UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"OPCIÓN AMERICANA DEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA: LA OPCIÓN RUSA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

ANSELMO RAMÓN SÁNCHEZ TITLA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. MARÍA ASUNCIÓN BEGOÑA FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ

MÉXICO, D.F. MAYO 2007

OPCIÓN AMERICANA DEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA: LA OPCIÓN RUSA

Por

ANSELMO RAMÓN SÁNCHEZ TITLA

Índice

Introducción

En el mundo de los negocios existen diversas instituciones que practican intercambios comerciales de manera organizada. A dichas instituciones se les conoce como **mercados financieros**. Entre la diversidad de mercados que existen en la actualidad, se puede mencionar el mercado de seguros o el mercado de bonos bancarios.

El origen de las actividades comerciales es el intercambio de bienes básicos, es decir, de artículos o servicios que permiten satisfacer alguna necesidad. Más tarde, gracias al valor monetario que se le daba a ciertos bienes, los intercambios empezaron a realizarse por las ganancias económicas a que daban lugar. Actualmente, a los bienes que dan pretexto para alguna actividad comercial y cuyo valor depende directamente de factores económicos se les conoce como **bienes primarios**. Algunos ejemplos de bienes primarios son los siguientes:

Commodities. Con este nombre se conoce el conjunto de bienes que se pueden comercializar a granel, tales como granos (frijol, trigo, maíz), metales (oro, plata), y alimentos.

Stock. Los Stocks o acciones surgen con el objetivo de acumular capital para actividades posteriores. El dueño de una acción obtiene tanto el derecho de participar en el control de la compañia (de acuerdo a la regla: el número de acciones es igual al número de votos), como el derecho a recibir dividendos.

Bond. Los bonos son seguros contra deudas emitidos por un órgano gubernamental o por varios tipos de firmas con el objetivo de acumular capital, y aprovechar el tiempo que hay hasta el pago de la deuda para realizar actividades que permitan restructurarla. Los bonos se emiten por un cierto período de tiempo, y al momento de su vencimiento se remueven de la circulación por el pago (o cumplimiento) de los mismos.

Existe otro tipo de bienes que se manejan en el mercado financiero, cuyo valor depende del valor de los bienes primarios. A estos se les conoce como **instrumentos derivados** o simplemente **derivados**. Al bien primario de cuyo valor depende el del derivado se le conoce también como **bien subyacente**.

A los participantes en el mercado comúnmente se les denomina **inversionistas**. Su papel es invertir capital constantemente en determinados bienes primarios o secundarios. Las ganancias de los inversionistas dependen de la habilidad que posean para elegir estrategias de inversión. Cuando el inversionista genera ganancias sin arriesgarse se le conoce como **oportunidad de arbitraje**.

El mercado de instrumentos derivados resulta atractivo, principalmente para el pequeño inversionista, debido a que para participar en este se requiere de un desembolso mucho menor que en el mercado de bienes primarios. En consecuencia, hay una gran participación de inversionistas en este mercado, lo cual aumenta la intensidad de los negocios y la liquidez del mercado, esto último se refiere a la habilidad para comprar o vender un bien rápidamente y en grandes cantidades sin afectar considerablemente el precio de dicho bien. Como ejemplo de instrumentos derivados están las

Opciones. Éstos instrumentos otorgan el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un bien primario a un precio fijo en una fecha establecida. Su uso es para protegerse contra variaciones inconvenientes en el precio del bien subyacente. Para acceder a éste tipo de contratos o instrumentos hay que pagar una **prima inicial** al momento en que se establece o inicia el contrato. El cálculo de esta prima es uno de los problemas más importantes en el comercio de opciones.

Para la mayoría de los instrumentos derivados existe un **mercado secundario**, en el cual determinados derivados se pueden vender o comprar antes de su fecha de vencimiento. La importancia de este mercado radica en que por ser cortos los períodos que se manejan entre las operaciones, se tiene una idea más precisa de los precios de dichos instrumentos. Este hecho permite a los inversionistas mantener actualizada su información, de manera que en cualquier momento pueden cambiar de opinión acerca de las expectativas de los precios en el mercado.

Como se mencionó anteriormente las actividades comerciales tienen como base el intercambio de bienes (ya sea dinero, bienes primarios, instrumentos derivados, o servicios). En general se llama **activo** a cualquier cosa de valor que se pueda comprar, vender o intercambiar. De esta manera, un mercado financiero se puede definir como la colección de estos activos. Luego, un inversionista es un participante en el mercado financiero que invierte capital libre en varios activos, y a la colección de tales activos en que invierte se le conoce como su **portafolio de inversión**.

En el presente trabajo discutiremos los instrumentos financieros llamados opciones. La definición de éstas y su relación con el problema del inversionista será estudiado en el capítulo 1 donde se discutirá el problema de la valuación y el problema de cobertura. Éste último se refiere básicamente al problema del inversionista que consiste en como distribuir el capital que se posee en activos, de tal manera que el portafolio compuesto por estos no pierda valor para el inversionista, o lo que es lo mismo, para el vendedor de la opción. En este mismo capítulo se propondrá un modelo matematico, el modelo de Black-Scholes, que consiste de un par de activos uno sin riesgo y otro con riesgo. Bajo este modelo estudiaremos algunas de las propiedades de los procesos S y X^{π} que representan el proceso de precios del activo con riesgo y el capital correspondiente a una estrategia de inversión π, respectivamente. En cuanto a la estrategia de inversión π, se hace enfasis en aquellas que son autofinanciables cuya definición y caracterización se establecen en este mismo capítulo. Continuaremos trabajando en el capítulo 2 con el modelo de Black-Scholes el cual desarrollaremos con las opciones Americanas y Europeas cuyas funciones de pago son $f_t = (S_t - K)_+$, $0 \leq t \leq T$ y $f_T = (S_T - K)_+$ respectivamente. Esto significa que calcularemos el precio justo para ambas opciones así como el tiempo racional u óptimo de ejercicio para el caso de las opciones Americanas. Los cálculos de estas cantidades se llevaran a cabo usando el Teorema 2.1 el cual nos da una caracterización del precio justo y el tiempo racional de ejercicio para las opciones Americanas. En este mismo capítulo estudiaremos algunas otras propiedades como ¿cuál es el tiempo racional de ejercicio para un call Americano? Finalmente en el capítulo 3 desarrollaremos la opción Rusa. Ésta es un put Americano que da el derecho de vender al precio máximo que el activo con riesgo ha alcanzado. En este caso la función de pago es $f_t = e^{-\lambda t} \max\left[M_0, \max_{0 \leq t \leq T} S_t\right]$, $0 \leq t \leq T$. Desde el punto de vista matematico, este problema es muy interesante pues en este caso la función de pago depende de toda la trayectoria. Nuevamente haremos uso del Teorema 2.1 para el cálculo del precio justo y el tiempo racional de ejercicio de la opción Rusa.

Capítulo 1

Opciones y el problema del inversionista

1.1. Introducción

En esta primera parte trataremos con los contratos financieros llamados opciones y el problema del inversionista en un mercado financiero.

Comenzamos este capítulo en la sección 1.2 explicando a detalle que son las opciones, incluyendo cada uno de los conceptos relacionados con éstas, y en que consiste el problema de la valuación de estos instrumentos financieros. También se discutirán los dos tipos principales de opciones que existen, a saber las opciones Americanas y las Europeas. Relacionado con las opciones es el problema del inversionista, el cual consiste en incrementar un cierto capital inicial para protegerse de alguna posible reclamación. Éste es también conocido como problema de cobertura.

Con el objetivo de poner en claro las ideas y conceptos damos un ejemplo de una opción de venta de dólares, a través del cual entenderemos con detalle ambos problemas, el de valuación y el de cobertura, y la relación entre éstos. En este ejemplo, en particular hacemos enfasis en las partes donde pareciera haber mayor confusión en los conceptos. En la última parte de esta sección se discutirán las suposiciones que se considerarán para la modelacion de este tipo de fenomenos, por ejemplo, el no poder hacer dinero sin arriesgar alguna cantidad inicial (estrategias libres de arbitraje) o el no poder inyectar o extraer capital (estrategias autofinanciables).

En la sección 1.3 introducimos el modelo de Black-Scholes, el cual consiste en un portafolio compuesto de dos activos, uno sin riesgo y otro con riesgo. En dicho modelo el activo sin riesgo se modela mediante una ecuación diferencial determinista mientras que el activo con riesgo con una ecuación diferencial estocástica cuya solución es el movimiento Browniano Geometrico. Bajo este modelo, el Black-Scholes, estudiaremos la estructura en el proceso del activo con riesgo y la del capital generado así como también caracterizaremos las ideas de estrategias autofinanciables y libres de arbitraje.

Finalmente, en la sección 1.4 expondremos brevemente los casos en el que se permite tanto la extracción de capital como la inyección de éste. Es decir, estudiaremos las estrategias autofinanciables libres de arbitraje con consumos y dividendos. En particular, de interés para nosostros es la parte con dividendos donde trabajaremos el modelo en el cual éstos son obtenidos de manera proporcional a la cantidad de capital invertida en el activo con riesgo.

1.2. Opciones

1.2.1. Descripción del problema

Una **opción** es un contrato entre dos partes que otorga el derecho, pero no la obligación, de comprar (*opción tipo call*) o vender (*opción tipo put*) un activo o bien subyacente a un precio (*precio de ejercicio*) en una fecha posterior durante cierto periodo establecido. La persona (*o compañía*) que vende el contrato se le conoce como **emisor**. Su contraparte, la persona que compra el contrato, se conoce como **tenedor**. A la fecha de vencimiento del contrato se le llamará tiempo de **expiración** o de **maduración**.

Ahora bien, al comprar la opción se puede acordar que el único momento en que se puede ejercer es al tiempo de expiración. En este caso, la opción recibe el nombre de **Europea**. Por otro lado, también podría acordarse que la opción puede ejercerse en cualquier momento antes de que llegue la fecha de expiración, en este caso se trata de una opción **Americana**.

Por otro lado, ambas partes acuerdan en que tal contrato debe tener un **costo inicial**. Esta cantidad es pagada al momento de la firma del contrato por el tenedor al emisor de la opción, quien adquiere un compromiso a futuro, es decir sabe que en caso en que el tenedor de la opción decida ejercer, el estará perdiendo la cantidad que el tenedor gana, a esta ganancia le llamaremos **función de pago**. Por tanto durante el tiempo de vigencia de la opción, el emisor usando sólo la prima inicial, sin la aportación o retiro de capital, debe de generar una estrategia de inversión de tal forma que al tiempo en que el tenedor decida ejercer la opción, el emisor tenga un capital equivalente a la ganancia del tenedor.

En el caso de las opciones Americanas debido a que es posible ejercer el derecho de compra o venta de activos antes del tiempo de expiración, lo ideal para el tenedor sería ejercer este derecho cuando la cantidad o ganancia que demanda sea óptima, en algún sentido. La pregunta es cuándo o cómo se sabe en dónde se óptimiza esta cantidad.

En términos generales, el problema consiste en determinar el precio justo del contrato para ambas partes, así como por parte del emisor idear estrategias de inversión que le permitan tener garantizado cierto nivel de capital para cubrirse y determinar o caracterizar el tiempo ideal u óptimo para ejercer.

1.2.2. Un ejemplo

Supongamos que una compañía de bienes y raíces (el emisor) quiere vender una casa, dentro de un año. Por supuesto la compañía no sabe nada acerca del comportamiento del mercado y quiere asegurarse de que la casa no tenga un valor menor al actual, que es de un millón de pesos mexicanos. Ahora supongamos que una persona (el tenedor) está interesada en la compra de la casa y quiere asegurarse en no pagar más del valor actual de la casa. Entonces la persona puede entrar en un contrato con la empresa de bienes y raíces, llamado opcón tipo call, el cual estipula que dentro de un año es posible adquirir la casa, al precio actual, que denotaremos por K.

Ahora, al final del siguiente año supongamos que hay dos posibles escenarios: el valor de la casa aumenta o disminuye. Si el valor de la casa disminuye, digamos a 900,000.00, claramente la persona interesada en la casa no va a hacer uso de este contrato y optará por comprar directamente como sí no se hubiera firmado el contrato tipo call; en este caso la persona interesada no obtiene ganancia alguna. En cambio, si el valor de la casa aumenta a 1,100,000.00, es claro que se va a hacer uso del contrato el cual permite comprar la casa a un millón de pesos, la cual podrá ser vendida directamente en el mercado a 1,100,000.00 obteniendo una ganancia de 100,000.00.

En cualquiera de los dos escenarios, denotando con S_T el valor de la casa al final del primer año, la ganancia o función de pago es $(S_T - K)_+ := \text{máx}\,\{S_T - K, 0\}$. La gráfica de esta función de pago se muestra en la figura 1.1. La curva inicia en el valor 0 cuando el precio de la casa es 0 y se mantiene en ese valor hasta que el precio de la casa alcanza el precio de ejercicio $K = 1,000,000$. A partir de este punto la curva crece un peso por cada peso arriba del precio de ejercicio. En la gráfica vemos además que las ganancias por entrar en un contrato tipo call son ilimitadas mientras que las pérdidas están acotadas por abajo por el valor cero.

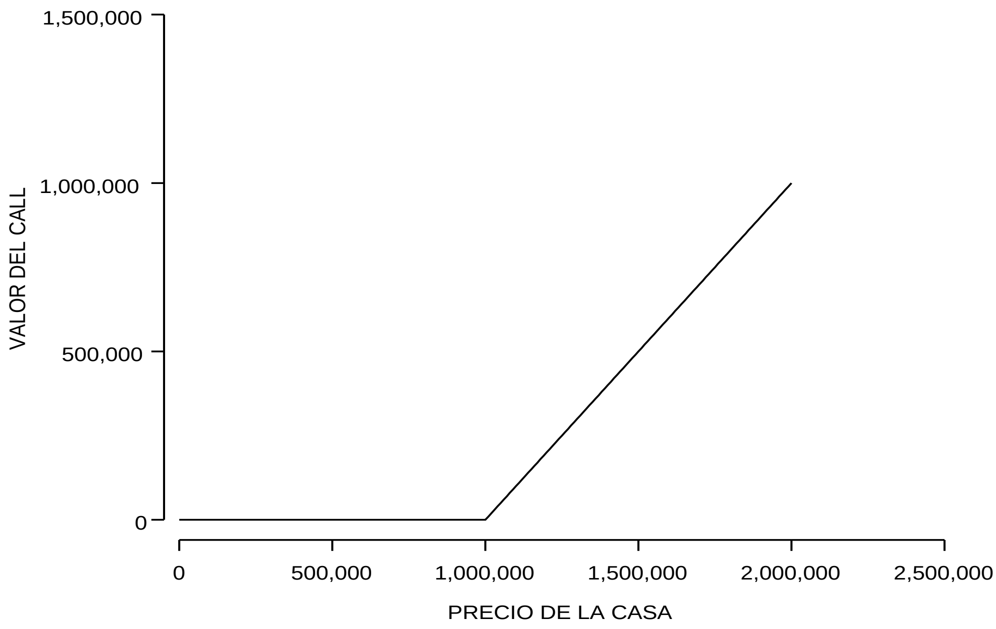

Figura 1.1: Función de pago para el tenedor de una opción tipo call a la fecha de maduración

Ahora supongamos que la compañía de bienes y raíces se dedica no solo a la venta de casas sino también a la reventa de éstas, quien para garantizar la venta de una de sus casas adquiere una opción de venta de casas con una empresa del mismo ramo. A la primera de éstas le llamaremos compañía y a la segunda empresa. Supongamos entonces que la compañía quiere vender una cierta casa el siguiente año. El precio al que lo va vender es al precio actual de la casa que es de un millón de pesos. Denotaremos este precio, conocido como precio de ejercicio, por K y por S_T el precio de la casa al final del siguiente año. Entonces si $S_T > K$ la compañía no ejercera este derecho porque no le va convenir vender una casa a un precio más barato que el del mercado. En este caso la compañía no obtendrá ganancia alguna. En cambio, si $S_T \leq K$, la compañia podrá seguir la sigiente estrategia: comprar la casa directamente en el mercado a S_T e inmediatamente venderla a la empresa al precio K obteniendo una ganancia de $K - S_T$. En cualquiera de estos dos casos la ganancia o función de pago es $(K - S_T)_+ := \max\{K - S_T, 0\}$.

La gráfica de esta función se muestra en la figura 1.2. La curva de esta opción tipo put inicia en su valor más alto de K pesos y va decreciendo un peso por cada peso que aumenta el valor de la casa hasta que ésta alcanza el valor de ejercicio. Para precio más altos al precio de ejercicio, la curva se mantiene constante en el valor cero.

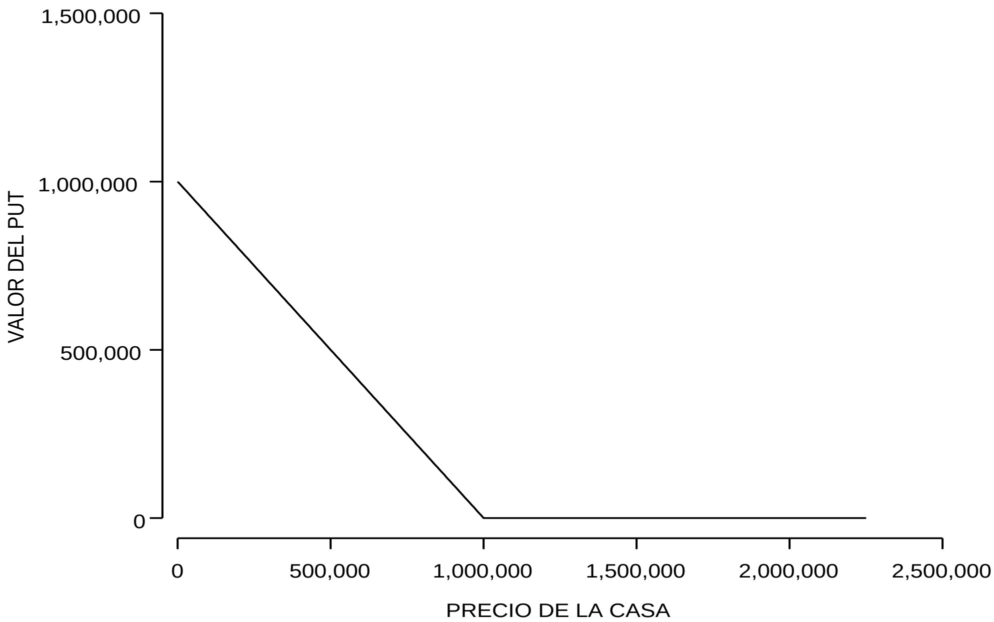

Figura 1.2: Función de pago para el tenedor de una opción tipo put a la fecha de maduración

Continuando con este ejemplo, se pudo haber acordado que la fecha de ejercicio fuese cualquier día antes de finalizar el contrato que es de un año, con precio de ejercicio el precio actual de la casa, que es de $K = 1,000,000{,}00$. En este caso la ganancia o función de pago sería $\{(K - S_t)_+\}_{0 \leq t \leq T}$, donde S_t es el valor de la casa al tiempo t.

Ahora con respecto al precio del contrato, que tiene que pagar la compañía a la empresa por la optención de la opción de venta, tiene que ser una cantidad que le permita a la empresa de cubrirse. Es decir, la empresa de bienes y raíces podrá invertir este capital inicial en distintos activos financieros, pedir prestado (a una tasa de interés) o hacer ventas al descubierto (vender activos financieros sin poseerlos), con el objetivo de generar un capital no menor a la ganancia o función de pago. En otras palabras, la empresa de bienes y raíces invertira la prima inicial en un **mercado financiero** en el cual, bajo ciertas operaciones, logre obtener capital suficiente con que solventar una posible reclamación de capital. Por otro lado, la compañía acuerda en que este precio tiene que ser la mínima cantidad que le permita a la empresa cubrirse.

Finalmente, en el caso en que sea posible ejercer cualquier día del año, el tiempo óptimo para ejercer debe ser aquel en el cual la función de pago se maximice, en algún sentido, pues de esta forma la persona interesada en la casa obtendría una ganancia significativa.

1.2.3. Algunas consideraciones generales sobre la modelación

Una vez entendido el problema financiero con más detalle, es necesario hablar de un modelo matemático que permita la descripción de este tipo de fenómenos.

Empecemos denotando con T el tiempo de expiración de una opción. Un **mercado financiero** consistirá de un bono o activo sin riesgo y un activo con riesgo. Puesto que al invertir en un bono bancario no hay incertidumbre sobre su precio, un proceso determinista $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$ será suficiente para describir su comportamiento. Para el activo con riesgo, al existir incertidumbre sobre los precios de éste, es conveniente modelarlo mediante un proceso estocástico $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$. De manera que B_t y S_t representarán los precios de una unidad del activo sin riesgo y con riesgo al tiempo t, respectivamente. También, en el caso de una opción Europea, denotaremos con f_T a la función de pago y con un proceso estocástico $f = (f_t)_{0\leq t\leq T}$ cuando se esté tratando con opciones Americanas. Algunas veces nos referiremos a $f = (f_t)_{0\leq t\leq T}$ como colección de funciones de pago.

Algunas consideraciones que se supondrán en el desarrollo del modelo:

a) No hay costos de transacción.

b) Con el valor del contrato o prima inicial el emisor debe de construir estrategias autofinanciables, es decir, que no haya aportes ni retiros de capital. Exclusivamente con la prima inicial, el emisor, debe poderse cubrir.

c) No hay información privilegiada, esto es, todas las deciciones a tomar serán sólo en base a la información disponible hasta el momento.

d) Hay ausencia de oportunidad de arbitraje. Esto significa que no es posible obtener ganancias sin arriesgar capital.

e) Se podrá comprar fracciones de activos.

En esta primer parte vamos a estudiar opciones donde el activo con riesgo no paga dividendos. Dejaremos para al final de este capítulo la discusión cuando hay dividendos y mencionaremos un poco sobre consumos.

