 Escalas temporales en finanzas.....	21
3.5 Criticalidad	22
3.6 Algunos modelos recientes.....	23
4. Tratamiento Continuo.....	25
4.1 Movimiento Browniano.....	25
4.2 Procesos estocásticos.....	25
4.2.1 Espacio de probabilidad	26
4.2.2 Filtración.....	27
4.3 Generalización de EDs ordinarias	27
5. Modelo Black-Scholes.....	29
5.1 Lema de Itô.....	29
5.1.1 Integral Estocástica.....	30
5.1.2 La esperanza del proceso log-normal	31
5.2 Ecuación de Black-Scholes	32
5.2.1 Solución a la ecuación de Black-Scholes	34
6. Integrales de Camino	37
6.1 Integrales de Camino en Mecánica Cuántica	37
6.2 Principio de mínima acción en mecánica clásica	39
6.3 Mínima acción en mecánica cuántica.....	40
6.3.1 Límite clásico	41
6.4 La ecuación de Schrödinger en la formulación de Feynman.....	41
7. Ecuaciones de difusión	44
7.1 Fórmula de Feynman-Kac	44
7.2 Generador Infinitesimal.....	45
7.3 Fórmula de Samuelson	46
8. Procesos de Lévy	49
8.1 Distribuciones de Lévy definidas por la función característica.....	49
8.2 Representación de Lévy-Khintchine	51
8.3 Descomposición de Lévy-Itô.....	51
9. Simulación de distintos procesos para valorar opciones	53
9.1 Simulación de los procesos estocásticos	53
9.2 Implementación numérica	54
9.2.1 Distribución Gaussiana.....	54
9.2.2 Distribuciones con colas pesadas	54

10. Discusión	56
10.1 Sobre el modelo utilizado	56
10.2 Resultados de la simulación	57
11. Apéndice	60
11.1 Cómo simular un proceso Poisson compuesto P_t	60
11.2 Código en Fortran	60
Bibliografía	66

1. Introducción

El estudio de sistemas con un número grande de variables asociadas siempre ha sido de gran interés debido a la riqueza de sus dinámicas, el desafío para su modelización en términos sencillos, y la gratificación de su eventual entendimiento.

El caso del mercado financiero es uno que ha sido tratado desde muchas disciplinas. Economistas, actuarios, matemáticos y físicos entre otros, han dedicado sus esfuerzos para la estructuración de modelos que permitan capturar la esencia del comportamiento de dicho sistema.

Tener un buen modelo es obviamente ventajoso, pues permite hacer predicciones que faculten a los individuos interesados a tomar mejor decisiones sobre la compra-venta de activos, basadas en información sobre el riesgo y oportunidades de ganancia.

El modelo que en la actualidad goza de mayor popularidad es el de Black-Scholes (BS); principalmente por tener asociada una ecuación diferencial parcial relativamente sencilla, y sobre todo la ventaja de poder expresar de forma analítica el precio de una opción europea, en términos de la volatilidad, precio de ejercicio, y tasa de interés, entre los parámetros más importantes.

Sin embargo, la enorme cantidad de datos que se tienen acerca de la dinámica bursátil, apuntan a que este modelo es fundamentalmente incorrecto. En particular porque la distribución del incremento de los precios reales refleja la existencia de colas pesadas.

La estrategia desde hace algunos años ha sido proponer procesos estocásticos que puedan describir con mayor realismo el comportamiento de los precios en el mercado, llevando a una gran cantidad de resultados muy interesantes.

Una propuesta ha sido el utilizar los procesos de Lévy para tal efecto. Sin embargo, la ecuación diferencial asociada al proceso no resulta tan sencilla como en el caso de BS. A veces, incluso puede no encontrarse una representación analítica de la misma, o se tiene que plantear como una ecuación diferencial fraccionaria. Así pues, encontrar una expresión para el precio de una opción resulta todavía más complicado.

Con tal dificultad en mente, en este trabajo se propone la utilización de un enfoque distinto para obtener el precio de la opción.

Dicho enfoque tiene sus bases en el trabajo de 1965 de Paul A. Samuelson, que no tuvo gran popularidad en comparación al acercamiento de BS. Sin embargo, dicho enfoque es especialmente interesante cuando se proponen procesos estocásticos más complicados que el proceso log-normal (modelo BS), y con el cual se pueden implementar sencillos programas que calculen el precio de una opción utilizando métodos Monte-Carlo.

1.1 Descripción global del trabajo

Se efectúa primero una breve revisión de la estructura básica de los mercados financieros, así como la introducción de instrumentos financieros: los contratos adelantados o *forwards*, y opciones de venta.

En el capítulo 3 se hace una revisión histórica de diferentes acercamientos matemáticos importantes a los mercados financieros, en especial desde la física. Se menciona de manera especial el trabajo de Bachelier, considerado por muchos como un

pionero en esta área. Se hace también una breve referencia al trabajo de Einstein sobre movimiento browniano de 1905, así como los trabajos de Fama y Mandelbrot. Adicionalmente, se menciona la posibilidad de ver a los mercados financieros como sistemas que se encuentran en puntos críticos, así como métodos de predicción de series temporales como el ARCH.

Subsecuentemente, en el capítulo 4 se introduce el formalismo matemático necesario para abordar la descripción de caminatas aleatorias. Se definen conceptos tales como espacio de probabilidad, variable aleatoria, σ -álgebra, y filtración entre otros. Siendo en el capítulo 5 en donde se enuncia con precisión el modelo de Black-Scholes, y se resuelve la ecuación con el mismo nombre. Para esto siendo necesaria la introducción de la integral estocástica y de la fórmula de Itô.

El capítulo 6 es una revisión estándar de las integrales de camino, así como el principio de mínima acción, y se hace una derivación de la ecuación de Schrödinger a partir de la formulación de Feynman para la mecánica cuántica. Este capítulo sirve como fondo para el capítulo 7, en donde se aborda la fórmula de Feynman-Kac, y su importante relación con la valuación de derivados. Así como el acercamiento de P. Samuelson para dicho problema.

Se presentan las distribuciones de Lévy en términos de su función característica, así como la representación de Lévy-Khintchine y la descomposición de Lévy-Itô para procesos de Lévy en el capítulo 8.

En el capítulo 9 se proponen algunos procesos fáciles de simular computacionalmente para representar la evolución de activos financieros, explicándose la implementación numérica. Finalmente, en el capítulo 10 se presenta una discusión acerca del método utilizado, así como una pequeña comparación con otros enfoques.

Se termina por concluir que este método es especialmente útil para valorar el precio de una opción, particularmente porque ofrece la flexibilidad de proponer un proceso estocástico cualquiera para la evolución del activo subyacente, y no presenta complicaciones teóricas que son comunes en los demás metodologías.

2. Introducción a los Mercados Financieros

Un mercado financiero es un sistema a través del cual se compra y vende cualquier tipo de activo financiero¹. Normalmente, cuando se habla de mercados financieros en general, se puede estar refiriendo a uno de tres tipos de mercados:

- 1) Mercados de deuda (que incluyen los interbancarios, de divisas, y los monetarios).
- 2) Mercados de acciones.
- 3) Mercados de derivados.

Durante los años ochenta y noventa, los mercados de derivados gozaron de un gran crecimiento en el capital invertido en ellos, aumentando consecuentemente el número de productos derivados disponibles. Esto debido sobre todo a que los productos derivados permiten controlar el riesgo asociado a la volatilidad del mercado.

2.1 Mercados financieros

La finalidad de un mercado financiero es el poner en contacto de una manera eficiente a compradores y vendedores, y establecer precios justos de los diferentes activos financieros. Siendo este precio determinado por la oferta y la demanda del activo. Cuando se realiza una operación de compra-venta, normalmente se tiene que pagar un costo de transacción; por ejemplo, una comisión estipulada por el corredor de bolsa.

Debido a las enormes ganancias económicas que representa, se han hecho muchos intentos de entender el comportamiento de los mercados financieros, y del movimiento bursátil de los activos. Está por ejemplo la Teoría Dow, en referencia a Charles Dow, que representa la base del llamado *análisis técnico* para poder predecir futuros cambios en el precio. En esta teoría se supone que la tendencia del mercado es un indicador del comportamiento futuro.

Sin embargo, la gran cantidad de datos [18] a la que se tiene acceso, sugiere más bien la hipótesis de considerar el cambio de los precios en el mercado como un caminante aleatorio.

Gran parte del trabajo hecho para predecir el comportamiento de los precios dentro del esquema de caminantes aleatorios fue el trabajo de F. Black, M. Scholes y R. Merton, quienes en los años sesenta desarrollaron una muy buena base teórica para entender el comportamiento de los precios, y además lograron encontrar una solución analítica al modelo para encontrar el precio de una opción europea.

2.2 Acciones, contratos adelantados (*forwards*), y opciones

Dentro de esta sección estudiaremos el problema de predecir el movimiento en el precio de una opción de compra (*call*) europea a un determinado tiempo en el futuro. Es claro pues, que debemos comenzar por asentar las bases acerca de qué representa un producto financiero de este tipo y cuáles son sus propiedades básicas.

Antes de explicar lo que es una opción, quizá convenga hablar de otro tipo de producto financiero llamado contrato adelantado (*forward*). El *forward* es un contrato

¹ Un activo o instrumento financiero, es cualquier tipo de ente que pueda ser comercializado. Ejemplos de estos son: cuentas remuneradas, instrumentos de deuda, acciones, opciones, etc.

de compra-venta entre dos partes. El contrato compromete a las dos partes a hacer una transacción de compra-venta de un determinado bien, llamado el bien subyacente, a determinado precio K y a determinada fecha en el futuro T .

La parte que se compromete a comprar se dice que adopta una posición larga, y a la que se compromete a vender una posición corta. Es bastante claro que generalmente una de las dos partes tendrá una ganancia dependiendo del precio S del bien subyacente al tiempo T , denotado por S_T .

Pongamos un ejemplo: supongamos que el contrato adelantado establece una transacción de 100 USD a un precio de compra de \$11.00 por USD a seis meses de la fecha de hoy. Es claro que si el precio del dólar en 6 meses es mayor a \$11.00, digamos \$12.00, entonces la posición larga hará una ganancia de \$1.00 por dólar, i.e. \$100; pues puede comprar a \$11.00 gracias al contrato adelantado que firmó 6 meses atrás, e inmediatamente vender en el mercado a \$12.00 por dólar. De manera inversa, si el dólar baja a \$10.00 en seis meses, la posición corta se beneficiará al poder vender a \$11.00 e inmediatamente comprar en el mercado a \$10.00.

El punto esencial del contrato adelantado es que ambas partes se comprometen a realizar la transacción de compra-venta a un precio fijo en el futuro. Lo que distingue este producto financiero de una opción de compra p. Ej., es que el titular de la opción tiene el *derecho* (mas no la obligación) de comprar un bien subyacente a un determinado precio en el futuro.

El tener este derecho es muy ventajoso, pues si el precio de compra-venta acordado K del subyacente es mayor que el precio actual en el mercado S_T , entonces el titular de la opción puede no ejercer el contrato, pues esto sólo generaría pérdidas económicas. Sólo si K es menor que S_T convendrá al titular de la opción de compra ejercer su derecho de comprar el subyacente al precio K y obtener un pago de la opción de $(S_T - K)$. Una gráfica de la ganancia del titular de la opción de compra se muestra en la Fig. 2.1.

Adicionalmente, también hay opciones de venta (*put*). Y no hay que confundir el hecho que tanto en una opción *call* como en una *put* hay una posición larga y una corta, correspondientes a quién compra y a quién vende la opción.

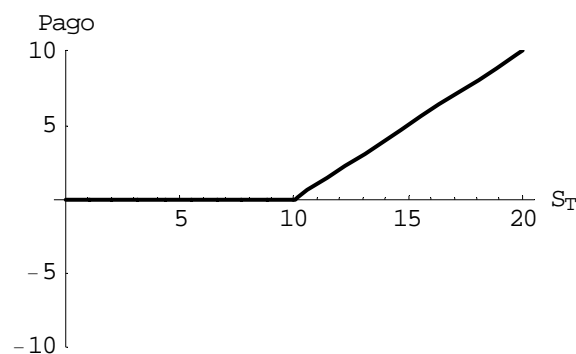


Fig.2.1. Gráfica de pago de una opción de compra (posición larga) con $K=10$.

Normalmente, se denota al pago P de una opción al tiempo T como

$$P = (S(T) - K)_+ \equiv \max\{S(T) - K, 0\}.$$

La ganancia esperada de una opción no es cero. Para ver esto de manera sencilla, veamos que si pensamos en nuestro ejemplo anterior, y suponemos que la probabilidad que el dólar suba o baje un peso en seis meses es la misma; entonces la esperanza de pago de una opción es

$$E(P) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5,$$

ya que si $S_T - K < 0$, entonces la opción no se ejercerá, de manera que su pago será cero. Esto hace natural que el contrato de la opción tenga un precio. La posición larga pagará este precio a la posición corta, y dependiendo de la evolución del precio del subyacente, la posición larga podrá luego a su vez vender la opción a un precio diferente del original.

El problema que representa calcular el valor de una opción no es uno trivial, y será abordado en la sección 5.

3. Econofísica

Desde los años ochenta un número de físicos cada vez mayor está tomando interés en esta nueva disciplina a la que se le llama econofísica. Cada día, modelos matemáticos más variados y sofisticados tratan de predecir cuál será el movimiento de algún agente financiero dado, para beneplácito tanto de inversionistas como de investigadores interesados en el tema.

En la actualidad se ha abierto un enorme campo para el estudio de dichos sistemas y se emplean herramientas matemáticas de todo tipo para hacer modelos; desde ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, procesos estocásticos, teoría de juegos, probabilidad, estadística y econometría, hasta metodologías tan aparentemente distantes de las finanzas como pueden ser la mecánica estadística, el movimiento browniano, la turbulencia y la teoría ergódica.

Cada uno de los caminos es en sí mismo inagotable, y es ingenuo pensar que algún día tendremos una teoría completa para mercados financieros. Así visto, la decisión de tomar un camino y no otro, resulta más inspirada en la belleza matemática de cada modelo y en su consistencia con los datos experimentales, que el hecho de que el modelo sea el correcto o no. Es claro que todos estos modelos, muy complejos algunos e increíblemente predictivos, no son la descripción exacta del fenómeno; pues para ello tendríamos que considerar una cantidad tan grande de variables que ninguna computadora podría llevar a cabo los cálculos para predecir un evento antes que el fenómeno ya hubiese acontecido.

En este capítulo se menciona sólo una pequeña parte de este extenso campo de estudio (ver [5], [35] para una descripción más amplia) con algunas referencias históricas [19].

3.1 Algunos antecedentes

Aunque se mencionaba que desde hace relativamente poco tiempo ha surgido un interés formal en la comunidad científica, y en la física en particular, para adentrarse al mundo de los mercados financieros, este acercamiento ha existido desde mucho tiempo atrás.

Se sabe por ejemplo que Newton participó muy activamente en la especulación financiera. Tal fue su entusiasmo, que terminó por perder una gran fortuna invirtiendo sus ahorros en lo que parecía ser una prometedora empresa: la *South Seas Company*. Una compañía que había comprado una novena parte de la deuda del gobierno inglés, a cambio de un 6% de intereses, y la promesa por parte de este gobierno de tener el monopolio del comercio en los mares del Sur (especialmente con América del Sur).

La empresa puso a la venta una parte de sus acciones, y no poca gente imaginó una gran oportunidad que vendría de todo el oro de América del Sur. Desafortunadamente, España no le otorgó a Inglaterra las concesiones comerciales que los ingleses habían imaginado como ofrecimiento para terminar la guerra en la que se encontraban, y la compañía se enfrentó a una colosal quiebra, llevando a muchos a la ruina. En este proceso Newton perdió £20,000, una cantidad enorme en aquel tiempo.

También Gauss se acercó a los mercados financieros, aunque con algo más de éxito. Dejó tras de sí una fortuna de 170,000 Taler, cuando su salario no excedía los 1,000 Taler anuales. Incluso fue contratado por la Universidad de Göttingen, en donde

daba clases, para hacer un estudio acerca del estado del fondo de pensiones para viudas de profesores de dicha universidad, haciendo de este estudio un trabajo seminal de la aplicación de teoría de la probabilidad al campo del seguro financiero.

