

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

PRECÁLCULO INTERACTIVO

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**

P R E S E N T A

HÉCTOR DE JESÚS ARGUETA VILLAMAR

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS HERNÁNDEZ GARCIADIEGO

MÉXICO, D.F.



ENERO DEL 2007

**DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A mis maestros y amigos

Quienes me han hecho crecer profesionalmente.

A mis padres in Memoriam

Quienes me educaron en el esfuerzo para afrontar retos y problemas.

A mis hermanos e hijos

Con quienes formamos una gran familia de amor y solidaridad.

A Juanita Linares Altamirano

Con quien día a día luchamos amorosamente juntos para salir adelante.

A mis hijos

Quienes me han dado la oportunidad de amar incondicionalmente.

A mi familia política

Por el cobijo y respeto que siempre me brindan.

A mis alumnos que fueron y serán

A quienes especialmente va dedicado este trabajo.

ÍNDICE

Contenido	Página
1. Contexto	1
2. Motivación ¿porqué hice este trabajo?	1
3. ¿A quién va dirigido?	6
4. Metodología de aprendizaje	9
5. ¿Cómo fue desarrollado?	12
6. Dificultades técnicas	17
7. Ficha Técnica	18
8. ¿Cuál es la tesis sobre Precálculo Interactivo?	18
9. El programa interactivo	19
El primer tema: Lógica	20
El segundo tema: Números reales	43
El tercer tema: Funciones	93

Mapa de sitio

Tesis: Precálculo Interactivo Maestría en Ciencias (Matemáticas)

El objetivo de esta tesis es apoyar el aprendizaje de los temas de Lógica, Números Reales y Funciones, necesarios para un curso de Cálculo Diferencial e Integral.
(ver Documento)

Telista: Héctor de Jesús Argueta Villamar
hvvillamar@servidor.unam.mx

Facultad de Ciencias
Director de tesis: Dr. Carlos Hernández Garcidiego
Instituto de Matemáticas.

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contratejemplo
- Referencias

Los Números Reales

Los Axiomas

Teoremas de Igualdades

- Teo.1 Cancelación para Adición
- Teo.2 Cancelación para Multiplicación
- Teo.3 Unicidad del Neutro Aditivo
- Teo.4 Unicidad del Inverso Aditivo
- Teo.5 Unicidad del Neutro Multiplicativo
- Teo.6 Unicidad del Inverso Multiplicativo
- Teo.7 Todo real por cero, es cero
- Teo.8 El inverso aditivo de a
- Teo.9 Más por menos, da menos
- Teo.10 Menos, menos a , es a .
- Teo.11 Menos por menos, da más
- Teo.12 $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Teo.13 Igualdad de cuadrados

Otros modelos Ejercicios

El concepto de número

Teoremas de Desigualdades

- Teo.14 Cancelación para Adición
- Teo.15 Suma de menores es menor ...
- Teo.16 Inversos aditivos inversos ...
- Teo.17 Multiplicar por un negativo
- Teo.18 Recíproco del Axioma O4
- Teo.19 Inversos multiplicativos
- Teo.20 El cuadrado de a , menor que b
- Teo.21 El cuadrado de a , mayor que b

Teoremas de Valor Absoluto

- Teo.22 El valor absoluto es mayor o ...
- Teo.23 El valor absoluto de un producto
- Teo.24 Valor absoluto de a , mayor que b
- Teo.25 Valor absoluto de a , menor que b

Construcciones Interactivas Referencias

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunas clasificaciones
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Elementos con operaciones
- Funciones Inyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gradiente de Funciones
- Escalas de Funciones
- Funciones por (3) ramos
- Referencias

Axiomas de los Números Reales

Nombre	Adición	Multiplicación
Carrocerías	A1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R}$	M1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \in \mathbb{R}$
Commutatividad	A2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$	M2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = ba$
Asociatividad	A3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a + (b + c) = (a + b) + c$	M3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(bc) = (ab)c$
Neutro	A4) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$	M4) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Inverso	A5) Dado $a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	M5) Dado $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
Distributividad	D) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac$	
Tricotomía	O1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones: $a = b, a < b \vee b < a$	
Transitividad	O2) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$	
Preservación Orden bajo Adición	O3) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c \forall c \in \mathbb{R}$	
Preservación Orden bajo Multiplicación ($0 < c$)	O4) Si $0 < c$ y $a < b$ entonces $ac < bc$	
Axioma del Supremo (de \mathbb{Q})	S) (En Otros modelos encuentra su enunciado y algunas aplicaciones)	

Otros Modelos

Los Números Naturales

- Axiomas
- Cancelación para la Adición
- Inducción Matemática

Los Números Enteros

- Axiomas
- Cancelación para la Multiplicación
- Algunas proposiciones

Los Números Racionales

- Axiomas y algunas proposiciones

Los Números Irracionales

- Raíz de 2 y sus consecuencias
- Los Reales y el Axioma del Supremo
- El sistema del supremo
- Algunas proposiciones
- La Cardinalidad
- Ceros de Infinitos
- Los enteros módulo n
- Más campos

El concepto de número

El concepto de número (natural)

- Los números enteros
- Las fracciones
- Los irracionales
- Conclusiones

Teoremas de Igualdades

- Teo.1 Cancelación para Adición
- Teo.2 Cancelación para Multiplicación
- Teo.3 Unicidad del Neutro Aditivo
- Teo.4 Unicidad del Inverso Aditivo
- Teo.5 Unicidad del Neutro Multiplicativo
- Teo.6 Unicidad del Inverso Multiplicativo
- Teo.7 Todo real por cero, es cero
- Teo.8 El inverso aditivo de a
- Teo.9 Más por menos, da menos
- Teo.10 Menos, menos a , es a .
- Teo.11 Menos por menos, da más
- Teo.12 $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Teo.13 Igualdad de cuadrados (\Rightarrow)
- Teo.13 Igualdad de cuadrados (\Leftarrow)

Teoremas de Desigualdades

- Teo.14 Cancelación para Adición
- Teo.16 Inversos aditivos inversos ...

Teo.17 Multiplicar por un negativo

- Teo.18 Recíproco del Axioma O4
- Teo.19 Inversos multiplicativos
- Teo.20 El cuadrado de a , menor que b (\Rightarrow)
- Teo.20 El cuadrado de a , menor que b (\Leftarrow)
- Teo.21 El cuadrado de a , mayor que b (\Rightarrow)
- Teo.21 El cuadrado de a , mayor que b (\Leftarrow)

Teoremas de Valor Absoluto

- Teo.22 El valor absoluto de un producto
- Teo.23 El valor absoluto de a , mayor que b (\Rightarrow)
- Teo.23 El valor absoluto de a , mayor que b (\Leftarrow)
- Teo.24 Valor absoluto de a , menor que b (\Rightarrow)
- Teo.24 Valor absoluto de a , menor que b (\Leftarrow)
- Teo.25 Valor absoluto de a , menor que b (\Rightarrow)
- Teo.25 Valor absoluto de a , menor que b (\Leftarrow)

Otras Construcciones

- Un sistema de ecuaciones lineales
- Una desigualdad cuadrática interactiva
- Una desigualdad cuadrática para a paso
- El valor absoluto de una suma (Ejercicio 12)

PRECÁLCULO INTERACTIVO

Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Tesista: Héctor de Jesús Argueta Villamar

Director de tesis: Dr. Carlos Hernández Garciadiego

1. Contexto

La computadora es una herramienta que día con día está demostrando su utilidad en casi todos los ámbitos de la actividad humana. En particular, en los procesos de enseñanza y aprendizaje ya se aplica de manera muy variada, tanto de manera presencial como a distancia, y sin lugar a dudas, se vislumbra un enorme potencial, sobre todo con el desarrollo tan impresionante de Internet.

Actualmente, en el campo de las matemáticas se cuenta con software, que posibilita un mejor aprovechamiento de la creatividad, experiencia, madurez y conocimiento matemático de quien lo usa. Además, entre otras cosas, facilita construir material didáctico interactivo que permite visualizar de muchas maneras resultados que se antojan complicados, dejando así más tiempo para el análisis y la profundización de los conceptos.

Especialmente para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la utilización de las computadoras es de gran relevancia por las siguientes consideraciones:

- La necesidad de las matemáticas en diversas ramas del conocimiento, la hacen ser una materia fundamental en el currículo universitario.
- Las matemáticas en sí mismas, forman parte del desarrollo intelectual y cultural en las sociedades modernas.
- En general, en los distintos niveles educativos, las matemáticas forman parte de un tronco básico, requisito indispensable para otras materias.
- El índice de reprobados más alto, entre todas las materias, lo tienen las matemáticas.
- Es observable el bajo rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes de nivel medio y superior
- El alto nivel de abstracción que requieren, hacen más necesaria la utilización de recursos didácticos que apoyen su enseñanza y aprendizaje.
- El potencial que ofrecen las computadoras es superior a cualquier otro recurso didáctico hasta ahora utilizado.
- Actualmente, la modernización de la enseñanza pasa por las computadoras y casi cualquier centro o escuela cuenta al menos, con un pequeño centro de cómputo.

2. Motivación ¿Porqué hice este trabajo?

Teniendo como marco el contexto anterior, mismo que he podido palpar a lo largo de varios años de estar trabajando en proyectos relacionados con la aplicación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, me gustaría señalar las razones que me han conducido a desarrollar este trabajo de **Precálculo Interactivo**.

2.1 En mis años estudiantiles

Desde aquellos mis años de estudiante de la licenciatura en física y matemáticas, me encontré de pronto con diversos cursos, en particular el de cálculo 1 en donde abundaban los problemas de tener que demostrar esto o aquello y, lo aprendíamos a hacer por imitación o por repetición, pero sin una conciencia clara del significado lógico de lo que hacíamos.

Aún más, lo hacíamos con la ignorancia de que lo que aplicábamos estaba basado en métodos de demostración, justificados mediante toda una estructura de equivalencias de proposiciones lógicas.

Frecuentemente los problemas eran de tal magnitud, que de pronto no teníamos ni la más remota idea de cómo atacarlos, de qué método podíamos utilizar y esto se acentuaba más aún, cuando dichos problemas se resistían a la aplicación de un método directo. No siempre se nos ocurría que podíamos suponer falsa la conclusión y lógicamente construir alguna contradicción.

Toda esa estructura lógica para el razonamiento y para construir los métodos de demostración, de inicio la desconocíamos, su lenguaje además nos era completamente ajeno y es obvio que de esa manera, el problema central de "demostrar" nos sonaba como un reto casi imposible de superar. Esta estructura y su lenguaje los fuimos descubriendo después de muchos apuros y contratiempos, tal vez hasta de fracasos irreparables.

Muchas veces cuando veíamos a nuestros maestros realizar una demostración, nos parecía más bien producto de su genialidad que de un mecanismo lógico, aplicable desde luego con los conocimientos necesarios y con un poco de aquella intuición y genialidad que da la práctica.

Esto abonaba en nuestro joven e inexperto pensamiento, la necesidad de adquirir genialidad, pero si ni siquiera sabíamos donde comprarla y más bien nos pasaba por la mente que tal vez, éste no era nuestro camino o vocación.

Nuestro primer contacto con el ejercicio de hacer demostraciones, en estas circunstancias, chocaba fuertemente con nuestra experiencia adquirida en los años del bachillerato. No teníamos antecedentes al respecto y para cualquier desarrollo más o menos complicado, siempre contábamos con algún esquema a seguir, una fórmula o una secuencia de pasos más o menos definida. Este hecho se magnificaba al desconocer las nuevas herramientas en la estructura lógica, previo a verse inmerso en el ejercicio de hacer demostraciones.

2.2 En mis primeros años de experiencia docente

De manera casi automática durante mis primeros años como docente de matemáticas reproduje casi el mismo esquema que yo aprendí en mis años estudiantiles, y tal vez, casi actuando la genialidad al realizar una demostración.

Nunca recuerdo muy buenos resultados en esos tiempos y desde luego que me preocupaba porque sí deseaba ser buen maestro y compartía esta mi preocupación con otros compañeros maestros.

Reflexionando personalmente y en grupo, no tardamos en descubrir que aquello que a nosotros nos había aquejado, lo reproducíamos actualmente con nuestros alumnos. Sin embargo, tardamos un poco más en hacer conciente que no bastaba cambiar el esquema, sino además brindar conocimientos que no tuvimos nosotros y que tienen que ver con la estructura lógica para comprender los métodos de demostración.

Evidentemente no pensábamos que esto haría que desaparecieran las dificultades y que el ejercicio de demostrar se volviera un hecho casi rutinario, pero sí estábamos seguros de que habría más armas y se volvería más conciente el ejercicio de demostrar, que sólo se aprende haciendo y haciendo.

Nos esforzamos por introducir el tema de Lógica, concentrando la atención en los métodos de demostración, aún de manera extracurricular y posteriormente intentamos escribir algunas notas sobre el tema, preocupados por los resultados tan desastrosos en el primer año de la licenciatura.

En ese tiempo, los años 1971, encontramos tres grandes fuentes de inspiración en los siguientes libros:

Manual de Lógica para estudiantes de matemáticas
Gonzalo Zubieta Russi.
Serie de Matemáticas
Trillas (1968)

Lógica Cuaderno 12
National Council of Teacher's of Mathematics.
Temas de Matemáticas
Trillas (1970)

Primer Curso de Lógica Matemática
Patrick Suppes y Shirley Hill
Reverté (1968)

Con tales referencias, tan novedosas en aquellos tiempos, al menos sentíamos que nuestra preocupación no sólo era nuestra, aquello que pensábamos, se resumía en las palabras de Gonzalo Zubieta Russi:

"Por la experiencia adquirida en diversos cursos de matemáticas he podido observar que muchas de las dificultades con que tropieza el principiante se deben a la falta de familiaridad con las técnicas de orden lógico, y también gramatical, que son habituales en cualquier rama de dicha ciencia"

No obstante la importancia de opiniones como la anterior, el tema referido nunca llegó a ser parte del currículo universitario.

2.3 En mis siguientes años de experiencia docente

Posterior a esta primera experiencia docente y estando convencido de la importancia de estos temas de lógica, en mis cursos iniciales de cálculo en la licenciatura, siempre los he incluido de manera extracurricular.

A mi paso por diversas Facultades de Ciencias y aún de Ingeniería, durante mis 36 años como docente de matemáticas, me he percatado de que en ninguno de los programas de estudio se encontraba, ni se encuentra incluido, no obstante que en todos los casos se tiene considerado que los estudiantes realicen demostraciones diversas.

No obstante lo anterior, sigo pensando que debería ser incluido de manera curricular. Actualmente en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en mis cursos de Cálculo Diferencial e Integral I, sigo trabajando este tema de manera extracurricular, antes de empezar con el tema de Números Reales y al menos creo, que a los alumnos les resulta menos abrupto el ejercicio de hacer demostraciones y se evidencia con sus participaciones en clase.

También aquí podemos destacar las palabras de Gonzalo Zubieta Russi:

“Personalmente he comprobado que el estudio de cualquier disciplina matemática, llega a ser mucho más ameno y provechoso para un estudiante a quien previamente se le haya entrenado en el material lógico ...”

Comparto desde luego la opinión de que llega a ser mucho más provechoso, no sé que tan ameno, pero lo cierto es que cuando uno logra entender, se motiva a continuar y se le dificulta menos la comprensión y asimilación, de los métodos y con ello, la automatización en sus aplicaciones.

2.4 En mi experiencia docente con la tecnología

Hace ya unos 16 años, que empecé a conocer el manejo de algunos programas de software matemático y quiero decir que me abrió un gran panorama, me cautivó la sensación visual y las amplias posibilidades de hacer cálculos simbólicos y representaciones gráficas.

Desde entonces, junto con otros compañeros, nos entusiasmos con la idea de aplicar lo que fuésemos aprendiendo y descubriendo, en la enseñanza de la matemáticas. Así redactamos el proyecto de “Enseñanza de las Matemáticas Asistida por computadora” que contemplaba una gran diversidad de actividades muy ambiciosas, pero que marcaban un nuevo rumbo en nuestras actividades docentes.

Cada descubrimiento era maravilloso, fuimos acumulando software, lo estudiábamos, lo tratábamos de compartir, impartimos cursos, diplomados,

escribimos manuales, dábamos charlas donde se pudiera, lo aplicábamos en la medida de lo posible en nuestros cursos, pero en el camino vimos la necesidad de desarrollar ideas propias y representarlas en la computadora.

Al plantearse producir, la pregunta obligada era ¿qué me gustaría producir?, pero esta pregunta iba íntimamente ligada a los conocimientos y al desarrollo del cómputo, al dominio y posibilidades del software con el que deseara uno hacer sus desarrollos, a la experiencia y creatividad y a las limitaciones propias en capacidad y tiempo.

Hicimos algunos desarrollos, que no sólo nos gustaron y que creemos son de mucha utilidad, sino que lo más importante es que nos entrenaron para tener mejores ideas, conocimientos, madurez y habilidades para representar algunas ideas propias para la enseñanza de las matemáticas, en la computadora.

2.5 Mi experiencia docente y con la tecnología en mi tesis

De esta manera se recrea en mi mente la idea posible, de poder representar en la computadora un curso de **Precálculo Interactivo** con los temas que desde siempre como estudiante y docente me parecieron de suma importancia para el buen comienzo de una licenciatura, sobre todo en ciencias matemáticas.

La idea posible, de representar un curso de **Precálculo Interactivo** en la computadora, no debería apartarse de la formalidad de las matemáticas, pero el reto era representarla de manera interactiva, para que el usuario pudiera manejar y reflexionar los elementos paso a paso y además debería contener representaciones gráficas que pudieran ayudar a una mejor comprensión de los conceptos.

Esta idea posible, de un curso de **Precálculo Interactivo**, debería comenzar por el tema de **Lógica**, centrado en los Métodos de Demostración, para dar cuerpo a aquella convicción que me viene acompañando desde los años 1971 en que hiciera conciente esta necesidad y que hasta ahora, que yo sepa, no existe incorporado al currículo de ninguna Escuela de Ciencias, al menos en nuestro país.

También debería contener el tema de **Números Reales** de acuerdo con los programas de estudio de éstas licenciaturas, pero con demostraciones formales e interactivas, justificando cada paso con los axiomas, definiciones o teoremas previos correspondientes y que explicaran los métodos de demostración aplicados en cada caso. Igualmente debería contener ilustraciones gráficas interactivas para una mejor comprensión de los teoremas o resultados diversos.

Así mismo debería contener el tema de **Funciones**, igualmente con demostraciones formales para los diversos tipos de funciones, así como con ilustraciones gráficas, todas ellas interactivas. Un aspecto importantísimo que deseábamos lograr y se logró, fue tener, gracias al Proyecto Descartes, un graficador y a la vez operador de funciones que funcionara en línea.

No obstante que estos dos últimos temas son parte del currículo en todas las escuelas, la riqueza que proporciona el hecho de tenerlas en la computadora de manera interactiva, con demostraciones formales e ilustraciones gráficas también interactivas, es de una gran riqueza y ayuda, sobre todo para los estudiantes.

En un apartado más adelante hablaremos de la importancia que tiene un proyecto interactivo para la enseñanza, por ahora baste decir, que con un muchito más de trabajo **Precálculo Interactivo** podría servir para la construcción de un curso de **Cálculo Diferencial e Integral I**, formal e interactivo, a distancia que pudiera servir de apoyo para cualquier Licenciatura en Matemáticas y en áreas afines.

3. ¿A quién va dirigido?

3.1 Principalmente a estudiantes

El programa **Precálculo Interactivo** está dirigido principalmente a estudiantes y en particular, para aquellos inscritos en el primer año de una licenciatura en ciencias o en áreas afines y también para aquellos que aspiran a cursar una licenciatura en estas áreas.

Para argumentar esta idea, es importante repasar tema por tema de los contenidos en **Precálculo Interactivo**, ya que se advierten en cada caso ciertas particularidades, que determinan el impacto a considerar.

a) El tema de **Lógica** está diseñado con la idea de establecer la estructura lógica mínima necesaria para comprender lo que significa demostrar y para asimilar los métodos de demostración con los que se puede contar. Incluye además una buena variedad de ejemplos de cada método que se pueden ejecutar paso a paso de manera interactiva.

Este tema, con la orientación dada hacia los métodos de demostración, en general no forma parte del currículo del bachillerato ni tampoco de la licenciatura, así que para todos aquellos estudiantes que requieran en su carrera de hacer demostraciones matemáticas será de una grandísima utilidad y podrá ser estudiado incluso de manera autodidacta.

Tan sólo en nuestro país se contarían por miles, pensando en los estudiantes del primer semestre de las escuelas de ciencias e ingenierías, pero además como este material es posible subirlo a Internet, la utilidad podría potenciarse enormemente. Hasta el momento podemos asegurar que no existe otro material con las características del que estamos presentando.

b) El tema de **Números Reales** está diseñado con la idea de cubrir el tema curricular de un curso formal de **Cálculo Diferencial e Integral I**, en particular en una escuela de ciencias.

Se establece un tratamiento axiomático de los números reales y de ahí se demuestran formalmente de manera interactiva y paso a paso, una serie de resultados como las leyes de cancelación, los teoremas de unicidad, las leyes de los

signos y una gran diversidad que permitirán resolver ecuaciones y desigualdades con y sin valor absoluto, de manera estrictamente formal.

Igualmente se incluyen construcciones gráficas interactivas que permitirán a los estudiantes la mejor comprensión de los teoremas al poder manipular diversas situaciones de los mismos.

En el tema de **Números Reales** también se incluyen los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales con una importante cantidad de resultados demostrados con toda la formalidad matemática, pero de manera interactiva y paso a paso.

Están incluidos los Axiomas de Peano, el Principio del Buen Orden y su equivalente Principio de Inducción Matemática con ejemplos e ilustraciones interactivas. En los Enteros se pueden encontrar diversas proposiciones que relacionan al cuadrado de un entero consigo mismo y en los racionales las propiedades de campo y de densidad.

Se propicia el descubrimiento de los irracionales y se trabaja un poco sobre las ideas de los infinitos. Igualmente se tratan los Enteros Módulo n , para descubrir otras estructuras algebraicas que pueden ser campos o no.

En este tema de **Números Reales** ocupa un lugar especial, el Axioma del Supremo como distintivo del campo de los números reales y algunas consecuencias importantes como la propiedad arquimediana y la no acotación de los naturales.

Se incluyen igualmente ejercicios y algunas notas históricas del concepto de número, incluyendo una reciente investigación que responde a la pregunta ¿Es innato el concepto de número?

En resumen, el tema de **Números Reales** contiene el programa curricular en Cálculo Diferencial e Integral I de cualquier escuela de ciencias en nuestro país y tal vez de algunas escuelas de ingeniería, con algunos extras interesantes, pero además con los recursos de interactividad gráficos, de referencias en ventanas flotantes y de demostraciones paso a paso.

Por lo anterior, este tema sería de gran apoyo para los estudiantes que se encuentren estudiando el tema de **Números Reales** en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, sobre todo porque podrían detenerse paso a paso, para entender las demostraciones, las justificaciones formales y los métodos a utilizar, así como la posibilidad de recurrir a representaciones gráficas interactivas que les permitan visualizar los teoremas.

Es posible que fuera de mucha utilidad para un estudio autodidacta y tal vez con un poco más de trabajo, para un curso en línea.

c) El tema de **Funciones** está diseñado con la idea de cubrir el tema curricular de un curso formal de Cálculo Diferencial e Integral I, en particular en una escuela de ciencias, sin embargo, es un tema de mayor universalidad que los de reales o lógica.

El tema de **Funciones** se estudia con distinta amplitud y profundidad desde el Bachillerato hasta las escuelas profesionales, pero inclusive no sólo en las áreas de las ciencias físico matemáticas.

En este tema de **Funciones** se parte desde la definición, ejemplos, no ejemplos y operaciones, hasta los diversos tipos de funciones, biyectivas, monótonas, acotadas, pares, impares, periódicas y se incluyen un graficador y a la vez operador de funciones, un escalador de funciones y un graficador de funciones por (3) ramas. Contiene demostraciones formales e interactivas paso a paso y construcciones gráficas interactivas, como en los demás temas.

Por ello este tema de **Funciones** puede ser de utilidad para un rango más amplio de estudiantes, pero de manera parcial o total. En el bachillerato y en algunas otras áreas, por ejemplo, podrá ser muy útil, tal vez sin las demostraciones, pero en todos los casos de seguro el graficador y operador tendrá gran aceptación.

Es muy probable que este tema, como los anteriores se pueda estudiar de manera autodidacta y que con un poco más de trabajo sirva para un curso en línea.

Por todo lo dicho anteriormente en este apartado, pensamos que nuestro destinatario principal es el estudiante, en particular del primer año de una escuela de ciencias y de áreas afines, pero que no excluye su utilidad para otros estudiantes o para otros sectores,

3.2 También a los profesores

Otros destinatarios del programa **Precálculo Interactivo** son los profesores, quienes dependiendo del nivel y área en la que trabajen, pueden utilizarlo total o parcialmente, como un auxiliar para sus clases, para dejar algunas tareas, para que sus estudiantes repasen algunos temas o inclusive para utilizarlo en sus clases presenciales.

Lo anterior es posible, porque cuentan con un material bien organizado, interactivo, formal, con demostraciones interactivas paso a paso, con construcciones gráficas interactivas que les permiten presentar diversas situaciones para los teoremas y que pueden acceder fácilmente al tema específico de su interés y a sus temas relacionados.

Evidentemente a los profesores del curso de **Cálculo Diferencial e Integral I** en cualquier escuela de ciencias o áreas afines, les permitiría explotarlo cabalmente y utilizarlo de acuerdo a sus necesidades.

En nuestros cursos de Cálculo diferencial e Integral I en la Facultad de Ciencias de la UNAM, lo hemos utilizado tanto como material de apoyo para los estudiantes,

como para impartir alguna clase con buenos resultados. Los estudiantes al menos, pueden estar más atentos, sabiendo que el material está disponible en cualquier momento.

3.3 También a las instituciones educativas

A las instituciones les podría ser de muchísima utilidad para observar un modelo interactivo, formal que les daría pauta para construir sus cursos en línea, en particular el de **Cálculo Diferencial e Integral I**.

De hecho, los applets correspondientes a las demostraciones paso a paso, están de tal manera sistematizados, que es posible reutilizarlos de manera sencilla, para cualquier otra demostración. En el trabajo se incluyen applets de muestra para demostraciones de 3, 4 o más pasos.

En resumen y como ya lo apuntábamos anteriormente, este material de **Precálculo Interactivo** podría servir de base para la construcción en particular de un curso de **Cálculo Diferencial e Integral I**, formal e interactivo, a distancia que pudiera servir de apoyo para cualquier Licenciatura en Matemáticas y en áreas afines y en general, las instituciones podrían verlo como un modelo para otros cursos en línea.

4. Metodología de aprendizaje

En este apartado importa resaltar la importancia de los temas en **Precálculo Interactivo** y cómo es que este trabajo hace aportaciones al proceso de enseñanza y aprendizaje, con la ayuda de la tecnología. En este sentido, primero hablaremos de los temas, luego de las aportaciones didácticas y por último de la importancia de la tecnología.

4.1 Los temas

Precálculo Interactivo contiene tres temas fundamentales para que un estudiante pueda tener éxito en un curso de Cálculo Diferencial e Integral I, en cualquier licenciatura de matemáticas o áreas afines: **Lógica, Números Reales y Funciones**.

a) El primero de ellos, **Lógica**, contiene los elementos básicos para comprender lo que significa demostrar y para asimilar el nuevo lenguaje y los diferentes métodos de demostración con los que se puede contar.

Este tema de Lógica no aparece, al menos con esta orientación, entre los temas del bachillerato, ni tampoco en el primer año de la licenciatura, así que de entrada esta situación la convierte de facto en una aportación válida, que cobra además mayor relevancia a la luz de los temas que siguen, en donde se exige al por mayor, hacer demostraciones de una gran cantidad de resultados.

Además de lo anterior, que ya de por sí es importante, aprovechando la tecnología, se han logrado construir una serie de características didácticas, que facilitan el aprendizaje del tema. Dichas características serán motivo de un apartado más adelante, pero tan sólo diremos que permite al usuario contar con ejemplos y

construcciones interactivas que pueden ser manipuladas a gusto, al ritmo que se quiera y cuantas veces se quiera.

b) Los siguientes dos temas, **Números Reales** y **Funciones**, no obstante que son curriculares en las licenciaturas de matemáticas y en áreas afines, lo que los hacen diferentes en esta tesis y por la misma razón aportaciones válidas, son la gran variedad de características didácticas que permiten al usuario mayores facilidades para su aprendizaje y que inclusive se podrían abordar de manera autodidacta.

Por mencionar sólo algunas de estas características que trataremos con mayor detalle en un siguiente apartado, diremos que ante la demostración de cualquier teorema o resultado, se tienen siempre presentes, la idea de cómo abordar la demostración, el método de demostración a utilizar, los axiomas, los resultados previos necesarios y el hecho de que el usuario puede desplegar la demostración paso a paso, permitiéndole analizar con detenimiento el paso dado y las razones que se esgrimen en de cada uno de los pasos realizados.

Otra de las características importantes que hacen diferentes a estos temas en **Precálculo Interactivo**, es que siempre, o casi siempre, es posible acceder a una construcción gráfica interactiva, que permite al usuario, manipular a gusto, para considerar diversas situaciones del teorema o resultado y así, tener una idea visual del mismo.

4.2 Las características didácticas

En este apartado será muy importante resaltar aquellas características de **Precálculo Interactivo** que aportan al proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular en los temas que contiene.

- **Precálculo Interactivo** es un libro digital interactivo, cuyos temas pueden ser abordados secuencialmente o en el orden que desee o que requiera el usuario. En cualquier caso, las formas de navegación son estándar y muy intuitivas.
- Todas las páginas en cada tema, cuentan con una explicación sucinta, cuidando el rigor matemático y en caso de ser necesario, se tienen botones o ligas a construcciones interactivas, a demostraciones interactivas, a resultados anteriores o a algunos conceptos necesarios, sin tener que abandonar la página de lectura.
- En todas las páginas que contienen demostraciones, el usuario siempre cuenta con una idea de cómo intentarlas, el método de demostración a utilizar y además puede desplegarlas paso a paso o toda de una vez. En cualquiera de los casos, tendrá a la vista los argumentos que se esgrimen en cada paso de la demostración y los axiomas, teoremas, definiciones o resultados previos, necesarios en la misma.

- Casi todos los teoremas o resultados importantes, cuentan con construcciones interactivas asociadas, en donde el usuario puede manipular y visualizar diversas situaciones del teorema o resultado en cuestión y así permitirse una mejor comprensión del mismo.
- En toda construcción interactiva asociada a un teorema o resultado, se cuenta siempre con la demostración del mismo, sin necesidad de abandonar la página de lectura.
- En varios casos, es posible contrastar algunas demostraciones con otras, por ejemplo en los reales y en los naturales se cumplen las leyes de cancelación, sin embargo la demostración en los reales, no es posible reproducirla en los naturales, por la falta de inversos. Así en la página de los naturales, se tiene accesible la demostración en los reales, sin abandonar la página de lectura.
- También en varios casos es posible tener diversos resultados concatenados en una misma página y acceder a sus demostraciones o construcciones interactivas asociadas, sin abandonar la página de lectura. Así por ejemplo, se presentan diversos resultados sobre irracionales o sobre aplicaciones del Axioma del supremo.
- Las características anteriores aportan a la didáctica de las matemáticas en varios aspectos, entre ellos, los siguientes: propician el aprendizaje activo por parte del estudiante, psicológicamente lo predisponen a actuar para obtener una respuesta, le permiten analizar detenidamente la respuesta a cada una de sus acciones y siempre tendrá a la mano los recursos necesarios para analizar globalmente los resultados.
- Las características didácticas mencionadas y más, podrían aplicarse a cualquier otro tema con el uso de la tecnología y con los conocimientos matemáticos y de cómputo adecuados. Por ello estas aportaciones no son exclusivas de los temas que tratamos en **Precálculo Interactivo**.

4.3 La importancia de la tecnología

El uso de las computadoras, de los medios de comunicación como Internet, los pizarrones electrónicos y de los medios de distribución como los discos compactos o digitales de video, ayudan a enriquecer y potenciar de manera notable los procesos de enseñanza y aprendizaje, en cualquier área del conocimiento, en particular de las matemáticas.

Mediante el uso de recursos gráficos, de animación, sonido e interacción es posible crear aplicaciones sumamente atractivas para Internet, para el aula con o sin pizarrones electrónicos y/o para discos compactos o digitales de video, que tengan ventajas como las siguientes:

- **Propiciar metodologías activas**

Los programas interactivos pueden servir para propiciar metodologías activas, en donde el estudiante pase a ser el protagonista de su propio aprendizaje.

- **Permitir al usuario avanzar a su propio ritmo**
Con los programas interactivos cada usuario puede establecer su propio ritmo de trabajo y avanzar según vaya comprendiendo los temas previos en cada momento.
- **Posibilitar un aprendizaje individualizado o cooperativo**
Los programas interactivos permiten que el usuario pueda abordar su aprendizaje de manera individual o colectiva, dada la situación de que el material puede estar disponible en cualquier momento y en cualquier lugar.
- **Disponer del material en todo momento y en cualquier lugar**
Los diversos medios de comunicación y distribución de los programas interactivos permiten que el usuario pueda tenerlos a la disposición en todo momento y en cualquier lugar para posibilitar su estudio.
- **Repetir cuantas veces se requiera un proceso**
Las computadoras no se cansan, ni tienen reacciones adversas cuando el usuario no entienda un proceso, como puede ser una demostración matemática, así que el usuario podrá repetir sus procesos cuantas veces lo requiera.
- **Construir cursos o temas a distancia, presenciales o semipresenciales**
Los programas interactivos permiten construir cursos completos o temas diversos que se puedan acceder por Internet y así poder estudiar a distancia en cualquier parte o bien tenerlos en medios digitales para aplicarlos directamente en el aula con o sin pizarrones electrónicos y hasta usarlos en combinaciones de aula y a distancia, llamados cursos semipresenciales.

Precálculo Interactivo no tiene sonido, pero la interacción es lo que por excelencia lo distingue tanto para las demostraciones formales, como para visualizar las referencias y todas las construcciones interactivas que en él aparecen.

5. ¿Cómo fue desarrollado?

