



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Respuesta electromagnética efectiva no local de
sistemas coloidales turbios:
teoría y experimento”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

ALEJANDRO REYES CORONADO

DIRECTOR DE TESIS: DR. RUBÉN GERARDO BARRERA PÉREZ

CO-DIRECTOR DE TESIS: DR. AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. ROLANDO CASTILLO CABALLERO



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Respuesta electromagnética efectiva no local
de sistemas coloidales turbios:
teoría y experimento

Alejandro Reyes Coronado

2007

Agradecimientos

Como es bien sabido, todo lo que existe y no existe se puede dividir en físicos y no físicos ... En la realización de este trabajo de tesis estuvieron involucradas muchísimas personas, físicos y no físicos, a las cuales agradezco sinceramente. Es común que en una lista de este estilo hayan omisiones involuntarias, sin embargo correré el riesgo, esperando el *milagro* de que esta ocasión sea la excepción ...

Dentro del conjunto de cardinalidad finita de los físicos, agradezco sinceramente a los doctores: Rubén Barrera, Augusto García Valenzuela, Felipe Pérez, Luis Mochán, Peter Halevi, Eugenio Méndez, Fernando Curiel, Manuel Coronado, Lucía Hernández, Héctor Hernández y en especial al Dr. Chunga.

Dentro del conjunto de los no físicos, cuya cardinalidad es desconocida, se encuentran mi queridísima esposa Mukuy-kaak, mi mamá: La Cuquis, mis abuelos: Abi Dotor y Abi Cuca, los tíos, primos y sobrina, compañeros y amigos. Agradezco muy en especial a mi pececito Cleo (en paz descanse) por sus incontables horas en respetuoso y permanente silencio, escuchando mis lamentos!

Agradezco también la beca de doctorado otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, así como a la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme crecer junto con ella todos estos años mozos.

Índice

Resumen	7
Abstract	13
Prólogo	19
Introducción	27
Capítulo 1: Respuesta electromagnética de un sistema coloidal: usando un método alternativo novedoso	39
1.1 Cálculo de la respuesta efectiva de un sistema coloidal	42
1.1.1 Caso de una partícula	43
1.1.2 Caso de N partículas	46
1.1.3 Promedio Configuracional	48
1.1.4 Aproximación de campo efectivo	51
1.1.5 Esquema $L - T$	54
1.1.6 Cálculo de las componentes longitudinal y transversal de la matriz T	56
1.2 Funciones dieléctricas de los materiales reales considerados	77
1.3 Análisis numérico de las expresiones de las funciones respuesta efectivas no locales	78
1.4 Relación de dispersión e índice de refracción efectivo no local	84
1.5 Solución exacta de la relación de dispersión y diferentes aproximaciones	86
1.6 Análisis numérico del índice de refracción efectivo no local	88
1.7 Esquema tradicional	90
Capítulo 2: Medición de un índice de refracción no local	97
2.1 Medición de un índice de refracción efectivo no local: reflexión <i>vs</i> refracción	98
2.2 Método del prisma coloidal	100
2.3 Arreglo experimental y resultados	107
Capítulo 3: Conclusiones	119
Capítulo 4: Perspectivas	123
4.1 Análisis del transporte de energía en medios coloidales	124
4.2 Reflexión de una interfaz plana medio homogéneo-coloidal	126
4.3 Límite local de las funciones respuesta efectivas no locales	127
4.4 Espectroscopía de Onda Coherente	128
4.5 Extensión a coloides más densos: Aproximación Cuasi-Cristalina	131
Apéndice A	135
Apéndice B	141
Apéndice C	167

Apéndice D	181
Apéndice E	195
Apéndice F	207
Bibliografía	211
Agradecimientos	219

Resumen

En esta tesis de doctorado teórico-experimental estudio la respuesta electromagnética de bulto de sistemas coloidales constituidos por partículas esféricas idénticas, polarizables y no magnéticas, embebidas en el vacío y distribuidas al azar. En este trabajo el tamaño de las esferas no está restringido a ser pequeño en comparación a la longitud de onda del haz incidente y estoy empleando un enfoque de medio efectivo para la descripción de la propagación de la componente coherente (promedio) del haz a través del medio inhomogéneo. En la parte de teoría, el sistema coloidal es caracterizado por medio de funciones respuesta efectivas, las cuales presentan una no localidad espacial por lo que no pueden ser utilizadas en las ecuaciones usuales de la electrodinámica continua (local), en particular en las fórmulas para la amplitudes de reflexión y transmisión dadas por las relaciones de Fresnel. El método que presento en esta tesis para la determinación de dichas funciones respuesta, representa una nueva idea alternativa basada en el cálculo del operador de conductividad efectiva no local. El ingrediente esencial de esta idea es el cálculo de la densidad *total* de corriente inducida en el sistema. Por *total* quiero indicar que todas las corrientes inducidas por todos los posibles mecanismos son consideradas, es decir, no sólo las de conducción y polarización sino también aquellas que dan origen al magnetismo. En este método, la relación entre la densidad total de corriente inducida y el campo eléctrico promedio (coherente) está dada en términos del llamado tensor de conductividad generalizada efectiva, o equivalentemente en términos del operador de transición T (o bien matriz T , término más conocido en teoría de esparcimiento). El término *generalizada* indica que se está considerando la densidad total de corriente inducida en el sistema. Ambos operadores son proporcionales entre sí, por lo que satisfacen la ecuación integral conocida como de *Lippmann-Schwinger*. Después calculo el promedio de la densidad total de corriente inducida realizando un promedio configuracional asumiendo que el sistema es en promedio homogéneo e isotrópico, y utilizando la aproximación conocida en teoría de esparcimiento como aproximación de campo efectivo. En este caso el tensor de conductividad efectiva no local, o la matriz T , del sistema coloidal resulta ser proporcional al correspondiente a una sola partícula esférica multiplicada por la fracción volumétrica de llenado. Dado que el sistema en estudio es, en promedio, homogéneo e isotrópico, la respuesta electromagnética puede ser escrita en términos de solamente las componentes longitudinal y transversal del tensor de conductividad efectiva no local, o las componentes correspondientes de la matriz T . Utilizando un procedimiento análogo en esencia al empleado por Mie para resolver el problema de esparcimiento de una sola

partícula esférica en presencia de un campo electromagnético incidente, es posible calcular las componentes longitudinal y transversal de ambos operadores. La única diferencia entre el cálculo de Mie y el nuestro, es que en nuestro caso la onda plana incidente que excita a la partícula coloidal no es una onda electromagnética libre, sino una onda generada por fuentes externas; en este sentido se puede variar de manera independiente la magnitud del vector de onda y la frecuencia. Entonces, en nuestros cálculos se tienen que incluir las contribuciones no triviales de dichas fuentes externas. Usando este procedimiento alternativo, fue posible calcular las componentes longitudinal y transversal de los operadores respuesta, sin tener que resolver la ecuación integral no trivial de Lippmann-Schwinger.

A partir de las expresiones analíticas de las componentes del operador dieléctrico efectivo generalizado no local, es posible definir un tensor dieléctrico efectivo generalizado no local equivalente, y aquí presento un análisis numérico de su dependencia con el vector de onda y la frecuencia, utilizando parámetros correspondientes a materiales reales en el intervalo de frecuencias correspondientes al óptico. Los materiales que estudié fueron tanto metales nobles: oro y plata; como aislantes: poliestireno y dióxido de titanio. Posteriormente, calculo las relaciones de dispersión tanto para los modos longitudinales como para los transversales. Resolviendo la relación de dispersión para los modos transversales calculo el índice de refracción efectivo dependiente de la frecuencia. La solución exacta para el índice de refracción efectivo lo comparo con la solución de la relación de dispersión utilizando tres aproximaciones conocidas: límite de onda larga, cuadrática y cono de luz; presentando un análisis numérico de la dependencia con la frecuencia para los materiales reales antes mencionados. Reconociendo el origen no local de los índices de refracción efectivos calculados, es posible explicar las inconsistencias encontradas en algunos artículos, en donde hacen uso de estos índices suponiéndolos locales. Cabe señalar que en la ventana de frecuencias correspondientes al óptico, utilizadas para el análisis numérico, no encontré ninguna solución a la relación de dispersión para los modos longitudinales.

Tradicionalmente, la respuesta electromagnética de un sistema inhomogéneo está dada en términos de su función dieléctrica efectiva y su permeabilidad magnética efectiva, en vez de las componentes del tensor dieléctrico efectivo generalizado. En esta tesis presento la equivalencia de ambos enfoques y presento un análisis de cálculos específicos de la función dieléctrica efectiva y de la permeabilidad magnética efectiva, junto con el correspondiente análisis numérico. Dado que ambos esquemas están relacionados entre sí, podemos

pasar de uno a otro sin perder información sobre sistema.

Es importante señalar que en la parte teórica de esta tesis, publicada recientemente, se calculan las dos funciones respuesta efectivas no locales (la función dieléctrica y la permeabilidad magnética) que caracterizan completamente la propagación del haz coherente a través del medio coloidal, y no sólo se calcula el índice de refracción efectivo. Esto es muy importante si se quieren estudiar fenómenos como el transporte de energía dentro del sistema coloidal o si se quiere estudiar el fenómeno de reflexión por una interfaz medio homogéneo-coloides, problemas que discuto al final de esta tesis.

Una de las aproximaciones con la que resuelvo la relación de dispersión de los modos transversales, a la que denominamos cono de luz, consiste en igualar el vector de onda en las funciones respuesta al cociente de la frecuencia entre la velocidad de la luz, y entonces resolver la relación de dispersión. También muestro que la expresión para el índice de refracción efectivo que se obtiene con esta aproximación es exactamente la misma que la fórmula propuesta por van de Hulst hace algún tiempo. Este índice de refracción efectivo ha sido utilizado comúnmente en teoría de medio efectivo. Ahora sabemos que en realidad la fórmula de van de Hulst es una buena aproximación al índice de refracción que se obtiene resolviendo en forma exacta la relación de dispersión de los modos transversales. Se han encontrado en la literatura artículos en donde se interpretan experimentos de reflexión utilizando, para el coloides, un índice de refracción efectivo como el propuesto por van de Hulst, y sustituyéndolo en las fórmulas de Fresnel como si fuera un índice de refracción local. Sin embargo, ahora reconocemos el origen no local de estos índices de refracción, por lo que no es posible utilizarlos en experimentos de reflexión haciendo uso de las relaciones de Fresnel, válidas sólo para respuestas locales. Al respecto, junto con el grupo de trabajo dentro del cual realicé esta tesis, publicamos recientemente un artículo en donde se provee evidencia de que efectivamente no es posible utilizar el índice de refracción de van de Hulst en las fórmulas de Fresnel para interpretar mediciones de reflectancia de un sistema coloidal. Debido a las dificultades conceptuales presentadas en la interpretación de experimentos de reflexión, se diseñó un experimento utilizando el fenómeno de refracción para medir el índice de refracción efectivo de un sistema coloidal ópticamente turbio. El método consiste en medir el ángulo de refracción y la transmitancia de un haz láser que atraviesa un prisma hueco lleno con el sistema coloidal. El coloides está constituido por partículas de poliestireno disueltas en agua desionizada y los experimentos se repitieron para tres tamaños de partícula diferente. Para poder relacionar

las mediciones con el índice de refracción efectivo desarrollé una generalización de la Ley de Snell que toma en cuenta la geometría del prisma y el hecho de tener un índice de refracción complejo. El índice de refracción así medido lo comparo con el índice de van de Hulst, mostrando un buen acuerdo entre teoría y experimento. De esto concluimos que el índice de refracción efectivo de van de Hulst también se puede emplear para describir las propiedades de propagación de la luz en sistemas coloidales con inclusiones grandes. Analizando la sensibilidad del experimento, muestro que es posible emplear este método para la caracterización de sistemas coloidales, pudiendo determinar tanto el índice de refracción de las inclusiones así como su radio, lo que es de gran interés desde el punto de vista tecnológico. Esta parte experimental de la tesis también fue publicada recientemente.

Abstract

In this theoretical-experimental PhD thesis I study the bulk electromagnetic response of colloidal systems made of identical spherical particles, polarizable and nonmagnetic, embedded in vacuum and located at random. In this work the size of the spheres is not restricted to be small in comparison with the wavelength of the incident beam, and I use an effective medium approach to describe the propagation of the coherent (average) component through the inhomogeneous system. In the theoretical part the colloidal system is characterized by effective response functions that turned out to be spatially nonlocal, thus we conclude that they cannot be used in the usual equations of continuum (local) electrodynamics, in particular on regard to the reflection and transmission amplitudes given by the well-known Fresnel relations. The method that I present in this thesis for the determination of such response functions, is a new alternative idea based on the calculation of the nonlocal effective conductivity tensor. The essential ingredient of this idea is the calculation of the average of the total current density induced within the system. By *total* I mean all the currents induced by all possible mechanisms, that is, not just the conduction and polarization currents but also those which are usually regarded as the sources of a magnetic response. In this method, the relation between the total induced current density and average (coherent) electric field is given in terms of the so-called *generalized* effective conductivity tensor, or equivalently in terms of the transition operator T (also known as T matrix in scattering theory). The term *generalized* indicates that we are considering the total current density induced within the system. Both operators are proportional to each other, and they satisfy an integral equation of the Lippmann-Schwinger type. I calculate the average of the total induced current density by performing a configurational average assuming that the system is on the average homogeneous and isotropic, and using the approximation known in scattering theory as the Effective Field Approximation. In this case the nonlocal effective conductivity tensor, or the T matrix, of the colloidal system turns out to be proportional to the one corresponding to an isolated spherical particle times its filling fraction. Since the system under study is, on the average, homogeneous and isotropic, the electromagnetic response can be written in terms of only the longitudinal and transverse components of the nonlocal effective conductivity tensor, or the corresponding components of the T matrix. Using a procedure analogous, in essence, to the one used by Mie to solve the scattering problem of an isolated sphere, it is possible to calculate these longitudinal and transverse components. The only difference between the Mie calculation and ours, is that in

our case the incident plane wave that excites the colloidal particle is not a free electromagnetic wave, but is rather a plane wave generated by external sources; in this way one can vary independently the magnitude of the wave vector and the frequency. Therefore, in our calculation one has to include the non-trivial contributions due to the external sources. Using this alternative procedure, it was possible to calculate the longitudinal and transverse components of the response operators, without having to solve the non-trivial Lippmann-Schwinger integral equation.

From the analytical expressions of the components of the nonlocal generalized effective conductivity tensor one can define an equivalent nonlocal generalized effective dielectric tensor, and here I present a numerical analysis of its dependence with the wave vector and the frequency, using parameters which correspond to real materials in the range of optical frequencies. The materials that I studied were noble metals as: gold and silver; and also insulators: polystyrene and titanium dioxide. Subsequently, I calculated the dispersion relations for both, the longitudinal and transverse modes. Solving the dispersion relation for the transverse modes I calculated the effective refractive index which depends only on the frequency. I compare the exact solution for the effective refractive index with the corresponding solution of the dispersion relation using three different approximations: long-wavelength limit, quadratic approximation and light-cone approximation; displaying the results of a numerical analysis on their dependence on frequency for the real materials mentioned above. Recognizing the nonlocal origin of the calculated effective refractive indices, it is possible to explain the inconsistencies found in some articles, that use some of these approximations for the effective index of refraction as if they were local. I also point out that in the window of optical frequencies, used for the numerical analysis, I did not find any solution to the dispersion relation for longitudinal modes.

Traditionally, the electromagnetic response of an inhomogeneous system is given in terms of its effective dielectric function and its effective magnetic permeability, instead of the components of the generalized effective dielectric tensor. Therefore, in this thesis I show the equivalence of both approaches and display results of specific calculations of the effective dielectric function and the effective magnetic permeability, together with the corresponding numerical analysis. Since both schemes are related to each other, one can pass from one to the other without losing any information about the electromagnetic response of the system.

It is important to point out that in the theoretical part of this thesis,

recently published, we calculate the two nonlocal effective response functions (dielectric function and magnetic permeability) that completely characterize the propagation of the coherent beam through the colloidal medium, and we do not just calculate the effective index of refraction. This is very important if one wants to study the phenomenon of energy transport within the colloidal system or the phenomenon of reflection by a plane interface bounding the colloidal system. These problems are discussed at the end of this thesis.

One of the approximations used to solve the dispersion relation of the transverse modes, denoted as light-cone approximation, consist to set the wave vector in the response functions equal to the quotient of the frequency divided by the speed of light, and then solve the dispersion relation. We also show that the expression for the effective index of refraction obtained within this approximation is exactly the same as the formula proposed by van de Hulst long time ago. We also point out that this effective refractive index, has been commonly used in effective-medium theory. Now, we realize that van de Hulst formula is indeed a good approximation to the effective refractive index obtained by solving exactly the dispersion relation for the transverse modes. We have found in the literature some articles in which reflection experiments with colloidal samples are interpreted using, for the colloid, an effective index of refraction like the one proposed by van de Hulst, and then substituting it in the Fresnel formulas like if it were a usual local index of refraction. However, now we recognize the nonlocal origin of these refractive indices, and realize that it is not possible to interpret reflection experiments using them in Fresnel relations like if they were local. On this respect, and with the collaboration of some members of the group in which I made this thesis, we published recently an article in which we provided experimental evidence that it is indeed not possible to use van de Hulst' effective refractive index in the Fresnel formulas to interpret reflectance measurements from a colloidal system. Therefore, due to the conceptual difficulties for the interpretation of reflection experiments, we design an experiment that uses the phenomenon of light refraction to measure the effective refractive index of an optically turbid colloidal system. The method consist in measuring the angle of refraction and the transmittance of a laser beam that traverses a hollow prism filled with the colloidal sample. The colloid is made of polystyrene particles dispersed in deionized water and the experiments were repeated for three different size of the particle. In order to relate the measurements with the effective index of refraction I developed a generalization of the Snell' Law that takes into account the geometry of the prism and the fact that we have

a complex effective index of refraction. The measured index of refraction is compared with the one proposed by van de Hulst, showing a good agreement between theory and experiment. From this we conclude that the van de Hulst' effective index of refraction can be used to describe the propagation properties of light through colloidal systems with big inclusions. Analyzing the sensitivity of the experiment, I show that it is possible to employ this method to characterize the colloidal systems, and to determine both, the index of refraction of the inclusions as well as their radius. This is of great interest from the technological point of view. This experimental part of the thesis was also published recently.

Prólogo: lo que sucede y no se
escribe ...

Al igual que como ocurre con el arte, en donde lo que se observa como resultado final no cuenta la historia de cómo se llegó a ese final y muchas veces la percepción del espectador cambia al conocer dicha historia, el orden de esta tesis no está relacionado a la cronología de las ideas y hechos. Incluso la notación que ahora se lee ha evolucionado respecto a la que se utilizó la mayor parte del tiempo en que estuve haciendo mi doctorado. Esto es evidencia de la rápida evolución de las ideas respecto a un mismo problema e indudablemente fomentadas por la interacción con el *medio ambiente*, que en este caso corresponde a las discusiones académicas entre científicos, ya sea en congresos o en lugares de solaz esparcimiento! La motivación de este prólogo nace de la necesidad de dar a conocer la *historia* de esta tesis con la finalidad de sensibilizar la percepción del lector.

Corría el año de 2003 cuando me incorporé al grupo de trabajo del Dr. Rubén Barrera y el Dr. Augusto García. Llevaban trabajando algunos años en el tema de teoría de medio efectivo en sistemas coloidales turbios, motivados inicialmente por la pregunta del Dr. Augusto sobre cuál sería el índice de refracción de la leche. En el momento de mi incorporación al grupo estaban siendo publicados varios artículos: “*Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach*” [1], “*Electromagnetic response of a random half-space of Mie scatterers within the effective-field approximation and the determination of the effective optical coefficients*” [2], “*Effective electric and magnetic susceptibility of dilute systems of dielectric and metallic Mie particles*” [3] y “*Amperian magnetism in the dynamic response of granular materials*” [4], en los cuales se estudiaban la reflexión y la transmisión de luz en una película de un sistema coloidal en el límite diluido, formado por partículas esféricas embebidas en el vacío, sin ninguna restricción sobre el tamaño de las esferas en comparación a la longitud de onda incidente. Como resultado se tenía que, para describir la reflexión y la transmisión, se necesitaba además de una función dieléctrica efectiva, una función permeabilidad magnética efectiva, incluso considerando que las partículas no eran magnéticas, es decir, caracterizadas por $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. Lo anterior estaba relacionado con el trabajo previo de Bohren [5] en donde él había estudiado la reflexión y la transmisión, para incidencia normal, de una “rebanada” de un sistema coloidal, y había encontrado que se necesitaban dos índices de refracción, uno para la reflexión y otro diferente para la transmisión, o equivalentemente una función dieléctrica y una permeabilidad magnética, lo que atrajo una fuerte controversia al respecto, arguyendo sus críticos que

la aparición de una respuesta magnética era sólo un truco matemático en la descripción del problema y que no tenía realidad física. En los artículos publicados por el grupo de trabajo al cual me incorporé, citados hace unas cuantas líneas, se había encontrado que efectivamente se necesitaban las dos funciones respuesta para caracterizar la reflexión y la transmisión de la luz en una rebanada de sistema coloidal a incidencia normal, que sí tenía realidad física la respuesta magnética y era debida a la inducción de corrientes en las esferas, e incluso ocurría lo mismo si se analizaba el problema para ángulos de incidencia oblicua, aunque se tenía el resultado incómodo de que ambas funciones respuesta efectivas, dieléctrica y permeabilidad magnética, dependían del ángulo de incidencia al igual que de la polarización de la onda incidente. Después de trabajar un poco sobre el problema de la dependencia angular de las funciones respuesta, se descubrió que el problema era realmente un problema con una no localidad espacial y que si uno insistía en tratarlo como un problema local empleando las fórmulas de Fresnel, aparecían dichas dependencias en las funciones respuesta!

Al principio de mi tesis, se planteó resolver las ecuaciones integrales de esparsamiento múltiple bajo la aproximación cuasicristalina para el cálculo de los campos eléctrico y magnético en cualquier punto del espacio, pero en esos momentos yo no entendía ni siquiera la idea del significado de un medio efectivo! Dada la complejidad de la parte matemática, me ocupé primero en entender qué significaba el índice de refracción efectivo y si realmente se podía observar, de donde nació la idea de realizar un experimento para saber si el efecto de las partículas en un índice de refracción efectivo se observaba a simple vista. Para ese momento ya se tenían indicios de cómo entender la no localidad y ya se tenía claro que las funciones respuesta efectivas no se podían utilizar en la electrodinámica continua, en particular las fórmulas de Fresnel, de modo que el experimento que se diseñó fue pensando en la refracción de la luz, lo que involucra únicamente la Ley de Snell. Entonces, se construyó un prisma hueco en el que se depositaba el coloide y la idea del experimento era simple: observar la refracción de la luz producida por el prisma lleno de agua desionizada solamente y luego agregar una pequeña cantidad de partículas de poliestireno, observando si había una refracción extra debida a las esferas. Para mi sorpresa el efecto era fuerte y se apreciaba a simple vista! En esos momentos se planteó un diseño experimental que nos permitiera medir con precisión la refracción extra debida a las partículas. Debido al esparsamiento producido por las partículas se perdía mucha luz del haz coherente convirtiéndose en luz difusa viajando en todas direcciones, por

lo que no podíamos trabajar con altas densidades de esferas en el agua, de modo que se tuvo que trabajar en una esquina del prisma para evitar que el camino óptico dentro de él fuera muy grande y que perdiéramos por completo el haz coherente.

Al mismo tiempo que se desarrollaba la parte experimental se seguía trabajando en la parte teórica del problema y, dada la complejidad del mismo y lo relevante que resultaba el entender con profundidad su esencia, se decidió trabajar con la aproximación de campo efectivo en las ecuaciones integrales de esparcimiento múltiple, la cual es una aproximación más débil que la cuasicristalina, válida únicamente para sistemas coloidales diluidos. Para el tiempo en que se estaba trabajando en la parte experimental en el diseño de un experimento para medir el índice de refracción efectivo de un sistema coloidal turbio, ya se había ideado un método ingenioso para darle la vuelta a las ecuaciones integrales y poder calcular las funciones respuesta efectivas que ahora se reconocían como no locales. La idea era considerar la densidad de corriente inducida en el sistema, la cual, después de realizar un promedio configuracional, depende del operador de transición de una sola partícula y es la misma para cualquier esfera en el coloide. Utilizando en esencia el método empleado por Mie para calcular la respuesta de una sola esfera en presencia de una onda electromagnética libre en el espacio, se calcularon las componentes longitudinal y transversal del operador de transición. La única diferencia no trivial al cálculo de Mie fue que en nuestro caso no teníamos una onda electromagnética libre, sino que la onda incidente era generada por densidades de carga y de corriente externas, de tal modo que el vector de onda se podía variar de forma independiente a la frecuencia de la onda. El cálculo de las componentes del operador de transición tardó algunos meses, pues había que escribir una onda plana en términos de una base esférica, utilizando los armónicos esféricos vectoriales, y realizar algunas integrales no triviales de productos de polinomios asociados de Legendre y de funciones esféricas de Bessel. Después de calcular todas las integrales y de no obtener los casos límite correctos, nos dimos cuenta de que faltaban términos en las expansiones de los campos eléctrico y magnético en términos de la base esférica, relacionados con las fuentes externas, de modo que se tuvieron que corregir los cálculos, tomando algunas semanas más el convencernos que el cálculo era correcto.

Mientras se solucionaban los problemas y se veía la luz en la parte de teoría, la parte experimental ganaba interés e importancia, pues se diseñó un experimento con el cual se pudo medir simultáneamente la parte real e ima-

ginaria del índice de refracción efectivo, medidas que se compararon con el índice de refracción conocido como de van de Hulst, obteniendo un buen acuerdo. Cabe resaltar que las esferas embebidas en agua desionizada, formando el sistema coloidal, no eran pequeñas en comparación a la longitud de onda del haz incidente, de modo que el sistema era ópticamente turbio. Se analizó la sensibilidad del diseño pensando en utilizarlo para resolver el problema inverso, es decir, poder caracterizar un coloide a partir de la refracción del haz coherente y de la transmitancia del haz, obteniendo por ejemplo el índice de refracción de las partículas o el radio. Los resultados del experimento se reportaron en el artículo titulado “*Measurement of the effective refractive index of a turbid colloidal suspension using light refraction*”, publicado en el 2005 en la revista *New Journal of Physics* [6].

Es sabido que la caracterización de coloides es un área de interés de muchas disciplinas: física de la atmósfera, medicina, la industria de pinturas, etc. Por ejemplo, en la industria de pinturas es de fundamental importancia determinar las propiedades de pigmentos, para poder predecir lo que sucederá cuando éstos estén dentro de una pintura, lo que es particularmente difícil para pigmentos que se fabrican en polvo. Pensando en estas posibilidades se montó un experimento diseñado para estudiar las posibilidades de utilizarlo para resolver el problema inverso, considerando que, aparte de proporcionar información sobre el índice de refracción, se podría obtener también la distribución de tamaños de partícula. Se pensó en utilizar el mismo prisma hueco, pero esta vez iluminarlo con muchas longitudes de onda, es decir, utilizar luz blanca, y como detector una CCD que junto con un espectrómetro permitiría repetir el experimento obteniendo información sobre la refracción y la atenuación para muchas longitudes de onda. Actualmente, el experimento sigue siendo analizado conforme se ha ido adquiriendo nuevo equipo y se han ido superando los problemas técnicos que se van presentado.

Los cálculos teóricos finalmente se terminaron consiguiendo que los casos límite, y todas las demás pruebas que diseñamos para convencernos de que los cálculos eran correctos, se reprodujeran satisfactoriamente y se avanzó sustancialmente en el entendimiento de la física detrás de la caracterización de un sistema coloidal turbio por funciones respuesta efectivas no locales. Los resultados de la parte teórica se presentaron en el congreso internacional ETOPIM7 (*Electrical, Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*) que se llevó a cabo en Australia, en donde se encontraban conocidos investigadores de renombre en el área de metamateriales. El trabajo tuvo una muy buena aceptación y al regresar a México decidimos probar suerte y

enviar un artículo corto a la revista *Physical Review Letters* (PRL)¹. Después de un intercambio de impresiones con el editor, el artículo pasó finalmente por tres árbitros, recibándose los siguientes comentarios:

Reporte del árbitro A

«This paper addresses the controversial question of the use of an effective dielectric function for describing the experimental optical properties of scattering media composed of randomly dispersed scatterers.

A very clever and elegant analysis is proposed by the authors. It is made a derivation of a generalized conductivity with very simple assumptions: infinite medium, random dispersion of spheres, no interaction (dilute regime). The dielectric function issued from this calculation exhibits a spatial dispersion characteristic of non-locality. The average value of the dielectric function, traditionally used as an approximation for calculating the optical properties appears to be incorrect. It has to be considered as restricted”. A corrective term related to the spatial dispersion has to be added.

A main issue of this analysis is an alternative description of the non-locality in the framework of the “ $\epsilon - \mu$ scheme”, also proposed by the authors. Within this scheme, it is predicted an effective magnetic response of a colloidal system with nonmagnetic scatterers.

The authors give here the first complete and correct interpretation of this controversial question with great elegance. Moreover, with their “ $\epsilon - \mu$ scheme” representation they open new ways for experiments.

I warmly recommend this manuscript for publication in PRL.»

Reporte del árbitro B

«The problem addressed in this manuscript is an important one: How can one properly describe the coherent propagation of an electromagnetic wave in an inhomogeneous medium when the response is nonlocal, due to the size scale of inhomogeneity as compared to the wavelength? The authors have evidently been working on this problem for some time and have already published a number of papers on some of its aspects (e.g., Refs. 4, 12, 13, 17, 19). What they should now do is write a full length article where their latest work is described in a detailed fashion. In the present manuscript this is not done, mostly due to the length limitations of PRL.

¹Se anexa copia del artículo enviado a *Physical Review Letters*.

In conclusion, there seems to be no urgency to publish this manuscript with the rapid publication schedule of PRL and under its severe length limitations. I think the authors should write a comprehensive, well argued manuscript which could be an expansion of the present one. That could then be published as a regular article in, e.g., PRB or PRE.»

Reporte del árbitro C

«The authors discuss the definition and applicability of an effective electromagnetic response for a infinite system of randomly distributed dielectric spheres which have a radius not small compared to the vacuum wavelength of the incident radiation.

Neglecting the interaction of different spheres, the authors provide an elegant derivation of the effective response function which becomes spatially dispersive due to the non-local response of the finite size individual scatterers.

These findings are important and of interests not only for colloidal systems but also for the metamaterial community where spatial dispersive effective media arise from the finite size of the resonant material constituents becoming comparable with wavelength, in particular for close to optical frequencies.

In my opinion, the authors satisfactorily addressed the questions and criticism of the previous reviewers.

In summary, I recommend publication of the manuscript in Physical Review Letters.»

Después de estos comentarios, que consideramos muy positivos, no entendimos por qué el editor nos sugirió retirar el trabajo de PRL y enviar otra versión al *Physical Review B*. Decidimos hacer esto último y enviamos una versión extensa a la revista *Physical Review B* el día 9 de enero del 2007, la cual fue aceptada para su publicación el día 26 de marzo del 2007, con lo que se retrasó un poco la publicación de los resultados de la parte teórica.

En el desarrollo de esta tesis de doctorado, se ha interactuado de manera fructífera con investigadores muy reconocidos en el área, como por ejemplo con el Dr. Eugenio Méndez, sobre todo durante su estancia sabática en el Instituto de Física de la UNAM, con el Dr. Peter Halevi y el Dr. Felipe Perez, del INAOE y de la BUAP, respectivamente, con el Dr. Luis Mochán del Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM. Con ellos tuvimos la oportunidad de participar en un par de talleres e interminables sesiones de trabajo sumamente enriquecedoras.

Al final de esta tesis, creo que el problema no está resuelto! Ningún problema está realmente resuelto, sólo nos aburrirnos de él y cambiamos a otro problema ... sin embargo ahora creo entender qué es un medio efectivo no local!

Introducción

La descripción y el entendimiento de la propagación de luz a través de sistemas constituidos por una colección de inclusiones localizadas al azar embebidas en un medio homogéneo, llamado *matriz*, ha sido estudiado desde hace muchos años, atrayendo la atención de muchos investigadores desde los inicios del campo de la electrodinámica, y es un fenómeno que aparece en muchas áreas de la física, con interés no sólo en ciencia básica sino también desde el punto de vista de las aplicaciones tecnológicas. Uno de los primeros trabajos en el tema fue escrito por Rayleigh [7] en 1899 y hoy en día todavía existen preguntas fundamentales y dificultades conceptuales relacionadas a este problema.

Al sistema constituido por inclusiones distribuidas al azar dentro de una matriz lo denotaremos como *sistema coloidal* o simplemente como *coloide*, y ejemplos típicos de ellos son la sangre, las pinturas, las rocas porosas, la espuma, la neblina, la leche, la atmósfera, etc.

En general, cuando una onda plana con vector de onda $\vec{k}$ y frecuencia ω producida por fuentes externas excita un sistema coloidal, el resultado es una onda plana que se propaga a través del coloide con la misma frecuencia ω pero con un vector de onda diferente², comúnmente llamado vector de onda efectivo $\vec{k}_{ef}$, producto de la superposición de los campos esparcidos por cada inclusión localizada al azar. La magnitud de dicho vector de onda efectivo depende de la forma, el tamaño, el índice de refracción y la densidad de partículas en el coloide, así como también de las propiedades estadísticas de su distribución espacial. Para la descripción de la propagación de la onda plana con vector de onda $\vec{k}_{ef}$ es posible y conveniente separar los campos en términos de sus componentes *coherente* y *difusa*. La componente coherente, también llamada componente promedio, corresponde al promedio del campo sobre todas las posibles posiciones de las inclusiones embebidas en la matriz, es decir, sobre todas las configuraciones disponibles del sistema coloidal, mientras que el campo difuso o campo fluctuante corresponde a las fluctuaciones del promedio de dicho campo.

Dependiendo de la magnitud del parámetro de tamaño x , definido como $x \equiv k_0 a$, donde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es la magnitud del vector de onda en la matriz y a es el tamaño lineal de las inclusiones, el análisis de la propagación de la onda a través del coloide se puede simplificar considerando dos casos extremos: (i) cuando las inclusiones son pequeñas en comparación a λ_0 ($x \ll 1$) y (ii) cuando las inclusiones son grandes en comparación a λ_0 ($x \gtrsim 1$). Aunque

²Ver por ejemplo la Ref. [8].

evidentemente no existe una clara separación entre estos dos casos, en el caso de pequeñas inclusiones se ha encontrado que el vector de onda efectivo $\vec{k}_{ef}$ siempre existe, y su cálculo en términos de los parámetros electromagnéticos y estructurales del coloide es una rama importante de un campo bien establecido conocido como *Teorías de Medio Efectivo* (TME)³. En estas teorías la idea es reemplazar el altamente inhomogéneo sistema coloidal por un sistema homogéneo ficticio, pero conservando las mismas propiedades electromagnéticas promedio. Este sistema ficticio es llamado *Medio Efectivo* y es caracterizado por un conjunto de propiedades efectivas las cuales describen la propagación de la componente coherente a través del coloide. Las teorías más conocidas para el caso cuando las inclusiones son pequeñas fueron desarrolladas por Maxwell Garnett [11] en 1904 y por Bruggeman [12] en 1935, las cuales son válidas para valores moderados de la densidad en volumen de partículas.

Cuando las partículas que conforman el sistema coloidal son muy pequeñas, la energía transportada por la componente difusa es mucho menor que la que transporta la componente coherente, de modo que podemos simplemente despreciarla. Este es justo el caso cuando se utiliza la electrodinámica continua macroscópica para describir el comportamiento de medios homogéneos, pues podemos considerar que los átomos o moléculas que conforman el medio son las inclusiones en una matriz que en este caso es el vacío, en donde la componente difusa es despreciada completamente. En este caso la descripción completa del fenómeno electromagnético está dado en términos de los campos coherentes o promedio, conocidos también como *campos macroscópicos*.

A partir de los trabajos de Maxwell Garnett y Bruggeman, ha habido una gran cantidad de trabajos enfocados en extender la validez de sus teorías para sistemas coloidales en donde las partículas no son esféricas o para valores de la concentración de partículas más altas [13]-[18]. También ha habido un esfuerzo en extender las teorías de medio efectivo para el caso de partículas grandes ($x \gtrsim 1$), las cuales son conocidas como *Teorías de Medio Efectivo Extendidas* (TMEE). Mientras que en el caso de partículas pequeñas es suficiente considerar el campo radiado en la aproximación dipolar, en el caso de partículas grandes el patrón de radiación de los campos electromagnéticos esparcidos incluye términos de mayor orden en una expansión multipolar. En el caso en que las partículas embebidas sean además esféricas, como las que

³Ver por ejemplo Refs. [9] y [10].

se considerarán en esta tesis, la magnitud y fase de cada multipolo radiando se puede calcular empleando la solución desarrollada por Mie [19]. Los primeros intentos de TMEE han surgido de las comunidades de ciencia de materiales y de física de la atmósfera, como por ejemplo en 1978 Stroud y Pan [20], y luego Wachniewski y McClung [21] en 1986, quienes extendieron las ideas de Bruggeman para la respuesta dinámica de un compuesto de dos componentes, obteniendo expresiones para la función dieléctrica efectiva del material compuesto en términos de las propiedades de esparcimiento de un solo esparcidor. Con este enfoque pudieron incluir la contribución de los dipolos magnéticos inducidos en el cálculo de la polarizabilidad dipolar eléctrica y así lograron determinar la absorción adicional debida a las corrientes de eddy inducidas. En 1983 Chýlek y Srivastava [22] y luego Doyle [23] en 1989, propusieron una generalización de la teoría de Maxwell Garnett en donde nuevamente la dependencia con el tamaño de las inclusiones proviene de la contribución de los dipolos magnéticos inducidos a la polarizabilidad dipolar eléctrica. Grimes y Grimes [24] en 1991, también mostraron que la respuesta dieléctrica y magnética efectiva no eran independientes, obteniendo para un sistema de inclusiones esféricas polarizables y no magnéticas, es decir, caracterizadas por una permeabilidad magnética $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, una permeabilidad magnética efectiva diferente a la del vacío, evidenciando que el término dipolar magnético puede ser importante cuando el índice de refracción de las partículas es grande en comparación al de la matriz. Sin embargo, todos los trabajos anteriores descansan en la validez de la aproximación dipolar, de modo que todavía hay limitaciones en cuanto al tamaño de las inclusiones en los sistemas coloidales. Por otro lado, quiero recalcar que en las TMEE el concepto de medio efectivo está asociado necesariamente sólo a la parte coherente o promedio de los campos, ya que esta componente es la única que podría ser descrita por la electrodinámica continua, y la energía transportada por la componente difusa sólo aparece en el balance de energía como una contribución a la parte imaginaria de las funciones respuesta efectivas. Sin embargo, esta precisión no aparece explícita en los trabajos arriba mencionados.

Recientemente Ruppín [25] ha analizado la consistencia interna de las extensiones de la teoría de Maxwell Garnett y ha notado importantes limitaciones en su uso comparado con las TME para pequeñas partículas: denota como *teorías no restringidas* aquellas en las que las funciones respuesta efectivas que caracterizan al sistema coloidal pueden ser utilizadas en la electrodinámica continua de la misma manera en que se emplearían la fun-

ción dieléctrica y/o la permeabilidad magnética de un material homogéneo común, mientras que denota como *teorías restringidas* a las que no cumplen con lo anterior. La principal ventaja de las teorías no restringidas es evidente: podemos emplear todos los resultados de la electrodinámica continua insertando simplemente las funciones respuesta efectivas en vez de las funciones respuesta macroscópicas, olvidándonos de la naturaleza granular del sistema. Sin embargo, uno debe tener cuidado con ciertos aspectos de la interpretación física de los resultados, como por ejemplo, en la electrodinámica macroscópica se interpreta la parte imaginaria de las funciones respuesta como una cantidad que es proporcional a la absorción de energía por el sistema, mientras que en el caso del medio efectivo, como se mencionó anteriormente, la parte imaginaria toma en cuenta la energía absorbida por el sistema pero también la energía transportada por el campo difuso que se propaga en todas direcciones.

En 1986 Bohren [5] analizó la transmisión y reflexión coherente de la luz, a incidencia normal, de una “rebanada” de sistema coloidal diluido de partículas grandes ($x \gtrsim 1$) y mostró que estas propiedades pueden ser descritas con un enfoque usual de medio efectivo y de electrodinámica continua sólo si se acepta que el sistema tiene dos índices de refracción asignados: uno para la reflexión y otro diferente para la transmisión. En vez de aceptar esta idea, que resulta un tanto incómoda, se dio cuenta que era equivalente proponer que el sistema tuviera asignada una permeabilidad magnética efectiva, además de la función dieléctrica efectiva. Sin embargo, el origen físico de la parte magnética nunca fue aclarado y concluye su trabajo diciendo que el concepto de medio efectivo no es estrictamente adecuado para sistemas con inclusiones grandes, señalando que incluso el concepto de medio efectivo no era claro para una incidencia no normal. El trabajo fue muy criticado y se suscitó una fuerte polémica, como ya se mencionó en el prólogo. En trabajos anteriores de Barrera y García-Valenzuela, [1] y [2], se analizó la reflexión coherente de luz incidiendo a ángulos oblicuos sobre una interfaz plana de un medio semi-infinito diluido de partículas grandes localizadas al azar, llegándose a la misma conclusión que Bohren, como se comentó en el prólogo, con el resultado incómodo de que tanto la función dieléctrica efectiva como la permeabilidad magnética efectiva dependían del ángulo de incidencia, así como también de la polarización de la luz incidente. La aparición de una permeabilidad magnética efectiva había permanecido como un hecho oscuro, lo que se aclara con el trabajo de esta tesis doctoral teórico-experimental.

El estudio de sistemas coloidales con partículas grandes ha sido tratado

tradicionalmente como un problema de esparcimiento, y en este caso no es posible despreciar la energía transportada por el campo difuso, pues ésta es comparable o incluso mayor a la energía asociada a la componente coherente, dando una apariencia turbia del coloide. Es precisamente este hecho lo que ha conducido a algunos investigadores a cuestionar la validez y consistencia del enfoque de medio efectivo y la respuesta a esta pregunta representa uno de los objetivos centrales de esta tesis. Incluso, aunque las inclusiones en un coloide sean pequeñas, existe un campo difuso, cuya mera presencia implica que debemos preocuparnos por la consistencia de las TME a cierto nivel de precisión. Resulta por tanto de fundamental importancia, tanto conceptualmente como para aplicaciones prácticas, el clarificar el correcto uso de las TME en sistemas con partículas grandes, pues ha habido intentos de medir un índice de refracción efectivo para el haz coherente en una suspensión turbia de partículas grandes, empleando los mismo procedimientos experimentales utilizados para medios homogéneos [26]-[30]. Sin embargo, el uso de este índice de refracción efectivo en la electrodinámica continua de manera ingenua, puede conducir a grandes errores, como por ejemplo en experimentos en donde se mide la reflexión del haz coherente. En artículos recientes Barrera y García-Valenzuela, [1], [31]-[32], han mostrado que las mediciones de los coeficientes de reflexión para la onda coherente de un sistema turbio con una interfaz plana, no son consistentes con los resultados obtenidos cuando el índice de refracción efectivo es sustituido en las fórmulas de Fresnel de la electrodinámica continua.

Mucho del trabajo publicado hasta ahora está encaminado al cálculo de la constante de propagación del haz coherente utilizando un enfoque de teoría de esparcimiento. Probablemente el resultado más simple conocido para el índice de refracción efectivo de la componente coherente de un sistema diluido de partículas grandes, es el llamado índice de refracción efectivo de van de Hulst. Aunque el resultado se puede rastrear a trabajos anteriores en diferentes contextos, fue van de Hulst en su libro [33] sobre esparcimiento de pequeñas partículas, el primero en proporcionar una deducción clara y simple. Básicamente, se obtiene analizando la transmisión de una onda plana a través de una “rebanada” de un sistema coloidal y calculando la superposición coherente de las ondas esparcidas. Después de promediar sobre todas las posiciones posibles de las esferas se obtiene la onda coherente transmitida. De la comparación de este resultado con el obtenido para una onda transmitida a través de un par de placas paralelas con el mismo espesor que la “rebanada” lleno con un medio homogéneo equivalente, el índice de refrac-

ción efectivo es identificado⁴. El índice de refracción efectivo de van de Hulst coincide con lo que se obtiene de teorías más rigurosas en el caso de bajas densidades. Un punto importante es que este índice de refracción efectivo es válido aún cuando las inclusiones en el sistema coloidal son grandes, hecho que se verificó experimentalmente en esta tesis y lo reporto en un artículo publicado en la revista *New Journal of Physics* [6].

Probablemente los primeros trabajos usando un enfoque riguroso de teoría de esparcimiento para calcular la ecuación de onda que obedece la onda coherente en un sistema con esparcidores localizados al azar fueron los trabajos de Foldy y Lax entre 1945 y 1952 [35]-[37]. Desde entonces ha habido algunos trabajos enfocados a extender el formalismo y los resultados de Foldy y Lax [38]-[41]. El enfoque de la teoría de esparcimiento consiste en formular las ecuaciones integrales de esparcimiento múltiple y promediarlas, de donde se obtiene una jerarquización en las ecuaciones en términos de la función de correlación de una, dos, tres, etc. partículas. Un truncamiento en la primera etapa de la jerarquía es conocida como Aproximación de Campo Efectivo (ACE), mientras que un truncamiento en la segunda etapa, lo que incluye una función de correlación de dos partículas, se conoce como Aproximación Cuasi-Cristalina (ACC). Los resultados originales de Foldy y Lax corresponden a la ACE y son solamente válidos para sistemas diluidos, mientras que la ACC es válida para sistemas un poco más densos. Algunos investigadores recientemente han empleado la ACC para calcular la propagación, transmisión y reflexión de un sistema de inclusiones grandes distribuidas al azar considerando una interfaz plana [41]-[43]. En todos estos trabajos solamente se calcula, bajo el enfoque de teoría de esparcimiento, la constante de propagación efectiva, a partir de la cual se identifica el índice de refracción efectivo. Sin embargo, este enfoque no provee una descripción de TME completa, ya que para poder emplear el concepto de medio efectivo en las ecuaciones macroscópicas de Maxwell, son necesarias las funciones respuesta efectivas que relacionan tanto al campo $\vec{D}$ con el promedio del campo $\vec{E}$, como al campo $\vec{H}$ con el promedio del campo $\vec{B}$, y no es posible obtener estas funciones respuesta a partir del conocimiento de solamente el índice de refracción efectivo. Por lo tanto, son necesarias ambas funciones respuesta por separado, o lo que es equivalente, la relación del promedio de la densidad de corriente total inducida con los campos promedio $\vec{E}$ y $\vec{B}$, a orden lineal

⁴Una derivación similar a la empleada por van de Hulst se encuentra en el libro de Bohren [34].

en los campos. El enfoque de esta tesis de doctorado difiere de todos los trabajos anteriores porque está enfocada precisamente en este punto: primero se calcula la relación del promedio de la densidad total de corriente inducida en el medio efectivo con el promedio de los campos eléctrico y magnético, y a partir de esta relación se identifica el vector de onda efectivo, obteniéndose una descripción completa del medio efectivo.

En la parte de teoría de esta tesis doctoral, en la que usaremos el sistema internacional de unidades, el sistema coloidal que se estudia lo consideramos constituido por partículas esféricas idénticas, polarizables y no magnéticas, embebidas por simplicidad en el vacío y se considera que el sistema no tiene fronteras, de modo que la propiedades calculadas son propiedades de bulk. Las esferas tienen todas el mismo radio, están caracterizadas por el mismo índice de refracción y están distribuidas al azar con una función de densidad de probabilidad uniforme en todo el espacio. También consideramos que la densidad de partículas es baja de tal forma que la Aproximación de Campo Efectivo sea válida. La relación que se deduce en este trabajo entre el promedio de la densidad *total* de corriente inducida y la componente coherente del campo eléctrico presenta una no localidad espacial (dispersión espacial). Por *total*, como ya se comentó en el prólogo, se denota al hecho de que todas las corrientes inducidas son consideradas, de modo que no se hace una separación de las corrientes inducidas en corrientes de polarización y de magnetización. De esta forma, se obtiene una descripción completa de la TMEE con un solo tensor dieléctrico efectivo no local, al que llamaremos generalizado, el cual contiene todos los efectos de inducción, inclusive aquellos tradicionalmente considerados como magnéticos. Dado que el sistema es homogéneo e isotrópico en promedio, podemos caracterizar cabalmente al sistema coloidal con las componentes longitudinal y transversal de dicho tensor dieléctrico efectivo generalizado no local, las cuales se calculan en el espacio de momentos y están dadas en términos de las componentes diagonales longitudinal y transversal del tensor de conductividad efectiva de una sola partícula aislada, o equivalentemente en términos de las componentes diagonales del operador de transición T , (cantidad más conocida en la teoría de esparcimiento) o bien como *matriz* T , de una sola partícula aislada. Usando un nuevo método ingenioso, se calculan las componentes longitudinal y transversal de la matriz T , cálculo que requiere únicamente el conocimiento del campo eléctrico dentro de una sola esfera aislada en presencia de una onda incidente generada por fuentes externas. A partir de las expresiones analíticas de las componentes del tensor dieléctrico efectivo generalizado no local,

presento un análisis numérico de la dependencia de dichas funciones con el vector de onda y con la frecuencia, empleando parámetros correspondientes a materiales reales en la ventana de frecuencias del óptico. Los materiales utilizados en el análisis numérico fueron, por un lado metales: oro y plata y por otro lado aislantes: poliestireno y dióxido de titanio. Posteriormente se identifican las relaciones de dispersión de ambos modos: longitudinales y transversales, y resolviendo de manera iterativa el caso transversal se obtiene un índice de refracción efectivo dependiente de la frecuencia. Este índice de refracción efectivo se compara con los que se obtienen resolviendo la relación de dispersión para los modos transversales usando tres aproximaciones conocidas, a las que llamamos: límite de onda larga, cuadrática y cono de luz. Utilizando parámetros reales de los materiales antes mencionados presento un análisis numérico de los índices de refracción efectivos como función de la frecuencia, tanto aproximados como el exacto. El índice de refracción que se obtiene al resolver la relación de dispersión usando la aproximación de cono de luz, coincide con el llamado índice de refracción de van de Hulst, el cual ahora reconocemos que tiene una naturaleza no local, con lo que es posible explicar las inconsistencias encontradas en algunos artículos, en donde hacen uso de estos índices suponiéndolos locales. Cabe señalar que en el rango óptico de frecuencias utilizadas para el análisis numérico no encontré ninguna solución a la relación de dispersión de los modos longitudinales.

Separando el promedio de la densidad total de corriente inducida en una componente de polarización y en otra de magnetización, se obtiene la caracterización tradicional en términos de una función dieléctrica efectiva y permeabilidad magnética efectiva. Este esquema, que llamaremos *esquema $\epsilon - \mu$* , es equivalente al esquema en el que se caracteriza al coloide con las componentes longitudinal y transversal del operador dieléctrico efectivo generalizado no local, esquema que llamaremos *esquema $L-T$* . Ambos esquemas están relacionados y podemos pasar de uno a otro sin perder información del sistema. También presento el análisis numérico respectivo del esquema $\epsilon - \mu$ y discuto el significado físico de la componente magnética, lo que ayuda a clarificar el significado de la respuesta magnética de sistemas coloidales turbios. Recientemente, la importancia de los efectos no locales en la propagación coherente de la luz en sistemas con inclusiones grandes distribuidas al azar ha sido reconocida [44], aunque sin una base teórica clara.

En la literatura es posible encontrar trabajos en los que se mide el índice de refracción efectivo de sistemas coloidales [26], [27], [45]-[51], suponiendo como válidas las fórmulas de Fresnel de la electrodinámica continua, usando

en ellas el índice de refracción efectivo para la interpretación de medidas de reflexión. Sin embargo, ahora sabemos que el índice de refracción efectivo que caracteriza la propagación a través del medio coloidal del haz coherente tiene un carácter no local, por lo que no es posible utilizarlo en las fórmulas de Fresnel. Recientemente publicamos, junto con el grupo de trabajo dentro del cual realicé esta tesis, un artículo en la revista *Optics Express* [32] en donde se evidencia que efectivamente no es posible utilizar el índice de refracción en las fórmulas de Fresnel para interpretar mediciones de reflectancia de un sistema coloidal. Debido a las dificultades conceptuales presentadas en experimentos de reflexión, en la parte experimental de esta tesis se diseñó un experimento enfocado a medir el índice de refracción efectivo de un sistema coloidal ópticamente turbio, es decir, con inclusiones grandes en comparación a la longitud de onda del haz incidente, haciendo uso del fenómeno de refracción de la luz, el cual no tiene los problemas conceptuales asociados al fenómeno de reflexión. El método es relativamente simple y consiste en medir el ángulo de refracción y la transmitancia de un haz láser que atraviesa un prisma hueco lleno con el sistema coloidal, el cual está constituido por partículas de poliestireno disueltas en agua desionizada. El experimento se repitió para tres tamaños promedio de partícula, obteniéndose para cada uno el índice de refracción efectivo. Este trabajo se publicó recientemente en la revista *New Journal of Physics* [6]. Para relacionar las mediciones con el índice de refracción efectivo desarrollé una generalización de la Ley de Snell que toma en cuenta la geometría del prisma y el hecho de tener un índice de refracción complejo, cuyo cálculo se encuentra en detalle en el apéndice D de esta tesis. El índice de refracción medido para cada tamaño de partícula se compara con el predicho por van de Hulst, obteniendo un muy buen acuerdo, lo que confirma que dicho índice de refracción de van de Hulst también funciona para coloides con inclusiones grandes, proponiendo, además, y esto es lo más importante, una forma correcta de determinarlo experimentalmente. En el desarrollo de la parte experimental, no sólo se logró medir simultáneamente la parte real e imaginaria del índice de refracción efectivo con una buena precisión, sino que también se analizó la sensibilidad del método motivados por la posibilidad de emplearlo para caracterizar sistemas coloidales, determinando el índice de refracción de las inclusiones así como su radio, lo que es de gran interés desde el punto de vista de las aplicaciones tecnológicas. Actualmente, se está montando un experimento diseñado para medir espectroscópicamente tanto el ángulo de refracción como la transmitancia, empleando una fuente de luz blanca y como detector una CCD y un espec-

trómetro, con el fin de automatizar el experimento del prisma con haz láser. El diseño ha mostrado buena sensibilidad⁵ y se sigue trabajando en el problema inverso: determinar a partir de las mediciones, el índice de refracción de las inclusiones como función de la frecuencia, así como una distribución de tamaños de partícula. El experimento se ha ido sofisticando poco a poco con incorporación de nuevo equipo y se han ido solventando los problemas técnicos encontrados.