1.3. Modelo de difusión de un mercado financiero

Como ya se ha mencionado, un mercado financiero consistirá de un par de procesos (B,S), los cuales corresponden al precio de una unidad del bono bancario $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$

o activo sin riesgo y al precio de una unidad del activo con riesgo $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$, respectivamente. A continuación introduciremos un modelo matemático para poder llevar a cabo un análisis sobre el problema en cuestión.

1.3.1. Modelo de Black-Scholes

Para el bono bancario B se supondrá que $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$ es un proceso determinista que satisface la siguiente ecuación diferencial

$$dB_t = rB_t dt, \tag{1.1}$$

cuya solución es

$$B_t = B_0 e^{rt}, \tag{1.2}$$

donde $r \geq 0$ es la tasa de interés y condición inicial $B_0 = 1$.

Para describir la evolución del precio del activo con riesgo supondremos que el activo $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$ es un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \tag{1.3}$$

cuya solución es

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}, \tag{1.4}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es la tasa de apreciación, $\sigma > 0$ la volatilidad, $S_0 = s > 0$ el valor inicial y $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$.

1.3.2. El emisor como inversionista en un mercado financiero

Una vez establecido un modelo matemático, discutamos como va a proceder el emisor de una opción para cubrirse.

Denotemos con X_0 el pago que recibe el emisor. Supongamos que la firma del contrato se realiza al tiempo $t = 0$ y que en ese momento el emisor, quien hará un papel de inversionista, adquiere β_0 unidades de un activo sin riesgo y γ_0 unidades de un activo con riesgo con precios B_0 y S_0 respectivamente. Entonces podemos escribir su capital inicial de la siguiente forma

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0. \tag{1.5}$$

De manera similar, sea $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ un par $\mathcal{F}_t$-adaptado representando el número de unidades que se poseen de los respectivos activos al tiempo t. El capital, X_t, correspondiente a este par estará dado por

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t. \tag{1.6}$$

La pareja $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ forma, lo que se conoce como estrategia de inversión o portafolio de inversión al tiempo t y al proceso $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ lo llamaremos proceso portafolio.

1.3.3. Estrategias autofinanciables

Diremos que un proceso portafolio $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$, $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ es una estrategia de inversión autofinanciable si el capital correspondiente a π al tiempo t, el cual denotaremos por X_t^π, satisface

$$X_t^\pi = X_0 + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u. \tag{1.7}$$

bajo las condiciones

$$\int_0^t |\beta_u| \, dB_u < \infty, \qquad \int_0^t (\gamma_u S_u)^2 \, du < \infty, \qquad \mathbf{P}\text{-c.s.} \tag{1.8}$$

las cuales garantizan la existencia de las integrales en (1.7)

La definición anterior de estrategia autofinanciable es una generalización del caso discreto, la cual explicaremos a continuación.

Partiendo de la ecuación (1.5) y suponiendo que el inversionista decide cambiar el número de activos que posee justo antes de que un nuevo precio, al tiempo $t = 1$, del activo con riesgo se conozca. Pensemos entonces que el decide ahora comprar β_1 unidades del activo sin riesgo y γ_1 unidades del activo con riesgo tomando solo en cuenta la informacion sobre los valores (B_0, S_0) y sin la aportación o retiro de capital. Entonces, su capital inicial se puede reexpresar de la siguiente forma

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0. \tag{1.9}$$

Una vez que se den a conocer los precios de los activos, al tiempo $t = 1$, el capital inicial, bajo el nuevo portafolio $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, se tranformará en el siguiente

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 \tag{1.10}$$

obteniendose un incremento de capital

$$\Delta X_1 = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1 \tag{1.11}$$

donde $\Delta X_1 := X_1 - X_0$, $\Delta B_1 := B_1 - B_0$ y $\Delta S_1 := S_1 - S_0$.

Generalizando (1.9) y (1.10) obtenemos para cualquier tiempo $t = n$,

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \tag{1.12}$$

y

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \tag{1.13}$$

Se sigue entonces de (1.12) y (1.13), que los incrementos de capital son de la forma

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \tag{1.14}$$

y el capital total es

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \Delta B_k + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k. \tag{1.15}$$

Ahora, cambiando las sumas en la ecuación anterior por integrales de Itô obtenemos la ecuación (1.7) como una generalización de estrategia autofinanciable al tiempo continuo.

Observación. Es aquí donde usamos la hipótesis de *no costos de transacción*. En la práctica, cada vez que un inversionista decide redistribuir su portafolio tiene que pagar una cantidad.

La razón de porque se escoge la integral de Itô es porque el proceso que se integra se hace de manera predecible, esto es, se toman los valores del extremo izquierdo de cada intervalo (infinitesimal).

Denotaremos con **AF** a las estrategias autofinanciables.

1.3.4. Más sobre la estructura en los procesos S y X^π

Para proceder con el análisis en la estructura de los procesos S y X^π introduzcamos la medida de **riesgo neutral** $\mathbf{P}^{\mu-r}$ definida mediante la derivada de Radon-Nikodym de las restricciones $\mathbf{P}_t^{\mu-r} = \mathbf{P}^{\mu-r}|\mathcal{F}_t$ y $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}|\mathcal{F}_t$,

$$\frac{d\mathbf{P}_t^{\mu-r}}{d\mathbf{P}_t} = Z_t^{\mu-r} \qquad \mathbf{P}\text{-c.s.} \tag{1.16}$$

donde

$$Z_t^{\mu-r} = \exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \tag{1.17}$$

Para $0 \leq t \leq T$ introducimos el siguiente proceso

$$W_t^{\mu-r} = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t, \tag{1.18}$$

el cual es un movimiento Browniano con respecto a la medida de riesgo neutral $\mathbf{P}^{\mu-r}$ (ver apéndice, para su demostración).

De manera que la distribución o ley del proceso W con respecto a $\mathbf{P}$ es la misma que la del proceso $W^{\mu-r}$ con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$. Esto lo denotaremos mediante la siguiente expresión

$$\text{Ley}(W_t|\mathbf{P}) = \text{Ley}\big(W_t^{\mu-r}|\mathbf{P}^{\mu-r}\big). \tag{1.19}$$

l primer resultado que tenemos sobre el proceso S es la propiedad de Markov, la cual mostraremos a continuación. Para $h > 0$ tenemos,

$$\begin{aligned} S_{t+h} &= S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)(t+h)+\sigma W_{t+h}} \\ &= S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t+(\mu-\sigma^2/2)h+\sigma(W_{t+h}-W_t)} \\ &= S_t e^{(\mu-\sigma^2/2)h+\sigma(W_{t+h}-W_t)}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

y como $W_{t+h} - W_t$ es independiente de la σ-algebra $\mathcal{F}_t$, vemos que S_{t+h} sólo depende del valor de S_t. Esto muestra la propiedad de Markov del proceso S con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$ (ver apéndice C).

Consideremos ahora $\widetilde{S}_t := S_t/B_t$, el proceso de precios actualizado. Usando la fórmula de Itô obtenemos

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t dW_t^{\mu-r}, \tag{1.21}$$

lo cual nos dice que el proceso de precios actualizados $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala con respecto a la medida $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

De manera análoga consideremos el capital actualizado $Y_t^\pi = X_t^\pi/B_t$ correspondiente a una estrategia π. Aplicando la fórmula de Itô obtenemos

$$dY_t^\pi = \sigma\gamma_t\widetilde{S}_t dW_t^{\mu-r}, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1.22}$$

o en forma integral

$$Y_t^\pi = Y_0^\pi + \int_0^t \sigma\gamma_u\widetilde{S}_u dW_u^{\mu-r}, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.23}$$

Esto significa que el proceso $Y^\pi = (Y_t^\pi)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala local con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

Para continuar con el análisis en la estructura de los procesos X^π y Y^π vamos a hacer más suposiciones sobre la subclase de estrategias autofinanciables AF.

Sea ξ una variable no negativa $\mathcal{F}$-medible con $\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\,\xi\,\right] < \infty$, donde $\mathbb{E}^{\mu-r}[\,\cdot\,]$ es la esperanza con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

Diremos que una estrategia π de AF pertenece a la clase **AF**$^\xi$ si para $0 \leq t \leq T$

$$Y_t^\pi \geq -\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\xi|\mathcal{F}_t\right] \qquad \mathbf{P}^{\mu-r}\text{- c.s.} \tag{1.24}$$

Tenemos por el lema de Fatou, para $\pi \in$ AF$^\xi$, la martingala local Y^π resulta ser una supermartingala.

Ahora, sí τ_1 y τ_2 son dos tiempos de Markov finitos tal que $\mathbf{P}^{\mu-r}(\tau_1 \leq \tau_2) = 1$, entonces

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[Y_{\tau_2}^\pi|\mathcal{F}_{\tau_1}\right] \leq Y_{\tau_1}^\pi. \tag{1.25}$$

En particular, si $X_0^\pi = x \geq 0$ y $\pi \in$ AF$^\xi$ obtenemos

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[Y_t^\pi\right] = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rt}X_t^\pi\right] \leq x. \tag{1.26}$$

En el caso en que $\pi \in$ AF$^\xi$ y $\xi = 0$, escribiremos $\pi \in$ **AF**$^+$, la clase de estrategias donde el inversionista no cae en posición de deudor. A estas estrategias las llamaremos estrategias de inversión **admisibles**.

De (1.26) obtenemos para $\pi \in$ AF$^+$

$$0 \leq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[Y_t^\pi\right] \leq x. \tag{1.27}$$

Resumamos los resultados obtenidos en el siguiente

Lema 1.1. *Para $\pi \in$ AF, los procesos $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$, $\widetilde{S}_t = S_t/B_t$ y $Y^\pi = (Y_t^\pi)_{0\leq t\leq T}$, $Y_t^\pi = X_t^\pi/B_t$ son martingala y martingala local con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$, respectivamente. Además, si $\pi \in$ AF$^\xi$ el proceso Y^π es una supermartingala, y si $\pi \in$ AF$^+$ el proceso Y^π es una supermartingala no negativa, ambos con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$.*

1.3.5. Estrategias libres de arbitraje

La consideración de clases de estrategias AF$^{\xi}$ pareciera ser un poco artificial, que son sólo puestas por demandas técnicas del análisis estocástico y no con un objetivo económico. Sin embargo, resulta que todas las estrategias de la clase AF$^{\xi}$ son de no arbitraje y esto es lo que las hace interesantes desde el punto de vista económico.

Definición 1.1. *Diremos que una estrategia $\pi \in$ AF es de arbitraje en $[0, T]$, si $\mathbf{P}$- c.s. $X_0^{\pi} = 0$ y con $\mathbf{P}$-probabilidad positiva, $X_t^{\pi} > 0$, $0 < t \leq T$.*

Lema 1.2. *Toda estrategia $\pi \in$ AF^{+} es de no arbitraje.*

Demostración. La demostración de este hecho se sigue directamente de la propiedad de supermartingala del proceso Y^{π}. Si X_0^{π} = x = 0 $\mathbf{P}$- c.s., entonces $x = 0$ $\mathbf{P}^{\mu-r}$-c.s. por ser $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^{\mu-r}$ medidas de probabilidad equivalentes, de igual forma si $X_t > 0$ con probabilidad $\mathbf{P}^{\mu-r}$ positiva entonces $X_t > 0$ con probabilidad $\mathbf{P}$ positiva. Por tanto, de (1.26),si π fuera de arbitraje, entonces

$$0 < \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rt}X_t^{\pi}\right] \leq x = 0,$$

que es una contradicción. □

1.4. Estrategias autofinanciables con consumos y dividendos

Ya hemos abordado el problema en donde de manera autofinanciable un inversionista crea su portafolio de inversión con el objetivo de incrementar y mantener un cierto nivel de capital a partir de un capital inicial.

Nuestro principal interés es abordar el tema para el caso con dividendos, debido a que la exposición no es muy diferente si tomamos en cuenta los consumos, aprovecharemos de una vez para describir la modelación en ambos casos. Nos adentraremos en el caso discreto primero antes de pasar al caso continuo para lograr una explicación intuitiva a esta extensión.

1.4.1. Caso discreto

Supóngamos que un inversionista tiene un capital inicial X_0 distribuido de acuerdo a un portafolio de inversión inicial $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$,

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0, \tag{1.28}$$

y súpongamos que recibe un capital D_1 obtenido, por ejemplo, de dividendos, y que además necesita extraer una cierta cantidad C_1

De manera que la transformación del portafolio $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ en $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ estará basada tomando en cuenta los valores C_1 y D_1, esto es, β_1 y γ_1 deben ser elegidos de tal forma que

$$\beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 = X_0^\pi - C_1 + D_1. \tag{1.29}$$

Al tiempo $t = 1$, cuando se den a conocer los nuevos valores B_1 y S_1, un nuevo capital se forma,

$$X_1^\pi = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1. \tag{1.30}$$

y por tanto un incremento de capital

$$\Delta X_1^\pi = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1 - C_1 + D_1. \tag{1.31}$$

De manera similar para cualquier tiempo $t = n$, tenemos,

$$\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} = X_{n-1}^\pi - C_n + D_n, \qquad X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \tag{1.32}$$

y

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - C_n + D_n. \tag{1.33}$$

Obviamente los valores C_n y D_n, que se reciben y extraen justo antes del tiempo $t = n$, son $\mathcal{F}_{n-1}$-medibles.

El capital total formado es

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \Delta B_k + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k - \sum_{k=1}^{n} C_k + \sum_{k=1}^{n} D_k. \tag{1.34}$$

1.4.2. Caso continuo

Para la respectiva generalización al tiempo continuo de las ecuaciones (1.32) y (1.33) vamos a considerar $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$, $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ un proceso portafolio, $C = (C_t)_{t\geq 0}$ y $D = (D_t)_{t\geq 0}$ dos procesos estocásticos continuos por la derecha, no decrecientes y adaptados a la filtración $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, con $C_0 = 0$ y $D_0 = 0$.

Diremos que π es una estrategia autofinanciable con dividendos $D = (D_t)_{t\geq 0}$ y consumos $C = (C_t)_{t\geq 0}$ si el capital correspondiente a π:

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{1.35}$$

satisface la ecuación

$$X_t^\pi = X_0 + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u - C_t + D_t. \tag{1.36}$$

Ésta es la generalización del capital total generado al tiempo continuo de la ecuación (1.34). Interpretaremos a C_t y D_t como los consumos y dividendos acumulados hasta el tiempo t, esto es, dC_t y dD_t son las cantidades que se consumen e inyectan justo al tiempo t.

Si no hay flujo de capital hacia adentro ($D_t = 0$ en 1.36), solo flujo de capital hacia afuera, entonces la correspondiente estrategia es naturalmente llamada *estrategia autofinanciable con consumo*. En el otro caso, cuando no hay flujo de capital hacia afuera, solo hacia adentro, estaremos hablando de una *estrategia autofinanciable con dividendos*.

Denotaremos con $X^{(\pi,D)}$ el capital correspondiente a una estrategia autofinanciable con dividendos.

Capítulo 2

Opciones Europeas y Americanas

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos los dos principales tipos de opciones que existen, a saber, las opciones Europeas y las Americanas. Uno de los problemas de mayor interés es la valuación de estos intrumentos financieros, es decir determinar para ambos tipos de opciones el capital que las partes involucradas en estos contratos, el vendedor y el comprador, están dispuestas a sacrificar. Como hemos visto, la principal diferencia entre las opciones Europeas y Americanas es en el momento en que estas se pueden aprovechar para obtener algún beneficio, como el comprar barato y vender caro. Ésto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿es posible determinar o caracterizar el momento en el cuál el beneficio que se obiene es óptimo? Estos dos problemas de mayor interés serán análizados bajo el modelo de Black-Scholes.

Este capítulo se distribuye de la siguiente forma. En la sección 2.2 estudiaremos las opciones Europeas donde determinaremos el precio justo y hallaremos la dinámica de un proceso portafolio así como también caracterizaremos la dinámica del capital correspondiente a este proceso portafolio. En la sección 2.3 incluimos un ejemplo donde hallamos explícitamente las cantidades anteriores. Las opciones Americanas son estudiadas en la siguiente sección donde caracterizamos el precio justo y el tiempo óptimo para ejercer, así como también se establecen las condiciones para la existencia de tiempos óptimos de ejercicio. Acompañamos esta parte con un ejemplo de opción Americana en la sección 2.5 donde mostramos el proceso de como valuar estos instrumentos financieros así como el tiempo de ejercicio óptimo. Esta parte es importante porque nos da una metodologia que sólo cambia dependiendo de la función de pago, para valuar opciones Americanas.

2.2. Opciones Europeas

2.2.1. Precio justo para una opción Europea

Sea T el tiempo de expiración de una opción Europea y f_T la función de pago la cual supondremos es una variable aleatoria no negativa $\mathcal{F}_T$-medible.

Diremos que una estrategia de inversion $\pi \in \mathrm{AF}^+$ es de cobertura Europea de la función de pago f_T y capital inicial $X_0^\pi = x$, si el capital correspondiente al tiempo de expiración satisface

$$X_T^\pi \geq f_T. \tag{2.1}$$

Denotaremos con $\Pi(x, f_T)$ la clase de estrategias de cobertura Europea. Ahora fijemonos en el capital inicial mínimo para el cual (2.1) se cumple. Esta mínima cantidad es la que el tenedor está dispuesto a sacrificar para obtener un beneficio por la transacción de una opción Europea. Al mismo tiempo, el emisor sabe que con esta mínima cantidad se podrá cubrir de cualquier eventualidad relacionada con la transaccion de la opción Europea. Es razonable entonces llamar a esta mínima cantidad el **precio justo** para una opción Europea porque este precio resulta conveniente para ambas partes involucradas con la transacción de una opción Europea.

Formalmente, la expresión para el precio justo de una opción Europea es

$$\mathbb{C} = \text{ínf}\left\{x \ : \ \Pi(x, f_T) \neq \emptyset\right\}. \tag{2.2}$$

Si π es una estrategia autofinanciable, $\pi \in$ AF$^+$, entonces de acuerdo con (1.25)

$$X_0^\pi \geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rT} X_T^\pi\right] \tag{2.3}$$

y si π es una estrategia de cobertura Europea, $\pi \in \Pi(x, f_T)$,

$$x \geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rT} f_T\right], \tag{2.4}$$

en particular

$$\mathbb{C} \geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rT} f_T\right]. \tag{2.5}$$

A continuación mostraremos que la igualdad en (2.5) se cumple. La demostración de este hecho involucra la construcción de una estrategia de inversión de cobertura Europea la cual desarrollaremos como sigue.

Supóngamos que

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[f_T\right] < \infty \tag{2.6}$$

y sea

$$M_t = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{f_T}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{W^{\mu-r}}\right]. \tag{2.7}$$

El proceso $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala no negativa con respecto a la medida $\mathbf{P}^{\mu-r}$ y la filtración $(\mathcal{F}_t^{W^{\mu-r}})_{0\leq t\leq T}$.

Por el teorema de representación de martingalas de Itô-Klark

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_u dW_u^{\mu-r}, \tag{2.8}$$

donde los valores α_u, $0 \leq u \leq T$ son $\mathcal{F}_u^{W^{\mu-r}}$ medibles para cada u y satisfacen

$$\int_0^T \alpha_u^2 \, du < \infty \quad \mathbf{P}^{\mu-r}\text{-c.s.} \tag{2.9}$$

Formamos la estrategia $\pi^* = (\pi_t^*)_{0\leq t\leq T}$ con $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$ dados por

$$\gamma_t^* = \frac{\alpha_t B_t}{\sigma S_t}, \tag{2.10}$$

$$\beta_t^* = M_t - \gamma_t^* \frac{S_t}{B_t}. \tag{2.11}$$

La estrategia de inversión π^* definida por las ecuaciones anteriores es autofinanciable.

Para probar esto observemos que

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t \tag{2.12}$$

y junto con la definición de β_t^* y γ_t^*, obtenemos de (2.11)

$$\beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t = M_t B_t, \tag{2.13}$$

esto es

$$X_t^{\pi^*} = M_t B_t. \tag{2.14}$$

La fórmula de Itô y (2.8) implican

$$\begin{aligned} dX_t^{\pi^*} &= M_t dB_t + B_t dM_t \\ &= M_t dB_t + B_t \alpha_t dW_t^{\mu-r} \\ &= (M_t - \gamma_t^* \frac{S_t}{B_t}) dB_t + \gamma_t^* \frac{S_t}{B_t} dB_t + \alpha_t B_t dW_t^{\mu-r} \\ &= \beta_t^* dB_t + \gamma_t^* dS_t. \end{aligned}$$

Demostrando así que la estrategia π^* es autofinanciable, es decir $\pi^* \in$ AF.

La propiedad (2.14) nos dice que la $\mathbf{P}^{\mu-r}$ martingala $M = (M_t)_{0\le t\le T}$ es realizable como el capital descontado de la estrategia π^* construida anteriormente,

$$M_t = \frac{X_t^{\pi^*}}{B_t}, \qquad 0 \le t \le T.$$

Además

$$X_t^{\pi^*} \;=\; M_t B_t = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r(T-t)} f_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{W^{\mu-r}}\right] \tag{2.15}$$

y evidentemente

$$\begin{aligned} X_0^{\pi^*} &= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rT} f_T\right], \\ X_T^{\pi^*} &= f_T \qquad \mathbf{P}\text{-c.s.} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Estas ecuaciones significan que la estrategia π^* es de cobertura Europea con capital inicial $x = \mathbb{E}^{\mu-r} e^{-rT} f_T$.

Esto muestra junto con (2.5) que el precio justo para una opción Europea es

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rT} f_T\right]. \tag{2.17}$$

2.2.2. Independencia del precio justo en el parámetro μ

A continuación mostraremos que basta con tomar como tasa de apreciación la tasa de interés, esto es, basta con hacer $\mu = r$, sólo para ciertos tipos de funciones de pago.