Para construir el programa **Precálculo Interactivo** se utilizaron varias herramientas de cómputo: dos de software matemático, uno de edición de fórmulas matemáticas, uno de edición de imágenes, uno de edición de texto, uno de edición de páginas Web y, algunos conocimientos de los lenguajes HTML y JavaScript, así como de la gramática del JavaSketchpad y del lenguaje del proyecto Descartes, además para probar las construcciones interactivas, tres navegadores.

También, aunque parezca obvio decirlo, están incluidos los conocimientos matemáticos necesarios sobre el tema, la experiencia docente en Cálculo Diferencial e Integral I, en Escuelas de Ciencias e Ingenierías y la experiencia en cómputo, durante varios años.

Importaría describir para aquellos interesados, las características de las herramientas utilizadas y un poco de la mecánica seguida para la construcción de **Precálculo Interactivo**.

5.1 Herramientas de software matemático

a) La mayor parte del trabajo se realizó con **The Geometer's Sketchpad (GSP)** y con su componente **JavaSketchpad**, que nos permitió exportar las construcciones GSP a un formato de html. Una vez que teníamos las construcciones en html, usando el bloc de notas y la gramática de JavaSketchpad, le hicimos diversos arreglos que les daban una mejor apariencia y funcionalidad.

The Geometer's Sketchpad es una herramienta de construcción y exploración dinámica originalmente creada para hacer geometría plana y desde su aparición en 1990, su desarrollo y aceptación ha sido impresionante. Actualmente se usa también para explorar temas de álgebra, geometría analítica y cálculo, entre otras materias.

The Geometer's Sketchpad permite trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos, curvas cónicas, funciones, etcétera y cuenta con diversas herramientas, entre ellas, las de selección, rotación, traslación, dilatación, reflexión y medición.

Con The Geometer's Sketchpad se pueden producir dibujos interactivos y lecciones grabadas para ser reproducidas en cualquier momento. Por sus capacidades de animación, es posible construir simulaciones para aplicarlas a distancia o directamente en el salón de clase.

En Internet, es posible encontrar muchos sitios con aplicaciones educativas: artículos, ejemplos interactivos, referencias bibliográficas y audiovisuales, por mencionar algunos.

El sitio oficial de esta herramienta es:

<http://www.keypress.com>

The Geometer's Sketchpad ha tenido varias versiones, pero se puede decir que las más estables han sido la 3.1 y la 4.05. Nuestro trabajo se ha realizado con la versión GSP 3.1, pero con la componente de Java de la versión 4.05.

Todas las construcciones interactivas, mas aún aquellas que involucran coordenadas, las hicimos en GSP versión 3.x, las exportamos a html con el convertidor propio de la versión 3.x y ya en el código, utilizamos las clases y la gramática del JavaSketchpad 4.x.

Por tanto en el código sustituimos `ARCHIVE="jsp4.jar" CODEBASE="jsp"` en lugar de `ARCHIVE="JSPDR3.JAR" CODEBASE="JSP"`, que deja el convertidor de la versión 3.x, en donde jsp se refiere a la carpeta donde se encuentran las clases de

java de la versión 4.x, que también hay que sustituirla en lugar de la JSP que contienen las de la versión 3.x.

Una razón poderosa para hacer esta mezcla, es que por alguna consideración que no conocemos, la versión 4.x ya no traduce a html, construcciones que contengan coordenadas cartesianas.

b) Se utilizó el **Proyecto Descartes** en el tema de funciones, para construir un graficador y a la vez operador de funciones, un escalador de funciones que permite cambiar las escalas en los ejes de independientemente uno de otro o ambas a la vez y un graficador de funciones por (3) ramas, que funcionan directamente en Internet.

El **Proyecto Descartes** ha sido promovido y financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, con la finalidad de lograr la innovación en el área de Matemáticas, en la Enseñanza Secundaria y en el Bachillerato y, la primera versión surge en el año 1998.

Desde entonces se han desarrollado sucesivas versiones Descartes 2D y Descartes 3D que han ido mejorando la edición e incorporando nuevas opciones y herramientas que amplían sus posibilidades y campo de acción dentro de las Matemáticas, e incluso, de la Física.

Se puede definir el programa Descartes como un sistema de referencia cartesiano interactivo, en el que se pueden configurar y emplear todos los elementos habituales: Origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas, vectores, etc.

Permite representar curvas y gráficas dadas por sus ecuaciones, tanto en forma explícita como implícita; en particular permite representar las gráficas de todas las funciones que habitualmente se utilizan en la enseñanza secundaria, tanto en coordenadas cartesianas como en paramétricas e inclusive en coordenadas polares.

Los elementos que intervienen en la definición de las ecuaciones pueden ser parámetros modificables por el usuario, lo que hace que las gráficas que se muestran cambien al modificar esos parámetros. Dispone también de una poderosa herramienta de cálculo que permite evaluar cualquier expresión matemática y escribir el resultado en la escena.

Se pueden representar los elementos geométricos elementales: puntos, segmentos, arcos, etc., lo que permite hacer numerosas representaciones geométricas. Como en los casos anteriores, estos elementos pueden depender de parámetros, de forma que la representación cambia cuando el usuario los modifica. También se pueden utilizar las expresiones booleanas y algunas herramientas de programación como bucles, condicionales y listas.

La versión 3D, ampliación de Descartes 2D, incorpora nuevas funcionalidades: geometría tridimensional, macros, espacios múltiples en la escena, editor de

fórmulas, nuevos sistemas de interacción, nuevos sistemas de autoevaluación del alumno, etc.

Es importante decir, que Descartes es actualmente uno de los programas más poderosos para hacer construcciones interactivas de matemáticas para Internet, con el agregado de tener un lenguaje relativamente fácil de aprender, no por nada, su éxito en España.

Cuando iniciamos el proyecto de **Precálculo Interactivo**, hace ya más de dos años, no conocíamos Descartes y manejábamos con mucha soltura el GSP, de ahí la razón de lo poquito que se usó en nuestra tesis. Vale decir que es muy recomendable para todo aquel que desee hacer material didáctico interactivo de matemáticas para la red.

El sitio oficial de esta herramienta es:

<http://descartes.cnice.mecd.es/>

5.2 Herramienta de edición de fórmulas matemáticas

MathType es un editor de fórmulas matemáticas y científicas con un extenso conjunto de símbolos y plantillas para la composición de complejas expresiones matemáticas mediante pulsaciones con el ratón sobre botones y paletas y se utilizó para construir todas las expresiones matemáticas existentes en **Precálculo Interactivo**.

Este programa tiene la posibilidad de escribir una amplísima gama de símbolos matemáticos y fuentes de texto, puede proporcionarles diversos atributos de color, espacios entre fuentes y entre renglones, proporcionarles fondo transparente y exportarlos en formatos gráficos muy comunes en las páginas Web o a código TeX, LaTeX y MathML.

Tiene entre otras características, una interfase sencilla de usar, bastante intuitiva, de tal manera que no costará demasiado trabajo poderla usar en breve tiempo.

De hecho MathType consiste en la versión profesional del familiar Editor de Ecuaciones incluido en Microsoft Word, Corel WordPerfect, AppleWorks y otros productos similares.

Este editor ha sido desarrollado por la empresa Design Science Inc., fundada en 1986 y con sede en Long Beach (California) y de su página Web, se pueden bajar versiones gratuitas temporales.

El sitio oficial de esta herramienta es:

<http://www.dessci.com/en/products/mathtype/>

5.3 Herramienta de edición de imágenes

Frecuentemente se requirió capturar algunas imágenes de pantalla y después procesarlas para incluirlas en las páginas de la tesis, para ello fue utilizado el programa Corel PhotoPaint.

Corel PhotoPaint es un programa de edición de imágenes de mapa de bits que permite retocar fotografías existentes o crear gráficos originales.

Por sus amplias posibilidades para la edición de imágenes es un programa muy utilizado por profesionales del ramo, pero en el caso de esta tesis tan sólo fue utilizado para abrir imágenes, producto de capturas de pantalla y depositadas en el portapapeles, recortarlas, si acaso darles un nuevo muestreo o un pequeño retoque y exportar las imágenes resultantes a un formato gráfico jpg o gif., para posteriormente insertarlas en algunas de sus páginas.

5.4 Herramienta de edición de texto

Un editor de texto fue muy importante para poder editar los applets, resultado de las construcciones en GSP, transformadas mediante su componente JavaSketchpad a un archivo en formato html

En este trabajo de tesis se utilizó el tan conocido bloc de notas de Windows. Se puede en realidad utilizar cualquier otro editor de texto, ya que se trata simplemente de corregir, quitar o aumentar instrucciones en el código de texto, siguiendo la gramática del JavaSketchpad y en su caso del Descartes.

5.5 Herramientas de edición de páginas Web

Eventualmente fue muy importante introducir o corregir hiperligas, modificar la posición de imágenes, editar tablas, entre otros elementos de las páginas html y esta tarea se nos facilitó hacerla con un editor de páginas Web como lo es Dreamweaver.

Las tareas realizadas con Dreamweaver, en realidad se podían suplir con un editor de texto, sin embargo, un editor como el que nombramos facilita el trabajo, dada su interfase gráfica y sumamente intuitiva.

Dreamweaver es de los editores de páginas Web más populares en el medio, es parte de una suite de la compañía Macromedia, que se ha convertido en uno de los estándares en lo que la producción de multimedios se refiere.

El sitio oficial de esta herramienta es:

<http://www.macromedia.com/>

5.6 Algunos conocimientos de HTML y JavaScript

En el trabajo **Precálculo Interactivo** estos conocimientos de html y JavaScript son fundamentales, dado que de otra manera sería muy complicado construir desde una página hasta una estructura de páginas ligadas entre sí, para armar adecuadamente todo un libro digital como el que estamos presentando.

No obstante los conocimientos no son tan profundos, que puedan desanimar a cualquiera que desee iniciar un trabajo como éste. No es necesario previamente agotar sendos cursos de html y JavaScript, más bien, sería necesario entender algunos cuantos procesos y de ahí ir consultando lo que se fuera necesitando.

Con esto, desde luego, no queremos decir que se deba uno negar a conocer de manera profunda estos lenguajes, es evidente que a mayores conocimientos, menos tropiezos y mejores productos.

JavaScript nos sirvió en particular para establecer una rutina que permitiera que las ventanas flotantes que pueda abrir el usuario en **Precálculo Interactivo**, se pudieran cerrar de manera automática, al dar cualquier otro clic, en cualquier otro lugar del programa. El trabajo de estructuración del libro digital lo hicimos con html.

5.7 Navegadores para Internet

Una parte fundamental, es poder probar que las páginas del libro se visualicen adecuadamente en los diversos navegadores para Internet y, en nuestro caso, lo probamos en tres de ellos, que consideramos de los más comunes entre los usuarios de Windows: Internet Explorer, Netscape y FireFox.

Los sitios oficiales respectivamente de estos tres navegadores son los siguientes:

<http://www.microsoft.com/spain/windows/ie/default.mspx>

<http://browser.netscape.com/ns8/>

<http://browser.netscape.com/ns8/>

6. Dificultades técnicas

Al iniciar el proyecto **Precálculo Interactivo**, contábamos con una amplia experiencia en GSP, sabíamos que tipo de construcciones podíamos exportar a html y cuáles no. De hecho habíamos tenido la oportunidad de experimentar con este software en dos o tres proyectos anteriores. Aún más conocíamos varias de sus versiones y conocíamos sus alcances y limitaciones.

También ya contábamos con alguna experiencia en html., ya teníamos una estructura a seguir en el armado de las páginas y en la estructuración total del libro digital, así como en su navegación.

Así que las dificultades técnicas más bien se nos presentaron en lograr una buena apariencia y funcionalidad en las demostraciones y las construcciones interactivas, así como en el acceso a los materiales requeridos en una página, para no tener que abandonarla a la hora de requerirlos.

La solución no fue fácil, pero o resolvimos con paciencia, con trabajo de equipo y estudiando un poco de JavaScript y html.

7. Ficha técnica

Precálculo Interactivo es un software que corre en cualquier computadora con Windows XP ServicePack2 y que tenga instalada la máquina virtual de java.

Se encuentra en Internet en la dirección:

<http://132.248.17.238/calculo>

y corre en cualquier navegador, particularmente en Internet Explorer, Netscape Communicator o FireFox.

También se tiene en disco compacto y se puede correr ejecutando con doble clic el archivo index.html. Se abre en el navegador que tenga declarado por omisión el usuario.

Es importante señalar que todo texto subrayado es una hiperliga que puede abrir una ventana flotante con un teorema y su demostración o con alguna referencia importante.

Todo recuadro con alguna imagen es un botón, que al darle clic produce una acción, como abrir otro botón o mostrar una construcción o alguna situación particular en una construcción interactiva.

Los puntos rojos en las construcciones interactivas se pueden arrastrar con el ratón y así se pueden visualizar distintas situaciones de un teorema o resultado en particular.

La navegación en el sitio es muy estándar:

<< < > >>

Al inicio de la serie, al anterior, al que sigue, al final de la serie.

También se utiliza como hiperliga, el nombre del tema o subtema en cuestión.

8. ¿Cuál es la tesis sobre Precálculo Interactivo?

Precálculo Interactivo es un trabajo original asistido por computadora, para apoyar el aprendizaje sobre los temas básicos para abordar exitosamente un curso de Cálculo Diferencial e Integral I, en una licenciatura en ciencias o en áreas afines y que se puede distribuir en disco compacto o por Internet.

Precálculo Interactivo es original por los temas que aborda, su formalidad matemática, sus demostraciones paso a paso, sus construcciones interactivas y los diversos elementos didácticos interactivos que aporta al aprendizaje de un tema, así como por sus posibilidades de distribución en disco compacto y por Internet.

Precálculo Interactivo es una innovación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas asistidos por computadora, en los temas de Lógica, Números Reales y Funciones, que puede servir de modelo para la construcción de

cursos completos interactivos en línea, que requieran demostraciones formales o explicaciones paso a paso, así como construcciones gráficas interactivas que permitan manipular y representar diversas situaciones de teoremas o resultados.

En Internet, al menos cuando se inició este trabajo hace más de dos años y aún actualmente, no existe un trabajo similar a **Precálculo Interactivo** y por ello nos parece que cobra mayor relevancia su construcción y debería ser aprovechado en las distintas formas sugeridas en este documento.

9. El programa interactivo

Tesis: Precálculo Interactivo

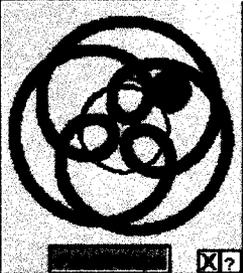
Maestría en Ciencias (Matemáticas)

El objetivo de esta tesis es apoyar el aprendizaje de los temas de Lógica, Números Reales y Funciones, necesarios para un curso de Cálculo Diferencial e Integral.
(ver Documento)

Tesista: Héctor de Jesús Argueta Villamar
hervador1988@unam.mx
 Facultad de Ciencias

Director de tesis: Dr. Carlos Hernández García-Riego
 Instituto de Matemáticas.

Universidad Nacional Autónoma de México
 México, D.F. a 22 de Noviembre de 2006



¡Espera a que se active esta construcción!
Si se se activa, da clic aquí.

Lógica

Números Reales

Funciones

Las maquetas de las construcciones interactivas de este trabajo, están relacionadas con [The Geometer's Sketchpad](#) y su componente [JavaSketchpad](#) (Copyright ©1990-2000 by Key Curriculum Press, Inc.) También en una parte hemos utilizado el [Programa Geogebra](#) (© Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España).

Esta portada principal cuenta con una construcción dinámica que permite cargar las clases de java, necesarias para el buen funcionamiento del software, en todas las construcciones interactivas con las que cuenta. Su carga es bastante rápida, no pasa de 8 segundos.

Este software hace uso de la máquina virtual de java y si el usuario no la tuviera instalada en su computadora, se le proporciona mediante un clic, la manera de bajarlo de la red, fácilmente.

El programa corre casi en cualquier computadora y con cualquier navegador de Internet y, salvo la máquina virtual de java, no requiere de ningún otro software accesorio. Está hecho en una resolución de 800x600, pero se visualiza adecuadamente en cualquier otra superior.

El primer tema: Lógica

En este tema la parte medular son los **métodos de demostración** que son de gran ayuda para los estudiantes que llegan al primer año de licenciatura y se enfrentan a la necesidad de hacer demostraciones.

<p>Lógica</p> <ul style="list-style-type: none">• <u>Introducción</u>• <u>Tu experiencia cuesta arriba</u>• <u>Concepto de proposición</u>• <u>No ejemplos</u>• <u>Ejemplos</u>• <u>Casos fuera de lo común</u>• <u>Tipos de proposiciones</u>• <u>Operaciones básicas</u>• <u>Propiedades importantes</u>• <u>Cuantificadores</u>• <u>Métodos de demostración</u>• <u>Método directo</u>• <u>Método por contradicción</u>• <u>Método por reducción al absurdo</u>• <u>Método por casos</u>• <u>Método por contraejemplo</u>• <u>Referencias</u>	<p style="text-align: right;">Lista Reales Funciones</p> <p style="text-align: center;">LÓGICA</p> <p>Aquí podrás encontrar un resumen sobre las proposiciones lógicas, sus operaciones, propiedades importantes y sobre todo, los métodos de demostración con algunos ejemplos interactivos.</p> <p>Encontrarás también ayuda para comprender lo que significa demostrar y también para comprender los diferentes métodos de demostración utilizados.</p> <p>Esta breve lección de lógica está pensada, para ofrecerte lo mínimo necesario para que puedas entrarle a hacer demostraciones, empezando con las que encontrarás en la sección de los números reales.</p>
---	---

Una breve introducción pretendiendo motivar una actitud del estudiante.

<p>Lógica</p> <ul style="list-style-type: none">• <u>Introducción</u>• <u>Tu experiencia cuesta arriba</u>• <u>Concepto de proposición</u>• <u>No ejemplos</u>• <u>Ejemplos</u>• <u>Casos fuera de lo común</u>• <u>Tipos de proposiciones</u>• <u>Operaciones básicas</u>• <u>Propiedades importantes</u>• <u>Cuantificadores</u>• <u>Métodos de demostración</u>• <u>Método directo</u>• <u>Método por contradicción</u>• <u>Método por reducción al absurdo</u>• <u>Método por casos</u>• <u>Método por contraejemplo</u>• <u>Referencias</u>	<p style="text-align: right;">Lista Reales Funciones</p> <p>Introducción</p> <p>Cuando ingresas a la licenciatura en ciencias, frecuentemente se te solicitará demostrar tal o cual proposición, lema o teorema matemático y si no tienes la preparación adecuada te sentirás lleno de incertidumbres, preguntándote por dónde empezar. Esta situación se te magnificará cuando se te pidan demostrar proposiciones que contienen resultados con los cuales has trabajado anteriormente, que siempre has dado por ciertos y que además te han funcionado.</p> <p>Cuando te parece obvio</p> <p>Esto ocurrirá por ejemplo cuando se te pida demostrar leyes de cancelación como la de la suma $a + c = b + c \Rightarrow a = b$, las leyes de los signos o inclusive proposiciones como que $0 = -0$. Muchas veces sentirás desánimo y quizás llegues a cuestionar la importancia de demostrar resultados que te parecen obvios. Tal situación, puede conducirte a no prestar la atención suficiente en tus clases o a tratar de memorizar procedimientos que lo que más requieren es la aplicación de razonamientos.</p> <p>Conceptos y métodos</p> <p>Para empezar sería muy importante que dedicaras tiempo a comprender los conceptos y a clarificar lo que significa demostrar y los diversos métodos de demostración con los que puedes contar. Además de lo anterior, cuenta mucho tu convencimiento y disposición sobre la necesidad de hacer demostraciones, para poder formalizar y desarrollar el estudio de las matemáticas.</p>
---	---

Una reflexión sobre experiencias previas, destacando la necesidad de formalizar.

<h3>Lógica</h3> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Introducción</u> • <u>Tu experiencia cuenta arriba</u> • <u>Concepto de proposición</u> • <u>No ejemplos</u> • <u>Ejemplos</u> • <u>Cases fuera de lo común</u> • <u>Tipos de proposiciones</u> • <u>Operaciones básicas</u> • <u>Propiedades importantes</u> • <u>Cuantificadores</u> • <u>Métodos de demostración</u> • <u>Método directo</u> • <u>Método por contradicción</u> • <u>Método por reducción al absurdo</u> • <u>Método por casos</u> • <u>Método por contraejemplo</u> • <u>Referencias</u> 	<p style="text-align: right;">Inicio Reales Funciones</p> <p>Tu experiencia cuenta arriba Con la experiencia que traes del bachillerato, aun si fuiste de los muy buenos, el rigor matemático de las demostraciones te significará un salto muy fuerte y no siempre comprensible a la primera. Tu experiencia en las matemáticas hasta este momento ha consistido en aplicar fórmulas o seguir recetas para ciertos desarrollos matemáticos elaborados. Tal vez, lo más complicado con lo que te has topado es el encontrar "el truco algebraico" para una sustitución o para simplificar una expresión.</p> <p>No sólo debes ser cuidadoso Ahora igual que antes, al realizar cada paso en una demostración, debes ser cuidadoso en justificarlo con algún concepto, definición, axioma, hipótesis o resultado, previos, pero antes que eso, deberás elegir el método de demostración a utilizar y darte una idea de cómo empezar. Esto último sólo se te podrá ocurrir si tienes suficiente claridad de los que debes demostrar y qué te está permitido utilizar.</p> <p>Resultados "no verdaderos" Con la idea de influir en la necesidad de formalizar, te transmito algunos resultados "no verdaderos", que demuestro en mis cursos, junto con mis estudiantes, partiendo de proposiciones que ellos me aportan como verdaderas. Estos son sólo una muestra de los tantos que se pueden hacer:</p> <p style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/> A) $1 = -1$ <input type="checkbox"/> B) $2 = 1$ <input type="checkbox"/> C) $2 = 0$ <input type="checkbox"/> D) $a = 0 \forall a$ </p> <p style="text-align: center;">Da clic en la proposición que gustes, para ver su demostración.</p>
--	--

Resultados "falsos" demostrados como "verdaderos", todo a partir de reglas dadas por los alumnos (ventana flotante).

<h3>Lógica</h3> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Introducción</u> • <u>Tu experiencia cuenta a</u> • <u>Concepto de proposición</u> • <u>No ejemplos</u> • <u>Ejemplos</u> • <u>Cases fuera de lo común</u> • <u>Tipos de proposiciones</u> • <u>Operaciones básicas</u> • <u>Propiedades importante</u> • <u>Cuantificadores</u> • <u>Métodos de demostración</u> • <u>Método directo</u> • <u>Método por contradicción</u> • <u>Método por reducción a</u> • <u>Método por casos</u> • <u>Método por contraejem</u> • <u>Referencias</u> 	<p style="text-align: center;">Proposición A: $1 = -1$</p> <p>Demostración: La idea es utilizar las <i>Reglas dadas por los alumnos :</i></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><input type="checkbox"/> $1 =$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $0 \leq \sqrt{a} = b$, donde $b^2 = a$ 2) $(-a)(-b) = ab$ 3) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 4) $(x)(x) = x^2$ 5) $(\sqrt{a})^2 = a$ </div> <p style="text-align: right;">?</p> <p style="text-align: center;"> <input type="button" value="Mostrar Todo"/> <input type="button" value="Reiniciar paso a paso"/> </p>	<p style="text-align: right;">Inicio Reales Funciones</p> <p>rigor matemático ble a la primera. órmulas o seguir icado con lo que a simplificar una</p> <p>er cuidadoso en , pero antes que no empezar. Esto mostrar y qué te</p> <p>resultados "no de proposiciones s que se pueden</p> <p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/> $0 \forall a$</p>
--	---	---

Resultados "falsos" demostrados como "verdaderos", a partir de reglas dadas por los alumnos (ventana flotante).

<p>Lógica</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Introducción</u> • <u>Tu experiencia cuenta</u> • <u>Concepto de proposición</u> • <u>Na ejemplos</u> • <u>Ejemplos</u> • <u>Casos fuera de lo común</u> • <u>Tipos de proposiciones</u> • <u>Operaciones básicas</u> • <u>Propiedades importantes</u> • <u>Cuantificadores</u> • <u>Métodos de demostración</u> • <u>Método directo</u> • <u>Método por contradicción</u> • <u>Método por reducción al absurdo</u> • <u>Método por casos</u> • <u>Método por contrarejemplo</u> • <u>Referencias</u> 	<p>Proposición B: $2=1$</p> <p>Demostración: La idea es utilizar las Reglas dadas por los alumnos :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px 0;"> <p>Sea $a = b$</p> </div> <p>1) $x = y \Leftrightarrow z x = z y$ 2) $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$ 3) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$</p> <p style="text-align: right;">?</p> <p>Mostrar Todo Reiniciar paso a paso</p>	<p>Inicio Reales Funciones</p> <p>rigor matemático sible a la primera. fórmulas o seguir licado con lo que a simplificar una</p> <p>er cuidadoso en s, pero antes que no empezar. Esto mostrar y qué te</p> <p>resultados "no de proposiciones os que se pueden</p> <p>$\exists \forall a$</p>
---	--	--

El concepto de proposición

<p>Lógica</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Introducción</u> • <u>Tu experiencia cuenta arriba</u> • <u>Concepto de proposición</u> • <u>Na ejemplos</u> • <u>Ejemplos</u> • <u>Casos fuera de lo común</u> • <u>Tipos de proposiciones</u> • <u>Operaciones básicas</u> • <u>Propiedades importantes</u> • <u>Cuantificadores</u> • <u>Métodos de demostración</u> • <u>Método directo</u> • <u>Método por contradicción</u> • <u>Método por reducción al absurdo</u> • <u>Método por casos</u> • <u>Método por contrarejemplo</u> • <u>Referencias</u> 	<p style="text-align: right;">Inicio Reales Funciones</p> <p>Concepto de proposición</p> <p>Si buscas en el diccionario encontrarás lo siguiente acerca del término Proposición:</p> <ul style="list-style-type: none"> > Expresión de un juicio entre dos términos, sujeto y predicado, que afirma o niega este de aquel, o incluye o excluye el primero del segundo. > En otros simplemente lo declaran como sinónimo de oración, es decir, como una expresión gramatical con sujeto, verbo y predicado. <p>Proposición gramatical</p> <p>Para abreviar diremos que gramaticalmente una proposición, es una oración, que afirma o niega algo de alguien, donde ese alguien puede ser singular o plural, masculino, femenino o neutro.</p> <p>Por ejemplo, "Los triángulos son las figuras geométricas más bonitas" es una oración que afirma algo sobre los triángulos y por lo mismo es una proposición gramatical. Sin embargo "El dulce de la miel" es tan solo una frase que no afirma, ni niega algo sobre el dulce de la miel, como pudiera ser "me empalaga". Distinto sería decir: "La miel es dulce", en este caso, si sería una proposición gramatical.</p> <p>Proposición lógica</p> <p>Una proposición lógica, es una proposición gramatical, pero con la característica fundamental de que pueda ser clasificada como verdadera o como falsa, pero no ambas. Ni tampoco que si es falsa, resulte verdadera o viceversa.</p> <p>En el diccionario la acepción matemática de proposición es: "Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar". Obviamente esto no sería posible si la expresión misma</p>
--	--

Proposiciones que no son lógicas

<h3>Lógica</h3> <ul style="list-style-type: none">• <u>Introducción</u>• <u>Tu experiencia cuenta arriba</u>• <u>Concepto de proposición</u>• <u>No ejemplos</u>• <u>Ejemplos</u>• <u>Casos fuera de lo común</u>• <u>Tipos de proposiciones</u>• <u>Operaciones básicas</u>• <u>Propiedades importantes</u>• <u>Cuantificadores</u>• <u>Métodos de demostración</u>• <u>Método directo</u>• <u>Método por contrarreciprocidad</u>• <u>Método por reducción al absurdo</u>• <u>Método por casos</u>• <u>Método por contraejemplo</u>• <u>Referencias</u>	<p style="text-align: right;">Inicio <u>Reales Funciones</u></p> <h3>No ejemplos</h3> <p>Ensayemos una lista y luego analizamos caso por caso:</p> <ol style="list-style-type: none">1) El trinar del conzontle.2) ¡Haz tu tarea antes de jugar!3) Todos los polígonos son bonitos.4) El número imaginario i es mayor que 100. <h3>Proposiciones que no son lógicas</h3> <p>En 1) tenemos una simple frase gramatical, a la cual le falta la acción declarativa. Así que no podríamos darle un valor de verdad o falsedad, es decir, no es proposición lógica.</p> <p>En 2) tenemos una oración gramatical, pero ésta no es declarativa, más bien es imperativa, es una orden.</p> <p>En 3) aunque tenemos una proposición gramatical, la afirmación tiene un carácter subjetivo y por lo mismo no podría clasificarse rigurosamente como verdadera o falsa. Es decir, no es una proposición lógica.</p> <p>En 4) aunque tenemos una proposición gramatical, no es lógica porque para el imaginario i, el concepto "mayor que" no tiene sentido.</p>
--	--

Proposiciones lógicas y abiertas

<h3>Lógica</h3> <ul style="list-style-type: none">• <u>Introducción</u>• <u>Tu experiencia cuenta arriba</u>• <u>Concepto de proposición</u>• <u>No ejemplos</u>• <u>Ejemplos</u>• <u>Casos fuera de lo común</u>• <u>Tipos de proposiciones</u>• <u>Operaciones básicas</u>• <u>Propiedades importantes</u>• <u>Cuantificadores</u>• <u>Métodos de demostración</u>• <u>Método directo</u>• <u>Método por contrarreciprocidad</u>• <u>Método por reducción al absurdo</u>• <u>Método por casos</u>• <u>Método por contraejemplo</u>• <u>Referencias</u>	<p style="text-align: right;">Inicio <u>Reales Funciones</u></p> <h3>Ejemplos</h3> <p>Ensayemos una lista y luego analizamos caso por caso:</p> <ol style="list-style-type: none">1) El 14 es factor común de 42 y 28.2) Jalapa es la capital de Veracruz.3) En Puebla se firmó "El Plan de San Luis".4) Todos los números primos son impares.5) x es mayor que 100.6) Él es maestro de primaria. <h3>Proposiciones lógicas</h3> <p>En 1), 2), 3) y 4) se tienen proposiciones gramaticales, que además se pueden clasificar sin equívocos como verdaderas o falsas. Las proposiciones 3) y 4) por ejemplo, son falsas. Así, éstas son proposiciones lógicas.</p> <h3>Proposiciones Abiertas</h3> <p>Los ejemplos 5) y 6) se catalogan como proposiciones abiertas, dado que para poderlas catalogar como lógicas, es necesario saber quién es el sujeto x, en 5) y Él en 6).</p> <p>Para que 5) sea proposición lógica, x debe referirse a un número, pero además para el cual tenga sentido el concepto "mayor que". Por ejemplo x no lo podríamos sustituir por "George Bush" o por "el número imaginario i". Respetando una sustitución adecuada, sus valores de verdad sólo dependerían del valor correspondiente de x.</p> <p>Igualmente para que 6) sea proposición lógica, se requiere sustituir "Él", por una persona en</p>
--	---

Fuera de lo común.

Se da un ejemplo de una proposición que siendo verdadera, es falsa y viceversa.
También de una proposición lógica que resulta verdadera por vacuidad.

Lógica		Inicio Reales Funciones
<ul style="list-style-type: none">• <u>Introducción</u>• <u>Tu experiencia cuenta arriba</u>• <u>Concepto de proposición</u>• <u>No ejemplos</u>• <u>Ejemplos</u>• <u>Casos fuera de lo común</u>• <u>Tipos de proposiciones</u>• <u>Operaciones lógicas</u>• <u>Propiedades importantes</u>• <u>Cuantificadores</u>• <u>Métodos de demostración</u>• <u>Método directo</u>• <u>Método por contradicción</u>• <u>Método por reducción al absurdo</u>• <u>Método por casos</u>• <u>Método por contraejemplo</u>• <u>Referencias</u>	<p>Casos fuera de lo común Los siguientes ejemplos muestran situaciones interesantes.</p> <ol style="list-style-type: none">1) Esta proposición es falsa2) Todos los marcianos son verdes <p>Una que no La 1) "Esta proposición es falsa", es un caso curioso. Es una proposición gramatical que se autocalifica. Si decimos que es verdadera, entonces es cierto lo que afirma, es decir que "es falsa" y si decimos que es falsa, entonces reafirmamos lo que dice la proposición y por lo tanto resulta verdadera.</p> <p>Se puede resumir diciendo: Si es verdadera, es falsa y si es falsa, es verdadera, por tanto no es lógica. Este tipo de proposiciones, caen en el terreno de los llamados metalenguajes, es decir, "lenguajes que se usan para hablar de sí mismos", que por cierto no serán parte de nuestro estudio.</p> <p>Una que si La 2) "Todos los marcianos son verdes", muestra otro caso interesante. Es claro que es una proposición gramatical. Pero la pregunta es:</p> <p style="text-align: center;">¿Se puede clasificar como verdadera o falsa?</p> <p>Decimos categóricamente que es verdadera, puesto que si fuera falsa debería existir al menos un marciano que no fuera verde. Sin embargo, hasta ahora nadie podría exhibirlo. Entonces es una</p>	

Proposiciones simples y compuestas

Lógica		Inicio Reales Funciones
<ul style="list-style-type: none">• <u>Introducción</u>• <u>Tu experiencia cuenta arriba</u>• <u>Concepto de proposición</u>• <u>No ejemplos</u>• <u>Ejemplos</u>• <u>Casos fuera de lo común</u>• <u>Tipos de proposiciones</u>• <u>Operaciones lógicas</u>• <u>Propiedades importantes</u>• <u>Cuantificadores</u>• <u>Métodos de demostración</u>• <u>Método directo</u>• <u>Método por contradicción</u>• <u>Método por reducción al absurdo</u>• <u>Método por casos</u>• <u>Método por contraejemplo</u>• <u>Referencias</u>	<p>Tipos de proposiciones En adelante cuando hablemos de proposiciones, éstas serán lógicas. Si son abiertas, significará que el conjunto de sustituciones está bien definido y la harán verdadera o falsa. Para operar con las proposiciones, éstas se clasifican en dos tipos: Simples y Compuestas, dependiendo de como están conformadas.</p> <p>Proposiciones Simples Son aquellas que no tienen oraciones componentes afectadas por negaciones ("no") o términos de enlace como conjunciones ("y"), disyunciones ("o") o implicaciones ("si ... entonces"). Pueden aparecer términos de enlace en el sujeto o en el predicado, pero no entre oraciones.</p> <p>Proposiciones Compuestas Una proposición será compuesta si no es simple. Es decir, si está afectada por negaciones o términos de enlace entre oraciones componentes.</p> <p>Ejemplos Ensayemos una lista clasificada y luego algunas aclaraciones:</p> <ol style="list-style-type: none">1) Carlos Fuentes es un escritor. (Simple)2) $\text{Sen}(x)$ no es un número mayor que 1. (Compuesta)3) El 14 y el 7 son factores del 42. (Simple)4) El 14 es factor del 42 y el 7 también es factor del 42. (Compuesta)5) El 2 o el 3 son divisores de 48. (Simple)6) El 2 es divisor de 48 o el 3 es divisor de 48. (Compuesta)7) Si x es número primo, entonces x impar. (Compuesta)	

Operaciones básicas.