Esta tesis de doctorado teórico-experimental está organizada como sigue: en el capítulo 1 se presenta la parte teórica de la tesis así como el análisis numérico; en el capítulo 2 la parte experimental; después las conclusiones de la tesis y por último un capítulo llamado “Perspectivas” en donde se plantean algunas líneas del trabajo a futuro.

⁵Tanto el arreglo experimental como algunos resultados preliminares se muestran en el Cap. Perspectivas de esta tesis.

Capítulo 1

Respuesta electromagnética de
un sistema coloidal: usando un
método alternativo novedoso

En este capítulo describiremos la respuesta óptica de sistemas coloidales empleando un enfoque de medio efectivo, que como ya se mencionó en la introducción, consiste en reemplazar el sistema coloidal por un medio homogéneo ficticio, el cual conserva las propiedades ópticas del sistema inhomogéneo a través de funciones de respuesta efectivas. El sistema coloidal particular que nos interesa estudiar está constituido por una colección de N inclusiones esféricas idénticas, polarizables y no magnéticas, que están distribuidas al azar dentro de un volumen V , en el límite cuando tanto $N \rightarrow \infty$ como $V \rightarrow \infty$, pero manteniendo el cociente N/V finito. El sistema de esferas está embebido en una matriz que por simplicidad supondremos es el vacío y no tiene fronteras, de modo que las propiedades que se estudiarán serán propiedades de bulk. Las inclusiones esféricas de radio a están caracterizadas por una función dieléctrica dependiente de la frecuencia $\epsilon(\omega)$ y una permeabilidad magnética $\mu(\omega) = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. Consideraremos que el sistema coloidal se encuentra en el límite diluido y que es homogéneo e isotrópico en promedio. Es importante subrayar que el tamaño de las esferas no está restringido a ser pequeño en comparación a la longitud de onda del campo incidente y que estamos usando el sistema de unidades SI.

Las funciones respuesta efectivas que caracterizan al sistema coloidal se calculan utilizando un método nuevo alternativo, el cual consiste en calcular el tensor de conductividad efectiva *generalizada* no local, a partir del cálculo de la densidad de corriente *total* promedio inducida en el sistema coloidal. Por *generalizada* y *total*, queremos denotar que se están considerando todos los posibles mecanismos de inducción de corriente, no sólo las corrientes de conducción y de polarización, sino también aquellas tradicionalmente consideradas como responsables del magnetismo.

La forma tradicional de analizar la interacción de una onda electromagnética con un medio inhomogéneo es por medio de las ecuaciones integrales de esparsamiento múltiple, en las cuales aparece el operador de transición o también conocido como matriz T , el cual contiene la información sobre las propiedades de esparsamiento de las inclusiones en el coloide. A partir de estas ecuaciones integrales es posible calcular los campos eléctrico y magnético en cualquier punto del espacio [35]-[37], [41]. De manera análoga a la deducción de las ecuaciones de esparsamiento múltiple para los campos, es posible escribir un conjunto de ecuaciones integrales para la densidad de corriente total inducida que, considerando la Aproximación de Campo Efectivo (ACE), es posible resolver empleando un procedimiento análogo, en esencia, al uti-

lizado por Gustav Mie [19] para resolver el problema de esparcimiento de una partícula esférica en presencia de un campo electromagnético incidente. Una vez que se cuenta con la solución para el promedio de la densidad de corriente total inducida se puede definir el tensor de conductividad efectiva generalizada no local, que es proporcional a la matriz T y por tanto contiene la misma información sobre el sistema, y considerando además que el sistema coloidal es isótropo, es posible calcular las proyecciones longitudinal y transversal del tensor de conductividad efectiva generalizada no local (o del operador de transición T), en las cuales está contenida toda la información sobre la respuesta óptica del coloide. A partir de estas componentes es posible calcular las componentes longitudinal y transversal del tensor dieléctrico efectivo generalizado no local, lo que denotaremos como *esquema $L-T$* . Equivalentemente al *esquema $L-T$* es posible construir el *esquema tradicional*, que denotaremos como *esquema $\epsilon-\mu$* , en el cual se caracteriza al medio por una función dieléctrica efectiva no local y por una función permeabilidad magnética efectiva no local. Ambos esquemas son equivalentes y están relacionados entre sí. Es importante resaltar que, aunque las partículas que componen el sistema coloidal así como también la matriz en donde están embebidas sean no magnéticos, $\mu = \mu_0$, el sistema efectivo presenta una función de permeabilidad magnética efectiva no local.

Las funciones respuesta efectivas, ya sea en el *esquema $L-T$* o en el *esquema $\epsilon-\mu$* , contienen no sólo la información sobre la propagación del haz dentro del coloide, es decir, la información sobre un índice de refracción efectivo no local, sino que contienen la información de las funciones respuesta por separado, lo cual es indispensable si se quieren estudiar problemas como el transporte de energía en el coloide o de reflexión por una interfaz medio homogéneo-coloide.

A partir de las expresiones para las funciones respuesta, se realiza un análisis numérico para ambos esquemas considerando diferentes sistemas coloidales constituidos por esferas conductoras (oro y plata) o aislantes (poliestireno y dióxido de titanio). Por último, se obtendrán las relaciones de dispersión del sistema, tanto para los modos longitudinales como para los transversales, pudiendo identificar de ésta última un índice de refracción efectivo para el coloide. Podemos resolver la relación de dispersión en forma exacta, al igual que empleando diferentes aproximaciones, de manera que podemos analizar numéricamente las funciones aproximadas para el índice de refracción efectivo en comparación con la función exacta, para los diferentes sistemas coloidales constituidos con los materiales antes mencionados.

1.1. Cálculo de la respuesta efectiva de un sistema coloidal

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, suponiendo variaciones armónicas en el tiempo de los campos eléctrico y magnético, que tienen la siguiente forma

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}; \omega) = i \omega \vec{B}(\vec{r}; \omega), \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}; \omega) = -i \omega \epsilon \mu \vec{E}(\vec{r}; \omega) + \mu \vec{J}(\vec{r}; \omega), \quad (1.2)$$

en donde $\vec{J}$ es la densidad total de corriente, podemos sustituir $\vec{B}$ de la Ec. (1.1) en la Ec. (1.2), obteniendo la ecuación de Helmholtz vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}; \omega) - k_0^2 \vec{E}(\vec{r}; \omega) = i \omega \mu \vec{J}(\vec{r}; \omega), \quad (1.3)$$

en donde $i = \sqrt{-1}$ y $k_0^2 = \omega^2 \epsilon \mu$. En general todos los campos oscilarán con frecuencia ω , de modo que en lo siguiente, cuando no haya lugar a confusiones, podemos omitir la dependencia con ω . Podemos separar la densidad de corriente total $\vec{J}(\vec{r})$ como

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_{ext}(\vec{r}) + \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}), \quad (1.4)$$

en donde $\vec{J}_{ext}$ es la densidad de corriente externa que genera y acompaña a la onda electromagnética incidente que, en el caso en que $\vec{J}_{ext} = 0$, entonces la onda incidente será una onda electromagnética libre. $\vec{J}_{tot}^{ind}$ es la densidad de corriente *total* inducida en el sistema coloidal por el campo electromagnético incidente que oscila con una única frecuencia ω . Por *total* queremos indicar que todas las corrientes posibles inducidas en el sistema están siendo consideradas, no sólo las corrientes de conducción y de polarización, sino también aquellas corrientes cerradas que producen efectos magnéticos. Entonces, considerando que las componentes del sistema coloidal son no magnéticas, podemos reescribir la Ec. (1.3) de la siguiente forma

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - k_0^2 \vec{E}(\vec{r}) = i \omega \mu_0 \left[\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) + \vec{J}_{ext}(\vec{r}) \right]. \quad (1.5)$$

Una solución formal para el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ de la Ec. (1.5), en términos de la fuente $\vec{J}(\vec{r})$ está dada por

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= i \omega \mu_0 \int \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \left[\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}') + \vec{J}_{ext}(\vec{r}') \right] d\vec{r}' = \\ &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i \omega \mu_0 \int \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}') d\vec{r}', \end{aligned} \quad (1.6)$$

en donde

$$\vec{E}_{inc}(\vec{r}) = i \omega \mu_0 \int \overleftarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{ext}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (1.7)$$

es el campo incidente producido por las fuentes externas $\vec{J}_{ext}$ y $\overleftarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$ es la función diádica de Green en el espacio libre que obedece la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \overleftarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') - k_0^2 \overleftarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftarrow{I} \delta(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (1.8)$$

La función diádica de Green se puede escribir en términos de la función escalar de Green, denotada por $g_0(\vec{r}, \vec{r}')$ ¹,

$$\overleftarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \left[\overleftarrow{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right] g_0(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (1.9)$$

Sustituyendo la Ec. (1.9) en la Ec. (1.8), obtenemos la ecuación que satisface la función escalar de Green²

$$(\nabla^2 + k_0^2) g_0(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1.10)$$

que, escribiendo la Ec. (1.10) en un sistema de coordenadas esféricas, se encuentra que la solución para la función escalar de Green en el espacio libre está dada por

$$g_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.11)$$

en donde la constante $1/4\pi$ se encuentra integrando la Ec. (1.10) sobre una esfera infinitesimal de radio δ centrada en el origen y haciendo uso del Teorema de Gauss.

1.1.1. Caso de una partícula

Considerando el caso de tener un solo esparcidor esférico embebido en el vacío, centrado en el origen del sistema de coordenadas, ocupando un volumen V_p , no magnético ($\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío) y caracterizado por una función dieléctrica

$$\epsilon(\vec{r}) = \begin{cases} \epsilon_p(\vec{r}) & \text{si } \vec{r} \in V_p \\ \epsilon_0 & \text{si } \vec{r} \notin V_p \end{cases}, \quad (1.12)$$

¹Ver libro de Kong [52], pág. 504, Ec. (4.2.7).

²En donde notamos que el operador $\nabla \times \nabla \times$ aplicado al segundo término de la Ec. (1.9) es cero, puesto que el rotacional de un gradiente es cero: $\nabla \times \nabla \times \nabla \nabla = \nabla \times (\nabla \times \nabla) \nabla = 0$. También hemos utilizado el hecho de $\nabla \times \nabla \times (\overleftarrow{I} g_0) = \nabla \nabla g_0 - \overleftarrow{I} \nabla^2 g_0$.

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, en presencia de un campo eléctrico incidente $\vec{E}_{inc}$, podemos ver que, mientras la corriente inducida $\vec{J}_{tot}^{ind}$ en la partícula esférica responde de manera local al campo eléctrico interno $\vec{E}_I$, lo hace de manera no local al campo eléctrico incidente $\vec{E}_{inc}$, es decir,

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \sigma_p(\vec{r}; \omega) \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) = \int_{V_p} \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \cdot \vec{E}_{inc}(\vec{r}'; \omega) d\vec{r}', \quad (1.13)$$

en donde

$$\sigma_p(\vec{r}; \omega) = \begin{cases} \sigma_p(\omega) & \text{si } \vec{r} \in V_p \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_p \end{cases}, \quad (1.14)$$

es la conductividad local y $\overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}$ es el tensor de conductividad no local de una esfera aislada. Esto es fácil de entender, porque mientras $\vec{E}_I$ tiene información sobre el tamaño y la forma de la esfera, al igual que sus propiedades de polarización, $\vec{E}_{inc}$ no tiene esta información, de modo que dicha información debe de estar contenida en el tensor de conductividad no local $\overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}$, cuyo rango de no localidad está dado por el tamaño de la esfera.

Considerando el caso en que $\vec{r} \in V_p$, el campo interno está dado por la Ec. (1.6), es decir,

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (1.15)$$

y sustituyendo $\vec{E}_I$ en la Ec. (1.13) obtenemos una ecuación integral para la densidad de corriente inducida $\vec{J}_{tot}^{ind}$

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) = \sigma_p(\vec{r}; \omega) \left[\vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}') d\vec{r}' \right], \quad (1.16)$$

donde $\vec{r} \in V_p$. Podemos obtener una solución formal de esta ecuación integral empleando un procedimiento iterativo, es decir,

$$\begin{aligned} \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) = \sigma_p \left[\vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0\sigma_p \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{E}_{inc}(\vec{r}') d\vec{r}' + \right. \\ \left. + (i\omega\mu_0\sigma_p)^2 \iint_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}', \vec{r}'') \cdot \vec{E}_{inc}(\vec{r}'') d\vec{r}'' d\vec{r}' + \dots \right], \quad (1.17) \end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) = & \int_{V_p} \sigma_p \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{I} + i\omega\mu_0\sigma_p \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') + \right. \\ & \left. + (i\omega\mu_0\sigma_p)^2 \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' + \dots \right] \cdot \vec{E}_{inc}(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Comparando con la segunda expresión de la Ec. (1.13), podemos identificar $\overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}$ como

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = & \sigma_p \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{I} + i\omega\mu_0\sigma_p \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') + \right. \\ & \left. + (i\omega\mu_0\sigma_p)^2 \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' + \dots \right], \end{aligned} \quad (1.19)$$

de donde observamos que

$$\overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{para} \quad \vec{r} \notin V_p \quad \text{y} \quad \vec{r}' \notin V_p. \quad (1.20)$$

La serie de la Ec. (1.19) es equivalente a la ecuación integral

$$\overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = \sigma_p(\vec{r}) \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{I} + i\omega\mu_0 \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' \right]. \quad (1.21)$$

Como se mencionó anteriormente, el tensor de conductividad efectiva no local juega el papel del operador de transición o matriz T , notación empleada en teoría de espacimiento. A partir de la Ec. (1.21), multiplicando por $i\omega\mu_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = & i\omega\mu_0\sigma_p(\vec{r}) \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{I} + \right. \\ & \left. + \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' \right], \end{aligned} \quad (1.22)$$

y definiendo³ lo que se conoce como función potencial en teoría de espacimient⁴

$$U(\vec{r}) \equiv i\omega\mu_0\sigma_p(\vec{r}) = \omega^2\mu_0 [\epsilon_p(\vec{r} - \epsilon_0)], \quad (1.23)$$

³Utilizando la relación $\epsilon_p(\vec{r}) = \epsilon_0 + \frac{i}{\omega}\sigma_p(\vec{r})$.

⁴Ver libro de Kong [41], pág. 203, Ec. (5.2.2).

obtenemos

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = U(\vec{r}) \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{T} + \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' \right], \quad (1.24)$$

de donde podemos identificar

$$i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (1.25)$$

por lo tanto, vemos que la Ec. (1.21) es equivalente a la ecuación integral que satisface el operador de transición T , conocida como ecuación de *Lippmann-Schwinger*⁵,

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}') = U(\vec{r}) \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{T} + \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' \right], \quad (1.26)$$

de modo que tenemos la relación

$$\overleftrightarrow{\sigma}_p^{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{i\omega\mu_0} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (1.27)$$

1.1.2. Caso de N partículas

Consideraremos ahora un sistema de N partículas, que ocupan volúmenes $V_1, V_2, \dots, V_N$, tal que la j -ésima partícula, centrada en $\vec{r}_j$, está caracterizada por una función dieléctrica ϵ_j y permeabilidad magnética μ_0 (no magnéticas). La corriente total inducida en el sistema estará dada en este caso por

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) \equiv \sum_{l=1}^N \vec{J}_l^{ind}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^N \int \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}'' - \vec{r}_l) \cdot \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}'') d\vec{r}'', \quad (1.28)$$

o bien, en términos de la matriz T ,

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) \equiv \sum_{l=1}^N \vec{J}_l^{ind}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \sum_{l=1}^N \int \overleftrightarrow{T}_l(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}'' - \vec{r}_l) \cdot \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}'') d\vec{r}'', \quad (1.29)$$

⁵Ver libro de Kong [41], pág. 201, Ec. (5.1.33)

en donde $\vec{J}_l^{ind}$ es la densidad de corriente inducida en la l -ésima esfera, centrada en $\vec{r}_l$, $\overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}$ es el tensor de conductividad no local de la l -ésima esfera, que juega el mismo papel que el operador de transición $\overleftrightarrow{T}_l$, y $\vec{E}_l^{exc}$ es el campo eléctrico de excitación en la esfera l -ésima, el cual se define como la suma del campo eléctrico incidente mas el campo eléctrico producido por las corrientes inducidas en todas las partículas esféricas, con excepción de la l -ésima, es decir,

$$\begin{aligned} \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N) = \\ = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \sum_{j=1, j \neq l}^N \iint \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_j^{ind}(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Podemos observar que, aunque $\vec{J}_l^{ind}$ es diferente de cero solamente dentro del volumen de las esferas, ya que a su vez $\overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}$ se anula fuera de las partículas, el campo eléctrico de excitación está definido en todo el espacio.

Sustituyendo la expresión para $\vec{J}_l^{ind}$, Ec. (1.28) en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \sum_{j=1, j \neq l}^N \iint \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \cdot \vec{E}_j^{exc}(\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}'' d\vec{r}', \end{aligned} \quad (1.31)$$

obtenemos un conjunto de ecuaciones integrales acopladas para el campo de excitación. Entonces, para conocer el campo de excitación sobre la esfera l -ésima tenemos que conocer el campo de excitación en todas las demás esferas resolviendo el conjunto de ecuaciones integrales acopladas, lo cual no es trivial!

Podemos reescribir la Ec. (1.31) en términos de la matriz T como

$$\begin{aligned} \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=1, j \neq l}^N \iint \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ \cdot \overleftrightarrow{T}_j(\vec{r} - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \cdot \vec{E}_j^{exc}(\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}'' d\vec{r}', \end{aligned} \quad (1.32)$$

obteniendo el conjunto de ecuaciones integrales acopladas, lo que se conoce en teoría de esparsimiento como la segunda ecuación de las *Ecuaciones Integrales de esparsimiento múltiple de Foldy-Lax* [35]-[37] para el campo de excitación. La primera de las ecuaciones de Foldy-Lax relaciona el campo

eléctrico total en cualquier punto del espacio con el campo de excitación, que puede escribirse como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \sum_{j=1}^N \int \vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_j^{ind}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (1.33)$$

en donde, a través de la Ec. (1.29), $\vec{J}_j^{ind}$ se relaciona con el campo de excitación $\vec{E}_l^{exc}$. El segundo sumando del lado derecho de la igualdad se conoce como campo esparcido, de modo que en general podemos escribir que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio es igual a la suma del campo incidente mas el campo esparcido

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + \vec{E}_{esp}(\vec{r}). \quad (1.34)$$

1.1.3. Promedio configuracional

Hasta el momento hemos considerado que tenemos una distribución espacial de partículas esféricas fija, con lo cual podríamos calcular la densidad de corriente total inducida de sólo una configuración particular. Sin embargo estamos interesados en el estudio de sistemas coloidales, por lo que necesitamos realizar un promedio de ensamble de las ecuaciones. Existen diferentes formas de promediar, sin embargo la apropiada para este caso es el promedio configuracional (ver Apéndice A).

Consideremos que la función de densidad de probabilidad de encontrar a la primera partícula en $\vec{r}_1$, la segunda en $\vec{r}_2$, ..., y la N -ésima partícula en $\vec{r}_N$ está dada por $p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$. Utilizando la regla de Bayes⁶ o el teorema de las probabilidades compuestas, podemos expresar esta probabilidad en términos de probabilidades condicionadas

$$\begin{aligned} p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) &= p(\vec{r}_i) p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i', \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i) = \\ &= p(\vec{r}_i) p(\vec{r}_j | \vec{r}_i) p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i', \dots, \vec{r}_j', \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i, \vec{r}_j) \end{aligned} \quad (1.35)$$

en donde ' indica que ese término está ausente. La función $p(\vec{r}_i)$ es la función de densidad de probabilidad de encontrar la partícula i en la posición $\vec{r}_i$, mientras que $p(\vec{r}_j | \vec{r}_i)$ es la probabilidad condicional de encontrar

⁶La regla de Bayes se deduce inmediatamente de la definición de la probabilidad condicional: $p(b|a) \equiv p(a \cap b)/p(a)$, ver ref. [53], pág. 124.

la partícula j en la posición $\vec{r}_j$ dado que la partícula i está fija en $\vec{r}_i$ y $p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N \mid \vec{r}_i, \vec{r}_j)$ es la probabilidad condicional de encontrar la primera partícula en la posición $\vec{r}_1$, la segunda en $\vec{r}_2$, ... y la N -ésima en $\vec{r}_N$, cuando la i -ésima y la j -ésima partículas están fijas en $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_j$, respectivamente.

En el caso de tener una distribución de tamaños de las partículas, o que éstas no sean esféricas, podemos incluir información particular de cada partícula como $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N$, que pueden ser orientaciones, tamaños, etc. Entonces la probabilidad del conjunto de N partículas localizadas en un volumen $d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N$, con sus variables internas en $d\vec{s}_1 d\vec{s}_2 \dots d\vec{s}_N$, está dada por $p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N d\vec{s}_1 d\vec{s}_2 \dots d\vec{s}_N$, cuya integral estaría normalizada a la unidad. Sin embargo, para el problema que estamos considerando, en el que tenemos un conjunto de N partículas esféricas idénticas, las variables internas $\vec{s}_i$ no son necesarias.

En nuestro caso, las partículas están distribuidas al azar, de modo que la función de densidad de probabilidad de una sola partícula está dada por $p(\vec{r}_i) = 1/V$, donde V es el volumen accesible para las partículas. Calculando el promedio configuracional, denotado por $\langle \dots \rangle$, de la densidad de corriente total inducida, Ec. (1.28), omitiendo la dependencia implícita de tanto $\vec{J}_{tot}^{ind}$ como de $\vec{E}_l^{exc}$ sobre las posiciones de las N partículas $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N$, tenemos

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) = \sum_{l=1}^N \int \left\langle \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \cdot \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}') \right\rangle d\vec{r}', \quad (1.36)$$

y empleando la definición de promedio configuracional tenemos⁷

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) &= \int \dots \int p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N) \vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_l \dots d\vec{r}_N = \\ &= \sum_{l=1}^N \iint p(\vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \int \dots \int p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N \mid \vec{r}_l) \times \\ &\times \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}') d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_l \dots d\vec{r}_N d\vec{r}_l d\vec{r}', \end{aligned} \quad (1.37)$$

en donde hemos utilizado la regla de Bayes, primera igualdad de la Ec. (1.35), notando que $\overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}$ no depende de la posición de las esferas en el coloide, con

⁷En donde hemos omitido la dependencia de tanto la densidad de corriente total inducida como del campo eléctrico de excitación sobre las posiciones de las esferas, es decir, $\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N)$ y $\vec{E}_l^{exc}(\vec{r}'; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N)$.

excepción de la partícula l -ésima. Podemos reescribir la ecuación anterior, Ec. (1.37), como

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) &= \sum_{l=1}^N \langle \vec{J}_l^{ind} \rangle(\vec{r}) = \\ &= \sum_{l=1}^N \iint p(\vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \cdot \langle \vec{E}^{exc} \rangle_l(\vec{r}'; \vec{r}_l) d\vec{r}_l d\vec{r}', \quad (1.38) \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}^{exc} \rangle_l(\vec{r}'; \vec{r}_l) &= \int \dots \int p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_l) \times \\ &\times \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}'; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_l \dots d\vec{r}_N, \quad (1.39) \end{aligned}$$

es el promedio configuracional del campo de excitación manteniendo la partícula l -ésima fija que, una vez realizado el promedio configuracional, depende solamente de la posición de la l -ésima esfera.

Físicamente, en lo que consiste el cálculo del promedio configuracional de $\langle \vec{J}_l^{ind} \rangle$ es en fijar el vector posición en $\vec{r}$ y mover la partícula l -ésima a todas las posiciones accesibles del sistema, sumando su contribución al promedio de $\vec{J}^{ind}$ cuando $\vec{r}$ se encuentre dentro de la partícula, como se muestra en la Fig. 1.1.

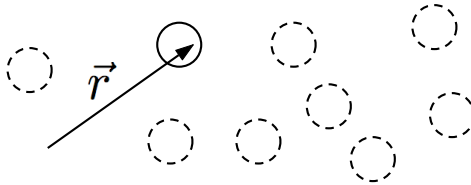


Figura 1.1: Contribución al promedio configuracional de la densidad de corriente inducida por la partícula l -ésima.

Una vez que hemos realizado el promedio configuracional, $\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle$ es independiente de la posición de las N partículas, de modo que cada término de la suma de la Ec. (1.38) será idéntico, por lo que podemos reemplazar la

suma por N , entonces

$$\sum_{l=1}^N \langle \vec{J}_l^{ind} \rangle(\vec{r}) = N \langle \vec{J}^{ind} \rangle(\vec{r}) \equiv \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}), \quad (1.40)$$

en donde $\langle \vec{J}^{ind} \rangle$ es el promedio de la corriente inducida debida a cualquiera de las N partículas. Por otro lado, hemos considerado una función de densidad de probabilidad para las esferas uniforme, $1/V$, lo que es equivalente a decir que se están despreciado correlaciones entre las partículas, de modo que finalmente obtenemos que el promedio configuracional de la densidad de corriente total inducida en el sistema coloidal está dada por

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) = \frac{N}{V} \iint \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \cdot \langle \vec{E}^{exc} \rangle_l(\vec{r}'; \vec{r}_l) d\vec{r}_l d\vec{r}'. \quad (1.41)$$

1.1.4. Aproximación de campo efectivo

La aproximación más baja en las ecuaciones integrales para el promedio de la densidad de corriente inducida en el sistema es la conocida en teoría de esparcimiento como la *Aproximación de Campo Efectivo* (ACE), la cual consiste en considerar que

$$\langle \vec{E}^{exc} \rangle_l(\vec{r}'; \vec{r}_l) \approx \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}'), \quad (1.42)$$

en donde $\langle \vec{E} \rangle$ es el promedio configuracional del campo eléctrico total en cualquier punto del espacio, también conocido como campo coherente. Esta aproximación, que consiste en despreciar la componente difusa del campo eléctrico, es válida para sistemas en donde la concentración de partículas es muy baja, es decir, en el límite diluido. Considerando la aproximación ACE en la Ec. (1.41) obtenemos

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) = \frac{N}{V} \iint \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}') d\vec{r}_l d\vec{r}'. \quad (1.43)$$

En términos del operador de transición, notación más conocida en teoría de esparcimiento, el promedio configuracional de la densidad de corriente total inducida en el sistema tomaría la siguiente forma

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{N}{V} \iint \overleftrightarrow{T}_l(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}') d\vec{r}_l d\vec{r}'. \quad (1.44)$$

Cualquiera de las dos ecuaciones equivalentes anteriores, Ec. (1.43) o Ec. (1.44), es la relación central en el procedimiento alternativo para el cálculo de las funciones respuesta del sistema coloidal. Podríamos continuar trabajando en términos del tensor de conductividad no local, sin embargo la notación usual en teoría de esparcimiento es a través de la matriz T , por lo que continuaremos bajo este esquema. Cabe señalar que ambos planteamientos son enteramente equivalentes, como se mostrará más adelante, ya que sólo estamos cambiando la notación y no la física del problema.

Pasando al espacio de momentos a través de la transformada de Fourier, podemos escribir que

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}_l(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) &= \\ &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_l)] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}') \exp[-i\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_l)], \end{aligned} \quad (1.45)$$

de modo que el promedio configuracional del la matriz T está dado por

$$\begin{aligned} \left\langle \overleftrightarrow{T}_l(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \right\rangle &\equiv \frac{1}{V} \int \overleftrightarrow{T}_l(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) d\vec{r}_l = \\ &= \int \frac{d\vec{r}_l}{V} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_l)] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}') \exp[-i\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_l)]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

El integrando lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}_l] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}') \exp[-i\vec{p}' \cdot \vec{r}'] \exp[i\vec{p}' \cdot \vec{r}_l] &= \\ &= \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}') \exp[-i\vec{p}' \cdot \vec{r}'] \exp[i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}_l], \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \overleftrightarrow{T}_l(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \right\rangle &= \\ &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}') \exp[-i\vec{p}' \cdot \vec{r}'] \int \frac{d\vec{r}_l}{V} \exp[i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}_l], \end{aligned}$$

pero sabemos que

$$\int \exp[i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}_l] d\vec{r}_l = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (1.47)$$

de modo que finalmente obtenemos

$$\left\langle \overleftrightarrow{T}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \right\rangle = \frac{1}{V} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}). \quad (1.48)$$

Podemos observar varios puntos relevantes de esta ecuación: el promedio configuracional del operador de transición T ya no depende de la posición de las partículas, pues hemos integrado respecto a $\vec{r}_l$; el promedio de T depende solamente de la diferencia $\vec{r}-\vec{r}'$, de modo que tenemos invariancia traslacional en el sistema; y por último, la transformada de Fourier del operador de transición ya no depende de $\vec{p}$ y $\vec{p}'$, sino solamente de $\vec{p}$: $\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}' = \vec{p})$.

Entonces, tenemos que el promedio configuracional de la densidad de corriente inducida en la partícula l -ésima está dado por

$$\langle \vec{J}_l^{ind} \rangle(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\mu_0 V} \int d\vec{r}' \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}'), \quad (1.49)$$

aunque realmente $\langle \vec{J}_l^{ind} \rangle$ ya no depende del subíndice l , pues ya no depende del centro de la partícula $\vec{r}_l$, así que la densidad de corriente total inducida en el sistema está dada por

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) &= \sum_{l=1}^N \langle \vec{J}_l^{ind} \rangle(\vec{r}) = N \langle \vec{J}^{ind} \rangle(\vec{r}) = \\ &= \frac{n_0}{i\omega\mu_0} \int d\vec{r}' \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (1.50)$$

en donde $n_0 = N/V$ es la densidad de partículas en el sistema coloidal.

Si escribimos $\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle$ y $\langle \vec{E} \rangle$ en términos de sus transformadas de Fourier, y las sustituimos en la Ec. (1.50), obtenemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{p}) = \\ &= \frac{n_0}{i\omega\mu_0} \int d\vec{r}' \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}) \int \frac{d\vec{p}''}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p}'' \cdot \vec{r}'] \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}''). \end{aligned}$$

El lado derecho de la igualdad en la ecuación anterior la podemos escribir de la siguiente forma

$$\frac{n_0}{i\omega\mu_0} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}) \int \frac{d\vec{p}''}{(2\pi)^3} \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}'') \int d\vec{r}' \exp[i(\vec{p}'' - \vec{p}) \cdot \vec{r}'],$$

en donde nuevamente

$$\int \exp[i(\vec{p}'' - \vec{p}) \cdot \vec{r}'] d\vec{r}' = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}'' - \vec{p}), \quad (1.51)$$

de modo que tenemos que

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{p}) = \frac{n_0}{i\omega\mu_0} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}),$$

lo que implica que

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{p}) = \frac{n_0}{i\omega\mu_0} \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}). \quad (1.52)$$

Si en vez de la matriz T hubiéramos continuado el desarrollo con el tensor de conductividad no local, el procedimiento sería el mismo y llegaríamos a la siguiente expresión

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{p}) = \frac{n_0}{i\omega\mu_0} \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{p}, \vec{p}) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{p}). \quad (1.53)$$

Finalmente, ya sea la Ec. (1.52) o la Ec. (1.53), hemos llegado a una ecuación algebraica para el promedio configuracional de la densidad de corriente total inducida en el sistema, que podemos identificar como una *Ley de Ohm Generalizada no local* en donde la conductividad efectiva está dada por

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}(\vec{p}, \omega) = \frac{n_0}{i\omega\mu_0} \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}, \omega). \quad (1.54)$$

El término “*Generalizada*” nos recuerda que estamos considerando todas las posibles corrientes inducidas por todos los posibles mecanismos, no sólo las corrientes de conducción y de polarización, sino también aquellas corrientes cerradas que producen efectos magnéticos.

1.1.5. Esquema $L-T$

Definiendo los operadores de proyección longitudinal $\hat{P}^L$ y transversal $\hat{P}^T$ como

$$\hat{P}^L \equiv \hat{p}\hat{p} \quad \text{y} \quad \hat{P}^T \equiv \overleftrightarrow{I} - \hat{p}\hat{p}, \quad (1.55)$$

donde $\hat{p} = \vec{p}/p$ es el vector unitario en dirección $\vec{p}$, podemos expresar la ley de Ohm generalizada no local como

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle^L \\ \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{LL} & \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{LT} \\ \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{TL} & \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{TT} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle \vec{E} \rangle^L \\ \langle \vec{E} \rangle^T \end{pmatrix},$$

en donde las cantidades vectoriales son proyectadas como

$$\begin{aligned}\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle^{L(T)} &= \hat{P}^{L(T)} \cdot \langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle, \\ \langle \vec{E} \rangle^{L(T)} &= \hat{P}^{L(T)} \cdot \langle \vec{E} \rangle,\end{aligned}\quad (1.56)$$

mientras que las cantidades tensoriales como

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{LL(TT)} &= \hat{P}^{L(T)} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_{ef} \cdot \hat{P}^{L(T)}, \\ \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{LT(TL)} &= \hat{P}^{L(T)} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_{ef} \cdot \hat{P}^{T(L)}.\end{aligned}\quad (1.57)$$

El supraíndice $L(T)$ denota la componente longitudinal (transversal). Sin embargo, dado que el medio efectivo es homogéneo e isotrópico, no existe acoplamiento LT de modo que $\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{LT} = \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{TL} = 0$, y entonces podemos escribir

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{LL} = \sigma_{ef}^L(p, \omega) \hat{p}\hat{p} \quad \text{y} \quad \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}^{TT} = \sigma_{ef}^T(p, \omega) \left[\overleftrightarrow{I} - \hat{p}\hat{p} \right], \quad (1.58)$$

en donde las dos funciones escalares σ_{ef}^L y σ_{ef}^T son llamadas las componentes longitudinal y transversal del tensor de conductividad efectiva generalizada no local, respectivamente. Entonces, podemos escribir

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}(\vec{p}, \omega) = \sigma_{ef}^L(p, \omega) \hat{p}\hat{p} + \sigma_{ef}^T(p, \omega) \left[\overleftrightarrow{I} - \hat{p}\hat{p} \right]. \quad (1.59)$$

De manera análoga, podemos escribir el operador de transición T en términos de sus componentes longitudinal T^L y transversal T^T , que también son funciones escalares

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}, \omega) = T^L(p, \omega) \hat{p}\hat{p} + T^T(p, \omega) \left[\overleftrightarrow{I} - \hat{p}\hat{p} \right], \quad (1.60)$$

Finalmente, podemos escribir la ley de Ohm generalizada no local como

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle = \sigma_{ef}^L \langle \vec{E} \rangle^L + \sigma_{ef}^T \langle \vec{E} \rangle^T, \quad (1.61)$$

en donde

$$\sigma_{ef}^{L(T)} = \frac{n_0}{i\omega\mu_0} T^{L(T)}(p, \omega). \quad (1.62)$$

Introduciendo el vector de desplazamiento eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.63)$$

donde ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío y $\vec{P}$ es tal que satisface

$$\vec{J}_{tot}^{ind} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (1.64)$$

y dado que estamos considerando que todos los campos oscilan armónicamente con frecuencia ω , es decir $\vec{P} \sim \exp[-i\omega t]$, entonces $\vec{P} = (i/\omega)\vec{J}_{tot}^{ind}$, de modo que sustituyendo en la Ec. (1.63) tenemos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega} \vec{J}_{tot}^{ind} = \left(\overleftrightarrow{I} \epsilon_0 + \frac{i}{\omega} \overleftrightarrow{\sigma}_{ef} \right) \cdot \vec{E} = \overleftrightarrow{\epsilon}_{ef} \cdot \vec{E}, \quad (1.65)$$

en donde hemos empleado la ley de Ohm, de modo que finalmente podemos identificar

$$\overleftrightarrow{\epsilon}_{ef} = \overleftrightarrow{I} \epsilon_0 + \frac{i}{\omega} \overleftrightarrow{\sigma}_{ef}. \quad (1.66)$$

Empleando la Ec. (1.62) podemos relacionar las componentes longitudinal y transversal de $\overleftrightarrow{\epsilon}_{ef}$ con las componentes del operador de transición de la siguiente forma

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^{L(T)}(p, \omega) = 1 + \frac{n_0}{k_0^2} T^{L(T)}(p, \omega), \quad (1.67)$$

en donde $\tilde{\epsilon} \equiv \epsilon/\epsilon_0$. Con esta definición para $\vec{P}$ vemos que la relación usual entre el vector de desplazamiento eléctrico y el vector eléctrico se cumple

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\epsilon}_{ef} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \tilde{\epsilon}_{ef}^L \langle \vec{E} \rangle^L + \tilde{\epsilon}_{ef}^T \langle \vec{E} \rangle^T. \quad (1.68)$$

Dado que $\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle$ es la corriente *total* inducida, todos los efectos considerados como magnéticos están incluidos en $\overleftrightarrow{\epsilon}_{ef}$, de modo que el campo $\vec{H}$ estará dado simplemente por $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$.

La descripción de la respuesta electromagnética del sistema en términos de las dos funciones $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ y $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$, lo denotaremos como *esquema L-T*.

1.1.6. Cálculo de las componentes longitudinal y transversal de la matriz $\mathbf{T}$

A partir de la Ec. (1.67) podemos apreciar que las componentes longitudinal $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ y transversal $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ de la función dieléctrica efectiva no local que describe la respuesta electromagnética del sistema coloidal, están dadas en términos de las componentes del operador de transición de una sola esfera,

de modo que el problema ahora es cómo calcular las componentes del operador de transición o matriz T . El procedimiento estándar sería transformar al espacio de momentos la ecuación integral de Lippman-Schwinger, Ec. (1.26),

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}') = U(\vec{r}) \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overleftrightarrow{T} + \int_{V_p} \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}'') \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{r}'', \vec{r}') d\vec{r}'' \right],$$

y resolverla en el espacio de Fourier para el caso de un solo esparcidor esférico, obteniendo $\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}')$, y finalmente tomar $\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}' = \vec{p})$. Tsang y Kong [40] han ideado un método para resolver este problema empleando una base esférica. Sin embargo, el camino que seguiremos será un procedimiento alternativo que nos conducirá directamente a $\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}' = \vec{p})$ sin tener que resolver la ecuación integral.

Consideremos el problema de una sola partícula esférica, en donde podemos escribir que la densidad de corriente total inducida en ella responde localmente al campo interno, es decir, de la forma de la primera igualdad de la Ec. (1.13)

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \sigma_p(\omega) \vec{E}_I(\vec{r}; \omega), \quad (1.69)$$

donde σ_p es la conductividad local de la partícula esférica y $\vec{E}_I$ es el campo eléctrico dentro de la partícula. Empleando la Ec. (1.29) para el caso de una sola esfera centrada en el origen,

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \int_{V_p} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \vec{E}_{inc}(\vec{r}'; \omega) d\vec{r}',$$

podemos relacionar $\vec{E}_I$ con el operador de transición y escribir una relación análoga a la Ec. (1.13) en términos de la matriz T

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \sigma_p(\omega) \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \int_{V_p} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \vec{E}_{inc}(\vec{r}'; \omega) d\vec{r}'. \quad (1.70)$$

Ahora, consideremos que en la Ec. (1.70) el campo eléctrico incidente es el campo correspondiente a una onda plana electromagnética con vector de onda $\vec{p}$, independiente de la frecuencia ω , y amplitud $\vec{E}_0$, es decir,

$$\vec{E}_{inc} = \vec{E}_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}]. \quad (1.71)$$

Esta onda plana no es una onda electromagnética *libre* sino que es generada, en general, por fuentes externas: una densidad de corriente externa $\vec{J}_{ext}$ y

una densidad de carga externa ρ_{ext} , de modo que el vector de onda $\vec{p}$ y la frecuencia ω se pueden modificar de forma independiente. Dado que el objetivo es calcular las componentes $T^{L(T)}(p, \omega)$ y estas funciones escalares están asociadas a las componentes $LL(TT)$ del tensor de conductividad efectiva generalizada, podemos dividir el cálculo en dos casos diferentes: cuando el plano de incidencia de la onda es longitudinal (L) y cuando es transversal (T).

A partir de la Ec. (1.70) observamos que para poder calcular las componentes del operador de transición, necesitaremos calcular primero el campo interno $\vec{E}_I$. Esto lo haremos siguiendo un procedimiento similar al empleado por Gustav Mie [19] para resolver el problema de esparcimiento de una esfera en presencia de una onda plana electromagnética libre incidente. La diferencia de nuestro cálculo al que realizó Mie en 1908 es que en nuestro caso tenemos una densidad de corriente externa $\vec{J}_{ext}$ y una densidad de carga externa ρ_{ext} , que generan y acompañan a la onda electromagnética incidente, es decir, la onda incidente no es una onda libre.

Una vez que hayamos calculado el campo eléctrico interno $\vec{E}_I$, podemos calcular la densidad de corriente total inducida en la esfera a través de la relación $\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \sigma_p(\omega) \vec{E}_I(\vec{r}; \omega)$. Después calculamos la transformada de Fourier de la corriente inducida $\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{p}; \omega)$ y junto con la Ec. (1.52) para el caso de una sola partícula esférica, que tiene la siguiente forma

$$\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{p}; \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}; \omega) \cdot \vec{E}_0, \quad (1.72)$$

podemos finalmente calcular las componentes del operador de transición $T^{L(T)}(\vec{p}; \omega)$. Estas componentes corresponden a las proyecciones $LL(TT)$ del tensor de conductividad efectiva y para calcularlas tomaremos la proyección $L(T)$ de $\vec{J}_{tot}^{ind}(\vec{p}; \omega)$ para el caso en el cual la onda plana incidente tenga el carácter $L(T)$ correspondiente.

Cálculo de T^T

Para el cálculo de la componente transversal del operador de transición o matriz T , consideremos el problema de una sola partícula esférica de radio a en el vacío, centrada en el origen y caracterizada por una función dieléctrica $\epsilon_I(\omega)$ y por una permeabilidad magnética $\mu_I = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, en presencia de una onda plana electromagnética *transversal* como se muestra en la Fig. 1.2. El vector $\vec{p}$ lo tomamos a lo lar-

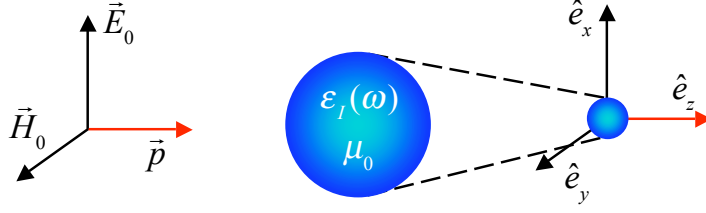


Figura 1.2: Esquema del problema de una sola esfera en el vacío, centrada en el origen, interactuando con una onda electromagnética transversal incidente.

go del eje Z y $\vec{E}_0$ a lo largo del eje X , de modo que la onda incidente la escribiremos como

$$\vec{E}_{inc} = E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_x, \quad (1.73)$$

en donde $\hat{e}_x$ es el vector unitario en la dirección X y dado que dicha onda no es una onda electromagnética libre, podemos considerar $p > 0$ arbitrario (independiente de la frecuencia ω).

Entonces, para obtener la componente TT proyectamos la Ec. (1.72) en la dirección $\hat{e}_x$ y despejando $\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}; \omega)$ obtenemos

$$T^T(p; \omega) = \hat{e}_x \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}; \omega) \cdot \hat{e}_x = \frac{i\omega\mu_0}{E_0} \hat{e}_x \cdot \vec{J}_{tot,T}^{ind}(\vec{p}; \omega), \quad (1.74)$$

en donde $\vec{J}_{tot,T}^{ind}$ denota la densidad de corriente total inducida correspondiente a una onda plana incidente transversal. Si escribimos $\vec{J}_{tot,T}^{ind}(\vec{r}; \omega)$ en términos de su transformada de Fourier, $\vec{J}_{tot,T}^{ind}(\vec{p}; \omega)$, obtenemos que

$$T^T(p; \omega) = \frac{k_0^2}{-i\omega\epsilon_0 E_0} \int \hat{e}_x \cdot \vec{J}_{tot,T}^{ind}(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r, \quad (1.75)$$

en donde $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Podemos reescribir la Ec. (1.75) en términos del campo interno $\vec{E}_I$ usando la Ec. (1.69), de modo que finalmente obtenemos

$$T^T(p; \omega) = \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \int \hat{e}_x \cdot \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r, \quad (1.76)$$

donde $\chi_p = \tilde{\epsilon}_I - 1$. Esta es la ecuación que emplearemos para el cálculo de T^T .

Ahora calcularemos el campo eléctrico interno $\vec{E}_I$. Todos los detalles de este cálculo se encuentran en el Apéndice B.

Hemos considerado una onda incidente en la que el campo eléctrico oscila en la dirección $\hat{e}_x$ mientras que se propaga en dirección $\hat{e}_z$. Utilizando la ley de Faraday podemos calcular el campo magnético asociado

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0\vec{H}_{inc} &= \nabla \times \vec{E}_i = ipE_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_z \times \hat{e}_x, \\ \vec{H}_{inc} &= \frac{p}{\omega\mu_0} E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_y. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Como hemos mencionado, estos campos incidentes transversales con vector de onda arbitrario p no son una onda libre en el espacio, por lo que deben de ser producidos por fuentes externas. En este caso en que tenemos ondas transversales, estas fuentes deben ser únicamente una densidad de corrientes externas $\vec{J}_{ext}$, ya que no puede haber una densidad de carga externa ρ_{ext} porque se cumple que $\nabla \cdot \vec{E}_{inc} = \nabla \cdot \vec{D} = 0$. La densidad de corrientes externas $\vec{J}_{ext}$ la podemos calcular a través de las ecuaciones de Maxwell, en particular la ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{H}_{inc} = \vec{J}_{ext} - i\omega\epsilon_0\vec{E}_{inc}, \quad (1.78)$$

de modo que

$$\vec{J}_{ext} = \frac{-i}{\omega\mu_0} (p^2 - k_0^2) \vec{E}_{inc}, \quad (1.79)$$

en donde observamos que cuando $p = k_0$ no hay corriente externa y entonces la onda incidente se convierte en una onda electromagnética libre. También vemos que $\vec{J}_{ext}$ es transversal, puesto que $\nabla \cdot \vec{J}_{ext} = \nabla \cdot \vec{E}_{inc} = 0$.

Dado que el problema que queremos resolver tiene una simetría esférica evidente, es conveniente utilizar una base esférica, de modo que utilizaremos como base a los armónicos esféricos vectoriales que están definidos como⁸

$$\begin{aligned} \vec{M}_{emn} &= \nabla \times (r\psi_{emn}), & \vec{M}_{omn} &= \nabla \times (r\psi_{omn}), \\ \vec{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{emn}}{k}, & \vec{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{omn}}{k}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

en donde e (o) hace referencia (por sus siglas en inglés) a que la función es par (impar), y donde

$$\begin{aligned} \psi_{emn} &= \cos(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \\ \psi_{omn} &= \sin(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \end{aligned} \quad (1.81)$$

⁸Seguiremos la notación empleada por Bohren y Huffman en su libro [34].

son las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales y las cuales son soluciones de la ecuación escalar de Helmholtz. Hemos empleado la notación usual para las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Las funciones radiales $z_n(kr)$ son cualquiera de las cuatro funciones esféricas de Bessel: j_n , y_n , $h_n^{(1)}$ o $h_n^{(2)}$ y P_n^m son los polinomios asociados de Legendre con la normalización dada por Bohren [34]⁹.

El campo eléctrico incidente en términos de esta base esférica toma la siguiente forma¹⁰

$$\vec{E}_{inc} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\vec{M}_{o1n}^{(1)} - i\vec{N}_{e1n}^{(1)} \right), \quad (1.82)$$

y puede ser escrito solamente en términos de las funciones con $m = 1$. $E_n = i^n E_0[2n+1/n(n+1)]$ y el superíndice (1) en los armónicos esféricos vectoriales denota que la función z_n corresponde a la función esférica de Bessel $j_n(\rho_i)$, donde $\rho_i = pr$.

El campo magnético asociado $\vec{H}_{inc}$ se puede escribir en términos de esta base como

$$\vec{H}_{inc} = \frac{-i}{\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}_{inc} = \frac{-p}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\vec{M}_{e1n}^{(1)} + i\vec{N}_{o1n}^{(1)} \right). \quad (1.83)$$

Si calculamos el límite de onda larga $p \rightarrow 0$ de los campos incidentes tenemos que solamente el término $\vec{N}_{e11}^{(1)}$ sobrevive

$$\begin{aligned} \vec{N}_{e11} &= 2 \frac{j_1(\rho_I)}{\rho_I} \cos \phi P_1^1(\cos \theta) \hat{e}_r + \\ &+ \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_1(\rho_I)] \left[\cos \phi \frac{dP_1^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta - \sin \phi \frac{P_1^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi \right]. \end{aligned} \quad (1.84)$$

⁹Es importante señalar que existen diferentes definiciones para los polinomios asociados de Legendre, que consisten en diferentes elecciones de la fase. La definición empleada por Bohren es su libro [34] es $P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$, la cual es diferente a la empleada, por ejemplo, por J. D. Jackson en su libro *Classical Electrodynamics* (ver [54], pág. 108, Ec. (3.49)), o a la definición del *Handbook of Mathematical Functions* de M. Abramowitz y I. A. Stegun (ver [55], pág. 334, Ec. (8.6.6)).

¹⁰ver sección 4.2 del libro de Bohren [34].

Utilizado que $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$ ¹¹ y también que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{j_i(\rho_i)}{\rho_i} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho_i} [\rho_i j_1(\rho_i)] = \frac{2}{3}.$$

obtenemos

$$\lim_{p \rightarrow 0} \vec{N}_{e11}^{(1)} = \frac{2}{3} [\cos \phi \sin \theta \hat{e}_r + \cos \phi \cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi] = \frac{2}{3} \hat{e}_x. \quad (1.85)$$

Dado que $E_1 = i(3/2)E_0$ tenemos entonces que en el límite $p \rightarrow 0$ el campo eléctrico es constante en el espacio, $\vec{E}_{inc} = E_0 \hat{e}_x$, el campo magnético desaparece $\vec{H}_{inc} = 0$ y la densidad de corriente externa $\vec{J}_{ext} = i\omega\epsilon_0 E_0 \hat{e}_x$, que sería la corriente producida por un campo eléctrico constante oscilando a una única frecuencia ω .

De manera análoga a los campos incidentes, podemos escribir los campos internos, es decir, los que están dentro de la partícula, en términos de esta base esférica, de la siguiente manera

$$\vec{E}_I = \xi \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(c_n^T \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i d_n^T \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) + (1 - \xi) \vec{E}_{inc}, \quad (1.86)$$

$$\vec{H}_I = \frac{-k_I}{\omega\mu_0} \xi \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(d_n^T \vec{M}_{e1n}^{(1)} + i c_n^T \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right) + (1 - \xi) \vec{H}_{inc}, \quad (1.87)$$

en donde $\xi = (k_I^2 - k_0^2)/(k_I^2 - p^2)$ y $1 - \xi = (k_0^2 - p^2)/(k_I^2 - p^2)$, con $k_I = k_0 \sqrt{\epsilon_I}$. La dependencia radial de las funciones $\vec{M}^{(1)}$ y $\vec{N}^{(1)}$ es a través de $j_n(k_I r)$. Los términos $(1 - \xi) \vec{E}_{inc}$ y $(1 - \xi) \vec{H}_{inc}$ en las Ecs. (1.86) y (1.87) respectivamente, son debidos a la presencia de la densidad de corriente externa $\vec{J}_{ext}$. En el caso en que $\vec{J}_{ext} = 0$, como ya hemos dicho, el problema se reduce al resuelto por Mie [19].

La forma de los términos debidos a la densidad de corrientes externas en los campos internos no es obvia, pues ahora los campos serían solución de la ecuación de Helmholtz con fuentes. Sin embargo se pueden dilucidar empleando las ecuaciones de Maxwell y mostrar que las Ecs. (1.86) y (1.87) son correctas. El detalle de este cálculo se encuentra en el Apéndice B.

¹¹ver Bohren [34], pág. 91, Ec. (4.30).

Podemos también escribir los campos esparcidos o radiados en términos de la base esférica como,

$$\vec{E}_{esp} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(-b_n^T \vec{M}_{o1n}^{(3)} + i a_n^T \vec{N}_{e1n}^{(3)} \right), \quad (1.88)$$

$$\vec{H}_{esp} = \frac{k_0}{\omega \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(a_n^T \vec{M}_{e1n}^{(3)} + i b_n^T \vec{N}_{o1n}^{(3)} \right), \quad (1.89)$$

en donde la dependencia radial de $\vec{M}^{(3)}$ y $\vec{N}^{(3)}$ es a través de la función de Hankel de primer tipo $h_n^{(1)}(k_0 r)$.

Imponiendo condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell sobre la esfera, en $r = a$, podemos calcular los coeficientes a_n^T , b_n^T , c_n^T y d_n^T . Sin embargo, nuestro interés está enfocado en los coeficientes c_n^T y d_n^T , que son los relacionados con el campo interno y éste es el campo que necesitamos para calcular la componente transversal de la matriz T. Dichos coeficientes están dados por

$$c_n^T = \frac{j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]' - h_n(x_0) [x_i j_n(x_i)]'}{j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]'}, \quad (1.90)$$

$$d_n^T = \frac{x_i j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]'}{x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'}, \quad (1.91)$$

en donde la prima denota derivada respecto del argumento de la función, $x_0 = k_0 a$, $x_i = p a$ y $x_I = k_I a = k_0 N_I a$, con $N_I = \sqrt{\epsilon_I}$ el índice de refracción de la partícula, que en general depende de la frecuencia ω . El cálculo de los coeficientes se encuentra descrito en detalle en el Apéndice B.

