FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

EPISTEMOLOGÍA PARA OBJETOS ABSTRACTOS EN FREGE

TESIS

PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

RICARDO MENA GALLARDO

Asesora: Dra. Lourdes Valdivia

México, D.F., CD. Universitaria, 2007

Agradecimientos

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de un gran número de personas. Especialmente quiero agradecer a Lourdes Valdivia, por haberme entrenado cuando no contaba con entrenamiento alguno, por haberme entrenado más cuando ya estaba entrenado, por todo su apoyo moral y por ser una verdadera amiga. Esta tesis no hubiera sido posible sin la influencia de Lourdes Valdivia. Así mismo, quiero agradecer a Arturo Yánez quien fue el primer maestro que me contagió su gusto por el pensamiento riguroso. También quiero agradecer a Axel Barceló quien me ha enseñado tanto y me ha dedicado tanto tiempo. Me siento en deuda con los integrantes del Seminario de Filosofía de las Matemáticas (Max Fernández, Silvio Pinto, Javier Elizondo y Axel Barceló) quienes siempre me han tratado como colega, me han abierto puertas y me han enseñado tantas cosas. Quiero agradecer a Agustín Rayo por haber sido un ejemplo, por sus comentarios y por la atención que me ha brindado. Agradezco a los integrantes del Seminario de Metafísica del Significado por haber discutido e intercambiado ideas en numerosas ocasiones. En particular quiero agradecer a Teresa Verthein quien ha sido una verdadera amiga, maestra, y por haberme apoyado en varias ocasiones. A Erik Llamas por haber sido un excelente compañero, amigo, y por haberme soportado tantas veces. A Viorica Ramírez por haberme tomado con seriedad y por haber discutido mis ideas.

Quiero agradecer a Armando Mena por haberme incitado por primera vez a leer filosofía, por su apoyo constante y por haber creído en mí. A Sofía Gallardo por todo su cariño, por su apoyo constante y por todos los valores que me ha infundido. A Alejandra Mena, por su cariño, porque siempre ha sido mi compañera y por haber forjado mi carácter. A Christian Staub y Andrea Gallardo por el cariño que me tienen y por todo su apoyo. A Javier Gallardo y Lourdes Calva por todo su cariño y atención.

Quiero agradecer a Valeria Luiselli, Lucina Melesio y Mónica Montaño por todo su cariño, por haber sido amigas excepcionales y por haberme escuchado. A Enrique Gutiérrez, Eli Fernández, Ricardo Ludlow y Emiliano Becerril, por haber sido unos amigos excepcionales y por haber confiado en mí. Al Club del Ajedrez (Bruno, Daniel, Iván, Adrián, Ignacio y Matías) por haberme dado ratos de diversión en los momentos más estresantes.

Índice

Introducción

A lo largo de esta tesis perseguiré lo que considero es una interpretación novedosa del tipo de problema que el fenómeno de la vaguedad representa al interior del marco fregeano. La interpretación estándar de la obra de Frege considera que la vaguedad es un problema lógico. Por ejemplo, la interpretación estándar suele señalar que la vaguedad entra en conflicto directo con el principio del tercio excluso y que, además, irremediablemente nos hace caer en la paradoja sorites. A pesar de que estoy de acuerdo con esta apreciación, pienso que los problemas lógicos no son los únicos que emergen del fenómeno de la vaguedad. Como argumentaré, principalmente en la sección 2.2.2 de esta tesis, la vaguedad también entra en conflicto con la explicación epistemológica fregeana de cómo captamos objetos abstractos. Así pues, la perspectiva que defenderé es que la vaguedad es, al interior del marco fregeano, no sólo un problema lógico sino también un problema epistemológico.

La sección 1.2 de esta tesis está dedicada a la caracterización de lo que considero es el problema más importante del Realismo y la respuesta de Frege a ese problema. Dicho con brevedad, el problema del Realismo es el de dar una explicación satisfactoria de cómo es que captamos objetos abstractos, y la respuesta de Frege es, como sostengo en la sección 1.3, *grosso modo*, que los captamos a través del lenguaje. En la sección 1.3.1, explicaré cómo es que el principio contextual es la pieza clave en la estrategia general de Frege para solucionar, lo que he llamado, el problema más grande del Realismo; el principio contextual es, por así decirlo, el puente que conecta al lenguaje con los objetos abstractos. En la sección 2.1 me dedicaré a precisar la estrategia de Frege para solucionar el problema. Considero que la sección 2.2.2 es crucial, debido a que ahí muestro cómo es que el famoso problema Julio Cesar emerge de la vaguedad que merodea en el lenguaje de Frege. En la misma sección argumento que es el problema Julio Cesar lo que, en última instancia, invalida la solución que Frege ofrece al problema del Realismo. En la sección 2.2.1 argumento, contrario a la interpretación de Richard Heck (1997), que el problema Julio Cesar brota porque ‘el requerimiento de determinación completa’[1] no ha sido satisfecho. En esta sección señalo que no satisfacer este requerimiento es equivalente a tener vaguedad en el lenguaje y explico cómo esto genera errores lógicos. En la sección 2.2.2, argumento que la vaguedad no es sólo un problema lógico al interior del marco fregeano, sino también un problema epistemológico; si el lenguaje es como los “ojos” que nos permiten “ver” a los objetos abstractos, entonces ese lenguaje no puede ser vago. Finalmente, el capítulo 3 está dedicado a discutir la propuesta de Frege para eliminar la vaguedad del lenguaje. La conclusión de este capítulo será que, si bien es cierto que la propuesta de Frege es fallida, también es cierto que aporta muchas ideas muy fértiles al problema que pretende enfrentar.

[1] Esta noción será explicada con detalle en el capitulo 2 de esta tesis.

Capitulo 1

El problema del Realismo y la solución de Frege

A lo largo de esta tesis entenderé por Realismo aquella postura filosófica que defiende la existencia de los objetos abstractos. De manera intuitiva, los objetos abstractos son objetos como los números, los conjuntos, las proposiciones, etcétera. Los objetos concretos, en cambio, son objetos como las piedras, lo árboles, las personas, etcétera.[1] La idea detrás de la distinción abstracto/concreto es que la naturaleza de los números, conjuntos y proposiciones es radicalmente distinta de la naturaleza de las piedras, los árboles y las personas.

Decir exactamente en qué consiste la distinción abstracto/concreto ha probado ser una tarea sumamente complicada— las propuestas comúnmente tienen, entre otros problemas, el de no poder trazar una distinción exhaustiva y excluyente —lo que hace difícil decir, exactamente, qué son los objetos abstractos.

A continuación, en la sección 1.1, exploraremos las propuestas más obvias para trazar una distinción adecuada entre objetos abstractos y concretos. Concluiremos que

[1] A lo largo de esta tesis hay que tener en mente que Frege nunca esclareció completamente la noción de objeto. Lourdes Valdivia (1984) explora y critica dos caracterizaciones posibles de la noción de objeto. La primera, que es defendida por Dummett (1973), dice que los objetos son todas las entidades que son denotadas por un nombre propio. Esta caracterización no es aceptable puesto que hay varios ejemplos de objetos que no son denotados por nombres propios. Como Valdivia señala, de la interpretación de Dummett podemos extraer sólo una condición suficiente: Si algo es denotado por un nombre propio, entonces es un objeto. La otra caracterización, ofrecida por Frege en "Función y Concepto", es como sigue: los objetos son todas las cosas que no son función. El problema de esta caracterización es que es demasiado oscura y depende directamente de la noción de función que también carece de una explicación completa.

Mi sospecha es que Frege pensó que las nociones de objeto y función son primitivas y, por tanto, indefinibles. En "Concepto y Objeto" Frege acepta que su noción de función es lógicamente simple y que, por ello, es primitiva. Por esta razón no se puede dar una definición de función. Lo único que podemos hacer, de acuerdo con Frege, es elucidar lo que es una función. Dado que la noción de objeto es tan básica como la de concepto, es plausible pensar que Frege estaría igualmente dispuesto a aceptar que la noción de objeto es lógicamente simple y, por ello, primitiva. Para elucidar la noción de objeto sólo podemos decir cosas tales como 'si algo es denotado por un nombre propio, es un objeto', 'objeto es todo aquello que no es función'. También podemos dar ejemplos: los libros, las piedras, los astros, las personas, los números, los átomos, etc., son objetos. Nada de esto cuenta como una definición, sólo son elucidaciones.

ninguna de las propuestas aquí evaluadas es satisfactoria y nos quedaremos con una definición provisional de objeto abstracto que será suficiente para los propósitos de esta tesis. Posteriormente, en la sección 1.2, me dedicaré a caracterizar y motivar lo que considero es el problema más grande del Realismo. Por último, en la sección 1.3, exploraré la solución de Frege a este problema.

1.1 La distinción abstracto/concreto

Es tentador pensar que la distinción abstracto/concreto se basa en el criterio de accesibilidad por medio de los sentidos.[2] Es natural pensar que los objetos abstractos se caracterizan por no poder ser percibidos mediante los sentidos; no es posible ver, ni oír, ni sentir, ni oler, ni degustar objetos abstractos como, por ejemplo, los conjuntos. En cambio en nuestra vida cotidiana percibimos constantemente objetos concretos mediante nuestros sentidos; sentimos las tazas, oímos el ruido de las cucharas, olemos y degustamos el café, etcétera. Parece entonces, a primera vista, que este criterio puede clasificar adecuadamente a los objetos en abstractos y concretos.

Aun cuando el criterio de accesibilidad por medio de los sentidos rescata muchas de las intuiciones que tenemos acerca de la distinción abstracto/concreto, es, a fin de cuentas, un criterio inadecuado. Lo primero que debemos notar, como lo hace el propio Dummett (1973), es que simplemente no podemos trazar una distinción ontológica con base en una distinción tan contingente y subjetiva como lo es la distinción entre lo que es, o no es, accesible por medio de los sentidos. Las manzanas son un ejemplo claro de objetos concreto. No obstante, si por alguna razón ya no pudiéramos percibir, de ninguna manera, a las manzanas, entonces, de acuerdo con este criterio, las manzanas

---

[2] En "El Pensamiento" Frege parece defender en numerosas ocasiones este criterio. Aunque en otros escritos, como los *Fundamentos*, Frege parece defender que la distinción abstracto/concreto debe trazarse en términos de lo que está, o no está, en el espacio y en el tiempo.

serían objetos abstractos. Lo que nos es accesible por medio de los sentidos puede variar en cualquier momento y (si aceptamos el criterio de accesibilidad por medio de los sentidos) con ello lo hará la distinción abstracto/concreto, consecuencia que es inaceptable.

Otra forma de intentar trazar la distinción es hacerlo en términos de lo que es, o no es, causalmente inerte. Así pues, los objetos abstractos se pueden caracterizar por ser causalmente inertes; hasta ahora no sabemos de un conjunto que haya descalabrado a un matemático. Mientras que los objetos concretos sí que se caracterizan por mantener relaciones causales; sabemos de varias piedras que han descalabrado a matemáticos. Aunque esta propuesta, como la anterior, rescata varias intuiciones acerca de cómo debe trazarse la distinción abstracto/concreto, sin padecer los problemas de la propuesta anterior, también tiene sus fallas. Por ejemplo, no es del todo obvio que los objetos abstractos no puedan, bajo ninguna circunstancia, mantener relaciones causales de ningún tipo. Imaginemos un evento en donde una roca es lanzada contra una ventana y ésta se quiebra. En algún sentido claro, la piedra forma parte de una de las causas cuyo efecto es el rompimiento del vidrio. Por ello decimos, de acuerdo con la propuesta ahora considerada, que la piedra es un objeto concreto. De manera similar, cuando reflexionamos en torno al conjunto de los números reales nuestras cadenas de pensamiento toman ciertas direcciones y no otras. Incluso, cuando pensamos en los números reales y alguien nos pregunta si el conjunto es contable, nosotros respondemos: no. En algún sentido, el conjunto de los números reales es parte de las causas que hacen que pensemos y actuemos de cierta manera; si el conjunto fuera diferente, nuestros pensamientos y acciones también los serían.[3] No es claro, cuando menos, que los objetos abstractos sean causalmente inertes.[4]

---

[3] Un ejemplo similar a este se encuentra en Rossen (2001), p.4.
[4] Para más criticas de esta propuesta, ver Hale (1987).

Otra propuesta, un tanto más sólida que las anteriores, es la siguiente. Los objetos abstractos son aquellos que no están ni en el espacio ni en el tiempo. Los objetos concretos son aquellos que están o en el espacio o en el tiempo (la disyunción es aquí, por su puesto, inclusiva). En efecto, es absurdo preguntar si el número 8 está dentro de la covacha, o en cualquier otro lugar, así como también parece absurdo preguntar por el momento exacto en que el número 8 comenzó a ser el sucesor del número 7. Por su parte, los objetos concretos claramente están o bien en el espacio o en el tiempo. Podemos decir con verdad que tal o cual piedra esta en cierto lugar en un momento determinado. También podemos decir que, aunque quizás nuestras ideas no están en un lugar determinado, sí están en el tiempo; a fin de cuentas, llegamos a tener nuestras ideas en cierto momento y no en otro.

Debido a que los objetos abstractos no están ni en el espacio ni en el tiempo, diría el defensor de esta propuesta, no podemos percibirlos. Este resultado es atractivo, ya que rescata las intuiciones de la primera propuesta sin hacer de la distinción abstracto/concreto algo completamente contingente y subjetivo.

Sin embargo, por plausible que parezca, esta propuesta también tiene sus dificultades. Hay objetos que intuitivamente son abstractos y que, sin embargo, en algún sentido están en el tiempo. Pensemos, por ejemplo, en el ajedrez o en los lenguajes. Estos objetos, aunque abstractos, tienen sus historias; fueron inventados en cierto momento y han evolucionado desde entonces.[5] Esto parece ser una señal clara de que estos objetos, a pesar de ser abstractos, están en el tiempo.

[5] Uno podría intentar trazar la distinción en términos de aquello que puede cambiar (objetos concretos) y aquello que no puede cambiar (objetos abstractos). Sin embargo, el que objetos abstractos como el ajedrez y los lenguajes naturales hayan evolucionado habla en contra de esta propuesta. Por supuesto, uno también podría contra argumentar que, en realidad, los lenguajes y el ajedrez no cambian, no evolucionan, lo que cambia es nuestra decisión de qué lenguaje hablar y que juego jugar. Cuando introducimos una nueva regla en el ajedrez no cambiamos con ello el objeto abstracto que es el ajedrez, lo que hacemos es dejar de jugar el juego anterior y comenzamos a jugar uno nuevo. La ilusión de que el ajedrez ha cambiado se genera, simplemente, porque ambos juegos son llamados con el nombre “ajedrez”.