3.1.1 Bachelier

En 1900, L. Bachelier presentó su tesis doctoral a un jurado entre los que se encontraba H. Poincaré. Su tesis se tituló “*Théorie de la Spéculation*”, y en ella presentaba un tratamiento teórico sobre el movimiento de precios en mercados financieros usando un formalismo basado en caminantes aleatorios y un análisis empírico de datos de mercados reales.

Aunque muchos piensan que fue Einstein quien dio la primera base del formalismo para el movimiento browniano en 1905 en uno de sus célebres artículos, esto es descartado cuando se revisa el trabajo doctoral de Bachelier [7].

La primera parte del trabajo de Bachelier contiene una descripción detallada de los productos financieros disponibles en ese momento en Francia como contratos a futuro y opciones. Después de esto, presenta el modelo matemático de los movimientos de los precios y algunos principios económicos que respaldan a éste, como el principio que establece que *la esperanza de la ganancia del especulador es cero*, donde por esperanza se entiende la esperanza condicionada dada la información previa.

La hipótesis de Bachelier es que el precio S_t de los derivados sigue un proceso de Markov. Esto queda definido por la condición

$$p(S_n = x | S_0, \dots, S_{n-1}) = p(S_n = x | S_{n-1}).$$

Lo cual significa que el mercado incorpora toda la información disponible a cada instante. A esto también se le conoce como la hipótesis de mercado eficiente, aunque Bachelier no utilizó este término.

Debido a que la probabilidad de transición de un proceso de Markov satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p(X_j | X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_k p(X_j | X_k) p(X_k | X_i),$$

para la probabilidad de transición de X_i a X_j ; Bachelier demostró que una distribución de probabilidad que cumple con esta ecuación, es la distribución gaussiana con incremento lineal en la varianza, es decir

$$p(X_{t+\Delta t} - X_t < x | X_t = z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi \Delta t}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2 \Delta t}\right) ds,$$

que precisamente es la distribución para los incrementos de un movimiento browniano con varianza σ .

Además, Bachelier también demostró que la densidad de probabilidad $u=p'(x)$ asociada a esta distribución, es solución a la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esto quiere decir que el comportamiento de un precio en el mercado, se puede modelar por medio de un proceso estocástico, que además cumplirá con la ecuación de

difusión más simple, la de calor, y en donde el desplazamiento promedio será proporcional a $t^{1/2}$.

3.1.2 Einstein y el Movimiento Browniano

Uno puede hacer un símil conceptual muy interesante al tratar de ligar el movimiento browniano de las partículas macroscópicas suspendidas en un líquido con el movimiento de los precios de diferentes activos subyacentes en un mercado financiero.

Formalmente, lo que se está diciendo es que la descripción matemática fundamental del movimiento para partículas resulta un buen modelo del cual partir para analizar un mercado idealizado.

En su trabajo [33] sobre el movimiento browniano, Einstein supone que las partículas del solvente golpean a las partículas suspendidas macroscópicas con choques de fuerza y dirección aleatoria, impartiendoles en consecuencia un momento aleatorio. Además, supone que

- El movimiento de las partículas individuales es independiente.
- El movimiento es completamente aleatorio debido a los choques.
- En un intervalo de tiempo τ , la partícula j se mueve de $x_j \rightarrow x_j + \Delta_j$ para algún Δ_j aleatorio.

Siendo la distribución de probabilidad de los Δ_j 's tal que

$$\frac{dn}{n} = p(\Delta)d\Delta$$

es la fracción de partículas que se han movido una distancia entre Δ y $\Delta+d\Delta$ en una unidad de tiempo. Por otra parte, pedimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta)d\Delta = 1. \quad (3.1)$$

$$p(\Delta) = p(-\Delta). \quad (3.2)$$

Con esto, podemos calcular la forma de la distribución $p(\Delta)$. Consideremos un largo cilindro, que idealmente sea unidimensional, a lo largo del eje x . Sea $f(x,t)$ la función de densidad de probabilidad para el número de partículas, de manera que $f(x,t)dx$ será el número de partículas que están contenidas entre x y $x+dx$ a un tiempo t . Un tiempo τ después, esperamos que

$$f(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p(\Delta) f(x - \Delta, t),$$

que no es más que decir que las partículas que llegaron a x en $t+\tau$ estaban al tiempo t en algún sitio del intervalo $[-\infty, \infty]$.

Así, expandiendo en serie de Taylor

$$f(x, t) + \tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \dots = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p(\Delta) \left[f(x, t) - \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right], \quad (3.3)$$

y con la condición expresada en (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p(\Delta)(-\Delta) &= \int_{-\infty}^0 d\Delta p(-\Delta)(-\Delta) + \int_0^{\infty} d\Delta p(\Delta)(-\Delta) \\ &= -\int_{-\infty}^0 d\Delta' p(\Delta')(\Delta') - \int_0^{\infty} d\Delta p(\Delta)(\Delta) = 0, \end{aligned}$$

y usando (3.1), obtenemos que (3.3) se reduce a

$$f(x,t) + \tau \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \dots = f(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p(\Delta) \Delta^2 + \dots$$

Así, obtenemos que si D , definida como

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p(\Delta) \Delta^2,$$

es finita, obtenemos una ecuación de difusión

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2},$$

despreciando términos de orden $O(t^2)$ y cuya solución es la conocida distribución de probabilidad gaussiana

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

Es importante hacer notar que el hecho de haber escogido una expansión de Taylor de primer orden en t , y de hasta segundo orden en x , tiene un fundamento teórico más riguroso en el lema de Itô, pero baste decir por ahora que para una difusión

$$0 < \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta^2}{\tau} < \infty,$$

lo que garantiza la existencia de D .

Vemos entonces un claro paralelismo entre el trabajo de Bachelier, y el de Einstein, en donde en ambos se llega a la ecuación de calor, y se propone el estudio de los movimientos de las partículas en un fluido, o el comportamiento de los precios como un proceso estocástico con distribución normal $N(0,t)$ para los incrementos a tiempo t .

De este modo, Bachelier propuso formalmente su modelo matemático basándose en supuestos que se reducen conceptualmente a los mismos supuestos de Einstein para el movimiento browniano de partículas, sólo que ahora se considera que el movimiento del precio de un activo es independiente de los demás, y que en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_i - t_j$, el precio se mueve de $S_j \rightarrow S_i + \Delta_j$ con $\Delta_j = \varepsilon(t_i - t_j)$, donde ε tiene una distribución gaussiana estándar $N(0, 1)$.

De esta manera, uno puede considerar que hay una ecuación de difusión que describe el comportamiento de los precios en un mercado financiero. Esta idea fue más tarde generalizada por Black, Merton y Scholes, junto con otras suposiciones que dan origen a la modelización de los precios usando un proceso estocástico con distribución log-normal. Así se construyó lo que se conoce como el modelo Black-Scholes, aún a la fecha usado, y del cual se hablará en detalle más adelante.

3.1.3 Fama

En 1965, Eugene Fama publicó su artículo [8] en el cual retomó en cierta medida el trabajo hecho por Bachelier, suponiendo que la dinámica que siguen los precios en un mercado es impredecible y que la mejor manera de modelarlos es por medio de caminatas aleatorias. Aunque reconoce el hecho que la distribución de los precios exhibe una leptokurtosis² que hace evidente que la hipótesis gaussiana es una aproximación parcial.

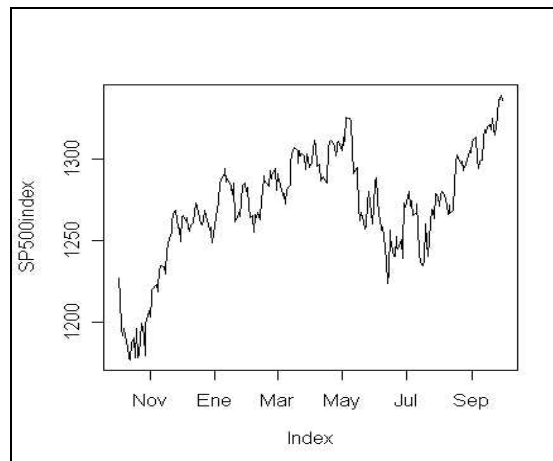


Fig. 3.1. Evolución del índice S&P500 en 2006.
La distribución de los incrementos no es log-normal.

Fue también una parte muy importante de su trabajo ligar principios económicos con el tratamiento matemático; por ejemplo, en la consistencia de la suposición de independencia de diferentes caminatas aleatorias con las observaciones experimentales de los movimientos de los precios; así como el hecho de que en el mercado real, el precio puede ser visto simplemente como la acumulación de información generada como ruido aleatorio.

A Fama se le reconoce por su trabajo en difundir de manera extensa la llamada hipótesis de mercado eficiente, que consiste en pensar que la cotización actual de los precios en el mercado refleja toda la información disponible hasta el momento, y que además lo hace reflejando la creencia global de los inversores sobre el futuro.

3.1.4 Mandelbrot

El punto clave en el trabajo de Mandelbrot fue el análisis sobre los eventos extremos en el cambio de los precios. Cuando Mandelbrot estudió la dinámica del algodón en la bolsa de NY, se dio cuenta que los eventos extremos eran mucho más numerosos de lo que predecía el modelo gaussiano, y que además, tenían un comportamiento que le recordó el trabajo de Pareto [26], donde se analizaba la distribución de riqueza en varios países, y encontraba que se cumplía una ley de potencias.

² La kurtosis, el cuarto momento de la distribución, es una medida de qué tan ‘picuda’ es una distribución. Una distribución con kurtosis positiva es llamada leptokúrtica, y significa que su ‘pico’ alrededor de la media es más agudo, y en consecuencia las colas deben ser más anchas.

Este descubrimiento no fue poca cosa para Mandelbrot, pues inmediatamente relacionó una ley de potencias con una autosimilitud ante escala, lo que prontamente le permitió poder analizar los movimientos financieros desde el punto de vista de la teoría de fractales.

Mandelbrot vio que la distribución f que más se adecuaba a los datos experimentales no era una gaussiana, sino una distribución estable de Lévy con parámetro $\alpha=1.7$, que tiene colas pesadas y cuya varianza es infinita. Este parámetro α aparece explícitamente en la función característica de la distribución, y se relaciona con el decaimiento de la distribución como $f(z) \sim \alpha A^\alpha / |z|^{1+\alpha}$.

Más adelante se hablará con todo detalle de las distribuciones de Lévy y de los procesos estocásticos a los que da lugar el considerar una caminata aleatoria con dicha distribución. Pero por ahora, basta decir que este descubrimiento marcó un cambio de paradigma en el modo en el cual se tendrían que hacer modelos que trataran de predecir el comportamiento de los mercados financieros.

3.2 Hipótesis sobre la estructura del mercado

El trabajo de L. Bachelier y E. Fama, junto con los trabajos de principios económicos como los de M. Miller, dieron lugar a una serie de suposiciones acerca del funcionamiento del mercado en donde dichos modelos encajaban casi a la perfección. Básicamente, podríamos decir que estas suposiciones se reducen o ejemplifican en la llamada “hipótesis de mercado eficiente y completo”, que comprende las siguientes dos características:

- 1) Eficiente: el precio de un activo financiero es uno tal que se ha incorporado toda la información disponible del mercado; quizá haya pequeñas irregularidades pero son más pequeñas que los costos de transacción aplicables.
- 2) Completo: siempre hay compradores y vendedores para cualquier precio fijado en cualquier instante del tiempo. Tienen necesariamente opiniones opuestas de la evolución del mercado. Es así que en promedio, descontando el incremento libre de riesgo, un especulador no cree en un movimiento ni a la baja, ni a la alza del mercado.

La hipótesis de mercado eficiente tiene dos partes, una local y otra colectiva: a) la evolución de los precios de un determinado producto financiero no tiene memoria; y b) los precios se ajustan de manera que el mercado tiende a un equilibrio global³.

La ausencia de memoria significa que la evolución inmediata del precio sólo depende del precio anterior, i.e. que puede ser tratado como un proceso de Markov, que recordemos es cuando

$$p(S_n = x | S_0, \dots, S_{n-1}) = p(S_n = x | S_{n-1}).$$

Esta hipótesis es muy criticable, pero representa un buen punto de partida.

El principio de equilibrio global se desprende a su vez de otras suposiciones, como que los individuos realizan sus acciones motivados por la razón (algo discutible), la ley de la oferta y la demanda, y el principio de no arbitraje.

³ Esto es que para cualquier activo hay el mismo número de compradores que de vendedores.

Poder hacer arbitraje se refiere a poder “comer gratis”. Más formalmente, poder generar por algún método una ganancia libre de riesgo con una inversión neta nula, gracias a la estructura del mercado.

Esto no quiere decir que no haya ganancias libres de riesgo; p. ej. invertir una cierta cantidad en el banco y recibir en un cierto plazo una ganancia determinada por la tasa de inversión. Pero el principio de no arbitraje se refiere a ganancias con inversión neta nula⁴. Demos un par de ejemplos.

Supóngase que existe una diferencia de precios en la cotización de acciones de una misma compañía XYZ en dos diferentes mercados financieros. Digamos que el NYSE valúa una acción de XYZ a 1.00 USD, y el Euronext a 0.86 EUR. Entonces, dependiendo de la conversión USD-EUR, se podrá hacer una ganancia comprando acciones en el mercado donde el precio sea más barato y vendiéndolas en el otro embolsándose la diferencia. Pero el mero hecho de aprovechar esta situación hace que cada vez la diferencia sea menor. Pues al comprar una gran cantidad de acciones en un mercado, al aumentar la demanda, también lo hace el precio de la acción; y en contraparte, al vender una gran cantidad en el otro mercado, el aumento de la oferta hace que el precio baje.

Otro ejemplo. Supóngase que existe alguna estrategia libre de riesgo, por medio de la cual uno puede hacer una inversión de cierto capital en una institución X, y que recibe mayor ganancia de la que obtendría si hiciera la misma inversión, al mismo plazo, en el banco. Claramente, si la tasa de interés del banco es r y la tasa de la institución X es $r' > r$; uno puede pedir prestado al banco una cantidad, digamos $K e^{-rT}$ (el valor presente de K a tasa r), y luego invertir $K e^{-r'T}$ en la institución X. Dentro de un tiempo T la institución X pagará una cantidad K , con la cual se podría pagar el préstamo al banco y ganar hoy $K e^{-r'T} - K e^{-rT}$.

En este ejemplo, la suposición esencial de la cual se deriva la posibilidad de arbitraje, no es que exista una tasa de interés $r' > r$; sino más bien el pensar que la tasa de préstamo de un banco es la misma que la tasa de inversión. Es difícil que eso ocurra, pues entonces el banco no generaría ganancia alguna. Sin embargo, aunque las suposiciones económicas del ejemplo son poco reales, se cumple el propósito de ilustrar la solidez del principio de no-arbitraje.

El corolario central del principio de no-arbitraje establece que si dos portafolios libres de riesgo tienen el mismo precio en cierto instante, entonces deberán mantener el mismo precio en cualquier instante posterior. Pues de lo contrario, claramente habría una posibilidad de arbitraje. Este resultado es esencial y será usado en la derivación de la ecuación de Black-Scholes.

Resulta interesante pensar en qué hay detrás del principio de no-arbitraje. Del primer ejemplo se aprecia que está relacionado con la ley de la oferta y la demanda y con la suposición de equilibrio económico. Del segundo ejemplo, se ve que está un tanto implícita la suposición que sólo se puede hacer una ganancia, a costa que alguien más tenga una pérdida.

Vemos así que el principio de no-arbitraje es muy adecuado bajo las suposiciones de la teoría económica neoclásica, y que en la época de Bachelier era una suposición bastante normal a tener. La teoría neoclásica es aún ahora sostenida por no

⁴ De una manera más precisa, incluso se podría formular el principio de no-arbitraje como la suposición de que no existen portafolios autofinanciables con una esperanza de ganancia estrictamente mayor a cero.

pocos economistas, entre ellos Milton Friedman, aunque hay evidencia de su inexactitud.