De (1.4) y (1.18) podemos escribir el proceso de precios del activo con riesgo de la siguiente forma

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t^{\mu-r}\right\},$$

donde usamos la notación $S(\mu)$ para indicar la dependencia en el parámetro μ. En particular

$$S_t(r) = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\}. \tag{2.18}$$

Por otro lado, de (1.19) obtenemos que para cualquier función g $\mathbb{F}$-medible

$$\text{Ley}\big(g(W_t^{\mu-r})|\mathbf{P}^{\mu-r}\big) = \text{Ley}(g(W_t)|\mathbf{P})$$

o equivalentemente

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[g(W_t^{\mu-r})\right] = \mathbb{E}\left[g(W_t)\right].$$

Ahora, fijemonos en las funciones de pago que dependen en el proceso de precios del activo con riesgo, $S(\mu) = (S_t(\mu))_{t\geq 0}$, que a su vez depende del movimiento Browniano, $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{t\geq 0}$. Usaremos $f_t = f_t(S(\mu))$ para indicar que la función de pago depende del movimiento Browniano $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{t\geq 0}$ a través del proceso $S(\mu) = (S_t(\mu))_{t\geq 0}$.

Por tanto podemos escribir las ecuaciones (2.17) y (2.15) como

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}\left[e^{-rT} f_T(S(r))\right]. \tag{2.19}$$

$$X_t^{\pi^*} = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)} f_T(S(r)) \,\middle|\, \mathcal{F}_t^W\right] \tag{2.20}$$

2.3. Un ejemplo de opción Europea, fórmula de Black-Scholes

2.3.1. Call Europeo

En esta sección nos enfocaremos a la opción Europea cuya función de pago está dada por

$$f_T = (S_T - K)_+ \tag{2.21}$$

donde K es el precio de ejercicio.

A continuación procederemos con el cálculo explícito de la siguiente cantidad

$$\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

la cual necesitaremos para el cálculo del precio justo en (2.19).

De la propiedad de Markov del proceso $S(r) = (S_t(r))_{t\geq 0}$ con respecto a $\mathbf{P}$ (ver ecuación (1.20)), tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[(S_T-K)_+\middle|\,S_t\right] \\
&\quad = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\left(S_t\exp\left\{\left(r-\sigma^2/2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right\}-K\right)_+\middle|\,S_t\right] \\
&\quad = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_s\left[\left(s\exp\left\{\left(r-\sigma^2/2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)\right\}-K\right)_+\right]\circ S_t
\end{aligned}$$

Denotemos con $F_{T-t}(s)$ esta última esperanza y procedamos con su cálculo. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
&F_{T-t}(s) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{y_0(t,s)}^{\infty}\left(s\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\right\}-K\right)e^{-\frac{1}{2(T-t)}y^2}\,dy
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $y_0(t,s)$ es la solución a la ecuación

$$s\exp\left\{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\right\}=K,$$

esto es,

$$y_0(t,s)=\frac{(\sigma^2/2-r)(T-t)+\log(K/s)}{\sigma}.$$

El primer término del integrando en (2.22) después de completar cuadrados, se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, se^{r(T-t)} \exp\left\{-\frac{1}{2(T-t)}(y^2 - 2(T-t)\sigma y + \sigma^2 (T-t)^2)\right\} \\ &\quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, se^{r(T-t)} \exp\left\{-\frac{1}{2(T-t)}\,(y-\sigma(T-t))^2\right\}, \end{aligned}$$

que junto con los cambios de variable $z = (y - \sigma(T-t))/\sqrt{T-t}$ y $x = y/\sqrt{T-t}$ obtenemos para la ecuación (2.22)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(se^{r(T-t)}\int_{z_0(t,s)}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}dz - K\int_{x_0(t,s)}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}dx\right)$$

con $z_0(t,s) = (y_0(t,s) - \sigma(T-t))/\sqrt{T-t}$ y $x_0(t,s) = y_0(t,s)/\sqrt{T-t}$.

Finalmente, tomando en cuenta la simetría de la distribución normal obtenemos

$$F_{T-t}(s) = se^{r(T-t)}\Phi(-z_0(t,s)) - K\Phi(-x_0(t,s)), \tag{2.23}$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribucion Normal.

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+ \middle|\, \mathcal{F}_t\right] &= e^{-r(T-t)}F_{T-t}(S_t) \\ &= S_t\Phi(d_1(t,S_t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t,S_t)) \qquad (2.24) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1(t,s) &= -z_0(t,s) \\ &= \frac{(\sigma^2/2 + r)(T-t) + \log(s/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_2(t,s) &= -x_0(t,s) \\ &= \frac{-(\sigma^2/2 - r)(T-t) + \log(s/K)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión para el cálculo del precio justo es

$$\mathbb{C} = F_T(S_0) = S_0\Phi(d_1(0, S_0)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(0, S_0)) \tag{2.25}$$

y de (2.20) y (2.24), la dinámica del capital correspondiente a la estrategia autofinanciable $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.11) es

$$X_t^{\pi^*} = S_t\Phi(d_1(t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, S_t)). \tag{2.26}$$

Para el cálculo de γ consideremos ahora la siguiente cantidad

$$H(t, x) = F_{T-t}(e^{rt}x).$$

Entonces de (2.20) tenemos

$$X_t^{\pi^*}e^{-rt} = e^{-rT}H(t, e^{-rt}S_t), \tag{2.27}$$

y por la fórmula de Itô

$$\begin{aligned} d(X_t^{\pi^*}e^{-rt}) &= e^{-rT}d(H(t, e^{-rt}S_t)) \\ &= e^{-rT}\left\{\frac{dH}{dx}d(e^{-rt}S_t) + \left(\frac{dH}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dx^2}\sigma^2 S_t^2 e^{-2rt}\right)dt\right\}. \end{aligned}$$

o en forma integral

$$X_t^{\pi^*}e^{-rt} = X_0^{\pi^*} + \int_0^t e^{-rT}\left\{\frac{dH}{dx}d(e^{-ru}S_u) + \left(\frac{dH}{du} + \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dx^2}\sigma^2 S_u^2 e^{-2ru}\right)du\right\} \tag{2.28}$$

De (2.8) y (2.10), con $\mu = r$, obtenemos

$$M_t = M_0 + \int_0^t \gamma_u^* \frac{\sigma S_u}{B_u} dW_u \tag{2.29}$$

Se sigue, de (2.14) y (1.21), que

$$e^{-rt}X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \int_0^t \gamma_u^* d(e^{-ru}S_u) \tag{2.30}$$

Comparando las ecuaciones (2.28) y (2.30) obtenemos

$$e^{-rT}\int_0^t\left(\frac{dH}{dx}-e^{rT}\gamma_u^*\right)d(e^{-ut}S_u)$$
$$=-e^{-rT}\int_0^t\left(\frac{dH}{du}+\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dx^2}\sigma^2S_u^2e^{-2ru}\right)du. \tag{2.31}$$

Esta igualdad significa, que la martingala continua del lado izquierdo de (2.31), es al mismo tiempo un proceso de variación finita y por tanto, de la unicidad en la representación de Doob-Meyer, esta martingala es igual a cero. Esto significa que

$$\gamma_t^*=e^{-rT}\frac{dH}{dx}(t,e^{-rt}S_t)=e^{-r(T-t)}\frac{dF_{T-t}}{ds}(S_t). \tag{2.32}$$

El cálculo de esta derivada no lo mostraremos explícitamente, sólo el resultado, el cual es,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F_{T-t}(S_t) &= e^{r(T-t)}\left\{\Phi(d_1(t,S_t))+S_t\phi(d_1(t,S_t))\frac{(r+\sigma^2/2)(T-t)+1/S_t}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}\\ &\quad -K\phi(d_2(t,S_t))\frac{(r-\sigma^2/2)(T-t)+1/S_t}{\sigma\sqrt{T-t}},\end{aligned}$$

donde $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son la distribución y densidad de una variable aleatoria Normal.

Finalmente de las ecuaciones (2.11), (2.14) y (2.26) obtenemos la expresión para β

$$\beta_t=S_te^{-rt}\Phi(d_1(t,S_t))-Ke^{-rT}\Phi(d_2(t,S_t))-\gamma_t^*\frac{S_t}{B_t}. \tag{2.33}$$

2.3.2. Put Europeo

La función de pago de una opción tipo Put Europeo es

$$f_T=(K-S_T)_+ \tag{2.34}$$

donde K es el precio de ejercicio.

Denotaremos por $\mathbb{P}$ el precio justo que hay que pagarse para obtener este tipo de opciones.

Como

$$(K - s)_+ = (s - K)_+ - s + K,$$

tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{-rT}(K - S_T)_+\right] = \mathbb{E}\left[e^{-rT}(S_T - K)_+\right] - \mathbb{E}\left[e^{-rT}S_T\right] + Ke^{-rT} = \mathbb{C} - S_0 + Ke^{-rT}.$$

Luego entonces, la siguiente relación llamada *paridad call-put* entre los precios racionales $\mathbb{C}$ y $\mathbb{P}$ de las opciones call y put se cumple:

$$\mathbb{P} = \mathbb{C} - S_0 + Ke^{-rT}. \tag{2.35}$$

2.4. Opciones Americanas

Antes de entrar a detalle con el análisis de las opciones Americanas haremos un comentario sobre el tiempo de ejercicio el cual, para este tipo de opciones, no es una cantidad determinista, por lo cual es necesaria modelarla mediante una variable aleatoria.

Tenemos entonces que el tenedor decidirá ejercer o no sólo tomando en cuenta la información sobre el estado del mercado financiero. Esto es, si el tenedor opta por no ejercer, esta decisión estará basada sólo con la información que se posea del mercado hasta el momento de la decisión. Esto informalmente significa que el tiempo de ejercicio, es un tiempo de **paro** o tiempo de **Markov**.

2.4.1. Precio justo y caracterización del tiempo racional de ejercicio

Examinaremos opciones Americanas con tiempo de expiración $T < \infty$ y colección de funciones de pago $f = (f_t)_{0 \le t \le T}$. Supondremos entonces que se puede ejercer en cualquier tiempo de Markov τ con valores en $[0, T]$ y que el proceso estocástico $f = (f_t)_{0 \leq t \leq T}$ es adaptado, esto es, f_t es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $0 \leq t \leq T$, con trayectorias en D, el espacio de procesos estocásticos con trayectorias continuas a la derecha y límites por la izquierda. Esta última suposición, en particular implica que la variable aleatoria f_τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible.

Diremos que una estrategia de inversión π es de **cobertura Americana** de la función de pago $f = (f_t)_{0 \leq t \leq T}$ con capital inicial $X_0^\pi = x$, si el capital correspondiente a π satisface $X_t^\pi \geq f_t$ para toda $0 \leq t \leq T$.

Para la función de pago $f = (f_t)_{0 \leq t \leq T}$ y el capital inicial $X_0 = x$, denotaremos con $\Pi(x, f)$ al conjunto de estrategias de inversión π que son de cobertura Americana de la función de pago f. Esto es $\Pi(x, f)$ es el conjunto de todas las estrategias de inversión con las cuales es posible cubrirse en cualquier momento comenzando con un capital inicial x.

De manera que el valor

$$\mathbb{C} = \text{ínf}\{x \geq 0 \,:\, \Pi(x, f) \neq \emptyset\}$$

es la mínima cantidad con la cual el emisor puede idear estrategias de inversión para cubrirse.

A la cantidad $\mathbb{C}$ es lo que llamaremos precio justo para una opción Americana.

Introduciremos la siguiente definición relacionada con el problema de determinar un tiempo conveniente en el cual la opción puede ejercerse.

Definición 2.1. *Diremos que un tiempo de Markov τ^* es un tiempo racional de ejercicio de una opción Americana con tiempo de expiración* T *y colección de funciones de pago no negativas $(f_t)_{0 \leq t \leq T}$, si para cualquier estrategia $\pi \in$ AF$^+$ con $X_{\tau^*}^\pi \geq f_{\tau^*}$ y capital inicial $x = \mathbb{C}$, se satisface*

$$X_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*}.$$

Denotaremos con $\mathcal{M}_t^T$ a la colección de tiempos de Markov finitos τ con $t \leq \tau \leq T$ y consideremos una estrategia de cobertura Americana, $\pi \in \Pi(x, f)$, y $X^\pi = (X_t^\pi)_{0\leq t\leq T}$ el capital correspondiente. De la propiedad de supermartingala (1.25), se sigue para $\pi \in \mathrm{AF}^+$ que

$$X_0^\pi \geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau}X_\tau^\pi\right] \geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau}f_\tau\right], \tag{2.36}$$

y por tanto el precio justo $\mathbb{C}$ satisface la desigualdad

$$\mathbb{C} \geq \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau}f_\tau\right]. \tag{2.37}$$

El siguiente teorema muestra que la igualdad en (2.37) se cumple.

Teorema 2.1. **(a)** *El precio justo para una opción Americana es*

$$\mathbb{C} = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau}f_\tau\right]. \tag{2.38}$$

(b) *Un tiempo de paro $\tau^* \in \mathcal{M}_0^T$ es tiempo racional de ejercicio si y sólo si el supremo en (2.38) se alcanza en τ^*, es decir*

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau^*}f_{\tau^*}\right]. \tag{2.39}$$

Antes de demostrar el Teorema 2.1 vamos a demostrar el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones habituales y sea $g = (g_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso consistente no negativo con trayectorias en el espacio D. Entonces es posible encontrar una supermartingala $V^* = (V_t^*)_{0\leq t\leq T}$ con trayectorias en el espacio D tal que, para todo $0 \leq t \leq T$,*

$$V_t^* = \operatorname*{esssup}_{\tau\in\mathcal{M}_t^T} \mathbb{E}[g_\tau|\mathcal{F}_t] \qquad \mathbf{P}\text{-c.s.}, \tag{2.40}$$

donde esssup *es un supremo esencial (ver apéndice A para su definición).*

Demostración. Pongamos directamente

$$V_t := \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbb{E}[g_\tau | \mathcal{F}_t], \tag{2.41}$$

y fijemos s y $t \in [0, \infty)$. Elijamos (basandonos en la definición de esssup) una sucesión $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ de tiempos de Markov de $\mathcal{M}_t^T$ de tal forma que

$$V_t = \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[g_{\sigma_n} | \mathcal{F}_t]. \tag{2.42}$$

De la sucesión $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ construiremos una nueva sucesión $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de tiempos de Markov en $\mathcal{M}_t$ mediante la siguiente regla:

$$\tau_1 = \sigma_1$$

y, para $n \geq 1$,

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n, & \text{si} \qquad \mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[g_{\sigma_{n+1}} | \mathcal{F}_t], \\ \sigma_{n+1}, & \text{si} \qquad \mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_t] < \mathbb{E}[g_{\sigma_{n+1}} | \mathcal{F}_t]. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_t] = \max_{k \leq n} \mathbb{E}[\sigma_k | \mathcal{F}_t] \uparrow V_t, \qquad n \to \infty.$$

Ahora por el Teorema de convergencia monótona y el hecho de que $\mathcal{M}_t^T \subseteq \mathcal{M}_s^T$ para $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\lim_n \mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= \lim_n \mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_s] \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} E[g_\tau | \mathcal{F}_s] \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_s^T} \mathbb{E}[g_\tau | \mathcal{F}_s] \\ &= V_s. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Esto es, el proceso $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ posee la propiedad de supermartingala.

También de (2.43) y convergencia monótona se obtiene la siguiente desigualdad

$$\mathbb{E}[V_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[V_t | \mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[\lim_n \mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_s]] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbb{E}[g_{\tau_n} | \mathcal{F}_s]] \leq \sup_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbb{E}[g_\tau], \tag{2.44}$$

y de (2.41)

$$V_t \geq \mathbb{E}[g_\tau|\mathcal{F}_t] \quad \text{c.s.} \qquad \text{para } \tau \in \mathcal{M}_t^T \tag{2.45}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[V_t\right] \geq \sup_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbb{E} g_\tau \tag{2.46}$$

y por tanto la siguiente igualdad se cumple

$$\mathbb{E}\left[V_t\right] = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \mathbb{E} g_\tau \tag{2.47}$$

Por otro lado, es un hecho conocido que una supermartingala $V = (V_t)_{t\geq 0}$ admite una modificación $V^* = (V_t^*)$ con trayectorias en D si y solo si $(\mathbb{E}V_t)_{0\leq t\leq T}$ es una función continua por la derecha. Demostremos entonces que $(\mathbb{E}V_t)_{0\leq t\leq T}$ es una función continua por la derecha.

Sean $t, t_n \in [0, T]$, con $t_n \downarrow t$ y $t_n \leq t+1$, $n \geq 1$. Como V es una supermartingala,

$$\mathbb{E}\left[V_t\right] \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} V_{t_n}. \tag{2.48}$$

Para demostrar la desigualdad inversa, sea $\epsilon > 0$ fijo y elijamos un tiempo de Markov $\sigma = \sigma(\epsilon)$ de $\mathcal{M}_t^T$ tal que

$$\mathbb{E}\left[V_t\right] \leq \mathbb{E}\left[g_\sigma\right] + \epsilon,$$

esta elección es posible en virtud de (2.47), mas aun es posible escoger σ tal que $\mathbf{P}(\sigma > t) = 1$ por la continuidad a la derecha del proceso no negativo $g = (g_t)_{0\leq t\leq T}$.

Para cada $n \geq 1$ definimos los siguientes tiempos de Markov $\sigma_n \in \mathcal{M}_{t_n}$ mediante las siguientes fórmulas

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma, & \sigma \geq t_n, \\ t+1, & \sigma < t_n. \end{cases}$$

Entonces

$$|\mathbb{E}[g_\sigma] - \mathbb{E}[g_{\sigma_n}]| \leq \mathbb{E}[(g_\sigma + g_{t+1})I(\sigma < t_n)] \to 0, \qquad n \to \infty,$$

y tomando en cuenta (2.45) obtenemos

$$\mathbb{E}[V_{t_n}] \geq \mathbb{E}[g_{\sigma_n}]$$

pues $\sigma_n \in \mathcal{M}_{t_n}^T$.

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[V_t] \leq \mathbb{E}[g_\sigma] + \epsilon = \lim_n \mathbb{E}[g_{\sigma_n}] + \epsilon \leq \lim_n \mathbb{E}[V_{t_n}] + \epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, esta última desigualdad junto con (2.48) dan la propiedad de continuidad por la derecha. $\square$

En virtud del lema 2.2, el proceso $\hat{Y} = (\hat{Y}_t)_{0\leq t\leq T}$ con

$$\hat{Y}_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{M}_t^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{f_\tau}{B_\tau} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] \tag{2.49}$$

puede ser considerado como una supermartingala no negativa en $[0, T]$ con trayectorias continuas por la derecha y límites por la izquierda.

Por tanto, del teorema de descomposición de Doob-Meyer existe una martingala $\hat{M} = (\hat{M}_t)_{0\leq t\leq T}$ y un proceso creciente predecible $A = (A_t)_{0\leq t\leq T}$ con $A_0 = 0$ tales que

$$\hat{Y}_t = \hat{M}_t - A_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.50}$$

y por Itô-Klark

$$\hat{M}_t = \hat{M}_0 + \int_0^t \hat{\alpha}_u dW_u^{\mu-r}, \tag{2.51}$$

con $\hat{\alpha}$ un proceso adaptado a la filtración $\mathcal{F}^{W^{\mu-r}}$.

De manera análoga a como se hizo con la martingala $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ definida en (2.7) el portafolio $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t)_{0\leq t\leq T}$, $\hat{\pi}_t = (\hat{\beta}_t, \hat{\gamma}_t)$, dado mediante

$$\hat{\gamma}_t = \frac{\hat{\alpha}_t B_t}{\sigma S_t}, \tag{2.52}$$

$$\hat{\beta}_t = \hat{M}_t - \hat{\gamma}_t \frac{S_t}{B_t}. \tag{2.53}$$

es una estrategia autofinanciable con la propiedad de que la martingala $\hat{M} = (\hat{M}_t)_{0\leq t\leq T}$ es realizable como el capital descontado correspondiente a $\hat{\pi}$,

$$\hat{M}_t = \frac{X_t^{\hat{\pi}}}{B_t}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración del Teorema 2.1. a) Como se mostró anteriormente, existe un portafolio $\hat{\pi}$ tal que

$$\frac{X_0^{\hat{\pi}}}{B_0} = \hat{Y}_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{e^{-r\tau}}{B_0} f_\tau\right],$$

de (2.37) y el valor inicial $B_0 = 1$,

$$X_0^{\hat{\pi}} = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau} f_\tau\right] \leq \mathbb{C}$$

y como $\mathbb{C}$ es la mínima cantidad con la cual es posible cubrirse, $X_0^{\pi^*} = \mathbb{C}$, y por tanto

$$\mathbb{C} = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau} f_\tau\right]. \tag{2.54}$$

b) Sean τ^* un tiempo racional de ejercicio,

$$c = \mathbb{C} - \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau^*} f_{\tau^*}\right],$$

y $Y = (Y_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso estocástico con

$$Y_t = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}}\middle|\mathcal{F}_t\right] + c.$$

Por su definición el proceso Y es una martingala no negativa y por tanto coincide con un proceso capital descontado $Y_t^\pi = X_t^\pi / B_t$ de alguna estrategia $\pi \in$ AF.

Tenemos entonces

$$X_0^\pi = B_0 Y_0^\pi = B_0 Y_0 = \mathbb{C} \tag{2.55}$$

y

$$X_{\tau^*}^\pi = B_{\tau^*} Y_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*} + c e^{r\tau^*}$$

Por tanto, si τ^* es un tiempo racional de ejercicio entonces $c = 0$. Esto es

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{\mu - r}\left[e^{-r\tau^*} f_{\tau^*}\right]. \tag{2.56}$$

Recíprocamente, sea τ^* un tiempo de paro para el cual (2.56) se cumple y sea $X^\pi = (X_t^\pi)_{0\le t\le T}$ el capital correspondiente a una estrategia $\pi \in$ AF$^+$ tal que $X_{\tau^*}^\pi \ge f_{\tau^*}$ ($\mathbf{P}$-c.s.) y Y^π el capital actualizado.