Además de las definiciones se podrán encontrar tablas de verdad interactivas.

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones básicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contrajemplo](#)
- [Referencias](#)

Operaciones básicas

Denotaremos las proposiciones simples como p , q , r , etc. y definiremos 4 operaciones básicas, correspondientes a la negación "no", la conjunción "y", la disyunción "o" y la implicación (" \rightarrow ").

La negación
Dada una proposición p , su negación $\neg(p)$ es aquella proposición que es falsa cuando p es verdadera y, es verdadera cuando p es falsa.

La conjunción
Dadas las proposiciones p , q . La conjunción p y q es aquella proposición que sólo es verdadera, cuando ambas son verdaderas. En cualquier otro caso es falsa.

La disyunción
Dadas las proposiciones p , q . La disyunción p o q es aquella proposición que sólo es falsa, cuando ambas son falsas. En cualquier otro caso es verdadera.

La implicación
Dadas las proposiciones p , q . La implicación $p \rightarrow q$ es aquella proposición que sólo es falsa, cuando p es verdadera y q es falsa. En cualquier otro caso es verdadera.

Para ilustrarlas, se usan las llamadas tablas de verdad. Dá clic en la que gustes ver:

Negación	Conjunción	Disyunción	Implicación
--------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

Operaciones básicas con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones básicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contrajemplo](#)
- [Referencias](#)

Conjunción

p	q	p y q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Reiniciar

Inicio
[Reales Funciones](#)

y definiremos 4 operaciones básicas, disyunción "o" y la implicación (" \rightarrow ").

proposición que es falsa cuando p es

la proposición que sólo es verdadera, sa.

proposición que sólo es falsa, cuando

Para ilustrarlas, se usan las llamadas tablas de verdad. Dá clic en la que gustes ver:

Negación	Conjunción	Disyunción	Implicación
--------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

Operaciones básicas con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones básicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuanticadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	• V
V	F	• V
F	V	• V
F	F	• F

[Reiniciar](#)

Inicio
Reales Funciones

... y definiremos 4 operaciones básicas, la disyunción " \vee " y la implicación (" \rightarrow ").

... proposición que es falsa cuando p es ...

... aquella proposición que sólo es verdadera, ...

... aquella proposición que sólo es falsa, cuando ...

La implicación
Dadas las proposiciones p, q . La implicación $p \rightarrow q$ es aquella proposición que sólo es falsa, cuando p es verdadera y q es falsa. En cualquier otro caso es verdadera.

Para ilustrarlas, se usan las llamadas tablas de verdad. Dá clic en la que gustes ver:

Negación	Conjunción	Disyunción	Implicación
--------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

Operaciones básicas con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones básicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuanticadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	• V
V	F	• F
F	V	• V
F	F	• V

[Reiniciar](#)

Inicio
Reales Funciones

... definiremos 4 operaciones básicas, la disyunción " \vee " y la implicación (" \rightarrow ").

... proposición que es falsa cuando p es ...

... aquella proposición que sólo es verdadera, ...

... aquella proposición que sólo es falsa, cuando ...

La implicación
Dadas las proposiciones p, q . La implicación $p \rightarrow q$ es aquella proposición que sólo es falsa, cuando p es verdadera y q es falsa. En cualquier otro caso es verdadera.

Para ilustrarlas, se usan las llamadas tablas de verdad. Dá clic en la que gustes ver:

Negación	Conjunción	Disyunción	Implicación
--------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

Propiedades importantes

Las propiedades que se presentan, son fundamentales para comprender los métodos de demostración. También se cuenta con demostraciones interactivas.

Inicio
Reales Funciones

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contrarrecíproca](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Propiedades importantes

Estas serán fundamentales para entender los métodos de demostración.

Unas definiciones

Definición 1. Dos proposiciones p y q son equivalentes si siempre que p es verdadera, también lo es q y viceversa.

Definición 2. En la proposición $p \rightarrow q$, a p se le llama antecedente y a q consecuente, o también hipótesis y conclusión, respectivamente.

Definición 3. A la proposición $q \rightarrow p$, se le llama la recíproca de $p \rightarrow q$.

Definición 4. $p \leftrightarrow q$ se lee: "p si y solo si q" y significa la conjunción de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$.

Negaciones diversas

En la construcción de verdades matemáticas, es muy importante que sepas construir negaciones de proposiciones compuestas. Aquí, algunas de las más usuales:

$\text{no}(\text{no}p) \equiv p$

$\text{no}(p \text{ y } q) \equiv \text{no}(p) \text{ o } \text{no}(q)$

$\text{no}(p \text{ o } q) \equiv \text{no}(p) \text{ y } \text{no}(q)$

$\text{no}(p \rightarrow q) \equiv p \text{ y } \text{no}(q)$

Dando clic sobre cada una de ellas, verás su demostración

Contrarrecíproca

Definición. A la proposición $\text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$ se le llama la contrarrecíproca de $p \rightarrow q$.

$p \rightarrow q \equiv \text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$

Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Inicio
Reales Funciones

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contrarrecíproca](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Negación de la conjunción

p	q	$p \text{ y } q$	$\text{no}(p \text{ y } q)$	$\text{no}(p)$	$\text{no}(q)$	$\text{no}(p) \text{ o } \text{no}(q)$
V	V	•V	•F	•F	•F	•F
V	F	•F	•V	•F	•V	•V
F	V	•F	•V	•V	•F	•V
F	F	•F	•V	•V	•V	•V

Reiniciar

Contrarrecíproca

Definición. A la proposición $\text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$ se le llama la contrarrecíproca de $p \rightarrow q$.

$p \rightarrow q \equiv \text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$

Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta
- Conceptos de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarreciproc
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contradicción
- Referencias

Negación de la disyunción

p	q	$p \vee q$	$\text{no}(p \vee q)$	$\text{no}(p)$	$\text{no}(q)$	$\text{no}(p) \wedge \text{no}(q)$
V	V	•V	•F	•F	•F	•F
V	F	•V	•F	•F	•V	•F
F	V	•V	•F	•V	•F	•F
F	F	•F	•V	•V	•V	•V

Res

bién lo

mbién

ciones

$\text{no}(p \vee q) \equiv \text{no}(p) \wedge \text{no}(q)$ $\text{no}(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \text{no}(q)$

Dando clic sobre cada una de ellas, verás su demostración

Contrarreciproca
 Definición. A la proposición $\text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$ se le llama la contrarreciproca de $p \rightarrow q$.

$p \rightarrow q \equiv \text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$

Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta
- Conceptos de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarreciproc
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contradicción
- Referencias

Negación de la implicación

p	q	$p \rightarrow q$	$\text{no}(p \rightarrow q)$	$\text{no}(q)$	$p \wedge \text{no}(q)$
V	V	•V	•F	•F	•F
V	F	•F	•V	•V	•V
F	V	•V	•F	•F	•F
F	F	•V	•F	•V	•F

Inicio

Restar Funciones

p es verdadera, también lo

q consecuente, o también

$\rightarrow q \vee q \rightarrow p$

pas construir negaciones

$\text{no}(p \vee q) \equiv \text{no}(p) \wedge \text{no}(q)$ $\text{no}(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \text{no}(q)$

Dando clic sobre cada una de ellas, verás su demostración

Contrarreciproca
 Definición. A la proposición $\text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$ se le llama la contrarreciproca de $p \rightarrow q$.

$p \rightarrow q \equiv \text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$

Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarreciproc
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contrarejemplo
- Referencias

Contrarreciproca de $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$no(q)$	$no(p)$	$no(q) \rightarrow no(p)$
V	V	•V	•F	•F	•V
V	F	•F	•V	•F	•F
F	V	•V	•F	•V	•V
F	F	•V	•V	•V	•V

Reiniciar

?

Funciones

Opera con su

Definición. Si $p = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$, entonces se dice que $p \rightarrow q$, es una implicación por casos y además:

$$p \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q \vee p_2 \rightarrow q \vee \dots \vee p_n \rightarrow q)$$

Dando clic, verás la demostración para dos casos.

Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarreciproc
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contrarejemplo
- Referencias

Reducción al absurdo

p	q	$p \rightarrow q$	$no(q)$	$p \vee no(q)$	$x \vee no(x)$	$p \vee no(q) \rightarrow x \vee no(x)$
V	V	•V	•F	F	F	•V
V	F	•F	•V	•V	F	•F
F	V	•V	•F	F	F	•V
F	F	•V	•V	•F	F	•V

Reiniciar

?

Funciones

Opera con su

Definición. Si $p = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$, entonces se dice que $p \rightarrow q$, es una implicación por casos y además:

$$p \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q \vee p_2 \rightarrow q \vee \dots \vee p_n \rightarrow q)$$

Dando clic, verás la demostración para dos casos.

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la cuenta
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Lógica
 Reales Funciones

Cuantificadores

Sabemos que las proposiciones afirman o niegan algo de alguien. Dependiendo de dicho alguien, incluyen un cuantificador. Ejemplifiquemos y analicemos caso por caso:

- 1) Todos los múltiplos de 2, son múltiplos de 4.
- 2) Todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2.
- 3) Ningún entero par es divisible por 3.
- 4) Ningún número primo mayor que 2, es par.
- 5) Existe un natural, que satisface la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.
- 6) Existen naturales, que son la suma de sus divisores propios.

Universal y Existencial

En 1), 2), 3) y 4) se afirma algo sobre un todo, es decir se afirma algo sobre todos los elementos de un cierto conjunto. Por ello se dice que tales proposiciones incluyen un "cuantificador universal". En cambio en 5) y 6) la afirmación es sobre alguien singular. Por ello se dice que tales proposiciones incluyen un "cuantificador existencial".

Cuando son falsas

Reflexionando sobre la 1), se puede descubrir que no todos los múltiplos de 2 son múltiplos de 4, es decir:
 La 1) es falsa porque "Existe un múltiplo de 2 (ejemplo el 6), que no es múltiplo de 4".
 Similarmente, reflexionando sobre la 3), se pueden encontrar números pares divisibles por 3, es decir:
 La 3) es falsa porque "Existe un par (ejemplo el 12), que si es divisible por 3".
 Así mismo, resolviendo la ecuación dada en 5), se da uno cuenta que las soluciones no son

Reflexionando sobre la demostración

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la cuenta
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Lógica
 Reales Funciones

Métodos de demostración

Se aplican cuando se desea deducir una proposición q, a partir de una proposición p que se considera verdadera. Es decir, se aplican para demostrar que $P \rightarrow Q$ es verdadera, suponiendo que p es verdadera.

Esto es, se trata de validar el primer caso de la tabla de verdad de la implicación:

P	Q	$P \rightarrow Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Considerando la hipótesis p verdadera, si la implicación se construye utilizando los métodos de demostración (que garantizan razonamientos verdaderos), por consecuencia se arribará a una conclusión q verdadera.

Es importante recordar que si se parte de p verdadera y la implicación es falsa, no se puede arribar a q verdadera (segundo caso de su tabla de verdad).

El método directo

Se presenta la expresión lógica en la que se basa el método y algunos ejemplos de aplicación.

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Método directo

Este método consiste en construir una sucesión de proposiciones p_1, p_2, \dots, p_n , todas ellas verdaderas, partiendo de $p_1 = p$, y terminando en $p_n = q$. En cada paso, se pueden usar la hipótesis p y resultados previamente establecidos, como definiciones, axiomas u otras proposiciones, incluyendo las que se van construyendo en la sucesión.

La expresión lógica de este método es la siguiente:

$$(p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_{i-1}) \rightarrow p_i \quad \forall i = 2, \dots, n$$

verdadera

Dando clic podrás ver una forma esquemática

Ejemplos

$$k \text{ impar} \Rightarrow k^2 \text{ impar}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = x - 1 \Rightarrow x = 0$$

$$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Dando clic en cada uno, podrás ver su demostración

Esquema del método directo (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Inicio
Reales Funciones

iones p_1, p_2, \dots, p_n , todas ellas
, se pueden usar la hipótesis p y
lomas u otras proposiciones,

$p = p_1$

p_2

p_{n-1}

$p_n = q$

La

Eje

$2, \dots, n$

nática

$$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Dando clic en cada uno, podrás ver su demostración

Ejemplo interactivo del método directo (ventana flotante)

<h3>Lógica</h3> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Introducción</u> • <u>Tu experiencia cuenta aquí</u> • <u>Concepto de proposición</u> • <u>No ejemplos</u> • <u>Ejemplos</u> • <u>Cases fuera de lo común</u> • <u>Tipos de proposiciones</u> • <u>Operaciones lógicas</u> • <u>Propiedades importantes</u> • <u>Constituyentes</u> • <u>Métodos de demostración</u> • <u>Método directo</u> • <u>Método por contrarrecíproco</u> • <u>Método por reducción al absurdo</u> • <u>Método por casos</u> • <u>Método por contrarejemplo</u> • <u>Referencias</u> 	<p>k impar $\Rightarrow k^2$ impar</p> <p>Demostración: La idea es usar el método directo y razonamientos verdaderos conocidos</p> <p>k impar \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los impares son de la forma $2n + 1$ <p>$k = 2n + 1, n$ entero \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elevando al cuadrado: <p>$k^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Desarrollando el binomio: <p>$k^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Factorizando el 2: <p>$k^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • La suma y producto de enteros es entero <p>$k^2 = 2m + 1 \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Así k^2 es de la forma $2m + 1$: <p>k^2 es impar • Q.E.D.</p> <p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>	<p>Ruido</p> <p>Funciones</p> <p>• todas ellas hipótesis y oposiciones.</p>
---	---	---

Ejemplo interactivo del método directo (ventana flotante)

<h3>Lógica</h3> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Introducción</u> • <u>Tu experiencia cuenta aquí</u> • <u>Concepto de proposición</u> • <u>No ejemplos</u> • <u>Ejemplos</u> • <u>Cases fuera de lo común</u> • <u>Tipos de proposiciones</u> • <u>Operaciones lógicas</u> • <u>Propiedades importantes</u> • <u>Constituyentes</u> • <u>Métodos de demostración</u> • <u>Método directo</u> • <u>Método por contrarrecíproco</u> • <u>Método por reducción al absurdo</u> • <u>Método por casos</u> • <u>Método por contrarejemplo</u> • <u>Referencias</u> 	<p>$\sqrt{x^2 + 1} = x - 1 \Rightarrow x = 0$</p> <p>Demostración: La idea es usar el método directo y razonamientos verdaderos conocidos</p> <p>$\sqrt{x^2 + 1} = x - 1 \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$: <p>$(\sqrt{x^2 + 1})^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicando el cuadrado de una raíz: <p>$x^2 + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow$</p> <p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>	<p>• todas ellas hipótesis y oposiciones.</p>
---	--	---

Ejemplo interactivo del método directo (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta aquí](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contrarrecíproca](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

$$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Demostración: La idea es usar el método directo y razonamientos verdaderos conocidos

$$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0 \Rightarrow$$

Inicio
de Funciones

... todas ellas
a hipótesis y
proposiciones.

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

2

El método por contrarrecíproca

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta aquí](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contrarrecíproca](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Método por contrarrecíproca

Dependiendo de la proposición a demostrar puedes usar uno u otro método, pero frecuentemente cuando una proposición $P \rightarrow Q$, se te resista al método directo, podrás usar otros métodos como los que verás en este y los siguientes apartados, en particular éste de la contrarrecíproca.

Equivalencia lógica

Este método está basado en la equivalencia:

$$P \rightarrow Q \equiv \text{no}(Q) \rightarrow \text{no}(P)$$

Por ello, para demostrar que $P \rightarrow Q$, se parte de la negación de la conclusión $\text{no}(Q)$ y de ello se deduce la negación de la hipótesis $\text{no}(P)$.

Este método también se enuncia del siguiente modo:
Para demostrar que $P \rightarrow Q$, se parte de suponer que la conclusión Q es falsa y de ahí se deduce que la hipótesis P es falsa.

Ejemplos

En adelante denotaremos por \emptyset al conjunto vacío.

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$$

$$k \text{ natural y } k^2 \text{ par} \Rightarrow k \text{ es par}$$

Inicio
de Funciones

Figura lógica interactiva del método por contrarrecíproca (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contrarejemplo
- Referencias

Contrarrecíproca de $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$no(q)$	$no(p)$	$no(q) \rightarrow no(p)$
V	V	•V	•F	•F	•V
V	F	•F	•V	•F	•F
F	V	•V	•F	•V	•V
F	F	•V	•V	•V	•V

Reiniciar

o
retores

ntemente
dos como

de ello se

se deduce

Ejemplos
En adelante denotaremos por \emptyset al conjunto vacío.

$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

$k \text{ natural y } k^2 \text{ par} \Rightarrow k \text{ es par}$

Ejemplo interactivo del método por contrarrecíproca (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contrarejemplo
- Referencias

$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

Demostración: Usaremos el método de la contrarrecíproca, demostrando que $no(q) \rightarrow no(p)$

• Negando la conclusión:

$B^c \not\subset A^c \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

ones

temente
os como

e ello se

deduce

En adelante denotaremos por \emptyset al conjunto vacío.

$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

$k \text{ natural y } k^2 \text{ par} \Rightarrow k \text{ es par}$

Ejemplo interactivo del método por contrarrecíproca (ventana flotante)

<p>Lógica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Introducción • Tu experiencia cuenta mucho • Concepto de proposición • No ejemplos • Ejemplos • Casos fuera de lo común • Tipos de proposiciones • Operaciones lógicas • Propiedades importantes • Cuantificadores • Métodos de demostración • Método directo • Método por contrarrecíproca • Método por reducción al absurdo • Método por casos • Método por contradicción • Referencias 	<p>k natural y k^2 par $\Rightarrow k$ es par</p> <p>Demostración: Usaremos el método de la contrarrecíproca, demostrando que $\text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$</p> <p>Supongamos que k no es par \Rightarrow</p> <ul style="list-style-type: none"> • Entonces es impar. de la forma $2n + 1$ $k = 2n + 1, n \text{ entero} \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> • Así, elevando al cuadrado: $k^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> • Desarrollando el binomio: $k^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> • Factorizando el 2: $k^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> • Así k^2 es impar $k^2 = 2m + 1 \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> • Entonces se concluye que: $k^2 \text{ no es par} \quad \bullet \text{Q.E.D.}$	<p>lo funciones</p> <p>entonces odos como ca.</p> <p>y de ello se</p> <p>se deduce</p>
	<p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>	<p>?</p>

Ejemplo interactivo del método por contrarrecíproca (ventana flotante)

<p>Lógica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Introducción • Tu experiencia cuenta mucho • Concepto de proposición • No ejemplos • Ejemplos • Casos fuera de lo común • Tipos de proposiciones • Operaciones lógicas • Propiedades importantes • Cuantificadores • Métodos de demostración • Método directo • Método por contrarrecíproca • Método por reducción al absurdo • Método por casos • Método por contradicción • Referencias 	<p>Si A es cualquier conjunto, entonces $A \cap A^c = \emptyset$</p> <p>Demostración: Usaremos el método de la contrarrecíproca, demostrando que $\text{no}(q) \rightarrow \text{no}(p)$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Negando la conclusión: <p>Supongamos que $A \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow$</p>	<p>Este es funciones</p> <p>proca.</p> <p>g) y de ello se</p> <p>ati se deduce</p>
	<p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>	<p>?</p>

El método por reducción al absurdo

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia tuerta acida
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contrajente
- Referencias

Inicio
Reales Funciones

Método por Reducción al absurdo

El siguiente método (de reducción al absurdo) es frecuentemente utilizado y a veces, hasta el favorito de muchos matemáticos, por la gran versatilidad que ofrece.

Equivalencia lógica

Este método está basado en la equivalencia:

$$p \rightarrow q \equiv (p \text{ y } \text{no}(q) \rightarrow x \text{ y } \text{no}(x)) \text{ para alguna } x$$

Así, en este método, para demostrar que $P \rightarrow Q$, se construye un absurdo usando la hipótesis P y la negación de la conclusión $\text{no}(Q)$.

Este método también se enuncia del siguiente modo:
Para demostrar que $P \rightarrow Q$, se construye un absurdo, suponiendo falsa la conclusión Q y usando la hipótesis P .

Ejemplos

En adelante denotaremos por \emptyset al conjunto vacío.

$$A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} n, m \text{ naturales} \\ \text{y } nm \text{ impar} \end{array} \right\} \Rightarrow n \text{ y } m \text{ impares}$$

Figura lógica interactiva del método por reducción al absurdo (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia tuerta acida
- Concepto de pr
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de
- Tipos de propos
- Operaciones ló
- Propiedades im
- Cuantificadores
- Métodos de dem
- Método directo
- Método por con
- Método por red
- Método por cas
- Método por cas
- Referencias

Reducción al absurdo

P	q	$P \rightarrow q$	$\text{no}(q)$	$P \text{ y } \text{no}(q)$	$x \text{ y } \text{no}(x)$	$P \text{ y } \text{no}(q) \rightarrow x \text{ y } \text{no}(x)$
V	V	•V	•F	•F	F	•V
V	F	•F	•V	•V	F	•F
F	V	•V	•F	•F	F	•V
F	F	•V	•V	•F	F	•V

Reiniciar

?

Ejemplos

En adelante denotaremos por \emptyset al conjunto vacío.

$$A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} n, m \text{ naturales} \\ \text{y } nm \text{ impar} \end{array} \right\} \Rightarrow n \text{ y } m \text{ impares}$$

Ejemplo interactivo del método por reducción al absurdo (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la caja
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarreciprocidad
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contradicción
- Referencias

$A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$

Demostración: Usaremos el método de reducción al absurdo, demostrando que p y $\text{no}(q) \rightarrow x$ y $\text{no}(x)$

- Usando la hipótesis:
 $A \subset B \Rightarrow$
- Tenemos la proposición X:

$$(1) \overbrace{\text{Todo } x \in A \Rightarrow x \in B}^X$$
- Negando la conclusión:
 $A - B \neq \emptyset \Rightarrow$
- Tenemos que:
 $\text{Existe } x \in A - B \Rightarrow$
- De donde tenemos $\text{no}(X)$:

$$(2) \overbrace{\text{Existe } x \in A \text{ y } x \notin B}^{\text{no}X} \text{ Q.E.D.}$$

Con (1) y (2), construimos el absurdo: X y $\text{no}(X)$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Inicio

Reiniciar Funciones

X

Usando la hipótesis

conclusión q y usando

Ejemplo interactivo del método por reducción al absurdo (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la caja
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarreciprocidad
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contradicción
- Referencias

$n, m \text{ naturales} \left. \vphantom{\begin{matrix} n, m \\ y \end{matrix}} \right\} \Rightarrow n \text{ y } m \text{ impares}$

Demostración: Usaremos el método de reducción al absurdo, demostrando que p y $\text{no}(q) \rightarrow x$ y $\text{no}(x)$

- Usando la hipótesis:
 $nm \text{ impar} \Rightarrow$
- Construimos la proposición X:

$$(1) \overbrace{nm \text{ no es par}}^X$$
- Negando la conclusión, tenemos:
 $n \text{ par o } m \text{ par} \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Inicio

Reiniciar Funciones

la hipótesis

n q y usando

Ejemplo interactivo del método por reducción al absurdo (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Si A es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset A$

Demostración: Usaremos el método de reducción al absurdo, demostrando que p y $\neg(q) \rightarrow x$ y $\neg(x)$

• Negando la conclusión:

$\text{Supongamos que } \emptyset \not\subset A \rightarrow$

Inicio

Reales

Funciones

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

$n, m \text{ naturales } \wedge nm \text{ impar} \Rightarrow n \text{ y } m \text{ impares}$

Si A es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset A$

ando la hipótesis

usión q y usando

El método por casos

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones lógicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Método por casos

El siguiente método (por casos) solamente es posible utilizarlo cuando la hipótesis P es una disyunción de casos, es decir cuando $p = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$.

Equivalencia lógica

Este método está basado en la equivalencia:

$$p \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q \vee p_2 \rightarrow q \vee \dots \vee p_n \rightarrow q)$$

Este método se explica señalando que para demostrar que $P \rightarrow q$, es necesario demostrar que todos los casos de la hipótesis implican la conclusión.

Ejemplos

$n \text{ natural} \Rightarrow n^2 + n + 1 \text{ es impar}$

$a, b \text{ reales} \Rightarrow |ab| = |a||b|$

Inicio

Reales

Funciones

Figura lógica interactiva del método por casos (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Equivalencia con dos casos

P_1	P_2	$P = P_1 \vee P_2$	q	$P \rightarrow q$	$P_1 \rightarrow q$	$P_2 \rightarrow q$	$P_2 \rightarrow q \vee P_1 \rightarrow q$
V	V						
V	F	V	V	•V	•V	•V	•V
F	V						
V	V				•F	•F	
V	F	V	F	•F	•F	•V	•F
F	V				•V	•F	
F	F	F	V	•V	•V	•V	•V
F	F	F	F	•V	•V	•V	•V

Reiniciar

?

Ejemplo interactivo del método por casos (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de la común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

n natural $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar

Demostración: La idea es demostrar los únicos dos casos posibles.

- Para n par:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ par} \Rightarrow n^2 \text{ es par} \\ \Downarrow \\ n^2 + n \text{ es par} \end{array} \right\} \Rightarrow n^2 + n + 1 \text{ es impar}$$
- Para n impar:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ impar} \Rightarrow n^2 \text{ es impar} \\ \Downarrow \\ n^2 + n \text{ es par} \end{array} \right\} \Rightarrow n^2 + n + 1 \text{ es impar}$$

• Así podemos concluir que:

$n \text{ par o impar} \Rightarrow n^2 + n + 1 \text{ es impar}$

• Q.E.D.

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Ejemplo interactivo del método por casos (ventana flotante)

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones básicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

$a, b \text{ reales} \Rightarrow |ab| = |a||b|$

Demostración: La idea es demostrar los cinco casos posibles.

- Caso 1. $a = 0$ o $b = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \text{ o } b = 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow |ab| = 0 \\ \Downarrow \\ |a| = 0 \text{ o } |b| = 0 \Rightarrow |a||b| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |ab| = |a||b|$$

Inicio

Las Funciones

Proposición P es una

demostrar que

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

El método por contraejemplo

Lógica

- [Introducción](#)
- [Tu experiencia cuenta arriba](#)
- [Concepto de proposición](#)
- [No ejemplos](#)
- [Ejemplos](#)
- [Casos fuera de lo común](#)
- [Tipos de proposiciones](#)
- [Operaciones básicas](#)
- [Propiedades importantes](#)
- [Cuantificadores](#)
- [Métodos de demostración](#)
- [Método directo](#)
- [Método por contradicción](#)
- [Método por reducción al absurdo](#)
- [Método por casos](#)
- [Método por contraejemplo](#)
- [Referencias](#)

Método por contraejemplo

Este método se aplica de manera muy particular para demostrar la falsedad de proposiciones cuya hipótesis está construida mediante un "cuantificador universal". Esto es, se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para "todos los elementos de un cierto conjunto".

Qué entender por un contraejemplo

Para demostrar la falsedad de proposiciones de este tipo, basta exhibir un elemento que satisfaga la hipótesis de la proposición, pero que no satisfaga su conclusión. A dicho elemento se le conoce con el nombre de contraejemplo.

Este método es muy útil cuando uno se encuentra ante una proposición con cuantificador universal, de la cual no se sabe si es verdadera o falsa. La primera idea es buscar un contraejemplo. Si no se encuentra en una primera instancia, se intentará demostrar su veracidad aplicando los otros métodos o una combinación de ellos.

Ejemplos

Demostrar que son FALSAS las siguientes proposiciones:

$A - B = B - A \quad \forall A, B \text{ conjuntos}$

$|a + b| = |a| + |b| \quad \forall a, b \text{ reales}$

Inicio

Las Funciones

Ejemplo interactivo del método por contraejemplo (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

$A - B = B - A \quad \forall A, B \text{ conjuntos}$

Demostración: Para demostrar que es FALSA, basta exhibir un contraejemplo

- Sean los conjuntos:

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$
- Obteniendo $A - B$ y $B - A$:

$A - B = \{3, 5, 7\}$ y $B - A = \{4, 6\}$
- Por tanto:

$A - B \neq B - A$

 • Q.E.D.

Mostrar Todo
Reiniciar paso a paso

...iones

posiciones aplica para "Todos los

...e satisfaga e le conoce

antificador buscar un r veracidad

Ejemplos

Demostrar que son FALSAS las siguientes proposiciones:

$A - B = B - A \quad \forall A, B \text{ conjuntos}$

$|a + b| = |a| + |b| \quad \forall a, b \text{ reales}$

Ejemplo interactivo del método por contraejemplo (ventana flotante)

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones lógicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contradicción
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

$|a + b| = |a| + |b| \quad \forall a, b \text{ reales}$

Demostración: Para demostrar que es FALSA, basta exhibir un contraejemplo

- Por un lado:

$a = 2 \text{ y } b = -2 \Rightarrow |a| = |b| = 2 \Rightarrow |a| + |b| = 4$
- Por otro:

$a = 2 \text{ y } b = -2 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow |a + b| = 0$

Mostrar Todo
Reiniciar paso a paso

...ones

posiciones ca para dos los

...satisfaga conoce

...ficador scar un r veracidad

Ejemplos

Demostrar que son FALSAS las siguientes proposiciones:

$A - B = B - A \quad \forall A, B \text{ conjuntos}$

$|a + b| = |a| + |b| \quad \forall a, b \text{ reales}$

Referencias bibliográficas y de Internet

Lógica	Inicio Notas Funciones
<ul style="list-style-type: none">• Introducción• Tu experiencia cuenta mucho• Concepto de proposición• No ejemplos• Ejemplos• Cases fuera de lo común• Tipos de proposiciones• Operaciones lógicas• Propiedades importantes• Cuantificadores• Métodos de demostración• Método directo• Método por contradicción• Método por reducción al absurdo• Método por casos• Método por contraejemplo• Referencias	<p>lógica, tanto en material impreso como de Internet.</p> <p>Bibliográficas Manual de lógica para estudiantes Gonzalo Zubieta R. Editorial Trillas</p> <p>Lógica Temas de Matemáticas Cuaderno 12 National Council of Teachers of Mathematics Editorial Trillas</p> <p>Primer curso de lógica matemática P. Suppes-Hill Editorial Reverté</p> <p>En Internet Sitio de Key Curriculum Press Innovators in Mathematics Education (Creadores de The Geometer's Sketchpad) http://www.keypress.com</p> <p>Compendio temático de Matemáticas http://mathworld.wolfram.com</p>

El segundo tema: Números reales

Aquí se da un tratamiento axiomático de los números reales y la parte medular son las **demostraciones formales interactivas paso a paso de diversos teoremas**, así como las **Construcciones interactivas** que ilustran los diversos teoremas vistos, en donde es posible explorar y visualizar diversas situaciones de los mismos.

En la sección de **Otros modelos**, hay diversos resultados con demostraciones formales interactivas paso a paso, sobre los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales entre los que se cuentan, el principio de inducción matemática y su equivalente principio del buen orden, la densidad de los racionales, la construcción de irracionales y el concepto de cardinalidad.

Un tema muy importante que también es tratado en **Otros modelos** es el **axioma del supremo** y diversas aplicaciones del mismo, como por ejemplo que los naturales no son un conjunto acotado, la propiedad arquimedea y el resultado que dice: "Entre dos reales cualesquiera existe un irracional", entre otros.

Además en la sección **El concepto de número**, se podrán encontrar algunas notas históricas sobre este concepto y su desarrollo, y además, una pequeña nota sobre el Axioma del supremo. De manera importante destaca un artículo de investigación del año 2004, que responde a la pregunta ¿Es innato el concepto de número?

Se proporciona una sección de **Ejercicios** que permiten reforzar los conocimientos adquiridos y también una sección de **Referencias**, tanto bibliográficas como de Internet.

Los Números Reales		Inicio Lógica Funciones
Los Axiomas	El concepto de número	
Teoremas de Equivalencia	Teoremas de Equivalencia	
Teo.1 Construcción para Adición	Teo.14 Construcción para Adición	
Teo.2 Construcción para Multiplicación	Teo.15 Signo de productos de números...	
Teo.3 Dualidad del Número Aditivo	Teo.16 Inversos aditivos de números...	
Teo.4 Dualidad del Inverso Aditivo	Teo.17 Multiplicación de números...	
Teo.5 Dualidad del Inverso Multiplicativo	Teo.18 Propiedad del número 0!	
Teo.6 Dualidad del Inverso Multiplicativo	Teo.19 Inversos multiplicativos	
Teo.7 Teo. real por cero, o cero	Teo.20 El producto de 0 con cualquier b	
Teo.8 El inverso aditivo de a	Teo.21 El producto de 0 con cualquier b	
Teo.9 Múltiplos por números de números	Teoremas de Valores Absolutos	
Teo.10 Múltiplos por números a, en a	Teo.22 El valor absoluto de números...	
Teo.11 Múltiplos por números de múltiplos	Teo.23 El valor absoluto de multiplicación	
Teo.12 $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Teo.24 Valor absoluto de a multiplicado por b	
Teo.13 Cardinalidad de los reales	Teo.25 Valor absoluto de a multiplicado por b	
Otros modelos	Construcciones Interactivas	

Para empezar se presentan los Axiomas de los números reales distinguidos con colores, como una idea y guía visual cuando nos refiramos a ellos en las diversas demostraciones interactivas y una nota sobre el axioma del supremo.