Calculando el límite $p \rightarrow 0$ del campo eléctrico interno, Ec. (1.86), tenemos que el único coeficiente que sobrevive es d_1^T , que está dado por

$$d_1^T = -\frac{2}{3} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' - x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]'}. \quad (1.92)$$

Si consideramos el límite de partícula pequeña $a \rightarrow 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} -x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' &= \frac{-i \tilde{\epsilon}_I}{3}, \\ \lim_{a \rightarrow 0} x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]' &= \frac{-2i}{3}, \end{aligned} \quad (1.93)$$

de modo que

$$\lim_{a \rightarrow 0} d_1^T = -\frac{2}{3} \frac{-i}{i \frac{\tilde{\epsilon}_I}{3} + i \frac{2}{3}} = \frac{2}{\tilde{\epsilon}_I + 2}, \quad (1.94)$$

en donde hemos utilizado las aproximaciones siguientes

$$j_1(\rho) \approx \frac{\rho}{3}, \quad j_2(\rho) \approx \frac{\rho^2}{15}, \quad h_1^{(1)}(\rho) \approx \frac{-i}{\rho^2}, \quad h_2^{(1)}(\rho) \approx \frac{-3i}{\rho^3}, \quad (1.95)$$

empleando la relación de recurrencia de las funciones esféricas de Bessel¹²

$$\frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = n \frac{z_n(\rho)}{\rho} - z_{n+1}(\rho), \quad (1.96)$$

con $n = 1$. Por otro lado teníamos que, Ec. (1.85),

$$\lim_{\rho_i \rightarrow 0} \vec{N}_{e11} = \frac{2}{3} [\cos \phi \sin \theta \hat{e}_r + \cos \phi \cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi] = \frac{2}{3} \hat{e}_x.$$

Entonces, con estos límites, y dado que $E_1 = (3/2)iE_0$ finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_i \rightarrow 0} \vec{E}_I &= \xi i \frac{3}{2} E_0 (-i) d_1^T \vec{N}_{e11}^{(1)} + (1 - \xi) E_0 \hat{e}_x \\ &= \xi \frac{3}{2} E_0 \left(\frac{2}{\tilde{\epsilon}_I + 2} \right) \left(\frac{2}{3} \hat{e}_x \right) + (1 - \xi) E_0 \hat{e}_x \\ &= \frac{3}{\tilde{\epsilon}_I + 2} E_0 \hat{e}_x, \end{aligned} \quad (1.97)$$

el cual es el resultado correcto que uno obtiene para el problema clásico de una partícula esférica en presencia de un campo eléctrico constante y uniforme (ver por ejemplo: Jackson [54], pág. 158, Ec. (4.55)).

Una vez que contamos con la expresión para el campo interno, Ec. (1.86), podemos hacer uso de la Ec. (1.75), ya que

$$\vec{J}_{tot,T}^{ind}(\vec{p}; \omega) = \sigma_p(\omega) \left[(1 - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} E_n^T \left(c_n^T \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i d_n^T \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) + \xi \vec{E}_{inc} \right], \quad (1.98)$$

o bien la ecuación Ec. (1.76), directamente con la expresión para el campo eléctrico interno

$$T^T(p; \omega) = \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \int \hat{e}_x \cdot \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r.$$

¹²ver Abramowitz [55], pág. 439, Ec. (10.1.22).

Escribiendo la onda plana como¹³

$$\exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l j_l(\rho_i) P_l(\cos \theta), \quad (1.99)$$

podemos reescribir la ecuación para T^T como

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) = & \frac{k_0^2 \chi_p \xi}{E_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n c_n^T (2l+1)(-i)^l \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) j_n(\rho_I) \times \right. \\ & \times \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \left[\cos \theta P_l P_n' - \sin^2 \phi \sin^2 \theta P_l P_n'' \right] - \\ & - i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n d_n^T (2l+1)(-i)^l \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \times \\ & \times \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos^2 \phi \sin^2 \theta P_l P_n' + \right. \\ & + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \left\{ [\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi] P_l P_n' - \right. \\ & \left. \left. - \cos^2 \phi \cos \theta \sin^2 \theta P_l P_n'' \right\} \right] \left. \right\} + \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} (1 - \xi) E_0 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad (1.100) \end{aligned}$$

en donde $\mu = \cos \theta$ y $\rho_I = k_0 N_I r$. Realizando las integrales angulares y las radiales, cálculo que se encuentra en detalle en el Apéndice B, obtenemos finalmente una expresión para la componente transversal de la matriz T:

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 (N_I^2 - 1) \left\{ \frac{k_0^2 - p^2}{k_0^2 N_I^2 - p^2} + \frac{3 k_0^2 (N_I^2 - 1)}{2 k_0^2 N_I^2 - p^2} \times \right. \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[c_n^T I_2(n, n) + d_n^T \left(\frac{n+1}{x_i} I_1(n, n-1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n}{x_I} I_1(n+1, n) - I_2(n+1, n-1) \right) \right] \left. \right\}, \quad (1.101) \end{aligned}$$

¹³Ver Jackson [54], pág. 471, Ec. (10.44).

en donde las integrales están dadas como

$$I_1(n, m) \equiv \int_0^1 x j_n(x_i x) j_m(x_I x) dx, \quad (1.102)$$

$$I_2(n, m) \equiv \int_0^1 x^2 j_n(x_i x) j_m(x_I x) dx, \quad (1.103)$$

$$I_2(n, n) = \frac{1}{x_i^2 - x_I^2} [x_I j_n(x_i) j_{n-1}(x_I) - x_i j_{n-1}(x_i) j_n(x_I)]. \quad (1.104)$$

Las dos integrales, Ecs. (1.102) y (1.103), son las únicas integrales que se tienen que evaluar numéricamente en el cálculo, todo lo demás se puede expresar en términos de funciones conocidas.

Entonces, empleando la Ec. (1.67), tenemos finalmente una expresión para la componente transversal de la función dieléctrica efectiva no local para el sistema coloidal, dada por

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p; \omega) = 1 + \frac{n_0}{k_0^2} T^T(p; \omega). \quad (1.105)$$

Podemos hacer un desarrollo de la expresión para $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ en potencias de $x_i = pa$, para lo cual necesitamos hacer un desarrollo de los coeficientes. Manteniendo términos hasta orden x_i^2 tenemos

$$\begin{aligned} d_1^T &\approx d_1^{T[0]} + d_1^{T[2]} x_i^2 = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' - x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]'} + \\ &\quad + \frac{\left[\frac{2h_1(x_0)}{3} + \frac{2x_0^2 h_1(x_0)}{15} - \frac{x_0 h_2(x_0)}{3} \right]}{x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' - x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]'} x_i^2, \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} d_2^T &\approx d_2^{T[1]} x_i = \\ &= \frac{[-3 x_0^2 h_2(x_0)/15]}{x_I j_2(x_I) [x_0 h_2(x_0)]' - x_0^2 h_2(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_2(x_I)]'} x_i, \end{aligned} \quad (1.107)$$

$$c_1^T \approx c_1^{T[1]} x_i = \frac{-x_0 h_2(x_0)}{3 j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]'} x_i, \quad (1.108)$$

en donde el número entre paréntesis cuadrados denota la potencia de x_i . Entonces el desarrollo para $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ toma la forma

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p; \omega) = \tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega) + \tilde{\epsilon}_{ef}^{T[2]}(\omega)(pa)^2 + \dots, \quad (1.109)$$

en donde

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega) = 1 + f \zeta \left[1 + 3 \chi_p d_1^{T[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right], \quad (1.110)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ef}^{T[2]}(\omega) = 1 + f \zeta \chi_p \left[3 d_1^{T[2]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{3}{2} \left(c_1^{T[1]} + d_2^{T[1]} \right) \frac{j_2(x_I)}{x_I} - \right. \\ \left. - \frac{1}{x_I^2} \left(1 - \frac{3}{10} d_1^{T[0]} [5j_2(x_I) - 2x_I j_1(x_I)] \right) + 3 d_1^{T[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I^3} \right], \end{aligned} \quad (1.111)$$

donde $\zeta = 1 - 1/\tilde{\epsilon}_I$ y f es la fracción de llenado de las partículas, es decir, es el volumen que ocupan las esferas del volumen total, que está dado por

$$f = n_0 \frac{4\pi a^3}{3}. \quad (1.112)$$

Podemos observar que el término $\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega)$ independiente de p , Ec. (1.110), es el mismo que $\tilde{\epsilon}_{ef}^{L[0]}(\omega)$, Ec. (1.159)¹⁴, pues comparando las Ecs. (1.106) y (1.156) vemos que

$$d_1^{T[0]} = 2 d_1^{L[0]}. \quad (1.113)$$

Cálculo de T^L

Para el cálculo de la componente longitudinal del operador de transición o matriz T, consideraremos nuevamente el caso de una sola partícula esférica de radio a en el vacío, centrada en el origen, caracterizada por una función dieléctrica $\epsilon_I(\omega)$ y por una permeabilidad magnética $\mu_I = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. A diferencia del cálculo de la componente transversal, ahora consideraremos que la esfera está en presencia de una onda plana electromagnética *longitudinal* incidente, como se muestra en la Fig. 1.3.

Consideremos el potencial escalar ϕ_{inc} asociado al campo eléctrico incidente a través de $\vec{E}_{inc} = -\nabla \phi_{inc}$ y analicemos el efecto de una sola componente de Fourier de este potencial con el vector de onda $\vec{p} = p \hat{e}_z$, es decir,

$$\phi_{inc} = \phi_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] = \phi_0 \exp[ipr \cos \theta] = \phi_0 \exp[ipz]. \quad (1.114)$$

El campo eléctrico longitudinal incidente asociado a este potencial está dado por

$$\vec{E}_{inc} = -\nabla \phi_{inc} = -i\vec{p} \phi_0 \exp[ipr \cos \theta] = E_0 \exp[ipz] \hat{e}_z, \quad (1.115)$$

¹⁴Este coeficiente se calculará en la siguiente sección: **Cálculo de T^L** .

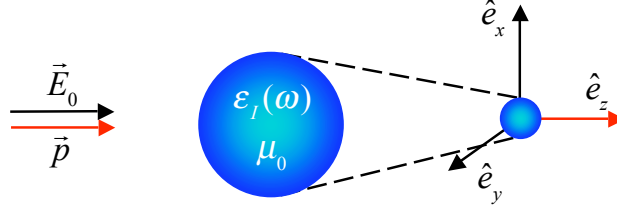


Figura 1.3: Esquema del problema de una sola esfera en el vacío, centrada en el origen, interactuando con una onda electromagnética longitudinal incidente.

en donde la magnitud del campo eléctrico incidente $E_0 = -ip\phi_0$ es constante, de modo que por ejemplo en el límite $p \rightarrow 0$ uno elige $\phi_0 \rightarrow \infty$, de tal forma que el producto $p\phi_0$ permanezca constante.

Dado que el campo eléctrico incidente es longitudinal tenemos entonces que $\nabla \times \vec{E}_{inc} = 0$, por lo que no hay campo magnético $\vec{H}_{inc}$ asociado con $\vec{E}_{inc}$.

Al igual que en el caso del cálculo para T^T , mantendremos las variables p y ω independientes, por lo que la onda incidente no es una onda *libre*, es decir, tiene asociada una densidad de carga externa ρ_{ext} dada por

$$\nabla \cdot \vec{E}_{inc} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0}, \quad (1.116)$$

de modo que

$$\rho_{ext} = \epsilon_0 E_0 ip \exp[ipr \cos \theta] = \rho_0 \exp[ipr \cos \theta], \quad (1.117)$$

donde $\rho_0 = ip\epsilon_0 E_0$. Además de ρ_{ext} también tenemos una densidad de corriente externa de la forma $\vec{J}_{ext} = J_0 \exp[ipz] \hat{e}_z$ generando y acompañando a la onda incidente, que la podemos calcular empleando la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}_{ext} &= i\omega \rho_{ext}, \\ ip J_0 \exp[ipz] &= i\omega \rho_0 \exp[ipz] = i\omega(ip\epsilon_0 E_0) \exp[ipz], \end{aligned} \quad (1.118)$$

de modo que

$$\vec{J}_{ext} = i\omega \epsilon_0 \vec{E}_{inc}. \quad (1.119)$$

Por otro lado, podemos escribir la onda plana para el potencial escalar en términos de la base esférica empleando nuevamente la Ec. (1.99)

$$\phi_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n j_n(\rho_i) P_n(\cos \theta), \quad (1.120)$$

donde $\rho_i = pr$ y $\phi_n = \phi_0(2n+1)i^n$. Calculando el gradiente y utilizando el hecho de que $P_n^1 = -dP_n/d\theta$ ¹⁵ tenemos

$$\nabla \phi_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \left[\frac{d}{dr} j_n(\rho_i) P_n(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{1}{r} j_n(\rho_i) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \hat{e}_\theta \right], \quad (1.121)$$

de modo que

$$\vec{E}_{inc} = -\nabla \phi_{inc} = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n p \left[j_n'(\rho_i) P_n(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{1}{\rho_i} j_n(\rho_i) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \hat{e}_\theta \right], \quad (1.122)$$

en donde la prima denota derivada respecto del argumento de la función y tenemos que

$$-\phi_n p = -\phi_0(2n+1)i^n p = (2n+1)(-ip\phi_0)i^{n-1} = (2n+1)i^{n-1}E_0, \quad (1.123)$$

así que finalmente podemos escribir el campo eléctrico incidente como

$$\vec{E}_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^i \left[j_n'(\rho_i) P_n(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta \right], \quad (1.124)$$

donde $E_n^i = (2n+1)i^{n-1}E_0$.

Si calculamos el límite $p \rightarrow 0$ del campo eléctrico incidente

$$\vec{E}_{inc} = -iE_0 j_0'(\rho_i) \hat{e}_r + 3E_0 \left[j_1'(\rho_i) \cos \theta \hat{e}_r - \frac{j_1(\rho_i)}{\rho_i} \sin \theta \hat{e}_\theta \right] + \dots, \quad (1.125)$$

en donde

$$\begin{aligned} \frac{j_1(\rho_i)}{\rho_i} &= \frac{\sin \rho_i}{\rho_i^3} - \frac{\cos \rho_i}{\rho_i^2}, \\ j_0'(\rho_i) &= \frac{d}{d\rho_i} \frac{\sin \rho_i}{\rho_i} = \frac{-1}{\rho_i} \left[\frac{\sin \rho_i}{\rho_i} - \cos \rho_i \right], \\ j_1'(\rho_i) &= \frac{d}{d\rho_i} \left(\frac{\sin \rho_i}{\rho_i^2} - \frac{\cos \rho_i}{\rho_i} \right) = 2 \frac{\cos \rho_i}{\rho_i^2} + \frac{\sin \rho_i}{\rho_i} - 2 \frac{\sin \rho_i}{\rho_i^3} \end{aligned} \quad (1.126)$$

¹⁵ver Bohren [34], pág. 91, Ec. (4.30).

vemos que se reduce a una constante en la dirección del eje Z

$$\lim_{\rho_i \rightarrow 0} \vec{E}_{inc} = \frac{E_1^i}{3} [\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta] = E_0 [\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta] = E_0 \hat{e}_z, \quad (1.127)$$

ya que $j'_0(\rho_i \rightarrow 0) = 0$, $j'_1(\rho_i \rightarrow 0) = 1/3$ y $j_i(\rho_i \rightarrow 0)/\rho_i = 1/3$.

Por otra parte, la base esférica empleada en el cálculo de la componente transversal de la matriz T , Ecs. (1.80), no es la base esférica completa, ya que las funciones $\vec{N}$ y $\vec{M}$ tienen divergencia cero y entonces no podríamos escribir una onda longitudinal en términos de ellas. La base esférica completa está dada por

$$\begin{aligned} \vec{L}_{emn} &= \frac{\nabla \psi_{emn}}{k}, & \vec{L}_{omn} &= \frac{\nabla \psi_{omn}}{k}, \\ \vec{M}_{emn} &= \nabla \times (r \psi_{emn}), & \vec{M}_{omn} &= \nabla \times (r \psi_{omn}), \\ \vec{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{emn}}{k}, & \vec{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{omn}}{k}, \end{aligned} \quad (1.128)$$

en donde, como ya habíamos mencionado, e (o) hace referencia (por sus siglas en inglés) a que la función es par (impar), y donde nuevamente, Ec. (1.81),

$$\begin{aligned} \psi_{emn} &= \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \\ \psi_{omn} &= \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \end{aligned}$$

son las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales. Recordando que hemos empleado la notación usual para las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , las funciones radiales $z_n(kr)$ son cualquiera de las cuatro funciones esféricas de Bessel: j_n , y_n , $h_n^{(1)}$ o $h_n^{(2)}$ y P_n^m son los polinomios asociados de Legendre con la normalización dada por Bohern [34].

Hemos añadido dos funciones al conjunto que ya teníamos, y éstas son

$$\begin{aligned} \vec{L}_{emn} &= z'_n(kr) \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{z_n(kr)}{kr} \cos(m\phi) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_\theta - \\ &\quad - z_n(kr) \frac{1}{kr \sin \theta} P_n^m(\cos \theta) m \sin(m\phi) \hat{e}_\phi, \end{aligned} \quad (1.129)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_{omn} &= z'_n(kr) \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{z_n(kr)}{kr} \sin(m\phi) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_\theta + \\ &\quad + z_n(kr) \frac{1}{kr \sin \theta} P_n^m(\cos \theta) m \cos(m\phi) \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Consideremos ahora

$$\vec{L}_{e0n}^{(1)} = j'_n(kr)P_n(\cos\theta)\hat{e}_r + \frac{j_n(kr)}{kr} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)\hat{e}_\theta, \quad (1.131)$$

en donde el superíndice (1) denota que la dependencia radial de la función $z_n(kr)$ es a través de la función esférica de Bessel $j_n(kr)$. Comparando la expresión para $\vec{L}_{e0n}^{(1)}$ con la Ec. (1.124) podemos escribir finalmente el campo eléctrico incidente en la forma

$$\vec{E}_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^i \vec{L}_{e0n}^{(1)}(\rho_i). \quad (1.132)$$

Las corrientes externas quedan entonces dadas por

$$\vec{J}_{ext} = i\omega\epsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n^i \vec{L}_{e0n}^{(1)}(\rho_i), \quad (1.133)$$

y la densidad de carga externa por

$$\frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E}_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^i \nabla \cdot \vec{L}_{e0n}^{(1)}(\rho_i). \quad (1.134)$$

Para el campo eléctrico interno podemos proponer una expresión en términos de la base esférica de la siguiente forma

$$\vec{E}_I = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i \left(-d'_n \vec{N}_{e0n}^{(1)} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \vec{L}_{e0n}^{(1)} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \vec{N}_{e0n}^{(1)} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \vec{E}_{inc}, \quad (1.135)$$

en donde $\tilde{\epsilon} \equiv \epsilon/\epsilon_0$. El campo magnético estaría entonces dado por

$$\vec{H}_I = \frac{ik_I}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \vec{M}_{e0n}^{(1)}, \quad (1.136)$$

donde el superíndice (1) denota que la dependencia radial es a través de $j_n(\rho_I)$, con $\rho_I = k_I r = k_0 \sqrt{\epsilon_I(\omega)\mu_0} = k_0 N_I$, donde N_I es el índice de refracción complejo de la partícula esférica.

Utilizando las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{ext}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_{ext} - i\omega\vec{D}, \end{aligned}$$

podemos confirmar que la elección para la dependencia de los campos internos en términos de la base esférica es correcta, de modo que para cuando $r \leq a$ tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon_I \vec{E}_I = \epsilon_I \nabla \cdot \vec{E}_I = \epsilon_I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^i}{\tilde{\epsilon}_I} \nabla \cdot \vec{L}_{e0n}^{(1)} = \epsilon_0 \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} = \rho_{ext}, \quad (1.137)$$

en donde hemos empleado la Ec. (1.134) y el hecho de que $\nabla \cdot \vec{N}_{e0n} = 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}_I &= \frac{ik_I}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \nabla \times \vec{M}_{e0n}^{(1)} \\ &= \frac{ik_I^2}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \vec{N}_{e0n}^{(1)} = \frac{i\omega^2 \epsilon_I \mu_0}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \vec{N}_{e0n}^{(1)} \\ &= -i\omega \epsilon_i \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i (-d'_n) \vec{N}_{e0n}^{(1)} = -i\omega \epsilon_I \left[\vec{E}_I - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \vec{E}_{inc} \right] \\ &= -i\omega \epsilon_I \vec{E}_I + i\omega \epsilon_0 \vec{E}_{inc} = -i\omega \vec{D}_I + \vec{J}_{ext}, \end{aligned} \quad (1.138)$$

de modo que se cumplen ambas ecuaciones por lo que las expresiones para los campos internos son correctas.

Podríamos igualmente escribir los campos radiados o esparcidos en términos de la base esférica de la siguiente forma

$$\vec{E}_{esp} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i a_n \vec{N}_{e0n}^{(3)}, \quad (1.139)$$

$$\vec{H}_{esp} = \frac{-ik_0}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i a_n \vec{M}_{e0n}^{(3)}, \quad (1.140)$$

en donde el superíndice (3) indica que la dependencia radial sería a través de $h_n(\rho_0)$, con $\rho_0 = k_0 r$.

Imponiendo condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell en la superficie de la esfera $r = a$ podemos calcular los coeficientes, pero realmente nos interesa solamente d'_n que es el que está relacionado con el campo eléctrico interno, y para éste obtenemos

$$d'_n = \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - 1 \right) \frac{\frac{j_n(x_i)}{x_i} x_0^2 h_n(x_0)}{-x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' + x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'}. \quad (1.141)$$

El detalle del cálculo del coeficiente se encuentra en el Apéndice C.

Si definimos

$$\zeta \equiv \left(1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I}\right), \quad (1.142)$$

entonces podemos reescribir el campo eléctrico *longitudinal* de la siguiente forma

$$\vec{E}_I = \zeta \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d_n^L \vec{N}_{e0n}^{(1)} + (1 - \zeta) \vec{E}_{inc} \quad (1.143)$$

donde

$$d_n^L = \frac{\frac{j_n(x_i)}{x_i} x_0^2 h_n(x_0)}{-x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' + x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'}. \quad (1.144)$$

Podemos notar que los polos de d_n^L , que es la condición para excitar los modos $\vec{N}_{e0n}^{(1)}$, son exactamente los mismos que los polos del coeficiente d_n^T , Ec. (1.91)

$$d_n^T = \frac{x_i j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]'}{x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'},$$

que es la condición para excitar los modos $\vec{N}_{e1n}^{(1)}$ en el caso transversal. Para el límite de partículas pequeñas la condición para excitar los modos se reduce a

$$\tilde{\epsilon}_I = -\frac{n+1}{n} < 0. \quad (1.145)$$

Para excitar los modos $\vec{L}_{e0n}^{(1)}$ manteniendo su divergencia finita, la condición es

$$\tilde{\epsilon}_I = 0, \quad (1.146)$$

que es la condición usual para excitar los polaritones (plasmones de bulto).

En el límite $p \rightarrow 0$ el coeficiente d_1^L es el único que contribuye al campo eléctrico interno, y está dado por

$$d_1^L = \frac{1}{3} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{-x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' + x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]'}. \quad (1.147)$$

Si consideramos el límite de partícula pequeña $a \rightarrow 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} -x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' &= \frac{-i \tilde{\epsilon}_I}{3}, \\ \lim_{a \rightarrow 0} x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]' &= \frac{-2i}{3}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\lim_{a \rightarrow 0} d_1^L = \frac{1}{3} \frac{-i}{-\frac{i\tilde{\epsilon}_I}{3} - \frac{2i}{3}} = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I + 2},$$

en donde hemos utilizado las mismas aproximaciones que para el caso transversal, Ecs. (1.95)

$$j_1(\rho) \approx \frac{\rho}{3}, \quad j_2(\rho) \approx \frac{\rho^2}{15}, \quad h_1^{(1)}(\rho) \approx \frac{-i}{\rho^2}, \quad h_2^{(1)}(\rho) \approx \frac{-3i}{\rho^3}.$$

Por otro lado, tenemos que $\vec{N}_{e01}$ está dado por

$$\begin{aligned} \vec{N}_{e01} &= 2 \frac{j_1(\rho_I)}{\rho_I} \cos \theta \hat{e}_r - \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_1(\rho_I)] \sin \theta \hat{e}_\theta \\ &= 2 \frac{j_1(\rho_I)}{\rho_I} \cos \theta \hat{e}_r - \left[2 \frac{j_1(\rho_I)}{\rho_I} - j_2(\rho_I) \right] \sin \theta \hat{e}_\theta \\ &= 2 \frac{j_1(\rho_I)}{\rho_I} (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta) + j_2(\rho_I) \sin \theta \hat{e}_\theta \\ &= 2 \frac{j_1(\rho_I)}{\rho_I} \hat{e}_z + j_2(\rho_I) \sin \theta \hat{e}_\theta, \end{aligned} \quad (1.148)$$

de modo que tomando el límite estático tenemos

$$\lim_{a \rightarrow 0} \vec{N}_{e01} = \frac{2}{3} \hat{e}_z.$$

Dado que $E_1^i = 3E_0$ tenemos finalmente que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \vec{E}_I = E_0 \left[2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \right) \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I + 2} \right) + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \right] \hat{e}_z = \frac{3}{\tilde{\epsilon}_I + 2} E_0 \hat{e}_z, \quad (1.149)$$

que es el mismo resultado que el que se obtuvo para el caso transversal, Ec. (1.97), correspondiente al problema de una sola partícula esférica en presencia de un campo eléctrico constante y uniforme. De aquí podemos observar que en el límite $p \rightarrow 0$ y en el caso de partícula pequeña, la partícula esférica responde de la misma manera a un campo eléctrico transversal incidente que a uno longitudinal.

Ya que contamos con la expresión correcta para el campo eléctrico interno $\vec{E}_I$, podemos seguir el mismo procedimiento que en el caso transversal: proyectamos la Ec. (1.72) en la dirección $\hat{e}_z$ y despejamos $\overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}; \omega)$

$$T^L(p; \omega) = \hat{e}_z \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{p}, \vec{p}; \omega) \cdot \hat{e}_z = \frac{i \omega \mu_0}{E_0} \hat{e}_z \cdot \vec{J}_{tot,L}^{ind}(\vec{p}; \omega), \quad (1.150)$$

en donde ahora $\vec{J}_{tot,L}^{ind}$ denota la densidad de corriente inducida correspondiente a una onda plana incidente longitudinal. Si escribimos $\vec{J}_{tot,L}^{ind}(\vec{p}; \omega)$ en términos de la transformada de Fourier de $\vec{J}_{tot,L}^{ind}(\vec{r}; \omega)$ obtenemos que

$$T^L(p; \omega) = \frac{k_0^2}{-i\omega\epsilon_0 E_0} \int \hat{e}_z \cdot \vec{J}_{tot,L}^{ind}(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r, \quad (1.151)$$

en donde, al igual que en caso transversal, $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Podemos reescribir la Ec. (1.151) en términos del campo interno $\vec{E}_I$ usando nuevamente la Ec. (1.69), de modo que finalmente obtenemos

$$T^L(p; \omega) = \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \int \hat{e}_z \cdot \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r, \quad (1.152)$$

donde $\chi_p = \tilde{\epsilon}_I - 1$. Esta es la ecuación que tenemos que integrar para calcular T^L . Todos los detalles de este cálculo se encuentran en el Apéndice C.

Calculando los productos escalares y escribiendo $\exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}]$ en términos de la base esférica, Ec. (1.99), tenemos que

$$\begin{aligned} T^L(p, \omega) &= \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + 2\pi \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l E_n^i \int_0^a r^2 dr \left\{ d_n^L \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} j_l(\rho_i) \int_{-1}^1 d\mu \mu P_n(\mu) P_l(\mu) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] j_l(\rho_i) \int_{-1}^1 d\mu (1-\mu^2) P_n'(\mu) P_l(\mu) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.153)$$

donde $\mu = \cos \theta$. Después de realizar las integrales obtenemos una expresión analítica y compacta para la componente longitudinal de la matriz T

$$T^L(p, \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + \chi_p \sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)(2n+1) d_n^L \frac{j_n(x_I)}{x_I} \frac{j_n(x_i)}{x_i} \right]. \quad (1.154)$$

Empleando la Ec. (1.67), podemos escribir finalmente una expresión para la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local para el sistema coloidal

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p; \omega) = 1 + \frac{n_0}{k_0^2} T^L(p; \omega). \quad (1.155)$$

Análogamente al caso transversal, podemos hacer un desarrollo en potencias de $x_i = pa$ para $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$, para lo cual necesitamos hacer un desarrollo del coeficiente d_n^L . Manteniendo términos hasta orden x_i^2 tenemos

$$d_1^L \approx d_1^{L[0]} + d_1^{L[2]} x_i^2 = \frac{1}{3} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]' - x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]'} - \frac{1}{30} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]' - x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]'} x_i^2, \quad (1.156)$$

$$d_2^L \approx d_2^{L[1]} = \frac{1}{15} \frac{x_0^2 h_2(x_0)}{x_0^2 h_2(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_2(x_I)]' - x_I j_2(x_I) [x_0 h_2(x_0)]'} x_i, \quad (1.157)$$

en donde los números entre paréntesis cuadrados denotan la potencia de x_i . Entonces el desarrollo para $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ toma la forma

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p; \omega) = \tilde{\epsilon}_{ef}^{L[0]}(\omega) + \tilde{\epsilon}_{ef}^{L[2]}(pa)^2 + \dots, \quad (1.158)$$

en donde

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^{L[0]}(\omega) = 1 + f \zeta \left[1 + 6 d_1^{L[0]} \chi_p \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right], \quad (1.159)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^{L[2]}(\omega) = \left(-\frac{3}{5} d_1^{L[0]} + 6 d_1^{L[2]} \right) \chi_p \frac{j_1(x_I)}{x_I} + 6 d_2^{L[1]} \chi_p \frac{j_2(x_I)}{x_I}, \quad (1.160)$$

donde $\zeta = 1 - 1/\tilde{\epsilon}_I$ y f es la fracción de llenado de las partículas, dada por la Ec. (1.112)

$$f = n_0 \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Con el propósito de hacer énfasis, podemos observar que el término $\tilde{\epsilon}_{ef}^{L[0]}(\omega)$, Ec. (1.159), es el mismo que $\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega)$, Ec. (1.110)¹⁶, pues comparando las Ecs. (1.156) y (1.106) vemos que

$$d_1^{T[0]} = 2 d_1^{L[0]}. \quad (1.161)$$

¹⁶Este coeficiente se calculó en la sección anterior: **Cálculo de T^T** .

1.2. Funciones dieléctricas de los materiales reales considerados

Para el análisis numérico de las expresiones de las funciones respuesta efectivas no locales de sistemas coloidales calculadas en las secciones anteriores, se estudiaron coloides cuyas partículas esféricas embebidas se consideraron hechas de diferentes materiales reales, tanto conductores como aislantes. Como materiales conductores se estudiaron la plata y el oro, mientras que como materiales aislantes fueron poliestireno y dióxido de titanio (TiO_2). Para el análisis numérico se necesitó la información de la función dieléctrica de cada material real como función de la frecuencia, o de la longitud de onda, para la región óptica del espectro electromagnético. A continuación, en la Fig. 1.4, se muestran los valores de la parte real e imaginaria de las funciones respuesta en la región óptica de los metales empleados en el análisis numérico como función de la longitud de onda λ_0 .

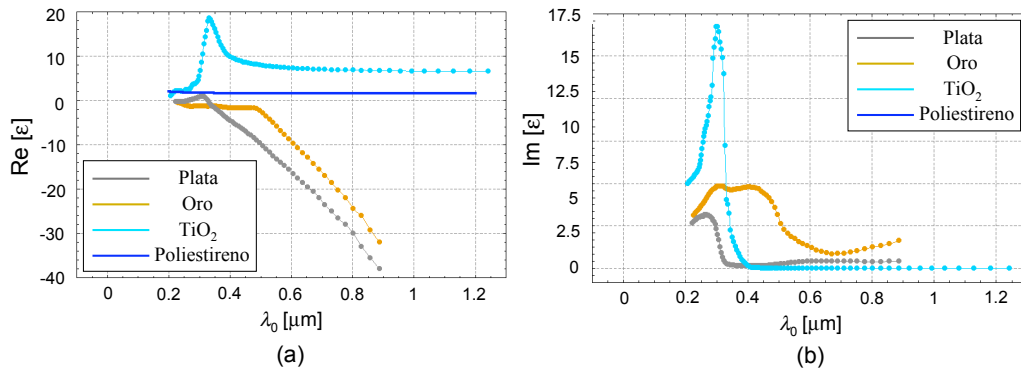


Figura 1.4: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la función dieléctrica ϵ de los materiales reales utilizados (oro, plata, poliestireno y TiO_2) para el análisis numérico, como función de la longitud de onda λ_0 para la región óptica del espectro electromagnético. Los puntos corresponden a valores experimentales y la línea continua es sólo la unión de ellos. Para el caso del poliestireno (línea continua azul), se contó con una función continua para $\text{Re}[\epsilon]$ y se consideró que $\text{Im}[\epsilon] = 0$.

Los datos graficados en la Fig. 1.4 correspondientes a los materiales conductores (oro y plata) se obtuvieron del trabajo de P. B. Johnson and R. W.

Christy [56], mientras que los datos del TiO_2 se obtuvieron del libro editado por E. D. Palik [57]. La línea continua en azul corresponde a la función dieléctrica del poliestireno (que no tiene componente imaginaria) y se obtuvo graficando las ecuaciones proporcionadas por la firma comercial *Duke Scientific*, de donde se adquirieron las partículas, dada por

$$\tilde{\epsilon}(\lambda_0) = \left(1.56663 + \frac{0.00785}{\lambda_0^2} + \frac{0.000334}{\lambda_0^4} \right)^2. \quad (1.162)$$

Podemos observar en la Fig. 1.4 (a), que el dióxido de titanio presenta un pico en la parte real de la función dieléctrica alrededor de $\lambda_0 = 0.33 \mu\text{m}$, lo que equivale a un índice de refracción, parte real, de más de 4.3. Para valores mayores a esa longitud de onda, la parte real del índice de refracción del TiO_2 , se estaciona en un valor de aproximadamente 2.6. En la parte imaginaria, parte (b) de la Fig. (1.4), observamos un pico aproximadamente alrededor de $\lambda_0 = 0.3 \mu\text{m}$, que corresponde a un pico de absorción del TiO_2 en el rango de la luz ultravioleta, y para valores mayores de λ_0 prácticamente no absorbe la radiación electromagnética. La función dieléctrica de los materiales conductores oro y plata, exhiben un comportamiento similar entre ellos. En particular, observamos en la Fig. (1.4) (a), que la parte real de la función dieléctrica de la plata muestra dos cruces del eje X , alrededor de $\lambda_0 = 0.26 \mu\text{m}$ y $\lambda_0 = 0.33 \mu\text{m}$, para después volverse más negativa de forma lineal con λ_0 .

1.3. Análisis numérico de las expresiones de las funciones respuesta efectivas no locales

Una vez que contamos con expresiones cerradas para las funciones respuesta efectivas no locales, $\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p; \omega)$, Ec. (1.105), y $\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p; \omega)$, Ec. (1.155), podemos realizar un análisis numérico de su dependencia tanto con p como con ω , considerando sistemas coloidales cuyas inclusiones esféricas están hechas de materiales reales, como materiales conductores: oro y plata; y materiales aislantes: poliestireno y dióxido de titanio. Por razones de espacio sólo mostraré en este capítulo las gráficas correspondientes a plata y dióxido de titanio, dejando las demás gráficas para el apéndice E. En realidad lo que se grafica es la contribución de las partículas a las funciones respuesta escaladas por la fracción volumétrica de llenado, es decir, $\left(\tilde{\epsilon}_{ef}^{T(L)}(p; \omega) - 1 \right) / f$.

En la Fig. 1.5 tenemos la gráfica de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente transversal de la función

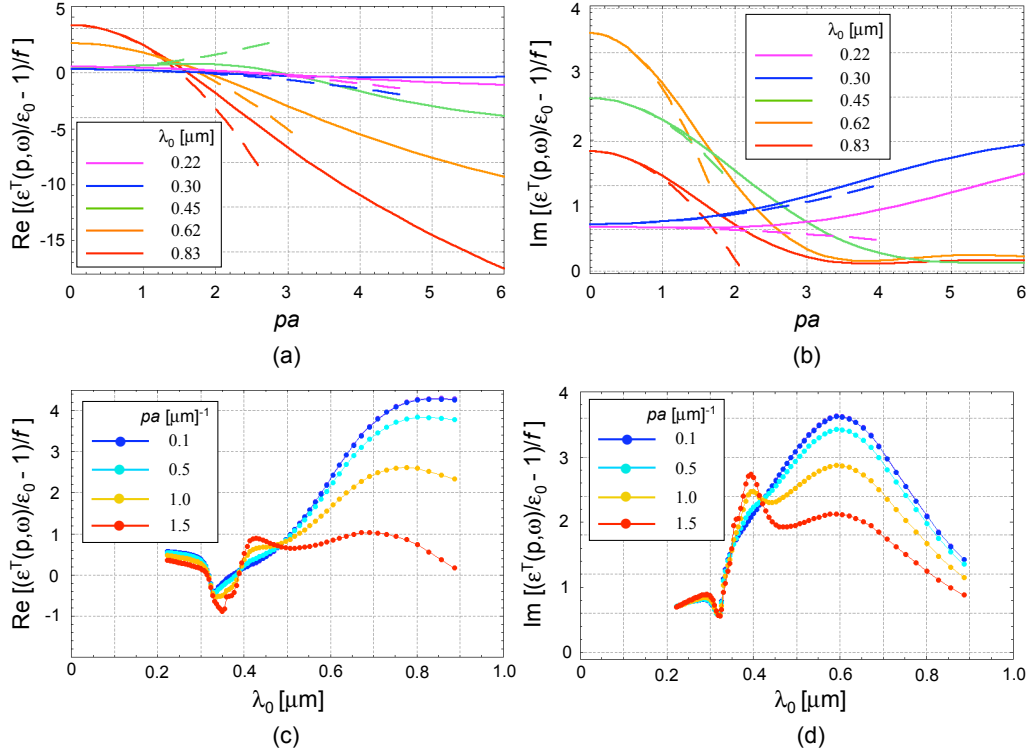


Figura 1.5: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente transversal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando plata para las inclusiones. La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 . En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

dieléctrica efectiva no local $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ normalizada por f , como función del producto adimensional pa , con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, y para diferentes valores de la frecuencia ω o la longitud de onda λ_0 ; así como también las gráficas de la parte real (c) e imaginaria (d) de la misma función pero ahora como función de la longitud de onda λ_0 para diferentes valores de pa ,

considerando un sistema coloidal constituido por inclusiones de plata.

En la Fig. 1.6 tenemos las gráficas para $(\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p; \omega) - 1)/f$ análogas a las de la Fig. 1.5, pero ahora considerando un sistema coloidal con inclusiones de TiO_2 .

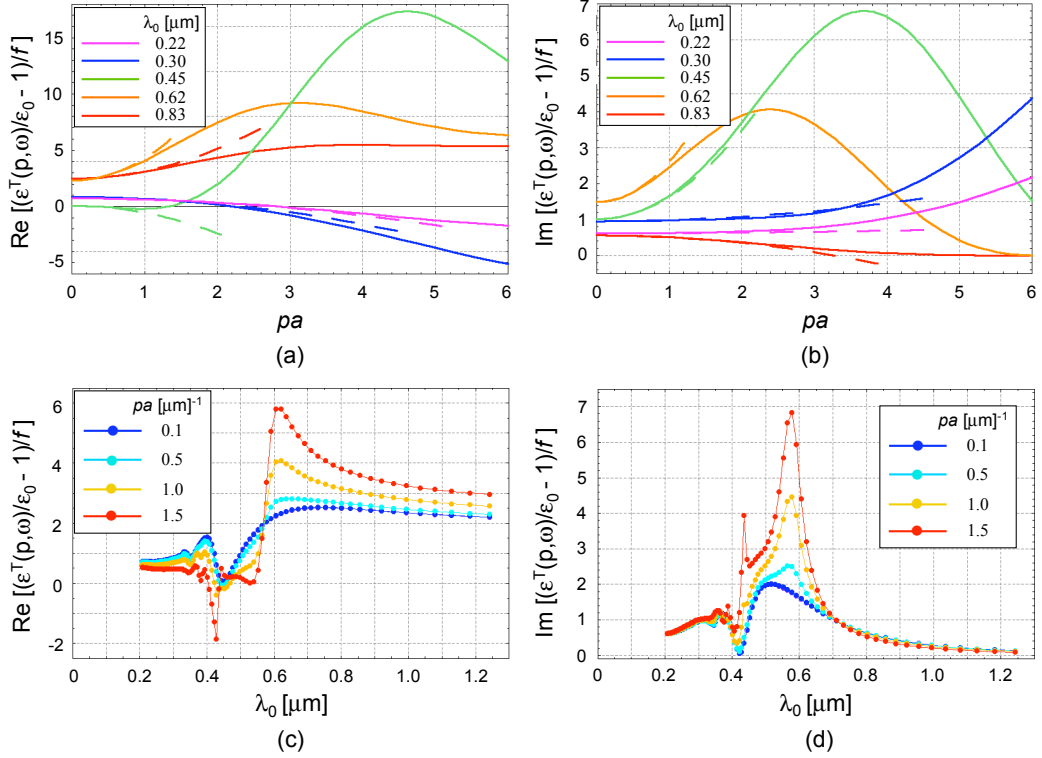


Figura 1.6: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente transversal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando TiO_2 para las inclusiones. La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 . En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

Aunque ninguna de las dos expresiones $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ y $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ escalan con el producto pa , para fines de comparación hemos elegido graficar como función de esta variable adimensional (notando que a está fijo en $0.1 \mu\text{m}$).

En las siguientes gráficas, Fig. 1.7, tenemos ahora la gráfica de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local $(\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p; \omega) - 1)/f$, como

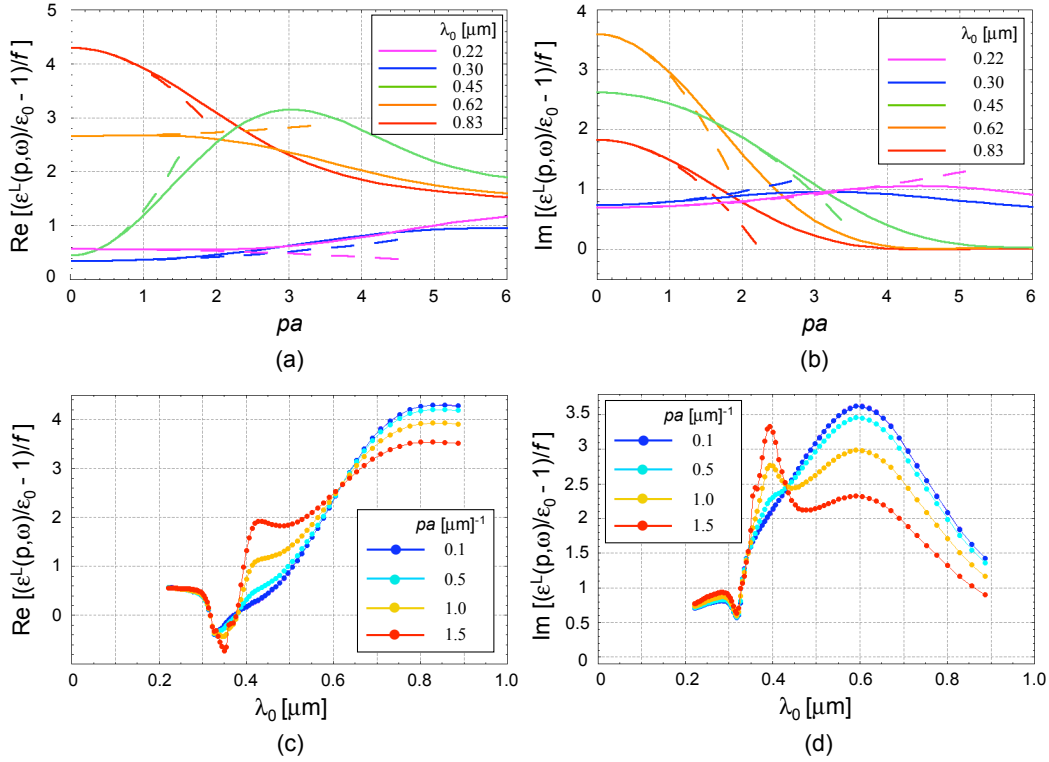


Figura 1.7: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando plata para las inclusiones. En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa . La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 .

función del producto adimensional pa , con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, y para diferentes valores de la longitud de onda λ_0 , así como también las gráficas de la parte real (c) e imaginaria (d) de la misma función pero ahora como función de la longitud de onda λ_0 para diferentes valores de

pa , considerando un sistema coloidal constituido por inclusiones de plata.

De manera análoga, en la Fig. 1.8 tenemos las mismas gráficas que en la Fig. 1.7 pero ahora considerando que el sistema está constituido por partículas de TiO_2 .

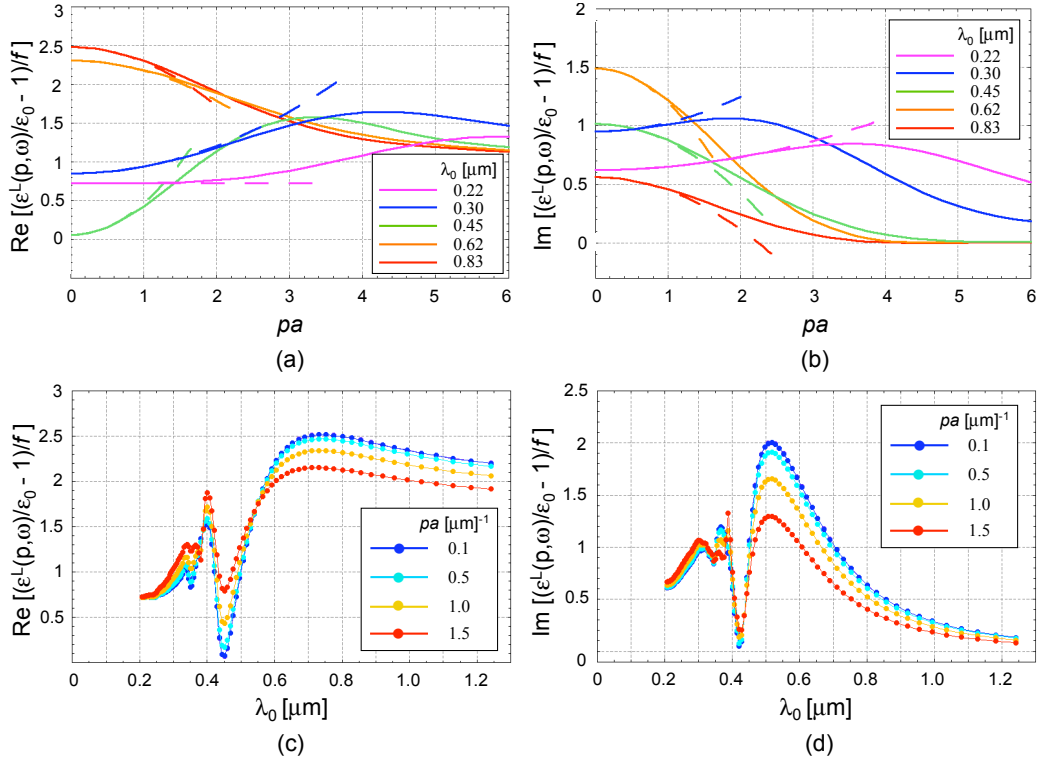


Figura 1.8: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando TiO_2 para las inclusiones. En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa . La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 .

En los incisos (a) y (b) de todas las gráficas anteriores, Figs. 1.5 – 1.8, hemos incluido las gráficas considerando la aproximación cuadrática (líneas discontinuas), tanto para la componente transversal del tensor dieléctrico

efectivo no local, Ec. (1.109), como para la componente longitudinal del tensor dieléctrico efectivo no local, Ec. (1.158), observando que representa una buena aproximación hasta valores del orden de $pa \approx 1$.

Una respuesta local no dependería de p , de modo que el comportamiento no local de las funciones $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ y $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ se aprecia en su dependencia con p . Podemos apreciar en las gráficas anteriores que para algunas frecuencias específicas dicha dependencia puede ser fuerte, del orden de varias veces la magnitud de la fracción volumétrica de llenado f . Podemos notar también que tanto $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ como $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ no tienen regiones en donde su parte imaginaria sea negativa, incluso en las regiones del espectro electromagnético en donde las esferas absorben energía. Podemos observar que la contribución de las partículas a la parte imaginaria, tanto para la componente transversal como la longitudinal del tensor dieléctrico efectivo no local, puede alcanzar valores numéricos comparables a los alcanzados por la parte real, incluso en regiones donde no hay absorción de luz. Para entender lo anterior es necesario recordar que la descripción del campo coherente no es una descripción completa del problema, ya que además del campo coherente existe el campo difuso. Dado que el vector de Poynting está dado por $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$, es posible mostrar que para el caso de campos oscilando a una sola frecuencia ω , el balance de la potencia promedio en el tiempo sobre un período τ de oscilación se puede escribir como

$$-\nabla \cdot \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{B}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{J}_{ind} \cdot \vec{E}^*], \quad (1.163)$$

en donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los campos eléctrico y magnético en el sistema, respectivamente. El símbolo $*$ denota complejo conjugado y el lado derecho de la igualdad anterior, Ec. (1.163), es la potencia disipada en calor Q . Separando los campos en términos de sus componentes promedio (coherente) y fluctuante (difuso)

$$\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle + \delta \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \langle \vec{B} \rangle + \delta \vec{B},$$

podemos escribir el promedio configuracional de la Ec. (1.163) como

$$-\nabla \cdot \langle \vec{S}_{coh} \rangle = \langle Q \rangle + \nabla \cdot \langle \vec{S}_{dif} \rangle, \quad (1.164)$$

en donde

$$\langle \vec{S}_{coh} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\langle \vec{E} \rangle \times \langle \vec{B} \rangle^* / \mu_0], \quad (1.165)$$

es el vector de Poynting asociado al campo coherente, y

$$\langle \vec{S}_{dif} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\langle \delta \vec{E} \times \delta \vec{B}^* / \mu_0 \rangle \right], \quad (1.166)$$

es el vector de Poynting asociado al campo difuso, mientras que $\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\langle \vec{J}_{ind} \cdot \vec{E}^* \rangle \right]$ es el promedio del calor disipado.

Por otro lado, si calculamos $-\nabla \cdot \langle \vec{S}_{coh} \rangle$ directamente de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell, obtenemos

$$-\nabla \cdot \langle \vec{S}_{coh} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\langle \vec{J}_{ind} \rangle \cdot \langle \vec{E} \rangle^* \right]. \quad (1.167)$$

Haciendo uso de la siguiente expresión

$$\langle \vec{J}_{ind} \rangle = -i\omega \left[\overleftrightarrow{\epsilon}_{ef} - \epsilon_0 \overleftrightarrow{I} \right] \cdot \langle \vec{E} \rangle, \quad (1.168)$$

en la Ec. (1.167), podemos escribir finalmente que

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left[\langle \vec{J}_{ind} \rangle \cdot \langle \vec{E} \rangle^* \right] = \frac{\omega}{2} \left[\text{Im} \tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega) \left| \langle \vec{E} \rangle^L \right|^2 + \text{Im} \tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega) \left| \langle \vec{E} \rangle^T \right|^2 \right], \quad (1.169)$$

en donde $\langle \vec{E} \rangle^L$ y $\langle \vec{E} \rangle^T$ son las componentes longitudinal y transversal del promedio del campo eléctrico, respectivamente. Comparando las Ecs. (1.164), (1.167) y (1.169) es posible concluir que las partes imaginarias de $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ y de $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ no deben tomar en cuenta sólo el calor absorbido por las esferas, sino también el campo esparcido que es convertido del campo coherente al campo difuso. Entonces, debido al esparcimiento, el flujo de energía en la componente coherente en una dirección bien definida es convertida al flujo de energía de la componente difusa, viajando en todas las direcciones posibles. También podemos observar que, dado que $\langle \vec{E} \rangle^L$ y $\langle \vec{E} \rangle^T$ son independientes, las funciones $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega)]$ y $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega)]$ deben ser positivas, lo que se puede apreciar en todas las gráficas.

1.4. Relación de dispersión e índice de refracción efectivo no local

Para encontrar los modos electromagnéticos libres que se pueden propagar en el sistema coloidal en bulto, que en nuestro caso serán ondas planas

con una frecuencia ω y magnitud de vector de onda p específicos, utilizamos las ecuaciones de Maxwell, las cuales imponen una relación bien definida entre ω y p llamada relación de dispersión, que está dada por $p(\omega)$ o $\omega(p)$. El carácter no local de las funciones respuesta $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ y $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ tiene un efecto directo en la relación de dispersión de estos modos y para el caso del sistema coloidal estudiado existen dos tipos diferentes de modos que se puede propagar libremente por el sistema: modos longitudinales y modos transversales. La ecuación para encontrar la relación $p(\omega)$ o $\omega(p)$ para los modos longitudinales está dada por

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega) = 0, \quad (1.170)$$

mientras que la ecuación que determina la relación de dispersión para los modos transversales es

$$p^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega). \quad (1.171)$$

Estas dos ecuaciones son extendidas analíticamente al plano p complejo y deben ser resueltas para el complejo $p = p' + i p''$, en donde la parte imaginaria de p caracteriza el decaimiento espacial de los modos debido a la absorción y el esparcimiento.

Podemos reescribir la ecuación para la relación de dispersión de los modos longitudinales sustituyendo la expresión para $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$, Ec. (1.155),

$$1 + f \frac{3}{4\pi a^3 k_0^2} T^L(p, \omega) = 0. \quad (1.172)$$

Sin embargo, en nuestra teoría hemos considerado la Aproximación de Campo Efectivo, la cual está restringida a sistemas diluidos, por lo que nuestra teoría es válida sólo cuando el segundo sumando del lado izquierdo de la Ec. (1.172) es mucho menor que la unidad, de modo que todo el lado izquierdo de la ecuación nunca podrá ser igual a cero, por lo que no esperamos encontrar este tipo de modos bajo nuestras suposiciones iniciales. En el análisis numérico de la relación de dispersión considerando inclusiones de materiales como oro, plata, poliestireno y dióxido de titanio, analizando una ventana de frecuencias en el óptico, hemos encontrado que efectivamente no están presentes este tipo de modos en el sistema.