De la propiedad de supermartingala del proceso Y^π obtenemos

$$X_0^\pi \ge \mathbb{E}^{\mu - r}\left[e^{-r\tau^*} X_{\tau^*}^\pi\right] \ge \mathbb{E}^{\mu - r}\left[e^{-r\tau^*} f_{\tau^*}\right] = \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, si $X_0^\pi = \mathbb{C}$, entonces $X_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*}$, lo cual quiere decir que τ^* es un tiempo racional de ejercicio. □

2.4.2. Condiciones para la existencia de tiempos racionales de ejercicio

Vamos a considerar el siguiente problema: ¿cuándo es posible garantizar la existencia de un tiempo racional de ejercicio?

En esta dirección introducimos las siguientes condiciones sobre la colección de funciones de pago $f = (f_t)_{0\le t\le T}$.

I La familia de funciones de pago descontadas $\left\{e^{-r\tau} f_\tau : \tau \in \mathcal{M}_0^T\right\}$ es uniformemente integrable con respecto a la medida $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

II El proceso $f = (f_t)_{0\leq t\leq T}$ tiene solo saltos positivos (es decir, $\Delta f_t := f_t - f_{t-} \geq 0$).

Teorema 2.3. *Si las condiciones I y II se cumplen, entonces el tiempo*

$$\tau^* = \text{ínf}\{0 \leq t \leq T : X_t^{\pi^*} \leq f_t\} \tag{2.57}$$

es un tiempo racional de ejercicio, donde $X^{\pi^*} = (X_t^{\pi^*})_{0\leq t\leq T}$ es el capital correspondiente a una estrategia de cobertura Americana π^* con $X_0^{\pi^*} = \mathbb{C}$ y colección de funciones de pago $f = (f_t)_{0\leq t\leq T}$.

Observación 2.1. Las condiciones I y II son lo mínimo para garantizar la existencia de tiempos racionales de ejercicio.

Demostración. Para $\epsilon > 0$ definimos el siguiente tiempo de Markov

$$\tau(\epsilon) = \text{ínf}\{t \geq 0 : f_t \geq X_t^{\pi^*} - \epsilon\}. \tag{2.58}$$

Vamos a mostrar que este tiempo es ϵ-óptimo en el problema de paro óptimo

$$\sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau} f_\tau\right],$$

es decir,

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)} f_{\tau(\epsilon)}\right] \geq \mathbb{C} - \epsilon. \tag{2.59}$$

Sea $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de Markov tal que

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n}\right] \uparrow \mathbb{C}, \tag{2.60}$$

entonces, la siguiente cadena de cálculos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}\right] &= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right] \\
&\leq \mathbb{E}^{\mu-r}e^{-r\sigma_n}[X^{\pi^*}_{\sigma_n}-\epsilon I(\sigma_n<\tau(\epsilon))]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}X^{\pi^*}_{\sigma_n}I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right] \\
&\leq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}X^{\pi^*}_{\sigma_n}\right]-\epsilon\,\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right] \\
&\leq \mathbb{C}-\epsilon\, e^{-rT}\mathbf{P}^{\mu-r}(\sigma_n<\tau(\epsilon)) \qquad \text{debido a que } \sigma_n\leq T,
\end{aligned}$$

junto con (2.60) implican

$$\mathbf{P}^{\mu-r}(\sigma_n<\tau(\epsilon))\to 0, \qquad n\to\infty. \tag{2.61}$$

Sea $\tau_n=\text{mín}(\sigma_n,\tau(\epsilon))$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau_n}f_{\tau_n}\right] &= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)}f_{\tau(\epsilon)}I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right] \\
&\geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)}[X^{\pi^*}_{\tau(\epsilon)}-\epsilon]I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right] \\
&\geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)}X^{\pi^*}_{\tau(\epsilon)}I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right]-\epsilon \qquad \text{pues } \tau(\epsilon)\geq 0 \\
&\overset{(1)}{\geq} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}X^{\pi^*}_{\sigma_n}I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right]-\epsilon \\
&\overset{(2)}{\geq} \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n<\tau(\epsilon))\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}I(\sigma_n\geq\tau(\epsilon))\right]-\epsilon \\
&= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}\right]-\epsilon,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

donde en (1) se usó la propiedad de supermartingala del proceso X^{π^*} y en (2) el hecho de que $X^{\pi^*}_t\geq f_t$.

Para probar (2.59) notamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)}f_{\tau(\epsilon)}\right] &= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau_n}f_{\tau_n}I(\tau(\epsilon)<\sigma_n)\right]+\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)}f_{\tau(\epsilon)}I(\tau(\epsilon)\geq\sigma_n)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau_n}f_{\tau_n}\right]-\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau_n}f_{\tau_n}I(\tau(\epsilon)\geq\sigma_n)\right] \\
&\quad +\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon)}f_{\tau(\epsilon)}I(\tau(\epsilon)\geq\sigma_n)\right] \\
&\geq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\sigma_n}f_{\sigma_n}\right]-\epsilon-\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau_n}f_{\tau_n}I(\tau(\epsilon)\geq\sigma_n)\right] \qquad \text{por (2.62).}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Ahora por la integrabilidad uniforme de la familia $(e^{-r\tau_n} f_{\tau_n})$ y (2.61) tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{[\sigma_n<\tau(\epsilon)]} e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} &= \lim_{n\to\infty} \int_{[\sigma_n<\tau(\epsilon)]\cap[e^{-r\tau_n} f_{\tau_n}>c]} e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} d\mathbf{P}^{\mu-r} \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \int_{[\sigma_n<\tau(\epsilon)]\cap[e^{-r\tau_n} f_{\tau_n}\leq c]} e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} d\mathbf{P}^{\mu-r} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} c\mathbf{P}^{\mu-r}(\sigma_n < \tau(\epsilon)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir, el último sumando en (2.63) tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto de (2.60), obtenemos la desigualdad necesaria (2.59).

Escojamos una sucesión $\epsilon_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Entonces es claro, que $\tau(\epsilon_n) \uparrow$ y $\tau(\epsilon_n) \leq \tau^* = \inf\{0 \leq t \leq T : X_t^* \leq f_t(w)\}$ para todo $n \geq 1$, así $\tau(\epsilon_n) \uparrow \tilde{\tau} \leq \tau^*$.

Por la condición II,

$$f_{\tilde{\tau}} \geq \lim_n f_{\tau(\epsilon_n)}. \tag{2.64}$$

La condición I de integrabilidad uniforme (ver (2.59)) y el lema de Fatou implican

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &\leq \limsup_n \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tau(\epsilon_n)} f_{\tau(\epsilon_n)}\right] \leq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\limsup_n e^{-r\tau(\epsilon_n)} f_{\tau(\epsilon_n)}\right] \\
&\leq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\limsup_n e^{-r\tau(\epsilon_n)} f_{\tilde{\tau}}\right] = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[\lim_n (\sup_{m\geq n} e^{-r\tau(\epsilon_m)}) f_{\tilde{\tau}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tilde{\tau}} f_{\tilde{\tau}}\right],
\end{aligned} \tag{2.65}$$

pero $\mathbb{C} = \sup_\tau \mathbb{E}^{\mu-r}[e^{-r\tau} f_\tau]$, por tanto

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tilde{\tau}} f_{\tilde{\tau}}\right]. \tag{2.66}$$

Luego entonces del Teorema 2.3 concluimos que $\tilde{\tau}$ es un tiempo racional de ejercicio.

Ahora, como

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tilde{\tau}} f_{\tilde{\tau}}\right] \leq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\tilde{\tau}} X_{\tilde{\tau}}^{\pi^*}\right] \leq \mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-r\cdot 0} X_0^{\pi^*}\right] \leq \mathbb{C},$$

obtenemos $X^*_{\tilde{\tau}} = f_{\tilde{\tau}}$. Entonces de la definición de τ^* como el tiempo $\tau^* = \text{ínf}\{0 \leq t \leq T : X^{\pi^*}_t \leq f_t\}$ se sigue que $\tau^* \leq \tilde{\tau}$. Esto junto con el hecho $\tilde{\tau} \leq \tau^*$ muestra que $\tau^* = \tilde{\tau}$ y

$$X^{\pi^*}_{\tau^*} = f_{\tau^*}, \tag{2.67}$$

es decir, τ^* es un tiempo racional de ejercicio. □

2.5. Un ejemplo de opción Americana, precio y tiempo racional de ejercicio

En está sección se expondrán los resultados referentes a la valuación de opciones Americanas, así como a la descripción de la estructura de los tiempos racionales de ejercicio para los dos tipos de opciones Americanas: el call estándar cuya función de pago es

$$f_t = e^{-\lambda t}(S_t - K)_+, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.68}$$

y el put estándar con función de pago

$$f_t = e^{-\lambda t}(K - S_t)_+, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.69}$$

donde $K \geq 0$, $S_t = S_t(r)$, $\lambda \geq 0$.

Sea $\mathcal{M}_0 = \{\tau : \tau < \infty\}$ la colección de tiempos de Markov finitos.

Para hacer enfasis en el parámetro λ, denotaremos con $\mathbb{C}(\lambda)$ y $\mathbb{P}^*(\lambda)$ de las opciones tipo call y put.

Teorema 2.4. *Opción tipo Call*

a *Si* $\lambda = 0$, *entonces no existe tiempo racional de ejercicio, y en este caso*

$$\mathbb{C}^*(0) \leq S_0. \tag{2.70}$$

Para cada $\epsilon > 0$, en la clase $\mathcal{M}_0$, el tiempo determinista

$$T_\epsilon = \frac{1}{r}\log\frac{K}{\epsilon S_0} \tag{2.71}$$

es ϵ-óptimo en el sentido que

$$\mathbb{C}^*(0)(1-\epsilon) \leq S_0\mathbb{E}\left[e^{-rT_\epsilon}(S_{T_\epsilon}-K)_+\right] \leq \mathbb{C}^*(0). \tag{2.72}$$

b *Si $\lambda > 0$, entonces*

$$\mathbb{C}^*(\lambda) = \begin{cases} C_1 S_0^{\gamma_1}, & S_0 < s_1^*, \\ S_0 - K, & S_0 \geq s_1^*, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2(\lambda+r)}{\sigma^2}}, && (2.73) \\ C_1 &= \gamma_1^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1-1}{K}^{\gamma_1-1}\right), && (2.74) \\ s_1^* &= K\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}. && (2.75) \end{aligned}$$

El tiempo racional de ejercicio es

$$\tau_1^* = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : S_t \geq s_1^*\right\}. \tag{2.76}$$

La finitud de este tiempo no se garantiza, pero esta es caracterizada mediante la siguiente medida

$$\mathbf{P}(\tau_1^* < \infty) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad r-\sigma^2/2 \geq 0 \quad \text{o} \quad S_0 \geq s_1^*, \\ \left(\frac{S_0}{s_1^*}\right)^{1-2r/\sigma^2} & \textit{si} \quad r-\sigma^2/2 < 0 \quad \text{y} \quad S_0 \leq s_1^*. \end{cases}$$

Teorema 2.5. *Opción tipo Put*

Para $\lambda \geq 0$ se tiene

$$\mathbb{P}^*(\lambda) = \begin{cases} C_2 S_0^{\gamma_2}, & S_0 > s_2^*, \\ K - S_0, & S_0 \leq s_2^*, \end{cases} \tag{2.77}$$

donde

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}}, \tag{2.78}$$

$$C_2 = |\gamma_2|^{|\gamma_2|}\left(\frac{K}{1 + |\gamma 2|}\right)^{1+|\gamma_2|}, \tag{2.79}$$

$$s_2^* = K\frac{|\gamma_2|}{1 + |\gamma_2|}. \tag{2.80}$$

El tiempo racional de ejercicio en este caso es

$$\tau_2^* = \{t \geq 0 : S_t \leq s_2^*\} \tag{2.81}$$

cuya finitud esta caracterizada mediante la siguiente medida

$$\mathbf{P}(\tau_2^* < \infty) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad r - \sigma^2/2 \leq 0 \quad \text{o} \quad S_0 \leq s_2^*, \\ \left(\frac{s_2^*}{S_0}\right)^{2r/\sigma^2 - 1}, & \textit{si} \quad r - \sigma^2/2 > 0 \quad \text{y} \quad S_0 > s_2^*. \end{cases} \tag{2.82}$$

Demostración del Teorema 2.4. Como se muestra en la proposisión del teorema, los casos $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$ se tratarán por separado. Si $\lambda = 0$, las funciones de pago son $f_t = (S_t - K)_+$, $0 \leq t \leq T$. Como $S_t = S_0 e^{rt} e^{\sigma W_t - (\sigma^2/2)t}$ tenemos

$$e^{-rt} f_t = (S_0 e^{\sigma W_t - (\sigma^2/2)t} - K e^{-rt})_+, \tag{2.83}$$

donde $(e^{\sigma W_t - (\sigma^2/2)t})_{t \geq 0}$ es una martingala.

De esta forma, $(S_0 e^{\sigma W_t - (\sigma^2/2)t} - K e^{-rt})_{t \geq 0}$ es una submartingala y por la desigualdad de Jensen $\{(S_0 e^{\sigma W_t - (\sigma^2/2)t} - K e^{-rt})_+\}_{t \geq 0}$ es también una submartingala.

Luego entonces, para cualquier $T > 0$ y tiempo de Markov finito τ,

$$\mathbb{E}\left[e^{-r\tau} f_\tau\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{-rT} f_T\right],$$

y por tanto el tiempo $\tau^* = T$ es óptimo en la clase $\mathcal{M}_0^T$. Esto significa que, en el caso de un call Americano con tiempo de expiración T, el tiempo que coincide con la fecha de expiración T es un tiempo racional de ejercicio. Esto puede ser interpretado diciendo que una opción Americana tipo call es igual a una opción Europea tipo call con tiempo de expiración T.

Para $\tau \in \mathcal{M}_0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-r\tau} f_\tau\right] = \mathbb{E}\left[(S_0 e^{\sigma W_\tau - (\sigma^2/2)\tau} - K e^{-r\tau})_+\right] \leq S_0 \mathbb{E}\left[e^{\sigma W_\tau - (\sigma^2/2)\tau}\right] = S_0,$$

por lo tanto

$$\mathbb{C}^*(0) \leq S_0. \tag{2.84}$$

Consideremos ahora el tiempo determinista $\tau = T_\epsilon$ definido en (2.71). Para este tiempo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-rT_\epsilon} f_{T_\epsilon}\right] &= S_0 \mathbb{E}\left[\left(e^{\sigma W_{T_\epsilon} - (\sigma^2/2)T_\epsilon} - \frac{K}{S_0} e^{-rT_\epsilon}\right) I\left(e^{\sigma W_{T_\epsilon} - (\sigma^2/2)T_\epsilon} \geq \frac{K}{S_0} e^{-rT_\epsilon}\right)\right] \\
&= S_0 \mathbb{E}\left[\left(e^{\sigma W_{T_\epsilon} - (\sigma^2/2)T_\epsilon} - \frac{K}{S_0} e^{-rT_\epsilon}\right)\right] \\
&\quad - S_0 \mathbb{E}\left[\left(e^{\sigma W_{T_\epsilon} - (\sigma^2/2)T_\epsilon} - \frac{K}{S_0} e^{-rT_\epsilon}\right) I\left(e^{\sigma W_{T_\epsilon} - (\sigma^2/2)T_\epsilon} < \frac{K}{S_0} e^{-rT_\epsilon}\right)\right] \\
&\geq S_0 \left(1 - \frac{K}{S_0} e^{-rT_\epsilon}\right) = S_0(1-\epsilon),
\end{aligned}$$

que junto con (2.84) muestra la validez de las ecuaciones (2.70) y (2.72) de la parte (a) del teorema.

Ahora, supongamos que $\lambda > 0$. En este caso tenemos que $\gamma_1 > 1$ (ver (2.73)).

Denotemos con

$$V^*(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} \mathbb{E}_s\left[e^{-(\lambda+r)\tau} g(S_\tau)\right], \tag{2.85}$$

donde, para $s > 0$, $\mathbf{P}_s$ es una distribución de probabilidad para $(S_t)_{t\geq 0}$ con $S_0 = s$ y $\mathbb{E}_s$ es la esperanza con respecto a la medida $\mathbf{P}_s$.

La teoría general sobre tiempos de paro óptimo para procesos de Markov nos dice que $V^*(s)$ es la mínima función $(\lambda + r)$-excesiva mayorante de la función $g(s) = (s - K)_+$,

$s > 0$, es decir, la menor de las funciones $U = U(s)$ tal que

$$U(s) \geq g(s),$$

y

$$U(s) \geq e^{-(\lambda+r)t} T_t U(s), \tag{2.86}$$

donde $T_t U(s) = \mathbb{E}_s \left[U(S_t(r)) \right]$.

De acuerdo con resultados generales sobre reglas de paro óptimo, $V^*(s)$ tiene una estructura simple, a saber, es convexa en el intervalo $(0, \infty)$ y $V^*(s) = g(s)$ para s suficientemente grande. Esto implica, que los conjuntos $C^* = \{s : V^*(s) > g(s)\}$ y $D^* = \{s : V^*(s) = g(s)\}$ tienen la siguiente estructura:

$$C^* = \{s : s < s_1^*\}, \qquad D^* = \{s : s \geq s_1^*\},$$

con $s_1^* \in (K, \infty)$.

Además, el tiempo de paro τ_1^* definido como la primera vez que se llega al conjunto D^* es un tiempo de paro óptimo. Se sabe también que cuando $V^*(s)$ es suave, $V^*(s)$ y el punto frontera s_1^* son solución del problema de Stephan (o problema con frontera movible):

$$\begin{aligned} LV(s) &= (\lambda + r)V(s), \qquad s < s_1^*, \\ V(s) &= g(s), \qquad\qquad\quad s \geq s_1^*, \end{aligned} \tag{2.87}$$

donde

$$LV(s) = rsV'(s) + \frac{\sigma^2}{2} s^2 V''(s). \tag{2.88}$$

A continuación proseguiremos con la solución al problema de Stephan. Buscaremos una solución a la ecuación diferencial (2.87), es decir a la ecuación

$$rsV'(s) + \frac{\sigma^2}{2} s^2 V''(s) = (\lambda + r)V(s) \tag{2.89}$$

en la forma $V(s) = cs^{\gamma}$. Entonces para funciones de esta forma, obtenemos para γ

$$\gamma^2 - \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)\gamma - \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2} = 0. \tag{2.90}$$

Supondremos, sin perdida de generalidad, que $\sigma^2 = 1$. (Para el caso general, hay que hacer simplemente los cambios $r \to r/\sigma^2$, $\lambda \to \lambda/\sigma^2$)

La ecuación (2.90) con $\sigma^2 = 1$ tiene dos raíces,

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - r\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - r\right)^2 + 2(\lambda + r)} \tag{2.91}$$

y

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - r\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - r\right)^2 + 2(\lambda + r)}. \tag{2.92}$$

Es claro que sí $\lambda > 0$, entonces $\gamma_1 > 1$; sí $\lambda = 0$ entonces $\gamma_1 = 1$. Sí $\lambda \geq 0$, entonces $\gamma_2 < 0$. Por lo tanto la solución general a la ecuación (2.89) en la región $C^* = \{s : s < s_1^*\}$ tiene la siguiente forma

$$V(s) = C_1 s^{\gamma_1} + C_2 s^{\gamma_2}. \tag{2.93}$$

En nuestro caso de opción tipo call, $C_2 = 0$ porque en caso contrario $V(s) \to \pm\infty$, $s \to 0$, el cual debe ser excluido debido a que por naturaleza del problema $V(s) \geq 0$ y $V(s) \leq s$, ver ecuación (2.86).

De esta manera, $V(s) = C_1 s^{\gamma_1}$ para $s < s_1^*$, donde C_1 y s_1^* son constantes por determinarse.

La condición (2.87) nos lleva a la relación

$$C_1 (s_1^*)^{\gamma_1} = s_1^* - K \tag{2.94}$$

y haciendo uso de la condición de pegado suave

$$V'(s)\Big|_{s\uparrow s_1^*} = g(s)\Big|_{s\downarrow s_1^*}, \tag{2.95}$$

la cual implica

$$C_1\gamma_1(s_1^*)^{\gamma_1-1} = 1,$$

esto es

$$C_1(s_1^*)^{\gamma_1} = s_1^*/\gamma_1. \tag{2.96}$$

Luego entonces de (2.86) y (2.94) obtenemos

$$s_1^* = K\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}, \qquad C_1 = \gamma_1^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1-1}{K}\right)^{\gamma_1-1}. \tag{2.97}$$

Por lo tanto en la región $C^* = \{s : s \leq s_1^*\}$,

$$V(s) = \left(\frac{s}{\gamma_1}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1-1}{K}\right)^{\gamma_1-1}. \tag{2.98}$$

A continuación mostraremos que en efecto la función $V(s)$ dada por el lado derecho de (2.98) en la region C^* e igual a $g(s)$ en la región D^* coincide con $V^*(s)$ definida en (2.85) y que el tiempo τ_1^* es óptimo.

Para probar esto es suficiente con verificar las siguientes dos propiedades:

(A$_1$) $\mathbb{E}_s\left[e^{-(\lambda+r)\tau}V(S_\tau)\right] \leq V(s),\ s>0$ para cualquier $\tau \in \mathcal{M}_0$;

(A$_2$) $\mathbb{E}_s\left[e^{-(\lambda+r)\tau_1^*}g(S_{\tau_1^*})\right] = V(s)$, $s > 0$.