Estas son las propuestas más obvias para trazar la distinción abstracto/concreto.[6] Aunque ninguna de estas propuestas es correcta, la última de ellas será de utilidad para los propósitos de esta tesis. Como vimos, decir que los objetos abstractos no están ni en el espacio ni en el tiempo no es del todo acertado, puesto que hay objetos abstractos que, presumiblemente, están en el tiempo. Sin embargo, lo siguiente es, desde mi punto de vista, correcto: cualquier objeto que no está ni en el espacio ni en el tiempo es abstracto. Puede no ser claro cual deba ser la manera adecuada de trazar la distinción, pero lo que sí es claro es que cualquier manera adecuada de trazar la distinción debe hacer justicia ha este hecho; podemos estar seguros de que todos los objetos que no están ni en el espacio ni en el tiempo serán objetos abstractos. Dado que los objetos abstractos que no están ni en el espacio ni en el tiempo son los únicos que nos interesaran en esta tesis, nada de lo que aquí diremos se verá afectado por cuál resulte ser, en última instancia, la manera adecuada de trazar la distinción. Por ello, podemos darnos el lujo de avanzar en esta tesis sin tener una teoría completamente adecuada y acabada de en qué consiste la distinción abstracto/concreto. De tal manera que, para simplificar la discusión, por objeto abstracto entenderé, de ahora en adelante, sólo aquellos que no están ni en el espacio ni en el tiempo.

1.2 El problema del Realismo

Aunque las ventajas del Realismo sobre otras posturas son bastante obvias, hay al menos un problema que ha perseguido al Realismo desde sus inicios. Desde mi punto de

---

[6] Dummett(1973, cap.14) explora otra propuesta que se basa en la distinción entre lo que puede ser referido por medio de ostensiones y lo que no. Hale (1987, p.61) avanza una propuesta basada en un criterio nada obvio, sumamente complicado y sofisticado. El criterio es el siguiente:

> (A4) F es un sortal (*sortal*) abstracto syss, para cualquier R que sea base de [grounds] F, o bien (i) R no puede sostenerse entre objetos localizados espacialmente o (ii) R puede sostenerse entre cosas que están espacialmente, pero no temporalmente, separadas.

Aunque sería interesante evaluar estas propuestas aquí, hacerlo nos desviaría demasiado de los propósitos de esta tesis.

vista, el problema puede entenderse como la falta de respuesta por parte del Realista a la siguiente pregunta: (a) ¿cómo es posible que criaturas espacio-temporales como nosotros puedan captar objetos abstractos? Hasta que esta pregunta no se responda será dudoso que el Realismo pueda ser ampliamente aceptado como la teoría filosófica correcta.

Para motivar el problema quisiera decir lo siguiente. Para tener cualquier tipo de conocimiento es necesario que seamos capaces de referir a aquellos objetos acerca de los cuales tendremos conocimiento.[7] Pero para lograr referir a un objeto es necesario que podamos captarlo como tal; es decir, para poder referir a un objeto, y posteriormente tener conocimiento acerca de él, es necesario que ese objeto se nos presente como un particular. Si un objeto no nos es dado como un particular no hay forma en que podamos referir a él y, por tanto, no hay forma en que podamos tener conocimiento acerca de él. La captación es, por tanto, fundamental para el conocimiento, de tal manera que si esto no se tiene garantizado, el conocimiento será altamente cuestionable. La dificultad del Realismo (responder a la pregunta (a)) se encuentra precisamente en los fundamentos de su epistemología. Pero, como veremos a continuación, este problema, que comienza en la epistemología del Realista también es capaz de generar dudas acerca de su ontología.

Cuando se trata del conocimiento de objetos concretos—conocimiento empírico—no es del todo complicado ofrecer una explicación, al menos plausible, de cómo logramos captar aquellos objetos; de cómo logramos que nuestros términos singulares refieran a esos objetos. Quizá aun no logremos tener una explicación completa y acabada de cómo es que logramos hacer esto, sin embargo, parece ser claro que conseguimos hacerlo—parece indudable, dejando de lado algunas dudas escépticas, que

[7] Agradezco a Miguel Ángel Fernández por sus comentarios al respecto.

logramos captar objetos concretos (nuestra percepción es un caso paradigmático de cómo lo logramos), referirnos a ellos (con la ayuda de la ostensión), y conocerlos.

Sin embargo, el caso de los objetos abstractos parece ser muy diferente. Claramente, la misma explicación que utilizamos en el caso del los objetos concretos no está a nuestra disposición. Simplemente no tiene sentido decir que captamos a los objetos abstractos mediante nuestra vista y que nos referimos a ellos con la ayuda de las ostensiones; estas explicaciones están vedadas porque los objetos abstractos no están ni en el espacio ni en el tiempo y, por ello, no pueden ser ni vistos ni señalados. Realmente tenemos la sensación de que explicar cómo captamos objetos abstractos, de cómo logramos referirnos a ellos, es algo sumamente problemático. Incluso es común pensar que realmente no tenemos una explicación que si quiera parezca medianamente plausible acerca de cómo logramos captar estos objetos. Todo esto genera serias dudas acerca de si podremos resolver la que quizá es la cuestión más fundamental acerca del conocimiento de los objetos abstracto; la referencia y captación de esos objetos. Esta duda se encuentra tan arraigada en el pensamiento de tantos filósofos que incluso nos ha lanzado a sospechar que la existencia de esos objetos es sumamente incierta, y que la mera suposición de su existencia es, cuando menos, extravagante.

Parece ser que la falta de una explicación medianamente clara, ya no digamos plausible, de cómo logramos captar y referir a objetos abstractos, se ha utilizado para estremecer la ontología del Realista. Si parece difícil rechazar la existencia de los objetos concretos es porque hay mucha evidencia a favor de nuestra captación de y referencia a esos objetos; si efectivamente logramos captar y referir a x ¿cómo podemos dudar de la existencia de x?[8] Pero esto es precisamente lo que falla en el caso del

[8] D.M. Armstrong (1999, p.204)) apoya esta idea: '…es generalmente, si no universalmente, concedido por los filósofos que al lo que se puede referir existe.' [Esta traducción del inglés al español es mía. El resto de las traducciones del inglés la español también lo serán.] Terence Parsons (1999) es un de los pocos filósofos que cuestionan esta idea. Mi sospecha es que incluso los objetos 'no-existentes', que

Realista; lo que hace falta es una explicación de cómo captamos y referimos a objetos abstractos; si tenemos evidencia a favor de cómo captamos y referimos a los objetos abstractos, será difícil dudar de la existencia de esos objetos; si la explicación de esta captación y referencia es completamente oscura, no parece ser claro que realmente captemos y refiramos a objetos abstractos y, por tanto, es *fácil* rechazar la suposición de que existen.

Desde mi punto de vista, la razón principal para cuestionar la existencia de los objetos abstractos y, por tanto, la razón principal para cuestionar el Realismo es la falta de una epistemología plausible para esos objetos. ¿Cómo podemos sostener que esos objetos existen, si no tenemos una idea medianamente clara de cómo podríamos captarlos y referirnos a ellos? Para garantizar la existencia de cierto tipo de objetos, primero debe ser claro que tenemos una ruta de acceso a esos objetos. Si no existe esa ruta, cómo podemos estar seguros de que esos objetos existen. Por esta razón es que pienso que el problema principal del realismo es un problema en los fundamentos de su epistemología y que para superarlo es preciso responder a la pregunta expresada en (a).[9]

1.3 La solución de Frege

según Parsons son los referentes de algunos de nuestros términos singulares, existen en algún sentido. Si podemos decir cosas como 'hay objetos, no-existentes, que son los referentes de algunos términos singulares' es suficiente para concebir a estos objetos como existentes, aunque, quizás, como existiendo de una manera un tanto distinta de cómo, por ejemplo, nosotros existimos.

9 Paul Benacerraf, en su *Mathematical Truth*, exige, como yo lo hago, que el Realismo tenga una epistemología satisfactoria para su ontología. Pero el requerimiento que Benacerraf impone a una epistemología que ha de ser satisfactoria me parece poco razonable: 'una explicación de la conexión entre nuestras capacidades cognoscitivas y el objeto conocido'. Dada la naturaleza de los objetos abstractos parece extremadamente difícil, sino es que imposible, encontrar una explicación de la conexión entre ellos y nuestras capacidades cognoscitivas. Yo pienso que un requerimiento más razonable sólo demanda que haya una explicación de cómo es que logramos captar objetos abstractos; si esta explicación es dada en términos de la conexión entre nuestras capacidades cognoscitivas y los objetos abstractos, qué mejor, pero si otra explicación, que no apele a esta conexión, puede ser dada, entonces podemos sentirnos satisfechos.

Ahora bien, en los *Fundamentos de la Aritmética* (de ahora en adelante sólo *Fundamentos*) §§62-69 es el lugar en la obra de Frege en donde intenta dar respuesta a la pregunta expresada en (a). Frege muestra que esta ha sido su intención en la primera, y muy famosa, oración de §62, que es: '¿Pero cómo puede sernos dado un número, si no podemos tener de él ninguna imagen o intuición?' Lo cual puede ser justamente parafraseado como: ¿Pero cómo podemos captar un número si es un objeto abstracto?[10] La respuesta de Frege a esta pregunta representa el nacimiento de una de las ideas más influyentes en la filosofía del siglo XX, que es, el giro lingüístico.

La respuesta sigue inmediatamente a la pregunta que abre §62, y es: 'Solamente en el contexto de un enunciado se refieren las palabras a algo. De lo que se tratará, pues, es de determinar el sentido de un enunciado en el que entre un numeral.' Para comenzar a entender esta respuesta es crucial notar que en §38 de los *Fundamentos* Frege cree haber demostrado que los números son objetos, en oposición a conceptos, y que, por ello, si una expresión del lenguaje refiere a un número, esa expresión tiene que ser un término singular. Entonces, lo que Frege está pidiendo en §62 es fijar el sentido de una enunciado[11] en donde aparezca un término singular (en este caso un numeral) que *pretende* referir a un número; una vez hecho esto, como veremos en la siguiente sección, habremos garantizado que el numeral refiere.[12] Lo que Frege intenta hacer es, entonces, responder a una pregunta epistemológica, con tintes ontológicos, no en términos de justificación, creencia, percepción, y demás, sino en términos llanamente

[10] Gracias a Axel Barceló por sus comentarios al respecto.
[11] Es importante recordar que los *Fundamentos* es un texto anterior a la distinción sentido/referencia. Por ello no es correcto interpretar aquí 'el sentido de un enunciado' como 'pensamiento'. En esta tesis nos apegaremos a la interpretación más común, de acuerdo con la cual 'el sentido de un enunciado', en los *Fundamentos*, se entiende como 'las condiciones de verdad de un enunciado'. Agradezco a Viorica Ramírez por sus comentarios al respecto.
[12] En la siguiente sección argumentaré que para hacer esta idea plausible hay que introducir algunos matices.

semánticos. Por esta razón es que §62 puede considerarse el nacimiento del giro lingüístico[13].

Sin embargo, la solución que Frege ofrece, inmediatamente da lugar al surgimiento de una pregunta por demás obvia, que es: ¿Cómo es posible dar cuenta de nuestra captación de los números como objetos abstractos al fijar el sentido de una oración en donde aparecen términos numéricos? La respuesta de Frege a esta pregunta descansa fuertemente en su famoso principio contextual. Antes de explorar con todo detalle esta respuesta quiero hacer notar que si, en efecto, al fijar las condiciones de verdad de un enunciado en donde aparece un numeral hemos garantizado que el numeral refiere, entonces hemos garantizado con ello la captación de los números como objetos particulares y, en consecuencia, hemos logrado captar a objetos abstractos como objetos particulares. Esto es así porque, como señalé anteriormente, la captación de un objeto es condición necesaria para la referencia a ese objeto. Así pues, la estrategia general de Frege para responder a la pregunta (a) es indirecta: lo que Frege intentará hacer es garantizar la referencia a los números, como objetos abstractos, para concluir que efectivamente logramos captarlos y que, por tanto, efectivamente tenemos una vía de acceso a estos objetos y que, por ello, su existencia se vuelve sumamente plausible.[14]

1.3.1 El Principio Contextual

Comenzaré esta sección diciendo, de manera muy general, cual es el contenido del principio contextual. Posteriormente rastrearé la aparición y evolución de dicho principio en la obra de Frege. También argumentaré que la interpretación literal del

[13] Una explicación completa del giro lingüístico en relación con §62 puede encontrarse en Dummett(1991) Cap. 10 y una crítica de esta explicación se encuentra en Katz (2004) Cap.3, sec. 3.5.

[14] Por supuesto, esta estrategia no incluye una explicación de cómo nuestro mecanismo psicológico nos permite captar objetos abstractos. Con esta estrategia simplemente intenta concluir que los captamos y esto, pienso, es suficiente para resolver lo que he llamado el problema más grande del Realismo.

principio nos puede llevar a caer en absurdos y que, por ello, es preciso introducir una condición adicional. Para finalizar, mostraré cual es la importancia de dicho principio en la filosofía fregeana.

Dicho de manera muy general, el principio contextual es un principio acerca del significado de las expresiones del lenguaje. Dicho de manera menos general, el principio contextual es un principio que establece las condiciones que deben cumplirse para que las expresiones del lenguaje tengan significado. Para que las expresiones del lenguaje puedan tener significado es necesario, de acuerdo con el principio, que aparezcan en el contexto de un enunciado. En otras palabras, las expresiones del lenguaje no tienen significado de manera aislada, pero sólo en el contexto de los enunciados en que aparecen. Entendido de esta manera, el principio contextual es un principio semántico.

Cabe mencionar que el principio contextual también puede ser entendido, en un sentido derivado, como un principio metodológico. Entendido de esta manera, el principio contextual establece cual es la manera correcta de investigar el significado de una expresión. En particular el principio contextual prohíbe la investigación del significado de una expresión, cuando dicha expresión se considera independientemente de los enunciados en los que aparece. Sólo podemos investigar el significado de una expresión del lenguaje cuando consideramos a dicha expresión en el contexto de los enunciados en los que aparece[15].

El sentido metodológico es sólo derivado en la medida en que depende directamente del sentido semántico del principio contextual; sólo es correcto investigar el significado de una expresión al interior de los enunciado en los que aparece (sentido metodológico), porque las expresiones sólo tienen significado en el contexto de los enunciados en los

[15] En los *Fundamentos* §38 hay un uso claro del principio contextual como un principio metodológico.

que aparecen (sentido semántico). Para los propósitos de nuestra discusión, únicamente será pertinente atender el sentido semántico del principio contextual, que es precisamente lo que haremos a continuación.

