Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Medidas de Hausdorff y ejemplos.

TESIS

que para obtener el título de:

Actuario

presenta:

Sergio Iván López Ortega.

Directora de tesis: Ana Meda Guardiola.

2007

Í N D I C E   G E N E R A L

Introducción

Las medidas de Hausdorff se originaron en trabajos de Hausdorff y Besicovitch durante la primera mitad del siglo pasado. En 1915 Carathéodory aportó una construcción general de medidas exteriores que incluía a las medidas de dimensión 1 como un caso especial, haciendo notar que los resultados eran generalizables a cualquier dimensión natural n. En 1919 Hausdorff puntualizó que tales medidas podían generalizarse para cualquier dimensión no negativa s, y mostró que el conjunto de Cantor tiene dimensión $log2/log3$. Besicovitch continuó la investigación en medidas de Hausdorff hasta su muerte, en 1970. Durante todo ese periodo, las medidas de Hausdorff permanecieron como conceptos matemáticos sin interés fuera de la disciplina.

A partir del crecimiento explosivo del uso de medidas de Hausdorff para modelar distintos fenómenos de la naturaleza, iniciado por [Ma] en los años setenta, las medidas de Hausdorff tomaron una importancia inusitada. Desde diversas disciplinas de las matemáticas se aceleró el estudio de lo que se ha denominado geometría fractal, y las medidas de Hausdorff se consolidaron como una herramienta matemática importante.

Desde entonces ha habido grandes avances en la geometría fractal y se ha acrecentado su uso en otras ramas de las matemáticas como teoría de números, procesos estocásticos, análisis armónico, ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, entre otras. Pero no sólo eso; un gran número de aplicaciones de las medidas de Hausdorff se han desarrollado en otras disciplinas: en astronomía, en fluidos, en termodinámica, en ingeniería, en telecomunicaciones, en informática, en finanzas, en agronomía, en geografía, y en la industria petrolera. Para las referencias históricas se puede consultar [Fa],[Ro],[Ma], por ejemplo.

Introducción

Esta tesis tiene como propósito responder a la pregunta de qué son las Medidas de Hausdorff de una manera no superficial. La gran cantidad de estudios realizados respecto a las llamadas *medidas fractales* a veces entorpecen, más que favorecen, el conocimiento de ellas; hay una gran cantidad de objetos matemáticos agrupados bajo el mismo nombre: medidas de conteo de caja, medidas de empacamiento, medidas esféricas, medidas s-dimensionales, medidas de red, etc. Sin embargo, el marco general que delimita a las medidas de Hausdorff fue desarrollado de manera satisfactoria por [Ro] durante los años setenta. En esta tesis se presentarán los preliminares al estudio de las Medidas de Hausdorff en el contexto general, y se mostrarán propiedades esenciales de algunas medidas de Hausdorff particulares.

El Capítulo 1 está conformado por una introducción a la teoría de la medida y el marco teórico general de las Medidas de Hausdorff. El Capítulo 2 constituye el material usualmente presentado como Medidas de Hausdorff -denotadas en esta tesis por medidas s-dimensionales de Hausdorff-, sus propiedades fundamentales, su relación con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y la definición de dimensión de un conjunto. Este capítulo sigue principalmente la exposición de [Fa]. Los desarrollos efectuados en el Capítulo 3 tienen un doble propósito: presentar a las medidas de red como otro tipo de medidas de Hausdorff, con propiedades adicionales a las medidas s-dimensionales, y encontrar una relación entre la dimensión de dos conjuntos y la dimensión de su producto cartesiano. Este capítulo también está basado en el capítulo 1 de [Fa]. Gracias a los desarrollos de los capítulos previos, en el Capítulo 4 se construyen conjuntos que permiten entender el alcance y las limitaciones de las medidas de Hausdorff. El contenido del quinto y último capítulo es un ejemplo en probabilidad; prueba que las trayectorias del Movimiento Browniano plano tienen dimensión 2 y medida 2-dimensional igual a 0 (casi seguramente). Para ello, se presentan el Movimiento Browniano y la Teoría del Potencial con algunos resultados sin justificación formal. Su inclusión se debe a que muestra una aplicación a otra rama de las matemáticas y a que reafirma la limitación de las medidas s-dimensionales comentadas en el Capítulo 4; es decir que existen conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con dimensión d pero medida d-dimensional igual a 0 o igual a infinito, para cualquier $d \in [0, n]$.

Medidas exteriores de Hausdorff.

En este capítulo se presentan dos tipos de medidas. El primer tipo de medidas son las construidas por el método al que llamaremos *Método Clásico*, que consiste en definir una medida exterior a partir de una medida primitiva en una clase de subconjuntos del espacio (una función de conjuntos positiva y que mapea el conjunto vacío al cero) y después utilizar el Teorema de Carathéodory para construir una medida a partir de la medida exterior. El segundo tipo de medidas son las construidas por un caso particular del Método Clásico, al que llamaremos *Método Diametral*, que consiste en definir una medida exterior a partir de una medida primitiva en particular: una función del diámetro, y después utilizar también el Teorema de Carathéodory para construir una medida a partir de la medida exterior construida.

El Método Diametral es válido exclusivamente para espacios métricos (la definición de diámetro de un conjunto hace referencia a la métrica del espacio). La restricción al Método Diametral se justifica en la riqueza de la medida primitiva particular; al ser una función del diámetro, esta medida primitiva puede definirse sobre todos los subconjuntos del espacio métrico.

Se examinarán algunas propiedades del Método Diametral (que no se cumplen forzosamente para el Método Clásico) y finalmente se definirán las medidas de Hausdorff como un tipo especial de medidas generadas por el Método Diametral. La exposición de este capítulo sigue principalmente a [Ro]. Para mayor profundidad en el Método Clásico se puede consultar [Fo].

Las siguientes son las definiciones usuales de teoría de la medida. Son necesarias para mostrar los dos métodos de construcción de medidas exteriores.

Definición 1 *Sea X un conjunto. Decimos que τ es una medida primitiva* *definida en una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$, si:*

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$,
2. $X \in \mathcal{C}$,
3. $\tau(\emptyset) = 0$.

Definición 2 *Sea X un conjunto. Denotemos por 2^X a la potencia de X. Decimos que $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ es una medida exterior si cumple:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Si $E_1 \subseteq E_2$ entonces $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ (Monotonía).*
3. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $E_i \subseteq X$. Entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ (Sub-sigma-aditividad).*

Definición 3 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{C}$ es una sigma álgebra (σ-álgebra) si:*

1. $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
2. *Si $E \in \mathcal{C}$ entonces $E^c \in \mathcal{C}$.*
3. *Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{C}$.*

Definición 4 *Sea $\mathcal{C}$ una σ-álgebra. Sea μ una función real extendida definida sobre $\mathcal{C}$. Decimos que μ es una medida si cumple:*

1. $0 \leq \mu(E) \leq \infty$ *para todo* $E \subseteq X$.
2. $\mu(\emptyset) = 0$.
3. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$, y $E_i \in \mathcal{C}$. Entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_1^{\infty} \mu(E_i)$.*

El siguiente teorema muestra la forma usual de construir una medida exterior μ a partir de una premedida τ en un conjunto X.

Teorema 1 *Sean X un conjunto y τ una medida primitiva definida en una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X. Entonces la función:*

$$\mu(E) = \acute{\imath}nf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \Big\}$$

es una medida exterior en X.

Demostración:

Verifiquemos que μ cumple las propiedades que definen a una medida exterior.

1) Sea $E \subseteq X$. Como $0 \leq \tau(C_i) \leq \infty$ para todo C_i en $\mathcal{C}$, se sigue que $0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) \leq \infty$ para cualquier colección $\{C_i\}_{\in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ y por lo tanto $0 \leq \mu(E) \leq \infty$.

2) El conjunto vacío se cubre trivialmente por la cubierta $C_i \equiv \emptyset$. Así $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = 0$. Por lo tanto $\mu(\emptyset) = 0$.

3) Sean $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$. Entonces cualquier cubierta de E_2 también cubre a E_1. Así:

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, E_2 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \Big\} \subseteq \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, E_1 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \Big\},$$

$$\text{entonces } \mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$

4) Sea $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $E_i \subseteq X$. Se puede suponer que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$, pues si la serie diverge la desigualdad es trivial. Entonces $\mu(E_i) < \infty$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sean $\varepsilon > 0, i \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\{C_j^i\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que:

$$E_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^i$$

$$\text{y } \sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j^i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Sea $\{D_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera obtenida al reordenar los C_j^i en una sola sucesión. Entonces

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} D_i\,; \qquad D_i \in \mathcal{C}.$$

Y así:

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(D_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon,$$

$$\text{por lo tanto } \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0, \text{ y}$$

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Por lo tanto μ es una medida exterior en X.

■

Se definen, a continuación, los conjuntos medibles para una medida exterior. Intuitivamente, los conjuntos medibles son aquellos que al ser divididos en dos subconjuntos (sin importar la división elegida) quedan bien divididos, pues la medida exterior actúa como medida sobre las partes.

Definición 5 *Si μ es una medida exterior en X, entonces E es μ-medible si para todo $A \subseteq X$ ocurre:*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

El teorema de Carathéodory establece:

Teorema 2 (Carathéodory) *Sea μ una medida exterior en X. Llamemos $\mathcal{M}$ a la colección de conjuntos μ-medibles. Entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y μ restringida a $\mathcal{M}$ es una medida.*

Demostración:

El conjunto vacío es un conjunto medible pues para todo $A \subseteq X$

$$\begin{aligned} \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \cap \emptyset^c) &= \mu(\emptyset) + \mu(A) \\ &= \mu(A). \end{aligned}$$

Notemos que si A es un conjunto medible, A^c también lo es, debido a la simetría respecto a A y A^c en la definición de conjunto medible.

Sean $A, B \in \mathcal{M}$ y $E \subseteq X$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) \\ &= \mu(E \cap A \cap B) + \mu(E \cap A \cap B^c) + \mu(E \cap A^c \cap B) + \mu(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Pero $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, entonces, por subaditividad:

$$\mu(E \cap A \cap B) + \mu(E \cap A \cap B^c) + \mu(E \cap A^c \cap B) \geq \mu(E \cap (A \cup B)),$$

y así

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap (A \cup B)) + \mu(E \cap (A \cup B)^c).$$

Debido a que μ es medida exterior en X, tenemos la igualdad en la desigualdad anterior, y por lo tanto $(A \cup B) \in \mathcal{M}$. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es un álgebra.

Sean $A, B \in \mathcal{M}$ disjuntos. Entonces:

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu((A \cup B) \cap A) + \mu((A \cup B) \cap A^c) \\ &= \mu(A) + \mu(B), \end{aligned}$$

por lo que μ restringida a $\mathcal{M}$ es finito-aditiva.

Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$. Definamos $B_1 = A_1$ y $B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$ para toda $i \geq 2$. La sucesión $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es disjunta y además $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Por otro lado:

$$B_i = \left[A_i^c \cup \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right]^c \quad \forall i \geq 2,$$

donde A_i y $\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$ pertenecen a $\mathcal{M}$, por lo tanto $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$. Así, podemos suponer que $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta.

Definamos ahora $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Sea $E \subseteq X$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu(E \cap B_n) &= \mu(E \cap B_n \cap A_n) + \mu(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu(E \cap A_n) + \mu(E \cap B_{n-1}). \end{aligned}$$

Entonces, por inducción, resulta que $\mu(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i)$. Se sigue que

$$\mu(E) = \mu(E \cap B_n) + \mu(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap B^c).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap B^c) \\ &\geq \mu\Big(\bigcup_{1}^{\infty}(E \cap A_i)\Big) + \mu(E \cap B^c) \\ &= \mu(E \cap B) + \mu(E \cap B^c) \\ &\geq \mu(E).\end{aligned}$$

Pero entonces todas las desigualdades en el párrafo anterior son igualdades. Así, se concluye que

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \cap B^c)$$

por lo que $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$. Y por otro lado, también se sigue que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap B^c).$$

Si tomamos $E = B$ tenemos que $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, por lo que μ es sigma-aditiva en $\mathcal{M}$.

■

Llamaremos Método Clásico de construcción de medidas a, dada una premedida definida en una clase de subconjuntos de X, definir una medida exterior a través del Teorema 1 y después utilizar el Teorema de Carathéodory para definir una medida. Es importante notar que es un método para espacios con un único requerimiento: la existencia de una premedida definida en una clase de subconjuntos del espacio.

A diferencia del Método Clásico, el método que se presentará a continuación está definido exclusivamente para espacios métricos. Primero damos las definiciones de espacio métrico y de diámetro de un conjunto.

Definición 6 *Sea X un conjunto. Decimos que (X, d) es un espacio métrico, con la métrica d, si existe una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ tal que para todos $x, y, z \in X$ ocurre:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Definición 7 *Sea (X,d) un espacio métrico. Se define el diámetro de un conjunto $A \subseteq X$ como:*

$$diám(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

con la convención de que diám$(\emptyset) = 0$.

Definimos a $B(x,\varepsilon)$, la bola con centro en x y radio $\varepsilon > 0$ como:

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto, si para cualquier punto $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq A$. A la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los abiertos de X, se le conoce como la *σ-álgebra de Borel* de X, y a los elementos de esa colección de conjuntos, como *subconjuntos de Borel* o *borelianos* de X.

El siguiente lema es necesario para el segundo método de construcción de medida.

Lema 1 *Sea I un conjunto de índices. Sea μ_i una medida exterior en X para toda $i \in I$. Entonces $\mu(E) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(E)\}$ es una medida exterior en X.*

Demostración:

Nuevamente, verificaremos que se cumplen las propiedades de medida exterior.

1) Como para toda i, μ_i es medida exterior tenemos que $0 \leq \mu_i(E) \leq \infty$, $\forall\, E \subseteq X\,, \forall\, i \in I$. Entonces $0 \leq \mu(E) \leq \infty$, $E \subseteq X$.

2) $\mu(\emptyset) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(\emptyset)\} = \sup_{i \in I}\{0\} = 0$.

3) Sean $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$. Como μ_i es medida exterior para toda $i \in I$,

$$\begin{array}{rcll} \mu_i(E_1) & \leq & \mu_i(E_2) & \forall i \in I, \\ \text{Entonces } \sup_{i \in I}\{\mu_i(E_1)\} & \leq & \sup_{i \in I}\{\mu_i(E_2)\} & \end{array}$$

y por lo tanto $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

4) Sea $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X. Entonces para cada $i \in I$,

$$\mu_i\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{i\in I}\{\mu_i(E_j)\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

$$\text{Entonces } \sup_{i\in I}\Big\{\mu_i\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)\Big\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

$$\text{y por lo tanto } \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

por lo que μ es una medida exterior.

■

El siguiente teorema permite construir una medida exterior por medio de una medida primitiva en un espacio métrico.

Teorema 3 *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea τ una medida primitiva definida en una clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X. Sea*

$$\mu_\delta(E) = \textit{ínf}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, \textit{diám}(C_i) \leq \delta, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\Big\}.$$

Entonces $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ definida como $\mu(E) = \sup_{\delta>0} \mu_\delta(E)$, es una medida exterior en X. Además:

$$\mu(E) = \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(E).$$

Demostración:

Sea $\mathcal{C}_\delta = \{C \subseteq \mathcal{C} : \textit{diám}(C) \leq \delta\}$. Sea τ_δ la restricción de τ a $\mathcal{C}_\delta$. Entonces τ_δ es una medida primitiva, y μ_δ se puede expresar como

$$\mu_\delta(E) = \text{ínf}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau_\delta(C_i) : C_i \in \mathcal{C}_\delta, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\Big\}.$$

Entonces por el Teorema 1, μ_δ es una medida exterior, y por el Lema 1, μ es una medida exterior, como se quería. Si seleccionamos $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ ocurre que $\mu_{\delta_2}(E) \leq \mu_{\delta_1}(E)$, pues la clase de conjuntos $\mathcal{C}_{\delta_2}$ contiene a la clase $\mathcal{C}_{\delta_1}$.

Con ello se concluye la igualdad en el límite cuando δ tiende a 0, pues el límite y el supremo coinciden. ■

El Método Diametral de construcción de medidas consiste en obtener una medida exterior a partir de una medida primitiva definida en una clase de subconjuntos de X a través del Teorema 2 y después utilizar el Teorema de Carathéodory para restringir la medida exterior a una medida. Si tenemos un conjunto $A \subseteq X$, y una colección $\{U_i\}$ de subconjuntos de X, tal que $A \subseteq \bigcup_i U_i$, $di\acute{a}m(U_i) \leq \delta$ para toda i, diremos que $\{U_i\}$ es una δ-cubierta de A. Para evaluar a las medidas construidas con el Método Diametral podemos restringir el análisis a cubiertas numerables porque, por un lado, queremos calcular el ínfimo, lo que descartaría cubiertas no numerables, y por otro lado si tenemos una cubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^{n}$, podemos definir una cubierta numerable en donde $U_i = \emptyset$ para toda $i \geq n+1$, sin alterar el valor de la suma.

La ventaja crucial del Método Diametral es que el diámetro de un conjunto en un espacio métrico siempre está definido (aunque pueda tomar el valor infinito), por lo que puede utilizarse una medida primitiva sobre todos los subconjuntos del espacio X, como una función del diámetro del conjunto. Esta característica mostrará sus virtudes en el siguiente capítulo. Además, tiene algunas otras ventajas sobre el Método Clásico, pues las medidas exteriores generadas con este método cumplen propiedades adicionales. Lo siguiente muestra algunas de ellas.

Definición 8 *Sea (X,d) un espacio métrico. Se define la distancia entre conjuntos como:*

$$d(A,B) = \acute{\imath}nf_{a\in A, b\in B}\{d(a,b)\} \qquad \forall\, A,B \subseteq X.$$

Si la distancia entre dos conjuntos dados es mayor que cero se dice que están separados positivamente. En el caso en que $A = \{a\}$ escribiremos $d(A,B) = d(\{a\},B) = d(a,B)$.

Definición 9 *Sea μ medida exterior en un espacio métrico (X,d). Decimos que μ es una medida exterior métrica si para todos $A,B \subseteq X$ tales que $d(A,B) > 0$, ocurre que*

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Una medida exterior métrica se comporta en dos conjuntos separados como una medida lo hace para conjuntos ajenos.

Teorema 4 *Sea μ una medida exterior en un espacio métrico (X,d) construida a partir de una medida primitiva por el Método Diametral. Entonces μ es una medida exterior métrica.*

Demostración:

Sean A, B tales que $d(A,B) > 0$. Demostraremos que $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$.

Supongamos $\mu(A \cup B) < \infty$. Escójase $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{d(A,B)}{2}$. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\mu_\delta(A \cup B) = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C},\ 0 < diám(C_i) \leq \delta,\ A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i\}$, existe una sucesión $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos en $\mathcal{C}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) \leq \mu(A \cup B) + \varepsilon \qquad \text{con } 0 < diám(C_i) \leq \delta,\ A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$$

Como $diám(C_i) \leq \delta < \frac{d(A,B)}{2}$, no puede ocurrir simultáneamente que $C_i \cap A \neq \emptyset$ y $C_i \cap B \neq \emptyset$.