Por otro lado, la solución de la relación de dispersión para los modos transversales, Ec. (1.171), sí existe y la podemos denotar como $p^T(\omega)$. Podemos entonces definir un índice de refracción efectivo complejo $N_{ef}(\omega)$ como

$$N_{ef}(\omega) = \frac{p^T(\omega)}{k_0}. \quad (1.173)$$

1.5. Solución exacta de la relación de dispersión y diferentes aproximaciones

La ecuación para la relación de dispersión de los modos transversales, Ec. (1.171), la podemos resolver en forma exacta o utilizando aproximaciones. Las aproximaciones que consideraremos serán las siguientes:

(i) Definimos la aproximación de onda larga (AOL) como

$$p^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}^T(p \rightarrow 0, \omega) \equiv k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega), \quad (1.174)$$

de manera que el índice de refracción efectivo estará dado por

$$N_{ef}^{AOL}(\omega) = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega)}. \quad (1.175)$$

(ii) Definimos la aproximación cuadrática (AC) usando la expansión de la Ec. (1.109) para $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$, incluyendo términos hasta de orden p^2 , de modo que la relación de dispersión toma la siguiente forma

$$p^2 = k_0^2 \left[\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega) + \tilde{\epsilon}_{ef}^{T[2]}(\omega)(pa)^2 \right], \quad (1.176)$$

y resolviendo para $p(\omega)$ obtenemos un índice de refracción efectivo dado por

$$N_{ef}^{AC}(\omega) = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega)}{1 - (k_0 a)^2 \tilde{\epsilon}_{ef}^{T[2]}(\omega)}}, \quad (1.177)$$

el cual contiene la corrección no local a través del término $\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[2]}(\omega)$.

(iii) Definimos la aproximación de cono de luz (ACL) reemplazando $p = k_0$ en la Ec. (1.171), de modo que la ecuación por resolver es

$$p^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}^T(p = k_0, \omega). \quad (1.178)$$

El índice de refracción efectivo bajo esta aproximación se puede escribir como

$$N_{ef}^{ACL}(\omega) = 1 + i\gamma S(0), \quad (1.179)$$

en donde $S(0)$ es la amplitud de esparramiento en la dirección frontal y

$$\gamma \equiv \frac{3f}{2(k_0 a)^3}. \quad (1.180)$$

Es posible demostrar que el índice que se obtiene bajo esta aproximación coincide con el propuesto por van de Hulst [33] hace algún tiempo, mostrando que

$$T^T(p = k_0, \omega) = i \frac{4\pi}{k_0} S(0), \quad (1.181)$$

lo que se muestra en el apéndice F. El punto importante a resaltar es que ahora reconocemos la naturaleza *no local* del índice de refracción efectivo de van de Hulst, el cual, hasta donde sabemos, siempre se había considerado como *local*.

Por otro lado, para resolver en forma exacta la Ec. (1.171) y encontrar la relación de dispersión siendo p complejo, se tiene que explorar todo el plano complejo para encontrar los ceros de la ecuación. La forma en como se resolvió la Ec. (1.171) fue empleando un procedimiento iterativo, el cual consistió en considerar como aproximación inicial $p(\omega) \equiv p^{[0]}(\omega)$ la aproximación de cono de luz, Ec. (1.178), en el lado derecho de la Ec. (1.171), y resolviendo la ecuación obtenemos la solución compleja $p^{[1]}(\omega)$, que podemos reinsertar en el lado derecho de la Ec. (1.171), generando una segunda solución $p^{[2]}(\omega)$. Podemos repetir el procedimiento r veces hasta que la convergencia sea obtenida, para después definir el índice de refracción efectivo como

$$N_{ef}(\omega) = \frac{p^{[r]}(\omega)}{k_0}. \quad (1.182)$$

En general, la convergencia y los valores finales obtenidos mediante este procedimiento dependerán del valor inicial $p^{[0]}(\omega)$, sin embargo, en nuestro caso los mismos valores finales fueron obtenidos usando diferentes valores iniciales, siendo la única diferencia el tiempo de cálculo empleado para cada condición inicial antes de llegar a la convergencia. Es importante notar que los valores finales obtenidos fueron muy cercanos a los obtenidos utilizando la aproximación de van de Hulst como valor inicial, lo que indica que en realidad el índice de refracción efectivo de van de Hulst es, en general, una buena aproximación al índice exacto que caracteriza la propagación de ondas transversales libres en el coloide. Cabe señalar que la búsqueda de soluciones se realizó solamente en la región visible del espectro, por lo que la existencia de soluciones en otras regiones del plano complejo, o para otras frecuencias o de tamaños de partícula, es posible, ya que no se realizó una búsqueda exhaustiva y sistemática.

1.6. Análisis numérico del índice de refracción efectivo no local

Las expresiones de los índices de refracción efectivos que se obtuvieron al resolver la ecuación para los modos transversales, tanto exactamente como en forma aproximada, fueron analizadas numéricamente considerando nuevamente sistemas coloidales con inclusiones metálicas (oro y plata) o dieléctricas (poliestireno y dióxido de titanio). Por razones de espacio sólo mostraré en este capítulo el análisis correspondiente a plata y TiO_2 . Las demás gráficas para los materiales de oro y poliestireno se encuentran en el apéndice E.

En la siguiente gráfica, Fig. 1.9, se muestra la dependencia de la parte real (a) e imaginaria (b) con la frecuencia ω , o la longitud de onda λ_0 , del índice de refracción para las tres aproximaciones consideradas al igual que para la solución exacta, en la región óptica del espectro, considerando un sistema coloidal en donde sus inclusiones están hechas de plata. La fracción volumétrica de llenado se fijó en 2% ($f = 0.02$) mientras que el radio de las esferas se fijó en $a = 0.1 \mu\text{m}$.

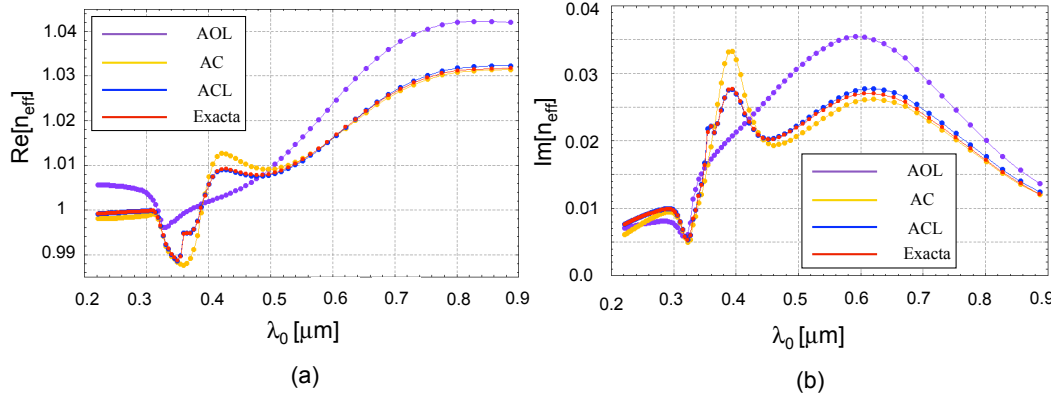


Figura 1.9: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del índice de refracción obtenido bajo las tres aproximaciones consideradas al igual que el exacto como función de la longitud de onda λ_0 , para una fracción volumétrica de llenado de $f = 0.02$ y con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, considerando plata para las inclusiones esféricas.

En la Fig. 1.10 se muestran las gráficas análogas a la Fig. 1.9, pero ahora considerando que las inclusiones del sistema coloidal están hechas de TiO_2 .

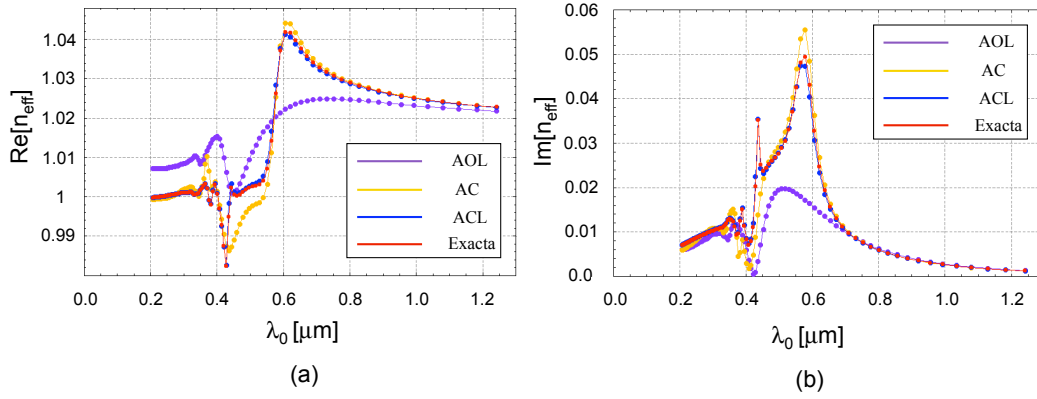


Figura 1.10: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del índice de refracción obtenido bajo las tres aproximaciones consideradas al igual que el exacto como función de la longitud de onda λ_0 , para una fracción volumétrica de llenado de $f = 0.02$ y con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, considerando TiO_2 para las inclusiones esféricas.

Podemos apreciar en las Figs. 1.9 y 1.10 que la aproximación de van de Hulst al índice de refracción efectivo exacto es una buena aproximación para la mayoría de las frecuencias utilizadas en las gráficas. En el siguiente capítulo se presenta un método experimental para medir simultáneamente la parte real e imaginaria del índice de refracción efectivo de un sistema coloidal constituido por inclusiones esféricas hechas de poliestireno, utilizando la refracción de la luz. En este experimento reportado en un artículo recientemente publicado [6], se concluye que efectivamente el índice de van de Hulst representa una buena aproximación al índice de refracción efectivo que caracteriza un sistema coloidal.

Aunque, en general, el índice de van de Hulst representa una buena aproximación, podemos observar ciertas diferencias con el índice de refracción efectivo exacto. Para el caso de sistemas coloidales constituidos por inclusiones de plata, Fig. 1.9, observamos que la diferencia entre la contribución de las partículas a la parte real del índice de refracción efectivo de van de Hulst $\text{Re}[N_{ef}^{ACL}(\omega) - 1]$ y la contribución al índice exacto $\text{Re}[N_{ef}(\omega) - 1]$ puede ser hasta de 2.9×10^{-4} para $\lambda_0 = 0.49 \mu\text{m}$, lo que representa un error relativo del 3.6 %. Para la parte imaginaria, la diferencia $\text{Im}[N_{ef}^{ACL}(\omega)] - \text{Im}[N_{ef}(\omega)]$ alcanza 6.5×10^{-4} para $\lambda_0 = 0.73 \mu\text{m}$, representando un error relativo de alrededor de 3 %. En el caso del TiO_2 , Fig. 1.10, las diferencias pueden ser todavía

mayores. Por ejemplo, la diferencia de la contribución de las partículas a la parte real puede ser hasta de 1.7×10^{-3} para $\lambda_0 = 0.54 \mu\text{m}$, lo que representa un error relativo del 28 %, y para la parte imaginaria las diferencias puede ser de hasta 2.1×10^{-3} para $\lambda_0 = 0.43 \mu\text{m}$, representando un error relativo del 10.3 %. Todas estas diferencias mencionadas están dentro del rango de medición de un diseño experimental real. Realizando un análisis numérico, se observa que las diferencias crecen incrementando la fracción volumétrica de llenado f , por lo que se podría realizar en un futuro un análisis más detallado de los errores cometidos por la aproximación de van de Hulst.

Aunque se ha mostrado que, en general, el índice de refracción efectivo de van de Hulst representa una buena aproximación a la descripción de la propagación de ondas transversales a través de sistemas coloidales diluidos, incluso para inclusiones grandes en comparación a la longitud de onda del haz incidente, lo más importante es notar que N_{ef}^{ACL} no es un índice de refracción *local*, sino que tiene un carácter *no local* al provenir de una relación de dispersión no local. Una de las consecuencias más importantes de la no localidad es que el índice de refracción efectivo no puede ser empleado directamente en las fórmulas de Fresnel para calcular la amplitud de reflexión de una onda plana electromagnética de una interfaz plana con un medio coloidal. El uso ingenuo del índice de refracción efectivo en Fresnel puede conducir a errores considerables, como fue señalado anteriormente en trabajos recientes [1], [31] y [32], en donde se comparan los resultados obtenidos sustituyendo el índice de van de Hulst en Fresnel con los resultados obtenidos del experimento y con un modelo más elaborado basado directamente en la teoría de esparcimiento múltiple.

1.7. Esquema tradicional

Una forma más tradicional y completamente equivalente de analizar el problema de la respuesta electromagnética de un sistema coloidal, es emplear las funciones respuesta: dieléctrica efectiva $\tilde{\epsilon}_{ef}$ y permeabilidad magnética efectiva $\tilde{\mu}_{ef}$ en vez de las funciones respuesta $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ y $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$. A esta descripción más tradicional la llamaremos *esquema $\epsilon-\mu$* . Como se mostrará en seguida, ambos esquemas están relacionados y son equivalentes, de modo que podemos pasar de un esquema a otro sin perder información sobre el sistema.

En el *esquema $\epsilon-\mu$* se introducen dos campos vectoriales adicionales, llamados campos materiales, los cuales son: el campo de polarización $\vec{P}$ y el

campo de magnetización $\vec{M}$. El campo de polarización $\vec{P}$ se define como

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\langle \rho_{ind} \rangle, \quad (1.183)$$

en donde $\langle \rho_{ind} \rangle$ es el promedio de la densidad de carga inducida y está relacionada con el promedio de la densidad de corriente inducida $\langle \vec{J}_{ind} \rangle$ a través de la ley de conservación de carga

$$\nabla \cdot [\langle \vec{J}_{ind} \rangle + i\omega \vec{P}] = 0. \quad (1.184)$$

Entonces, la cantidad entre paréntesis cuadrados siempre se puede escribir como el rotacional de un campo vectorial

$$\langle \vec{J}_{ind} \rangle + i\omega \vec{P} = \nabla \times \vec{M}, \quad (1.185)$$

en donde $\vec{M}$ es el llamado campo de magnetización. Entonces podemos separar la contribución al promedio de la densidad de corriente inducida como

$$\langle \vec{J}_{ind} \rangle = -i\omega \vec{P} + \nabla \times \vec{M} \equiv \vec{J}_P + \vec{J}_M, \quad (1.186)$$

es decir, en dos partes: una ($\vec{J}_P$) asociada con $-i\omega \vec{P}$, la derivada respecto al tiempo de $\vec{P}$, y otra ($\vec{J}_M$) asociada con el rotacional de $\vec{M}$. Con esta separación notamos que $\vec{J}_M$ es transversal ($\nabla \cdot \vec{J}_M = 0$) mientras que $\vec{J}_P$ tiene en general componentes longitudinal y transversal. Debido a que los campos $\vec{P}$ y $\vec{M}$ no están unívocamente definidos, ya que $\nabla \times \vec{P}$ y $\nabla \cdot \vec{M}$ se pueden elegir arbitrariamente, las cantidades $\vec{J}_P$ y $\vec{J}_M$ no tienen todavía una interpretación física.

Para poder seleccionar con un significado físico preciso las cantidades $\vec{P}$ y $\vec{M}$, identificamos primero $\vec{P}$ con el promedio de la densidad volumétrica de momentos dipolares eléctricos inducidos, mostrando que los campos eléctrico y magnético producidos por $\langle \rho_{ind} \rangle$ y $\vec{J}_P$, siendo escritos en términos de $\vec{P}$ a través de $\nabla \cdot \vec{P} = -\langle \rho_{ind} \rangle$ y $\vec{J}_P = -i\omega \vec{P}$, son exactamente los mismos que los campos eléctrico y magnético producidos por un promedio volumétrico de dipolos eléctricos dados por $\vec{P}$. Lo mismo sucede con $\vec{M}$, ya que se puede mostrar que los campos eléctrico y magnético producidos por $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ son los mismos que los producidos por el promedio de la densidad volumétrica de momentos dipolares magnéticos inducidos dados por $\vec{M}$. Aunque en

muchos libros de texto se muestra que estas identificaciones son válidas para el límite cuasi-estático, se puede mostrar que siguen siendo válidas para campos dependientes del tiempo oscilando con una frecuencia ω arbitraria [59]. Con esta interpretación clara de $\vec{P}$ y de $\vec{M}$ se puede asegurar que en materiales lineales, el promedio de la densidad volumétrica de dipolos eléctricos inducidos está relacionada linealmente al campo eléctrico total promedio y que el promedio de la densidad volumétrica de dipolos magnéticos inducidos está linealmente relacionado al campo magnético total promedio. Podemos entonces reescribir la generalización no local de la Ley de Ohm, Ec. (1.61), en la representación p , es decir, en el espacio de Fourier, como

$$\begin{aligned}\langle \vec{J}_{ind} \rangle &= \sigma_{ef}^L \left(\langle \vec{E} \rangle^L + \langle \vec{E} \rangle^T \right) + (\sigma_{ef}^T - \sigma_{ef}^L) \langle \vec{E} \rangle^T = \\ &= \sigma_{ef}^L \langle \vec{E} \rangle + (\sigma_{ef}^T - \sigma_{ef}^L) \langle \vec{E} \rangle^T. \quad (1.187)\end{aligned}$$

en donde se han omitido las dependencias de (p, ω) de las funciones respuesta y de los campos. En el límite de onda larga ($p \rightarrow 0$) tenemos que $\sigma_{ef}^T = \sigma_{ef}^L$, de modo que el término que sobrevive en la Ec. (1.187) es proporcional a $\langle \vec{E} \rangle$, por lo que podemos identificar

$$\vec{J}_P = \sigma_{ef}^L \langle \vec{E} \rangle, \quad (1.188)$$

y entonces necesariamente tenemos que identificar a $\vec{J}_M$ como

$$\vec{J}_M = (\sigma_{ef}^T - \sigma_{ef}^L) \langle \vec{E} \rangle^T. \quad (1.189)$$

Utilizando la Ley de Faraday podemos escribir que

$$\langle \vec{E} \rangle^T = -\frac{\omega}{p^2} \vec{p} \times \langle \vec{B} \rangle, \quad (1.190)$$

en donde $\langle \vec{B} \rangle$ es el promedio del campo magnético. Escribiendo $\vec{J}_M = i\vec{p} \times \vec{M}$ y $\vec{J}_P = -i\omega \vec{P}$ y haciendo uso de la relación entre $\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}$ y $\overleftrightarrow{\epsilon}_{ef}$, Ec. (1.66), obtenemos finalmente

$$\vec{P} = (\epsilon_{ef}^L - \epsilon_0) \langle \vec{E} \rangle \quad \text{y} \quad \vec{M} = \frac{\omega^2}{p^2} (\epsilon_{ef}^T - \epsilon_{ef}^L) \langle \vec{B} \rangle. \quad (1.191)$$

Como se mencionó anteriormente, en el *esquema* $\epsilon-\mu$ se introducen para un medio homogéneo e isotrópico dos funciones respuesta escalares: la función dieléctrica efectiva ϵ_{ef} y la permeabilidad magnética efectiva μ_{ef} , definidas a través de las siguientes relaciones

$$\vec{P} = (\epsilon_{ef} - \epsilon_0) \langle \vec{E} \rangle \quad \text{y} \quad \vec{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_{ef}} \right) \langle \vec{B} \rangle, \quad (1.192)$$

de modo que la relación entre el *esquema* $L-T$ y el *esquema* $\epsilon-\mu$ se puede identificar a partir de la identificación de las Ecs. (1.191) y (1.192), obteniendo

$$\epsilon_{ef}(p, \omega) = \epsilon_{ef}^L(p, \omega), \quad (1.193)$$

$$\frac{1}{\mu_{ef}(p, \omega)} = \frac{1}{\mu_0} - \frac{\omega^2}{p^2} [\epsilon_{ef}^T(p, \omega) - \epsilon_{ef}^L(p, \omega)]. \quad (1.194)$$

Realizando un desarrollo en potencias de $x_i = pa$ para las funciones respuesta en este esquema, el desarrollo para $\epsilon_{ef}(p, \omega)$ será el mismo que para $\epsilon_{ef}^L(p, \omega)$, dado por la Ec. (1.158). Para $\mu_{ef}(p, \omega)$, manteniendo términos hasta orden $(pa)^2$ en la diferencia $\epsilon_{ef}^T(p, \omega) - \epsilon_{ef}^L(p, \omega)$, obtenemos que

$$1 - [\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega)]^{-1} = x_0^2 f \zeta \chi_p \left[\left(3d_1^{T[2]} + 6 \frac{d_1^{L[0]}}{x_I^2} \right) \frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{1}{x_I^2} + \frac{3}{2} \left(c_1^{T[1]} + d_2^{T[1]} - 4d_2^{L[1]} + 2 \frac{d_1^{L[0]}}{x_I} \right) \frac{j_2(x_I)}{x_I} \right].$$

En las siguientes gráficas, Figs. 1.11 y 1.12, se ha graficado como función de la variable adimensional pa , así como también como función de la longitud de onda λ_0 , $\text{Re} \left[(\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega))^{-1} - 1 \right] / f$ y $\text{Im} \left[(\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega))^{-1} - 1 \right] / f$ para mostrar la contribución de las partículas a la parte real e imaginaria de la permeabilidad magnética efectiva, en donde $\tilde{\mu}_{ef} = \mu_{ef}/\mu_0$. Podemos apreciar que dichas contribuciones a la permeabilidad magnética efectiva son del mismo orden de magnitud que la contribución de las partículas a la función dieléctrica efectiva. Podemos también apreciar que aunque $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega)] > 0$ y $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega)] > 0$, la parte imaginaria de la permeabilidad magnética efectiva

$$\text{Im} [\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega)] = |\tilde{\mu}_{ef}|^2 \frac{k_0^2}{p^2} \{ \text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega)] - \text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega)] \}, \quad (1.195)$$

la cual es proporcional a la diferencia de $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega)]$ y $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega)]$, puede ser negativa. Sin embargo, es posible mostrar que la energía total disipada es siempre positiva, ya que en nuestro caso no existen efectos magnéticos intrínsecos, siendo éstos solamente los generados a través de la Ley de Faraday. Por último, es importante resaltar que $\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega)$ representa una respuesta

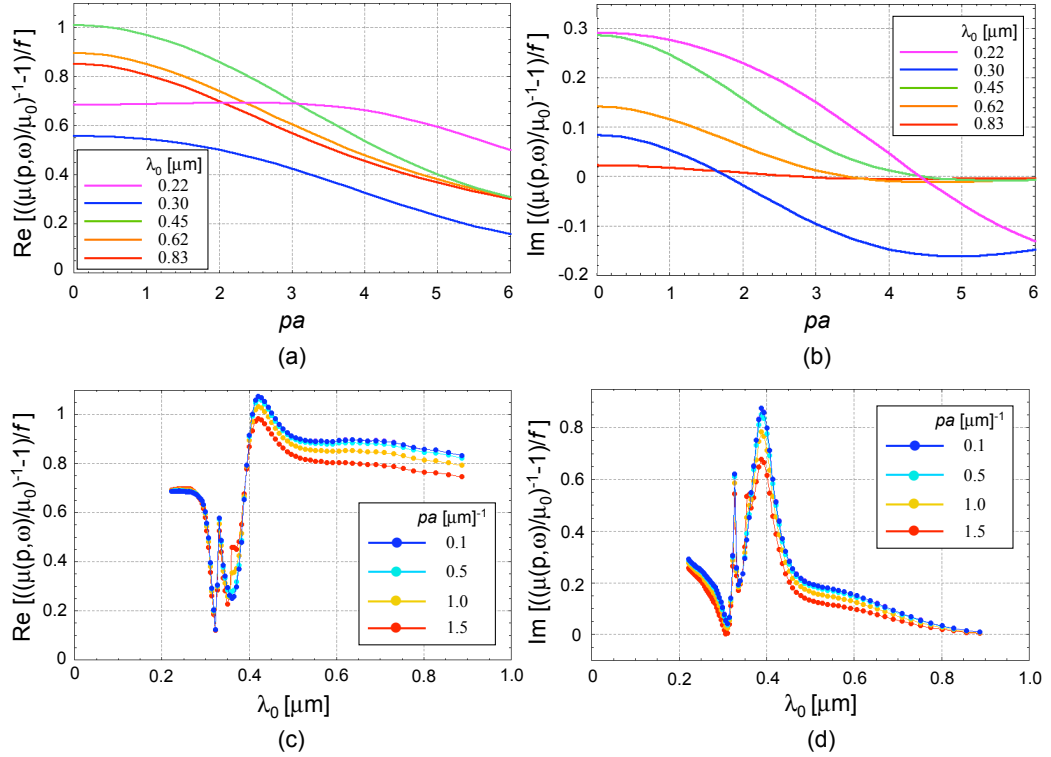


Figura 1.11: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del inverso de la permeabilidad magnética menos uno, normalizada a f , como función de la variable adimensional pa para diferentes valores de λ_0 , para un sistema coloidal conformado por inclusiones esféricas de plata con el radio fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$. En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

magnética real del sistema directamente relacionada con el promedio de la densidad volumétrica de dipolos magnéticos inducidos por las variaciones temporales del promedio del campo magnético. Esta respuesta magnética es

en realidad diamagnética y es proporcional a $\epsilon_{ef}^T - \epsilon_{ef}^L$.

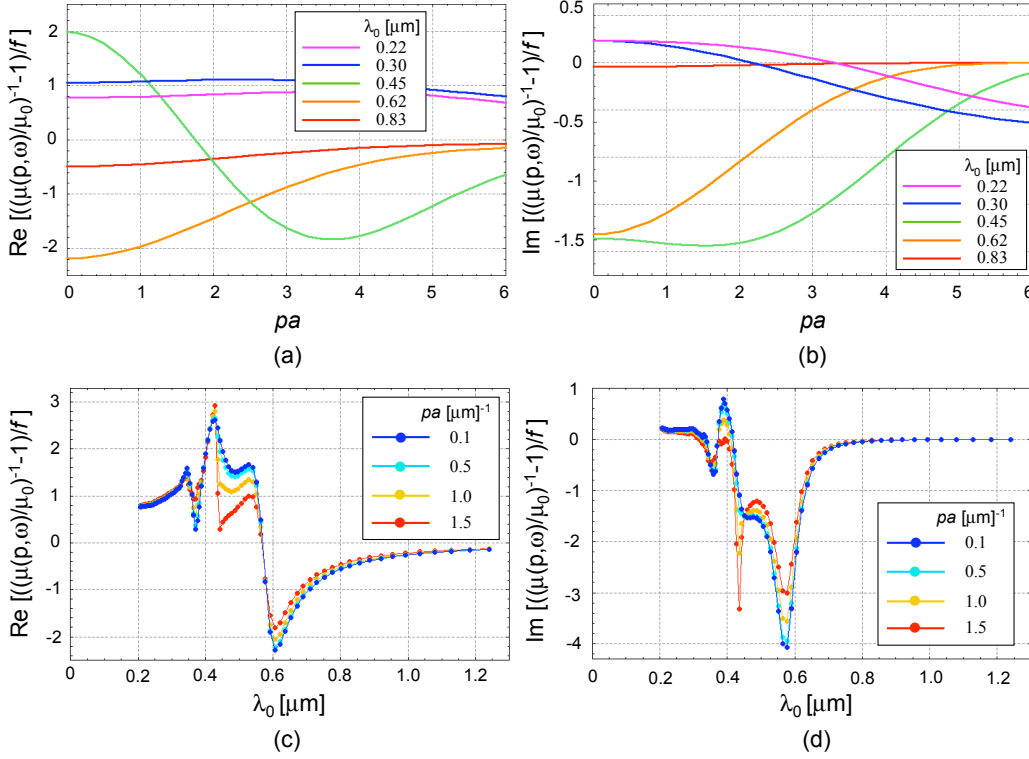


Figura 1.12: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del inverso de la permeabilidad magnética menos uno, normalizada a f , como función de la variable adimensional pa para diferentes valores de λ_0 , para un sistema coloidal conformado por inclusiones esféricas de TiO_2 con el radio fijo en $a = 0.1 \mu m$. En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

Las ecuaciones para encontrar la relación de dispersión de los modos electromagnéticos que se propagan libremente en el sistema coloidal, desde el punto de vista del *esquema* $\epsilon - \mu$, sabemos que están dados por

$$\epsilon_{ef}(p, \omega) = 0, \quad (1.196)$$

$$p^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}(p, \omega) \tilde{\mu}_{ef}(p, \omega). \quad (1.197)$$

que son equivalentes a las ecuaciones para la relación de dispersión en el

esquema $L-T$, Ecs. (1.170) y (1.171), de modo que ambos esquemas son completamente equivalentes.

Capítulo 1

Medición de un índice de refracción no local

1.1. Medición de un índice de refracción efectivo no local: reflexión *vs* refracción

El problema de medir un índice de refracción efectivo de sistemas coloidales ha sido estudiado experimentalmente desde hace más de 40 años [26], [27], [45]-[51], y en la mayoría de estos trabajos se han empleado refractómetros de ángulo crítico tipo Abbé [47]. El problema con estas mediciones es que el principio se basa en la determinación del índice de refracción a partir del ángulo crítico entre la interfaz prisma-coloides, sin embargo, la reflectancia cerca del ángulo crítico en dicha interfaz no tiene una transición definida a la reflexión total interna, lo que implica que para poder extraer información acerca del índice de refracción efectivo de las mediciones es necesario un modelo para la reflectancia en función del ángulo de incidencia, en términos de las propiedades efectivas del sistema. El modelo tradicional utilizado es considerar una interfaz plana entre dos medios locales de donde, a partir de condiciones de frontera en las ecuaciones de Maxwell, se encuentra la relación entre la amplitud de reflexión y el índice de refracción efectivo dada por las fórmulas de Fresnel. Sin embargo, el uso de este modelo ha evidenciado inconsistencias [26] por lo cual no ha sido posible emplearlo como una herramienta confiable para la inversión de datos de reflectancia. Por otro lado, se ha identificado [1], [2], [60] que la reflectancia de un sistema semi-infinito de partículas grandes (en comparación a la longitud de onda del campo incidente) no sigue las expresiones para la amplitud de reflexión dadas por las fórmulas de Fresnel, proponiéndose modelos alternativos basados en teoría de esparsamiento múltiple. Más aún, identificando los parámetros ópticos efectivos en estos modelos, se ha concluido que en la reflexión de una interfaz plana se requiere, además de una permitividad eléctrica efectiva, una permeabilidad magnética efectiva, esto incluso considerando que las partículas al igual que la matriz en donde están embebidas sean no magnéticas. Lo anterior es parte importante de las conclusiones que se desprenden del capítulo anterior, Cap. ??, en donde se reportan los cálculos de las funciones respuesta efectivas no locales de bulto de sistemas coloidales turbios. Con todo lo anterior se puede concluir que es necesario un análisis más profundo para la validación de las técnicas de medición del índice de refracción efectivo a través de experimentos de reflexión cercanos al ángulo crítico, por lo que una alternativa atractiva para reemplazar las mediciones que involucren reflexión de la luz, es emplear el fenómeno de refracción. De hecho, en un trabajo anterior [47],

el único que se encontró en la literatura, se mide directamente el ángulo de refracción de la luz en la interfaz de un medio coloidal por un método llamado por sus autores como “método del lente coloidal”. Al parecer este método ha permanecido ignorado por mucho años y, al parecer, ninguna validación del método se había publicado hasta el momento de este trabajo. El método que se propone en esta tesis, llamado “método del prisma coloidal”, representa una versión modificada con la que se obtiene una mayor precisión que en el trabajo antes citado.

Existen algunos reportes recientes en la literatura en donde, usando interferometría, se logra medir la parte real del índice de refracción efectivo, a partir de mediciones de diferencia de fase de una onda electromagnética transmitida a través del medio turbio [61, 62]. Sin embargo, en este tipo de experimentos en donde se emplea la coherencia del haz incidente, es difícil realizar espectroscopía, es decir, emplear diferentes frecuencias del haz incidente, lo que es más fácil de obtener experimentalmente a través de un experimento de refracción pues se podría iluminar el sistema incluso con luz blanca.

Para poder determinar el índice de refracción de un sistema coloidal a través de un experimento de refracción, primero será necesario describir la transmisión de luz en un sistema inhomogéneo, para lo cual será de utilidad separar su descripción en términos de una componente coherente y una componente difusa que, como ya se comentó en la introducción, la componente coherente corresponde al promedio de los campos ópticos sobre todas las posibles configuraciones disponibles del sistema coloidal, mientras que el campo difuso representa las fluctuaciones de los campos ópticos del promedio. También se comentó en la introducción que para sistemas diluidos la componente coherente viaja a través del medio inhomogéneo con un vector de onda efectivo $\vec{k}_{ef}$, y en el caso de inclusiones pequeñas en el coloide, la energía asociada a la componente difusa puede ser despreciada pudiéndose describir cabalmente la propagación de la onda a través de la componente coherente. Sin embargo, este no es el caso cuando las inclusiones son grandes, que es el caso que nos interesa, pues la energía en el haz difuso puede ser del orden o mayor que la energía propagándose en la dirección coherente, dando una sensación óptica de turbidez del sistema. A pesar de estas circunstancias, es posible definir un índice de refracción efectivo para un medio turbio, uno de los temas centrales de esta tesis, considerando la propagación efectiva sólo de la componente coherente. Este índice de refracción efectivo será en general complejo y podrá ser utilizado para determinar la fase y la atenuación de la

onda coherente conforme ésta se propaga a través del coloide. En este caso, la parte imaginaria del índice de refracción efectivo, asociado con la atenuación, no tomará solamente en cuenta la absorción debida a las partículas, sino también al esparcimiento responsable de la transformación del campo coherente al difuso.

1.2. Método del prisma coloidal

El método denominado *método del prisma coloidal*, consiste en un experimento sencillo para medir simultáneamente tanto la parte real como la imaginaria del índice de refracción efectivo de una suspensión de partículas, a través de mediciones del ángulo de refracción y de la transmitancia de un haz láser a través de un prisma hueco lleno con la suspensión coloidal. Debido a la turbidez del sistema el método está restringido a sistemas diluidos, y dado que la componente coherente irá decayendo de forma exponencial dentro del coloide, el camino óptico dentro del medio no puede ser grande comparado con el inverso del coeficiente de atenuación α , por lo que el haz deberá incidir lo más cercano posible al vértice del prisma, como se muestra en la Fig. (1.1).

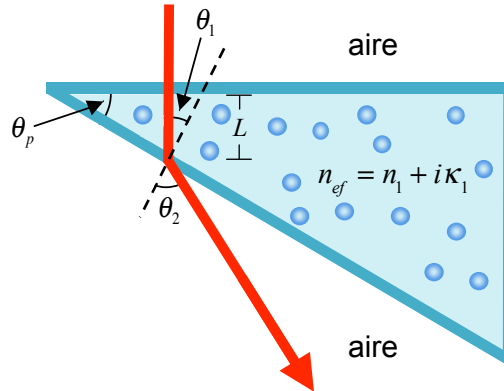


Figura 1.1: Geometría del prisma hueco lleno con el sistema coloidal sobre el cual incide el haz láser.

Si se llena el prisma hueco con agua solamente, dado que el haz láser incide sobre el prisma perpendicularmente a la interfaz de entrada y el agua no absorbe a la longitud de onda de la radiación incidente, el haz se refractará conforme sale del prisma de acuerdo con la ley de Snell usual. Si ahora

inyectamos partículas al prisma, quitando un volumen pequeño de agua y reemplazándolo con una suspensión del sistema coloidal, y homogeneizamos la mezcla, el láser se refractará aún más dependiendo el tipo y la cantidad de partículas añadidas. La refracción adicional se puede determinar midiendo el desplazamiento del haz láser lejos del prisma, el cual es proporcional a la distancia al plano de medición y al incremento en el ángulo de refracción debido a la presencia de las partículas. La medición precisa de este desplazamiento lateral del haz láser, requiere medir con precisión el perfil del láser en el plano de detección antes y después de añadir partículas. La medición del perfil se puede realizar con precisión empleando una navaja y midiendo la potencia transmitida con un fotodetector como función de la posición de la navaja. Estas mediciones se hacen en dirección perpendicular al eje definido por el haz láser y a lo largo de la dirección de refracción como se muestra en la Fig. (1.2). A la curva resultante obtenida por este procedimiento la denotaremos como *perfil acumulativo integrado*, y diferenciando dicha curva obtenemos el perfil del haz láser. De estas curvas es posible obtener el ángulo de refracción así como también la atenuación del haz.

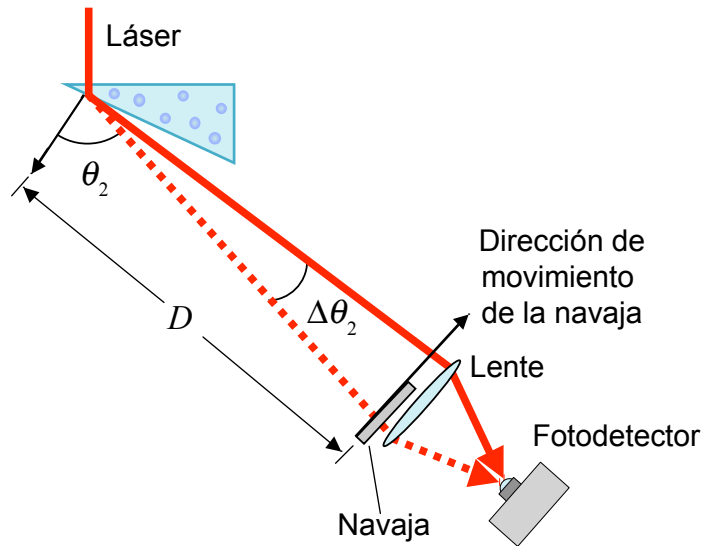


Figura 1.2: Esquema del arreglo experimental.

Es interesante analizar el problema considerando una onda plana incidente de manera perpendicular a la interfaz de entrada del prisma, lo que

implica que dentro del prisma los planos de amplitud constante son paralelos a los planos de fase constante (lo que se conoce como onda homogénea), siendo ambos paralelos a la interfaz de entrada. Sin embargo, dado que el haz atraviesa diferentes distancias para llegar a la interfaz de salida del prisma con un ángulo θ_p , la amplitud del campo sobre la interfaz de salida tendrá un decaimiento exponencial conforme se aleja del vértice del prisma. La posible existencia de las condiciones de contorno en esta interfaz requiere que la amplitud del campo del otro lado de la interfaz, es decir ya fuera del prisma (aire en el caso de nuestro experimento), tenga el mismo decaimiento exponencial. Lo anterior implica que la onda al salir al aire no puede ser una onda plana usual, sino más bien será una onda evanescente con propiedades muy específicas¹.

Para poder relacionar el ángulo de refracción medido y la atenuación en la intensidad transmitida obtenida del experimento, con las propiedades de propagación y extinción del sistema coloidal, necesitamos construir una relación adecuada para la geometría del prisma así como un índice de refracción efectivo $n_{ef} = n_1 + i\kappa_1$ para caracterizar el sistema coloidal.

El modelo que emplearemos para el índice de refracción efectivo, con el cual compararemos los resultados experimentales, es el llamado índice de refracción efectivo de van de Hulst, el cual coincide con el índice que se obtiene bajo la Aproximación del Cono de Luz (ACL), considerando $p = k_0$, en la relación de dispersión de los modos transversales, Ec. (??). Ahora, sabemos que este índice de refracción efectivo proviene de una relación de dispersión no local y representa una buena aproximación al índice de refracción efectivo *exacto* que se obtiene al resolver la relación de dispersión de los modos transversales en forma exacta. Lo anterior es parte importante de los resultados del Cap. ?? . El índice de refracción efectivo no local de van de Hulst está dado por

$$n_{ef}^{vdH} = n_m [1 + i\gamma S(0)], \quad (1.1)$$

en donde n_m es el índice de refracción de la matriz, $S(0)$ es la amplitud de esparcimiento frontal de una partícula embebida en la matriz, que en el caso de partículas esféricas puede ser calculado a partir de la teoría de Mie² en términos del índice de refracción de la partícula y de la matriz, y el radio de

¹Todos los detalles se encuentran en el apéndice D, incluyendo la solución de una onda evanescente que se propaga en el aire o incluso en el vacío.

²Ver libro de Bohren y Huffman [34], pág. 112.

la partícula; y γ está dada por

$$\gamma = \frac{3f}{2x^3}, \quad (1.2)$$

donde f es la fracción volumétrica ocupada por las esferas, $x = k_m a$ es el llamado parámetro de tamaño, donde k_m es la magnitud del vector de onda dentro de la matriz y a es el radio de las partículas. En general el índice de refracción de van de Hulst es una cantidad compleja, incluso aunque tanto las partículas como la matriz sean no absorbentes, pues como ya se mencionó anteriormente, el coeficiente de extinción κ_1 caracteriza tanto a la eventual absorción de las partículas, o incluso de la matriz, así como a la transferencia de la energía del campo coherente al difuso, debido al esparcimiento de la luz conforme el haz se propaga por el medio.

Para relacionar el ángulo de refracción medido con el índice de refracción efectivo, necesitamos una extensión de la ley de Snell que tome en cuenta la geometría del prisma y la presencia de un índice de refracción efectivo con parte real e imaginaria. Esta extensión, deducida en el apéndice D, tiene la misma estructura que la ley de Snell usual, es decir, relaciona el ángulo de incidencia a la interfaz de salida θ_p con el ángulo de refracción θ_2 de la siguiente forma

$$N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p) \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_2, \quad (1.3)$$

en donde n_1 y κ_1 son la parte real e imaginaria del índice de refracción efectivo del sistema coloidal, respectivamente. n_2 es el índice de refracción del medio fuera del prisma, que en nuestro caso es aire ($n_2 = n_0 = 1$) y el índice de refracción N_1 que denotaremos como *operativo* está dado por

$$N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p) = \frac{n_1 n_0}{\sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2} + n_1^2 \sin^2 \theta_p)}}, \quad (1.4)$$

en donde las constantes a y b están definidas como

$$a \equiv n_0^2 - (n_1^2 - \kappa_1^2) \sin^2 \theta_p \quad \text{y} \quad b \equiv 2 n_1 \kappa_1 \sin^2 \theta_p. \quad (1.5)$$

Esta forma de la ley de Snell representa una generalización de la ley de Snell usual, apropiada para la geometría del prisma empleado en el experimento.

Las mediciones de la atenuación de la intensidad de la componente coherente del haz como función de la distancia z recorrida a través del medio

turbio, se pueden relacionar con la parte imaginaria del índice de refracción efectivo a través de la ley Beer-Lambert³

$$I = I_0 \exp[-2k_0\kappa_1 z] = I_0 \exp[-\alpha z], \quad (1.6)$$

en donde k_0 es la magnitud del vector de onda en el vacío y α es el coeficiente de atenuación, el cual está relacionado con la sección transversal de extinción C_{ext} como $\alpha = \eta C_{ext}$, donde η es la densidad de número de partículas en el coloide. Empleando el teorema óptico se puede mostrar que⁴

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k_0^2} \text{Re}[S(0)]. \quad (1.7)$$

Es importante notar que en la deducción de la Ec. (1.3) se consideró que el haz incidente era una onda plana infinita, de modo que la solución pierde todo significado físico más allá del vértice del prisma. En sentido estricto, la interacción de una onda plana con el prisma de dimensiones finitas es un problema de esparcimiento, pero en realidad uno no tiene una onda infinita como haz incidente en los experimentos sino más bien un haz gaussiano de dimensiones finitas. En este caso uno puede considerar que la validez de la solución de la onda plana puede ser restringida a la región que ocupa el haz gaussiano, es decir, podemos describir el haz gaussiano como una superposición de ondas planas, de modo que el haz transmitido puede ser considerado como una superposición de ondas evanescentes. Podemos analizar el problema de refracción de un haz gaussiano de la siguiente forma: podemos propagar el haz incidente a través del prisma despreciando la difracción debida al tamaño finito del haz, lo que para nuestro caso representa una aproximación válida⁵. Una vez que conocemos el campo eléctrico en la

³Estamos considerando como pérdidas del haz coherente toda la luz que sale de esa dirección debido al esparcimiento de las esferas. Dado que estamos despreciando cualquier posible absorción de la luz por el vidrio del prisma, el agua desionizada o las partículas, el único error que se podría cometer sería despreciar la luz difusa que viaja en la misma dirección del haz coherente, la cual podría llegar hasta el detector. Sin embargo, dado que el detector está ubicado a una distancia $L=1,549 \pm 3$ mm y el lente presenta un área de recolección de luz de 6.4516 cm^2 , el ángulo sólido que presenta el detector es de aproximadamente $3.16 \times 10^{-2} \pm 6 \times 10^{-5}$ radianes.

⁴Ver libro de Bohren y Huffman [34], pág. 112, Ec. (4.76).

⁵La aproximación es válida ya que la distancia que viaja el haz dentro del coloide L , es mucho menor que la llamada *distancia de Rayleigh* del haz gaussiano $\zeta_0 = n_1 \pi \varpi_0^2 / \lambda_0$, en donde λ_0 y ϖ_0 son la longitud de onda en el vacío y el radio de cintura del haz incidente, respectivamente. En nuestro experimento tenemos que $L \approx 2$ mm y $\zeta_0 = 50$ cm por lo que podemos considerar como válida la aproximación.

interfaz de salida del prisma, podemos propagar el campo óptico al detector empleando los procedimientos estándares de la óptica de Fourier, tomando en cuenta de esta forma refracción, atenuación y difracción del haz en su camino hacia el detector. Dado que la fracción de luz viajando dentro del prisma en la región más alejada del vértice viajará una distancia mayor que la fracción de luz viajando cerca del vértice, uno podría suponer que la forma gaussiana del haz se deformará, y una medición precisa del ángulo de refracción debería contemplar este efecto. Sin embargo, como veremos en seguida, este no es el caso y el haz refractado continua siendo gaussiano.

Consideremos dos sistemas de referencia: un sistema coordenado primado cuyo origen coincide con la interfaz de entrada del prisma, plano definido por $z' = 0$, y donde $\hat{e}_{z'}$ apunta hacia el interior del prisma; y un segundo sistema coordenado no primado cuyo origen coincide con la interfaz de salida del prisma, $z = 0$, donde $\hat{e}_z$ apunta hacia afuera del prisma, como se muestra en la Fig. (1.3).

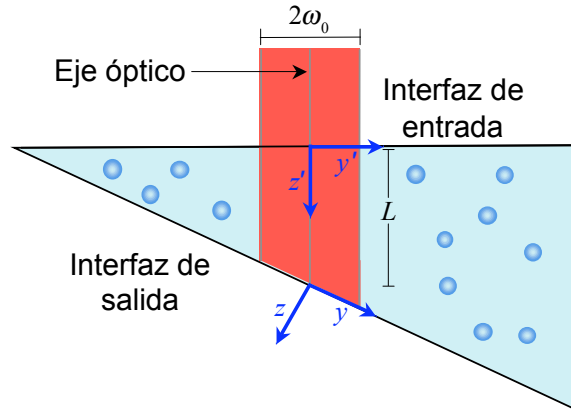


Figura 1.3: Diagrama esquemático del prisma con el haz incidente y los sistemas coordenados, primado y no primado, en la interfaz de entrada y salida del prisma, respectivamente.

La expresión para un haz gaussiano en la aproximación paraxial se puede encontrar en diversos libros⁶, de modo que podemos escribir que el campo eléctrico del haz gaussiano viajando en aire antes de entrar al prisma tiene

⁶Ver por ejemplo Guenther [63], pág. 337.

la forma

$$\vec{E} = E_0 \exp \left[-\frac{x'^2 + y'^2}{\omega_0^2} \right] \exp [i k_0 n_0 z'] \hat{e}, \quad (1.8)$$

en donde $\hat{e}$ es el vector de polarización en el plano $X'Y'$ y k_0 es la magnitud del vector de onda en el vacío. Si consideramos que el haz incide de manera perpendicular a la interfaz de entrada del prisma, entonces podemos escribir el campo eléctrico refractado, viajando fuera del prisma, como

$$\vec{E} = t E_0 \exp \left[\frac{x^2 + y^2 \cos^2 \theta_p}{\omega_0^2} \right] \exp [i k_0 n_{ef} (L + y \sin \theta_p)] \hat{e}, \quad (1.9)$$

en donde t es el coeficiente de transmisión de las interfaces de entrada y salida del prisma, $n_{ef} = n_1 + i \kappa_1$ es el índice de refracción efectivo que caracteriza al coloide y hemos utilizado que $x' = x$, $y' = y \cos \theta_p$ y $z' = L + y \sin \theta_p$, donde L es la distancia que recorre el eje óptico del haz láser dentro del prisma, indicada en la Fig. (1.3). Aunque en general t será una función de n_1 y κ_1 , podemos considerar con un error despreciable, a lo más del orden de la fracción volumétrica de llenado f , que t está dado por el producto de los coeficientes de transmisión de la interfaz de entrada y de salida, cuando el prisma es llenado con agua solamente. Sumando y restando la cantidad $(\frac{1}{4} k_0^2 \omega_0^4 \kappa_1^2 \sin^2 \theta_p) / (\omega_0^2 \cos^4 \theta_p)$ en la primera exponencial de la Ec. (1.9), podemos reescribir la expresión para el campo eléctrico refractado como

$$\begin{aligned} \vec{E} = t E_0 \exp(-\kappa_1 L) \exp \left[\frac{1}{4} k_0^2 \kappa_1^2 \tan^2 \theta_p \right] \exp [i k_0 n_1 (L + y \sin \theta_p)] \times \\ \times \exp \left[\frac{x^2 + \cos^2 \theta_p \left(y - \frac{1}{2} k_0 \omega_0^2 \kappa_1 \sin \theta_p \right)^2}{\omega_0^2} \right] \hat{e}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Podemos apreciar que el campo eléctrico refractado, al salir del prisma, sigue teniendo un perfil gaussiano, es decir, la forma del haz no se ha deformado aunque su máximo se ha desplazado

$$y^* = - \frac{k_0 \omega_0^2 \kappa_1 \sin \theta_p}{2 \cos^2 \theta_p}. \quad (1.11)$$

Este desplazamiento lateral y^* que sufre el haz al atravesar el medio inhomogéneo, se puede estimar, y para uno de los experimentos realizados fue de

$y^* = 15 \mu\text{m}$, mientras que el perfil del haz refractado en el plano de detección se movió aproximadamente 3.5 mm, de modo que el error cometido en despreciar y^* fue cerca de 0.4 % en ese experimento. Sin embargo, para cierto tamaño de partículas e índices de refracción, o si el detector no está colocado lo suficientemente lejos, este error puede incrementarse considerablemente y deberá ser tomado en cuenta.

Utilizando procedimientos estándar en óptica de Fourier, podemos propagar el haz desde la salida del prisma hasta el detector, para después calcular la intensidad en la aproximación de campo lejano, obteniendo la siguiente función de la intensidad⁷

$$I(\theta) = I_0 \exp[-2\kappa_1 k_0 L] \exp\left[\frac{k_0^2 \varpi_0^2}{2} \kappa_1 \tan^2 \theta_p\right] \exp\left[-\frac{k_0^2 \varpi_0^2}{2} \frac{\cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_p} (\theta - \theta_2)^2\right], \quad (1.12)$$

donde ϖ_0 es el radio de cintura del haz.

Podemos observar en la Ec. (1.12) que la intensidad del campo eléctrico decae como $\exp[-2\kappa_1 k_0 L]$, por lo que el máximo de intensidad decaerá según la ley de Beer-Lambert, Ec. (1.6), lo que es equivalente a que el haz se hubiera transmitido por una celda de caras paralelas de separación L .

1.3. Arreglo experimental y resultados

Para los experimentos de refracción se construyó un prisma usando vidrio de 3 mm de grosor, cuyo volumen interior es aproximadamente de 2 ml. El vértice del prisma utilizado en los experimentos se midió con un goniómetro y un haz láser, obteniendo un ángulo $\theta_p = 48.1^\circ \pm 0.1^\circ$. Este ángulo es conveniente porque está moderadamente cerca del ángulo crítico definido por el aire y agua pura ($\theta_c = 48.69^\circ$), de modo que el experimento tendrá gran sensibilidad a pequeñas variaciones en el índice de refracción del sistema coloidal. Como fuente de luz se utilizó un haz láser He-Ne de intensidad estabilizada, con longitud de onda $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ y perfil gaussiano. El radio de la cintura del haz láser es de $\varpi_0 \approx 300 \mu\text{m}$. Como fotodetector se empleó un fotodiodo de silicio y se colocó un lente en frente de él para coleccionar la luz. El lente también permitió que el fotodetector permaneciera fijo mientras el ángulo de refracción cambiaba durante el experimento. Se montó una navaja sobre una plataforma de traslación con una resolución de $5 \mu\text{m}$ y se colocó a 5 cm frente

⁷Ver apéndice B de la referencia [6].

al lente. La distancia que recorre el haz láser desde que sale del prisma hasta que llega a la navaja fue de $D = 1,549 \pm 3$ mm. El procedimiento para obtener los perfiles del haz láser fue el siguiente: se comienza obstruyendo con la navaja por completo la entrada del haz al detector para luego ir desplazando la navaja en pasos de $500\ \mu\text{m}$ de manera perpendicular a la dirección del eje óptico, permitiendo la entrada paso a paso del haz en el detector, para finalmente dejar entrar todo el haz al detector. La transmitancia se registró en cada posición de la navaja.

En la Fig. 1.4 se muestran los componentes empleados en la realización del experimento. El haz láser incide normalmente sobre el prisma hueco y después de refractarse se refleja en un par de espejos antes de llegar a la navaja y al detector. La navaja auxiliar entre el segundo espejo y la navaja se utiliza simplemente para bloquear las múltiples reflexiones y refracciones en el prisma e impedir que lleguen al detector.

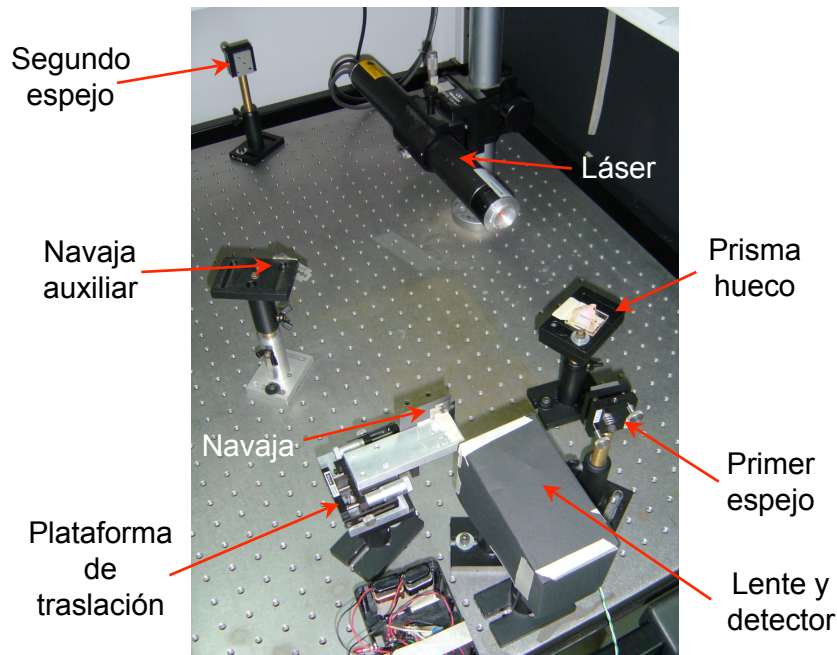


Figura 1.4: Fotografía del experimento de refracción.