La primera aparición del principio contextual puede ser vista, presumiblemente, en §9 de la *Conceptografía*, publicada originalmente en 1879. Discutiendo la noción de función Frege escribió: 'La expresión "todo integral positivo" no genera por sí mismo, como sí lo hace "el número 20", una idea independiente pero adquiere su significado sólo del contexto de la oración.' Lo que Frege sugiere en este párrafo es que el cuantificador universal sólo adquiere su significado cuando forma parte de una oración; por si sólo, es decir, aisladamente de cualquier oración, 'todo integral positivo' carece de significado; de manera aislada, no hay nada referido por expresiones tales como 'todo integral positivo', 'todo hombre' o por cualquier cuantificador sin importar cual sea. En contraste, un término singular como 'el número 20' o 'Julio Cesar' puede ser considerado independientemente de cualquier oración y, no obstante, tener significado; el referente de 'el número 20' es el número 20 y el referente de 'Julio Cesar' es Julio Cesar. Podemos ver, entonces, que en su primera aparición, el principio contextual estaba restringido a un tipo de expresión, a saber, los cuantificadores.

Un año después, en su escrito póstumo de 1880, titulado *Sobre el Concepto de Número*,[16] Frege extendió el alcance del principio contextual para abarcar propiedades y relaciones. Frege escribe:

> Podemos inferir de esto que al menos las propiedades y relaciones que no pueden ser más analizadas deben tener su propia designación simple. Pero no se sigue de aquí que las ideas de estas propiedades y relaciones sean formadas separadamente de los objetos: por el contrario ellas surgen simultáneamente con el primer juicio en el que son adscritas a las cosas. Por tanto, en mi

[16] Para esta tesis he consultado la traducción en inglés *On the Concept of Number*. No existe una traducción al español de este texto.

Conceptografía sus designaciones nunca ocurren por sí mismas, pero siempre en combinaciones que expresan contenidos de juicios posibles'. (p.17)

Sin embargo, el principio contextual tal y como aparece en 1879 y 1880 no es lo suficientemente general como para soportar el peso que Frege intentará poner sobre él.

Cinco años más tarde Frege transformó su postura acerca del principio contextual; vio en él un dispositivo poderoso que podría servir a sus propósitos filosóficos—en particular probó ser de ayuda en su batalla en contra del psicologísmo y empirismo.[17] Este principio llegó a ser de una importancia tal para su filosofía que fue declarado en la introducción de los *Fundamentos* como uno de los tres 'principios fundamentales'.

Tal y como fue presentado en los *Fundamentos,* el principio contextual adquirió una forma completamente general, que es: 'el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas'. La primera diferencia que podemos notar respecto de su aparición en 1879 y 1880 es que esta versión del principio es completamente general; el principio es ahora un principio que gobierna a toda expresión del lenguaje y no solamente a los cuantificadores, predicados y relaciones; el principio contextual, en su versión de 1884, se aplica a todas las palabras—términos singulares incluidos.

Otra aparición del principio contextual puede ser encontrada en los *Fundamentos* §§60. En las palabras del propio Frege, el principio es formulado de la siguiente manera: 'Pero siempre hay que tomar en consideración un enunciado completo. Sólo dentro de él tienen las palabras, en realidad, un significado…Es suficiente que el enunciado como tal tenga un sentido; por él reciben las partes también un contenido'. Lo que esta cara del principio contextual afirma, a primera vista, es

[17] Ver *Fundamentos* §§18-28.

simplemente que si un término singular—o una expresión cualquiera—ocurre en un enunciado que tiene sentido (que tiene condiciones de verdad), entonces ese término debe tener una referencia.

Si este es, efectivamente, el contenido del principio contextual, entonces hay buenas razones para pensar que el principio es falso.[18] Consideremos el siguiente ejemplo. Parece razonable pensar que podemos fijar las condiciones de verdad de enunciados como “Sherlock Holmes es un detective brillante”; conseguimos fijar las condiciones de verdad de ese enunciado de las siguiente manera: “Sherlock Holmes es un detective brillante” es verdad si y sólo si Sherlock Holmes es un detective brillante. ¿Hemos garantizado con ello que “Sherlock Holmes” tiene referente? Si la respuesta fuera afirmativa, parecería que basta con fijar las condiciones de verdad de enunciados para crear cualquier tipo de entidad; sin embargo, uno tiende a pensar que sólo los Dioses tienen ese tipo de habilidades. No es plausible pensar, por razones obvias, que cuando uno fija las condiciones de verdad de un enunciado en donde aparece una expresión como “la montaña de oro” uno ha garantizado con ello la existencia de la montaña de oro. Si interpretamos el principio contextual al pie de la letra, tenemos que aceptar que dicho principio nos hace caer directamente en el absurdo.

Sin embargo, la interpretación más apegada al texto no es en este caso, como en muchos otros, la mejor interpretación. Basta con observar cuidadosamente cómo es que Frege pone en funcionamiento el principio contextual para darnos cuenta de que él exige más que simplemente fijar las condiciones de verdad de enunciados en los que aparecen términos singulares para garantizar que esos términos tienen referente. En efecto, Frege busca fijar las condiciones de verdad de enunciados en los que aparecen términos numéricos, pero también es cierto que lo hace con la mirada puesta en la

[18] Agradezco a Miguel Ángel Fernández por su discusión en torno a este punto.

posibilidad de garantizar que algunos de los enunciados serán verdaderos. Que lo haya hecho así no es fortuito, ya que el principio contextual puede ser un principio sumamente plausible si lo entendemos cómo teniendo, además, la siguiente condición: el enunciado para el cual hemos fijado las condiciones de verdad debe ser verdadero.

Aun cuando ya hemos fijado las condiciones de verdad de enunciados en donde aparecen términos numéricos, y hemos garantizado que algunos de esos enunciados son verdaderos, no resulta obvio que los términos numéricos deban tener referentes. ¿Cómo puede ser posible, entonces, que si una expresión que se comporta como un término singular aparece en una oración cuyas condiciones de verdad han sido satisfechas, entonces la expresión tiene que referir a un objeto? Consideremos el siguiente caso. Si fuéramos capaces de fijar las condiciones de verdad de oraciones tales como '21 es un numero impar', '∃x (x es un número impar)', '21 es el sucesor de 20', entre otras, de tal manera que podamos demostrar su verdad, entonces no puede quedar ninguna pregunta abierta acerca de si '21' tiene un referente; decir que '21' no tiene referente sería negar que el número 20 tiene un sucesor y que hay números impares, cosas que, espero, no estamos dispuestos a negar. Tras haber fijado las condiciones de verdad de oraciones que muestran que el término singular '21' mantiene ciertas relaciones con el cuantificador existencial y otros predicados tales como "ξ es el sucesor de 20', entonces no podemos decir coherentemente que '21' no tiene referente.

Dicho en las palabras del propio Dummett (1981, p.384): 'decir que una expresión se comporta exactamente como un término singular es lo mismo que decir que tiene las conexiones con el uso de predicados, términos generales y cuantificadores que harían de su falta de referencia algo incoherente'. Para decirlo explícitamente, las conexiones entre ciertas expresiones y otras expresiones como cuantificadores y términos singulares, que hacen de las primeras expresiones casos claros de términos singulares son las siguientes: sea *a* una expresión del lenguaje, si *a* puede ser substituida en algunas ocasiones por una variable ligada a un cuantificador existencial[19] y si *a* puede ser concatenada con una letra de predicado *F* de tal manera que el resultado es una oración (*Fa*) bien formada que es verdadera, entonces *a* es un término singular que, además, tiene referente.

Ahora es claro en qué sentido el principio contextual es la piedra de toque de la respuesta de Frege a la pregunta: ¿Cómo puede sernos dado un número si es un objeto abstracto? Hay que tener en mente que Frege no está intentando explicar cómo es que captamos objetos abstractos con una explicación del mecanismo cognoscitivo involucrado en su captación. También hay que notar que Frege no ha postulando la existencia de alguna facultad extraña que nos permita captar objetos abstractos. En cambio, para explicar cómo captamos objetos abstractos él opta por dar una explicación de cómo de hecho logramos referirnos a ellos; es decir, Frege da una respuesta semántica a una pregunta epistemológica. Indudablemente esta es una de las ideas más brillantes de Frege.

Antes de cerrar esta sección quisiera reiterar lo que creo es importante rescatar del principio contextual para los propósitos de nuestra discusión y notar cual es la función e importancia de dicho principio para la filosofía de Frege.

Lo que creo es importante rescatar del principio contextual para los propósitos de nuestra discusión es lo siguiente: si somos capaces de fijar las condiciones de verdad de una oración en donde un término numérico aparece, y la oración es verdadera, entonces hay una garantía—de acuerdo con el principio contextual—de que el término

[19] Hasta donde se, Chales Parsons (1964) fue el primero en notar, en relación con los criterios que debe cumplir un término numérico para ser un término singular que refiere a un número, que: '…es esencial al uso de la *cuantificación* sobre un dominio de discurso que ha de incluir números que 'NxFx' deba ocurrir en lugares en donde pueda ser remplazado por una variable. Y no cuantificar sobre números es seguramente renunciar a la tesis de que los números son objetos'. (p.192) El punto de Parsons es que si Frege ha de fijar las condiciones de verdad de oraciones donde aparece un término singular que pretende referir a un número como objeto, entonces debe estar garantizado que el término singular en cuestión pueda ser reemplazado por una variable sobre la cual es posible cuantificar.

singular tendrá un referente. Por tanto, si fijamos las condiciones de verdad de esa oración *a priori*, entonces no habrá ningún obstáculo para afirmar que ese término singular refiere a un objeto abstracto, simplemente porque habremos mostrado cómo captar un objeto aun cuando no tenemos, de él, ninguna intuición empírica. Sin duda, nosotros no podemos ver objetos abstractos con nuestros propios ojos, pero si el argumento de Frege es correcto, podemos decir, metafóricamente, que podemos "ver" (captar) objetos abstractos a *través del lenguaje*. Así pues, como hemos notado, el puente que conecta a los objetos abstractos con el lenguaje es el principio contextual. Es claro, entonces, que la contribución del principio contextual a la filosofía de Frege es gigantesca; es el principio que permite que el proyecto de Frege pueda, al menos, despegar.

Capitulo 2

El Principio de Hume y el Problema Julio Cesar

Hasta ahora hemos visto que para resolver el problema del Realismo Frege necesita fijar las condiciones de verdad de una oración en donde aparece un término singular que pretende referir a un número y que, además, esa oración ha de ser verdadera. También hemos notado que si una expresión ha de ser un término singular entonces debe tener la clase de relación con cuantificadores y predicados mencionada anteriormente.

Sin embargo, Frege pensó que—además de los requerimientos antes mencionados—hay un requisito más básico para que una expresión "*a*" refiera a un objeto y, por tanto, para que sea un término singular. En *Fundamentos* §62 Frege ofrece lo que llamaré, siguiendo a Dummett, 'el principio del criterio de identidad', el cual dice: 'Si el signo *a* debe designar a un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si *b* es lo mismo que *a*, aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar este criterio'. Manifiestamente, si una expresión "*a*" satisface este criterio no hay duda acerca de si "*a*" es una expresión que refiere a un objeto; satisfacer esta condición, es importante observar, asegurará que las condiciones antes mencionadas[1] serán también satisfechas. En última instancia, lo que requerimos de los términos singulares es que capturen a un objeto y sólo a uno, y esto es lo que 'el principio del criterio de identidad' exige; esta es la característica más general e indispensable de los términos singulares, los otros requerimientos pueden ser vistos como derivados.

[1] pp.18/19.

Entonces, lo que se necesita, desde el punto de vista de Frege, es fijar las condiciones de verdad de un enunciado de identidad[2] entre números y otros objetos (quizá también números) de una manera tal que nos permita considerar a un número y reconocerlo como el mismo en cualquier caso; esto, junto con el principio contextual, garantizará que las expresiones en el enunciado de identidad tendrán referencia y que la referencia de algunas de esas expresiones serán los números.

Dicho de manera más explicita, la propuesta de Frege es, precisamente, fijar el sentido de la oración 'el número que corresponde al concepto F es el mismo que el número que corresponde al concepto G' (a partir de ahora expresaremos el mismo enunciado como $\#F = \#G$ siguiendo la notación de Boolos (1999c)).

A continuación veremos con detalle cual es el principio mediante el cual Frege intenta fijar las condiciones de vedad de '$\#F = \#G$' en los *Fundamentos* §63 y por qué dicho principio es sumamente atractivo. Posteriormente, en la sección 2.2, veremos cual es el problema de este principio.

2.1 El Principio de Hume

El principio que Frege elige inicialmente para fijar las condiciones de verdad de '$\#F = \#G$' puede ser encontrado en los *Fundamentos* §63 y es lo que hoy en día se conoce en la literatura con el nombre de 'el Principio de Hume'.

[2] Como Charles Parsons (1964, p.184) hace notar, una de las reglas básicas de Frege, y una regla que hasta donde se nunca explica, es que las oraciones más básicas acerca de cualquier tipo de objeto son precisamente los enunciados de identidad; de tal manera que si "*a*" es un término singular, entonces algunos enunciados de identidad que contienen a "*a*" deben tener sentido. Puesto que la aritmética, desde el punto de vista de Frege (*Fundamentos*, §57), es principalmente acerca de números y sus relaciones, y dado que los números son objetos 'las identidades son, de entre todas las formas proposicionales, las más típicas de la aritmética.' Esta es una de las razones por las cuales Frege eligió los enunciados de identidad numérica para fijarles el sentido. La estrategia de Frege, pues, tiene ahora una forma más definida: fijar el sentido de enunciados de identidad numérica y, al hacerlo, garantizar la referencia de los números.

(PH) $\#F = \#G \equiv F \approx G$

No es difícil entender por qué Frege pensó que (PH) es al menos un *intento* por fijar las condiciones de verdad de '$\#F = \#G$'; lo que (PH) dice es precisamente que '$\#F = \#G$' ha de ser verdad siempre y cuando sea verdadero que hay una correspondencia uno a uno entre *Fs* y *Gs*; es decir, (PH) dice que la condición de verdad de '$\#F = \#G$' es que '$F \approx G$' sea verdad.