Sean $\mathcal{A} = \{C_i : C_i \cap A \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{B} = \{C_i : C_i \cap B \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subcolecciones de la sucesión $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, son numerables, por lo anterior son disjuntas, y por la definición de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, ocurre que

$$A \subseteq \bigcup_{C_i \in \mathcal{A}} C_i, \quad B \subseteq \bigcup_{C_i \in \mathcal{B}} C_i \quad \text{con } diám(C_i) \leq \delta$$

Entonces

$$\mu_\delta(A) \leq \sum_{C_i \in \mathcal{A}} \tau(C_i) \quad \text{y} \quad \mu_\delta(B) \leq \sum_{C_i \in \mathcal{B}} \tau(C_i)$$

$$\begin{aligned} \text{por lo que } \mu_\delta(A) + \mu_\delta(B) &\leq \sum_{C_i \in \mathcal{A}} \tau(C_i) + \sum_{C_i \in \mathcal{B}} \tau(C_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) \\ &\leq \mu(A \cup B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_\delta(A) + \mu_\delta(B) \leq \mu(A \cup B) + \varepsilon$. Como funciona para toda $\delta < \frac{d(A,B)}{2}$, tenemos la igualdad en el límite cuando δ tiende a 0:

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B) + \varepsilon.$$

Como es verdadero para toda $\varepsilon > 0$, se tiene lo que se quería demostrar.

■

El siguiente teorema es un análogo al teorema de continuidad de la medida. Este teorema funciona para medidas exteriores métricas (a diferencia del teorema de la continuidad de la medida, que funciona para medidas). Un requerimiento adicional, necesario en nuestro caso, es que los conjuntos anidados tengan aumentos en métrica.

Teorema 5 *Sea ν una medida exterior métrica en (X, d). Sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos, sea $A = \lim_{j\to\infty} A_j$, y supóngase que $d(A_j\,,\, A \setminus A_{j+1}) > 0$, para toda $j \in \mathbb{N}$. Entonces $\nu(A) = \lim_{j\to\infty} \nu(A_j)$.*

Demostración:

Como $\nu(A_j) \leq \nu(A)$ para toda $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \leq \nu(A)$.

Queda por demostrar la desigualdad $\nu(A) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j)$.

Definamos una sucesión de conjuntos $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $B_1 = A_1$, $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$, $\forall j \geq 2$. Sean $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $k + 2 \leq m$. Como $A_{k+1} \subseteq A_{m-1}$,

$$A \setminus A_{m-1} \subseteq A \setminus A_{k+1};$$

y como $B_m = A_m \setminus A_{m-1}$ se sigue que

$$B_m \subseteq A \setminus A_{k+1}. \tag{1}$$

Recordemos que $B_k \subseteq A_k$, entonces, debido a (1) y a que A_k y $A \setminus A_{k+1}$ están separados positivamente (por hipótesis), se concluye que B_m y B_k están separados positivamente, cuando $k + 2 \leq m$. Entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_{2i} \text{ y } B_{2n+2} \quad \text{están separados positivamente para toda } n \in \mathbb{N}, \text{ y}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_{2i-1} \text{ y } B_{2n+1} \quad \text{están separados positivamente para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Como ν es una medida exterior métrica,

$$\nu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_{2i}\Big) = \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_{2i}\Big) + \nu(B_{2n})$$

$$= \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{n-2} B_{2i}\Big) + \nu(B_{2n-2}) + \nu(B_{2n}) = ... = \sum_{i=1}^{n} \nu(B_{2i})$$

$$\text{y, análogamente, } \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_{2i-1}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \nu(B_{2i-1}).$$

Como $A_{2n} = (\bigcup_{i=1}^{n} B_{2i}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} B_{2i-1})$, si alguna de las series $\sum_{i=1}^{n} \nu(B_{2i})$ o $\sum_{i=1}^{n} \nu(B_{2i-1})$ fuese divergente, $\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) = \infty$, y tendríamos la desigualdad trivialmente. Entonces podemos suponer que la serie $\sum_{i=1}^{n} \nu(B_i)$ converge.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j\Big) = \nu\Big(A_j \cup \bigcup_{i=j+1}^{\infty} B_i\Big) \\ &\leq \nu(A_j) + \nu\Big(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} B_i\Big) \\ &\leq \nu(A_j) + \sum_{i=j+1}^{\infty} \nu(B_i). \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } \nu(A) \leq \nu(A_j) + \sum_{i=j+1}^{\infty} \nu(B_i) \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como esto es válido para toda $j \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\nu(A) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j),$$

pues la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)$ converge.

■

Otra virtud del Método Diametral es que este genera una medida exterior ν donde todos los subconjuntos de Borel de X son ν-medibles. La razón es que los borelianos son medibles para cualquier medida exterior métrica, como se muestra a continuación.

Teorema 6 *Si ν es una medida exterior métrica en (X, d) entonces todos los subconjuntos de Borel de X son ν-medibles.*

Demostración:

Sabemos que los conjuntos ν-medibles son una σ-álgebra (Teorema 2); así, es suficiente probar que todo cerrado F en X es ν-medible, para entonces tener que todos los subconjuntos de Borel de X son ν-medibles.

Sea F cerrado en X. Sea $E \subseteq X$ y definamos $B_n = \{x \in E : d(x, F) > \frac{1}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, y $E \cap F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, pues F es cerrado.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Sea $A = E \cap F$ y $B = E \cap F^c$. Sean: $b \in B_n$, $e \in B \setminus B_{n+1}$. Entonces, $d(e, F) \leq \frac{1}{n+1}$, y si $f \in F$, tenemos que

$$d(e, f) \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Si ocurriese que

$$d(b, e) \leq \frac{1}{n(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{n(n+\frac{1}{2})},$$

tendríamos que

$$\begin{aligned} d(b, F) &\leq d(b, f) \leq d(b, e) + d(e, f) \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}}{n(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción; pues $b \in B_n$. Por lo tanto $d(b, e) > \frac{1}{n(2n+1)}$, y entonces B_n y $B \setminus B_{n+1}$ están separados positivamente para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema 5, y entonces:

$$\nu(B) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(B_j).$$

Por otro lado como, para toda $j \in \mathbb{N}$, los conjuntos A y B_j están separados positivamente,

$$\begin{aligned} \nu(A) + \nu(B_j) = \nu(A \cup B_j) &\leq \nu(A \cup B) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ \lim_{j\to\infty} [\nu(A) + \nu(B_j)] &\leq \lim_{j\to\infty} \nu(A \cup B) \\ \nu(A) + \lim_{j\to\infty} \nu(B_j) &\leq \nu(A \cup B). \end{aligned}$$

Entonces, por lo anterior,

$$\nu(A) + \nu(B) \leq \nu(A) + \lim_{j\to\infty} \nu(B_j) \leq \nu(A \cup B).$$

Por lo tanto F es medible.

■

La siguiente observación muestra que el recíproco del teorema anterior también es cierto:

Observación 1 *Si ν es una medida exterior en (X, d) y todos los conjuntos de Borel son medibles, entonces ν es una medida exterior métrica.*

Demostración:

Sean $A, B \subseteq X$ tales que $d(A, B) > 0$. Entonces, como $\bar{A}$ es cerrado y por lo tanto medible:

$$\begin{aligned}
\nu(A \cup B) &= \nu([A \cup B] \cap \bar{A}) + \nu([A \cup B] \cap (\bar{A})^c) \\
&= \nu([A \cap \bar{A}] \cup [B \cap \bar{A}]) + \nu([A \cap (\bar{A})^c] \cup [B \cap (\bar{A})^c]) \\
&= \nu(A \cup \emptyset) + \nu(\emptyset \cup B) \qquad \text{pues } d(A, B) > 0 \\
&= \nu(A) + \nu(B).
\end{aligned}$$

Por lo tanto ν es una medida exterior métrica.

■

Es importante notar que si la medida exterior obtenida por el Método Clásico es boreliana entonces también será métrica.

Finalmente, se pueden definir las medidas exteriores de Hausdorff. Sabemos (por el Método Diametral) que en un espacio métrico (X, d), con una medida primitiva τ definida en una clase $\mathcal{C}$, la función:

$$\mu(E) = \sup_{\delta>0} \mu_\delta(E),$$

$$\text{donde } \mu_\delta(E) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, 0 < diám(C_i) \leq \delta, E \subseteq \bigcup_i C_i\Big\}$$

es una medida exterior en X.

Definamos:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{l} h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid h \text{ es no decreciente, continua por} \\ \text{la derecha, } \text{ y tal que } h(t) > 0 \text{ para } t > 0 \end{array} \right\}.$$

Para $h \in \mathcal{H}$ se define $h(G) = h(di\acute{a}m(G))$, para cualquier conjunto G en $\mathcal{C}$; entonces h es una medida primitiva definida en $\mathcal{C}$. A la medida exterior construida por el Método Diametral a partir de la medida primitiva h se le conoce como la medida exterior de Hausdorff correspondiente a la función h, y se denota como μ^h.

Entre las medidas exteriores de Hausdorff se encuentra una medida exterior muy conocida: si (X, d) es un espacio métrico, $\mathcal{C}$ es 2^X y $h(t) \equiv 1$, la medida exterior de Hausdorff correspondiente a h es la medida del conteo. Denotaremos por $\#A$ a la cardinalidad del conjunto A.

En efecto: como $h \equiv 1$, μ_δ se reduce a

$$\mu_\delta(A) = \text{ínf}\Big\{\#\{U_i\} : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq A,\, di\acute{a}m(U_i) \leq \delta\Big\} \qquad \forall A \in \mathcal{C}$$

CASO (1): Si A es finito.

Sean $A = \{x_1, ..., x_n\}$ y $\delta > 0$. Denotemos por $B(x, \varepsilon)$ a la bola con centro en x y radio ε. Definamos la δ-cubierta $\{U_i\}_{i=1}^n$ como:

$$U_i = B\Big(x_i, \frac{\delta}{2}\Big) \quad \text{con } x_i \in A, \quad i = 1, ..., n\,.$$

Entonces $\mu_\delta(A) \leq \#\{U_i\} = n$ para cualquier $\delta > 0$.

Sea $r = \text{mín}_{i,j \in \{1,...,n\}}\, d(x_i, x_j)$. Escójase $\delta < \frac{r}{2}$. Sea $\{V_i\}$ una cubierta de A tal que $di\acute{a}m(V_i) \leq \delta$. Si suponemos que $\#\{V_i\} < n$, entonces existen $x_i, x_j \in V_{i_0}$ con $i \neq j$, lo cual es una contradicción pues $di\acute{a}m(V_{i_0}) < \frac{r}{2}$. Se concluye que $\#\{V_i\} \geq n$.

Como $\{V_i\}$ era una cubierta arbitraria ocurre que $\mu_\delta(A) \geq n$, para cualquier $\delta < \frac{r}{2}$. Se sigue que $\mu_\delta(A) = n$, $\forall\, \delta < \frac{r}{2}$. Por lo tanto $\mu(A) = n$.

CASO (2): Si A es infinito.

Sean A infinito y $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ una enumeración cualquiera de n puntos distintos en A (existe debido a que A es infinito). Definamos:

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} d(x_i, x_j).$$

Sea $\{U_i\}$ una δ-cubierta de A. Debido a la definición de δ se necesitan n conjuntos de la colección $\{U_i\}$ para cubrir a $\{x_i\}_{i=1}^n$. Entonces:

$$\#\{U_i\} \geq n,$$

y debido a que $\{U_i\}$ era una δ-cubierta arbitraria se concluye que $\mu_\delta(A) \geq n$. Así, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe δ tal que $\mu_\delta(A) \geq n$. Por lo tanto $\mu(A) = \infty$.

■

Por la manera en que definimos las medidas exteriores de Hausdorff, relacionándolas con una función, puede notarse que existe una gran variedad de ellas. No obstante, las más utilizadas son las llamadas medidas exteriores s-dimensionales de Hausdorff. Estas son las medidas de Hausdorff sobre $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, inducidas por las funciones $h(t) = t^s$ (para alguna $0 \leq s < \infty$) . Se les llama dimensionales precisamente porque permiten definir la dimensión de un conjunto, que puede o no coincidir con la dimensión topológica. El siguiente capítulo presenta una introducción al respecto.

A pesar de la dificultad en los cálculos necesarios para los resultados teóricos, el estudio de medidas de Hausdorff en el caso general es extenso. [Ro] realiza un estudio sistemático de ellas y muestra también algunas de sus aplicaciones a otras ramas de las matemáticas.

Medidas s-dimensionales de Hausdorff.

En este capítulo se definen las medidas s-dimensionales de Hausdorff como un caso particular de medidas de Hausdorff. Son el tipo de medidas de Hausdorff más utilizadas porque permiten definir el concepto de dimensión de un conjunto y generalizan en cierto sentido a la medida de Lebesgue.

Se comienza con la definición de las medidas s-dimensionales de Hausdorff y se observan algunas de sus propiedades: invarianza bajo isometrías, relación entre la medida s-dimensional de Hausdorff de un conjunto y la imagen del conjunto bajo una homotecia, y una relación entre todas las medidas s-dimensionales de un conjunto dado, que permite definir el concepto de dimensión de un conjunto. Además, se presenta una propiedad de la dimensión de Hausdorff, la dimensión de una unión contable de conjuntos es el supremo de las dimensiones de los conjuntos. En el siguiente capítulo se presentará otra que relaciona a la dimensión de dos conjuntos y la dimensión de su producto cartesiano. Para finalizar esta parte se prueba el lema de Vitali, necesario en nuestro contexto, para demostrar un importante teorema respecto a las medidas s-dimensionales de Hausdorff. Este teorema afirma que la medida s-dimensional de Hausdorff coincide (salvo por una constante) con la medida de Lebesgue, cuando s es un número natural.

Las medidas exteriores s-dimensionales de Hausdorff son un caso específico de medidas exteriores de Hausdorff. Cuando se toma al espacio métrico $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclideana, a $h(t) = t^s$ (para alguna $0 \leq s < \infty$) y a $\mathcal{C}$ como todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, a la medida exterior de Hausdorff correspondiente a h se le conoce como medida exterior de Hausdorff s-dimensional y se denota como H^s.

Así, la medida exterior s-dimensional de Hausdorff de un conjunto $A \subseteq$

$\mathbb{R}^n$ resulta ser:

$$H^s(A) = \sup_{\delta>0} H^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(A),$$

$$\text{donde } H^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} diám(U_i)^s : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, diám(U_i) \leq \delta\Big\}.$$

La restricción de H^s a los medibles -que incluyen a los borelianos, por ser un caso particular de medida exterior construida por el Método Diametral que discutimos en el Capítulo 1-, se conoce como medida s-dimensional de Hausdorff. Para abreviar se le llamará s-medida de Hausdorff.

Notemos que si en lugar de tomar cualquier clase de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se toman exclusivamente cerrados, abiertos o convexos, el valor de la medida del conjunto se conserva.

Por ejemplo, si se toma a $\mathcal{C}$ como los cerrados, el valor se conserva pues para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ocurre que $diám(A) = diám(\bar{A})$.

Si $\mathcal{C}$ consta de todos los abiertos, para cualquier cubierta $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de un conjunto A se puede encontrar una cubierta abierta $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que

$$|\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(U_i)^s - \sum_{i\in\mathbb{N}} diám(V_i)^s| < \varepsilon,$$

expandiendo ligeramente los diámetros de los conjuntos U_i, al tomar V_i como la unión de las bolas abiertas alrededor de los puntos originales de los conjuntos U_i.

Definimos a la envolvente convexa de un conjunto A, denotada por $\hat{A}$, como

$$\hat{A} = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : x_i \in A, 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Demostraremos que $diám(A) = diám(\hat{A})$, para cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Para demostrar este resultado, definiremos *segmento* en $\mathbb{R}^n$ y utilizaremos la siguiente observación:

Definición 1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Definimos el segmento $\overline{xy}$ como*

$$\overline{xy} = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \alpha \in [0,1]\}.$$

Observación 1 *Sea $\overline{xy}$ un segmento en $\mathbb{R}^n$ y sea p en $\mathbb{R}^n$. Entonces la distancia de p a un punto s que pertenezca a $\overline{xy}$, se maximiza cuando $s = x$ ó $s = y$.*

Demostración:

Sea $\mathcal{L}$ la recta que resulta de prolongar $\overline{xy}$ y sea s un punto en $\overline{xy}$. Supongamos que p se encuentra en $\mathcal{L}$. En este caso la afirmación resulta evidente.

Supongamos ahora que p no pertenece a $\mathcal{L}$. Llamemos p^* a la proyección de p sobre $\mathcal{L}$. Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$d(p,s) = \Big(d(p,p^*)^2 + d(p^*,s)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

y como $d(p^*,s)$ se maximiza cuando $s = x$ ó $s = y$ (debido a que $p^* \in \mathcal{L}$), entonces también $d(p,s)$ se maximiza cuando $s = x$ ó $s = y$.

■

Lema 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces diám$(A) =$ diám$(\hat{A})$.*

Demostración:

Definamos a la sucesión de conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ como

$$A_k = \Big\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : x_i \in A, 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\Big\}.$$

Primero demostraremos que *diám*$(A_{2k}) =$ *diám*(A), para toda $k \in \mathbb{N}$. Se hará la demostración por inducción.

Mostremos para el caso en que $k = 1$. Sean $x, y \in A_2$; mostraremos que existen x^* y y^* en A tales que $d(x,y) \le d(x^*,y^*)$.

Si $x, y \in A$, se cumple la desigualdad trivialmente.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A$ y $y \notin A$. Notemos que por la definición de A_2, $y \in \overline{pq}$, donde $p, q \in A$. Debido a la observación anterior, la distancia de x a un punto r del segmento $\overline{pq}$ se maximiza cuando $r = p$ ó $r = q$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que se maximiza cuando $r = p$. Así, hemos encontrado $x^* = x$ y $y^* = p$ tales que $d(x, y) \leq d(x^*, y^*)$.

Ahora supongamos que $x \notin A$ y $y \notin A$. Como $x \in A_2$, x pertenece a un segmento $\overline{ab}$ con $a, b \in A$. Debido a la observación anterior, la distancia de y a un punto r de $\overline{ab}$ se maximiza cuando $r = a$ ó $r = b$ (supongamos $r = a$). Así, $y \notin A$ y $a \in A$. Debido al caso anterior, existen $x^*, y^* \in A$ tales que

$$d(y, a) \leq d(x^*, y^*),$$

y por lo tanto

$$d(y, x) \leq d(x^*, y^*).$$

Debido a que para cualquier par de puntos $x, y \in A_2$ existen $x^*, y^* \in A$ tales que $d(x, y) \leq d(x^*, y^*)$, tenemos que

$$\sup_{x,y \in A_2} d(x, y) \leq \sup_{x^*, y^* \in A} d(x^*, y^*),$$

es decir $diám(A_2) \leq diám(A)$, lo que queríamos demostrar.