3.3 Teorema del Límite Central

En general, un teorema de límite central, representa un resultado acerca de la convergencia de un conjunto de distribuciones de probabilidad. El más famoso de estos resultados es el llamado Teorema del Límite Central (TLC), que a continuación enunciamos:

Sea S_n una variable aleatoria que consista en la suma de n variables X_1, \dots, X_n iid, con $E[X_i]=\mu$ y $\text{Var}[X_i]=\sigma^2$, es decir $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Entonces, $E[S_n]=n\mu$ y $\text{Var}[S_n]=n\sigma^2$ y la distribución de probabilidad de S_n se aproximará a una normal $N(n\mu, n\sigma^2)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x),$$

donde $\Phi(x)$ es la cumulativa normal estándar.

Una prueba sencilla consiste en considerar el caso en el que $E[X]=0$ y $\text{Var}[X]=\sigma^2$. En cuyo caso quisiéramos demostrar que S_n / \sqrt{n} converge en distribución a $N(0, \sigma^2)$. Entonces, la expansión en Taylor de la función característica de X cuando t tiende a cero será

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + O(t^2);$$

pues $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=iE[X]=0$, y $\varphi''(0)=E[-X^2]=-\sigma^2$. Y por lo tanto, la función característica de S_n / \sqrt{n} es

$$\varphi_{S_n / \sqrt{n}}(t) = \left(E\left[e^{i \frac{t X}{\sqrt{n}}} \right] \right)^n = \left[1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + O(t^2) \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\sigma^2 t^2 / 2}.$$

Por lo tanto, como convergencia en función característica implica convergencia en distribución por el teorema de continuidad de Lévy, se prueba el resultado.

Sin embargo, existen otras versiones de este teorema en donde no necesariamente se pide que las variables X_i tengan la misma distribución, o incluso no necesariamente tienen que ser independientes.

Este es un resultado fundamental en teoría de probabilidad y representa un fuerte punto a favor de pensar que las distribuciones que involucran muchos factores, pueden considerarse como distribuciones de una suma de variables aleatorias, y que por ende, uno puede esperar que la distribución de esa suma de variables sea una gaussiana.

3.4 Escalas temporales en finanzas

En la física, el problema de unidades de referencia se contempla como básico ante cualquier trabajo tanto teórico como experimental. En este caso es importante definir ante qué escala temporal estamos trabajando y qué evidencia experimental sustenta ésta.

De las investigaciones empíricas que se han hecho, se concluye que la dinámica estocástica del precio de un activo financiero puede ser aproximado por un caminante aleatorio caracterizado por una autocorrelación de algunos minutos [20]. De manera que a esta escala, no se puede considerar al proceso como markoviano.

Claro que la pregunta importante es ¿podemos describir el cambio de los precios como un proceso estacionario? En un sentido estricto no, pues se encuentra que la desviación estándar de los precios, i.e. la volatilidad, es dependiente del tiempo. Pero analizando series de tiempo suficientemente grandes, podríamos obtener la función asintótica de densidad de probabilidad del cambio de los precios, e inferir de ahí una volatilidad global constante que pueda ser asociada al modelo.

Sin embargo, si la escala temporal es muy grande, del orden de décadas, encontramos que pueden existir demasiados agentes externos (en general causas geopolíticas), que ocasionan movimientos abruptos en esta escala que no pueden ser explicadas por un modelo de varianza constante. Así, la escala en la que este trabajo se sitúa es del orden de semanas a meses, que es la escala típica para el tiempo T de vencimiento de una opción.

3.5 Criticalidad

Es muy interesante ver que hay muchos fenómenos en la naturaleza que en ciertas condiciones observan un comportamiento muy distinto del habitual y que el intervalo de parámetros en donde se observa dicho comportamiento es muy estrecho. Dicho comportamiento puede presentar algunas coincidencias con lo que se observa en los mercados financieros.

Un ejemplo en física de un fenómeno crítico es la transición entre ferromagneto y paramagneto mientras la temperatura se acerca a la temperatura crítica T_c , llamada temperatura de Curie. En este caso por ejemplo, a la temperatura crítica se genera una transición de fase de segundo orden⁵, en donde la susceptibilidad magnética teóricamente se hace infinita.

En los puntos críticos casi siempre existen singularidades con leyes de potencia en las diferentes cantidades físicas, como por ejemplo, el calor específico, la susceptibilidad magnética, etc. La razón para estas singularidades son fluctuaciones críticas de la fase ordenada en la fase desordenada cuando $T > T_c$, o al revés cuando $T < T_c$.

En general, para $T \neq T_c$, hay un tamaño típico ξ (distancia de correlación) de los dominios ordenados; sin embargo, en el punto crítico $\xi \rightarrow \infty$, y los dominios ordenados ocurren a todas las escalas y se distribuyen de acuerdo a una ley de potencias.

Los puntos críticos necesitan ser calibrados cuidadosamente en el laboratorio; sin embargo, algunos sistemas abiertos y disipativos (en general biológicos) tienden espontáneamente hacia un punto crítico fuera de equilibrio. A esto se le llama criticalidad autoorganizada.

Desde los años sesenta y setenta, el estudio de transiciones de fase, ha mostrado que emergen muchos fenómenos invariantes ante escala como fractales o leyes de potencia en el punto crítico entre fases.

⁵ Esto quiere decir que hay una discontinuidad hasta de segundo orden en la derivada de la energía libre, que es precisamente la susceptibilidad magnética.

Estos fenómenos también se han encontrado en finanzas [17], en particular en leyes de potencia en la distribución para el cambio los precios, y en distancias de correlación grandes. Esto hace interesante estudiar si el mercado financiero puede tener una criticidad autoorganizada.

Muchos físicos interesados en el problema han decidido abordar el problema considerando agentes heterogéneos y situaciones fuera de equilibrio, dando así un salto conceptual frente a la tradicional hipótesis de mercado eficiente y completo [35].

3.6 Algunos modelos recientes

Dentro de las nuevas maneras de considerar el problema desde otra perspectiva, encontramos un acercamiento desde la física estadística, que trabaja con cantidades tales como la entropía de Shannon:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log(p(x_i)),$$

donde X es una variable aleatoria con posibles valores x_1, \dots, x_n . Esta cantidad se puede interpretar como cantidad de ruido en la información.

Un hecho interesante, es que el problema puede ser invertido. Dada la cantidad de información, uno puede obtener la distribución de probabilidad al maximizar la entropía de Shannon [15].

Otra manera de analizar cómo varía el precio, es considerar procesos estocásticos. De los más recientes e interesantes se encuentran los modelos con heteroskedasticidad condicionada autoregresiva (ARCH), y su generalización (GARCH).

Un proceso ARCH(p) se define bajo la condición de que los incrementos del proceso se puedan escribir como $X_t = \sigma_t z_t$, donde $z_t \sim N(0, 1)$ y donde la serie asociada a la varianza se define bajo la ecuación

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2.$$

Este modelo ha encontrado muy buenos resultados y un gran número de publicaciones. Muchas de éstas han generalizado este proceso, siendo uno muy famoso el llamado GARCH(q, p) definido por

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2.$$

Estos dos procesos autoregresivos tienen la ventaja de mantener una pequeña memoria, y de reflejar el comportamiento de incremento de varianza ante una volatilidad alta en el pasado.

Otra herramienta que ha probado ser muy útil y que ha dado muchos frutos en investigación, es la de los procesos de Lévy, tema central de este trabajo y que desarrollaremos mucho más en detalle posteriormente, pero baste decir aquí que este tipo de procesos pueden ser enormemente útiles debido principalmente a su enorme plasticidad para ajustarse en modelar una serie temporal dado que son procesos muy generales, y que dependen de varios parámetros.

Dichos procesos pueden presentar discontinuidades, y sus incrementos pueden tener distribuciones de probabilidades con asimetrías, leptokurtosis, e incluso promedio

y varianza infinitas. Además, el movimiento browniano resulta un caso particular de estos procesos.

4. Tratamiento Continuo

En este capítulo introducimos los conceptos básicos para poder abordar el problema desde la perspectiva de los procesos estocásticos, comenzando con el formalismo del movimiento browniano (o proceso de Wiener), y estableciendo algunos conceptos importantes como espacio de probabilidad, σ -álgebra, variable aleatoria, y filtración, entre los más importantes.

4.1 Movimiento Browniano

En honor al biólogo R. Brown, quien observó partículas moviéndose erráticamente sobre una gota de agua bajo su microscopio, se acuñó este término para describir un proceso estocástico. El formalismo matemático de éste y de otros procesos generalizados a partir del movimiento browniano fue desarrollada por P. Lévy y N. Wiener. Así, también se le conoce como proceso de Wiener a un proceso estocástico B_t tal que:

- 1) $B_0=0$.
- 2) Los incrementos son normales con media cero, y varianza igual a la magnitud del intervalo temporal. Es decir, $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. Con $0 \leq s < t$.
- 3) Los incrementos son independientes: $B_t - B_s$ y $B_s - B_k$ son independientes para todo $0 \leq t < s < k$.

A partir de estas propiedades del movimiento browniano, se puede demostrar que las trayectorias del proceso son continuas, y que existe una autosimilitud del proceso a cambios de escala.

Para el movimiento browniano interpretado como la trayectoria que sigue una partícula macroscópica sometida a millones de choques de partículas microscópicas, el movimiento aparentemente errático puede ser modelado con la ecuación de Langevin:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) - \beta\vec{v} + \vec{\eta}(t), \quad (4.1)$$

que básicamente agrega dos términos a la fuerza externa F : un término asociado a la fuerza viscosa que es proporcional a la velocidad, y otro término de *ruido*⁶ (un proceso estocástico) que representa el efecto de los choques de las partículas microscópicas.

4.2 Procesos estocásticos

Si bien el trabajo seminal de Bachelier marcó un paso decisivo en la teoría del comportamiento estocástico de los activos financieros, el problema arquetípico de dicha teoría fue el movimiento browniano. Siendo así que la teoría de los procesos estocásticos se desarrolló en gran parte para resolver problemas de física estadística a principios del siglo XX, y sirviendo sobre todo para modelar diferentes tipos de ruido en los sistemas físicos. Hoy en día, los procesos estocásticos se utilizan también en la descripción de sistemas biológicos y sociales.

Un proceso estocástico es básicamente una función aleatoria que cambia en el tiempo, aunque formalmente se define como una secuencia de variables aleatorias

⁶ Este término normalmente se asocia con *ruido café*, que tiene densidad espectral proporcional a $1/f^2$, y que está asociado al movimiento browniano.

definidas sobre un espacio de probabilidad. Para ver esto con mayor cuidado, veamos algunas definiciones.

4.2.1 Espacio de probabilidad

Para definir un espacio de probabilidad, necesitamos primero definir una σ -álgebra: Si Ω es un conjunto, entonces una σ -álgebra \mathcal{F} sobre Ω es una familia de subconjuntos de Ω y cumple con:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- 2) Si $G \in \mathcal{F} \Rightarrow G^C \in \mathcal{F}$.
- 3) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

La razón de fondo para definir a las σ -álgebras, es que normalmente no se pueden definir ciertas probabilidades en todos los subconjuntos de Ω , pero sí en algunos. Una σ -álgebra es así la colección de eventos dentro de Ω que pueden ser medidos, es decir, dentro del contexto de probabilidad, los eventos que pueden ser discriminados.

Algunas notas al margen sobre σ -álgebras: si Ω es a lo más un conjunto numerable, entonces siempre se toma el conjunto potencia de Ω como su σ -álgebra asociada. Y a la σ -álgebra B generada por todos los subconjuntos de intervalos de la forma $(-\infty, x)$, con $\Omega = \mathbf{R}$, se le llama la σ -álgebra de Borel sobre \mathbf{R} , y es importante para definir funciones de distribuciones de probabilidad.

Ahora, una medida de probabilidad \mathbf{P} en un espacio de medida (Ω, \mathcal{F}) es una función $\mathbf{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

- 1) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \mathbf{P}(\Omega) = 1$.
- 2) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ son conjuntos disjuntos, entonces

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se le conoce como espacio de probabilidad.

Para evitar ciertas situaciones desagradables, uno completa la medida de probabilidad de la siguiente manera. Sea \mathcal{Q} la familia de todos los subconjuntos de Ω que están contenidos en todos los eventos \mathbf{P} -nulos, es decir los eventos con probabilidad cero. Entonces, a la σ -álgebra generada por la colección $(\mathcal{F}, \mathcal{Q})$ se le llama la completitud de \mathcal{F} , y a la medida de probabilidad definida en $\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}$ se le llama análogamente la completitud de \mathbf{P} . Así, a la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se le llama espacio de probabilidad completo, si cualquier subconjunto de un evento \mathbf{P} -nulo es también un evento.

Finalmente, una variable aleatoria $X(w)$ es una función que asigna números a resultados de un cierto experimento. Formalmente, $X(w)$ mapea un espacio de probabilidad en un espacio medible.

Si B es la σ -álgebra de Borel y Ω el conjunto de resultados, definimos una variable aleatoria $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, si para cada subconjunto $B_r = \{w: X(w) \leq r\}$, con $r \in \mathbf{R}$, también se cumple que $B_r \in B$.

Por ejemplo, si nuestro experimento es lanzar una moneda al aire, $\Omega = \{A, S\}$, B sería el conjunto potencia de Ω , y una posible elección para $X(w)$ sería

$$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w = A \\ 1 & \text{si } w = S \end{cases}$$

4.2.2 Filtración

Una filtración \mathcal{F}_t es una secuencia de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para todo $s < t$, y:

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

Esto quiere decir que mientras avanza el tiempo, el conjunto de eventos que pueden ser medidos, cambia. Y la filtración \mathbf{F}_t representa este cambio en el conjunto de eventos, pudiéndose entonces interpretar como la información a la que se tiene acceso hasta el tiempo t . El rango del tiempo t puede ser tanto discreto como continuo, acotado o no acotado.

Normalmente se habla de la filtración natural de un proceso, refiriéndose a la filtración producida por el proceso estocástico X_t , i.e. la mínima de las σ -álgebras que incluye a $\{X_t^{-1}(b), \forall b \in B\}$, con B la σ -álgebra de Borel.

En cierto sentido, la filtración natural representa la filtración más sencilla para estudiar al proceso: toda la información necesaria para describir al proceso, y sólo esa información, está en la filtración natural.

4.3 Generalización de EDs ordinarias

Una ecuación diferencial estocástica es una generalización de una ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{X}(t) = b(X(t)), \quad X(0) = x.$$

Si perturbamos a esta ecuación con la derivada de un movimiento browniano, multiplicada por un coeficiente de difusión $\sigma(x)$ obtenemos

$$\dot{X}(t) = b(X(t)) + \sigma(X(t))\dot{B}(t). \quad (4.2)$$

Sin embargo, la expresión (4.2) no tiene un sentido preciso, pues el movimiento browniano no es diferenciable. De modo que esta ecuación se debe entender más bien en su forma integral

$$X(t) = \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s). \quad (4.3)$$

Aunque muchas veces también se usa la forma simbólica

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t).$$

A esto le llamamos una ecuación diferencial estocástica (EDE), y a su solución, un proceso de difusión. Una aclaración técnica, es que $X(t)$ es solución a la ecuación si cumple con (4.1) casi seguramente, i.e. con probabilidad uno.

Podemos ver que la ecuación de Langevin (4.1) propone que existe una relación entre el ruido $\eta(t)$ y $\dot{B}(t)$. En ambos casos, se presenta la idea de adicionar la influencia de eventos difíciles de predecir como un cierto ruido en la ecuación.

5 Modelo Black-Scholes

Este modelo, ampliamente utilizado, supone que el comportamiento del precio de un activo S_t está dado por un movimiento browniano geométrico, con deriva μ y volatilidad σ , i.e:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB.$$

Además, el modelo cuenta con un número grande de suposiciones, muchas de ellas criticadas por su poco realismo:

- 1) Es posible vender en corto⁷ la acción.
- 2) No hay oportunidades de arbitraje.
- 3) La evolución del precio es continua.
- 4) No hay costos de transacción
- 5) Todos los activos son perfectamente divisibles⁸.
- 6) Es posible dar y pedir prestado a una tasa de interés constante r .

A continuación elaboramos acerca del formalismo matemático necesario para introducir el modelo, finalizando con la derivación y solución de la llamada fórmula de Black-Scholes.