Axiomas de los Números Reales			Reales Lógica Funciones
Nombre	Adición	Multiplicación	
Cerradura	A1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R}$	M1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \in \mathbb{R}$	
Commutativa	A2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$	M2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = ba$	
Asociativa	A3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R},$ $a + (b + c) = (a + b) + c$	M3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R},$ $a(bc) = (ab)c$	
Neutro	A4) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$	M4) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ tal que $a1 = 1a = a$	
Inverso	A5) Dado $a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	M5) Dado $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $aa^{-1} = aa^{-1} = 1$	
Distributiva	D) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac$		
	Orden		
Tricotomía	O1) $\forall a, b \in \mathbb{R},$ se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones: $a = b, a < b$ o $b < a$		
Transitiva	O2) Si $a < b$ y $b < c,$ entonces $a < c$		
Preserva Orden bajo Adición	O3) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c \forall c \in \mathbb{R}$		
Preserva Orden bajo Multiplicación ($0 < c$)	O4) Si $0 < c$ y $a < b$ entonces $ac < bc$		
Axioma del Supremo (da clic)	S) (En Otros modelos encontrarás su enunciado y algunas aplicaciones)		

El axioma del supremo y su importancia (ventana flotante).

Axiomas de los		Reales Lógica Funciones																										
<table border="1"> <tr><td>Nombre</td></tr> <tr><td>Cerradura</td></tr> <tr><td>Commutativa</td></tr> <tr><td>Asociativa</td></tr> <tr><td>Neutro</td></tr> <tr><td>Inverso</td></tr> <tr><td>Distributiva</td></tr> <tr><td>Tricotomía</td></tr> <tr><td>Transitiva</td></tr> <tr><td>Preserva Orden</td></tr> <tr><td>Preserva Multiplicación</td></tr> <tr><td>Axioma del Supremo (da clic)</td></tr> </table>	Nombre	Cerradura	Commutativa	Asociativa	Neutro	Inverso	Distributiva	Tricotomía	Transitiva	Preserva Orden	Preserva Multiplicación	Axioma del Supremo (da clic)	<p>Axioma del Supremo</p> <p><i>Todo conjunto A (no vacío) de reales, acotado superiormente posee un supremo, es decir, existe un real s tal que $s = \sup A$.</i></p> <p>En donde:</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p><i>A está acotado superiormente si \exists un real M tal que $x \leq M \forall x \in A$</i></p> <p>Además: <i>A todo número M con esta propiedad se le llama cota superior de A</i></p> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p><i>$s = \sup A$ si:</i></p> <p><i>a) s es cota superior de A</i> <i>b) t cota superior de $A \Rightarrow s \leq t$.</i></p> <p>Es decir: <i>s es la mínima de todas las cotas superiores de A</i></p> </td> </tr> </table> <p>Su importancia</p> <p>Este axioma es necesario para establecer la existencia de los números irracionales y por consecuencia para completar los números reales.</p> <p>Con este axioma es posible atribuir a los números reales la propiedad de continuidad, es decir, de poder establecer una correspondencia biunívoca entre los reales y los puntos de una recta.</p> <p>De una manera coloquial, se puede decir que este axioma garantiza que los reales llenan toda la recta.</p> <p>Este axioma es característico de los números reales. Los racionales por ejemplo, no lo cumplen.</p>	<p><i>A está acotado superiormente si \exists un real M tal que $x \leq M \forall x \in A$</i></p> <p>Además: <i>A todo número M con esta propiedad se le llama cota superior de A</i></p>	<p><i>$s = \sup A$ si:</i></p> <p><i>a) s es cota superior de A</i> <i>b) t cota superior de $A \Rightarrow s \leq t$.</i></p> <p>Es decir: <i>s es la mínima de todas las cotas superiores de A</i></p>	<table border="1"> <tr><td>Nombre</td></tr> <tr><td>Cerradura</td></tr> <tr><td>Commutativa</td></tr> <tr><td>Asociativa</td></tr> <tr><td>Neutro</td></tr> <tr><td>Inverso</td></tr> <tr><td>Distributiva</td></tr> <tr><td>Tricotomía</td></tr> <tr><td>Transitiva</td></tr> <tr><td>Preserva Orden</td></tr> <tr><td>Preserva Multiplicación</td></tr> <tr><td>Axioma del Supremo (da clic)</td></tr> </table>	Nombre	Cerradura	Commutativa	Asociativa	Neutro	Inverso	Distributiva	Tricotomía	Transitiva	Preserva Orden	Preserva Multiplicación	Axioma del Supremo (da clic)
Nombre																												
Cerradura																												
Commutativa																												
Asociativa																												
Neutro																												
Inverso																												
Distributiva																												
Tricotomía																												
Transitiva																												
Preserva Orden																												
Preserva Multiplicación																												
Axioma del Supremo (da clic)																												
<p><i>A está acotado superiormente si \exists un real M tal que $x \leq M \forall x \in A$</i></p> <p>Además: <i>A todo número M con esta propiedad se le llama cota superior de A</i></p>	<p><i>$s = \sup A$ si:</i></p> <p><i>a) s es cota superior de A</i> <i>b) t cota superior de $A \Rightarrow s \leq t$.</i></p> <p>Es decir: <i>s es la mínima de todas las cotas superiores de A</i></p>																											
Nombre																												
Cerradura																												
Commutativa																												
Asociativa																												
Neutro																												
Inverso																												
Distributiva																												
Tricotomía																												
Transitiva																												
Preserva Orden																												
Preserva Multiplicación																												
Axioma del Supremo (da clic)																												

Los teoremas: Todos tienen una idea gráfica, un nombre, una idea para hacer la demostración y una demostración interactiva.

Teorema 1. Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

Lógica Basada en Funciones

Ley de Cancelación para la Adición

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de a , y mediante una cadena de igualdades llegar a b , utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema y desde luego propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

El Teorema Recíproco
La demostración del recíproco de este

Ley de Cancelación para la Adición

Demostración: (La idea es iniciar en a , y llegar a b , mediante una cadena de igualdades)

$$a =$$

- Por (A4) Neutro Aditivo

$$a + 0 =$$

- Por (A5) Inverso Aditivo

$$a + (c + (-c)) =$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Además cuentan con un acceso al método utilizado en la demostración en una ventana flotante, incluyendo un ejemplo de aplicación de dicho método.

Teorema 1. Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

Lógica Basada en Funciones

Ley de Cancelación para la Adición

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de a , y mediante una cadena de igualdades llegar a b , utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema y desde luego propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

El Teorema Recíproco
La demostración del recíproco de este

Método directo
Este método consiste en construir una sucesión de proposiciones p_1, p_2, \dots, p_n , todas ellas verdaderas, partiendo de p_1 y terminando en p_n . En cada paso, se pueden usar la hipótesis p_1 y resultados previamente establecidos, como definiciones, axiomas u otras proposiciones, incluyendo las que se van construyendo en la sucesión.

La expresión lógica de este método es la siguiente:

$$\underbrace{(p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_{i-1})}_{\text{verdadera}} \rightarrow p_i \quad \forall i = 2, \dots, n$$

Ejemplo

$k \text{ impar} \Rightarrow k^2 \text{ impar}$

Dando clic podrás ver su demostración

Para mayor información
Puedes consultar el tema de Lógica. Encontrarás otros métodos y más ejemplos.

?

También en cada teorema se tiene acceso a los axiomas de los reales y se mantienen los colores, cuando éstos se aplican en algún paso (ventana flotante).

Teorema 2. Si $c \neq 0$ y $ac = bc$, entonces $a = b$.

$\ll \leq \geq \gg$
 Lógica Reales Funciones

Ley de Cancelación para la Multiplicación

Demostración: (La idea es iniciar en a, y llegar a b, mediante una cadena de igualdades)

Ley de Cancelación para la Multiplicación

$c \neq 0$ y $ac = bc \Rightarrow a = b$

$$\frac{A = ac}{a} \cdot c$$

$$\frac{A = bc}{b} \cdot c$$

\Rightarrow

$$\frac{a}{b}$$

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de a, y mediante una cadena de igualdades llegar a b, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

Ley de Cancelación para la Multiplicación

$a =$

- Por (M4) Neutro Multiplicativo

$a1 =$

- Por (M5) Inverso Multiplicativo

$a(cc^{-1}) =$

- Por (M3) Asociativa

$(ac)(c^{-1}) =$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Las demostraciones tienen rigor matemático y son interactivas paso a paso. Se pueden repetir cuantas veces se quiera o presentarlas completas de una vez.

Teorema 3. Si $a+d=a \forall a \in \mathbb{R}$, entonces $d=0$.

$\ll \leq \geq \gg$
 Lógica Reales Funciones

Unicidad del Neutro Aditivo

Demostración: (La idea es iniciar en d y llegar a 0, mediante una cadena de Igualdades)

Unicidad del Neutro Aditivo

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de d, y mediante una cadena de igualdades llegar a 0, utilizando el llamado **Método Directo**. Con esto se demuestra que no hay otro elemento, más que el 0, que satisfaga el axioma (A4).

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

Unicidad del Neutro Aditivo

$d =$

- Por (A4) Neutro Aditivo

$d + 0 =$

- Por (A5) Inverso Aditivo

$d + (a + (-a)) =$

- Por (A3) Asociativa

$(d + a) + (-a) =$

- Por (A2) Conmutativa

$(a + d) + (-a) =$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

En cada paso se usan los colores de los axiomas para mantener una guía visual y ayudar a recordarlos con mayor facilidad.

Teorema 4. Dado $a \in \mathbb{R}$, si $a+d=0$, entonces $d=-a$.

<< ≤ ≥ >>
Lógica Reales Funciones

Unicidad del Inverso Aditivo
Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de d , y mediante una cadena de igualdades llegar al inverso aditivo de a , utilizando el llamado **Método Directo**. Con esto se demuestra que no hay otro elemento, más que $-a$, que satisfaga el axioma (A5).

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = wy$ $w = z$, entonces $x = z$.

Conclusión
La unicidad del Inverso Aditivo, permitirá resultados únicos en ecuaciones, al sumar el inverso aditivo de un sumando.

Unicidad del Inverso Aditivo
Demostración: (La idea es iniciar en d y llegar a $(-a)$, mediante una cadena de igualdades)

$d =$

- Por (A4) Neutro Aditivo
 $d + 0 =$
- Por (A5) Inverso Aditivo
 $d + (a + (-a)) =$
- Por (A3) Asociativa
 $(d + a) + (-a) =$
- Por (A2) Conmutativa
 $(a + d) + (-a) =$
- Por Hipótesis
 $0 + (-a) =$
- Por (A4) Neutro Aditivo
 $= -a$ Q.E.D.

Mostrar Todo
Reiniciar paso a paso

En cada paso se enuncia el axioma que se está usando y en todo momento se tiene acceso a los axiomas de los reales en una ventana flotante.

Teorema 5. Si $ad=a \forall a \neq 0$, entonces $d=1$.

<< ≤ ≥ >>
Lógica Reales Funciones

Unicidad del Neutro Multiplicativo

$$\frac{A = a}{a} \cdot 1$$

$$\frac{A = a \cdot d}{a}$$

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de d , y mediante una cadena de igualdades llegar al neutro multiplicativo 1, utilizando el llamado **Método Directo**. Con esto se demuestra que no hay otro elemento, más que 1, que satisfaga el axioma (M4).

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = wy$ $w = z$,

Unicidad del Neutro Multiplicativo
Demostración: (La idea es iniciar en d y llegar a 1, mediante una cadena de igualdades.)

$d =$

- Por (M4) Neutro Multiplicativo
 $d \cdot 1 =$
- Por (M5) Inverso Multiplicativo
 $d(a(a^{-1})) =$

Mostrar Todo
Reiniciar paso a paso

En cada momento, se puede acceder al teorema anterior o siguiente en la barra de navegación de la parte superior derecha.

Teorema 6. Sea $a \neq 0$, si $ad=1$, entonces $d=a^{-1}$.

<< < > >> Lógica Real y Funciones

Unicidad del Inverso Multiplicativo

$$\frac{A-1}{a} = d$$

$$\frac{A-1}{a} = \frac{A-1}{a}$$

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de d , y mediante una cadena de igualdades llegar al inverso multiplicativo de a , utilizando el llamado **Método Directo**. Con esto se demuestra que no hay otro elemento, más que a^{-1} , que satisfaga el axioma (M5).

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad.

Unicidad del Inverso Multiplicativo

Demostración: (La idea es iniciar en d y llegar al inverso mult. de a , mediante una cadena de igualdades)

$$d =$$

- Por (M4) Neutro Multiplicativo

$$d1 =$$

- Por (M5) Inverso Multiplicativo

$$d(aa^{-1}) =$$

- Por (M3) Asociativa

$$(da)(a^{-1}) =$$

- Por (M2) Conmutativa

$$(ad)(a^{-1}) =$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Inclusive se puede acceder al último o al primer teorema en la barra de navegación de la parte superior derecha.

Teorema 7. $a0=0 \forall a \in \mathbb{R}$.

<< < > >> Lógica Real y Funciones

Todo Real por Cero, es Cero

$$\frac{A-a}{c} =$$

$$\frac{A-a}{c} = \frac{A-a}{c}$$

Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de $a0$, y mediante una cadena de igualdades llegar a 0, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = wy$ y $w = z$, entonces $x = z$.

Todo real por cero, es cero

Demostración: (La idea es iniciar en $a0$, y llegar a 0, mediante una cadena de igualdades)

$$a0 =$$

- Por (A4) Neutro Aditivo

$$a0 + 0 =$$

- Por (A5) Inverso Aditivo

$$a0 + (a + (-a)) =$$

- Por (A3) Asociativa

$$(a0 + a) + (-a) =$$

- Por (M4) Neutro Multiplicativo

$$(a0 + a1) + (-a) =$$

- Por (D) Distributiva

$$a(0 + 1) + (-a) =$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

También mediante la barra de navegación se puede acceder en cualquier momento, a cualquiera de los temas en la barra de navegación de la parte superior derecha.

Teorema 8. $-a = (-1)a \forall a \in \mathbb{R}$.

$\ll \leq \geq \gg$
 Lógica Real Funciones

El Inverso Aditivo de a, es el Inverso Aditivo de 1, multiplicado por a
 Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 La idea es hacer ver que $(-1)a$ es inverso aditivo de a , dado que por el teorema 4, sólo existe un inverso aditivo de a , entonces: $(-1)a = -a$.

Para hacer ver que $(-1)a$ es inverso aditivo de a , basta demostrar que $a + (-1)a = 0$. Por ello, se trata de iniciar en $a + (-1)a$ y mediante una cadena de igualdades llegar a 0, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
 Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

El inverso aditivo de a , es el inverso aditivo de 1 por a
 Demostración: (La idea es demostrar que $(-1)a$ es inverso aditivo de a)
 ¡Recordar la unicidad del inverso aditivo: Teorema 4!

$a + (-1)a =$
 • Por (M4) Neutro Multiplicativo
 $1a + (-1)a =$
 • Por (D) Distributiva
 $(1 + (-1))a =$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Cuando para una demostración se requiere alguno o algunos teoremas previos, se tiene a la vista sus enunciados.

Teorema 9. $a(-b) = -(ab) \forall a, b \in \mathbb{R}$.

$\ll \leq \geq \gg$
 Lógica Real Funciones

Así se conoce este teorema, que es una de las leyes de los signos, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 La idea es partir de $a(-b)$, y mediante una cadena de igualdades llegar a $-(ab)$, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
 Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

En particular se hace uso del Teorema 8 que establece:

$-a = (-1)a \forall a \in \mathbb{R}$.

Más por menos, da menos.
 Demostración: (La idea es iniciar en $a(-b)$ y llegar a $-(ab)$, mediante una cadena de igualdades)

$a(-b) =$
 • Por Teorema 8
 $a((-1)b) =$
 • Por (M3) Asociativa
 $(a(-1))b =$
 • Por (M2) Conmutativa
 $((-1)a)b =$
 • Por (M3) Asociativa
 $(-1)(ab) =$
 • Por Teorema 8
 $= -(ab)$ • Q.E.D.

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Como ya lo habíamos hecho notar, siempre están accesibles el método y los axiomas de los reales en ventanas flotantes.

Teorema 10. $-(-a) = a \forall a \in \mathbb{R}$.

Idea y Método de la Demostración
La idea es hacer ver que $-(-a)$ es inverso aditivo de $(-a)$, y dado que por el teorema 4, sólo existe un inverso aditivo, entonces $a = -(-a)$.

Así, la idea es iniciar en $-(-a) + (-a)$ y, mediante una cadena de igualdades llegar a 0, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

En particular se hace uso del Teorema 4 que establece:

*Dado $a \in \mathbb{R}$,
si $a + d = 0$, entonces $d = -a$.*

Menos menos a, es a.

Demostración: (La idea es demostrar que $-(-a)$ es inverso aditivo de $-a$, es decir que, $-(-a) + (-a) = 0$)
¡Es importante recordar la unicidad del inverso aditivo: Teorema 4!

$$-(-a) + (-a) =$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

⏪ ⏩
Lógica Real y Funciones

?

Igualmente, cuando es necesario, se tienen a la vista los teoremas a utilizar en la demostración.

Teorema 11. $(-a)(-b) = ab \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de $(-a)(-b)$, y mediante una cadena de igualdades llegar a (ab) , utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

En particular se hace uso del Teorema 8 que establece:

$-a = (-1)a \forall a \in \mathbb{R}$.

del Teorema 9 que establece:

$a(-b) = -(ab) \forall a, b \in \mathbb{R}$.

y del Teorema 10 que establece:

Menos por menos, da más

Demostración: (La idea es iniciar en $(-a)(-b)$ y llegar a (ab) , mediante una cadena de igualdades)

$$(-a)(-b) =$$

- Por Teorema 8

$$((-1)a)(-b) =$$
- Por (M3) Asociativa

$$(-1)(a(-b)) =$$
- Por Teorema 8

$$-(a(-b)) =$$
- Por Teorema 9

$$-(-(ab)) =$$
- Por Teorema 10

$$= ab$$

• Q.E.D.

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

⏪ ⏩
Lógica Real y Funciones

?

Se tiene accesible el método por casos, incluyendo un ejemplo de su aplicación en una ventana flotante.

Teorema 12. Si $ab=0$, entonces $a=0$ o $b=0$.

Lógica Reales Funciones

« « « » » »
Lógica Reales Funciones

Idea y Método de la Demostración
 La idea es suponer que uno de ellos no es cero y demostrar que por fuerza el otro debe ser cero. Así se usa el **Método por Casos**.

La demostración es similar en cualquier caso: o bien, suponiendo que a no es cero y demostrando que b debe ser cero, o bien, suponiendo que b no es cero y demostrando que a debe ser cero.

En la demostración que se presenta en la ventana de la derecha se realiza uno de los casos. ¿Puedes realizar el otro caso?.

Para construir
 Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

En particular se hace uso del Teorema 7 que establece:

Si $ab = 0$, al menos uno de ellos es cero.
 Demostración: (Idea por casos: i) Suponer que a no es cero y demostrar que $b = 0$
 ii) Suponer que b no es cero y demostrar que $a = 0$.)
 Haremos i), iniciando en b y llegando a 0 , mediante una cadena de igualdades.

$$b =$$

- Por (M4) Neutro Multiplicativo

$$1b =$$
- Por (M5) Inverso Multiplicativo (supusimos que a no es 0)

$$(a^{-1}a)b =$$
- Por (M3) Asociativa

$$(a^{-1})(ab) =$$
- Por Hipótesis

$$(a^{-1})0 =$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

2

Además del método, se incluye un ejemplo (en ventana flotante).

Teorema 12. Si $ab=0$

« « « » » »
Lógica Reales Funciones

Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$
 Es decir, cuando el producto de dos números es cero, al menos uno de ellos, es cero.
 La demostración de este teorema la puedes descubrir paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 La idea es suponer que uno de ellos es cero y demostrar que por fuerza el otro debe ser cero. Así se usa el **Método por Casos**.

La demostración es similar en cualquier caso: o bien, suponiendo que a no es cero y demostrando que b debe ser cero, o bien, suponiendo que b no es cero y demostrando que a debe ser cero.

En la demostración que se presenta en la ventana de la derecha se realiza uno de los casos. ¿Puedes realizar el otro caso?.

Para construir
 Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teo

Método por casos
 El siguiente método (por casos) solamente es posible utilizarlo cuando la hipótesis P es una disyunción de casos, es decir cuando $p = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$.

Equivalencia lógica
 Este método está basado en la equivalencia:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow (p_1 \rightarrow q \vee p_2 \rightarrow q \vee \dots \vee p_n \rightarrow q)$$

Este método se explica señalando que para demostrar que $P \rightarrow Q$, es necesario demostrar que todos los casos de la hipótesis implican la conclusión.

Ejemplo

$$n \text{ natural} \Rightarrow n^2 + n + 1 \text{ es impar}$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

2

Las demostraciones se pueden presentar de una vez o paso a paso.

Teorema 13. $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ o } a = -b$.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de la hipótesis $a^2 = b^2$, y mediante una cadena de \Leftrightarrow (si y sólo si), llegar a la conclusión $a = b$ o $a = -b$, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de igualdades se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores y, desde luego, propiedades conocidas de la igualdad, en este caso la transitividad: Si $x = w$ y $w = z$, entonces $x = z$.

En particular se hace uso del Teorema 1 y su recíproco que establecen:

$$a + c = b + c \Leftrightarrow a = b.$$

y del Teorema 12 que establece:

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Igualdad de cuadrados.
Demostración: (La idea es iniciar con $a^2 = b^2$ y llegar a la conclusión mediante una cadena de \Leftrightarrow)

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow$$

- Por Teorema 1 y su recíproco

$$a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

- Por (D) Distributiva

$$(a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow$$

- Por Teorema 12

$$(a - b) = 0 \text{ o } (a + b) = 0 \Leftrightarrow$$

- Por Teorema 1 y su recíproco

$$a = b \text{ o } a = -b \quad \text{• Q.E.D.}$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Se analiza el recíproco del teorema y, en su caso, se formula el resultado general.

Teorema 14. Si $a + c < b + c$, entonces $a < b$.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de la hipótesis $a + c < b + c$, y mediante una cadena de implicaciones llegar a la conclusión $a < b$ utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de implicaciones se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores.

El Recíproco
El recíproco de este Teorema, es el axioma (O3) que dice:

$$\text{Si } a < b \text{ entonces } a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

El Resultado General
Así, juntando la ley de cancelación para la adición en desigualdades y su recíproco, el axioma (O3), se tiene un resultado más general, es decir:

$$a + c < b + c \Leftrightarrow a < b$$

Ley de Cancelación para la Adición en Desigualdades.
Demostración: (La idea es iniciar en $a + c < b + c$, y llegar a $a < b$, mediante una cadena de implicaciones)

$$a + c < b + c \Rightarrow$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Como ya habíamos señalado, en cada demostración, siempre es posible acceder al método utilizado y a un ejemplo de aplicación del mismo.

Teorema 15. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

<< < > >>
Lógica Reales Funciones

Suma de Menores, es menor que Suma de Mayores

Suma de Menores, es menor que Suma de Mayores

Demostración: (La idea es construir una cantidad z , tal que $a + c < z < b + d$)

• Por Hipótesis
 $a < b \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Suma de Menores, es menor que Suma de Mayores

Demostración: (La idea es construir una cantidad z , tal que $a + c < z < b + d$)

• Por Hipótesis
 $a < b \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Teorema 16. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

<< < > >>
Lógica Reales Funciones

Los inversos aditivos invierten la Desigualdad

Los inversos aditivos invierten la Desigualdad

Demostración: (La idea es sumar z , tal que $a + z = -b$ y $b + z = -a$. ¿Quién sería z ?)

• Por Hipótesis
 $a < b \Rightarrow$

• Por (O3) 3er Axioma de orden
 $a + ((-a) + (-b)) < b + ((-a) + (-b)) \Rightarrow$

• Por (A2) Conmutativa
 $a + ((-a) + (-b)) < b + ((-b) + (-a)) \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Los inversos aditivos invierten la Desigualdad

Demostración: (La idea es sumar z , tal que $a + z = -b$ y $b + z = -a$. ¿Quién sería z ?)

• Por Hipótesis
 $a < b \Rightarrow$

• Por (O3) 3er Axioma de orden
 $a + ((-a) + (-b)) < b + ((-a) + (-b)) \Rightarrow$

• Por (A2) Conmutativa
 $a + ((-a) + (-b)) < b + ((-b) + (-a)) \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Se abordan teoremas fundamentales para la teoría de desigualdades.

Teorema 17. Sea $c < 0$. Si $a < b$, entonces $ac > bc$.

<< ≤ ≥ >>
Lógica Reales Funciones

Idea y Método de la Demostración
La idea es aprovechar el hecho de que si $c < 0$, entonces $-c > 0$ y entonces utilizar el axioma (O4) de orden, que establece que al multiplicar una desigualdad por un positivo, ésta se conserva. Se utilizará el **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de implicaciones se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema y teoremas o resultados anteriores.

En particular se hace uso del Teorema 16 que establece:

Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

y del Teorema 9 que establece:

$a(-b) = -(ab) \forall a, b \in \mathbb{R}$.

El Teorema Recíproco

Multiplicar por un negativo, invierte la Desigualdad
Demostración: (La idea es usar que $c < 0 \Rightarrow -c > 0$ y el (O4) 4º Axioma de orden)

- Por Hipótesis

$c < 0 \Rightarrow$
- Por Teorema 16 y que $-0 = 0$ (ejercicio 1)

(1) $-c > 0$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Se pueden presentar las demostraciones paso a paso, cuantas veces se requiera. Se analiza el recíproco y se formula el resultado general.

Teorema 18. Si $0 < c$ y $ac < bc$, entonces $a < b$.

<< ≤ ≥ >>
Lógica Reales Funciones

Recíproco del 4º Axioma de Orden (O4)
 $0 < c$ y $ac < bc \Rightarrow a < b$

$A = a \cdot c$
a

 \Rightarrow

$\frac{a}{b}$

$B = b \cdot c$
b

Así se conoce este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
En tal demostración, la idea es utilizar el ejercicio 6 que establece que c y c^{-1} tienen el mismo signo y de ahí, utilizar el 4º axioma de orden (O4). Así, si $c > 0$, entonces $c^{-1} > 0$ y viceversa. Se utilizará el **Método Directo**.

Para construir
Para construir la cadena de implicaciones de la demostración, se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, teoremas o

Recíproco del 4º Axioma de orden (O4).
Demostración: (La idea es usar el ejercicio 6 y (O4), el 4º Axioma de orden)

- Por Hipótesis

$0 < c \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Se presenta una idea gráfica y un nombre descriptivo del teorema. La idea de la demostración siempre resulta útil.

Teorema 19. Sea $ab > 0$. Si $a < b$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$.

« < > »
Lógica Real: Funciones

Inversos multiplicativos del mismo signo, invierten la desigualdad

$$a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$$

Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es usar el ejercicio 7 y el 4o axioma de orden (O4). Así, partir de la hipótesis $a < b$ y mediante una cadena de implicaciones, llegar a la conclusión $b^{-1} < a^{-1}$ utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de implicaciones se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, teoremas o resultados anteriores.

Inversos multiplicativos del mismo signo, invierten la desigualdad.
Demostración: (La idea es usar el ejercicio 7 y el (O4) 4º Axioma de orden)

- Por Hipótesis y ejercicio 7
 $(1) a^{-1}b^{-1} > 0$
- Por Hipótesis
 $a < b \Rightarrow$
- Por (1) y (O4) 4º Axioma de orden
 $a(a^{-1}b^{-1}) < b(a^{-1}b^{-1}) \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Se pueden presentar las demostraciones de una vez y reiniciar paso a paso.

Teorema 20. Si $0 < b$, entonces, $a^2 < b \Leftrightarrow a > -\sqrt{b}$ y $a < \sqrt{b}$.

« < > »
Lógica Real: Funciones

El cuadrado de un número, menor que un positivo

Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es partir de la hipótesis, y mediante una cadena de dobles implicaciones \Leftrightarrow llegar a la conclusión, utilizando el **Método Directo**.

Para construir
Para construir tal cadena de dobles implicaciones se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las

El cuadrado de un número, menor que un positivo.
Demostración: (Idea: empezar en la hipótesis y llegar a la conclusión, mediante una cadena de \Leftrightarrow)

- $a^2 < b \Leftrightarrow$
- Por definición de Raíz cuadrada
 $a^2 < (\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow$
- Por teorema 1 y su recíproco
 $a^2 - (\sqrt{b})^2 < 0 \Leftrightarrow$
- Por (D) Distributiva
 $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow$
- Por Ejercicio 8

$$\left. \begin{array}{l} (a + \sqrt{b}) > 0 \text{ y } (a - \sqrt{b}) < 0 \\ \text{ó} \\ (a + \sqrt{b}) < 0 \text{ y } (a - \sqrt{b}) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

55

Se aborda una lista de teoremas fundamentales para resolver desigualdades con términos cuadráticos.

Teorema 21. Si $0 < b$, entonces, $a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$.

$\leq \geq \neq$
 Lógica Booleana Funciones

El cuadrado de un número, mayor que un positivo

Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 En tal demostración, la idea es partir de la hipótesis, y mediante una cadena de dobles implicaciones \Leftrightarrow llegar a la conclusión, utilizando el llamado **Método Directo**.

Para construir

El cuadrado de un número, mayor que un positivo.
 Demostración: (Idea: empezar en la hipótesis y llegar a la conclusión, mediante una cadena de \Leftrightarrow)

$a^2 > b \Leftrightarrow$

- Por definición de Raíz cuadrada

$a^2 > (\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow$

- Por teorema 1 y su recíproco

$a^2 - (\sqrt{b})^2 > 0 \Leftrightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Se presentan teoremas básicos para resolver desigualdades con valor absoluto.

Teorema 22. $|a| \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}$.

$\leq \geq \neq$
 Lógica Booleana Funciones

El Valor Absoluto de un Real, es Mayor o Igual a Cero

Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 La idea es hacer ver que los dos únicos casos posibles:

i) $a \geq 0$
 ii) $a < 0$

conducen a la conclusión mediante cadenas de implicaciones. Es claro que se usará el **Método por Casos**

Para construir
 Para construir tales cadenas se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los**

El Valor Absoluto de un Real, es Mayor o Igual a Cero.
 Demostración: (Hay dos casos posibles: a mayor o igual a cero y a menor que cero. Ambos casos deben conducir a la conclusión)

$SI a \geq 0 \Rightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Una demostración clásica por casos.

Teorema 23. $|ab| = |a||b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

El Valor Absoluto de un Producto es el Producto de Valores Absolutos

Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 En tal demostración, la idea es hacer ver que los únicos tres casos posibles, que en realidad se reducen a dos, **Caso 1) $a \geq 0$ y $b \geq 0$** , **Caso 2) $a \geq 0$ y $b < 0$** , **Caso 3) $a < 0$ y $b \geq 0$** conducen a la conclusión mediante cadenas de implicaciones, usando el **Método por Casos**.
 En la demostración sólo se realizarán los casos 1) y 2). El caso 3) es en realidad el caso 2).

Para construir
 Para construir tales cadenas se deben utilizar exclusivamente los **axiomas de los reales**, las hipótesis del teorema, la definición de valor absoluto, teoremas y resultados.

El valor absoluto de un producto, es el producto de valores absolutos

Demostración: (En realidad hay 2 casos. La idea es mostrar que ambos, conducen a la conclusión)

Caso 1) $a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow$

- Por Ejercicio 5 y la Definición de Valor Absoluto

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ |a| = a \text{ y } |b| = b \end{cases} \Rightarrow$$
- Por Definición de Valor Absoluto

$$\begin{cases} |ab| = ab \\ |a||b| = ab \end{cases} \Rightarrow$$
- Por transitividad de la igualdad

$$|ab| = |a||b|$$
- Por otra parte
 Caso 2) $a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow$
- Por Teorema 17 y la Definición de Valor Absoluto

$$|ab| \leq 0$$

Mostrar Todo
 Reiniciar paso a paso

Se recuerdan definiciones necesarias.

Teorema 24. $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ o } a > b$

Valor Absoluto de a mayor que b

Así se puede recordar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
 La idea es empezar con la hipótesis y mediante una cadena de dobles implicaciones llegar a la conclusión, utilizando el llamado **Método Directo**. Recordar la definición de valor absoluto es fundamental:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Valor Absoluto de a mayor que b ...

Demostración: (La idea es empezar con la hipótesis y mediante \Leftrightarrow llegar a la conclusión)
 ¡Es importante recordar la definición de Valor Absoluto!

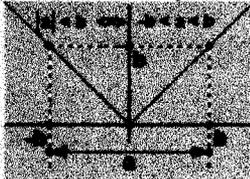
$$|a| > b \Leftrightarrow$$

Mostrar Todo
 Reiniciar paso a paso

Veinticinco teoremas con demostraciones formales interactivas, con ilustraciones gráficas y nombres descriptivos, con acceso a los métodos de demostración y a los axiomas de los reales y con acceso a los teoremas necesarios en cada demostración.

Teorema 25. $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b.$

Valor Absoluto de a menor que b



Así se puede recordar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración

La idea es empezar con la hipótesis y mediante una cadena de dobles implicaciones llegar a la conclusión, utilizando el llamado **Método Directo**. Recordar la definición de valor absoluto es fundamental:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Es importante recordar que por la ley de

Valor Absoluto de a, menor que b ...

Demostración: (La idea es empezar con la hipótesis y mediante \Leftrightarrow llegar a la conclusión)

¡Es importante recordar la definición de Valor Absoluto!

$$|a| < b \Leftrightarrow$$

• Por Definición de Valor Absoluto

$$\begin{cases} a < b & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \\ -a < b & \text{si } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

• Por Teorema 16 y su recíproco

$$\begin{cases} -b < -a \leq a < b & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \\ -b < a < -a < b & \text{si } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso



En la sección **Construcciones interactivas** se presentan 32 construcciones interactivas para explorar y analizar diferentes situaciones de los teoremas que se han demostrado en la sección anterior.

En estas construcciones se puede interactuar mediante los puntos rojos con arrastre de ratón, o bien mediante botones que presentan situaciones particulares o mediante animaciones que presentan una continuidad de casos.

En todos los casos se tiene acceso a las demostraciones formales y en varios casos se incluyen recíprocos.

En **Otras construcciones**, al final de esta sección, se presentan construcciones interactivas para:

- Explorar y analizar las diferentes situaciones de sistema de ecuaciones lineales dos por dos.
- Explorar y analizar diversas situaciones en una desigualdad cuadrática con valor absoluto.
- Resolver una desigualdad cuadrática paso a paso y de manera interactiva.
- Ilustrar la ley del triángulo.