Una de las bellezas de (PH) es que lo que está en el lado derecho del símbolo de equivalencia es una abreviación de una fórmula de lógica de segundo orden.[3] Esto se muestra de la siguiente manera:

$$F \approx G \equiv_{\text{def}} (\exists R) \, [\, (x) \, (Fx \rightarrow (\exists! \text{y}) \, (Gy \,\&\, R(x,y)) \,\&\, (x) \, (Gx \rightarrow (\exists! y) \, (Fy \,\&\, R(x,y)))]$$

Y claro $(\exists! y)\, \varphi y$ puede ser definido únicamente en términos de lógica de primer orden con identidad de la siguiente manera:

$$(\exists! y)\, \varphi y \equiv_{\text{def}} (\exists y) \, [\, \varphi y \,\&\, (x) \, (\, \varphi x \rightarrow y = x)]$$

Es al observar estos hechos que podemos decir que en algún sentido (PH) encaja perfectamente con el proyecto logicista de Frege. Esto es así porque lo que introduce el vocabulario matemático en el sistema—es decir, lo que introduce expresiones cómo #F en el sistema—no es más que una fórmula puramente lógica.

Además de esto, también cabe notar que en años recientes ha habido descubrimientos importantes acerca de la lógica de Frege; quizá el más importante es

[3] Esto es argumentado por Frege en *Fundamentos* §§70-72. Actualmente esto es reconocido por todos los especialistas.

que los axiomas de Peano pueden ser demostrados a partir de (PH) y lógica de segundo orden.[4] También, Richard Heck (1993) demostró que el único uso indispensable que Frege hace de su teoría inconsistente de las extensiones al derivar los axiomas de Peano fue al derivar (PH) de su Ley Básica V. Más aún, Boolos y Heck (1999) demostraron que (PH) más lógica de segundo orden es consistente si y sólo si la aritmética de segundo orden los es. Todo esto habla a favor de postular a (PH) como un axioma del sistema Fregeano; (PH) simplemente puede cumplir con varios objetivos que son centrales para el logicismo.

Dicho lo anterior, parece bastante plausible sostener que si (i) (PH) fuera una definición exitosa de $\#F$, y *si* (ii) '$\#F = \#G$' verdaderamente tiene el mismo contenido que $F \approx G$, entonces sería difícil negar que las matemáticas son realmente lógica; si (i) y (ii) fueran satisfechas, entonces sería claro que el vocabulario matemático es en realidad vocabulario lógico y, por tanto, toda verdad matemática podría ser traducida a una verdad lógica (lo cual es una de las ambiciones principales del logicismo). Sin embargo, como veremos más adelante, la condición (i) no es satisfecha por (PH), lo cual indujo a Frege a tomar algunas medidas desastrosas—la introducción de su teoría inconsistente de las extensiones (adelante diré más sobre esta cuestión).

Así pues, si (PH) fuera capaz de fijar las condiciones de verdad de '$\#F = \#G$', de tal manera que '$\#F$' sea un término singular y '$\#F = \#G$' sea un enunciado verdadero, entonces con base en el principio contextual, Frege podría dar respuesta a la pregunta presentada en (a), que es, ¿cómo es posible que criaturas espacio temporales como nosotros podamos captar objetos abstractos? Es decir, Frege habrá mostrado cómo podemos captar números como objetos abstractos mostrando cómo podemos referirnos a los números como objetos abstractos.

[4] El primero en notar esto fue Charles Parsons en su *Frege's Theory of Number*, y algunos años más tarde fue descubierto independientemente por Crispin Wright en su *Frege's Conception of Numbers as Objects*.

Es sorprendente todo lo que (PH) parece prometer. No sólo parece resolver el gran problema que el Realista tiene en los fundamentos de su epistemología (captación y referencia), sino también nos permite obtener, junto con la lógica de segundo orden, el conocimiento acerca de los números[5]—como ya mencioné, con (PH) y lógica de segundo orden se pueden demostrar los Axiomas de Peano.[6]

En efecto, la respuesta de Frege en los *Fundamentos* §§62-64 a las preguntas en (a) es completamente coherente, convincente, plausible, pero en última instancia errónea.

2.2 <u>El Problema Julio Cesar</u>

La razón por la cual la respuesta dada en los *Fundamentos* §§62-64 a la pregunta (a) es errónea es que (PH), por sí mismo, es incapaz de fijar las condiciones de verdad de cada enunciado de la forma '$\#F = \#G$', y por tanto, basado únicamente en (PH), Frege no puede apelar al principio contextual para concluir que $\#F$ refiere a un número. Ahora bien, el argumento que Frege dirige en contra de (PH) como un principio que fija las condiciones de verdad de '$\#F = \#G$' es presentado en §66 de los *Fundamentos*. En la literatura fregeana la objeción es conocida como el Problema Julio Cesar. La objeción es la siguiente:[7]

> En el enunciado
>
> ["el número de Fs es igual al número de Gs"]

[5] Agradezco a Miguel Ángel Fernández por su discusión al respecto.
[6] Por su puesto, el teorema de Godel es un obstáculo para decir que con (PH) y lógica de segundo orden podemos demostrar todas las verdades de la aritmética (a menos que el sistema resulte ser inconsistente, en cuyo caso dejaría de ser interesante).
[7] Seguiré a Richard Heck (1997) al citar la presentación original del problema Julio Cesar substituyendo las alusiones a direcciones de líneas por alusiones a número y las apariciones de "Inglaterra" por "Julio Cesar".

> [el número de Fs] aparece como objeto, y con nuestra definición tenemos un medio de reconocer este objeto, cuando aparezca quizá bajo otro ropaje, pongamos por caso, como [el número de Gs]. Pero este medio no es suficiente para todos los casos. Siguiéndolo, no se puede decir, por ejemplo, si [Julio Cesar] es lo mismo que [el número cero]. ¡Que se nos perdone este ejemplo que parece absurdo! Naturalmente, nadie confundirá a [Julio Cesar] con [el número cero]; pero esto no es un mérito de nuestra definición. Esta no nos dice nada acerca de si el enunciado
>
> ["el número de Fs es idéntico a *q*"]
>
> debe ser afirmado o negado, si *q* mismo no viene dado en la forma ["el número de Gs"]. Nos falta el concepto de [número]; pues, si lo tuviésemos, podríamos establecer: si *q* no es un [número], hay que negar el enunciado anterior; si *q* es un [número], habrá que decidir según la definición de antes.

A primera vista parece ser que la ceja es que (PH) sólo puede ser de ayuda para fijar las condiciones de verdad y decidir el valor de verdad de enunciados de identidad de la forma $\#F = \#G$, pero es incapaz de decir cuales son las condiciones de verdad y, por tanto, de decidir el valor de verdad de enunciados de identidad mixtos como, por ejemplo, '$\#F$ = Julio Cesar'. En efecto, (PH) nos deja en la siguiente situación: $\#F$ = Julio Cesar ≡ ¿?.

En la cita anterior, Frege reconoce, indudablemente de manera correcta, que '…nadie confundirá a [Julio Cesar] con el [número cero]'ni con cualquier otro número, o al menos nadie que valga la pena considerar. Parece entonces que hay hechos acerca de los números que los distinguen de las personas que (PH) no logra capturar. De tal manera que, si (PH) es incapaz de hacer la distinción entre números y personas, entonces hay algo crucial acerca de los números que este principio no dice, y en consecuencia parece extremadamente dudoso que la referencia a los números se base exclusivamente en (PH).

Esto, a primera vista, parece suficiente para concluir que (PH) no es lo que Frege necesita para echar a andar su proyecto epistemológico. Pero aun puede surgir una duda al respecto, que es: resulta claro que (PH) no fija las condiciones de verdad de enunciados de la forma '$\#F = q$', pero la cuestión acerca de si logra fijar las condiciones de verdad de '$\#F = \#G$' permanece abierta. Es importante notar que si (PH) logra fijar las condiciones de verdad de enunciados de la forma '$\#F = \#G$', entonces Frege podría argumentar que si algunos enunciados de esta forma son verdaderos, entonces los términos numéricos que aparecen en ellos referirán a números. De esto se seguiría que (PH) es todo lo que necesitamos para explicar cómo es que captamos números como objetos abstractos. Sin embargo, existen buenas razones, conocidas por Frege, para negar que (PH) por sí sólo es capaz de fijar las condiciones de verdad de enunciados de la forma '$\#F = \#G$'. A continuación exploraremos las razones para sostener esto.

2.2.1 Vaguedad y el Requerimiento de Determinación Completa

Podríamos negar que (PH) es capaz de fijar las condiciones de verdad de enunciados de la forma '$\#F = \#G$' señalando simplemente que (PH) no satisface el 'principio del criterio de identidad'. Sin embargo, hacerlo así, en este momento, no sería explicativo puesto que, hasta donde sé, casi nada ha sido dicho acerca de este principio; si no sabemos por qué debemos aceptar dicho principio, difícilmente entenderemos por qué si algo entra en conflicto con él entonces habrá tales o cuales consecuencias.

Antes de explorar esta vía con la profundidad que es requerida, veamos otras respuestas que pueden arrojar algo de luz sobre la presente discusión. Quisiera comenzar rechazando una interpretación de uno de los estudiosos de Frege más influyente en la última década, Richard Heck. En su artículo titulado *The Julius Caesar Objection* Heck escribe:

> Una postura común acerca de la objeción Cesar es que la demanda de que un sentido sea dado a "Cesar es el número Cero" es una consecuencia del "requerimiento para los conceptos de que para cualquier argumento, deban tener un valor de verdad como su valor…". Pero no hay ninguna indicación de que, al momento de escribir *Die Grundlagen* [*Fundamentos*], Frege subscribió este 'requerimiento de determinación completa'; esta interpretación de la objeción Cesar lee doctrinas posteriores a 1891 en *Die Grundlagen* sin una justificación independiente. (p.5)

Pienso que existen buenas razones para desechar esta interpretación. Desde mi punto de vista hay una justificación para creer que el Frege de los *Fundamentos* sí defendió, efectivamente, el llamado 'requerimiento de determinación completa' y que además este requerimiento jugó un papel crucial en el problema Julio Cesar.

Afortunadamente, para hacer mi caso plausible no tendré que desarrollar una interpretación complicada y dudosa de algo que Frege quizá nunca pensó; podemos en cambio dirigir nuestra atención a un fragmento de evidencia textual será suficiente. En los *Fundamentos* §74, Frege escribió:

> Todo lo que de parte de la lógica y para el rigor de la demostración puede exigirse de un concepto, es una delimitación clara según la cual para cada objeto esté determinado si cae bajo el concepto dado o no.

Lo que este pasaje muestra es que, desde el punto de vista de Frege, si un concepto ha de ser usado legítimamente en la lógica debe ser posible determinar para cualquier objeto si cae bajo el concepto o no.

Ahora bien, Heck está en lo correcto al decir que el Frege de los *Fundamentos* nunca expresó el 'requerimiento de determinación completa' en una forma tan pulida como la presentada en las *Leyes Básicas de la Aritmética*[8] (de ahora en adelante sólo *Leyes Básicas*). Esto es así porque la primera aparición de los valores de verdad como referentes de enunciados fue hasta 1891 y, por tanto, aun no estaba presente en los *Fundamentos*. De tal manera que, hablando estrictamente Frege nunca dijo en los *Fundamentos* algo como 'para cualquier argumento, los conceptos deben tener un valor de verdad como su valor', pero en cambio 'debe estar determinado, con respecto a cualquier objeto si cae bajo el concepto o no', que es, en esencia, la misma cosa.

Lo que el 'requerimiento de determinación completa' realmente dice es, en última instancia, que para cualquier concepto que pueda ser usado al interior de la lógica debe haber una partición del dominio tal que haya una división definitiva entre los objetos que caen y los que no caen bajo el concepto. Dicho de otra manera, lo que el 'requerimiento de determinación completa' demanda es simplemente que ningún concepto vago sea admitido en la lógica.[9]

Más aun, hay un fragmento de evidencia textual que nos permite afirmar que el 'requerimiento de determinación completa' estaba presente en el pensamiento de Frege desde 1879. En la *Conceptografía* el 'requerimiento de determinación completa' aparece en §27 y está justificado en la convicción de que los conceptos vagos ponen en riesgo la validez de las inferencias lógicas. Recordemos el diagnóstico que Frege, en §27, hace de la paradoja Sorites.

[8] El titulo original es Grundgesetze der Arithmetik. Para esta tesis consulté la traducción en ingles *The Basic Laws of Arithmetic*. No hay ninguna traducción en español de este libro.

[9] En esta tesis, el único tipo de vaguedad que consideraremos es la vaguedad semántica. Gracias a Lourdes Valdivia por sus comentarios al respecto.

> …sea F la propiedad de ser un montón de frijoles; sea f el procedimiento de quitar un fríjol de un montón de frijoles, de modo que
>
> $$f(a,b)$$
>
> significa la circunstancia de que b contiene todos los frijoles del montón a, menos uno, y nada más. Por tanto, según nuestra proposición[10], se llegaría al resultado de que un solo o, incluso, ningún fríjol es un montón de frijoles si la propiedad de ser un montón se hereda en la serie f. Sin embargo, en general éste no es el caso, ya que hay un cierto z según el cual $F(z)$ no es judicable en virtud de la indeterminación del concepto "montón".

En efecto, en este pasaje podemos observar que desde el punto de vista de Frege la introducción de predicados vagos en el lenguaje puede hacernos caer el la famosa paradoja Sorites. En este caso la paradoja sería únicamente aparente, o al menos así lo sería para Frege, ya que la aparición de un predicado vago en fórmulas como $Fa\rightarrow(\mathrm{Her}(F)\rightarrow(af^*b\rightarrow Fb))$ tiene como consecuencia que la fórmula no exprese un *juicio* (y por tanto que no tenga condiciones de verdad).[11]

Hay evidencia, en la *Conceptografía*, de que Frege pensó que un contenido que no puede expresar un juicio tampoco puede tener condiciones de verdad. En §2 de ese libro, Frege escribió: 'No todo contenido puede convertirse en un juicio porque $\vdash$ esté antepuesto a su símbolo; no, por ejemplo, la representación "casa". Por tanto, distinguimos entre contenidos judicables y no judicables.' El objetivo de presentar en "casa" como un ejemplo de un contenido que no puede ser judicable es que "casa" es un

---

[10] Que es el teorema 81 (siguiendo la notación de Boolos (1999b): $Fa\rightarrow(\mathrm{Her}(F)\rightarrow(af^*b\rightarrow Fb))$.

[11] Considero que el punto de vista de Frege acerca de la vaguedad, en general, es poco plausible. Si la vaguedad implicara, en todo caso, enunciados sin valor de verdead, entonces nuestra comunicación diaria con nuestro lenguaje natural difícilmente contendría un solo enunciado verdadero, pero este no es el caso. Sin embargo, estoy de acuerdo con la perspectiva de Frege acerca de la vaguedad cuando está restringida al lenguaje de la lógica. Para decirlo con brevedad, dado que la vaguedad semántica entra en conflicto con la ley del tercio excluso, es la vaguedad lo que tiene que ser expulsado del lenguaje de la lógica. Pero dado que en nuestra discusión actual las implicaciones más importantes de la postura de Frege acerca de la vaguedad solo conciernen al lenguaje de la lógica no llevaré este punto más lejos.

