UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

PRECÁLCULO INTERACTIVO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

HÉCTOR DE JESÚS ARGUETA VILLAMAR

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS HERNÁNDEZ GARCIADIEGO

MÉXICO, D.F. ENERO DEL 2007

AGRADECIMIENTOS

A mis maestros y amigos
Quienes me han hecho crecer profesionalmente.

A mis padres in Memoriam
Quienes me educaron en el esfuerzo para afrontar retos y problemas.

A mis hermanos e hijos
Con quienes formamos una gran familia de amor y solidaridad.

A Juanita Linares Altamirano
Con quien día a día luchamos amorosamente juntos para salir adelante.

A mis hijos
Quienes me han dado la oportunidad de amar incondicionalmente.

A mi familia política
Por el cobijo y respeto que siempre me brindan.

A mis alumnos que fueron y serán
A quienes especialmente va dedicado este trabajo.

ÍNDICE

Mapa de sitio

Tesis: Precálculo Interactivo

Maestría en Ciencias (Matemáticas)

El objetivo de esta tesis es apoyar al aprendizaje de los temas de Lógica, Números Reales y Funciones, necesarios para un curso de Cálculo Diferencial e Integral.

(ver Documento)

Tesista: Héctor de Jesús Argueta Villamar
argueta@servidor.unam.mx
Facultad de Ciencias
Director de tesis: Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Instituto de Matemáticas.

Lógica

- Introducción
- Tu experiencia cuesta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Los Números Reales

Los Axiomas

Teoremas de Igualdades

Teo.1 Cancelación para Adición
Teo.2 Cancelación para Multiplicación
Teo.3 Unicidad del Neutro Aditivo
Teo.4 Unicidad del Inverso Aditivo
Teo.5 Unicidad del Neutro Multiplicativo
Teo.6 Unicidad del Inverso Multiplicativo
Teo.7 Todo real por cero, es cero
Teo.8 El inverso aditivo de a
Teo.9 Más por menos, da menos
Teo.10 Menos, menos a, es a.
Teo.11 Menos por menos, da más
Teo.12 ab = 0 => a = 0 o b = 0
Teo.13 Igualdad de cuadrados

Otros modelos
Ejercicios

El concepto de número

Teoremas de Desigualdades

Teo.14 Cancelación para Adición
Teo.15 Suma de menores es menor ...
Teo.16 Inversos aditivos invierten ...
Teo.17 Multiplicar por un negativo
Teo.18 Recíproco del Axioma O4
Teo.19 Inversos multiplicativos
Teo.20 El cuadrado de a, menor que b
Teo.21 El cuadrado de a, mayor que b

Teoremas de Valor Absoluto

Teo.22 El valor absoluto es mayor o ...
Teo.23 El valor absoluto de un producto
Teo.24 Valor absoluto de a, mayor que b
Teo.25 Valor absoluto de a, menor que b

Construcciones Interactivas
Referencias

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Biyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (3) ramas
- Referencias

Axiomas de los Números Reales

Nombre	Adición	Multiplicación
Cerradura	A1) $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ a+b \in \mathbb{R}$	M1) $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ ab \in \mathbb{R}$
Conmutativa	A2) $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ a+b=b+a$	M2) $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ ab=ba$
Asociativa	A3) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\ a+(b+c)=(a+b)+c$	M3) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\ a(bc)=(ab)c$
Neutro	A4) $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\ 0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $a+0=0+a=a$	M4) $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\ 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0$ *tal que* $a1=1a=a$
Inverso	A5) *Dado* $a \in \mathbb{R},\ \exists -a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a+(-a)=(-a)+a=0$	M5) *Dado* $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$ *tal que* $aa^{-1}=aa^{-1}=1$
Distributiva	D) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\ a(b+c)=ab+ac$	
	Orden	
Tricotomía	O1) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, *se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones:* $a=b,\ a<b$ o $b<a$	
Transitiva	O2) *Si* $a<b$ y $b<c$, *entonces* $a<c$	
Preserva Orden bajo Adición	O3) *Si* $a<b$ *entonces* $a+c<b+c\ \forall\, c \in \mathbb{R}$	
Preserva Orden bajo Multiplicación $(0<c)$	O4) *Si* $0<c$ y $a<b$ *entonces* $ac<bc$	
Axioma del Supremo (da clic)	S)(En Otros modelos encontrarás su enunciado y algunas aplicaciones)	

Construcciones Interactivas

Teoremas de Igualdades

Teo.1 Cancelación para Adición
Teo.2 Cancelación para Multiplicación
Teo.3 Unicidad del Neutro Aditivo
Teo.4 Unicidad del Inverso Aditivo
Teo.5 Unicidad del Neutro Multiplicativo
Teo.6 Unicidad del Inverso Multiplicativo
Teo.7 Todo real por cero, es cero
Teo.8 El inverso aditivo de a
Teo.9 Más por menos, da menos
Teo.10 Menos, menos a, es a.
Teo.11 Menos por menos, da más
Teo.12 ab = 0 => a = 0 o b = 0
Teo.13 Igualdad de cuadrados(=>)
Teo.13 Igualdad de cuadrados(<=)

Teoremas de Desigualdades

Teo.14 Cancelación para Adición
Teo.16 Inversos aditivos invierten ...
Teo.17 Multiplicar por un negativo
Teo.18 Recíproco del Axioma O4
Teo.19 Inversos multiplicativos
Teo.20 El cuadrado de a, menor que b(=>)
Teo.20 El cuadrado de a, menor que b(<=)
Teo.21 El cuadrado de a, mayor que b(=>)
Teo.21 El cuadrado de a, mayor que b(<=)

Teoremas de Valor Absoluto

Teo.23 El valor absoluto de un producto
Teo.24 Valor absoluto de a, mayor que b(=>)
Teo.24 Valor absoluto de a, mayor que b(<=)
Teo.25 Valor absoluto de a, menor que b(=>)
Teo.25 Valor absoluto de a, menor que b(<=)

Otras Construcciones

Un sistema de ecuaciones lineales
Una desigualdad cuadrática interactiva
Una desigualdad cuadrática paso a paso
El valor absoluto de una suma (Ejercicio 12)

Otros Modelos

Los Números Naturales

Axiomas
Cancelación para la Adición
Inducción Matemática

Los Números Enteros

Axiomas
Cancelación para la Multiplicación
Algunas proposiciones

Los Números Racionales

Axiomas y algunas proposiciones

Los Números Irracionales

Raíz de 2 y sus consecuencias

Los Reales y el Axioma del Supremo

El axioma del supremo
Algunas proposiciones

La Cardinalidad

Cosas de Infinitos

Otros Campos

Los enteros módulo n
Más campos

El concepto de número

El concepto de número (natural)
Los números enteros
Las fracciones
Los inconmensurables
Conclusiones

PRECÁLCULO INTERACTIVO

Maestría en Ciencias (Matemáticas)
Tesista: Héctor de Jesús Argueta Villamar
Director de tesis: Dr. Carlos Hernández Garciadiego

1. Contexto

La computadora es una herramienta que día con día está demostrando su utilidad en casi todos los ámbitos de la actividad humana. En particular, en los procesos de enseñanza y aprendizaje ya se aplica de manera muy variada, tanto de manera presencial como a distancia, y sin lugar a dudas, se vislumbra un enorme potencial, sobre todo con el desarrollo tan impresionante de Internet.

Actualmente, en el campo de las matemáticas se cuenta con software, que posibilita un mejor aprovechamiento de la creatividad, experiencia, madurez y conocimiento matemático de quien lo usa. Además, entre otras cosas, facilita construir material didáctico interactivo que permite visualizar de muchas maneras resultados que se antojan complicados, dejando así más tiempo para el análisis y la profundización de los conceptos.

Especialmente para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la utilización de las computadoras es de gran relevancia por las siguientes consideraciones:

- La necesidad de las matemáticas en diversas ramas del conocimiento, la hacen ser una materia fundamental en el currículo universitario.
- Las matemáticas en sí mismas, forman parte del desarrollo intelectual y cultural en las sociedades modernas.
- En general, en los distintos niveles educativos, las matemáticas forman parte de un tronco básico, requisito indispensable para otras materias.
- El índice de reprobados más alto, entre todas las materias, lo tienen las matemáticas.
- Es observable el bajo rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes de nivel medio y superior
- El alto nivel de abstracción que requieren, hacen más necesaria la utilización de recursos didácticos que apoyen su enseñanza y aprendizaje.
- El potencial que ofrecen las computadoras es superior a cualquier otro recurso didáctico hasta ahora utilizado.
- Actualmente, la modernización de la enseñanza pasa por las computadoras y casi cualquier centro o escuela cuenta al menos, con un pequeño centro de cómputo.

2. Motivación ¿Porqué hice este trabajo?

Teniendo como marco el contexto anterior, mismo que he podido palpar a lo largo de varios años de estar trabajando en proyectos relacionados con la aplicación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, me gustaría señalar las razones que me han conducido a desarrollar este trabajo de **Precálculo Interactivo**.

2.1 En mis años estudiantiles

Desde aquellos mis años de estudiante de la licenciatura en física y matemáticas, me encontré de pronto con diversos cursos, en particular el de cálculo 1 en donde abundaban los problemas de tener que demostrar esto o aquello y, lo aprendíamos a hacer por imitación o por repetición, pero sin una conciencia clara del significado lógico de lo que hacíamos.

Aún más, lo hacíamos con la ignorancia de que lo que aplicábamos estaba basado en métodos de demostración, justificados mediante toda una estructura de equivalencias de proposiciones lógicas.

Frecuentemente los problemas eran de tal magnitud, que de pronto no teníamos ni la más remota idea de cómo atacarlos, de qué método podíamos utilizar y esto se acentuaba más aún, cuando dichos problemas se resistían a la aplicación de un método directo. No siempre se nos ocurría que podíamos suponer falsa la conclusión y lógicamente construir alguna contradicción.

Toda esa estructura lógica para el razonamiento y para construir los métodos de demostración, de inicio la desconocíamos, su lenguaje además nos era completamente ajeno y es obvio que de esa manera, el problema central de "demostrar" nos sonaba como un reto casi imposible de superar. Esta estructura y su lenguaje los fuimos descubriendo después de muchos apuros y contratiempos, tal vez hasta de fracasos irreparables.

Muchas veces cuando veíamos a nuestros maestros realizar una demostración, nos parecía más bien producto de su genialidad que de un mecanismo lógico, aplicable desde luego con los conocimientos necesarios y con un poco de aquella intuición y genialidad que da la práctica.

Esto abonaba en nuestro joven e inexperto pensamiento, la necesidad de adquirir genialidad, pero si ni siquiera sabíamos donde comprarla y más bien nos pasaba por la mente que tal vez, éste no era nuestro camino o vocación.

Nuestro primer contacto con el ejercicio de hacer demostraciones, en estas circunstancias, chocaba fuertemente con nuestra experiencia adquirida en los años del bachillerato. No teníamos antecedentes al respecto y para cualquier desarrollo más o menos complicado, siempre contábamos con algún esquema a seguir, una fórmula o una secuencia de pasos más o menos definida. Este hecho se magnificaba al desconocer las nuevas herramientas en la estructura lógica, previo a verse inmerso en el ejercicio de hacer demostraciones.

2.2 En mis primeros años de experiencia docente

De manera casi automática durante mis primeros años como docente de matemáticas reproduje casi el mismo esquema que yo aprendí en mis años estudiantiles, y tal vez, casi actuando la genialidad al realizar una demostración.

Nunca recuerdo muy buenos resultados en esos tiempos y desde luego que me preocupaba porque sí deseaba ser buen maestro y compartía esta mi preocupación con otros compañeros maestros.

Reflexionando personalmente y en grupo, no tardamos en descubrir que aquello que a nosotros nos había aquejado, lo reproducíamos actualmente con nuestros alumnos. Sin embargo, tardamos un poco más en hacer conciente que no bastaba cambiar el esquema, sino además brindar conocimientos que no tuvimos nosotros y que tienen que ver con la estructura lógica para comprender los métodos de demostración.

Evidentemente no pensábamos que esto haría que desaparecieran las dificultades y que el ejercicio de demostrar se volviera un hecho casi rutinario, pero sí estábamos seguros de que habría más armas y se volvería más conciente el ejercicio de demostrar, que sólo se aprende haciendo y haciendo.

Nos esforzamos por introducir el tema de Lógica, concentrando la atención en los métodos de demostración, aún de manera extracurricular y posteriormente intentamos escribir algunas notas sobre el tema, preocupados por los resultados tan desastrosos en el primer año de la licenciatura.

En ese tiempo, los años 1971, encontramos tres grandes fuentes de inspiración en los siguientes libros:

Manual de Lógica para estudiantes de matemáticas
Gonzalo Zubieta Russi.
Serie de Matemáticas
Trillas (1968)

Lógica Cuaderno 12
National Council of Teacher´s of Mathemátics.
Temas de Matemáticas
Trillas (1970)

Primer Curso de Lógica Matemática
Patrick Suppes y Shirley Hill
Reverté (1968)

Con tales referencias, tan novedosas en aquellos tiempos, al menos sentíamos que nuestra preocupación no sólo era nuestra, aquello que pensábamos, se resumía en las palabras de Gonzalo Zubieta Russi:

> *"Por la experiencia adquirida en diversos cursos de matemáticas he podido observar que muchas de las dificultades con que tropieza el principiante se deben a la falta de familiaridad con las técnicas de orden lógico, y también gramatical, que son habituales en cualquier rama de dicha ciencia"*

No obstante la importancia de opiniones como la anterior, el tema referido nunca llegó a ser parte del currículo universitario.

2.3 En mis siguientes años de experiencia docente

Posterior a esta primera experiencia docente y estando convencido de la importancia de estos temas de lógica, en mis cursos iniciales de cálculo en la licenciatura, siempre los he incluido de manera extracurricular.

A mi paso por diversas Facultades de Ciencias y aún de Ingeniería, durante mis 36 años como docente de matemáticas, me he percatado de que en ninguno de los programas de estudio se encontraba, ni se encuentra incluido, no obstante que en todos los casos se tiene considerado que los estudiantes realicen demostraciones diversas.

No obstante lo anterior, sigo pensando que debería ser incluido de manera curricular. Actualmente en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en mis cursos de Cálculo Diferencial e Integral I, sigo trabajando este tema de manera extracurricular, antes de empezar con el tema de Números Reales y al menos creo, que a los alumnos les resulta menos abrupto el ejercicio de hacer demostraciones y se evidencia con sus participaciones en clase.

También aquí podemos destacar las palabras de Gonzalo Zubieta Russi:

> *"Personalmente he comprobado que el estudio de cualquier disciplina matemática, llega a ser mucho más ameno y provechoso para un estudiante a quien previamente se le haya entrenado en el material lógico ..."*

Comparto desde luego la opinión de que llega a ser mucho más provechoso, no sé que tan ameno, pero lo cierto es que cuando uno logra entender, se motiva a continuar y se le dificulta menos la comprensión y asimilación, de los métodos y con ello, la automatización en sus aplicaciones.

2.4 En mi experiencia docente con la tecnología

Hace ya unos 16 años, que empecé a conocer el manejo de algunos programas de software matemático y quiero decir que me abrió un gran panorama, me cautivó la sensación visual y las amplias posibilidades de hacer cálculos simbólicos y representaciones gráficas.

Desde entonces, junto con otros compañeros, nos entusiasmamos con la idea de aplicar lo que fuésemos aprendiendo y descubriendo, en la enseñanza de la matemáticas. Así redactamos el proyecto de "Enseñanza de las Matemáticas Asistida por computadora" que contemplaba una gran diversidad de actividades muy ambiciosas, pero que marcaban un nuevo rumbo en nuestras actividades docentes.

Cada descubrimiento era maravilloso, fuimos acumulando software, lo estudiábamos, lo tratábamos de compartir, impartimos cursos, diplomados, escribimos manuales, dábamos charlas donde se pudiera, lo aplicábamos en la medida de lo posible en nuestros cursos, pero en el camino vimos la necesidad de desarrollar ideas propias y representarlas en la computadora.

Al plantearse producir, la pregunta obligada era ¿qué me gustaría producir?, pero esta pregunta iba íntimamente ligada a los conocimientos y al desarrollo del cómputo, al dominio y posibilidades del software con el que deseara uno hacer sus desarrollos, a la experiencia y creatividad y a las limitaciones propias en capacidad y tiempo.

Hicimos algunos desarrollos, que no sólo nos gustaron y que creemos son de mucha utilidad, sino que lo más importante es que nos entrenaron para tener mejores ideas, conocimientos, madurez y habilidades para representar algunas ideas propias para la enseñanza de las matemáticas, en la computadora.

2.5 Mi experiencia docente y con la tecnología en mi tesis

De esta manera se recrea en mi mente la idea posible, de poder representar en la computadora un curso de **Precálculo Interactivo** con los temas que desde siempre como estudiante y docente me parecieron de suma importancia para el buen comienzo de una licenciatura, sobre todo en ciencias matemáticas.

La idea posible, de representar un curso de **Precálculo Interactivo** en la computadora, no debería apartarse de la formalidad de las matemáticas, pero el reto era representarla de manera interactiva, para que el usuario pudiera manejar y reflexionar los elementos paso a paso y además debería contener representaciones gráficas que pudieran ayudar a una mejor comprensión de los conceptos.

Esta idea posible, de un curso de **Precálculo Interactivo**, debería comenzar por el tema de **Lógica**, centrado en los Métodos de Demostración, para dar cuerpo a aquella convicción que me viene acompañando desde los años 1971 en que hiciera conciente esta necesidad y que hasta ahora, que yo sepa, no existe incorporado al currículo de ninguna Escuela de Ciencias, al menos en nuestro país.

También debería contener el tema de **Números Reales** de acuerdo con los programas de estudio de éstas licenciaturas, pero con demostraciones formales e interactivas, justificando cada paso con los axiomas, definiciones o teoremas previos correspondientes y que explicaran los métodos de demostración aplicados en cada caso. Igualmente debería contener ilustraciones gráficas interactivas para una mejor comprensión de los teoremas o resultados diversos.

Así mismo debería contener el tema de **Funciones**, igualmente con demostraciones formales para los diversos tipos de funciones, así como con ilustraciones gráficas, todas ellas interactivas. Un aspecto importantísimo que deseábamos lograr y se logró, fue tener, gracias al Proyecto Descartes, un graficador y a la vez operador de funciones que funcionara en línea.

No obstante que estos dos últimos temas son parte del currículo en todas las escuelas, la riqueza que proporciona el hecho de tenerlas en la computadora de manera interactiva, con demostraciones formales e ilustraciones gráficas también interactivas, es de una gran riqueza y ayuda, sobre todo para los estudiantes.

En un apartado más adelante hablaremos de la importancia que tiene un proyecto interactivo para la enseñanza, por ahora baste decir, que con un muchito más de trabajo **Precálculo Interactivo** podría servir para la construcción de un curso de **Cálculo Diferencial e Integral I**, formal e interactivo, a distancia que pudiera servir de apoyo para cualquier Licenciatura en Matemáticas y en áreas afines.

3. ¿A quién va dirigido?

3.1 Principalmente a estudiantes

El programa **Precálculo Interactivo** está dirigido principalmente a estudiantes y en particular, para aquellos inscritos en el primer año de una licenciatura en ciencias o en áreas afines y también para aquellos que aspiran a cursar una licenciatura en estas áreas.

Para argumentar esta idea, es importante repasar tema por tema de los contenidos en **Precálculo Interactivo**, ya que se advierten en cada caso ciertas particularidades, que determinan el impacto a considerar.

a) El tema de **Lógica** está diseñado con la idea de establecer la estructura lógica mínima necesaria para comprender lo que significa demostrar y para asimilar los métodos de demostración con los que se puede contar. Incluye además una buena variedad de ejemplos de cada método que se pueden ejecutar paso a paso de manera interactiva.

Este tema, con la orientación dada hacia los métodos de demostración, en general no forma parte del currículo del bachillerato ni tampoco de la licenciatura, así que para todos aquellos estudiantes que requieran en su carrera de hacer demostraciones matemáticas será de una grandísima utilidad y podrá ser estudiado incluso de manera autodidacta.

Tan sólo en nuestro país se contarían por miles, pensando en los estudiantes del primer semestre de las escuelas de ciencias e ingenierías, pero además como este material es posible subirlo a Internet, la utilidad podría potenciarse enormemente. Hasta el momento podemos asegurar que no existe otro material con las características del que estamos presentando.

b) El tema de **Números Reales** está diseñado con la idea de cubrir el tema curricular de un curso formal de Cálculo Diferencial e Integral I, en particular en una escuela de ciencias.

Se establece un tratamiento axiomático de los números reales y de ahí se demuestran formalmente de manera interactiva y paso a paso, una serie de resultados como las leyes de cancelación, los teoremas de unicidad, las leyes de los signos y una gran diversidad que permitirán resolver ecuaciones y desigualdades con y sin valor absoluto, de manera estrictamente formal.

Igualmente se incluyen construcciones gráficas interactivas que permitirán a los estudiantes la mejor comprensión de los teoremas al poder manipular diversas situaciones de los mismos.

En el tema de **Números Reales** también se incluyen los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales con una importante cantidad de resultados demostrados con toda la formalidad matemática, pero de manera interactiva y paso a paso.

Están incluidos los Axiomas de Peano, el Principio del Buen Orden y su equivalente Principio de Inducción Matemática con ejemplos e ilustraciones interactivas. En los Enteros se pueden encontrar diversas proposiciones que relacionan al cuadrado de un entero consigo mismo y en los racionales las propiedades de campo y de densidad.

Se propicia el descubrimiento de los irracionales y se trabaja un poco sobre las ideas de los infinitos. Igualmente se tratan los Enteros Módulo n, para descubrir otras estructuras algebraicas que pueden ser campos o no.

En este tema de **Números Reales** ocupa un lugar especial, el Axioma del Supremo como distintivo del campo de los números reales y algunas consecuencias importantes como la propiedad arquimediana y la no acotación de los naturales.

Se incluyen igualmente ejercicios y algunas notas históricas del concepto de número, incluyendo una reciente investigación que responde a la pregunta ¿Es innato el concepto de número?

En resumen, el tema de **Números Reales** contiene el programa curricular en Cálculo Diferencial e Integral I de cualquier escuela de ciencias en nuestro país y tal vez de algunas escuelas de ingeniería, con algunos extras interesantes, pero además con los recursos de interactividad gráficos, de referencias en ventanas flotantes y de demostraciones paso a paso.

Por lo anterior, este tema sería de gran apoyo para los estudiantes que se encuentren estudiando el tema de **Números Reales** en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, sobre todo porque podrían detenerse paso a paso, para entender las demostraciones, las justificaciones formales y los métodos a utilizar, así como la posibilidad de recurrir a representaciones gráficas interactivas que les permitan visualizar los teoremas.

Es posible que fuera de mucha utilidad para un estudio autodidacta y tal vez con un poco más de trabajo, para un curso en línea.

c) El tema de **Funciones** está diseñado con la idea de cubrir el tema curricular de un curso formal de Cálculo Diferencial e Integral I, en particular en una escuela de ciencias, sin embargo, es un tema de mayor universalidad que los de reales o lógica.

El tema de **Funciones** se estudia con distinta amplitud y profundidad desde el Bachillerato hasta las escuelas profesionales, pero inclusive no sólo en las áreas de las ciencias físico matemáticas.

En este tema de **Funciones** se parte desde la definición, ejemplos, no ejemplos y operaciones, hasta los diversos tipos de funciones, biyectivas, monótonas, acotadas, pares, impares, periódicas y se incluyen un graficador y a la vez operador de funciones, un escalador de funciones y un graficador de funciones por (3) ramas. Contiene demostraciones formales e interactivas paso a paso y construcciones gráficas interactivas, como en los demás temas.

Por ello este tema de **Funciones** puede ser de utilidad para un rango más amplio de estudiantes, pero de manera parcial o total. En el bachillerato y en algunas otras áreas, por ejemplo, podrá ser muy útil, tal vez sin las demostraciones, pero en todos los casos de seguro el graficador y operador tendrá gran aceptación.

Es muy probable que este tema, como los anteriores se pueda estudiar de manera autodidacta y que con un poco más de trabajo sirva para un curso en línea.

Por todo lo dicho anteriormente en este apartado, pensamos que nuestro destinatario principal es el estudiante, en particular del primer año de una escuela de ciencias y de áreas afines, pero que no excluye su utilidad para otros estudiantes o para otros sectores,

3.2 También a los profesores

Otros destinatarios del programa **Precálculo Interactivo** son los profesores, quienes dependiendo del nivel y área en la que trabajen, pueden utilizarlo total o parcialmente, como un auxiliar para sus clases, para dejar algunas tareas, para que sus estudiantes repasen algunos temas o inclusive para utilizarlo en sus clases presenciales.

Lo anterior es posible, porque cuentan con un material bien organizado, interactivo, formal, con demostraciones interactivas paso a paso, con construcciones gráficas interactivas que les permiten presentar diversas situaciones para los teoremas y que pueden acceder fácilmente al tema específico de su interés y a sus temas relacionados.

Evidentemente a los profesores del curso de **Cálculo Diferencial e Integral I** en cualquier escuela de ciencias o áreas afines, les permitiría explotarlo cabalmente y utilizarlo de acuerdo a sus necesidades.

En nuestros cursos de Cálculo diferencial e Integral I en la Facultad de Ciencias de la UNAM, lo hemos utilizado tanto como material de apoyo para los estudiantes, como para impartir alguna clase con buenos resultados. Los estudiantes al menos, pueden estar más atentos, sabiendo que el material está disponible en cualquier momento.

3.3 También a las instituciones educativas

A las instituciones les podría ser de muchísima utilidad para observar un modelo interactivo, formal que les daría pauta para construir sus cursos en línea, en particular el de **Cálculo Diferencial e Integral I**.

De hecho, los applets correspondientes a las demostraciones paso a paso, están de tal manera sistematizados, que es posible reutilizarlos de manera sencilla, para cualquier otra demostración. En el trabajo se incluyen applets de muestra para demostraciones de 3, 4 o más pasos.

En resumen y como ya lo apuntábamos anteriormente, este material de **Precálculo Interactivo** podría servir de base para la construcción en particular de un curso de **Cálculo Diferencial e Integral I**, formal e interactivo, a distancia que pudiera servir de apoyo para cualquier Licenciatura en Matemáticas y en áreas afines y en general, las instituciones podrían verlo como un modelo para otros cursos en línea.

4. Metodología de aprendizaje

En este apartado importa resaltar la importancia de los temas en **Precálculo Interactivo** y cómo es que este trabajo hace aportaciones al proceso de enseñanza y aprendizaje, con la ayuda de la tecnología. En este sentido, primero hablaremos de los temas, luego de las aportaciones didácticas y por último de la importancia de la tecnología.

4.1 Los temas

Precálculo Interactivo contiene tres temas fundamentales para que un estudiante pueda tener éxito en un curso de Cálculo Diferencial e Integral I, en cualquier licenciatura de matemáticas o áreas afines: **Lógica**, **Números Reales** y **Funciones**.

a) El primero de ellos, **Lógica**, contiene los elementos básicos para comprender lo que significa demostrar y para asimilar el nuevo lenguaje y los diferentes métodos de demostración con los que se puede contar.

Este tema de Lógica no aparece, al menos con esta orientación, entre los temas del bachillerato, ni tampoco en el primer año de la licenciatura, así que de entrada esta situación la convierte de facto en una aportación válida, que cobra además mayor relevancia a la luz de los temas que siguen, en dónde se exige al por mayor, hacer demostraciones de una gran cantidad de resultados.

Además de lo anterior, que ya de por sí es importante, aprovechando la tecnología, se han logrado construir una serie de características didácticas, que facilitan el aprendizaje del tema. Dichas características serán motivo de un apartado más adelante, pero tan sólo diremos que permite al usuario contar con ejemplos y construcciones interactivas que pueden ser manipuladas a gusto, al ritmo que se quiera y cuantas veces se quiera.

b) Los siguientes dos temas, **Números Reales** y **Funciones**, no obstante que son curriculares en las licenciaturas de matemáticas y en áreas afines, lo que los hacen diferentes en esta tesis y por la misma razón aportaciones válidas, son la gran variedad de características didácticas que permiten al usuario mayores facilidades para su aprendizaje y que inclusive se podrían abordar de manera autodidacta.

Por mencionar sólo algunas de estas características que trataremos con mayor detalle en un siguiente apartado, diremos que ante la demostración de cualquier teorema o resultado, se tienen siempre presentes, la idea de cómo abordar la demostración, el método de demostración a utilizar, los axiomas, los resultados previos necesarios y el hecho de que el usuario puede desplegar la demostración paso a paso, permitiéndole analizar con detenimiento el paso dado y las razones que se esgrimen en de cada uno de los pasos realizados.

Otra de las características importantes que hacen diferentes a estos temas en **Precálculo Interactivo**, es que siempre, o casi siempre, es posible acceder a una construcción gráfica interactiva, que permite al usuario, manipular a gusto, para considerar diversas situaciones del teorema o resultado y así, tener una idea visual del mismo.

4.2 Las características didácticas

En este apartado será muy importante resaltar aquellas características de **Precálculo Interactivo** que aportan al proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular en los temas que contiene.

- **Precálculo Interactivo** es un libro digital interactivo, cuyos temas pueden ser abordados secuencialmente o en el orden que desee o que requiera el usuario. En cualquier caso, las formas de navegación son estándar y muy intuitivas.

- Todas las páginas en cada tema, cuentan con una explicación sucinta, cuidando el rigor matemático y en caso de ser necesario, se tienen botones o ligas a construcciones interactivas, a demostraciones interactivas, a resultados anteriores o a algunos conceptos necesarios, sin tener que abandonar la página de lectura.

- En todas las páginas que contienen demostraciones, el usuario siempre cuenta con una idea de cómo intentarla, el método de demostración a utilizar y además puede desplegarla paso a paso o toda de una vez. En cualquiera de los casos, tendrá a la vista los argumentos que se esgrimen en cada paso de la demostración y los axiomas, teoremas, definiciones o resultados previos, necesarios en la misma.

- Casi todos los teoremas o resultados importantes, cuentan con construcciones interactivas asociadas, en donde el usuario puede manipular y visualizar diversas situaciones del teorema o resultado en cuestión y así permitirse una mejor comprensión del mismo.

- En toda construcción interactiva asociada a un teorema o resultado, se cuenta siempre con la demostración del mismo, sin necesidad de abandonar la página de lectura.

- En varios casos, es posible contrastar algunas demostraciones con otras, por ejemplo en los reales y en los naturales se cumplen las leyes de cancelación, sin embargo la demostración en los reales, no es posible reproducirla en los naturales, por la falta de inversos. Así en la página de los naturales, se tiene accesible la demostración en los reales, sin abandonar la página de lectura.

- También en varios casos es posible tener diversos resultados concatenados en una misma página y acceder a sus demostraciones o construcciones interactivas asociadas, sin abandonar la página de lectura. Así por ejemplo, se presentan diversos resultados sobre irracionales o sobre aplicaciones del Axioma del supremo.

- Las características anteriores aportan a la didáctica de las matemáticas en varios aspectos, entre ellos, los siguientes: propician el aprendizaje activo por parte del estudiante, sicológicamente lo predisponen a actuar para obtener una respuesta, le permiten analizar detenidamente la respuesta a cada una de sus acciones y siempre tendrá a la mano los recursos necesarios para analizar globalmente los resultados.

- Las características didácticas mencionadas y más, podrían aplicarse a cualquier otro tema con el uso de la tecnología y con los conocimientos matemáticos y de cómputo adecuados. Por ello estas aportaciones no son exclusivas de los temas que tratamos en **Precálculo Interactivo**.

4.3 La importancia de la tecnología

El uso de las computadoras, de los medios de comunicación como Internet, los pizarrones electrónicos y de los medios de distribución como los discos compactos o digitales de video, ayudan a enriquecer y potenciar de manera notable los procesos de enseñanza y aprendizaje, en cualquier área del conocimiento, en particular de las matemáticas.

Mediante el uso de recursos gráficos, de animación, sonido e interacción es posible crear aplicaciones sumamente atractivas para Internet, para el aula con o sin pizarrones electrónicos y/o para discos compactos o digitales de video, que tengan ventajas como las siguientes:

- **Propiciar metodologías activas**

Los programas interactivos pueden servir para propiciar metodologías activas, en donde el estudiante pase a ser el protagonista de su propio aprendizaje.

- **Permitir al usuario avanzar a su propio ritmo**
  Con los programas interactivos cada usuario puede establecer su propio ritmo de trabajo y avanzar según vaya comprendiendo los temas previos en cada momento.

- **Posibilitar un aprendizaje individualizado o cooperativo**
  Los programas interactivos permiten que el usuario pueda abordar su aprendizaje de manera individual o colectiva, dada la situación de que el material puede estar disponible en cualquier momento y en cualquier lugar.

- **Disponer del material en todo momento y en cualquier lugar**
  Los diversos medios de comunicación y distribución de los programas interactivos permiten que el usuario pueda tenerlos a la disposición en todo momento y en cualquier lugar para posibilitar su estudio.

- **Repetir cuantas veces se requiera un proceso**
  Las computadoras no se cansan, ni tienen reacciones adversas cuando el usuario no entienda un proceso, como puede ser una demostración matemática, así que el usuario podrá repetir sus procesos cuantas veces lo requiera.

- **Construir cursos o temas a distancia, presenciales o semipresenciales**
  Los programas interactivos permiten construir cursos completos o temas diversos que se puedan acceder por Internet y así poder estudiar a distancia en cualquier parte o bien tenerlos en medios digitales para aplicarlos directamente en el aula con o sin pizarrones electrónicos y hasta usarlos en combinaciones de aula y a distancia, llamados cursos semipresenciales.

Precálculo Interactivo no tiene sonido, pero la interacción es lo que por excelencia lo distingue tanto para las demostraciones formales, como para visualizar las referencias y todas las construcciones interactivas que en él aparecen.

5. ¿Cómo fue desarrollado?

Para construir el programa **Precálculo Interactivo** se utilizaron varias herramientas de cómputo: dos de software matemático, uno de edición de fórmulas matemáticas, uno de edición de imágenes, uno de edición de texto, uno de edición de páginas Web y, algunos conocimientos de los lenguajes HTML y JavaScript, así como de la gramática del JavaSketchpad y del lenguaje del proyecto Descartes, además para probar las construcciones interactivas, tres navegadores.

También, aunque parezca obvio decirlo, están incluidos los conocimientos matemáticos necesarios sobre el tema, la experiencia docente en Cálculo Diferencial e Integral I, en Escuelas de Ciencias e Ingenierías y la experiencia en cómputo, durante varios años.

importaría describir para aquellos interesados, las características de las herramientas utilizadas y un poco de la mecánica seguida para la construcción de **Precálculo Interactivo**.

5.1 Herramientas de software matemático

a) La mayor parte del trabajo se realizó con **The Geometer's Sketchpad** (GSP) y con su componente **JavaSketchpad**, que nos permitió exportar las construcciones GSP a un formato de html. Una vez que teníamos las construcciones en html, usando el bloc de notas y la gramática de JavaSketchpad, le hicimos diversos arreglos que les daban una mejor apariencia y funcionalidad.

The Geometer's Sketchpad es una herramienta de construcción y exploración dinámica originalmente creada para hacer geometría plana y desde su aparición en 1990, su desarrollo y aceptación ha sido impresionante. Actualmente se usa también para explorar temas de álgebra, geometría analítica y cálculo, entre otras materias.

The Geometer's Sketchpad permite trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos, curvas cónicas, funciones, etcétera y cuenta con diversas herramientas, entre ellas, las de selección, rotación, traslación, dilatación, reflexión y medición.

Con The Geometer's Sketchpad se pueden producir dibujos interactivos y lecciones grabadas para ser reproducidas en cualquier momento. Por sus capacidades de animación, es posible construir simulaciones para aplicarlas a distancia o directamente en el salón de clase.

En Internet, es posible encontrar muchos sitios con aplicaciones educativas: artículos, ejemplos interactivos, referencias bibliográficas y audiovisuales, por mencionar algunos.

El sitio oficial de esta herramienta es:

http://www.keypress.com

The Geometer's Sketchpad ha tenido varias versiones, pero se puede decir que las más estables han sido la 3.1 y la 4.05. Nuestro trabajo se ha realizado con la versión GSP 3.1, pero con la componente de Java de la versión 4.05.

Todas las construcciones interactivas, mas aún aquellas que involucran coordenadas, las hicimos en GSP versión 3.x, las exportamos a html con el convertidor propio de la versión 3.x y ya en el código, utilizamos las clases y la gramática del JavaSketchpad 4.x.

Por tanto en el código sustituimos ARCHIVE="jsp4.jar" CODEBASE="jsp" en lugar de ARCHIVE="JSPDR3.JAR" CODEBASE="JSP", que deja el convertidor de la versión 3.x, en donde jsp se refiere a la carpeta donde se encuentran las clases de java de la versión 4.x, que también hay que sustituirla en lugar de la JSP que contienen las de la versión 3.x.

Una razón poderosa para hacer esta mezcla, es que por alguna consideración que no conocemos, la versión 4.x ya no traduce a html, construcciones que contengan coordenadas cartesianas.

b) Se utilizó el **Proyecto Descartes** en el tema de funciones, para construir un graficador y a la vez operador de funciones, un escalador de funciones que permite cambiar las escalas en los ejes de independientemente uno de otro o ambas a la vez y un graficador de funciones por (3) ramas, que funcionan directamente en Internet.