Construcciones Interactivas		Realiz. Lógica: Funciones
Teoremas de Igualdades		Teo. 17. Multiplicación por un número
Teo. 1. Característica para Adición	Teo. 18. Distribución del producto 2º	
Teo. 2. Característica para Multipl. Función	Teo. 19. Distribución del producto	
Teo. 3. Distribución del Inverso Aditivo	Teo. 20. El producto de 2 números (a·b)	
Teo. 4. Distribución del Inverso Aditivo	Teo. 21. El producto de 2 números (a·b)	
Teo. 5. Distribución del Inverso Multiplicativo	Teo. 22. El producto de 3 números (a·b·c)	
Teo. 6. Distribución del Inverso Multiplicativo	Teo. 23. El producto de 4 números (a·b·c·d)	
Teo. 7. Teo. real por cero, se cero	Teoremas de Valor Absoluto	
Teo. 8. El sistema aditivo de 2	Teo. 24. El valor absoluto de un producto	
Teo. 9. Valor por sistema de ecuaciones	Teo. 25. Valor absoluto de 2 números (a·b)	
Teo. 10. Mismo número a, en a	Teo. 26. Valor absoluto de 3 números (a·b·c)	
Teo. 11. Mismo por sistema de ecuaciones	Teo. 27. Valor absoluto de 4 números (a·b·c·d)	
Teo. 12. $(a-b) \geq a - (b+c) = 0$	Otras Construcciones	
Teo. 13. Igualdad de cuadrados (2)	Un sistema de ecuaciones lineales	
Teo. 14. Igualdad de cuadrados (3)	Una desigualdad cuadrática interactiva	
Teoremas de Desigualdades		Una desigualdad cuadrática con valor
Teo. 15. Característica para Adición	Ilustrar la ley del triángulo (Teorema 10)	
Teo. 16. Inecuación aditiva interactiva		

Haciendo coincidir $a+c$ con $b+c$, se observará la coincidencia de a con b .

Teorema 1. Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

» » Construcciones
Lógica Real: Funciones

Ley de Cancelación para la Adición

Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover $a+c$, $b+c$ y c , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir $a+c$ con $b+c$, después puedes desplazar c a lo largo de la recta real y observarás que a se mantiene coincidente con b .

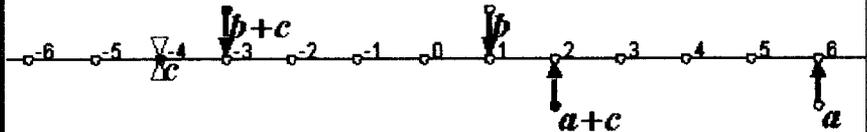
Podrás observar que cuando $a+c=b+c$, independientemente del valor de c , se conserva el hecho de que $a=b$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que $a+c$, $b+c$ y c , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero

Ley de Cancelación para la Adición

$$a+c=b+c \Rightarrow a=b$$



$a+c=b+c=2, c=5$	$a+c=b+c=1, c=-5$	$a+c=b+c=-5, c=-3$
$a+c=b+c=3, c=4$	$a+c=b+c=-2, c=-4$	$a+c=b+c=-3, c=-6$

Pero además, se tiene acceso a la demostración formal en una ventana flotante.

Teorema 1. Si $a+c=b$

Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Puedes hacer coincidir $a+c$ con b , después puedes desplazar c a lo largo de la recta real y observarás que a se mantiene coincidente con b .

Podrás observar que cuando $a+c=b$, independientemente del valor de c , se conserva el hecho de que $a=b$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que $a+c$, $b+c$ y c , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

Puedes hacer clic en **demostración** para acceder a la demostración paso a paso de este teorema.

Ley de Cancelación para la Adición

Demostración: (La idea es iniciar en a , y llegar a b , mediante una cadena de igualdades)

$$a =$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Haciendo coincidir ac con bc , se observará la coincidencia de a con b .

Teorema 2. Si $c \neq 0$ y $ac = bc$, entonces $a = b$.

≪ ≫ Construcciones
Lógica Real y Funciones

Para interactuar puedes mover ac , bc y c , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir ac con bc , después puedes desplazar c a lo largo de la recta real y observarás que a se mantiene coincidente con b .

Podrás observar que cuando $ac = bc$, independientemente del valor de c , se conserva el hecho de que $a = b$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que ac , bc y c , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración
Puedes hacer clic en **demostración** para acceder a la demostración formal.

Ley de Cancelación para la Multiplicación

$$c \neq 0, ac = bc \Rightarrow a = b$$

$c = -3, ac = bc = 5$
$c = 2, ac = bc = -5$
$c = 3, ac = bc = -2$

$c = 2, ac = bc = -2$
$c = -2, ac = bc = 3$
$c = 3, ac = bc = -4$

Haciendo coincidir $a+d$ con a , se observará la coincidencia de d con 0 .

Teorema 3. Si $a+d = a \forall a \in \mathbb{R}$, entonces $d = 0$.

≪ ≫ Construcciones
Lógica Real y Funciones

Unicidad del Neutro Aditivo
Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover $a + d$ y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir $a + d$ con a , y observarás que d toma el valor 0 . Lo puedes lograr manualmente o haciendo clic en el botón superior izquierdo, que enuncia el teorema.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que $a + d$ y a , coincidan en valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

Unicidad del neutro aditivo

$$a + d = a \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow d = 0$$

$a + d = a = 2$	$a + d = a = 3$	$a + d = a = 5$
$a + d = a = -2$	$a + d = a = -3$	$a + d = a = -5$

Haciendo coincidir $a+d$ con 0, se observará la coincidencia de d con $-a$.

Teorema 4. Dado $a \in \mathbb{R}$, si $a+d=0$, entonces $d=-a$. Construcciones
Lógica Booleanas Funciones

Unicidad del Inverso Aditivo
 Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover $a+d$ y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir $a+d$ con 0, y observarás que d toma el valor de $-a$. Lo puedes lograr manualmente o haciendo clic en el botón superior izquierdo, que enuncia el teorema.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que $a+d$ y a , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

Unicidad del Inverso Aditivo

$Dado a \in \mathbb{R}, a+d=0 \Rightarrow d=-a$

$a+d=0, a=5$	$a+d=0, a=-2$	$a+d=0, a=3$
$a+d=0, a=-5$	$a+d=0, a=2$	$a+d=0, a=-3$

Haciendo coincidir ad con a , se observará la coincidencia de d con 1.

Teorema 5. Si $ad=a \forall a \neq 0$, entonces $d=1$. Construcciones
Lógica Booleanas Funciones

Unicidad del Neutro Multiplicativo
 Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover ad y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir ad con a , y observarás que d toma el valor 1. Lo puedes lograr manualmente o haciendo clic en el botón superior izquierdo, que enuncia el teorema.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que ad y a , coincidan en valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

Unicidad del Neutro Multiplicativo

$ad = a \forall a \neq 0 \Rightarrow d=1$

$a=2, ad=2$	$a=3, ad=3$	$a=-3, ad=-3$	$a=-4, ad=-4$	$a=-5, ad=-5$
-------------	-------------	---------------	---------------	---------------

Haciendo coincidir ad con 1, se observará la coincidencia de d con a^{-1} .

Teorema 6. Sea $a \neq 0$, si $ad=1$, entonces $d=a^{-1}$.

Construcciones Lógica Real Funciones

Unicidad del Inverso Multiplicativo
 Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover ad y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir ad con 1, y observarás que d toma el valor de a^{-1} . Lo puedes lograr manualmente o haciendo clic en el botón superior izquierdo, que enuncia el teorema.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que ad y a , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

$a \neq 0, ad=1 \Rightarrow d=a^{-1}$

Haciendo coincidir b con 0, se observará la coincidencia de ab con 0.

Teorema 7. $a0=0 \forall a \in \mathbb{R}$.

Construcciones Lógica Real Funciones

Cualquier real por cero, es cero
 $a0=0 \forall a \in \mathbb{R}$

Todo real por cero, es cero
 Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir b con 0, después puedes desplazar a a lo largo de la recta real y observarás que ab se mantiene coincidente con 0.

Podrás observar que cuando $b = 0$, independientemente del valor de a , se conserva el hecho de que $ab = 0$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que b tome el valor cero y a se anime en la recta real. Lo puedes hacer mediante esos botones o mediante el botón superior izquierdo que contiene el enunciado del teorema.

$a0=0 \forall a \in \mathbb{R}$

Moviendo a, se observará la coincidencia de $(-1)a$ con $-a$.

Teorema 8. $-a = (-1)a \forall a \in \mathbb{R}$.

« < > » Construcciones
Lógica Realiz Funciones

El inverso aditivo de a es el inverso de 1 por a. Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a, tomándolo con el ratón, de su punto rojo.

Puedes desplazar a en la recta real y observarás que $-a$ coincide el producto de -1 por a.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a tome valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración
Puedes hacer clic en [demostración](#) para acceder a la demostración paso a paso de

El inverso aditivo de a, es el inverso aditivo de 1, por a

$(-1)a = -a$

(-1)

a

$a = -3$ $a = 3$ $a = 5$ $a = -4$ $a = 7$ $a = -2$ $a = -7$ $a = 6$ $a = -6$?

Moviendo a y b en distintas situaciones se puede observar ab.

Leyes de los signos

« < > » Construcciones
Lógica Realiz Funciones

Leyes de los signos
Así se conoce este conjunto de teoremas y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlos.

Para interactuar puedes mover a y b, tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer que a y b tomen valores positivos o negativos o uno de ellos positivo y el otro negativo. Así podrás observar los respectivos valores del producto ab.

Podrás observar que cuando a y b, toman ambos valores positivos o negativos, entonces ab es positivo. Pero cuando a y b, toman valores contrarios, entonces el producto ab es negativo.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a y b, tomen ambos valores específicos.

Esta visualización del conjunto de teoremas,

Leyes de los signos

ab

a

b

Más x Más **$-a = (-1)a$** **Más x Menos** **Menos x Más** **Menos x Menos** ?

Haciendo coincidir r con $-a$, se observará la coincidencia de $-r$ con a .

Teorema 10. $-(-a) = a \forall a \in \mathbb{R}$.

« « » » Construcciones
Lógica Reales Funciones

Menos, menos a, es a
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a y r , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir r con $-a$, y observarás que $-r$ coincide con a , es decir $-(-a) = a$.

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a y r , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración
Puedes hacer clic en [demostración](#) para acceder a la demostración paso a paso de este teorema.

Menos, menos a, es a
 $-(-a) = a \forall a \in \mathbb{R}$

$r = -a \Leftrightarrow -r = -(-a)$?

Haciendo coincidir ab con 0 y $b \neq 0$, se observará la coincidencia de a con 0.

Teorema 12. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

« « » » Construcciones
Lógica Reales Funciones

Si el producto de dos reales es cero, al menos uno de ellos, debe ser cero
Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover ab y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir ab con 0, después puedes desplazar b a lo largo de la recta real y observarás que a se mantiene coincidente con 0.

Podrás observar que cuando $ab = 0$, independientemente del valor de b , se conserva el hecho de que $a = 0$.

También puedes interactuar dando clic en el botón superior izquierdo que contiene el enunciado del teorema.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la

Si $ab = 0$, al menos uno de ellos, a o b debe ser cero
 $b \neq 0$ y $ab = 0 \Rightarrow a = 0$

Animar/Parar ?

Haciendo coincidir a^2 con b^2 , se observará la coincidencia de a con b o $-b$.

Teorema 13. $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ o $a = -b$.

Construcciones
Lógica Real: Funciones

Igualdad de cuadrados
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición necesaria del teorema (\Rightarrow).

Para interactuar puedes mover a^2 , b^2 y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir a^2 con b^2 , después puedes desplazar a en la circunferencia, para observar que coincide con b o con $-b$.

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a^2 y b^2 , tomen valores específicos, pero en particular en el que permite $a^2 = b^2$.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ o $a = -b$

$a^2 = b^2$ $b^2 = 4, a^2 = 9$ $b^2 = 9, a^2 = 4$ Animar/Parar

Haciendo coincidir a con b o con $-b$, se observará la coincidencia de a^2 con b^2 .

Teorema 13. $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ o $a = -b$.

Construcciones
Lógica Real: Funciones

Igualdad de cuadrados
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición suficiente del teorema (\Leftarrow).

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir a con b , o también a con $-b$ y, observar que en ambos casos a^2 coincide con b^2 .

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a y b , tomen valores específicos, pero en particular en el que permite $a = b$ o que $a = -b$.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración

$a = b$ o $a = -b \Rightarrow a^2 = b^2$

$a = b$ $a = -b$ $a = 2$ y $b = -2$ $a = -3$ y $b = 3$ $a = -1$ y $b = 1$

Manteniendo $a+c$ menor que $b+c$, se observará que a se mantiene menor que b .

Teorema 14. Si $a+c < b+c$, entonces $a < b$.

« 1 2 » Construcciones
Lógica Real Funciones

Ley de Cancelación para la Adición en desigualdades

$$a+c < b+c \Rightarrow a < b$$

Ley de Cancelación para la Adición en desigualdades

Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover $a+c$, $b+c$ y c , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer que $a+c$ tome valores menores que $b+c$, después puedes desplazar c a lo largo de la recta real y observarás que a se mantiene menor que b .

Podrás observar que cuando $a+c < b+c$, independientemente del valor de c , se conserva el hecho de que $a < b$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que $a+c$, $b+c$ y c , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede

$a+c=-5, b+c=-3, c=1$	$a+c=-2, b+c=0, c=-6$	$a+c=2, b+c=3, c=5$
$a+c=-3, b+c=3, c=-2$	$a+c=1, b+c=2, c=-4$	$a+c=3, b+c=4, c=6$

Manteniendo a menor que b , se observará que $-b$ se mantiene menor que $-a$.

Teorema 16. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

« 1 2 » Construcciones
Lógica Real Funciones

Los inversos aditivos invierten la desigualdad

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

Los inversos aditivos, invierten la desigualdad

Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer coincidir a se conserve menor que b , y observar que $-a$ se mantiene mayor que $-b$.

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a y b , tomen valores específicos. Debes cuidar que siempre a se conserve menor que b .

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración
 Puedes hacer clic en demostración para

$b = 6$	$a = 2$	$b = -2$	$a = 3$	$b = 5$	$a = -3$	$a = -4$	$b = 2$
---------	---------	----------	---------	---------	----------	----------	---------

Manteniendo a menor que b y $c < 0$, se verá que ac se mantiene mayor que bc .

Teorema 17. Sea $c < 0$. Si $a < b$, entonces $ac > bc$. ≤ ≤ ≥ ≥ Construcciones
Lógica Real: Funciones

Multiplicar un por un negativo, invierte la desigualdad
Así se recuerda este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a , b y c , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer que a tome valores menores que b , después puedes desplazar c a lo largo de los valores negativos de la recta real y observarás que ac se mantiene mayor que bc .

Podrás observar que cuando $a < b$, independientemente del valor de c , se conserva el hecho de que $ac > bc$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a , b y c , tomen valores específicos.

Multiplicar por un negativo invierte la desigualdad
 $c < 0$ y $a < b \Rightarrow ac > bc$

$a = 1, b = 3, c = -2$ $a = -1, b = 2, c = -3$ $a = 1, b = 3, c = -2$

Manteniendo ac menor que bc y $c > 0$, se verá que a se mantiene menor que b .

Teorema 18. Si $0 < c$ y $ac < bc$, entonces $a < b$. ≤ ≤ ≥ ≥ Construcciones
Lógica Real: Funciones

Ley de Cancelación para la Multiplicación en desigualdades
Así se conoce este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover ac , bc y c , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer que ac tome valores menores que bc , después puedes desplazar c a lo largo de los valores positivos de la recta real y observarás que a se mantiene menor que b .

Podrás observar que cuando $ac < bc$, independientemente del valor de c , se conserva el hecho de que $a < b$.

También puedes interactuar dando clic en algunos de los botones de la parte inferior, los cuales permiten que ac , bc y c , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero

Ley de Cancelación para la Multiplicación en desigualdades
 $c > 0$ y $ac < bc \Rightarrow a < b$

$ac = 2, bc = 4, c = 2$ $ac = 3, bc = 6, c = 3$ $ac = -5, bc = 5, c = 4$

Manteniendo $0 < a$ menor que b , se observará que b^{-1} se mantiene menor que a^{-1} .

Teorema 19. Sea $ab > 0$. Si $a < b$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$. « ≤ ≥ » Construcciones
Lógica Reales Funciones

Inversos Multiplicativos del mismo signo, invierten la desigualdad
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar el teorema.

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes hacer que a se mantenga menor que b , pero ambos con el mismo signo (positivos en este caso), y observar que en ambos casos a^{-1} se mantiene mayor que b^{-1} .

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, los cuales permiten que a y b , tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Inversos multiplicativos del mismo signo, invierten la desigualdad

Ilustramos el caso:
 $0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

Area Roja = 1.0
 $a = 1.272$
 $a^{-1} = 0.786$

Area Azul = 1.0
 $b = 2.593$
 $b^{-1} = 0.386$

$a = 1, b = 2$ $a = 2, b = 3$

Manteniendo a^2 menor que b , se verá que a se mantiene entre $-\sqrt{b}$ y \sqrt{b} .

Teorema 20. Si $0 < b$, entonces, $a^2 < b \Leftrightarrow a > -\sqrt{b}$ y $a < \sqrt{b}$. « ≤ ≥ » Construcciones
Lógica Reales Funciones

El cuadrado de a , menor que $b > 0$
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición necesaria del teorema (\Rightarrow).

Para interactuar puedes mover b y a^2 , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a^2 de tal forma que se mantenga menor que b , y podrás observar que:

$$-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

También puedes interactuar dando clic en el botón de animación de la parte inferior.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Ilustramos la condición necesaria (\Rightarrow)
 $b > 0, a^2 < b \Rightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

Animar/Parar

Manteniendo a entre $-\sqrt{b}$ y \sqrt{b} , se verá que a^2 se mantiene menor que b .

Teorema 20. Si $0 < b$, entonces, $a^2 < b \Leftrightarrow a > -\sqrt{b}$ y $a < \sqrt{b}$. ≤ ≤ ≥ ≥ Construcciones
Lógica Reales Funciones

El cuadrado de a , menor que $b > 0$
 Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición suficiente del teorema (\Leftarrow).

Para interactuar puedes mover b y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a de tal forma que se mantenga de la siguiente forma:

$$-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

Podrás observar que a^2 se mantiene menor que b .

También puedes interactuar dando clic en el botón de animación de la parte inferior.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la

Animar/Parar

?

Ilustramos la condición suficiente (\Leftarrow)
 $b > 0, -\sqrt{b} < a < \sqrt{b} \Rightarrow a^2 < b$

Manteniendo $a^2 > b$ y $b > 0$, se observará que se mantiene $a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$.

Teorema 21. Si $0 < b$, entonces, $a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$. ≤ ≤ ≥ ≥ Construcciones
Lógica Reales Funciones

El cuadrado de a , mayor que $b > 0$
 Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición necesaria del teorema (\Rightarrow).

Para interactuar puedes mover b y a^2 , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a^2 de tal forma que se mantenga mayor que b , y podrás observar que:

$$a < -\sqrt{b} \text{ o } a > \sqrt{b}$$

También puedes interactuar dando clic en el botón de animación de la parte inferior.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

?

Ilustramos la condición necesaria (\Rightarrow)
 $b > 0, a^2 > b \Rightarrow a < -\sqrt{b} \text{ o } a > \sqrt{b}$

Manteniendo $a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$, se verá que a^2 se mantiene mayor que b .

Teorema 21. Si $0 < b$, entonces, $a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$. Construcciones
Lógica Realiz Funciones

El cuadrado de a , mayor que $b > 0$
 Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición necesaria del teorema (\Leftarrow).

Para interactuar puedes mover b y a , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a de tal forma que se mantenga:

$$a < -\sqrt{b} \text{ o } a > \sqrt{b}$$

y podrás observar que a^2 se mantiene mayor que b .

También puedes interactuar dando clic en el botón de animación de la parte inferior.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la

Ilustramos la condición suficiente (\Rightarrow)
 $b > 0, a < -\sqrt{b} \text{ o } a > \sqrt{b} \Rightarrow a^2 > b$

Animar/Parar ?

Moviendo a y b en distintas situaciones se verá la coincidencia de $|ab|$ con $|a||b|$

Teorema 23. $|ab| = |a||b| \forall a, b \in \mathbb{R}$. Construcciones
Lógica Realiz Funciones

El valor absoluto de un producto
 Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a y b en el eje de las x y podrás observar tanto los valores absolutos de a y b , como de los productos correspondientes.

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, que permiten que a y b tomen valores específicos.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Demostración
 Puedes hacer clic en demostración para acceder a la demostración paso a paso de

$|ab| = |a||b| \forall a, b \in \mathbb{R}$

a = 2, b = 3 a = -3, b = 2 a = -2, b = -3 ?

Manteniendo $|a|$ mayor que b , se observará que se mantiene $a < -b$ o $a > b$.

Teorema 24. $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ o } a > b$. « < > » Construcciones
Lógica Real: Funciones

El valor absoluto de a , mayor que b
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición necesaria del teorema (\Rightarrow).

Para interactuar puedes mover b y $|a|$, tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar $|a|$ de tal forma que se mantenga mayor que b , y así podrás observar que:

$$a < -b \text{ o } a > b$$

Un caso particular se da cuando b sea negativo. Como $|a|$ siempre es mayor o igual que cero, entonces cualquier valor de a satisface la desigualdad.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la

Ilustramos la condición necesaria (\Rightarrow)
 $|a| > b \Rightarrow a < -b \text{ o } a > b$

Manteniendo $a < -b$ o $a > b$, se observará que $|a|$ se mantiene mayor que b

Teorema 24. $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ o } a > b$. « < > » Construcciones
Lógica Real: Funciones

El valor absoluto de a , mayor que b
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición suficiente del teorema (\Leftarrow).

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a de tal forma que se mantenga mayor que b , o menor que $-b$ y así podrás observar que:

$$|a| > b$$

Un caso particular se da cuando b sea negativo. Como $|a|$ siempre es mayor o igual que cero, entonces cualquier valor de a satisface la desigualdad.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Ilustramos la condición suficiente (\Leftarrow)
 $a < -b \text{ o } a > b \Rightarrow |a| > b$

Animar/Parar

Manteniendo $|a|$ menor que b , se observará que a se mantiene entre $-b$ y b .

Teorema 25. $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.

<< < > >> Construcciones
Lógica Reales Funciones

El valor absoluto de a , menor que b
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición necesaria del teorema (\Rightarrow).

Para interactuar puedes mover b y $|a|$, tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar $|a|$ de tal forma que se mantenga menor que b , y así podrás observar que:

$$-b < a < b$$

Un caso particular se da cuando b sea negativo. Como $|a|$ siempre es mayor o igual que cero, entonces ningún valor de a satisface la desigualdad.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la

Ilustramos la condición necesaria (\Rightarrow)
 $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$

Animar/Parar ?

Manteniendo a entre $-b$ y b , se observará que $|a|$ se mantiene menor que b .

Teorema 25. $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.

<< < > >> Construcciones
Lógica Reales Funciones

El valor absoluto de a , menor que b
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar la condición suficiente del teorema (\Leftarrow).

Para interactuar puedes mover a y b , tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a de tal forma que se mantenga entre $-b$ y b . Así podrás observar que:

$$|a| < b$$

Un caso particular se da cuando b sea negativo. Como $|a|$ siempre es mayor o igual que cero, entonces ningún valor de a satisface la desigualdad.

Esta visualización del teorema se puede pensar como una demostración visual, pero siempre resulta muy importante la demostración formal.

Ilustramos la condición suficiente (\Leftarrow)
 $-b < a < b \Rightarrow |a| < b$

Animar/Parar ?

Se pueden mover a, b, c y d para cambiar la situación de las ecuaciones.

Un Sistema de ecuaciones lineales

<< < > >> Construcciones
Lógica Realiz Funciones

Un sistema de ecuaciones lineales
En la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar el comportamiento de un sistema de ecuaciones lineales.

Las ecuaciones lineales del sistema, son:

$$y = b - ax$$

$$y = d - cx$$

y se pueden visualizar mediante sondas rectas con pendientes -a y -d, y ordenadas al origen b y c, respectivamente.

Podemos tener los siguientes casos:

- $a \neq c$ Solución única. Las rectas se intersectan en un sólo punto.
- $a = c$ y $b = d$ Infinitas soluciones. Las rectas coinciden en todos sus puntos.
- $a = c$ y $b \neq d$ No existe solución. Las rectas no coinciden y son paralelas.

Para interactuar puedes mover a, b, c y d, en los deslizadores de la parte inferior.

$a = 1.0$

$b = 0.76$

$c = 1.0$

$d = 2.0$

$x = -0.5$

$f(x) = b - ax = 1.26$

$g(x) = d - cx = 2.5$

No existe solución

Infinitas soluciones

Solución única

Se pueden mover a, b, c y d para cambiar la situación de la desigualdad.

Una desigualdad cuadrática interactiva

<< < > >> Construcciones
Lógica Realiz Funciones

Una desigualdad cuadrática interactiva
En la construcción interactiva de la derecha puedes visualizar el comportamiento de la siguiente desigualdad:

$$|ax^2 + bx + c| < |dx + e|$$

para diferentes valores de a, b, c, d y e.

Para interactuar puedes mover a, b, c, d y e en los deslizadores de la parte inferior derecha, tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes experimentar con diversos valores y observar que la solución está representada por el ashurado en rojo. En muchos casos, esta solución está representada por la unión de dos intervalos.

Pero también hay otros casos que podrás observar experimentando con diversos valores de a, b, c, d y e.

$a = -0.827$

$b = 1.559$

$c = 2.072$

$d = -0.723$

$e = 0.639$

$|ax^2 + bx + c| < |dx + e|$

$x_1 = -0.527$

$x_2 = 3.288$

$x_3 = -1.375$

$x_4 = 2.386$

a

b

c

d

e

Además de la solución paso a paso, se puede acceder a la gráfica (lado izquierdo).

Una desigualdad cuadrática paso a paso

Desigualdad cuadrática paso a paso
En la ventana de la derecha puedes ir descubriendo paso a paso, la resolución de la siguiente desigualdad cuadrática.

$$2x^2 - 1 < x + 2$$

En tal demostración, la idea es utilizar los diversos resultados que se han visto hasta ahora. Es decir, axiomas, teorema y sus recíprocos.

Algunos Pasos
Haciendo clic en [Gráfica](#) para visualizar la desigualdad. Tanto la parábola del miembro izquierdo, como la recta del lado derecho.

Puedes apreciar que el intervalo de solución es $[-1, 1.5]$, dado que es la parte de la parábola que queda por abajo de la recta.

En el primer paso se aplica la ley de cancelación para la adición y su recíproco. Después de aplicar esta ley, queda la desigualdad

Construcciones
Lógica Real Funciones

Resolver la siguiente desigualdad paso a paso

$2x^2 - 1 < x + 2 \Leftrightarrow$

- Por Teorema 1 y su recíproco

$2x^2 - x < 3 \Leftrightarrow$

- Multiplicando por 1/2 (se conserva < por axioma O4)

$x^2 - \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

- Completando cuadrados (Teorema 1 y su recíproco)

$x^2 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Se pueden mover a y b para cambiar la situación de la ley del triángulo

Ley del triángulo

El valor absoluto de una suma (Ley del Triángulo)
Así se puede recordar este teorema y en la construcción interactiva de la derecha puedes visualizarlo.

Para interactuar puedes mover a y b, tomándolos con el ratón, de sus puntos rojos.

Puedes desplazar a y b en el eje de las x y podrás observar tanto los valores absolutos de a y b, como de las sumas correspondientes.

También puedes interactuar dando clic en los botones de la parte inferior, que permiten que a y b tomen valores específicos.

Puedes observar que:

$|a+b| = |a|+|b|$ cuando a y b tienen el mismo signo y

$|a+b| < |a|+|b|$ cuando a y b tienen signo

Construcciones
Lógica Real Funciones

Ley del triángulo

$|a+b| \leq |a|+|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

a = 2, b = 3

a = -5, b = 2

a = -2, b = -3

En la sección **Otros modelos** se presentan diversos resultados sobre los Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales, así como algunas notas importantes sobre los infinitos y su cardinalidad y una reflexión sobre otros campos.

También se introducen algunas notas sobre los números y su desarrollo y una parte importante es el axioma del supremo y algunos resultados aplicando este axioma.

Se trabajan los axiomas de Peano, la inducción matemática y su equivalente principio del buen orden, teoremas sobre un entero y su cuadrado, la densidad de los racionales, la aparición de $\sqrt{2}$ y sus consecuencias en la construcción de irracionales.

Vale mencionar que en los naturales y los enteros, se demuestran leyes de cancelación, pero haciendo notar que el método seguido en los reales, no es aplicable en ninguno de estos casos.

Otros Modelos		Reales Lógica Funciones
Los Números Naturales	Los Números Irracionales	
Axiomas	Raíz de 2 y sus consecuencias	
Cancelación para la Adición	Los Reales y el Axioma del Supremo	
Inducción Matemática	El axioma del supremo	
Los Números Enteros	Algunas proposiciones	
Axiomas	La Cardinalidad	
Cancelación para la Multiplicación	Cones de Infinitos	
Algunas proposiciones	Otros Campos	
Los Números Racionales	Los enteros módulo n	
Axiomas y algunas proposiciones	Más campos	

Se insiste en el axioma P5 por su importancia

Los números naturales

2 ≧ Modelos
Lógica Reales Funciones

Los Números Naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Los Axiomas de Peano

Los números naturales son un conjunto que satisface los siguientes axiomas:

P1) $1 \in \mathbb{N}$
P2) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists n'$ único, sucesor de n
P3) El 1 no es sucesor de ningún natural
P4) Si $n' = m'$, entonces $n = m$
P5) Si $M \subset \mathbb{N}$ con las propiedades :
 i) $1 \in M$
 ii) $n' \in M$ siempre que $n \in M$,
 entonces $M = \mathbb{N}$

conocidos como Axiomas de Peano, en honor al matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932), quien los estableciera de manera precisa.

Una observación muy importante
 Los axiomas de Peano definen de manera unívoca a los números Naturales. Es decir, cualquier conjunto que satisfaga los Axiomas de Peano, no será otro que los naturales.

Ley de cancelación para la adición en los naturales

Teorema $a+c=b+c \Rightarrow a=b \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

Ley de Cancelación para la Adición en los Naturales
 Como ya sabes, los naturales no satisfacen todos los axiomas de los reales. Recuerda que no existe idéntico aditivo y por lo mismo no existe inverso aditivo.

A pesar de lo anterior, en los Naturales se cumple la Ley de Cancelación para la Adición, aunque su demostración ya no puede hacerse como en el teorema 1, puesto que está basada en la existencia del neutro y del inverso aditivo.

Demostración
 Puedes ver la demostración paso a paso en la ventana de la derecha, en donde se utiliza el Método por Contrarrecíproca.

El Teorema Recíproco
 El recíproco de este teorema

Si $a = b$, entonces $a+c = b+c$.

es cierto en los naturales y su demostración

« < > » Modelos
Lógica Reales Funciones

Ley de Cancelación para la Adición en los Naturales

$a+c=b+c \Rightarrow a=b$ *equivalente a su contrarrecíproca:* $a \neq b \Rightarrow a+c \neq b+c$

Demostración: (Demostraremos la contrarrecíproca de esta ley. Para ello la idea es usar el axioma P4) expresado en su forma contrarrecíproca

$a \neq b$

• Por (P4) en su forma contrarrecíproca

$a+1 \neq b+1$

• [c = 1 => Q.E.D.]. Si no, por (P4) en la forma indicada

$a+2 = (a+1)+1 \neq (b+1)+1 = b+2$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Haciendo ver que no se puede demostrar como en los reales

Teorema $a+c=b+c$

Ley de Cancelación para la Adición Naturales
 Como ya sabes, los naturales no satisfacen todos los axiomas de los reales. Recuerda que no existe idéntico aditivo y por lo mismo no existe inverso aditivo.

A pesar de lo anterior, en los Naturales se cumple la Ley de Cancelación para la Adición, aunque su demostración ya no puede hacerse como en el teorema 1, puesto que está basada en la existencia del neutro y del inverso aditivo.

Demostración
 Puedes ver la demostración paso a paso en la ventana de la derecha, en donde se utiliza el Método por Contrarrecíproca.

El Teorema Recíproco
 El recíproco de este teorema

Si $a = b$, entonces $a+c = b+c$.

es cierto en los naturales y su demostración

« < > » Modelos
Lógica Reales Funciones

Ley de Cancelación para la Adición

Demostración: (La idea es iniciar en a, y llegar a b, mediante una cadena de igualdades)

$a =$

• Por (A4) Neutro Aditivo

$a+0 =$

• Por (A5) Inverso Aditivo

$a+(c+(-c)) =$

• Por (A3) Asociativa

$(a+c)+(-c) =$

• Por Hipótesis

$(b+c)+(-c) =$

• Por (A3) Asociativa

$b+(c+(-c)) =$

• Por (A5) Inverso Aditivo

$b+0 =$

• Por (A4) Neutro Aditivo

$= b$ • Q.E.D.

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

La inducción matemática y ejemplos

Inducción Matemática

Principio de Inducción Matemática
De los Axiomas de Peano para los Naturales, el axioma P5) se conoce precisamente como el "Principio de Inducción Matemática", que es de gran utilidad en la demostración de propiedades para los números naturales.

En la mayoría de los libros aparece la siguiente formulación de este Principio de Inducción Matemática:

Una proposición P es válida $\forall n \in \mathbb{N}$, si:

- i) *Es válida para $n = 1$.*
- ii) *Suponiendo que es válida para $n = k$, se demuestra la validez para $n = k + 1$.*

Progresión Aritmética
Un ejemplo del uso de este principio se da en la demostración de la fórmula para la llamada progresión aritmética:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Da clic sobre la fórmula, para ver su demostración)

Suma de los primeros n impares
Otro ejemplo de las propiedades de naturales es la suma de los primeros n impares que consiste en descubrir una fórmula para la suma de los primeros n naturales impares:

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

« ‹ › » Modulos
Lógica Bases Funciones

Ejemplo de inducción matemática con demostración interactiva paso a paso, en una ventana flotante.

Inducción Matemática

Principio de Inducción Matemática
De los Axiomas de Peano para los Naturales, es de gran utilidad en la demostración de propiedades para los números naturales.