Supongamos ahora que $diám(A_{2m}) = diám(A)$ para toda $m \leq k$. Sea $x \in A_{2(k+1)}$. Entonces x es de la forma:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{2k+2} \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i + \sum_{k+2}^{2k+2} \alpha_i x_i \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i} x_i\Big) + \Big(\sum_{i=k+2}^{2k+2} \alpha_i\Big)\Big(\sum_{i=k+2}^{2k+2} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=k+2}^{2k+2} \alpha_i} x_i\Big). \end{aligned}$$

Así, $x = ay + bz$, donde $a, b \geq 0$, $a + b = 1$ y $y, z \in A_{k+1}$. Notemos que el caso anterior demuestra que $diám(A_{k+1}) = diám(A_{2(k+1)})$ (sustituyendo A por A_{k+1}) y entonces, por la hipótesis de inducción, se sigue que $diám(A_{2(k+1)}) = diám(A)$. Por lo tanto $diám(A_{2k}) = diám(A)$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Sea k un número natural non. Si $k = 1$, $A_1 = A$ y por lo tanto $diám(A_1) = diám(A)$. Si $k \geq 3$, debido a que $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es creciente, ocurre que

$$diám(A_{k-1}) \leq diám(A_k) \leq diám(A_{k+1}),$$

y por lo tanto $diám(A_k) = diám(A)$. Por lo tanto $diám(A_k) = diám(A)$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Debido a la construcción de A_k, $\hat{A} = \lim_{k\to\infty} A_k$. Sean $x, y \in \hat{A}$. Entonces existen $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones, tales que $x_k, y_k \in A_k$, $x_k \to x$ y $y_k \to y$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_N, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(y_N, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x_N,x) + d(x_N,y_N) + d(y_N,y) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + diám(A) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= diám(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Debido a que ocurre para toda $\varepsilon > 0$, tenemos que $d(x,y) \leq diám(A)$ para cualquier par de puntos $x, y \in \hat{A}$. Por lo tanto $diám(\hat{A}) = diám(A)$.

■

Debido al lema anterior, si tomamos exclusivamente a los convexos, el valor de la s-medida se conserva.

El siguiente teorema muestra una relación entre la s-medida de un conjunto y la s-medida de su imagen, para una función Lipschitz continua.

Teorema 1 *Sea $\phi : E \to F$, una función suprayectiva tal que*

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq c\,|x - y| \quad \forall\, x, y \in E, \qquad \textit{para alguna constante } c > 0.$$

Entonces $H^s(F) \leq c^s H^s(E)$.

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de E. Si $y \in F$, existe $x \in E$ tal que $\phi(x) = y$. Como $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta de E, $x \in U_{i_o} \cap E$ para algún $i_0 \in \mathbb{N}$, por lo que ocurre que $y \in \phi(U_{i_0} \cap E)$, lo cual quiere decir que $\{\phi(U_i \cap E)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es cubierta de F.

Para $A \subset \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$diám(\phi(A \cap E)) \leq c\; diám(A \cap E) \leq c\; diam(A).$$

Por lo tanto $diám(\phi(U_i \cap E)) \leq c\ diám(U_i) \leq c\,\delta$, para cualquier i, por lo que $\{\phi(U_i \cap E)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una $c\delta$-cubierta de F.

Como $diám(\phi(U_i \cap E)) \leq c\ diám(U_i)$,

$$\begin{aligned} diám(\phi(U_i \cap E))^s &\leq c^s diám(U_i)^s \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} diam(\phi(U_i \cap E))^s &\leq c^s \sum_{i=1}^{\infty} diam(U_i)^s. \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } H^s_{c\,\delta}(F) \leq c^s H^s_\delta(E) \qquad \forall\,\delta > 0,$$

$$\text{y por lo tanto } H^s(F) \leq c^s H^s(E).$$

■

Corolario 1 *H^s es invariante bajo isometrías.*

Dada una isometría, ella y su inversa cumplen la desigualdad del Teorema 7 con $c = 1$.

Corolario 2 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $cE = \{cx : x \in E\}$, con $c > 0$, entonces $H^s(cE) = c^s H(E)$.*

La función $f(x) = cx$ cumple las condiciones del Teorema 7 y entonces $H^s(cE) \leq c^s H^s(E)$. Como $c \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{c}x$ también cumple las condiciones y se tiene la otra desigualdad.

El lema siguiente muestra una propiedad fundamental de las medidas s-dimensionales de Hausdorff que permite definir el concepto de dimensión de un conjunto. Lo que se afirma es que dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ existe un único $s \geq 0$ tal que $H^t(A) = \infty$ para $t < s$ y $H^t(A) = 0$ para $t > s$. Esto define una cortadura, y la dimensión de Hausdorff del conjunto A es precisamente el número real s que cumple lo anterior.

Lema 2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sean $s \geq 0$. Entonces*

1. *Si* $H^s(A) < \infty$ *entonces* $H^t(A) = 0\ \forall\, t > s$.
2. *Si* $H^s(A) > 0$ *entonces* $H^t(A) = \infty\ \forall\, 0 \leq t < s$.

Demostración:

Sólo es necesario demostrar la primera afirmación, pues la segunda afirmación es su contrapuesta.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $H^s(A) < \infty$. Sea $\delta > 0$. Entonces existe $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ cubierta de A con $diám(B_j) \leq \delta$ para toda $j \in \mathbb{N}$, y tal que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} diám(B_j)^s \leq H^s(A) + 1.$$

Si tomamos $r > s$, ocurre:

$$\begin{aligned} \left(\frac{diám(B_j)}{\delta}\right)^r &\leq \left(\frac{diám(B_j)}{\delta}\right)^s \quad \text{pues } \frac{diám(B_j)}{\delta} \leq 1 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} diám(B_j)^r &\leq \delta^{r-s} \sum_{j=1}^{\infty} diám(B_j)^s \\ &\leq \delta^{r-s}(H^s(A) + 1) \\ \Rightarrow H^r_\delta(A) &\leq \delta^{r-s}(H^s(A) + 1). \end{aligned}$$

Pero $H^s(A)+1$ es una constante, así que cuando δ tiende a 0, $\delta^{r-s}(H^s(A)+1)$ también lo hace y se concluye que $H^r(A) = 0$.

■

Definición 2 *La dimensión de Hausdorff de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $dim\, A$, se define como:*

$$\begin{aligned} dim\, A &= \sup\{s : H^s(A) = \infty\} = \sup\{s : H^s(A) > 0\} \\ &= ínf\{s : H^s(A) = 0\} = ínf\{s : H^s(A) < \infty\}. \end{aligned}$$

La dimensión cumple algunas propiedades que coinciden con la idea intuitiva de dimensión; por ejemplo la siguiente observación.

Observación 2 *Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $dim\, A_i = p_i$. Entonces $dim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup_i\{p_i\}$.*

Demostración:

Sean $p = \sup_i\{p_i\}$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Demostraremos que

1. $H^t(A) = 0 \qquad \forall t > p.$
2. $H^t(A) = \infty \qquad \forall t < p.$

1) Supongamos que existe $t_1 < p$ tal que $H^{t_1}(A) < \infty$. Como p es el supremo de $\{p_i\}$, existe A_i tal que $t_1 < p_i < p$. Entonces:

$$H^{t_1}(A_i) \leq H^{t_1}(A) < \infty.$$

Por lo tanto existe $t_1 < p_i$ tal que $H^{t_1}(A_i) < \infty$, lo cual es una contradicción pues $dim\, A_i = p_i$.

2) Supongamos que existe $t_2 > p$ tal que $H^{t_2}(A) > 0$. Entonces:

$$0 < H^{t_2}(A) = H^{t_2}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^{t_2}(A_i).$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} H^{t_2}(A_i) > 0$, existe i tal que $H^{t_2}(A_i) > 0$ con $t_2 > p \geq p_i$, lo cual es una contradicción pues $dim\, A_i = p_i$.

$\blacksquare$

Lo que sigue ilustra cómo la s-medida de Hausdorff puede pensarse como una generalización de la medida de Lebesgue. Además de que la s-medida de Hausdorff está definida para cualquier número real $s \geq 0$, en el caso en que s es natural, la medida de Lebesgue es igual a una constante (que depende solamente de s) por la medida de Hausdorff. Esta constante se debe a que la medida de Hausdorff toma como aproximaciones sumas de diámetros de conjuntos elevados a la s, a diferencia de la medida de Lebesgue, que toma como aproximaciones sumas de volúmenes, que son aristas elevadas a la s de bloques coordenados.

Para la demostración de la relación mencionada entre H^n y $\lambda^{(n)}$ (la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$), es necesario el uso del lema de cobertura de Vitali.

Definición 3 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que la colección de conjuntos en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$, es cubierta de Vitali para E si para cada $x \in E$ y $\delta > 0$ existe $U \in \mathcal{V}$ con $x \in U$ y $0 < diám(U) \leq \delta$.*

Lema 3 *Sea E un conjunto H^s-medible de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali para E de conjuntos H^s-medibles. Entonces podemos seleccionar una sucesión disjunta de conjuntos $\{V_i\}$ de $\mathcal{V}$, finita o numerable, tales que $\sum_i diám(V_i)^s = \infty$ o $H^s(E \setminus \bigcup_i V_i) = 0$.*

Demostración:

Sea $\varrho > 0$. Podemos suponer que $diám(U) \leq \varrho$ para todo $U \in \mathcal{V}$. Se construirá a la sucesión $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ inductivamente. Sea V_1 un elemento cualquiera de $\mathcal{V}$. Supongamos que se han elegido $V_1, V_2, ..., V_m$. Definamos:

$$d_m = \sup\Big\{diám(U) \,:\, U \cap \bigcup_{i=1}^{m} V_i = \emptyset\,,\, U \in \mathcal{V}\Big\}.$$

Si $d_m > 0$, definimos V_{m+1} como un conjunto en $\mathcal{V}$, disjunto de $\bigcup_{i=1}^m V_i$ tal que $diám(V_{m+1}) \geq \frac{d_m}{2}$ (existe, por la definición de d_m). Notemos que por construcción, $\{V_i\}$ resulta ser una sucesión disjunta.

CASO (1): Si $d_m = 0$ para alguna $m \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \in \mathcal{V}$ tal que $0 < diám(U_n) \leq \frac{1}{n}$ y $x \in U_n$ ya que $\mathcal{V}$ es una clase de Vitali para E. Debido a que $d_m = 0$, $U_n \cap \bigcup_{i=1}^m V_i \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\{x\} \cap \bigcup_{i=1}^{m} V_i = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap \bigcup_{i=1}^{m} V_i \neq \emptyset$$

y por lo tanto $x \in \bigcup_{i=1}^m V_i$. Entonces $E \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$, y

$$H^s\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} V_i\Big) = H^s(\emptyset) = 0.$$

CASO (2): Si $d_m > 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

En este caso, el proceso continúa indefinidamente. Supongamos que $\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(V_i)^s < \infty$ (en caso contrario habremos encontrado una sucesión $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ disjunta y tal que $\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(V_i)^s = \infty$).

Como $\sum_i diám(V_i)^s < \infty$, entonces la sucesión $\{diám(V_i)^s\}_{i\geq 0}$ converge a 0 y por lo tanto también la sucesión $\{diám(V_i)\}_{i\geq 0}$ converge a 0.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $x_i \in V_i$ y definamos $B_i = B(x_i, 3\, diám(V_i))$.

Afirmación (1)

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, ocurre:

$$\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i\Big) \subseteq \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i.$$

Sean $k > 1$ y $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Entonces existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $x \in U$ y $U \cap \bigcup_{i=1}^{k} V_i = \emptyset$ (si no existiese, $d_k = 0$, lo que contradice que $d_m > 0$ $\forall\, m$). Como $diám(V_i)$ tiende a 0 cuando i tiende a infinito, ocurre que $diám(U) > 2\, diám(V_m)$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Para terminar la demostración de la Afirmación (1), necesitaremos dos afirmaciones más.

Afirmación (2)

Existe $i_0 \in \mathbb{N}$, $k < i_0 < m$ tal que $U \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ y $diám(U) \leq 2\, diám(V_{i_0})$.

Sabemos que $U \cap \bigcup_{i=1}^{k} V_i = \emptyset$. Supongamos que $U \cap V_i = \emptyset$ para toda i tal que $k < i < m$. Entonces $U \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i = \emptyset$, por lo que:

$$d_{m-1} = \sup\Big\{diám(U) \,:\, U \in \mathcal{V}\,,\, U \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i = \emptyset\Big\} \geq diám(U).$$

Entonces, por construcción:

$$diám(V_m) \geq \frac{d_{m-1}}{2} \geq \frac{diám(U)}{2}$$

lo cual es una contradicción pues $diám(U) > 2\, diám(V_m)$. Por lo tanto existe $i_0 \in \mathbb{N}$, $k < i_0 < m$ tal que $U \cap V_{i_0} \neq \emptyset$.

Supongamos que $diám(U) > 2\, diám(V_{i_0})$. Entonces:

$$\frac{diám(U)}{2} > diám(V_{i_0}) \geq \frac{d_{i_0-1}}{2} \geq \frac{d_k}{2}$$

donde la última desigualdad se debe a que $k \leq i_0 - 1$ y la sucesión $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es no creciente. Por lo tanto $di\acute{a}m(U) > d_k$, lo que es un absurdo pues $U \cap \bigcup_{i=1}^{k} V_i = \emptyset$ y $U \in \mathcal{V}$. Esto demuestra la Afirmación (2).

Afirmación (3)

$U \subseteq B_{i_0}$.

Sea $y \in U$, $x \in U \cap V_{i_0}$ ($U \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ debido a la Afirmación (2)). Entonces ocurre:

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) \leq di\acute{a}m(U) + di\acute{a}m(V_i).$$

Pero por la Afirmación (2), $di\acute{a}m(U) \leq 2\, di\acute{a}m(V_{i_0})$, por lo que $d(y, x_i) \leq 3\, di\acute{a}m(V_{i_0})$. Por lo tanto $y \in B_{i_0}$, lo que demuestra la Afirmación (3). Entonces ocurre que $x \in U \cap V_{i_0} \subseteq U \subseteq B_{i_0}$ con $k < i < m$, y se concluye que $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i \subseteq \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i$, lo que demuestra la Afirmación (1).

Sea $\delta > 0$. Por la Afirmación (1),

$$\begin{aligned} H_\delta^s\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\Big) &\leq H_\delta^s\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i\Big) \\ &\leq H_\delta^s\Big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i\Big) \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} H_\delta^s(B_i) \end{aligned}$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Como $di\acute{a}m(B_i) = 6\, di\acute{a}m(V_i)$, la sucesión $\{di\acute{a}m(B_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Entonces podemos tomar k suficientemente grande para asegurar que $di\acute{a}m(B_i) \leq \delta$. En ese caso $H_\delta^s(B_i) = di\acute{a}m(B_i)^s$ y entonces

$$\begin{aligned} H_\delta^s\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\Big) &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} di\acute{a}m(B_i)^s \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} (6\, di\acute{a}m(V_i))^s \\ &= 6^s \sum_{i=k+1}^{\infty} di\acute{a}m(V_i)^s. \end{aligned}$$

Entonces $H^s_\delta(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i)$ es menor que la cola de una suma convergente, por lo tanto $H^s_\delta(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i)=0$, para toda $\delta>0$, y se concluye que $H^s(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i)=0$.

■

Teorema 2 *Sea E un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$, con medida $\lambda^{(n)}$ y H^n finita. Entonces $\lambda^{(n)}(E)=C_nH^n(E)$, donde $C_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ y $\Gamma(x)$ denota a la función gamma evaluada en x.*

Demostración:

Primero se mostrará que $\lambda^{(n)}(E)\leq C_nH^n(E)$.

Sea $\varepsilon>0$. Como $H^s(E)<\infty$, existe $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cubierta cerrada y convexa tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} di\acute{a}m(U_i)^n < H^n(E)+\varepsilon.$$

Debido a la desigualdad isodiamétrica [Eg], cada U_i tiene medida de Lebesgue menor o igual que una bola con su mismo diámetro. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lambda^{(n)}(U_i) &\leq C_n\, di\acute{a}m(U_i)^n,\\
\text{entonces } \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{(n)}(U_i) &\leq C_n\sum_{i=1}^{\infty} di\acute{a}m(U_i)^n\\
&< C_n(H^n(E)+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Debido a que $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es cubierta de E, tenemos:

$$\lambda^{(n)}(E)\leq\lambda^{(n)}(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{(n)}(U_i).$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\lambda^{(n)}(E) &< C_nH^n(E)+C_n\,\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0\\
\Rightarrow \lambda^{(n)}(E) &\leq C_nH^n(E).
\end{aligned}$$

Demostraremos ahora que $\lambda^{(n)}(E)\geq C_nH^n(E)$.

Un bloque en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto B de la forma $B = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, donde cada I_j es un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cubierta de bloques de E tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(n)}(C_i) < \lambda^{(n)}(E) + \varepsilon$ (existe pues $\lambda^{(n)} < \infty$). Podemos expandir un poco los bloques de tal manera que sean abiertos y se conserve la desigualdad. Para cada $i \in \mathbb{N}$ se define:

$$\mathcal{A}_i = \{B(x,r) : x \in C_i,\ B(x,r) \subseteq C_i, r \leq \delta\}.$$

Así, $\mathcal{A}_i$ es una cubierta de Vitali para C_i. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $H^n(C_i) < \infty$, por lo que existen $\{B_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq C_i$ disjuntos tales que $H^n(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}) = 0$, con $di\acute{a}m(B_{ij}) \leq \delta$, por el lema de Vitali, ya que

$$\sum_j di\acute{a}m(B_ij)^s = \sum_j H^n(B_ij = H^n\Big(\bigcup_j B_ij\Big) \leq H^n(C_i) < \infty.$$

Por lo tanto $H^n_\delta(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}) = 0$.

Por otro lado, debido a que $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es cubierta de E, ocurre

$$\begin{aligned} H^n_\delta(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} H^n_\delta(C_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} H^n_\delta(B_{ij}) + \sum_{i=1}^{\infty} H^n_\delta\Big(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}\Big), \end{aligned}$$

donde la igualdad se debe a que $C_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} \cup (C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij})$. Por lo anterior, se sigue

$$\begin{aligned} H^n_\delta(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} H^n_\delta(B_{ij}) + 0 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} di\acute{a}m(B_{ij})^n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(n)}(B_{ij})}{C_n} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(n)}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij})}{C_n}. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que las colecciones $\{B_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ son disjuntas, por el lema de Vitali. Como tenemos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} \subseteq C_i$, se deduce que:

$$\begin{aligned} H_\delta^n(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(n)}(C_i)}{C_n} \\ &< \frac{\lambda^{(n)}(E)}{C_n} + \frac{\varepsilon}{C_n}. \end{aligned}$$

Así se concluye $H_\delta^n(E) < \frac{\lambda^{(n)}(E)}{C_n} + \frac{\varepsilon}{C_n}$, y entonces $H^n(E) \leq \frac{\lambda^{(n)}(E)}{C_n}$.

$\blacksquare$

Medidas de Red.

En este capítulo se estudiarán las redes, en particular la red de cubos binarios, y se definirá una medida de red (que también es una medida de Hausdorff). Lo haremos con dos propósitos: presentar otra medida de Hausdorff que cumple propiedades adicionales a la s-medida, y encontrar una fuerte relación con la s-medida de Hausdorff que nos permitirá estudiar la s-medida del producto cartesiano de dos conjuntos. Podremos demostrar una relación entre la s-medida de dos conjuntos A y B y la s-medida de su producto cartesiano $A \times B$. Con ello se mostrará que la dimensión de $A \times B$ es mayor o igual que la suma de la dimensión de A y la dimensión de B. Esta relación será de gran importancia para el siguiente capítulo.