El **Proyecto Descartes** ha sido promovido y financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, con la finalidad de lograr la innovación en el área de Matemáticas, en la Enseñanza Secundaria y en el Bachillerato y, la primera versión surge en el año 1998.

Desde entonces se han desarrollado sucesivas versiones Descartes 2D y Descartes 3D que han ido mejorando la edición e incorporando nuevas opciones y herramientas que amplían sus posibilidades y campo de acción dentro de las Matemáticas, e incluso, de la Física.

Se puede definir el programa Descartes como un sistema de referencia cartesiano interactivo, en el que se pueden configurar y emplear todos los elementos habituales: Origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas, vectores, etc.

Permite representar curvas y gráficas dadas por sus ecuaciones, tanto en forma explícita como implícita; en particular permite representar las gráficas de todas las funciones que habitualmente se utilizan en la enseñanza secundaria, tanto en coordenadas cartesianas como en paramétricas e inclusive en coordenadas polares.

Los elementos que intervienen en la definición de las ecuaciones pueden ser parámetros modificables por el usuario, lo que hace que las gráficas que se muestran cambien al modificar esos parámetros. Dispone también de una poderosa herramienta de cálculo que permite evaluar cualquier expresión matemática y escribir el resultado en la escena.

Se pueden representar los elementos geométricos elementales: puntos, segmentos, arcos, etc., lo que permite hacer numerosas representaciones geométricas. Como en los casos anteriores, estos elementos pueden depender de parámetros, de forma que la representación cambia cuando el usuario los modifica. También se pueden utilizar las expresiones booleanas y algunas herramientas de programación como bucles, condicionales y listas.

La versión 3D, ampliación de Descartes 2D, incorpora nuevas funcionalidades: geometría tridimensional, macros, espacios múltiples en la escena, editor de fórmulas, nuevos sistemas de interacción, nuevos sistemas de autoevaluación del alumno, etc.

Es importante decir, que Descartes es actualmente uno de los programas más poderosos para hacer construcciones interactivas de matemáticas para Internet, con el agregado de tener un lenguaje relativamente fácil de aprender, no por nada, su éxito en España.

Cuando iniciamos el proyecto de **Precálculo Interactivo**, hace ya más de dos años, no conocíamos Descartes y manejábamos con mucha soltura el GSP, de ahí la razón de lo poquito que se usó en nuestra tesis. Vale decir que es muy recomendable para todo aquel que desee hacer material didáctico interactivo de matemáticas para la red.

El sitio oficial de esta herramienta es:

http://descartes.cnice.mecd.es/

5.2 Herramienta de edición de fórmulas matemáticas

MathType es un editor de fórmulas matemáticas y científicas con un extenso conjunto de símbolos y plantillas para la composición de complejas expresiones matemáticas mediante pulsaciones con el ratón sobre botones y paletas y se utilizó para construir todas las expresiones matemáticas existentes en **Precálculo Interactivo**.

Este programa tiene la posibilidad de escribir una amplísima gama de símbolos matemáticos y fuentes de texto, puede proporcionarles diversos atributos de color, espacios entre fuentes y entre renglones, proporcionarles fondo transparente y exportarlos en formatos gráficos muy comunes en las páginas Web o a código TeX, LaTeX y MathML.

Tiene entre otras características, una interfase sencilla de usar, bastante intuitiva, de tal manera que no costará demasiado trabajo poderla usar en breve tiempo.

De hecho MathType consiste en la versión profesional del familiar Editor de Ecuaciones incluido en Microsoft Word, Corel WordPerfect, AppleWorks y otros productos similares.

Este editor ha sido desarrollado por la empresa Design Science Inc., fundada en 1986 y con sede en Long Beach (California) y de su página Web, se pueden bajar versiones gratuitas temporales.

El sitio oficial de esta herramienta es:

http://www.dessci.com/en/products/mathtype/

5.3 Herramienta de edición de imágenes

Frecuentemente se requirió capturar algunas imágenes de pantalla y después procesarlas para incluirlas en las páginas de la tesis, para ello fue utilizado el programa Corel PhotoPaint.

Corel PhotoPaint es un programa de edición de imágenes de mapa de bits que permite retocar fotografías existentes o crear gráficos originales.

Por sus amplias posibilidades para la edición de imágenes es un programa muy utilizado por profesionales del ramo, pero en el caso de esta tesis tan sólo fue utilizado para abrir imágenes, producto de capturas de pantalla y depositadas en el portapapeles, recortarlas, si acaso darles un nuevo muestreo o un pequeño retoque y exportar las imágenes resultantes a un formato gráfico jpg o gif., para posteriormente insertarlas en algunas de sus páginas.

5.4 Herramienta de edición de texto

Un editor de texto fue muy importante para poder editar los applets, resultado de las construcciones en GSP, transformadas mediante su componente JavaSketchpad a un archivo en formato html

En este trabajo de tesis se utilizó el tan conocido bloc de notas de Windows. Se puede en realidad utilizar cualquier otro editor de texto, ya que se trata simplemente de corregir, quitar o aumentar instrucciones en el código de texto, siguiendo la gramática del JavaSketcpad y en su caso del Descartes.

5.5 Herramientas de edición de páginas Web

Eventualmente fue muy importante introducir o corregir hiperligas, modificar la posición de imágenes, editar tablas, entre otros elementos de las páginas html y esta tarea se nos facilitó hacerla con un editor de páginas Web como lo es Dreamweaver.

Las tareas realizadas con Dreamweaver, en realidad se podían suplir con un editor de texto, sin embargo, un editor como el que nombramos facilita el trabajo, dada su interfase gráfica y sumamente intuitiva.

Dreamweaver es de los editores de páginas Web más populares en el medio, es parte de una suite de la compañía Macromedia, que se ha convertido en uno de los estándares en lo que la producción de multimedios se refiere.

El sitio oficial de esta herramienta es:

http://www.macromedia.com/

5.6 Algunos conocimientos de HTML y JavaScript

En el trabajo **Precálculo Interactivo** estos conocimientos de html y JavaScript son fundamentales, dado que de otra manera sería muy complicado construir desde una página hasta una estructura de páginas ligadas entre sí, para armar adecuadamente todo un libro dígital como el que estamos presentando.

No obstante los conocimientos no son tan profundos, que puedan desanimar a cualquiera que desee iniciar un trabajo como éste. No es necesario previamente agotar sendos cursos de html y JavaScript, más bien, sería necesario entender algunos cuantos procesos y de ahí ir consultando lo que se fuera necesitando.

Con esto, desde luego, no queremos decir que se deba uno negar a conocer de manera profunda estos lenguajes, es evidente que a mayores conocimientos, menos tropiezos y mejores productos.

JavaScript nos sirvió en particular para establecer una rutina que permitiera que las ventanas flotantes que pueda abrir el usuario en **Precálculo Interactivo**, se pudieran cerrar de manera automática, al dar cualquier otro clic, en cualquier otro lugar del programa. El trabajo de estructuración del libro digital lo hicimos con html.

5.7 Navegadores para Internet

Una parte fundamental, es poder probar que las páginas del libro se visualicen adecuadamente en los diversos navegadores para Internet y, en nuestro caso, lo probamos en tres de ellos, que consideramos de los más comunes entre los usuarios de Windows: Internet Explorer, Netscape y FireFox.

Los sitios oficiales respectivamente de estos tres navegadores son los siguientes:

http://www.microsoft.com/spain/windows/ie/default.mspx

http://browser.netscape.com/ns8/

http://browser.netscape.com/ns8/

6. Dificultades técnicas

Al iniciar el proyecto **Precálculo Interactivo**, contábamos con una amplia experiencia en GSP, sabíamos que tipo de construcciones podíamos exportar a html y cuáles no. De hecho habíamos tenido la oportunidad de experimentar con este software en dos o tres proyectos anteriores. Aún más conocíamos varias de sus versiones y conocíamos sus alcances y limitaciones.

También ya contábamos con alguna experiencia en html., ya teníamos una estructura a seguir en el armado de las páginas y en la estructuración total del libro digital, así como en su navegación.

Así que las dificultades técnicas más bien se nos presentaron en lograr una buena apariencia y funcionalidad en las demostraciones y las construcciones interactivas, así como en el acceso a los materiales requeridos en una página, para no tener que abandonarla a la hora de requerirlos.

La solución no fue fácil, pero o resolvimos con paciencia, con trabajo de equipo y estudiando un poco de JavaScript y html.

7. Ficha técnica

Precálculo Interactivo es un software que corre en cualquier computadora con Windows XP ServicePack2 y que tenga instalada la máquina virtual de java.

Se encuentra en Internet en la dirección:

http://132.248.17.238/calculo

y corre en cualquier navegador, particularmente en Internet Explorer, Netscape Comunicator o FireFox.

También se tiene en disco compacto y se puede correr ejecutando con doble clic el archivo index.html. Se abre en el navegador que tenga declarado por omisión el usuario.

Es importante señalar que todo texto subrayado es una hiperliga que puede abrir una ventana flotante con un teorema y su demostración o con alguna referencia importante.

Todo recuadro con alguna imagen es un botón, que al darle clic produce una acción, como abrir otro botón o mostrar una construcción o alguna situación particular en una construcción interactiva.

Los puntos rojos en las construcciones interactivas se pueden arrastrar con el ratón y así se pueden visualizar distintas situaciones de un teorema o resultado en particular.

La navegación en el sitio es muy estándar:

<< **<** **>** **>>**

Al inicio de la serie, al anterior, al que sigue, al final de la serie.

También se utiliza como hiperliga, el nombre del tema o subtema en cuestión.

8. ¿Cuál es la tesis sobre Precálculo Interactivo?

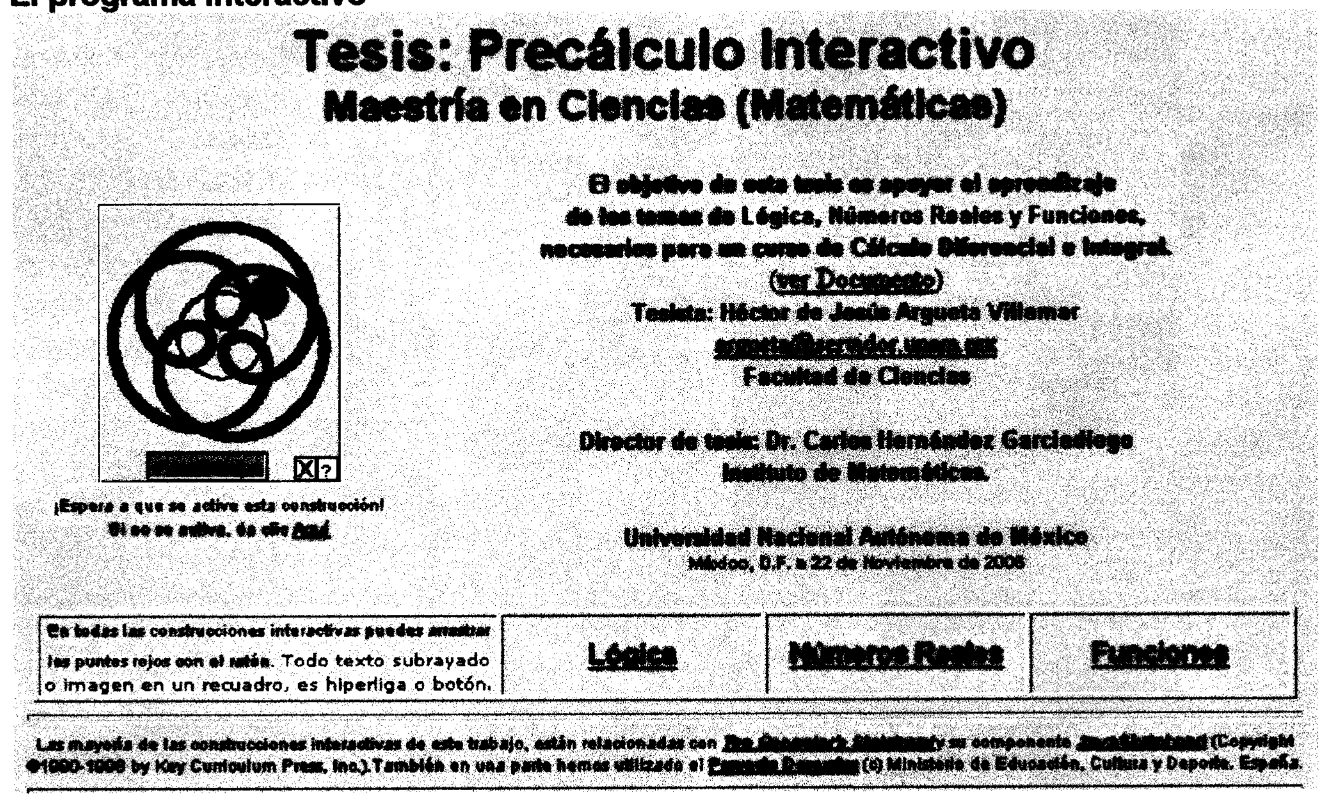
Precálculo Interactivo es un trabajo original asistido por computadora, para apoyar el aprendizaje sobre los temas básicos para abordar exitosamente un curso de Cálculo Diferencial e Integral I, en una licenciatura en ciencias o en áreas afines y que se puede distribuir en disco compacto o por Internet.

Precálculo Interactivo es original por los temas que aborda, su formalidad matemática, sus demostraciones paso a paso, sus construcciones interactivas y los diversos elementos didácticos interactivos que aporta al aprendizaje de un tema, así como por sus posibilidades de distribución en disco compacto y por Internet.

Precálculo Interactivo es una innovación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas asistidos por computadora, en los temas de Lógica, Números Reales y Funciones, que puede servir de modelo para la construcción de cursos completos interactivos en línea, que requieran demostraciones formales o explicaciones paso a paso, así como construcciones gráficas interactivas que permitan manipular y representar diversas situaciones de teoremas o resultados.

En Internet, al menos cuando se inició este trabajo hace más de dos años y aún actualmente, no existe un trabajo similar a **Precálculo Interactivo** y por ello nos parece que cobra mayor relevancia su construcción y debería ser aprovechado en las distintas formas sugeridas en este documento.

9. El programa interactivo



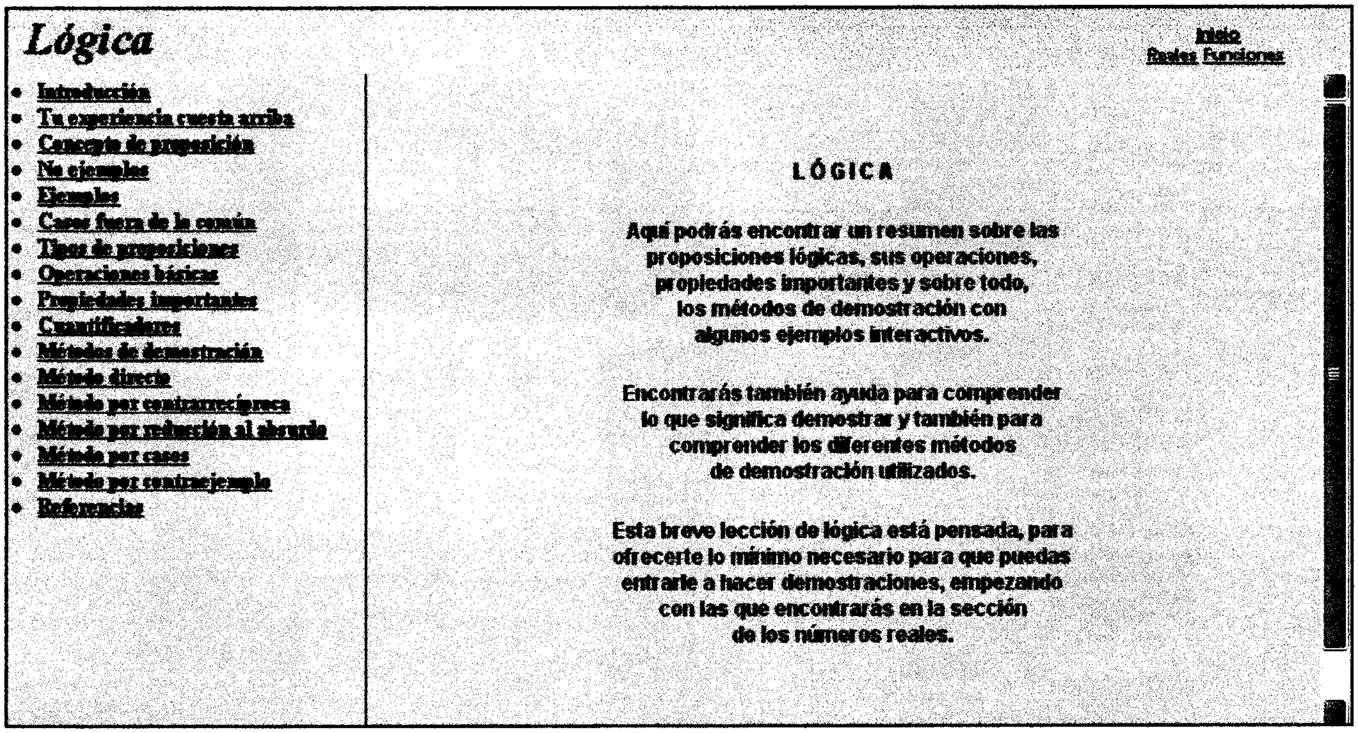
Esta portada principal cuenta con una construcción dinámica que permite cargar las clases de java, necesarias para el buen funcionamiento del software, en todas las construcciones interactivas con las que cuenta. Su carga es bastante rápida, no pasa de 8 segundos.

Este software hace uso de la máquina virtual de java y si el usuario no la tuviera instalada en su computadora, se le proporciona mediante un clic, la manera de bajarlo de la red, fácilmente.

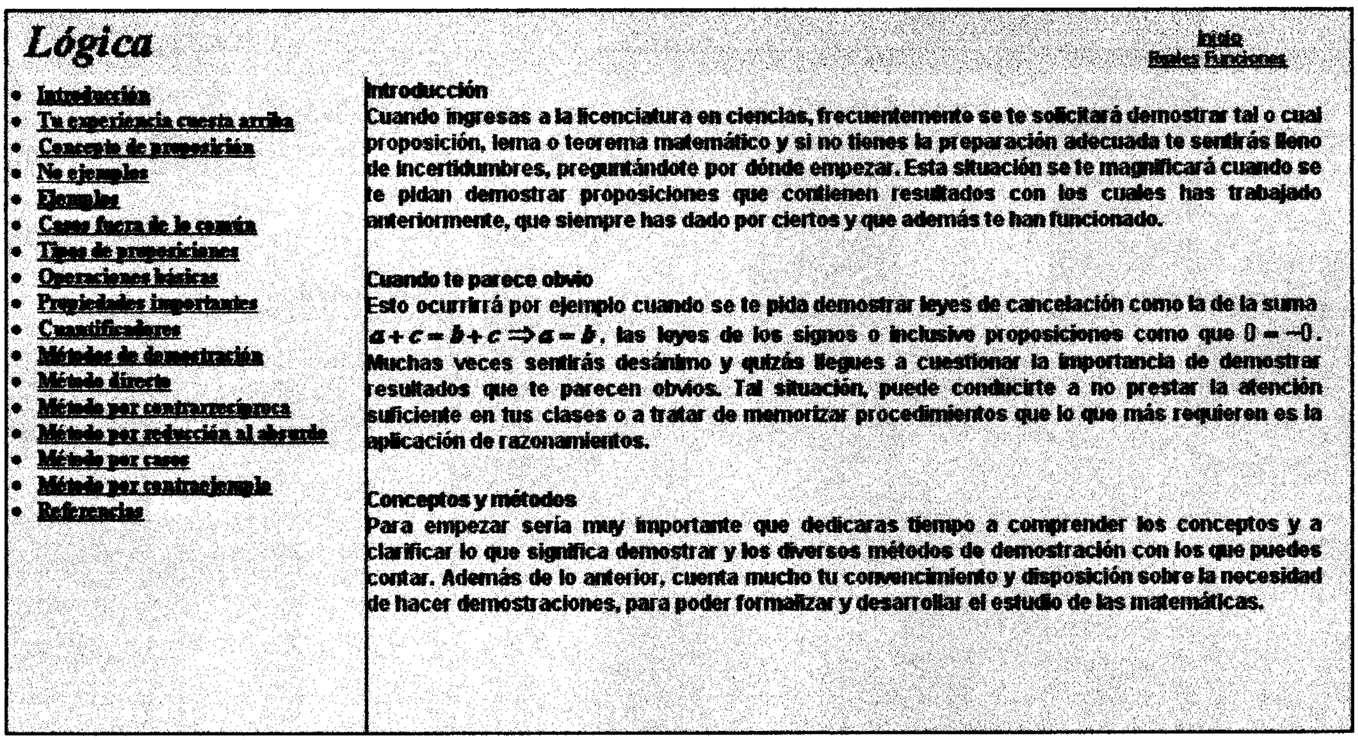
El programa corre casi en cualquier computadora y con cualquier navegador de Internet y, salvo la máquina virtual de java, no requiere de ningún otro software accesorio. Está hecho en una resolución de 800x600, pero se visualiza adecuadamente en cualquier otra superior.

El primer tema: Lógica

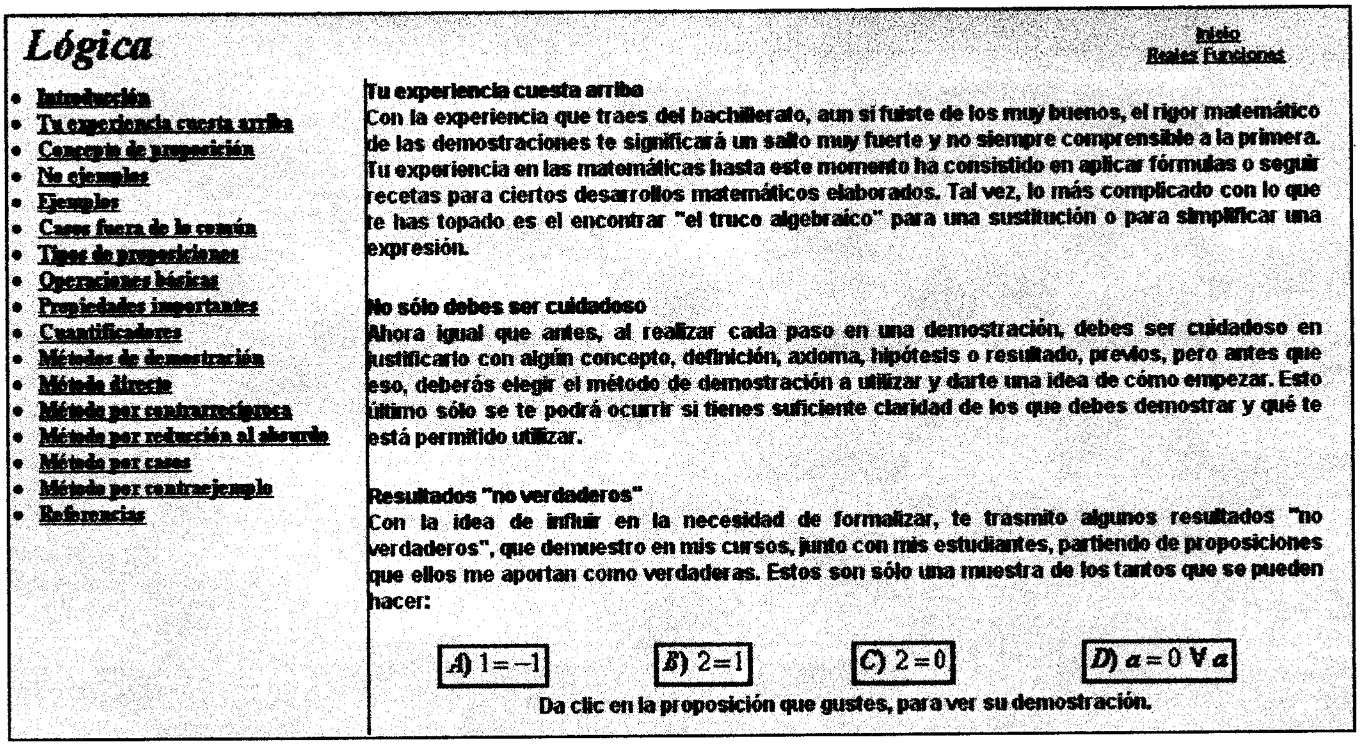
En este tema la parte medular son los **métodos de demostración** que son de gran ayuda para los estudiantes que llegan al primer año de licenciatura y se enfrentan a la necesidad de hacer demostraciones.



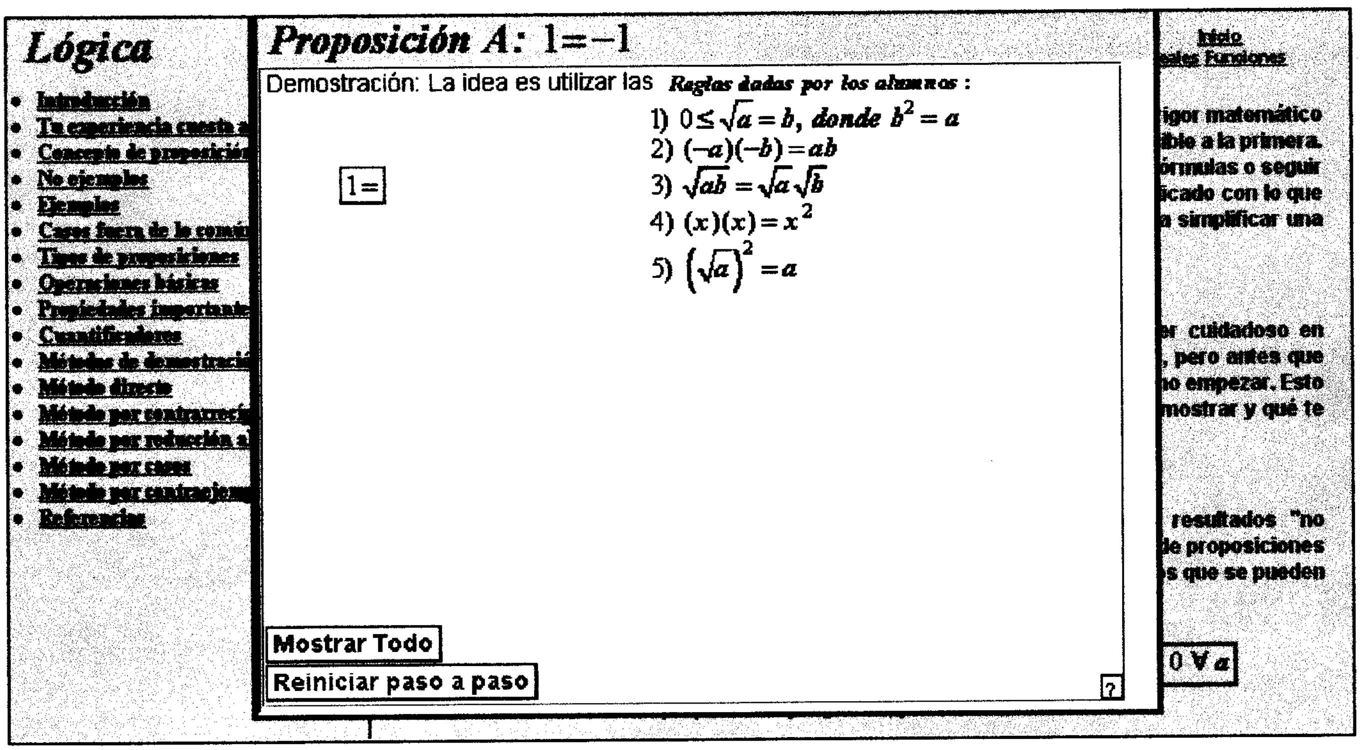
Una breve introducción pretendiendo motivar una actitud del estudiante.



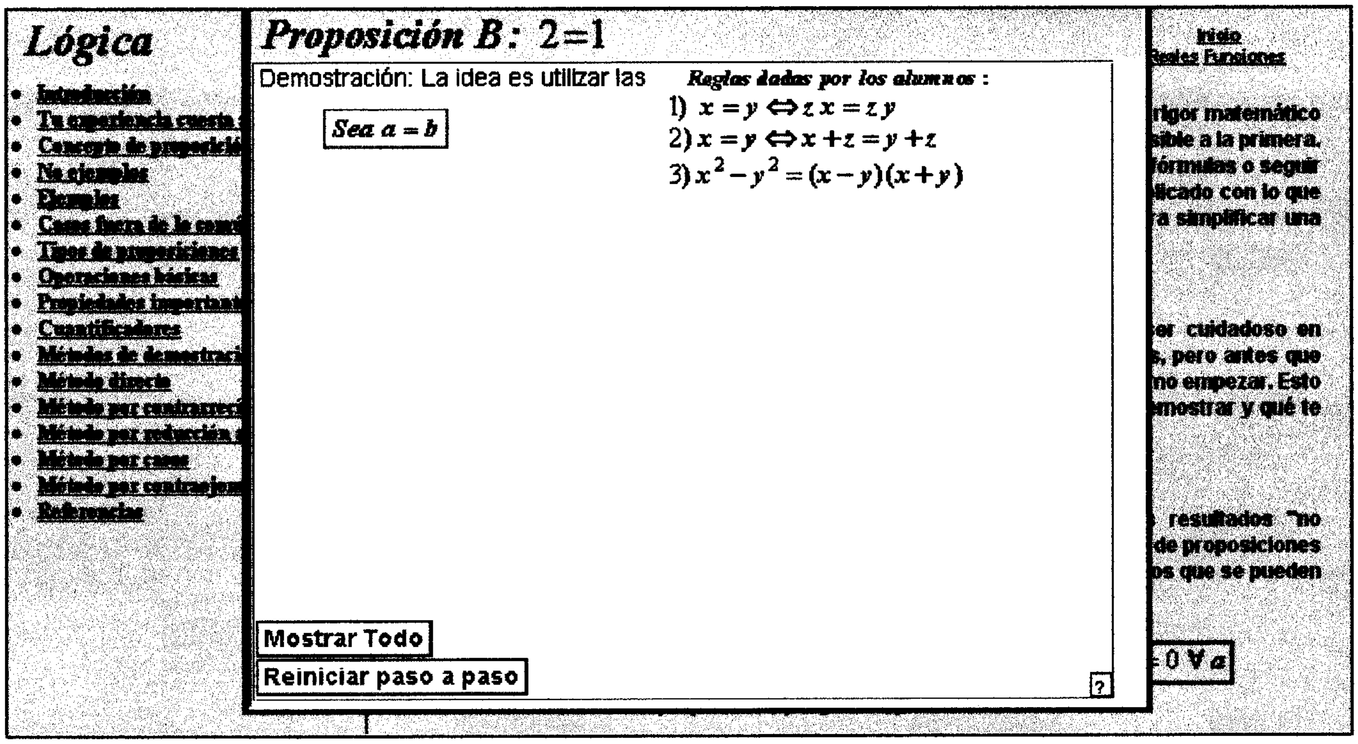
Una reflexión sobre experiencias previas, destacando la necesidad de formalizar.



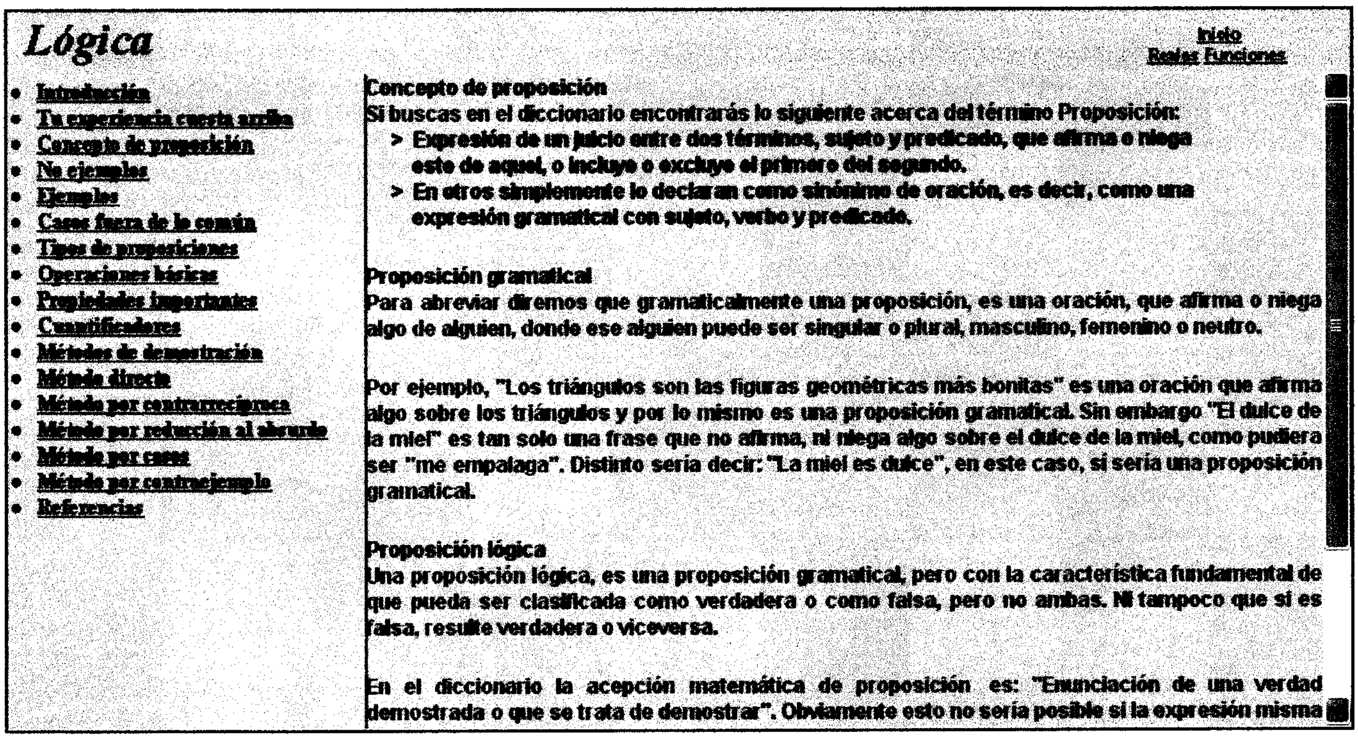
Resultados "falsos" demostrados como "verdaderos", todo a partir de reglas dadas por los alumnos (ventana flotante).



Resultados “falsos” demostrados como “verdaderos”, a partir de reglas dadas por los alumnos (ventana flotante).



El concepto de proposición



Proposiciones que no son lógicas

Lógica

Inicio
Reales Funciones

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

No ejemplos
Ensayemos una lista y luego analizamos caso por caso:

1) **El trinar del cenzontle.**
2) **¡Haz tu tarea antes de jugar!.**
3) **Todos los polígonos son bonitos.**
4) **El número imaginario i es mayor que 100.**

Proposiciones que no son lógicas
En 1) tenemos una simple frase gramatical, a la cual le falta la acción declarativa. Así que no podríamos darle un valor de verdad o falsedad, es decir, no es proposición lógica.

En 2) tenemos una oración gramatical, pero ésta no es declarativa, más bien es imperativa, es una orden.

En 3) aunque tenemos una proposición gramatical, la afirmación tiene un carácter subjetivo y por lo mismo no podría clasificarse rigurosamente como verdadera o falsa. Es decir, no es una proposición lógica.

En 4) aunque tenemos una proposición gramatical, no es lógica porque para el imaginario i, el concepto "mayor que" no tiene sentido.

Proposiciones lógicas y abiertas

Lógica

Inicio
Reales Funciones

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Ejemplos
Ensayemos una lista y luego analizamos caso por caso:

1) **El 14 es factor común de 42 y 28.**
2) **Jalapa es la capital de Veracruz.**
3) **En Puebla se firmó "El Plan de San Luis".**
4) **Todos los números primos son impares.**
5) **x es mayor que 100.**
6) **Él es maestro de primaria.**

Proposiciones lógicas
En 1), 2), 3) y 4) se tienen proposiciones gramaticales, que además se pueden clasificar sin equívocos como verdaderas o falsas. Las proposiciones 3) y 4) por ejemplo, son falsas. Así, éstas son proposiciones lógicas.