Para una defensa de la tesis general de Frege, ver David Braun and Theodore Slider (2006). Otros filósofos, como Timothy Williamson (1994), no aceptan que la vaguedad implica enunciados sin valor de verdad con base en que la vaguedad es un fenómeno epistemológico.

caso claro de una expresión que no puede ser ni verdadera ni falsa y, por tanto, es un caso claro del tipo de expresión que no puede tener condiciones de verdad. Un contenido que no puede ser judicable es, de acuerdo con Frege, un contenido que no puede tener condiciones de verdad.

Más aun, Frege pensó, como puede observarse en *El Cálculo lógico de Boole y la Conceptografía*[12](1880/81), que para poder mantenernos lejos de cometer errores lógicos debemos tener, en nuestra lógica, sólo conceptos perfectos: 'Pero si tenemos conceptos perfectos…podemos fácilmente cuidarnos del error…'. Si la vaguedad pone en riesgo la validez de las inferencias lógicas esto parece razón suficiente para remover de la lógica a cualquier cosa que sea vaga. Desde mi punto de vista, el 'requerimiento de la determinación completa' ya estaba presente en la *Conceptografía* como el requerimiento de excluir de la lógica a toda la vaguedad.

Podemos aun encontrar más evidencia en favor de esta interpretación en el artículo póstumo titulado *El Argumento para mis Cánones estrictos de Definición*.[13] En este escrito, Frege discute precisamente el 'requerimiento de la determinación completa' con el mismo vocabulario que Heck esperaría, pero en el mismo escrito argumenta explícitamente a favor del requerimiento con base en el hecho de que la ley del tercio excluso requiere que todo 'concepto tenga límites precisos' (que es el mismo requerimiento que encontramos en la *Conceptografía* y en los *Fundamentos*). Por tanto, lo que Frege intenta defender en éste artículo es que, si la lógica requiere que los 'conceptos tengan límites precisos', entonces el 'requerimiento de la determinación completa' debe sostenerse. Esto es así porque el 'requerimiento de la determinación

[12] Para esta tesis consulté la traducción en inglés *Boole's logical Calculus and the Concept-script*. No existe una traducción al español de este texto.
[13] Para esta tesis consulte la traducción en ingles *The Argument for my Stricter Canons of Definition*. No existe una traducción en español de este texto.

completa' y el requerimiento de que todo 'concepto tenga límites precisos' son, esencialmente, una y la misma cosa. Consideremos el pasaje:

> También podemos argumentar a favor de este requerimiento [de determinación completa] sobre la base de que la ley del tercio excluso debe sostenerse. Porque esta implica que todo concepto debe tener límites precisos, de tal manera que está determinado para cualquier objeto si cae o no bajo el concepto. Si este no fuera así, habría un tercer caso además de los dos casos '*a* cae bajo el concepto *F*' y '*a* no cae bajo el concepto *F*'—a saber, un caso en que no está decidido. La falacia conocida como 'Sorites' depende de algo (i.e. montón) que sea tratado como un concepto que no puede ser reconocido como tal por la lógica porque no está circunscrito propiamente.

De hecho, la similitud entre este pasaje y el pasaje de la *Conceptografía* recién citado es innegable. En ambos pasajes Frege culpa a la vaguedad del concepto 'montón' por el surgimiento de la paradoja Sorites; en ambos pasajes sostiene que un enunciado con un predicado vago, al interior de la lógica, no tiene condiciones de verdad—el segundo pasaje lo implica puesto que ningún concepto vago puede ser 'reconocido por la lógica'; y también, en ambos pasajes, Frege apela al 'requerimiento de determinación completa'.

Hasta ahora hemos reunido evidencia textual importante que nos ayudará a arrojar luz sobre el problema Julio Cesar. Consideremos, por ejemplo, la siguiente línea de argumentación. Como hemos dicho, desde el punto de vista de Frege, es necesario que los conceptos tengan límites precisos so pena de caer en la paradoja Sorites y de tener enunciados sin condiciones de verdad. Por tanto, si (PH) ha de fijar las condiciones de verdad de '$\#F = \#G$' debe hacerlo de tal manera que $\#F = \xi$ sea un predicado con límites precisos; si $\#F = \xi$ fuera un predicado vago, entonces '$\#F = \#G$' no tendría condiciones de verdad. ¡Pero el problema Julio Cesar muestra precisamente que #F = ξ es un predicado vago![14] Es claro que #*F* = ξ es un predicado vago puesto que #*F* = Julio Caesar no tiene condiciones de verdad; y, crucialmente, simplemente no está determinado, sólo con base en (PH) y, la manera en que el mundo es, si Julio Caesar es un número o no. Esto es precisamente a lo que Frege apunta en su presentación del problema Julio Cesar citada anteriormente. Recordemos el fragmento exacto que muestra esto: 'Nos falta el concepto de [número]; pues, si lo tuviésemos, podríamos establecer: si *q* no es un [número], hay que negar el enunciado anterior; si *q* es un [número], habrá que decidir según la definición de antes.' Desde mi punto de vista, Frege está apuntando hacia lo siguiente: con base en (PH) el predicado de número (#*F* = ξ)[15] es vago y, por tanto, únicamente sobre la base de (PH) no podemos tener un concepto de número que pueda ser 'reconocido por la lógica.' Claramente, la consecuencia más desastrosa del problema Julio Cesar es que (PH) no logra fijar las condiciones de verdad de #F = #G, puesto que en virtud de la vaguedad de '#*F* = ξ', '#*F* = #G' *no puede* expresar un juicio. Pero, de nuevo, no fijar las condiciones de verdad de '#F = #G' significa no poder dar contenido a '#Φ' y, en consecuencia, no poder garantizar que '#*F*' tiene referencia, que es la consecuencia más relevante del problema Julio Cesar con relación a la discusión de los *Fundamentos* §§62-65. No hay duda, por tanto, que al momento de escribir los *Fundamentos* Frege defendió el llamado 'requerimiento de determinación completa', y que le problema Julio Cesar es una consecuencia natural de dicho requerimiento.

[14] Crispin Wright (1975) y Delia Graff (2000), entre otros, quizá no acepten que #F = ξ es vago con base en que este predicado no es *tolerante* o que no es susceptible a la paradoja Sorites. Sin embargo, el argumento que aquí presento no depende de si #F = ξ es tolerante o susceptible a la paradoja sorites, pero únicamente sobre la indeterminación de #F = q. Gracias a Silvio Pinto por sus comentarios en torno a este punto.

[15] Claramente esto se puede leer como 'es un número'.

2.2.2 Vaguedad y el Principio del Criterio de Identidad

Aun cuando lo dicho en la sección anterior ya arroja suficiente luz sobre el problema Julio Cesar, aun podemos ir más lejos en nuestra comprensión de él. Como ya hemos mencionado, sería insatisfactorio simplemente decir que '#*F*' no es un término singular porque el problema Julio Cesar muestra que no satisface 'el principio del criterio de identidad'[16], simplemente porque carecemos de una explicación de qué es este principio. Por ello, en lo que sigue exploraré el—no explicado por Frege—'principio del criterio de identidad', y espero que después de esta investigación podamos simplemente decir: como '#*F*' no satisface este principio, no es un término singular.

La pregunta más natural acerca de este principio es: ¿por qué debemos aceptar 'el principio del criterio de identidad'? ¿Por qué es necesario que si una expresión '*a*' ha de ser un término singular debe haber un criterio para decidir para cualquier objeto si es el mismo que él referente de '*a*' o no? A continuación intentaremos responder a estas preguntas y espero que esto nos de un mejor entendimiento del problema Julio Cesar.

En efecto, desde el punto de vista de Frege, la aparición de un predicado vago en un enunciado de la lógica es suficiente para decir que la oración no tiene condiciones de verdad—porque, como ya notamos, un concepto vago no puede ser reconocido por la lógica. La vaguedad de un predicado consiste en la indeterminación de los límites de su aplicación. En consecuencia, dado un predicado vago, no podemos decir si otro predicado es igual a él o no—si *F* es un predicado vago, la siguiente proposición no

[16] Recordemos cual es el criterio. *Fundamentos* §62: 'Si el signo *a* debe denotar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si *b* es lo mismo que *a*, aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar ese criterio.'

tendrá valor de verdad: (x)(*F*x ≡ *G*x).[17] Por tanto, si un predicado es vago, su sentido no dirá algo crucial acerca del concepto que expresa, a saber, cual es su límite. Efectivamente, de acuerdo con Frege, si un predicado es vago, sólo podemos tener una concepción pálida, imprecisa y borrosa del concepto que expresa.

Pero algo similar ocurre en el caso de los términos singulares. Si el 'principio del criterio de identidad' no es satisfecho por la expresión '*a*', entonces no podemos determinar, para toda *b*, si $a = b$. Pero, por analogía con los conceptos, no saber si $a = b$ es simplemente tener una concepción vaga de lo que *a* es; en un sentido crucial, en este caso no sabemos cuales son los límites de *a*; simplemente ignoramos en donde *a* y *b* comienzan y terminan; o dicho de manera más general, ignoramos qué es lo que puede ser predicado de *a* pero no de *b* y viceversa.

Bajo estas consideraciones podríamos decir que ser un término singular es simplemente cuestión de referir a un particular y, por tanto, de determinar cuáles predicados de primer orden son verdaderos de él. Sin embargo, si ha de estar determinado si un término singular '*a*' satisface '$F\xi$', es imprescindible que esté determinado si '*a*' satisface o no un tipo especial de predicado de primer orden, que es, '$\xi = q$'. En otras palabras, si está determinado que '*a*' satisface '$F\xi$', entonces debe haber una garantía de que '*a*' refiere a un objeto particular que es claramente distinto de cualquier otro. Pero esto no puede estar garantizado a menos que '*a*' sea verdadero o falso de '$\xi = q$'; la verdad o falsedad de '$\xi = q$', para cualquier *q*, cuando *a* es el argumento, es lo que garantiza que hay una distinción precisa entre *a* y cualquier otro objeto, de tal manera que logramos tener una concepción clara acerca de lo que puede ser predicado de *a* pero no de otros objetos. Por tanto, no poder determinar si '$\xi = q$',

[17] En *Consideraciones sobre sentido y referencia* Frege sostiene que aun cuando la identidad (=) es una relación que se mantiene sólo entre objetos, hay una relación análoga para conceptos, que es (x)(Φ≡Ψ). Esto, claro está, sólo puede ser una relación de identidad análoga para conceptos bajo un punto de vista puramente extensional.

para cualquier *q*, es verdadero o falso cuando *a* es el argumento, *es simplemente no poder captar un referente* para '*a*', para el cual está determinado bajo qué predicados de primer orden cae.[18]

Ahora estamos en una mejor posición para entender por qué es requerido que: 'Si el signo *a* debe denotar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si *b* es lo mismo que *a*, aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar ese criterio.' Es decir, ¡ahora estamos en mejor posición para entender el 'principio del criterio de identidad'! Violar este principio es, por las razones mencionadas, no referirse a un objeto particular.

A primera vista, la conclusión recién obtenida puede parecer demasiado fuerte. Después de todo, parece poco, o nada, plausible suponer que *solamente con base en el lenguaje natural* el nombre 'Paul McCartney' satisface el 'principio del criterio de identidad', pero también parece altamente implausible concluir que el nombre 'Paul McCartney' no refiere—después de todo, si emitimos el nombre 'Paul McCartney' frente a Paul, el ex Beatle responderá: 'Yes?'. Pero, entonces, qué es lo que marca la diferencia entre 'Paul McCartney' y '#*F*'.

La diferencia es, desde mi punto de vista, que en el caso de '#*F*', el referente *pretendido* es un objeto abstracto y, por tanto, la única información disponible que podemos usar para satisfacer el 'principio del criterio de identidad' es aquella que ya está capturada en el lenguaje. Es por esta razón que si el lenguaje no puede satisfacer este principio cuando se trata de '#*F*', entonces debemos concluir que '#*F*' no refiere en dicho lenguaje. Pero el caso de 'Paul McCartney' es, de alguna manera, diferente; dado que el referente *pretendido* de este nombre es un objeto concreto hay más

[18] A primera vista estos requerimientos pueden parecer demasiado estrictos, tan estrictos que si llegaran a ser razonables sólo lo serían para expresiones de la lógica y no para expresiones del lenguaje ordinario. Sin embargo, más adelante mostraré que estos requerimientos pueden ser introducidos en el lenguaje ordinario y que, de hecho, la mayoría de esas expresiones satisfacen estos requerimientos sin mayor dificultad.

información a nuestra disposición, además de la capturada en el lenguaje, para satisfacer el 'principio del criterio de identidad'. Quizá es cierto que el lenguaje natural, por sí mismo, no es suficiente para satisfacer el principio, pero también es cierto que, cuando se trata de términos singulares que *pretenden* referir a objetos concretos, tenemos a nuestra disposición evidencia perceptual y contextual que en combinación con lo capturado en el lenguaje puede satisfacer el principio. Estas consideraciones hacen que 'el principio del criterio de identidad' no parezca, después de todo, demasiado fuerte.

De acuerdo con lo dicho hasta ahora, podemos afirmar que si el valor de verdad de '#*F* = Julio Cesar' no está determinado, entonces '#*F*' no refiere a un objeto particular y, en consecuencia, no tiene ningún referente. Pero, en el sentido relevante ¡esto es precisamente lo que 'el principio del criterio de identidad' dice! Por tanto, no satisfacer 'el principio del criterio de identidad'—al interior del marco fregeano—es simplemente no capturar un particular para el cual esta determinado bajo que conceptos de primer nivel cae; y, por ello, es que no satisfacer 'el principio del criterio de identidad' implica no haber captado a un objeto particular. Estas son las razones en las que puedo pensar, al interior del marco fregeano, para aceptar 'el principio del criterio de identidad'. También esto puede ser reconocido como una explicación de por qué, en el marco Fregeano, las consecuencias del problema Julio Cesar colisionan con 'el principio del criterio de identidad' de manera tal que el efecto resulta ser fatal para (PH) como explicación de '#*F*' como término singular.