Empecemos con la definición de red en un conjunto X.

Definición 1 *Sea $\mathcal{N}$ una colección de conjuntos de X. Decimos que $\mathcal{N}$ es una red de conjuntos si:*

1. *Si $U_1, U_2 \in \mathcal{N}$, entonces $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o $U_1 \subseteq U_2$ o $U_2 \subseteq U_1$.*
2. *Para cada $U \in \mathcal{N}$, $\#\{V \in \mathcal{N} : U \subseteq V\} < \infty$.*

La observación siguiente será usada continuamente en las proposiciones relativas a redes.

Observación 1 *Sea $\mathcal{M}$ una subcolección de una red $\mathcal{N}$. Entonces existe $\mathcal{M}^*$, una subcolección disjunta de $\mathcal{M}$, tal que:*

$$\bigcup_{U_i \in \mathcal{M}} U_i = \bigcup_{U_i \in \mathcal{M}^*} U_i.$$

Demostración:

Sea $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \setminus \{U_i \in \mathcal{M} : U_i \subsetneq U_j$ para algún $U_j \in \mathcal{M}\}$. Primero demostraremos que $\bigcup_{U_i \in \mathcal{M}} U_i = \bigcup_{U_i \in \mathcal{M}^*} U_i$.

Tomemos $x \in \bigcup_{U_i \in \mathcal{M}} U_i$. Entonces $x \in U_{i_0}$ para algún $U_{i_0} \in \mathcal{M}$. Si $U_{i_0} \in \mathcal{M}^*$, entonces hemos acabado. Si $U_{i_0} \notin \mathcal{M}^*$ entonces existe $U_{i_1} \in \mathcal{M}$ tal que $x \in U_{i_0} \subseteq U_{i_1}$. Igualmente, si $U_{i_1} \in \mathcal{M}^*$, hemos acabado. Supongamos que el proceso continúa indefinidamente. Entonces habremos encontrado una cadena infinita:

$$U_{i_0} \subseteq U_{i_1} \subseteq U_{i_2} \subseteq ...$$

donde $U_{i_j} \in \mathcal{N},\ \forall j \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción pues $\mathcal{N}$ es una red. Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{i_0} \subseteq U_{i_n}$ y $U_{i_n} \in \mathcal{M}^*$, que demuestra lo que queríamos.

Por otro lado, $\mathcal{M}^*$ es disjunta:
Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{M}^*$. Por la definición de $\mathcal{M}^*$ no ocurre que $U_1 \subseteq U_2$ ni que $U_2 \subseteq U_1$, por lo que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

■

A la subcolección particular $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$ en la red $\mathcal{N}$, utilizada en la demostración anterior, se le llamará el *depuramiento* de $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}^*$ es la colección de los conjuntos maximales de $\mathcal{M}$ (que es no vacía debido a que $\mathcal{M}$ es red).

En lo que resta del capítulo utilizaremos una red en particular para $\mathbb{R}^n$.

Definición 2 *Sea $\mathcal{B}$ la colección formada por los cubos semiabiertos en $\mathbb{R}^n$ de la forma*

$$\Big[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k}\Big) \times \Big[\frac{m_2}{2^k}, \frac{m_2+1}{2^k}\Big) \times ... \times \Big[\frac{m_n}{2^k}, \frac{m_n+1}{2^k}\Big) \qquad \textit{con } k \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{Z},$$

y el conjunto vacío. A la colección $\mathcal{B}$ se le llamará los cubos binarios.

Proposición 1 *$\mathcal{B}$ es una red de conjuntos.*

Demostración:

Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \Big[\frac{l_1}{2^{k_1}}, \frac{l_1+1}{2^{k_1}}\Big) \times ... \times \Big[\frac{l_n}{2^{k_1}}, \frac{l_n+1}{2^{k_1}}\Big), \\ U_2 &= \Big[\frac{m_1}{2^{k_2}}, \frac{m_1+1}{2^{k_2}}) \times ... \times \Big[\frac{m_n}{2^{k_2}}, \frac{m_n+1}{2^{k_2}}\Big). \end{aligned}$$

1. Caso $k_1 = k_2$. Si $l_i = m_i$, para toda i, entonces $U_1 = U_2$. Si $l_{i_0} \neq m_{i_0}$ para alguna i_0, entonces $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ pues $[\frac{l_{i_0}}{2^{k_1}}, \frac{l_{i_0}+1}{2^{k_1}}) \cap [\frac{m_{i_0}}{2^{k_2}}, \frac{m_{i_0}+1}{2^{k_2}}) = \emptyset$.

2. Caso $k_1 < k_2$. Si $\frac{m_i}{2^{k_2}} \in [\frac{l_i}{2^{k_1}}, \frac{l_i+1}{2^{k_1}})$ para toda i, entonces
$$\Big[\frac{m_i}{2^{k_2}}, \frac{m_i+1}{2^{k_2}}\Big) \subseteq \Big[\frac{l_i}{2^{k_1}}, \frac{l_i+1}{2^{k_1}}\Big) \ \forall i,$$
por ser cubos binarios, por lo que $U_2 \subseteq U_1$. Si $\frac{m_{i_0}}{2^{k_2}} \notin [\frac{l_{i_0}}{2^{k_1}}, \frac{l_{i_0}+1}{2^{k_1}})$ para i_0, entonces $[\frac{m_{i_0}}{2^{k_2}}, \frac{m_{i_0}+1}{2^{k_2}}) \cap [\frac{l_{i_0}}{2^{k_1}}, \frac{l_{i_0}+1}{2^{k_1}}) = \emptyset$ debido al tamaño de los intervalos, y se concluye que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

■

Las medidas exteriores definidas a continuación son un tipo de medidas exteriores de Hausdorff asociadas a la función $h(x) = x^s$ (igual que las medidas s-dimensionales) pero la premedida se define exclusivamente sobre la red $\mathcal{B}$. Las propiedades inherentes a la red permitirán tener propiedades adicionales a las que tienen las medidas de Hausdorff en general, estudiadas en el Capítulo 1.

Definición 3 *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, definimos:*
$$\mathcal{M}^s_\delta(E) = \text{ínf}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(S_i)^s : \text{diám}(S_i) < \delta, \bigcup_i S_i \supseteq E, S_i \in \mathcal{B}\Big\}.$$

Debido a que $\mathcal{B}$ es una red, para cualquier cubierta $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E podemos tomar su depuramiento y obtener una cubierta que no incrementa la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(S_i)^s$, por lo que en la definición anterior podemos añadir que las cubiertas sean disjuntas.

Observación 2 *Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $\mathcal{M}^s_\delta(E) < \infty$.*

Si E es acotado, existe $C = [s,t)^n$ un cubo que lo contiene (con $s, t \in \mathbb{Z}$, $s - t \geq 1$). Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{n}}{2^m} < \delta$. Entonces la colección
$$\Big\{U_i = \Big[s + \frac{i}{2^m}, s + \frac{i+1}{2^m}\Big)\Big\}_{i=0}^{2^m(t-s)-1}$$

es una cubierta para $[s,t)$. Por lo anterior, la colección finita

$$\{V_{i_1,i_2...,i_n} = U_{i_1} \times U_{1_2} \times ... \times U_{i_n}\}$$

es una cubierta para C, y además cada elemento de la colección tiene diámetro menor que δ. Entonces:

$$\mathcal{M}^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(C) \leq \sum_{i_i,i_2,\dots,i_n} di\acute{a}m(V_{i_1,i_2...,i_n})^s \leq \left(2^m\,(s-t)\,\right)^n \delta^s < \infty$$

■

Definición 4 *Para $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos:*

$$\mathcal{M}^s(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{M}^s_\delta(E).$$

Por el Teorema 1, la función $\mathcal{M}^s_\delta$ es una medida exterior. Como $\mathcal{M}^s$ está definida como un supremo de medidas exteriores, debido al Teorema 3, $\mathcal{M}^s$ es una medida exterior y además $\mathcal{M}^s(E) = \text{lím}_{\delta\to 0}\mathcal{M}^s_\delta(E)$. Por el Teorema 4, podemos afirmar que $\mathcal{M}^s$ es una medida exterior métrica, y por lo tanto, por el Teorema 6, también es una medida exterior boreliana.

El siguiente teorema muestra la relación fundamental entre la s-medida de Hausdorff y la medida $\mathcal{M}^s$.

Teorema 1 *Existen constantes b_n (dependientes sólo de la dimensión n) tales que para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$H^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E) \leq b_n H^s_\delta(E) \quad \forall\, 0 < \delta < 1,$$

y por lo tanto

$$H^s(E) \leq \mathcal{M}^s(E) \leq b_n H^s(E).$$

Demostración:

Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $0 < \delta < 1$. La desigualdad $H^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E)$ es trivial, ya que la colección de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que conforman cubiertas para calcular H^s_δ contiene a la colección correspondiente para calcular $\mathcal{M}^s_\delta$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $0 < di\acute{a}m(U) \leq \delta$, y sea k el entero tal que:

$$2^{-(k+1)} \leq di\acute{a}m(U) < 2^{-k}.$$

Sea S uno de los cubos binarios de lado 2^{-k} que intersecta a U. Debido a que el diámetro de U es menor que 2^{-k}, U está contenido en una colección de 2^n cubos de lado 2^{-k} y diámetro $2^{-k}\sqrt{n}$, pues al proyectar S en cada coordenada, la proyección intersecta a lo más a dos intervalos de longitud 2^{-k} (Figura 1).

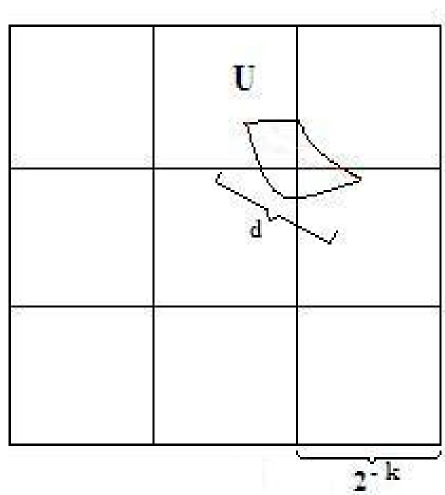

Figura 1: Cubos que intersectan a U.

Si dividimos cada uno de estos cubos en 2^{n^2} cubos menores (dividiendo cada lado en 2^n partes) tenemos que U está contenido en $2^n\,2^{n^2}$ de los nuevos cubos (definamos $b_n = 2^n 2^{n^2}$) y cada uno de los nuevos cubos tiene diámetro $2^{-k}\sqrt{n}\,2^{-n}$, por tener lado 2^{-n} menor que los cubos originales.

Además

$$2^{-k}\sqrt{n}\,2^{-n} = 2^{-(k+1)}2\sqrt{n}\,2^{-n} \leq diám(U)\,2\sqrt{n}\,2^{-n}.$$

Y como

$$2\sqrt{n} \leq 2n \leq 2^n \quad \forall\, n \geq 1,$$

se concluye que

$$2^{-k}\sqrt{n}\,2^{-n} \leq diám(U) \leq \delta.$$

Así, en este proceso, para un conjunto U con diámetro menor que δ hemos encontrado una δ-cubierta de cubos binarios con cardinalidad b_n.

Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de E. Por lo anterior, para cada i, existe una colección $\{S_{ij}\}_{j=1}^{b_n}$ de cubos tales que $U_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{b_n} S_{ij}$ y con diámetro menor que δ. Entonces $E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{b_n} S_{ij}$.

Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} diám(S_{ij}) & \leq & diám(U_i) \\ \Rightarrow diám(S_{ij})^s & \leq & diám(U_i)^s \\ \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{b_n} diám(S_{ij})^s & \leq & b_n \, diám(U_i)^s \\ \Rightarrow \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{b_n} diám(S_{ij})^s & \leq & b_n \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(U_i)^s \\ \text{y por lo tanto } \mathcal{M}_\delta^s(E) & \leq & b_n \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(U_i)^s. \end{array}$$

Como $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ era una cubierta arbitraria se sigue que $\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq b_n H_\delta^s(E)$ para toda $0 < \delta < 1$. Haciendo δ tender a 0 obtenemos el segundo par de desigualdades.

■

El siguiente lema es un tipo de continuidad de la medida exterior $\mathcal{M}_\delta^s$ que se cumple para los conjuntos que son uniones finitas de cubos binarios.

Lema 1 *Sea $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, donde cada E_j es una unión finita de cubos binarios. Entonces:*

$$\mathcal{M}_\delta^s(\lim_{j\to\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j).$$

Demostración:

Llamemos E al límite de la sucesión; $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = \lim_{j\to\infty} E_j$. Como $E_j \subseteq E$, para toda j, entonces $\mathcal{M}_\delta^s(E_j) \leq \mathcal{M}_\delta^s(E)$ y concluimos que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) \leq \mathcal{M}_\delta^s(E)$.

Si ocurre que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j) = \infty$, entonces se cumple trivialmente la desigualdad $\mathcal{M}^s_\delta(E) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j)$. Así, podemos suponer que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j) < \infty$.

Como E_j es unión finita de cubos binarios, y los cubos binarios son una red, E_j es unión finita y disjunta de cubos binarios.

Sea $\delta > 0$. Sea B un cubo binario. Sean $\{B_i\}_{i=1}^{2^n}$ los cubos resultantes de bisectar cada arista de B. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2^n} di\acute{a}m(B_i)^s &= 2^n di\acute{a}m(B_1)^s \\ &= 2^n(2^{-1}di\acute{a}m(B))^s \\ &= 2^{n-s}di\acute{a}m(B)^s \\ &\geq di\acute{a}m(B)^s,\end{aligned}$$

cuando $n \geq s$ (que es el caso, pues si $s > n$, $H^s(A) = 0$, para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$). Esto quiere decir que al hacer tomar cubos menores en diámetro, en una cubierta, el valor se hace mayor, por lo que al calcular la medida H^s_δ, las cubiertas con los diámetros más grandes posibles, pero menores que δ, son las que mejor aproximan a esta medida.

Sea $j \in \mathbb{N}$. Llamemos δ^* al mínimo de los diámetros de los cubos binarios cuya unión es E_j. Debido al párrafo anterior, y a que E_j es una unión finita de cubos binarios, no es necesario utilizar cubos binarios con diámetro menor que el mínimo entre δ y δ^*. Entonces:

$$\mathcal{M}^s_\delta(E_j) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} di\acute{a}m(S_i)^s : \min(\delta,\delta^*) \leq di\acute{a}m(S_i) < \delta, \bigcup_i S_i \supseteq E, S_i \in \mathcal{B}\Big\}$$

El número de cubos binarios en la expresión anterior con intersección no vacía con E_j es finito, y por lo tanto

$$\mathcal{M}^s_\delta(E_j) = \min\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} di\acute{a}m(S_i)^s : \min(\delta,\delta^*) \leq di\acute{a}m(S_i) < \delta, \bigcup_i S_i \supseteq E, S_i \in \mathcal{B}\Big\}.$$

Entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe ψ_j una δ-cubierta de cubos binarios de E_j, disjunta y finita, tal que:

$$\sum_{c\in\psi_j} di\acute{a}m(C)^s = \mathcal{M}^s_\delta(E_j).$$

Debido a esto, el conjunto de naturales:

$$N_j = \left\{ \#\psi_j : \sum_{c \in \psi_j} di\acute{a}m(C)^s = \mathcal{M}^s_\delta(E_j)\,,\, \psi_j \text{ cubre a } E_j\,,\, \psi_j \subseteq \mathcal{B},\, \psi_j \text{ disjunta} \right\}$$

es distinto del vacío, por lo que tiene un primer elemento. Sea $\hat{\phi}_j = \min N_j$ y ϕ_j una cubierta tal que $\#\phi_j = \hat{\phi}_j$, para cada j natural.

Afirmación (1)
Sea $S \in \phi_j$. Entonces existe $T \in \phi_{j+1}$ tal que $S \subseteq T$.

Como ϕ_j es cubierta con cardinalidad mínima, no existen elementos "inútiles"en la cubierta, por lo que existe x_0 en E_j tal que $x_0 \in S$. Como $E_j \subseteq E_{j+1}$, $x \in E_{j+1}$ y por lo tanto $x_0 \in T$ para algún $T \in \phi_{j+1}$. Así, $x_0 \in S \cap T$ y por la propiedad de red $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Supongamos que $U \subsetneq S$ para todo $U \in \phi_{j+1}$ con $S \cap U \neq \emptyset$.

Sea $\alpha = \{R \in \phi_{j+1} : R \cap S \neq \emptyset\}$. Por el supuesto, $\alpha = \{R \in \phi_{j+1} : R \subsetneq S\}$. Debido a que $T \cap S \neq \emptyset$, $\alpha \neq \emptyset$.

CASO (1): $\#\alpha = 1$. Sea $x \in S \setminus T$ tal que $x \in E_j$; este elemento existe, pues en caso contrario $(\phi_j \setminus \{S\} \cup \{T\})$ sería una cubierta de E_j con suma de diámetros elevados a la s-ava potencia menor que la cubierta ϕ_j, un absurdo, pues ϕ_j es óptima. Entonces $x \in E_{j+1}$ y por lo tanto $x \in T_2$ para algún $T_2 \in \phi_{j+1}$. Así, $S \cap T_2 \neq \emptyset$, por lo que $T_2 \in \alpha$ y se concluye que $T_2 = T$, pues $\#\alpha = 1$. Lo que conduce a que $x \in T$, una contradicción.

CASO (2): $\#\alpha \geq 2$. Debido a que ϕ_{j+1} coincide con $\mathcal{M}^s_\delta(E_{j+1})$,

$$\sum_{\phi_{j+1}} di\acute{a}m(C)^s \leq \sum_{(\phi_{j+1} \setminus \alpha) \cup \{S\}} di\acute{a}m(C)^s.$$

Si ocurriese que $\sum_{\phi_{j+1}} di\acute{a}m(C)^s = \sum_{(\phi_{j+1} \setminus \alpha) \cup \{S\}} di\acute{a}m(C)^s$, como $\alpha \geq 2$, ocurriría que $\#(\phi_{j+1} \setminus \alpha \cup \{S\}) < \#\phi_{j+1}$ y tendríamos una contradicción pues ϕ_{j+1} era mínima respecto al cardinal. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\phi_{j+1}} diám(C)^s &< \sum_{(\phi_{j+1}\setminus\alpha)\cup\{S\}} diám(C)^s \\ \Rightarrow \sum_{\alpha} diám(C)^s &< diám(S)^s \\ \Rightarrow \sum_{(\phi_j\setminus\{S\})\cup\alpha} diám(C)^s &< \sum_{\phi_j} diám(C)^s.\end{aligned}$$

Debido al supuesto, α cubre a $E_{j+1}\cap S$. Por lo tanto $(\phi_j\setminus\{S\})\cup\alpha$ cubre a

$$(E_j\setminus S)\cup(E_{j+1}\cap S)\supseteq(E_j\setminus S)\cup(E_j\cap S)=E_j.$$

Debido a lo anterior, la cubierta $(\phi_j\setminus\{S\})\cup\alpha$ cubre más eficazmente (con una suma de diámetros elevada a la s menor) a E_j que ϕ_j, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $S\subseteq T$ para algún $T\in\phi_{j+1}$, lo que demuestra la Afirmación (1).