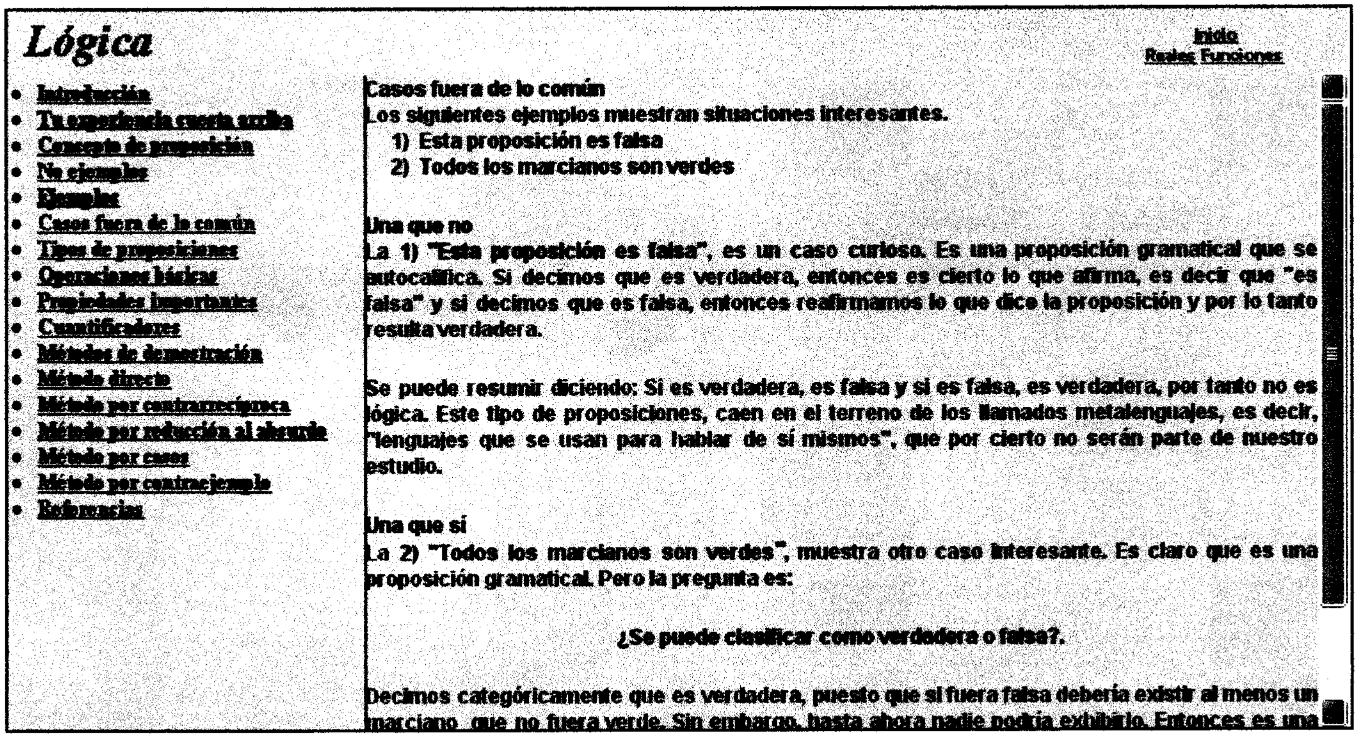
Proposiciones Abiertas
Los ejemplos 5) y 6) se catalogan como proposiciones abiertas, dado que para poderlas catalogar como lógicas, es necesario saber quién es el sujeto x, en 5) y Él en 6).

Para que 5) sea proposición lógica, x debe referirse a un número, pero además para el cual tenga sentido el concepto "mayor que". Por ejemplo x no lo podríamos sustituir por "George Bush" o por "el número imaginario i". Respetando una sustitución adecuada, sus valores de verdad sólo dependerían del valor correspondiente de x.

Igualmente para que 6) sea proposición lógica, se requiere sustituir "Él", por una persona en

Fuera de lo común.

Se da un ejemplo de una proposición que siendo verdadera, es falsa y viceversa. También de una proposición lógica que resulta verdadera por vacuidad.



Lógica

Inicio
Reales Funciones

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Casos fuera de lo común

Los siguientes ejemplos muestran situaciones interesantes.

1) **Esta proposición es falsa**
2) **Todos los marcianos son verdes**

Una que no

La 1) "Esta proposición es falsa", es un caso curioso. Es una proposición gramatical que se autocalifica. Si decimos que es verdadera, entonces es cierto lo que afirma, es decir que "es falsa" y si decimos que es falsa, entonces reafirmamos lo que dice la proposición y por lo tanto resulta verdadera.

Se puede resumir diciendo: Si es verdadera, es falsa y si es falsa, es verdadera, por tanto no es lógica. Este tipo de proposiciones, caen en el terreno de los llamados metalenguajes, es decir, "lenguajes que se usan para hablar de sí mismos", que por cierto no serán parte de nuestro estudio.

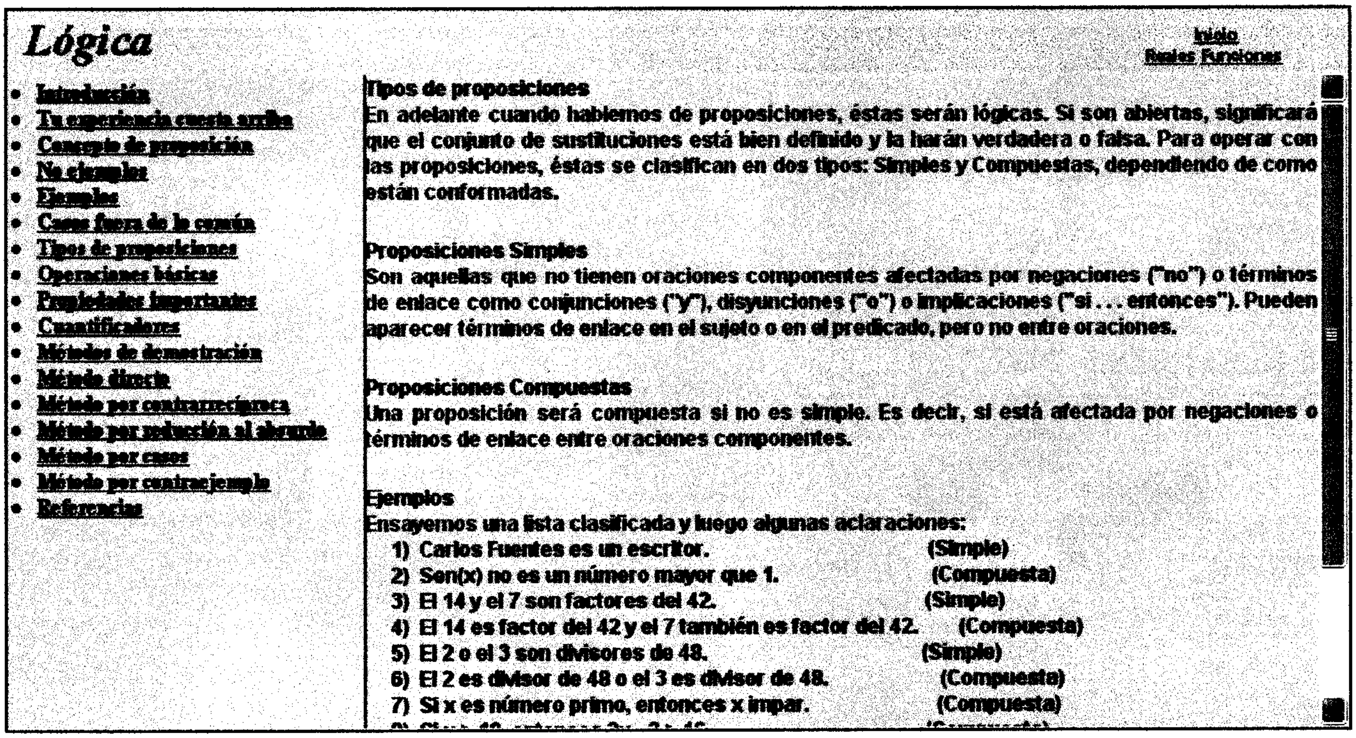
Una que sí

La 2) "Todos los marcianos son verdes", muestra otro caso interesante. Es claro que es una proposición gramatical. Pero la pregunta es:

¿Se puede clasificar como verdadera o falsa?.

Decimos categóricamente que es verdadera, puesto que si fuera falsa debería existir al menos un marciano que no fuera verde. Sin embargo, hasta ahora nadie podría exhibirlo. Entonces es una

Proposiciones simples y compuestas



Lógica

Inicio
Reales Funciones

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Tipos de proposiciones

En adelante cuando hablemos de proposiciones, éstas serán lógicas. Si son abiertas, significará que el conjunto de sustituciones está bien definido y la harán verdadera o falsa. Para operar con las proposiciones, éstas se clasifican en dos tipos: Simples y Compuestas, dependiendo de como están conformadas.

Proposiciones Simples

Son aquellas que no tienen oraciones componentes afectadas por negaciones ("no") o términos de enlace como conjunciones ("y"), disyunciones ("o") o implicaciones ("si . . . entonces"). Pueden aparecer términos de enlace en el sujeto o en el predicado, pero no entre oraciones.

Proposiciones Compuestas

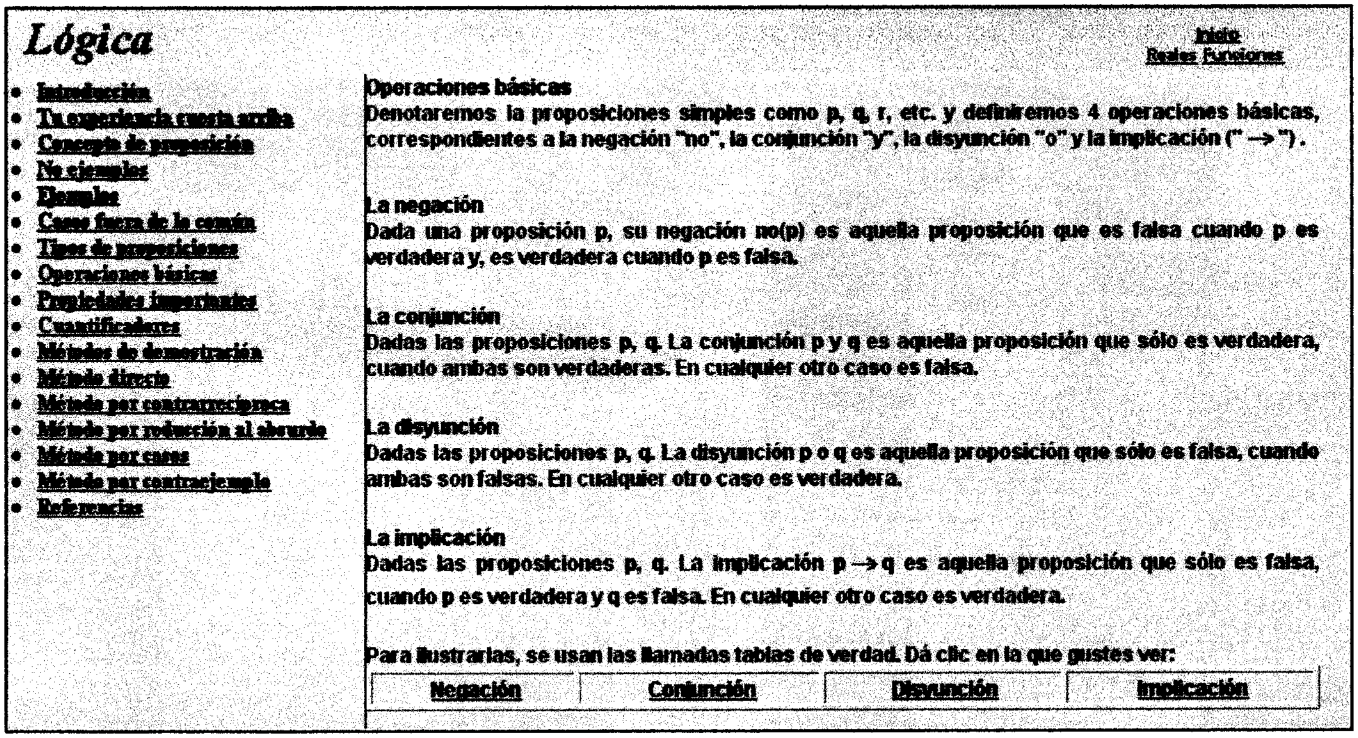
Una proposición será compuesta si no es simple. Es decir, si está afectada por negaciones o términos de enlace entre oraciones componentes.

Ejemplos

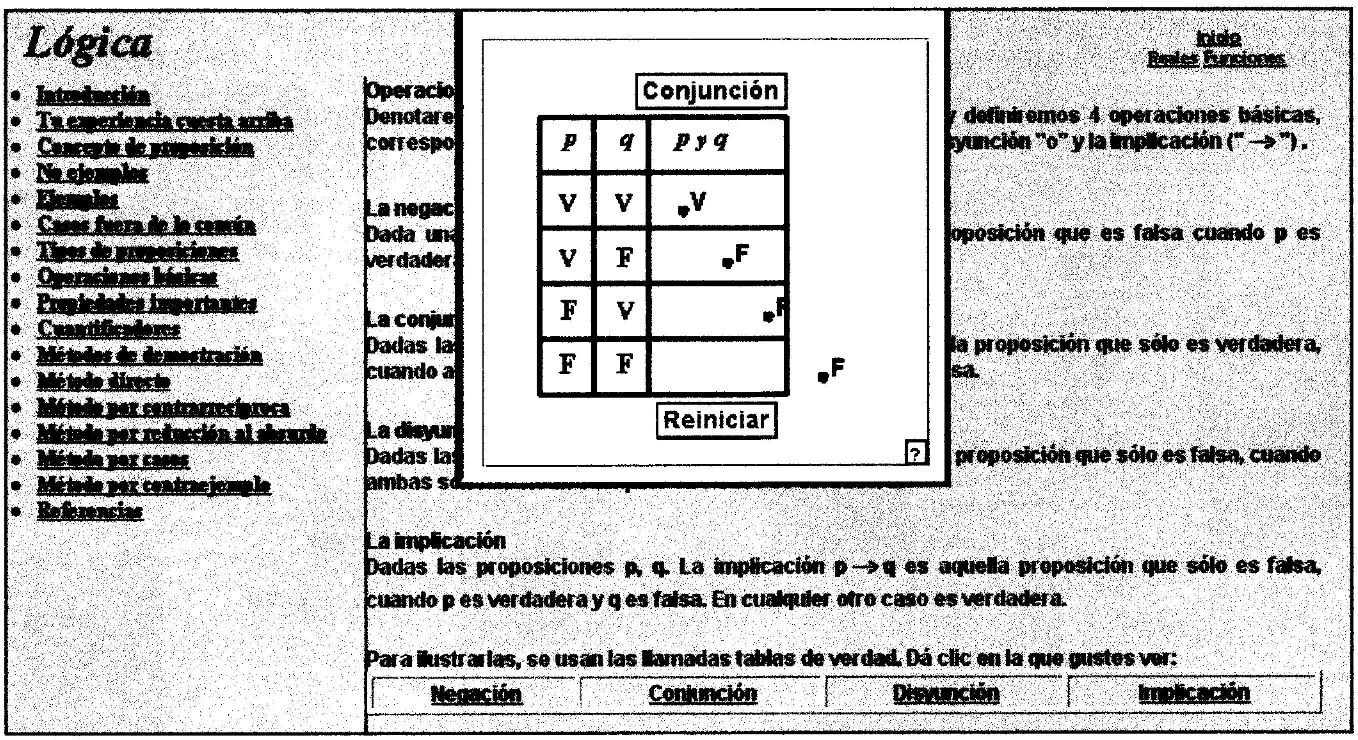
Ensayemos una lista clasificada y luego algunas aclaraciones:

1) Carlos Fuentes es un escritor.	(Simple)
2) Sen(x) no es un número mayor que 1.	(Compuesta)
3) El 14 y el 7 son factores del 42.	(Simple)
4) El 14 es factor del 42 y el 7 también es factor del 42.	(Compuesta)
5) El 2 o el 3 son divisores de 48.	(Simple)
6) El 2 es divisor de 48 o el 3 es divisor de 48.	(Compuesta)
7) Si x es número primo, entonces x impar.	(Compuesta)

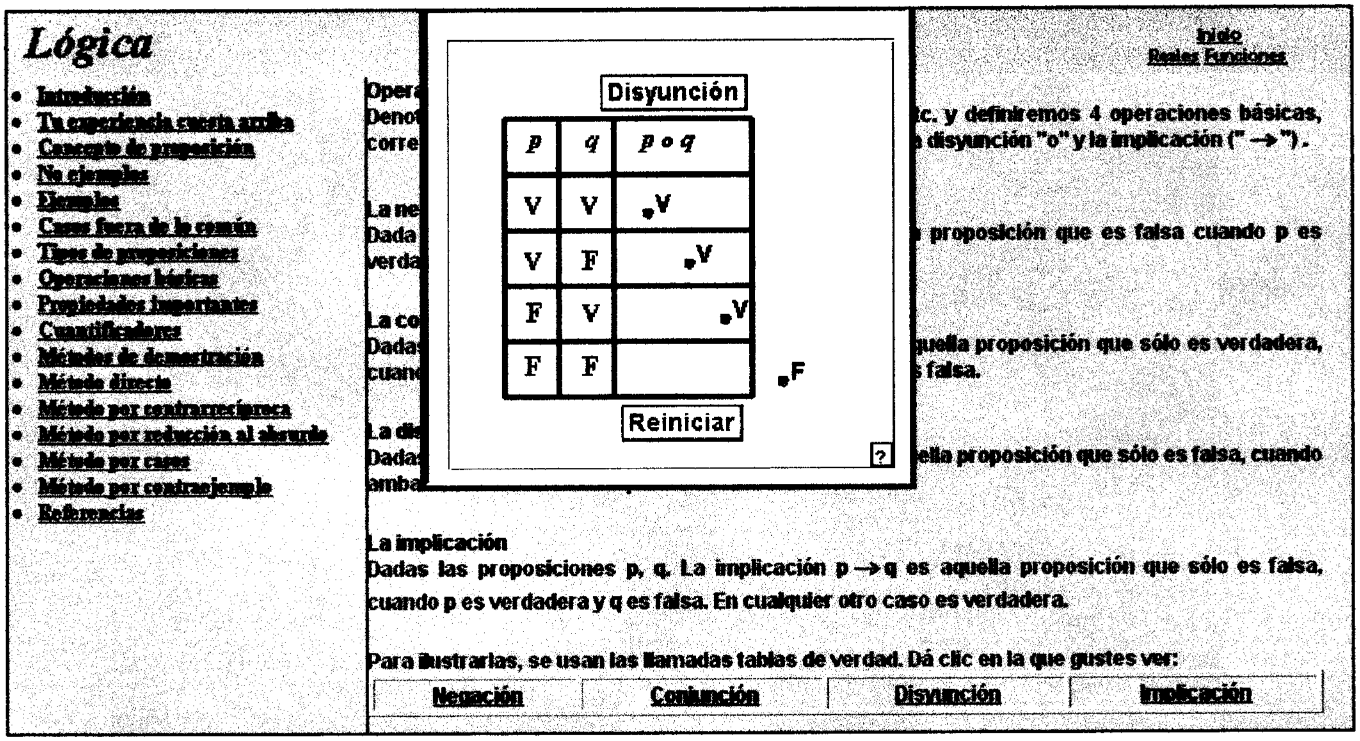
Operaciones básicas.
Además de las definiciones se podrán encontrar tablas de verdad interactivas.



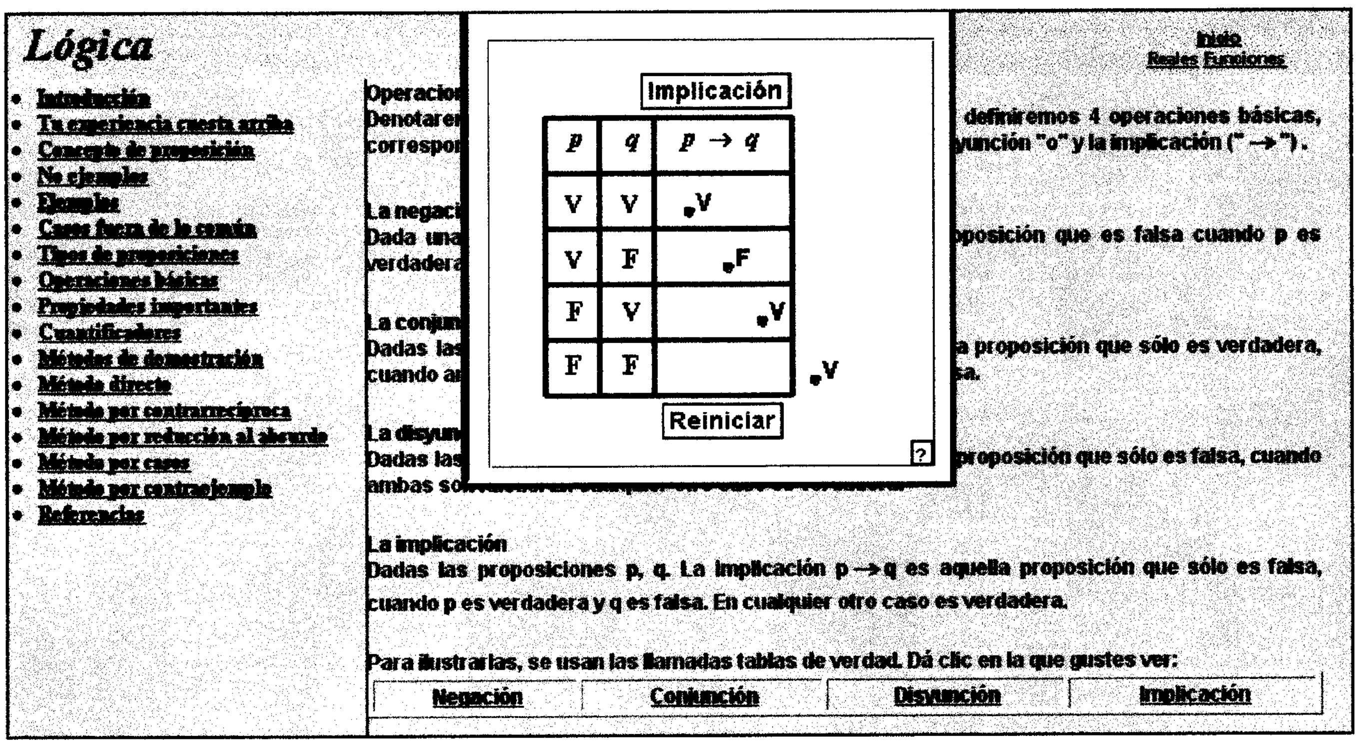
Operaciones básicas con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)



Operaciones básicas con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

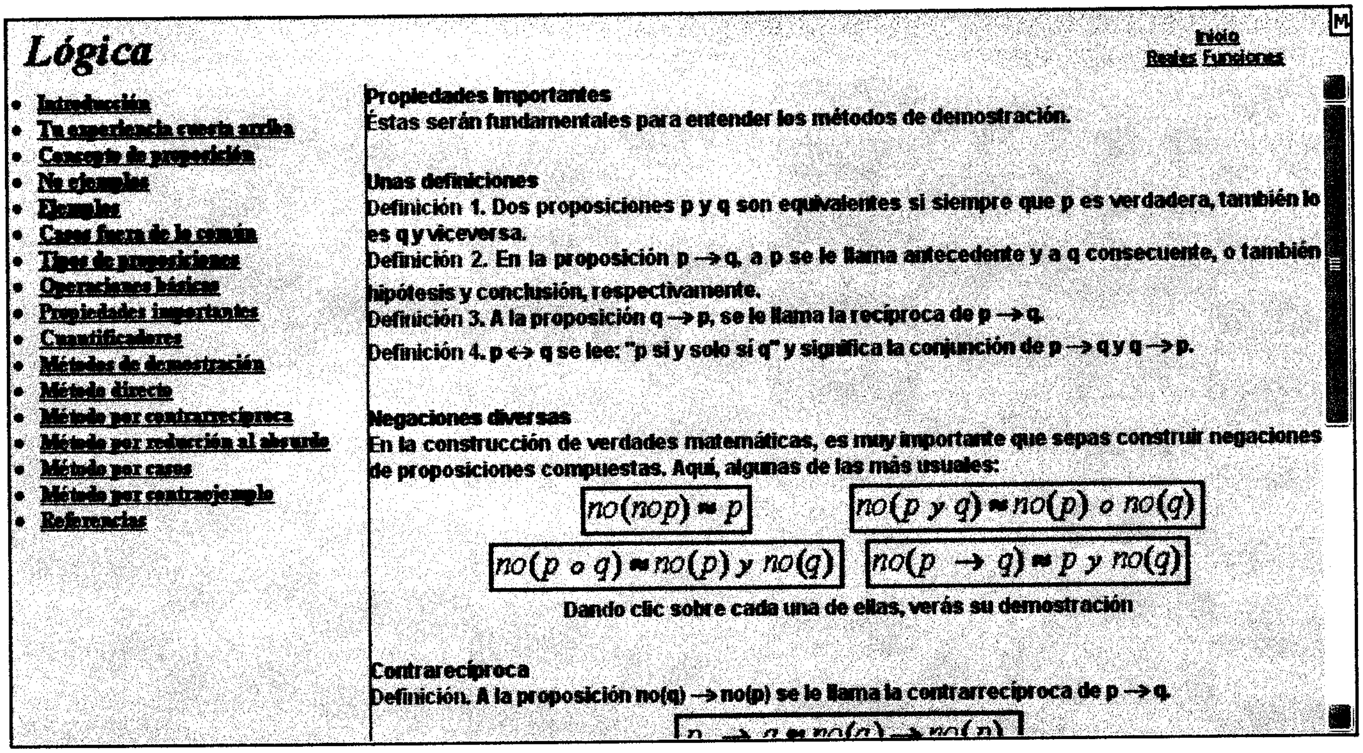


Operaciones básicas con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)

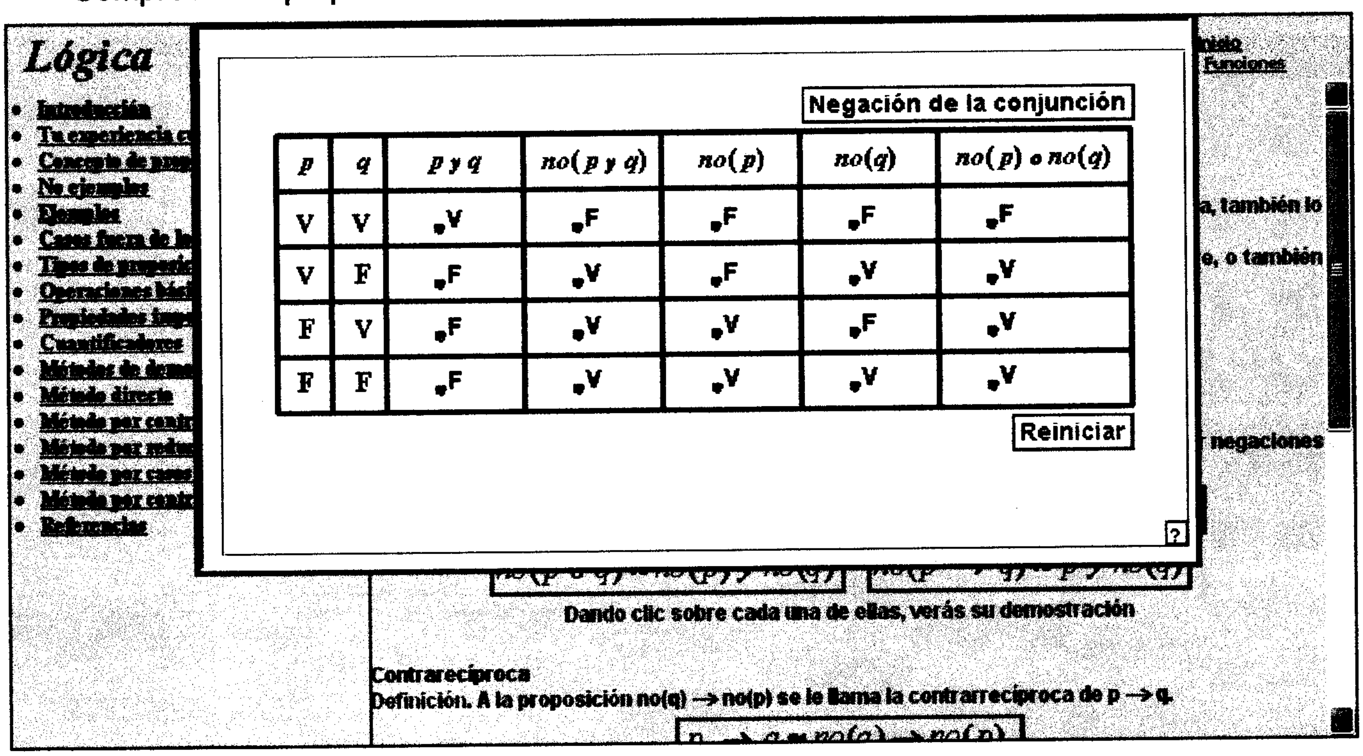


Propiedades importantes

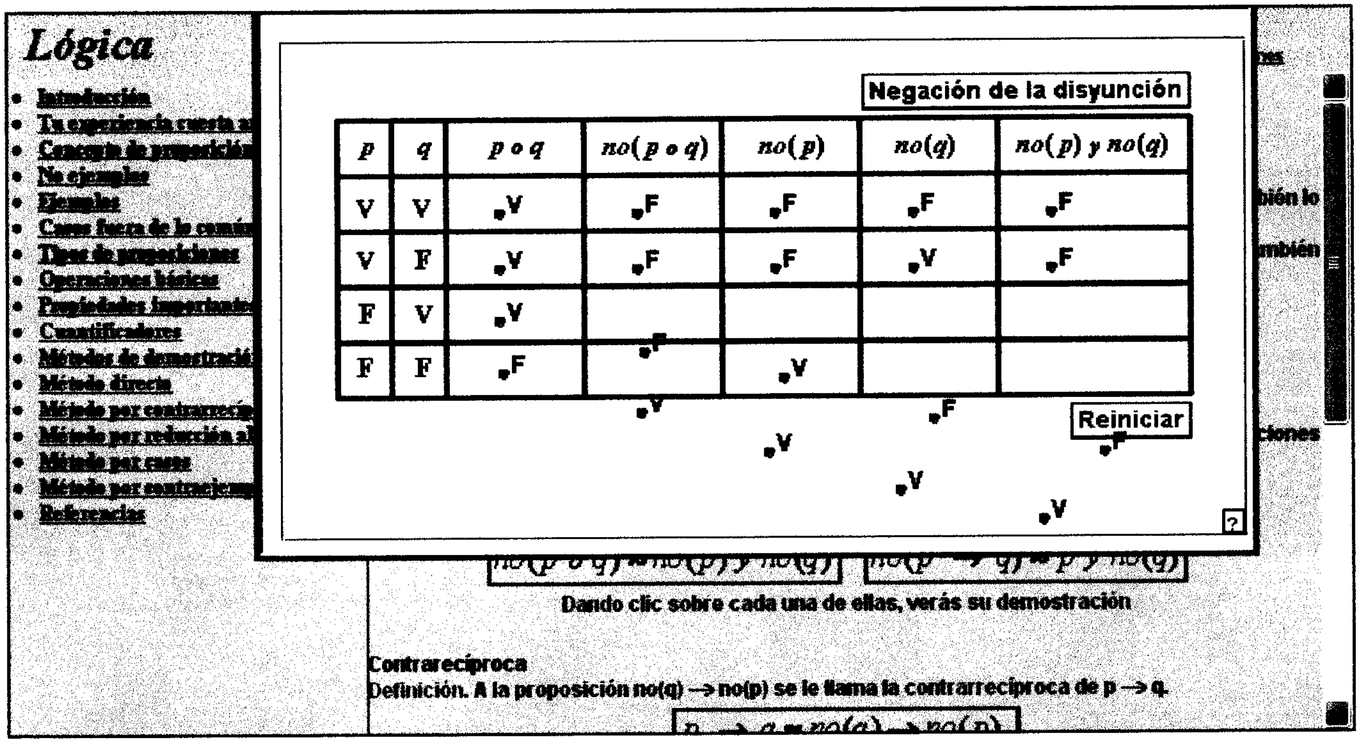
Las propiedades que se presentan, son fundamentales para comprender los métodos de demostración. También se cuenta con demostraciones interactivas.



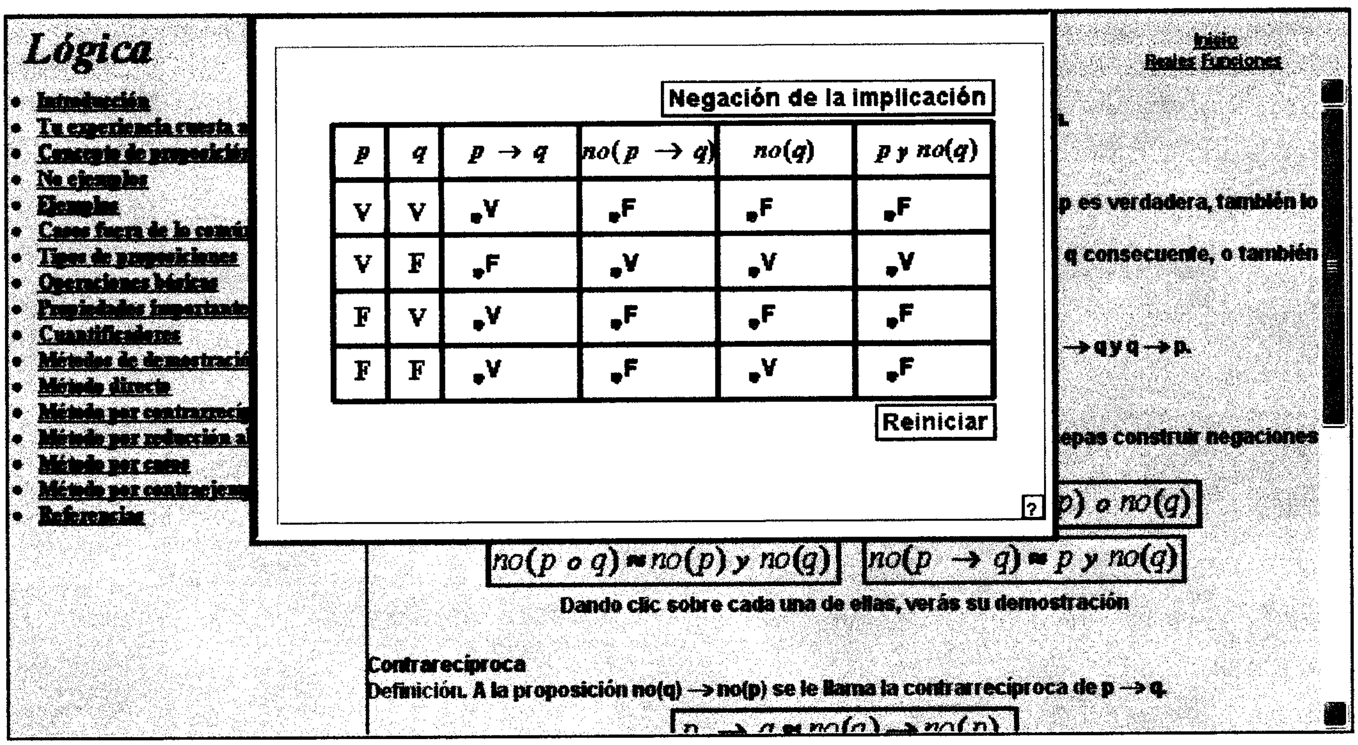
Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)



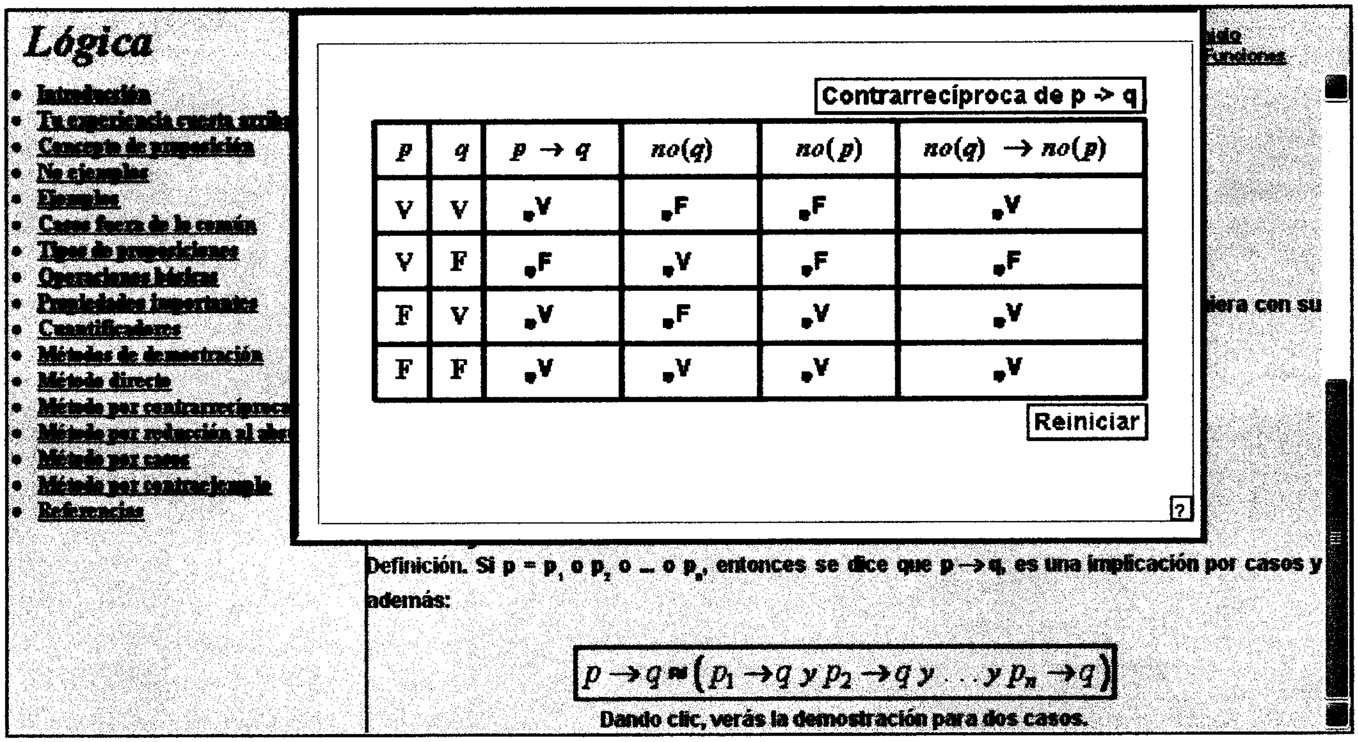
Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)



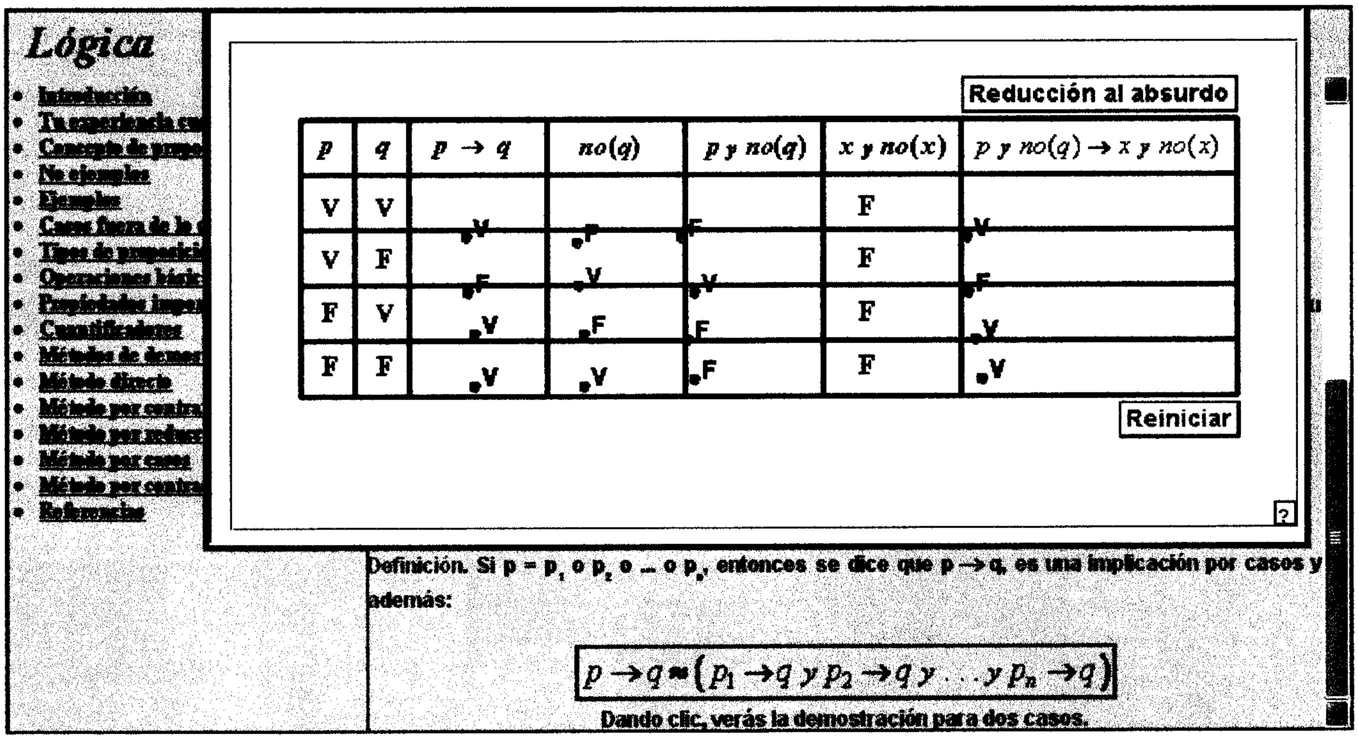
Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)



Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)



Comprobando propiedades con tablas de verdad interactivas (ventana flotante)



Cuantificadores

Lógica

Inicio
Reales Funciones

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Cuantificadores

Sabemos que las proposiciones afirman o niegan algo de alguien. Dependiendo de dicho alguien, incluyen un cuantificador. Ejemplifiquemos y analicemos caso por caso:

1) **Todos los múltiplos de 2, son múltiplos de 4.**
2) **Todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2.**
3) **Ningún entero par es divisible por 3.**
4) **Ningún número primo mayor que 2, es par.**
5) **Existe un natural, que satisface la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.**
6) **Existen naturales, que son la suma de sus divisores propios.**

Universal y Existencial

En 1), 2), 3) y 4) se afirma algo sobre un todo, es decir se afirma algo sobre todos los elementos de un cierto conjunto. Por ello se dice que tales proposiciones incluyen un "cuantificador universal". En cambio en 5) y 6) la afirmación es sobre alguien singular. Por ello se dice que tales proposiciones incluyen un "cuantificador existencial".