5.1 Lema de Itô

En el contexto del cálculo de variables reales, uno sabe que el desarrollo de una función $f(x,y)$ en series de potencias hasta segundo orden está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx \right].$$

Ahora, si pensamos en una función $g(t, X_t) \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$, que depende de un proceso de Wiener generalizado X_t como una de sus variables, y siendo X_t un proceso tal que cumple la EDE

$$dX_t = u dt + v dB_t, \quad (5.1)$$

donde B_t es un movimiento browniano; entonces podemos hacer el desarrollo en potencias de g como

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} (dX)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial X} dt dX \right] \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial X} (u dt + v dB) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} (u dt + v dB)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial X} dt (u dt + v dB) \right] \end{aligned}$$

Y si queremos aproximar g hasta primer orden en t , tenemos que considerar el hecho de que para un movimiento browniano $E(\Delta B^2) = \Delta t$. Es decir, que dB es de orden $(dt)^{1/2}$. De manera que obtenemos que los únicos términos lineales en t serán los resultantes de dB^2 . Mientras que los términos multiplicados por dt^2 y $dB dt$ serán de

⁷ Vender en corto significa vender una acción aunque no se la posea realmente, comprometiéndose a pagar la acción al verdadero dueño a un cierto tiempo T en el futuro al precio S_T .

⁸ Es decir, es posible comprar α unidades de un activo S_t con $\alpha \in \mathbf{R}$.

orden 2 y 3/2 respectivamente, y por tanto despreciables. Así en la aproximación a primer orden

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + u \frac{\partial g}{\partial X} dt + v \frac{\partial g}{\partial X} dB + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) dt + v \frac{\partial g}{\partial X} dB. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Esta es la famosa fórmula de Itô, aunque normalmente se conoce con $u=0$. Alternativamente en forma integral, se puede escribir como

$$\begin{aligned} g(t, X_t) &= g(0,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} g(s, X_s) + u \frac{\partial}{\partial X} g(s, X_s) + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} g(s, X_s) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t v \frac{\partial}{\partial X} g(s, X_s) dB. \end{aligned}$$

Sin embargo, aquí no se ha hecho una prueba formal. Una demostración rigurosa puede encontrarse en [34], pero necesita la introducción y definición formal de elementos como integral estocástica, variación cuadrática para procesos estocásticos, y procesos adaptados medibles bajo filtraciones; tecnicismos que son necesarios para formalizar la idea heurísticamente presentada aquí.

A continuación se presentan algunas características de la integral estocástica, concepto clave en esta formalización, y que resulta la base del cálculo estocástico desarrollado por Itô.

5.1.1 Integral Estocástica

En teoría de probabilidad es común hacer referencia a que la esperanza de una variable aleatoria X se puede expresar como una integral de Riemann-Stieltjes, i.e.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t dF_X(t)$$

donde $F_X(t)$ es la función de distribución de probabilidad de la variable X . Esto significa de alguna manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t dF_X(t) \approx \sum_i t_i [F_X(t_i) - F_X(t_{i-1})]$$

para una partición $\{t_i\}$.

De manera similar, definimos una integral estocástica, o integral de Itô, como

$$\int_a^b f(t, X_t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^n f(t_i, X_{t_i}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right]$$

donde X_t es un proceso estocástico y B_t un movimiento browniano. Y se genera una partición de manera que $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

La integral de Itô tiene algunas propiedades [25]:

a) $E \left[\int f(t, X_t) dB_t \right] = 0$

$$b) \int_s^t f(t, X_t) dB_t = \int_s^u f(t, X_t) dB_t + \int_u^t f(t, X_t) dB_t$$

$$c) \int (\alpha f(t, X_t) + \beta g(t, X_t)) dB_t = \alpha \int f(t, X_t) dB_t + \beta \int g(t, X_t) dB_t$$

Es necesario notar que al hacer una definición de esta manera, tenemos que tener en cuenta que al tiempo t_i , siendo conocido el valor de la trayectoria a dicho tiempo, $f(t_i, X_{t_i})$ también debe ser conocida. Por ejemplo funciones como $f(t, X_t) = X_{2t}$, no cumplen con esta propiedad, y se dice que no son funciones *adaptadas*.

Un proceso adaptado, o no-anticipado, es uno que para cierto tiempo t , no contiene información de un tiempo posterior. Por ejemplo, el proceso $X(B_t) = B_{2t}$, es uno que es claramente no adaptado, pues no existe la información a tiempo t para poder reproducir al proceso, que necesita información a tiempo $2t$.

Así pues, para que la integral de Itô esté bien definida, el integrando tiene que ser adaptado. Además, un proceso estocástico siempre es adaptado respecto a la filtración natural [22]. Esto claramente implica que en la fórmula de Itô, ecuación (5.2), la función $g(t, X_t)$ requiere ser adaptada respecto a la filtración natural de B_t .

5.1.2 La esperanza del proceso log-normal

Podemos ahora utilizar la fórmula de Itô para calcular explícitamente la esperanza del proceso estocástico S_t , definido por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB.$$

Con μ y σ reales. Así, utilizando la fórmula de Itô para la función estocástica $g(t, S) = \log S$, obtenemos que, según (5.2)

$$\begin{aligned} d(\log S) &= \frac{\partial(\log S)}{\partial t} dt + \mu S \frac{\partial(\log S)}{\partial S} dt + \sigma S \frac{\partial(\log S)}{\partial S} dB + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2(\log S)}{\partial S^2} \right) dt \\ &= 0 + \mu S \frac{1}{S} dt + \sigma S \frac{1}{S} dB - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2} dt, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \log S_\tau - \log S_0 &= \int_0^\tau \frac{\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t}{S_t} - \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\frac{\sigma^2 S_t^2}{S_t^2} \right) dt \\ &= \int_0^\tau \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2} \int_0^\tau \sigma^2 dt, \end{aligned}$$

resultando en que

$$\log \frac{S_\tau}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau + \sigma B_\tau.$$

Y por tanto

$$S_\tau = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau + \sigma B_\tau \right).$$

De manera que ahora se puede calcular explícitamente la esperanza de S_T . Para hacer esto, consideremos el proceso $Z_t = \exp(\sigma B_t)$. Usando la fórmula de Itô obtenemos que

$$dZ_t = 0 \cdot dt + \sigma e^{\sigma B_t} dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\sigma B_t} dt,$$

entonces

$$Z_T - Z_0 = \sigma \int_0^T e^{\sigma B_t} dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T Z_t dt. \quad (5.3)$$

Y debido a que, como para toda función $f(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, la integral estocástica con respecto a un browniano es una martingala, i.e.

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f dB_t \right] = 0.$$

Tomando la esperanza de (5.3), obtenemos

$$\mathbb{E}[Z_T] = \mathbb{E}[Z_0] + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T \mathbb{E}[Z_t] dt,$$

por lo que, derivando con respecto a t

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[Z_t] = \frac{1}{2} \sigma^2 \mathbb{E}[Z_t].$$

Y como $Z_0 = \exp(\sigma B_0) = 1$,

$$\mathbb{E}[Z_T] = e^{\frac{1}{2} \sigma^2 T}.$$

Por lo que

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \frac{1}{2} \sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t}.$$

5.2 Ecuación de Black-Scholes

Aquí deduciremos la EDP asociada al modelo de BS, uno de los modelos más populares que se usan para el análisis de riesgo de opciones en los mercados financieros. El modelo, por quien fuera merecedor M. Scholes del premio Nobel de Economía en 1997 (F. Black murió en 1995), hace la suposición básica que los precios pueden modelarse con un movimiento browniano geométrico.

Más aún, si se tiene una opción de compra europea con precio V , válida sobre un activo financiero subyacente con precio S , el modelo BS supone que el cambio relativo dS/S del subyacente en un intervalo de tiempo dt es un incremento determinístico proporcional a un cierto parámetro μ , más fluctuaciones estocásticas de la forma σdW_t , donde W_t es un movimiento browniano. Es decir,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Normalmente se supone que tanto μ como σ son constantes. Ahora, si pensamos que el precio V de una opción es una función que depende de S y de t , por el lema de Itô, la aproximación a primer orden es

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\mu S dt + \sigma S dW)^2 \\
&= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.
\end{aligned}$$

Ahora, como ambos procesos V y S están determinados por el mismo movimiento browniano W , existe una manera inteligente de crear un portafolio⁹ que elimine el riesgo asociado. El portafolio consiste en una opción *call* corta con valor V y la cantidad de Δ unidades del activo subyacente S . Así el valor del portafolio Π es

$$\Pi = -V + \Delta S. \quad (5.4)$$

Sustituyendo pues dV y dS

$$\begin{aligned}
d\Pi &= -dV + \Delta dS \\
&= -\left(\mu S \left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW,
\end{aligned}$$

y entonces con la elección de

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

hacemos que el riesgo asociado al portafolio debido al browniano desaparezca de la ecuación. Y el cambio en el valor del portafolio es enteramente determinístico:

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt.$$

Sin embargo, si efectivamente uno quisiera reproducir en la práctica el portafolio Π , la cantidad de unidades de subyacente Δ tendría que irse ajustando según las fluctuaciones del mercado. En este caso sin embargo, la construcción del portafolio es sólo teórica y nos permite obtener la ecuación BS.

Ahora, adicionando la suposición de que no se puede hacer arbitraje en el mercado, la ganancia exenta de riesgo que se haga con este portafolio en particular no puede exceder, ni quedar por debajo de la ganancia que se hiciera si el valor total del portafolio Π se invirtiera en el banco a tasa de interés continua r . Esto es

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

y sustituyendo con la ecuación (5.4):

$$d\Pi = \left(-rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt.$$

De manera que al igualar ambas expresiones para la ganancia del portafolio, el principio de no arbitraje requiere que

⁹ Portafolio: una colección de instrumentos de inversión.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (5.5)$$

Esta es la celebrada ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Notemos que si bien el proceso estocástico W no aparece en la ecuación, aún tenemos que la volatilidad σ sí lo hace.

Así pues, resolviendo (5.5) para V permite encontrar una expresión para el precio de la opción de compra en términos del valor S del activo subyacente, la volatilidad del mercado σ , y la tasa de interés libre de riesgo r .

5.2.1 Solución a la ecuación de Black-Scholes

Resolver la ecuación (5.5), como cualquier ecuación diferencial, requiere condiciones de frontera, que asociadas a la opción de compra V son

$$V(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad V(S, t) \rightarrow S, \quad \text{cuando } S \rightarrow \infty.$$

Dado que la ecuación de BS, se parece a una ecuación de calor, trataremos de hacer algunas sustituciones que nos lleven a ésta. Así, si se propone

$$S = K e^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2} \sigma^2}, \quad V = K v(x, \tau) \quad (5.6)$$

Sustituyendo en (5.5), se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv, \quad (5.7)$$

y las condiciones de frontera iniciales se transforman en pedir que

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

Notemos que ahora la ecuación (5.7) sólo depende del parámetro k , en vez de 4 parámetros como antes (K, T, σ^2, r). Esto se debe a que el único parámetro adimensional que controla el problema es $k = r / (\sigma^2 / 2)$. El efecto de los demás parámetros es simplemente debido a invertir el problema con las transformaciones (5.6).

Ahora, si adicionalmente hacemos un cambio de variable en la ecuación (5.7) con

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

para algunas constantes α y β . Entonces, sustituyendo en (5.7), se obtiene que

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ku.$$

Y podemos escoger una ecuación sin término en u escogiendo

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k.$$

Además, el término proporcional a $\partial u / \partial x$ se anula también si

$$0 = 2\alpha + (k-1).$$

Estas condiciones establecen que

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2.$$

Con lo que obtenemos que u satisface una ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con la condición que

$$u_0(x) \equiv u(x,0) = \max\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{2}(k-1)x\right), 0\right).$$

Lo importante de haber transformado nuestra ecuación original en una ecuación de calor es que sabemos que la solución a ésta es

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} ds.$$

De manera que sólo queda calcular la integral. Para esto, usamos el cambio de variable $x' = (x-s)/\sqrt{2\tau}$, de manera que

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau} + x)\right) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)(x'\sqrt{2\tau} + x)\right) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Y donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2\right) dx' \\ &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) N(d_1), \end{aligned}$$

con

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

y $N(d_1)$ es la cumulativa normal estándar

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Evidentemente, la integral I_2 es idéntica a I_1 excepto que se sustituye $(k-1)$ por $(k+1)$. Ahora, regresando a nuestro problema original, tenemos que

$$v(x, \tau) = u(x, \tau) \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right),$$

y como $x = \log(S/K)$, $\tau = 1/2 \sigma^2(T-t)$, y $V = K v(x, \tau)$; obtenemos finalmente que el precio de la opción de compra europea está dado por

$$V(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (5.8)$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Esto permite además, calcular el precio de una opción de compra mediante la paridad *call-put*:

$$V - P = S - K e^{-r(T-t)}.$$

Donde V es el precio de la opción de compra (*call*), y P el de la opción de venta (*put*).

En este contexto, basta tener la volatilidad σ del mercado, y la tasa de interés r para poder obtener el valor V de la opción. Debido a su simplicidad, este modelo es aún hoy frecuentemente utilizado, incluso a pesar de la ingenuidad de sus suposiciones.

6. Integrales de Camino

Resulta muy interesante tener en mente el formalismo que se ha desarrollado acerca de integrales de camino cuando se analiza la dinámica de los precios en un mercado financiero. La razón de esto es que al igual que en mecánica cuántica, a uno le interesan todas las posibles realizaciones para la trayectoria, la probabilidad que tiene cada una, y el valor esperado final.

Feynman obtuvo una nueva formulación para la electrodinámica cuántica en una formulación de integrales de camino de donde incluso uno puede recuperar la ecuación de Schrödinger por un lado y el principio de mínima acción clásica por otro. En este capítulo presentamos los conceptos fundamentales para entender las integrales de camino tanto matemáticamente como su interpretación física. Es interesante ver que existe una conexión entre movimiento browniano y la derivación de la ecuación de Schrödinger a partir de la formulación de Feynman. Para referencias fundamentales de este capítulo véase [9] y [27].

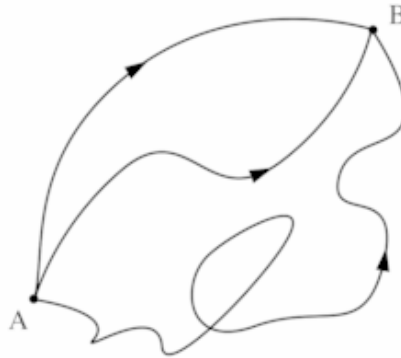


Fig. 6.1. En la formulación de Feynman, se calcula la acción Tomando en cuenta todas las trayectorias posibles. (fuente: wikipedia)

6.1 Integrales de Camino en Mecánica Cuántica

En mecánica cuántica, sabemos que la probabilidad $P(b,a)$ de ir de la posición x_a a un tiempo t_a a una posición x_b a un tiempo t_b , está dada por el cuadrado de la norma del producto punto

$$\langle x_a, t_a | x_b, t_b \rangle = \langle x_a, t_a | x_b, t_a + \tau \rangle = \langle x_a, t_a | \exp\left[\frac{-i H \tau}{\hbar}\right] | x_b, t_a \rangle, \quad (6.1)$$

donde hemos usado el operador de evolución temporal para escribir $|x_b, t_b\rangle$ referido al tiempo anterior t_a , y donde $\tau = t_b - t_a$.

Adicionalmente, sabemos que para el operador de evolución temporal, podemos expresar (6.1) como una combinación lineal de las eigenfunciones del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \langle x_a, t_a | x_b, t_b \rangle &= \langle x_a, t_a | \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| \exp\left[\frac{-i H \tau}{\hbar}\right] | x_b, t_a \rangle \\ &= \sum_{\alpha} \langle x_a, t_a | \alpha \rangle \exp\left[\frac{-i E_{\alpha} \tau}{\hbar}\right] \langle \alpha | x_b, t_a \rangle. \end{aligned}$$

En mecánica cuántica a esto se le conoce como la función *propagador* $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$, debido a que como en general

$$\begin{aligned}\psi(x_b, t_b) &= \langle x_b, t_b | \psi \rangle = \int d^3 x' \langle x_b, t_b | x', t_0 \rangle \langle x', t_0 | \psi \rangle \\ &= \int d^3 x' K(x_b, t_b; x', t_0) \psi(x', t_0),\end{aligned}\quad (6.2)$$

en donde x' y t_0 son arbitrarios. Entonces, $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ (o $K(b, a)$ como abreviación), puede interpretarse como el *kernel* de una transformación integral que aplicado a la función de onda en (x_a, t_a) nos permite obtener la función en (x_b, t_b) .