Sea $\{C_1, C_2, ...\}$ el depuramiento de la colección de cubos binarios $\bigcup_{j=1}^{\infty}\phi_j$. Entonces:

$$\begin{aligned}E_j &\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \quad \forall j \\ \Rightarrow \lim_{j\to\infty} E_j &= E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \\ \Rightarrow \mathcal{M}_\delta^s(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} diám(C_i)^s.\end{aligned}$$

Cada cubo C_i pertenece a ϕ_k para alguna $k(i)\in\mathbb{N}$. Entonces existe $T\in\phi_{k+1}$ tal que $C_i\subseteq T$ (por la afirmación). Como los cubos C_i no están contenidos propiamente en otros cubos de la colección $\bigcup_{j=1}^{\infty}\phi_j$, se concluye que $C_i=T\in\phi_{k+1}$. Así, cada $C_i\in\phi_j \quad \forall j\geq k(i)$. Entonces dado $k\in\mathbb{N}$, existe $j(k)$ tal que los cubos $C_1, ..., C_k$ pertenecen a $\phi_{j(k)}$. Notemos que la sucesión $\{j(k)\}_{k=1}^{\infty}$ diverge a infinito.

Tenemos, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\delta^s(E) &\leq \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} di\acute{a}m(C_i)^s \\ &\leq \lim_{k\to\infty}\sum_{C\in\phi_{j(k)}} di\acute{a}m(C)^s \\ &= \lim_{k\to\infty}\mathcal{M}_\delta^s(E_{j(k)}) \\ &= \lim_{j\to\infty}\mathcal{M}_\delta^s(E_j).\end{aligned}$$

■

El siguiente lema es un lema técnico. Es necesario para la demostración de la relación entre la s-medida y la medida de red.

Lema 2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Sean $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de A conformada por intervalos binarios, $\{a_i\}$ una sucesión de números positivos y $c \geq 0$. Si*

$$\sum_{\{i:x\in I_i\}} a_i > c \quad \forall x \in A,$$

entonces:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\, di\acute{a}m(I_i)^s \geq c\,\mathcal{M}_\delta^s(A).$$

Notemos que si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos acotada inferiormente por una constante $k > 0$, se cumplen las hipótesis. Por otro lado, cuando $a_i \equiv 1$, la suma $\sum_{\{i:x\in I_i\}} a_i$ representa a un contador que nos dice a cuántos intervalos I_i pertenece x.

Demostración:

CASO (1): $\{I_i\}$ finita.

Podemos escoger $a_i' = \frac{p_i}{q_i}$ un número racional ligeramente menor que a_i, de tal forma que:

$$\sum_{\{i:x\in I_i\}} a_i' > c \quad \forall x \in A.$$

Sea $m = \prod_i q_i$ y $w_i = \prod_{j \neq i} q_j$. Entonces:

$$m \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i' = \sum_{i \in \mathbb{N}} w_i p_i > mc = c_1, \quad w_i\, p_i \in \mathbb{N}.$$

Notemos que la colección $\{I_1, ..., I_1, I_2, ..., I_2, I_n, ..., I_n\}$ tiene la misma suma $\sum_{\{i:x \in I_i\}} a_i^* > c$ que la colección anterior si tomamos a $a_i^* \equiv 1$. De tal forma, es suficiente demostrar el lema para el caso en que $a_i \equiv 1$.

Sea $\{I_i\}$ una colección finita de intervalos binarios y $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $a_i \equiv 1$ y satisface que:

$$\sum_{\{i:x \in I_i\}} a_i > c \quad \forall x \in A.$$

Esto implica que para todo $x \in A$, x pertenece al menos a $[c]+1$ intervalos. Como $A \subseteq \bigcup_i I_i$, y los intervalos tienen la propiedad de red, el depuramiento de $\{I_i\}$ constituye una cubierta disjunta de A. Llamemos $\{I_i\}_{i \in \phi_1}$ a esa cubierta.

Debido a que para toda $x \in A$, x pertenece al menos a $[c]+1$ intervalos, por la propiedad de red de los intervalos binarios, tenemos:

$$x \in I_1^x \subsetneq ... \subsetneq I_{[c]}^x \subsetneq I_{[c]+1}^x.$$

Así, x pertenece al menos a $[c]$ intervalos de $\{I_i\} \setminus \{I_i\}_{i \in \phi_1}$. Tomando el depuramiento de $\{I_i\} \setminus \{I_i\}_{i \in \phi_1}$ obtenemos otra cubierta $\{I_i\}_{i \in \phi_2}$ disjunta de A. Siguiendo este procedimiento, se obtienen $[c]+1$ colecciones de intervalos disjuntos (dentro de cada colección) $\{I_i\}_{i \in \phi_j}$ con $j = 1, ..., [c]+1$ que cubren a A.

Como $diám(I_i) \leq \delta$, para toda i, entonces $\sum_{i \in \phi_j} diám(I_i)^s \geq \mathcal{M}_\delta^s(A)$ $\forall j$. Entonces:

$$\sum_i diám(I_i)^s \geq \sum_j \sum_{i \in \phi_j} diám(I_i)^s \geq ([c]+1) \sum_{i \in \phi_{j*}} diám(I_i)^s \geq c\mathcal{M}_\delta^s(A)$$

donde ϕ_{j*} es la colección que tiene menor suma $\sum_{i \in \phi_j} diám(I_i)^s$.

CASO (2): $\{I_i\}$ infinita.

Para cada k número natural definamos $A_k = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{i:x\in I_i,\, i\leq k} a_i > c\}$. Demostraremos que $\{I_i\}_{i=1}^{k}$ es una δ-cubierta de A_k de intervalos binarios tales que:

$$\sum_{\{i:x\in I_i,\, i\leq k\}} a_i > c \quad \forall x \in A_k.$$

Sea $x \in A_k$. Por la definición de A_k, $\sum_{\{i:x\in I_i,\, i\leq k\}} a_i > c$. Como $c \geq 0$ ocurre que $\sum_{\{i:x\in I_i,\, i\leq k\}} a_i > 0$ lo cual implica que x pertenece a I_{i_0} para algún $i_o \in \{1, ..., k\}$. Por lo tanto $\{I_i\}_{i=1}^{k}$ es una δ-cubierta de A_k (de antemano sabíamos que $di\acute{a}m(I_i) < \delta$ para toda i).

Entonces, por el caso finito,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\, di\acute{a}m(I_i)^s \geq c\, \mathcal{M}_\delta^s(A_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Afirmación (1):

1. La sucesión de conjuntos $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente.
2. Para toda $k \in \mathbb{N}$, A_k es una unión finita de intervalos binarios.

Demostración de la afirmación:

Debido a que la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos positivos, se cumple que $\sum_{\{i:x\in I_i,\, i\leq k\}} a_i \leq \sum_{\{i:x\in I_i,\, i\leq k+1\}} a_i$ para cualquier x, lo que implica que $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

Sea $k \in \mathbb{N}$ un número fijo. Llamemos $S^{i_1,\ldots,i_n} = \sum_{j=1}^{n} a_j$ donde $n \leq k$ y $1 \leq i_j \leq k$ para cualquier $j \in \{1, ..., n\}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para alguna colección $\{i_1, ..., i_n\}$, $x \in \bigcap_{j=1}^{n} I_{i_j}$ y tal que $S^{i_1,\ldots,i_n} > c$. Entonces:

$$\sum_{\{i:x\in I_i,\, i\leq k\}} a_i = \sum_{i=1}^{k} \chi_{I_i}(x)\, a_i \geq \sum_{j=1}^{n} \chi_{I_{i_j}}(x)\, a_{i_j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} > c.$$

por lo que se concluye que $x \in A_k$ (donde $\chi_C(x)$ representa a la función indicadora del conjunto C) . Por lo tanto:

$$\bigcup \Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} I_{i_j} \ : \{i_1, ..., i_n\} \text{ tales que } S^{i_1,\ldots,i_n} > c, n \leq k, 1 \leq i_j \leq k \Big\} \subseteq A_k.$$

Sea $x \in A_k$. Entonces $\sum_{i=1}^{k} \chi_{I_i}(x) a_i > c$. Sea $\{i_1, ..., i_n\} = \{i \leq k : x \in I_i\}$. Entonces $S^{i_1,\ldots,i_n} > c$ y por lo tanto $x \in \bigcup \Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} I_{i_j} \ : \{i_1, ..., i_n\}$ tales que $S^{i_1,\ldots,i_n} > c, n \leq k, 1 \leq i_j \leq k \Big\}$.

Concluyendo,

$$A_k = \bigcup \Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} I_{i_j} \ : \{i_1, ..., i_n\} \text{ tales que } S^{i_1,\ldots,i_n} > c, n \leq k, 1 \leq i_j \leq k \Big\}.$$

Como una intersección finita de intervalos binarios es un intervalo binario (por la propiedad de red), y la unión en la expresión anterior de A_k es una unión finita, se concluye el segundo punto de la afirmación.

Tenemos que:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \, di\acute{a}m(I_i)^s = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \, di\acute{a}m(I_i)^s \geq c \lim_{k \to \infty} \mathcal{M}_\delta^s(A_k)$$

debido a la desigualdad obtenida por el caso finito. Por la afirmación, $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cumple las hipótesis del Lema 5 y se tiene que $\lim_{k \to \infty} \mathcal{M}_\delta^s(A_k) = \mathcal{M}_\delta^s(\lim_{k \to \infty} A_k)$. Por otro lado $A \subseteq \lim_{\to \infty} A_k$. Así, se concluye:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \, di\acute{a}m(I_i)^s \geq c \, \mathcal{M}_\delta^s(\lim_{k \to \infty} A_k) \geq c \, \mathcal{M}_\delta^s(A).$$

■

El siguiente teorema busca una analogía para las medidas de Hausdorff, de la igualdad para la medida de Lebesgue (consecuencia del Teorema de Fubini):

$$\lambda^{(2)}(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{(1)}(E_x) \, d\lambda^{(1)}(x),$$

donde E es un conjunto Lebesgue-medible de $\mathbb{R}^2$ y E_x es la sección de todos los puntos de E que tienen primera coordenada igual a x. Sin embargo, debemos considerar que la medida producto de H^s y H^t no es igual a H^{s+t} (y no tiene porque ser una medida de Hausdorff). Una pregunta posible es ver si al menos ocurre que $H^{s+t}(A \times B) = cH^s(A)H^t(B)$, para una constante c. La respuesta es negativa: podemos encontrar conjuntos A y B con dimensión de Hausdorff 0 tales que $H^1(A \times B) > 0$ [**?**]. No obstante la desigualdad $H^{s+t}(A \times B) \geq cH^s(A)H^t(B)$ es válida, como se muestra a continuación.

Teorema 2 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que existe $c \geq 0$ tal que*

$$H^t(E_x) > c \quad \forall x \in A$$

(donde $E_x = \{(x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, x_2, ..., x_n) \in E\}$). Entonces

$$H^{s+t}(E) \geq bcH^s(A)$$

donde $b > 0$ es una constante que sólo depende de s y t.

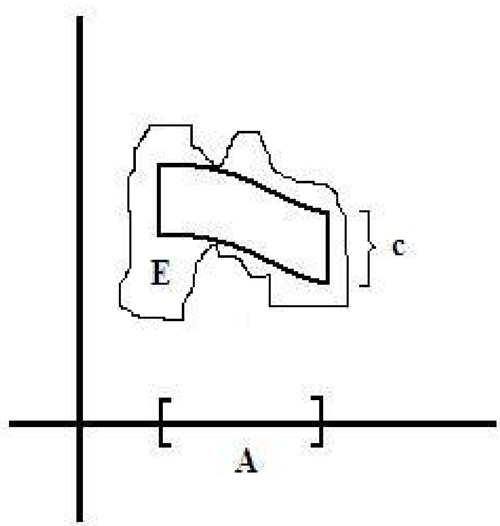

Figura 2: Caso en $\mathbb{R}^2$.

Demostración:

Denotemos por $proyS$ al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : (x, x_2, ..., x_n) \in S\}$. Debido al Teorema 9, es suficiente mostrar el resultado para $\mathcal{M}^r$ en lugar de H^r, para $r = t, s, s + t$.

Sea $\delta > 0$. Sea $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una $\sqrt{n}\,\delta$-cubierta de cubos binarios de E. Para cada $x \in A$,

$$E_x \subseteq \bigcup_i (S_i)_x \quad \text{ y } diám((S_i)_x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, diám(S_i) \leq \frac{\sqrt{n}\,\delta}{\sqrt{n}} = \delta,$$

entonces:

$$\mathcal{M}^t_\delta(E_x) \geq \sum_i diám\Big[(S_i)_x\Big]^t.$$

Definamos $A_\delta = \{x \in A : \mathcal{M}^t_\delta(E_x) > c\}$. Por lo anterior, para $x \in A_\delta$:

$$\begin{aligned} c &< \mathcal{M}^t_\delta(E_x) \\ &\leq \sum_i diám\Big[(S_i)_x\Big]^t \\ &= \sum_{\{i\,:\,x\in proyS_i\}} diám\Big[(S_i)_x\Big]^t \quad (\text{si } x \notin proyS_i \Rightarrow (S_i)_x = \emptyset) \\ &= \sum_{\{i\,:\,x\in proyS_i\}} \Big[diám(S_i)\frac{1}{\sqrt{n}}\Big]^t \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}^{\,t}} \sum_{\{i:x\in proyS_i\}} diám(S_i)^t, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sum_{\{i\,:\,x\in proyS_i\}} diám(S_i)^t > \sqrt{n}^{\,t} c \quad \forall x \in A_\delta.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathbb{N}} diám(S_i)^{s+t} &= \sum_{i\in\mathbb{N}} diám(S_i)^t diám(S_i)^s \\ &= \sqrt{n}^{\,s} \sum_{i\in\mathbb{N}} diám(S_i)^t diám(proyS_i)^s. \end{aligned}$$

Si llamamos I_i a $proyS_i$, y a_i a $diám(S_i)^t$, debido a la desigualdad obtenida para puntos en A_δ, se cumplen las hipótesis del Lema 6 y tenemos que:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(S_i)^{s+t} = \sqrt{n}^{\,s}\Big[\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(S_i)^t diám(proyS_i)^s\Big] \geq \sqrt{n}^{\,s}(\sqrt{n}^{\,t}c)\mathcal{M}^s_\delta(A_\delta).$$

$$\text{Por lo tanto } \sum_{i\in\mathbb{N}} diám(S_i)^{s+t} \geq (\sqrt{n})^{s+t}c\,\mathcal{M}^s_\delta(A_\delta)$$

Como $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ era una $\sqrt{n}\,\delta$-cubierta arbitraria de E, tenemos que:

$$\mathcal{M}^{s+t}(E) \geq \mathcal{M}^{s+t}_{\sqrt{n}\,\delta}(E) \geq b\,c\,\mathcal{M}^s_\delta(A_\delta), \tag{1}$$

con $b = (\sqrt{n})^{s+t}$.

Sea $\varrho > 0$. Si escogemos $\delta \leq \varrho$, $A_\varrho \subseteq A_\delta$ y debido a (2):

$$\begin{aligned} b\,c\,\mathcal{M}^s_\delta(A_\varrho) &\leq b\,c\,\mathcal{M}^s_\delta(A_\delta) \leq \mathcal{M}^{s+t}(E), \\ \text{entonces } b\,c\,\mathcal{M}^s_\delta(A_\varrho) &\leq \mathcal{M}^{s+t}(E) \quad \forall\delta \leq \varrho. \end{aligned}$$

Haciendo δ tender a 0,

$$b\,c\,\mathcal{M}(A_\varrho) \geq \mathcal{M}^{s+t}(E) \quad \forall\varrho > 0.$$

Como por hipótesis $\mathcal{M}^t(E_x) > c$ para toda $x \in A$, $A_\varrho \to A$ cuando $\varrho \to 0$. Notemos que la sucesión $\{A_{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Entonces, por el teorema de continuidad de la medida:

$$\mathcal{M}^s(A) = \mathcal{M}^s\big(\lim_{n\to\infty} A_{\frac{1}{n}}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^s\big(A_{\frac{1}{n}}\big) \leq \frac{1}{b\,c}\mathcal{M}^{s+t}(E)$$

$$\text{Por lo tanto } \mathcal{M}^{s+t}(E) \geq b\,c\,\mathcal{M}^s(A)$$

$$\text{y } H^{s+t}(E) \geq b\,c\,H^s(A).$$

■

El siguiente corolario es precisamente el resultado que requeriremos para mostrar (en el siguiente capítulo) que para cualquier número real $d \in (0, n)$, existen tres subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con dimensión d; uno con d-medida igual a 0, otro con d-medida mayor que 0 y menor que infinito, y un último con d-medida igual a infinito. El corolario se utiliza para generalizar la proposición que muestra que lo anterior es cierto para $n = 1$, utilizando relaciones entre la d-medida de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y la nd-medida de $A^n = \prod_{i=1}^n A$ (el producto cartesiano de A, n veces).

Corolario 1 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $s, t \geq 0$. Entonces $H^{s+t}(A \times B) \geq H^s(A) H^s(B)$.*

Demostración:

Sea $E = A \times B$. Como $E_x = B$ para todo $x \in A$, entonces $H^t(E_x) = H^t(B)$ para todo $x \in A$. Supongamos que $H^t(B) > 0$ (de otro modo la desigualdad se cumple trivialmente). Sea $0 < \varepsilon < H^t(B)$. Entonces $H^t(E_x) > H^t(B) - \varepsilon$ para todo $x \in A$. Aplicando el teorema anterior tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} H^{s+t}(E) & \geq & b\,(H^t(B) - \varepsilon)\, H^s(A) \\ & = & b\, H^t(B) H^s(A) - \varepsilon\, b\, H^s(A) \quad \forall\, 0 < \varepsilon < H^t(B) \\ & \therefore & H^{s+t}(E) \geq b\, H^t(B)\, H^s(A). \end{array}$$

■

A partir de este corolario, se sigue la relación para las dimensiones de $A \times B$ y A, B:

Corolario 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Entonces $dim(A \times B) \geq dimA + dimB$.*

Demostración:

Supongamos que $dim(A \times B) < dimA + dimB$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $dim(A \times B) < dimA + dimB - \varepsilon$. Sea $s = dimA - \frac{\varepsilon}{2}$, $t = dimB - \frac{\varepsilon}{2}$. Aplicando el corolario anterior tenemos que:

$$0 = H^{dimA + dimB - \varepsilon}(A \times B) \geq b\, H^{dimA - \frac{\varepsilon}{2}}(A)\, H^{dimB - \frac{\varepsilon}{2}}(B) = b(\infty)(\infty) = \infty$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto $dim(A \times B) \geq dimA + dimB$.

■

Una última conclusión a partir de este corolario, es que para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, ocurre que $dim(A^n) \geq n\, dim(A)$ donde $A^n \subset \mathbb{R}^n$ denota al conjunto $A \times ... \times A$ (el producto cartesiano de A, n veces).

Ejemplos de dimensiones de conjuntos.

En este capítulo se ahondará sobre el concepto de dimensión de un conjunto definido en el Capítulo 2. La primera parte consiste en mostrar que, para cualquier número s en el intervalo $(0,1)$, existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ homeomorfo al conjunto de Cantor, con dimensión de Hausdorff s y medida H^s mayor que 0 y menor que infinito. Para demostrarlo haremos uso de un sencillo resultado pero de amplia aplicación, conocido como el *Principio de Distribución de Masa*.