Cuando son falsas

Reflexionando sobre la 1), se puede descubrir que no todos los múltiplos de 2 son múltiplos de 4, es decir:
La 1) es falsa porque "Existe un múltiplo de 2 (ejemplo el 6), que no es múltiplo de 4".
Similarmente, reflexionando sobre la 3), se pueden encontrar números pares divisibles por 3, es decir:
La 3) es falsa porque "Existe un par (ejemplo el 12), que si es divisible por 3".
Así mismo, resolviendo la ecuación dada en 5), se da uno cuenta que las soluciones no son

Reflexionando sobre la demostración

Lógica

Inicio
Reales Funciones

- Introducción
- Tu experiencia cuenta arriba
- Concepto de proposición
- No ejemplos
- Ejemplos
- Casos fuera de lo común
- Tipos de proposiciones
- Operaciones básicas
- Propiedades importantes
- Cuantificadores
- Métodos de demostración
- Método directo
- Método por contrarrecíproca
- Método por reducción al absurdo
- Método por casos
- Método por contraejemplo
- Referencias

Métodos de demostración

Se aplican cuando se desea deducir una proposición q, a partir de una proposición p que se considera verdadera. Es decir, se aplican para demostrar que $p \to q$ es verdadera, suponiendo que p es verdadera.

Esto es, se trata de validar el primer caso de la tabla de verdad de la implicación:

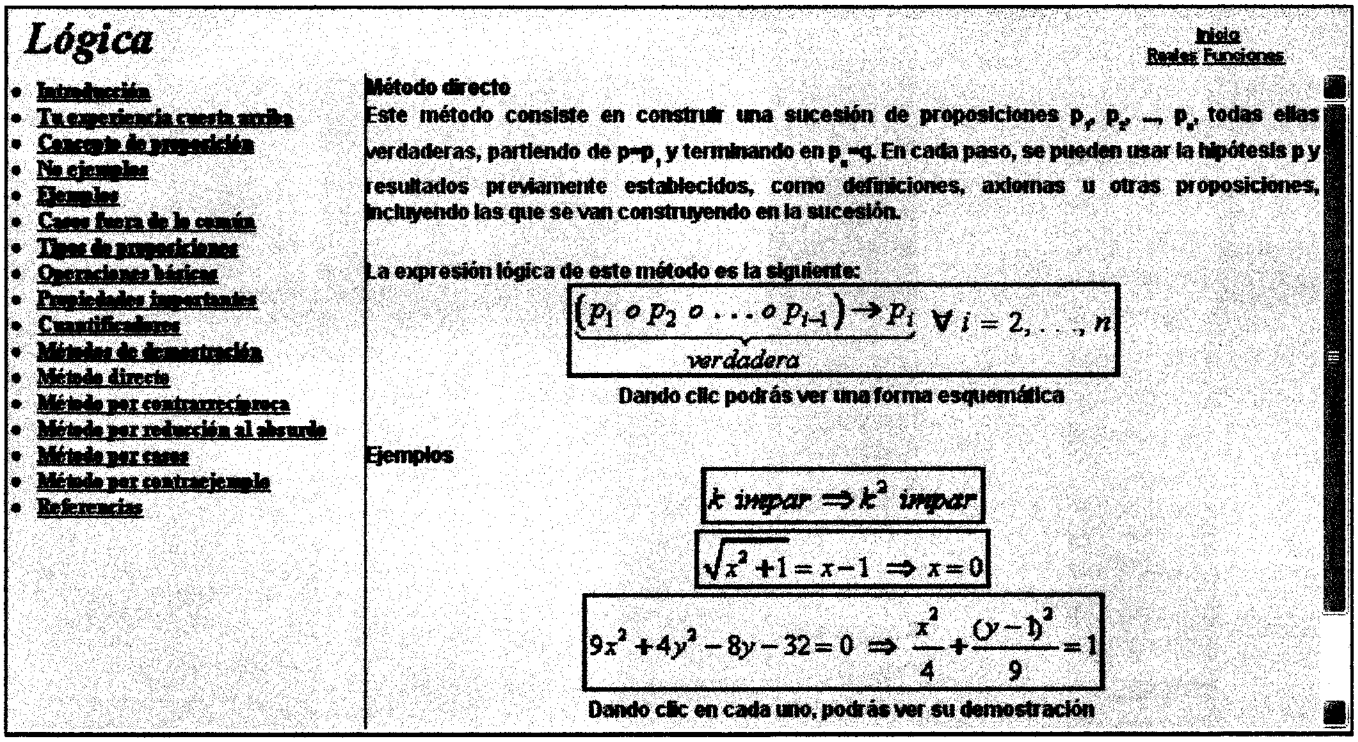
p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Considerando la hipótesis p verdadera, si la implicación se construye utilizando los métodos de demostración (que garantizan razonamientos verdaderos), por consecuencia se arribará a una conclusión q verdadera.

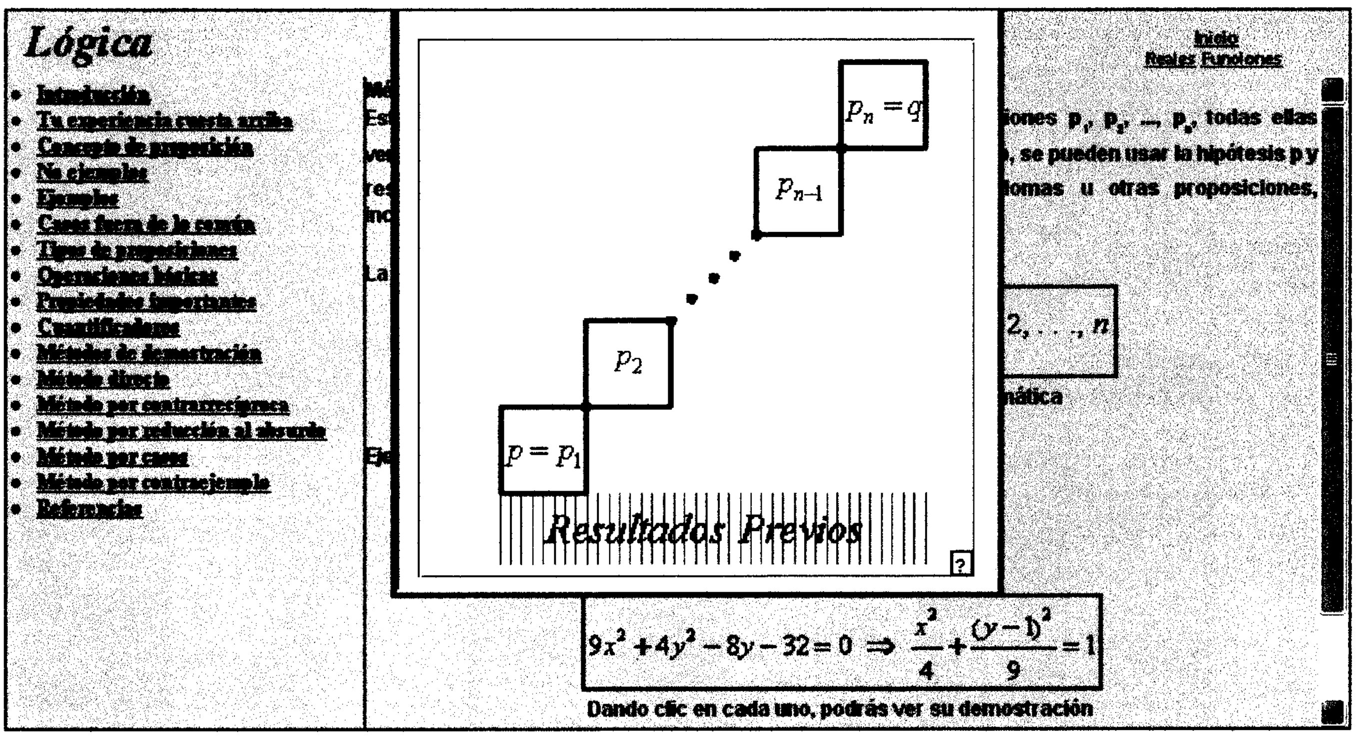
Es importante recordar que si se parte de p verdadera y la implicación es falsa, no se puede arribar a q verdadera (segundo caso de su tabla de verdad).

El método directo

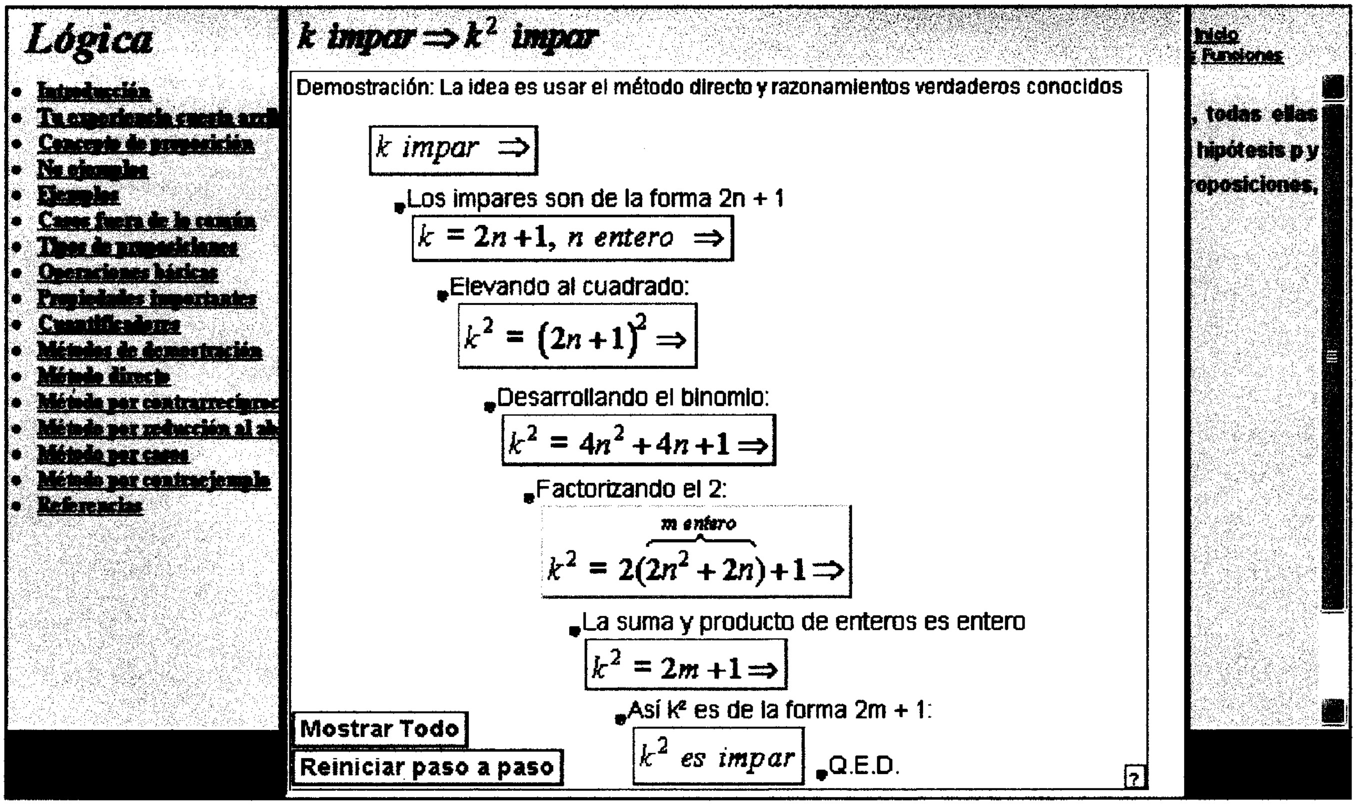
Se presenta la expresión lógica en la que se basa el método y algunos ejemplos de aplicación.



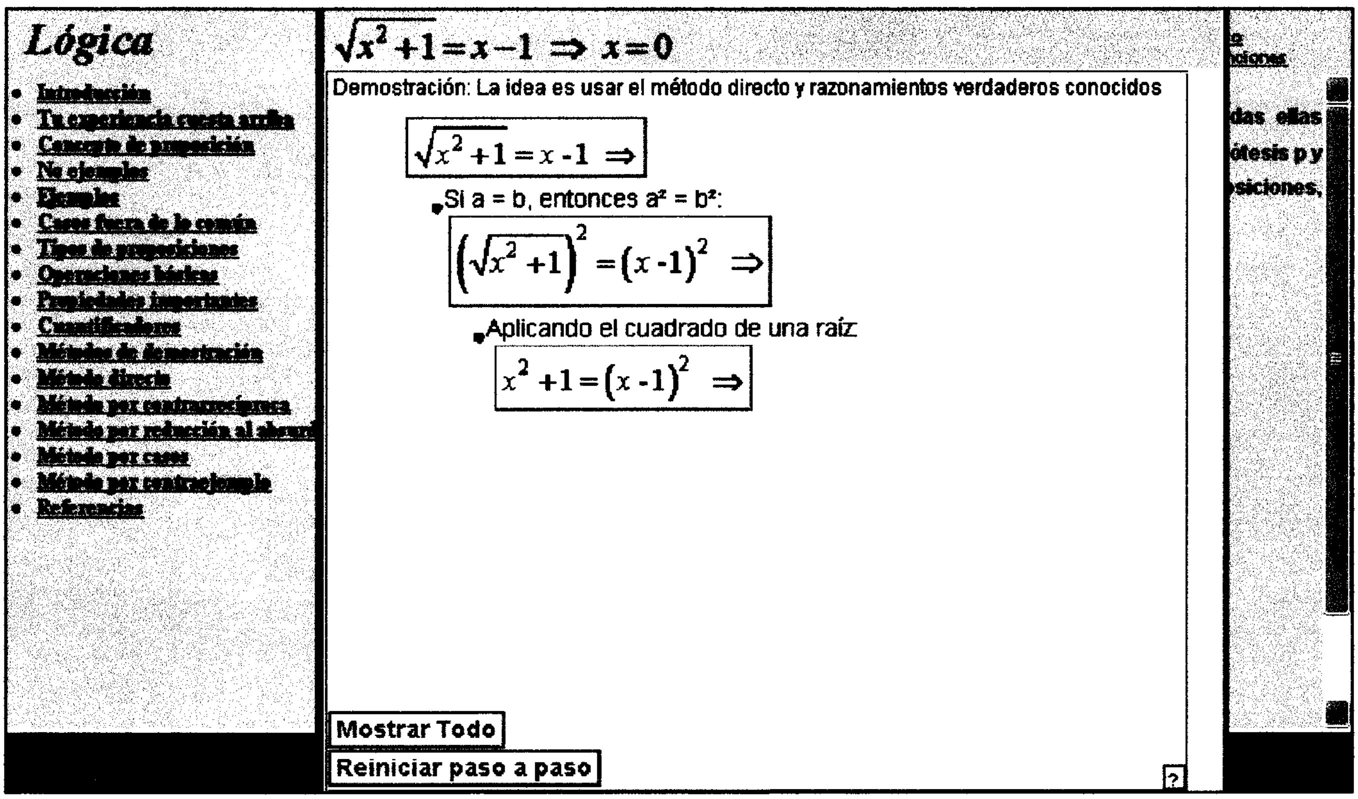
Esquema del método directo (ventana flotante)



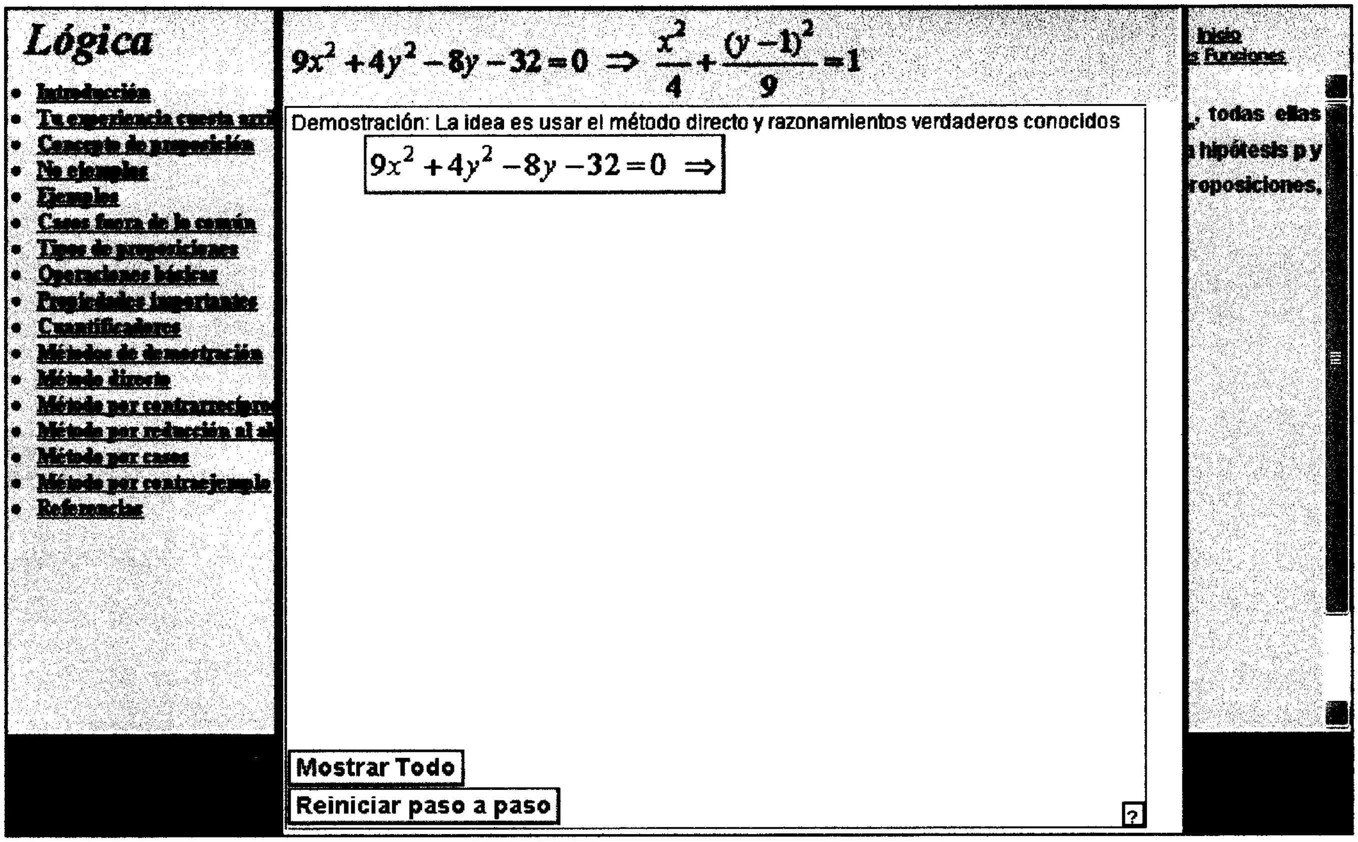
Ejemplo interactivo del método directo (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método directo (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método directo (ventana flotante)



El método por contrarrecíproca

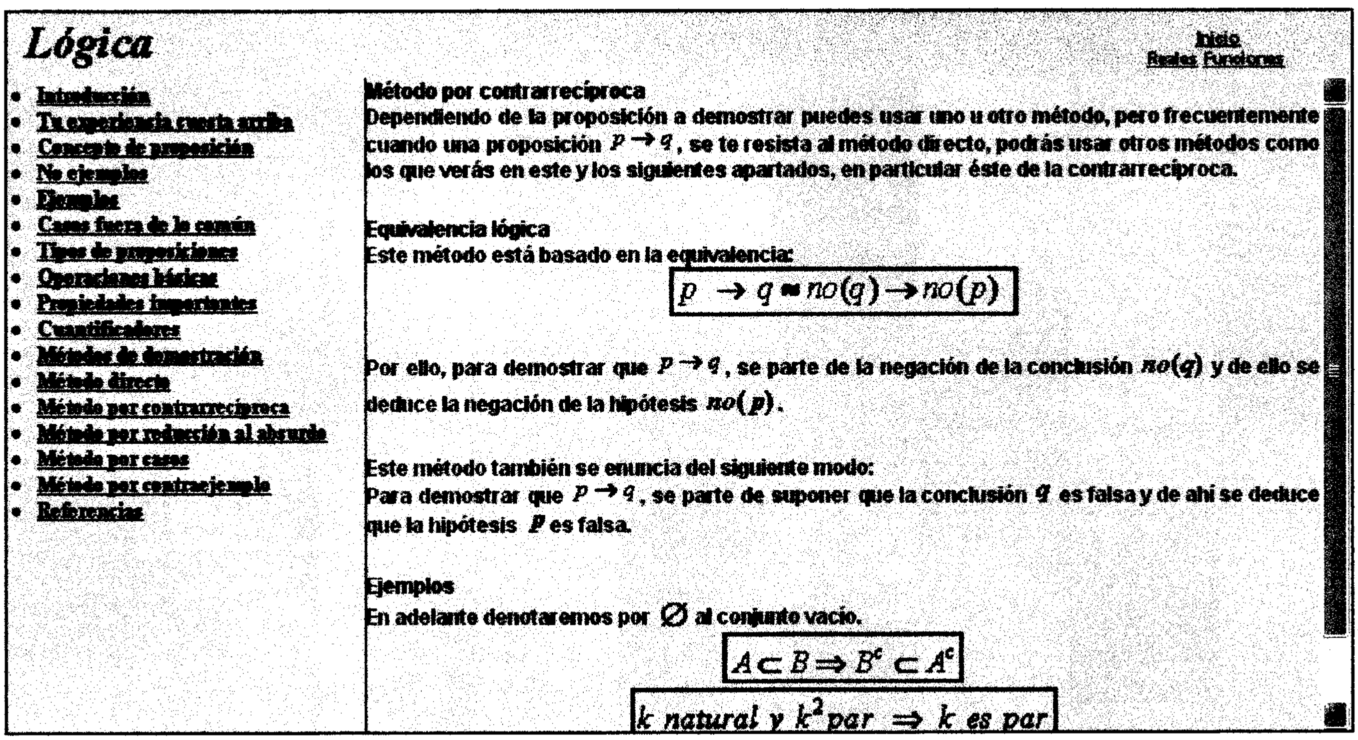
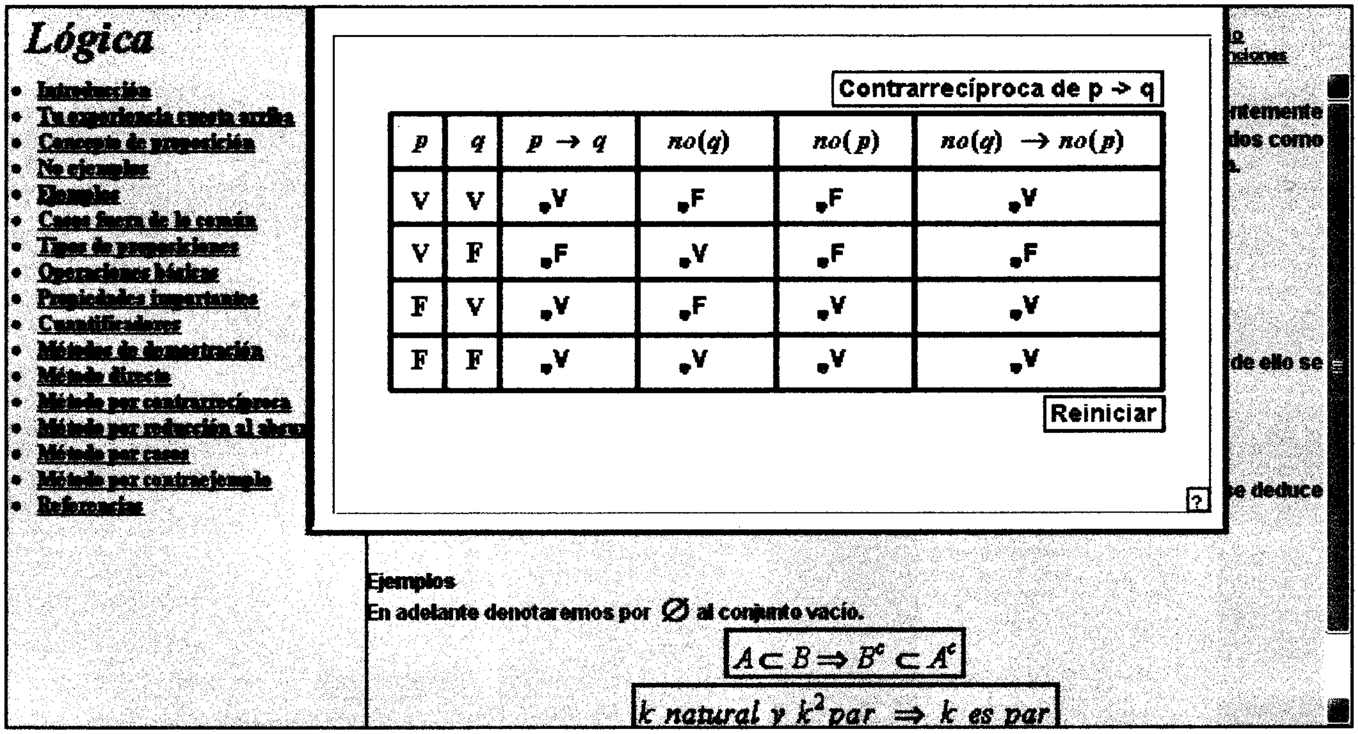
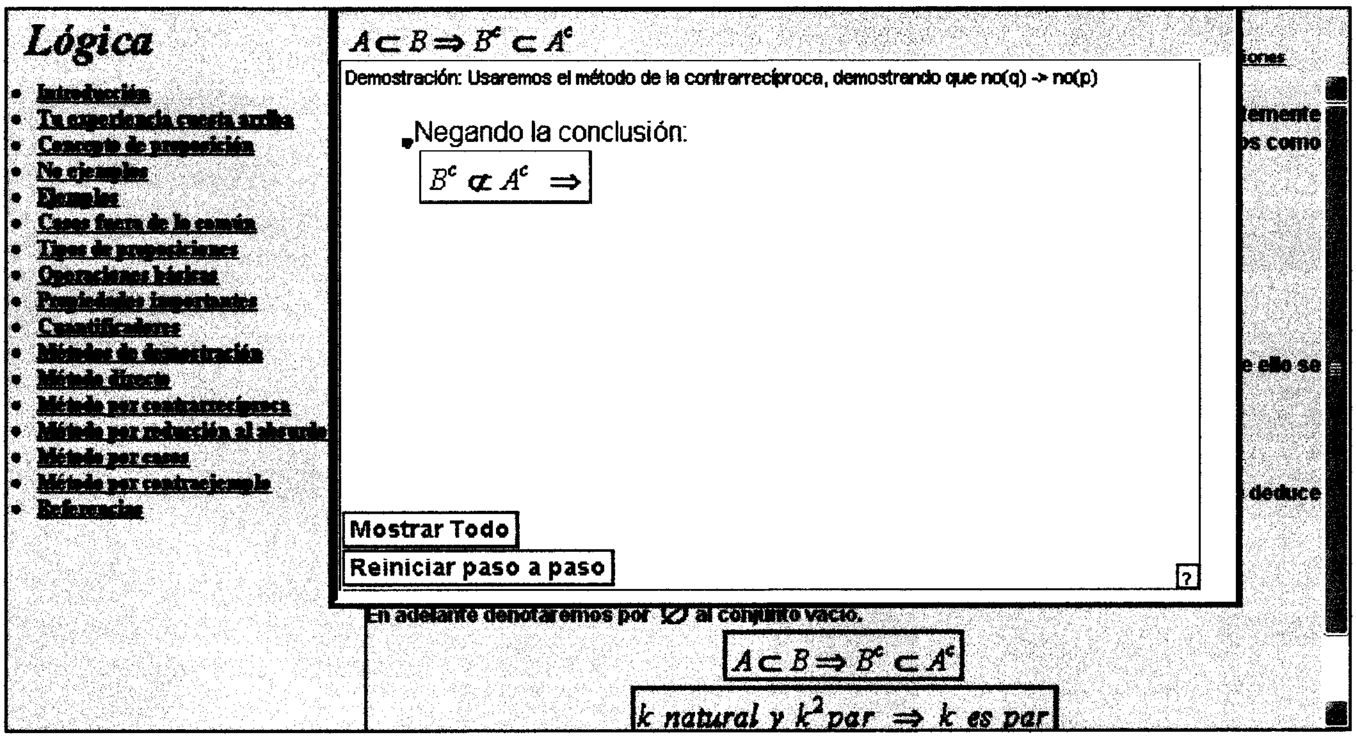


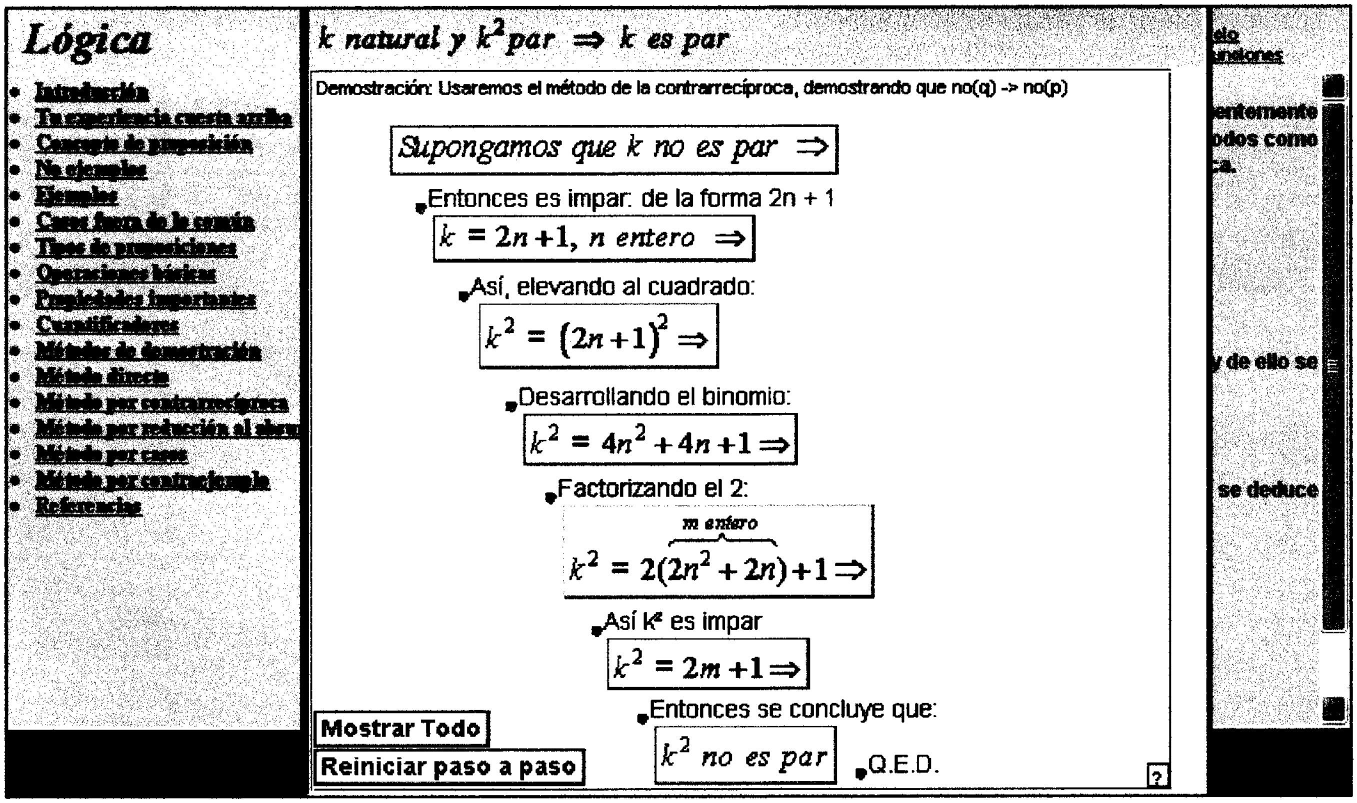
Figura lógica interactiva del método por contrarrecíproca (ventana flotante)