Es muy interesante notar que la aparición del propagador es una consecuencia de aplicar el operador de evolución temporal a un *ket* $|x, t\rangle$ para ponerlo en referencia a un tiempo t_0 anterior. Lo que podemos hacer ahora, es pensar en hacer una doble referencia aplicando el operador de evolución dos veces.

Pensemos en un tiempo intermedio t_1 entre t_a y t_b . Entonces

$$\begin{aligned}K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int dx' \langle x_a, t_a | x', t_1 \rangle \langle x', t_1 | x_b, t_b \rangle \\ &= \int dx' \langle x_a, t_a | \exp\left[\frac{-i H(t_1 - t_a)}{\hbar}\right] | x', t_a \rangle \langle x', t_a | \exp\left[\frac{-i H(t_b - t_1)}{\hbar}\right] | x_b, t_a \rangle.\end{aligned}$$

Y así podríamos hacer para N tiempos intermedios entre t_a y t_b .

En teoría de probabilidad existe una ecuación análoga que refleja esta forma de poder partir la probabilidad de ir de a a b , tomando el camino de a a un punto intermedio c y de ahí a b y sumar sobre todos los posibles puntos c . Esta es la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{j,i}(X_j | X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_k p_{j,k}(X_j | X_k) p_{k,i}(X_k | X_i), \quad (6.3)$$

donde la probabilidad condicional $p_{i,j}(X_j | X_i)$ es la probabilidad de transición entre los tiempos $j > k > i$.

Regresando a la mecánica cuántica; cuando Feynman estaba estudiando este tipo de matemáticas se encontró con un artículo de Dirac en el que se estipulaba una proposición algo extraña, Dirac decía que esta función $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ era *análoga* a una cantidad clásica construida a través de tomar la exponencial de $i\varepsilon$, con ε pequeña, multiplicado por el Lagrangiano $L(x, x)$ cuando estas posiciones x_b y x_a correspondían a tiempos t_b y t_a tales que $t_b - t_a = \varepsilon$ de magnitud infinitesimal. Es decir

$$K(b, a) \text{ es análogo a } \exp\left(\frac{i\varepsilon L\left(\frac{x-b}{\varepsilon}, x\right)}{\hbar}\right).$$

Pero Dirac no explicaba qué quería decir con *análogo*. ¿Se refería Dirac a una igualdad? Feynman lo tomó así, poniendo una constante de proporcionalidad adecuada A , y entonces se obtiene de (6.2) que

$$\psi(x', t + \varepsilon) = \int d^3 x A \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x' - x}{\varepsilon}, x\right)\right] \psi(x, t). \quad (6.4)$$

Y de aquí, expandiendo en series de Taylor, Feynman se dio cuenta que obtenía la ecuación de Schrödinger¹⁰

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t).$$

Ahora, si queremos calcular la evolución de la función de onda para tiempos más grandes, es claro que lo único que tenemos que hacer es aplicar la ecuación (6.4) un buen número de veces, por ejemplo para $\tau=2\varepsilon$

$$\begin{aligned} \psi(x', t + 2\varepsilon) &= \int A \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x'-x_1}{\varepsilon}, x_1\right)\right] \left(\int A \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x'-x_2}{\varepsilon}, x_2\right)\right] \psi(x, t) d^3 x_2 \right) d^3 x_1 \\ &= \iint A^2 \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x'-x_1}{\varepsilon}, x_1\right) + \frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x'-x_2}{\varepsilon}, x_2\right)\right] \psi(x, t) d^3 x_2 d^3 x_1 \end{aligned}$$

Y es claro que entonces para $\tau=N\varepsilon$

$$\psi(x', t + N\varepsilon) = \int \cdots \int A^N \exp\left[\sum_{i=1}^N \frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x'-x_i}{\varepsilon}, x_i\right)\right] \psi(x_i, t) d^3 x_N \cdots d^3 x_1,$$

de manera que regresando a nuestro problema de calcular la función de onda en (x_b, t_b) partiendo de (x_a, t_a) , viendo la ecuación (6.4) vemos que

$$\begin{aligned} K(b, a) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \cdots \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \varepsilon L\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon}, x_i\right)\right] \frac{d^3 x_N}{A^{-1}} \cdots \frac{d^3 x_1}{A^{-1}} \\ &= \int \cdots \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x_i, x_i) dt\right] \frac{d^3 x_N}{A^{-1}} \cdots \frac{d^3 x_1}{A^{-1}} \\ &\equiv \int e^{(i/\hbar) S[b, a]} Dx(t) \end{aligned}$$

Siendo la última notación, la que normalmente se utiliza para definir una *integral de camino*.

6.2 Principio de mínima acción en mecánica clásica

De las maneras más elegantes en que uno puede formular las ecuaciones de la mecánica clásica es este maravilloso principio de mínima acción. Fue Hamilton el que enunció este principio, del cual fácilmente se desprenden las ecs. de Euler-Lagrange. Explícitamente, que si consideramos la cantidad S dada por

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt, \quad (6.5)$$

donde L es el lagrangiano del sistema. Para una partícula de masa m moviéndose en un potencial $V(x, t)$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t).$$

¹⁰ La derivación se presenta un poco más adelante.

El principio de mínima acción (o de Hamilton) expresa que la trayectoria que seguirá la partícula será tal que la acción S se minimice¹¹, es decir que a primer orden en δx :

$$\delta S = S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] = 0.$$

Para formar un camino que extremice S en (6.5), es claro que necesitamos las condiciones

$$\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} S[x + \delta x] &= \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x} + \delta \dot{x}, x + \delta x, t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[L(\dot{x}, x, t) + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \\ &= S[x] + \int_{t_a}^{t_b} \left[\delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \end{aligned}$$

de manera que integrando por partes

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta x \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt.$$

Y como δx es cero en los extremos, el primer término se hace cero. Además, como δx puede tomar cualquier valor entre estos dos extremos, es así como obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

6.3 Mínima acción en mecánica cuántica

La regla en mecánica cuántica para calcular la probabilidad $P(b,a)$ para una partícula de ir de una posición x_a a un tiempo t_a a una posición x_b a un tiempo t_b , está dada por

$$P(b, a) = |K(b, a)|^2,$$

donde

$$K(b, a) = \sum_{\text{todos los caminos}} \phi[x(t)] \quad (6.6)$$

refiriéndonos a todos los caminos que van de (x_a, t_a) a (x_b, t_b) . Y donde

$$\phi[x(t)] = \text{const} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right) \quad (6.7)$$

en la que la constante se escoge de manera adecuada para normalizar K de manera conveniente.

¹¹ En general, se requiere sólo que la acción sea un extremo.

6.3.1 Límite clásico

Cuando examinamos la regla en mecánica cuántica para construir la amplitud de probabilidad es de especial consideración el hecho que no sólo contribuye la trayectoria cuya acción se minimiza, sino todas, aunque con diferentes fases. Es entonces necesario preguntarse y verificar que esta regla se reduzca al principio de acción clásica en el límite macroscópico.

Si analizamos la ec. (6.7), vemos que lo que aquí cuenta es la proporción de S con respecto a \hbar . En el límite clásico, las dimensiones, masas y tiempos son enormes con respecto al valor de $\hbar = 1.05 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}$. Y en la medida que la acción S sea muy grande con respecto a \hbar , entonces cuando en la trayectoria nos movamos una distancia δx pequeña en una escala clásica, la variación de S/\hbar será enorme.

La parte real (o imaginaria) de ϕ es un coseno (o seno) de un ángulo extremadamente grande. Si nos movemos en la trayectoria una distancia extremadamente pequeña en el límite clásico, podremos encontrar que la contribución total suma cero. Pues para una contribución positiva, podemos dar una trayectoria infinitesimalmente cerca que tenga una contribución negativa. Esto para la parte real y la imaginaria de ϕ , de manera que no hay una contribución neta.

Esto quiere decir, que sólo donde S no varíe alejándonos infinitesimalmente, podremos entonces contar su contribución en la ec. (6.7). Es decir, donde $\delta S = 0$ al menos a primer orden. Esto quiere decir que la acción S contará siempre y cuando sea tomada en cuenta para una trayectoria \bar{x} para la que S sea un extremo (S_{cl}). Todas las contribuciones dentro de una vecindad alrededor de la trayectoria \bar{x} estarán casi en la misma fase y no se cancelarán. Es así que solamente las trayectorias que estén en la vecindad de \bar{x} tendrán contribuciones importantes, y en el límite clásico sólo necesitamos considerar esta trayectoria en particular. De esta manera hemos demostrado heurísticamente la convergencia de la regla cuántica al principio de Hamilton en el límite clásico.

6.4 La ecuación de Schrödinger en la formulación de Feynman

La formulación de Feynman para la mecánica cuántica supone que la amplitud de probabilidad para ir de un estado a otro se puede escribir como

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \sum_{\substack{\text{sobre todos los} \\ \text{caminos}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt L\right).$$

Que en el caso en que la diferencia temporal $t-t'$ sea considerada infinitesimalmente pequeña, tenemos

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \frac{1}{w(t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt L\right),$$

donde $w(t)$ es algún factor de peso que depende del intervalo temporal. Ahora, veamos que integrando el lagrangiano con un intervalo temporal Δt muy chico, obtenemos que

$$\int_t^{t'} dt L = \int_t^{t'} dt \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right] = \Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x-x'}{\Delta t} \right)^2 - V \left(\frac{x+x'}{2} \right) \right).$$

Para determinar $w(t)$, veamos que en el caso de una partícula libre

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \frac{1}{w(t)} \exp \left(\frac{im(x-x')^2}{2\hbar\Delta t} \right),$$

y además, por la condición de ortonormalidad

$$\langle x, t | x', t' \rangle \Big|_{t=t'} = \delta(x-x'),$$

y como

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left(\frac{imu^2}{2\hbar\Delta t} \right) = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}},$$

entonces:

$$\frac{1}{w(t)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}.$$

Derivemos ahora la ecuación de Schrödinger a partir de la formulación de Feynman de integrales de camino.

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x, t) &= \langle x, t | \alpha \rangle = \int dx' \langle x, t | x', t \rangle \langle x', t | \alpha \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \exp \left[\left(\frac{im}{2\hbar} \right) \frac{(x-x')^2}{\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right] \langle x', t | \alpha \rangle \end{aligned}$$

pensando que $\Delta t = t-t'$ es infinitesimal. Ahora si hacemos $z=x-x'$, como $t'=t+\Delta t$:

$$\langle x, t + \Delta t | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[\frac{imz^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right] \langle x-z, t | \alpha \rangle.$$

Y como en el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, la mayor contribución a la integral será alrededor de $z=0$, podemos expandir $\langle x-z, t | \alpha \rangle$ en potencias de z . Y también expandiremos $\langle x, t + \Delta t | \alpha \rangle$ en potencias de Δt , de manera que

$$\begin{aligned} \langle x, t | \alpha \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | \alpha \rangle &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[\frac{imz^2}{2\hbar\Delta t} \right] \left(1 - \frac{iV\Delta t}{\hbar} + \dots \right) \\ &\quad \times \left[\langle x, t | \alpha \rangle + z \frac{\partial}{\partial x} \langle x, t | \alpha \rangle + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | \alpha \rangle + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ahora, el término que es lineal en z se hace cero cuando se integra con respecto a z . Además, como

$$\sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[\frac{imz^2}{2\hbar\Delta t} \right],$$

entonces el primer término de la izquierda es igual al primer término del lado derecho en la ecuación (6.8). Por lo que

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[\frac{imz^2}{2\hbar \Delta t}\right] \left(-\frac{iV\Delta t}{\hbar} + \dots\right) \times \left[\langle x, t | \alpha \rangle + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | \alpha \rangle + \dots\right].$$

Y ahora, igualando términos de primer orden en Δt ¹²:

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | \alpha \rangle = -\frac{iV\Delta t}{\hbar} \langle x, t | \alpha \rangle + \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar \Delta t}{m}\right)^{3/2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | \alpha \rangle, \quad (6.9)$$

pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 \exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar \Delta t}\right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar \Delta t}{m}\right)^{3/2}.$$

Por lo tanto, de (6.9) simplificando obtenemos

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | \alpha \rangle = -\frac{iV\Delta t}{\hbar} \langle x, t | \alpha \rangle + \left(\frac{i\hbar \Delta t}{m}\right) \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | \alpha \rangle,$$

que es lo mismo que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | \alpha \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | \alpha \rangle + V \langle x, t | \alpha \rangle,$$

que es la ecuación de Schrödinger.

Es interesante notar, que de fondo se está usando la fórmula de Itô, o la suposición de que la trayectoria que sigue la partícula se puede describir con un movimiento browniano. De otra forma, en la ecuación (6.9) no se hubiera tomado la aproximación hasta segundo orden en x , y de primer orden en t . Lo que esto supone, es que la trayectoria es un proceso de difusión. De otra manera, si $E(\Delta x^2)$ fuera proporcional a t^γ , con $0 < \gamma < 1$, el proceso es una subdifusión; mientras que si $\gamma > 1$, será una superdifusión.

¹² Aquí se utiliza el lema de Ito de forma implícita pensando en que las trayectorias pueden ser representadas con procesos brownianos.

7. Ecuaciones de difusión

En este capítulo desarrollamos las herramientas fundamentales que se emplean normalmente en la resolución de problemas financieros. Este capítulo es una continuación natural del capítulo 4, sin embargo, la introducción de la fórmula de Feynman-Kac después de la revisión de las integrales de camino cobrará un fondo más profundo. Asimismo, el generador infinitesimal asociado a un proceso estocástico está también ligado a la fórmula de Feynman-Kac, que no es más que la ecuación de Schrödinger en tiempo imaginario [13].

Introducimos también aquí el enfoque de Samuelson para obtener el precio justo de una opción financiera en términos de una esperanza sobre la probabilidad física del proceso asociado al movimiento del subyacente S .

7.1 Fórmula de Feynman-Kac

Entre el formalismo de las integrales de camino que surgen de la formulación de la mecánica cuántica de Feynman y los procesos estocásticos, surge un muy bonito puente generado por la llamada fórmula de Feynman-Kac.

Si tenemos una EDP parabólica de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + c(x)u(t, x) + f(x), \quad (7.1)$$

con $x \in \mathbf{R}^p$, y condición de frontera $u(0, x) = g(x)$; entonces la solución se puede expresar como una esperanza asociada a un proceso estocástico, a saber:

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[g(x + B(t)) \exp \left(\int_0^t c(x + B(s)) ds \right) + \int_0^t f(x + B(s)) \exp \left(\int_0^s c(x + B(r)) dr \right) ds \right]$$

donde $B(t)$ es un movimiento browniano estándar.

Notemos que en el caso de una ecuación de calor, donde $c(x) = f(x) = 0$ para toda x , la solución entonces se reduce a

$$u(t, x) = \mathbb{E}[g(x + B(t))].$$

Es decir, que cuando tenemos un proceso de difusión estándar, la solución para la EDP se puede calcular numéricamente generando movimientos brownianos que partan de la condición de frontera, y luego tomando la esperanza usando métodos Monte-Carlo para cada x . Es claro entonces que la generalización de este resultado a EDP parabólicas más generales es realmente útil. De hecho, las ventajas de este resultado fluyen en ambos sentidos: calcular esperanzas complicadas puede llevarse a calcular la solución a ecuaciones diferenciales no tan difíciles, e inversamente.