En la sección anterior revisamos las razones técnicas de Frege para expulsar a la vaguedad del lenguaje—al menos del lenguaje de la lógica—; la vaguedad produce enunciados sin condiciones de vedad y nos hace caer en errores lógicos. Sin embargo, basándonos en lo que hasta ahora se ha dicho acerca del 'principio del criterio de identidad' podemos dirigir nuestra atención hacia razones puramente epistemológicas para expulsar a la vaguedad del lenguaje—o al menos de cierta parcela del lenguaje.

Como ya he dicho, una de las propuestas de Frege es que nuestra captación de objetos abstractos puede estar garantizada por medio del lenguaje y sólo del lenguaje; nuestros sentidos no son de ayuda en este caso. Entonces, la propuesta es que toda nuestra concepción acerca de qué son los objetos abstractos está dada por el lenguaje; en algún sentido, el lenguaje es los "ojos" que necesitamos para "ver" a los objetos abstractos. Pero si este lenguaje cuenta con una vaguedad tal que no puede determinarse—con base únicamente en el lenguaje—si '$\#F$ = Julio Cesar', entonces es dudoso que el lenguaje pueda darnos una concepción real de lo que son los números, así como también es dudoso que a través del lenguaje podamos captar números (como objetos abstractos); es dudoso que a través del lenguaje podamos "ver" a esos objetos abstractos, que son los números.

Aprovechemos un poco más la analogía entre ver objetos concretos con nuestros ojos y "ver" objetos abstractos con los "ojos" del lenguaje para esclarecer el problema que ahora nos concierne. Si mis ojos fueran tan disfuncionales que en lugar de distinguir con ellos cada uno de los libros que ahora están en mi librero sólo pudiera ver, en su lugar, una gran mancha gris y borrosa, sería dudoso que únicamente con el uso de mis ojos pudiera captar los libros que están en mi librero. Por analogía, si mi único acceso para poder "ver" objetos abstractos es el lenguaje, y si el lenguaje no me permite distinguir entre los objetos abstractos en cuestión y Julio Cesar (o cualquier otro objeto) entonces es igualmente dudoso que únicamente mediante el lenguaje pueda captar objetos abstractos.

Lo que pienso es que si intentamos tener acceso a objetos abstractos a través del lenguaje, entonces tenemos que estar seguros de que dicho lenguaje esté libre de vaguedad—al menos en sus parcelas relevantes—por las razones recién mencionadas. Pero, ciertamente, si el lenguaje no es empleado para servir a este propósito, entonces *la vaguedad no tiene por que ser necesariamente algo indeseable*.

Hasta ahora he argumentado que la función del problema Julio Cesar en §§62-69 es mostrar que (PH) sólo puede darnos una concepción vaga e imprecisa de lo que podría ser el referente de '#*F*' y de lo que podría ser el concepto de número (#*F* = ξ). Una consecuencia de esto es que (PH) no fija las condiciones de verdad de '#*F*= #*G*' y, por tanto, falla como el instrumento para responder al reto presentado en la sección 1.2 de este trabajo[19]. Incluso podemos ir más lejos y decir que (PH) no nos dice, de ninguna manera, lo que son los números; por todo lo que (PH) dice, los números podrían ser personas, ángeles, polvo de estrellas o cualquier cosa bajo el sol. Este es un problema gigantesco para la filosofía de Frege, puesto que una de las metas principales de su logicismo es mostrar que los números forman parte de la ontología básica de la lógica y que, por tanto, son objetos lógicos y no cualquier tipo de objeto; si la aritmética es realmente lógica y si los números son objetos, entonces su existencia tiene que ser demostrada sólo con base en la lógica y, por tanto, los números tienen que ser objetos *lógicos*; para Frege, así como para cualquier lógico razonable, es inaceptable que la lógica por sí sola pudiera demostrar la existencia de objetos no lógicos[20]—como personas, ángeles, polvo de estrellas, y cualquier cosa bajo el sol. Ahora podemos apreciar con mayor precisión la importancia y alcance del problema Julio Cesar en la filosofía de Frege.

---

[19] El reto es el de contestar a la siguiente pregunta: (a) ¿cómo es posible que criaturas espacio-temporales como nosotros puedan captar objetos abstractos?

[20] Por su puesto, la visión dominante hoy en día es que resulta inaceptable pensar que la lógica tiene los compromisos ontológicos que Frege está dispuesto a admitir. Boolos (1999c) argumenta que puesto que (PH) está comprometido con la existencia de un número infinito de objetos, ese principio no puede ser una verdad lógica. Charles Parsons (1964) esgrime una objeción similar dirigida en contra del logicismo de Frege.

Capitulo 3

La salida de Frege

Los *Fundamentos* §68 es el lugar en donde Frege trata de dar solución tanto a la vaguedad que merodea en (PH) como a la falta de carácter lógico hasta el momento impuesto sobre los números. Su intento de solución es ahora reconocido como el primer paso hacia la ruina de su empresa: la definición explícita de los números en términos de extensiones de conceptos. La introducción de extensiones en el sistema requirió una ley que las gobernara; la alternativa de Frege fue la ahora infame Ley Básica V.

A continuación (en la sección 3.1) exploraré con detalle la llamada definición explicita de los números en términos de extensiones de conceptos (de ahora en adelante sólo 'definición explícita') y diré en qué sentido esta definición puede considerarse como una reacción al problema Julio Cesar. Posteriormente argumentaré que la definición explícita no logra solucionar el problema Julio Cesar. Por último, en la sección 3.2, exploraré lo que hoy en día se considera como la reaparición del problema Julio Cesar en las *Leyes Básicas* (esta sección presupondrá, únicamente para seguir con la discusión, que la definición explícita es, en efecto, la solución al problema Julio Cesar).

3.1 La definición explícita

La definición de número en términos de extensiones es como sigue: 'el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico al concepto *F*"'. En §40 de *Basic Laws*, la definición fue formalizada de la siguiente manera:

$$\#u = \acute{\varepsilon}[\ \exists(R)\ ((\varepsilon\cap(u\cap{\rangle}R))\ \&\ (u\cap(\varepsilon\cap{\rangle}\mathrm{conv}R)))]$$ [41]

Es importante notar que ahora que Frege ha introducido las extensiones, y como las extensiones son objetos, es necesario garantizar que 'el principio del criterio de identidad' sea satisfecho por los términos singulares que *pretenden* referir a extensiones. Para poder lograr esto, Frege necesitó hacer algunas estipulaciones una de las cuales puede ser encontrada en *Leyes Básicas* §3. Esta estipulación semántica es precisamente lo que más adelante Frege llamará la Ley Básica V, que es:

$$\acute{\varepsilon}F(\varepsilon) = \acute{\varepsilon}G(\varepsilon) \equiv (x)(F(x) \equiv G(x))$$

Es importante enfatizar que (PH) puede derivarse de la Ley Básica V, como Frege lo demostró en *Leyes Básicas* §§53-65. Esta parece ser una virtud de la Ley Básica V puesto que (PH), más lógica de segundo orden, es todo lo que se necesita para demostrar los Axiomas de Peano y, por ello, parecería que el proyecto logicista estaba tomando la dirección correcta. Sin embargo, esta es precisamente la ley que permite, en el sistema de Frege, el surgimiento de la paradoja de Russell y, con ella, la ruina del sistema.

Antes de continuar con nuestra discusión será importante revisar algunos aspectos técnicos que nos serán de utilidad en lo que sigue. En *Leyes Básicas* §3 Frege introduce la noción de rango de valores, que es similar a la de extensión del concepto salvo porque es más general; las extensiones son rangos de valores de funciones de un

---

[41] Como en *Leyes Básicas* Frege introdujo las extensiones de conceptos, o dicho de manera más general, valores de rango, fue capaz de simplificar su lenguaje y substituir algunas apariciones de lenguaje de segundo orden por apariciones de lenguaje de primer orden. Así que, en lugar de decir '#F' él puede decir '#*u*' en donde *u* es la extensión de algún concepto F. También hay que notar que $\exists(R)\ ((\Gamma\cap(\Delta\cap{\rangle}R))\ \&\ (\Delta\cap(\Gamma\cap{\rangle}\mathrm{conv}R)))$ es como Frege define equinumerosidad (≈) en *Leyes Básicas* §39.

solo argumento. Ahora bien, las funciones cuyo valor es siempre un valor de verdad son llamadas por Frege 'conceptos'. Entonces, las extensiones son un caso particular de valores de rango, y los conceptos son un caso especial de funciones. Por ello, en lo que sigue, cuando hablemos de manera general acerca de valores de rango también estaremos hablando de extensiones de conceptos, y cuando hablemos de funciones también estaremos hablando de conceptos. De hecho, la Ley Básica V fue concebida por Frege como una ley para gobernar no sólo extensiones de conceptos sino también valores de rango en general. Hasta aquí las consideraciones técnicas.

Dicho lo anterior, ahora intentaremos dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo puede ser que la definición explícita cuente como una reacción al, ya no digamos una solución de, el problema Julio Cesar? Como dije anteriormente, lo que el problema Julio Cesar muestra es que basándonos únicamente en (PH) el predicado 'es un número' ('$\#F = \xi$') es vago, y que tal problema brota debido a que (PH) no nos dice qué son los números. Lo que se necesita es, entonces, especificar lo que los números son; al hacer esto podremos determinar el valor de verdad de los enunciados de identidad mixtos presentados en el Problema Julio Cesar. Sin embargo, esta especificación tiene que ser tal que el carácter lógico de los números se torne incuestionable[42]. ¡Pero esta es precisamente la intención de Frege al introducir la definición explícita de los números en términos de extensiones de conceptos!

Tras haber introducido la definición explícita Frege cree haber establecido de manera definitiva que los números no son personas, ni cuerpos celestes, ni polvo de estrellas, ni nada que esté bajo el sol, sino extensiones de conceptos y, por ende, objetos lógicos. En efecto, no hay duda de que la definición explícita fue, al menos, concebida para solucionar el problema Julio Cesar tal y como fue presentado en los *Fundamentos*.

[42] En una carta a Russell [XV/7] Frege sostiene explícitamente que las extensiones son casos claros de objetos lógicos.

El otro propósito de la definición fue establecer con toda claridad el carácter lógico de los números. Por supuesto estos propósitos están íntimamente relacionados.

¿Pero es la definición explícita, dejando de lado la inconsistencia, exitosa? ¿Es la definición explícita lo que se requiere para fijar las condiciones de verdad de '#*F* = Julio Cesar'? ¿Es la definición explícita capaz de eliminar la vaguedad de '#*F* = ξ'? Pienso que hay buenas razones para sostener que la respuesta a estas preguntas debe ser negativa.[43]

Crispin Wright avanza, en su famoso *Frege's Conception of Numbers as Objects,* una buena razón para dudar que la definición explícita puede ser, efectivamente, lo que Frege necesita para solucionar el problema Julio Cesar. Al respecto, Wright dice:

> Dado que la identificación de los números con extensiones no resolverá el problema Cesar para los números a menos que ya hayamos solucionado el problema Cesar para las extensiones, ¿cómo es que Frege supone que el primer problema ha sido solucionado? Porque en la determinación de las condiciones de verdad de enunciados de identidad mixtos que involucran extensiones el Axioma V [Ley Básica V] no hace un mejor trabajo que N= [(PH)] cuando se trata de contextos de identidad mixtos que involucran términos singulares. Así que la sugerencia de Frege en Gl [*Fundamentos*], sección 68, sólo pospone la dificultad. (p.112)

Si entiendo correctamente, la queja de Wright es que, aun después de la identificación de los números con extensiones de conceptos, '#*F* = Julio Cesar' tendrá condiciones de verdad sólo sí enunciados de identidad mixtos entre extensiones y otros objetos tienen condiciones de verdad, es decir, si enunciados como 'έ*F*(ε)=Julio Cesar' tienen condiciones de verdad. Pero, y esto es lo que resulta importante, la Ley Básica V por sí sola, así como (PH) en el caso de #*F*, nos deja en la siguiente situación: έ*F*(ε)=Julio

[43] Gracias a Axel Barcelo y Agustín Rayo por su discusión y comentarios al respecto.

Cesar ≡ ¿?. Es decir, la Ley Básica V no fija las condiciones de verdad de enunciados de identidad mixtos. Si a partir de esto tenemos que concluir que, con los recursos que Frege nos ha dado hasta ahora, no hay manera en que podamos fijar las condiciones de verdad de esos enunciados, entonces Wright habla con verdad cuando dice que 'identificar a los números con extensiones no resolverá el problema Cesar'. Ciertamente el punto de Wright es apremiante porque, después de todo, ¿qué son las extensiones de conceptos?

En una nota al pie de página de los *Fundamentos* §69, sin considerar los sentimientos de sus lectores, Frege responde a esta pregunta como sigue: 'Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto'. La actitud de Frege puede ser bastante insinuante. Por ejemplo, nos puede hacer pensar, por un instante, que casi nada puede ser dicho acerca de qué son las extensiones, y que, por tanto, casi nada puede hacerse para distinguir a las extensiones de otros objetos como, por ejemplo, Julio Cesar.

Aun cuando Frege no puede darnos una definición de extensión, hay mucho que podemos decir acerca de ellas. Por ejemplo, la noción de extensión, pero no la de persona, es, desde el punto de vista de Frege, primitiva para la lógica—es por ello que Frege piensa que una definición de extensión no puede ser dada. Más aun, podemos considerar algo que Frege dice en *Leyes Básicas* §36 acerca de los valores de rango: 'las funciones… son *representadas* por sus [rangos de valores]'. Como es bien sabido, los conceptos son un caso especial de funciones y las extensiones son un caso especial de valores de rango. Por ello, las extensiones, y valores de rango, son los *representantes* de primer orden de las entidades de segundo orden llamadas funciones. Esto ya nos da bastante información acerca de qué son las extensiones, pero aun necesitamos ir más lejos.

La razón por la cual los valores de rango son los *representantes* de funciones es discutida por Frege en *Leyes Básicas* §36 para el caso especial de los rangos de valores dobles. La razón que da es la siguiente: '…en el [rango de valores] doble…*es capturado lo que es peculiar de la función*…, lo que la distingue de otras funciones de primer orden de dos argumentos' [el énfasis es mío]. Esta afirmación puede ser extendida, claramente, a cualquier función y su valor de rango correspondiente. Podemos afirmar, entonces, de manera general que el valor de rango de una función *representa* a la función en la medida en que el rango de valores captura lo que es *peculiar* de la función.