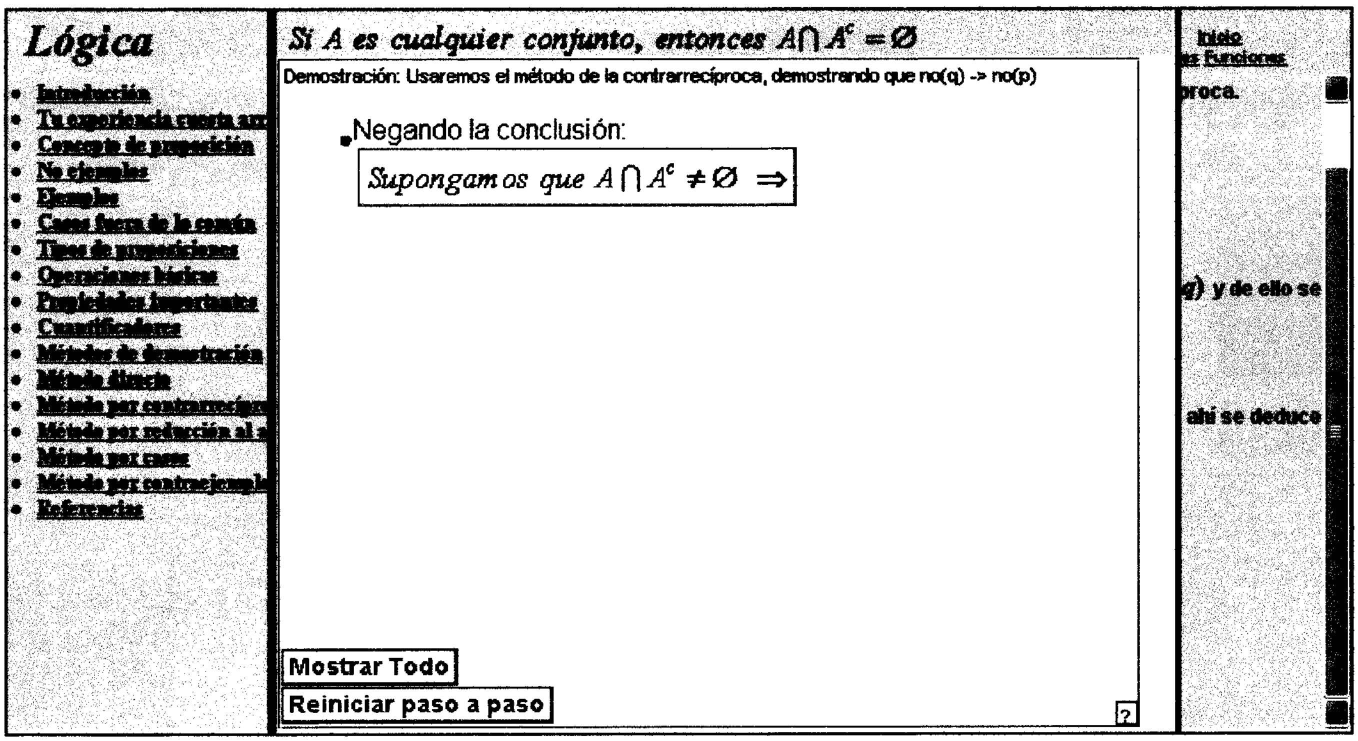
Ejemplo interactivo del método por contrarrecíproca (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método por contrarrecíproca (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método por contrarrecíproca (ventana flotante)



El método por reducción al absurdo

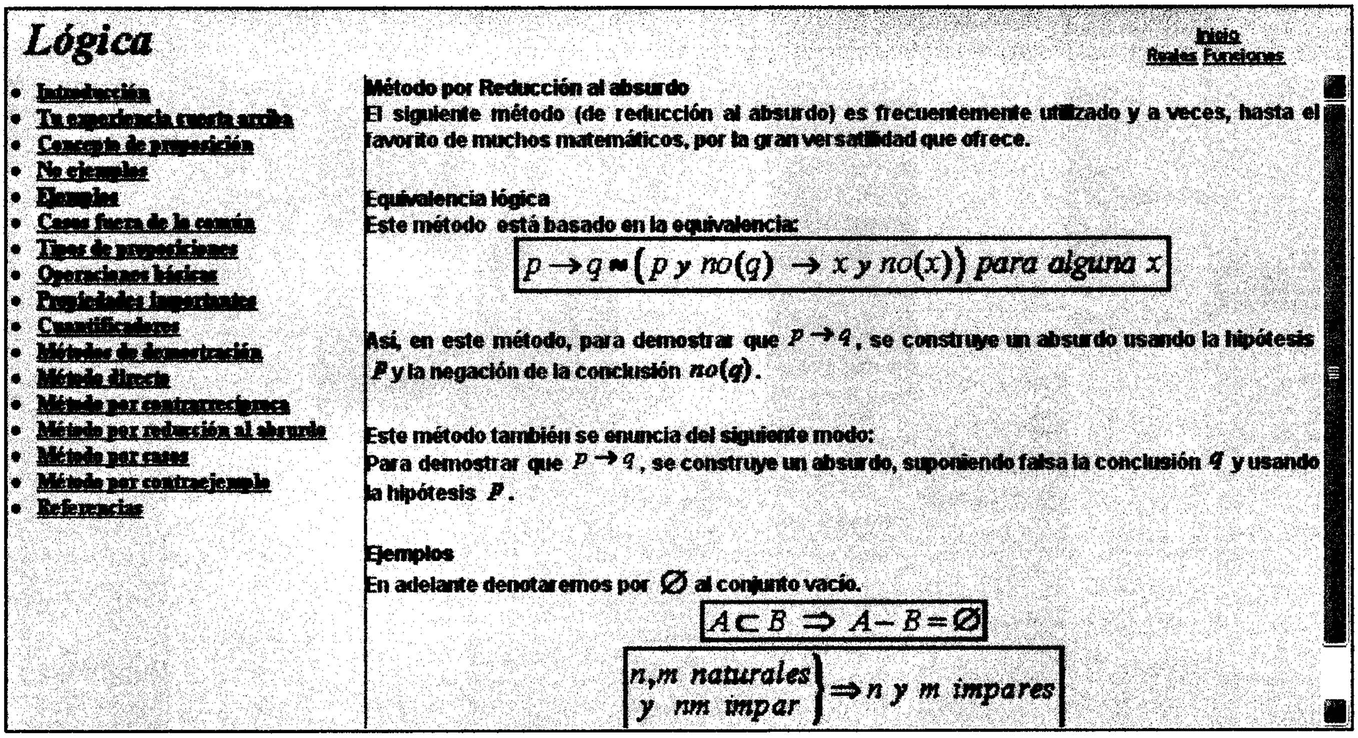
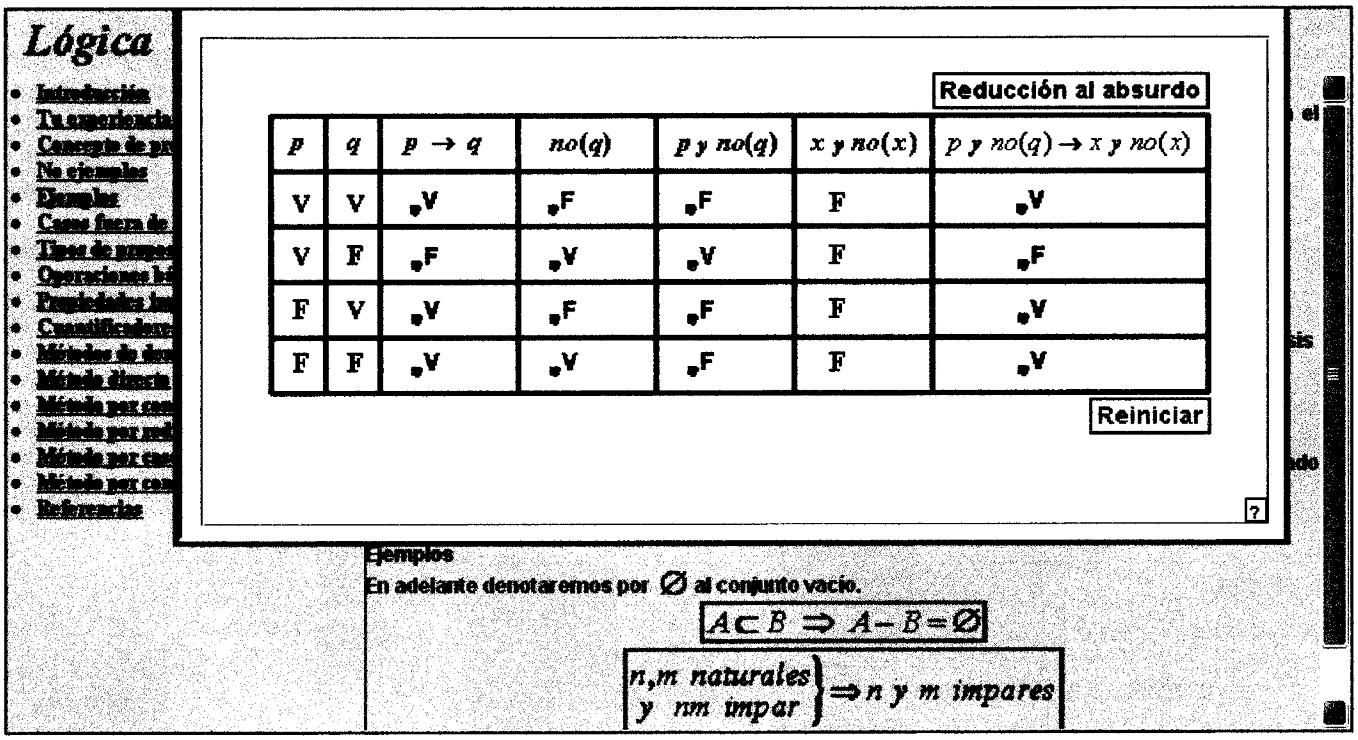
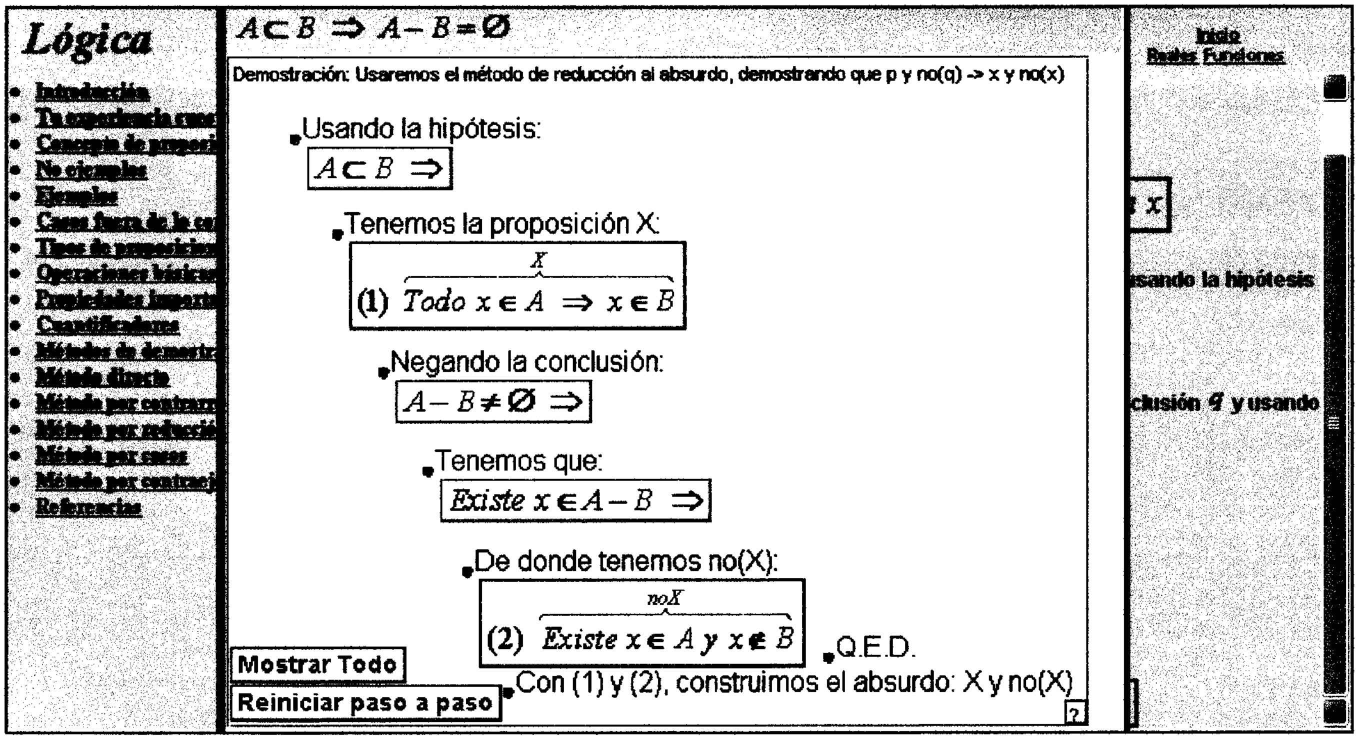


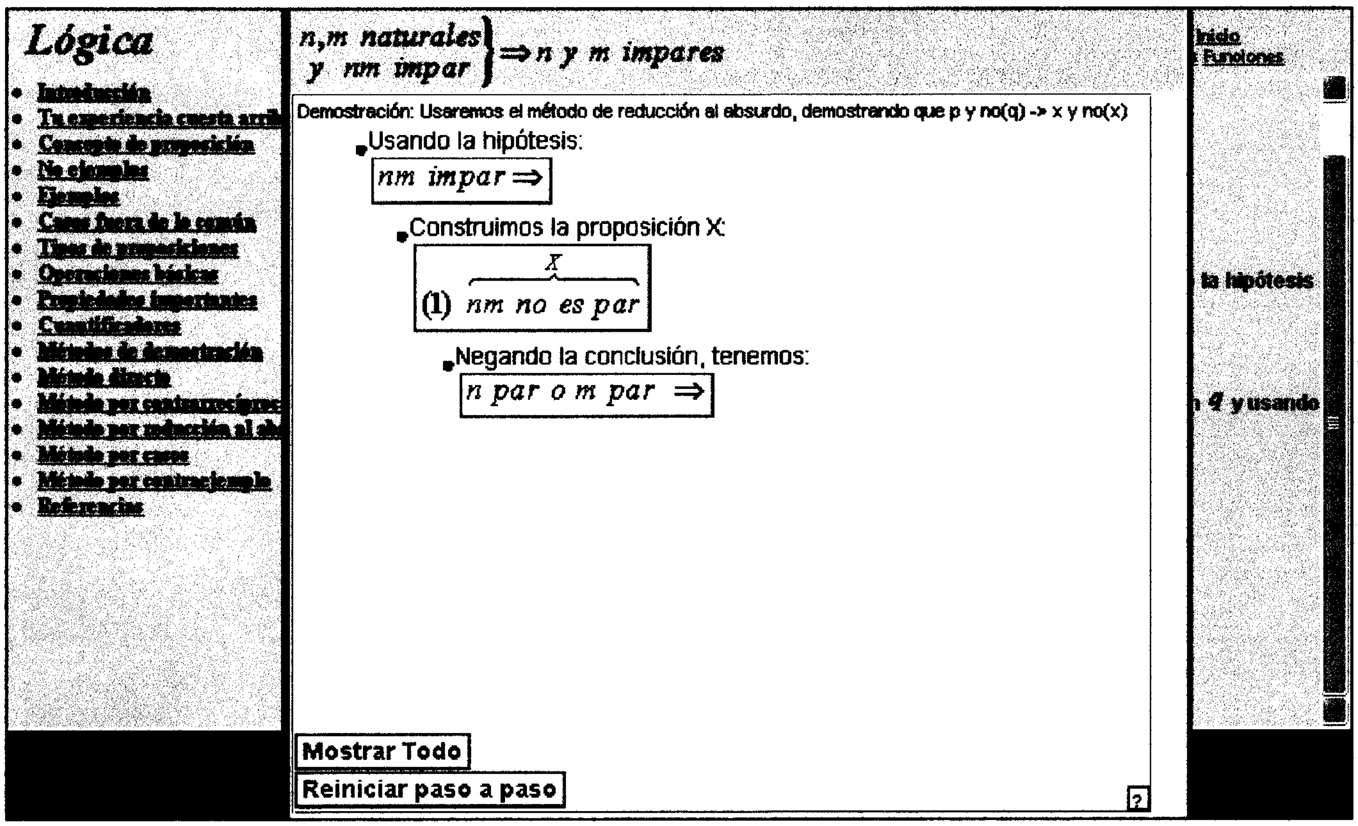
Figura lógica interactiva del método por reducción al absurdo (ventana flotante)



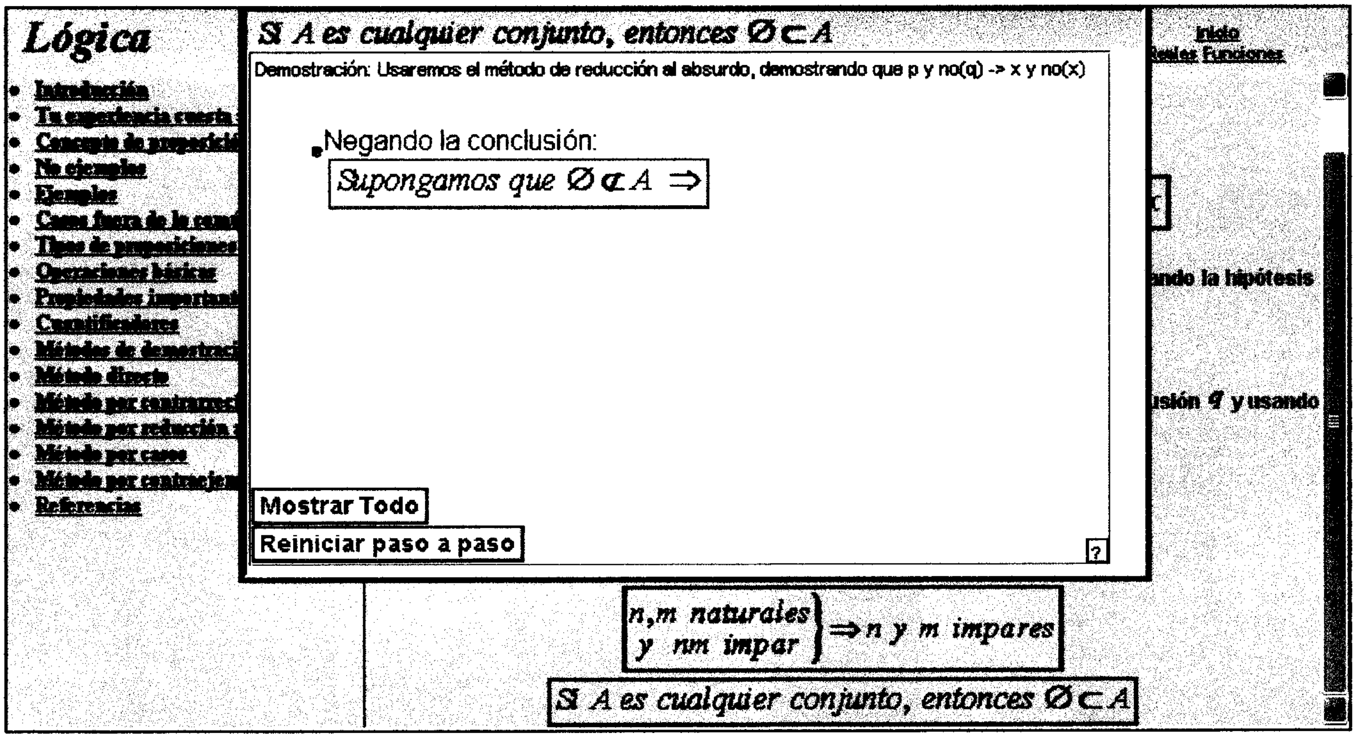
Ejemplo interactivo del método por reducción al absurdo (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método por reducción al absurdo (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método por reducción al absurdo (ventana flotante)



El método por casos

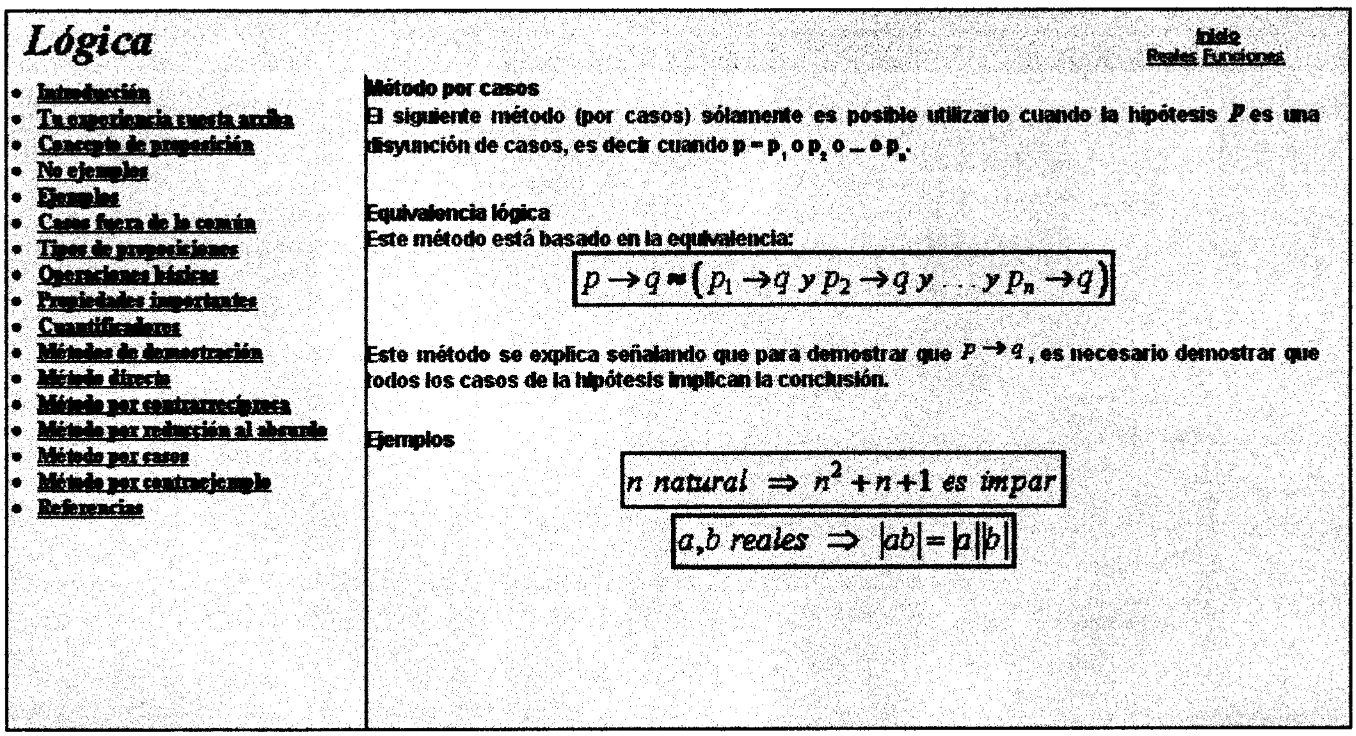
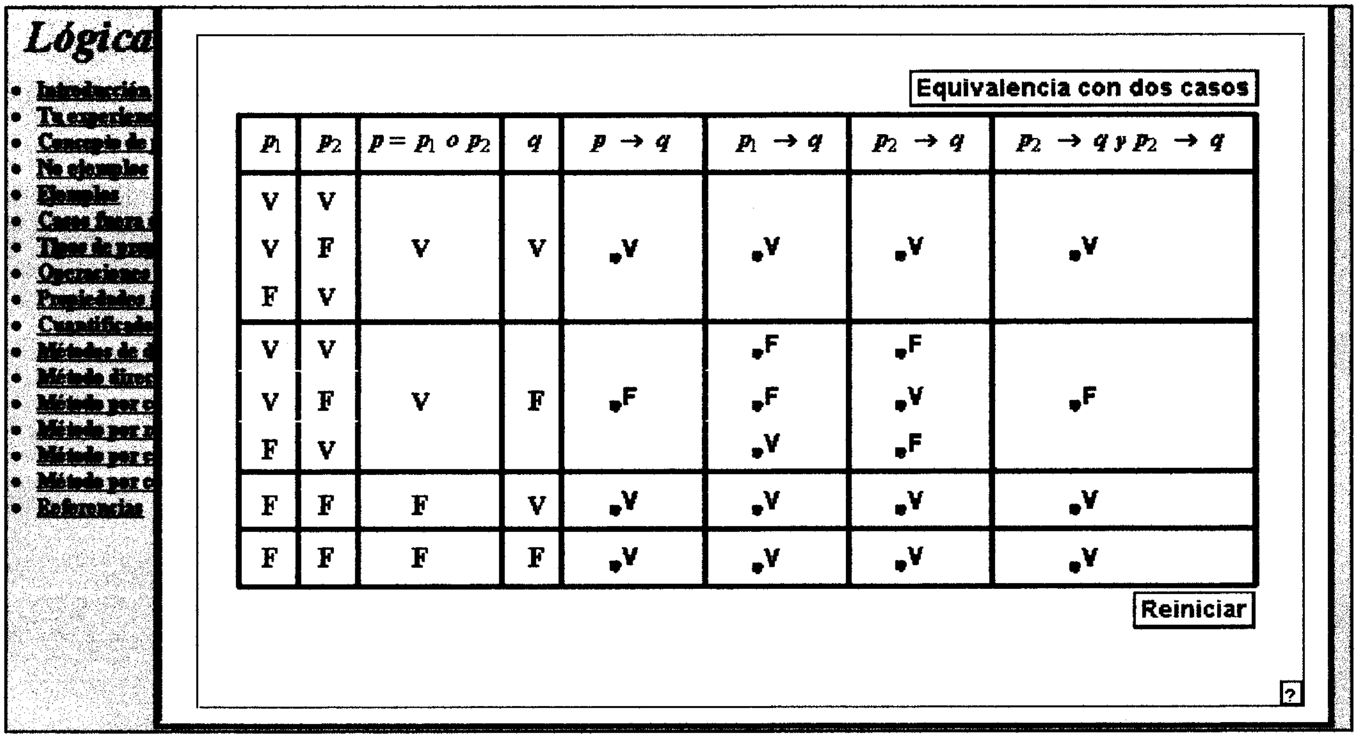
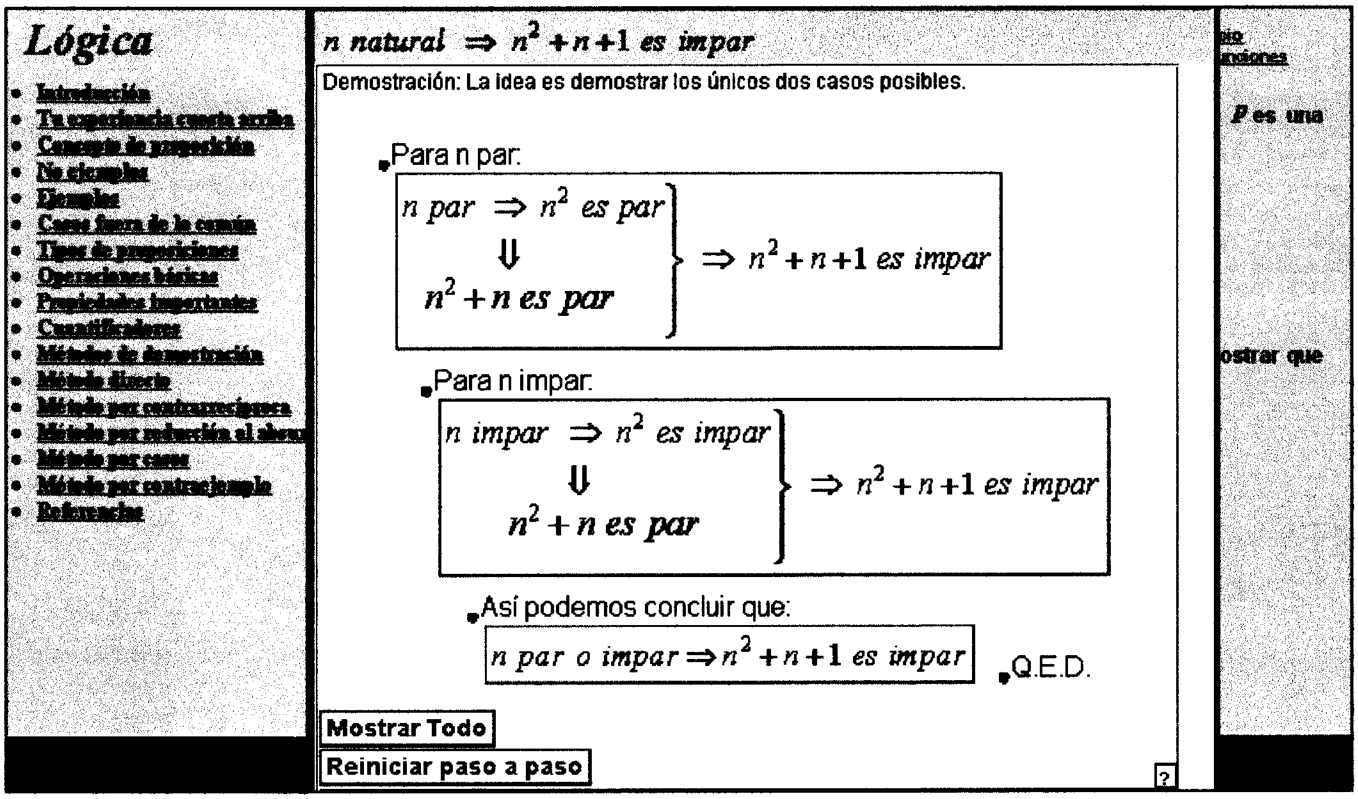


Figura lógica interactiva del método por casos (ventana flotante)

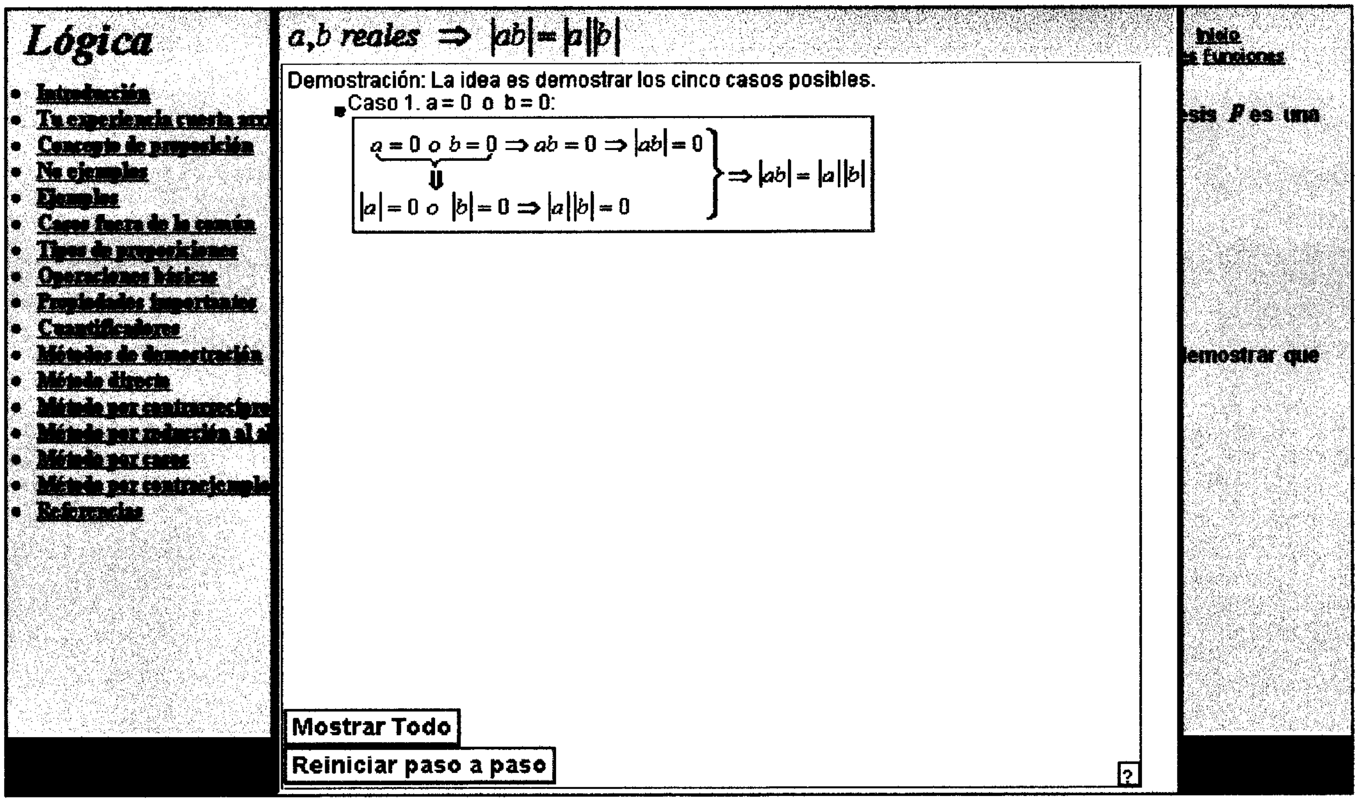


p_1	p_2	$p = p_1 \text{ o } p_2$	q	$p \to q$	$p_1 \to q$	$p_2 \to q$	$p_2 \to q$ y $p_2 \to q$
V	V						
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V						
V	V				F	F	
V	F	V	F	F	F	V	F
F	V				V	F	
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

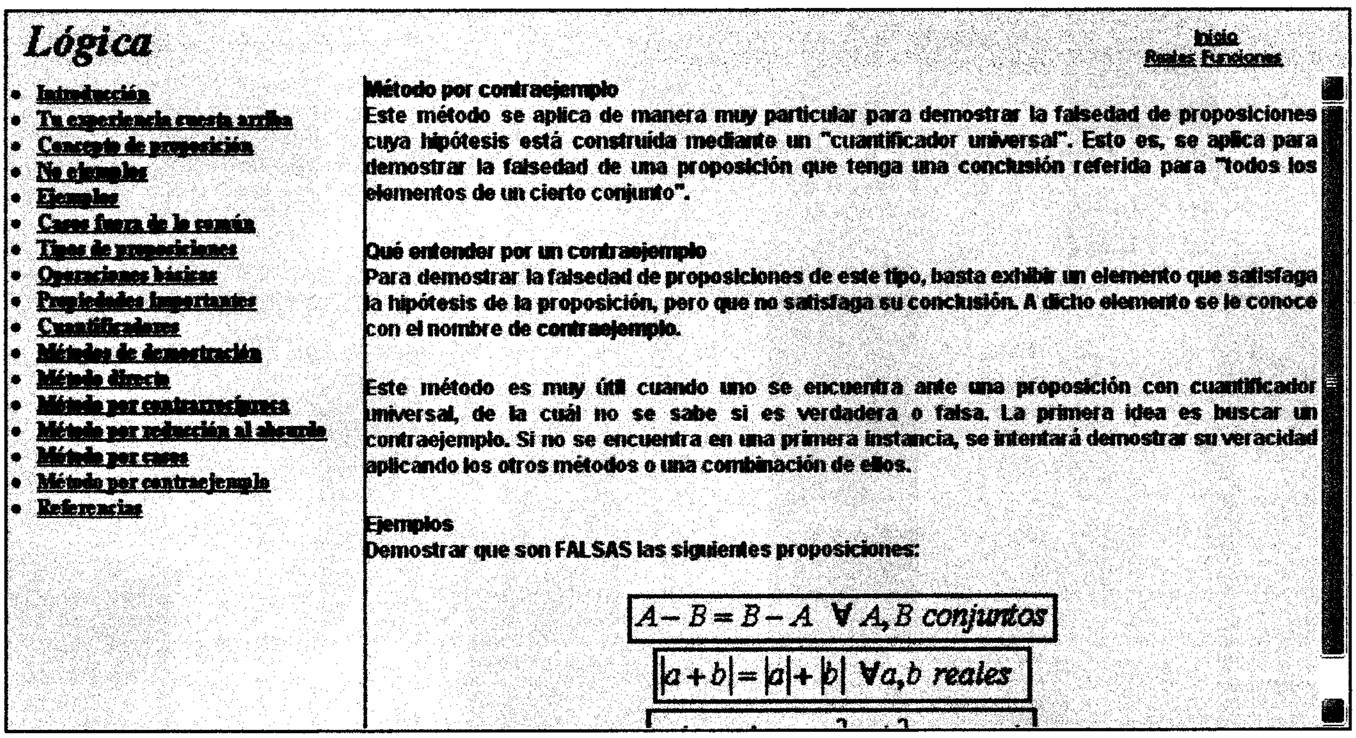
Ejemplo interactivo del método por casos (ventana flotante)