El experimento consistió en llenar el prisma con agua desionizada e inyectar varias veces una cantidad fija de partículas del mismo tamaño. Las

partículas que se emplearon en el experimento fueron adquiridas de la firma comercial *Duke Scientific*, quien provee las principales características de las partículas: el material del que están hechas es poliestireno con un índice de refracción de 1.588 para $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$, un diámetro promedio con una desviación estándar del 3 % y las partículas originalmente venían a una concentración al 10 % de esferas en agua. La fracción de volumen, f , dentro del prisma fue incrementándose desde 0 a 0.19 % en seis pasos iguales. Las diluciones para cada inyección se prepararon diluyendo la concentración original en agua desionizada utilizando micropipetas con resolución de $1 \mu\text{l}$. En cada paso del experimento se midió un perfil acumulativo integrado. El ángulo de incidencia en la interfaz de entrada del prisma se fijó en $0 \pm 0.1^\circ$. La incertidumbre en el ángulo de incidencia en la interfaz de entrada del prisma junto con la incertidumbre en el ángulo del prisma θ_p , se suman para obtener un ángulo de incidencia en la interfaz de salida del prisma de $\theta_1 = 48.1 \pm 0.2^\circ$. La distancia L que atraviesa el eje óptico del haz dentro del prisma fue medida visualmente con un escalímetro con una incertidumbre del 12 %. Aunque estas mediciones se pueden mejorar sin duda alguna, son lo suficientemente aceptables para el objetivo de este trabajo.

En la Fig. 1.5 se muestran un par de fotografías en donde se aprecia el prisma lleno con el coloide siendo iluminado por el haz láser. En ellas se puede observar la turbidez del sistema, apreciando visualmente la cantidad de energía que se transfiere de la componente coherente a la difusa, debido al esparcimiento de las partículas.

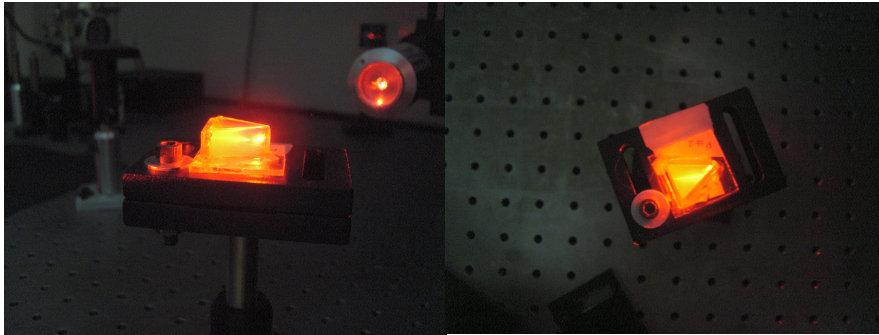


Figura 1.5: Fotografías del prisma con el sistema coloidal iluminado por el haz láser.

El experimento se repitió para partículas de tres diferentes radios prome-

dio: 0.111, 0.155 y 0.24 μm . En la Fig. 1.6 se muestran los perfiles acumulados integrados del sistema con partículas de radio 0.155 μm , para diferentes valores de f (los perfiles obtenidos para los otros dos tamaños de partícula son similares). El cambio en el ángulo de refracción $\Delta\theta_2$ es calculado como $\Delta\theta_2 = \Delta y/D$, donde Δy es la diferencia entre la posición del haz a un valor dado de f y su posición cuando $f = 0$ (agua desionizada pura). Podemos obtener Δy a partir del desplazamiento del máximo de intensidad del perfil del haz láser en el plano de detección. De las curvas experimentales, como las mostradas en la Fig. 1.6, podemos obtener el perfil del haz láser refractado restando a un dato experimental el dato anterior, sin embargo si hacemos esto, obtendremos curvas con ruido en las que se puede apreciar las franjas de interferencia del haz debidas a las múltiples reflexiones del haz dentro de la pared de vidrio del prisma de 3 mm. Un procedimiento alternativo para remover los efectos de interferencia es realizar un ajuste de una función polinomial a los datos experimentales (mostrados también en la Fig. 1.6) y luego derivar las curvas ajustadas, con lo que obtenemos las curvas mostradas en la Fig. 1.7.

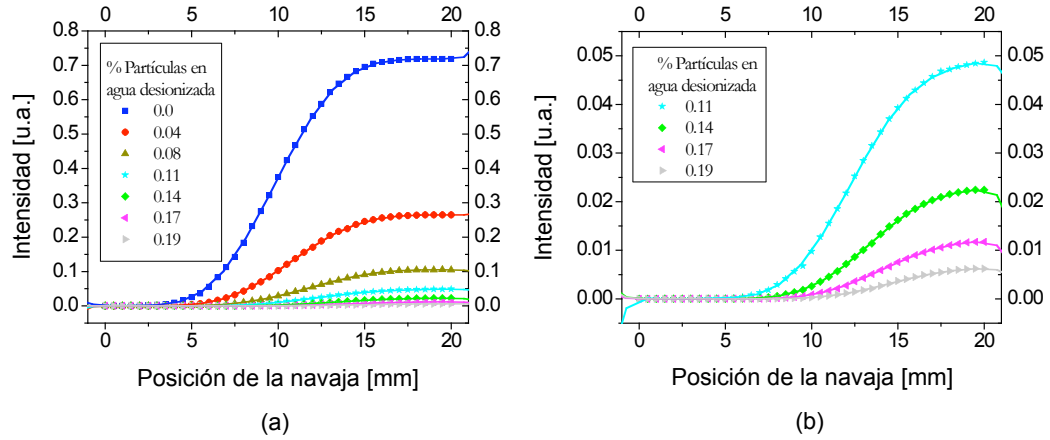


Figura 1.6: a) Perfiles acumulativos integrados obtenidos del experimento con partículas de 0.155 μm de radio, para diferentes valores de f . b) Amplificación de las cuatro últimas curvas de a) para una mejor visualización.

Podemos apreciar oscilaciones rápidas al principio y al final de los perfiles mostrados en la Fig. 1.7, las cuales corresponden simplemente a que hemos

empleado un número finito de términos en las funciones polinomiales de ajuste. Sin embargo, nuestra atención está en la parte central del perfil, en donde se encuentra el máximo de intensidad del haz. Podemos apreciar en los perfiles que, aparte de que el máximo de intensidad disminuye conforme f crece, éste se recorre hacia la derecha. De estos perfiles podemos determinar Δy y obtener $\Delta\theta_2$. Por otro lado, la atenuación del haz láser I/I_0 al incrementarse f se puede obtener fácilmente a partir de las curvas experimentales de la Fig. 1.6, dividiendo el último dato experimental de la curva a una f dada por el último dato experimental correspondiente a la curva de agua pura. Estos datos corresponden a las mediciones cuando todo el haz refractado ha entrado al detector.

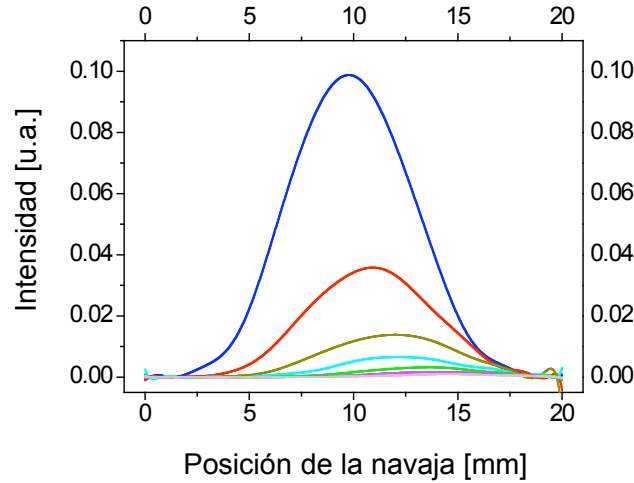


Figura 1.7: Perfiles del haz láser obtenidos derivando el ajuste de los datos experimentales de la Fig. 1.6.

En la Fig. 1.8 se muestran los valores experimentales de $\Delta\theta_2$ (primera columna) y I/I_0 (segunda columna) como función de f para los tres experimentos realizados. El ángulo máximo de deflexión del haz láser por el sistema con las partículas más pequeñas de radio $0.111 \mu\text{m}$ (figura 8 (a), primera columna) fue de 0.14° aproximadamente, para las partículas medianas de radio $0.155 \mu\text{m}$ (figura 8 (b), primera columna) fue 0.18° aproximadamente, y para las partículas más grandes de radio $0.24 \mu\text{m}$ (figura 8 (c), primera columna) fue de casi 0.08° . Junto con los datos experimentales en la Fig. 1.8, se grafica un ajuste lineal (primera columna) y exponencial (segunda columna) de

$\Delta\theta_2$ y I/I_0 respectivamente. En el caso del experimento con las partículas de $0.24 \mu\text{m}$ de radio, solamente tres puntos experimentales de la curva $\Delta\theta_2$ vs f se pudieron medir, ya que para concentraciones mayores de partículas el coloide no se mantenía estable y no fue posible medir de manera precisa.

Para obtener la parte real del índice de refracción efectivo a partir de los ajustes en la Fig. 1.8 (primera columna) podemos emplear la ley de Snell usual, es decir, ignorar la parte imaginaria del índice de refracción efectivo. Podemos considerar esta aproximación ya que si calculamos el cociente

$$\frac{N_1}{n_1} = 1 - \frac{\sin \theta_p}{2 [(n_0^2/n_1^2) - \sin^2 \theta_p]} \frac{\kappa_1^2}{n_1^2} + \dots, \quad (1.13)$$

en donde N_1 está dado por la Ec. (1.4) y, en nuestro caso, la parte imaginaria del índice de refracción efectivo del sistema coloidal es debida a la extinción del haz láser.

Empleando la expresión de van de Hulst obtenemos

$$\frac{\kappa_1}{n_1} = \frac{\gamma S'(0)}{1 - \gamma S'(0)}, \quad (1.14)$$

donde $S(0) = S'(0) + i S''(0)$, de modo que $S'(0)$ y $S''(0)$ denotan la parte real e imaginaria de $S(0)$, respectivamente. Para las partículas de poliestireno empleadas en los experimentos realizados, los radios promedio fueron: 0.111 , 0.155 y $0.24 \mu\text{m}$, y la longitud de onda del haz incidente fue de $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$. Utilizando estos valores obtenemos que κ_1/n_1 , para una fracción volumétrica de llenado de esferas del 0.2% , está entre 4.5×10^{-5} y 1.5×10^{-4} . En los experimentos realizados, el ángulo de incidencia en la interfaz de salida del prisma fue de medio grado por debajo del ángulo crítico, aproximadamente. En este caso

$$\frac{\sin \theta_p}{2 [(n_0^2/n_1^2) - \sin^2 \theta_p]} \approx 10^2, \quad (1.15)$$

de modo que $N_1 \approx n_1$ hasta términos del orden de 10^{-6} , lo cual está fuera del límite de detección en nuestros experimentos. En la expresión anterior se han ignorado las paredes de vidrio del prisma, ya que ellas no contribuyen a la refracción de la luz.

Empleando entonces la ley de Snell usual, no es difícil mostrar que un cambio en el ángulo de refracción está relacionado con un cambio en la parte

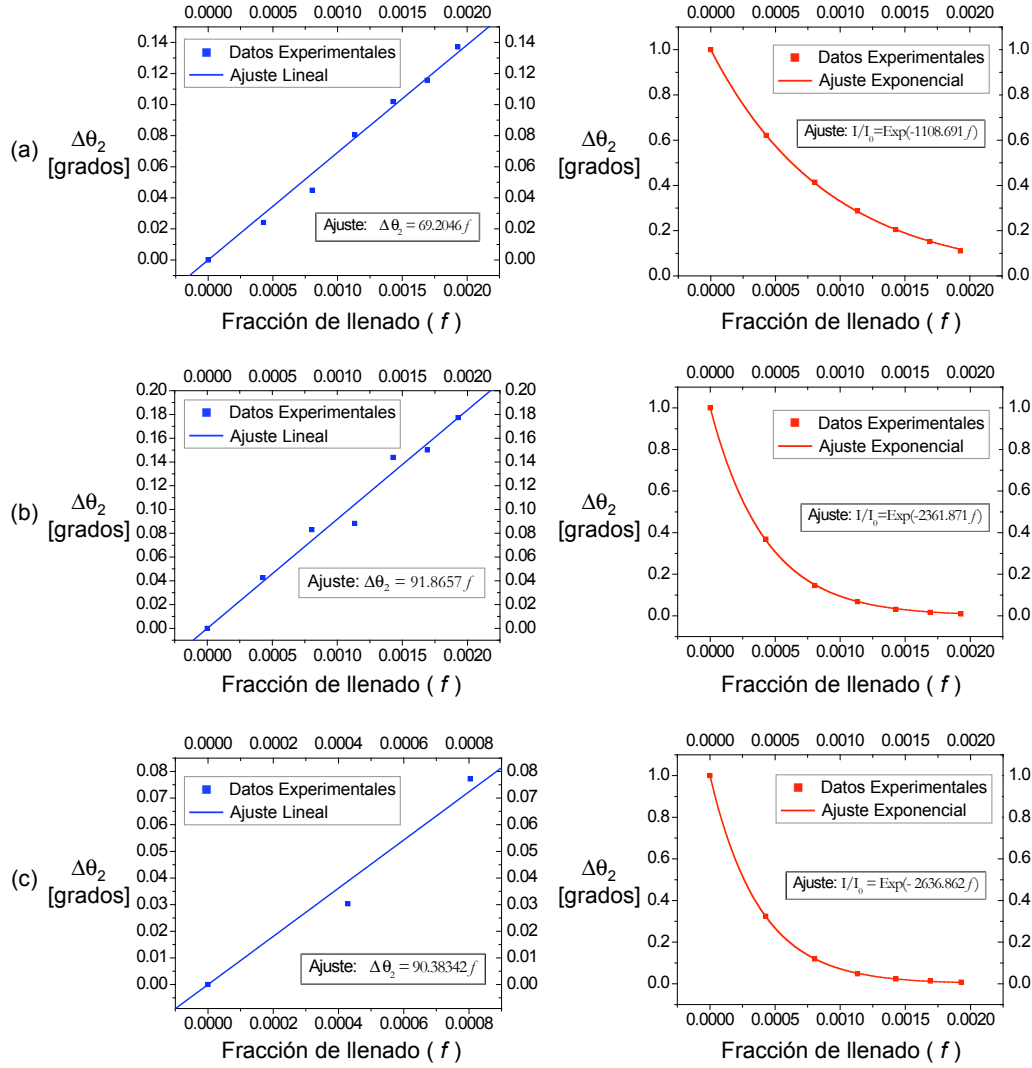


Figura 1.8: Gráficas de los datos experimentales para el cambio en el ángulo de refracción θ_2 (primera columna) medidos en grados y la atenuación del haz láser I/I_0 (segunda columna), como función de la fracción volumétrica de llenado f , para los tres experimentos realizados. (a) radio de partícula 0.111 μm , (b) 0.155 μm y (c) 0.24 μm . También se muestran los ajustes lineales y exponenciales para la primera y segunda columna, respectivamente.

real del índice de refracción efectivo, como

$$\Delta\theta_2 = \frac{d\theta_2}{dn_1} \Delta n_1 = \frac{\sin\theta_p}{n_2 \sqrt{1 - (n_1^2/n_0^2) \sin^2\theta_p}} \Delta n_1, \quad (1.16)$$

donde n_1 es la parte real del índice de refracción efectivo y n_0 es el índice de refracción del aire, el cual lo consideramos como 1. Cuando no hay partículas en suspensión, claramente n_1 corresponde al índice de refracción del agua desionizada a la longitud de onda del haz láser y a temperatura ambiente ($T \approx 20^\circ\text{C}$), $n_1 = 1.3313$. La parte imaginaria del índice de refracción efectivo se puede obtener de la Ley de Beer-Lambert, Ec. (1.6):

$$\frac{I}{I_0} = \exp[-2\kappa_1 k_0 L].$$

A partir de estas ecuaciones y las curvas ajustadas de la Fig. 1.8, podemos obtener el índice de refracción efectivo, parte real e imaginaria, para cualquier valor de f . La incertidumbre en la medición del índice de refracción efectivo está determinada por las incertidumbres en θ_p y L . Además, empleando la fórmula de van de Hulst para el índice de refracción efectivo del sistema coloidal, podemos obtener de los datos experimentales el radio y el índice de refracción de las partículas. En la Fig. 1.9 tenemos la gráfica de la contribución por unidad de f de las partículas de poliestireno a la parte real (a) e imaginaria (b) del índice de refracción efectivo como función de a/λ_0 . Para generar estas gráficas se han utilizado los valores nominales del índice de refracción de las partículas (1.588) y el agua desionizada (1.3313), indicando con un asterisco los puntos que corresponden a los valores nominales de los tres radios promedio de partícula utilizados en los experimentos.

Para poder comparar la teoría y el experimento, se buscaron valores para el radio a y el índice de refracción n_{esfera} de las partículas de tal forma que cuando se utilicen estos valores para calcular el índice de refracción efectivo de van de Hulst, se obtengan los valores experimentales medidos tanto de la parte real como la imaginaria del índice de refracción efectivo dentro de sus incertidumbres. Para cada experimento se eligieron valores de a y de n_{esfera} de tal forma que n_{esfera} permaneciera lo más cerca posible a su valor nominal de 1.588, y luego se calcularon los valores para θ_p y L necesarios para reproducir exactamente las curvas ajustadas a los datos experimentales, dentro de la incertidumbre experimental. Los valores de a , n_{esfera} , θ_p y L determinados para cada experimento se muestran en la tabla 1, en donde se

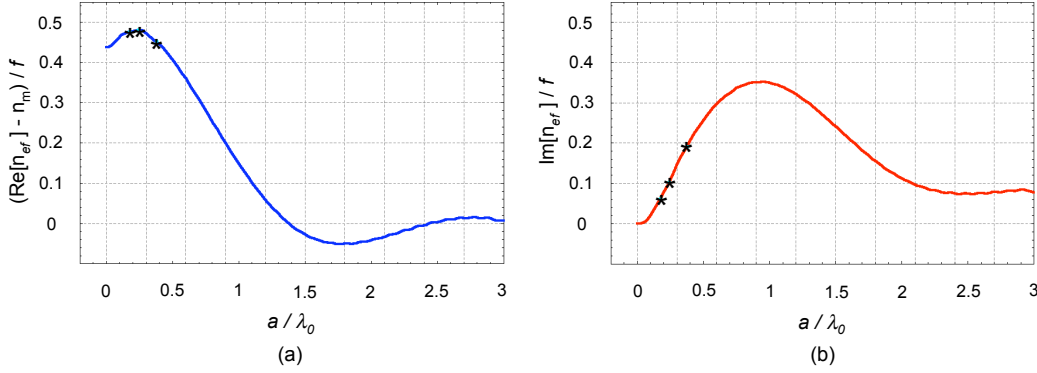


Figura 1.9: Parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas de poliestireno al índice de refracción efectivo de van de Hulst, por unidad de f , como función de a/λ_0 (con $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$). Los asteriscos en las gráficas corresponden al valor nominal de los tres radios promedio de partícula utilizados en los experimentos.

ha agregado una columna con los valores nominales correspondientes para fines de comparación. Podemos apreciar que los valores obtenidos para a , n_{esfera} , θ_p y L están dentro de la incertidumbre correspondiente del valor nominal.

Aunque la compañía que produce las partículas de poliestireno no proporciona una incertidumbre en su índice de refracción, podemos apreciar en la tabla 1 que los valores ajustados para n_{esfera} difieren del valor nominal por 1.4 %, 0.03 % y 2.4 % para $a = 0.111 \mu\text{m}$, $a = 0.155 \mu\text{m}$ y $a = 0.24 \mu\text{m}$, respectivamente. La diferencia de 2.4 % para el caso de las partículas más grandes, es mucho mayor que para el caso de los otros dos tamaños de partícula, lo que probablemente es debido al hecho de que sólo se pudieron obtener tres puntos en la gráfica de $\Delta\theta_2$ vs f , de modo que los dos primeros casos son más representativos del método. Sin embargo, los resultados muestran un buen acuerdo entre el experimento y la Ley de Snell, utilizando el índice de refracción efectivo de van de Hulst.

Hasta donde sabemos, este trabajo es el primero en proponer la determinación del tamaño e índice de refracción de las partículas que conforman un sistema coloidal a partir de la medición del índice de refracción efectivo a través de la refracción del haz coherente. Los resultados obtenidos del experimento muestran, en primer lugar, que se puede medir con precisión el

índice de refracción efectivo, tanto parte real como imaginaria, de sistemas coloidales con inclusiones grandes, es decir, coloides ópticamente turbios, y en segundo lugar, los resultados evidencian que reduciendo la incertidumbre en θ_p y L es posible obtener una alta precisión en la determinación de a y n_{esfera} . En el caso de una suspensión coloidal con una distribución de tamaños

Tabla 1. Valores obtenidos del ajuste y nominales de los parámetros experimentales.

Tamaño de partícula	Valores ajustados	Valores nominales
Esferas pequeñas	$a = 0.1076 \mu\text{m}$ $n_{esfera} = 1.566$ $\theta_1 = 47.955^\circ$ $L = 2.039 \text{ mm}$	$a = 0.111 \pm 0.005 \mu\text{m}$ $n_{esfera} = 1.588$ $\theta_1 = 48.1 \pm 0.22^\circ$ $L = 1.9 \pm 0.25 \text{ mm}$
Esferas medianas	$a = 0.155 \mu\text{m}$ $n_{esfera} = 1.588$ $\theta_1 = 48.175^\circ$ $L = 2.05 \text{ mm}$	$a = 0.155 \pm 0.007 \mu\text{m}$ $n_{esfera} = 1.588$ $\theta_1 = 48.1 \pm 0.22^\circ$ $L = 2 \pm 0.25 \text{ mm}$
Esferas grandes	$a = 0.247 \mu\text{m}$ $n_{esfera} = 1.55$ $\theta_1 = 48.337^\circ$ $L = 1.65 \text{ mm}$	$a = 0.24 \pm 0.01 \mu\text{m}$ $n_{esfera} = 1.588$ $\theta_1 = 48.1 \pm 0.22^\circ$ $L = 1.9 \pm 0.25 \text{ mm}$

de partículas, se necesitaría medir parámetros adicionales para poder invertir el problema, sin embargo una posibilidad sería implementar mediciones espectroscópicas, es decir, midiendo el ángulo de refracción y la atenuación de una onda coherente para un rango amplio de longitudes de onda. En este caso, sería posible obtener valores de n_{esfera} como función de la longitud de onda y la distribución de tamaños de partícula. Sin duda alguna, sería interesante investigar esta posibilidad en el futuro, pues lo que se podría llamar *Espectroscopía de Onda Coherente*⁸ representaría una opción atractiva para complementar a métodos como el DWS, por sus siglas en inglés “*Diffuse*

⁸Este tema se analizará con detalle en la sección 4 del capítulo ??.

Wave Spectroscopy", o una alternativa a los métodos basados en reflectancia difusa [64], [65]. Sin duda alguna con este trabajo se abren nuevas posibilidades de desarrollo tecnológico en el área de instrumentación óptica, lo que por otro lado es resultado del desarrollo de la teoría de medio efectivo, que ahora reconocemos como no local, lo que permite dejar atrás las inconsistencias de trabajos anteriores.

Conclusiones

En este trabajo teórico-experimental de tesis de doctorado, se ha mostrado que sí es posible y válido formular una Teoría de Medio Efectivo Extendida para describir completamente el campo coherente en sistemas coloidales turbios, es decir, con inclusiones de tamaño comparable a la longitud de onda del haz incidente. Se ha estudiado un sistema coloidal simplificado de esferas idénticas, polarizables y no magnéticas, localizadas al azar en el vacío, con una función de densidad de probabilidad uniforme en todo el espacio. Las esferas tienen todas el mismo radio y están caracterizadas por el mismo índice de refracción dependiente de la frecuencia. También se considera que el sistema no tiene fronteras, por lo que la descripción corresponde a las propiedades de bulto. Considerando al sistema coloidal en el límite diluido, se muestra que el medio efectivo es en realidad no local y puede ser descrito en términos de las componentes longitudinal $\epsilon_{ef}^L(p, \omega)$ y transversal $\epsilon_{ef}^T(p, \omega)$ del tensor dieléctrico efectivo generalizado no local. Se muestran expresiones cerradas para las funciones respuesta ϵ_{ef}^L y ϵ_{ef}^T y se presenta un análisis numérico de su dependencia con la magnitud del vector de onda p y de la frecuencia ω , empleando parámetros ópticos realistas en la ventana de frecuencias del óptico, correspondientes tanto a materiales conductores: oro y plata, como a materiales aislantes: poliestireno y dióxido de titanio. Ambas funciones respuesta coinciden cuando $p = 0$ y se observa que para valores de $pa \lesssim 1$ su dependencia con p es cuadrática. A partir de las expresiones de las funciones respuesta efectivas se deducen las relaciones tanto de los modos transversales como de los modos longitudinales. Resolviendo en el plano complejo en forma exacta la relación de dispersión de los modos transversales, empleando un método recursivo, se identifica el índice de refracción efectivo que depende sólo de la frecuencia ω . Este índice de refracción resulta ser complejo, el cual determina la fase y la atenuación de la onda coherente conforme ésta se propaga a través del sistema coloidal. La parte imaginaria del índice de refracción efectivo caracteriza tanto a la eventual absorción de energía por parte de las partículas como a la energía que pierde el haz coherente al convertirse en luz difusa, debido al esparcimiento producido por las partículas. El índice de refracción exacto se compara con la solución de la relación de dispersión para los modos transversales utilizando tres aproximaciones conocidas, a las que denominamos: límite de onda corta, cuadrática y cono de luz. También se presenta el análisis correspondiente de estos índices como función de la frecuencia, utilizando parámetros ópticos realistas de los materiales antes mencionados. En particular, el índice que se obtiene usando la aproximación de cono de luz coincide con el índice de refracción propuesto

por van de Hulst muchos años atrás. Este índice de refracción efectivo ha sido utilizado comúnmente como un índice de refracción local, mostrándose en este trabajo que de hecho tiene una naturaleza no local, ayudando así a disipar las inconsistencias encontradas al intentar interpretar resultados de experimentos relacionados con la reflexión de luz por sistemas coloidales, ya que ahora reconocemos que este índice de refracción efectivo no puede ser utilizado en las fórmulas de Fresnel. También se muestra que la descripción hecha en esta tesis es completamente equivalente a aquella más tradicional, en la que en vez de utilizar las componentes transversal y longitudinal del tensor dieléctrico efectivo generalizado no local, se usa la función dieléctrica efectiva $\epsilon_{ef}(p, \omega)$ y la permeabilidad magnética efectiva $\mu_{ef}(p, \omega)$, reconociendo que en el régimen de frecuencias ópticas existe una respuesta magnética no local real y se interpreta su origen físico en términos de las características de la densidad total de corriente inducida. Por otro lado, debido a los problemas conceptuales para poder determinar el índice de refracción efectivo de un sistema coloidal a través de mediciones de reflectancia, en la parte experimental de esta tesis, se diseñó un experimento con el cual se midió con buena precisión, tanto la parte real como la imaginaria del índice de refracción efectivo de un sistema coloidal turbio. El método consistió en medir el ángulo de refracción y la transmitancia de un haz láser que atraviesa un prisma hueco lleno con el sistema coloidal, constituido por partículas de poliestireno disueltas en agua desionizada. El experimento se repitió para tres tamaños diferentes de partículas. El índice de refracción medido se comparó con el resultado predicho por el índice de refracción de van de Hulst, obteniéndose un buen acuerdo. También se analizó la sensibilidad del método proponiéndolo como una herramienta en la caracterización de coloides, con la cual, a partir de los espectros de refracción, se puede determinar el índice de refracción y el radio de las inclusiones. Este experimento representa los cimientos de un experimento más ambicioso en el que se pretende realizar espectroscopía, el cual está actualmente en desarrollo. Con estos experimentos se están sentando las bases de lo que podría ser llamado *Espectroscopía de Onda Coherente*.

Perspectivas

En este capítulo presento algunas ideas que se podrían desarrollar en el futuro inmediato. Estas ideas son: el análisis del transporte de energía (vector de Poynting) en un medio coloidal, la reflexión en la interfaz plana entre un medio homogéneo y un medio coloidal, análisis del límite local de las funciones respuesta efectivas no locales, discusión del modelo propuesto de Espectroscopía de Onda Coherente y la extensión del cálculo realizado en esta tesis a medios más densos.

0.1. Análisis del transporte de energía en medios coloidales

Un problema interesante sería en analizar el problema de transporte de energía dentro de un sistema coloidal. Sabemos que el vector de Poynting¹ está dado por

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu}, \quad (1)$$

en donde hemos empleado la relación constitutiva usual para relacionar $\vec{H}$ con $\vec{B}$. Es evidente que para analizar este problema no es suficiente con conocer el vector de onda efectivo con el que se propaga la onda, o el índice de refracción efectivo, pues necesitamos las funciones respuesta por separado, en este caso la función permeabilidad magnética efectiva no local.

Este problema es interesante analizarlo ya que está conectado con el fenómeno de *índice de refracción negativo*, *refracción negativa* o también conocido como de *materiales izquierdos*, en el cual una onda plana electromagnética con frecuencia ω al encontrarse con una interfaz plana de material estructurado, llamado *metamaterial*, cuyas funciones respuesta son ambas negativas para dicha frecuencia ω , se refracta en dirección contraria a la usual, como se muestra en la Fig. 3.1.

Una de las primeras referencias al tema desde el punto de vista teórico es el artículo de Víctor Veselago [66] en 1968, observándose experimentalmente el fenómeno hasta hace muy poco. Veselago mostró también que las condiciones de ϵ y μ negativas eran equivalentes a que el vector de Poynting y el vector de onda apuntaran en direcciones opuestas, y ésta es la conexión con el estudio de transporte de energía en sistemas coloidales. El material con el que

¹Ver libro de Jackson [54], pág. 259, Ec. (6.109).

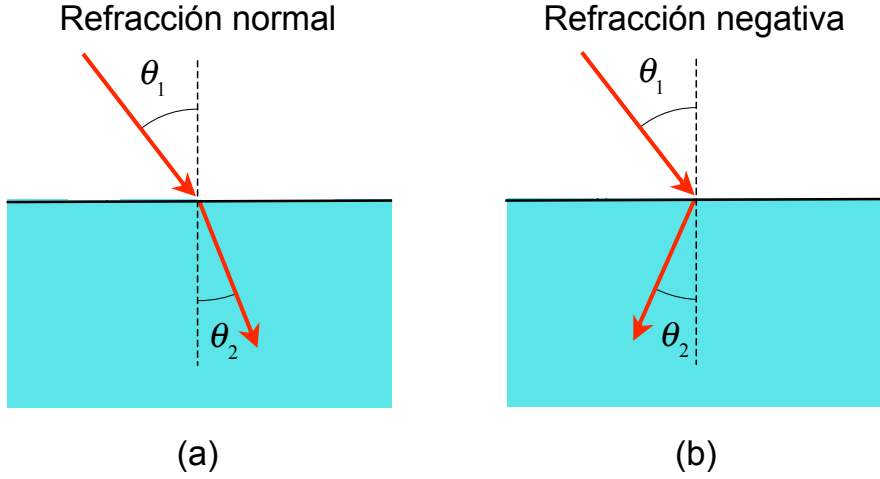


Figura 1: Esquema de refracción por una interfaz plana entre aire y un medio caracterizado por un índice de refracción, que en el caso (a) es positivo y en el (b) es negativo (refracción negativa).

se observó la refracción negativa está constituido por un arreglo de alambres y anillos metálicos truncados, los cuales están constituidos como una celda unitaria en un arreglo periódico tridimensional, obteniendo ambas funciones respuesta negativas para un rango de frecuencias del haz incidente en la región de microondas. Recientemente, se han publicado algunos trabajos en los que se analiza el problema teórico de obtener funciones respuesta negativas en sistemas ordenados de partículas esféricas, ya sean esferas recubiertas con otro material, en donde se encuentra que en la región del infrarojo tanto la función dieléctrica como la permeabilidad magnética son negativas, aunque en regiones de frecuencia diferentes [67]; o bien a frecuencias ópticas, con arreglos tridimensionales de esferas dieléctricas de dos tamaños diferentes, en la condición de bajo contraste respecto a la matriz dieléctrica [68]. Incluso hay reportes de sistemas con esferas magneto-dieléctricas de un solo tamaño, inmersas en una matriz dieléctrica, que presentan un efecto de índice negativo para frecuencias en donde las esferas sean resonantes [69]. Respecto a sistemas desordenados, es decir, sistemas coloidales, también hay reportes de la posibilidad de obtener este efecto para frecuencias ópticas empleando un arreglo de esferas dieléctricas embebidas al azar en una matriz con permitividad negativa [70]. De modo que resulta relevante estudiar el problema de

sistemas coloidales con esferas grandes, analizando la posibilidad de extender las condiciones de Veselago a sistemas con una ϵ y μ no locales y complejas.

0.2. Reflexión de una interfaz plana medio homogéneo-coloide

En esta tesis se ha caracterizado un sistema coloidal con inclusiones de tamaño comparable a la longitud de onda del haz incidente, obteniéndose propiedades del coloide en el bulto, es decir, lejos de cualquier interfaz. Sin embargo, debido al gran interés de realizar mediciones de reflectancia para caracterizar medios inhomogéneos, resulta de interés el estudiar el problema de reflexión de una onda por una interfaz plana, con algún modelo de la superficie, entre un medio local y uno no local. La dificultad fundamental en el problema de reflexión por una interfaz plana radica en que la presencia de la interfaz hace imposible el uso de las funciones respuesta de bulto calculadas en esta tesis, pues estas funciones son válidas sólo para sistemas con invariancia translacional y la presencia de la superficie rompe dicha invariancia. Un camino posible sería regresar a las ecuaciones integrales de esparcimiento múltiple y resolverlas introduciendo la información sobre la superficie, sin embargo, una posibilidad alternativa que nos permite utilizar los resultados obtenidos en esta tesis teórico-experimental es el llamado modelo SCIB, por sus siglas en inglés *Semi Classical Infinite Barrier Model*². En este modelo se propone calcular los campos electromagnéticos en un sistema no local sin fronteras (con invariancia translacional), suponiendo un plano ficticio sobre el cual exigimos una condición de frontera con simetría de espejo de los campos electromagnéticos. Se identifican después a las soluciones en uno de los semiespacios como las soluciones físicas dentro de un sistema con una interfaz y la condición de contorno se interpreta como el resultado de la reflexión especular de la corriente inducida promedio. Originalmente se planteó el problema de reflexión de electrones, pero se podría extender para ondas electromagnéticas.

²Ver referencia al trabajo de K. L. Kliewer y R. Fuchs, [71].

0.3. Límite local de las funciones respuesta efectivas no locales

El problema de identificar el límite local correcto de las expresiones de las funciones respuesta efectivas no locales, calculadas en la parte teórica de este trabajo, no es trivial. Por límite local entendemos aquellas expresiones que caractericen al sistema coloidal y representen un esquema de medio efectivo *no restringido*, siguiendo la definición de Ruppin [25], de tal forma que las funciones respuesta bajo este límite puedan ser utilizadas en todas las relaciones de la electrodinámica continua. No es claro que el límite de onda larga, tomando simplemente $p \rightarrow 0$ en las expresiones para las componentes del tensor dieléctrico efectivo generalizado no local, sea el límite local correcto, ya que en el límite local utilizamos usualmente la respuesta al campo eléctrico y al campo magnético. Dado que el campo magnético puede ser expresado en términos de derivadas del campo eléctrico, la respuesta al campo magnético puede verse también como una contribución no local al orden más bajo, en la estructura del tensor dieléctrico generalizado. En el límite $p \rightarrow 0$, la componente transversal y la componente longitudinal del tensor dieléctrico efectivo generalizado coinciden y la expresión que se obtiene en este límite es la siguiente (1.110):

$$\tilde{\epsilon}_{ef}^{T[0]}(\omega) = 1 + f \zeta \left[1 + 3 \chi_p d_1^{T[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right],$$

que es la misma expresión para el límite $\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p \rightarrow 0, \omega)$ de la componente longitudinal, cuando se identifica $d_1^{T[0]} = 2 d_1^{L[0]}$. Sin embargo, estas funciones dependen todavía del radio de las esferas a , apareciendo como argumento de funciones esféricas de Bessel y de Hankel, acompañadas por la magnitud del vector de onda en la matriz o por la magnitud del vector de onda dentro de las esferas. En el *esquema* $\epsilon - \mu$, la función dieléctrica efectiva no local coincide con $\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega)$, de modo que el límite de onda larga de $\tilde{\epsilon}_{ef}(p, \omega)$ es el mismo que está dado en la Ec. (1.110). Por otro lado, la expresión para la permeabilidad magnética efectiva en este límite, está dada por la Ec. (1.195),

$$1 - [\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega)]^{-1} = x_0^2 f \zeta \chi_p \left[\left(3 d_1^{T[2]} + 6 \frac{d_1^{L[0]}}{x_I^2} \right) \frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{1}{x_I^2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left(c_1^{T[1]} + d_2^{T[1]} - 4 d_2^{L[1]} + 2 \frac{d_1^{L[0]}}{x_I} \right) \frac{j_2(x_I)}{x_I} \right].$$

Sin embargo, la relación de dispersión de los modos transversales en el *esquema* $L-T$ está dada por la Ec. (1.171)

$$p^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}^T(p, \omega),$$

mientras que en el *esquema* $\epsilon-\mu$ está dada por, Ec. (1.197),

$$p^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{ef}(p, \omega) \tilde{\mu}_{ef}(p, \omega),$$

por tanto, si sustituimos ingenuamente los límites de onda larga en cada una de las funciones respuesta no obtenemos la misma expresión! Es necesario mantener los términos hasta orden p^2 en el desarrollo de la $\tilde{\epsilon}_{ef}(p, \omega)$, debido al factor p^2 que aparece del lado izquierdo en la relación de dispersión, para obtener la misma expresión que en el *esquema* $L-T$. Es decir, en el llamado límite local, al parecer hay que mantener términos de orden p^2 , lo que equivale a contribuciones no locales, y no existe una forma unívoca y ortodoxa de hacerlo. El poder identificar el límite local correcto nos permitiría escribir y analizar las primeras correcciones no locales de la teoría.

0.4. Espectroscopía de Onda Coherente

En la parte experimental de esta tesis se diseñó y desarrolló un experimento para medir simultáneamente la parte real e imaginaria del índice de refracción efectivo de sistemas coloidales turbios, a partir de mediciones del ángulo de refracción y la transmitancia de un haz láser al pasar por un prisma hueco, en cuyo interior se deposita el coloide. Se mostró que no sólo es posible determinar el índice de refracción complejo con una buena precisión, sino que además se propuso el método para resolver el problema inverso, es decir, a partir de las mediciones de refracción y de transmitancia poder determinar propiedades de las inclusiones en el coloide. Se mostró que midiendo con una sola longitud de onda es posible obtener el índice de refracción y el radio de las inclusiones, suponiendo que todas son exactamente del mismo tamaño. Como una extrapolación natural de este experimento, se diseñó y se montó un experimento enfocado a repetir las mediciones pero utilizando muchas longitudes de onda. El experimento, que se ilustra en la Fig. 3.2, utiliza el mismo prisma de vidrio empleado en el experimento original iluminado ahora con luz blanca. Debido a la dispersión usual de la luz blanca al pasar por el prisma, se utiliza un segundo prisma lleno únicamente con agua, entre

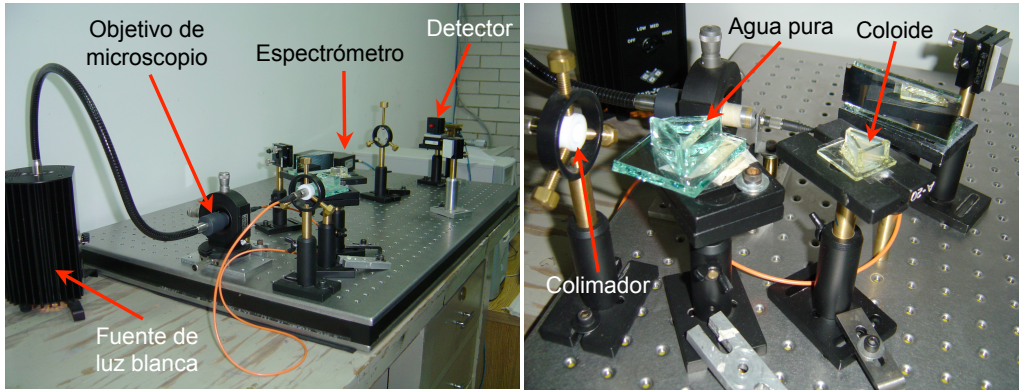


Figura 2: Fotografía del arreglo experimental espectroscópico para medir refracción y atenuación a muchas longitudes de onda.

la fuente y el prisma con el coloide, para compensar este efecto. La luz blanca se introduce en una fibra óptica empleando un objetivo de microscopio, y antes de incidir sobre los prismas pasa por un colimador. Una vez que se refracta el haz en el segundo prisma, que es donde está ubicado el coloide, viaja hasta un fotodetector montado en una plataforma micrométrica, el cual está conectado a un espectrofotómetro, y éste a su vez a una computadora que recibe y almacena los datos. En una segunda fase del experimento, éste se automatizó sustituyendo el fotodetector por una cámara CCD con la que se puede desarrollar más rápido el experimento.

Se han obtenido algunas curvas preliminares del perfil de intensidad de la luz refractada para analizar la sensibilidad del arreglo utilizando partículas de poliestireno, de radio $a = 0.155 \mu\text{m}$, las cuales se muestran en la Fig. (3.3). Se analizaron un total de once longitudes de onda, desde $\lambda_0 = 432 \text{ nm}$ hasta $\lambda_0 = 932 \text{ nm}$.

La primer gráfica de la Fig. (3.3), inciso (a), corresponde a los perfiles de intensidad del haz para diferentes longitudes de onda, con ambos prismas llenos de agua solamente por lo que estas curvas sirven de referencia en el experimento. En el inciso (b), las gráficas corresponden al perfil de intensidad del haz refractado para cada longitud de onda, cuando el prisma está lleno con coloide a una fracción de llenado f de 0.05 % de esferas en agua. Podemos apreciar que diferentes longitudes de onda se refractan diferente, al igual que la atenuación es diferente (como ejemplo ver la curva correspondiente a

$\lambda_0 = 632 \text{ nm}$). La gráficas del inciso (c) corresponden a los perfiles de in-

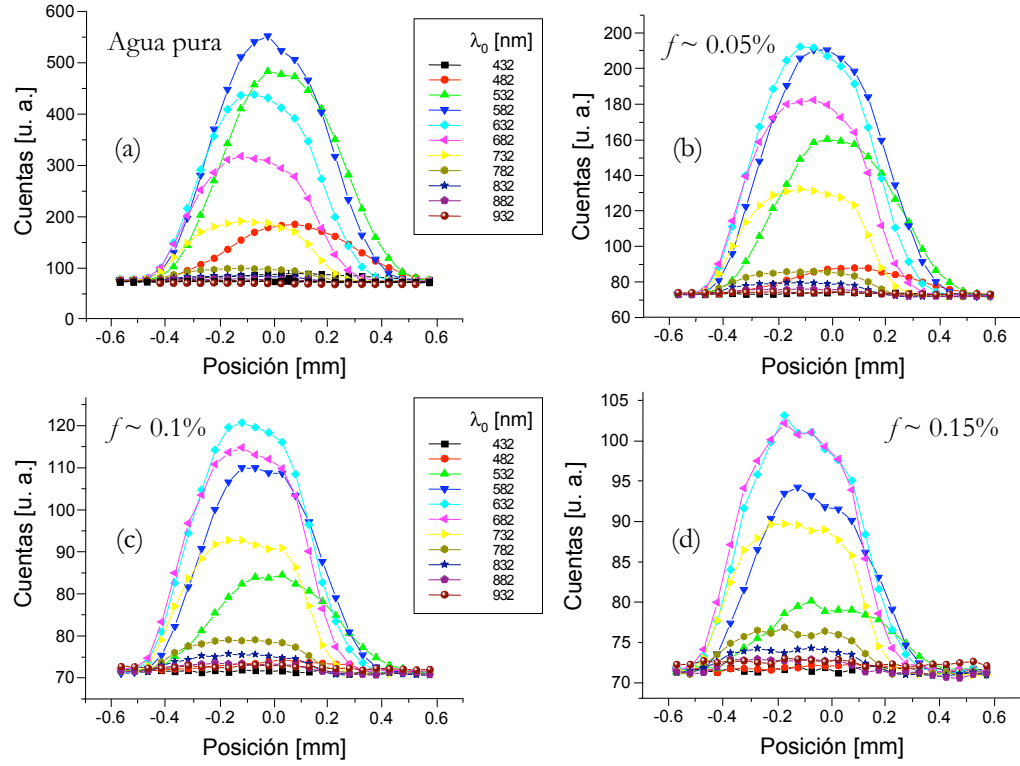


Figura 3: Perfiles de intensidad del haz para diferentes longitudes de onda preliminares, obtenidas del experimento espectroscópico utilizando once longitudes de onda, desde $\lambda_0 = 432 \text{ nm}$ hasta $\lambda_0 = 932 \text{ nm}$. El inciso (a) corresponde a los perfiles de intensidad del haz de referencia (ambos prismas llenos con sólo agua) para las longitudes de onda seleccionadas, el inciso (b) corresponde a los perfiles de intensidad del haz refractado cuando el prisma está lleno de coloide a una concentración de esferas de $f = 0.05 \%$, el inciso (c) a $f = 0.1 \%$ y el inciso (d) a $f = 0.15 \%$ de esferas en agua.

tensidad cuando se han inyectado más partículas al prisma, alcanzando una concentración de $f = 0.1 \%$ y, por último, las gráficas del inciso (d) corresponden al perfil de intensidad del haz refractado cuando la concentración del coloide dentro del prisma es de $f = 0.15 \%$ de esferas en agua. Podemos observar que la mayoría de las curvas, principalmente en las últimas gráficas, inciso (d), la forma no es la óptima para determinar el máximo de cada

curva. Esto puede deberse, entre otros factores, a la poca luz disponible en cada longitud de onda, por lo que se compró otra lámpara de luz blanca con mayor potencia, la cual todavía no ha sido probada.

A pesar de los problemas técnicos relacionados con el experimento, que se han ido solventando poco a poco, el mayor problema estriba en contar con un algoritmo capaz de resolver el problema inverso, lo cual no es trivial debido a que la función que se debe minimizar es una función compleja, que depende de funciones oscilantes tipo Bessel y Hankel esféricas; y también que sea capaz de realizar el ajuste con la cantidad de datos que se pueden obtener del experimento. Sólo para tener una idea, en estas primeras pruebas, con once longitudes de onda, se obtienen para cada concentración más de 300 datos, y en un experimento con tres o cuatro curvas se acumulan más de mil datos!

0.5. Extensión a coloides más densos: Aproximación Cuasi-Cristalina

Sin duda alguna un problema atractivo es *extender* aún más la teoría extendida de medio efectivo desarrollada en esta tesis teórico-experimental, para analizar sistemas coloidales más densos empleando la Aproximación Cuasi-Cristalina. Un camino sería regresar a la ecuación para el promedio de la densidad total de corriente inducida $\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle$ en términos del promedio del campo eléctrico de excitación de la partícula l -ésima $\langle \vec{E}^{exc} \rangle_l$, Ec. (1.41),

$$\langle \vec{J}_{tot}^{ind} \rangle(\vec{r}) = \frac{N}{V} \iint \overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_l, \vec{r}' - \vec{r}_l) \cdot \langle \vec{E}^{exc} \rangle_l(\vec{r}'; \vec{r}_l) d\vec{r}_l d\vec{r}'.$$

en donde $\overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}$ es el tensor de conductividad efectivo no local de la partícula l -ésima y N es el número de partículas esféricas por unidad de volumen V . El campo eléctrico de excitación de la partícula l -ésima en términos de $\overleftrightarrow{\sigma}_l^{NL}$ está dado por

$$\begin{aligned} \vec{E}_l^{exc}(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \sum_{j \neq l} \iint \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\cdot \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r} - \vec{r}_j, \vec{r}' - \vec{r}_j) \cdot \vec{E}_j^{exc}(\vec{r}''; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d^3r' d^3r'', \quad (2) \end{aligned}$$

donde $\vec{E}_{inc}$ es el campo eléctrico que incide sobre el coloide y $\overleftrightarrow{G}_0$ es la diádica de Green en el espacio libre que obedece la Ec. (1.8). Calculando el promedio configuracional del campo eléctrico de excitación de la partícula l -ésima tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \sum_{j \neq l} \int d^3r' \int d^3r'' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\cdot \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \int d\vec{r}_1 \cdots \int d\vec{r}_l \cdots \int d\vec{r}_N p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_l) \cdot \\ &\cdot \vec{E}_j^{exc}(\vec{r}''; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (3) \end{aligned}$$

en donde $p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_l)$ es la función de densidad de probabilidad condicional de encontrar a la partícula 1 en la posición $\vec{r}_1$, a la partícula 2 en la posición $\vec{r}_2, \dots$, y a la partícula N en la posición $\vec{r}_N$, dado que la partícula l -ésima está fija en la posición $\vec{r}_l$. El símbolo “ $\cdot$ ” denota que el término está ausente. Utilizando la regla de composición

$$p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_l) = p(\vec{r}_j | \vec{r}_l) p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_l, \vec{r}_j),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \sum_{j \neq l} \int d^3r' \int d^3r'' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\cdot \int d\vec{r}_j p(\vec{r}_j | \vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_{lj}(\vec{r}''; \vec{r}_l, \vec{r}_j), \quad (4) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_{lj}(\vec{r}''; \vec{r}_l, \vec{r}_j) &= \int d\vec{r}_1 \cdots \int d\vec{r}_l \cdots \int d\vec{r}_j \cdots \int d\vec{r}_N \times \\ &\times p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_l, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_l, \vec{r}_j) \vec{E}_j^{exc}(\vec{r}''; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (5) \end{aligned}$$

Dado que todos los términos en la suma son idénticos, podemos escribir que

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \frac{N-1}{V} \int d^3r' \int d^3r'' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\cdot \int d\vec{r}_j \text{FC}(\vec{r}_j, \vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_{l,j}(\vec{r}''; \vec{r}_l, \vec{r}_j), \quad (6) \end{aligned}$$

en donde $\mathbb{FC}(\vec{r}_j | \vec{r}_l) = Vp(\vec{r}_j | \vec{r}_l)$ es la función de correlación de dos partículas. Considerando la Aproximación Cuasi-Cristalina, que consiste en cerrar la jerarquización de las ecuaciones integrales en el segundo nivel, la cual está dada por

$$\left\langle \vec{E}_j^{exc} \right\rangle_{jl}(\vec{r}'') \approx \left\langle \vec{E}_j^{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''), \quad (7)$$

obtenemos una ecuación integral para el promedio del campo eléctrico de excitación

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \frac{N-1}{V} \int d^3r' \int d^3r'' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\cdot \int d\vec{r}_j \mathbb{FC}(\vec{r}_j, \vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''; \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (8)$$

Aproximando $(N-1)/V \approx N/V \equiv n_0$ y considerando que el sistema es invariante bajo traslaciones, $\mathbb{FC}(\vec{r}_j, \vec{r}_l) = \mathbb{FC}(\vec{r}_j - \vec{r}_l)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 n_0 \int d^3r' \int d^3r'' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\cdot \int d\vec{r}_j \mathbb{FC}(\vec{r}_j - \vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''; \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (9)$$

Resolviendo esta ecuación podríamos insertarla en la Ec. (1.41) para calcular el promedio de la densidad de corriente total inducida, sin embargo, sería mucho más conveniente encontrar una relación directa entre $\left\langle \vec{J}_{ind} \right\rangle$ y $\left\langle \vec{E} \right\rangle$ como en la Ec. (1.43). Sabemos que el campo eléctrico total está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}'), \quad (10)$$

de modo que el promedio configuracional del campo eléctrico total está dado por

$$\left\langle \vec{E} \right\rangle(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \left\langle \vec{J}_{ind} \right\rangle(\vec{r}'). \quad (11)$$

Sumando y restando a la Ec. (3.9) el segundo sumando de la ecuación anterior, Ec. (3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \left\langle \vec{J}_{ind} \right\rangle(\vec{r}') + \\ &+ i\omega\mu_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot n_0 \iint d\vec{r}'' d\vec{r}_j \mathbb{FC}(\vec{r}_j - \vec{r}_l) \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \cdot \\ &\cdot \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''; \vec{r}_j) - i\omega\mu_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \left\langle \vec{J}_{ind} \right\rangle(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (12)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \left\langle \vec{E} \right\rangle(\vec{r}) + i\omega\mu_0 n_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \iint d\vec{r}'' d\vec{r}_j \mathbb{F}\mathbb{C}(\vec{r}_j - \vec{r}_l) \times \\ &\quad \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \cdot \left\langle \vec{E}_{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''; \vec{r}_j) - i\omega\mu_0 n_0 \int d\vec{r}' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\quad \cdot \iint d\vec{r}'' d\vec{r}_j \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \cdot \left\langle \vec{E}_{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''; \vec{r}_j), \quad (13) \end{aligned}$$

y podemos reescribir finalmente como

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}^{exc} \right\rangle_l(\vec{r}; \vec{r}_l) &= \left\langle \vec{E} \right\rangle(\vec{r}) + i\omega\mu_0 n_0 \iiint d\vec{r}' d\vec{r}'' d\vec{r}_j \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \\ &\quad \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_j^{NL}(\vec{r}' - \vec{r}_j, \vec{r}'' - \vec{r}_j) \cdot [\mathbb{F}\mathbb{C}(\vec{r}_j - \vec{r}_l) - 1] \left\langle \vec{E}_{exc} \right\rangle_j(\vec{r}''; \vec{r}_j). \quad (14) \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos una ecuación en términos del promedio del campo eléctrico total, en donde $\mathbb{F}\mathbb{C} - 1$ es una función de corto alcance que podría ayudar a la convergencia de las integrales. Resolviendo la ecuación anterior, obtendremos una ecuación para el promedio del campo de excitación en términos del promedio del campo eléctrico total, para después sustituirlo en la ecuación para el promedio de la densidad total de corriente inducida, Ec. (1.41).