La función $V = V(s)$, $s > 0$, definida anteriormente pertenence a la clase C^2 de funciones dos veces continuamente diferenciables. Por lo tanto, de la fórmula de Itô aplicada a $V(S_t)$, vemos que para cualquier $\tau \in \mathcal{M}_0$,

$$\begin{aligned} e^{-(\lambda+r)\tau}V(S_\tau) &= V(S_0) + \int_0^\tau e^{-(\lambda+r)u}[LV(S_u) - (\lambda+r)V(S_u)]\,du \\ &\quad + \int_0^\tau e^{-(\lambda+r)u}\sigma S_u V'(S_u)\,dW_u. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Ahora, como $V(s)$ en (2.98) satisface la primer ecuación en (2.87), tenemos que en la region C^* se verifica la siguiente ecuación $LV(s) - (\lambda+r)V(s) = 0$. Mientras que para región D^* se tiene lo siguiente $LV(s)-(\lambda+r)V(s) \leq 0$, en efecto, como $V(s) = (s-K)_+$ en D^* tenemos que $LV(s) = rs$, además si $s > K$ obtenemos de (2.97)

$$\begin{aligned} rs - (\lambda + r)(s - K)_+ &= Kr - \lambda(s - K) \leq Kr - \lambda(s_1^* - K) \\ &= K\left(\frac{\gamma_1 r - (\lambda + r)}{\gamma_1 - 1}\right), \end{aligned} \tag{2.100}$$

y de la ecuación (2.90) (con $\sigma^2 = 1$) tenemos

$$r\gamma - (\lambda + r) = -\frac{\gamma^2 - \gamma}{2} = -\frac{\gamma(\gamma - 1)}{2},$$

y como $\gamma_1 > 1$, se sigue entonces de la ecuación anterior y (2.100) que en la región D^*,

$$LV(s) - (\lambda + r)V(s) \leq 0. \tag{2.101}$$

Sea

$$I_t := \int_0^t e^{-(\lambda+r)u} \sigma S_u V'(S_u) dW_u. \tag{2.102}$$

Entonces, puesto que para todo $s > 0$, $LV(s) - (\lambda + r)V(s) \leq 0$, (2.99) implica que

$$I_t \geq e^{-(\lambda+r)t} V(S_t) - V(S_0) \geq -V(S_0). \tag{2.103}$$

Luego entonces la martingala local $(I_t)_{t \geq 0}$ uniformemente acotada por la constante $-V(S_0)$ es, por el lema de Fatou, una supermartingala y por tanto para cualquier $\tau \in \mathcal{M}_0$

$$\mathbb{E}\left[I_\tau\right] \leq \mathbb{E}\left[I_0\right] = 0. \tag{2.104}$$

Tomando en (2.99) la esperanza $\mathbb{E}_s$, en ambos lados, vemos que, para $\tau \in \mathcal{M}_0$,

$$\mathbb{E}_s\left[e^{-(\lambda+r)\tau} V(S_\tau)\right] \leq V(s) \tag{2.105}$$

y por tanto $V^*(s) \leq V(s)$ ya que $g(s) \leq V(s)$.

Ahora, veremos que la propiedad (A$_2$) es valida. De (2.99) para $\tau = t \wedge \tau_1^*$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&e^{-(\lambda+r)(t\wedge\tau_1^*)}V(S_{t\wedge\tau_1^*}) \\
&\qquad = \quad V(S_0) + \int_0^{t\wedge\tau_1^*} e^{-(\lambda+r)u}[LV(S_u) - (\lambda+r)V(S_u)]\,du + I_{t\wedge\tau_1^*} \qquad (2.106)
\end{aligned}
$$

Si $S_0 \geq s_1^*$, entonces $\tau_1^* = 0$ y $V(S_0) = g(S_0)$, es decir, la propiedad (A$_2$) es obviamente valida.

Sea $S_0 < s_1^*$. Entonces $LV(S_u) - (\lambda+r)V(S_u) = 0$ para todo $u \leq t \wedge \tau_1^*$ y de (2.106) se tiene

$$
-V(S_0) \leq I_{t\wedge\tau_1^*} = e^{-(\lambda+r)(t\wedge\tau_1^*)}V(S_{t\wedge\tau_1^*}) - V(S_0) \leq V(S_1^*) - V(S_0)
$$

Esto implica que la martingala local $(I_{t\wedge\tau_1^*})_{t\geq 0}$ es uniformemente acotada y por tanto una martingala. Además, para cualquier $S_0 > 0$, $\lim_{t\to\infty} I_{t\wedge\tau_1^*} = I_{\tau_1^*}$ existe y

$$
\mathbb{E}_{S_0}\left[I_{\tau_1^*}\right] = 0. \qquad (2.107)
$$

Hagamos $t \to \infty$ en (2.106). Entonces, sobre el conjunto $\{w : \tau_1^* < \infty\}$

$$
e^{-(\lambda+r)\tau_1^*}g(S_{\tau_1^*}) = e^{-(\lambda+r)\tau_1^*}V(S_{\tau_1^*}) = V(S_0) + I_{\tau_1^*}, \qquad (2.108)
$$

Tomando la esperanza $\mathbb{E}_{S_0}$ en el primer y último término de las ecuaciones anteriores considerando (2.107) obtenemos la relación (A$_2$)

Para completar la prueba del teorema, solo basta examinar la pregunta sobre los valores de la probabilidad $\mathbf{P}(\tau_1^* < \infty)$.

Fijando $S_0 = s$ obtenemos

$$
\tau_1^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq s_1^*\} = \inf\left\{t \geq 0 : e^{\sigma W_t + (r-\sigma^2/2)t} \geq \frac{s_1^*}{s}\right\}. \qquad (2.109)
$$

Por lo tanto,

$$
\mathbf{P}(\tau_1^* > T) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\leq T}[\sigma W_t + \mu t] < x\right), \qquad (2.110)
$$

donde $\mu = r - \sigma^2/2$, $x = \log(s_1^*/s)$. De acuerdo con el apéndice D

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\leq T}[\sigma W_t + \mu t] < x\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x/\sigma^2}\Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \tag{2.111}$$

Esto implica que, si $\mu = r - \sigma^2/2 \geq 0$, entonces para cualquier $x \geq 0$ la probabilidad $\mathbf{P}\left(\sup_{t\leq T}[\sigma W_t + \mu t] < x\right) \to 0$ cuando $T \to \infty$. Si $\mu < 0$, entonces, cuando $T \to \infty$,

$$\Phi\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x/\sigma^2}\Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \to 1 - e^{2\mu x/\sigma^2}. \tag{2.112}$$

Así si $r \geq \sigma^2/2$, entonces $\mathbf{P}(\tau_1^* < \infty) = 1$. Es decir, el tiempo $\tau_1^* \in \mathcal{M}_0$. Si $r < \sigma^2/2$ tenemos para $S_0 = s \leq s_1^*$,

$$\mathbf{P}(\tau_1^* < \infty) = \left(\frac{s}{s_1^*}\right)^{1-2r/\sigma^2}. \tag{2.113}$$

El Teorema (2.4) está probado. □

Demostración del teorema 2.5. Consideremos los conjuntos

$$C^* = \{s : s > s_2^*\} \qquad D^* = \{s : s \leq s_2^*\} \tag{2.114}$$

y el correspondiente problema de Stephan

$$\begin{aligned} LV(s) &= (\lambda + r)V(s), \qquad s > s_2^* \\ V(s) &= g(s), \qquad\qquad\quad s \leq s_2^*, \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$V'(s)\Big|_{s\downarrow s_2^*} = g'(s)\Big|_{s\uparrow s_2^*}. \tag{2.116}$$

Ahora, tomando en cuenta que la funcion de interés para nosotros, es decir la funcion de pago, esta acotado por arriba, obtenemos que la solución debe de ser de la forma

$$V(s) = C_2 s^{\gamma_2}, \qquad s > s_2^*, \tag{2.117}$$

donde $\gamma_2 < 0$.

La solución al problema de Stephan en (2.115), que es de la forma (2.117), está dada por las ecuaciones (2.78)-(2.80), la cual se hace de manera análoga a la del teorema 2.4.

Procedamos con el cálculo de la probabilidad $\mathbf{P}(\tau_2^* < \infty)$.

Es claro que si $S_0 \leq s_2^*$, entonces $\tau_2^* = 0$. Sea entonces $S_0 > s_2^*$, recordando que $\mu = r - \sigma^2/2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\tau_2^* > T) &= \mathbf{P}\left(\inf_{t\leq T}[S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}] > s_2^*\right) = \mathbf{P}\left(\inf_{t\leq T}(\sigma W_t + \mu t) > \log\frac{s_2^*}{S_0}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\sup_{t\leq T}(-\sigma W_t - \mu t) < \log\frac{S_0}{s_2^*}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-2\mu x/\sigma^2}\Phi\left(\frac{-x+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

donde $x = \log(S_0/s_2^*) > 0$. Esta representación muestra que si $\mu = r - \sigma^2/2 \leq 0$, entonces $\mathbf{P}(\tau_2^* > T) \to 0$, conforme $T \to \infty$.

En el caso en que $\mu > 0$, tenemos

$$\mathbf{P}(\tau_2^* > T) \to 1 - \left(\frac{s_2^*}{S_0}\right)^{2r/\sigma^2 - 1}. \tag{2.118}$$

El teorema (2.5) esta probado

$\square$

Capítulo 3

La Opción Rusa

3.1. Introducción

La opción Rusa, introducida por Shepp y Shiryaev, es un put Americano que otorga el derecho de vender a un precio fijo M_0 o al valor máximo que el activo con riesgo ha alcanzado hasta la fecha de ejercicio τ, la que resulte más grande. Este tipo de opciones está caracterízada por *mínimo arrepentimiento* debido a que el tenedor de la opción al no ejercer o vender al tiempo de ejercio τ sabe que posteriormente podrá vender almenos al precio que se tenía al tiempo τ.

En esta parte del escrito obtendremos el precio justo de la opción, es decir, hallaremos el supremo en (2.38) explícitamente así como también determinaremos el tiempo racional u óptimo de ejercicio. Estas cantidades por determinar dependen fuertemente en el valor del activo y el valor máximo del activo al tiempo t. Es decir en un proceso bivariado el cual resulta ser de Markov.

La introducción de una nueva medida de probabilidad, conocida como medida martingala dual, nos permitirá reducir la optimización de un proceso de Markov bidimensional en uno de Markov unidimensional que se obtiene haciendo el cociente entre el valor máximo del activo y el valor del activo al tiempo t.

Mediante la fórmula de Itô transformaremos el problema de optimización de un proceso de Markov unidimensional en un problema determinista. Esto se logrará representando la expresión a óptimizar en una parte que es supermartingala e investigar para la parte restante cuando se hace cero. Esto último lleva al planteamiento de una ecuación diferencial determinista que en la literatura es conocido como problema de Stephan o problema con frontera movil.

La parte que es supermartingala en la representación que se menciona arriba, se puede transformar en una martingala, mediante la elección de un tiempo de Markov adecuado, al considerar el proceso parado de la expresión a óptimizar. Este tiempo de Markov que transforma la supermartingala en una martingala resultará ser el tiempo óptimo de ejercicio.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 3.2 daremos la definición formal de la opción Rusa con su correspondiente colección de funciones de pago. En la siguiente sección introduciremos y expondremos la construcción de la medida martingala dual. En la sección 3.4 demostraremos que el cociente entre el valor máximo del activo y el valor del activo al tiempo t es un proceso de Markov con respecto a la medida martingala dual. En la sección 3.5 trataremos el problema de Stephan cuya solución nos da la solución al problema de optimización del proceso de Markov mencionado arriba. Finalmente en la sección 3.6 trataremos el problema con dividendos, donde veremos que el precio justo se puede determinar a través del precio justo en el problema sin dividendos.

3.2. Definición de la opción Rusa

La Opción Rusa es una opción del tipo Americana que da al tenedor el derecho de vender un activo con riesgo o bien subyacente al precio máximo que este ha alcanzado o a un precio fijo M_0. Es decir, la Opción Rusa es un Put Americano con colección de funciones de pago dadas por

$$f_t = e^{-\lambda t} \operatorname{máx}\left[M_0, \operatorname{máx}_{u \leq t} S_u\right], \tag{3.1}$$

donde S_u es el precio del activo con riesgo al tiempo u, $M_0 \geq S_0$ y $\lambda > 0$.

La constante M_0 puede ser pensada como un máximo inicial, por ejemplo el máximo valor que el bien subyacente alcanzó en el periodo anterior $[-t_0, 0)$. También podemos pensar a M_0 como el valor mínimo al cual el tenedor le estará permitido vender, esto es, M_0 es un tipo de seguro o garantía en caso de que el máximo del precio del activo con riesgo no alcance un valor atractivo para vender. Podemos escribir el valor M_0 en términos del valor inicial del precio del activo como $M_0 = \psi_0 S_0$, con $\psi_0 \geq 1$. El factor positivo de actualización λ en (3.1) es necesario para garantizar que es óptimo ejercer en algún tiempo de paro finito.

Análizaremos la opción Rusa con tiempo de expiración infinito, esto significa que el tenedor podrá ejercer en cualquier momento posterior a la firma del contrato. De manera análoga a la expresión para el precio justo y la caracterización del tiempo racional u óptimo de ejercicio de una opción Americana con tiempo de expiración finito, la expresión y caracterización respectivas con tiempo de expiracion infinito están dadas respectivamente por

$$\mathbb{C} = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}^{\mu - r}\left[e^{-r\tau} f_\tau\right], \tag{3.2}$$

y

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{\mu - r}\left[e^{-r\tau^*} f_{\tau^*}\right], \tag{3.3}$$

es decir, τ^* es aquella variable aleatoria donde el supremo en (3.2) se alcanza.

El cálculo de $\mathbb{C}$ y la caracterización especifica de τ^* para el caso de la opción Rusa están dados por el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *El costo racional $\mathbb{C}$ de la opción Rusa con colección de funciones de pago $f = (f_t)_{0\leq\tau<\infty}$ dadas en (3.1) y tiempos de Markov con valores en $[0,\infty)$ está dado por*

$$\mathbb{C} = S_0 \cdot \begin{cases} \frac{\widetilde{\psi}}{x_2 - x_1}\left[(x_2-1)\left(\frac{\psi_0}{\widetilde{\psi}}\right)^{x_1} + (1-x_1)\left(\frac{\psi_0}{\widetilde{\psi}}\right)^{x_2}\right], & 1 \leq \psi_0 < \widetilde{\psi}, \\ \psi_0, & \psi_0 \geq \widetilde{\psi}, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde x_1, x_2, son las raíces de la ecuación (3.33), definidas por (3.35), (3.36), y

$$\widetilde{\psi} = \left(\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)^{1/(x_2-x_1)}. \tag{3.5}$$

El tiempo racional u óptimo de ejercicio es

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 : \psi_t \geq \widetilde{\psi}\right\}, \tag{3.6}$$

donde

$$\psi_t = \frac{\max\left\{\max_{u\leq t} S_u, S_0\psi_0\right\}}{S_t} \qquad t \geq 0. \tag{3.7}$$

Para la demostración de este teorema introduciremos una nueva medida de probabilidad la cual nos permitirá obtener una nueva representación para el precio justo de una opción Americana.

3.3. Medida martingala dual

3.3.1. Definición de la medida martingala dual

Consideremos nuevamente el proceso de precios actualizados

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t},$$

el cual es una martingala con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$ y por tanto

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{S_t}{B_t}\right] = \frac{S_0}{B_0} = S_0 \qquad \text{porque } B_0 = 1,$$

esto es,

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{S_t}{B_t}\cdot\frac{1}{S_0}\right]=1.$$

Esta última relación permite definir, para $t\geq 0$, la siguiente colección de medidas

$$\widetilde{\mathbf{P}}_t^{\mu-r}(A):=\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{S_t}{B_t}\cdot\frac{1}{S_0}\cdot I(A)\right]\qquad \text{para } A\in\mathcal{F}_t, \tag{3.8}$$

las cuales se pueden extender a una única medida que denotaremos por $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$ que satisface que las restricciones $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}|\mathcal{F}_t$ coinciden con $\widetilde{\mathbf{P}}_t^{\mu-r}$, $t\geq 0$. A $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$ le llamaremos medida martingala dual.

3.3.2. Nueva representación para el costo de opciones

Recordemos que en la sección §2.2.2. vimos que es posible tomar como tasa de apreciación la tasa de interés, esto es podemos hacer $\mu=r$. Esto nos permitirá escribir la ecuación (3.2) de la siguiente forma

$$\mathbb{C}=\sup_{0\leq\tau<\infty}\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}f_\tau(S(r))\right]. \tag{3.9}$$

Ahora, la siguiente cadena de igualdades

$$\mathbb{E}^{\mu-r}\left[e^{-rt}f_t\right]=\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{f_t}{B_t}\right]=S_0\mathbb{E}^{\mu-r}\left[\frac{S_t}{B_t}\cdot\frac{1}{S_0}\cdot\frac{f_t}{S_t}\right]=S_0\widetilde{\mathbb{E}}^{\mu-r}\left[\frac{f_t}{S_t}\right]$$

dan una nueva representacion para el precio justo de una opción.

En particular para $\mu=r$ tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{-rt}f_t(S(r))\right]=\mathbb{E}\left[\frac{f_t(S(r))}{B_t}\right]=S_0\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{f_t(S(r))}{S_t(r)}\right]. \tag{3.10}$$

Por tanto el precio justo en la nueva representación para la opción Rusa con tiempo de expiración infinito está dado por

$$\mathbb{C}=S_0\sup_{0\leq\tau<\infty}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{f_\tau(S(r))}{S_\tau(r)}\right]. \tag{3.11}$$

3.4. La estructura del proceso $(\psi_t)_{t\geq 0}$

Primero introduzcamos el siguiente proceso

$$\widetilde{W}_t^{\mu-r} = W_t^{\mu-r} - \sigma t, \qquad t \geq 0,$$

el cual es un movimiento Browniano con respecto a la medida $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$. En particular, para $\mu = r$ el proceso $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano con respecto a $\widetilde{\mathbf{P}}$.

3.4.1. El proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$ es de Markov

Escribamos el proceso de precios del activo en términos de $\widetilde{W}$,

$$S_t(r) = S_0 \exp\left\{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma \widetilde{W}_t\right\}. \tag{3.12}$$

De la definición de $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$,

$$\psi_t = \frac{\text{máx}\left\{\text{máx}_{u\leq t} S_u, S_0\psi_0\right\}}{S_t}, \tag{3.13}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\psi_{t+\Delta} &= \text{máx}\left\{\frac{\text{máx}_{u\leq t+\Delta} S_u}{S_{t+\Delta}}, \frac{S_0\psi_0}{S_{t+\Delta}}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\frac{\text{máx}_{u\leq t} S_u}{S_t \cdot S_{t+\Delta}/S_t}, \frac{S_0\psi_0}{S_t \cdot S_{t+\Delta}/S_t}, \frac{\text{máx}_{t\leq u\leq t+\Delta} S_u/S_t}{S_{t+\Delta}/S_t}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\psi_t \cdot \frac{1}{S_{t+\Delta}/S_t}, \frac{\text{máx}_{t\leq u\leq t+\Delta} S_u/S_t}{S_{t+\Delta}/S_t}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.12), para $t \leq u \leq t+\Delta$, obtenemos la siguiente relación,

$$\frac{S_u}{S_t} = \exp\left\{\sigma\left(\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t)\right\}, \tag{3.15}$$

y como $\left(\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$, las siguientes variables

$$S_u/S_t, \qquad \underset{t\leq u\leq t+\Delta}{\text{máx}} (S_u/S_t), \qquad S_{t+\Delta}/S_t \tag{3.16}$$

son también independientes de $\mathcal{F}_t$ por ser funciones del incremento $\left(\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t\right)$. Luego entonces (3.14) no depende de la historia $\mathcal{F}_t$, solo de ψ_t, es decir

$$\text{Ley}\left(\psi_{t+\Delta}|\mathcal{F}_t;\widetilde{\text{P}}\right) = \text{Ley}\left(\psi_{t+\Delta}|\psi_t;\widetilde{\text{P}}\right), \tag{3.17}$$

demostrando la propiedad de Markov del proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$ con respecto a $\widetilde{\text{P}}$.

3.4.2. El proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$ se refleja al llegar al punto 1

Sea

$$M_t = \text{máx}\left\{\max_{0\leq u\leq t} S_u, S_0\psi_0\right\},$$

entonces

$$\psi_t = \frac{M_t}{S_t}.$$

Usando la fórmula de Itô tenemos

$$d\psi_t = d\left(\frac{M_t}{S_t}\right) = M_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t}dM_t = -\psi_t\left[rdt + \sigma d\widetilde{W}_t\right] + \frac{dM_t}{S_t},$$

o en forma integral

$$\psi_t = \psi_0 - r\int_0^t \psi_u du - \sigma\int_0^t \psi_u d\widetilde{W}_u + \int_0^t \frac{dM_u}{S_u}.$$

Análogamente, para cualquier función $g = g(\psi)$, $\psi \geq 1$, de clase C^2,

$$dg(\psi_t) = g'(\psi_t)d\psi_t + \frac{1}{2}g''(\psi_t)\sigma^2\psi_t^2 dt$$

o en forma integral

$$\begin{aligned} g(\psi_t) &= g(\psi_0) + \int_0^t \left[-r\psi_u g'(\psi_u) + \frac{1}{2}\sigma^2\psi_u^2 g''(\psi_u)\right] dt \\ &\quad -\sigma\int_0^t \psi_u g'(\psi_u)d\widetilde{W}_u + \int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u} \\ &= g(\psi_0) + \int_0^t Lg(\psi_u)du - \sigma\int_0^t \psi_u g'(\psi_u)d\widetilde{W}_u + \int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde L es el operador diferencial

$$L = -r\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}. \tag{3.19}$$

La última integral en (3.18) puede ser escrita como

$$\int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u} = \int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u} I(\psi_u = 1) + \int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u} I(\psi_u > 1). \tag{3.20}$$

Vamos a mostrar que el segundo término de la derecha en (3.20) es idéntico a cero. De la definición de ψ_t en (3.7), tenemos que $\psi_t > 1$ si y sólo si $M_t > S_t$, pero esto sucede en la región donde $M_t = M_{t^-}$, es decir, donde M_t es constante (ver Figura 3.1).