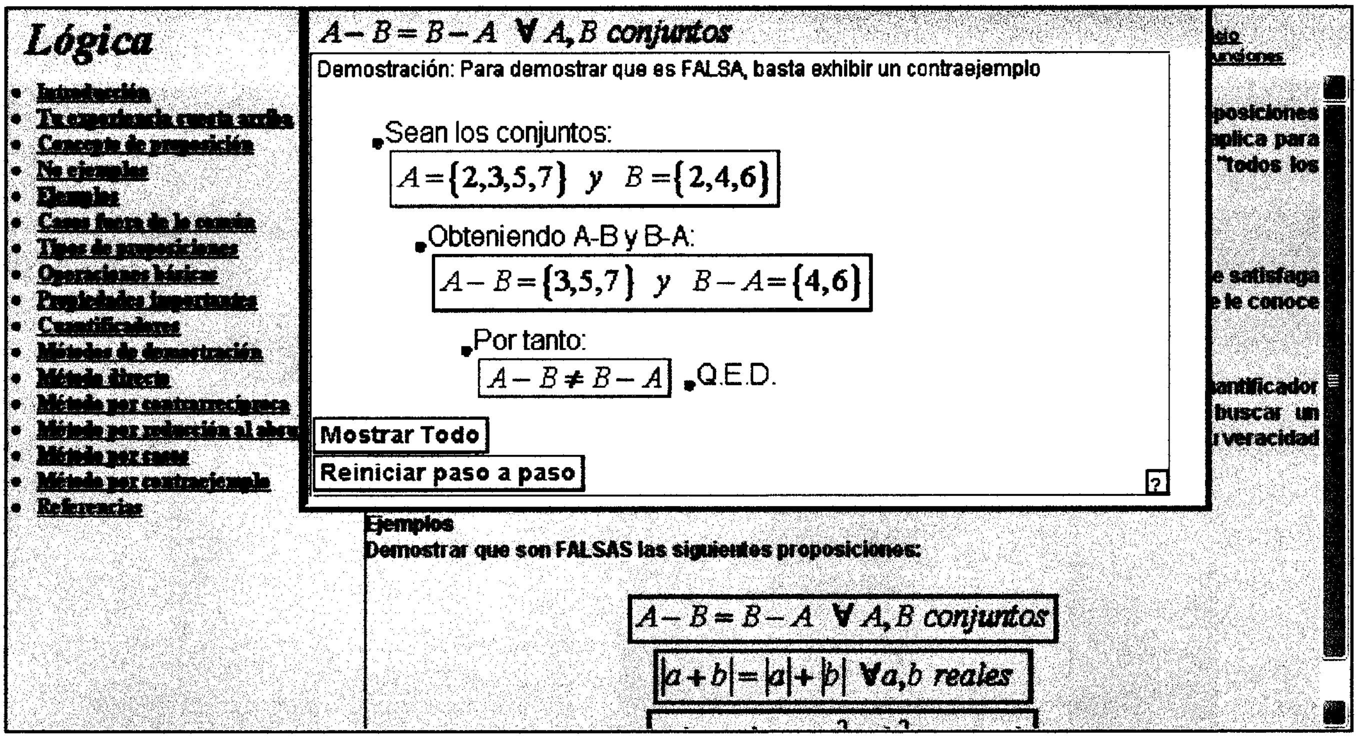
Ejemplo interactivo del método por casos (ventana flotante)



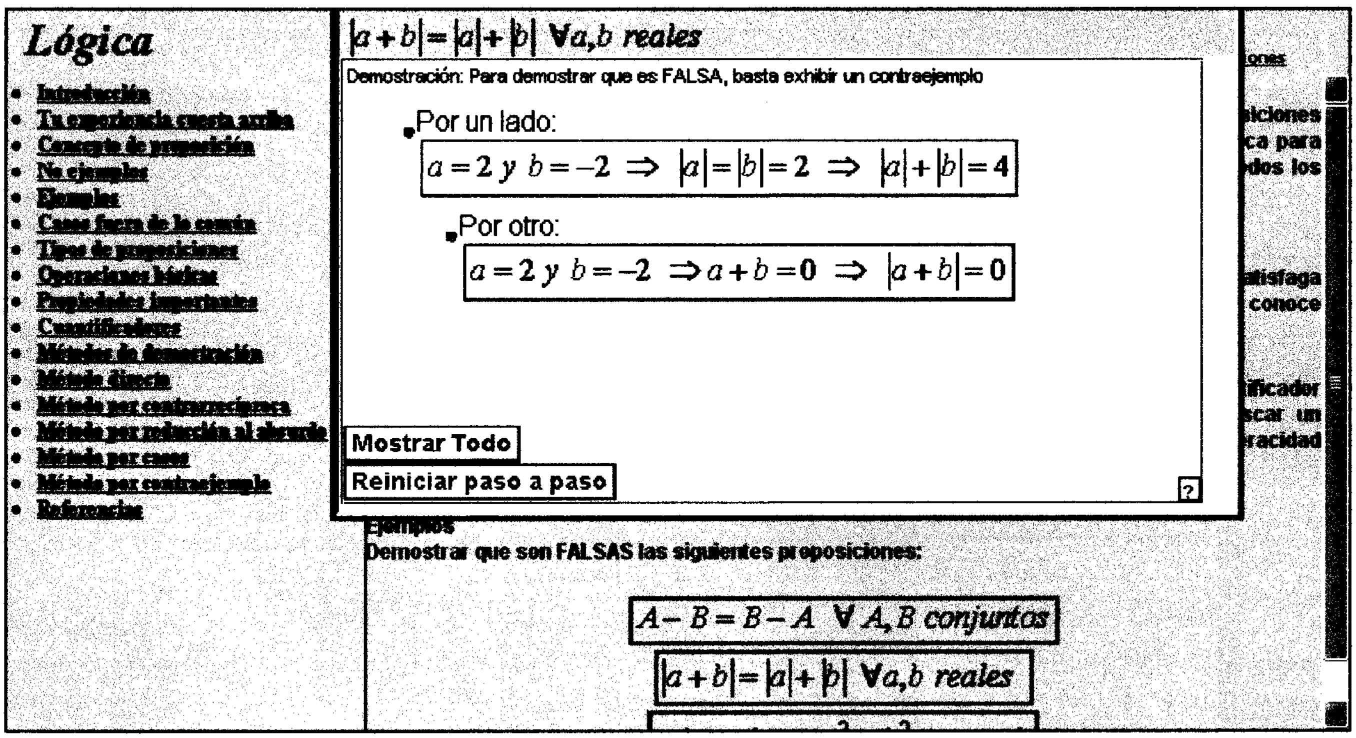
El método por contraejemplo



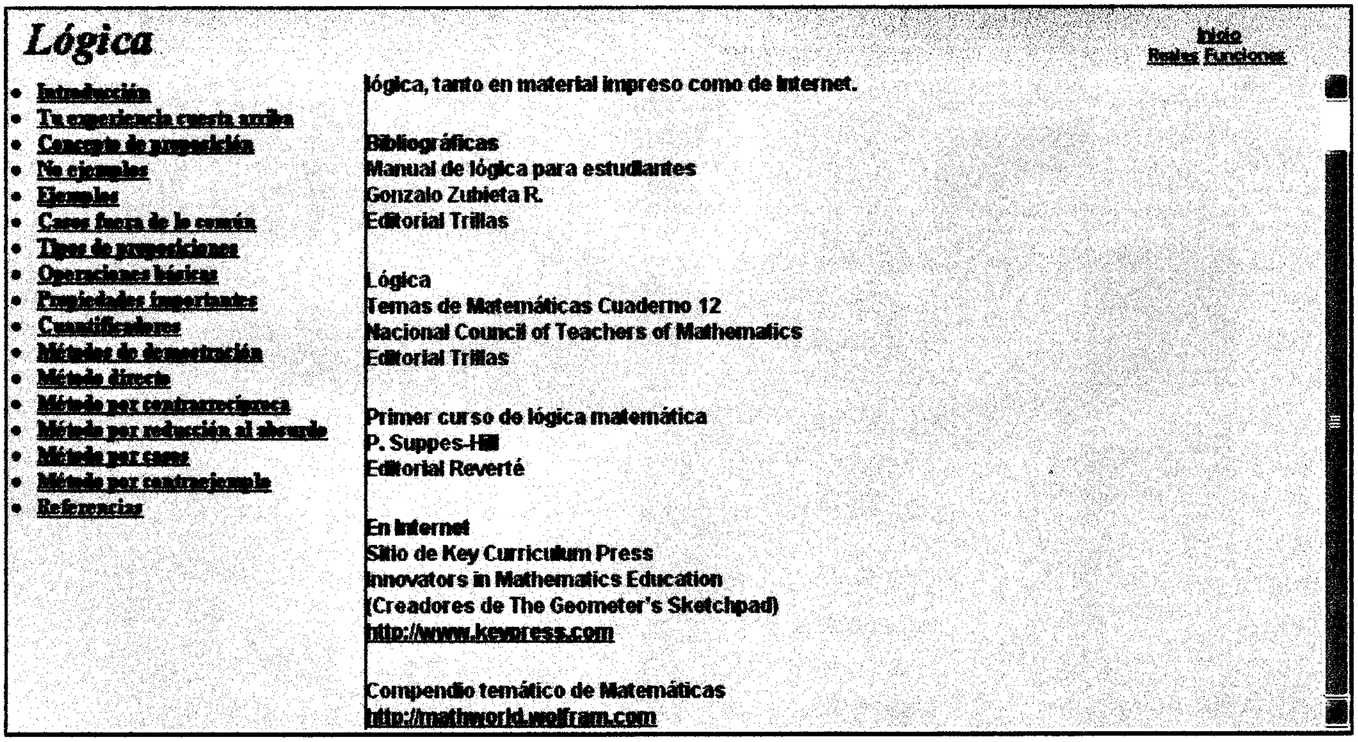
Ejemplo interactivo del método por contraejemplo (ventana flotante)



Ejemplo interactivo del método por contraejemplo (ventana flotante)



Referencias bibliográficas y de Internet



El segundo tema: Números reales

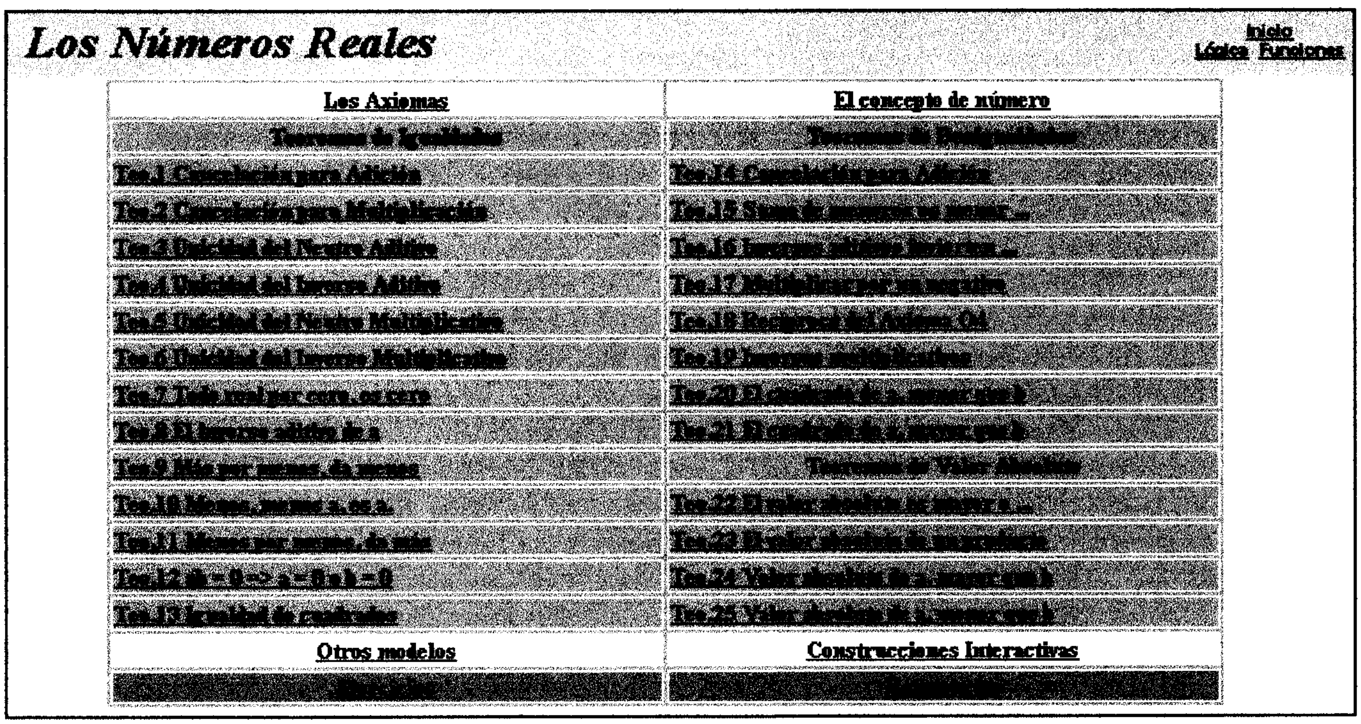
Aquí se da un tratamiento axiomático de los números reales y la parte medular son las **demostraciones formales interactivas paso a paso de diversos teoremas**, así como las **Construcciones interactivas** que ilustran los diversos teoremas vistos, en donde es posible explorar y visualizar diversas situaciones de los mismos.

En la sección de **Otros modelos**, hay diversos resultados con demostraciones formales interactivas paso a paso, sobre los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales entre los que se cuentan, el principio de inducción matemática y su equivalente principio del buen orden, la densidad de los racionales, la construcción de irracionales y el concepto de cardinalidad.

Un tema muy importante que también es tratado en **Otros modelos** es el **axioma del supremo** y diversas aplicaciones del mismo, como por ejemplo que los naturales no son un conjunto acotado, la propiedad arquimedeana y el resultado que dice: "Entre dos reales cualesquiera existe un irracional", entre otros.

Además en la sección **El concepto de número**, se podrán encontrar algunas notas históricas sobre este concepto y su desarrollo, y además, una pequeña nota sobre el Axioma del supremo. De manera importante destaca un artículo de investigación del año 2004, que responde a la pregunta ¿Es innato el concepto de número?

Se proporciona una sección de **Ejercicios** que permiten reforzar los conocimientos adquiridos y también una sección de **Referencias**, tanto bibliográficas como de Internet.



Para empezar se presentan los Axiomas de los números reales distinguidos con colores, como una idea y guía visual cuando nos refiramos a ellos en las diversas demostraciones interactivas y una nota sobre el axioma del supremo.

Axiomas de los Números Reales

Reales
Lógica Funciones

Nombre	Adición	Multiplicación
Cerradura	A1) $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ a+b \in \mathbb{R}$	M1) $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ ab \in \mathbb{R}$
Conmutativa	A2) $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a$	M2) $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ ab = ba$
Asociativa	A3) $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a+(b+c) = (a+b)+c$	M3) $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a(bc) = (ab)c$
Neutro	A4) $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \exists\ 0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $a+0 = 0+a = a$	M4) $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \exists\ 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0$ *tal que* $a1 = 1a = a$
Inverso	A5) *Dado* $a \in \mathbb{R},\ \exists\ -a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a+(-a) = (-a)+a = 0$	M5) *Dado* $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}$ *tal que* $aa^{-1} = aa^{-1} = 1$
Distributiva	D) $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a(b+c) = ab+ac$	
	Orden	
Tricotomía	O1) $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$, *se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones*: $a = b,\ a < b$ *o* $b < a$	
Transitiva	O2) *Si* $a < b$ y $b < c$, *entonces* $a < c$	
Preserva Orden bajo Adición	O3) *Si* $a < b$ *entonces* $a+c < b+c\ \forall\ c \in \mathbb{R}$	
Preserva Orden bajo Multiplicación ($0 < c$)	O4) *Si* $0 < c$ y $a < b$ *entonces* $ac < bc$	
Axioma del Supremo (da clic)	S) (En Otros modelos encontrarás su enunciado y algunas aplicaciones)	

El axioma del supremo y su importancia (ventana flotante).

Axioma del Supremo

Todo conjunto A (no vacío) de reales, acotado superiormente posee un supremo, es decir, existe un real s tal que $s = \sup A$.

En donde:

A está acotado superiormente si $\exists$ *un real* M *tal que* $x \leq M\ \forall\ x \in A$	$s = \sup A$ *si :* *a)* s *es cota superior de* A *b)* t *cota superior de* $A \Rightarrow s \leq t$.
Además: A *todo número* M *con esta propiedad se le llama cota superior de* A	**Es decir:** s *es la mínima de todas las cotas superiores de* A

Su importancia

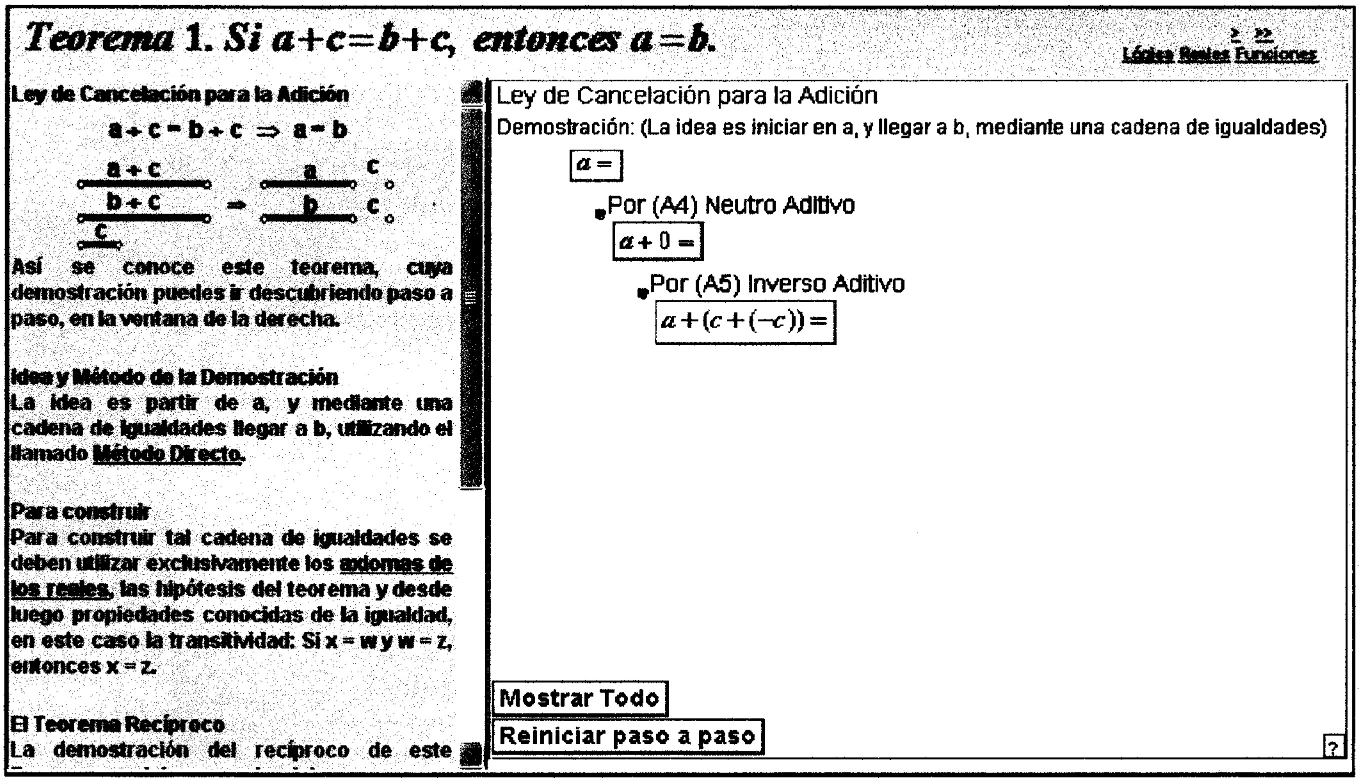
Este axioma es necesario para establecer la existencia de los números irracionales y por consecuencia para completar los números reales.

Con este axioma es posible atribuir a los números reales la propiedad de continuidad, es decir, de poder establecer una correspondencia biunívoca entre los reales y los puntos de una recta.

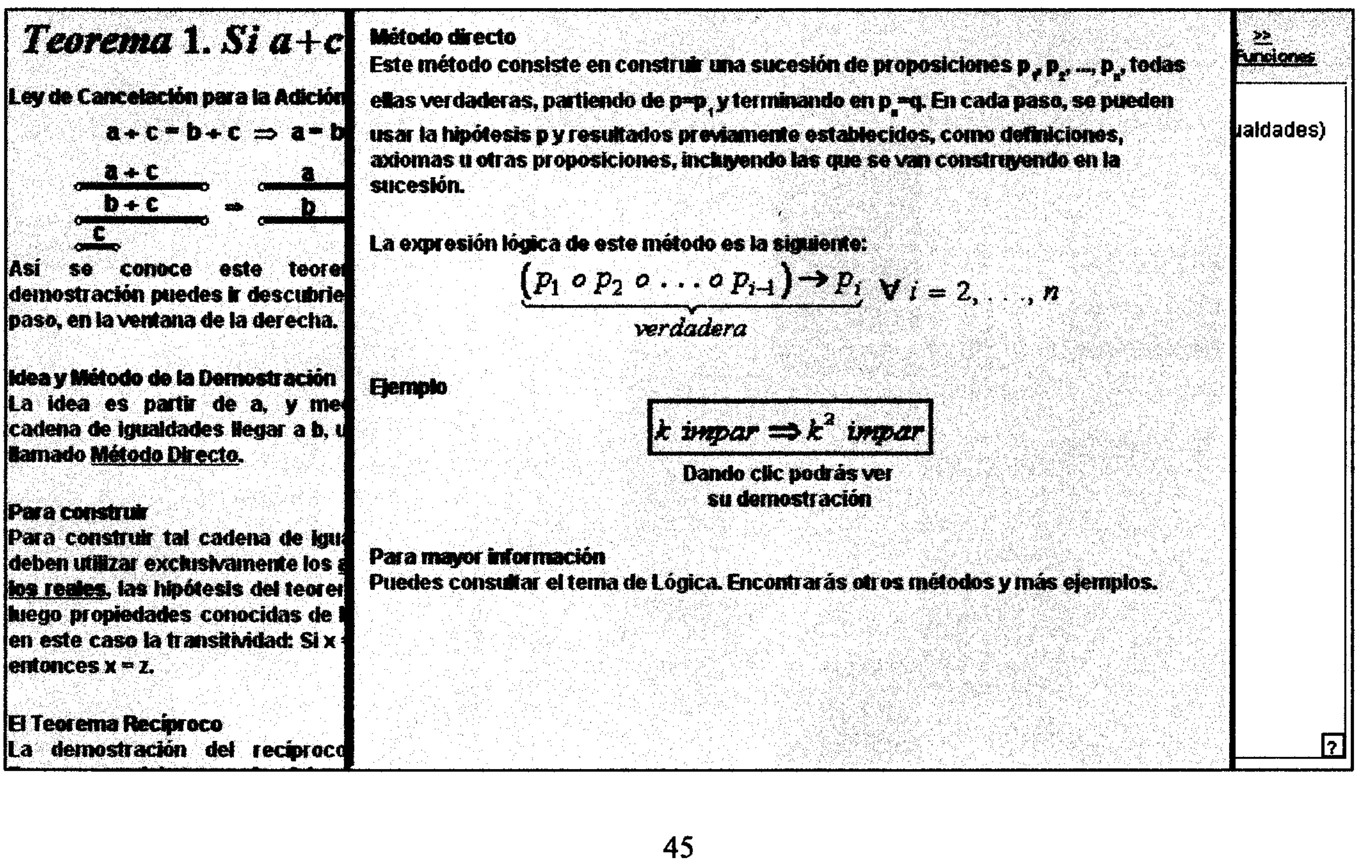
De una manera coloquial, se puede decir que este axioma garantiza que los reales llenan toda la recta.

Este axioma es característico de los números reales. Los racionales por ejemplo, no lo cumplen.

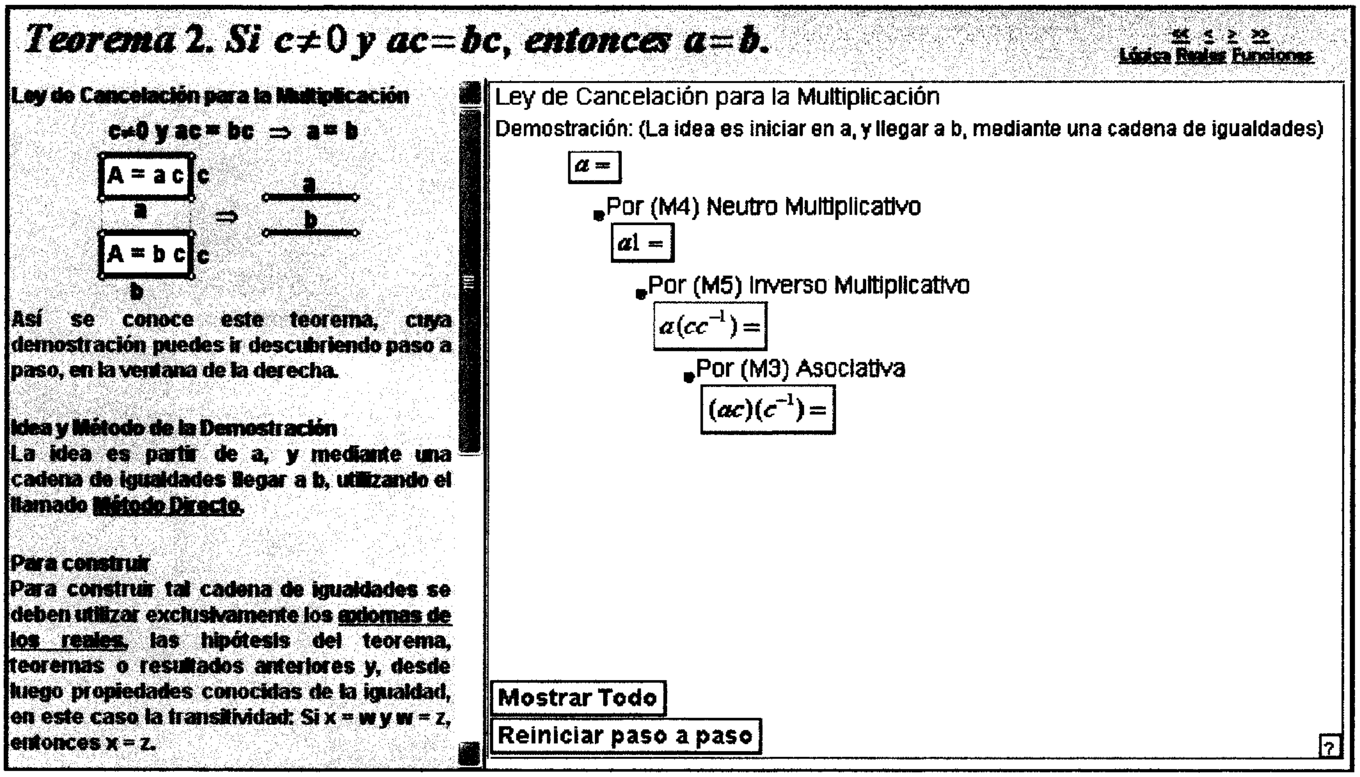
Los teoremas: Todos tienen una idea gráfica, un nombre, una idea para hacer la demostración y una demostración interactiva.



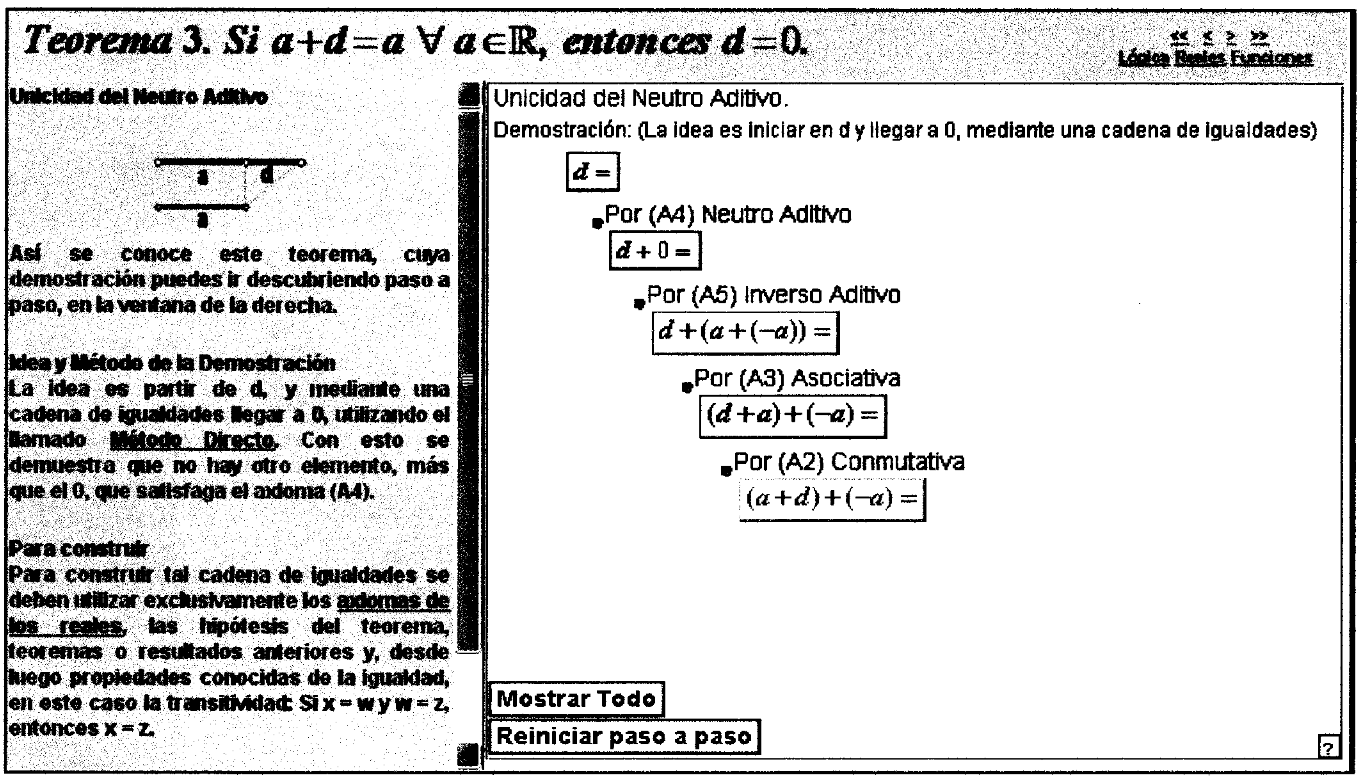
Además cuentan con un acceso al método utilizado en la demostración en una ventana flotante, incluyendo un ejemplo de aplicación de dicho método.



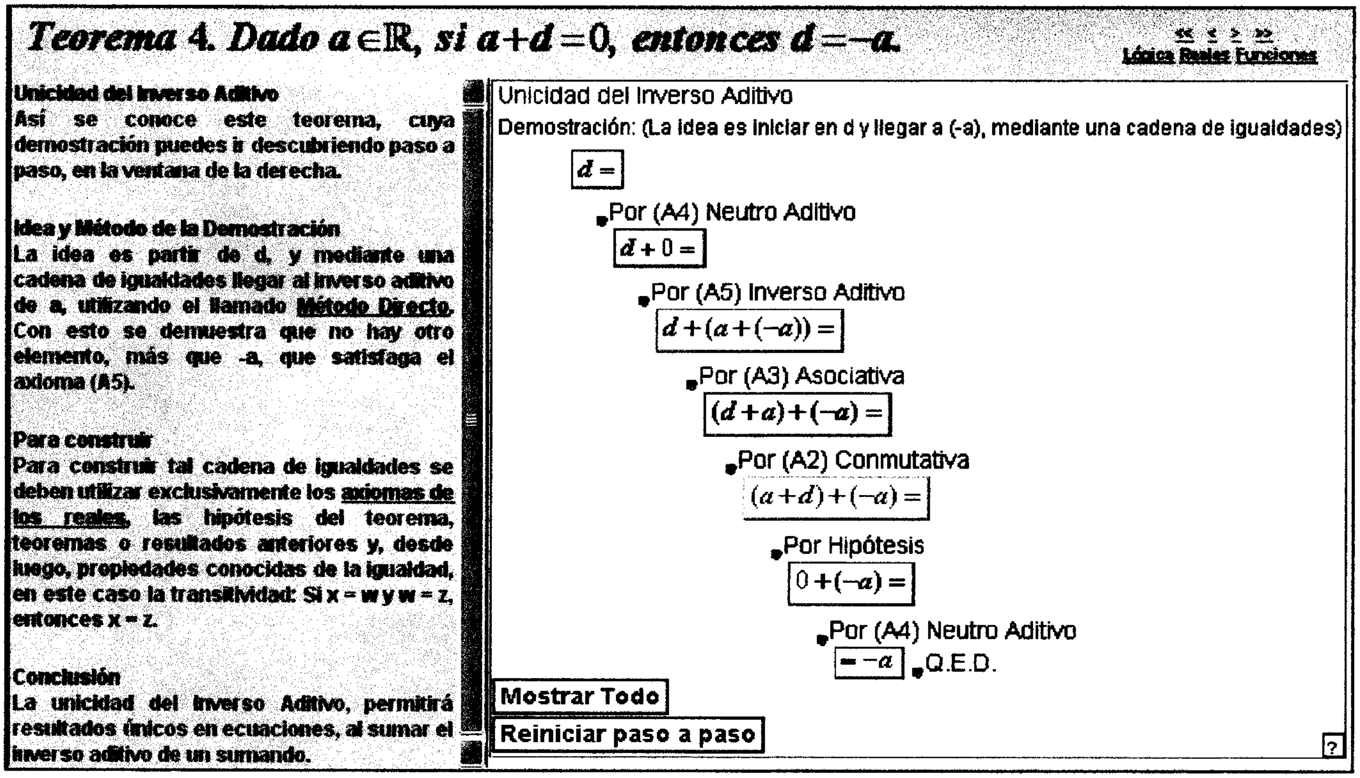
También en cada teorema se tiene acceso a los axiomas de los reales y se mantienen los colores, cuando éstos se aplican en algún paso (ventana flotante).



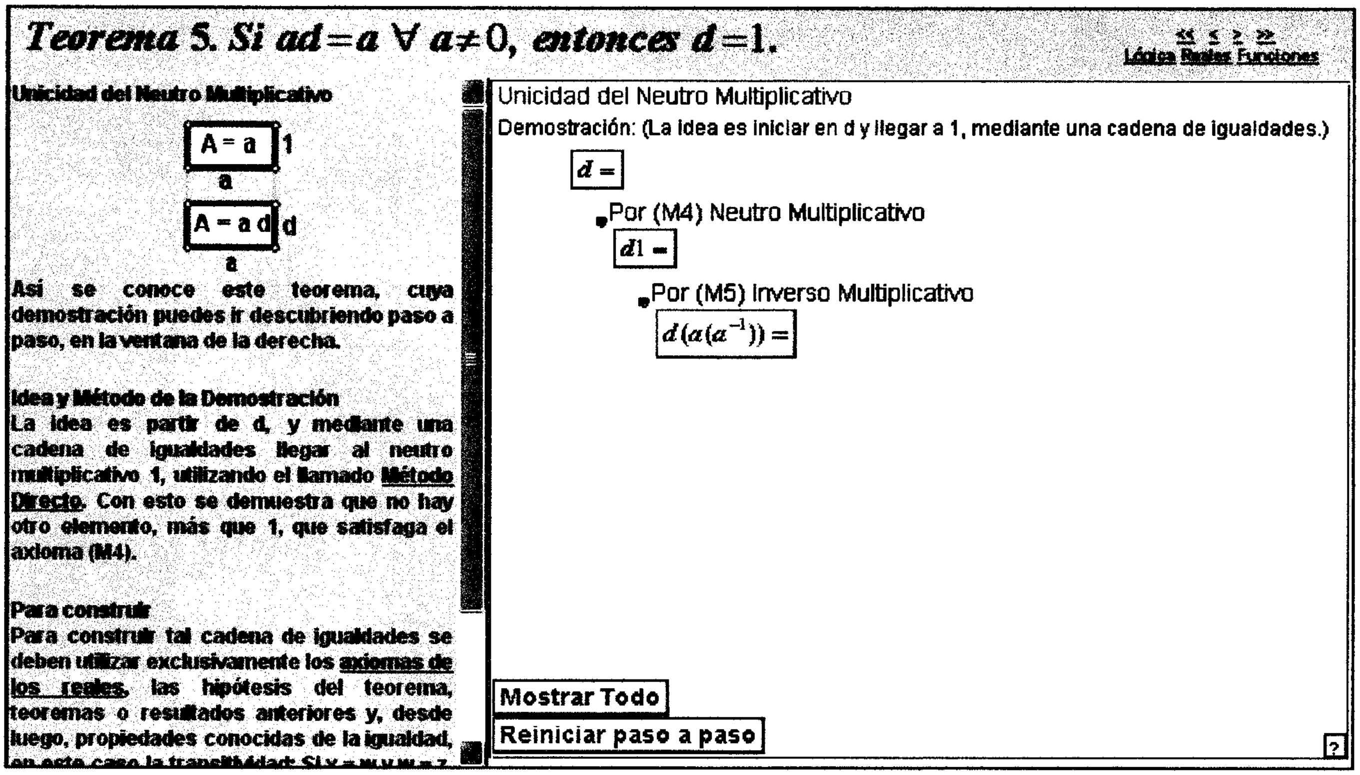
Las demostraciones tienen rigor matemático y son interactivas paso a paso. Se pueden repetir cuantas veces se quiera o presentarlas completas de una vez.