Lo que es *particular* de una función, desde un punto de vista puramente extensional, son los objetos a los que la función se aplica; lo que es *peculiar* de los conceptos son los objetos que caen bajo ellos; lo que es *peculiar* del concepto ξ *es humano* es que bajo el caen todos y solo los humanos; lo que es *peculiar* del concepto ξ *es hermano de* ζ es que bajo él caen todos los pares ordenados <x,y> tales que es vedad que x es hermano de y; lo que es *peculiar* de la función *la madre de* ξ es que bajo ella caen todos los pares ordenados <x,y> tales que y es la madre de x, etcétera. Esta es la razón por la cual en *Consideraciones sobre sentido y referencia* Frege sostiene que la identidad para conceptos es $(x)(Fx \equiv Gx)$. Entonces, $\acute{\varepsilon}F(\varepsilon)$ captura lo que es *peculiar* de F en la medida en que los mismos objetos que son miembros de $\acute{\varepsilon}F(\varepsilon)$ caen bajo el concepto *F*. Esta idea es rescatada, de alguna manera, por el Esquema Ingenuo de Comprensión para Extensiones[44] de Frege: $(F)(\exists y)(x)(x \in y \equiv Fx)$ el cual es verdadero de *F* en el siguiente caso: $(x)(x \in \acute{\varepsilon}F(\varepsilon) \equiv Fx)$. Hay otras características que son atribuidas a las extensiones a lo largo de la obra de Frege[45], pero para nuestros propósitos actuales las características que he mencionado serán suficientes.

---

[44] Este Esquema puede ser fácilmente probado a partir de la Ley Básica V. También juega un papel importante en la derivación de la Paradoja de Russell.

[45] Marco Rufino (2000) y (2003) argumenta extensamente que los valores de rango son, desde el punto de vista de Frege, necesarios para la lógica y, además, casos paradigmáticos de objetos lógicos.

Ahora tomemos toda la información que hemos recabado acerca de las extensiones (y rangos de valores) y veamos si es suficiente para fijar las condiciones de verdad de '#*F* = Julio Cesar'. Uno podría pensar que la información recabada sí es suficiente. De hecho, argumentar de la siguiente manera resulta tentador. '#*F* = Julio Cesar' es un enunciado falso—y, por tanto, tiene condiciones de verdad—puesto que #F es la extensión que *representa* al concepto 'equinumérico con el concepto *F*' y como Julio Cesar no es el tipo de entidad que puede *representar* conceptos, '#*F* = Julio Cesar' tiene que ser falso. Dicho con otras palabras, para que Julio Cesar sea idéntico a #*F* es necesario que Julio Cesar también *represente*—a la manera de los rangos de valores—al concepto 'equinumérico con el concepto *F*', pero, como Julio Cesar no es del tipo de entidad que tiene elementos,[46] Julio Cesar no puede ser el *representante* de ningún concepto y, por ello, '#*F* = Julio Cesar' tiene que ser falso. Hasta aquí parece que todo marcha con suma delicadeza, sin embargo, es necesario hacer algunos comentarios acerca de este argumento.

El argumento anterior procede de la siguiente manera: hace notar que los rangos de valores tienen ciertas propiedades que Julio Cesar no tiene, también hace notar que los números son rangos de valores y concluye que Julio Cesar no es un número. Antes de criticar directamente este argumento quisiera señalar un punto importante. Si este argumento es correcto, entonces no tenemos ninguna razón para pensar que el siguiente argumento no lo es. Los números son el tipo de entidad que nos sirve para contar cosas, también son el tipo de entidad que tiene sucesores, que pueden ser sumados y restados, que son los objetos acerca de los cuales habla la aritmética, etcétera. Julio Cesar, en cambio, carece de todas estas propiedades. Por lo tanto, '#*F* = Julio Cesar' es falso. Este argumento es completamente análogo al presentado en el párrafo anterior, pero

[46] Simplemente no tiene sentido decir algo como lo siguiente: $a \in$ Julio Cesar.

tiene la virtud de no hacer mención alguna acerca de rangos de valores. Mi punto es que si el argumento del párrafo anterior (que necesita de rangos de valores) es correcto, entonces Frege pudo haber utilizado el argumento presentado en este párrafo (que no apela a rangos de valores) para solucionar, en *Fundamentos* §66, el problema Julio Cesar sin tener que apelar a la definición explícita de los números en términos de extensiones. Si esto es correcto, (PH) es todo lo que Frege necesita para su proyecto logicista y para su epistemología realista. Es decir, si esto es correcto, la teoría de los rangos de valores de Frege es completamente prescindible.

Pero ¿son estos argumentos correctos? Mi impresión es que ni siquiera el propio Frege podría aceptarlos. El problema que Frege enfrenta en los *Fundamentos* §66 no es, por supuesto, que nos haga falta información acerca de los números ¡el problema no es que ignoremos que los números nos sirven para contar, que tienen sucesores, que pueden sumarse y restarse, etcétera! El problema es que (PH) no contiene la información suficiente para distinguir a los números de objetos como Julio Cesar. El problema que enfrenta la solución de Frege no es que no tengamos información acerca de qué son los rangos de valores, el problema es que ni la definición explícita ni la Ley Básica V tienen la información suficiente para distinguir a los valores de rangos de otros objetos como Julio Cesar. En efecto, la definición explícita de los números en términos de valores de rango no soluciona el problema Julio Cesar, sólo lo reubica.

Podríamos ir aun más lejos y sostener que los argumentos presentados incurren en una petición de principio. En el segundo argumento, por ejemplo, asumimos que conocemos ciertas propiedades acerca de los rangos de valores y también que sabemos que Julio Cesar no tiene estas propiedades. Para ser más específicos, decimos que los rangos de valores son del tipo de entidades que tienen elementos y después decimos que Julio cesar no es del tipo de entidad que tiene elementos. Pero esto es ya asumir que

Julio Cesar no es un rango de valores. El problema es que supuestamente nos ubicamos en una situación en la que ignoramos si Julio Cesar es un rango de valores y al mismo tiempo afirmamos que no es del tipo de entidad que tiene elementos; si en realidad no sabemos si Julio Cesar es un rango de valores, entonces tampoco sabemos si Julio Cesar es del tipo de entidad que tiene elementos. Si yo no sé si Héctor ha estado alguna vez en Marruecos, no puedo saber que Héctor está ahora en Marruecos; ambos conocimientos son incompatibles. Por ahora no quisiera llevar más lejos esta objeción. Mi propósito es simplemente señalar que la situación del fregeano es más complicada de lo que a primera vista puede parecer.

Hasta donde sé, Frege nunca enfrentó la difícil pregunta de cómo distinguir, en su sistema, a los rangos de valores de otro tipo de objetos, salvo, quizás, en correspondencia con Russell. En correspondencia [XV/6], Russell preguntó a Frege cómo es posible saber que algo es un valor de rango. La respuesta de Frege fue:

> Usted pregunta cómo puede saberse si algo es un rango de valores. Este es, en efecto, un punto difícil. Ahora bien, todos los objetos de la aritmética son introducidos como rangos de valores. Cuando un objeto nuevo por ser considerado no es introducido como un rango de valores, debemos de una vez responder a la pregunta de si es un rango de valores, y la respuesta es probablemente siempre no, puesto que hubiera sido introducido como un rango de valores si fuera uno. (Carta XV/8)

Esta respuesta es, sin duda, insatisfactoria. Parece ser que el criterio para saber si algo es o no un rango de valores es, simplemente, la manera en que el objeto ha sido introducido. Si el objeto ha sido introducido al sistema como un rango de valores, entonces lo más probable es que sea un rango de valores, de lo contrario, lo más probable es que no lo sea. Esta respuesta se aleja tanto de los estándares de rigor a los que Frege nos tiene acostumbrados que la interpretación más plausible en la que puedo pensar es que Frege no estaba intentando responder a una pregunta ontológica acerca de la distinción entre los rangos de valores y otro tipo de objetos de naturaleza distinta. Sin embargo, no es del todo claro cuál pueda ser esa pregunta a la cual intento dar respuesta.

3.2 Una vaguedad persistente

En *Leyes Básicas* §10, Frege argumenta que la Ley Básica V 'de ninguna manera fija completamente la denotación de un nombre como "έΦ(ε)".' En esta sección mostraré que la solución para esta falta de determinación depende fuertemente de la solución dada a lo que parece ser la reaparición del problema Julio Cesar en las *Leyes Básicas* §10. Únicamente para continuar con la discusión supondré que la definición explícita es, de hecho, la solución al problema Julio Cesar tal y como aparece en los *Fundamentos* §66.[47]

En efecto, Frege notó que la Ley Básica V no fija completamente las condiciones de verdad de enunciados de identidad como 'έΦ(ε) = Verdadero', y que el toque de gracia dado al problema presentado en las *Leyes Básicas* §10 es, de acuerdo con Frege, precisamente fijar las condiciones de vedad de tales enunciados. También argumentaré, al final de esta sección, que aunque el problema Julio Cesar como fue presentado en los *Fundamentos* §66 es *similar* al problema presentado en las *Leyes Básicas* §10, hay, sin embargo, una diferencia importante entre ellos: simplemente apuntan a distintos problemas. Esto es, por supuesto, crucial para que Frege pueda defender la idea de que la definición explicita soluciona el problema Julio Cesar presentado en los *Fundamentos* §66, pero no el problema presentado en las *Leyes*

[47] De no suponer esto no tendría sentido hablar de la reaparición del problema Julio Cesar en las *Leyes Básicas*, así como tampoco tendría mucho sentido la interesantísima discusión de Frege en las *Leyes Básicas* §10.

Básicas §10. Aunque, claro, en la sección anterior ya hemos dado buenas razones para dudar que la definición explícita solucione el problema Julio Cesar.

Para mostrar que la Ley Básica V no fija completamente la referencia de nombres para valores de rango, Frege presenta, en las *Leyes Básicas*, el ahora llamado "argumento de permutación". El argumento es el siguiente:

> Si asumimos que
>
> $$X(\xi)$$
>
> es una función que nunca toma el mismo valor para argumentos diferentes, entonces para objetos cuyos nombres son de la forma
>
> $$“X(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))”$$
>
> la misma marca distintiva de reconocimiento se mantiene, como para objetos cuyos signos son de la forma.
>
> $$“X(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = X(\acute{\alpha}\Psi(\alpha))$$
>
> entonces también tiene la misma denotación que ["(x) (Φ(x)=Ψ(x))"]. De esto se sigue que al identificar la denotación de ["έΦ(ε) = άΨ(α)"] con la de ["(x) (Φ(x)=Ψ(x))"], no hemos de ninguna manera determinado completamente la denotación de un nombre como "έΦ(ε)"–al menos si de hecho existe tal función X(ξ) cuyo valor para un [rango de valores]como argumento no es siempre el mismo que el [rango de valores].

Dicho con brevedad, si hay una función uno a uno $X(\xi)$ tal que si $a \neq b$, entonces $X(a) \neq X(b)$, y para al menos una a, $X(a) \neq a$, entonces, dejando de lado la inconsistencia, hay al menos dos diferentes modelos de la Ley Básica V. Lo que este argumento muestra, en términos contemporáneos, es que la Ley Básica V no es capaz de fijar la interpretación pretendida del lenguaje. Esto es así, porque en un modelo un nombre para un valor de rango puede referir a un objeto diferente al referido por el mismo nombre en otro modelo.

Inmediatamente después de haber lanzado este problema, Frege ofrece el remedio.¿Cómo superar esta indeterminación? Al determinarse para cada función cuando es introducida, qué valores toma para [rangos de valores] como argumentos, así como para cualquier otro argumento.’ Como yo lo entiendo, la propuesta de Frege es hacer explicita la interpretación pretendida del lenguaje. Ahora bien, las tres únicas funciones que Frege ha introducido hasta ahora en el lenguaje de las *Leyes Básicas* y, por tanto, las únicas funciones que Frege tiene que considerar son: ‘$\xi=\zeta$’, ‘$—\xi$’, y ‘$\top\xi$’. La primera función es la ‘identidad’, la segunda es la ‘horizontal’ (‘$—\Delta$ es lo verdadero si Δ es lo verdadero; y por el otro lado es lo Falso si Δ no es lo Verdadero.’) y la tercera es la ‘negación’. Puesto que, si el valor de ‘$—\xi$’ está determinado para todo argumento, entonces el valor de ‘$\top\xi$’ también lo estará (porque la ‘negación’ siempre toma el valor opuesto de la ‘horizontal’) no es necesario tratar a ambas la ‘horizontal’ y la ‘negación’ porque tratar a la primera es ya dar el tratamiento para la segunda. Pero, como Frege nota en las *Leyes Básicas* §10 ‘podemos todavía reducir la función $—\xi$ a la función $\xi = \zeta$’, puesto que el valor de $—\xi$ y el valor de $\xi = (\xi = \xi)$ es siempre el mismo para cualquier argumento. Entonces, todo se reduce a determinar el valor de $\xi = \zeta$ para todo argumento. Si lo que ha de tomar el lugar de ξ y ζ es de la forma $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, entonces la Ley Básica V determinará cual es el valor de $\xi = \zeta$ para esos argumentos. Pero qué pasa con los casos en donde uno, o ambos, de los argumentos no es de la forma $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$.

> Dado que hasta ahora solo hemos introducido los valores de verdad y [rangos de valores] como objetos, solo puede ser cuestión de si uno de los valores de verdad puede ser quizás un [rango de valores].[48]

Ciertamente, en las *Leyes Básicas* §2 Frege introdujo, además de valores de rango, dos objetos nuevos: lo Verdadero y lo Falso. Entonces, todo el problema se reduce a determinar el valor de verdad de '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = Verdadero' y '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = Falso'. Pero la Ley Básica V no puede hacer esto; nos encontramos nuevamente en la siguiente situación: '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = Verdadero ≡ ¿?' y '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = Falso ≡ ¿?'. La definición explícita tampoco es de ayuda, puesto que, después de todo, ¿qué son los valores de vedad? Esto, sin duda, parece como la reaparición del problema Julio Cesar; parece que hay una vaguedad persistente merodeando en el sistema de Frege.