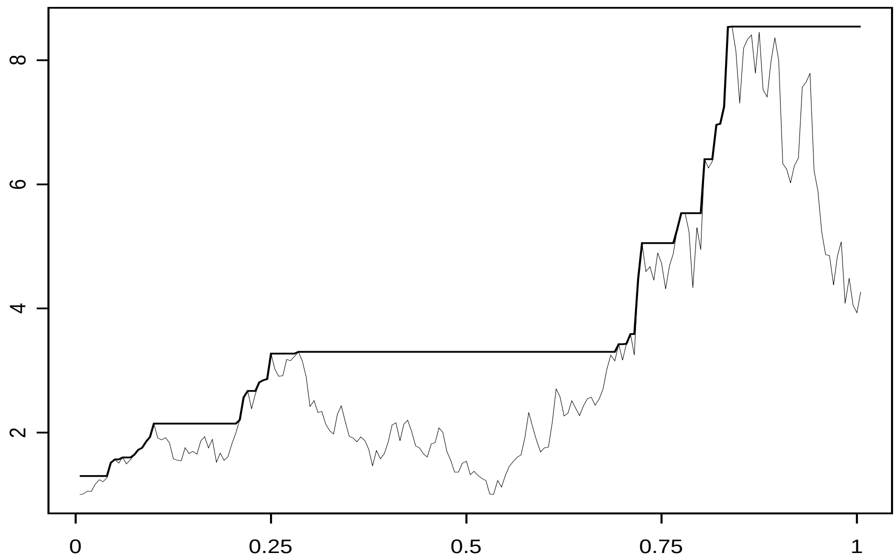

Figura 3.1: Gráfica de $S_t = \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t\right\}$ (linea delgada) y $M_t = \text{máx}\left\{\text{máx}_{u\le t} S_u, s\psi_0\right\}$ (linea gruesa)

Pero en esta región la integral

$$\int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u} I(\psi_u > 1) = 0. \tag{3.21}$$

Esto permite escribir la ecuación (3.18) como

$$\begin{aligned} g(\psi_t) &= g(\psi_0) + \int_0^t Lg(\psi_u)du - \sigma \int_0^t g'(\psi_u)\psi_u d\widetilde{W}_u \\ &\quad + \int_0^t g'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_u} I(\psi_u = 1). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora consideremos el tiempo que el proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$ pasa en el punto 1. Por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty I(\psi_t = 1)dt\right] & \\ &= \int_0^\infty \widetilde{\mathbb{E}}\left[I(\psi_t = 1)\right]dt \qquad (3.23) \\ &= \int_0^\infty \widetilde{\mathrm{P}}(\psi_t = 1)dt \qquad (3.24) \\ &= 0 \qquad (3.25) \end{aligned}$$

debido a que $\psi_t = M_t/S_t$ al ser función del proceso $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ que tiene densidad, ψ_t también tiene densidad y por tanto $\widetilde{\mathrm{P}}(\psi_t = 1) = 0$.

El significado de la ecuación (3.25) es que el tiempo que el proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$ pasa en el punto 1 es cero $\widetilde{\mathrm{P}}$- c.s. Esto es, el proceso $\psi = (\psi_t)_{0\geq 0}$ se refleja inmediatemente al tocar el punto 1.

3.5. El problema de Stephan relacionado con el problema de paro óptimo del proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$

Sea

$$\widetilde{V}(\psi) = \sup_{0\leq\tau<\infty} \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau}\psi_\tau\right], \tag{3.26}$$

donde $\widetilde{\mathbb{E}}_\psi$ es la esperanza con respecto a $\widetilde{\mathrm{P}}_\psi$, la ley de distribución del proceso $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$.

Por (3.11)

$$\mathbb{C} = S_0 \widetilde{V}(\psi_0), \tag{3.27}$$

donde ψ_0 es una constante de (3.1) contenida en la definición de función de pago $f = (f_t)_{0 \le t \le T}$.

De acuerdo con la teoría general sobre reglas de paro óptimo para procesos de Markov es natural esperar que la estructura del tiempo de paro óptimo τ^* en el problema (3.26) tenga la siguiente forma:

$$\tau^* = \text{ínf}\left\{t \ge 0 : \widetilde{V}(\psi_t) \ge \psi_t\right\}. \tag{3.28}$$

De hecho, la estructura de τ^* debe ser bastante simple:

$$\tau^* = \text{ínf}\left\{t \ge 0 : \psi_t \ge \widetilde{\psi}\right\}, \tag{3.29}$$

donde $\widetilde{\psi}$ es una constante. En otras palabras, se puede decir que τ^* es la primera vez que el proceso $(\psi_t)_{0 \le t \le T}$ llega al conjunto $\widetilde{D} = \left\{\psi : \psi \ge \widetilde{\psi}\right\}$

Supóngamos que la función $\widetilde{V}(\psi)$ es suficientemente suave, entonces de acuerdo con la teoría general sobre reglas de paro óptimo la función $\widetilde{V}(\psi)$ satisface, para $1 < \psi < \widetilde{\psi}$, la ecuación diferencial

$$L\widetilde{V}(\psi) = \lambda \widetilde{V}(\psi), \tag{3.30}$$

donde L es el operador diferencial (3.19) con la condición de frontera

$$\widetilde{V}'(1+) = 0. \tag{3.31}$$

Vamos a buscar la solución de (3.30) en la forma $V(\psi) = \psi^x$. Entonces para x obtenemos

$$\begin{aligned}
LV(\psi) &= L\psi^x \\
&= -r\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\psi^x + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\psi^x \\
&= -r\psi x\psi^{x-1} + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2 x(x-1)\psi^{x-2} \\
&= -rxV(\psi) + \frac{\sigma^2}{2}x(x-1)V(\psi). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

De manera que la ecuación (3.30) para la función $V(\psi) = \psi^x$, $x \in \mathbb{R}$ es

$$-rxV(\psi) + \frac{1}{2}\sigma^2 x(x-1)V(\psi) = \lambda V(\psi),$$

simplificando obtenemos

$$x^2 - \left(1 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)x - \frac{2\lambda}{\sigma^2} = 0,$$

o bien

$$x^2 - Ax - B = 0, \qquad (3.33)$$

con

$$A = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}, \qquad B = \frac{2\lambda}{\sigma^2}, \qquad (3.34)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$x_1 = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B}, \qquad (3.35)$$

$$x_2 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B}. \qquad (3.36)$$

Por tanto para $1 \leq \psi < \tilde{\psi}$, la solución general $V(\psi)$ es de la forma

$$V(\psi) = C_1\psi^{x_1} + C_2\psi^{x_2}, \qquad (3.37)$$

donde C_1, C_2 y $\tilde{\psi}$ son constantes por determinar.

Para encontrar el valor de estas tres constantes se deben cumplir tres condiciones:

$$\begin{aligned} V(\widetilde{\psi}) &= \widetilde{\psi} \\ V'(\widetilde{\psi}) &= 1 \\ V'(1+) &= 0 \end{aligned}$$

las cuales llevan respectivamente a las siguientes relaciones

$$C_1\widetilde{\psi}^{x_1} + C_2\widetilde{\psi}^{x_2} = \widetilde{\psi} \tag{3.38}$$

$$C_1 x_1\widetilde{\psi}^{x_1-1} + C_2 x_2\widetilde{\psi}^{x_2-1} = 1 \tag{3.39}$$

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0 \tag{3.40}$$

Multiplicando la relación (3.39) por $\widetilde{\psi}$ y tomando en cuenta (3.38) se obtiene

$$C_1\widetilde{\psi}^{x_1} + C_2\widetilde{\psi}^{x_2} = C_1 x_1\widetilde{\psi}^{x_1} + C_2 x_2\widetilde{\psi}^{x_2} \tag{3.41}$$

pasando todo al lado izquierdo y tomando en cuenta (3.40) obtenemos

$$C_1\widetilde{\psi}^{x_1}(1-x_1) - \left(\frac{x_1}{x_2}C_1\right)\widetilde{\psi}^{x_2}(1-x_2) = 0 \tag{3.42}$$

o lo que es lo mismo

$$\widetilde{\psi}^{x_1-x_2} = \frac{1-x_2}{1-x_1}\cdot\frac{x_1}{x_2} \tag{3.43}$$

es decir

$$\widetilde{\psi} = \left(\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)^{1/x_2-x_1}. \tag{3.44}$$

Ahora dividiendo (3.38) por $\widetilde{\psi}$, tomando en cuenta la relación (3.40) y la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
1 &= C_1\widetilde{\psi}^{x_1-1} - \frac{x_1}{x_2}C_1\widetilde{\psi}^{x_2-1}\\
&= C_1\widetilde{\psi}^{x_1-1}\left(1-\frac{x_1}{x_2}\widetilde{\psi}^{x_2-x_1}\right)\\
&= C_1\widetilde{\psi}^{x_1-1}\left(1-\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)\\
&= C_1\widetilde{\psi}^{x_1-1}\cdot\frac{x_2-x_1}{x_2-1}.
\end{aligned}$$

lo cual nos da la expresión para

$$C_1 = \frac{x_2-1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{\widetilde{\psi}^{x_1-1}}. \tag{3.45}$$

De manera análoga

$$C_2 = \frac{1-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{\widetilde{\psi}^{x_2-1}}. \tag{3.46}$$

Resumiendo la información obtenida obtenemos el siguiente resultado

Lema 3.2. *En la clase de funciones C^2, $V = V(x)$, la solución ($V,\widetilde{\psi}$) del problema de Stephan o problema con frontera movible*

$$\begin{aligned}
LV(\psi) &= \lambda V(\psi), \qquad 1<\psi<\widetilde{\psi},\\
V(\widetilde{\psi}) &= \widetilde{\psi}, \qquad V'(\widetilde{\psi}-)=1, \qquad V(1+)=0,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

está dado por la formula:

$$V(\psi) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\psi}}{x_2-x_1}\left[(x_2-1)\left(\frac{\psi}{\widetilde{\psi}}\right)^{x_1} + (1-x_1)\left(\frac{\psi}{\widetilde{\psi}}\right)^{x_2}\right], & 1\le\psi<\widetilde{\psi},\\ \psi, & \psi\ge\widetilde{\psi}, \end{cases} \tag{3.48}$$

donde

$$\widetilde{\psi} = \left(\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)^{1/(x_2-x_1)}, \tag{3.49}$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\lambda}{\sigma^2}}, \tag{3.50}$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\lambda}{\sigma^2}}. \tag{3.51}$$

Demostración del Teorema. Comparando (3.27) con (3.4), vemos que la proposición (3.4) del teorema consiste en lo siguiente:

$$\widetilde{V}(\psi) = V(\psi), \tag{3.52}$$

donde $V = V(\psi)$ es una solución del problema de Stephan (3.47) definido en el lema anterior.

Para probar (3.52) es suficiente con establecer las siguientes dos condiciones

A1 para cualquier tiempo τ ($\widetilde{\mathrm{P}}_\psi$-c.s., $\psi \geq 1$) finito

$$\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau}\psi_\tau \leq V(\psi)\right],$$

A2 el tiempo $\tau^* = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : \psi_t \geq \widetilde{\psi}\right\}$ es ($\widetilde{\mathrm{P}}_\psi$-c.s., $\psi \geq 1$) finito y

$$\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau^*}\psi_{\tau^*}\right] = V(\psi).$$

Aplicando la fórmula de Itô al proceso $e^{-\lambda t}V(\psi_t)$, tomando en cuenta (3.18), obtenemos

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\lambda t}V(\psi_t)\right) &= e^{-\lambda t} d\left(V(\psi_t)\right) + V(\psi_t) d\left(e^{-\lambda t}\right) \\ &= e^{-\lambda t}\left\{LV(\psi_t)dt - \sigma V'(\psi_t)\psi_t d\widetilde{W} + V'(\psi_t)\frac{dM_t}{S_t} I(\psi_t = 1)\right\} \\ &\quad -\lambda e^{-\lambda t} V(\psi_t) dt. \end{aligned}$$

Entonces para cualquier tiempo de Markov finito τ

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\tau}V(\psi_\tau) &= V(\psi_0) + \int_0^\tau e^{-\lambda u}\left[LV(\psi_u) - \lambda V(\psi_u)\right] du \\ &\quad - \int_0^\tau e^{-\lambda u}\sigma V'(\psi_u)\psi_u d\widetilde{W}_u + \int_0^\tau e^{-\lambda u} V'(\psi_u)\frac{dM_u}{S_t} I(\psi_u = 1). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Tenemos de (3.47), $LV(\psi) - \lambda V(\psi) = 0$ para $1 \leq \psi < \widetilde{\psi}$, y tomando en cuenta (3.32) con $x = 1$, $LV(\psi) - \lambda V(\psi) = -r\psi - \lambda\psi \leq 0$ para $\psi \geq \widetilde{\psi}$. Así, $LV(\psi) - \lambda V(\psi) \leq 0$ para todo $\psi \geq 1$. Más aún, la última integral en (3.53) es igual a cero debido a que $V'(1) = 0$. Luego entonces se sigue de (3.53) que la martingala local

$$I_t = -\int_0^\tau e^{-\lambda u}\sigma V'(\psi_u)\psi_u d\widetilde{W}_u$$

es uniformemente acotada por abajo:

$$I_t \geq e^{-\lambda\tau}V(\psi_t) - V(\psi_0) \geq 0 - V(\psi_0). \tag{3.54}$$

Por lo tanto, $(I_t)_{0\leq t<\infty}$ es una supermartingala con $\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[I_\tau\right] \leq \widetilde{\mathbb{E}}\left[I_0\right] = 0$.

Tomando la esperanza $\widetilde{\mathbb{E}}_\psi$ en ambas partes de (3.53) obtenemos por la propiedad de supermartingala

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau}V(\psi_\tau)\right] &= V(\psi) + \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[\int_0^\tau e^{-\lambda u}\left[LV(\psi_u)\right] - \lambda V(\psi_u)\right]du \\
&\quad + \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[\int_0^\tau -e^{-\lambda u}\sigma\psi_u V'(\psi_u)d\widetilde{W}_u\right] \\
&\leq V(\psi) + 0 + 0 \\
&= V(\psi) \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

para cualquier $\psi \geq 1$ y tiempo de Markov finito τ.

Por otro lado, $\psi \leq V(\psi)$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
& \psi \leq V(\psi) \\
\Longleftrightarrow\ & \psi \leq C_1\psi^{x_1} + C_2\psi^{x_2} \\
\Longleftrightarrow\ & 1 \leq C_1\psi^{x_1-1} + C_2\psi^{x_2-1} =: G(\psi)
\end{aligned}$$

derivando $G(\psi)$ y tomando en cuenta (3.40)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\psi}G(\psi) &= C_1(x_1-1)\psi^{x_1-2} + C_2(x_2-1)\psi^{x_2-2} \\
&= C_2\left(-\frac{x_2}{x_1}(x_1-1)\psi^{x_1-2} + (x_2-1)\psi^{x_2-2}\right)
\end{aligned}$$

esto implica que

$$
\begin{array}{rrcl}
 & G'(\psi) & \leq & 0 \\
\iff & (x_2-1)\psi^{x_2-2} & \leq & \frac{x_2}{x_1}(x_1-1)\psi^{x_1-2} \\
\iff & \psi^{x_2-x_1} & \leq & \frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-1}{x_2-1} \\
\iff & \psi & \leq & \left(\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)^{1/(x_2-x_1)} = \widetilde{\psi}
\end{array}
$$

por lo tanto $G'(\psi) \leq 0$ en $[1, \widetilde{\psi}]$, así $G(\psi)$ es no creciente en $[1, \widetilde{\psi}]$ y por tanto el valor mínimo se alcanza en $\widetilde{\psi}$. El valor de la función $G(\psi)$ en $\widetilde{\psi}$ es

$$
\begin{aligned}
G(\widetilde{\psi}) &= C_1\widetilde{\psi}^{x_1-1} + C_2\widetilde{\psi}^{x_2-1} \\
&= \frac{x_2-1}{x_2-x_1} + \frac{1-x_1}{x_2-x_1} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $G(\psi) \geq 1$, $\psi \geq 1$. Así $\psi \leq V(\psi)$ que junto con (3.55) se obtiene

$$
\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau}\psi_\tau\right] \leq \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau}V(\psi_\tau)\right] \leq V(\psi)
$$

para cada $\psi \geq 1$ y tiempo de paro finito ($\widetilde{\mathrm{P}}_\psi$-c.s.). Esto prueba la propiedad A1.

Para la propiedad A2.

De (3.53)

$$
e^{-\lambda(t\wedge\tau^*)}V(\psi_{t\wedge\tau^*}) = V(\psi_0) + \int_0^{t\wedge\tau^*} e^{-\lambda u}\left[(LV)(\psi_u) - \lambda V(\psi_u)\right] du + I_{t\wedge\tau^*}. \tag{3.56}
$$

Si $\psi \geq \widetilde{\psi}$, entonces $\tau^* = 0$ y la propiedad A2 evidentemente se cumple. Sea $\psi < \widetilde{\psi}$, entonces $LV(\psi_u) - \lambda V(\psi_u) = 0$ para $u \leq t\wedge\tau^*$. Entonces la ecuación (3.56) se reduce a

$$
e^{-\lambda(t\wedge\tau^*)}V(\psi_{t\wedge\tau^*}) = V(\psi_0) + I_{t\wedge\tau^*}, \tag{3.57}
$$

por lo tanto

$$
-V(\psi_0) \leq I_{t\wedge\tau^*} = e^{-\lambda(t\wedge\tau^*)}V(\psi_{t\wedge\tau^*}) - V(\psi_0) \leq V(\psi_{t\wedge\tau^*}) - V(\psi_0) \leq V(\widetilde{\psi}) - V(\psi_0), \tag{3.58}
$$

esta última desigualdad es debido a que $V(\psi)$ es creciente en $[1,\widetilde{\psi}]$:

$0 \leq V'(\psi) \iff 0 \leq C_1 x_1 \psi^{x_1-1} + C_2 x_2 \psi^{x_2-1} \iff 0 \leq -\frac{x_2}{x_1} C_2 x_1 \psi^{x_1-1} + C_2 x_2 \psi^{x_2-1} \iff C_2 x_2 \psi^{x_1-1} \leq C_2 x_2 \psi^{x_2-1} \iff \psi^{x_1-1} \leq \psi^{x_2-1} \iff 1 \leq \psi^{x_2-x_1} \iff 1 \leq \psi.$

Por lo tanto la martingala local, $(I_{t\wedge\tau^*})_{0\leq t\leq T}$, uniformemente acotada (ver (3.58)), es una martingala. Del teorema de Doob $\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[I_{t\wedge\tau^*}\right] = 0 \quad \forall t > 0$ y del Lema de Fatou,

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[(I_{n\wedge\tau^*})\right] \leq \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[\limsup_{n\to\infty} I_{n\wedge\tau^*}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[I_{\tau^*}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[\liminf_{n\to\infty} I_{n\wedge\tau^*}\right]$$
$$\leq \liminf_{n\wedge\tau^*} \widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[I_{n\wedge\tau^*}\right] = 0$$

por lo tanto de (3.56), $\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau^*} V(\psi_{\tau^*})\right] = V(\psi) \quad \forall \psi \geq 1$. Pero $\widetilde{\mathrm{P}}_\psi(V(\psi_{\tau^*}) = \psi_{\tau^*}) = 1$. Así, $\widetilde{\mathbb{E}}_\psi\left[e^{-\lambda\tau^*}\psi_{\tau^*}\right] = V(\psi)$ lo que prueba la propiedad (A2).

Solo resta probar la finitud $\widetilde{\mathrm{P}}_\psi$-c.s. del tiempo $\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 : \psi_t \geq \widetilde{\psi}\right\}$ para cualquier $\psi \geq 1$.

Sea t fijo, pero arbitrario con $0 \leq t \leq T$, y defina $C_t = \max_{u\leq t} \frac{S_u}{S_t}$, entonces

$$\psi_t = \frac{\max\left\{\max_{u\leq t} S_u, S_0\psi_0\right\}}{S_t} = \max\left\{\max_{u\leq t}\frac{S_u}{S_t}, \frac{S_0\psi_0}{S_t}\right\} = \max\left\{C_t, \frac{S_0\psi_0}{S_t}\right\}$$

por lo tanto $\psi_t \geq C_t$ y así

$$\max_{0\leq t\leq T} \psi_t \geq \max_{0\leq t\leq T} C_t = \max_{0\leq u\leq t\leq T} \frac{S_u}{S_t}.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{P}}_\psi\left\{\max_{0\leq t\leq T} \psi_t \geq \widetilde{\psi}\right\} &\geq \widetilde{\mathrm{P}}_\psi\left\{\max_{0\leq u\leq t\leq T} \frac{S_u}{S_t} \geq \widetilde{\psi}\right\} \\
&= \widetilde{\mathrm{P}}_\psi\left\{\max_{0\leq u\leq t\leq T} e^{\sigma(\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t) + (r+\sigma^2/2)(u-t)} \geq \widetilde{\psi}\right\} \\
&\geq \widetilde{\mathrm{P}}_\psi\left\{e^{r+\sigma^2/2} \max\left[e^{\sigma(\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0)}, \ldots, e^{\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{T-1})}\right] \geq \widetilde{\psi}\right\} \\
&= \widetilde{\mathrm{P}}_\psi\left\{\max\left[\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0, \ldots, \widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{T-1}\right] \geq C\right\} \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

donde $C = \left[\log \widetilde{\psi} - (r + \sigma^2/2)\right] / \sigma$. Pero es evidente que para cualquier real C la probabilidad del lado derecho de (3.59) tiende a 1 conforme $T \to \infty$. Luego entonces el proceso alcanza cualquier nivel con probabilidad 1 y, en particular, el nivel $\widetilde{\psi}$, lo que prueba la finitud ($\widetilde{\mathrm{P}}_{\psi}$-c.s., $\psi \geq 1$) del tiempo τ^*.