En la mayoría de los libros aparece la siguiente formulación de este Principio de Inducción Matemática:

Una proposición P es válida $\forall n \in \mathbb{N}$, si:

- i) *Es válida para $n = 1$.*
- ii) *Suponiendo que es válida para $n = k$, se demuestra la validez para $n = k + 1$.*

Progresión Aritmética
Un ejemplo del uso de este principio se da en la demostración de la fórmula para la llamada progresión aritmética:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Da clic sobre la fórmula, para ver su demostración)

Suma de los primeros n impares
Otro ejemplo de las propiedades de naturales es la suma de los primeros n naturales impares que consiste en descubrir una fórmula para la suma de los primeros n naturales impares:

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inducción Matemática

Principio de Inducción Matemática
De los Axiomas de Peano para los Naturales, es de gran utilidad en la demostración de propiedades para los números naturales.

En la mayoría de los libros aparece la siguiente formulación de este Principio de Inducción Matemática:

Una proposición P es válida $\forall n \in \mathbb{N}$, si:

- i) *Es válida para $n = 1$.*
- ii) *Suponiendo que es válida para $n = k$, se demuestra la validez para $n = k + 1$.*

Progresión Aritmética
Un ejemplo del uso de este principio se da en la demostración de la fórmula para la llamada progresión aritmética:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Da clic sobre la fórmula, para ver su demostración)

Suma de los primeros n impares
Otro ejemplo de las propiedades de naturales es la suma de los primeros n naturales impares que consiste en descubrir una fórmula para la suma de los primeros n naturales impares:

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

« ‹ › » Modulos
Lógica Bases Funciones

Demostración: (La idea es usar inducción matemática)

- La propiedad se cumple para $n = 1$.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$
- Suponiendo (Hipótesis de inducción) que se cumple para $n = k$.

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$
- Demostraremos que se cumple para $n = k+1$. Escribamos:

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = (1 + 2 + \dots + k) + (k+1)$$
- Aplicando la Hipótesis de Inducción:

$$(1 + 2 + \dots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Ilustración interactiva de la suma de los primeros cinco naturales en ventana flotante.

II Progresión Aritmética

Prim De l es c

En t

Pro Un c

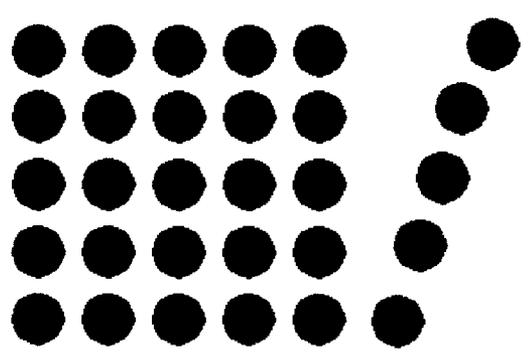
Sum Otro sum

$\ll \leq \geq \gg$ Modelos
 Lógica Reales Funciones

de Inducción Matemática", que

mática:

Descubrir una fórmula para la

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2}$$


Reiniciar

?

Otro ejemplo de inducción matemática y su demostración interactiva paso a paso, que se despliega en una ventana flotante.

Inducción Matemática

i) \mathbb{N}

ii)

Progresión Aritmética
Un ejemplo del uso de este principio se da en la

1

(Da c

Suma de los primeros n impares
Otro ejemplo de las propiedades de naturales
suma de los primeros n naturales impares:

1

(Da c

Conclusión
Estos ejemplos se presentan aquí sólo para il
mediante este principio. Una buena referencia

$1+3+\dots+(2n-1)=n^2 \forall n \in \mathbb{N}$
 Demostración: (La idea es usar Inducción matemática)

- La propiedad se cumple para $n = 1$.

$1=1^2$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Una ilustración interactiva de la suma de los primeros cinco impares

Inducción
Suma de los primeros n impares
>> Modelos
de Funciones

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Reiniciar

Suma de los primeros
Otro ejemplo de las
suma de los primeros

Conclusión
Estos ejemplos se pr
mediante este princio

Clic para ver ilustrac

muña para la

mostrables

Diferencia entre Enteros y Naturales (Principio del buen orden)

Los Números Enteros
<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

Los Números Enteros

$$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Los Enteros tampoco satisfacen todos los ...

Los números enteros son una consecuencia de los Naturales, en los cuales, cualquier ecuación de la forma $mx + x = n$ con m y n enteros, tiene solución.

Lo anterior se debe a que los enteros, respecto a la adición, satisfacen todos los axiomas de los reales, en particular A4 y A5, que son la existencia del neutro aditivo y de inversos aditivos.

Sin embargo, respecto a la multiplicación, no satisface el axioma M5, es decir, no existen inversos multiplicativos. Por esta razón, una ecuación de la forma $mx = n$ con m y n enteros, no siempre tiene solución en los enteros.

Observaciones muy importantes
Estructuras algebraicas como la de los enteros que satisfacen los axiomas: A1, ..., A5, M1, ..., M4 y D, no son únicas. Como veremos en otra sección, existe por ejemplo \mathbb{Z}_4 .

Los Enteros se diferencian de los Naturales, fundamentalmente en que los Naturales satisfacen el Principio del Buen Orden y los Enteros no. Es decir: "Todo subconjunto (no vacío) de los Naturales tiene elemento mínimo". Esto no es cierto en los enteros.

Para demostrar el Principio del Buen Orden se utilizó el Principio de Inducción Matemática. También es posible demostrar el Principio de Inducción Matemática utilizando el Principio del Buen Orden. En realidad son Principios equivalentes.

Conclusión

Principio de inducción matemática implica Principio del buen orden y viceversa. Su demostración se presenta en una ventana flotante.

Los Números Enteros

Los Números Enteros

Los Enteros tampoco satisfacen todos los números enteros son una consecuencia con m y n enteros, tiene solución.

Lo anterior se debe a que los enteros no tienen existencia del neutro aditivo y de inverso.

Sin embargo, respecto a la multiplicación la ecuación de la forma $mx = n$ con m, n enteros tiene solución.

Observaciones muy importantes
Estructuras algebraicas como la de los enteros, en otra sección, existe por ejemplo \mathbb{Z} .

Los Enteros se diferencian de los Naturales. Los Naturales no. Es decir: "Todo subconjunto de los Naturales que contiene al 1 y es cerrado bajo la suma, es un subconjunto de los Naturales".

Para demostrar el Principio del Buen Orden se utiliza el Principio de Inducción Matemática utilizando el Principio del Buen Orden.

Conclusión

Principio del buen orden:
Si $A \neq \emptyset$ y $A \subset \mathbb{N}$, entonces A tiene elemento mínimo.

Demostración: (La idea es construir una contradicción, suponiendo que A no tiene mínimo. En la construcción usaremos el principio de inducción matemática).

- Empezamos negando la conclusión:

Supongamos que A no tiene mínimo.

- Definimos el siguiente conjunto ajeno con A :

$B = \{1, \dots, n\}$ tal que $1, \dots, n \notin A$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Ley de cancelación para la multiplicación en los Enteros

Teorema $c \neq 0, ac = bc \Rightarrow a = b \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Ley de Cancelación para la Multiplicación en los Enteros

Como ya sabes, los enteros no satisfacen todos los **axiomas de los reales**. Recuerda que no existe inverso multiplicativo.

A pesar de lo anterior, en los Enteros se cumple la Ley de Cancelación para la Multiplicación, aunque su demostración ya no puede hacerse como en el **teorema 2**, puesto que está basada en la existencia del inverso multiplicativo.

Demostración

Puedes ver la demostración paso a paso en la ventana de la derecha, en donde se utiliza el método de inducción matemática.

El Teorema Recíproco

El recíproco de este teorema

Si $a = b$, entonces $ac = bc$.

es cierto en los enteros y su demostración se realiza igualmente por inducción. Puedes

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

Demostración: (La idea es demostrar por inducción matemática que $an = bn \Rightarrow a = b$. Con eso bastaría, pues: $a(-n) = b(-n) \Rightarrow -(an) = -(bn) \Rightarrow an = bn$).

- Para $n = 1$ se cumple, ya que:

$a1 = b1 \Rightarrow a = b$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Diversas proposiciones en los Enteros, varias de ellas de mucha utilidad en demostraciones sobre irracionales.

⏪ ⏩ ↺ ↻ Modelos
 Lógica Real Funciones

Algunas Proposiciones

Los Enteros pueden ser pares o impares
 Los múltiplos de 2, $k = 2m$, con $m \in \mathbb{Z}$, se llaman Enteros Pares.
 El resto de ellos, $k = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{Z}$, se llaman Enteros Impares.
 Te presentamos varias proposiciones que relacionan k^2 con k , todas demostradas con el Método por Contradicción.

Proposiciones sobre pares e impares
 Dando clic en Proposición e1, puedes ver la de los pares y dando clic en Proposición e2, la de los impares.
 La conjunción de ambas proposiciones es el siguiente Teorema: $k \in \mathbb{Z}$, k^2 par $\Leftrightarrow k$ es par.
 O equivalentemente el Teorema: $k \in \mathbb{Z}$, k^2 impar $\Leftrightarrow k$ es impar.

Enteros múltiplos de 3 o de otros enteros.
 También podemos clasificar los enteros en los que son múltiplos de 3 y los que no lo son.
 Los múltiplos de 3 son de la forma: $k = 3m$, con $m \in \mathbb{Z}$ y los que no, pueden ser de la forma $k = 3m + 1$, con $m \in \mathbb{Z}$ o de la forma $k = 3m + 2$, con $m \in \mathbb{Z}$.

Dando clic en Proposición e3 verás la relación entre k^2 y k para los múltiplos de 3. Como el recíproco de esta proposición es inmediato, se tiene el teorema:

$$k \in \mathbb{Z}, k^2 \text{ múltiplo de } 3 \Leftrightarrow k \text{ es múltiplo de } 3$$

Esta proposición no se puede extender a todos los enteros, por ejemplo, la proposición

Relacionando el cuadrado de un entero, con el mismo entero

Algunas Proposiciones

Los Enteros pueden ser pares o impares
 Los múltiplos de 2, $k = 2m$, con $m \in \mathbb{Z}$
 El resto de ellos, $k = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{Z}$
 Te presentamos varias proposiciones que

Proposiciones sobre pares e impares
 Dando clic en Proposición e1, puedes ver
 La conjunción de ambas proposiciones e
 O equivalentemente el Teorema: $k \in \mathbb{Z}$,

Enteros múltiplos de 3 o de otros enteros
 También podemos clasificar los enteros
 Los múltiplos de 3 son de la forma: $k = 3m$
 $k = 3m + 2$, con $m \in \mathbb{Z}$.

Dando clic en Proposición e3 verás la re
 se tiene el teorema:

Esta proposición no se pu

$k \in \mathbb{Z}$ y k^2 par $\Rightarrow k$ es par

Demostración: (La idea es construir una contradicción, suponiendo falsa la conclusión)

- Empezamos negando la conclusión:

Supongamos que k no es par

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Los Números Racionales

« « « » » » Modelos
Lógica Reales Funciones

Los Números Racionales son un Campo

Los números racionales son cocientes de enteros y con las operaciones de adición y multiplicación, satisfacen todos los axiomas de los reales: A1, A2, A3, A4, A5, M1, M2, M3, M4, M5 y D, con lo que se dice que son un Campo, al igual que los Reales. Inclusive satisfacen los Axiomas de Orden O1, O2, O3 y O4.

Así que todos los resultados que hemos demostrado para los Reales, se aplican a los Racionales. En particular las leyes de cancelación y el hecho de que toda ecuación del tipo $ax + b = c$ tiene solución en \mathbb{Q} .

Observaciones muy importantes

Como los Racionales satisfacen los Axiomas Campo y de Orden, se dice que son un Campo ordenado, al igual que los Reales.

Los Racionales difieren de los Reales en el Axioma del Supremo, cuya importancia consiste en la posibilidad de poder establecer una correspondencia biunívoca entre los Reales y los puntos de una recta. Los Racionales por sí mismos no llenan la recta, no obstante que "entre dos racionales cualesquiera hay una infinidad de ellos", como veremos en el siguiente apartado.

Los griegos, con el Teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo con catetos igual a 1, descubrieron el número $\sqrt{2}$ que no es posible escribirlo como cociente de enteros, es decir, no es racional. A este tipo de números les llamaron incommensurables y actualmente se les llaman Irracionales. En la siguiente sección podremos ver algunas de estas demostraciones.

Los Racionales difieren de los Naturales o los Enteros en la propiedad de los sucesores. Recuerda que en todo Natural o Entero tiene un sucesor. Esto no es así en \mathbb{Q} , como podremos ver en el siguiente apartado.

Algunas proposiciones interesantes

Dando clic Proposición 1 encontrarás la demostración de que "entre cualesquiera dos racionales, hay otro racional".

Descubriendo irracionales. El primero $\sqrt{2}$ resultado del teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1.

$\sqrt{2}$ y sus consecuencias

« « « » » » Modelos
Lógica Reales Funciones

El Número $\sqrt{2}$ es irracional

Los griegos, con el Teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo con catetos igual a 1, descubrieron el número $\sqrt{2}$ y dando clic en Proposición 11 encontrarás la demostración, por Reducción al Absurdo, al igual que las tres siguientes, de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Así, este sería seguramente el primer irracional que registraron.

Llamando I a los números irracionales (que los Griegos llamaron incommensurables), tenemos que $\sqrt{2} \in I$.

Algunos otros Números Irracionales

También dando clic Proposición 12 encontrarás la demostración de que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (i.e. $\sqrt{3} \in I$).

De manera mas general, dando clic Proposición 13 encontrarás la demostración de que *Si p primo, entonces $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ (i.e. $\sqrt{p} \in I$).*

De manera general

Se tiene el siguiente resultado: *Si $k \in \mathbb{N}$ y $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$, entonces $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$,* dando clic Proposición 14 encontrarás la demostración. Es decir:

$$\text{Si } k \in \mathbb{N} \text{ y } \sqrt{k} \notin \mathbb{N}, \text{ entonces } \sqrt{k} \in I$$

Aun otras formas

Almado a lo anterior, tenemos otras formas para producir números irracionales, como lo podrás ver dando clic en

Empezando a usar el método de reducción al absurdo. Se puede acceder al método y a un ejemplo desde la misma página en una ventana flotante.

<p>$\sqrt{2}$ y sus consecuencias</p> <p>El Números $\sqrt{2}$ es irracional</p> <p>Los griegos, con el Teorema de Pitágoras dando clic en Proposición 11 encontrarás</p> <p>Así, este sería seguramente el primer irracional. Llamando I a los números irracionales</p> <p>Algunos otros Números Irracionales</p> <p>También dando clic Proposición 12 encontrarás</p> <p>De manera mas general, dando clic Proposición 13 encontrarás</p> <p>$\sqrt{p} \in I$.</p> <p>De manera general</p> <p>Se tiene el siguiente resultado: Si $k \in \mathbb{N}$ y k no es un cuadrado perfecto, decir:</p> <p>Aun otras formas</p> <p>Así como a lo anterior, tenemos otras formas</p>	<p>Método por Reducción al absurdo</p> <p>El siguiente método (de reducción al absurdo) es frecuentemente utilizado y a veces, hasta el favorito de muchos matemáticos, por la gran versatilidad que ofrece.</p> <p>Equivalencia lógica</p> <p>Este método está basado en la equivalencia:</p> $p \rightarrow q \equiv (p \text{ y } \text{no}(q) \rightarrow \text{absurdo}) \text{ para alguna } x$ <p>Así, en este método, para demostrar que $p \rightarrow q$, se construye un absurdo usando la hipótesis p y la negación de la conclusión $\text{no}(q)$.</p> <p>Este método también se enuncia del siguiente modo:</p> <p>Para demostrar que $p \rightarrow q$, se construye un absurdo, suponiendo falsa la conclusión q y usando la hipótesis p.</p> <p>Ejemplos</p> <p>En adelante denotaremos por \emptyset al conjunto vacío.</p> $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$
---	--

Un resultado general en el descubrimiento de irracionales.

<p>$\sqrt{2}$ y sus consecuencias</p> <p>El Números $\sqrt{2}$ es irracional</p> <p>Los griegos, con el Teorema de Pitágoras dando clic en Proposición 11 encontrarás la</p> <p>Así, este sería seguramente el primer irracional. Llamando I a los números irracionales (que</p> <p>Algunos otros Números Irracionales</p> <p>También dando clic Proposición 12 encontrarás</p> <p>De manera mas general, dando clic Proposición 13 encontrarás</p> <p>$\sqrt{p} \in I$.</p> <p>De manera general</p> <p>Se tiene el siguiente resultado: Si $k \in \mathbb{N}$ y k no es un cuadrado perfecto, decir:</p> <p>Aun otras formas</p> <p>Así como a lo anterior, tenemos otras formas</p>	<p>Si p es primo, entonces $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.</p> <p>Demostración: (La idea es suponer falsa la conclusión y de ahí, construir una contradicción)</p> <p>Supongamos que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$</p> <p>Entonces:</p> $\exists n, s (s \neq 0) \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \sqrt{p} = \frac{n}{s} \text{ (fracción mínima (1))}$ <p>De donde:</p> $r^2 = ps^2 \Rightarrow r^2 \text{ es múltiplo de } p$ <p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>
---	--

El Axioma del supremo, destacando su importancia. Se hace notar que los racionales, por ejemplo no lo cumplen.

El axioma del supremo

« « » » Modelos
Lógica Reales Funciones

S) El axioma del supremo

De los axiomas de los reales, éste es el que nos faltaba. A diferencia de los demás axiomas que tiene que ver más con propiedades algebraicas, aplicables a diversos campos, éste es realmente característico de los reales.

¿Qué establece?

Todo conjunto A (no vacío) de reales, acotado superiormente posee un supremo, es decir, existe un real s tal que $s = \sup A$.

En donde:

A está acotado superiormente si
 \exists un real M tal que $x \leq M \forall x \in A$

Además:

A todo número M con esta propiedad se le llama cota superior de A

$s = \sup A$ si:

- a) s es cota superior de A
- b) t cota superior de $A \Rightarrow s \leq t$.

Es decir:

s es la mínima de todas las cotas superiores de A

Su importancia

1) Este axioma es característico de los números reales. Los racionales por ejemplo, no lo cumplen:

$$\text{Sea } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

$A \neq \emptyset$, pues al menos $1 \in A$.
Además, por ejemplo, 2 es una cota superior de A .
Sin embargo, no existe $\sup A$.

Es decir, no existe un racional que sea la mínima de todas las cotas superiores.

Enseguida algunas proposiciones que solo se demuestran utilizando el Axioma del supremo o alguna de sus equivalencias.

Algunas proposiciones

« « » » Modelos
Lógica Reales Funciones

Algunas proposiciones

Para comprender un poco más la importancia del axioma del supremo presentamos una secuencia de proposiciones muy interesantes cuyas demostraciones están estrechamente relacionadas con tal axioma.

Proposición S1. El conjunto \mathbb{N} no está acotado superiormente

Es claro que los naturales son un conjunto acotado inferiormente, sin embargo aunque de manera intuitiva se observa que no lo están superiormente, la demostración formal es indispensable. Dando clic en [Proposición S1](#) podrás acceder a su demostración.

Proposición S2. $\forall \epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$

Es decir, dado un número arbitrariamente pequeño, siempre existe un natural, tal que su inverso multiplicativo es aun menor. Dando clic en [Proposición S2](#) podrás acceder a su demostración.

Proposición S3. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y - x > 1$, entonces $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$

Es decir, entre dos reales que distan en más de 1, existe un entero. Dando clic en [Proposición S3](#) podrás acceder a su demostración.

Proposición S4. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$

Es decir, entre dos reales cualesquiera, existe un racional. Dando clic en [Proposición S4](#) podrás acceder a su demostración. Es sencillo deducir que si existe uno, existe una infinidad (¿puedes argumentarlo?).

Proposición S5. Si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$, entonces $\exists j \in \mathbb{I}$ tal que $x < j < y$

Es decir, entre dos racionales cualesquiera, existe un irracional. Dando clic en [Proposición S5](#) podrás acceder a su demostración.

El conjunto de los números naturales, no está acotado superiormente. Su demostración es paso a paso y se presenta en una ventana flotante.

Algunas propiedades

Algunas proposiciones
Para comprender un poco más de las demostraciones está...

Proposición S1. El conjunto de los naturales no está acotado superiormente, la demostración es paso a paso.

Proposición S2. $\forall \epsilon > 0$, existe un número natural n tal que $n > \alpha$. En Proposición S2 podrás acceder a su demostración.

Proposición S3. Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Es decir, entre dos reales siempre existe otro real.

Proposición S4. Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Es decir, entre dos reales siempre existe otro real. Deducir que si existe uno, existe otro.

Proposición S5. Si $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Es decir, entre dos racionales cualesquiera, existe un racional.

El conjunto \mathbb{N} no está acotado superiormente

El conjunto de los naturales no está acotado superiormente.

Demostración: (La idea es suponer que es un conjunto acotado superiormente y aplicar el axioma del supremo para construir una contradicción)

- Supongamos que:

\mathbb{N} está acotado superiormente
- Por el Axioma del supremo:

$\text{Como } \mathbb{N} \neq \emptyset, \text{ existe } \alpha = \sup \mathbb{N}$
- Entonces:

$\alpha \geq n \forall n \in \mathbb{N}$
- Y como:

$n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \geq n+1 \forall n \in \mathbb{N}$
- Significa que:

$\alpha - 1 \geq n \forall n \in \mathbb{N}$
(Contradicción: $\alpha = \sup \mathbb{N}$)

• Q.E.D.

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

> >> Modelos
Reales Funciones

y interesantes

que no lo están

n.

nor. Dando clic

mostración.

ión. Es sencillo

Esta propiedad es de gran importancia en la teoría de límites y continuidad y, se presenta en una ventana flotante.

Algunas propiedades

Algunas proposiciones
Para comprender un poco más de las demostraciones está...

Proposición S1. El conjunto de los naturales no está acotado superiormente, la demostración es paso a paso.

Proposición S2. $\forall \epsilon > 0$, existe un número natural n tal que $n > \alpha$. En Proposición S2 podrás acceder a su demostración.

Proposición S3. Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Es decir, entre dos reales siempre existe otro real.

Proposición S4. Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Es decir, entre dos reales siempre existe otro real. Deducir que si existe uno, existe otro.

Proposición S5. Si $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Es decir, entre dos racionales cualesquiera, existe un racional.

$\forall \epsilon > 0, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n} < \epsilon$

Propiedad arquimediana

Demostración: (La idea es negar la conclusión y construir una contradicción con la propiedad de que el conjunto de los naturales no está acotado superiormente).

- Suponiendo que:

$\frac{1}{n} \geq \epsilon \forall n \in \mathbb{N}$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

> >> Modelos
Reales Funciones

y interesantes

que no lo están

n.

nor. Dando clic

mostración.

n. Es sencillo

Si dos reales distan en más de 1, entonces entre ellos existe un entero.

<p>Algunas pro</p> <p>Algunas proposiciones Para comprender un poco más de las demostraciones</p> <p>Proposición S1. <i>El conjunto de los números naturales es cerrado superiormente, la demostración es sencilla.</i></p> <p>Proposición S2. $\forall \varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. En Proposición S2 podrás acceder a su demostración.</p> <p>Proposición S3. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$. En Proposición S3 podrás acceder a su demostración.</p> <p>Proposición S4. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y - x > 1$, entonces existe un número entero k tal que $x < k < y$. En Proposición S4 podrás acceder a su demostración. Es sencillo deducir que si existe uno, existe una infinidad (¿puedes argumentarlo?).</p> <p>Proposición S5. Si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$, entonces existe un número irracional i tal que $r < i < s$. En Proposición S5 podrás acceder a su demostración.</p>	<p>Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y - x > 1$, entonces $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$</p> <p>Entre dos reales que distan más de 1, existe un entero</p> <p>Demostración: (La idea es construir un entero k, tal que $x < k < y$).</p> <ul style="list-style-type: none"> Sea: $k = 1 + [x]$ Por tanto: $k \in \mathbb{Z} \text{ y } x < k$ Y como $y - x > 1$: $k = 1 + [x] < 1 + x < y$ Así: $x < k < y$ <p>Q.E.D.</p> <p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>	<p>Modelos de Reales Funciones</p> <p>muy interesantes</p> <p>va que no lo están haciendo.</p> <p>menor. Dando clic</p> <p>demostración.</p>
---	--	--

Entre dos reales cualesquiera, existe un racional. Para su demostración es necesaria la propiedad arquimediana. Su demostración se presenta en una ventana flotante.

<p>Algunas pro</p> <p>Algunas proposiciones Para comprender un poco más de las demostraciones</p> <p>Proposición S1. <i>El conjunto de los números naturales es cerrado superiormente, la demostración es sencilla.</i></p> <p>Proposición S2. $\forall \varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. En Proposición S2 podrás acceder a su demostración.</p> <p>Proposición S3. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$. En Proposición S3 podrás acceder a su demostración.</p> <p>Proposición S4. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y - x > 1$, entonces existe un número entero k tal que $x < k < y$. En Proposición S4 podrás acceder a su demostración. Es sencillo deducir que si existe uno, existe una infinidad (¿puedes argumentarlo?).</p> <p>Proposición S5. Si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$, entonces existe un número irracional i tal que $r < i < s$. En Proposición S5 podrás acceder a su demostración.</p>	<p>Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$</p> <p>Entre dos reales cualesquiera, existe un racional</p> <p>Demostración: (La idea es construir un racional r, tal que $x < r < y$, usando la propiedad arquimediana y la propiedad de que entre dos reales que distan más de 1, existe un entero).</p> <ul style="list-style-type: none"> Sean: $x, y \in \mathbb{R} \text{ tales que } x < y \Rightarrow$ Como: $y - x > 0 \Rightarrow$ Por propiedad arquimediana: $\exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow$ <p>Mostrar Todo</p> <p>Reiniciar paso a paso</p>	<p>Modelos de Reales Funciones</p> <p>muy interesantes</p> <p>va que no lo están haciendo.</p> <p>menor. Dando clic</p> <p>demostración.</p> <p>ción. Es sencillo</p> <p>mostración.</p>
---	---	--

Entre dos racionales cualesquiera existe un irracional. Aquí se requiere la existencia de un irracional entre 0 y 1, cosa que ya se sabe.

<p>Algunas pro superiormente, la demo Proposición S2. $\forall \varepsilon >$ Es decir, dado un númer en Proposición S2 podr Proposición S3. $\forall x, y$ Es decir, entre dos real Proposición S4. $\forall x, y$ Es decir, entre dos real deducir que si existe un Proposición S5. $\forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ y } r < s$, entonces $\exists j \in \mathbb{I}$ tal que $x < j < y$ Es decir, entre dos racionales cualesquiera, existe un irracional. Dando clic en Proposición S5 podrás acceder a su demostración.</p>	<p>$\forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ y } r < s$, entonces $\exists j \in \mathbb{I}$ tal que $x < j < y$</p> <p>Entre dos racionales cualesquiera, existe un irracional Demostración: (La idea es construir j irracional, tal que $r < j < s$).</p> <ul style="list-style-type: none"> Sabemos que: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\exists i \in \mathbb{I} \cap (0,1)$ <p>(ejemplo: $\sqrt{2}-1$)</p> </div> <p style="text-align: right;">?</p> <p>Mostrar Todo Reiniciar paso a paso</p>	<p>$\leftarrow \rightarrow \gg$ Modelos de Reales Funciones</p> <p>muy interesantes</p> <p>va que no lo están ción.</p> <p>menor. Dando clic</p> <p>demostración.</p> <p>ación. Es sencillo</p>
---	---	--

Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene que entre dos reales cualesquiera, existe un irracional.

<p>Algunas pro superiormente, la demo Proposición S2. $\forall \varepsilon >$ Es decir, dado un númer en Proposición S2 podr Proposición S3. $\forall x, y$ Es decir, entre dos real Proposición S4. $\forall x, y$ Es decir, entre dos real deducir que si existe un Proposición S5. $\forall r, s$ Es decir, entre dos racionales cualesquiera, existe un irracional. Dando clic en Proposición S5 podrás acceder a su demostración. Proposición S6. $\forall x, y$ Es decir, entre dos real Conclusiones Junutando todas estas proposiciones se puede concluir que entre dos reales cualesquiera, existen infinitud de racionales y también infinitud de irracionales. ¿Podrias argumentarlo?.</p>	<p>$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ y } x < y$, entonces $\exists j \in \mathbb{I}$ tal que $x < j < y$</p> <p>Entre dos reales cualesquiera, existe un irracional Demostración: (La idea es utilizar los resultados previamente demostrados: 1) Entre dos reales cualesquiera, existe un racional 2) Entre dos racionales cualesquiera, existe un irracional)</p> <ul style="list-style-type: none"> Sean: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $x, y \in \mathbb{R} \text{ tales que } x < y$ </div> Por el resultado 1): <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\exists r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x < r < y$ </div> Aplicando 1) a r y y: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\exists s \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x < r < s < y$ </div> Por el resultado 2): <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\exists j \in \mathbb{I} \text{ tal que } x < r < j < s < y$ </div> De donde: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\exists j \in \mathbb{I} \text{ tal que } x < j < y$ </div> <p>• Q.E.D.</p> <p style="text-align: right;">?</p> <p>Mostrar Todo Reiniciar paso a paso</p>	<p>$\leftarrow \rightarrow \gg$ Modelos de Reales Funciones</p> <p>ción.</p> <p>menor. Dando clic</p> <p>demostración.</p> <p>ación. Es sencillo</p> <p>mostración.</p> <p>stración.</p>
---	--	---

Reflexionando sobre los infinitos y la cardinalidad. La primera vez que uno encuentra estos resultados, le parecen sorprendentes.

Cosas de Infinitos

Modelos
Lógica Reales Funciones

El concepto de cardinalidad

Para comprender un poco más las relaciones entre los números, será importante referirnos al concepto de cardinalidad, que tiene que ver con "el tamaño" de un conjunto infinito. Podríamos decir que se trata de una extensión del concepto de cantidad para conjuntos finitos.

Para saber si dos conjuntos finitos A y B, tienen la misma cantidad de elementos, bastaría aparear los elementos de uno con los del otro y si no sobra ningún elemento, se concluye que si tienen la misma cantidad de elementos.

Este método de apareamiento, consiste matemáticamente en establecer una relación **biyectiva** (uno a uno y sobre) entre A y B, el cual se puede extender a conjuntos infinitos, de la siguiente manera:

Definición

Dos conjuntos infinitos A y B, tiene la misma cardinalidad si entre ellos se puede establecer una relación biyectiva.

El todo no siempre es mayor que las partes

Dando clic en [Proposición r1](#), verás la demostración de que: Los impares positivos tienen la misma cardinalidad que los Naturales.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & (N \text{ naturales}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & (I \text{ naturales impares}) \end{array}$$

Dando clic en [Proposición r2](#), verás la demostración de que: Los pares positivos tienen la misma cardinalidad que los Naturales.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad (N \text{ naturales})$$

Sumando y multiplicando de manera interactiva en enteros módulo 4.

Los Enteros Módulo 4

Modelos
Funciones

Se n
y en
i)
ii)
donc

Por ejemplo

$(\mathbb{Z}_4, +, *)$ no es un campo

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$1 + 2 = 3 \quad 3 + 1 = 0 \quad 2 + 3 = 1 \quad 3 * 2 = 2 \quad 3 * 3 = 1 \quad 2 * 2 = 0$$

$$3(1 + 3) = 0 \quad 3(1 + 2) = 1$$

$$3 * 2 = 1 * 2 \not\Rightarrow 3 = 1 \text{ (no se cumple la ley de cancelación)}$$

$$2 * x = 1 \text{ (no tiene solución, i.e. } \nexists \text{ el inverso multiplicativo de 2)}$$

Los enteros módulo 4

Dando clic en [Enteros Módulo 4](#), ver sus propiedades, en particular que se cumple la respectiva ley de can

Los enteros módulo 5

Dando clic en [Enteros Módulo 5](#), ver sus propiedades, en particular que

unas de
mismo no

unas de

Mostrando otros campos.

Más Campos cc 3 **Notas**
Lógica Reales Funciones

Más Campos
A pesar de que los irracionales no son un campo, existen subconjuntos de irracionales que en unión con los racionales y con las operaciones usuales en los reales, conforman un campo, por ejemplo:

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

con cierta dificultad, pero se pueden comprobar todas las propiedades de campo. En particular se puede ver que:

$$0 + 0\sqrt{2} \text{ es el neutro aditivo}$$
$$1 + 0\sqrt{2} \text{ es el neutro multiplicativo}$$

y aun más, se puede comprobar que:

$$\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2} \text{ es el inverso multiplicativo de } a + b\sqrt{2}$$

Por ejemplo:

$$3 - 2\sqrt{2} \text{ es el inverso multiplicativo de } 3 + 2\sqrt{2}$$

Similarmente se puede construir el campo:

$$G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

En este caso:
¿Quiénes serían los neutros aditivo y multiplicativo? y
¿Cuál sería la expresión para los inversos multiplicativos?