Apéndice A

Existen diferentes procedimientos para calcular el promedio de una cantidad y el método más adecuado depende de las características específicas del sistema en estudio, así como también de las escalas relevantes particulares del problema [72]. En general podemos definir dos operadores $\hat{P}_p$ y $\hat{P}_f \equiv \hat{1} - \hat{P}_p$, en donde $\hat{1}$ es el operador identidad, tales que la componente promedio de una función F está dada por $F_p = \hat{P}_p F$ y la componente fluctuante por $F_f = \hat{P}_f F$. Una propiedad deseada para cualquier definición de promedio es que el operador promedio sea idempotente, es decir, que un segundo promedio no pueda remover las fluctuaciones de la componente promedio que ya fueron removidas de F por el primer promedio,

$$\hat{P}_p^2 = \hat{P}_p, \quad (1)$$

y de manera equivalente

$$\hat{P}_f^2 = \hat{P}_f. \quad (2)$$

Al ser idempotentes los operadores promedio, también se cumple que

$$\hat{P}_p \hat{P}_f = \hat{P}_f \hat{P}_p = 0. \quad (3)$$

Como ejemplo de los diferentes promedios que se pueden realizar podemos mencionar el *promedio espacial* o *promedio volumétrico*, definido como

$$F_p^{vol}(\vec{r}) \equiv \int W(\vec{r} - \vec{r}') F(\vec{r}') d^3 r', \quad (4)$$

en donde $W(\vec{r} - \vec{r}')$ es la función de peso que define el volumen sobre el cual se hará el promedio. En principio se podría proponer para W una función escalón (ver Fig. 1 (a)), la cual mantiene un valor constante sobre una región y luego cae a cero abruptamente. Sin embargo, con esta forma para W obtenemos un promedio que no es una función suave, problema que podemos resolver empleando una función que tenga una transición suave, es decir, que decaiga monotónicamente desde el valor constante a cero en una forma suave y bien comportada [73], como la que se muestra en la Fig. 1 (b), en donde la zona de transición debe ser grande en comparación al tamaño de las fluctuaciones que se quieren eliminar.

Otro promedio es el *promedio temporal*, en el cual promediamos el campo de interés, digamos una función que depende del tiempo $F(t)$, integrando en un intervalo de tiempo y dividiendo por lapso de tiempo transcurrido τ :

$$F_p^{temp} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F(t') dt'. \quad (5)$$

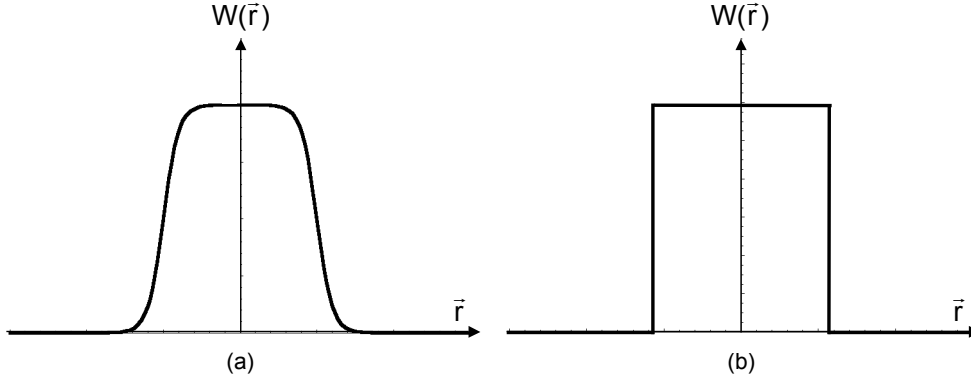


Figura 1: Funciones de peso para el promedio espacial o volumétrico. (a) función que cae abruptamente a cero y (b) que cae suavemente.

Otra forma de promediar es utilizando un truncamiento en el espacio de Fourier,

$$F(\vec{k}) \equiv P_a(\vec{k})F(\vec{k}), \quad (6)$$

en donde $F(\vec{k})$ es la Transformada de Fourier de la función $F(r)$ y $P_a(\vec{k})$ es la función de corte para las componentes del vector de onda de alta frecuencia, de modo que al realizar una transformada inversa, habremos removido las oscilaciones rápidas de la función, suavizándola.

Sin embargo, el promedio que hemos empleado para modelar la respuesta de un sistema coloidal a un campo electromagnético externo, es el *promedio configuracional* o *promedio de ensamble*, que consiste en sumar la contribución de todas las configuraciones posibles del sistema

$$\langle F(\alpha) \rangle = \sum_{\text{Conf}} P_c F_c(\alpha), \quad (7)$$

en donde P_c es la probabilidad de encontrar al sistema en la configuración c del ensamble, y $F_c(\alpha)$ es el valor que toma la función en dicha configuración con argumento arbitrario α .

Hemos indicado que el promedio adecuado depende del sistema en particular bajo estudio y en nuestro caso, en lo que estamos interesados es en modelar la interacción de ondas electromagnéticas con un sistema coloidal compuesto por partículas grandes, en comparación con el tamaño de la longitud de onda del haz incidente, disueltas en un medio continuo y en lo que

mediría un detector en un experimento real, digamos de refracción o de reflexión. Nuestro interés está en calcular el campo electromagnético en cualquier punto del espacio, de modo que podríamos calcular la norma al cuadrado del campo eléctrico, es decir la intensidad, que es en realidad lo que uno mide en el laboratorio. Partiendo del hecho de que lo que uno mide con los detectores en el experimento es un promedio en el tiempo (típicamente del orden de segundos), y apelando a la hipótesis ergódica, en la cual un promedio temporal es equivalente a realizar un promedio de ensamble, hipótesis que podemos justificar argumentando que en un experimento real las partículas se encuentran en movimiento y los tiempos característicos en el que las densidades fluctúan son del orden de milisegundos, de modo que lo que nos interesa es modelar un promedio de ensamble, por tanto el promedio configuracional es el que nos conviene emplear.

La justificación anterior es válida para sistemas coloidales en donde las partículas están en continuo movimiento, como por ejemplo partículas de látex disueltas en agua, pero uno podría preguntarse qué pasa con sistemas coloidales en donde los tiempos característicos en el que las partículas se mueven es muy grande con respecto a los tiempos de promediado de los detectores, como por ejemplo en los vitrales. En estos casos se puede justificar el uso del promedio configuracional si en el experimento se ilumina una región grande, en comparación del tamaño de las inclusiones, de modo que podemos pensar que la región está conformada por muchos subsistemas ficticios en donde cada uno representa una de las posibles realizaciones del sistema, de tal manera que lo que se mide sea una respuesta promedio del sistema.

En general, podemos dividir el campo eléctrico en cualquier punto del espacio como el *campo promedio* o *campo coherente*, que lo denotamos como $\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle$ y el *campo fluctuante* o *campo difuso*, definido como $\vec{E}(\vec{r})_{difuso} = \vec{E}(\vec{r}) - \langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle$. Sabemos que el campo difuso, conocido como "speckle" (Fig. 2.11), varía dependiendo de la configuración particular del sistema, y por otro lado sabemos que la dirección de propagación del campo coherente se mantiene en cada configuración, variando sólo la magnitud de la intensidad del haz. De modo que aunque nos interese solamente la descripción del campo coherente, necesitamos realizar un promedio configuracional para calcular el valor de la intensidad que mediría un detector en un experimento real.

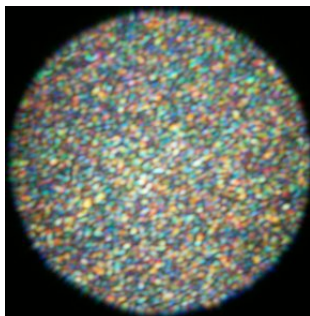


Figura 2: Fotografía del campo difuso de la luz solar.

Apéndice B

En este apéndice se encuentran los detalles del cálculo de la componente transversal del operador de transición o matriz T , referente al capítulo 4, sección 4.1.2.

Para el cálculo de la componente transversal de la matriz T se consideró el problema de una sola partícula esférica de radio a en el vacío, centrada en el origen y caracterizada por una función dieléctrica $\epsilon_I(\omega)$ y por una permeabilidad magnética $\mu_I = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, en presencia de una onda plana electromagnética *transversal* (ver figura 1.2 del capítulo 4).

Campos Electromagnéticos en términos de la base esférica

El campo eléctrico incidente se escribió como, Ec. (1.73),

$$\vec{E}_{inc} = E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_x,$$

en donde $\vec{p} = p\hat{e}_z$, y por ley de Faraday el campo magnético está dado por, Ec. (1.77),

$$\vec{H}_{inc} = \frac{p}{\omega\mu_0} E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_y,$$

en donde $p > 0$ es arbitrario e independiente de ω , para lo cual necesitamos fuentes externas. En este caso, estas fuentes externas solamente pueden ser una densidad de corriente externa $\vec{J}_{ext}$, las cuales podemos calcular por medio de la ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{H}_{inc} = \vec{J}_{ext} - i\omega\epsilon_0\vec{E}_{inc},$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, entonces

$$\begin{aligned} \vec{J}_{ext} &= \nabla \times \vec{H}_{inc} + i\omega\epsilon_0\vec{E}_{inc} \\ &= \frac{ip^2}{\omega\mu_0} E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_z \times \hat{e}_y + i\omega\epsilon_0 E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_x \\ &= \left(-\frac{ip^2}{\omega\mu_0} + i\omega\epsilon_0 \right) E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_x \\ &= \frac{-i}{\omega\mu_0} (p^2 - \omega^2\epsilon_0\mu_0) E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_x \\ &= \frac{-i}{\omega\mu_0} (p^2 - k_0^2) E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] \hat{e}_x \\ &= \frac{-i}{\omega\mu_0} (p^2 - k_0^2) \vec{E}_{inc}, \end{aligned}$$

donde $k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, que es la Ec. (1.79). La base esférica que conviene emplear, dada la simetría esférica del problema, es la de los armónicos esféricos vectoriales, Ec. (1.80), que tienen la forma

$$\begin{aligned}\vec{M}_{emn} &= \nabla \times (r\psi_{emn}), & \vec{M}_{omn} &= \nabla \times (r\psi_{omn}), \\ \vec{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{emn}}{k}, & \vec{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{omn}}{k},\end{aligned}$$

en donde e (o) hace referencia (por sus siglas en inglés) a que la función es par (impar), y donde las funciones escalares ψ son las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales, Ec. (1.81),

$$\begin{aligned}\psi_{emn} &= \cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr), \\ \psi_{omn} &= \sin(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr).\end{aligned}$$

La notación que hemos empleado es la usual para las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Las funciones radiales $z_n(kr)$ son cualquiera de las cuatro funciones esféricas de Bessel: j_n , y_n , $h_n^{(1)}$ o $h_n^{(2)}$ y P_n^m son los polinomios asociados de Legendre con la normalización dada por Bohren [34].

Los campos eléctrico y magnético incidentes en términos de esta base esférica tienen la forma siguiente, Ec. (1.82) y Ec. (1.83),

$$\begin{aligned}\vec{E}_{inc} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\vec{M}_{o1n}^{(1)} - i\vec{N}_{e1n}^{(1)} \right), \\ \vec{H}_{inc} &= \frac{-p}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\vec{M}_{e1n}^{(1)} + i\vec{N}_{o1n}^{(1)} \right),\end{aligned}$$

donde $E_n = i^n E_0(2n+1/n(n+1))$, el superíndice (1) en los armónicos esféricos vectoriales denota que la función z_n corresponde a la función esférica de Bessel $j_n(\rho_i)$, donde $\rho_i = pr$, y los armónicos esféricos vectoriales con $m = 1$ están

dados por

$$\vec{M}_{e1n} = -z_n(\rho) \left[\frac{1}{\sin \theta} \sin \phi P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_\theta + \cos \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\phi \right] \quad (8)$$

$$\vec{M}_{o1n} = z_n(\rho) \left[\frac{1}{\sin \theta} \cos \phi P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_\theta - \sin \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\phi \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{e1n} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos \phi n(n+1) P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_r + \\ &= + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \left[\cos \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta - \sin \phi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{o1n} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \sin \phi n(n+1) P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_r + \\ &= + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \left[\sin \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta + \cos \phi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi \right] \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\rho = kr$.

Debido a la presencia de la densidad de corriente externa, los campos internos ($r < a$) serán solución de la ecuación de Helmholtz con fuentes, de modo que no es obvia la expansión en términos de los armónico esféricos vectoriales. Podemos proponer en general que

$$\vec{E}_I = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (c'_n \vec{M}_{o1n}^{(1)} - id'_n \vec{N}_{e1n}^{(1)}) + \vec{A}, \quad (12)$$

en donde el superíndice (1) denota que la dependencia radial es a través de $j_n(\rho_I)$, donde $\rho_I = k_I r$ con $k_I = \omega \sqrt{\epsilon_I(\omega) \mu_I(\omega)}$. El vector $\vec{A}$ debe de ser determinado mediante las ecuaciones de Maxwell y en un principio podemos notar que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ya que $\vec{E}_I$ es un campo transversal.

Considerando primero la ley de Faraday tenemos

$$\begin{aligned} \vec{H}_I &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}_I = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(c'_n \nabla \times \vec{M}_{o1n}^{(1)} - id'_n \nabla \times \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) + \nabla \times \vec{A} \right] \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_I} \left[k_I \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(-id'_n \vec{M}_{e1n}^{(1)} + c'_n \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right) + \nabla \times \vec{A} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

en donde se ha utilizado que¹

$$\nabla \times \vec{M}^{(1)} = k_I \vec{N}^{(1)} \quad (14)$$

$$\nabla \times \vec{N}^{(1)} = k_I \vec{M}^{(1)}. \quad (15)$$

Ahora consideremos la ley de Ampère $\nabla \times \vec{H}_I = \vec{J}_{ext} - i\omega\epsilon_I \vec{E}_I$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}_I &= \frac{-k_I^2}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(d'_n \vec{N}_{e1n}^{(1)} + ic'_n \vec{M}_{o1n}^{(1)} \right) + \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= -i\omega\epsilon_I (\vec{E}_I - \vec{A}) - \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = -i\omega\epsilon_I \vec{E}_I + i\omega\epsilon_I \vec{A} - \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla^2 \vec{A} \\ &= -i\omega\epsilon_I \vec{E}_I - \frac{1}{i\omega\mu_I} (\nabla^2 \vec{A} + k_I^2 \vec{A}), \end{aligned} \quad (16)$$

de modo que se debe cumplir que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i\omega\mu_0} (\nabla^2 \vec{A} + k_I^2 \vec{A}) &= \vec{J}_{ext} \\ \nabla^2 \vec{A} + k_I^2 \vec{A} &= -i\omega\mu_0 \vec{J}_{ext}. \end{aligned} \quad (17)$$

Pasando al espacio de Fourier en donde $\nabla \rightarrow i\vec{p}$ y junto con la Ec. (1.79) para la densidad de corriente externa, tenemos que

$$\begin{aligned} (-p^2 + k_I^2) \vec{A} &= -i\omega\mu_0 \frac{-i}{\omega\mu_0} (p^2 - k_0^2) \vec{E}_{inc} \\ \vec{A} &= -\frac{p^2 - k_0^2}{k_I^2 - p^2} \vec{E}_{inc} = \frac{k_0^2 - p^2}{k_I^2 - p^2} \vec{E}_{inc}. \end{aligned} \quad (18)$$

El término $\vec{A}$ representa un apantallamiento transversal de la onda incidente en un medio sin fronteras con una respuesta electromagnética dada por ϵ_I .

Entonces podemos escribir los campos internos como

$$\vec{E}_I = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(c'_n \vec{M}_{o1n}^{(1)} - id'_n \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) + \frac{k_0^2 - p^2}{k_I^2 - p^2} \vec{E}_{inc} \quad (19)$$

$$\vec{H}_I = \frac{-k_I}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(d'_n \vec{M}_{e1n}^{(1)} + ic'_n \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right) + \frac{k_0^2 - p^2}{k_I^2 - p^2} \vec{H}_{inc} \quad (20)$$

¹Ver Bohren [34], pág. 84.

Podemos también escribir los campos esparcidos o radiados en términos de la base esférica, Ecs. (1.88) y (1.89),

$$\begin{aligned}\vec{E}_{esp} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(-b_n^T \vec{M}_{o1n}^{(3)} + i a_n^T \vec{N}_{e1n}^{(3)} \right), \\ \vec{H}_{esp} &= \frac{k_0}{\omega \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(i b_n^T \vec{N}_{o1n}^{(3)} + a_n^T \vec{M}_{e1n}^{(3)} \right),\end{aligned}$$

donde el superíndice denota que la dependencia radial de los armónicos esféricos vectoriales es a través de $h_n(\rho_0)$ con $\rho_0 = k_0 r$.

Condiciones de frontera (cálculo de los coeficientes)

Para calcular los coeficientes de las expansiones de los campos haremos uso de las condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell sobre la superficie de la esfera

$$\left(\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{esp} - \vec{E}_I \right) \times \hat{e}_r = \left(\vec{H}_{inc} + \vec{H}_{esp} - \vec{H}_I \right) \times \hat{e}_r = 0, \quad (21)$$

que pueden escribirse, en $r = a$, como las cuatro ecuaciones siguientes²

$$E_{inc}^{\theta} + E_{esp}^{\theta} = E_I^{\theta}, \quad (22)$$

$$E_{inc}^{\phi} + E_{esp}^{\phi} = E_I^{\phi}, \quad (23)$$

$$H_{inc}^{\theta} + H_{esp}^{\theta} = H_I^{\theta}, \quad (24)$$

$$H_{inc}^{\phi} + H_{esp}^{\phi} = H_I^{\phi}. \quad (25)$$

Sustituyendo las ecuaciones de los campos electromagnéticos, Ecs. (1.82), (1.83), (2.35), (2.36), (1.88) y (1.89) en la condición para la componente θ del campo eléctrico, Ec. (2.38), obtenemos

$$\begin{aligned}& E_n [\xi j_n(x_i) - b_n h_n(x_0) - c_n' j_n(x_I)] \frac{1}{\sin \theta} \cos \phi P_n^1(\cos \theta) + \\& + E_n \left\{ -i \xi \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]' + i a_n \frac{1}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' + \right. \\& \left. + i d_n' \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]' \right\} \cos \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} = 0,\end{aligned} \quad (26)$$

²La condición sobre la componente perpendicular a la superficie de la esfera está contenida en las condiciones que nos proporcionan las componentes paralelas de los campos, de modo que no añade nueva información.

en donde “ ‘ ” después del paréntesis cuadrado denota derivada respecto del argumento de la función esférica de Bessel³, y donde

$$\xi \equiv \frac{k_I^2 - k_0^2}{k_I^2 - p^2}, \quad (27)$$

y donde $x_i = pa$, $x_0 = k_0a$ y $x_I = k_Ia$. Esta condición nos conduce a las siguientes ecuaciones

$$h_n(x_0) b_n + j_n(x_I) c'_n = \xi j_n(x_i), \quad (28)$$

$$\frac{1}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' a_n + \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]' d'_n = \xi \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]'. \quad (29)$$

Empleando la condición para la componente ϕ , Ec. (2.39), obtenemos exactamente las mismas ecuaciones, ya que todos los campos tienen la misma dependencia angular. Por otro lado, la condición para la componente θ del campo magnético, Ec. (2.40), nos conduce a

$$\begin{aligned} E_n \left[\frac{-p}{\omega\mu_0} \xi j_n(x_i) + \frac{k_0}{\omega\mu_0} h_n(x_0) a_n + \frac{k_I}{\omega\mu_0} j_n(x_I) d'_n \right] \times \frac{(-1)}{\sin \theta} \sin \phi P_n^1(\cos \theta) + \\ + E_n \left\{ \frac{-p}{\omega\mu_0} i \xi \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]' + \frac{k_0}{\omega\mu_0} i b_n \frac{1}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' + \right. \\ \left. + \frac{k_I}{\omega\mu_0} i c'_n \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]' \right\} \sin \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

de donde obtenemos las siguientes dos ecuaciones

$$x_0 h_n(x_0) a_n + x_I j_n(x_I) d'_n = x_i \xi j_n(x_i), \quad (31)$$

$$[x_0 h_n(x_0)]' b_n + [x_I j_n(x_I)]' c'_n = \xi [x_i j_n(x_i)]'. \quad (32)$$

Al igual que para el campo eléctrico, de la condición sobre la componente ϕ del campo magnético, Ec. (2.41), obtenemos las mismas ecuaciones. Entonces, tenemos en total cuatro ecuaciones para calcular cuatro coeficientes, pero en realidad solamente nos interesan dos coeficientes: c'_n y d'_n , que son los que están relacionados con el campo eléctrico interno.

Entonces, despejando el coeficiente b_n de la Ec. (2.44) obtenemos

$$b_n = \frac{1}{h_n(x_0)} [\xi j_n(x_i) - j_n(x_I) c'_n], \quad (33)$$

³El símbolo “ ‘ ” en los coeficientes c'_n y d'_n no indica derivadas en este caso.

y sustituyendo en la Ec. (2.48) tenemos

$$\begin{aligned}
[x_0 h_n(x_0)]' \frac{1}{h_n(x_0)} [\xi j_n(x_i) - j_n(x_I) c_n'] + [x_I j_n(x_I)]' c_n' &= \xi [x_i j_n(x_i)]', \\
[x_0 h_n(x_0)]' [\xi j_n(x_i) - j_n(x_I) c_n'] + h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]' c_n' &= \\
&= \xi [x_i j_n(x_i)]' h_n(x_0), \\
\{h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]' - j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]'\} c_n' &= \\
&= \xi \{[x_i j_n(x_i)]' h_n(x_0) - j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]'\},
\end{aligned}$$

de modo que finalmente obtenemos

$$c_n' = \xi \frac{h_n(x_0) [x_i j_n(x_i)]' - j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]'}{h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]' - j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]'}, \quad (34)$$

Ahora, eliminando el coeficiente a_n de la Ec. (2.47) obtenemos

$$\begin{aligned}
x_0 h_n(x_0) a_n + x_I j_n(x_I) d_n' &= \xi x_i j_n(x_i), \\
x_0 h_n(x_0) a_n &= \xi x_i j_n(x_i) - x_I j_n(x_I) d_n', \\
a_n &= \frac{\xi x_i j_n(x_i) - x_I j_n(x_I) d_n'}{x_0 h_n(x_0)}, \quad (35)
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la Ec. (2.45) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' a_n + \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]' d_n' &= \xi \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]', \\
\frac{[x_0 h_n(x_0)]'}{x_0} \frac{\xi x_i j_n(x_i) - x_I j_n(x_I) d_n'}{x_0 h_n(x_0)} + \frac{[x_I j_n(x_I)]'}{x_I} d_n' &= \xi \frac{[x_i j_n(x_i)]'}{x_i}, \\
\left\{ \frac{[x_I j_n(x_I)]'}{x_I} - \frac{\frac{x_I}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' j_n(x_I)}{x_0 h_n(x_0)} \right\} d_n' &= \\
= \xi \left\{ \frac{[x_i j_n(x_i)]'}{x_i} - \frac{\frac{x_i}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' j_n(x_i)}{x_0 h_n(x_0)} \right\}, \\
\left\{ x_0 h_n(x_0) \frac{[x_I j_n(x_I)]'}{x_I} - \frac{x_I}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' x_I j_n(x_I) \right\} d_n' &= \\
= \xi \left\{ x_0 h_n(x_0) \frac{[x_i j_n(x_i)]'}{x_i} - \frac{x_i}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' j_n(x_i) \right\}.
\end{aligned}$$

Entonces finalmente tenemos que

$$d'_n = \xi \frac{x_0 h_n(x_0) \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]' - \frac{1}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' x_i j_n(x_i)}{x_0 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]' - \frac{1}{x_0} [x_0 h_n(x_0)]' x_I j_n(x_I)}. \quad (36)$$

Entonces podemos escribir los campos eléctrico y magnético internos en la forma en que aparecen en el capítulo 3, Ecs. (1.86) y Ec. (1.87),

$$\begin{aligned} \vec{E}_I &= \xi \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(c_n^T \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i d_n^T \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) + (1 - \xi) \vec{E}_{inc}, \\ \vec{H}_I &= \frac{-k_I}{\omega \mu_0} \xi \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(d_n^T \vec{M}_{e1n}^{(1)} + i c_n^T \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right) + (1 - \xi) \vec{H}_{inc}, \end{aligned}$$

en donde los coeficientes c_n^T y d_n^T están dados por, Ecs. (1.90) y (1.91),

$$\begin{aligned} c_n^T &= \frac{j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]' - h_n(x_0) [x_i j_n(x_i)]'}{j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]'}, \\ d_n^T &= \frac{x_i j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]'}{x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'}. \end{aligned}$$

Cálculo de la componente T^T

Una vez que contamos con la expresión para el campo eléctrico $\vec{E}_I$ en términos de la base esférica, Ec. (1.86), podemos hacer uso de la Ec. (1.76) para calcular la componente transversal de la matriz T

$$T^T(p; \omega) = \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \int \hat{e}_x \cdot \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r.$$

Proyectando la Ec. (1.86) a lo largo de $\hat{e}_x$ tenemos

$$\vec{E}_I \cdot \hat{e}_x = \xi \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(c_n^T \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i d_n^T \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) \cdot \hat{e}_x + (1 - \xi) \vec{E}_{inc} \cdot \hat{e}_x, \quad (37)$$

en donde $\vec{M}_{o1n}^{(1)}$ y $\vec{N}_{e1n}^{(1)}$ están dados como, Ecs. (2.25) y (2.26),

$$\begin{aligned}\vec{M}_{o1n} &= j_n(\rho_I) \left[\frac{1}{\sin \theta} \cos \phi P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_\theta - \sin \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\phi \right] \\ \vec{N}_{e1n} &= \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos \phi n(n+1) P_n^1(\cos \theta) \hat{e}_r + \\ &= + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \left[\cos \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta - \sin \phi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi \right]\end{aligned}$$

y de geometría elemental sabemos que

$$\hat{e}_r = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z, \quad (38)$$

$$\hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z, \quad (39)$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y. \quad (40)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\vec{M}_{o1n}^{(1)} \cdot \hat{e}_x &= \frac{j_n(\rho_I)}{\sin \theta} \cos \phi P_n^1(\cos \theta) \cos \theta \cos \phi + j_n(\rho_I) \sin^2 \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \\ &= j_n(\rho_I) \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos^2 \phi P_n^1(\cos \theta) + \sin^2 \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right], \quad (41)\end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$P_n^1(\cos \theta) = -\frac{dP_n}{d\theta} = \sin \theta P_n', \quad (42)$$

$$\frac{dP_n^1}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \sin \theta P_n' = \cos \theta P_n' - \sin^2 \theta P_n'', \quad (43)$$

en donde nuevamente “ ’ ” denota derivada respecto del argumento, de modo que tenemos

$$\begin{aligned}\vec{M}_{o1n}^{(1)} \cdot \hat{e}_x &= j_n(\rho_I) \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos^2 \phi \sin \theta P_n' + \sin^2 \phi (\cos \theta P_n' - \sin^2 \theta P_n'') \right], \\ &= j_n(\rho_I) [\cos \theta \cos^2 \phi P_n' + \sin^2 \phi (\cos \theta P_n' - \sin^2 \theta P_n'')], \\ &= j_n(\rho_I) [\cos \theta P_n' - \sin^2 \phi \sin^2 \theta P_n''] .\end{aligned}$$

Análogamente, proyectando $\vec{N}_{e1n}^{(1)}$ a lo largo de $\hat{e}_x$ tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{N}_{e1n}^{(1)} \cdot \hat{e}_x &= \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos \phi \, n(n+1) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta \cos \phi + \\
&+ \cos \phi \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \cos \theta \cos \phi - \\
&- \sin \phi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] (-\sin \phi) \\
&= n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos^2 \phi \sin^2 \theta P_n' + \\
&+ \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \{ \cos^2 \phi \cos \theta (\cos \theta P_n' - \sin^2 \theta P_n'') + \sin^2 \phi P_n' \} \\
&= n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos^2 \phi \sin^2 \theta P_n' + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \times \\
&\times \{ [\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi] P_n' - \cos^2 \phi \cos \theta \sin^2 \theta P_n'' \}. \tag{44}
\end{aligned}$$

Por último, proyectando el campo eléctrico incidente a lo largo del eje X

$$\vec{E}_{inc} \cdot \hat{e}_x = E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}], \tag{45}$$

y haciendo uso de la Ec. (1.99)

$$\exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l j_l(\rho_i) P_l(\cos \theta),$$

podemos escribir la Ec. (1.76) como en el capítulo 3, Ec. (1.100),

$$\begin{aligned}
T^T(p; \omega) = & \frac{k_0^2 \chi_p \xi}{E_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n c_n^T (2l+1)(-i)^l \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) j_n(\rho_I) \times \right. \\
& \times \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \left[\cos \theta P_l P_n' - \sin^2 \phi \sin^2 \theta P_l P_n'' \right] - \\
& - i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n d_n^T (2l+1)(-i)^l \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \times \\
& \times \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos^2 \phi \sin^2 \theta P_l P_n' + \right. \\
& + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \left\{ [\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi] P_l P_n' - \right. \\
& \left. \left. - \cos^2 \phi \cos \theta \sin^2 \theta P_l P_n'' \right] \right\} \left. \right\} + \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} (1 - \xi) E_0 \frac{4\pi a^3}{3},
\end{aligned}$$

en donde $\mu = \cos \theta$ y $\rho_I = k_0 N_I r$.

Integrales angulares

Realizando las integrales sobre la variable ϕ , recordando que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi, \quad (46)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1 - \xi) + \frac{k_0^2 \chi_p \xi}{E_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n c_n^T (2l+1)(-i)^l \pi \times \right. \\
& \times \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) j_n(\rho_I) \int_{-1}^1 d\mu \left[2 \cos \theta P_l P_n' - \sin^2 \theta P_l P_n'' \right] - \\
& - i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n d_n^T (2l+1)(-i)^l \pi \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \times \\
& \times \int_{-1}^1 d\mu \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \sin^2 \theta P_l P_n' + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \times \right. \\
& \left. \times \left\{ (\cos^2 \theta + 1) P_l P_n' - \cos \theta \sin^2 \theta P_l P_n'' \right\} \right] \left. \right\}. \quad (47)
\end{aligned}$$

Reemplazando $\cos \theta = \mu$ y $\sin^2 \theta = 1 - \mu^2$ y reacomodando las integrales, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1 - \xi) + \frac{k_0^2 \chi_p \xi}{E_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n c_n^T (2l+1) (-i)^l \pi \times \right. \\
& \times \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) j_n(\rho_I) \int_{-1}^1 d\mu [2\mu P_l P_n' - (1 - \mu^2) P_l P_n''] - \\
& - i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n d_n^T (2l+1) (-i)^l \pi \left[n(n+1) \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \times \right. \\
& \times \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) P_l P_n' + \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \times \\
& \left. \left. \times \int_{-1}^1 d\mu [(1 + \mu^2) P_l P_n' - \mu (1 - \mu^2) P_l P_n''] \right] \right\}. \quad (48)
\end{aligned}$$

Para la primera de las integrales angulares, que denotaremos como A_1 , tenemos que

$$\begin{aligned}
A_1 & \equiv \int_{-1}^1 d\mu [2\mu P_l P_n' - (1 - \mu^2) P_l P_n''] = \\
& = \int_{-1}^1 d\mu [2\mu P_l P_n' - 2\mu P_l P_n' + n(n+1) P_l P_n] = \\
& = \int_{-1}^1 d\mu [n(n+1) P_l P_n] = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \delta_{l,n}, \quad (49)
\end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la igualdad $(1 - \mu^2) P_n'' = 2\mu P_n' - n(n+1) P_n$ ⁴.

⁴Esta ecuación se puede deducir a partir de las Ecs. (3.28) y (3.29) del libro de Jackson [54], pág. 100.

La segunda de las integrales la podemos calcular como

$$\begin{aligned}
A_2 &\equiv \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) P_n' P_l = \int_{-1}^1 d\mu P_l [nP_{n-1} - n\mu P_n] = \\
&= n \int_{-1}^1 P_l P_{n-1} d\mu - n \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu = \\
&= \frac{2n}{2(n-1)+1} \delta_{l,n-1} - n \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu = \\
&= \frac{2n}{2n-1} \delta_{l,n-1} - \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l,n+1} - \frac{2n^2}{(2n-1)(2n+1)} \delta_{l,n-1} = \\
&= \left[\frac{2n}{2n-1} - \frac{2n^2}{(2n-1)(2n+1)} \right] \delta_{l,n-1} - \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l,n+1} = \\
&= \frac{2n}{2n-1} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \right] \delta_{l,n-1} - \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l,n+1} = \\
&= \frac{2n}{2n-1} \frac{n+1}{2n+1} \delta_{l,n-1} - \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l,n+1} = \\
&= \frac{2n(n+1)}{2n+1} \left[\frac{1}{2n-1} \delta_{l,n-1} - \frac{1}{2n+3} \delta_{l,n+1} \right], \tag{50}
\end{aligned}$$

en donde empleamos la igualdad $(1 - \mu^2) P_n' = nP_{n-1} - n\mu P_n$ ⁵ así como la Ec. (3.31) de Jackson [54]. Finalmente tenemos para la tercera integral

$$\begin{aligned}
A_3 &\equiv \int_{-1}^1 d\mu [(1 + \mu^2) P_l P_n' - \mu (1 - \mu^2) P_l P_n''] = \\
&= \int_{-1}^1 d\mu [(1 + \mu^2) P_l P_n' - \mu P_l [2\mu P_n' - n(n+1) P_n]] = \\
&= \int_{-1}^1 d\mu [P_l P_n' - \mu^2 P_l P_n' + n(n+1) \mu P_l P_n] = \\
&= \int_{-1}^1 d\mu [(1 - \mu^2) P_l P_n'] + n(n+1) \int_{-1}^1 d\mu \mu P_l P_n, \tag{51}
\end{aligned}$$

en donde hemos empleado la misma relación entre los polinomios de Legendre que para el caso de la primera integral. Identificando A_2 en la Ec.(2.67)

⁵Última ecuación de las Ecs. (3.29), Jackson [54], pág. 100.

tenemos que

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 + n(n+1) \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu = \\ &= A_2 + n^2 \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu + n \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu, \end{aligned}$$

y sustituyendo la expresión para A_2 , Ec. (2.66), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} A_3 &= n \frac{2}{2(n-1)+1} \delta_{l,n-1} - n \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu + n^2 \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu + \\ &+ n \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu = \frac{2n}{2(n-1)+1} \delta_{l,n-1} + n^2 \int_{-1}^1 \mu P_l P_n d\mu = \\ &= \frac{2n \delta_{l,n-1}}{2(n-1)+1} + \frac{2n^2(n+1) \delta_{l,n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2n^3 \delta_{l,n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \left[\frac{2n}{2(n-1)+1} + \frac{2n^3}{(2n-1)(2n+1)} \right] \delta_{l,n-1} + \frac{2n^2(n+1) \delta_{l,n+1}}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{2n}{2n-1} \left[1 + \frac{n^2}{2n+1} \right] \delta_{l,n-1} + \frac{2n^2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l,n+1} = \\ &= \frac{2n(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} \delta_{l,n-1} + \frac{2n^2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l,n+1} = \\ &= \frac{2n(n+1)}{(2n+1)} \left[\frac{n+1}{2n-1} \delta_{l,n-1} + \frac{n}{2n+3} \delta_{l,n+1} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Sustituyendo las integrales A_1 , A_2 y A_3 , Ecs. (2.65), (2.66) y (2.68), en la ecuación para T^T , Ec. (2.64), obtenemos

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) &= \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1 - \xi) + \frac{k_0^2 \chi_p \xi}{E_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n c_n^T (2l+1) (-i)^l \pi \times \right. \\ &\times \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) j_n(\rho_I) \left[\frac{2n(n+1)}{2n+1} \delta_{l,n} \right] - i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_n d_n^T (2l+1) (-i)^l \pi \times \\ &\times \left[n(n+1) \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \frac{2n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{1}{2n-1} \delta_{l,n-1} - \frac{1}{2n+3} \delta_{l,n+1} \right) + \right. \\ &\left. \left. + \int_0^a r^2 dr j_l(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \frac{2n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{n+1}{2n-1} \delta_{l,n-1} + \frac{n}{2n+3} \delta_{l,n+1} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

de modo que la suma sobre l se simplifica debido a las funciones delta de Dirac, por lo que

$$\begin{aligned}
T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1 - \xi) + \frac{k_0^2 \chi_p \xi}{E_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} E_n c_n^T 2n(n+1) (-i)^n \pi \times \right. \\
& \times \int_0^a r^2 dr j_n(\rho_i) j_n(\rho_I) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n d_n^T \pi (-i)^n \left[\frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \times \right. \\
& \times \left(\int_0^a r^2 dr j_{n-1}(\rho_i) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} + \int_0^a r^2 dr j_{n+1}(\rho_i) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \right) + \frac{2n(n+1)}{2n+1} \times \\
& \times \left. \left. \left((n+1) \int_0^a r^2 dr j_{n-1}(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' - n \int_0^a r^2 dr j_{n+1}(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Recordando que

$$E_n = (i)^n E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)},$$

tenemos

$$\begin{aligned}
T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1 - \xi) + 2\pi k_0^2 \chi_p \xi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^T (2n+1) \int_0^a r^2 dr j_n(\rho_i) j_n(\rho_I) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^T \left[n(n+1) \left(\int_0^a r^2 dr j_{n-1}(\rho_i) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} + \int_0^a r^2 dr j_{n+1}(\rho_i) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \right) + \right. \\
& + \left. \left. \left((n+1) \int_0^a r^2 dr j_{n-1}(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' - n \int_0^a r^2 dr j_{n+1}(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

y reorganizando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1 - \xi) + 2\pi k_0^2 \chi_p \xi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^T (2n+1) \int_0^a r^2 dr j_n(\rho_i) j_n(\rho_I) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^T \left[n(n+1) \left(\int_0^a r^2 dr [j_{n-1}(\rho_i) + j_{n+1}(\rho_i)] \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \right) + \right. \\
& + \left(\int_0^a r^2 dr [n j_{n-1}(\rho_i) - (n+1) j_{n+1}(\rho_i)] \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' + \right. \\
& + \left. \left. \int_0^a r^2 dr [j_{n-1}(\rho_i) + j_{n+1}(\rho_i)] \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \right) \right] \right\}. \tag{53}
\end{aligned}$$

Integrales radiales

Utilizando las siguientes identidades⁶

$$j_{n-1}(\rho) + j_{n+1}(\rho) = (2n+1) \frac{j_n(\rho)}{\rho}, \quad (54)$$

$$n j_{n-1}(\rho) - (n+1) j_{n+1}(\rho) = (2n+1) \frac{d}{d\rho} j_n(\rho), \quad (55)$$

podemos escribir la Ec. (2.64) como

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1-\xi) + 2\pi k_0^2 \chi_p \xi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^T (2n+1) \int_0^a r^2 dr j_n(\rho_i) j_n(\rho_I) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^T \left[n(n+1) (2n+1) \int_0^a r^2 dr \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} + \right. \\ & \left. \left. + (2n+1) \left(\int_0^a r^2 dr j_n'(\rho_i) \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' + \int_0^a r^2 dr \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1-\xi) + 2\pi k_0^2 \chi_p \xi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^T (2n+1) \int_0^a r^2 dr j_n(\rho_i) j_n(\rho_I) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^T \left[n(n+1) (2n+1) \int_0^a r^2 dr \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} + \right. \\ & \left. \left. + (2n+1) \int_0^a r^2 dr \left[j_n'(\rho_i) + \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \right] \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \right] \right\}. \quad (56) \end{aligned}$$

Reconociendo que

$$j_n'(\rho_i) + \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_i} [\rho_i j_n(\rho_i)], \quad (57)$$

tenemos

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) = & \frac{4\pi}{3} k_0^2 a^3 \chi_p (1-\xi) + 2\pi k_0^2 \chi_p \xi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ c_n^T \int_0^a r^2 dr j_n(\rho_i) j_n(\rho_I) + \right. \\ & \left. + d_n^T \left[n(n+1) \int_0^a r^2 dr \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} + \int_0^a r^2 dr \frac{1}{\rho_i} [\rho_i j_n(\rho_i)]' \frac{1}{\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)]' \right] \right\}. \end{aligned}$$

⁶ver Abramowitz [55], pág. 439, Ecs. (10.1.19) y (10.1.20).

Ahora, tomando a como la unidad de longitud definimos $x = r/a$, y recordando que $x_I = k_I/a$, $x_0 = k_0/a$ y $x_i = pa$, tenemos entonces que $\rho_i = x_i x$ y $\rho_I = x_I x$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) &= \\ &= \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 2\pi x_0^2 a \chi_p \xi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ c_n^T \int_0^1 x^2 j_n(x_i x) j_n(x_I x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_n^T}{x_i x_I} \left[n(n+1) \int_0^1 j_n(x_i x) j_n(x_I x) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} [x j_n(x_i x)] \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] dx \right] \right\}. \end{aligned}$$

La integral radial que acompaña a c_n^T está dada por⁷

$$\begin{aligned} I_2(n, n) &\equiv \int_0^1 x^2 j_n(x_i x) j_n(x_I x) dx = \\ &= \frac{1}{x_i^2 - x_I^2} [x_I j_n(x_i) j_{n-1}(x_I) - x_i j_{n-1}(x_i) j_n(x_I)], \end{aligned} \quad (58)$$

la cual es simétrica bajo el intercambio $x_i \rightarrow x_I$. Para el caso $x_i = x_I$ tenemos que⁸

$$\int_0^1 x^2 j_n^2(x_i x) dx = \frac{1}{2} [j_n^2(x_i) - j_{n-1}(x_i) j_{n+1}(x_i)]; \quad n \geq 1, \quad (59)$$

$$\int_0^1 x^2 j_0^2(x_i x) dx = \frac{1}{2} \left[j_0^2(x_i) - \frac{\cos x_i}{x_i} j_1(x_i) \right]; \quad n = 0, \quad (60)$$

de modo que la igualdad se mantiene válida para todo n . Por otro lado

$$\frac{d}{dx} [x j_n(x_i x)] = x_i x j_n'(x_i x) + j_n(x_i x), \quad (61)$$

$$\frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] = x_I x j_n'(x_I x) + j_n(x_I x), \quad (62)$$

que, utilizando las siguientes identidades⁹

$$\frac{d}{d\rho} j_n(\rho) = j_{n-1}(\rho) - (n+1) \frac{j_n(\rho)}{\rho}, \quad (63)$$

$$\frac{d}{d\rho} j_n(\rho) = n \frac{j_n(\rho)}{\rho} - j_{n+1}(\rho), \quad (64)$$

⁷Esta integral se obtuvo con el software *Mathematica* versión 4.2.

⁸Ver Barrera y Fuchs [74], pág. 3267, Ec. (A.15).

⁹ver Abramowitz [55], pág. 439, Ecs. (10.1.21) y (10.1.22).

podemos escribir como¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x j_n(x_i x)] &= x_i x \frac{n j_n(x_i x)}{x_i x} - x_i x j_{n+1}(x_i x) + j_n(x_i x) = \\ &= (n+1) j_n(x_i x) - x_i x j_{n+1}(x_i x), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] &= x_I x j_{n-1}(x_I x) - (n+1) j_n(x_I x) + j_n(x_I x) = \\ &= -n j_n(x_I x) + x_I x j_{n-1}(x_I x), \end{aligned} \quad (66)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x j_n(x_i x)] \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] &= -n(n+1) j_n(x_i x) j_n(x_I x) + \\ &+ (n+1) j_n(x_i x) x_I x j_{n-1}(x_I x) + \\ &+ x_i x j_{n+1}(x_i x) n j_n(x_I x) - \\ &- x_i x j_{n+1}(x_i x) x_I x j_{n-1}(x_I x). \end{aligned} \quad (67)$$

Entonces

$$\begin{aligned} n(n+1) \int_0^1 j_n(x_i x) j_n(x_I x) dx &+ \int_0^1 \frac{d}{dx} [x j_n(x_i x)] \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] dx = \\ (n+1) x_I \int_0^1 x j_n(x_i x) j_{n-1}(x_I x) dx &+ n x_i \int_0^1 x j_{n+1}(x_i x) j_n(x_I x) dx - \\ - x_i x_I \int_0^1 x^2 j_{n+1}(x_i x) j_{n-1}(x_I x) dx, \end{aligned} \quad (68)$$

de modo que finalmente podemos escribir

$$\begin{aligned} T^T(p; \omega) &= \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 2\pi x_0^2 a \chi_p \xi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \{ c_n^T I_2(n, n) + \\ &+ \frac{d_n^T}{x_i x_I} \left[n(n+1) x_I \int_0^1 x j_n(x_i x) j_{n-1}(x_I x) dx + n x_i \int_0^1 x j_{n+1}(x_i x) j_n(x_I x) dx - \right. \\ &\quad \left. - x_i x_I \int_0^1 x^2 j_{n+1}(x_i x) j_{n-1}(x_I x) dx \right] \}. \end{aligned} \quad (69)$$

¹⁰La Ec. (2.79) se substituyó en la Ec. (2.78) mientras que la Ec. (2.80) se substituyó en la Ec. (2.77).

o bien

$$T^T(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 2\pi x_0^2 a \chi_p \xi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \{c_n^T I_2(n, n) + d_n^T \left[\frac{(n+1)}{x_i} I_1(n, n-1) + \frac{n}{x_I} I_1(n+1, n) - I_2(n+1, n-1) \right] \}, \quad (70)$$

en donde

$$I_1(n, m) \equiv \int_0^1 x j_n(x_i x) j_m(x_I x) dx, \quad (71)$$

$$I_2(n, m) \equiv \int_0^1 x^2 j_n(x_i x) j_m(x_I x) dx, \quad (72)$$

$$I_2(n, n) = \frac{1}{x_i^2 - x_I^2} [x_I j_n(x_i) j_{n-1}(x_I) - x_i j_{n-1}(x_i) j_n(x_I)]. \quad (73)$$

Calculando el límite $p \rightarrow 0$

En el límite $p \rightarrow 0$ podemos escribir los primeros términos de la serie para la componente transversal T^T como

$$T^T(p; \omega) \approx \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 2\pi x_0^2 a \chi_p \xi \left[3 c_1^T I_2(1, 1) + 6 d_1^T \frac{I_1(1, 0)}{x_i} + 3 d_1^T \frac{I_1(2, 1)}{x_I} - 3 d_1^T I_2(2, 0) + 15 d_2^T \frac{I_1(2, 1)}{x_i} \right], \quad (74)$$

en donde necesitaremos calcular también los primeros términos de las integrales:

$$\begin{aligned} I_2(1, 1) &= \frac{1}{x_i^2 - x_I^2} [x_I j_1(x_i) j_0(x_I) - x_i j_0(x_i) j_1(x_I)] \approx \\ &\approx \frac{-1}{x_I^2} \left(1 - \frac{x_i^2}{x_I^2} \right)^{-1} \left[x_I \frac{x_i}{3} j_0(x_I) - x_i j_1(x_I) \right] = \\ &= \frac{x_i}{3x_I} \left[\frac{3j_1(x_I)}{x_I} - j_0(x_I) \right] \left(1 + \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right) = \frac{x_i}{3} \frac{j_2(x_I)}{x_I} + O(x_i^3). \end{aligned} \quad (75)$$

Haciendo uso de la relación¹¹

$$\int \rho^{n+2} j_n(\rho) d\rho = \rho^{n+2} j_{n+1}(\rho), \quad (76)$$

¹¹Ver Barrera y Fuchs [74], pág. 3267, Ec. (A.13).