El teorema esta probado. $\square$

3.6. La opción Rusa con dividendos

Vamos a considerar un modelo con dividendos donde éstos son obtenidos continuamente en el tiempo de manera proporcional al valor del capital en el activo con riesgo. Esto es, vamos a considerar el modelo

$$dD_t = \delta \gamma_t S_t dt, \tag{3.60}$$

donde $\delta > 0$, es la tasa con que se reciben los dividendos.

Haciendo $C_t = 0$ en la ecuación (1.36) obtenemos que el capital total correspondiente a una estrategia exclusivamente con dividendos (π, D) es

$$X_t^\pi = X_0 + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u + D_t, \tag{3.61}$$

o en forma diferencial

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_u + \gamma_t dS_t + dD_t. \tag{3.62}$$

Introduzcamos el proceso

$$W_t^{\mu - r + \delta} = W_t + \frac{\mu - r + \delta}{\sigma} t, \qquad t \geq 0, \tag{3.63}$$

el cual es un Movimiento Browniano con respecto a la medida $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$ definida mediante la derivada de Radon Nikodym de las restricciones $\mathbf{P}_t^{\mu-r+\delta} = \mathbf{P}^{\mu-r+\delta}|\mathcal{F}_t$ y $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}|\mathcal{F}_t$, a saber,

$$\frac{d\mathbf{P}_t^{\mu-r+\delta}}{d\mathbf{P}_t} = Z_t^{\mu-r+\delta} \qquad \mathbf{P}\text{-c.s.} \tag{3.64}$$

donde

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}, \tag{3.65}$$

cumple con $\mathbb{E}Z_t^{\mu-r+\delta} = 1$. Expresaremos el hecho de $W^{\mu-r+\delta} = (W_t^{\mu-r+\delta})_{t\geq 0}$ ser un movimiento Browniano con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$ mediante la siguiente ecuación,

$$\text{Ley}(W^{\mu-r+\delta}|\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}) = \text{Ley}(W|\mathbf{P}). \tag{3.66}$$

Esta última ecuación en particular implica

$$\text{Ley}(S(\mu)|\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}) = \text{Ley}(S(r-\delta)|\mathbf{P}). \tag{3.67}$$

Consideremos la forma diferencial del capital correspondiente a (π, D), ecuación (3.62). Ésta la podemos escribir en términos de $W^{\mu-r+\delta}$, a saber,

$$dX_t^\pi = rX_t^\pi dt + \sigma\gamma_t dS_t dW_t^{\mu-r+\delta}. \tag{3.68}$$

Introduzcamos el capital actualizado

$$Y_t^{(\pi,D)} = \frac{X_t^{(\pi,D)}}{B_t}. \tag{3.69}$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (3.60) y (3.68) obtenemos

$$dY_t^{(\pi,D)} = \frac{\sigma\gamma_t S_t}{B_t} dW_t^{\mu-r+\delta}. \tag{3.70}$$

La ecuación anterior significa que el proceso $Y^{(\pi,D)}$ es una martingala local, y si consideramos estrategias de inversión admisibles, el proceso $Y^{(\pi,D)}$ resulta ser una supermartingala no negativa (ver lema 1.1).

Denotemos con $\mathbb{C}_{\text{div}}$ el precio racional de una opcion Americana con dividendos con función de pago (3.1). Entonces comenzando con (3.70), usando el mismo método para la prueba del teorema 1.3 encontramos que el precio racional de ejercicio en el caso con dividendos está dado por

$$\mathbb{C}_{\text{div}}(\delta,\mu,\lambda) = \sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}^{\mu-r+\delta}\left[e^{-r\tau} f_\tau(S(\mu))\right] \tag{3.71}$$

donde

$$f_t(S_t(\mu)) = e^{-\lambda t}\,\text{máx}\left\{\max_{0\le u\le t} S_u(\mu), S_0\psi_0\right\} \tag{3.72}$$

$\lambda > 0$, $\psi_0 \ge 1$, $S_0 > 0$.

De (3.9), el precio justo de la opción Rusa para el caso sin dividendos esta dado por

$$\mathbb{C} \;=\; \sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau} f_\tau(S(r))\right],$$

tomando en cuenta la definición de funcion de pago f_t, ver ecuación (3.1), obtenemos que esta cantidad es igual a

$$\sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\tau}\,\text{máx}\left\{\max_{0\le u\le\tau} S_u(r), S_0\psi_0\right\}\right].$$

Denotemos con $\mathbb{C}(r,\lambda)$ esta última cantidad. Entonces el precio justo para la opción Rusa en el caso con dividendos, $\mathbb{C}_{\text{div}}(\delta,\mu,\lambda)$, en términos de la función $\mathbb{C}(\cdot,\cdot)$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{\text{div}}(\delta,\mu,\lambda) &= \sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}^{\mu-r+\delta}\left[e^{-r\tau} f_\tau(S(\mu))\right] \\
&= \sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau} f_\tau(S(r-\delta))\right] \qquad \text{por ecuación (3.67)} \\
&= \sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\tau}\,\text{máx}\left\{\max_{0\le u\le\tau} S_u(r-\delta), S_0\psi_0\right\}\right] \\
&= \sup_{0\le\tau<\infty} \mathbb{E}\left[e^{-(r-\delta+\lambda+\delta)\tau}\,\text{máx}\left\{\max_{0\le u\le\tau} S_u(r-\delta), S_0\psi_0\right\}\right] \\
&= \mathbb{C}(r-\delta,\lambda+\delta).
\end{aligned}$$

Esta última relación quiere decir que la fórmula para el precio racional en el problema con dividendos es obtenida de la formula para el precio racional en el problema sin dividendos remplazando r por $r - \delta$ y λ por $\lambda + \delta$.

Esto da como resultado el siguiente

Teorema 3.3. *El costo racional $\mathbb{C}_{div}$ de la opción Rusa con dividendos con colección de funciones de pago $f = (f_t)_{0 \leq \tau < \infty}$ dadas en (3.1) y tiempos de Markov con valores en $[0, \infty)$ está definido por*

$$\mathbb{C}_{div} = S_0 \cdot \begin{cases} \frac{\widetilde{\psi}}{x_2 - x_1} \left[(x_2 - 1) \left(\frac{\psi_0}{\widetilde{\psi}} \right)^{x_1} + (1 - x_1) \left(\frac{\psi_0}{\widetilde{\psi}} \right)^{x_2} \right], & 1 \leq \psi_0 < \widetilde{\psi}, \\ \psi_0, & \psi_0 \geq \widetilde{\psi}, \end{cases} \tag{3.73}$$

donde $\tilde{\psi}$ es el dado en (3.5) y x_1, x_2, son las raíces de la ecuación (3.33), pero con

$$A = 1 + \frac{2(r - \delta)}{\sigma^2}, \qquad B = \frac{2(\lambda + \delta)}{\sigma^2}. \tag{3.74}$$

cuyas soluciones están dadas por las ecuaciones (3.35) y (3.36) con las respectivas A y B dadas arriba en (3.74).

Apéndice A

Supremo Escencial de una Familia de Variables Aleatorias

Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración. Definimos $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s\right)$ como la sigma algebra de eventos antes del tiempo $t > 0$ y $\mathcal{F}_{t+} = \sigma\left(\cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{t+\epsilon}\right)$ como la sigma algebra de eventos inmediatamente después de $t \geq 0$. Diremos que la filtracion $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es continua por la derecha (izquierda) si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ (resp., $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$) se cumple para cada $t \geq 0$.

Diremos que una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ satisface las condiciones habituales si es continua por la derecha y $\mathcal{F}_0$ contiene todos los eventos en $\mathcal{F}$ que son de probabilidad cero.

Definición A.1. *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *un espacio de probabilidad y* $\mathcal{X}$ *una familia no vacia de variables aleatorias no negativas definidas en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. *El* ***supremo escencial*** *de* $\mathcal{X}$, *denotado por* $\operatorname{esssup} \mathcal{X}$ *es una variable aleatoria* X^* *que cumple:*

- **i** $\forall\, X \in \mathcal{X}$, $X \leq X^*$ *c.s., y*

- **ii** *Si* Y *es una variable aleatoria que satisface* $X \leq Y$ *c.s. para toda* $X \in \mathcal{X}$, *entonces* $X^* \leq Y$ *c.s.*

Debido a que las variables aleatorias están definidas sólo hasta equivalencia c.s., en general no tiene sentido hablar de un supremo ω por ω $\sup\{X(w) : X \in \mathcal{X}\}$. El supremo escencial sustituye por este concepto.

Es aparente de la definición A.1 que si el supremo escencial de $\mathcal{X}$ existe, entonces es único. El propósito de este apéndice es establecer su existencia y algunas propiedades básicas.

Dada $\mathcal{X}$ como en la definición A.1 y $A \in \mathcal{F}$, diremos que $\pi = (K; A_1, \ldots, A_K; X_1, \ldots, X_K)$ es una $\mathcal{X}$-partición de A, si

i K es un entero positivo

ii $A_1, \ldots, A_K$ son conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$ cuya union es A, y

iii $X_1, \ldots, X_K$ son variables aleatorias en $\mathcal{X}$.

Para $\lambda \in (0, \infty]$ se define

$$\mu_\pi^\lambda(A) := \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{K} (X_k \wedge \lambda) \cdot 1_{A_k}\right] \tag{A.1}$$

$$\mu^\lambda(A) := \sup\{\mu_\pi^\lambda(A) : \pi \text{ es una } \mathcal{X}\text{-partición de } A\}. \tag{A.2}$$

Entonces μ^λ es una función de conjuntos definida en $\mathcal{F}$, que es aditiva finita. Por el teorema de convergencia monotona,

$$\mu^\infty(A) = \sup_\pi \sup_{\lambda \in (0,\infty)} \mu_\pi^\lambda(A) = \sup_{\lambda \in (0,\infty)} \sup_\pi \mu_\pi^\lambda(A) = \sup_{\lambda \in (0,\infty)} \mu^\lambda(A). \tag{A.3}$$

Lema A.1. *Para $\lambda \in (0, \infty]$, μ^λ es contable aditiva.*

Demostración. Primero consideramos el caso $\lambda < \infty$. Sea $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ una suceción creciente de conjuntos en $\mathcal{F}$ con $A = \cup_{j=1}^\infty A_j$. Entonces $\mu^\lambda(A) = \mu^\lambda(A_j) + \mu^\lambda(A\ A_j) \geq \mu^\lambda(A\ A_j)$, por tanto $\lim_{j\to\infty} \mu^\lambda(A_j) \leq \mu^\lambda(A)$. Dado $\epsilon > 0$, elijamos j tal que $\mathbf{P}(A\ A_j) < \epsilon$. De (A.1) y (A.2) tenemos $\mu^\lambda(AA_j) \leq \lambda\epsilon$, y así $\mu^\lambda(A) \geq \mu^\lambda(A_j) - \epsilon$. Se sigue que $\lim_{j\to\infty} \mu^\lambda(A_j) \geq \mu^\lambda(A)$.

Finalmente consideramos el caso $\lambda = \infty$. Tenemos de (A.3) que

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \mu^\infty(A_j) &= \sup_j \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \mu^\lambda(A_j) = \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \sup_j \mu^\lambda(A_j) \\ &= \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \mu^\lambda(A) = \mu^\infty(A) \end{aligned}$$

$\square$

Apéndice B

La medida $\mathrm{P}^{\mu-r}$

En esta parte vamos a demostrar la existencia de la medida $\mathbf{P}^{\mu-r}$ conocida como medida de riesgo neutral o medida martingala.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$un espacio de probabilidad filtrado.

Introduzcamos el proceso

$$Z_t^{\mu-r} = \exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \tag{B.1}$$

donde $W = (W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano con respecto a la medida $\mathbf{P}$ y la filtracion $\mathcal{F}$.

Sea $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}|\mathcal{F}_t$ una restricción de la medida $\mathbf{P}$ en $\mathcal{F}_t$. Como para $0 \leq s < t$ y $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbf{P}_s(A) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_t(A)$, tenemos que la familia $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ es consistente, esto es $\mathbf{P}_t|\mathcal{F}_s = \mathbf{P}_s$.

Para $t \geq 0$ introducimos nuevas medidas $\mathbf{P}_t^{\mu-r}$ poniendo

$$\mathbf{P}_t^{\mu-r}(A) = \mathbb{E}\left[(Z_t^{\mu-r} I(A))\right], \qquad A \in \mathcal{F}_t. \tag{B.2}$$

Antes de continuar, recordemos que como W_t es una variable aleatoria $N(0,t)$ para cada $t > 0$, su función generadora de momentos es,

$$M_{W_t}(u) = \mathbb{E}\left[\exp\{uW_t\}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}u^2 t\right\}, \tag{B.3}$$

de donde se obtiene la siguiente identidad,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{uW_t - \frac{1}{2}u^2 t\right\}\right] = 1, \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{B.4}$$

De la ecuación anterior (B.4) con $u = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ se obtiene $\mathbb{E}\left[Z_t^{\mu-r}\right] = 1$, lo que nos dice que la medida $\mathbf{P}_t^{\mu-r}$ es de probabilidad. La nueva familia $(\mathbf{P}_t^{\mu-r})_{t\geq 0}$ es también consistente. En efecto, para ello verificaremos primero que $Z_t^{\mu-r}$ es una martingala,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \Big|\mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}(W_t - W_s) - \frac{\mu-r}{\sigma}W_s\right\} \Big|\mathcal{F}_s\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \\
&\qquad = \exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_s\right\} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}(W_t - W_s)\right\}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \\
&\qquad = \exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_s\right\} \exp\left\{\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 \frac{(t-s)}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \\
&\qquad = \exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_s - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 s\right\}.
\end{aligned}$$

Luego entonces, para $A \in \mathcal{F}_s$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_t^{\mu-r}(A) &= \int_A d\mathbf{P}_t^{\mu-r} = \int_A Z_t^{\mu-r} d\mathbf{P} = \mathbb{E}[I_A Z_t^{\mu-r}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[I_A Z_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[I_A \mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbb{E}[I_A Z_s^{\mu-r}] = \int_A Z_s^{\mu-r} d\mathbf{P} \\
&= \mathbf{P}_s^{\mu-r}(A).
\end{aligned}$$

Verificando así la consistencia de la familia $(\mathbf{P}_t^{\mu-r})_{t\geq 0}$.

Consideremos ahora el algebra $\mathcal{A} = \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ y definamos la siguiente función de conjuntos $\mathbf{P}^{\mu-r} = \mathbf{P}_t^{\mu-r}(A)$ de la siguiente forma, $\mathbf{P}^{\mu-r}(A) = \mathbf{P}_t^{\mu-r}(A)$, si $A \in \mathcal{F}_t$. Como la colección de medidas $(\mathbf{P}_t^{\mu-r})_{t\geq 0}$ es consistente (es decir, $\mathbf{P}_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s = \mathbf{P}_s^{\mu-r}$ para todo $s \leq t$), $\mathbf{P}^{\mu-r}$ es una función bien definida para $A \in \mathcal{A}$ y es aditiva finita. De hecho, $\mathbf{P}^{\mu-r}$ es σ-aditiva en $\mathcal{A}$ y de acuerdo con el teorema de Caratheodory $\mathbf{P}^{\mu-r}$ admite una única extensión a una medida de probabilidad en la σ-algebra $\sigma(\mathcal{A})$, la cual denotaremos también por $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

Apéndice C

El proceso $W^{\mu-r}$ es un movimiento Browniano con respecto a $\mathrm{P}^{\mu-r}$

En este apartado vamos a demostrar un caso muy particular del teorema de Girsanov (ver apéndice E). Para ello vamos a platicar un poco de como saber cuando un proceso es martingala.

Ausencia de tendencia

Cuando platicamos acerca de martingalas, tenemos la idea intuitiva de que una martingala no tiene tendencia a subir ni bajar. Sin embargo, tenemos una definición técnica de tendencia a través de nuestra formulación de diferenciales estocásticas. ¿Será cierto que los procesos estocásticos sin término de tendencia son siempre martingalas?, y ¿qué tal viceversa? Es decir, ¿pueden simpre las martingalas ser representadas como $\sigma_t dW_t$? La respuesta la da el siguiente teorema

Teorema C.1. *Si X es un proceso estocástico con volatilidad σ_t (i.e., $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$), la cual satisface la condición técnica*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty,$$

entonces X es una martingala si y sólo si X no tiene tendencia, $\mu_t = 0$.

Si la condición técnica no se cumple, un proceso sin tendencia puede no ser martingala. Tales procesos son llamados *martingalas locales*.

Martingalas exponenciales

Consideremos la EDE sin tendencia para un proceso exponencial:

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t$$

La condición técnica

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 X_s^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$$

es difícil de verificar, pero para estos ejemplos exponenciales específicos existe un mejor resultado:

Teorema C.2. *Si $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$, para algún proceso σ_t adaptado, tal que*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2\, ds\right)\right) < \infty,$$

entonces X es una martingala.

Ahora procedamos con la demostración de que el proceso $W^{\mu - r}$ es un movimiento Browniano con respecto a $\mathbf{P}^{\mu - r}$.

De la fórmula de Itô y (B.1) tenemos

$$dZ_t^{\mu-r} = -Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t. \tag{C.1}$$

Haciendo $K(t) := Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}$ y aplicando nuevamente la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned}
dK(t) &= Z_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} + W_t^{\mu-r}dZ_t^{\mu-r} + dZ_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r}\\
&= Z_t^{\mu-r}\left(dW_t + \frac{\mu-r}{\sigma}dt\right) - W_t^{\mu-r}Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t\\
&\quad -Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dt\\
&= Z_t^{\mu-r}\left(1 - W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)\right)dW_t\\
&= Z_t^{\mu-r}dW_t - Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t\\
&= Z_t^{\mu-r}dW_t - K(t)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t.
\end{aligned}$$

Por tanto $K(t)$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}$, porque es suma de dos procesos que son martingala.

En lo que sigue vamos a hacer uso de un resultado auxiliar acerca de esperanzas condicionales, el cual enunciamos aquí

Lema C.3. *Sean μ y ν dos medidas de probabilidad definidas en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que $d\nu(w) = f(w)d\mu(w)$ para alguna función integrable f. Denotemos con $\mathbb{E}_\nu$ y $\mathbb{E}_\mu$ las esperanzas con respecto a las medidas ν y μ respectivamente. Sea también X una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que*

$$\mathbb{E}_\nu\left[|X|\right] = \int_\Omega |X(w)|f(w)d\mu(w) < \infty,$$

y sea $\mathcal{H}$ una sub σ-algebra, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{E}_\nu[X|\mathcal{H}] \cdot \mathbb{E}_\mu[f|\mathcal{H}] = \mathbb{E}_\mu[fX|\mathcal{H}] \qquad \text{c.s.}$$

Vamos a denotar por $\mathbb{E}^{\mu-r}$ la esperanza con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$, entonces por el Lema C.3, para $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mu-r}[W_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s] &= \frac{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}[K(t)|\mathcal{F}_s]}{Z_s^{\mu-r}} \\
&= \frac{K(s)}{Z_s^{\mu-r}} = W_s^{\mu-r} \qquad \text{c.s.}
\end{aligned}$$

lo cual muestra que $W_t^{\mu-r}$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

De manera análoga, vamos a demostrar que $((W_t^{\mu-r})^2 - t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala. Primero observemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
d((W_t^{\mu-r})^2 - t) &= d(W_t^{\mu-r})^2 - dt \\
&= W_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} + dW_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r} + dW_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} - dt \\
&= 2W_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} + dt - dt \\
&= 2W_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} \\
&= 2W_t^{\mu-r}dW_t + 2W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dt. \qquad \text{(C.2)}
\end{aligned}$$

Entonces poniendo $H(t) = Z_t^{\mu-r}((W_t^{\mu-r})^2 - t)$, y al considerar (C.2) y (C.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
dH(t) &= d(Z_t^{\mu-r}[(W_t^{\mu-r})^2 - t]) \\
&= Z_t^{\mu-r} \cdot d((W_t^{\mu-r})^2 - t) + ((W_t^{\mu-r})^2 - t)dZ_t^{\mu-r} + d((W_t^{\mu-r})^2 - t) \cdot dZ_t^{\mu-r} \\
&= Z_t^{\mu-r}(2W_t^{\mu-r}dW_t + 2W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dt) \\
&\quad -((W_t^{\mu-r})^2 - t)Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dW_t \\
&\quad -2Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dt \\
&= Z_t^{\mu-r}\left(2W_t^{\mu-r} - ((W_t^{\mu-r})^2 - t)\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\right)dW_t \\
&= 2Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}dW_t - Z_t^{\mu-r}((W_t^{\mu-r})^2 - t)\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dW_t \\
&= 2K(t)dW_t - H(t)\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dW_t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema C.3, para $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mu-r}[(W_t^{\mu-r})^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \frac{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}((W_t^{\mu-r})^2 - t)|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}[H(t)|\mathcal{F}_s]}{Z_s^{\mu-r}} \\
&= \frac{H(s)}{Z_s^{\mu-r}} = (W_s^{\mu-r})^2 - s \qquad \text{c.s.}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

lo cual muestra que $((W_t^{\mu-r})^2 - t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Levy (ver teorema E.7 en el apéndice E), si el proceso $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{0\leq t\leq T}$ es una martingala continua con la propiedad (C.3), entonces el proceso $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{0\leq t\leq T}$ es un movimiento Browniano. Es decir,

$$\text{Ley}(W^{\mu-r}|\mathbf{P}^{\mu-r}) = \text{Ley}(W|\mathbf{P}). \tag{C.4}$$

Apéndice C

El proceso $W^{\mu-r}$ es un movimiento Browniano con respecto a $\mathrm{P}^{\mu-r}$

En este apartado vamos a demostrar un caso muy particular del teorema de Girsanov (ver apéndice E). Para ello vamos a platicar un poco de como saber cuando un proceso es martingala.