Para probar este resultado es útil definir a $v(s, x) = u(t-s, x)$, y considerar el proceso [16]:

$$v(s, x + B(s)) \exp \left(\int_0^s c(x + B(r)) dr \right).$$

Entonces, aplicando la fórmula de Itô a la función $f(x, y) = v(t, x) \exp(y)$, y a los dos procesos

$$\left(x + B(t), \int_0^t c(x + B(r)) dr \right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & v(t, x + B(t)) \exp\left(\int_0^t c(x + B(s)) ds\right) \\ &= v(0, x) + \int_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} \nabla^2 v + c v \right)(s, x + B(s)) \exp\left(\int_0^s c(x + B(r)) dr\right) ds \\ & \quad + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x_i}(t, x + B(s)) \exp\left(\int_0^s c(x + B(r)) dr\right) dB \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo de vuelta $v(s, x) = u(t-s, x)$, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= u(t, x) + \int_0^t \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 u + c u \right)(t-s, x + B(s)) \exp\left(\int_0^s c(x + B(r)) dr\right) ds \\ & \quad + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(0, x + B(s)) \exp\left(\int_0^s c(x + B(r)) dr\right) dB - u(0, x + B(t)) \exp\left(\int_0^t c(x + B(s)) ds\right) \end{aligned}$$

Y como u satisface la EDP (7.1), tomando el valor esperado encontramos

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_0^t f(x + B(s)) \exp\left(\int_0^s c(x + B(r)) dr\right) ds + g(x + B(t)) \exp\left(\int_0^t c(x + B(s)) ds\right) \right],$$

pues el valor esperado de una integral de Itô con respecto a un proceso de Wiener, $B(t)$, es cero.

7.2 Generador Infinitesimal

A un proceso de difusión, le podemos asociar un operador lineal y diferencial parcial de segundo orden. A este operador le llamamos el generador infinitesimal de la difusión. Además, dicho operador resulta un proceso Markov homogéneo.

Si pensamos que la difusión $X(t)$ evoluciona en \mathbf{R} , con

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t),$$

entonces definimos al operador A que actúa sobre una función f , y que asocia la función

$$(Af)(x) = b(x)f'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2} f''(x).$$

Este operador es especialmente útil por una variedad de razones [16], pero entre las que más nos interesan, encontramos que el proceso

$$M(t) = f(X(t)) - \int_0^t Af(X(s)) ds,$$

es una martingala¹³ respecto a la filtración del movimiento browniano. En particular, se cumple que para todo t :

$$E(f(X(t)) = f(x) + \int_0^t Af(X(s))ds,$$

conocida como la fórmula de Dynkin.

Además, el generador infinitesimal está ligado a la fórmula de Feynman-Kac, pues si tenemos una EDP de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au - cu; \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

con condición de frontera $u(0,x)=g(x)$, entonces

$$u(t, x) = E \left[g(x + X(t)) \exp \left(- \int_0^t c(x + X(s)) ds \right) \right].$$

7.3 Fórmula de Samuelson

Hay diferentes maneras de abordar el concepto de lo que significa un precio justo. En el contexto de seguros, el precio justo para una prima es el costo de los daños esperados que la compañía deberá pagar al comprador. En finanzas, esto significa que S_0 será el precio justo de un activo que tiene un pago de S_T a tiempo T , si es que replicando el proceso asociado al precio de manera iid se obtiene un promedio de pago igual a $E[S_T]$.

Así, para las compañías de seguros, el total de las primas recibidas equivaldrá al promedio de los costos por pérdida y por operación, garantizando la operación de la empresa.

En finanzas, solamente se realiza un solo valor para S_T , de manera que la ley de los grandes números no se puede aplicar directamente. Más aún, cuando se trabaja con productos financieros derivados, las características de éstos dependen de una fecha futura (fija para derivados europeos) y por lo tanto se debe tener cuidado al promediar los pagos.

Existe entonces una manera más natural para definir el concepto de precio justo:

Definición 1: El precio justo asociado a un derivado que tiene un pago de S_T a tiempo T es una variable aleatoria S_0^* , tal que replicando el proceso asociado a S_T de manera iid empezando en $S_0^*(w)$, obtenemos un promedio de pago igual a $S_T(w)$, donde w es un punto en el espacio muestral Ω del experimento S_T .

En este contexto, se puede desarrollar la idea originalmente propuesta por Samuelson en 1965 y generalizarla, obteniendo así una manera distinta para valuar el precio de derivados financieros [4].

Si suponemos que existe un activo con pago S_T a tiempo T , con precio inicial S_0 , y un bono libre de riesgo con costo inicial 1 y pago e^{rT} a tiempo T , es claro entonces,

¹³ Martingala: proceso estocástico X_t tal que $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$. Normalmente se utiliza para modelar juegos justos.

que si el activo S_T es libre de riesgo, entonces el precio de un derivado definido por la función $g(S_T)$ será:

$$p(g) = e^{-rT} g(S_0 \exp(rT)), \quad (7.2)$$

debido a que $g(S_T)$ es también libre de riesgo y que $S_T = S_0 e^{rT}$; de esta manera $p(g)$ sólo representa el valor presente de $g(S_T)$.

Sin embargo, si el activo S_T es riesgoso, el precio justo para el derivado tendrá que ser calculado de otra manera.

Si replicamos el activo con valor inicial S_0 , obtenemos $E[S_T]$ como pago a tiempo T . De esta manera, bajo nuestra definición de precio justo, vemos que usando la proporcionalidad de los precios, si tomamos como valor inicial

$$S_0^* = \frac{S_T}{E[S_T]} S_0,$$

la replicación iid del proceso comenzando en $S_0^*(w)$ promedia $S_T(w)$. Esto es debido a que podemos pensar que estamos comprando $S_T/E[S_T]$ unidades del activo con precio inicial S_0 ¹⁴ y que existe proporcionalidad en los precios, i.e. $\alpha \in \mathbf{R}$ activos cuestan αS_0 . Por lo tanto S_0^* es un precio justo.

Además, S_0^* es único, porque no podría haber otro precio que satisficiera el mismo pago promedio debido a la proporcionalidad de los precios.

Ahora, si la cantidad S_0^* se invierte en un banco, su pago a tiempo T será

$$\frac{S_T}{E[S_T]} S_0 e^{rT}.$$

Así, el costo del derivado debería ser tal, que en promedio uno obtuviera lo mismo que la cantidad del precio justo invertida en un banco. Más formalmente podríamos definir el precio justo de la siguiente forma:

Definición 2: El precio justo de un derivado será el promedio de todos los precios de derivados libres de riesgo obtenidos al invertir estos precios en el banco.

De esta manera, si se invierte la cantidad

$$\frac{S_T(w)}{E[S_T]} S_0$$

en el banco, entonces el precio de un derivado libre de riesgo, por la ecuación (7.2), será

$$e^{-rT} g\left(\frac{S_T}{E[S_T]} S_0 \exp(rT)\right).$$

Y tomando el promedio, obtenemos que el precio justo del derivado estará dado por

$$p(g) = e^{-rT} E_p \left[g\left(\frac{S_0 e^{rT}}{E[S_T]} S_T\right) \right], \quad (7.3)$$

¹⁴ Implícitamente se está haciendo la suposición que el activo es infinitamente divisible.

donde hemos explicitado que el promedio se toma con respecto a la probabilidad física definida por el proceso S_T .

Es de especial interés notar que de esta manera, no es necesario encontrar la medida de martingala, que es necesaria en otras formas de calcular del precio de la opción (esto se explica en detalle en la sección 10.1).

8. Procesos de Lévy

Los procesos estocásticos de Lévy son procesos muy generales. Son análogos a las caminatas aleatorias en tiempo continuo y contienen como casos particulares procesos muy importantes, como el movimiento browniano, el proceso de Poisson, y procesos estables¹⁵.

Aunque la teoría fundamental fue establecida en los años 30s, en los últimos años ha habido un gran interés y nuevos resultados teóricos, así como nuevas aplicaciones [1].

Esencialmente, un proceso de Lévy $X=(X(t), t \geq 0)$ que toma valores en \mathbf{R}^n , tiene la particularidad de tener incrementos estacionarios independientes y de ser infinitamente divisible.

8.1 Distribuciones de Lévy definidas por la función característica

Las distribuciones de Lévy, son muy generales. De hecho, un caso especial de estas distribuciones es la distribución normal. Además, las distribuciones de Lévy también cumplen una versión débil del Teorema del Límite Central, en el sentido que dichas funciones de densidad de probabilidad (fdp) también pueden ser atractores en el espacio de fdp de la suma de n variables iid [12].

Más específicamente, las distribuciones de Lévy se dividen en estables, e inestables. De hecho, se establece a α como parámetro de estabilidad porque las distribuciones de Lévy con $\alpha < 2$ son estables, y no lo son cuando $\alpha > 2$. El caso $\alpha = 2$ corresponde a la distribución gaussiana [31]. Se ejemplifica de manera gráfica la forma en que las fdp convergen hacia distribuciones de Lévy en la figura 8.1.

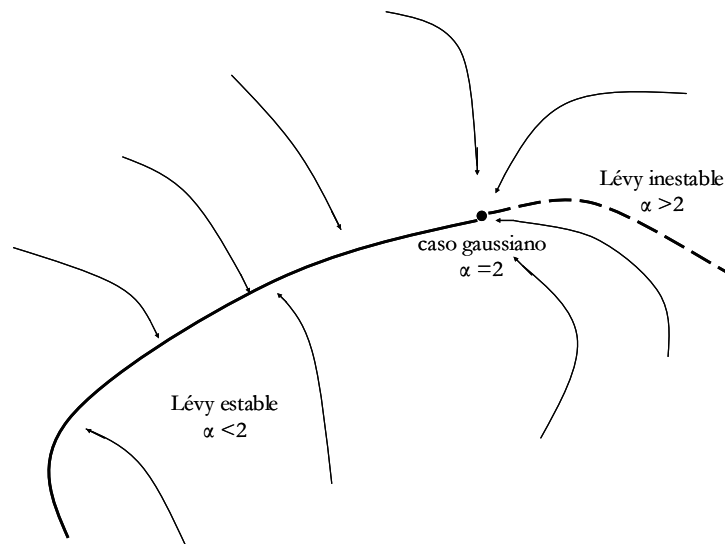


Fig. 8.1. Representación del atractor en el espacio de fdp.

Paul Lévy encontró que estas distribuciones más generales se pueden caracterizar por la forma que tiene su función característica. La función característica $\varphi(z)$ de una distribución $f(x)$ se define como la transformada de Fourier de f :

¹⁵ Un proceso se dice que es estable, si todas las distribuciones de sus incrementos son estables. Una distribución es estable si se preserva bajo la operación de convolución.

$$\varphi(z) = E[e^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x) dx .$$

Inversamente, la función de densidad de probabilidad $f(x)$, puede ser expresada en términos de la función característica $\varphi(z)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-izx} dz .$$

Y para las distribuciones de Lévy [24] :

$$\varphi(z; \alpha, \beta, c, \mu) = \begin{cases} \exp\left(iz\mu - |cz|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(z) \tan(\frac{1}{2} \pi\alpha))\right), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(iz\mu - |cz|(1 + (2/\pi) i\beta \operatorname{sign}(z) \log(z))\right), & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

con

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \\ 1 & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

Donde μ es un parámetro asociado a la media, β es una medida de la asimetría de la función, c es un factor de escala relacionado con el ancho de la distribución, y α caracteriza el comportamiento asintótico. Cuando $\alpha < 2$:

$$f(x) \sim \frac{ac^\alpha (1 + \beta) \sin(\frac{1}{2} \pi\alpha) \Gamma(\alpha) / \pi}{|x|^{\alpha+1}} .$$

Mientras que cuando $\alpha=2$, la distribución que se obtiene es una gaussiana. Esto se clarifica en la figura 8.2.

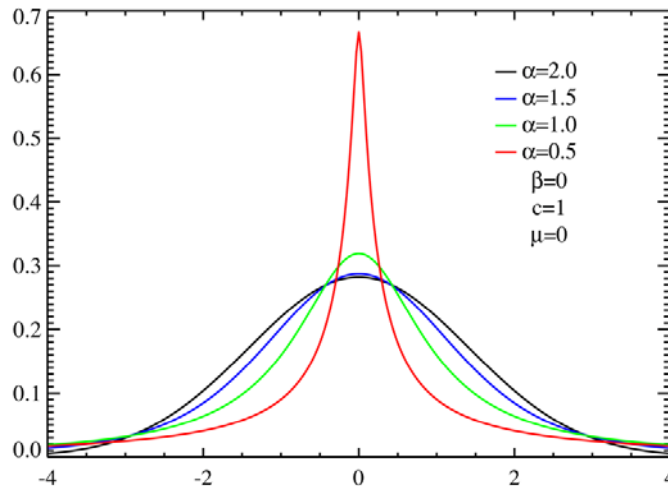


Fig. 8.2. Diferentes distribuciones de Lévy variando α .
(fuente: wikipedia)

Si $\varphi(z)$ es la función característica de una distribución. Entonces, si para cada entero n , $\varphi(z)$ es también la n -ésima potencia de la función característica, decimos que la distribución es infinitamente divisible. En el caso de las distribuciones de Lévy su función característica cumple con esta condición.

8.2 Representación de Lévy-Khintchine

Para un proceso de Lévy X_t , se puede demostrar que la función característica satisface [3]:

$$\varphi(z) = E[e^{izX_t}] = \exp\left(\gamma iz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(izx) - 1 - izx 1_{[|x|<1]}) \nu(dx)\right) \quad (8.1)$$

donde

$$1_{[|x|<1]} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases},$$

$\gamma \in \mathbf{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ y ν es la medida de Lévy en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ con

$$\nu(\mathbf{R} - [-1, 1]) < \infty, \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \nu(dx) < \infty.$$

A la función $\psi(z) = \log \varphi(z)$ se le llama el exponente característico

$$\psi(z) = i\gamma z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(izx) - 1 - izx 1_{[|x|<1]}) \nu(dx).$$

La función $x 1_{[|x|<1]}$ puede ser reemplazada por alguna otra función acotada con comportamiento similar en 0. Otra opción popular es $x/(1+x^2)$. Pero cambiar esta función cambia el valor de γ .

Un proceso de Lévy puede ser caracterizado así por 3 parámetros (γ , σ^2 , ν), cada uno asociado a un término del exponente característico [14].

8.3 Descomposición de Lévy-Itô

Se puede entonces definir procesos estocásticos más generales, que incorporan como distribución de los incrementos, una distribución de Lévy. De esta manera, un proceso de Lévy puede ser caracterizado así por los 3 parámetros (γ , σ^2 , ν), cada uno asociado a un término del exponente característico. La descomposición de Lévy-Itô es una forma bastante clara y general de definir un proceso que pueda tener asociada una distribución de Lévy.

En los años cincuentas, P. Lévy concibió la descomposición, y más tarde fue rigurosamente probada por K. Itô en varias páginas. Lévy obtuvo la representación de Lévy-Khintchine para distribuciones infinitamente divisibles usando la descomposición como idea de fondo. Mientras que el logro de Itô fue el poder explicitar y validar esta idea de fondo: probó que un proceso definido acorde a la descomposición de Lévy-Itô, tiene asociada una función característica que se puede expresar de la forma (8.1) [29].

Aquí se dará un razonamiento que seguirá la siguiente línea: evaluaremos el que un proceso definido como la suma de procesos que tienen asociados términos del exponente característico, puede efectivamente cumplir con (8.1), y ser en consecuencia un proceso de Lévy.

La función característica para un proceso de Wiener $W_t' = \sigma B_t$, donde B_t es un movimiento browniano estándar, es

$$\varphi_{W'}(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right).$$

Adicionalmente, si definimos un nuevo proceso de Wiener añadiendo un término de deriva: $W_t = \gamma t + \sigma B_t$, obtenemos que la función característica toma la forma

$$\varphi_W(z) = \exp\left(\gamma iz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right).$$

Finalmente, un proceso de Poisson compuesto se obtiene de reemplazar los saltos de tamaño 1 por saltos independientes con distribución ν . Y la función característica de este proceso es

$$\varphi(z) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(e^{izx} - 1)\nu(dx)\right),$$

donde λ es el parámetro usual de la distribución de Poisson.

Cuando uno lo ve así, resulta muy intuitivo pasar de las variables aleatorias y las funciones de distribución, a los procesos estocásticos vía la fórmula (8.1), la representación de Lévy-Khintchine.

Es complicado probarlo rigurosamente, pero es fácil de intuir que el exponente característico de una suma de procesos estocásticos, puede acomodarse como la suma de los exponentes de cada uno de los procesos en la forma de la representación (8.1), de manera que una manera simple y general de poder definir un proceso de Lévy Z_t es

$$Z_t = \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t (P_s - \mu) ds, \quad (8.2)$$

donde P_t es un proceso de Poisson compuesto con medida ν y promedio μ . A este resultado se le conoce como la descomposición de Lévy-Itô para procesos de Lévy.