Extendiendo el concepto tendríamos que los siguientes también serían campos:

Presentando algunas notas sobre el número y su desarrollo

El concepto de número **Reales**
Lógica Funciones

<p><u>El concepto de número (natural)</u></p> <p><u>Los números enteros</u></p> <p><u>Las fracciones</u></p> <p><u>Los incommensurables</u></p> <p><u>Conclusiones</u></p>	<p>El concepto de Número</p> <p>Aquí podrás encontrar unas cuantas notas sobre el concepto de número y su desarrollo.</p>
--	---

Los inconmensurables y el axioma del supremo

El concepto de número		Reales Lógica Funciones
<u>El concepto de número (natural)</u>	Los Inconmensurables	
<u>Los números enteros</u>	Pero la aparición de las fracciones fue solo la primera etapa. La siguiente etapa y muy importante, fue el descubrimiento de los intervalos inconmensurables y que dieron origen a los llamados números irracionales, mismos que no pueden expresarse por una fracción ordinaria de enteros.	
<u>Las fracciones</u>	Con el descubrimiento de estos números, la construcción de los reales se dio a partir de la conjunción de los racionales (fracciones) y los irracionales (inconmensurables), con reglas y operaciones comunes.	
<u>Los inconmensurables</u>	Se pudieron axiomatizar y a partir de esto, se han demostrado diversas propiedades como las leyes de cancelación, las leyes de los signos, etc.	
<u>Conclusiones</u>	<p>El Axioma del Supremo: <i>Todo conjunto A (no vacío) de reales, acotado superiormente posee un supremo, es decir, existe un real s tal que $s = \sup A$.</i></p> <p>fue clave en la construcción de los irracionales y por consecuencia en la posibilidad de axiomatizar los números reales.</p> <p>Con este axioma ha sido posible atribuir a los números reales la propiedad de continuidad, es decir, de poder establecer una correspondencia biunívoca de los reales con los puntos de una recta.</p>	

Algunos ejercicios de reforzamiento

Ejercicios		Reales Lógica Funciones
1)	Demuestra que $-0=0$	
2)	Demuestra que $-(a-b)=-a+b$	
3)	Demuestra que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$	
4)	Demuestra que si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$	
5)	Demuestra que si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$	
6)	Demuestra que si a^{-1} tiene el mismo signo que a	
7)	Demuestra que si $ab > 0$, entonces $a^{-1}b^{-1} > 0$	
8)	Demuestra que $ab < 0$, si y solo si $\begin{cases} \text{i) } a > 0 \text{ y } b < 0 \\ \text{ii) } a < 0 \text{ y } b > 0 \end{cases}$	
9)	Demuestra que $ab > 0$, si y solo si $\begin{cases} \text{i) } a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \text{ii) } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$	
10)	Demuestra que $ a = -a $	
11)	Demuestra que $a \leq a $ y $-a \leq a $	
12)	Demuestra que $ a+b \leq a + b $	

Referencias bibliográficas y de Internet

Reales
Lógica Funciones

Referencias

Referencias

En este apartado proporcionamos algunas referencias útiles para la creación de este tema de Números Reales, tanto en material impreso como de Internet.

Bibliográficas

Calculus I Michael Spivak Editorial Reverté	Análisis Matemático I Haaser, LaSalle y Sullivan Editorial Trillas	Método de Inducción Matemática S. Sominiski Lecciones Populares de Matemáticas Editorial Mir.
Calculus I Tom M. Apostol Editorial Reverté	Calculus I Edwin Moise Editorial Addison Wesley	La Matemática: su contenido, métodos y significado Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros Alianza Editorial
Álgebra Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo Editorial Pearson Educación	¿Qué es la Matemática? Courant y Robbins Editorial Aguilar	Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad Scher, Steketee, Kunkel, Lyublinskaya Key Curriculum Press

En Internet

Sitio de Key Curriculum Press
Innovators in Mathematics Education
(Creadores de The Geometer's Sketchpad)
<http://www.keypress.com>

Compendio temático de Matemáticas
<http://mathworld.wolfram.com>

Investigación sobre si es innato el concepto de número
<http://www.crea.com.ar/art/141/c-1410112.htm>

El tercer tema: Funciones

Se trata de estudiar las funciones a partir del concepto de regla de correspondencia, sus **operaciones** y los distintos **tipos de funciones**. Para aclarar el concepto se muestran reglas de correspondencia, que no satisfacen alguna de las características del concepto de función. En los diferentes temas, las funciones se ejemplifican mediante **construcciones interactivas** que permiten explorar y analizar distintas situaciones.

También se establecen **demostraciones formales interactivas paso a paso**. En todos los tipos de funciones se exhiben **ejemplos y no ejemplos** con la idea de aclarar los conceptos.

Se proporciona un **Graficador de funciones** que permite tanto realizar operaciones entre funciones, así como cambiar las expresiones de sus reglas de correspondencia y graficar sus resultados. Igualmente se proporciona un **Escalador de funciones** que, permite graficar funciones bastante complicadas como por ejemplo

$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ o del estilo y proporciona la posibilidad de un escalamiento en cada uno de los ejes y un zoom de bastante profundidad.

También se proporciona un **Graficador de funciones por (3) ramas**.

Por último se presentan diversas **Referencias**, tanto bibliográficas, como de Internet.

Funciones

- **Concepto de Función**
- **Función real de variable real**
- **Algunos ejemplos**
- **Operaciones básicas**
- **Operación composición**
- **Ejemplos con operaciones**
- **Funciones Algebráicas**
- **Funciones Múltiples**
- **Funciones Pares e Impares**
- **Funciones Acotadas**
- **Funciones Periódicas**
- **Graficador de Funciones**
- **Escalador de Funciones**
- **Funciones por (3) ramas**
- **Bibliografía**

Inicio

Lógica Pruebas

FUNCIONES

Aquí podrás encontrar el concepto de función, sus operaciones básicas y los tipos de funciones más importantes en el Cálculo Diferencial e Integral de una variable real.

También encontrarás un **Graficador de Funciones**, que te permitirá hacer sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y composiciones con funciones y realizar sus gráficas.

Igualmente encontrarás un **Escalador de Funciones** que te permitirá graficar funciones y modificar las escalas en cada uno de los ejes por separado o en ambos

También encontrarás un **Graficador de Funciones, por ramas** que te permitirá graficar funciones hasta con tres ramas.

Tanto los **Graficadores** como el **Escalador de funciones**, lo elaboré trabajando con el applet conocido con el nombre **Descartes**.

El concepto de función y algunas definiciones

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráfica de Funciones
- Operador de Funciones
- Funciones por (S) tramos
- Referencias

Trigo
Lógica Matemática

Concepto de función

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B es una regla de correspondencia tal que, a cada elemento de A le asocia un único elemento en B .

Notación

$f: A \rightarrow B$ f función de A en B	$A = Dom f$ A Dominio de la función f
$B = Cod f$ B Codominio de la función f	$Ran f = \{b \in B : b = f(a) \text{ para alguna } a \in A\} \subset B$ Rango de la función f

Ejemplos

"Cada ser humano tiene una fecha real de nacimiento".
"Cada alumno en la UNAM tiene un número de cuenta".

Cada elemento del Dominio tiene asociado un único elemento en el Codominio. Así, son reglas de asociación que establecen una función.

Varios elementos del dominio pueden tener asociado el mismo elemento del codominio. Es seguro que muchos seres humanos hayan nacido en la misma fecha.

No ejemplos

"Cada alumno de la Facultad de Ciencias tiene computadora"

Trabajando funciones reales de variable real y no ejemplos.

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráfica de Funciones
- Operador de Funciones
- Funciones por (S) tramos
- Referencias

Trigo
Lógica Matemática

Función Real de Variable Real

$f: A \rightarrow B$ es una función real de variable real, si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$. Es decir, cada real de A , tiene asociado un único real en B . En adelante, a menos que se diga lo contrario, se tomará $B = \mathbb{R}$.

Como $B \subset \mathbb{R}$, se le llama función real y como $A \subset \mathbb{R}$, se le llama de variable real.

No ejemplos

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$ Observa que $f(1)$ no existe.	b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ Observa que $f(-1) \notin \mathbb{R}$.
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x^2) = x$ Observa que el 1 tiene dos asociados: $f(1) = \begin{cases} f((-1)^2) = -1 \\ f((1)^2) = 1 \end{cases}$	d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ Observa que el 1 tiene dos asociados: $f(1) = \begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

Observación

Los cuatro casos anteriores podrían ser funciones con sólo corregir el dominio. Por ejemplo en a) bastaría quitar del dominio el valor 1 y en b) bastaría tomar como dominio los reales no negativos. ¿Qué correcciones habría que hacer en los otros dos?

Algunos ejemplos que se pueden desplegar en ventanas flotantes.

Funciones

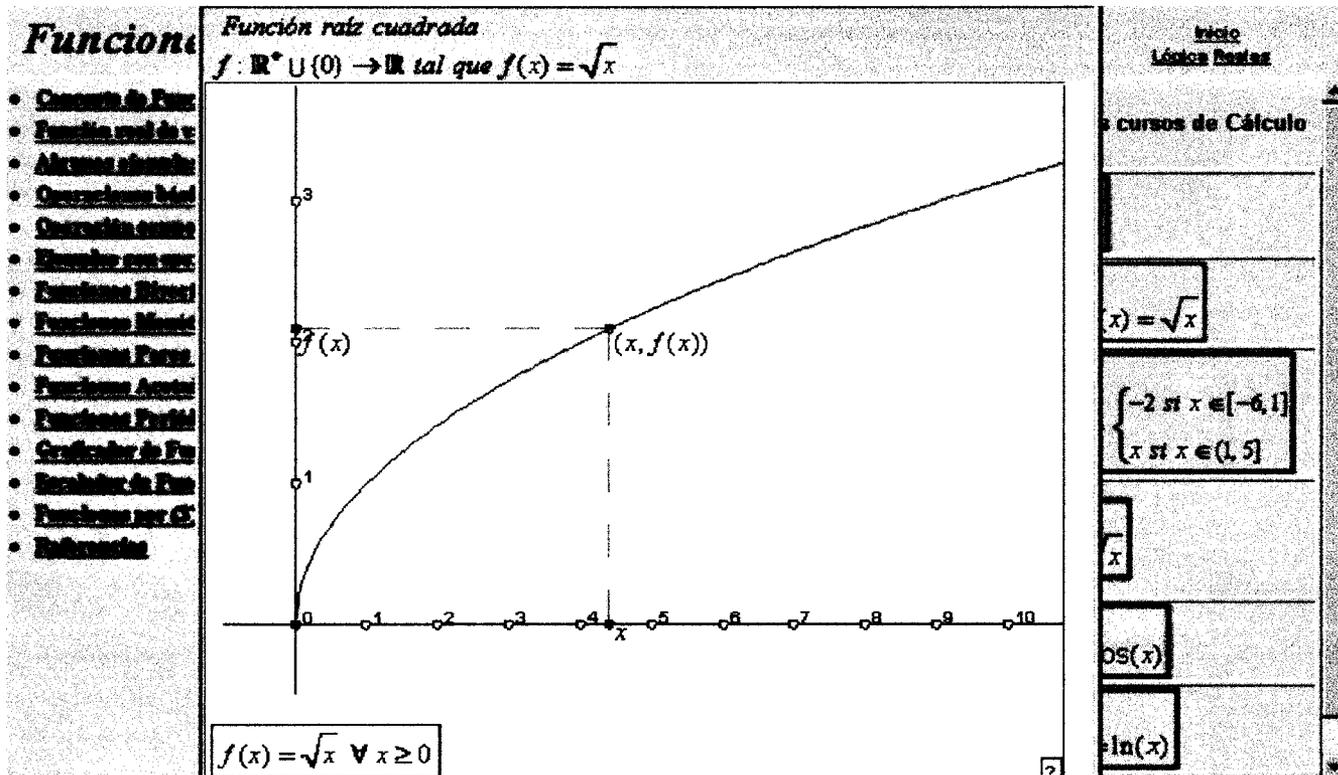
- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Elementales
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Inversas de Funciones
- Funciones por CC
- Referencias

Algunos ejemplos

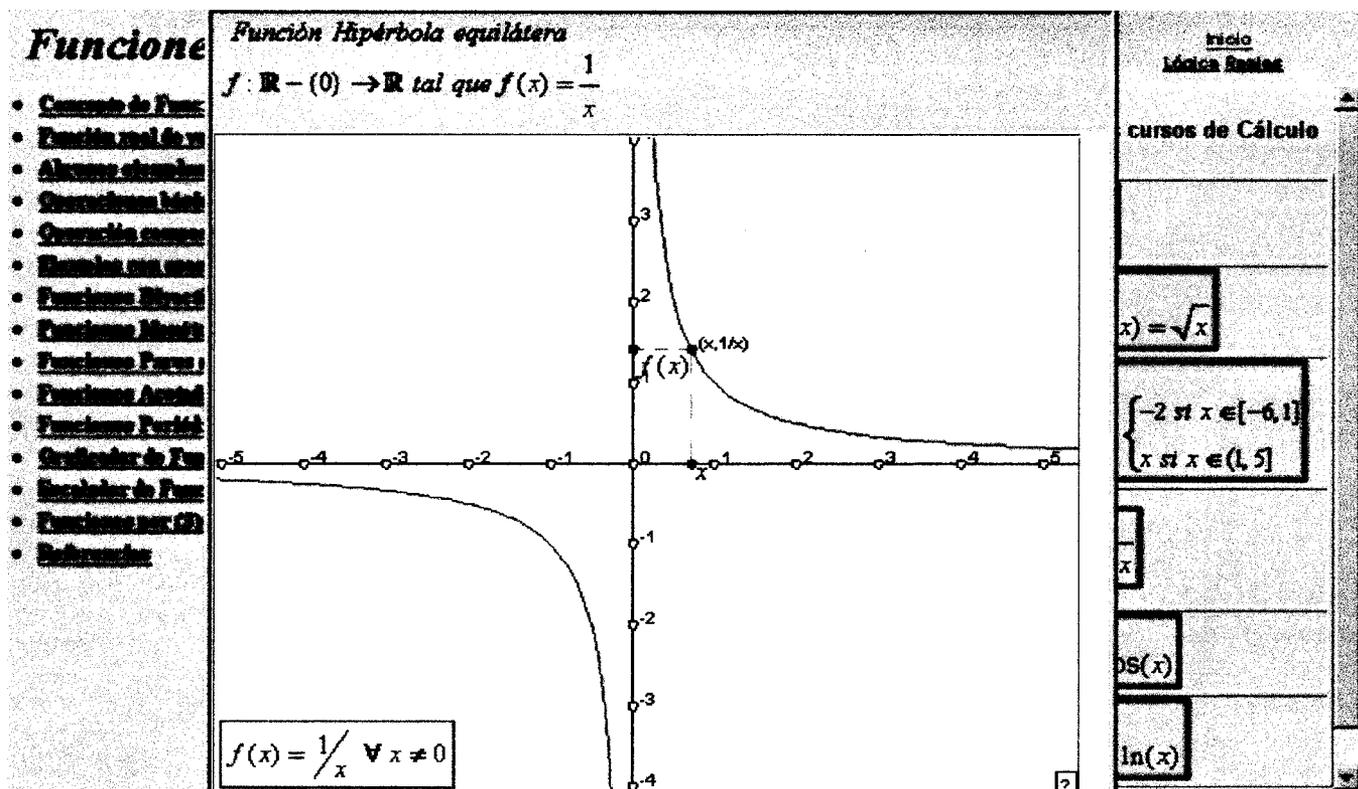
Ilustraremos algunos ejemplos de funciones que son comunes en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Función constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b$	Función idéntica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$
Función valor absoluto $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x $	Función raíz cuadrada $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$
Función mayor entero $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = [x]$	Función por ramas $f: [-6, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \in [-6, 1] \\ x & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$
Función Hipérbola equilátera $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$	Función Raíz Cúbica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x}$
Función Seno $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$	Función Coseno $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{cos}(x)$
Función exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$	Función logarítmica $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \ln(x)$

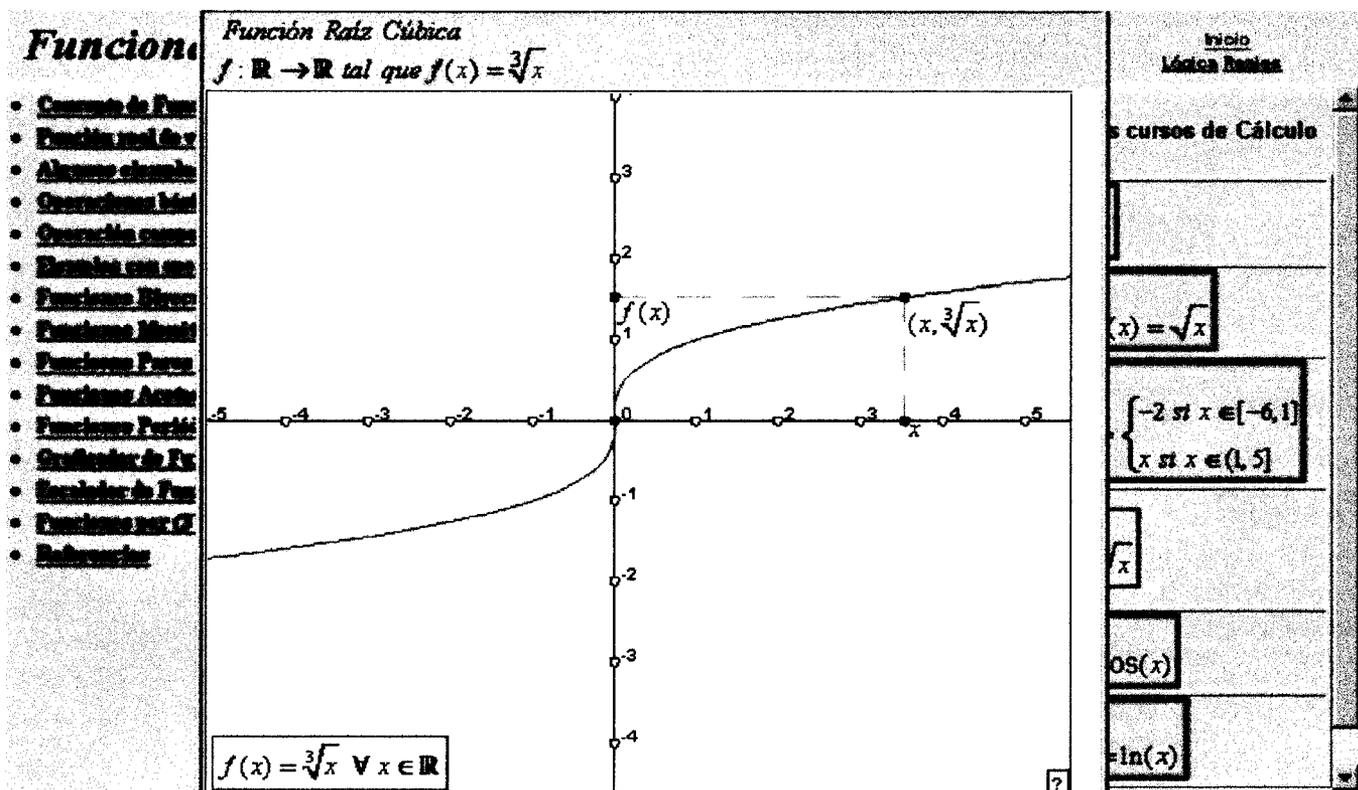
La función raíz cuadrada



La función hipérbola equilátera



La función raíz cúbica



Operaciones básicas

Funciones

Inicio
Lógica Rutas

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejercicios con operaciones
- Funciones Estrictas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Resolución de Funciones
- Funciones por (D)erivas
- Referencias

Operaciones básicas

Sean las funciones $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, entonces definimos:

Adición de funciones

$$(f + g): A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Sustracción de funciones

$$(f - g): A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Multiplicación de funciones

$$(fg): A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (fg)(x) = f(x)g(x)$$

División de funciones

$$\left(\frac{f}{g}\right): C \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ donde } C = A \cap B - \{x: g(x) = 0\}$$

Observación

En todos los casos el dominio debe ser la intersección de A y B para garantizar la existencia de $f(x)$ y $g(x)$ y por consecuencia poderlas sumar. Pero además en la división se deben quitar los valores donde el denominador $g(x)$ sea cero.

Operación composición

Funciones

Inicio
Lógica Rutas

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejercicios con operaciones
- Funciones Estrictas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Resolución de Funciones
- Funciones por (D)erivas
- Referencias

Operación composición

Sean f y g funciones reales de variable real. Definimos $(f \circ g): D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:
 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y $D = \{x: x \in \text{Dom}g \text{ y } g(x) \in \text{Dom}f\}$

La variable x debe estar en el dominio de g para garantizar que exista $g(x)$ y éste a su vez debe estar en el dominio de f para garantizar que exista $f(g(x))$. La **composición no es conmutativa**

Reglas de asociación distintas:

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \text{sen}(x)$

$$\left. \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (g(x))^2 = (\text{sen}(x))^2 \text{ y} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(x^2) \end{aligned} \right\} \text{ Pero } (\text{sen}(x))^2 \neq \text{sen}(x^2)$$

¿Puede ilustrar un caso donde $\text{Dom}(f \circ g) \neq \text{Dom}(g \circ f)$?

Calculando componentes

En una función compuesta ¿cómo puedes encontrar sus componentes?. Por ejemplo en

$$f(x) = \sqrt{\text{sen}(\cos(x^2))}$$

Funciones con parámetros variables que se pueden desplegar en ventanas flotantes.

Funciones

Inicio
Lógica Raster

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunas gráficas
- Operaciones básicas
- Operación compuesta
- Ejemplos con operaciones
- Funciones lineales
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalas de Funciones
- Funciones por (2) puntos
- Referencia

Ejemplos con operaciones

Ilustraremos algunos ejemplos de familias de funciones variando coeficientes.

Función lineal $f(x) = ax + b$ con $x \in \mathbb{R}$	Función Cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $x \in \mathbb{R}$
Una familia con valor absoluto $f(x) = a x+b + c$ con $x \in \mathbb{R}$	Una familia con raíz cuadrada $f(x) = a\sqrt{x} + b$ con $x \geq 0$
Una familia con mayor entero $f(x) = a[x] + b$ con $x \in \mathbb{R}$	Una familia de hipérbolas equiláteras $f(x) = \frac{a}{x} + b$ con $x \neq 0$
Una familia de senoides $f(x) = a\text{SEN}(bx+c) + d$ con $x \in \mathbb{R}$	Una familia de cosenoides $f(x) = a\text{COS}(bx+c) + d$ con $x \in \mathbb{R}$
Una familia de exponenciales $f(x) = ae^x + b$ con $x \in \mathbb{R}$	Una familia de logarítmicas $f(x) = a\ln(x) + b$ con $x > 0$
Un cociente de polinómicos $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d}$ con $x \neq -d$	Una composición de funciones $f(x) = a\text{COS}(bx^2)$ con $x \in \mathbb{R}$

[Ir al graficador de funciones](#)

Se pueden cambiar la pendiente a y la ordenada al origen, b.

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunas gráficas
- Operaciones básicas
- Operación compuesta
- Ejemplos con operaciones
- Funciones lineales
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalas de Funciones
- Funciones por (2) puntos
- Referencia

Función lineal
 $f(x) = ax + b$ con $x \in \mathbb{R}$

$(x, f(x))$

$f(x) = ax + b \forall x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Raster

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

trada
 ≥ 0

equiláteras
 $\neq 0$

es
 d con $x \in \mathbb{R}$

as
 $x > 0$

ones
 $x \in \mathbb{R}$

Y cambiar la posición, para entender la pendiente y la ordenada al origen.

Funciones

- Constante de Función
- Función real de variable real
- Algunas operaciones
- Operaciones básicas
- Operaciones avanzadas
- Operaciones con conjuntos
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Parciales
- Funciones Anidadas
- Funciones Parciales
- Operador de Función
- Operador de Función
- Funciones por Conjuntos
- Referencias

Función Lineal
 $f(x) = ax + b$ con $x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$
$a \geq 0$
equiláteras $a = 0$
es d con $x \in \mathbb{R}$
as $x > 0$
ones $x \in \mathbb{R}$

Se pueden cambiar a, b y c, para observar el comportamiento de la familia

Funciones

- Constante de Función
- Función real de variable real
- Algunas operaciones
- Operaciones básicas
- Operaciones avanzadas
- Operaciones con conjuntos
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Parciales
- Funciones Anidadas
- Funciones Parciales
- Operador de Función
- Operador de Función
- Funciones por Conjuntos
- Referencias

Función Cuadrática
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$
$a \geq 0$
equiláteras $a = 0$
es d con $x \in \mathbb{R}$
as $x > 0$
ones $x \in \mathbb{R}$

Aquí un ejemplo con a negativo, b y c positivos.

Funciones

- Constante de Función
- Familia real de m
- Algunas ecuaciones
- Gráficas de Mink
- Gráficas de m
- Gráficas con m
- Funciones Elípticas
- Funciones Mink
- Funciones Parvas
- Funciones Acotadas
- Funciones Parciales
- Gráficas de Función
- Gráficas de Función
- Funciones por (0)
- Referencias

Función Cuadrática
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $x \in \mathbb{R}$

$a = 0$ $b = 0$ Anima a Anima b Anima c

$f(x) = ax^2 + bx + c \forall x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

Grado ≥ 0

equiláteras 0

es d con $x \in \mathbb{R}$

as $x > 0$

ones $x \in \mathbb{R}$

Se pueden cambiar a y b para observar el comportamiento de la familia

Funciones

- Constante de Función
- Familia real de m
- Algunas ecuaciones
- Gráficas de Mink
- Gráficas de m
- Gráficas con m
- Funciones Elípticas
- Funciones Mink
- Funciones Parvas
- Funciones Acotadas
- Funciones Parciales
- Gráficas de Función
- Gráficas de Función
- Funciones por (0)
- Referencias

Una familia con mayor entero
 $f(x) = a[x] + b$ con $x \in \mathbb{R}$

$a = 1$ $b = 0$ Anima a Anima b

$f(x) = a[x] + b \forall x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

Grado ≥ 0

equiláteras 0

es d con $x \in \mathbb{R}$

as $x > 0$

ones $x \in \mathbb{R}$

Aquí un ejemplo con a y b negativos.

Funciones

- Constante de Función
- Función real de un
- Algunas constantes
- Operaciones básicas
- Operaciones avanzadas
- Elementos con operaciones
- Funciones Elementales
- Funciones Matemáticas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Ecuaciones de Funciones
- Funciones por Pedregos
- Referencias

Una familia de hipérbolas equiláteras

$$f(x) = \frac{a}{x} + b \text{ con } x \neq 0$$

Inicio
Lógica Matemática

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$
$b \geq 0$
equiláteras 0
$a < 0$ $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$x > 0$
dominio $x \in \mathbb{R}$

Se pueden cambiar a, b, c y d para observar el comportamiento de la familia.

Funciones

- Constante de Función
- Función real de un
- Algunas constantes
- Operaciones básicas
- Operaciones avanzadas
- Elementos con operaciones
- Funciones Elementales
- Funciones Matemáticas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Ecuaciones de Funciones
- Funciones por Pedregos
- Referencias

Una familia de senoideas

$$f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

Inicio
Lógica Matemática

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$
$b \geq 0$
equiláteras 0
$a < 0$ $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$x > 0$
dominio $x \in \mathbb{R}$

Aquí un ejemplo

Funciones

- Constante de Euler
- Función real de...
- Algunas álgebra
- Operaciones Mat...
- Operación como...
- Elementos con con...
- Funciones Direct...
- Funciones Invert...
- Funciones Par...
- Funciones Acotad...
- Funciones Parcial...
- Gráficas de Fun...
- Gráficas de Fun...
- Funciones por CB
- Referencias

Una familia de senoidales
 $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ con $x \in \mathbb{R}$

a = 1	c = 0	Anima a	Anima c
b = 1	d = 0	Anima b	Anima d

$f(x) = a \sin(bx + c) + d \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

brada
 ≥ 0

equilibras
 $\neq 0$

es
 d con $x \in \mathbb{R}$

as
 $x > 0$

ones
 $x \in \mathbb{R}$

Se pueden cambiar a, b, c y d para observar el comportamiento de la familia.

Funciones

- Constante de Euler
- Función real de...
- Algunas álgebra
- Operaciones Mat...
- Operación como...
- Elementos con con...
- Funciones Direct...
- Funciones Invert...
- Funciones Par...
- Funciones Acotad...
- Funciones Parcial...
- Gráficas de Fun...
- Gráficas de Fun...
- Funciones por CB
- Referencias

Un cociente de polinomios
 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ con $x \neq -d$

a = 1	c = 0	Anima a	Anima c
b = 1	d = 0	Anima b	Anima d

$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ con $x \neq -d$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

brada
 ≥ 0

equilibras
 $\neq 0$

es
 d con $x \in \mathbb{R}$

as
 $x > 0$

ones
 $x \in \mathbb{R}$

Aquí un ejemplo

Funcione

- Concepto de Funci...
- Familia real de m...
- Algunas caracter...
- Operaciones bási...
- Operación suces...
- Elementos con op...
- Funciones Algebr...
- Funciones Algebr...
- Funciones Pares...
- Funciones Anod...
- Funciones Periód...
- Gráficas de Fun...
- Resolución de Func...
- Funciones por (D)
- Referencias

Un cociente de polinomios

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d} \text{ con } x \neq -d$$

$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d} \text{ con } x \neq -d$

Inicio
Lógica Bases

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

Prada
 ≥ 0

equiláteras
0

a
 d con $x \in \mathbb{R}$

a
 $x > 0$

ONES
 $x \in \mathbb{R}$

Se pueden cambiar a y b para observar el comportamiento de la familia

Funcione

- Concepto de Funci...
- Familia real de m...
- Algunas caracter...
- Operaciones bási...
- Operación suces...
- Elementos con op...
- Funciones Algebr...
- Funciones Algebr...
- Funciones Pares...
- Funciones Anod...
- Funciones Periód...
- Gráficas de Fun...
- Resolución de Func...
- Funciones por (D)
- Referencias

Una composición de funciones

$$f(x) = a \cos(bx^2) \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = a \cos(bx^2) \forall x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Bases

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

Prada
 ≥ 0

equiláteras
0

a
 d con $x \in \mathbb{R}$

a
 $x > 0$

ONES
 $x \in \mathbb{R}$

Aquí un ejemplo

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Byectivas
- Funciones Inyectivas
- Funciones Parvas e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Escalas de Funciones
- Funciones por (G) ramos
- Referencias

Una composición de funciones
 $f(x) = a \cos(bx^2)$ con $x \in \mathbb{R}$

Inicio
Lógica Booleana

eficientes.

$x \in \mathbb{R}$

grado ≥ 0

equilibras ≥ 0

es d con $x \in \mathbb{R}$

es $x > 0$

ones $x \in \mathbb{R}$

Funciones biyectivas

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Byectivas
- Funciones Inyectivas
- Funciones Parvas e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Escalas de Funciones
- Funciones por (G) ramos
- Referencias

Inicio
Lógica Booleana

Funciones Byectivas

Una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, si es a la vez inyectiva y suprayectiva (llamada brevemente: sobre). Es decir:

Funciones inyectivas

Una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva, si

$\text{Para todo } a_1, a_2 \in A \text{ tales que } a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Elementos distintos del dominio, tienen imágenes distintas en el codominio, es decir, elementos distintos del dominio, no pueden tener la misma imagen en el codominio.

Funciones suprayectivas

Una función $f : A \rightarrow B$ es sobre si

$\text{Para cada } b \in B, \text{ existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b$

Significa que todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio.

Ejemplos

<p>No es inyectiva, no es sobre.</p> <p>$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + x - 2$</p>	<p>Es inyectiva y es sobre (es biyectiva).</p> <p>$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$</p>
--	---

Demostración interactiva: no es inyectiva, ni sobre. Construcción interactiva.

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Construcción básica
- Construcción avanzada
- Ejemplos con gráficas
- Funciones lineales
- Funciones cuadráticas
- Funciones cúbicas
- Funciones racionales
- Funciones irracionales
- Funciones trigonométricas
- Funciones exponenciales y logarítmicas
- Referencias

No es inyectiva, no es sobre.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + x - 2$

Dem: La idea es mostrar dos elementos del dominio con la misma imagen y, un elemento del codominio que no sea imagen de ningún elemento del dominio.

- No es inyectiva, ya que:

$f(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

Inicio

Lógica básica

inyectiva (llamada

(a₂)

codominio, es decir, en el codominio.

mento del dominio.

re (es biyectiva).
 $f(x) = 2x + 1$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Demostración interactiva: no es inyectiva, pero es sobre. Construcción interactiva.

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Construcción básica
- Construcción avanzada
- Ejemplos con gráficas
- Funciones lineales
- Funciones cuadráticas
- Funciones cúbicas
- Funciones racionales
- Funciones irracionales
- Funciones trigonométricas
- Funciones exponenciales y logarítmicas
- Referencias

No es inyectiva, pero sí es sobre.

$f: [-3, 3] \rightarrow [-0.5, 4]$ tal que $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$

Dem: La idea mostrar dos elementos con la misma imagen y que el rango es [-0.5, 4].

- No es inyectiva, ya que:

$f(-2) = f(2) = 0$
- Pero es sobre, dado que:

$-0.5 \leq \frac{4-x^2}{x^2+1} \leq 4 \Rightarrow$
- Elevando al cuadrado:

$-\frac{1}{2}(x^2+1) \leq 4-x^2 \leq 4(x^2+1) \Rightarrow$

Inicio

Lógica básica

(a₂)

codominio, es decir, en el codominio.

mento del dominio.

re (es biyectiva).
 $f(x) = 2x + 1$

es sobre.
 que $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Demostración interactiva: es inyectiva, pero no es sobre. Construcción interactiva.

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con monotonías
- Funciones Inyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Grificador de Funciones
- Resolvidor de Funciones
- Funciones por (2) ramas
- Referencias

Es inyectiva, pero no es sobre.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Demostración: La idea mostrar que imágenes iguales provienen de elementos iguales.

- Es inyectiva, ya que:

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^2}{x_2^2 + 1} \Rightarrow$$
- Haciendo productos cruzados:

$$x_1^2(x_2^2 + 1) = x_2^2(x_1^2 + 1) \Rightarrow$$
- Por ley distributiva:

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 = x_2^2 x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow$$
- Cancelando términos semejantes:

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$$
- Como $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$:

$$x_1 = x_2$$

No es sobre. La ecuación:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow$$

No tiene solución:

$$x^2 = x^2 + 1 \text{ no tiene solución. } \bullet \text{ Q.E.D.}$$

Inicio
Lógica Básica

x_2)

dominio, es decir, en el codominio.

mento del dominio.

re (es biyectiva).
 $f(x) = 2x + 1$

es sobre.
que $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

WPC

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

Click para ver detalles

Funciones monótonas y los diversos tipos de monotonía

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con monotonías
- Funciones Inyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Grificador de Funciones
- Resolvidor de Funciones
- Funciones por (2) ramas
- Referencias

Funciones Monótonas

Para una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I , existen 4 casos posibles de monotonía.

- Es monótona creciente, si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Es monótona decreciente, si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Es monótona no creciente, si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Es monótona no decreciente, si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ejemplos

<p>Es monótona creciente.</p> <p>$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$</p>	<p>Es monótona decreciente.</p> <p>$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$</p>
<p>Es monótona no decreciente.</p> <p>$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = [x]$</p>	<p>Es monótona no creciente.</p> <p>$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 - [x]$</p>

La importancia de que el dominio sea un intervalo

Parcería ser monótona decreciente.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

Inicio
Lógica Básica

Demostración interactiva: es monótona creciente. Construcción interactiva.