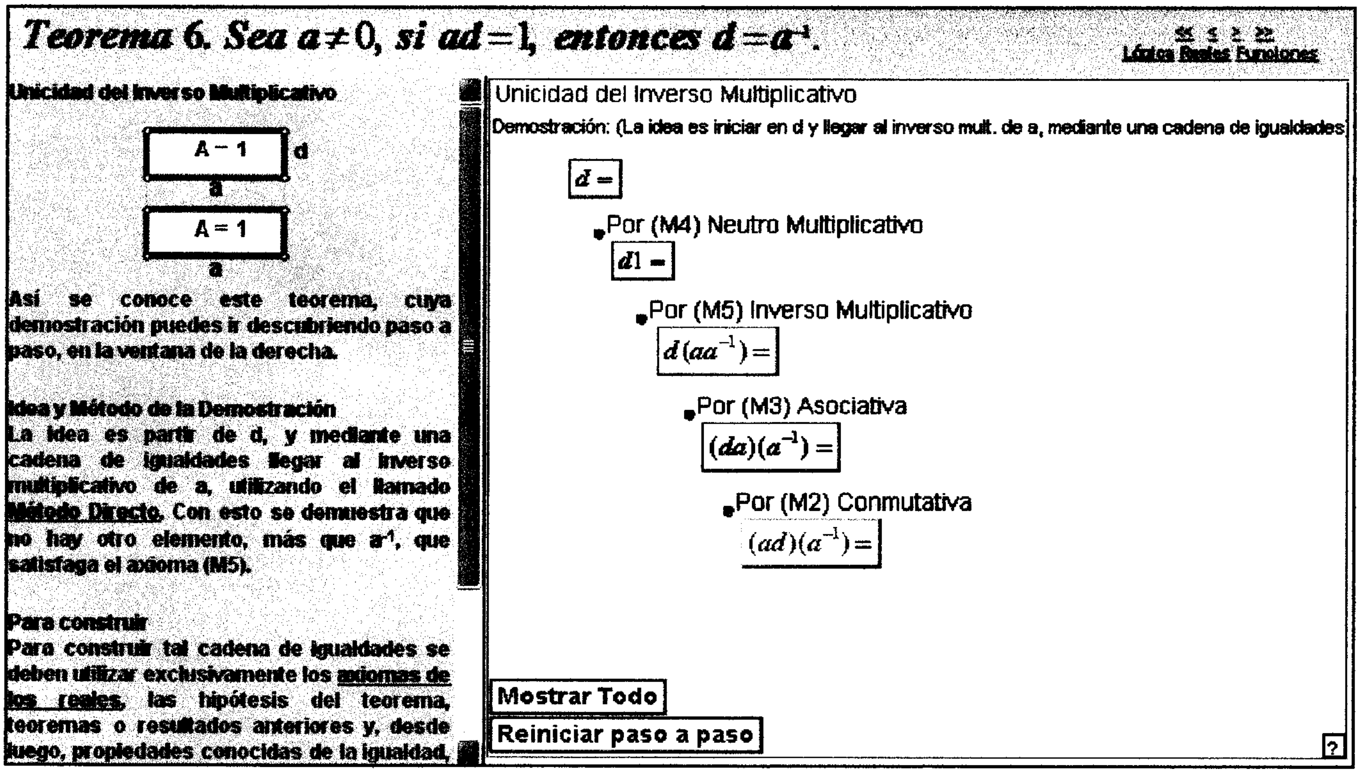
En cada paso se usan los colores de los axiomas para mantener una guía visual y ayudar a recordarlos con mayor facilidad.



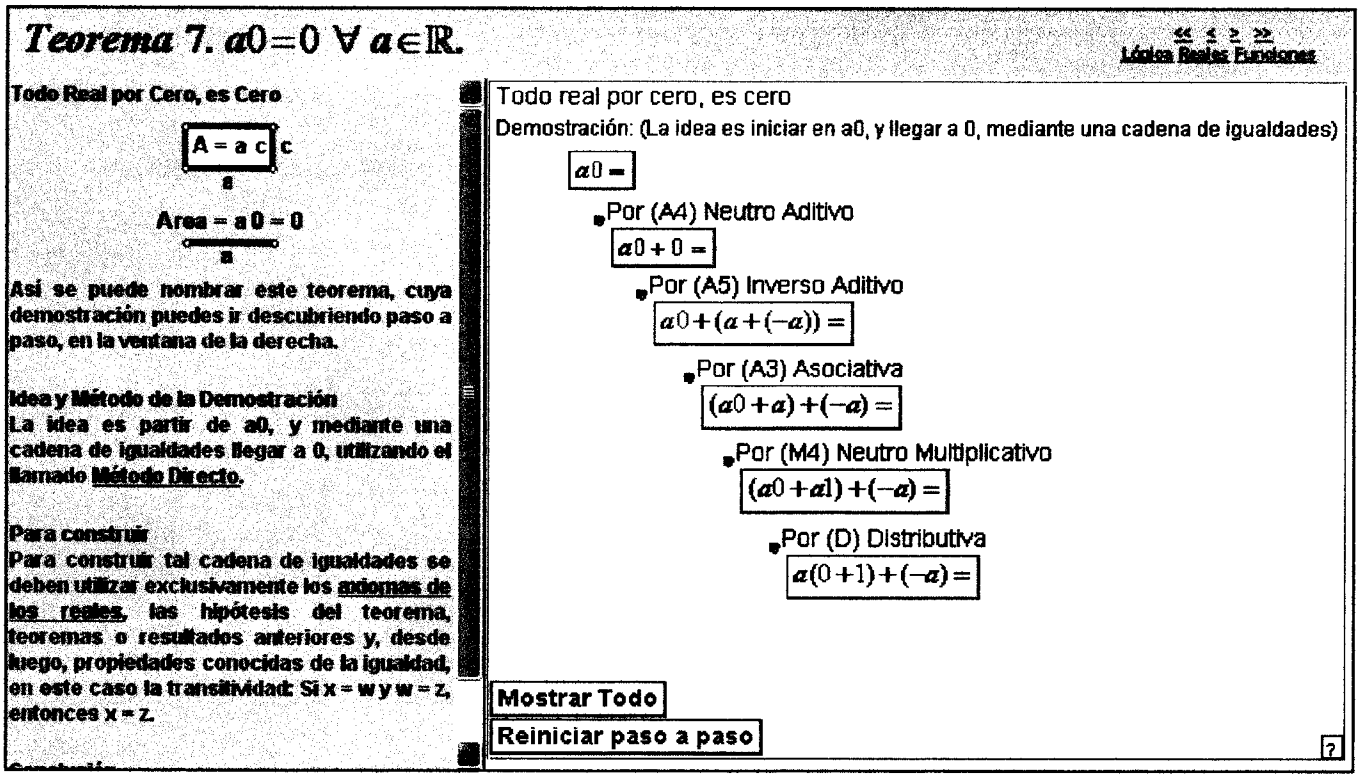
En cada paso se enuncia el axioma que se está usando y en todo momento se tiene acceso a los axiomas de los reales en una ventana flotante.



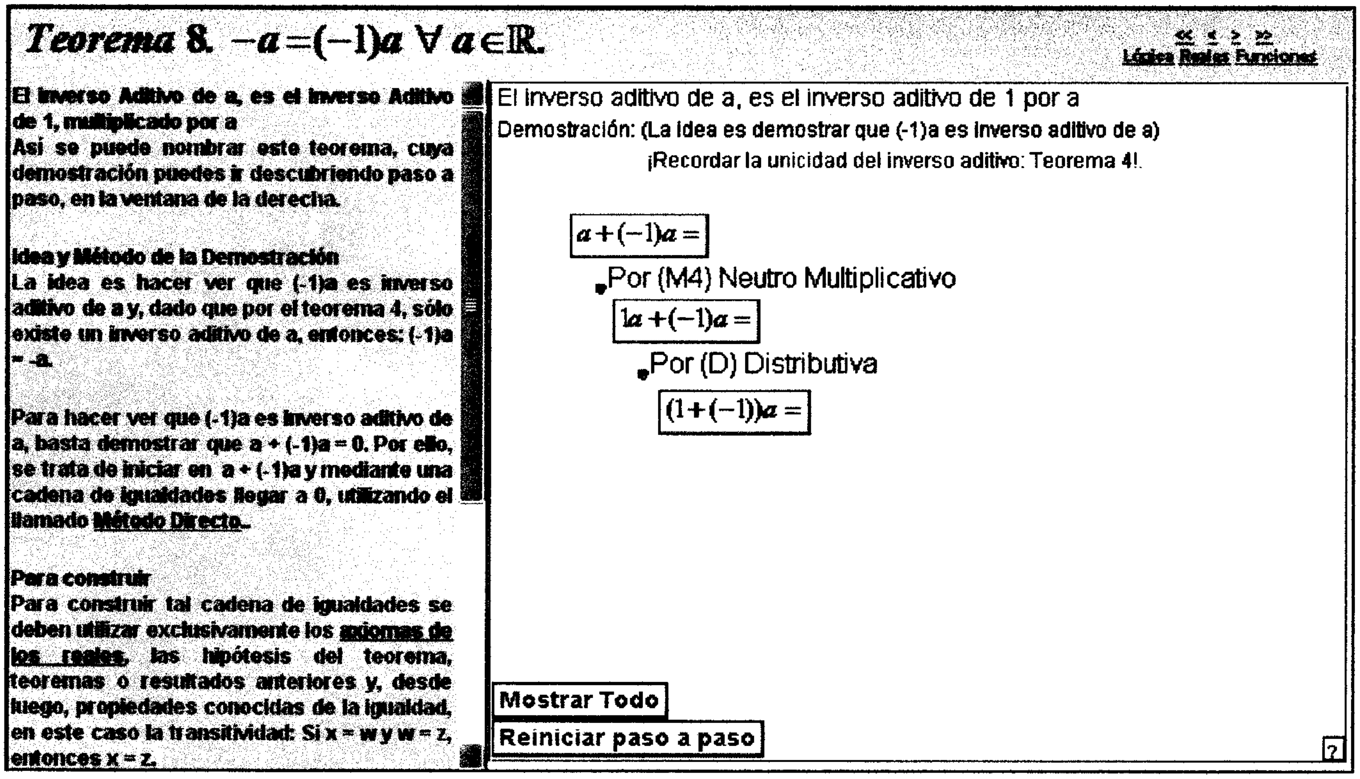
En cada momento, se puede acceder al teorema anterior o siguiente en la barra de navegación de la parte superior derecha.



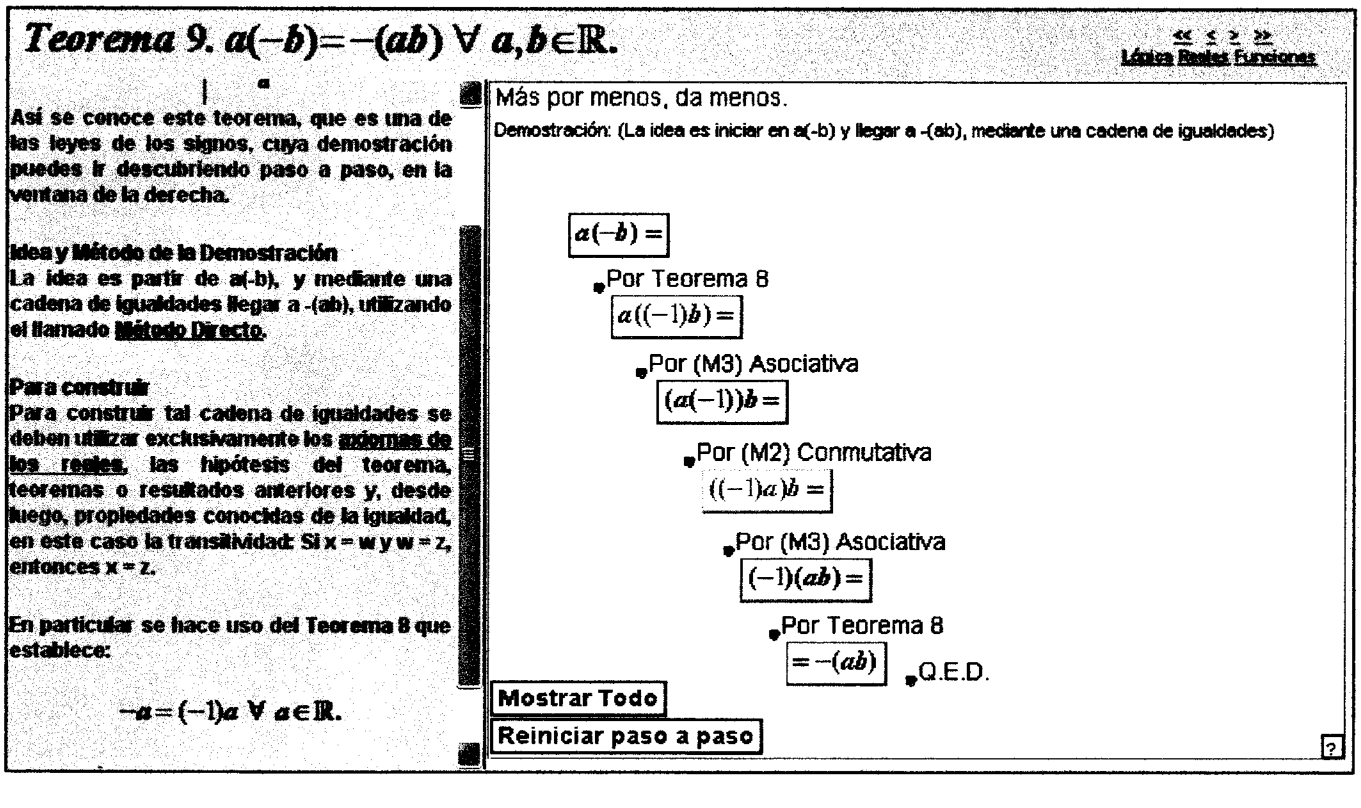
Inclusive se puede acceder al último o al primer teorema en la barra de navegación de la parte superior derecha.



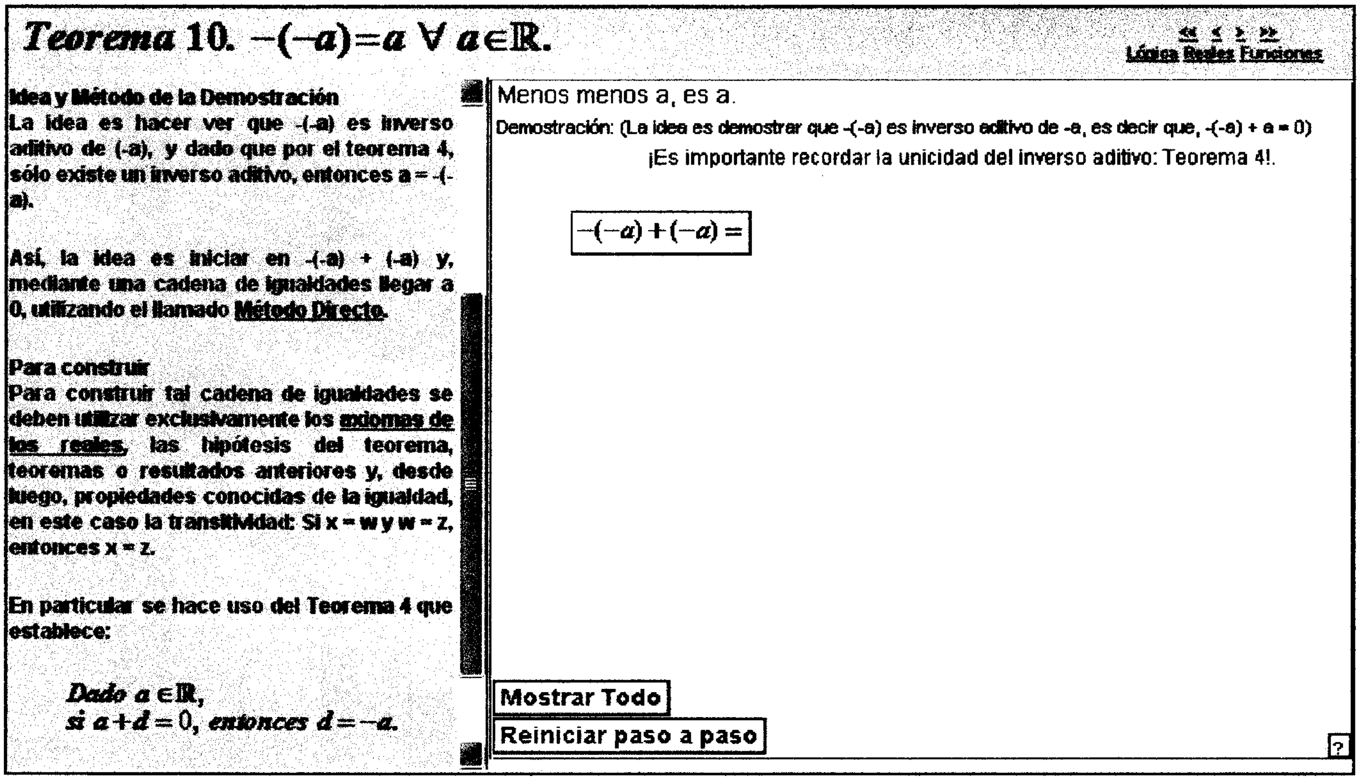
También mediante la barra de navegación se puede acceder en cualquier momento, a cualquiera de los temas en la barra de navegación de la parte superior derecha.



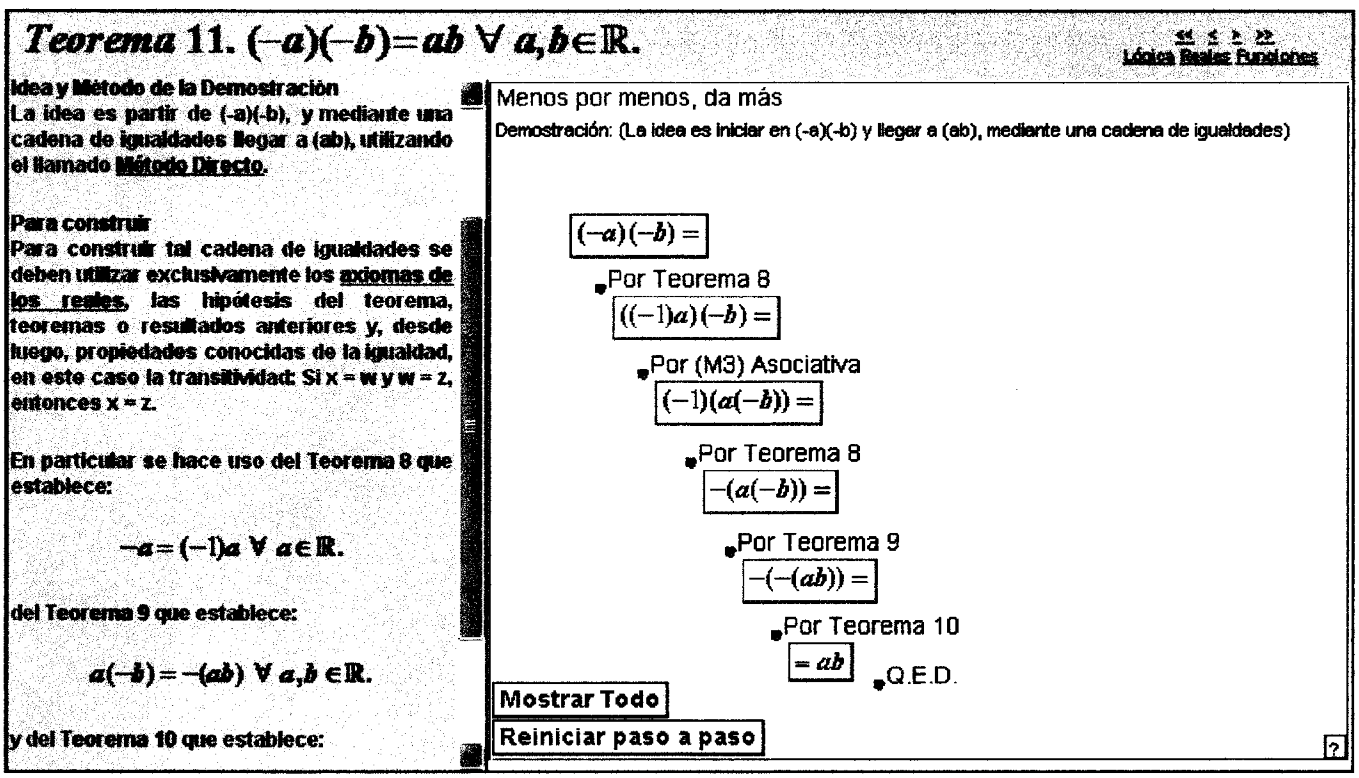
Cuando para una demostración se requiere alguno o algunos teoremas previos, se tiene a la vista sus enunciados.



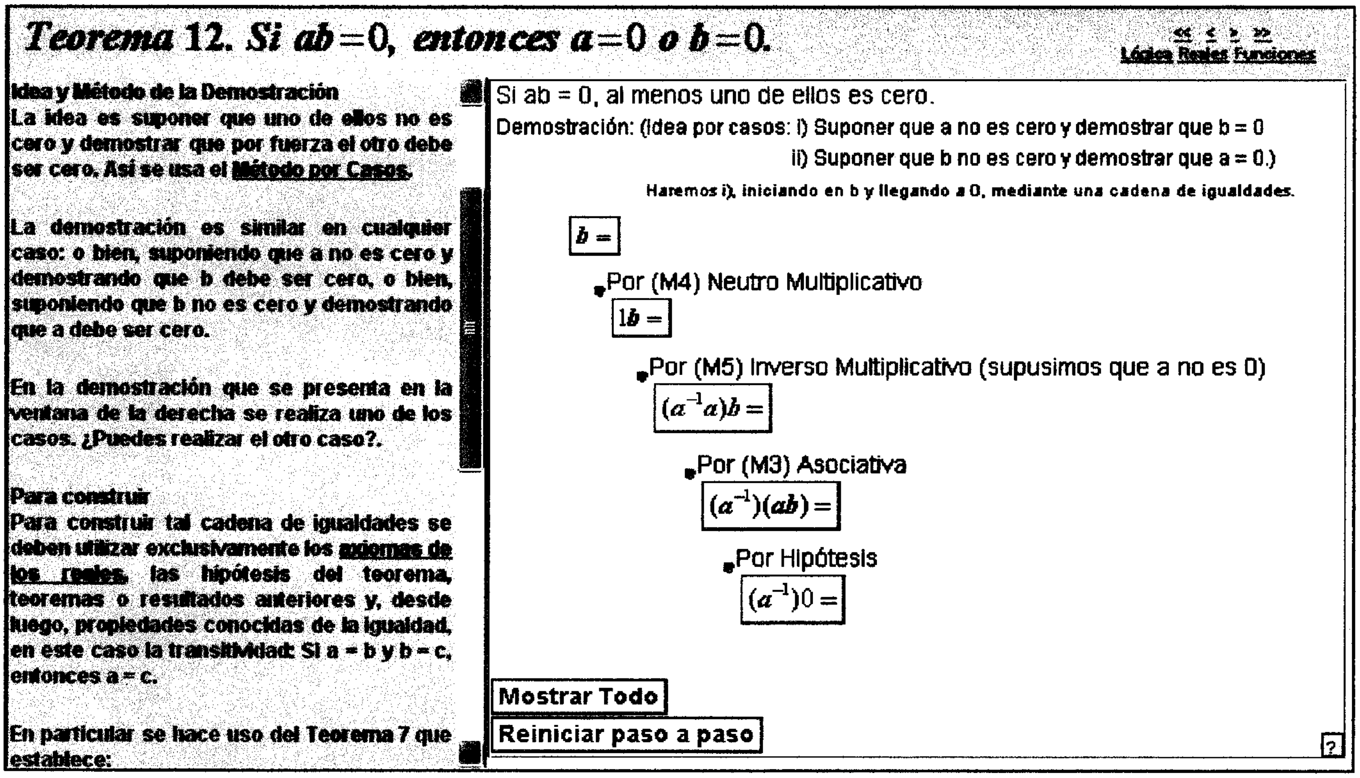
Como ya lo habíamos hecho notar, siempre están accesibles el método y los axiomas de los reales en ventanas flotantes.



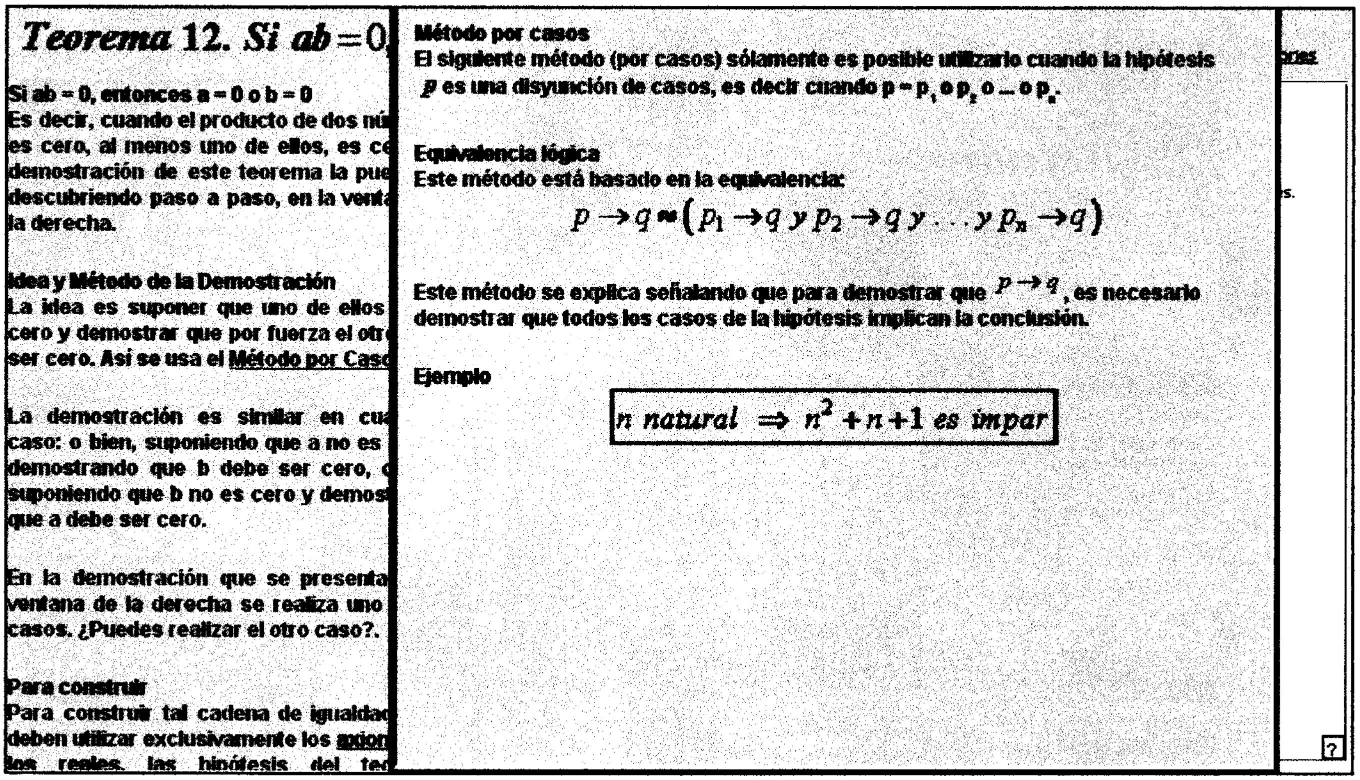
Igualmente, cuando es necesario, se tienen a la vista los teoremas a utilizar en la demostración.



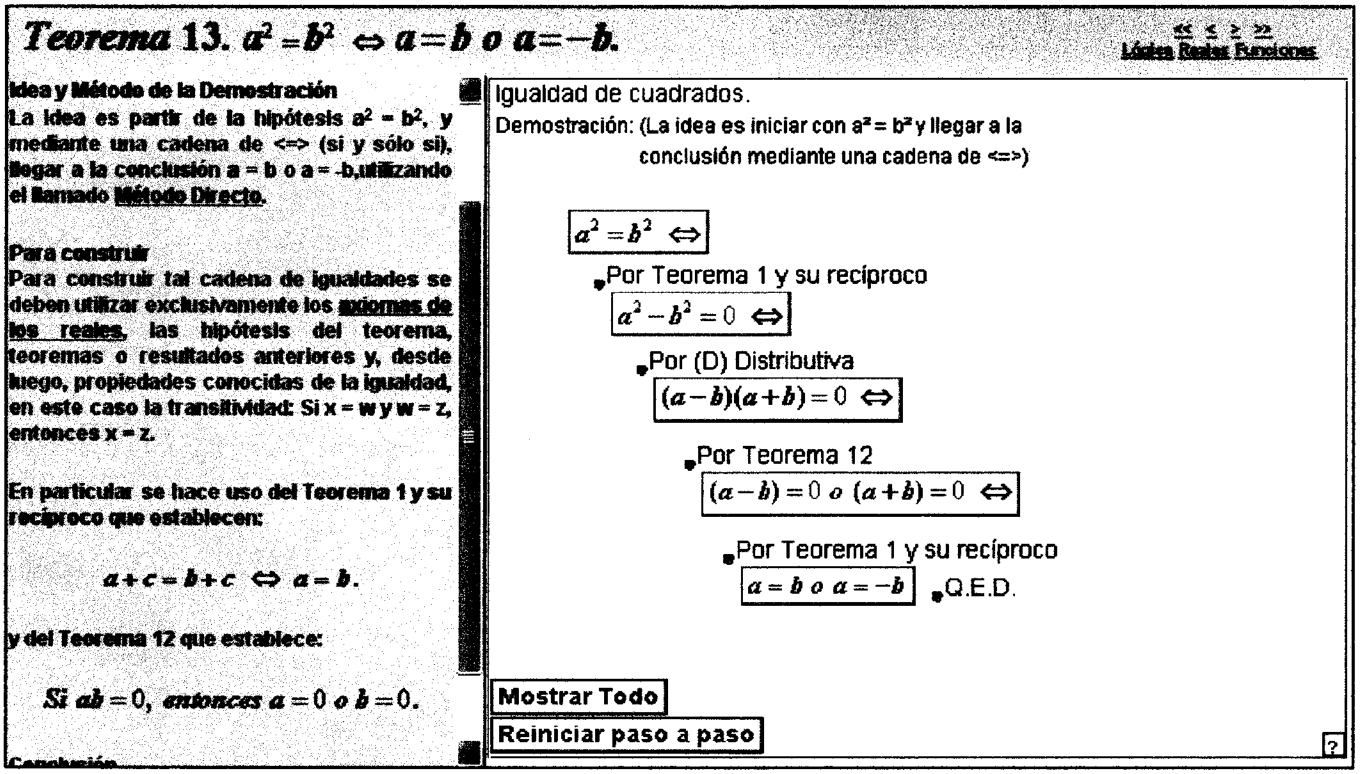
Se tiene accesible el método por casos, incluyendo un ejemplo de su aplicación en una ventana flotante.



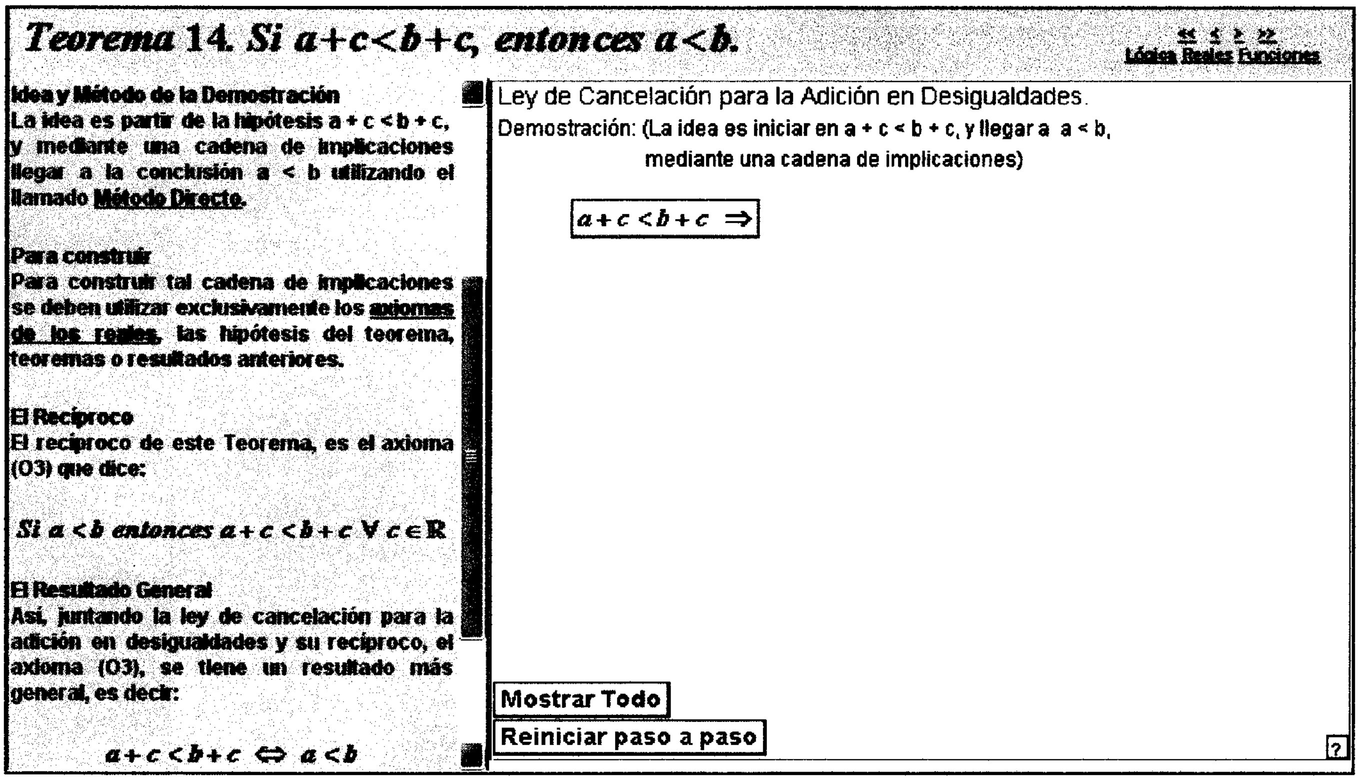
Además del método, se incluye un ejemplo (en ventana flotante).



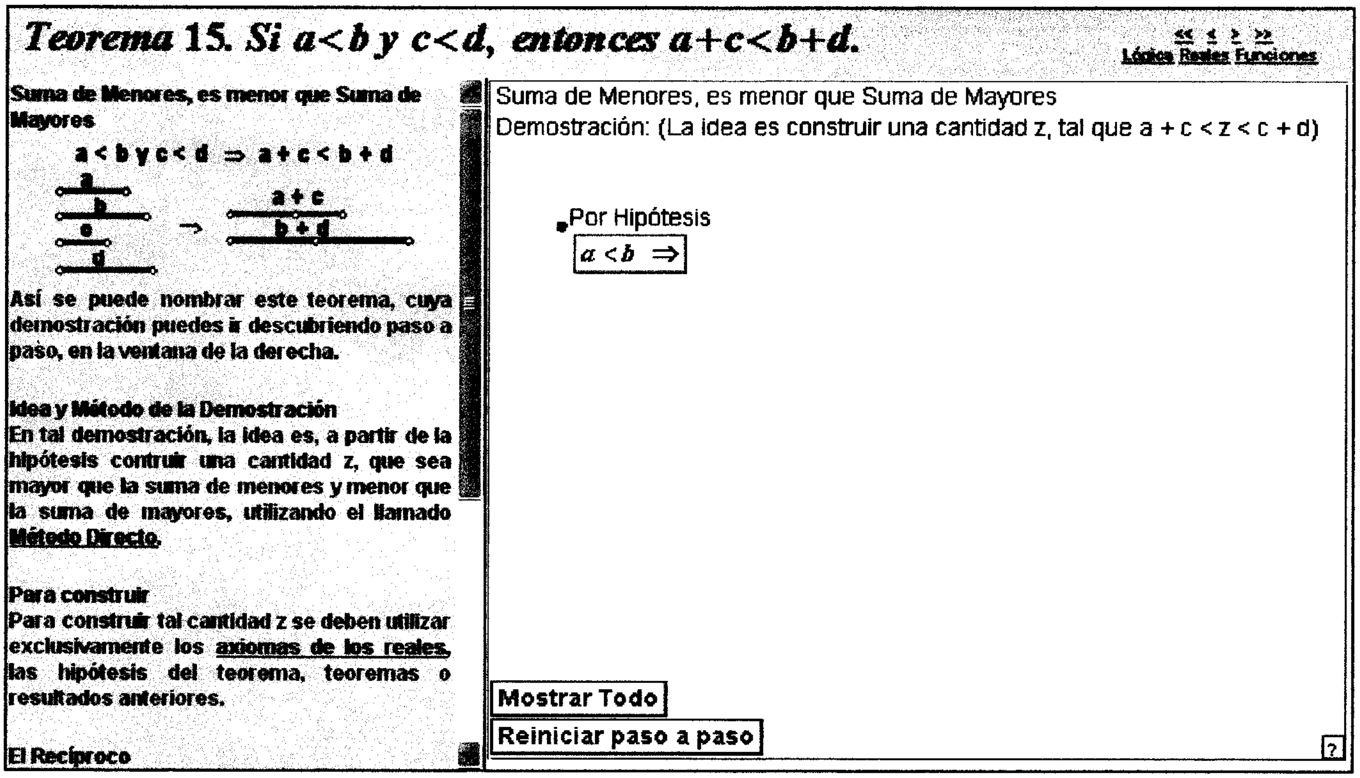
Las demostraciones se pueden presentar de una vez o paso a paso.