De esta manera, la ecuación (8.2) define el proceso de Lévy en tres términos asociados cada uno a los parámetros (γ, σ^2, ν) . Siendo γ el parámetro asociado a la deriva del proceso, σ^2 a la volatilidad, y ν a los saltos.

9. Simulación de distintos procesos para valorar opciones

Como hemos visto, el método más común para valorar el precio de una opción, es pensar que el activo subyacente obedece la ecuación diferencial estocástica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

donde dW es un movimiento browniano estándar. Y de manera que usando la fórmula (7.3) de Samuelson y la expresión para la esperanza de S a tiempo T , obtenemos que el precio está dado por

$$\begin{aligned} p(g) &= e^{-rT} \mathbb{E}_P \left[g \left(\frac{S_0 e^{rT}}{\mathbb{E}[S_T]} S_T \right) \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_P \left[g \left(\frac{S_0 e^{rT}}{S_0 e^{\mu T}} S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \right) \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_P \left[g \left(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \right) \right] \end{aligned}$$

Es decir, que en el modelo de BS podemos calcular en términos de una esperanza el precio de una opción que podría escribirse de otra forma como

$$p(g) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2),$$

como se hizo anteriormente en la sección 5.2.1.

Este tipo de análisis puede realizarse con trayectorias de precios generadas a partir de la discretización del proceso iterando

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right).$$

Se pueden entonces obtener distintas posiciones finales para S , y calcular la esperanza de S_T y de la función g usando métodos Monte-Carlo. Así se obtiene el precio de la opción $p(g)$ usando la ecuación (7.3).

Sin embargo, lo útil de este modelo es que uno puede proponer otro proceso estocástico distinto a S , y seguir siendo capaz de encontrar un valor para la opción asociado a este proceso. A continuación proponemos otros dos procesos, Y_t y Z_t , que podrían modelar el precio de un activo subyacente, y sobre los cuales se puede calcular $p(g)$.

9.1 Simulación de los procesos estocásticos

Teniendo una variable aleatoria x que tenga una distribución normal estándar, podemos simular numéricamente el proceso estocástico asociado al modelo de Merton tomando la ecuación diferencial estocástica y discretizarla temporalmente, tomando en cuenta que la escala del movimiento browniano es del orden de $t^{1/2}$:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + S_t \mu \Delta t + S_t \sigma x \sqrt{\Delta t}, \quad (9.1)$$

o alternativamente, podemos simular el proceso con la solución analítica discretizada:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma x \sqrt{\Delta t}\right)$$

Para obtener procesos más generales y con colas pesadas, tenemos 2 opciones. La primera es tratar de generalizar el proceso anterior usando una variable aleatoria y

con colas pesadas, en vez de la variable gaussiana x , a este nuevo proceso lo denotaremos por Y_t , y estará definido como:

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma y \sqrt{\Delta t}\right)$$

En este caso, si la varianza de y no es finita, puede haber discontinuidades en el proceso. Si el proceso se simulara siguiendo la discretización de Euler análoga a (9.1), no existe garantía de que el precio Y_t sea siempre positivo. El uso de esta representación para simular el proceso es entonces particularmente útil, pues la exponencial jamás es negativa.

Como segunda opción, podemos generar un proceso de Lévy, denotado por Z_t , utilizando la descomposición de Lévy-Itô:

$$Z_{t+\Delta t} = Z_t + \gamma \Delta t + \sigma_Z x \sqrt{\Delta t} + \sum_{s=0}^{\Delta t} \beta P_s .$$

Donde el parámetro σ_Z para la varianza del movimiento browniano de este proceso no necesariamente es el mismo que en los procesos anteriores, $\beta > 0$, y la variable P_s tiene una distribución de Poisson compuesta con parámetro λ , promedio cero y es la suma de variables X_i iid con distribución uniforme $[-1,1]$. (Véase el apéndice para ver la simulación numérica de P_t).

9.2 Implementación numérica

A continuación presentamos las metodologías utilizadas para la generación de números aleatorios con distribuciones de probabilidad gaussiana y con colas pesadas. La explicación de la generación de un proceso de Poisson puede ser encontrada en el apéndice.

9.2.1 Distribución Gaussiana

Podemos probar qué tan válido resulta el modelo de Samuelson comparado con el modelo de Merton para calcular el riesgo de incumplimiento, y después analizar qué pasa cuando el proceso estocástico subyacente se sustituye por uno de Lévy.

Para simular la distribución gaussiana utilizamos el conocido método de Box-Muller. En donde si u_1 y u_2 son variables aleatorias con distribución uniforme, entonces

$$x = \sqrt{-2 \log u_1} \cos(2\pi u_2)$$

tiene distribución normal uniforme.

9.2.2 Distribuciones con colas pesadas

Nos interesa simular variables y con distribuciones $\eta(y)$ que decaigan como leyes de potencia en los extremos, i.e.

$$\eta(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \frac{A}{y^\alpha}, \quad (9.2)$$

para algún $\alpha \geq 0$, y donde A es algún factor de normalización adecuado.

La manera en la que podemos hacer esto, es pensar en que si u tiene distribución uniforme, entonces

$$\chi_{[0,1]}(u) du = \eta(y) dy .$$

Además, si $g(u)$ es una función tal que $g(u)=y$, entonces

$$\chi_{[0,1]}(u) du = \eta(g(u)) g'(u) du .$$

Y entonces si proponemos a $g(u)=u^{-\rho}$, tenemos que

$$\eta(u^{-\rho}) = \frac{\chi_{[0,1]}(u)}{g'(u)} ,$$

de donde simplemente reemplazando $u=y^{-1/\rho}$

$$\eta(y) = \frac{\chi_{[0,1]}(y^{-1/\rho})}{g'(y^{-1/\rho})} = \frac{\chi_{[0,1]}(y^{-1/\rho})}{-\rho(y^{-1/\rho})^{-\rho-1}} = \frac{\chi_{[0,1]}(y^{-1/\rho})}{-\rho y^{\rho+1/\rho}} ,$$

de manera que

$$\eta(y) = \frac{\chi_{[0,1]}(y^{-1/\rho})}{-\rho y^{\rho+1/\rho}} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{-\rho y^{\rho+1/\rho}} & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

pues $\rho > 0$. Entonces obtenemos que se cumple la condición (9.2) si

$$\rho = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

10. Discusión

Las integrales de camino de Feynman pueden verse como el cálculo del valor esperado de la observable asociada al operador de evolución temporal. Esto es análogo a calcular una esperanza del valor final que tendrá un proceso estocástico identificado con una ecuación de difusión, cuya conexión explícita está dada por la fórmula de Feynman-Kac.

En finanzas, el problema de calcular el precio de una opción de compra puede abordarse desde la estrategia de modelar la evolución del precio del activo S_t como un proceso estocástico. Sin embargo, cuando se define al proceso de manera que el comportamiento de éste sea más acorde con los datos reales del mercado, la ecuación diferencial asociada resulta muy difícil de escribir, y no mucho menos difícil resolver de forma analítica.

Sin embargo, la fórmula de Feynman-Kac, nos brinda la oportunidad de no tener que recurrir a la forma explícita de la EDP para encontrar su solución. Y más aún, podemos utilizar métodos Monte-Carlo para el cálculo numérico de la misma. Y con el acercamiento de Samuelson, ecuación (7.3), se puede calcular el precio con la probabilidad física determinada por el proceso.

Así, el procedimiento numérico utilizado en este trabajo, es generar muchas trayectorias para la evolución del precio usando distintos procesos estocásticos que determinen la evolución, y luego calcular el precio de la acción usando la metodología antes descrita. Esta motivación surge de la conexión con los formalismos matemáticos antes desarrollados, y también por la sencillez teórica y computacional.

10.1 Sobre el modelo utilizado

Teóricamente, la manera que ha sido predominante para calcular el precio de una acción, ha sido encontrar la medida equivalente libre de riesgo Q , sobre la cual el proceso $\{e^{-rt} S_t\}$ es una martingala, y el precio de la opción se puede encontrar como

$$p(g) = E_Q \left[e^{-r(T-t)} g(\{S_t, 0 \leq t \leq T\}) \middle| F_t \right], \quad (10.1)$$

donde $g(\{S_t, 0 \leq t \leq T\})$ es la función de pago de la opción sobre el activo a tiempo T , y F_t es la filtración natural de S_t .

Sin embargo, para la mayoría de los modelos, sobre todo para los más realistas, la clase de medidas equivalentes es bastante grande y a veces cubre todo el intervalo de no-arbitraje. En este sentido el modelo de Black-Scholes, donde existe una única medida equivalente, es muy particular.

Si uno conoce la fdp asociada al proceso S_t bajo la medida de martingala Q , entonces uno puede obtener el precio de la opción calculando la integral numéricamente. Sin embargo, en especial para los procesos de Lévy, la fdp incluso puede no tener representación analítica.

Otro método, desarrollado por Madan y Carr en 1998 [30], permite valuar el precio de una opción si no se conoce Q , pero se conoce la función característica $\varphi_S(z)$ asociada al proceso S . Con este método uno obtiene una expresión para la transformada de Fourier para el precio de la opción $p(g)$ que puede invertirse numéricamente. Sin embargo, sólo se han encontrado expresiones asociadas a ciertos procesos particulares, como el proceso de varianza gama.

Encontrar una única medida equivalente, una expresión para la fdp asociada a S , o la función característica, son problemas que desaparecen cuando se utiliza el enfoque de la fórmula de Samuelson para encontrar el precio de la opción. Sin embargo, si no existe la medida única de martingala, no tenemos certeza de decir que este precio justo sea único.

Sin embargo, es mucho más fácil trabajar con este enfoque, dada la simpleza de su implementación numérica, y la enorme flexibilidad que tiene al poder escoger casi cualquier proceso estocástico para representar la evolución de S_t , que no se tiene en los otros modelos.

En este trabajo, se encontró que modificando ciertos parámetros de procesos más generales, uno al menos recupera el resultado del modelo Black-Scholes, haciendo factible y sujeto al análisis del modelo con datos reales, el hecho de verificar si estos modelos pueden describir el comportamiento financiero de una manera más precisa.

Esta investigación tendría que incluir el hacer una calibración del modelo aquí propuesto con resultados analíticos como los de Carr, Madan y Bakshi, entre otros. Esto requiere trabajar más a fondo con la ecuación diferencial asociada al proceso de difusión. Pero en el caso en que el proceso sea de Lévy, la ecuación diferencial resultante es una en derivadas fraccionarias, lo cual hace que esta investigación no sea trivial.

10.2 Resultados de la simulación

Se hizo un estudio acerca de la variabilidad en la función de distribución de probabilidad para el valor final del precio S_T dependiendo del parámetro α en el proceso que tiene asociado una distribución con colas pesadas.

Se encontró que la distribución tiende a una normal a medida que crece α , ver figura 10.1.

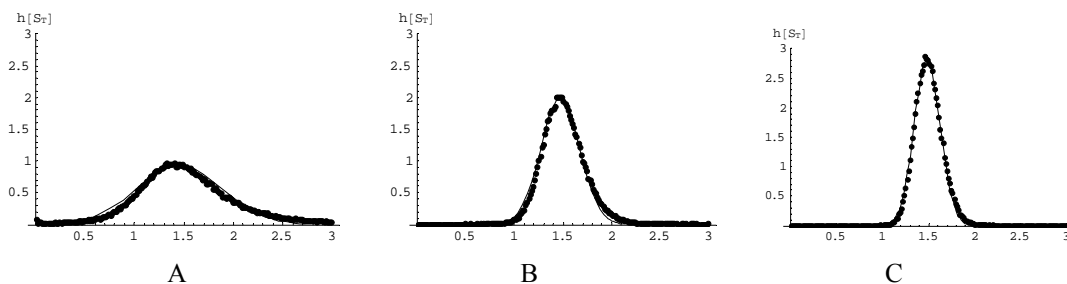


Fig. 10.1. Histogramas $h(S_T)$ vs. S_T para diferentes valores de α aproximados por distribuciones normales.

Siendo los parámetros de la distribución normal que mejor se adaptaban eran en cada caso:

	A	B	C
α	2.6	3.1	3.6
$N(\mu, \sigma^2)$	$N(1.45, 0.43^2)$	$N(1.47, 0.2^2)$	$N(1.485, 0.141^2)$

Nótese que para valores bajos de α , el histograma refleja una distribución bastante asimétrica y con alta varianza. Cuando $\alpha > 3$, la distribución $\eta(y)$ tiene promedio (a partir de $\alpha > 2$) y varianza finitos. Esto hace que podamos esperar que la distribución de la suma de variables aleatorias

$$S_T = S_0 + (S_1 - S_0) + \dots + (S_T - S_{T-1})$$

converja a una normal por el TLC¹⁶.

Sin embargo, la existencia de colas pesadas y la asimetría en la distribución nunca se desvanecen del todo. Las gráficas en la figura 10.2 en escala logarítmica pueden reflejar más claramente este hecho:

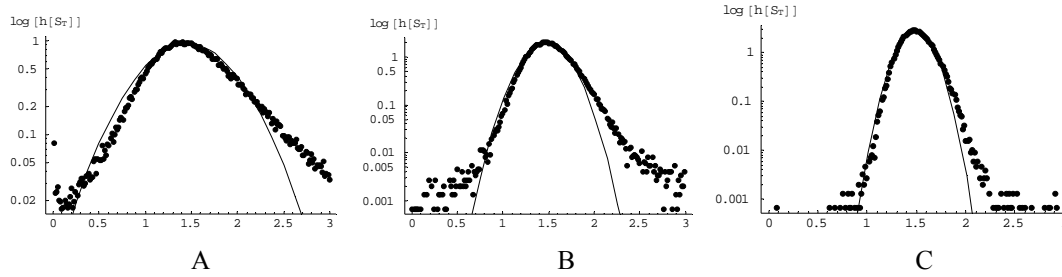


Fig. 10.2. Gráficas de $\log(h(S_T))$ vs. S_T .

De esta misma forma, esperamos una cierta convergencia en los precios que se obtienen usando diferentes procesos estocásticos para modelar al activo subyacente. A medida que el proceso que usa colas pesadas tenga un parámetro α más grande, también esperamos que el precio de la opción $p(g)$ calculada usando la fórmula de Samuelson, se acerque al valor que predice el modelo de Black-Scholes.

De manera análoga, el hecho de reducir la intensidad de los saltos en el proceso de Lévy, genera también una convergencia hacia el precio de Black-Scholes. Sin embargo, como la simulación del proceso utiliza la descomposición de Lévy-Itô, cuando la intensidad de los saltos tiende a cero, el proceso que queda, es sólo una deriva más un movimiento browniano. De manera que el precio final queda subvaluado¹⁷.

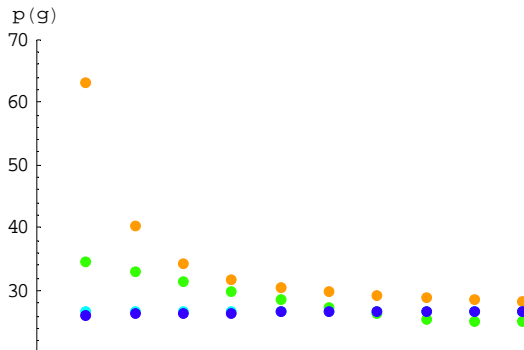


Fig. 10.3. Convergencia de los precios.

La figura 10.3 muestra diferentes valores de los precios de la opción para 4 procesos diferentes cuando se varían sus parámetros. Dado que cada parámetro es distinto, esta gráfica sólo es ilustrativa¹⁸. Los puntos de las dos series superiores son los asociados al proceso con colas pesadas Y_t , y el que le sigue hacia abajo al proceso de Lévy Z_t , tal y como se definieron anteriormente.

¹⁶ Sin embargo, no es claro el que los incrementos sean independientes en el caso del proceso Y_t .

¹⁷ Considerando que $\sigma_Z = \sigma$.

¹⁸ Técnicamente correspondería a la proyección de los puntos sobre un plano que contiene al eje $p(g)$, y que no interseca a los ejes de los parámetros.

Los puntos de las dos series de abajo, que se encuentran casi sobre una línea, representan el valor del precio de la opción utilizando el proceso log-normal de Black-Scholes, siendo una serie el valor calculado utilizando la fórmula (7.3) de Samuelson, y la otra el valor usando la expresión analítica (5.8).