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de un
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación compuesta
- Elementos con sus
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares
- Funciones Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráfico de una Función
- Inversible de una Función
- Funciones por CC
- Referencias

Es monótona creciente.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

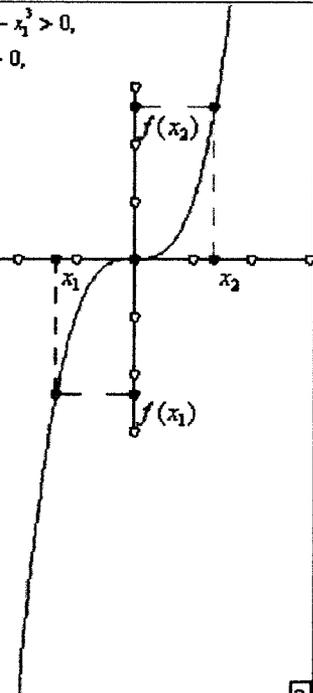
Demostración: La idea es mostrar que: $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_2^3 - x_1^3 > 0$,
pero como $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$ y $(x_2 - x_1) > 0$,
entonces basta demostrar que: $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$

- Es inmediato si:
 - a) x_1, x_2 son de signos iguales.
- Si son de distinto signo, tenemos:

$$b) \ x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq -x_2 < 0 < x_2 \\ 0 \\ -x_2 < x_1 < 0 < x_2 \end{cases} \Rightarrow$$
- De aquí:

$$\begin{cases} x_1^2 \geq -x_1x_2 \\ 0 \\ -x_2^2 < x_1x_2 \end{cases} \Rightarrow$$
- Entonces:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 \geq 0 \\ 0 \\ x_2^2 + x_1x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Mostrar Todo
Reiniciar paso a paso

Inicio
Lógica Real

casos posibles de

$$= \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$-[x]$$

Demostración interactiva: es monótona decreciente. Construcción interactiva

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de un
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación compuesta
- Elementos con sus
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares
- Funciones Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráfico de una Función
- Inversible de una Función
- Funciones por CC
- Referencias

Es monótona decreciente.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Demostración: La idea es mostrar que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

- Es decreciente, ya que:

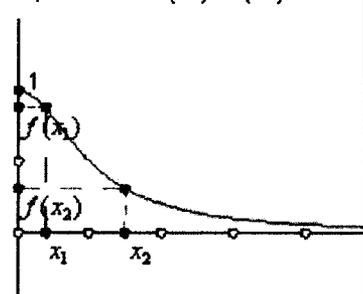
$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$$
- De donde:

$$0 < x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow$$
- Sumando 1:

$$0 < x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Rightarrow$$
- Tomando Inversos:

$$\frac{1}{x_1^2 + 1} > \frac{1}{x_2^2 + 1} \Rightarrow$$
- Así:

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \bullet \text{ Q.E.D.}$$



Mostrar Todo
Reiniciar paso a paso

Inicio
Lógica Real

casos posibles de

$$= \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$-[x]$$

Demostración interactiva: es monótona no creciente. Construcción interactiva

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de un
- Algunas clasificaciones
- Operaciones básicas
- Operaciones avanzadas
- Ejemplos más importantes
- Funciones Directas
- Funciones Inversas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Ejercicios de Funciones
- Funciones más curiosas
- Referencias

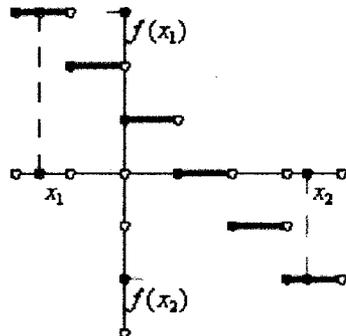
Es monótona no creciente.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 - [x]$

Demostración: La idea es utilizar que la función $f(x) = [x]$ es no decreciente.

• Como:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow$

• Sabemos que:
 $[x_1] \leq [x_2] \Rightarrow$

• De donde:
 $-[x_1] \geq -[x_2]$



?

Inicio
Lógica Básica

casos posibles de

$\frac{1}{x^2 + 1}$

$-[x]$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

La importancia de que el dominio sea un intervalo

Parecería ser monótona decreciente.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

¡Cuidado!: su dominio no es un intervalo. Construcción interactiva.

Funciones

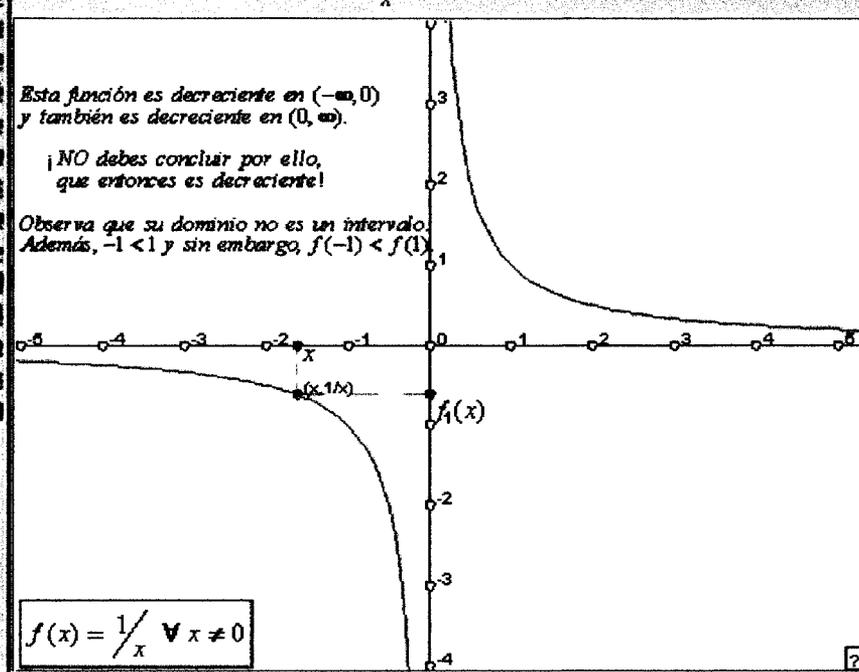
- Concepto de Función
- Función real de un
- Algunas clasificaciones
- Operaciones básicas
- Operaciones avanzadas
- Ejemplos más importantes
- Funciones Directas
- Funciones Inversas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Ejercicios de Funciones
- Funciones más curiosas
- Referencias

Función Hiperbola equilátera
 $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

Esta función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y también es decreciente en $(0, \infty)$.

¡NO debes concluir por ello, que entonces es decreciente!

Observa que su dominio no es un intervalo. Además, $-1 < 1$ y sin embargo, $f(-1) < f(1)$.



?

Inicio
Lógica Básica

casos posibles de

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$= 1 - [x]$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

Funciones pares e impares y algunos teoremas

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Algebraicas
- Funciones trascendentes
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Caracteres de Funciones
- Reglas de Funciones
- Funciones por (C) trazo
- Referencias

Inicio
Lógica Matemática

Funciones pares e impares

Se llaman así porque tienen simetría, respecto al eje vertical o respecto al origen. Así, sus dominios son simétricos al origen, es decir: $x \in \text{Dom}f \Leftrightarrow -x \in \text{Dom}f$.

Función par

f es par,
si: $f(-x) = f(x) \forall x \in \text{Dom}f$
Tiene simetría respecto al eje vertical.

Función impar

f es impar,
si: $f(-x) = -f(x) \forall x \in \text{Dom}f$
Tiene simetría respecto al origen.

Algunos teoremas

- 1) Si g es par y h par, entonces $g \cdot h$ es par:
 $(gh)(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)h(x) = (gh)(x)$
- 2) Si g es par y h impar, entonces $g \cdot h$ es impar:
 $(gh)(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)(-h(x)) = -(gh)(x)$
- 3) Si g es impar y h impar, entonces $g \cdot h$ es par:
 $(gh)(-x) = g(-x)h(-x) = (-g(x))(-h(x)) = (gh)(x)$

Funciones pares

Es par
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Funciones impares

Es impar
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

Demostración interactiva: es par. Construcción interactiva

Funcione

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Algebraicas
- Funciones trascendentes
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Caracteres de Funciones
- Reglas de Funciones
- Funciones por (C) trazo
- Referencias

Inicio
Lógica Matemática

Es par
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Demostraremos que es par, es decir que: $f(-x) = f(x)$.

• Sea:

$$f(-x) =$$

• Aplicando f en $-x$

$$= \frac{1}{(-x)^2 + 1}$$

• Pero $(-x)^2 = x^2$.

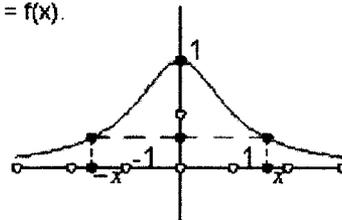
$$= \frac{1}{x^2 + 1}$$

• Así, queda:

$$= f(x) \quad \text{Q.E.D.}$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso



pecto al origen. Así, $x \in \text{Dom}f$.

ar,
 $\forall x \in \text{Dom}f$
origen.

Es par
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Es impar
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

Demostración interactiva: es impar. Construcción interactiva

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de un
- Algunas clasificaciones
- Operaciones básicas
- Operaciones comunes
- Gráficas con axes
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Parciales
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Continuidad de Función
- Derivadas de Función
- Funciones par (2)
- Referencias

Es impar
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

Demostraremos que es impar, es decir que: $f(-x) = -f(x)$.

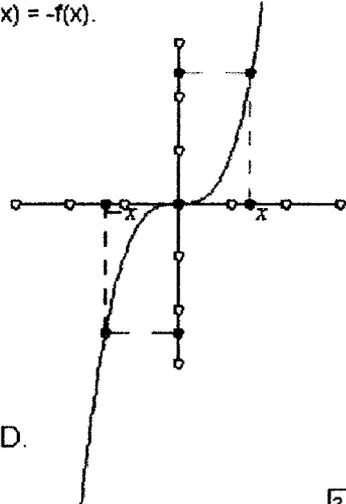
• Sea:
 $f(-x) =$

• Aplicando f en $-x$
 $(-x)^3 =$

• Por leyes de signos:
 $-x^3 =$

• Así, queda:
 $= -f(x)$ Q.E.D.

Mostrar Todo
 Reiniciar paso a paso



Inicio
 Lógica Básica

pecto al origen. Así, $f(x) \in \text{Dom} f$.

or,
 $\forall x \in \text{Dom} f$
 origen.

Funciones pares

Es par
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Funciones impares

Es impar
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

Demostración interactiva: es impar. Construcción interactiva

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de un
- Algunas clasificaciones
- Operaciones básicas
- Operaciones comunes
- Gráficas con axes
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Parciales
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Continuidad de Función
- Derivadas de Función
- Funciones par (2)
- Referencias

Es impar
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Demostraremos que es impar, usando el teorema: impar por par, es impar.

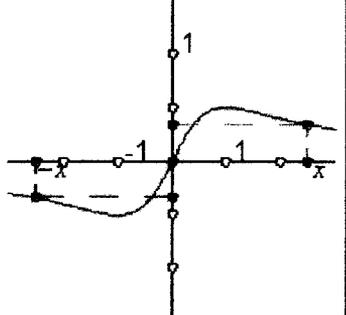
• Como:
 $g(x) = x$ es impar

• Y como:
 $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ es par

• Y como además:
 $g(x)h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

• Entonces:
 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ es impar Q.E.D.

Mostrar Todo
 Reiniciar paso a paso



Inicio
 Lógica Básica

$) = x^3$

$) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Un teorema más: Toda función es suma de una par con una impar
 Cualquiera f se puede expresar de la siguiente forma:

$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

Funciones acotadas y algunos teoremas

Funciones

Curso
Lógica Real

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Inversa de Funciones
- Funciones por (S)ntesis
- Referencias

Funciones acotadas

Se dice que f es acotada si: *existe M tal que: $|f(x)| \leq M \forall x \in \text{Dom}f$.*

De manera equivalente se dice f es acotada si:

existen m y M tales que: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in \text{Dom}f$.

Esta segunda definición permite tipificar si f está acotada superior o inferiormente según existan M o m , respectivamente.

Algunos teoremas

- 1) Si $g(x) \leq f(x) \forall x$ y g no está acotada superiormente, entonces f tampoco lo está.
- 2) Si $f(x) \leq g(x) \forall x$ y g está acotada superiormente, entonces f también lo está.
- 3) Si $f(x) \leq g(x) \forall x$ y g no está acotada inferiormente, entonces f tampoco lo está.
- 4) Si $g(x) \leq f(x) \forall x$ y g está acotada inferiormente, entonces f también lo está.

Sus demostraciones en realidad son sencillas y puedes realizarlas sin mucha dificultad.

Ejemplos

Es acotada
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

No ejemplos

No es acotada
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = [x]$

Es acotada
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$

No es acotada
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

Demostración interactiva: es acotada. Construcción interactiva

Funciones

Curso
Lógica Real

- Concepto de Función
- Función real de va
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación compos
- Ejemplos con oper
- Funciones Inyecti
- Funciones Sobreye
- Funciones Pares e
- Funciones Acotad
- Funciones Periód
- Gráficas de Fun
- Inversa de Func
- Funciones por (S)
- Referencias

Es acotada

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Demostraremos que *existen m y M tales que: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in \text{Dom}f$*

• Sabemos que:

$$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

• Entonces:

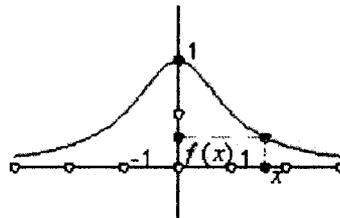
$$x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow$$

• Tomando inversos:

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$$

• Además como $x^2 + 1 > 0$:

$$0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \quad \text{• Q.E.D.}$$



Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = [x]$

Es acotada
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$

No es acotada
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

Funciones periódicas, ejemplos y no ejemplos

Funciones

Inicio
Lógica Booleana

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con iteración
- Funciones Abiertas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Calculador de Funciones
- Funciones por (G) ramos
- Referencias

Funciones periódicas

Si existe $t \neq 0$ tal que $f(x+t) = f(x) \forall x \in \text{Dom}f$, se dice que f es periódica con periodo t . Es condición que: $\forall x \in \text{Dom}f$ entonces $x+t \in \text{Dom}f$. Al mínimo valor positivo de t para el cual se cumple esta propiedad, se le llama el periodo de f .

Si f es periódica significa que sus valores se repiten con regularidad. De manera práctica significa que la gráfica de la función en un cierto dominio, se repite a la derecha y la izquierda.

Ejemplos	No ejemplos
Es periódica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - [x]$	No es periódica (¡es monótona!) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = [x]$
Es periódica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$	No es periódica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x^2)$
Es periódica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{cos}(x)$	No es periódica (¡es monótona!) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

[Ir al graficador de funciones](#)

Demostración interactiva: es periódica. Construcción interactiva

Funciones

Es periódica
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - [x]$

Inicio
Lógica Booleana

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con iteración
- Funciones Abiertas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Calculador de Funciones
- Funciones por (G) ramos
- Referencias

Demostraremos que $f(x+1) = f(x) \forall x$. Es fácil ver que 1 es el mínimo.

• Sabemos que:

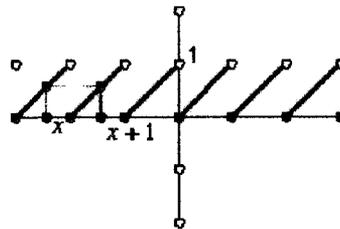
$$n \leq x < n+1 \Rightarrow n+1 \leq x+1 < n+2$$

• Es decir:

$$(1) [x] = n \Rightarrow [x+1] = n+1$$

• Como:

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] =$$



es periódica con el mínimo valor periodo de f .

d. De manera que se repite a la

$$\text{ona)} \\ = [x]$$

$$= \text{sen}(x^2)$$

$$\text{ona)} \\ = x^3$$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

[Ir al graficador de funciones](#)

Demostración interactiva: no es periódica. Construcción interactiva.

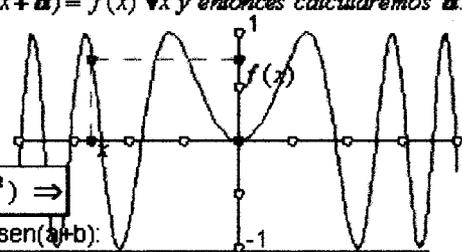
Funciones

- Constante de Fourier
- Función real de variable real
- Algunas álgebra
- Construcción básica
- Construcción avanzada
- Operaciones con expresiones
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráfico de Funciones
- Operador de Funciones
- Funciones por (C) reglas
- Referencias

No es periódica
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x^2)$

Dem: Supondremos que $\exists \alpha$ tal que $f(x+\alpha) = f(x) \forall x$ y entonces calcularemos α .

- Suponiendo que:
 $\text{sen}((x+\alpha)^2) = \text{sen}(x^2) \Rightarrow$
- Desarrollando el binomio:
 $\text{sen}(x^2 + 2x\alpha + \alpha^2) = \text{sen}(x^2) \Rightarrow$
- Aplicando la fórmula para $\text{sen}(a+b)$:
 $\text{sen}(x^2)\cos(2x\alpha + \alpha^2) + \text{sen}(2x\alpha + \alpha^2)\cos(x^2) = \text{sen}(x^2) \Rightarrow$



Inicio
Lógica Booleana

es periódica con el mínimo valor período de f .

1. De manera e repite a la

$\text{sen}(x)$
 $= [x]$

$= \text{sen}(x^2)$

$\text{sen}(x)$
 $= x^3$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Graficador de funciones. Puedes hacer operaciones y editar expresiones.

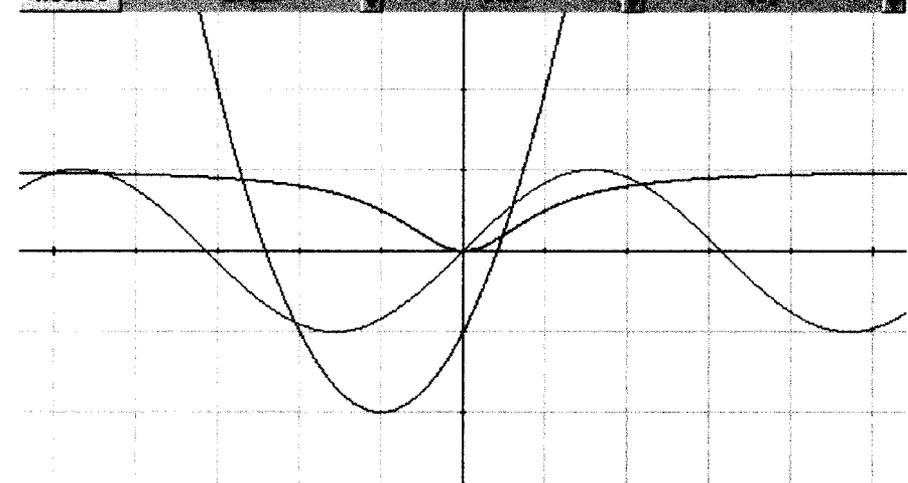
Funciones

- Constante de Fourier
- Función real de variable real
- Algunas álgebra
- Construcción básica
- Construcción avanzada
- Operaciones con expresiones
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráfico de Funciones
- Operador de Funciones
- Funciones por (C) reglas
- Referencias

Inicio
Lógica Booleana

Graficador de funciones

créditos
zona
2.º
3.º
4.º



y=f(x)
y=g(x)
y=h(x)
x^2+2*x-
sen(x)
x^2/(x^2)

Puedes hacer operaciones con f(x), g(x) y h(x). Construye f(x)*g(x)+h(f(x)) dando clic en la casilla de y=f(x), a su derecha teclea *g(x)+h(f(x)) y oprime la tecla Enter para ver su gráfica en rojo. Puedes hacer operaciones en las casillas de y=g(x) o en la de y=h(x).

En las casillas de f=, g= y h=, puedes editar sus expresiones. Da clic en la de f=, y en lugar de x^2, coloca x^3 y oprime la tecla Enter para ver la nueva gráfica de f(x). Si dejas vacía una casilla, se toma como cero.

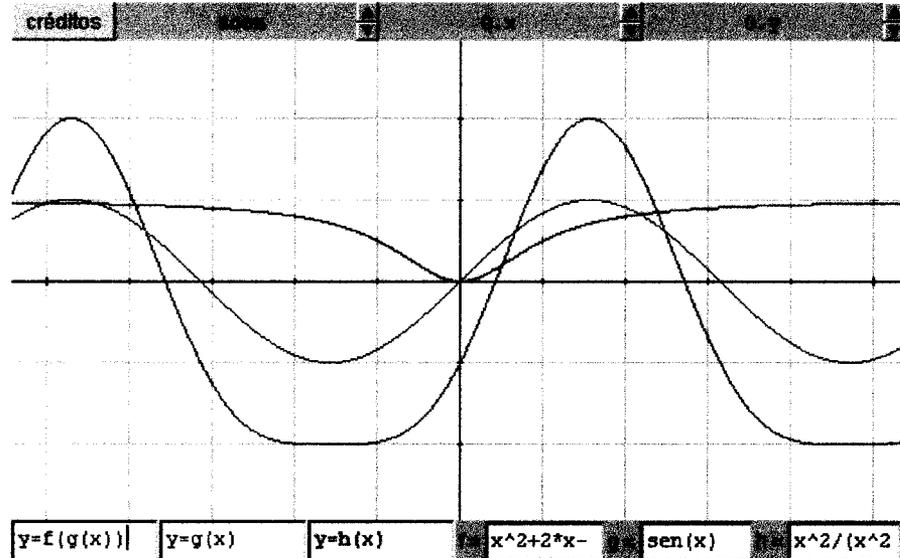
En la primera casilla se presenta una composición. Se puede operar en las otras dos

Funciones

Inicio
Lógica Binaria

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejercicios con operaciones
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Editor de Funciones
- Funciones por Gráficas
- Referencias

Graficador de funciones



Puedes hacer operaciones con $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Construye $f(x)*g(x)+h(f(x))$ dando clic en la casilla de $y=f(x)$, a su derecha teclea $*g(x)+h(f(x))$ y oprime la tecla **Enter** para ver su gráfica en rojo. Puedes hacer operaciones en las casillas de $y=g(x)$ o en la de $y=h(x)$.

En las casillas de $f=$, $g=$ y $h=$, puedes editar sus expresiones. Da clic en la de $f=$, y en lugar de x^2 , coloca x^3 y oprime la tecla **Enter** para ver la nueva gráfica de $f(x)$. Si dejas vacía una casilla, se toma como cero.

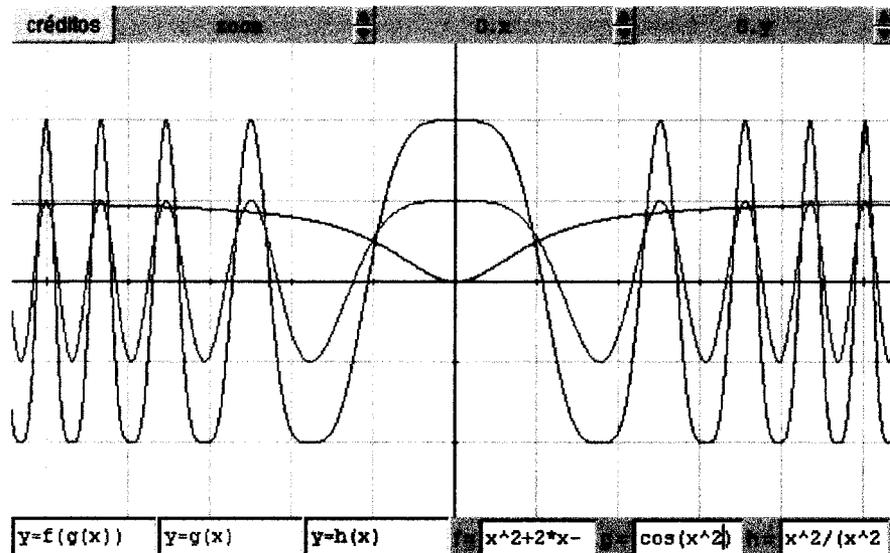
En la casilla $g=$ se cambió la expresión. Una casilla vacía la toma como constante 0.

Funciones

Inicio
Lógica Binaria

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejercicios con operaciones
- Funciones Elementales
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Editor de Funciones
- Funciones por Gráficas
- Referencias

Graficador de funciones



Puedes hacer operaciones con $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Construye $f(x)*g(x)+h(f(x))$ dando clic en la casilla de $y=f(x)$, a su derecha teclea $*g(x)+h(f(x))$ y oprime la tecla **Enter** para ver su gráfica en rojo. Puedes hacer operaciones en las casillas de $y=g(x)$ o en la de $y=h(x)$.

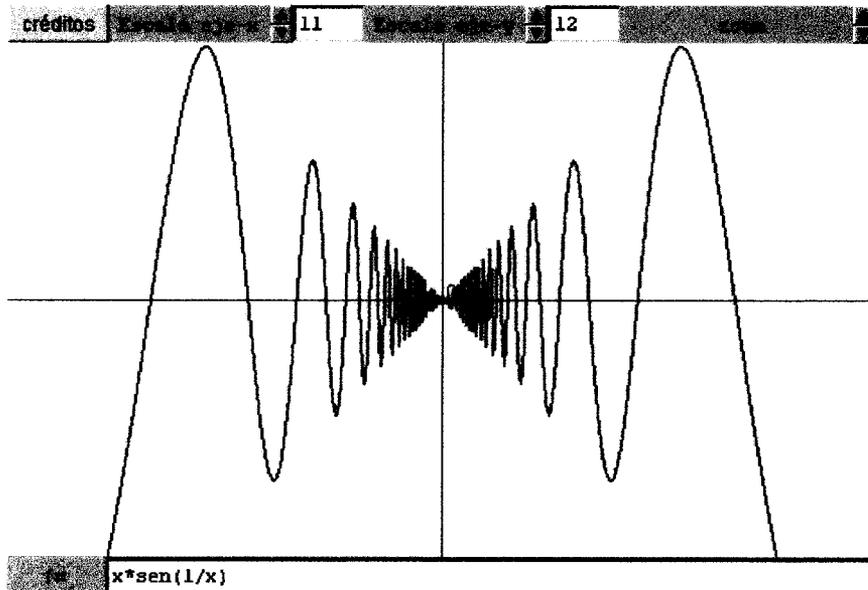
En las casillas de $f=$, $g=$ y $h=$, puedes editar sus expresiones. Da clic en la de $f=$, y en lugar de x^2 , coloca x^3 y oprime la tecla **Enter** para ver la nueva gráfica de $f(x)$. Si dejas vacía una casilla, se toma como cero.

Se pueden cambiar las expresiones en las casillas derechas

Funciones

- Conceptos de Funciones
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ecuaciones con operaciones
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (X) rasgos
- Referencias

Escalador de funciones



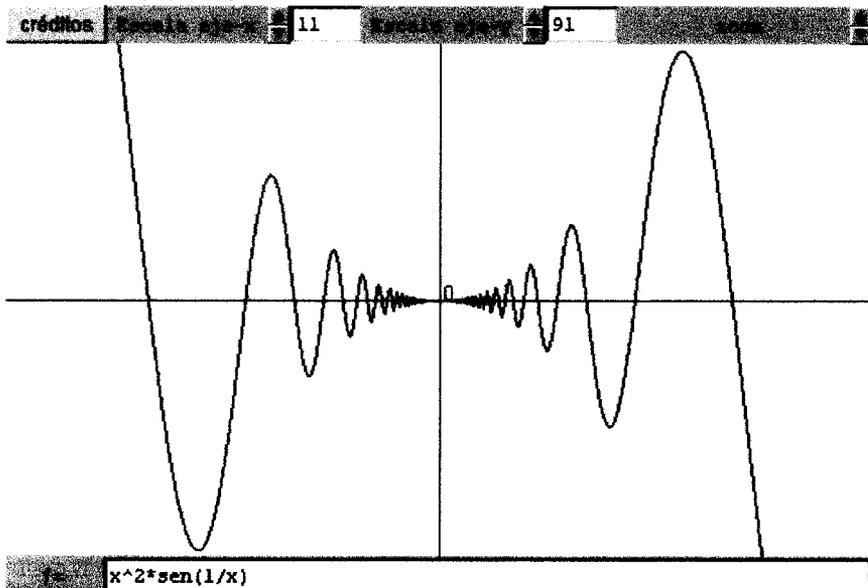
Puedes editar la expresión en f= , y mover la escala en cada uno de los ejes o hacer zoom para ambos.
Puedes por ejemplo dar clic antes de la primera x e introducir: (1/2)* y luego oprimir la tecla Enter.

Se pueden cambiar la expresión de la función.

Funciones

- Conceptos de Funciones
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ecuaciones con operaciones
- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Gráficas de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (X) rasgos
- Referencias

Escalador de funciones



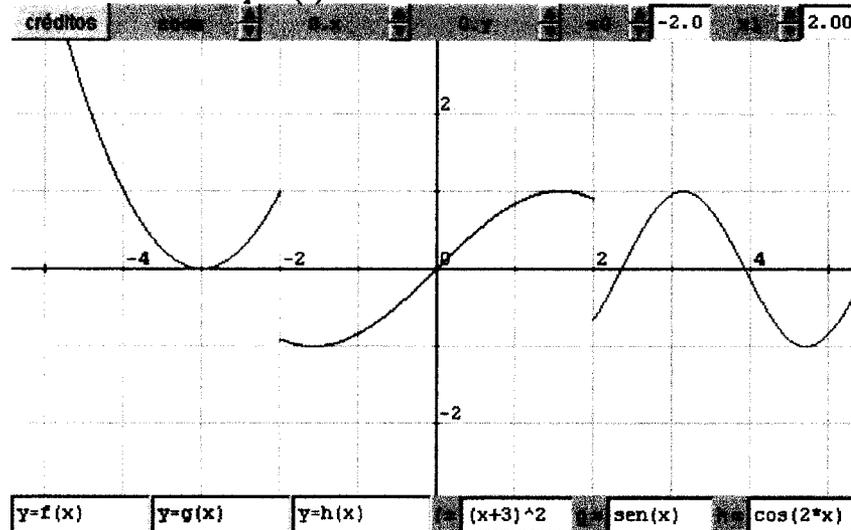
Puedes editar la expresión en f= , y mover la escala en cada uno de los ejes o hacer zoom para ambos.
Puedes por ejemplo dar clic antes de la primera x e introducir: (1/2)* y luego oprimir la tecla Enter.

Un graficador de funciones por (3) ramas

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunas curvas
- Operaciones básicas
- Operación con derivadas
- Gráficas con derivadas
- Funciones Algebraicas
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Resolvidor de Funciones
- Funciones por (3) ramas
- Referencias

Graficador de funciones por (3) ramas



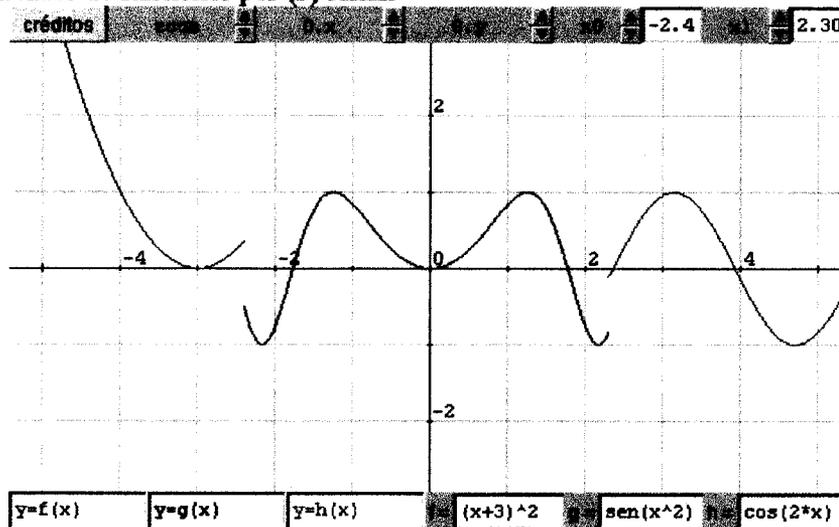
Los puntos x_0 y x_1 , en la parte superior derecha, definen las ramas de la función. Los puedes cambiar dando clic en los pulsadores arriba o abajo. Puedes también cambiar la expresión que gustes en las casillas $f=$, $g=$ o $h=$, para cambiar las ramas de la función. Por ejemplo en $g=$ coloca el cursor después de la x e introduce la expresión x^2 y oprime la tecla **Enter** para ver su gráfica en azul.

Se pueden cambiar los valores de x_0 , x_1 y las expresiones de las funciones

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunas curvas
- Operaciones básicas
- Operación con derivadas
- Gráficas con derivadas
- Funciones Algebraicas
- Funciones Múltiples
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Resolvidor de Funciones
- Funciones por (3) ramas
- Referencias

Graficador de funciones por (3) ramas



Los puntos x_0 y x_1 , en la parte superior derecha, definen las ramas de la función. Los puedes cambiar dando clic en los pulsadores arriba o abajo. Puedes también cambiar la expresión que gustes en las casillas $f=$, $g=$ o $h=$, para cambiar las ramas de la función. Por ejemplo en $g=$ coloca el cursor después de la x e introduce la expresión x^2 y oprime la tecla **Enter** para ver su gráfica en azul.

Referencias tanto bibliográficas, como de Internet.

Funciones

Inicio
Lógica Boleana

- **Concepto de Función**
- **Función real de variable real**
- **Algunas ejemplos**
- **Operaciones básicas**
- **Operación composición**
- **Ejemplos con operaciones**
- **Funciones Inyectivas**
- **Funciones Sobreyectivas**
- **Funciones Pares e Impares**
- **Funciones Acotadas**
- **Funciones Periódicas**
- **Gráficas de Funciones**
- **Derivadas de Funciones**
- **Funciones por (2) ramas**
- **Referencias**

Referencias

En este apartado proporcionamos algunas referencias útiles para la creación de este tema de Funciones, tanto en material impreso como de Internet.

Bibliográficas

Calculus I Michael Spivak Editorial Reverté	Análisis Matemático I Haaser, LaSalle y Sullivan Editorial Trillas
Calculus I Tom M. Apostol Editorial Reverté	Calculus I Edwin Moise Editorial Addison Wesley

En Internet

Sitio de Key Curriculum Press
Innovators in Mathematics Education
(Creadores de The Geometer's Sketchpad)
<http://www.keypress.com>

Compendio temático de Matemáticas
<http://matemática.wallam.com>