Sorpresivamente, para sobreponerse a la dificultad, el primer paso de Frege es probar la existencia de la función $X(\xi)$ (especificada en el argumento de permutación (arriba)) que muestra que la Ley Básica V no puede fijar completamente la referencia de los nombres para valores de rango. La función $X(\xi)$ es:

$X(\acute{\varepsilon}\Lambda(\varepsilon))$ = Verdadero

X(Verdadero)= $\acute{\varepsilon}\Lambda(\varepsilon)$

$X(\acute{\varepsilon}M(\varepsilon))$= Falso

X(Falso) = $\acute{\varepsilon}M(\varepsilon)$

Y para cualquier otro objeto x, $X(x)=x$

En donde $X(\xi)$ es uno a uno, y $\Lambda(\xi)$ $M(\xi)$ son funciones distintas elegidas arbitrariamente. Así que, la función $X(\xi)$ ha sido definida en el modelo *M* (en donde *M*

[48] Esta cita sugiere fuertemente que Frege ha restringido su dominio de cuantificación. Sin embargo en *Leyes Básicas* vol.II §65, Frege lo niega explícitamente.

es un modelo de la Ley Básica V), y la interpretación *I'* en el modelo *M'* asigna a un término singular lo que la interpretación *I* en el modelo *M* asigna a X(ξ) para ese término singular como argumento. Entonces, la interpretación *I* en el modelo *M* asignará έΛ(ε) a 'έΛ(ε)' y en el modelo *M'* la interpretación *I*' asignará a 'έΛ(ε)' la asignación que *I* da a X(έΛ(ε)) en *M*, que es lo Verdadero. Similarmente, la interpretación *I* en el modelo *M* asignará έM(ε) a 'έM(ε)' y la interpretación *I'* en *M'* asignará a 'έM(ε)' lo que la interpretación *I* en *M* asigna a 'X(έM(ε))', que es lo Falso. Puesto que *M* y *M'* son ambos modelos de la Ley Básica V[49], esta ley no fija la referencia de nombres como 'έM(ε)' y 'έΛ(ε)'. Por tanto, la Ley Básica V no puede determinar cual es la interpretación pretendida *I* o *I'*.[50]

Con este argumento Frege muestra que 'sin contradecir [έΦ(ε) = έΨ(ε) ≡ (x)(Φ(x) ≡ Ψ(x))] siempre es posible estipular que un [rango de valores] arbitrario ha de ser lo Verdadero y otro lo Falso.' Si έM(ε) = Falso y έΛ(ε) = Verdadero, entonces las interpretaciones *I* e *I'* serán iguales, y por tanto esta estipulación no puede entrar en contradicción con la Ley Básica V, y entonces Frege puede argumentar que ahora sí tiene su interpretación pretendida. Frege decide identificar a lo Verdadero y a lo Falso con sus clases unitarias respectivas, que son έ(—ε) para lo Verdadero y έ(ε = ¬(x)(x = x)) para lo Falso. La dificultad presentada anteriormente era que con base en la Ley Básica V no podemos determinar el valor de verdad de 'έΦ(ε) = Verdadero' y 'έΦ(ε) =Falso'. Pero ahora sí podemos, porque 'έΦ(ε) = True' es lo mismo que έΦ(ε) = έ(—ε) y 'έΦ(ε) = Falso' es lo mismo que 'έΦ(ε) = έ(ε = ¬(x)(x=x)), y entonces ambos casos pueden ser manejados perfectamente con la Ley Básica V, porque ambos casos son de

[49] *M'* es modelo de la Ley Básica V, porque, como lo muestra el argumento de permutación, X(έΦ(ε))=X(έΨ(ε)) es verdadero o falso cuando έΦ(ε)=έΨ(ε) es verdadero o falso.

[50] Seguí a Richard Heck (1999) al presentar este argumento utilizando vocabulario contemporáneo. Para algunas exposiciones críticas de este argumento y del argumento de permutación, ver también: Moor, A. W., and Rein, A (1986), Schroeder-Heister, P. (1987), y Ruffino (2002)

la forma $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$. Con esto Frege cree 'haber determinado los [rangos de valores] tanto como aquí es posible.'

La similitud entre el problema Julio Cesar, presentado en los *Fundamentos* §66, y el problema presentado en las *Leyes Básicas* §10 es quizá innegable. Con el problema Julio Cesar Frege hace notar que (PH) nos deja, para decirlo brevemente, en la siguiente situación: '$\#F$ = Julio Cesar ≡ ¿?'. Y con el problema presentado en las *Leyes Básicas* §10 Frege hace notar que la Ley Básica V nos deja en la siguiente situación: '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = Verdadero ≡ ¿?'. Como argumenté en la sección 4 de esta tesis, no poder dar condiciones de verdad a un enunciado de identidad legítimo en el sistema de Frege, es equivalente a tener vaguedad en el sistema; por ejemplo, no poder dar condiciones de verdad a '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ = Verdadero' equivale a no saber si lo Verdadero es un rango de valores, pero también es aceptar que '$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \xi$' es vago, dado que no puede se determinado si lo Verdadero cae bajo ese concepto o no. Aun cuando fácilmente podemos aceptar estas similitudes entre ambos problemas, no hay que perder de vista que hay, sin embargo, una diferencia importante entre ellos, que es, que en realidad apuntan a diferentes problemas.

En la sección 4 de esta tesis argumenté que el problema Julio Cesar apunta al hecho de que (PH) por sí mismo no dice lo que los números son; por supuesto, el problema no es que no sepamos qué es Julio Cesar, el problema es que aun cuando sabemos lo que es Julio Cesar no podemos distinguirlo, con base en (PH), de ningún número. Que este es el verdadero problema detrás del problema Julio Cesar puede verse en la reacción que Frege tiene frente a él; después de considerar seriamente el problema la solución de Frege es decir explícitamente lo que son los números: los números son extensiones de conceptos.

Sin embargo, el problema que Frege presenta en las *Leyes Básicas* §10 es de alguna manera diferente. El problema, desde el punto de vista de Frege, no es que no sepamos lo que son los rangos de valores; el problema es que no sabemos lo que son los valores de verdad. En efecto, Frege introduce los valores de verdad en las *Leyes Básicas* §2 como los referentes de los enunciados, pero no especifica lo que son estos dos objetos; bien podrían ser John Lennon y Paul McCartney o la luna y el sol. Que este es el verdadero problema presentado en las *Leyes Básicas* §10 puede observarse, nuevamente, en la reacción que Frege tiene hacia él. Tras considerar seriamente el problema, su reacción fue decir qué son los valores de verdad; los valores de verdad son valores de rango. Por tanto, desde mi punto de vista, la aparición del problema—similar al problema Julio Cesar—en las *Leyes Básicas* §10 está estrechamente conectada con la introducción en el sistema de dos nuevos y objetos que no fueron especificados: lo Verdadero y lo Falso.

Ahora bien, dado que el problema de los *Fundamentos* era que (PH) no podía distinguir a los números de todo lo demás, Frege pensó, quizás erróneamente, que la definición explícita sería la solución. Con todo, dado que el problema de las *Leyes Básicas* era que la naturaleza de los valores de verdad no había sido especificada, la solución a este problema no podía ser la definición explícita, pero sí la estipulación que identifica a los valores de verdad con valores de rango. El problema de las *Leyes Básicas* no pudo presentarse en los *Fundamentos* simplemente porque en ese entonces los valores de verdad no habían sido introducidos en el dominio. A mi parecer, esto es señal de que el problema de los *Fundamentos* y el de las *Leyes Básicas* tienen que ser, en aspectos importantes, diferentes.

Cierre

A manera de conclusión me gustaría decir lo siguiente. Una de las contribuciones más importantes de Frege a la filosofía fue, sin duda, ofrecer una respuesta coherente, plausible, aunque en última instancia errónea a uno de los problemas centrales de la Metafísica, que es, el de responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos captar objetos abstractos? Dado que es poco razonable responder a esta pregunta en términos de cómo podemos captar objetos que no están ni en el espacio ni en el tiempo con nuestros cuerpos espacio-temporales, Frege tuvo que buscar una solución diferente. Frege pensó que, aun cuando no podemos ver a los objetos abstractos con nuestros ojos, en algún sentido sí podemos "verlos" *a través del lenguaje*. Si el lenguaje ha de ser nuestro acceso a los objetos abstractos, entonces el lenguaje que sea usado para este propósito deberá ser perfectamente claro; a través de él deberíamos ser capaces de "ver" las *divisiones ontológicas de la realidad*.

Pero si la vaguedad del lenguaje es tal que a través de él no podemos distinguir entre objetos concretos como Julio Cesar y objetos abstractos como los números, entonces será dudoso en extremo que podamos tener acceso a los objetos abstractos a través de éste lenguaje y sólo a través de él. Intentar captar objetos abstractos a través de un lenguaje vago es cómo si una persona con un daño severo en los ojos quisiera ver las manzanas que ahora están sobre mi mesa a través de unos lentes que le permitirán ver únicamente una masa borrosa y uniforme en lugar de una mesa con manzanas; en este caso no podríamos decir que la persona en cuestión es capaz de ver las manzanas. La vaguedad no es, por su puesto, un problema exclusivo del lenguaje de Frege; la vaguedad es un problema para cualquier lenguaje que haya de servir como nuestro único acceso a los objetos abstractos.

Fue la necesidad de eliminar la vaguedad de su lenguaje lo que orilló a Frege a definir explícitamente a los números en términos de extensiones y, por tanto, a introducir la infame Ley Básica V y con ella la inconsistencia de su sistema. Después del descubrimiento de la paradoja de Russell, Frege pensó, quizá correctamente, que ninguna otra vía quedaba abierta para explicar cómo podemos captar objetos abstractos. En la carta del 28/07/1902 de Frege dirigida a Russell, podemos encontrar un ejemplo de este pesimismo.

> Durante mucho tiempo yo mismo fui reacio a reconocer rangos de valores y por tanto clases; Pero no vi ninguna otra posibilidad de colocar a la aritmética sobre fundamentos lógicos. Pero la pregunta es, ¿cómo aprehendemos objetos lógicos? Y no encuentro otra respuesta que esta, los aprehendemos como extensiones de conceptos, o más generalmente como rangos de valores de funciones. He estado conciente de que hay dificultades conectadas con esto, y tu descubrimiento de la contradicción se ha añadido a ellas; ¿pero qué otro camino hay? [Carta XV/7]

Pienso que sería un error de nuestra parte considerar la herencia metafísica de Frege simplemente como un error maravilloso. La verdadera herencia Metafísica de Frege no es su error particular; es, en cambio, su estrategia general para afrontar uno de los problemas más difíciles de la filosofía. Cómo es que su estrategia pueda ser puesta en el camino correcto, si es que es posible, es, por su puesto, algo que tendré que posponer para futuras investigaciones.

<u>Bibliografía</u>

Armstrong, D.M, (1999) “Universals as Attributes”, en (ed. Jaegwon Kim y Ernest Sosa) *Metaphysics*, Blackwell, UK.

Beaney, M (ed) (1997)*The Frege Reade*, Blackwell, UK.

Benacerraf, P (1998) “Mathematical truth”, en (ed. Benacerraf, P y Putnam,H) *Philosophy of Mathematics,* Cambridge University Press.

Braun, D y Sider, T (2006), “Vague, So Untrue” (próxima aparición?)

Boolos, G (1999a) *Logic, Logic, and Logic,* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

−(1999b)”Reading the Begriffsschrift”, en *Logic, Logic, and Logic*.

−(1999c)”The Standard of Equality of Numbers”, en *Logic, Logic, and Logic*.

Dummett, M (1973) *Frege Philosophy of Language*, Duckworth, Londres.

(1981) *The Interpretation of Frege’s Philosophy*, Duckworth.

−(1991) *Frege: Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press.

Frege, G (1964) *The Basic Laws of Arithmetic*, trad. Mongomery Furth, University of California Press.

−(1972) *Conceptografía*, trad. Hugo Padilla, UNAM, México.

−(1979a)Frege, *Posthumous Writings*, trad. P. Long and R. White with the assistance of R. Hargreaves, Oxford: Blackwell.

−(1979b) “Boole’s logical Calculus and the Concept-script”, en *Posthumous Writings*.

−(1979c) “On the Concept of Number”, en *Posthumous Writings.*

−(1979d) “The Argument for my stricter Canons of Definition”, en *Posthumous Writings.*

−(1979e) “On Concept and Object”, en *Posthumous Writings*.

−(1980) *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Basil Blackwell.

−(1996) “El Pensamiento”, en (comp. Margarita M. Valdés) *Pensamiento y lenguaje*, UNAM.

−(1996) *Los Fundamentos de la Aritmética*, trad. por Ulises Moulines, en (ed. Jesús Mosterin) *Escritos Filosóficos*, Crítica, Barcelona.

−(1997a) “Comments on Sinn and Bedeutung”, en *The Frege Reader*.

−(1997b) *Grundgesetze der Arithmetik, Volume II*, en *The Frege Reader*.

−(1997c) “Function and Concept” en *The Frege Reader*.

Graff, D,(2000) “Shifting Sands: An interest-Relative Theory of Vagueness”, *Philosophical Topics*, 28: 45-81.

Haaparata, L., y Hintikka, J. eds. (1986). *Frege Synthesized*. Dordrecht: Reidel.

Hale, B (1987) *Abstract Objects*, Oxford: Blackwell.

Heck, R, (1993)”The Development of Arithmetic in Frege’s Grundgesetze der Arithmetik”, The Journal of Symbolic Logic, Vol.58, Numero 2, pp.579-6001.

−(1999) “Grundgesetze der Arithmetik I §10”, *Philosophia Mathematica* (3) 7: 258-92.

−(1997) “The Julius Caesar Objection”, en *Language Thought, and Logic: Essays in Honor of Michael Dummett,* Oxford University Press, pp273-308.

Moor, A. W., y Rein, A. (1986). “Grundgesetze, section 10.” En Haaparata y Hintikka, 1986, pp. 375-84.

Parsons, C (1964) “Frege’s Theory of Number”, en Black, M. (ed.) *Philosophy in America*, London: Allen & Unwin 1964, pp.180-203.

Parsons, T (1999) “Referring to Nonexistent Objects”, en (ed. Jaegwon Kim y Ernest Sosa) *Metaphysics*, Blackwell, UK.

Rosen, G (2001) *Abstract Objects*, http//plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/

Ruffino, M (2000) “Extensions as Representative Objects in Frege’s Logic”, *Erkenntnis* 52. 239-252.

−(2002) “Logical Objects in Frege’s Grundgesetze, Section 10” en (ed. Erich H. Reck) *From Frege to Wittgenstein*.

−(2002) “Why Frege would not be a neo-Fregean”, Mind, Vol.112.

Schroeder-Heister, P. (1987). “A Model-Theoretic Reconstruction of Frege’s Permutation Argument.” Notre Dame Journal of Formal Logic 28, no, 1:69-79.

Valdivia, L (1984) *Introducción a la Semántica y Ontología de Gottlob Frege*, UNAM, México.

Williamson, T (1994) *Vagueness*, London: Routledge.

Wright, C (1976) “Language-Mastery and the sorites paradox”, en *Truth and Meaning*, ed. G. Evans y J. McDowell (Oxford: Clarendon Press, 1976), pp.223-47.

–(1983) *Frege’s Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press.

–(2002) y Bob Hale, *The Reason’s Proper Study*, Oxford.

−(2002) y Bob Hale, “To Bury Caesar…”, en *The Reason’s Proper Study*, Oxford, pp.335-396.