Ausencia de tendencia

Cuando platicamos acerca de martingalas, tenemos la idea intuitiva de que una martingala no tiene tendencia a subir ni bajar. Sin embargo, tenemos una definición técnica de tendencia a través de nuestra formulación de diferenciales estocásticas. ¿Será cierto que los procesos estocásticos sin término de tendencia son siempre martingalas?, y ¿qué tal viceversa? Es decir, ¿pueden simpre las martingalas ser representadas como $\sigma_t dW_t$? La respuesta la da el siguiente teorema

Teorema C.1. *Si X es un proceso estocástico con volatilidad σ_t (i.e., $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$), la cual satisface la condición técnica*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty,$$

entonces X es una martingala si y sólo si X no tiene tendencia, $\mu_t = 0$.

Si la condición técnica no se cumple, un proceso sin tendencia puede no ser martingala. Tales procesos son llamados *martingalas locales*.

Martingalas exponenciales

Consideremos la EDE sin tendencia para un proceso exponencial:

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t$$

La condición técnica

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 X_s^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$$

es difícil de verificar, pero para estos ejemplos exponenciales específicos existe un mejor resultado:

Teorema C.2. *Si $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$, para algún proceso σ_t adaptado, tal que*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 \, ds\right)\right) < \infty,$$

entonces X es una martingala.

Ahora procedamos con la demostración de que el proceso $W^{\mu-r}$ es un movimiento Browniano con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

De la fórmula de Itô y (B.1) tenemos

$$dZ_t^{\mu-r} = -Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t. \tag{C.1}$$

Haciendo $K(t) := Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}$ y aplicando nuevamente la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned}
dK(t) &= Z_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} + W_t^{\mu-r}dZ_t^{\mu-r} + dZ_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} \\
&= Z_t^{\mu-r}\left(dW_t + \frac{\mu-r}{\sigma}dt\right) - W_t^{\mu-r}Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t \\
&\quad -Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dt \\
&= Z_t^{\mu-r}\left(1 - W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)\right)dW_t \\
&= Z_t^{\mu-r}dW_t - Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t \\
&= Z_t^{\mu-r}dW_t - K(t)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t.
\end{aligned}$$

Por tanto $K(t)$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}$, porque es suma de dos procesos que son martingala.

En lo que sigue vamos a hacer uso de un resultado auxiliar acerca de esperanzas condicionales, el cual enunciamos aquí

Lema C.3. *Sean μ y ν dos medidas de probabilidad definidas en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que $d\nu(w) = f(w)d\mu(w)$ para alguna función integrable f. Denotemos con $\mathbb{E}_\nu$ y $\mathbb{E}_\mu$ las esperanzas con respecto a las medidas ν y μ respectivamente. Sea también X una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que*

$$\mathbb{E}_\nu\left[|X|\right] = \int_\Omega |X(w)|f(w)d\mu(w) < \infty,$$

y sea $\mathcal{H}$ una sub σ-algebra, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{E}_\nu[X|\mathcal{H}] \cdot \mathbb{E}_\mu[f|\mathcal{H}] = \mathbb{E}_\mu[fX|\mathcal{H}] \qquad \text{c.s.}$$

Vamos a denotar por $\mathbb{E}^{\mu-r}$ la esperanza con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$, entonces por el Lema C.3, para $s < t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mu-r}[W_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s] &= \frac{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}[K(t)|\mathcal{F}_s]}{Z_s^{\mu-r}} \\ &= \frac{K(s)}{Z_s^{\mu-r}} = W_s^{\mu-r} \qquad \text{c.s.} \end{aligned}$$

lo cual muestra que $W_t^{\mu-r}$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$.

De manera análoga, vamos a demostrar que $((W_t^{\mu-r})^2 - t)_{0\le t\le T}$ es una martingala. Primero observemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} d((W_t^{\mu-r})^2 - t) &= d(W_t^{\mu-r})^2 - dt \\ &= W_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} + dW_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r} + dW_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} - dt \\ &= 2W_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} + dt - dt \\ &= 2W_t^{\mu-r}dW_t^{\mu-r} \\ &= 2W_t^{\mu-r}dW_t + 2W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dt. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Entonces poniendo $H(t) = Z_t^{\mu-r}((W_t^{\mu-r})^2 - t)$, y al considerar (C.2) y (C.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
dH(t) &= d(Z_t^{\mu-r}[(W_t^{\mu-r})^2 - t]) \\
&= Z_t^{\mu-r} \cdot d((W_t^{\mu-r})^2 - t) + ((W_t^{\mu-r})^2 - t)dZ_t^{\mu-r} + d((W_t^{\mu-r})^2 - t) \cdot dZ_t^{\mu-r} \\
&= Z_t^{\mu-r}(2W_t^{\mu-r}dW_t + 2W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dt) \\
&\quad -((W_t^{\mu-r})^2 - t)Z_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t \\
&\quad -2Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dt \\
&= Z_t^{\mu-r}\left(2W_t^{\mu-r} - ((W_t^{\mu-r})^2 - t)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)\right)dW_t \\
&= 2Z_t^{\mu-r}W_t^{\mu-r}dW_t - Z_t^{\mu-r}((W_t^{\mu-r})^2 - t)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t \\
&= 2K(t)dW_t - H(t)\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)dW_t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema C.3, para $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mu-r}[(W_t^{\mu-r})^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \frac{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}((W_t^{\mu-r})^2 - t)|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[Z_t^{\mu-r}|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}[H(t)|\mathcal{F}_s]}{Z_s^{\mu-r}} \\
&= \frac{H(s)}{Z_s^{\mu-r}} = (W_s^{\mu-r})^2 - s \qquad \text{c.s.}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

lo cual muestra que $((W_t^{\mu-r})^2 - t)_{0\le t\le T}$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}^{\mu-r}$. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Levy (ver teorema E.7 en el apéndice E), si el proceso $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{0\le t\le T}$ es una martingala continua con la propiedad (C.3), entonces el proceso $W^{\mu-r} = (W_t^{\mu-r})_{0\le t\le T}$ es un movimiento Browniano. Es decir,

$$\text{Ley}(W^{\mu-r}|\mathbf{P}^{\mu-r}) = \text{Ley}(W|\mathbf{P}). \tag{C.4}$$

Apéndice D

Distribución del máximo y mínimo del proceso $\{\sigma W_t + \mu t\}_{0\leq t\leq T}$

El siguiente resultado sobre la distribución del proceso $\{\sigma W_t + \mu t\}_{0\leq t\leq T}$ es muy conocido.

Lema D.1. *Para* $x \geq 0$ *y* $\mu \in \mathbb{R}$*,*

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x/\sigma^2}\Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{D.1}$$

y

$$\mathbf{P}\left(\min_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x/\sigma^2}\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{D.2}$$

donde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy.$$

Demostración. La demostración de la relación D.1 se hará por medio del *cambio de medida*

$$\mathbb{E}\rho\left[\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s), \sigma W_t + \mu t\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right\}\rho\left(\max_{s\leq t}\sigma W_s, \sigma W_t\right)\right],$$

donde $\rho(x,y) \geq 0$, y el principio de reflección del movimiento Browniano para el cual, para $x \in \mathbb{R}$, el proceso

$$\sigma\widetilde{W}_t = \begin{cases} \sigma W_t, & t \leq \tau_x, \\ 2x - \sigma W_t, & t > \tau_x, \end{cases}$$

donde $\tau_x = \text{ínf}\,\{t \geq 0 : \sigma W_t \geq x\}$, es un movimiento Browniano también.

Tomando en cuenta que $\{\sigma W_t + \mu t > x\} \subset \{\text{máx}_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) > x\}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) \leq x\right) \\
&\quad = 1 - \mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) > x, \sigma W_t + \mu t \leq x\right) \\
&\qquad\qquad - \mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) > x, \sigma W_t + \mu t > x\right) \\
&\quad = \mathbf{P}\left(\sigma W_t + \mu t \leq x\right) - \mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) > x, \sigma W_t + \mu t \leq x\right) \qquad \text{(D.3)}
\end{aligned}$$

Ahora, como T_x es lo mismo para W y $\widetilde{W}$, si $\text{máx}_{s\leq t}\,\sigma\widetilde{W}_s > x$, entonces $\tau_x < t$. Tomando en cuenta esta observación procedamos con el cálculo del segundo término en (D.3),

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(\sigma W_s + \mu s) > x, \sigma W_t + \mu t \leq x\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right\} I\left(\max_{s\leq t}\sigma W_s > x, \sigma W_t \leq x\right)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\mu}{\sigma}\widetilde{W}_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right\} I\left(\max_{s\leq t}\sigma\widetilde{W}_s > x, \sigma\widetilde{W}_t \leq x\right)\right] \\
&\quad = e^{2\mu x/\sigma^2}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right\} I\left(\max_{s\leq t}\sigma W_s > x, \sigma W_t > x\right)\right] \\
&\quad = e^{2\mu x/\sigma^2}\mathbf{P}\left(\sigma W_t - \mu t \geq x\right), \qquad \text{(D.4)}
\end{aligned}$$

donde esta última igualdad se obtuvo del hecho $\{\sigma W_t > x\} \subset \{\text{máx}_{s\leq t}\,\sigma W_s > x\}$.

De esta forma, tomando en cuenta (D.3) y (D.4) obtenemos la expresion en (D.1). Procediendo de manera análoga se obtiene (D.2). $\square$

Apéndice E

Cálculo estocástico de Itô

En esta sección se da un breve resumen sobre integración estocástica. Primero se introduce la noción clásica de la integral estocástica de Itô con respecto al movimiento Browniano (es decir, un proceso de Wiener). Después se estudia la fórmula fundamental del cálculo estocástico que es la fórmula de Itô junto con sus aplicaciones más importantes, entre ellas la caracterización de Levy del movimiento Browniano.

Movimiento Browniano

Consideremos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$.

Definición E.1. *Un proceso W con trayectorias continuas, $\mathcal{F}$-adaptado, con $W_0 = 0$ definido en un espacio de probabilidad filtrado, es llamado movimiento Browniano estándar con respecto a la filtración $\mathcal{F}$ si, para $u \leq t \leq T$, el incremento $W_t - W_u$ es independiente de la σ-algebra $\mathcal{F}_u$, y la distribución de probabilidad de $W_t - W_u$ es Gausiana, con media 0 y varianza $t - u$.*

Vamos a describir las propiedades más importantes del movimiento Browniano. Primero, el movimiento Browniano es una martingala continua con respecto a la filtración $\mathcal{F}$, en efecto, $\mathbb{E}_p\left[|W_t|\right] < \infty$ y

$$\mathbb{E}_p\left[W_t|\mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}_p\left[W_t - W_u|\mathcal{F}_u\right] + \mathbb{E}_p\left[W_u|\mathcal{F}_u\right] = W_u, \qquad u \leq t \leq T. \tag{E.1}$$

Otra de las propiedades del movimiento Browniano es que posee trayectorias de variación infinita en cualquier intervalo abierto, así la teoría de integración clásica de Lebesgue Stieltjes no puede ser aplicada para definir una integral de un proceso estocástico con respecto al movimiento Browniano. Finalmente W es un proceso de variación cuadrática, como se muestra en el siguiente resultado

Proposición E.1. *Para todo* $0 \leq u \leq t \leq T$ *y una suceción arbitraria* $\{\mathcal{T}^n\}$ *de particiones finitas* $\mathcal{T}^n = \{t_0^n = u < t_1^n < \cdots t_n^n = t\}$ *del intervalo* $[u,t]$ *que satisface* $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{T}^n) = 0$*, donde*

$$\delta(\mathcal{T}^n) = \max_{k=0,\cdots,n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n), \tag{E.2}$$

se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}) = t - u, \tag{E.3}$$

donde la convergencia en (E.3) es en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R})$.

Integral de Itô

Sea W un movimiento Browniano estándar definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$. Vamos a introducir la integral estocástica de Itô como una isometría I de un cierto espacio $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}^2(W)$ de procesos estocásticos en el espacio $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ de variables aleatorias cuadrado integrables y $\mathcal{F}_T$-medibles. Denotemos con

$\mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$ la clase de aquellos procesos estocásticos progresivamente medibles γ definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbf{P})$ con

$$\|\gamma\|^2_W \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_p\left[\int_0^T \gamma_u^2 du\right] < \infty. \tag{E.4}$$

También, sea $\mathcal{K}$ el espacio de *procesos elementales*, esto es, procesos de la forma

$$\gamma(t) = \gamma_{-1} I_0 + \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j \mathrm{I}_{(t_j, t_{j+1})}(t), \qquad \forall t \in [0, T], \tag{E.5}$$

donde $0 = t_0 \le t_1 < \cdots < t_m = T$, las variables aleatorias γ_j, son $\mathcal{F}_{t_j}$-medibles $j = 0, \ldots, m-1$ y uniformemente acotadas, y la variable aleatoria γ_{-1} es $\mathcal{F}_0$ medible. Para cualquier proceso $\gamma \in \mathcal{K}$ la *integral estocástica de Itô* $\hat{I}_T(\gamma)$ con respecto a W sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$ se define por la fórmula

$$\hat{I}_T(\gamma) = \int_0^T \gamma_u dW_u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}). \tag{E.6}$$

Similarmente, la integral estocástica de Itô de γ con respecto de W sobre cualquier subintervalo $[0, t]$, donde $t \le T$, está definida como

$$\hat{I}_t(\gamma) = \int_0^t \gamma_u dW_u \stackrel{\text{def}}{=} \hat{I}_T(\gamma \mathrm{I}_{[0,t]}) = \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}), \tag{E.7}$$

donde $x \wedge y$ =min$\{x, y\}$. Es fácil ver que para cualquier proceso $\gamma \in \mathcal{K}$, la integral de Itô $I_t(\gamma)$, $t \in [0, T]$ es una martingala continua en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbf{P})$, esto es, $\mathbb{E}_p[I_t(\gamma)|\mathcal{F}_u] = I_u(\gamma)$ para $u \le t \le T$.

Lema E.2. *La clase $\mathcal{K}$ es un subconjunto de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$, y*

$$\mathbb{E}_p\left[\int_0^T \gamma_u dW_u\right]^2 = \|I_T(\gamma)\|^2_{L^2} = \|\gamma\|^2_W \tag{E.8}$$

para cualquier proceso γ de $\mathcal{K}$. El espacio $\mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$ de procesos estocásticos progresivamente medibles, equipados con la norma $\|\cdot\|_W$ es un espacio lineal, normado y completo, *esto es, un espacio de Banach. Además, la clase $\mathcal{K}$ de procesos estocásticos elementales es un subespacio lineal y denso de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$.*

Por el Lema E.2, la isometria $\hat{I}_T : (\mathcal{K}, \|\cdot\|_W) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ puede ser extendida a una isometria $I_T : (\mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W), \|\cdot\|_W) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Esto permite la siguiente definición.

Definición E.2. *Para cualquier proceso $\gamma \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$, la variable aleatoria $I_T(\gamma)$ es llamada la integral estocástica de Itô de γ con respecto a W sobre $[0, T]$, la cual se denota por $\int_0^T \gamma_u dW_u$.*

Más generalmente, para $\gamma \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$ y $t \in [0, T]$ se define

$$I_t(\gamma) = \int_0^t \gamma_u dW_u \stackrel{\text{def}}{=} I_T(\gamma \mathrm{I}_{[0,t]}), \tag{E.9}$$

así que la integral estocástica de Itô $I_t(\gamma)$ es un proceso estocástico bien definido. El siguiente resultado define las propiedades más importantes de este proceso. Por $\langle I(\gamma) \rangle$ denotamos el proceso estocástico dado por la fórmula

$$\langle I(\gamma) \rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_o^t \gamma_u^2 \, du, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{E.10}$$

Proposición E.3. *Para cualquier proceso $\gamma \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{P}}(W)$, la integral estocástica de Itô $I_t(\gamma)$ es una martingala continua cuadrado integrable en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbf{P})$. Además el proceso*

$$(I_t(\gamma))^2 - \langle I(\gamma) \rangle_t, \qquad \forall t \in [0, T], \tag{E.11}$$

es una martingala continua en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbf{P})$.

Recordemos que un proceso M es una martingala local si existe una sucesion creciente de tiempos de paro tal que τ_n tiende a T c.s. y para cada n el proceso M^n, dado por la fórmula

$$M_t^n = \begin{cases} M_{t \wedge \tau_n(w)}(w) & \text{si } \tau_n(w) > 0, \\ 0 & \text{si } \tau_n(w) = 0, \end{cases} \tag{E.12}$$

es una martingala uniformemente integrable.

Entonces en un contexto más general, si M es una martingala local continua, denotemos con $\langle M \rangle$ al único proceso continuo, creciente y adaptado, que se anula en el cero tal que hace al proceso $M^2 - \langle M \rangle$ una martingala. El proceso $\langle M \rangle$ es referido como la variación cuadrática de M.

Es posible extender la definición de la integral estocástica de Itô a la clase de procesos progresivamente medibles γ tales que

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \gamma_u^2 \, du < \infty\right\} = 1. \tag{E.13}$$

En este caso, la integral estocástica de Itô, $I(\gamma)$, es una martingala local continua en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$.

Procesos de Itô

Definición E.3. *Un proceso continuo y adaptado X es un proceso de Itô si admite la representación*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u \, du + \int_0^t \beta_u \, dW_u, \qquad \forall t \in [0, T], \tag{E.14}$$

para procesos adaptados α, β definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$.

En notación diferencial (E.14) se escribe como

$$dX_t = \alpha_t \, dt + \beta_t \, dW_t. \tag{E.15}$$

Teorema E.4 (Fórmula de Itô.). *Supóngamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2. Entonces para cualquier proceso de Itô X, el proceso $Y_t = g(X_t)$, $t \in [0, T]$, es también un proceso de Itô, cuya representación en forma diferencial esta dada por*

$$dY_t = g_x(X_t) dX_t + \frac{1}{2} g_{xx}(X_t) \tag{E.16}$$

Definición E.4. *Un proceso estocástico con valores en* $\mathbb{R}^d$ $W = (W^1, \ldots, W^d)$ *definido en un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ *es un movimiento Browniano estándar* d*-dimensional si* $W^1, W^2, \ldots, W^d$ *son movimientos Brownianos estándar mutuamente independientes*

Sea γ un proceso adaptado con valores en $\mathbb{R}^d$ que satisface la siguiente condición

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T |\gamma_u|^2 \ du < \infty\right\} = 1, \tag{E.17}$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^d$. Entonces la integral estocástica de Itô de γ con respecto a W es

$$I_t(\gamma) = \int_0^t \gamma_u \cdot dW_u = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \gamma_u^i \, dW_u^i, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{E.18}$$

Sea $X = (X^1, X^2, \ldots, X^k)$ un proceso k-dimensional tal que

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \alpha_u^i \, du + \int_0^t \beta_u^i \cdot dW_u, \tag{E.19}$$

donde α^i son procesos adaptados real valuados, y β_u^i son procesos $\mathbb{R}^d$-valuados para $i = 1, 2, \ldots, k$. Para X^1 y X^2 procesos de Itô dados por (E.19), el proceso covariación cuadrática está dado por

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \int_0^t \beta_u^1 \beta_u^2 \, du, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{E.20}$$

Proposición E.5. *Supóngase que* $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *es una función de clase* C^2*. Entonces la siguiente forma de la fórmula de Itô es valida*

$$dg(X_t) = \sum_{i=1}^{k} g_{x_i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} g_{x_i x_j}(X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t. \tag{E.21}$$

Un caso especial de la fórmula de Itô, conocido como fórmula de integración por partes, se obtiene al considerar la función $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$*.*

Corolario E.6. *Supóngase que X^1, X^2 son procesos de Itô real valuados dados por (E.19). Entonces la siguiente fórmula de integración por partes es valida*

$$X_t^1 X_t^2 = X_0^1 X_0^2 + \int_0^t X_u^1 \, dX_u^2 + \int_0^t X_u^2 \, dX_u^1 + \langle X^1, X^2 \rangle_t. \tag{E.22}$$

Teorema E.7. [Teorema de Caracterización de Lévy] *Supóngase que M es una martingala continua en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbf{P})$tal que $M_0 = 0$, y el proceso $M_t^2 - t$ es una martingala, esto es*

$$\mathbb{E}_p \left[M_t^2 - M_u^2 | \mathcal{F}_u \right] = t - u, \qquad \forall u \le t \le T. \tag{E.23}$$

Entonces M es un movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbf{P})$.

Teorema E.8. *Sea W un movimiento Browniano d-dimensional en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbf{P})$. Supóngase que γ es un proceso adaptado con valores en $\mathbb{R}^d$ tal que*

$$\mathbb{E}_p \left[\mathcal{E} \left(\int_0^{\cdot} \gamma_u \cdot \, dW_u \right) \right] = 1. \tag{E.24}$$

Se define $\tilde{\mathbb{P}}$ una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ equivalente a $\mathbb{P}$ por medio de la derivada de Radon Nikodým

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_T \left(\int_0^{\cdot} \gamma_u \cdot \, dW_u \right), \qquad \mathbb{P} \text{ - c.s.} \tag{E.25}$$

Entonces el proceso $\widetilde{W}$, dado por la fórmula

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma_u \, du, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{E.26}$$

es un movimiento Browniano estándar d-dimensional con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}$.

Bibliografía

[1] Soren Asmussen, Florin Avram, and Martijn R. Pistotius. Russian and american put options under exponential phase-type lévy models.

[2] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] Fima C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus With Aplications*. Imperial College Press, London, 1999.

[4] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations, An introduction with applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[5] L.A. Shepp and A.N. Shiryaev. A new look at the russian option". *Theory Probab. Appl.*, 39, No. 1:103–119, 1994.

[6] A.N. Shiryaev, Yu. M. Kabanov, O. D. Kramkov, and A. V. Melnikov. Toward the theory of pricing of options of both european and american types I. discrete time. *Theory Probab. Appl.*, 39, No. 1:14–60, 1994.

[7] A.N. Shiryaev, Yu. M. Kabanov, O. D. Kramkov, and A. V. Melnikov. Toward the theory of pricing of options of both european and american types II. continuous time. *Theory Probab. Appl.*, 39, No. 1:61–102, 1994.