Vemos así que al menos podemos afirmar que la generalización que aquí se presenta converge al modelo de BS cuando hacemos que los parámetros asociados a los procesos Y_t y Z_t tengan valores que reproducen de manera aproximada al proceso log-normal S_t .

Este resultado establece las bases para que dichos procesos puedan ser calibrados con datos reales del mercado y ver si la predicción que otorguen resulta una más convincente que la que ofrecen otros modelos.

Además, se abre una puerta de investigación para comparar no sólo numéricamente, sino también de manera analítica este enfoque con otros más tradicionales. Una posibilidad es utilizar el cálculo de Itô para procesos de Lévy y trabajar con una versión más general de la fórmula de Feynman-Kac en donde se tenga una ecuación de Fokker-Planck fraccionaria.

11. Apéndice

A continuación elaboramos en detalle acerca de algunos puntos que pueden resultar clarificadores, y esperamos incluso útiles por si se quiere seguir explorando la metodología de simulación numérica presentada al final de este trabajo.

11.1 Cómo simular un proceso Poisson compuesto P_t

Si N_t tiene distribución de Poisson, quiere decir que el tiempo entre saltos es exponencial con parámetro λ . Así, se pueden implementar las siguientes reglas para obtener un proceso con distribución de Poisson con la variable u con distribución uniforme $[0,1]$:

1. Sea $i=0$ y $N=0$.
2. Genérese $h_i = -(1/\lambda) \log(u)$ como tiempo exponencial con parámetro λ .
2. Sea $T=h_0 + \dots + h_i$.
3. Si $T \geq \Delta t$, parar. Si no:
4. $N=i+1$
5. $i=i+1$. Regresar a 2.

De esta manera, N tendrá una distribución de Poisson. Para generar una variable P con distribución Poisson compuesta, basta hacer

$$P_{\Delta t} = \sum_{n=1}^N X_n,$$

donde las variables X_1, \dots, X_n son iid.

La escala del proceso sólo depende del parámetro λ , y no de qué tan fina sea la partición, es decir, del parámetro dt . A continuación se presentan dos simulaciones de un proceso Poisson bajo esta regla.

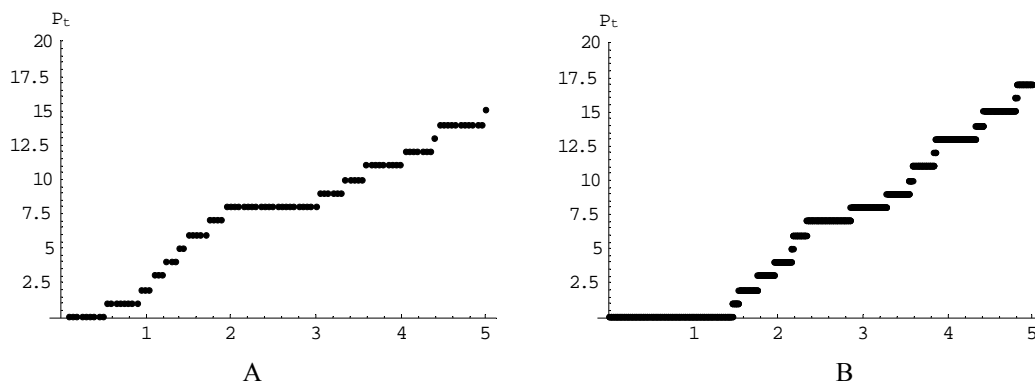


Fig. 11.1. En A $dt=5/100$, y en B $dt=5/10000$.

11.2 Código en Fortran

El siguiente programa en fortran 77 puede calcular:

-El valor esperado del valor activo de la empresa al tiempo T al cual debe pagar sus deudas según los 3 procesos antes mencionados.

-La probabilidad con la cual la empresa no podrá pagar sus deudas, es decir cuando $V_t < B_t$, como la frecuencia de eventos entre el número total de simulaciones.

-El precio p de una acción de la compañía para un accionista, que a tiempo T recuperará como ganancia $S_T = \max\{V_T - B, 0\}$ usando la fórmula de Samuelson.

Los 3 procesos diferentes son X para el proceso asociado al modelo de Merton, Y para el proceso que incorpora colas pesadas, y Z para el proceso de Lévy.

Sin embargo, en este programa, dado que Fortran no reconoce entre mayúsculas y minúsculas, se decidió adoptar la siguiente nomenclatura:

En el programa, a X se le denota como B , a Y como S , y a Z como $Spoi$. Se usa además, $Kprecio$ como el valor de la deuda a tiempo T , y $S0$ como el valor inicial de los activos de la empresa.

Algunas aclaraciones:

Ndata: número de pasos en cada simulación por trayectoria.

Mfinal: número de trayectorias.

N3: número de veces que se cambian los parámetros alfa y beta.

T, mu, r, sigma2, Kprecio: parámetros asociados al modelos de Merton.

alfa: parámetro asociado al exponente de la distribución con colas pesadas de Y .

beta: parámetro asociado a la longitud de los saltos para Z .

lamda: parámetro del proceso de Poisson.

rhand(xran): subrutina que devuelve un número con probabilidad uniforme en $[0,1]$.

```

Program main
Implicit none
External srhand
Integer Ndata, i, k, n, seed, Mfinal
Integer N2,i2
Real*8 T, S0, mu, sigma2, h, y, z, ro, alfa, N3, N4,pi
Real*8 w, ELevy, r, Kprecio, d1, d2, Nor(2), dx, L, L2
Real*8 mun, sigma2n, rn, promLevy, j, M, temp1, temp2
Real*8 lamda, dt2, dt1, Poi, Spoi, b2, b2n, beta
Real*8 outS, outB, outPoi, x, xran
parameter (T=5.0,S0=100.0,mu=0.06,sigma2=0.015)
parameter (Ndata=1000,Mfinal=10000,N3=10)
parameter (r=mu, Kprecio=101.0,L=80.0)
parameter (M=100, N4=10, lamda=1000)
parameter (pi=3.141592653)
Real*8 S, dt, Sf(Mfinal), Bf(Mfinal), Spoif(Mfinal)
Real *8 peso2, hist(M), B, y2, pS,pB,pPoi, peso(Mfinal)
Real *8 EST, EBT, EBS, EpoiT,peso4,peso3, pBSf, pLevy
Real*8 ES, Epoi,EB,promptBSf,promptB, b3
open(10, file='poi42.dat')
call srhand(0.65732567d0,0.54209864d0)
call rhand(xran)

seed=0
dt=T/Ndata
alfa=2.4
beta=0.8
N2=500
b2=S0*(mu+0.5*dt*mu**2)

do j=1,N3
  alfa=alfa+(2.0/N3)
  beta=beta-0.7*(1/N3)

```

```

N2=N2+500
ro=1.0/((alfa)-1.0)
ES=0
EB=0
EPoi=0
pS=0
pB=0
pPoi=0

outS=0
outB=0
outPoi=0

c      simulacion de Mfinal trayectorias para los 3 proc.
do k=1,Mfinal
  S=S0
  B=S0
  Spoi=S0
  do i=2,Ndata
    call rhand(xran)
    h=xran
    xran=0.0
    call rhand(xran)
    w=xran
    xran=0.0
    if (w.gt.0.5) then
      z=-1
    else
      z=1
    end if

    y=z*(h**(-ro))
    S=S*(1+(mu-0.0*sigma2)*dt+y*sqrt(sigma2*dt))
c      este es el proceso con colas pesadas

    call rhand(xran)
    w=xran
    xran=0.0
    h=sqrt(-2*log(w))
    call rhand(xran)
    z=2*pi*xran
    xran=0.0
    y2=h*cos(z)

    B=B*(1+(mu-0.0*sigma2)*dt+y2*sqrt(sigma2*dt))
c      este es el proceso log-normal

dt2=0
dt1=0
Poi=0
do n=1, N4
  call rhand(xran)
  w=xran
  xran=0.0
  dt1=dt1-(1/lamda)*log(w)
  dt2=dt2+dt1

  if (dt2.lt.dt) then
    Poi=Poi+1

```

```

        else
        Poi=Poi
        end if
    end do

    call rhand(xran)
    w=xran
    xran=0.0
    h=sqrt(-2.0*log(w))
    call rhand(xran)
    z=2*pi*xran
    xran=0.0
    y2=h*cos(z)
    call rhand(xran)
    w=xran
    xran=0.0

    if (w.gt.0.5) then
        z=-1
    else
        z=1
    end if
    b3=S0*(i*(dt**2)*mu**2)
    Spoi=Spoi+(b2+b3)*dt+y2*sqrt(sigma2*dt)+Poi*z*beta
c     este es el proceso de levy

c
c     write(10,*) i*dt, S, B, Spoi
c     escribe las trayectorias individuales
    end do

c
c     write(10,*)
c     se deja un espacio para distinguir las trayectorias

    Sf(k)=S
    Bf(k)=B
    Spoif(k)=Spoi

c
c     a continuacion se calcula la frecuencia de incumplimiento
c     para cada proceso
    if (Sf(k)-Kprecio.lt.0) then
        outS=outS+1
    else
        outS=outS
    end if

    if (Bf(k)-Kprecio.lt.0) then
        outB=outB+1
    else
        outB=outB
    end if

    if (SPoif(k)-Kprecio.lt.0) then
        outPoi=outPoi+1
    else
        outPoi=outPoi
    end if

c
c     write(10,*)Sf(k), Bf(k), Spoif(k)
c     escribe las realizaciones finales de cada proceso

```

```

        end do

EST=0
EBT=0
EpoiT=0
do k=1, Mfinal
    peso(k)=1.0/Mfinal
    EST=EST+(peso(k)*Sf(k))
    EBT=EBT+(peso(k)*Bf(k))
    EpoiT=EpoiT+(peso(k)*Spoif(k))
end do

do k=1, Mfinal
    peso(k)=1.0/Mfinal
    peso2=S0*exp(r*T)/EST
    peso3=S0*exp(r*T)/EBT
    peso4=S0*exp(r*T)/EpoiT
    ES=ES+(peso(k)*max((peso2*Sf(k))-Kprecio,0))
    EB=EB+(peso(k)*max((peso3*Bf(k))-Kprecio,0))
    EPoi=Epoi+(peso(k)*max((peso4*Spoif(k))-Kprecio,0))
end do

c        write(10,*) EST,EBT, EpoiT
c        escribe el valor esperado de cada proceso

pS=ES*exp(-r*T)
pB=EB*exp(-r*T)
pPoi=Epoi*exp(-r*T)
c    estos son los precios segun la formula de samuelson

c    a continuacion se calcula el precio analiticamente
d1=(log(S0/Kprecio)+(r+(sigma2/2.0))*T)/sqrt(sigma2*T)
d2=d1-sqrt(sigma2*T)
dx=L/N2
Nor(1)=0
Nor(2)=0

do i=1,int((L+d1)/dx)
    Nor(1)=Nor(1)+(1/sqrt(2.0*pi))*exp(-(-L+i*dx)**2/2.0)*dx
end do
do i=1,int((L+d2)/dx)
    Nor(2)=Nor(2)+(1/sqrt(2.0*pi))*exp(-(-L+i*dx)**2/2.0)*dx
end do

pBSf=S0*Nor(1)-Kprecio*exp(-r*T)*Nor(2)
c    esta es la formula analitica para el precio
prompBSf=prompBSf*((j-1)/j)+(pBSf/j)
prompB=prompB*((j-1)/j)+(pB/j)

write (10,*) j, pS, pPoi, prompB, prompBSf
c    write (10,*) alfa,outS/Mfinal,beta,outPoi/Mfinal,outB/Mfinal

end do
end

subroutine srhand(x,y)
parameter(isspace=20,init=100000)
common/rhandom/latt(256)
common/index/ind,ind1,ind2
real*8 x1,x2,y1,y2, x,y, xran

```

```

nmax=2*(2**30-1)+1
i1=x*nmax
i2=y*nmax
x1=x
y1=y
latt(1)=i1
do i17=2,256
  do icount=1, ispace
    x2=137.d0*x1+100.d0*y1
    y2=100.d0*x1+73.d0*y1
    i=x2
    j=y2
    x1=x2-i
    y1=y2-j
  enddo
  latt(i17)=x1*nmax
enddo
ind=1
ind1=148
ind2=251
x17=0.
do i=1,init
  call rhand(xran)
  x17=x17+xran
enddo
write (6,*) x17
return
end
subroutine rhand(xran)
common/rhandom/latt(256)
common/index/ind, ind1, ind2
save /rhandom/, /index/
real*8 xran
nmax=2*(2**30-1)+1
ind=and(ind, 255)+1
ind1=and(ind1, 255)+1
ind2=and(ind2, 255)+1
latt(ind2)=xor(latt(ind), latt(ind1))
xran=latt(ind2)*1./nmax
return
end

```


Bibliografía

- [1] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press 2004.
- [2] F. Baltasar Larios: *Una Metodología para Comparar Modelos de Riesgo de Crédito*. Tesis de Licenciatura en Actuaría, UNAM 2005.
- [3] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge Univ. Press, Melbourne, NY, 1996.
- [4] M. Bladt, P. Padilla Longoria. *Extending Samuelson's Option Pricing Formula*.
- [5] J-P. Bouchaud, M. Potters: *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*. Cambridge University Press 2003.
- [6] J. Campbell, A.W. Lo, A.C. MacKinlay: *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press 1997.
- [7] J-M. Courtault *et al.* *Louis Bachelier, On the Centenary of 'Théorie de la Spéculation'*. *Mathematical Finance*, Vol.10, No.3 (2000), 341 –353.
- [8] E. Fama: *The Behavior of Stock-Market Prices*. *The Journal of Business*, Vol. 38 No.1 (Jan., 1965) pp. 34-105.
- [9] R. Feynman, A. Hibbs: *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw Hill, New York 1965.
- [10] M. Freidlin: *Functional Integration and Partial Differential Equations*. Princeton University Press 1985.
- [11] N. Garcia i Garcia: *Equirepartició versus Montecarlo*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Barcelona.
- [12] B.V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley, Cambridge MA 1954.
- [13] P. Hänggi, F. Marchesoni. *100 Years of Brownian Motion*. arXiv:cond-mat/0502053 v1 2 Feb 2005.
- [14] K. Itô. *Stochastic Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.
- [15] E.T. Jaynes. *Information Theory and Statistical Mechanics, in Statistical Physics*. (1963), K. Ford (ed.), Benjamin, New York, p. 181.
- [16] B. Lapeyre, É. Pardoux, R. Sentis: *Introduction to Monte-Carlo Methods for Transport and Diffusion Equations*. Oxford University Press 2003.
- [17] B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer-Verlag 1997.

- [18] B. Mandelbrot. *The Variation of Certain Speculative Prices*. The Journal of Business, Vol. 36, No. 4 (Oct., 1963), pp. 394-419.
- [19] R. Mansilla: *Una Breve Introducción a la Econofísica*. Grupo Sirius.
- [20] R. Mantenga, E. Stanley: *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press 2000.
- [21] E. Méndez Ríos: *Correlación Temporal en la Valuación de Derivados*. Tesis de Maestría en Matemáticas, UNAM 2005.
- [22] T. Mikosch : *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific 1998.
- [23] L.T. Nielsen: *Pricing and Hedging of Derivatives Securities*. Oxford University Press 1999.
- [24] J.P. Nolan. *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Boston, MA: Birkhäuser, 2005.
- [25] B.K. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: an introduction with applications*. Springer 2003.
- [26] V. Pareto. *Cours d'Economie Politique*. Droz, Geneva (1896).
- [27] J.J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley 1994.
- [28] M. Santillana Guzmán: *De la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica, Una Perspectiva Variacional*. Tesis de Licenciatura en Física, UNAM 2001.
- [29] K-I. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press 1999.
- [30] W. Schoutens. *Levy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons Inc. 2003.
- [31] M. Schulz. *Statistical Physics and Economics: Concepts, Tools and Applications*. Springer-Verlag New York, Inc. 2003.
- [32] R. Seydel: *Tools for Computational Finance*. Springer 2002.
- [33] J. Stachel (ed.): *Einstein 1905: un Año Milagroso. Cinco Artículos que Cambiaron la Física*. Crítica 2001.
- [34] J.M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer 2001.
- [35] J. Voit: *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Springer 2003.

[36] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison: *Option Pricing, Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press 1993.