Después, utilizando un resultado final del capítulo 3, demostraremos que, para cualquier $s \in (0,n)$, existen tres subconjuntos $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ con dimensión s, tales que $H^s(A) = 0$, $H^s(B) = \infty$ y $0 < H^s(C) < \infty$.

Este teorema es ilustrativo porque muestra que para cualquier dimensión s no entera, existe un conjunto A que con la s-medida de Hausdorff puede ser medido "adecuadamente", pues su s-medida es mayor que 0 y menor que ∞; a diferencia de la medida de Lebesgue $[s]$ que es igual a ∞ y la medida de Lebesgue $[s]+1$ que es igual a 0 (debido al Teorema 8 del Capítulo 2). Entonces, las s-medidas miden con mayor precisión a los borelianos que las medidas de Lebesgue. Sin embargo, no son suficientemente precisas para asegurar que para cualquier subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ existe una s-medida que realice una ponderación exitosa (distinta de 0 y de infinito) pues existen B y C conjuntos con dimensión s, con s-medida 0 e infinito respectivamente; lo que es una medición mala, similar a la que realizan las medidas de Lebesgue $[s]$ y $[s]+1$.

Definición 1 *Una distribución de masa en un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es una medida exterior μ tal que*

1. $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$.

2. *$sop(\mu) = E$, donde $sop(\mu)$, el soporte de μ, denota al menor cerrado A tal que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$.*

Enunciamos a continuación el Principio de distribución de masa.

Lema 1 *Sea μ una distribución de masa en $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si para $s > 0$ existen $c, \delta > 0$ tales que:*

$$\mu(U) \leq c\, diám(U)^s \qquad \forall\, U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ con } diám(U) \leq \delta\,,$$

entonces

$$H^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0.$$

Nota: De aquí se concluye que $dim\, E \geq s$.

Demostración:

Sea $\delta_1 < \delta$. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ_1-cubierta de E. Debido a la hipótesis:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(U_i)^s \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\mu(U_i)}{c} \geq \frac{1}{c}\,\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\Big).$$

Pero $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta de E, por lo que $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) \geq \mu(E)$. Así,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(U_i)^s \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0.$$

Como la desigualdad se cumple para cualquier δ_1 cubierta, se cumple para el ínfimo de los valores, por lo que $H^s_{\delta_1}(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0$ para cualquier $\delta_1 < \delta$. Por lo tanto $H^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0$. Como $H^s(E) > 0$, $dim(E) \geq s$.

■

El lema anterior es útil para el cálculo de medidas de Hausdorff pues provee la desigualdad que es difícil de calcular directamente: $H^s(A) > c$, para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $c > 0$. Se mostrará a continuación una aplicación de este lema.

Para cada $a \in (0, \frac{1}{2})$ definamos el siguiente conjunto $C^a \subseteq \mathbb{R}$: sea $C_0^a = [0,1]$, $C_1^a = [0,a] \cup [1-a, 1]$, $C_2^a = [0, a^2] \cup [a-a^2, a] \cup [1-a, 1-a+a^2] \cup [1-a^2, 1]$, y así sucesivamente. Se define $C^a = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^a$. Este conjunto es homeomorfo al clásico conjunto de Cantor; la diferencia es que los intervalos en la construcción del conjunto tienen diferente proporción con respecto a su complemento en el $[0,1]$. Cuando $a = \frac{1}{3}$, C^a es el conjunto de Cantor.

Calculemos su dimensión de Hausdorff. Definamos $s = -\frac{log2}{loga} > 0$. La desigualdad $H^s(C^a) \leq 1$ se prueba a continuación:

Sea $\delta > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \leq \delta$. Llamemos $\{I_n^i\}_{i=1}^{2^n}$ a los intervalos que conforman C_n^a. Entonces $\{I_n^i\}$ es una δ-cubierta de C^a y

$$\sum_{i=1}^{2^n} diám(I_n^i)^s = \sum_{i=1}^{2^n} (a^n)^s = 2^n(a^n)^s = 1.$$

La última igualdad se debe a los siguientes cálculos:

$$a^{\frac{1}{log(\frac{1}{a})}} = (e^{log(a)})^{\frac{1}{log(\frac{1}{a})}} = (e^{log(a)})^{\frac{1}{-log(a)}} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow (a^n)^s = a^{\frac{nlog(2)}{log(\frac{1}{a})}} = (a^{log(\frac{1}{a})})^{nlog(2)} = (e^{-1})^{nlog(2)} = e^{-nlog(2)} = e^{log(2^{-n})} = 2^{-n}.$$

Por lo tanto, existe $\{I_n^i\}$ una δ-cubierta tal que:

$$\sum_{i=1}^{2^n} diám(I_n^i)^s = 1,$$

De lo que se sigue que $H_\delta^s(C^a) \leq 1$ para toda $\delta > 0$, por lo cual $H^s(C^a) \leq 1$.

La desigualdad en el sentido contrario se probará construyendo una distribución de masa sobre el conjunto C^a que cumpla con las hipótesis del Principio de distribución de masa.

Se define primero una premedida τ de la siguiente manera: $\tau((C^a)^c) = \tau(\emptyset) = 0$, y para cada intervalo i en el n-ésimo paso de construcción I_n^i:

$$\tau(I_n^i) = diam(I_n^i)^s = (a^n)^{-\frac{log(2)}{log(a)}}.$$

Llamemos $\mathcal{F}$ a la familia de conjuntos en donde está definida τ.

A partir de la medida primitiva τ se define la medida exterior μ:

$$\mu(A) = \text{ínf}\Big\{\sum_i \tau(A_i) : A \subseteq \bigcup_i A_i,\ A_i \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{(C^a)^c, C_0^a\}$ es una cubierta, por lo que μ está bien definida. Debido a la construcción de C^a, C^a es un conjunto compacto. También es claro que el soporte de μ es precisamente C^a, pues la definición de τ permite refinamientos sucesivos de cualquier cubierta dada, para cualquier conjunto que intersecta al complemento de C^a. Y $0 < \mu(\mathbb{R}) = 1 < \infty$.

Basta verificar que μ satisface la condición de desigualdad del lema. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $di\acute{a}m(U) \leq a^2(1-2a)$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^{k+1}(1-2a) \leq di\acute{a}m(U) < a^k(1-2a)$ (existe debido a que $di\acute{a}m(U) \leq a^2(1-2a)$). Como U es tal que $di\acute{a}m(U) < a^k(1-2a)$, U intersecta a lo más a un intervalo $I_{k+1}^{i_0}$ pues los huecos en el $(k+1)$-ésimo paso de construcción de C^a miden por lo menos $a^k(1-2a)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(U) &\leq \mu(I_{k+1}^{i_0}) \\
&= di\acute{a}m(I_{k+1}^{i_0})^s \\
&= (a^{k+1})^s \\
&= \frac{1}{(1-2a)^s}\left[a^{k+1}(1-2a)\right]^s \\
&\leq \frac{1}{(1-2a)^s}\, di\acute{a}m(U)^s
\end{aligned}$$

lo que muestra que la distribución de masa μ cumple las hipótesis del lema y por lo tanto $H^s(C^a) > 0$. Combinando esta conclusión con la desigualdad $H^s(C^a) \leq 1$, se sigue que $0 < H^s(C^a) < \infty$ y por lo tanto $dim\, C^a = s$.

■

Lo anterior muestra que en particular, la dimensión del conjunto de Cantor es $s = \frac{log2}{log3}$ y además que su s-medida es mayor que 0 y menor que ∞. De hecho, su s-medida es igual a 1 [Fa].

La construcción de la distribución de masa en la demostración anterior, puede ser utilizada en distintas situaciones. Notemos que en ningún momento se utilizó la geometría específica del conjunto; puede contruirse una distribución de masa análoga para un conjunto que sea la intersección de iteraciones en donde en cada iteración se define a un nuevo conjunto como la unión de subconjuntos conexos del conjunto anterior, pero no conexos entre ellos.

Antes de demostrar una relación entre la s-medida de Hausdorff de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y la ns-medida de A^n (donde A^n denota al producto cartesiano $\prod_{i=1}^n A$), demostraremos un lema que utilizaremos en la demostración.

Lema 2 *Sean* $\{a_i\}_{i=1}^n$ *una sucesión finita de números positivos y* $0 < r \leq 1$. *Entonces:*

$$\Big(\sum_1^n a_i\Big)^r \leq \sum_1^n a_i^r.$$

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre n. Primero mostraremos el caso $n = 2$. Sean $a, b > 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $a \leq b$. Definamos $x = \frac{b}{a}$. Entonces $x \geq 1$ y se tiene:

$$\begin{aligned}(a+b)^r \leq a^r + b^r \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{(a+b)^r}{a^r} \leq \frac{a^r + b^r}{a^r} \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(1 + \frac{b}{a}\Big)^r \leq 1 + \Big(\frac{b}{a}\Big)^r \\ &\Longleftrightarrow \quad (1+x)^r \leq 1 + x^r.\end{aligned}$$

Definamos a la función $f(x) = x^r$. Entonces $f'(x) = rx^{r-1}$, y por el teorema del valor medio existe $\psi \in (x, x+1)$ tal que

$$f(x+1) - f(x) = f'(\psi).$$

Y entonces

$$f(x+1) - f(x) = f'(\psi) = \frac{r}{\psi^{1-r}} \leq \frac{r}{\psi} \leq r \leq 1$$

donde la primera desigualdad se debe a que $1 \leq x < \psi$ y $0 \leq 1 - r < 1$, por lo que $\psi^{1-r} \leq \psi$.

Por lo tanto $(x+1)^r \leq 1 + x^r$ y entonces $(a+b)^r \leq a^r + b^r$ para toda $a, b > 0$, $0 < r \leq 1$, lo que prueba la desigualdad para el caso $n = 2$.

Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para $n = k - 1$. Se mostrará que también lo es para $n = k$. Tenemos:

$$\Big(\sum_1^k a_i\Big)^r = \Big(\sum_1^{k-1} a_i + a_n\Big)^r \leq \Big(\sum_1^{k-1} a_i\Big)^r + a_n^r$$

aplicando la desigualdad para dos sumandos, tomando $a = \sum_1^{k-1} a_i$ y $b = a_n$. Por la hipótesis inductiva:

$$\left(\sum_1^{k-1} a_i\right)^r + a_n^r \leq \sum_1^{k-1} a_i^r + a_n^r = \sum_1^{k} a_i^r.$$

$$\text{Por lo tanto } \left(\sum_1^{k} a_i\right)^r \leq \sum_1^{k} a_i^r\,,$$

$$\text{y se concluye } \left(\sum_1^{n} a_i\right)^r \leq \sum_1^{n} a_i^r \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

■

Teorema 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Definamos $A^n = \prod_{i=1}^n A$ denotando al producto cartesiano de A, n veces. Sea $0 \leq s \leq 1$. Entonces*

1. *Si $H^s(A) = 0$ entonces $H^{ns}(A^n) = 0$.*
2. *Si $H^s(A) < \infty$ entonces $H^{ns}(A^n) < \infty$.*
3. *Si $H^s(A) > 0$ entonces $H^{ns}(A^n) > 0$.*
4. *Si $H^s(A) = \infty$ entonces $H^{ns}(A^n) = \infty$.*

Demostración:

1) *Si $H^s(A) = 0$ entonces $H^{ns}(A^n) = 0$.*

Supongamos que $H^{ns}(A^n) > 0$; demostraremos que $H^s(A) > 0$.

Sabemos que $H^{ns}(A^n) = k > 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta \leq \varepsilon$,

$$H_\delta^{ns}(A^n) \geq c > 0.$$

Lo anterior se debe a que $H^{ns}(A^n)$ es el límite cuando δ tiende a 0 de $H_\delta^{ns}(A^n)$, por lo que existe una vecindad en donde todos los valores son mayores que una constante mayor que 0 (pues el límite es $k > 0$).

Sea $\delta < \frac{\text{mín}(\varepsilon,1)}{n}$. Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta de A. Definamos $B_{i_1,\ldots,i_n} = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$.

Sea $x \in A^n$. Entonces $x = (x_1, ..., x_n)$ donde $x_i \in A$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es cubierta de A, existen $A_{i_1}, ..., A_{i_n}$ tales que $x_{i_j} \in A_{i_j}$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto $x \in A_{i_1} \times ... \times A_{i_n} = B_{i_1,...,i_n}$ y como además:

$$diám(B_{i_1,...,i_n}) \leq \sum_{j=1}^{n} diám(A_{i_j}) \leq n\delta \leq n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

se concluye que $\{B_{i_1,...,i_n}\}$ es una ε-cubierta de A^n.

Por otro lado:

$$diám(B_{i_1,...,i_n}) \leq \sum_{j=1}^{n} diám(A_{i_j}) \leq n\delta \leq n\frac{1}{n} = 1.$$

Como $diám(B_{i_1,...,i_n}) \leq 1 \quad \forall\, i_1, ..., i_n$,

$$diám(B_{i_1,...,i_n})^n \leq diám(B_{i_1,...,i_n}) \leq \sum_{j=1}^{n} diám(A_{i_j}) \quad \forall\, i_1, ..., i_n$$

entonces

$$diám(B_{i_1,...,i_n})^{ns} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} diám(A_{i_j})\Big)^s \quad \forall\, i_1, ..., i_n.$$

Debido al Lema 8,

$$diám(B_{i_1,...,i_n})^{ns} \leq \sum_{j=1}^{n} diám(A_{i_j})^s \quad \forall\, i_1, ..., i_n.$$

Sumando sobre todos los términos obtenemos:

$$\sum_{i_1,...,i_n} diám(B_{i_1,...,i_n})^{ns} \leq \sum_{i_1,...,i_n} \sum_{j=1}^{n} diám(A_{i_j})^s$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j} diám(A_{i_j})^s = n \sum_{i} diám(A_i)^s.$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{i_1,...,i_n} diám(B_{i_1,...,i_n})^{ns} \leq n \sum_{i} diám(A_i)^s$.

Y así:

$$0 < c \leq H^{ns}_{\varepsilon}(A^n) \leq \sum_{i_1,\ldots,i_n} diám(B_{i_1,\ldots,i_n})^{ns} \leq n \sum_i diám(A_i)^s.$$

Hemos probado que para toda $\delta < \frac{\text{mín}(\varepsilon,1)}{n}$, para cualquier δ-cubierta $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(A_i)^s \geq \frac{c}{n} > 0.$$

Como ocurre para cualquier δ-cubierta, el ínfimo de las sumas de las δ-cubiertas también lo cumple:

$$\begin{aligned} H^s_\delta(A) &\geq \frac{c}{n} > 0 \qquad \forall\, \delta < \frac{\text{mín}(\varepsilon,1)}{n} \\ \text{lo que implica } H^s(A) &= \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(A) \geq \frac{c}{n} > 0 \\ \text{y por tanto } H^s(A) &> 0. \end{aligned}$$

2) *Si* $H^s(A) < \infty$ *entonces* $H^{ns}(A^n) < \infty$.

Por hipótesis existe $c > 0$ tal que $H^s_\delta(A) < c < \infty$ para toda $\delta > 0$. Sea $\delta < \frac{1}{n}$. Por ello, existe una $\frac{\delta}{n}$ -cubierta $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(A_i)^s < c.$$

Definamos $B_{i_1,\ldots,i_n} = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$. De la misma manera que en el punto 1) se concluye que:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} diám(B_{i_1,\ldots,i_n})^{ns} \leq n \sum_{i\in\mathbb{N}} diám(A_i)^s.$$

Como $\sum_{i\in\mathbb{N}} diám(A_i)^s < c$, entonces:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} diám(B_{i_1,\ldots,i_n})^{ns} \leq nc.$$

Por lo tanto, para toda $\delta < \frac{1}{n}$, existe $\{B_{i_1,\ldots,i_n}\}$ δ-cubierta de A^n tal que:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} diám(B_{i_1,\ldots,i_n})^{ns} \leq nc.$$

Por lo tanto

$$H^{ns}_{\delta}(A^{ns}) = \text{ínf}\left\{ \sum_i diám(C_i)^{ns} |\, A^n \subseteq \bigcup_i C_i\,,\, diám(C_i) < d \right\} < nc$$

para toda $\delta < \text{mín}\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right)$.

Se concluye que $H^{ns}(A^{ns}) = \text{lím}_{\delta\to 0} H^{ns}_{\delta}(A^{ns}) < nc$.

3) Si $H^s(A) > 0$ entonces $H^{ns}(A^n) > 0$.

Se sigue inmediatamente a partir del Corolario 4 del Capítulo 3.

4) Si $H^s(A) = \infty$ entonces $H^{ns}(A^n) = \infty$.

También se sigue inmediatamente del Corolario 4 del Capítulo 3.

■

La relación encontrada en el teorema anterior, nos provee de una manera sencilla para encontrar conjuntos con una dimensión determinada a través del producto cartesiano de conjuntos en $\mathbb{R}$ de los cuales conocemos su dimensión. El siguiente teorema utiliza los conjuntos homeomorfos a Cantor, analizados previamente en este capítulo.

Teorema 2 *Sea $d \in (0, n)$. Entonces existen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $dim\, A = dim\, B = dim\, C = d$ y*

$$\begin{aligned} 0 < \quad H^d(A) \quad &< \infty. && (1)\\ H^d(B) \quad &= \quad \infty. && (2)\\ H^d(C) \quad &= \quad 0. && (3) \end{aligned}$$

Demostración:

(1) Sea $s = \frac{d}{n}$. Sea $a = 2^{-\frac{1}{s}}$. Como $s \in (0,1)$ tenemos que $\frac{1}{s} \in (1, \infty)$, lo que implica $2^{\frac{1}{s}} > 2$, por lo que $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto podemos asociarle un conjunto C^a homeomorfo a Cantor como los construidos en la sección anterior. Como $a = 2^{-\frac{1}{s}}$, entonces $s = \frac{ln2}{ln\frac{1}{a}}$. Por lo tanto el conjunto C^a tiene dimensión s y $0 < H^s(C^a) < \infty$. Definamos al conjunto A como $A = \prod_{i=1}^{n} C^a$. Debido al Teorema 11, se concluye que $dim\, A = ns = n\,\frac{d}{n} = d$

y además que $0 < H^d(A) < \infty$.

(2) Se mantiene la notación de s y a utilizada en (1). Sea $B^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} C^a_{+\,i}$ donde $C^a_{+\,i}$ denota al conjunto C^a trasladado i unidades a la derecha. Notemos que:

$$H^s(B^*) = H^s(\bigcup_{i=0}^{\infty} C^a_{+\,i}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^s(C^a_{+\,i}).$$

Sabemos (por el Corolario 1) que H^s es invariante bajo traslaciones, así

$$H^s(B^*) = \sum_{i=0}^{\infty} H^s(C^a) = \infty,$$

debido a que $H^s(C^a) > 0$. Definamos B como $B = \prod_{i=1}^{n} B^*$. Utilizando el Teorema 11 se concluye que $dim\, B = d$ y además que $H^d(B) = \infty$.