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{I_1(1,0)}{x_i} &= \frac{1}{x_i} \int_0^1 x j_1(x_i x) j_0(x_I x) dx \approx \frac{1}{x_i} \int_0^1 x \left[\frac{x_i x}{3} - \frac{(x_i x)^3}{30} \right] j_0(x_I x) dx = \\
&= \frac{1}{3x_I^3} \int_0^1 (x_I x)^2 j_0(x_I x) d(x_I x) - \frac{x_i^2}{30} \int_0^1 x^4 j_0(x_I x) dx = \\
&= \frac{j_1(x_I)}{3x_I} - \frac{x_i^2}{30} \int_0^1 x^4 j_0(x_I x) dx = \frac{j_1(x_I)}{3x_I} - \frac{x_i^2}{30} \left[\frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{2}{x_I^2} j_2(x_I) \right] \\
&= \frac{j_1(x_I)}{3x_I} - \frac{x_i^2}{30} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{x_i^2}{30} \frac{2}{x_I^2} j_2(x_I), \tag{77}
\end{aligned}$$

al igual que para

$$\begin{aligned}
I_1(2,1) &= \int_0^1 x j_2(x_i x) j_1(x_I x) dx \approx \frac{x_i^2}{15} \int_0^1 x^3 j_1(x_I x) dx = \\
&= \frac{x_i^2}{15x_I^4} \int_0^1 (x_I x)^3 j_1(x_I x) d(x_I x) = \frac{x_i^2}{15x_I^4} x_I^3 j_2(x_I) = \frac{x_i^2}{15} \frac{j_2(x_I)}{x_I}, \tag{78}
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
I_2(2,0) &= \int_0^1 x^2 j_2(x_i x) j_0(x_I x) dx \approx \frac{x_i^2}{15} \int_0^1 x^4 j_0(x_I x) dx = \\
&= \frac{x_i^2}{15} \left[\frac{j_1(x_I)}{x_I} - 2 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} \right], \tag{79}
\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^4 j_0(x_I x) dx &= \int_0^1 x^4 \frac{\sin x_I x}{x_I x} dx = \frac{1}{x_I} \int_0^1 x^3 \sin x_I x dx = \\
&= \frac{1}{x_I^5} [3(x_I^2 - 2) \sin x_I - x_I (x_I^2 - 6) \cos x_I] = \\
&= 3 \frac{\sin(x_I)}{x_I^3} - \frac{\cos(x_I)}{x_I^2} - 6 \frac{\sin(x_I)}{x_I^5} + 6 \frac{\cos(x_I)}{x_I^4} = \\
&= \frac{\sin(x_I)}{x_I^3} - \frac{\cos(x_I)}{x_I^2} + 2 \frac{\sin(x_I)}{x_I^3} - 6 \frac{\sin(x_I)}{x_I^5} + 6 \frac{\cos(x_I)}{x_I^4} = \\
&= \frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{2}{x_I^2} \left\{ \left[\frac{3}{x_I^3} - \frac{1}{x_I} \right] \sin(x_I) - 3 \frac{\cos(x_I)}{x_I^2} \right\} = \\
&= \frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{2}{x_I^2} j_2(x_I), \tag{80}
\end{aligned}$$

ya que tenemos que

$$j_1(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{x_I^2} - \frac{\cos(\rho)}{x_I}, \quad (81)$$

$$j_2(\rho) = \frac{3 \sin(\rho)}{x_I^3} - \frac{3 \cos(\rho)}{x_I^2} - \frac{\sin(\rho)}{x_I}. \quad (82)$$

En las aproximaciones para las integrales hemos utilizado las aproximaciones de las funciones esféricas de Bessel, Ecs. (1.95),

$$j_1(\rho) \approx \frac{\rho}{3}, \quad j_2(\rho) \approx \frac{\rho^2}{15}, \quad h_1^{(1)}(\rho) \approx \frac{-i}{\rho^2}, \quad h_2^{(1)}(\rho) \approx \frac{-3i}{\rho^3},$$

además de $j_0(\rho) \approx 1$. Entonces, sustituyendo las expresiones para las integrales, Ecs. (2.91), (2.93), (2.94) y (2.95), en la Ec. (2.90), tenemos

$$\begin{aligned} T^T(p \rightarrow 0; \omega) = & \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 2\pi x_0^2 a \chi_p \xi \left[3 c_1^T \frac{x_i}{3} \frac{j_2(x_I)}{x_I} + \right. \\ & + 6 d_1^T \left(\frac{1}{3} \frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{x_i^2}{30} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{x_i^2}{15} \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} \right) + 3 d_1^T \frac{x_i^2}{15} \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} - \\ & \left. - 3 d_1^T \frac{x_i^2}{15} \left(\frac{j_1(x_I)}{x_I} - 2 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} \right) + 15 d_2^T \frac{x_i}{15} \frac{j_2(x_I)}{x_I} \right]. \quad (83) \end{aligned}$$

Reorganizando términos podemos finalmente escribir

$$\begin{aligned} T^T(p \rightarrow 0; \omega) = & \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 2\pi x_0^2 a \chi_p \xi \left[2 d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \right. \\ & + \left. (c_1^T + d_2^T) x_i \frac{j_2(x_I)}{x_I} + d_1^T x_i^2 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} - d_1^T \frac{2}{5} x_i^2 \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right], \quad (84) \\ = & \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 4\pi x_0^2 a \chi_p \xi \left[d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \right. \\ & + \frac{1}{2} (c_1^T + d_2^T) x_i \frac{j_2(x_I)}{x_I} + \frac{1}{2} d_1^T x_i^2 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} - d_1^T \frac{1}{5} x_i^2 \frac{j_1(x_I)}{x_I} \left. \right], \\ = & \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \chi_p (1 - \xi) + 4\pi x_0^2 a \chi_p \xi \left\{ \frac{1}{2} (c_1^T + d_2^T) x_i \frac{j_2(x_I)}{x_I} + \right. \\ & + d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{d_1^T}{10 x_I} x_i^2 \left[5 \frac{j_2(x_I)}{x_I} - 2 j_1(x_I) \right] \left. \right\}, \quad (85) \end{aligned}$$

o bien

$$T^T(p \rightarrow 0; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \xi \left[\chi_p \frac{(1-\xi)}{\xi} + \frac{3}{2} \chi_p (c_1^T + d_2^T) \frac{j_2(x_I)}{x_I} x_i + \right. \\ \left. + 3 d_1^T \chi_p \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \chi_p \frac{3 d_1^T}{10} \left(5 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} - 2 \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right) x_i^2 \right]. \quad (86)$$

Podemos hacer un desarrollo en potencias de x_i para ξ , de modo que

$$\xi \equiv \frac{k_I^2 - k_0^2}{k_I^2 - p^2} = \frac{k_I^2 - k_0^2}{k_I^2(1 - p^2/k_I^2)} = \left(1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \right) \frac{1}{1 - p^2/k_I^2} = \\ = \left(1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \right) \left(1 + \frac{p^2}{k_I^2} + \dots \right) = \zeta \left(1 + \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right), \quad (87)$$

en donde $\zeta \equiv 1 - 1/\tilde{\epsilon}_I$ tiene el mismo significado que en el caso longitudinal y $\chi_p = \tilde{\epsilon}_I - 1 = \zeta \tilde{\epsilon}_I$. Análogamente tenemos que

$$\chi_p \frac{1-\xi}{\xi} = \zeta \tilde{\epsilon}_I \frac{1-\zeta \left(1 + \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right)}{\zeta \left(1 + \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right)} \approx \tilde{\epsilon}_I \frac{1-\zeta - \zeta \frac{x_i^2}{x_I^2}}{1 + \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots} = \\ \tilde{\epsilon}_I \left(1 - \zeta - \zeta \frac{x_i^2}{x_I^2} \right) \left(1 - \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right) = \tilde{\epsilon}_I \left(1 - \zeta - \zeta \frac{x_i^2}{x_I^2} - (1-\zeta) \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right) = \\ \tilde{\epsilon}_I \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right) = 1 - \tilde{\epsilon}_I \frac{x_i^2}{x_I^2} = 1 - (1 + \chi_p) \frac{x_i^2}{x_I^2}. \quad (88)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.103) y (2.104) en la Ec. (2.102) obtenemos

$$T^T(p \rightarrow 0; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left(1 + \frac{x_i^2}{x_I^2} + \dots \right) \left[1 - (1 + \chi_p) \frac{x_i^2}{x_I^2} + 3 \chi_p d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \chi_p (c_1^T + d_2^T) x_i \frac{j_2(x_I)}{x_I} + \frac{3}{10} \chi_p d_1^T x_i^2 \left(5 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} - 2 \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right) \right] = \\ = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 - (1 + \chi_p) \frac{x_i^2}{x_I^2} + 3 \chi_p d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{3}{2} \chi_p (c_1^T + d_2^T) x_i \frac{j_2(x_I)}{x_I} + \right. \\ \left. + \frac{3}{10} \chi_p d_1^T x_i^2 \left(5 \frac{j_2(x_I)}{x_I^2} - 2 \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right) + \frac{x_i^2}{x_I^2} + 3 \chi_p d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I^3} x_i^2 \right], \quad (89)$$

y reorganizando términos tenemos

$$T^T(p \rightarrow 0; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + 3 \chi_p d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{3}{2} \chi_p (c_1^T + d_2^T) \frac{j_2(x_I)}{x_I} x_i - \right. \\ \left. - \chi_p \frac{x_i^2}{x_I^2} \left(1 - \frac{3}{10} d_1^T [5 j_2(x_I) - 2 x_I j_1(x_I)] \right) + 3 \chi_p d_1^T \frac{j_1(x_I)}{x_I^3} x_i^2 \right]. \quad (90)$$

Podemos expresar el desarrollo en potencias de x_i de la componente transversal de la matriz T, incluyendo términos hasta orden x_i^2 , como

$$T^T(p; \omega) = T^{T[0]}(p; \omega) + T^{T[2]}(p; \omega)(pa)^2 + \dots \quad (91)$$

en donde

$$T^{T[0]}(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + 3 \chi_p d_1^{T[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right], \quad (92)$$

$$T^{T[2]}(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[3 \chi_p d_1^{T[2]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \frac{3}{2} \chi_p (c_1^{T[0]} + d_2^{T[0]}) \frac{j_2(x_I)}{x_I} x_i^2 - \right. \\ \left. - \chi_p \frac{x_i^2}{x_I^2} \left(1 - \frac{3}{10} d_1^{T[0]} [5 j_2(x_I) - 2 x_I j_1(x_I)] \right) + 3 \chi_p d_1^{T[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I^3} x_i^2 \right], \quad (93)$$

con los coeficientes dados por las Ecs. (1.106), (1.107) y (1.108),

$$d_1^T \approx d_1^{T[0]} + d_1^{T[2]} x_i^2 = \\ = -\frac{2}{3} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' - x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]'} + \\ + \frac{\left[\frac{2h_1(x_0)}{3} + \frac{2x_0^2 h_1(x_0)}{15} - \frac{x_0 h_2(x_0)}{3} \right]}{x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]' - x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]'} x_i^2, \\ d_2^T \approx d_2^{T[1]} x_i = \\ = \frac{[-3 x_0^2 h_2(x_0)/15]}{x_I j_2(x_I) [x_0 h_2(x_0)]' - x_0^2 h_2(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_2(x_I)]'} x_i, \\ c_1^T \approx c_1^{T[1]} x_i = \frac{-x_0 h_2(x_0)}{3 j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - h_n(x_0) [x_I j_n(x_I)]'} x_i.$$

Empleando nuevamente las relaciones de recurrencia para las funciones esféri-

cas de Bessel, Ec. (2.70) y Ec. (2.71), en la forma

$$\frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = \frac{n}{2n+1} z_{n-1}(\rho) - \frac{n+1}{2n+1} z_{n+1}(\rho), \quad (94)$$

$$z_{n-1}(\rho) = (2n+1) \frac{z_n(\rho)}{\rho} - z_{n+1}(\rho), \quad (95)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} [\rho z_n(\rho)]' &= z_n(\rho) + x \frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = \\ &= z_n(\rho) + \frac{n}{2n+1} \rho z_{n-1}(\rho) - \frac{n+1}{2n+1} \rho z_{n+1}(\rho) = \\ &= (n+1) z_n(\rho) - \rho z_{n+1}(\rho), \end{aligned} \quad (96)$$

en donde la función $z_n(\rho)$ puede ser $j_n(\rho)$ o $h_n(\rho)$. Entonces podemos reescribir los denominadores de los coeficientes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} d_1^T &\approx d_1^{T[0]} + d_1^{T[2]} x_i^2 = \\ &= \frac{-(2/3)x_0^2 h_1(x_0)}{\left(\frac{x_I^2 - x_0^2}{x_I}\right) (n+1)h_n(x_0)j_n(x_I) + x_0^2 h_n(x_0)j_{n+1}(x_I) - x_0 x_I h_{n+1}(x_0)j_n(x_I)} + \\ &+ \frac{\left[\frac{2h_1(x_0)}{3} + \frac{2x_0^2 h_1(x_0)}{15} - \frac{x_0 h_2(x_0)}{3}\right] x_i^2}{\left(\frac{x_I^2 - x_0^2}{x_I}\right) (n+1)h_n(x_0)j_n(x_I) + x_0^2 h_n(x_0)j_{n+1}(x_I) - x_0 x_I h_{n+1}(x_0)j_n(x_I)}, \\ d_2^T &\approx d_2^{T[1]} x_i = \\ &= \frac{[-3x_0^2 h_2(x_0)/15] x_i}{\left(\frac{x_I^2 - x_0^2}{x_I}\right) (n+1)h_n(x_0)j_n(x_I) + x_0^2 h_n(x_0)j_{n+1}(x_I) - x_0 x_I h_{n+1}(x_0)j_n(x_I)}, \\ c_1^T &\approx c_1^{T[1]} x_i = \frac{-x_0 h_2(x_0)}{x_I h_n(x_0)j_{n+1}(x_I) - x_0 h_{n+1}(x_0)j_n(x_I)} x_i. \end{aligned}$$

Podemos apreciar que el término $T^{T[0]}$ independiente de x_i en el desarrollo de la componente transversal de la matriz T, Ec. (2.108), coincide con el caso longitudinal $T^{L[0]}$, Ec. (2.156), ya que

$$d_1^{T[0]} = 2 d_1^{L[0]}, \quad (97)$$

pues en el límite cuando $x_i \rightarrow 0$ tenemos a la partícula esférica bajo campo eléctrico incidente constante, por lo que no hay distinción entre un campo eléctrico incidente longitudinal o transversal.

Apéndice C

En este apéndice se encuentran los detalles del cálculo de la componente longitudinal del operador de transición o matriz T, referente al capítulo 4, sección 4.1.2.

Para el cálculo de la componente longitudinal de la matriz T se consideró el problema de una sola partícula esférica de radio a en el vacío, centrada en el origen y caracterizada por una función dieléctrica $\epsilon_I(\omega)$ y por una permeabilidad magnética $\mu_I = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, en presencia de una onda plana electromagnética *longitudinal* (ver figura 1.3 del capítulo 4).

Campos Electromagnéticos en términos de la base esférica

El campo eléctrico incidente se escribió en términos del potencial escalar ϕ_{inc} , Ec. (1.115), como

$$\vec{E}_{inc} = -\nabla\phi_{inc} = E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] = E_0 \exp[ipz] \hat{e}_z,$$

en donde $\vec{p} = p\hat{e}_z$ y el potencial escalar incidente está dado por, Ec. (1.114),

$$\phi_{inc} = \phi_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}] = \phi_0 \exp[ipr \cos \theta] = \phi_0 \exp[ipz].$$

Escribiendo el potencial escalar en términos de la base esférica, Ec. (1.120), teníamos que

$$\phi_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n j_n(\rho_i) P_n(\cos \theta),$$

de modo que el campo eléctrico incidente está dado por, Ec. (1.124),

$$\vec{E}_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^i \left[j_n'(\rho_i) P_n(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{j_n(\rho_i)}{\rho_i} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta \right],$$

donde $E_n^i = (2n+1)i^{n-1}E_0$. Dado que $\nabla \times \vec{E}_{inc} = 0$ sabemos que no hay campo magnético $\vec{H}_{inc}$ asociado a $\vec{E}_{inc}$.

Por otro lado, la base esférica completa está dada por las, Ecs. (1.128),

$$\begin{aligned} \vec{L}_{emn} &= \frac{\nabla \psi_{emn}}{k}, & \vec{L}_{omn} &= \frac{\nabla \psi_{omn}}{k}, \\ \vec{M}_{emn} &= \nabla \times (r \psi_{emn}), & \vec{M}_{omn} &= \nabla \times (r \psi_{omn}), \\ \vec{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{emn}}{k}, & \vec{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \vec{M}_{omn}}{k}, \end{aligned}$$

en donde, como ya habíamos mencionado, e (o) hace referencia (por sus siglas en inglés) a que la función es par (impar), y donde nuevamente, Ec. (1.81),

$$\begin{aligned}\psi_{emn} &= \cos(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \\ \psi_{omn} &= \sin(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(kr),\end{aligned}$$

son las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales. Recordando que hemos empleado la notación usual para las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , las funciones radiales $z_n(kr)$ son cualquiera de las cuatro funciones esféricas de Bessel: j_n , y_n , $h_n^{(1)}$ o $h_n^{(2)}$ y P_n^m son los polinomios asociados de Legendre con la normalización dada por Bohern [34].

Teníamos que el campo eléctrico incidente en términos de esta base, Ec.(1.132), está dado por

$$\vec{E}_{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^i \vec{L}_{e0n}^{(1)}(\rho_i),$$

donde $\vec{L}_{e0n}^{(1)}$ está dado por, Ec. (1.131),

$$\vec{L}_{e0n}^{(1)} = j'_n(kr) P_n(\cos\theta) \hat{e}_r + \frac{j_n(kr)}{kr} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) \hat{e}_\theta,$$

en donde el superíndice (1) denota que la dependencia radial de la función $z_n(kr)$ es a través de la función esférica de Bessel $j_n(kr)$.

El campo eléctrico interno, $r < a$, en términos de la base esférica se escribió como, Ec. (1.135)

$$\vec{E}_I = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i \left(-d'_n \vec{N}_{e0n}^{(1)} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \vec{L}_{e0n}^{(1)} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \vec{N}_{e0n}^{(1)} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \vec{E}_{inc},$$

y el campo magnético interno como, Ec. (1.136),

$$\vec{H}_I = \frac{ik_I}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d'_n \vec{M}_{e0n}^{(1)},$$

donde el superíndice (1) denota que la dependencia radial es a través de $j_n(\rho_I)$, con $\rho_I = k_I r = k_0 \sqrt{\epsilon_I(\omega) \mu_0} r = k_0 N_I r$, donde N_I es el índice de refracción complejo de la partícula esférica.

Los campos radiados o esparcidos en términos de la base esférica se pueden escribir como, Ecs. (1.139) y (1.140),

$$\begin{aligned}\vec{E}_{esp} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i a_n \vec{N}_{e0n}^{(3)}, \\ \vec{H}_{esp} &= \frac{-ik_0}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i a_n \vec{M}_{e0n}^{(3)},\end{aligned}$$

en donde el superíndice (3) indica que la dependencia radial sería a través de $h_n(\rho_0)$, con $\rho_0 = k_0 r$ y los armónicos esféricos vectoriales están dados por

$$\vec{N}_{e0n} = \frac{z_n(\rho)}{\rho} n(n+1) P_n(\cos\theta) \hat{e}_r + \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{e}_\theta, \quad (98)$$

$$\vec{M}_{e0n} = -\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{e}_\phi, \quad (99)$$

ya que para $m = 0$ tenemos que $\vec{N}_{o0n} = \vec{M}_{o0n} = 0$.

Condiciones de frontera (cálculo de los coeficientes)

Para calcular los coeficientes de las expansiones de los campos haremos uso nuevamente de las condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell sobre la superficie de la esfera

$$\left(\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{esp} - \vec{E}_I \right) \times \hat{e}_r = \left(\vec{H}_{esp} - \vec{H}_I \right) \times \hat{e}_r = 0, \quad (100)$$

que pueden escribirse, en $r = a$, como las cuatro ecuaciones siguientes¹²

$$E_{inc}^\theta + E_{esp}^\theta = E_I^\theta, \quad (101)$$

$$E_{inc}^\phi + E_{esp}^\phi = E_I^\phi, \quad (102)$$

$$H_{esp}^\theta = H_I^\theta, \quad (103)$$

$$H_{esp}^\phi = H_I^\phi. \quad (104)$$

¹²Análogamente al caso transversal, la condición sobre la componente perpendicular a la superficie de la esfera está contenida en las condiciones que nos proporcionan las componentes paralelas de los campos, de modo que no añade nueva información.

Sustituyendo las ecuaciones de los campos electromagnéticos, Ecs. (1.132), (1.135), (1.136), (1.139) y (1.140) en la condición para la componente θ del campo eléctrico, Ec. (2.117), obtenemos

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \left[\frac{j_n(x_i)}{x_i} + a_n \frac{1}{x_0} \frac{d}{dx_0} [x_0 h_n(x_0)] + d'_n \frac{1}{x_I} \frac{d}{dx_I} [x_I j_n(x_I)] - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \frac{j_n(x_i)}{x_i} \right] = 0, \quad (105)$$

en donde $x_i = pa$, $x_0 = k_0 a$ y $x_I = k_I a$, que nos conduce a la siguiente condición

$$\frac{1}{x_0} \frac{d}{dx_0} [x_0 h_n(x_0)] a_n + \frac{1}{x_I} \frac{d}{dx_I} [x_I j_n(x_I)] d'_n = \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - 1 \right) \frac{j_n(x_i)}{x_i}. \quad (106)$$

De la condición de continuidad para la componente tangencial del campo magnético, Ec. (2.120), obtenemos la siguiente condición

$$\begin{aligned} \frac{i k_0}{\omega \mu_0} a_n h_n(x_0) + \frac{i k_I}{\omega \mu_0} d'_n j_n(x_I) &= 0, \\ \frac{h_n(x_0)}{k_0} a_n + \frac{k_I^2}{k_0^2} \frac{j_n(x_I)}{k_I} d'_n &= 0, \\ \frac{h_n(x_0)}{x_0} a_n + \tilde{\epsilon}_I \frac{j_n(x_I)}{x_I} d'_n &= 0, \\ -\tilde{\epsilon}_I \frac{x_0}{x_I} \frac{j_n(x_I)}{h_n(x_0)} d'_n &= a_n. \end{aligned} \quad (107)$$

Sustituyendo la ecuación anterior, Ec. (2.123), en la Ec. (2.122) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_0} \frac{d}{dx_0} [x_0 h_n(x_0)] (-\tilde{\epsilon}_I) \frac{x_0}{x_I} \frac{j_n(x_I)}{h_n(x_0)} d'_n + \frac{1}{x_I} \frac{d}{dx_I} [x_I j_n(x_I)] d'_n &= \\ = \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - 1 \right) \frac{j_n(x_i)}{x_i}, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\left[-\tilde{\epsilon}_I \frac{[x_0 h_n(x_0)]'}{h_n(x_0)} \frac{j_n(x_I)}{x_I} + \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]' \right] d'_n = \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - 1 \right) \frac{j_n(x_i)}{x_i}, \quad (109)$$

de modo que el coeficiente que nos interesa, d'_n , el cual está relacionado con el campo eléctrico interno, está dado por

$$\begin{aligned} d'_n &= \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - 1 \right) \frac{\frac{j_n(x_i)}{x_i}}{-\tilde{\epsilon}_I \frac{[x_0 h_n(x_0)]'}{h_n(x_0)} \frac{j_n(x_I)}{x_I} + \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'} , \\ &= \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} - 1 \right) \frac{\frac{j_n(x_i)}{x_i} x_0^2 h_n(x_0)}{-\tilde{\epsilon}_I x_0^2 [x_0 h_n(x_0)]' \frac{j_n(x_I)}{x_I} + x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'} . \end{aligned} \quad (110)$$

De las otras dos condiciones de frontera, Ecs. (2.118) y (2.119), obtenemos las mismas condiciones pues los campos tienen la misma dependencia angular.

El campo eléctrico interno lo escribimos entonces como, Ec. (1.143),

$$\vec{E}_I = \zeta \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d_n^L \vec{N}_{e0n}^{(1)} + (1 - \zeta) \vec{E}_{inc}$$

donde ζ está dado por, Ec. (1.142),

$$\zeta \equiv \left(1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I} \right) ,$$

y el coeficiente d_n^L como, Ec. (1.144),

$$d_n^L = \frac{\frac{j_n(x_i)}{x_i} x_0^2 h_n(x_0)}{-x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' + x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'} .$$

Podemos notar que los polos de d_n^L , que proporcionan la condición para excitar los modos $\vec{N}_{e0n}$, son los mismos que para el caso transversal, Ec. (1.91),

$$d_n^T = \frac{x_i j_n(x_i) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_i} [x_i j_n(x_i)]'}{x_I j_n(x_I) [x_0 h_n(x_0)]' - x_0^2 h_n(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_n(x_I)]'} ,$$

en donde nuevamente “ ‘ ” después del paréntesis cuadrado denota derivada respecto del argumento de la función esférica de Bessel.

Cálculo de la componente T^L

Una vez que contamos con la expresión para el campo eléctrico $\vec{E}_I$ en términos de la base esférica, Ec. (1.143), podemos hacer uso de la Ec. (1.152)

para calcular la componente longitudinal de la matriz T

$$T^L(p; \omega) = \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \int \hat{e}_z \cdot \vec{E}_I(\vec{r}; \omega) \exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] d^3r.$$

Proyectando el campo eléctrico interno a lo largo del eje Z tenemos

$$\vec{E}_I \cdot \hat{e}_z = \left[\zeta \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i d_n^L \vec{N}_{e0n}^{(1)}(\rho_I) + (1 - \zeta) \vec{E}_{inc} \right] \cdot \hat{e}_z, \quad (111)$$

donde $\vec{N}_{e0n}^{(1)}$ está dado por, Ec. (2.114),

$$\vec{N}_{e0n}^{(1)} = \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} n(n+1) P_n(\cos \theta) \hat{e}_r + \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \hat{e}_\theta, \quad (112)$$

y de geometría elemental sabemos que

$$\hat{e}_r = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z, \quad (113)$$

$$\hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z, \quad (114)$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y. \quad (115)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{N}_{e0n}^{(1)} \cdot \hat{e}_z &= \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} n(n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) - \\ &\quad - \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (116)$$

Por otro lado,

$$\vec{E}_{inc} \cdot \hat{e}_z = E_0 \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r}], \quad (117)$$

y empleando nuevamente la Ec. (1.99),

$$\exp[-i\vec{p} \cdot \vec{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l j_l(\rho_i) P_l(\cos \theta),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} T^L(p; \omega) &= \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l E_n^i \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ &\quad \times \left\{ d_n^L \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \cos \theta P_n(\cos \theta) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] \right\} j_l(\rho_i) P_l(\cos \theta) + \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta, \end{aligned} \quad (118)$$

en donde hemos reemplazado en el último término del lado derecho de la ecuación anterior,

$$(1 - \zeta) \chi_p = (1 - \zeta) (\tilde{\epsilon}_I) = \zeta, \quad (119)$$

donde

$$\zeta \equiv 1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_I}. \quad (120)$$

Integrales angulares

Reacomodando términos y haciendo el cambio de variable $\mu = \cos \theta$ tenemos

$$\begin{aligned} T^L(p; \omega) = & \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l E_n^i \int_0^a r^2 dr \int_{-1}^1 d\mu \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ d_n^L \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} \mu P_n(\mu) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right] \right\} j_l(\rho_i) P_l(\mu). \quad (121) \end{aligned}$$

La integral sobre la variable ϕ es simplemente 2π , de modo que tenemos

$$\begin{aligned} T^L(p; \omega) = & \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + 2\pi \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l E_n^i \int_0^a r^2 dr \times \\ & \times \left\{ d_n^L \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} j_l(\rho_i) \int_{-1}^1 d\mu \mu P_n(\mu) P_l(\mu) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] j_l(\rho_i) \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) P_n'(\mu) P_l(\mu) \right] \right\}. \quad (122) \end{aligned}$$

Podemos reescribir la misma ecuación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T^L(p; \omega) = & \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + 2\pi \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l E_n^i \int_0^a r^2 dr \times \\ & \times \left\{ d_n^L \left[n(n+1) \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} j_l(\rho_i) B_1(l, n) + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] j_l(\rho_i) B_2(l, n) \right] \right\}, \end{aligned}$$

en donde

$$B_1(l, n) \equiv \int_{-1}^1 d\mu \mu P_n(\mu) P_l(\mu), \quad (123)$$

$$\begin{aligned} B_2(l, n) &\equiv \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) P_n'(\mu) P_l(\mu) = \\ &= \int_{-1}^1 d\mu [nP_{n-1}(\mu) - n\mu P_n(\mu)] P_l(\mu) = \\ &= n \int_{-1}^1 d\mu P_{n-1}(\mu) P_l(\mu) - n \int_{-1}^1 d\mu \mu P_n(\mu) P_l(\mu) = \\ &= \frac{2n}{2n-1} \delta_{l, n-1} - n B_1(l, n), \end{aligned} \quad (124)$$

en donde hemos empleado una vez mas la relación¹³ $(1 - \mu^2) P_n' = nP_{n-1} - n\mu P_n$. Análogamente al caso transversal, utilizando la Ec. (3.31) de Jackson [54] tenemos que

$$\begin{aligned} B_1(l, n) &= \int_{-1}^1 d\mu \mu P_n(\mu) P_l(\mu) = \frac{2(n+1) \delta_{l, n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2n \delta_{l, n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \frac{2}{2n+1} \left[\frac{n}{2n-1} \delta_{l, n-1} + \frac{n+1}{2n+3} \delta_{l, n+1} \right], \end{aligned} \quad (125)$$

de modo que

$$\begin{aligned} B_2(l, n) &= \frac{2n \delta_{l, n-1}}{2n-1} - n \left[\frac{2(n+1) \delta_{l, n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2n \delta_{l, n-1}}{(2n-1)(2n+1)} \right] = \\ &= \frac{2n}{2n-1} \left[1 - \frac{n}{(2n+1)} \right] \delta_{l, n-1} - \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l, n+1} = \\ &= \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \delta_{l, n-1} - \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{l, n+1} = \\ &= \frac{2n(n+1)}{2n+1} \left[\frac{1}{2n-1} \delta_{l, n-1} - \frac{1}{2n+3} \delta_{l, n+1} \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

¹³Última ecuación de las Ecs. (3.29), Jackson [54], pág. 100.

Sustituyendo el resultado de las dos integrales en la ecuación para $T^L(p; \omega)$ obtenemos

$$T^L(p; \omega) = \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + 2\pi \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i \int_0^a r^2 dr d_n^L \times \\ \times \left\{ \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} [(-i)^{n-1} n j_{n-1}(\rho_i) + (-i)^{n+1} (n+1) j_{n+1}(\rho_i)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] \frac{2n(n+1)}{2n+1} [(-i)^{n-1} j_{n-1}(\rho_i) - (-i)^{n+1} j_{n+1}(\rho_i)] \right\},$$

o bien

$$T^L(p; \omega) = \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + 2\pi \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i (-i)^{n-1} d_n^L \frac{2n(n+1)}{2n+1} \times \\ \times \left\{ \int_0^a r^2 dr \frac{j_n(\rho_I)}{\rho_I} [n j_{n-1}(\rho_i) - (n+1) j_{n+1}(\rho_i)] + \right. \\ \left. + \int_0^a r^2 dr \frac{1}{\rho_I} \frac{d}{d\rho_I} [\rho_I j_n(\rho_I)] [j_{n-1}(\rho_i) + j_{n+1}(\rho_i)] \right\}. \quad (127)$$

Tomando a como unidad de longitud definimos $x = r/a$, y recordando que $x_I = k_I/a$, $x_0 = k_0/a$ y $x_i = pa$, tenemos entonces que $\rho_i = x_i x$ y $\rho_I = x_I x$. Sustituyendo lo anterior junto con $E_n^i = (2n+1)i^{n-1}E_0$ podemos reescribir la Ec. (2.143) como

$$T^L(p; \omega) = \frac{4\pi a^3}{3} k_0^2 \zeta + 2\pi \frac{k_0^2 \chi_p}{E_0} \zeta E_0 a^3 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \times \\ \times d_n^L \frac{2n(n+1)}{2n+1} \left\{ \int_0^1 x^2 dx \frac{j_n(x_I x)}{x_I x} [n j_{n-1}(x_i x) - (n+1) j_{n+1}(x_i x)] + \right. \\ \left. + \int_0^1 x^2 dx \frac{1}{x_I x} \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] [j_{n-1}(x_i x) + j_{n+1}(x_i x)] \right\}, \quad (128)$$

y simplificando obtenemos

$$T^L(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta + 4\pi x_0^2 a \chi_p \zeta \sum_{n=1}^{\infty} d_n^L n(n+1) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{x_I} \int_0^1 x j_n(x_I x) [n j_{n-1}(x_i x) - (n+1) j_{n+1}(x_i x)] dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{x_I} \int_0^1 x \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] [j_{n-1}(x_i x) + j_{n+1}(x_i x)] dx \right\}. \quad (129)$$

Integrales radiales

Empleando las relaciones de recurrencia de las funciones esféricas de Bessel, también utilizadas para el caso transversal¹⁴, Ecs. (2.70) y (2.71),

$$\begin{aligned} j_{n-1}(\rho) + j_{n+1}(\rho) &= (2n+1) \frac{j_n(\rho)}{\rho}, \\ n j_{n-1}(\rho) - (n+1) j_{n+1}(\rho) &= (2n+1) \frac{d}{d\rho} j_n(\rho), \end{aligned}$$

podemos escribir la Ec. (2.145) como

$$\begin{aligned} T^L(p; \omega) &= \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta + 4\pi x_0^2 a \chi_p \zeta \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) \frac{d_n^L}{x_i x_I} \times \\ &\times \left\{ \int_0^1 x j_n(x_I x) \frac{d}{dx} j_n(x_i x) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] j_n(x_i x) dx \right\}, \quad (130) \end{aligned}$$

e integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dx} [x j_n(x_I x)] j_n(x_i x) dx &= \\ &= x j_n(x_I x) j_n(x_i x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x j_n(x_I x) \frac{d}{dx} j_n(x_i x) dx, \quad (131) \end{aligned}$$

de modo que finalmente obtenemos de forma compacta la expresión de la componente longitudinal de la matriz T

$$T^L(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta + 4\pi x_0^2 a \chi_p \zeta \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) d_n^L \frac{j_n(x_I)}{x_I} \frac{j_n(x_i)}{x_i},$$

o bien

$$T^L(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + \chi_p \sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)(2n+1) d_n^L \frac{j_n(x_I)}{x_I} \frac{j_n(x_i)}{x_i} \right]. \quad (132)$$

¹⁴ver Abramowitz [55], pág. 439, Ecs. (10.1.19) y (10.1.20).

Calculando el límite $p \rightarrow 0$

En el límite $p \rightarrow 0$ podemos escribir los primeros términos de la serie para la componente longitudinal T^L como

$$\begin{aligned} T^L(p \rightarrow 0; \omega) &\approx \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + 18 \chi_p d_1^L \frac{j_1(x_i)}{x_i} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + 90 \chi_p d_2^L \frac{j_2(x_I)}{x_I} \frac{j_2(x_i)}{x_i} \right] \\ T^L(p \rightarrow 0; \omega) &\approx \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + 18 \chi_p d_1^L \left(\frac{1}{3} - \frac{x_i^2}{30} + \dots \right) \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \right. \\ &\quad \left. + 90 \chi_p d_2^L \left(\frac{x_i}{15} + \dots \right) \frac{j_2(x_I)}{x_I} \right], \quad (133) \end{aligned}$$

en donde hemos empleado las siguientes aproximaciones

$$\frac{j_1(x_i)}{x_i} \approx \frac{1}{3} - \frac{x_i^2}{30}, \quad \frac{j_2(x_i)}{x_i} \approx \frac{x_i}{15}, \quad (134)$$

de modo que

$$\begin{aligned} T^L(p \rightarrow 0; \omega) &\approx \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + 6 \chi_p d_1^{L[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + 6 \chi_p d_1^{L[2]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} x_i^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{5} \chi_p d_1^{L[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} x_i^2 + 6 \chi_p d_2^{L[1]} \frac{j_2(x_I)}{x_I} x_i^2 \right], \quad (135) \end{aligned}$$

en donde los coeficientes están dados por

$$d_1^{L[0]} = \frac{1}{3} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]' - x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]'}, \quad (136)$$

$$d_1^{L[2]} = -\frac{1}{30} \frac{x_0^2 h_1(x_0)}{x_0^2 h_1(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_1(x_I)]' - x_I j_1(x_I) [x_0 h_1(x_0)]'}, \quad (137)$$

$$d_2^{L[1]} = \frac{1}{15} \frac{x_0^2 h_2(x_0)}{x_0^2 h_2(x_0) \frac{1}{x_I} [x_I j_2(x_I)]' - x_I j_2(x_I) [x_0 h_2(x_0)]'}. \quad (138)$$

Podemos expresar el desarrollo en potencias de $x_i = pa$ de la componente longitudinal de la matriz T , incluyendo términos hasta orden x_i^2 , como

$$T^L(p; \omega) = T^{L[0]}(p; \omega) + T^{L[2]}(p; \omega)(pa)^2 + \dots \quad (139)$$

donde

$$T^{L[0]}(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \left[1 + 6 \chi_p d_1^{L[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} \right], \quad (140)$$

$$T^{L[2]}(p; \omega) = \frac{4\pi}{3} x_0^2 a \zeta \chi_p \left[6 d_1^{L[2]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} - \frac{3}{5} d_1^{L[0]} \frac{j_1(x_I)}{x_I} + \right. \\ \left. + 6 d_2^{L[1]} \frac{j_2(x_I)}{x_I} \right]. \quad (141)$$

Podemos reescribir los coeficientes empleando nuevamente la relación, Ec. (2.112),

$$\begin{aligned} [\rho z_n(\rho)]' &= z_n(\rho) + x \frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = \\ &= z_n(\rho) + \frac{n}{2n+1} \rho z_{n-1}(\rho) - \frac{n+1}{2n+1} \rho z_{n+1}(\rho) = \\ &= (n+1) z_n(\rho) - \rho z_{n+1}(\rho), \end{aligned}$$

en donde la función $z_n(\rho)$ puede ser $j_n(\rho)$ ó $h_n(\rho)$, de la siguiente forma

$$d_1^{L[0]} = \frac{(1/3) x_0^2 h_1(x_0)}{\left(\frac{x_0^2 - x_I^2}{x_I} \right) 2 h_1(x_0) j_1(x_I) + x_0^2 h_1(x_0) j_2(x_I) - x_0 x_I h_2(x_0) j_1(x_I)}, \quad (142)$$

$$d_1^{L[2]} = \frac{(-1/30) x_0^2 h_1(x_0)}{\left(\frac{x_0^2 - x_I^2}{x_I} \right) 2 h_1(x_0) j_1(x_I) + x_0^2 h_1(x_0) j_2(x_I) - x_0 x_I h_2(x_0) j_1(x_I)}, \quad (143)$$

$$d_2^{L[1]} = \frac{(1/15) x_0^2 h_2(x_0)}{\left(\frac{x_0^2 - x_I^2}{x_I} \right) 3 h_2(x_0) j_2(x_I) + x_0^2 h_2(x_0) j_3(x_I) - x_0 x_I h_3(x_0) j_2(x_I)}. \quad (144)$$

Podemos apreciar que el término $T^{L[0]}$ independiente de x_i en el desarrollo de la componente longitudinal de la matriz T , Ec. (2.156), coincide con el caso transversal $T^{T[0]}$, Ec. (2.108), ya que

$$d_1^{T[0]} = 2 d_1^{L[0]}, \quad (145)$$

pues en el límite cuando $x_i \rightarrow 0$ tenemos a la partícula esférica bajo campo eléctrico incidente constante, por lo que no hay distinción entre un campo eléctrico incidente longitudinal o transversal.

Apéndice D

En este apéndice se deducirá la generalización de la ley de Snell apropiada para la geometría del *método del prisma coloidal*. Considerando la geometría de la Fig. (2.12) en donde tenemos dos sistemas coordenados: un sistema primado cuyo origen está localizado en la interface de entrada y otro sistema no primado con origen en la interface de salida del prisma, además de que se ha dividido el espacio en tres regiones: la región 0 denota la región fuera del prisma en donde incide el haz láser, la región I denota la zona dentro del prisma y la región II nuevamente fuera del prisma en la que viaja el haz refractado.

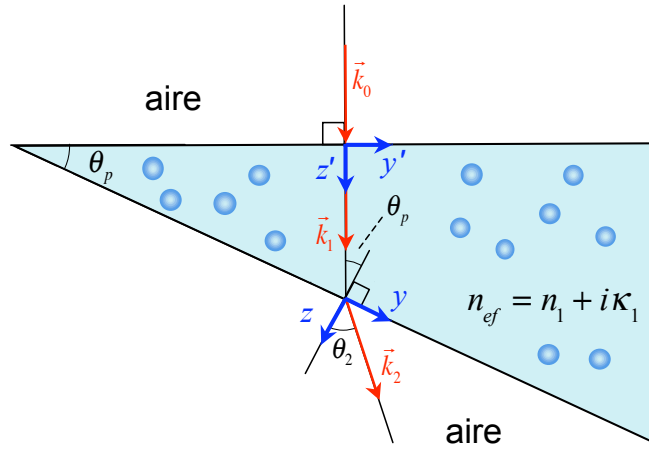


Figura 3: Diagrama esquemático del prisma con los sistemas coordenados, primado y no primado, en la interface de entrada y salida, respectivamente.

Recordando que en el experimento tanto las partículas que conforman el coloide como la matriz, están caracterizados por funciones dieléctricas reales, es decir, no hay proceso alguno de absorción de la luz.

Considerando una onda plana a incidencia normal sobre la interface de entrada del prisma como solución de las ecuaciones de Maxwell, podemos proponer el campo eléctrico incidente en la región 0 como

$$\vec{E}_0 = \vec{A}_0 \exp[i \vec{K}_{c0} \cdot \vec{r}'] = \vec{A}_0 \exp[i n_0 k_0 z'], \quad (146)$$

en donde n_0 es el índice de refracción del aire, k_0 la magnitud del vector de onda también en aire y se ha omitido la dependencia temporal $-i\omega t$. La polarización de la onda incidente puede ser cualquier dirección en el plano

XY. En general, podemos escribir el vector de onda $\vec{K}_{c0}$ como¹⁵

$$\vec{K}_{c0} = \vec{k}_0 + i \vec{a}_0, \quad (147)$$

en donde $\vec{k}_0$ es la parte real del vector $\vec{K}_{c0}$ y $\vec{a}_0$ es llamado *vector de atenuación*. Para este caso en que nos encontramos en la región 0, es decir la onda viaja en aire, tenemos que $\vec{a}_0 = 0$. En la región I, dentro del prisma, podemos proponer que en el sistema primado el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \exp[i \vec{K}_{c1} \cdot \vec{r}'] = \vec{A}_1 \exp[i n_{ef} k_0 z'], \quad (148)$$

donde $n_{ef} = n_1 + i \kappa_1$ es el índice de refracción efectivo complejo que caracteriza el sistema coloidal. A pesar de que no hay procesos de absorción en el sistema, tenemos una parte imaginaria del índice de refracción efectivo, κ_1 , que representa la atenuación que sufre el haz coherente al viajar a través del medio inhomogéneo, debida a la transferencia de energía a la componente difusa producida por el esparcimiento producido por las partículas en el sistema. Podemos identificar rápidamente que

$$\vec{K}_{c1} = \vec{k}_1 + i \vec{a}_1 = k_0 (n_1 + i \kappa_1) \hat{e}_{z'}, \quad (149)$$

en donde hemos indicado que $\vec{k}_1$ y $\vec{a}_1$ son paralelos, es decir, que en la onda electromagnética que se propaga dentro del sistema coloidal, los planos de fase constante coinciden con los planos de amplitud constante. Este resultado lo obtenemos considerando la existencia de condiciones de frontera en la interface de entrada del prisma, es decir, se debe cumplir que

$$\vec{K}_{c0} \cdot \vec{r}' = \vec{K}_{c1} \cdot \vec{r}', \quad (150)$$

en donde $\vec{r}'$ representa cualquier punto en la interface de entrada del prisma, o equivalentemente

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r}' = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}', \quad (151)$$

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{r}' = \vec{a}_1 \cdot \vec{r}'. \quad (152)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, dado que $\vec{k}_0 \cdot \vec{r}' = 0$, ya que $\vec{k}_0 \perp \vec{r}'$, entonces tenemos que $\vec{k}_1 \cdot \vec{r}' = 0$ y dado que $\vec{k}_1 \neq 0$ entonces necesariamente se cumple que $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_0$. Por otro lado $\vec{a}_0 = 0$ de modo que $\vec{a}_1 \cdot \vec{r}' = 0$ pero

¹⁵Ver libro de Stone [75], pág. 372.

dado que $\vec{a}_1 \neq 0$ también se debe cumplir que $\vec{k}_1 \parallel \vec{a}_1$, por lo tanto podemos concluir que los planos de amplitud constante coinciden con los planos de fase constante.

La interface de salida del prisma forma un ángulo θ_p con la interface de entrada, como se muestra en la Fig. (2.12), de modo que para escribir la onda que viaja dentro del prisma en el sistema coordenado no primado necesitamos rotar el sistema primado por un ángulo θ_p , de modo que

$$\vec{K}_{c1} z' = \vec{K}_{c1}^y y + \vec{K}_{c1}^z z, \quad (153)$$

en donde $\vec{K}_{c1}^y = \vec{K}_{c1} \sin \theta_p$ y $\vec{K}_{c1}^z = \vec{K}_{c1} \cos \theta_p$. Para la región II podemos proponer que

$$\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \exp[i \vec{K}_{c2} \cdot \vec{r}], \quad (154)$$

y considerar nuevamente que se debe cumplir en la interface de salida que

$$\vec{K}_{c1} \cdot \vec{r} = \vec{K}_{c2} \cdot \vec{r}, \quad (155)$$

o equivalentemente

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}, \quad (156)$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{r} = \vec{a}_2 \cdot \vec{r}. \quad (157)$$

Dado que $\vec{r}$ es cualquier punto en la interface de salida del prisma (con componentes x y y) y dado que $\vec{a}_1 \cdot \vec{r} \neq 0$ entonces $\vec{a}_2 \neq 0$.

Por simplicidad hemos trasladado el origen de ambos sistemas de referencia, primado y no primado, al vértice del prisma.

Por otro lado, sabemos que la onda transmitida debe satisfacer la ecuación de Helmholtz, es decir, las ecuaciones de Maxwell. En general, si nos encontramos dentro de un medio complejo (caracterizado por un índice de refracción complejo n_c) tenemos que¹⁶

$$\vec{K}_c \cdot \vec{K}_c = n_c^2 k_0^2, \quad (158)$$

$$(\vec{k} + i\vec{a}) \cdot (\vec{k} + i\vec{a}) = (n + i\kappa)^2 k_0^2, \quad (159)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} + 2i(\vec{k} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot \vec{a} = (n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa) k_0^2, \quad (160)$$

de donde, separando en parte real e imaginaria, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$k^2 - a^2 = (n^2 - \kappa^2) k_0^2 \quad \text{y} \quad \vec{k} \cdot \vec{a} = n\kappa k_0^2. \quad (161)$$

¹⁶Ver libro de Stone [75], pág. 372, Ec. (15-31).

En la región II la onda electromagnética se propaga nuevamente en aire, de modo que el índice de refracción es real ($\kappa = 0$), por lo que las Ecs. (2.177) se reducen a

$$k_2^2 - a_2^2 = n_2^2 k_0^2, \quad (162)$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{a}_2 = 0. \quad (163)$$

Dado que teníamos que $\vec{a}_2 \neq 0$ entonces a partir de la Ec. (2.179) podemos concluir que $\vec{k}_2 \perp \vec{a}_2$ ¹⁷.

Expresando las componentes de $\vec{K}_{c2}$ en el sistema coordenado no primado tenemos

$$\vec{K}_{c2}^y = |\vec{k}_2| \sin \theta_2 + i |\vec{a}_2| \cos \theta_2, \quad (164)$$

$$\vec{K}_{c2}^z = |\vec{k}_2| \cos \theta_2 - i |\vec{a}_2| \sin \theta_2, \quad (165)$$

en donde, empleando la geometría indicada en la Fig. (1.2), podemos ver que el signo “-” en la Ec. (2.181) es correcto.

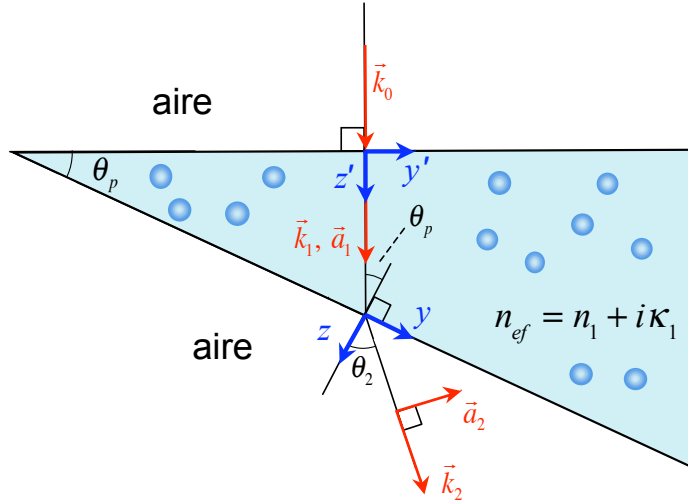


Figura 4: Diagrama esquemático del prisma con las componentes real e imaginaria de los vectores de onda indicados.

¹⁷De aquí observamos que podemos tener como solución una onda evanescente propagándose incluso en el vacío.

Substituyendo las Ecs. (2.180) y (2.181) en la Ec. (2.174) obtenemos

$$\vec{K}_{c2} \cdot \vec{K}_{c2} = (K_{c2}^y, K_{c2}^z) \cdot (K_{c2}^y, K_{c2}^z) = (K_{c2}^y)^2 + (K_{c2}^z)^2 = n_2^2 k_0^2, \quad (166)$$

de modo que obtenemos la siguiente condición

$$(k_2 \sin \theta_2 + ia_2 \cos \theta_2)^2 + (k_2 \cos \theta_2 - ia_2 \sin \theta_2)^2 = n_2^2 k_0^2. \quad (167)$$

Las Ecs. (2.172) y (2.173) las podemos reescribir como

$$k_1 \sin \theta_p = k_2 \sin \theta_2, \quad (168)$$

$$a_1 \sin \theta_p = a_2 \cos \theta_2, \quad (169)$$

en donde hemos considerado el hecho de que $\vec{a}_2 \perp \vec{k}_2$. Resumiendo, las condiciones que tenemos son

$$\begin{aligned} k_1 \sin \theta_p &= k_2 \sin \theta_2, \\ a_1 \sin \theta_p &= a_2 \cos \theta_2, \\ (k_2 \sin \theta_2 + ia_2 \cos \theta_2)^2 + (k_2 \cos \theta_2 - ia_2 \sin \theta_2)^2 &= n_2^2 k_0^2. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, las cantidades conocidas son $k_1 = n_1 k_0$, $a_1 = \kappa_1 k_0$ y θ_p (el ángulo interno del vértice del prisma), mientras que las desconocidas son k_2 , a_2 y θ_2 .

Substituyendo las Ecs. (2.184) y (2.185) en la Ec. (2.183) obtenemos

$$(k_1 \sin \theta_p + ia_1 \sin \theta_p)^2 + (k_2 \cos \theta_2 - ia_2 \sin \theta_2)^2 = n_2^2 k_0^2, \quad (170)$$

de modo que obtenemos la siguiente condición para la parte real

$$k_1^2 \sin^2 \theta_p - a_1^2 \sin^2 \theta_p + k_2^2 \cos^2 \theta_2 - a_2^2 \sin^2 \theta_2 = n_2^2 k_0^2, \quad (171)$$

mientras que para la parte imaginaria obtenemos la condición

$$\begin{aligned} 2ia_1 k_1 \sin^2 \theta_p - 2ia_2 k_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 &= 0, \\ a_1 k_1 \sin^2 \theta_p - a_2 k_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (172)$$

La condición para la parte imaginaria no aporta nueva información ya que es exactamente el producto de las Ecs. (2.184) y (2.185), de modo que las tres ecuaciones que necesitamos para encontrar los valores de k_1 , a_1 y θ_p son

$$\begin{aligned} k_1 \sin \theta_p &= k_2 \sin \theta_2, \\ a_1 \sin \theta_p &= a_2 \cos \theta_2, \\ k_1^2 \sin^2 \theta_p - a_1^2 \sin^2 \theta_p + k_2^2 \cos^2 \theta_2 - a_2^2 \sin^2 \theta_2 &= n_2^2 k_0^2. \end{aligned}$$

Para calcular el valor para k_2 , despejamos el término $a_2^2 \sin^2 \theta_2$ de la Ec. (2.188), que es el producto de las Ecs. (2.184) y (2.185),

$$a_2^2 \sin^2 \theta_2 = \frac{a_1^2 k_1^2 \sin^4 \theta_p}{k_2^2 \cos^2 \theta_2}, \quad (173)$$

y sustituyendo en la Ec. (2.187) obtenemos

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_p (k_1^2 - a_1^2) + k_2^2 \cos^2 \theta_2 - \frac{a_1^2 k_1^2 \sin^4 \theta_p}{k_2^2 \cos^2 \theta_2} &= n_2^2 k_0^2, \\ k_2^4 \cos^4 \theta_2 + k_2^2 \cos^2 \theta_2 [\sin^2 \theta_p (k_1^2 - a_1^2) - n_2^2 k_0^2] - a_1^2 k_1^2 \sin^4 \theta_p &= 0. \end{aligned} \quad (174)$$

De la Ec. (2.184) tenemos que

$$\frac{k_1^2 \sin^2 \theta_p}{k_2^2} = \sin^2 \theta_2 = 1 - \cos^2 \theta_2, \quad (175)$$

de modo que

$$\cos^2 \theta_2 = 1 - \frac{k_1^2 \sin^2 \theta_p}{k_2^2} = \sin^2 \theta_2, \quad (176)$$

y sustituyendo $\cos^2 \theta_2$ en la Ec. (2.190) obtenemos

$$\begin{aligned} k_2^4 \left(1 - \frac{k_1^2 \sin^2 \theta_p}{k_2^2}\right)^2 + k_2^2 \left(1 - \frac{k_1^2 \sin^2 \theta_p}{k_2^2}\right) [\sin^2 \theta_p (k_1^2 - a_1^2) - n_2^2 k_0^2] - \\ - a_1^2 k_1^2 \sin^4 \theta_p = 0. \end{aligned} \quad (177)$$

Desarrollando términos obtenemos

$$\begin{aligned} k_2^4 + k_1^4 \sin^4 \theta_p - 2 k_1^2 k_2^2 \sin^2 \theta_p + k_1^2 k_2^2 \sin^2 \theta_p - a_1^2 k_2^2 \sin^2 \theta_p - k_2^2 n_2^2 k_0^2 - \\ - k_1^4 \sin^4 \theta_p + a_1^2 k_1^2 \sin^4 \theta_p + n_2^2 k_0^2 k_1^2 \sin^2 \theta_p - a_1^2 k_1^2 \sin^4 \theta_p = 0, \end{aligned} \quad (178)$$

o bien

$$k_2^4 - k_1^2 k_2^2 \sin^2 \theta_p - a_1^2 k_2^2 \sin^2 \theta_p + n_2^2 k_0^2 k_1^2 \sin^2 \theta_p - k_2^2 n_2^2 k_0^2 = 0, \quad (179)$$

y finalmente obtenemos la siguiente condición

$$k_2^4 - k_2^2 [\sin^2 \theta_p (k_1^2 + a_1^2) + n_2^2 k_0^2] + k_1^2 \sin^2 \theta_p n_2^2 k_0^2 = 0. \quad (180)$$

Definiendo $u \equiv k_2^2$ podemos reescribir la Ec. (2.196) como una ecuación cuadrática

$$u^2 - Bu + C = 0, \quad (181)$$

en donde

$$B = \sin^2 \theta_p (k_1^2 + a_1^2) + n_2^2 k_0^2 \quad \text{y} \quad C = k_1^2 \sin^2 \theta_p n_2^2 k_0^2, \quad (182)$$

de modo que la solución a la ecuación está dada por

$$k_2^2 = \frac{1}{2} [\sin^2 \theta_p (k_1^2 + a_1^2) + n_2^2 k_0^2] \pm \frac{1}{2} \sqrt{B^2 - 4 k_1^2 \sin^2 \theta_p n_2^2 k_0^2}. \quad (183)$$

El radical de la ecuación es igual a

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta_p (k_1^2 + a_1^2)^2 + n_2^4 k_0^4 - 2 n_2^2 k_0^2 k_1^2 \sin^2 \theta_p + 2 n_2^2 k_0^2 a_1^2 \sin^2 \theta_p = \\ = n_2^4 k_0^4 + 2 n_2^2 k_0^2 \sin^2 \theta_p (a_1^2 - k_1^2) + \sin^4 \theta_p (k_1^2 + a_1^2). \end{aligned} \quad (184)$$

Identificando $k_1 = n_1 k_0$, $a_1 = k_0 \kappa_1$ y recordando que el medio que rodea al prisma es el aire ($n_2 = n_0$) podemos escribir la solución para k_2^2

$$k_2^2 = \frac{1}{2} [\sin^2 \theta_p (n_1^2 k_0^2 + \kappa_1^2 k_0^2) + n_0^2 k_0^2] \pm \frac{k_0^2}{2} \sqrt{D}, \quad (185)$$

en donde

$$D = n_0^4 + \sin^4 \theta_p (n_1^2 + \kappa_1^2)^2 + 2 n_0^2 \sin^2 \theta_p (\kappa_1^2 - n_1^2). \quad (186)$$

Finalmente, podemos escribir la solución para k_2 como

$$k_2 = \pm k_0 \sqrt{\frac{1}{2} [\sin^2 \theta_p (n_1^2 + \kappa_1^2) + n_0^2] \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}}. \quad (187)$$

Dado que la magnitud de k_2 es positiva, la solución tomará el signo “+” en la raíz cuadrada principal de la Ec. (2.203). Para elegir el signo en la raíz cuadrada interna consideremos el caso particular $a_1 = 0$ ($\kappa_1 = 0$), que corresponde a tener un medio homogéneo no absorbente, entonces

$$k_2 = k_0 \sqrt{\frac{1}{2} (n_0^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_p) \pm \frac{1}{2} \sqrt{n_0^4 + n_1^4 \sin^4 \theta_p - 2 n_1^2 n_0^2 \sin^2 \theta_p}}, \quad (188)$$

pero notamos que

$$n_0^4 + n_1^4 \sin^4 \theta_p - 2 n_1^2 n_0^2 \sin^2 \theta_p = (n_0^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_p)^2, \quad (189)$$

de modo que

$$k_2 = k_0 \sqrt{\frac{1}{2} (n_0^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_p) \pm \frac{1}{2} \text{Abs} [n_0^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_p]}, \quad (190)$$

donde $\text{Abs}[x]$ representa el valor absoluto de x . Si θ_p es menor que el ángulo crítico $\theta_{\text{crítico}}$, lo que es cierto para nuestro experimento, entonces $n_0^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_p > 0$, por lo tanto

$$k_2 = k_0 \sqrt{\frac{1}{2} (n_0^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_p) \pm \frac{1}{2} (n_0^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_p)}. \quad (191)$$

De la ecuación anterior podemos observar que se debe elegir el signo “+”, de modo que la Ec. (2.207) se reduce a $k_2 = n_0 k_0$, como debe de ser!

Ahora que contamos con la solución para k_2 podemos escribir una ecuación con la misma estructura que la ley de Snell empleando la Ec. (2.184)

$$k_1 \sin \theta_p = k_2 \sin \theta_2,$$

que, recordando que $k_1 = k_0 n_1$, podemos escribir como

$$\frac{n_0 k_0 n_1}{k_2} \sin \theta_p = n_0 \sin \theta_2. \quad (192)$$

Definiendo lo que denotaremos como *índice de refracción operativo* $N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0)$ de la siguiente manera

$$N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0) \equiv \frac{n_0 k_0 n_1}{k_2}, \quad (193)$$

podemos escribir la ley de Snell *generalizada* acorde a la geometría del prisma como

$$N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0) \sin \theta_p = n_0 \sin \theta_2, \quad (194)$$

en donde, sustituyendo el valor para k_2 ,

$$N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0) = \frac{n_0 n_1}{\sqrt{\frac{1}{2} [\sin^2 \theta_p (n_1^2 + \kappa_1^2) + n_0^2] + \frac{1}{2} \sqrt{D}}}. \quad (195)$$

Podemos observar que en el límite $\kappa_1 \rightarrow 0$ recuperamos la Ley de Snell usual, pues en este límite $k_2 = n_0 k_0$, de modo que

$$\lim_{\kappa_1 \rightarrow 0} N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0) = \lim_{\kappa_1 \rightarrow 0} \frac{n_0 k_0 n_1}{k_2} = \frac{n_0 k_0 n_1}{n_0 k_0} = n_1. \quad (196)$$

A partir de la ley generalizada de Snell podemos calcular θ_2

$$\theta_2 = \arcsin \left[\frac{1}{n_0} N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0) \sin \theta_p \right], \quad (197)$$

o en términos de k_2 tenemos

$$\theta_2 = \arcsin \left[\frac{k_0 n_1}{k_2} \sin \theta_p \right]. \quad (198)$$

Por último, podemos calcular la magnitud de $\vec{a}_2$ a partir de la Ec. (2.185)

$$a_2 = a_1 \frac{\sin \theta_p}{\cos \theta_2}, \quad (199)$$

que, sustituyendo el valor para θ_2 y recordando que $a_1 = \kappa_1 k_0$, toma la forma

$$\frac{a_2}{k_0} = \frac{\kappa_1 \sin \theta_p}{\cos \left[\arcsin \left(\frac{k_0 n_1}{k_2} \sin \theta_p \right) \right]}, \quad (200)$$

pero sabemos que $\cos [\arcsin(x)] = \sqrt{1 - x^2}$, de modo que

$$\frac{a_2}{k_0} = \frac{\kappa_1 \sin \theta_p}{\sqrt{1 - \frac{k_0^2 n_1^2}{k_2^2} \sin^2 \theta_p}} = \frac{\kappa_1 \sin \theta_p}{\sqrt{1 - \frac{N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0) \sin \theta_p}{n_0}}}, \quad (201)$$

y sabemos que $\vec{a}_2 \perp \vec{k}_2$.