(3) Se mantiene la notación de s y a. Definamos la sucesión $\left\{s_i = s - \frac{1}{1+i}\right\}_{i=0}^{\infty}$. De manera análoga a (1), para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos a_i tal que $dim\, C^{a_i} = s_i$. Definamos ahora $C^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} C^{a_i}_{+\,i}$. Debido a la Observación 3,

$$dim\, C^* = dim\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} C^{a_i}_{+\,i}\right) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{dim\, C^{a_i}_{+\,i}\} = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{s_i\} = s.$$

Por otro lado:

$$H^s(C^*) = H^s\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} C^{a_i}_{+\,i}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} H^s(C^{a_i}_{+\,i}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0$$

donde la penúltima igualdad se debe a que $dim\, C^{a_i}_{+\,i} = s_i = s - \frac{1}{1+i} < s$. Definamos $C = \prod_{i=1}^{n} C^*$. Del Teorema 11 se sigue que $dim\, C = d$ y que $H^d(C) = 0$.

■

El Teorema 11 nos muestra cómo la s-medida de Hausdorff tiene mayor eficacia que la medida de Lebesgue para medir conjuntos con dimensión no entera s. Sin embargo, existen conjuntos con dimensión s en donde la s-medida de Hausdorff es inadecuada para medirlos. En el siguiente capítulo se mostrará que la dimensión de Hausdorff de las trayectorias del Movimiento Browniano es 2 y que su 2-medida es 0, casi seguramente; es decir, que las trayectorias del Movimiento Browniano son conjuntos que no pueden ser medidos adecuadamente por las s-medidas. La solución propuesta para este tipo de conjuntos, es utilizar otra medida de Hausdorff μ^h asociada a una función h diferente a x^s. Sin embargo, encontrar la función h requerida y hacer los cálculos correspondientes puede ser una labor difícil.

Dimensión y s-medida del Movimiento Browniano Plano.

En este capítulo se calculan la dimensión de Hausdorff y la medida 2-dimensional de las trayectorias del Movimiento Browniano.

Para comenzar, se presenta la definición del Movimiento Browniano y algunas propiedades que se utilizarán en el capítulo. Citaremos las fuentes en donde se hacen los desarrollos necesarios del Movimiento Browniano, intentando dar una idea intuitiva de lo que sucede.

Para calcular la dimensión de las trayectorias brownianas, se requiere de un concepto de la Teoría del Potencial conocido como *la capacidad de un conjunto*. Por ello se incluye una introducción a la teoría del potencial y después se examina la relación entre la capacidad de un conjunto y su dimensión. Esto permitirá demostrar que la s-medida de Hausdorff de las trayectorias Brownianas es igual a infinito para toda $s < 2$, casi seguramente.

Finalmente, se formaliza la prueba de [Le] de que las trayectorias del Movimiento Browniano plano tienen 2-medida igual a 0, casi seguramente. Este resultado, aunado a que la s-medida de las trayectorias brownianas es igual a infinito para toda $s < 2$, nos permitirá concluir que la dimensión de las trayectorias brownianas planas es igual 2, casi seguramente. Este hecho es sorprendente, pues a diferencia de las curvas diferenciables (que tienen dimensión 0,[Fa], ejercicio 8.2) las trayectorias del Movimiento Browniano, tienen dimensión 2, tal como una figura plana. Sin embargo, su 2-medida es igual a 0, es decir, que son trayectorias con área igual a 0.

Empecemos con la definición de un proceso estocástico.

Sea $\mathbb{R}^n$ con la σ-álgebra de los borelianos y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es una función $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ para $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$; con valores en $\mathbb{R}^n$, tal que para cada $t \geq 0$, $X_t(\cdot)$ es una función medible de Ω en $\mathbb{R}^n$. Usualmente se asocia a la variable t con el tiempo. Lo siguiente es la definición del Movimiento Browniano.

Definición 1 *Sea un proceso estocástico $\{B(t),\, t \geq 0\}$. Decimos que $\{B(t),\, t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano si cumple:*

- $B(0) = 0$.
- $\{B(t), t \geq 0\}$ *tiene incrementos independientes, es decir si $t_0 < t_1 < ... < t_n$, entonces $B_(t_0), B(t_1) - B(t_0), ..., B(t_n) - B(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.*
- $B(t+s) - B(s)$ *tiene distribución gaussiana con media 0 y varianza $\sigma^2 tI$ (donde I es la matriz identidad) para toda $t > 0$ y $s \geq 0$.*
- $B(t)$ *tiene trayectorias continuas, casi seguramente.*

Si en el tercer punto de la definición anterior, $\sigma = 1$, llamamos al proceso Movimiento Browniano estándar.

Para la verificación de que existe un proceso estocástico como el que definimos arriba, se refiere al lector a [Dur], capítulo 7, teorema 1.3. Otra observación es que el último punto de la definición no es necesario pues el Teorema de Wiener [Dud] (capítulo 12, teorema 12.1.5) asegura que un proceso estocástico que cumple los puntos anteriores es continuo, casi seguramente.

El siguiente lema presenta la Propiedad de escalamiento del Movimiento Browniano. Esta propiedad, intuitivamente, es que la trayectoria de un Movimiento Browniano hasta un tiempo $T > 0$, tiene las mismas propiedades estocásticas que la trayectoria hasta el tiempo 1, multiplicada por un factor que depende de T (en el sentido de multiplicar un escalar por un conjunto). Esto quiere decir que las trayectorias del Movimiento Browniano cortadas a diferentes tiempos son iguales estocásticamente excepto por un factor de escalamiento.

Lema 1 (Propiedad de escalamiento) *Sea $a > 0$ y $\{B(t),\, t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano. Entonces el proceso $B_a(t) = \{\sqrt{a}B(\frac{t}{a}),\, t \geq 0\}$ es también un Movimiento Browniano.*

Demostración:

Notemos que debido a que $\{B(t), t \geq 0\}$ es continuo y tiene incrementos independientes, $\{B_a(t) \geq 0\}$ también es continuo y tiene incrementos independientes. Debido a que $B(t+s) - B(t)$ tiene distribución gaussiana para toda $t > 0$, $\sqrt{a}\,[B(\frac{t}{s} + \frac{s}{a}) - B(\frac{t}{a})] = B_a(t+s) - B_a(s)$ también tiene distribución gaussiana.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_a(t+s) - B_a(s)) &= \mathbb{E}\Big(\sqrt{a}B\Big(\frac{t+s}{a}\Big) - \sqrt{a}B\Big(\frac{t}{a}\Big)\Big) \\
&= \sqrt{a}\,\mathbb{E}\Big(B\Big(\frac{t}{s} + \frac{s}{a}\Big) - B\Big(\frac{t}{a}\Big)\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Denotemos por $\mathbb{V}ar(X)$ a la varianza de la variable aleatoria X. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(B_a(t+s) - B_a(s)) &= \mathbb{V}ar\Big(\sqrt{a}[B\Big(\frac{t}{a} + \frac{s}{a}\Big) - B\Big(\frac{t}{a}\Big)]\Big) \\
&= a\mathbb{V}ar\Big(B\Big(\frac{t}{a} + \frac{s}{a}\Big) - B\Big(\frac{t}{a}\Big)\Big) \\
&= a[\sigma^2\Big(\frac{t}{a}\Big)I] \\
&= \sigma^2 tI.
\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que $\{B_a(t),\, t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano.

■

Otra propiedad del Movimiento Browniano es el Principio de Reflexión.

Teorema 1 (Principio de Reflexión) *Sea* $\{B(t), t \geq 0\}$ *un Movimiento Browniano. Definamos*

$$M(t) = \sup\{B(s); 0 \leq s \leq t\}$$

como el proceso que sigue al máximo del Movimiento Browniano hasta el valor t. *Sea* $m > 0$, *definamos*

$$T_m = \acute{\imath}nf\{s > 0 : B(s) = m\}$$

como el tiempo de primer "arribo"del Movimiento Browniano al valor m. Entonces,

$$\mathbb{P}(M(t) \geq m) = \mathbb{P}(T_m \leq t) = \int_m^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx.$$

Trataremos de dar una intuición de qué es lo que sucede. Definamos otro proceso estocástico $\{R(s), s \geq 0\}$ de la siguiente manera:

$$R(s) = \begin{cases} B(s), & \text{para } s < T_m, \\ 2m - B(s) & \text{para } s \geq T_m. \end{cases}$$

El proceso $\{R(s), s \geq 0\}$ puede ser visto gráficamente como la reflexión de la trayectoria del Movimiento Browniano $\{B(t), t \geq 0\}$, después del tiempo T_m, con eje de reflexión en la recta horizontal $y = m$ (antes coincide con el Movimiento Browniano). Se puede notar que $R(t) \leq m$ cuando $B(t) \geq m$.

La afirmación del principio de reflexión es que la trayectoria original y la reflejada son iguales en distribución, siguiendo la intuición dada por la simetría de la distribución normal. Para ello, se utiliza la propiedad de Markov Fuerte, que asegura que el tiempo T_m tiene propiedades de medibilidad deseables, y que el proceso

$$B^*(t) = B(T_m + t) - B(T_m)$$

es un Movimiento Browniano independiente de $B(s)$, para $s < T_m$. Además, observa que la reflexión es una transformación biyectiva, y por lo tanto

$$\mathbb{P}(T_m \geq t, B(t) > m) = \mathbb{P}(T_m \geq t, B(t) < m). \tag{2}$$

Los desarrollos necesarios para demostrarlo se pueden consultar en [**?**].

La siguiente observación nos permite hallar la distribución de T_m de manera simple. Notemos que el evento $\{B(t) > m\}$ está contenido en el evento $\{T_m < t\}$. Así,

$$\mathbb{P}(T_m \leq t, B(t) > m) = \mathbb{P}(B(t) > m). \tag{3}$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_m \le t) &= \mathbb{P}(T_m \le t; B(t) > m) + \mathbb{P}(T_m \le t, B(t) < m) \\
&= 2\,\mathbb{P}(T_m \le t, B(t) > m), \text{ debido a (7)} \\
&= 2\,\mathbb{P}(B(t) > m), \text{ por (8)} \\
&= \mathbb{P}(|B(t)| > m), \text{ por simetría de la distribución normal} \\
&= \int_m^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx,
\end{aligned}$$

lo que demuestra la segunda igualdad.

Para demostrar la primera igualdad, notemos que $T_m \ge t$ si y sólo si el proceso máximo en t ha alcanzado ya el valor m y entonces $T_m \ge t$ si y sólo si $M(t) \ge m$. Se sigue la igualdad de conjuntos $\{M(t) \ge m\} = \{T_m \le t\}$ y por lo tanto la primera igualdad.

■

Para calcular la dimensión de las trayectorias del Movimiento Browniano, en nuestro contexto, requeriremos la capacidad de un conjunto. Las s-capacidades de un conjunto no coinciden con las s-medidas del conjunto pero guardan una estrecha relación; la dimensión de un conjunto se expresa a través de las s-capacidades del conjunto. Debido a que forman parte de la teoría de potencial, examinaremos algunos propiedades de esta teoría en busca de esa relación.

Revisemos las definiciones de la teoría del potencial.

En este capítulo cuando hablemos de una distribución de masa, nos referiremos a la medida boreliana que se obtiene al aplicar el Teorema de Carathéodory (Teorema 2) a una distribución de masa, que es una medida exterior distinta de 0, finita y con soporte compacto(Capítulo 4).

Definición 2 *El t-potencial en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ debido a la distribución de masa μ se define como*

$$\Phi_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t}.$$

Definición 3 *La t-energía de μ está dada por*

$$I_t(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^t}.$$

Definición 4 *Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, se define la t-capacidad de E, denotada por $C_t(E)$, como*

$$C_t(E) = \sup_{\mu} \left\{ \frac{1}{I_t(\mu)} \mid sop\ \mu = E,\ \mu(E) = 1 \right\},$$

con la convención de que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Definición 5 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. La t-capacidad de E se define como*

$$C_t(E) = \sup \{C_t(F) \mid F \text{ es compacto, } F \subseteq E\}.$$

Antes de examinar a la capacidad de un conjunto observemos dos resultados preliminares de análisis real que utilizaremos.

Lema 2 *Sea $\mathcal{L}^r$, definido como sigue:*

$$\mathcal{L}^r = \begin{cases} \{f : f \text{ es } \mu - medible, \int |f|^r d\mu < \infty\} & si\ 0 < r < \infty \\ \{f : f \text{ es } \mu - medible, f \text{ es acotada}\mu\text{-casi dondequiera}\} & si\ r = \infty. \end{cases}$$

Si $\mu(X) < \infty$ y $0 < p < q \leq \infty$, entonces $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$.

Demostración:

Si $q = \infty$,

$$||f||_p^p = \int |f|^p \leq ||f||_\infty^p \int 1 = ||f||_\infty^p \mu(X)$$

y entonces $||f||_p \leq ||f||_\infty \ \mu(X)^{1/p}$.

Si $q < \infty$, usamos la desigualdad de Hölder con $\frac{p}{q}$ y $\frac{q}{q-p}$ y tenemos:

$$||f||_p^p = \int |f|^p \cdot 1 \leq |||f|^p||_{\frac{q}{p}} ||1||_{\frac{q}{q-p}} = ||f||_q^p \ \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}.$$

■

El teorema siguiente es una consecuencia del teorema de Radon-Nykodym: utiliza hipótesis más fuertes y tiene resultados más débiles. Sin embargo, se demostrará aquí directamente.

Teorema 2 *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *y* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *espacios de medida tales que*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

para alguna f *no negativa y* μ*-medible. Sea* g *no negativa y* ν*-integrable. Entonces* gf *es no negativa,* μ*-integrable, y:*

$$\int_E g\, d\nu = \int_E gf\, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}. \tag{4}$$

Demostración:

Sea $E \in \mathcal{M}$. Supongamos primero que $g = \chi_A$, para algún $A \in \mathcal{M}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_E gf\, d\mu = \int_E \chi_A f\, d\mu = \int_{E\cap A} f\, d\mu = \nu(E \cap A) \\ = \int \chi_{E\cap A}\, d\nu = \int_E \chi_A\, d\nu = \int_E g\, d\nu, \end{aligned}$$

lo que prueba (9).

Si g es una función simple, debido a la linealidad de la integral, también se cumple (9) y g es μ-integrable. Sea g no negativa y ν-integrable. Entonces existe una sucesión no decreciente de funciones simples $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a g. Debido al teorema de convergencia monótona,

$$\int_E g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\, d\nu,$$

y como para funciones simples se cumple (9),

$$\int_E g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n f\, d\mu.$$

Notemos que $\{\varphi_n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente de funciones no negativas que converge a gf. Entonces, usando nuevamente el teorema de convergencia monótona,

$$\int_E g\, d\nu = \int_E gf\, d\mu,$$

que era lo que queríamos demostrar.

$\blacksquare$

Notemos que $C_t(E) > 0$ si y sólo si existe μ distribución de masa, con soporte contenido en E tal que $I_t(\mu) < \infty$, debido a la definición.

A continuación, se muestra una propiedad simple de la capacidad de un conjunto. Se incluye aquí por ser de amplia aplicación.

Lema 3 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $C_t(E) = 0$ entonces $C_s(E) = 0 \quad \forall\ s > t$.*

Demostración:

Supongamos $C_t(E) = 0$. Entonces para cualquier μ tal que *sop* $\mu = E$ y $\mu(E) = 1$, ocurre que $I_t(\mu) = \infty$. Debido al Lema 10, $I_s(\mu) = \infty$, $\forall s > t$ y entonces $C_s(E) = 0$, $\forall s > t$.

■

Enseguida, se muestran dos lemas técnicos, necesarios para la demostración del teorema que relaciona a la dimensión de un conjunto con su capacidad.

Lema 4 *Sea E compacto, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $H^s(E) < \infty$. Sea μ una distribución de masa con soporte E, y sea*

$$F = \left\{ x \in E \,:\, \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} = 0 \right\}.$$

Entonces $\mu(F) = 0$.

Demostración:

Sean $\alpha, \varrho > 0$ fijas y sea

$$F = \left\{ x \in E \,:\, \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} < \alpha \ \ \forall\ r \leq \varrho \right\}.$$

Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cubierta cualquier de F, con $\delta \leq \varrho$. Entonces, suponiendo que cada U_i contiene un punto de F, existen bolas $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con centro en un punto en F tales que

$$\textit{diám}(B_i) \leq 2\, \textit{diám}(U_i) \leq 2\varrho$$

y con $U_i \subseteq B_i$, para cada i. Tenemos que $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cubre a F, por lo que

$$\mu(F) \leq \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i). \tag{5}$$

Como $\frac{di\acute{a}m(B_i)}{2} \leq \varrho$, y B_i es una bola centrada en F,

$$\frac{\mu(B_i)}{(\frac{di\acute{a}m(B_i)}{2})^s} < \alpha,$$

es decir,

$$\mu(B_i) < \alpha\, di\acute{a}m(B_i)^s 2^{-s}.$$

Así, debido a (10),

$$\mu(F) < 2^{-s}\alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} di\acute{a}m(B_i)^s,$$

y como

$$\frac{di\acute{a}m(B_i)}{2} \leq di\acute{a}m(U_i)$$

se sigue que

$$\mu(F) < \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} di\acute{a}m(U_i)^s.$$

Como $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ era una δ-cubierta arbitraria, $\mu(F) \leq \alpha H^s_\delta(F)$, por lo que $\mu(F) \leq \alpha H^s(F)$. Como $\alpha H^s(F) \leq \alpha H^s(E)$ y α puede ser escogida arbitrariamente pequeña al igual que ϱ, se concluye que $\mu(F) = 0$.

■

El siguiente lema se presenta sin demostración. La prueba se puede consultar en [Fa] (capítulo 5, teorema 5.6).

Lema 5 *Sea E un boreliano de $\mathbb{R}^n$ con $H^s(E) > 0$. Entonces existe un conjunto compacto $F \subseteq E$ tal que $H^s(F) > 0$ y*

$$H^s(B_r(X) \cap F) \leq br^s \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r \leq 1,$$

para alguna constante b.

El siguiente teorema es el que relaciona estrechamente a la dimensión de un conjunto con su capacidad; la dimensión de un conjunto E se puede expresar como $dim\, E = \sup_t\{C_t(E) > 0\}$, como corolario del teorema.

Teorema 3 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano.*

a) *Si $C_t(E) = 0$, entonces $H^s(E) = 0$, $\forall s > t$.*

b) *Si $H^s(E) < \infty$ entonces $C_s(E) = 0$.*

Demostración:

(a) Supongamos que E es un boreliano con $H^s(E) > 0$. Demostraremos que $C_t(E) > 0$ con $t < s$, encontrando una distribución de masa con soporte compacto contenido en E tal que $I_t(\mu) < \infty$. Debido al Lema 13, existe un compacto $F \subset E$, con $0 < H^s(F) < \infty$ y tal que:

$$H^s\left(B_r(x) \cap F\right) \leq br^s \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ r < 1)$$

para alguna constante b.

Sea $\mu = H^s \chi_F$. Por la definición de s-medida, μ es una distribución de masa con soporte F.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y llamemos $m(r)$ a $\mu(B_r(x))$. Entonces,

$$\Phi_t(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} = \int_{|x-y|\leq 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} + \int_{|x-y|>1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t}.$$

Sea $r = |x-y|$. Como $m(r) \leq br^s$, cuando $r \leq 1$, tenemos

$$\int_{|x-y|\leq 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} = \int_0^1 \frac{d(\mu(B_r(x)))}{r^t} = \int_0^1 \frac{dm(r)}{r^t}. \tag{6}$$

Por otro lado, si tenemos que $|x-y| > 1$ entonces $\frac{1}{|x-y|^t} \leq 1$ y así

$$\int_{|x-y|>1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \leq \mu(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

De (11) y (12) se sigue que $\Phi_t(x) \leq \int_0^1 \frac{dm(r)}{r^t} + \mu(\mathbb{R}^n)$. Entonces integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x) \leq \int_0^1 \frac{dm(r)}{r^t} + \mu(\mathbb{R}^n) &= \left[r^{-t}m(r)\right]_0^1 + \int_0^1 tr^{-(t+1)}m(r)dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= m(1) - m(0) + t\int_0^1 r^{-(t+1)}m(r)dr + \mu(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Y como $m(0) \leq b \cdot 0^s = 0,\ m(1) \leq b \cdot 1^s = b$ y $m(r) \leq br^s$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x) \leq b + \int_0^1 r^{s-t-1} b\, dr + \mu(\mathbb{R}^n) &= b + tb\left[\frac{r^{s-t}}{s-t}\right]_0^1 + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= b + tb\left(\frac{1}{s-t}\right) + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= b\left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + H^s(\mathbb{R}^n \cap F) \\
&= b\left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + H^s(F) < \infty,
\end{aligned}$$

pues F es compacto y por lo tanto $\Phi_t(x)$ es acotada uniformemente. Como resultado $I_t(\mu) \leq \int c\, d\mu(x) = c \int d\mu(x) = c\, \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, lo que prueba (a).

(b) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $H^s(E) < \infty$. Sea μ distribución de masa con soporte en E. Se mostrará que $I_s(\mu) = \infty$. Definamos el siguiente conjunto:

$$E_0 = \left\{ x \in E \,:\, \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} > 0 \right\}.$$

Sea $x \in E_0$. Entonces, por definición de E_0, existe una sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ decreciente a 0 tal que $\frac{\mu(B_r(x))}{r_i^s} \geq \varepsilon$, para alguna $\varepsilon > 0$; es decir $\mu(B_{r_i}(x)) \geq \varepsilon r_i^s$.

Si $\mu(\{x\}) > 0$ entonces $I_s(\mu) = \infty$. Si $\mu(\{x\}) = 0$ entonces, por continuidad de μ, podemos construir $\{q_i\}$ con $0 < q_i < r_i$ y tal que

$$\mu(A_i) \geq \frac{\varepsilon r_i^s}{2},$$

donde $A_i = B_{r_i}(x) \setminus B_{q_i}(x)$. Así, podemos encontrar una subsucesión tal que $r_{i+1} < q_i$ para toda i, de tal forma que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sea disjunta. Entonces, si $x \in E_0$,

$$\Phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\varepsilon r_i^s r_i^{-s} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2} = \infty.$$

Por el Lema 12, el boreliano E_0 contiene μ-casi todos los puntos de E, por lo que $\mu(E_0) > 0$ e $I_s(\mu) = \int \Phi_s(x) d\mu(x) = \infty$. Por ser μ una distribución de masa arbitraria, con soporte en E, se concluye que $C_s(E) = 0$.

$\blacksquare$

Corolario 1 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$dim\, E = inf_t\{C_t(E) = 0\} = \sup_t\{C_t(E) > 0\}.$$

Debido a que la dimensión de un conjunto E es el ínfimo de las $t \geq 0$ tales que $H_t(E) = 0$, y al inciso (a) del Teorema 15, se sigue que la dimensión también puede expresarse como

$$dim\, E = \inf{}_t\{C_t(E) = 0\}.$$

La proposición contrapuesta del inciso (b) afirma que si $C_s(E) > 0$ entonces $H^s(E) = \infty$; combinando esto con el inciso (a) obtenemos otra expresión de la dimensión de un conjunto en términos de sus t-capacidades:

$$dim\, E = \sup_t\{C_t(E) > 0\}.$$

$\blacksquare$

Las expresiones anteriores de la dimensión no garantizan que el valor de la s-medida de un conjunto coincida con el valor de su s-capacidad. Además, pueden existir valores s menores que la dimensión de un conjunto con s-capacidad del conjunto menor que infinito.

Ahora podemos utilizar las herramientas de la teoría del potencial para calcular la dimensión de las trayectorias del Movimiento Browniano. En este capítulo, denotaremos a las trayectorias del Movimiento Browniano por X_ω (la trayectoria asociada al elemento ω). El siguiente teorema se debe a [Ta1].

Teorema 4 *Las trayectorias del Movimiento Browniano tienen dimensión de Hausdorff mayor o igual a 2, casi seguramente.*

Demostración:

Sea $1 < s < 2$. Sean $t, h > 0$ fijos. Definamos

$$S(\omega) = ||X_\omega(t+h) - X_\omega(t)||,$$

entonces, debido a la definición del Movimiento Browniano, tenemos que

$$\mathbb{P}(\omega : S(\omega) \leq \varrho) = ch^{\frac{-n}{2}} \int_0^\varrho x^{n-1} e^{\frac{-x^2}{2h}}\, dx.$$

Calculemos el valor de la integral $\int_\Omega S(\omega)^{-s} d\,\mathbb{P}$. Por el Teorema 14,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S(\omega)^{-s} d\,\mathbb{P} &= \int_{\mathbb{R}^+\cup\{0\}} S(\omega)^{-s} d\,\mathbb{P}(S(\omega)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+\cup\{0\}} x^{-s} c h^{\frac{-n}{2}} x^{n-1} e^{\frac{-x^2}{2h}} dx \\
&= c h^{\frac{-n}{2}} \int_0^\infty x^{n-s-1} e^{\frac{-x^2}{2h}} dx \\
&= c_1 h^{\frac{-s}{2}}.
\end{aligned}$$

Sea $u > 0$. Entonces, debido al cálculo anterior,

$$\begin{aligned}
\int_{u=0}^1 \int_{t=0}^1 \int_{\omega\in\Omega} \frac{d\,\mathbb{P}(\omega)\, dt\, du}{||X_\omega(t) - X_\omega(u)||^s} &= \int_{u=0}^1 \int_{t=0}^1 \int_{\omega\in\Omega} \frac{d\,\mathbb{P}(\omega)\, dt\, du}{||X_\omega(|t-u|)||^s} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{c_1\, dt\, du}{|t-u|^{\frac{s}{2}}} < \infty.
\end{aligned}$$

Como las trayectorias del Movimiento Browniano son continuas, casi seguramente son medibles; y por lo tanto,

$$\frac{1}{||X_\omega(t) - X_\omega(u)||}$$

es medible respecto a la medida producto en $[0,1]\times[0,1]\times\Omega$, casi seguramente. Entonces, debido a la finitud de la integral anterior, y la medibilidad de la función, podemos usar el teorema de Fubini y tenemos que

$$\int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 \frac{dt\, du}{||X_\omega(t) - X_\omega(u)||^s} d\mathbb{P} < \infty,$$

lo cual implica que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dt\, du}{||X_\omega(t) - X_\omega(u)||^s} < \infty \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{8}$$

Definamos, para cada ω en Ω, a la medida μ_ω en $\mathbb{R}^n$, como

$$\mu_\omega(E) = \lambda\{t : 0 \le t \le 1, X_\omega(t) \in E\},$$

donde E es un boreliano cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y λ denota a la medida de Lebesgue unidimensional. Como X_ω es una función continua, $X_\omega^{-1}(E)\cap[0,1]$

resulta ser un boreliano en $\mathbb{R}$. Claramente el soporte de μ_ω es la trayectoria X_ω y además $\mu_\omega(X_\omega) = 1$. En conclusión, tenemos una distribución de masa μ_ω con soporte en la trayectoria X_ω y medida de X_ω igual a 1.

Debido a (13), la s-energía de la medida μ_ω es finita ($\mathbb{P} - c.s.$):

$$\begin{aligned} I_s(\mu_\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu_\omega(x)\,d\mu_\omega(y)}{|x-y|^s} \\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{d\lambda(u)\,d\lambda(t)}{||X_\omega(u) - X_\omega(t)||^s} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una medida μ_ω con soporte en $X_\omega[0,1]$, y medida de $X_\omega[0,1]$ igual a 1, con s-energía finita $\mathbb{P} - c.s.$, por lo cual la s-capacidad de $X_\omega[0,1]$ es mayor que 0, $\mathbb{P} - c.s.$. Debido al Corolario 5 se concluye que la dimensión de $X_\omega[0,1]$ es mayor o igual que s, $\mathbb{P} - c.s.$, lo que demuestra que $dim\, X_\omega[0,1] \geq 2$, $\mathbb{P} - c.s.$.

■

Observación 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Denotemos por $\lambda^{(n)}$ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\lambda^{(n)}(kA) = k^n \lambda^{(n)}(A).$$

Demostración:

Debido a que la n-medida de Hausdorff coincide con la de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ (salvo por una constante) por el Teorema 8, tenemos que

$$\lambda^{(n)}(kA) = c_n H^n(kA) = c_n\, k^n H^n(A) = k^n \lambda^{(n)}(A),$$

por el Corolario 2.

■

El siguiente teorema muestra que la 2-medida del Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^2$ es 0. Para mostrar que la 2-medida del Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^n$ es 0, [Fa] utiliza algunos otros resultados de teoría del potencial que ya no discutiremos aquí.

Teorema 5 *Sea $\{X(t,\omega), t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^2$. Entonces $\lambda^{(2)}(X_\omega) = 0$ casi seguramente.*

Demostración:

Sean $C_1 = \{X_\omega(t), t \in [0,1]\}$, $C_2 = \{X_\omega(t), t \in [1,2]\}$ y $C = \{X_\omega(t), t \in [0,2]\}$. Sean $m_1 = \lambda^{(2)}(C_1)$, $m_2 = \lambda^{(2)}(C_2)$ y $m = \lambda^{(2)}(C)$. Llamemos X_1 y X_2 a las proyecciones de $X(t)$ sobre el eje x y el eje y, que resultan ser Movimientos Brownianos unidimensionales ([Ka], capítulo 2, problema 5.2).

C_1, C_2 y C son medibles, por lo que m_1, m_2 y m_3 lo son.

Mostremos que la función $X_\omega \mapsto \lambda^{(2)}(X_\omega)$ es una función continua. Sean $f, g \in C[0,1]$ tales que:

$$||f-g||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Denotemos por $\Gamma(f)$ a la gráfica de f. Entonces

$$\begin{aligned} |\lambda^{(2)}(\Gamma(f)) - \lambda^{(2)}(\Gamma(g))| &\leq \int_{[0,1]} \Big(f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\Big) - \Big(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\, dx \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

debido a que la gráfica de g no puede estar más allá de las bandas de radio ε alrededor de la función f, y entonces el área no puede ser mayor que el área de la gráfica de f más el area entre las bandas. Entonces la función $X_\omega \mapsto \lambda^{(2)}(X_\omega)$ es una función continua y por lo tanto la aplicación $\omega \mapsto \lambda^{(2)}(X_\omega)$ es una función medible; es decir m_1 es una función medible.

Notemos que m_1 es integrable pues $m_1 \geq 0$. Sea $a > 0$. Para que ocurra el evento $\{m_1 > 4a^2\} = \{\lambda^{(2)}(C_1) > 4a^2\}$, es necesario (pero no suficiente) que la trayectoria del movimiento haya salido del cuadrado centrado en 0 de lado $2a$, es decir

$$\begin{aligned} \{m_1 > 4a^2\} &\subsetneq \{\min_{0\leq t\leq 1} X_1(t) < -a\} \cup \{\max_{0\leq t\leq 1} X_1(t) > a\} \\ &\quad \cup \{\min_{0\leq t\leq 1} X_2(t) < -a\} \cup \{\max_{0\leq t\leq 1} X_2(t) > a\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(m_1 > 4a^2) &< \mathbb{P}\Big(\{\min_{0\leq t\leq 1} X_1(t) < -a\} \cup \{\max_{0\leq t\leq 1} X_1(t) > a\} \\ &\cup \{\min_{0\leq t\leq 1} X_2(t) < -a\} \cup \{\max_{0\leq t\leq 1} X_2(t) > a\}\Big) \\ &\leq 4\,\mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 1} X_1(t) > a), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la subaditividad de la medida de probabilidad y a que $\{X_1(t), t \geq 0\}$ y $\{X_2(t), t \geq 0\}$ tienen la misma distribución. Entonces, por el Principio de Reflexión (Teorema 13), tenemos que

$$\mathbb{P}(m_1 > 4a^2) < 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m_1) &= \int_{\{m_1 \leq 4a^2\}} m_1 \, d\mathbb{P} + \int_{\{m_1 > 4a^2\}} m_1 \, d\mathbb{P} \\
&> 4a^2 + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty x \, e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&\leq 4a^2 + 4(2) \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&\leq 4a^2 + 8\,\mathbb{E}(|X|) < \infty,
\end{aligned}$$

donde X es una variable aleatoria con distribución normal. Por lo tanto $\mathbb{E}(m_1) < \infty$.

Por estacionariedad, la variable aleatoria m_2 distribuye igual que la variable aleatoria m_1 y se concluye que $\mathbb{E}(m_1) = \mathbb{E}(m_2)$.

Recordemos que $\{\sqrt{2}X(t, \omega), t \geq 0\}$ es igual en distribución a $\{X(2t, \omega), t \geq 0\}$, por la propiedad de escalamiento del Movimiento Browniano (Lema 9). Así, el conjunto aleatorio C tiene la misma distribución que $\sqrt{2}\, C_1$. Por otro lado, para cada ω fija, tenemos que

$$\lambda^{(2)}(\sqrt{2}\, C_1) = (\sqrt{2})^2 \lambda^{(2)}(C_1) = 2\,\lambda^{(2)}(C_1)$$

debido a la Observación 6. Por lo tanto

$$\mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C)) = \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(\sqrt{2}C_1)) = 2\,\mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1)). \tag{9}$$

Por otro lado, notemos que

$$\lambda^{(2)}(C) = \lambda^{(2)}(C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)) + \lambda^{(2)}(C_2)$$

por ser conjuntos disjuntos. Como $\mathbb{E}(m_1) < \infty$, $\lambda^{(2)}(C_1) = m_1 < \infty$, casi seguramente, y entonces

$$\lambda^{(2)}(C) = \lambda^{(2)}(C_1) + \lambda^{(2)}(C_2) - \lambda^{(2)}(C_1 \cap C_2) \quad c.s.$$

Tomando esperanzas tenemos que

$$\mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C)) = \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1)) + \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_2)) - \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1 \cap C_2)).$$

Debido a (14) y a que C_1 y C_2 tienen la misma distribución,

$$2\,\mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1)) = \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1)) + \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1)) - \mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1 \cap C_2)),$$

lo cual implica que $\mathbb{E}(\lambda^{(2)}(C_1 \cap C_2)) = 0$. Esto, explícitamente nos dice que

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{C_1 \cap C_2}\, d\lambda^{(2)}\, d\mathbb{P} = 0,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{C_1 \cap C_2}\, d\lambda^{(2)} &= 0 \quad c.s. \\ \chi_{C_1 \cap C_2} &= 0 \quad c.d. \quad c.s. \\ \chi_{C_1}\chi_{C_2} &= 0 \quad c.d. \quad c.s. \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^2$. Como $\chi_{C_1}\chi_{C_2} = 0$ *c.d.*,*c.s.*, entonces $\chi_{C_1}(x)\chi_{C_2}(x) = 0$, *c.s.*, *c.d*; lo cual implica que

$$\chi_{C_1}(x) = 0 \text{ o } \chi_{C_2}(x) = 0,\ c.s.,\ c.d. \tag{10}$$

Por otro lado tenemos que

$$\mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0 \text{ o } \chi_{C_2} = 0\ c.d.) = \mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.) + \mathbb{P}(\chi_{C_2} = 0\ c.d.) - \mathbb{P}(\chi_{C_1} \text{ y } \chi_{C_2} = 0\ c.d.)$$

Como C_1 y C_2 son conjuntos aleatorios independientes (debido a la independencia del Movimiento Browniano), se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0 \text{ o } \chi_{C_2} = 0\ c.d.) &= \mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.) + \mathbb{P}(\chi_{C_2} = 0\ c.d.) \\ &- \mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.)\mathbb{P}(\chi_{C_2} = 0\ c.d.). \end{aligned}$$

Debido a que χ_{C_1} y χ_{C_2} tienen la misma distribución tenemos:

$$\mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0 \text{ o } \chi_{C_2} = 0\ c.d.) = 2\,\mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.) - \mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.)^2.$$

Por (15) obtenemos la ecuación cuadrátrica

$$\mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.)^2 - 2\,\mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.) + 1 = 0$$

con solución $\mathbb{P}(\chi_{C_1} = 0\ c.d.) = 1$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\lambda^{(2)}(X_\omega[0,1]) = 0) = 1$ y $\mathbb{P}(\lambda^{(2)}(X_\omega[0,1)) = 0) = 1$, pues el conjunto $\{1\}$ tiene medida de Lebesgue 0.

Debido a que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{X_\omega, t \in [n, n+1)\}$ es igual en distribución a $\{X_\omega, t \in [0,1)\}$, se concluye que $\mathbb{P}(\lambda^{(2)}(X_\omega) = 0) = 1$. ∎

El Teorema 16 junto con el Teorema 17 nos permite concluir que la dimensión de las trayectorias brownianas planas es igual a 2, casi seguramente. Sin embargo, el Teorema 17 nos muestra que estamos en el caso en que las s-medidas no realizan una medición satisfactoria (Capítulo 4). [Ra] y [Ta2] mostraron que con probabilidad 1, las trayectorias Brownianas tienen medida de Hausdorff positiva y finita respecto a la función $h(t) = t^2 ln\frac{1}{t} ln(ln(ln\frac{1}{t}))$; es decir, encontraron una medida de Hausdorff (asociada a la función h) que sí realiza una medición exitosa del Movimiento Browniano.

Bibliografía

[Dud] Dudley, Richard M. *Real Analysis and Probability.* Wadsworth, 1989.

[Dur] Durrett, Richard. *Probability. Theory and examples.* Wadsworth, 1991.

[Eg] Eggleston, H. G. *Convexity.* Cambridge University Press, 1958.

[Fo] Folland, Gerald B. *Real Analysis. Modern Techniques and their applications.* Wiley, 1999.

[Fa] Falconer, K.J. *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1985.

[Le] Levy, Paul. *Le mouvement Brownien plan.* American Journal of Mathematics. **62** (1940), 487-550.

[Ka] Karatzas, Ioannis. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[Ma] Mandelbrot, B.B. *The fractal geometry of nature.* W.H. Freeman & Co., San Francisco, 1982.

[Ra] Ray, D. *Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian Motion* Transactions of the American Mathematical Society, **106**, 436-444, 1963.

[Ro] Rogers, C.A. *Hausdorff Measures.* Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1970.

[Ta1] Taylor, S.J. *The Hausdorff α-dimensional measure of Brownian paths in n-space.* Proceedings of the Cambridge Mathematical Society, **48**, 31-39, 1953.

[Ta2] Taylor, S.J. *The exact Hausdorff of the sample path for planar Brownian motion.* Proceedings of the Cambridge Mathematical Society, **60**, 253-258, 1964.