En la Fig. (2.14) tenemos la gráfica del ángulo θ_2 como función del ángulo de incidencia θ_p para diferentes valores de κ_1 . Para propósitos de comparación se ha graficado la Ley de Snell usual (línea negra), que corresponde a $\kappa_1 = 0$. Podemos apreciar en la gráfica que el ángulo crítico que presenta la Ley de Snell usual desaparece para valores de $\kappa_1 \neq 0$, incluso para valores pequeños!

Para generar la Fig. (2.14) se ha empleado el valor $n_1 = 1.3313$ para el agua desionizada y $n_0 = 1$ para el aire.

Es importante notar en la Fig. (2.14) que, dado un valor fijo de $\kappa_1 \neq 0$, desaparece el ángulo crítico y el valor de θ_2 permanece menor de $\pi/2$ sin importar el valor del ángulo de incidencia θ_p . Es decir, dado cualquier valor para $\kappa_1 \neq 0$, el haz refractado viajará en la región II saliendo del prisma, y entre mayor sea el valor para κ_1 el haz refractado mantendrá un ángulo mayor respecto de la interface de salida del prisma.

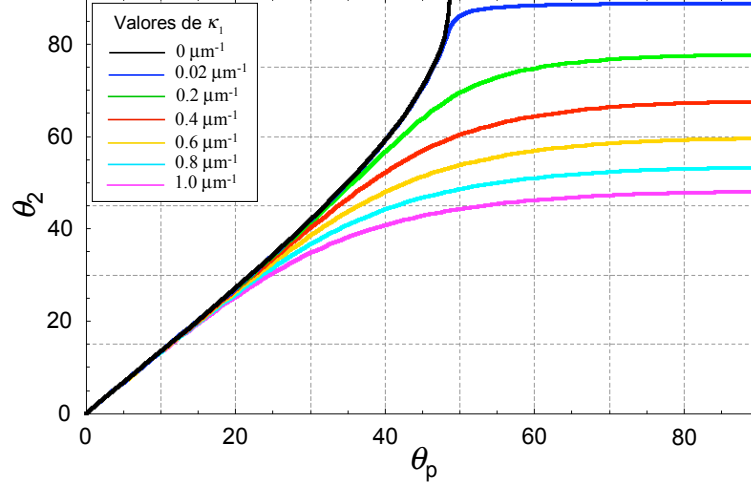


Figura 5: Gráfica de θ_2 como función de θ_p empleando la Ley Generalizada de Snell, para diferentes valores de κ_1 .

En la Fig. (2.15) se grafica la magnitud de la parte real del vector de onda, k_2 dividida por k_0 como función del ángulo de incidencia θ_p . Sabemos que en el límite $\kappa_1 \rightarrow 0$ tenemos que $k_2/k_0 = n_0 = 1$, lo que podemos observar en la gráfica.

La gráfica de la parte imaginaria del vector de onda en la región II (aire), a_2 , como función del ángulo de incidencia θ_p para diferentes valores de κ_1 se muestra en la Fig. (2.16), en donde podemos apreciar que en el límite $\kappa_1 \rightarrow 0$, la parte imaginaria del vector de onda permanece igual a cero hasta llegar al ángulo crítico, en donde comienza a aumentar su valor, como uno esperaría en el caso del fenómeno de reflexión interna usual.

Por último, en la Fig. (2.17) tenemos la gráfica del índice de refracción operativo $N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0)$ como función del ángulo de incidencia θ_p , para diferentes valores de κ_1 . Podemos observar que para el límite $\kappa_1 \rightarrow 0$ vemos que se mantiene en el valor $n_1 = 1.3313$ hasta el ángulo crítico, tal y como se esperaría. Para ángulos mayores que el crítico, podemos ver que el efecto de la aparición de la onda evanescente sobre el índice de refracción operativo es disminuir su valor, alcanzando $N_1 = 1$ para el caso límite $\theta_p = \pi/2$, que es lo que se esperaría, pues para este caso el haz viajaría sin modificar su trayectoria a lo largo de la interface de salida del prisma.

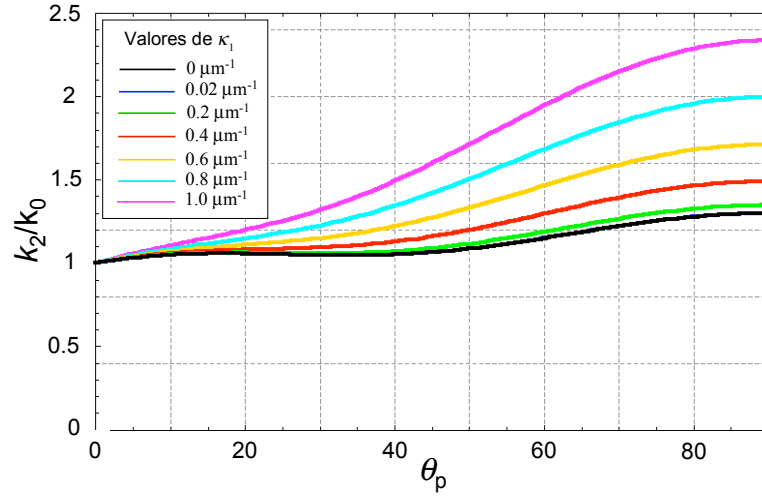


Figura 6: Gráfica de k_2 como función de θ_p empleando la Ley Generalizada de Snell, para diferentes valores de κ_1 .

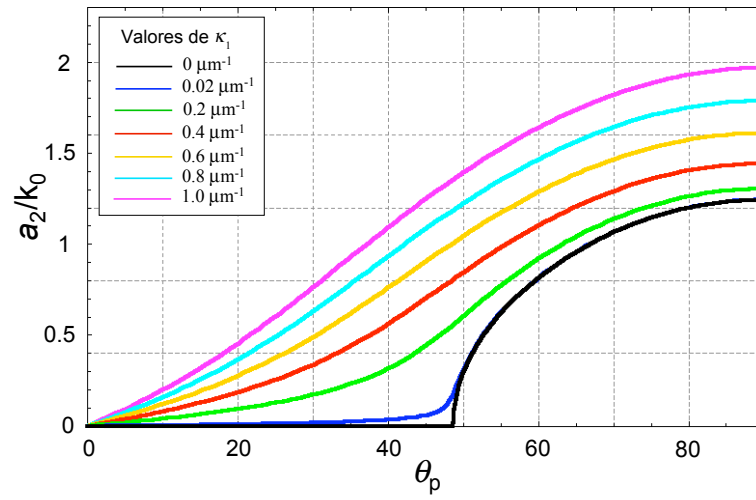


Figura 7: Gráfica de a_2 como función de θ_p empleando la Ley Generalizada de Snell, para diferentes valores de κ_1 .

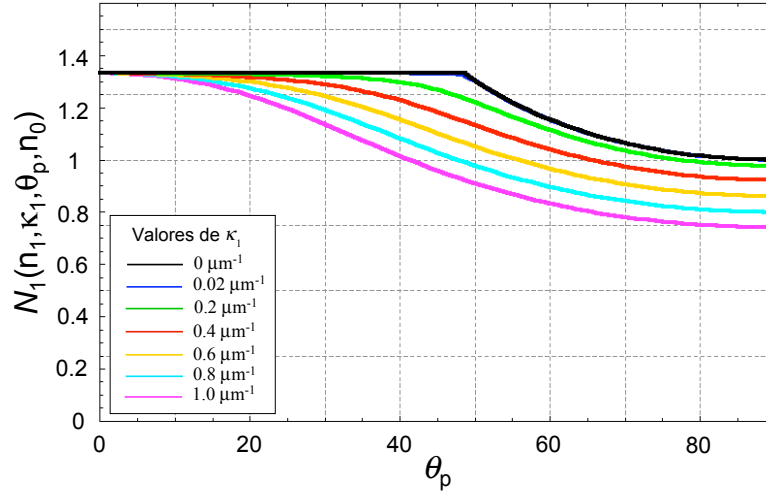


Figura 8: Gráfica del índice de refracción operativo $N_1(n_1, \kappa_1, \theta_p, n_0)$ como función de θ_p empleando la Ley Generalizada de Snell, para diferentes valores de κ_1 .

Apéndice E

En este apéndice se encuentra el análisis numérico de la dependencia, tanto con p como con ω , de las expresiones $\tilde{\epsilon}_{ef}^T(p; \omega)$, Ec. (1.105), y $\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p; \omega)$, Ec. (1.155), considerando los materiales reales: poliestireno y oro, las cuales no se mostraron en el capítulo 1 por razones de espacio.

0.1. Gráficas en el esquema epsilon L - T para poliestireno y oro

Al igual que en el capítulo 1, lo que en realidad se grafica es la contribución de las partículas a las funciones respuesta escaladas por la fracción volumétrica de llenado, es decir, $\left(\tilde{\epsilon}_{ef}^{T(L)}(p; \omega) - 1\right) / f$. A continuación, en la Fig. 2.18, se muestran las gráficas para la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las esferas a $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ normalizada a f , como función del producto adimensional pa , con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, y para diferentes valores de la frecuencia ω o de la longitud de onda λ_0 ; así como también las gráficas de la parte real (c) e imaginaria (d) de la misma función pero ahora como función de la longitud de onda λ_0 para diferentes valores de pa , considerando un sistema coloidal constituido por inclusiones de poliestireno.

Debido a que la dependencia de la parte real de la función dieléctrica del poliestireno con la longitud de onda λ_0 , en la región óptica del espectro electromagnético, es muy débil (la parte imaginaria es cero), lo que se puede observar en la gráfica (a) de la Fig. 1.4, podemos apreciar en los incisos (c) y (d) de la Fig. 2.18 la dependencia intrínseca de $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ con la longitud de onda λ_0 .

En la Fig. 2.19 se muestran las gráficas análogas a las de la Fig. 2.18, sólo que ahora consideramos que las inclusiones esféricas están hechas de oro. La dependencia de la función dieléctrica, tanto parte real como imaginaria, del oro con la longitud de onda λ_0 es similar a la que presenta la plata, como se puede apreciar en la Fig. 1.4, por lo que esperamos que el comportamiento de $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$, tanto como función de pa como de λ_0 , sea similar, lo que se puede constatar comparando las gráficas de la Fig. 2.19 con las de la Fig. 1.5.

En la Fig. 2.20 se ha graficado la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las esferas a la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local, $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$, normalizada a f , como función del producto adimensional pa , con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, y para diferentes valores de la frecuencia ω o de la longitud de onda λ_0 ; así como también las gráficas

de la parte real (c) e imaginaria (d) de la misma función pero ahora como

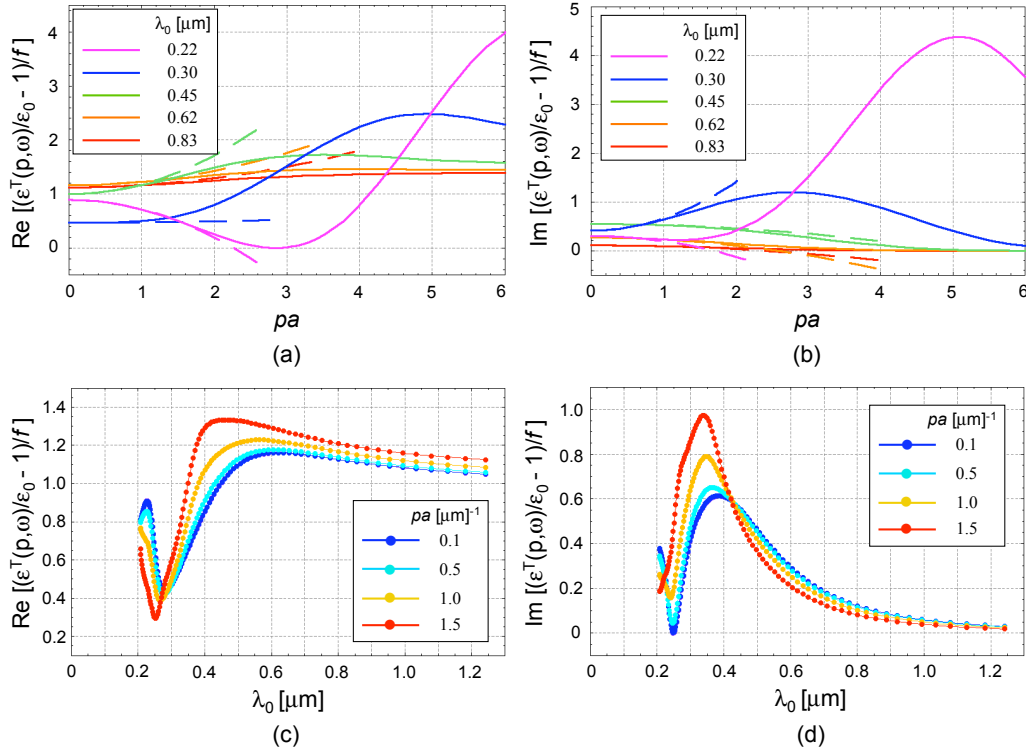


Figura 9: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente transversal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando poliestireno para las inclusiones. La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 . En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

función de la longitud de onda λ_0 para diferentes valores de pa , considerando un sistema coloidal constituido por inclusiones de poliestireno.

Nuevamente, debido a la débil dependencia de la función dieléctrica del poliestireno con la longitud de onda λ_0 , podemos apreciar en los incisos (c) y (d) de la Fig. 2.20 la dependencia intrínseca de la función $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ con λ_0 .

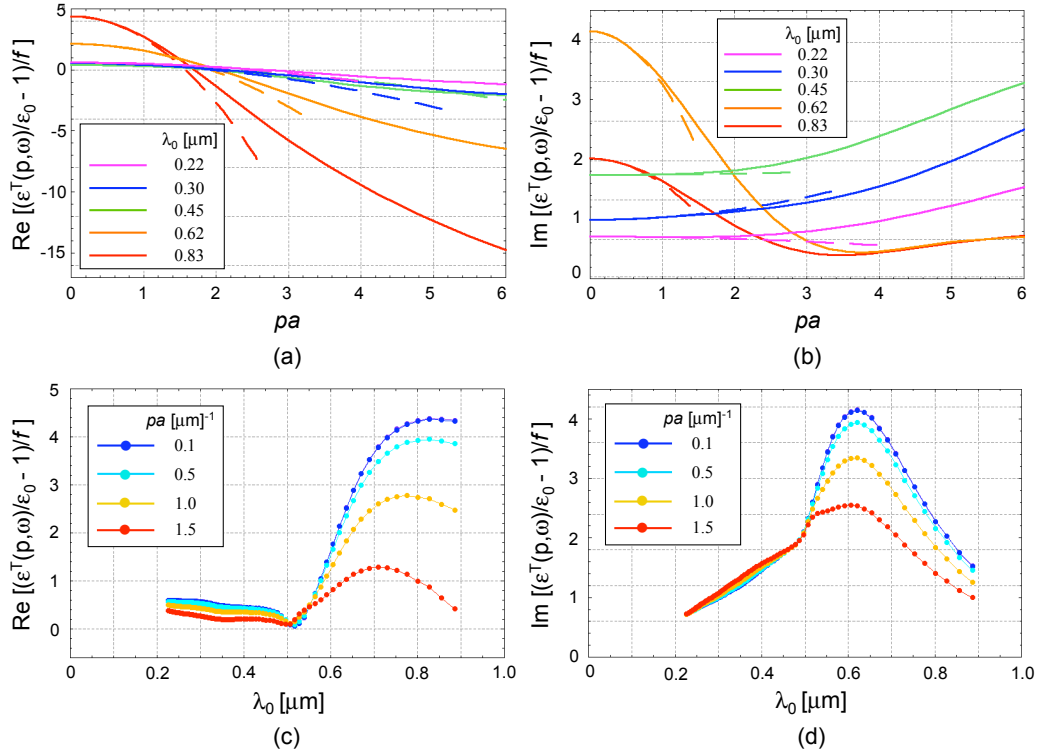


Figura 10: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente transversal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando oro para las inclusiones. La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 . En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

En la Fig. 2.21 tenemos ahora las gráficas de la contribución de las esferas a $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$, (a) parte real y (b) parte imaginaria, normalizada a f , como función del producto adimensional pa , con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, y para diferentes valores de la longitud de onda λ_0 ; así como también las gráficas de la parte real (c) e imaginaria (d) de la misma función pero ahora como función de λ_0 para diferentes valores de pa , considerando las inclusiones esféricas del coloide hechas de oro. Nuevamente, debido a la similitud

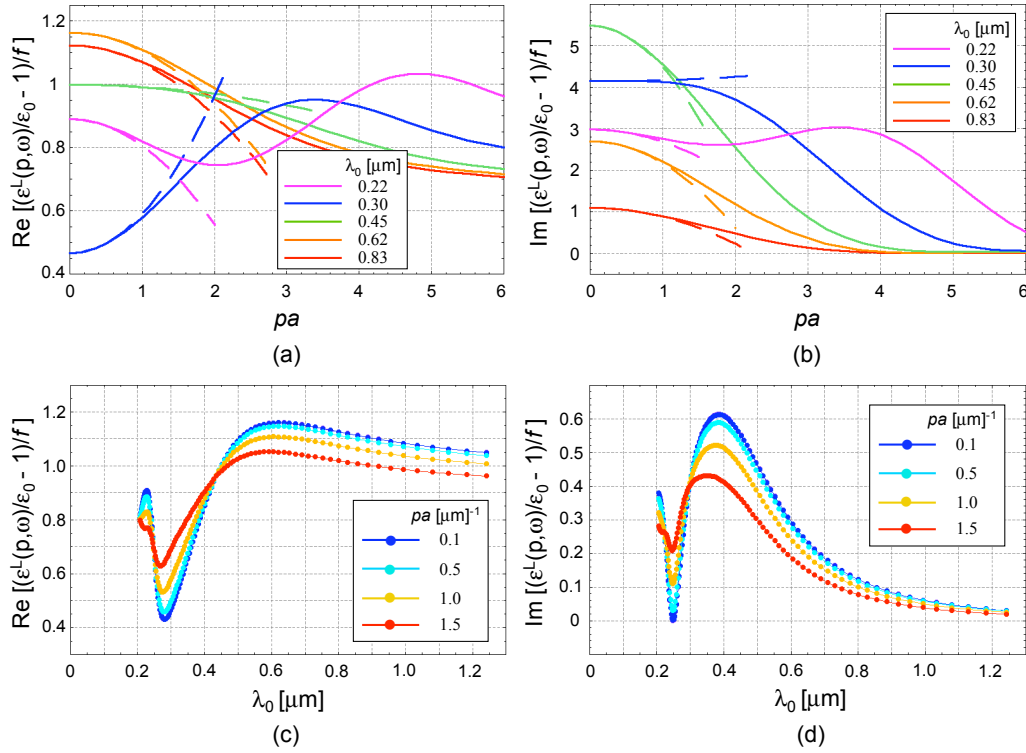


Figura 11: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando poliestireno para las inclusiones. La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 . En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

en la dependencia de las funciones respuesta del oro y de la plata, podemos observar un comportamiento similar de $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$ como función de pa y de λ_0 , comparando las gráficas de la Fig. 2.21 con las de la Fig. 1.7. Incluso, comparando la gráfica del inciso (d) de la Fig. 2.19 con la del inciso (d) de la Fig. 2.21, observamos una dependencia similar de $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ y de $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$, como función de λ_0 . En los incisos (a) y (b) de las figuras anteriores, Figs. 2.18-2.21, se ha incluido la

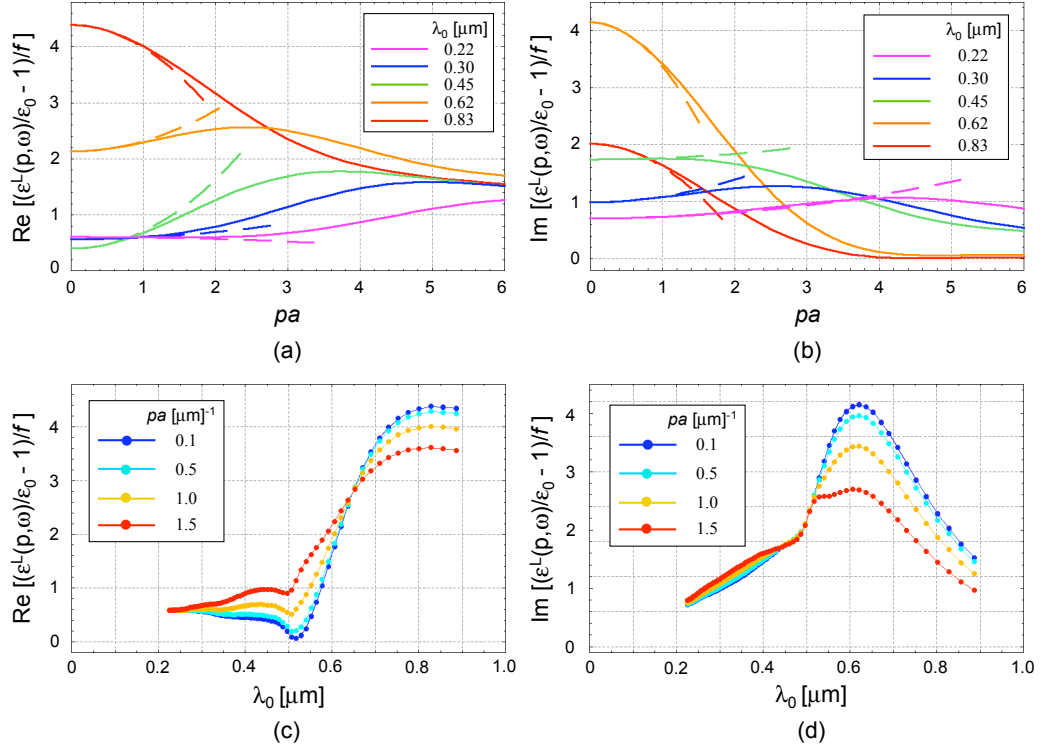


Figura 12: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) de la contribución de las partículas a la componente longitudinal de la función dieléctrica efectiva no local normalizada a f como función de pa para diferentes valores de λ_0 , manteniendo el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$ y utilizando oro para las inclusiones. La línea discontinua corresponde a la aproximación cuadrática de la función graficada, incluyendo términos hasta de orden p^2 . En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

gráfica considerando la aproximación cuadrática (líneas discontinuas), tanto para la componente transversal del tensor dieléctrico efectivo no local, Ec. (1.109), como para la componente longitudinal del tensor dieléctrico efectivo no local, Ec. (1.158), observando que representa una buena aproximación hasta valores del orden de $pa \approx 1$.

Podemos apreciar en todas las gráficas anteriores, que las gráficas correspondientes a la parte imaginaria, ya sea de $\tilde{\epsilon}_{ef}^T$ o de $\tilde{\epsilon}_{ef}^L$, como función de pa o

de λ_0 , para poliestireno o para oro, siempre son positivas. Lo cual concuerda con lo discutido en la sección 7 del capítulo 1.

0.2. Gráficas del índice de refracción efectivo no local para poliestireno y oro

A continuación se presenta el análisis numérico correspondiente a los índices de refracción efectivos obtenidos al resolver la relación de dispersión para los modos transversales, Ec. (1.171), de forma exacta y bajo las tres aproximaciones consideradas en el capítulo 1: aproximación de onda larga (AOL), Ec. (1.175), aproximación cuadrática (AC), Ec. (1.177), y aproximación de cono de luz (ACL), Ec. (1.179); como función de la frecuencia ω , considerando que las inclusiones esféricas que conforman al sistema coloidal están hechas de poliestireno y oro.

En la gráfica, Fig. 2.22, se muestra la dependencia de la parte real (a) e imaginaria (b) con la frecuencia ω , o la longitud de onda λ_0 , del índice de refracción para las tres aproximaciones consideradas al igual que para la solución exacta, en la región óptica del espectro, considerando un sistema coloidal en donde sus inclusiones están hechas de poliestireno. La fracción

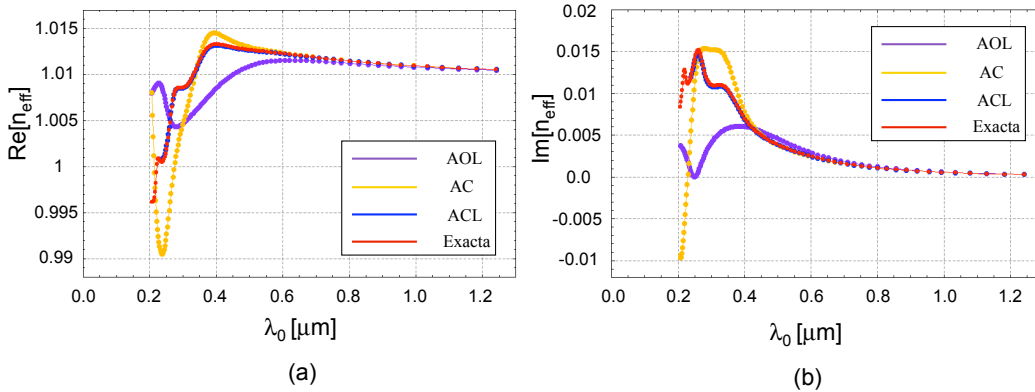


Figura 13: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del índice de refracción obtenido bajo las tres aproximaciones consideradas al igual que el exacto como función de la longitud de onda λ_0 , para una fracción volumétrica de llenado de $f = 0.02$ y con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, considerando poliestireno para las inclusiones esféricas.

volumétrica de llenado se fijó en 2% ($f = 0.02$) mientras que el radio de las esferas se fijó en $a = 0.1 \mu\text{m}$. Podemos apreciar que el índice de refracción efectivo obtenido considerando la aproximación de cono de luz, representa una muy buena aproximación al índice de refracción efectivo exacto, tanto para la parte real como para la imaginaria, permaneciendo por debajo de un error relativo del 3% en la región del espectro electromagnético analizado.

De manera análoga, en la Fig. 2.23, se muestran las gráficas de la dependencia de la parte real (a) e imaginaria (b) con la frecuencia ω , o la longitud de onda λ_0 , del índice de refracción para las tres aproximaciones consideradas al igual que para la solución exacta, en la región óptica del espectro, pero ahora considerando un sistema coloidal en donde sus inclusiones están hechas de oro. La fracción volumétrica de llenado se fijó en 2% ($f = 0.02$) mientras que el radio de las esferas se fijó en $a = 0.1 \mu\text{m}$.

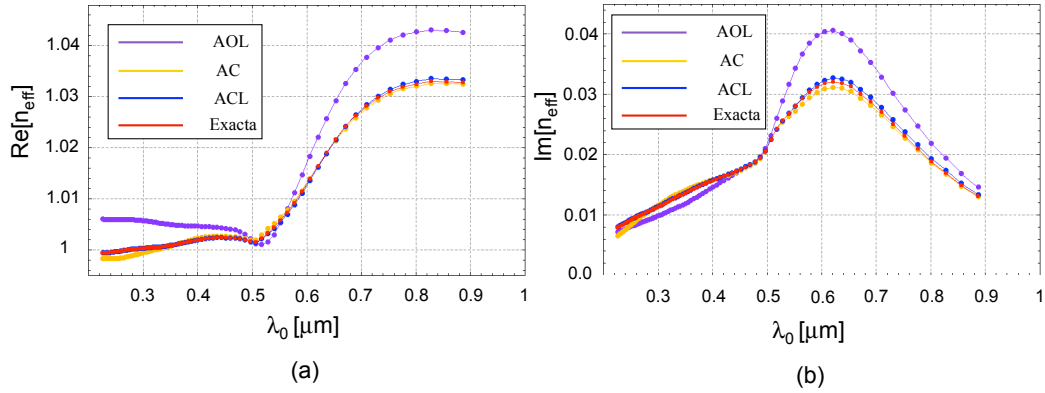


Figura 14: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del índice de refracción obtenido bajo las tres aproximaciones consideradas al igual que el exacto como función de la longitud de onda λ_0 , para una fracción volumétrica de llenado de $f = 0.02$ y con el radio de las esferas fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$, considerando oro para las inclusiones esféricas.

0.3. Gráficas en el esquema tradicional para poliestireno y oro

En el enfoque tradicional, que llamamos *esquema $\epsilon - \mu$* , obtuvimos que la función dieléctrica efectiva no local $\tilde{\epsilon}_{ef}(p, \omega)$, coincide con la componente

longitudinal del operador dieléctrico efectivo no local $\tilde{\epsilon}_{ef}^L(p, \omega)$ del *esquema* $L-T$, por lo que en el análisis numérico sólo es necesario incluir la función permeabilidad magnética efectiva no local $\tilde{\mu}_{ef}$. Entonces, de la dependencia de la permeabilidad magnética efectiva no local, tanto con la variable adimensional pa como con la longitud de onda λ_0 , considerando inclusiones esféricas hechas de poliestireno y de oro, se obtuvieron las gráficas que se muestran a continuación. De hecho, realmente se graficaron las funciones $\text{Re} \left[(\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega))^{-1} - 1 \right] / f$ y $\text{Im} \left[(\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega))^{-1} - 1 \right] / f$ como función de la variable adimensional pa y de la longitud de onda λ_0 .

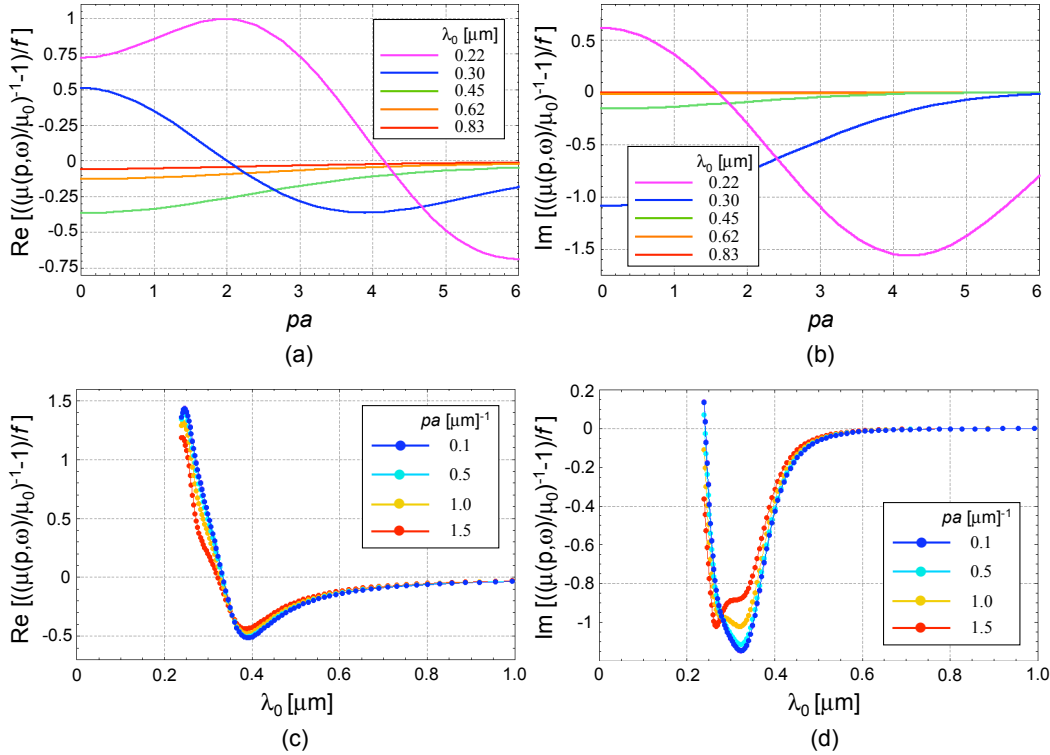


Figura 15: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del inverso de la permeabilidad magnética menos uno, normalizada a f , como función de la variable adimensional pa para diferentes valores de λ_0 , para un sistema coloidal conformado por inclusiones esféricas de poliestireno con el radio fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$. En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

En la Fig. 2.24 se muestra la parte real (a) y la parte imaginaria (b) de $\left([\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega)]^{-1} - 1\right)/f$, como función de pa , para diferentes valores fijos de λ_0 , considerando un sistema coloidal cuyas inclusiones esféricas están hechas de poliestireno con un radio fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$. En los incisos (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

En la Fig. 2.25 se muestran las gráficas análogas a las de la Fig. 2.24, considerando ahora que las inclusiones esféricas están hechas de oro.

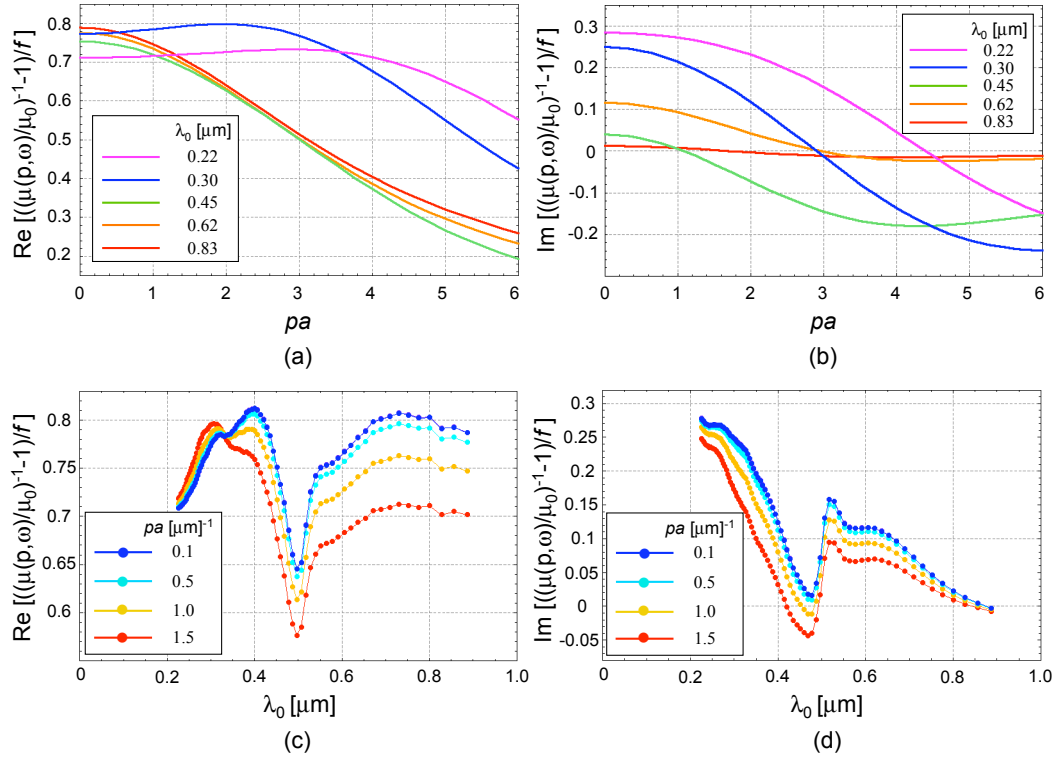


Figura 16: Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del inverso de la permeabilidad magnética menos uno, normalizada a f , como función de la variable adimensional pa para diferentes valores de λ_0 , para un sistema coloidal conformado por inclusiones esféricas de oro con el radio fijo en $a = 0.1 \mu\text{m}$. En las figuras (c) y (d) se grafica la parte real e imaginaria, respectivamente, de la misma función pero ahora como función de λ_0 , para diferentes valores de pa .

En las gráficas anteriores observamos que la parte imaginaria de la función $\left([\tilde{\mu}_{ef}(p, \omega)]^{-1} - 1\right)/f$ tienen partes negativas, tanto para esferas de poliestireno como de oro, ya sea como función de pa o de λ_0 , lo cual sabemos ahora que no representa problema alguno, como se discutió en la sección 7 del capítulo 1.

Apéndice F

Para poder demostrar la Ec. (1.181) partimos de la expresión para el campo eléctrico esparcido por una sola esfera aislada en presencia de una onda electromagnética transversal libre incidente, con vector de onda $\vec{k}_i$ y polarización $\hat{e}_i$, dada por

$$\vec{E}_{esp}(\vec{r}) = E_0 \iint d\vec{r}' d\vec{r}'' \overleftrightarrow{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{r}', \vec{r}'') \cdot \exp[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''] \hat{e}_i, \quad (202)$$

en donde, para nuestro caso, $k_i = k_0$ y $\hat{e}_i \cdot \vec{k}_i = 0$. Los tensores $\overleftrightarrow{G}_0$ y $\overleftrightarrow{T}$ están definidos por las Ecs. (1.8) y (1.26), respectivamente. En la región de campo lejano ($k_0 r \gg 1$), empleando las Ecs. (1.9) y (1.11), podemos reescribir la expresión del campo eléctrico esparcido, a orden r^{-1} , como

$$\begin{aligned} \vec{E}_{esp}^{k_0 r \gg 1}(\vec{r}) = E_0 \left(\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \cdot \frac{\exp[ik_0 r]}{4\pi r} \times \\ \times \iint d\vec{r}' d\vec{r}'' \exp[-i\vec{k}_{esp} \cdot \vec{r}'] \overleftrightarrow{T}(\vec{r}', \vec{r}'') \exp[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''] \cdot \hat{e}_i, \end{aligned} \quad (203)$$

en donde $\vec{k}_{esp} \equiv k_0 \hat{r}$ es conocido como el vector de onda esparcido. Podemos identificar la transformada de Fourier del operador de transición, es decir,

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{k}_{esp}, \vec{k}_i) = \iint d\vec{r}' d\vec{r}'' \exp[-i\vec{k}_{esp} \cdot \vec{r}'] \overleftrightarrow{T}(\vec{r}', \vec{r}'') \exp[i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''], \quad (204)$$

de modo que podemos escribir el campo eléctrico esparcido como

$$\vec{E}_{esp}^{k_0 r \gg 1}(\vec{r}) = E_0 \left(\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \cdot \frac{\exp[ik_0 r]}{4\pi r} \overleftrightarrow{T}(\vec{k}_{esp}, \vec{k}_i) \cdot \hat{e}_i. \quad (205)$$

A orden más bajo en r^{-1} tenemos que

$$\nabla \frac{\exp[ik_0 r]}{r} \approx i \vec{k}_{esp} \frac{\exp[ik_0 r]}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (206)$$

de modo que la expresión para el campo eléctrico esparcido se reduce a su forma

$$\vec{E}_{esp}^{k_0 r \gg 1}(\vec{r}) = E_0 \frac{\exp[ik_0 r]}{4\pi r} \left(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_{esp} \hat{k}_{esp} \right) \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{k}_{esp}, \vec{k}_i) \cdot \hat{e}_i. \quad (207)$$

Analizando el campo eléctrico esparcido en la dirección frontal, es decir, $\vec{k}_{esp} = \vec{k}_i$, podemos escribir que

$$\vec{E}_{esp}^{k_0 r \gg 1}(\vec{r}) = E_0 \frac{\exp[ik_0 r]}{4\pi r} \left(\overleftrightarrow{I} - \hat{k}_i \hat{k}_i \right) \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec{k}_i, \vec{k}_i) \cdot \hat{e}_i, \quad (208)$$

Podemos reconocer que el operador $\left(\overleftrightarrow{T} - \hat{k}_i \hat{k}_i\right)$ es un operador de proyección transversal, de modo que finalmente podemos escribir que

$$\vec{E}_{esp}^{k_0 r \gg 1}(\vec{r}) = E_0 \frac{\exp[ik_0 r]}{4\pi r} T^T(k_0) \hat{e}_i. \quad (209)$$

Comparando la Ec. (2.225) con la expresión que relaciona el campo eléctrico incidente con el esparcido, a través de la matriz de esparcimiento¹⁸, dada por

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_{esp,\parallel}^{k_0 r \gg 1} \\ \vec{E}_{esp,\perp}^{k_0 r \gg 1} \end{pmatrix} = \frac{\exp[ik_0 r]}{-ik_0 r} \begin{pmatrix} S_2(\theta) & S_4(\theta) \\ S_3(\theta) & S_1(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{inc,\parallel} \\ E_{inc,\perp} \end{pmatrix}, \quad (210)$$

en donde $\parallel$ y $\perp$ denotan las componentes paralela y perpendicular al plano de esparcimiento y para el caso de un esparcisor con geometría esférica se tiene que $S_3(\theta) = S_4(\theta) = 0$, y los otros dos coeficientes en la dirección frontal de esparcimiento ($\theta = 0$) se tiene que $S_2(0) = S_1(0)$, tenemos que

$$\vec{E}_{esp}^{k_0 r \gg 1}(\vec{r}) = E_0 \frac{\exp[ik_0 r]}{-ik_0 r} S(0) \hat{e}_i. \quad (211)$$

Comparando las dos ecuaciones, Ecs. (2.225) y (2.227), obtenemos finalmente la Ec. (1.181).

¹⁸Ver libro de Bohren y Huffman [34] pág. 63, Ec. (3.12).

Bibliografía

- [1] R. G. Barrera y A. García-Valenzuela, “Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach”, J. Opt. Soc. Am. A **20**, 296, 2003.
- [2] A. García-Valenzuela y R. G. Barrera, “Electromagnetic response of a random half-space of Mie scatterers within the effective-field approximation and the determination of the effective optical coefficients”, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **627**, 79, 2003.
- [3] A. García-Valenzuela y R. G. Barrera, “Effective electric and magnetic susceptibility of dilute systems of dielectric and metallic Mie particles”, Physica B **338**, 31, 2003.
- [4] R. G. Barrera y A. García-Valenzuela, “Amperian magnetism in the dynamic response of granular materials”, Developments in Mathematical and Experimental Physics, Volume B: Statistical Physics and Beyond, Edited by Macias et al. (Kluwer Academic: Plenum Publishers), 147-170, 2003.
- [5] C. F. Bohren, “Applicability of effective medium theories to problems of scattering and absorption by nonhomogeneous atmospheric particles”, J. Atmos. Sci. **43**, 468, 1986.
- [6] A. Reyes Coronado, A. García-Valenzuela, C. Sánchez-Pérez and R. G. Barrera, “Measurement of the effective refractive index of a turbid colloidal suspension using light refraction”, New Journal of Physics **7**, 89, 2005.
- [7] Lord Rayleigh, “On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky”, Philos. Mag. **47**, 375, 1899.
- [8] *Proceedings of the Sixth International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media* (ETOPIM6). Editado por G. Milton et al., Physica B **338**, 2003.
- [9] T. C. Choy, *Effective Medium Theory: Principles and Applications* (Oxford University Press, Oxford, 1999).
- [10] A. Sihvola, *Electromagnetic mixing formulas and applications* (IEE Press, London UK, 1999).

- [11] J. C. Maxwell Garnett, “Colours in metal glasses and in metallic films”, Trans. R. Soc. Lond. **203**, 385, 1904.
- [12] D. A. G. Bruggeman, “Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen”, Ann. Phys. (Leipzig) **24**, 636, 1935.
- [13] R. Landauer, *Proceedings of the First Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, AIP Conf. Proc. **40**, 2-45; editado por J. C. Garland y D. B. Tanner (AIP, New York, 1978).
- [14] J. E. Gubernatis, *Proceedings of the First Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, AIP Conf. Proc. **40**, 84-97; editado por J. C. Garland y D. B. Tanner (AIP, New York, 1978).
- [15] R. Fuchs, *Proceedings of the First Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, AIP Conf. Proc. **40**, 276-281; editado por J. C. Garland y D. B. Tanner (AIP, New York, 1978).
- [16] Para referencias más recientes ver por ejemplo: *Proceedings of the Fifth International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*(ETOPIM 5). Editado por P. M. Hui, P. Sheng y L. H. Tang, Physica B, **279**, Nos. 1-3, 2000.
- [17] R. G. Barrera, G. Monsivais y W. L. Mochán, “Renormalized polarizability in the Maxwell Garnett theory”, Phys. Rev. B **38**, 5371, 1988.
- [18] G. P. Ortiz, C. López-Bastidas, J. A. Maytorena y W. L. Mochán, Physica B **338**, 54, 2003.
- [19] G. Mie, “Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen”, Ann. Phys. (Leipzig) **25**, 377, 1908.
- [20] D. Stroud y F. P. Pan, Phys. Rev. B **17**, 1602, 1987.
- [21] A. Wachniewski y H. B. McClung, Phys. Rev. B **33**, 8053, 1986.
- [22] P. Chýlek y V. Srivastava, “Dielectric constant of a composite inhomogeneous medium”, Phys. Rev. B **27**, 5098, 1983.

- [23] W. T. Doyle, “Optical properties of a suspension of metal spheres”, Phys. Rev. B **39**, 9852, 1989.
- [24] C. A. Grimes y D. M. Grimes, “Permeability and permittivity spectra of granular materials”, Phys. Rev. B **43**, 10780, 1991.
- [25] R. Ruppín, “Evaluation of extended Maxwell-Garnett theories”, Opt. Commun. **182**, 273, 2000.
- [26] G. H. Meeten y A. N. North, “Refractive index measurement of absorbing and turbid fluids by reflection near the critical angle”, Meas. Sci. Technol. **6**, 214, 1995.
- [27] M. Mohammadi, “Colloidal refractometry: meaning and measurement of refractive index for dispersions; the science that time forgot”, Adv. Colloid & Interf. Sci. **62**, 17, 1995.
- [28] H. Seel y R. Brendel, “Optical absorption in crystalline films containing spherical voids for internal light scattering”, Thin Solid Films **451-452**, 608-611, 2004.
- [29] Y. Sarov, I. Capek, S. Janícková, I. Kostic, A. Konecníková, L. Matay y V. Sarova, “Properties of nano-scaled disperse media investigated by refractometric measurements”, Vacuum **76**, 231, 2004.
- [30] H. Ding, J. Q. Lu, K. M. Jacobs and X-H. Hu, “Determination of refractive indices of porcine skin tissues and intralipid at eight wavelengths between 325 and 1557 nm”, J. Opt. Soc. Am. A **22** (6), 1151, 2005.
- [31] A. García-Valenzuela y R. G. Barrera, “Optical reflectance of a composite medium with a sparse concentration of large spherical inclusions”, Phys. Stat. Sol. (b) **240**, 480, 2003.
- [32] A. García-Valenzuela, R. G. Barrera, C. Sánchez-Pérez, A. Reyes-Coronado y E. R. Méndez, “Coherent reflection of light from a turbid suspension of particles in an internal-reflection configuration: Theory versus experiment”, Optics Express **13** No.18, 2005.
- [33] H. C. van de Hulst, *Light scattering by small particles*, (Wiley: New York, 1957).

- [34] C. F. Bohren y D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (J. Wiley & Sons Inc., New York, 1998).
- [35] L. L. Foldy, “The Multiple Scattering of Waves”, Phys. Rev. **67**, 107, 1945.
- [36] M. Lax, “Multiple Scattering of Waves”, Rev. Mod. Phys. **23**, 287, 1951.
- [37] M. Lax, “Multiple Scattering of Waves II. The Effective Field in Dense Systems”, Phys. Rev. **85**, 621, 1952.
- [38] J. B. Keller, “Stochastic Equations and Wave Propagation in Random Media”, Proc. Symp. Appl. Math. *16*, 145, (Am. Math. Soc., McGraw-Hill, New York, 1964).
- [39] L. Tsang y J. A. Kong, “Effective propagation constants for coherent electromagnetic waves propagating in media embedded with dielectric scatterers”, J. Appl. Phys. *53*, 7162, 1982.
- [40] L. Tsang y J. A. Kong, “Multiple scattering of electromagnetic waves by random distribution of discrete scatterers with coherent potential and quantum mechanical formalism”, J. Appl. Phys. **51**, 3465-3485, 1980.
- [41] L. Tsang y J. A. Kong, *Scattering of Electromagnetic Waves. Advanced Topics* (J. Wiley & Sons Inc., New York, 2001). Chap. 5, 198-203.
- [42] V. P. Dick y A. P. Ivanov, “Extinction of light in dispersive media with high particle concentrations: applicability limits of the interference approximation”, J. Opt. Soc. Am. A **16** 1034, 1999.
- [43] P. R. Siqueira y K. Sarabandi, “T-Matrix determination of effective permittivity for three-dimensional dense random media”, IEEE Trans. Antennas Propag **48** 317, 2000.
- [44] L. Hespel, S. Manguy y J. J. Greffet, “Theoretical and experimental investigation of the extinction in a dense distribution of particles: nonlocal effects”, J. Opt. Soc. Am. A **18**, 3072, 2001.
- [45] A. Chou y M. Kerker, “The refractive index of colloidal sols”, J. Phys. Chem. **60**, 562, 1956.

- [46] J. V. Champion, G. H. Meeten y M. Senior, “Refractive index of particles in the colloidal state”, J. Chem. Soc., Faraday Trans. **74**, 1319, 1978.
- [47] K. Alexander, A. Killey, G. H. Meeten y M. Senior, “Refractive index of concentrated colloidal dispersions”, J. Chem. Soc. Faraday Trans. **77**, 361, 1981.
- [48] G. H. Meeten y A. N. North, “Refractive index measurement of turbid colloidal fluids by transmission near the critical angle”, Meas. Sci. Technol. **2**, 441, 1991.
- [49] G. H. Meeten, “Refraction by spherical particles in the intermediate scattering region”, Opt. Comm. **134**, 233, 1997.
- [50] G. H. Meeten, “Refractive index errors in the critical-angle and the Brewster-angle methods applied to absorbing and heterogeneous materials”, Meas. Sci. Technol. **8**, 728, 1997.
- [51] A. J. Jääskeläinen, K-E. Peiponen, J. Rätty, U. Tapper, O. Richerd, E. I. Kauppinen y K. Lumme, “Estimation of the refractive index of plastic pigments by Wiener bounds”, Opt. Eng. **39**, 2959, 2000.
- [52] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory* (EMW Publishing, Cambridge, Massachusetts, USA, 2005).
- [53] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (John Wiley & Sons, Inc., 1971).
- [54] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (J. Wiley & Sons Inc., New York, Tercera Edición, 1998).
- [55] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, Inc., New York, Novena Edición, 1972).
- [56] P. B. Johnson y R. W. Christy, “Optical Constants of the Noble Metals”, Phys. Rev. B **6**, 4370, 1972.
- [57] Editado por E. D. Palik, *Handbook of optical constants of solids* (Academic Press Inc., Orlando, 1985), pp. 795-804.

- [58] R. G. Barrera, A. Reyes-Coronado y A. García-Valenzuela, “Nonlocal nature of the electrodynamic response of colloidal systems”, Phys. Rev. B to be printed, 2007.
- [59] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics* (Séptima edición expandida, Cambridge University Press, Cambridge, 1999), pp. 80-84.
- [60] L. Tsang y J. A. Kong, *Scattering of electromagnetic waves: Advanced topics*, (Wiley: New York, 2001).
- [61] Y. Kuga, D. Rice y R. D. West, “Propagation constant and the velocity of the coherent wave in a dense strongly scattering medium”, IEEE Trans. Antenn. Propagat. **44**, (3), 326, 1996.
- [62] C. Yang, A. Wax y M. S. Feld, “Measurement of the anomalous phase velocity of ballistic light in a random medium by use of a novel interferometer”, Opt. Lett. **26**, (4), 235, 2001.
- [63] R. D. Guenther, *Modern Optics*, (Wiley: New York, 1990).
- [64] D. A. Ligon, J. B. Gillespie y T. W. Chen, “Determination of aerosol parameters from light scattering data using an inverse Monte Carlo technique”, Appl. Opt. **35**, 2358, 1996.
- [65] D. A. Ligon, J. B. Gillespie y P. M. Pellegrino, “Aerosol properties from spectral extinction and backscatter estimated by an inverse Monte-Carlo method”, Appl. Opt. **39**, 4402, 2000.
- [66] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ”, Soviet Physics Uspekhi **10**, 509, 1968.
- [67] M. S. Wheeler, J. S. Aitchison y M. Mojahedi, “Coated nonmagnetic spheres with a negative index of refraction at infrared frequencies”, Phys. Rev. B **73**, 045105, 2006.
- [68] L. Jylhä, I. Kolmakov, S. Maslovski y S. Tretyakov, “Modeling of isotropic backward-wave materials composed of resonant spheres”, J. Appl. Phys. **99**, 043102, 2006.
- [69] C. L. Holloway, E. F. Kuester, J. Baker-Jarvis y P. Kabos, “A Double Negative (DNG) Composite Medium Composed of Magnetodielectrics

- Spherical Particles Embedded in a Matrix”, IEEE Trans. Antenn. Propagat. **51**, 2596, 2003.
- [70] B. -J. Seo, T. Ueda, T. Itoh y H. Fetterman, “Isotropic left handed material at optical frequency with dielectric spheres embedded in negative permittivity medium”, Appl. Phys. Lett. **88**, 161122, 2006.
- [71] M. S. Wheeler, J. S. Aitchison y M. Mojahedi, “Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experimentos at Non-Normal Angles of Incidence”, Phys. Rev. **172**, 607, 1968.
- [72] W. L. Mochán y R. G. Barrera, “Electromagnetic response of systems with spatial fluctuations. I. General formalism”, Phys. Rev. **32**, 4984, 1985.
- [73] G. Russakoff, “A Derivation of the Macroscopic Maxwell Equations”, A. J. Phys. **38**, 1188, 1970.
- [74] R. G. Barrera y R. Fuchs, “Theory of electron energy loss in a random system of spheres”, Phys. Rev. B **52**, 3256, 1995.
- [75] J. M. Stone, *Radiation and Optics*, (McGraw-Hill, 1963).