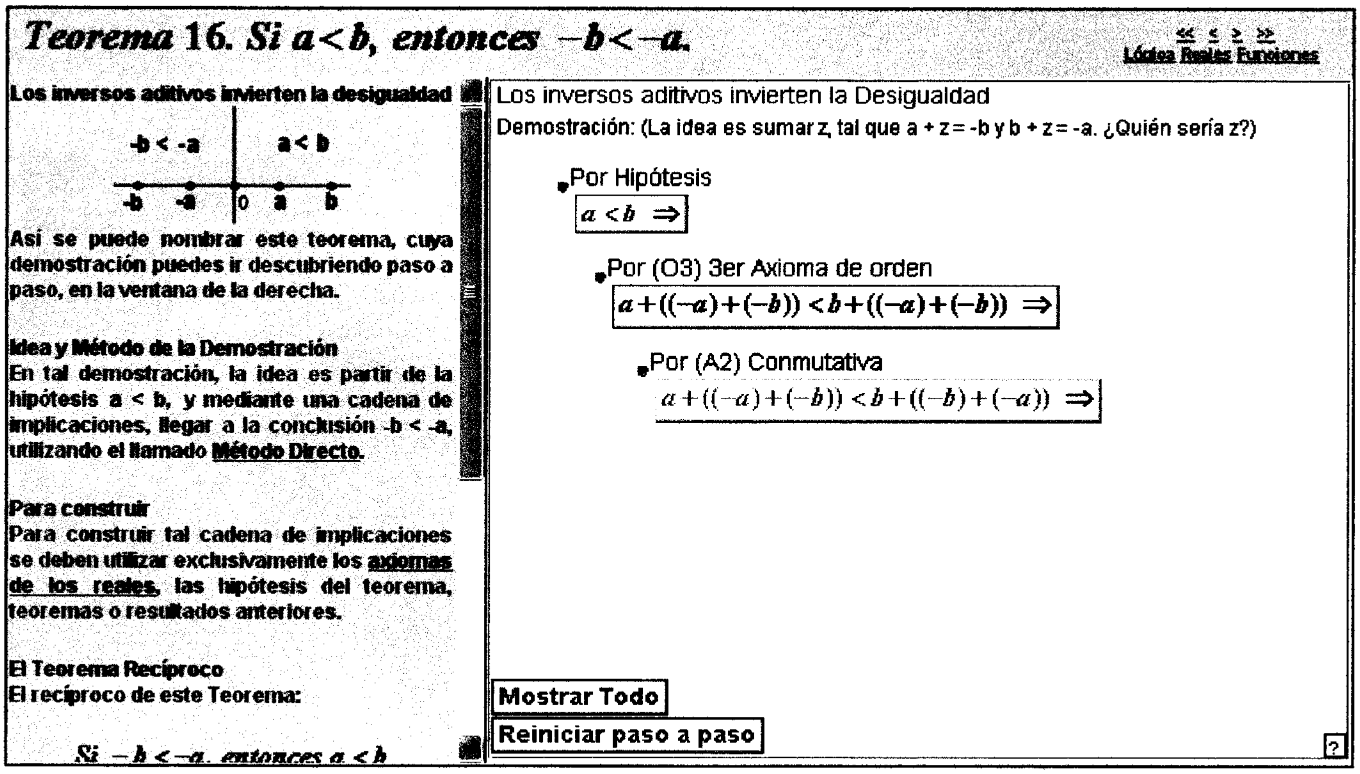
Se analiza el recíproco del teorema y, en su caso, se formula el resultado general.



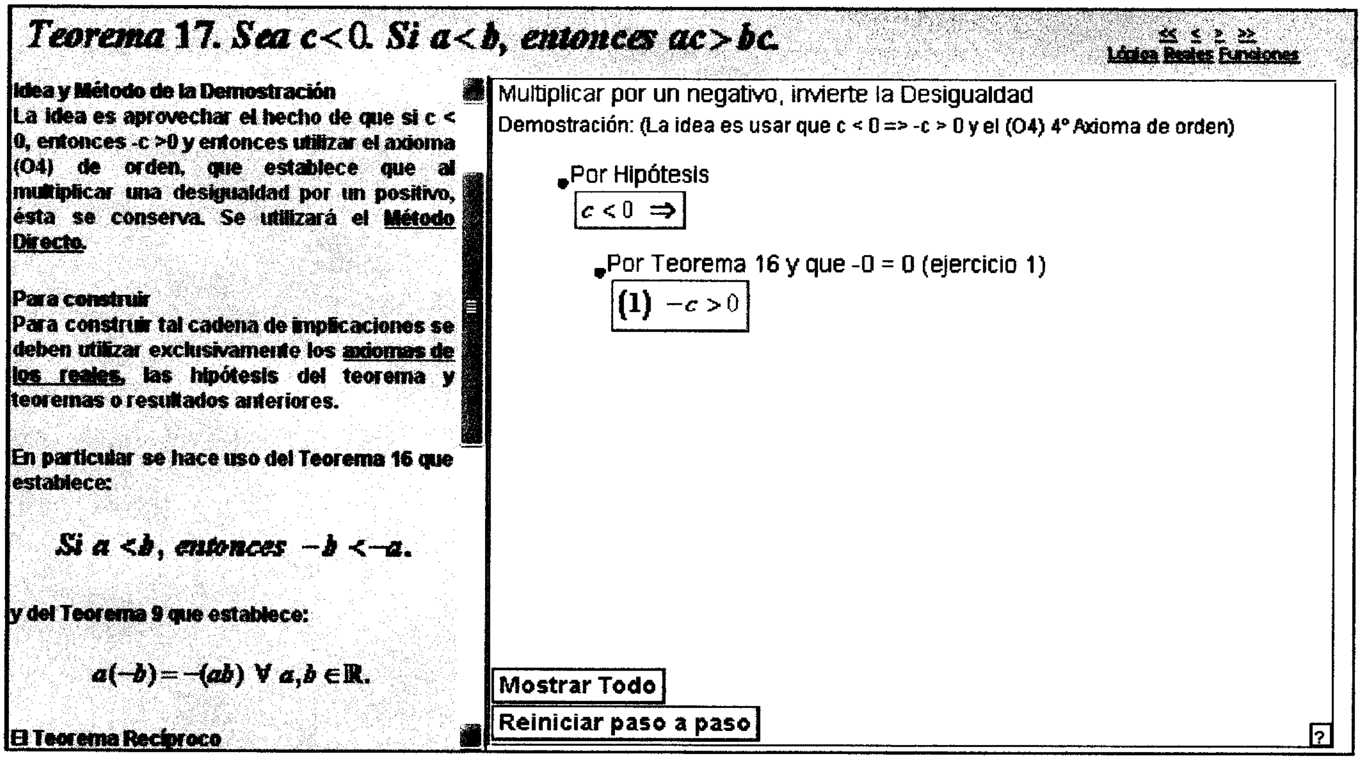
Como ya habíamos señalado, en cada demostración, siempre es posible acceder al método utilizado y a un ejemplo de aplicación del mismo.



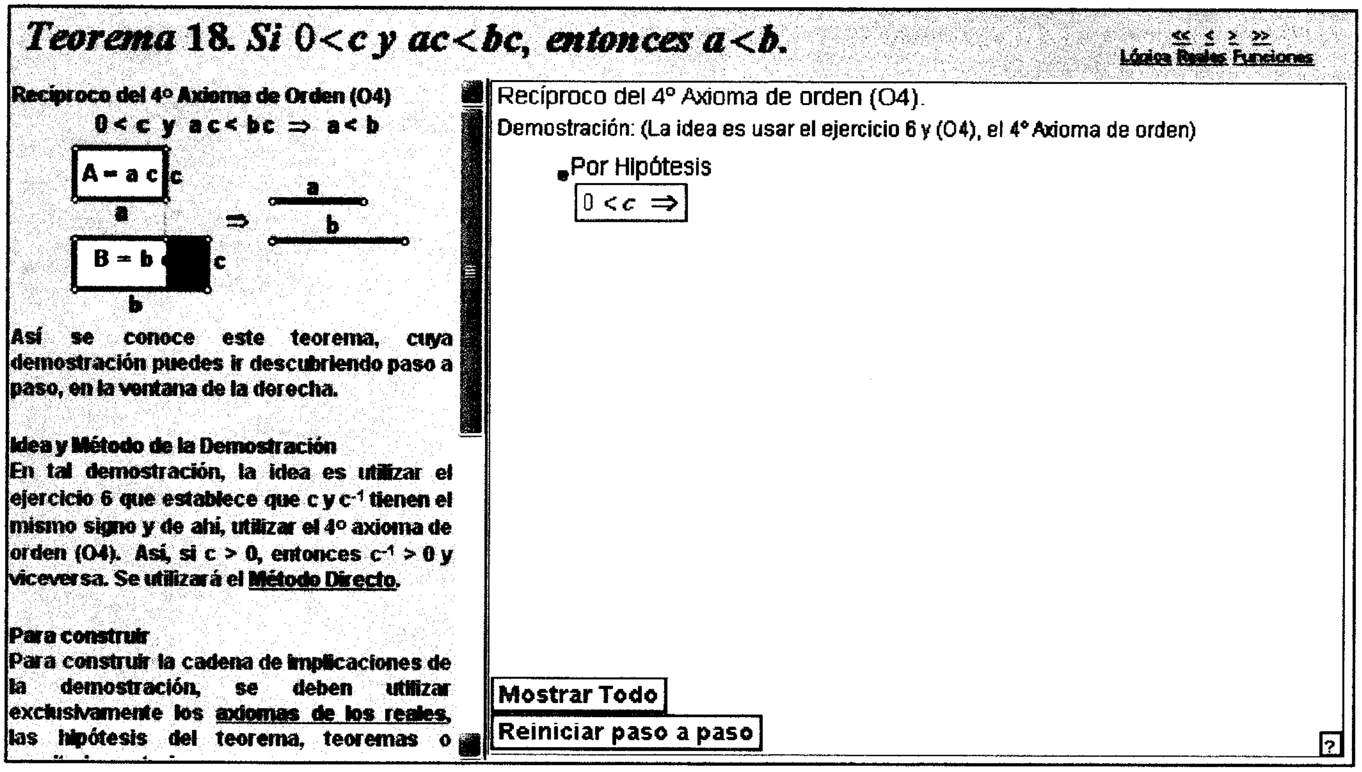
Se procura identificar cada teorema con un nombre descriptivo, que permita recordarlo con mayor facilidad.



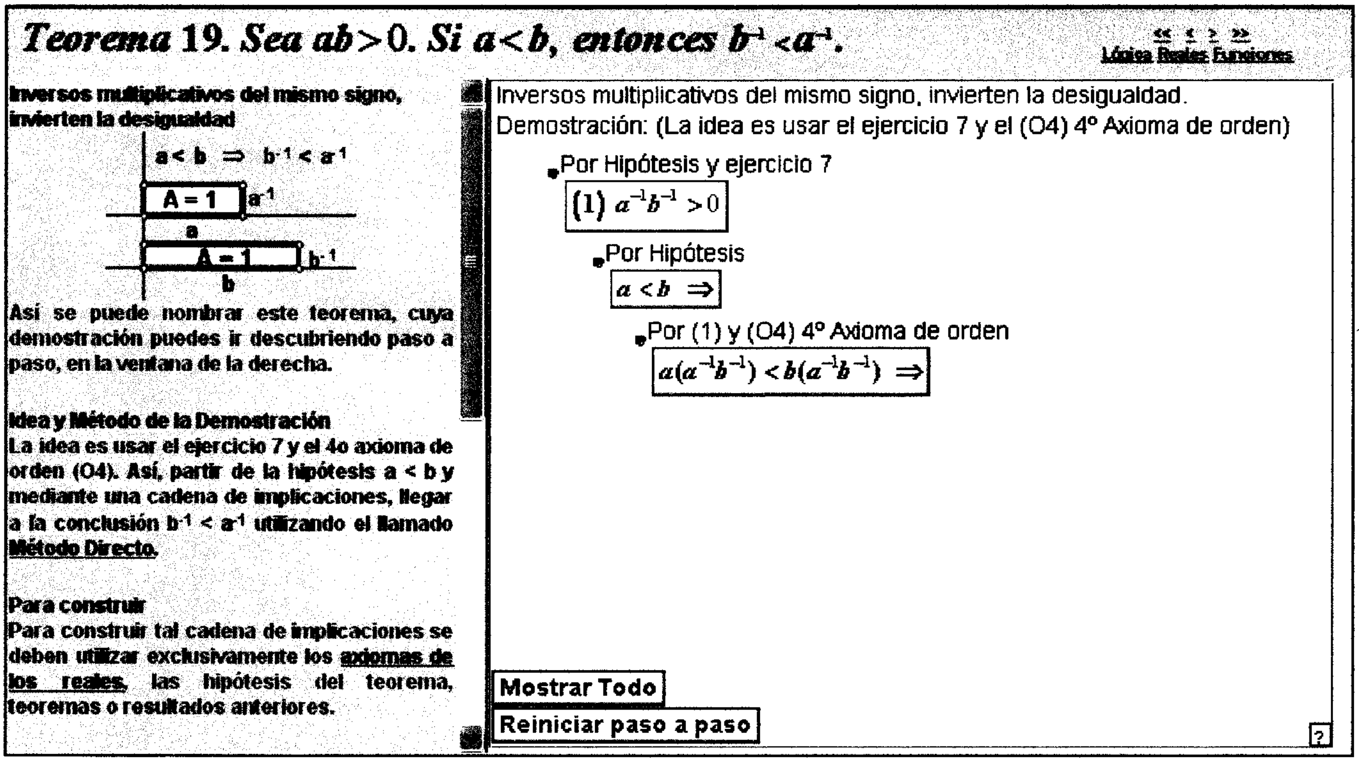
Se abordan teoremas fundamentales para la teoría de desigualdades.



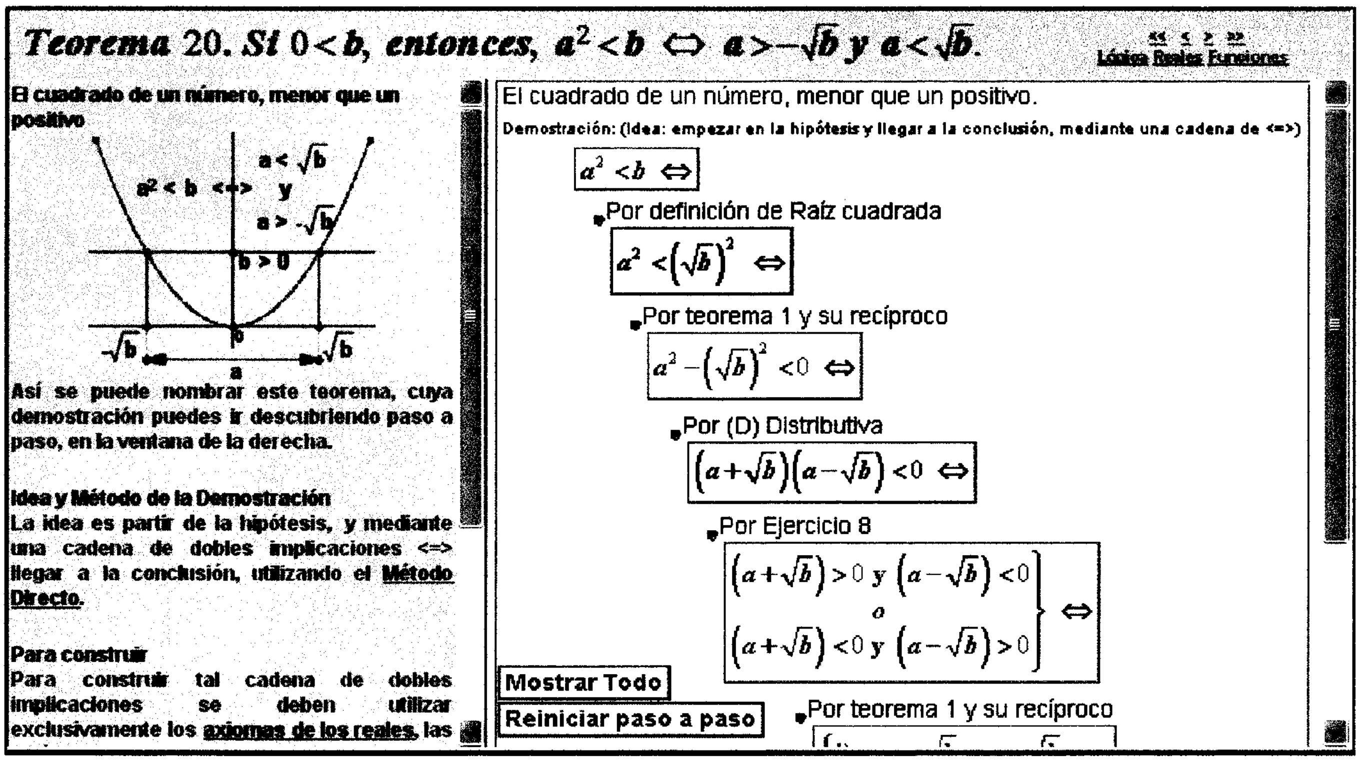
Se pueden presentar las demostraciones paso a paso, cuantas veces se requiera. Se analiza el recíproco y se formula el resultado general.



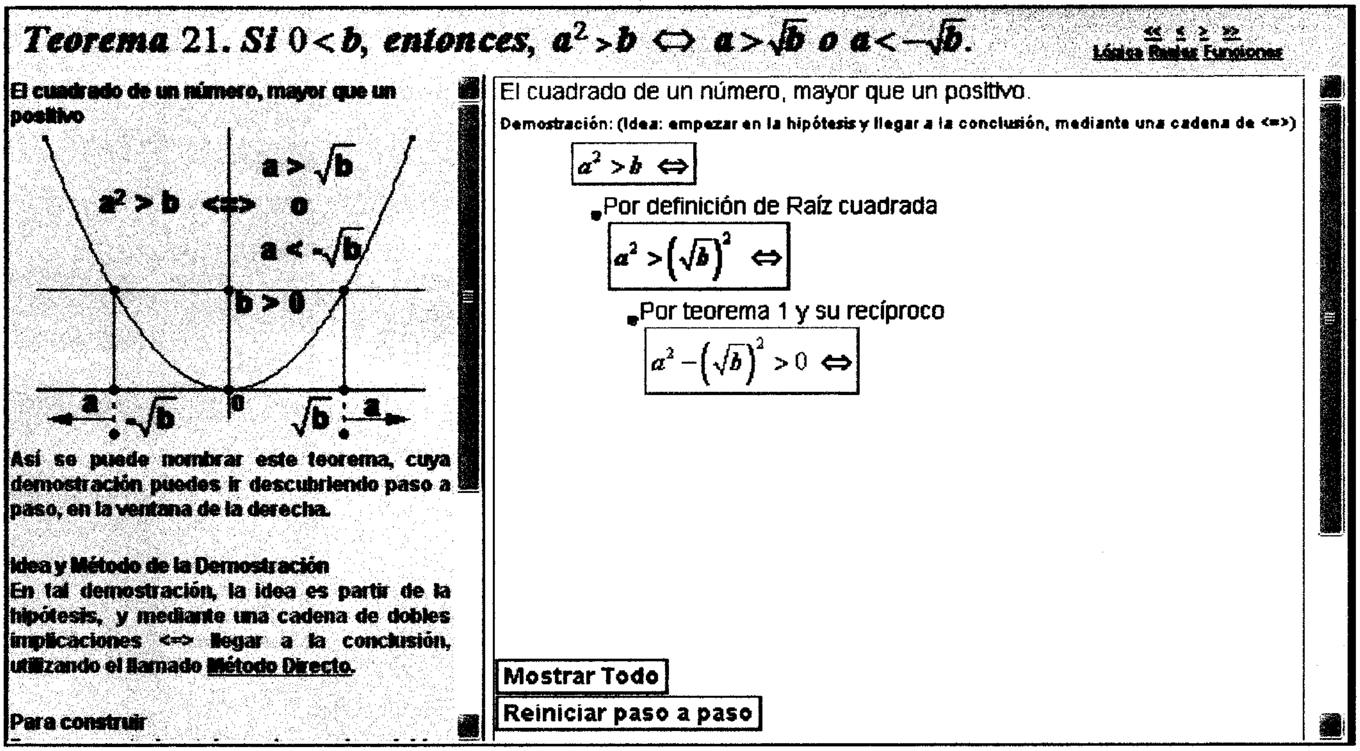
Se presenta una idea gráfica y un nombre descriptivo del teorema. La idea de la demostración siempre resulta útil.



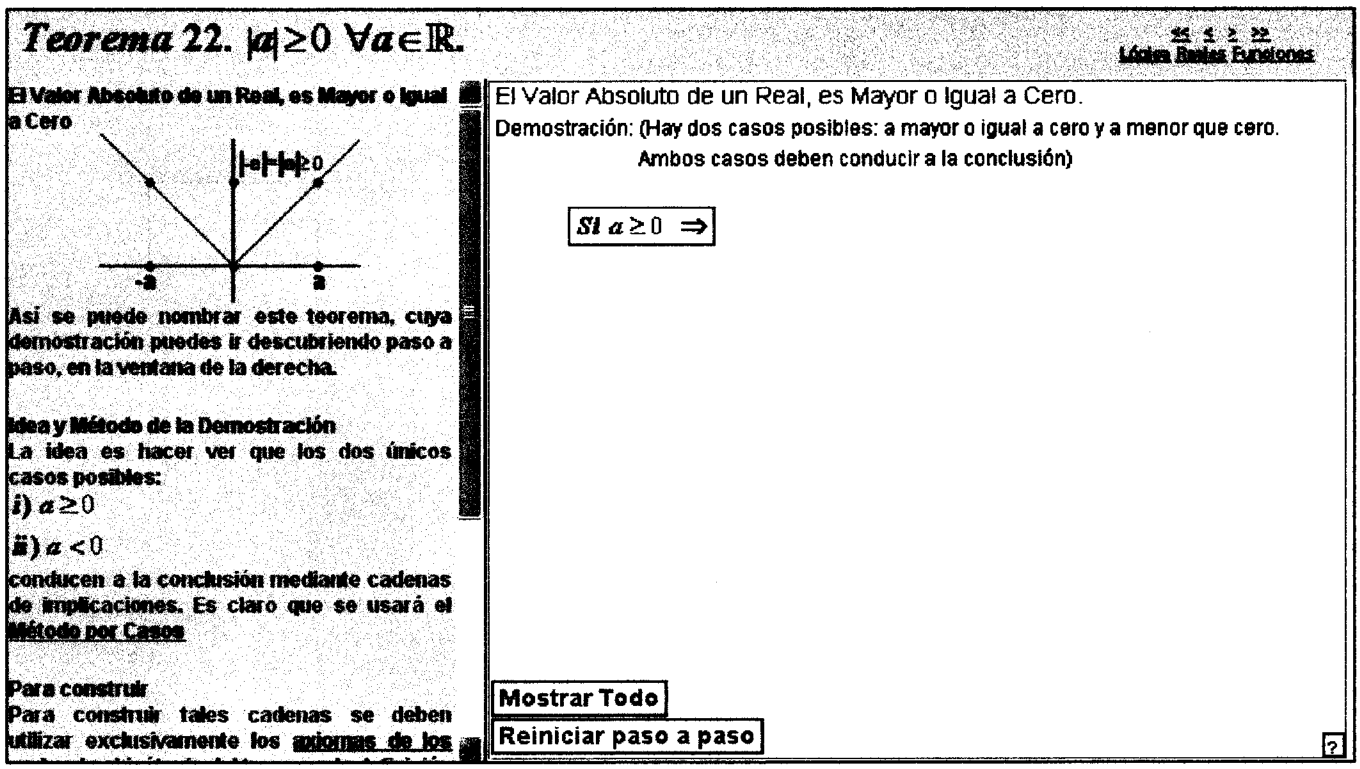
Se pueden presentar las demostraciones de una vez y reiniciar paso a paso.



Se aborda una lista de teoremas fundamentales para resolver desigualdades con términos cuadráticos.



Se presentan teoremas básicos para resolver desigualdades con valor absoluto.



Una demostración clásica por casos.

Teorema 23. $|ab|=|a||b|\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$

<< < > >>
Lógica Reales Funciones

El Valor Absoluto de un Producto es el Producto de Valores Absolutos
Así se puede nombrar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
En tal demostración, la idea es hacer ver que los únicos tres casos posibles, que en realidad se reducen a dos,

Caso 1) $a\geq 0$ y $b\geq 0$

Caso 2) $a\geq 0$ y $b<0$

Caso 3) $a<0$ y $b\geq 0$

conducen a la conclusión mediante cadenas de implicaciones, usando el Método por Casos.
En la demostración sólo se realizarán los casos 1) y 2). El caso3) es en realidad el caso 2).

Para construir
Para construir tales cadenas se deben utilizar exclusivamente los axiomas de los reales, las hipótesis del teorema, la definición

El valor absoluto de un producto, es el producto de valores absolutos

Demostración: (En realidad hay 2 casos. La idea es mostrar que ambos, conducen a la conclusión)

$\boxed{\textit{Caso } 1)\ a\geq 0\ y\ b\geq 0\ \Rightarrow}$

- Por Ejercicio 5 y la Definición de Valor Absoluto

$$\boxed{\begin{cases} ab\geq 0 \\ \quad y \\ |a|=a\ y\ |b|=b \end{cases} \Rightarrow}$$

- Por Definición de Valor Absoluto

$$\boxed{\begin{cases} |ab|=ab \\ \quad y \\ |a||b|=ab \end{cases} \Rightarrow}$$

- Por transitividad de la igualdad

$$\boxed{|ab|=|a||b|}$$

- Por otra parte

$\boxed{\textit{Caso } 2)\ a\geq 0\ y\ b<0\ \Rightarrow}$

- Por Teorema 17 y la Definición de Valor Absoluto

$\{ab\leq 0$

Mostrar Todo

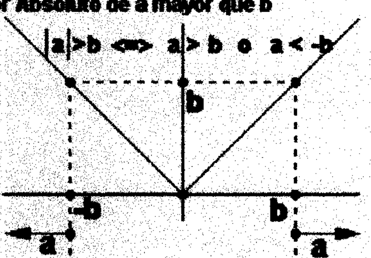
Reiniciar paso a paso

Se recuerdan definiciones necesarias.

Teorema 24. $|a|>b \Leftrightarrow a<-b\ \ o\ \ a>b.$

<< < > >>
Lógica Reales Funciones

Valor Absoluto de a mayor que b



Así se puede recordar este teorema, cuya demostración puedes ir descubriendo paso a paso, en la ventana de la derecha.

Idea y Método de la Demostración
La idea es empezar con la hipótesis y mediante una cadena de dobles implicaciones llegar a la conclusión, utilizando el llamado Método Directo. Recordar la definición de valor absoluto es fundamental:

$$|a|=\begin{cases} a & si\ a\geq 0 \\ & o \\ -a & si\ a<0 \end{cases}$$

Valor Absoluto de a mayor que b ...

Demostración: (La idea es empezar con la hipótesis y mediante <=> llegar a la conclusión)

¡Es importante recordar la definición de Valor Absoluto!.

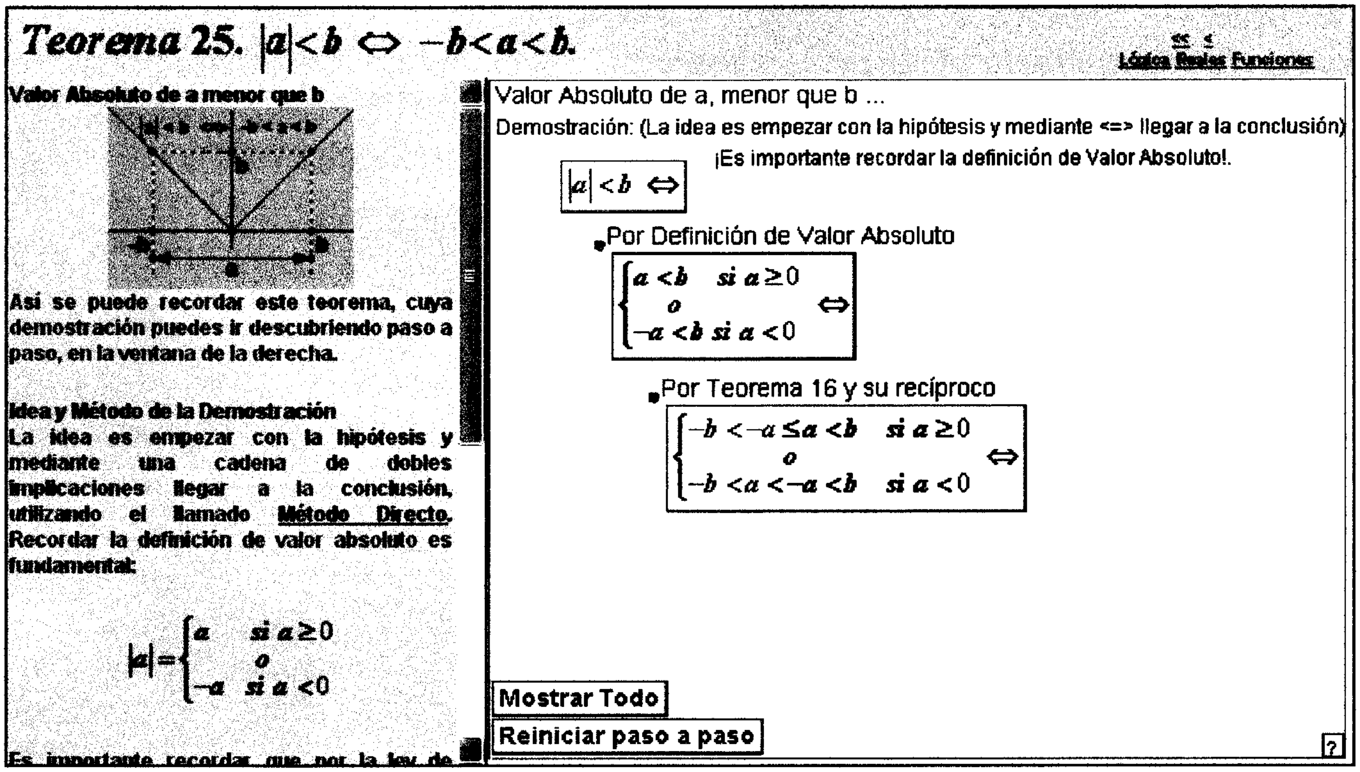
$\boxed{|a|>b\ \Leftrightarrow}$

Mostrar Todo

Reiniciar paso a paso

?

Veinticinco teoremas con demostraciones formales interactivas, con ilustraciones gráficas y nombres descriptivos, con acceso a los métodos de demostración y a los axiomas de los reales y con acceso a los teoremas necesarios en cada demostración.



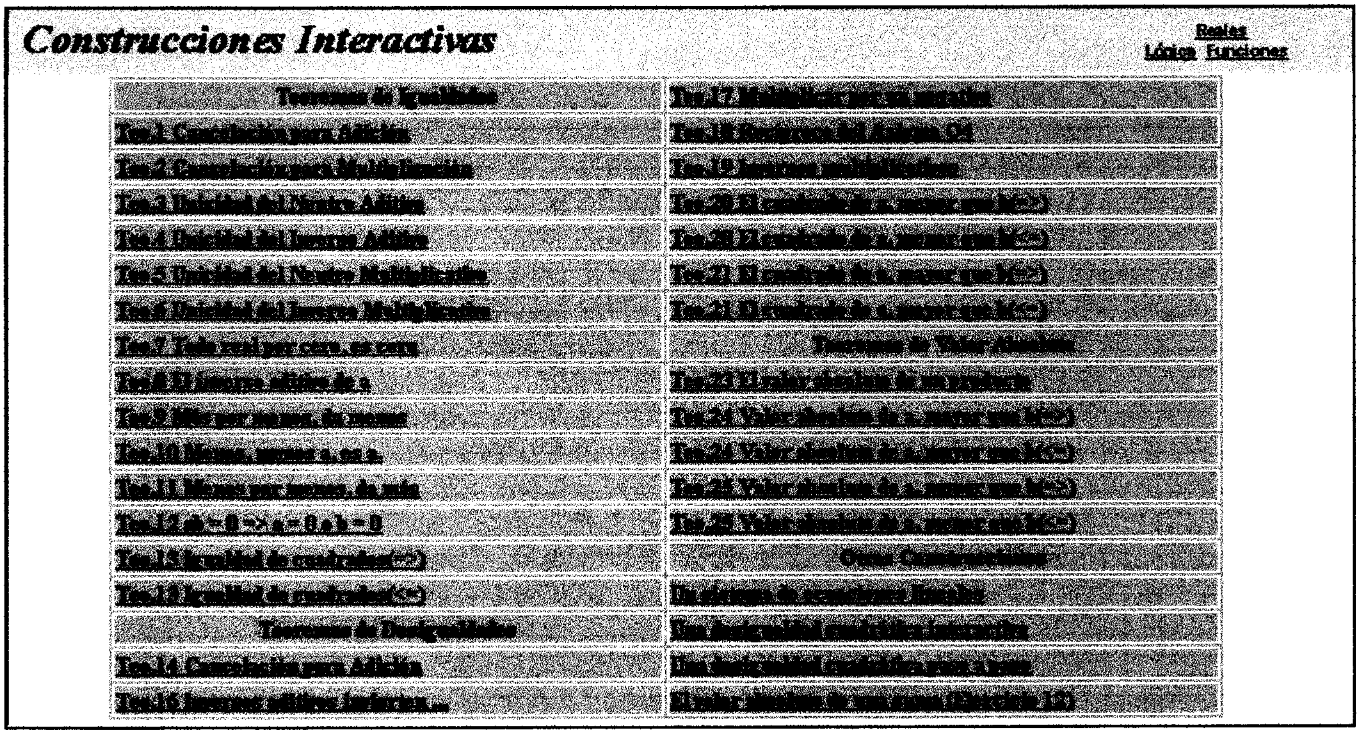
En la sección **Construcciones Interactivas** se presentan 32 construcciones interactivas para explorar y analizar diferentes situaciones de los teoremas que se han demostrado en la sección anterior.

En estas construcciones se puede interactuar mediante los puntos rojos con arrastre de ratón, o bien mediante botones que presentan situaciones particulares o mediante animaciones que presentan una continuidad de casos.

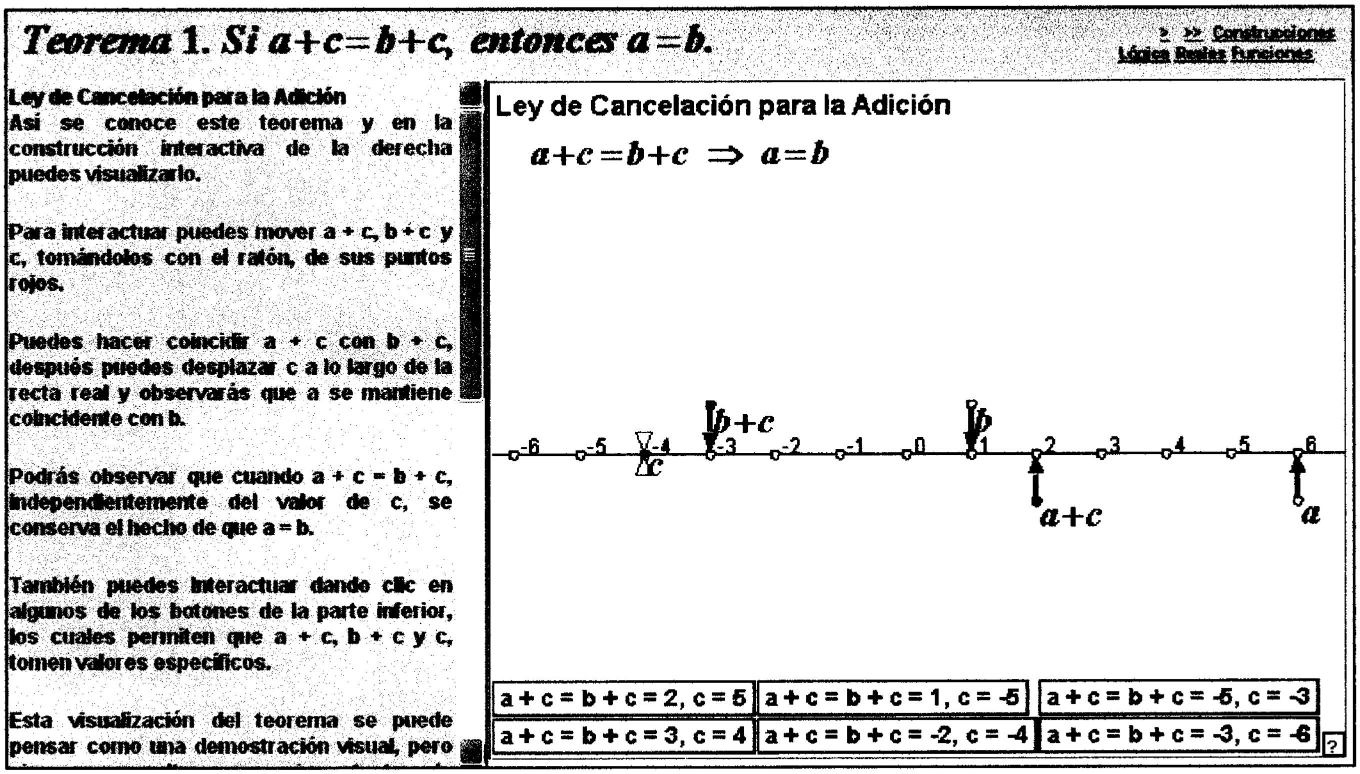
En todos los casos se tiene acceso a las demostraciones formales y en varios casos se incluyen recíprocos.

En **Otras construcciones**, al final de esta sección, se presentan construcciones interactivas para:

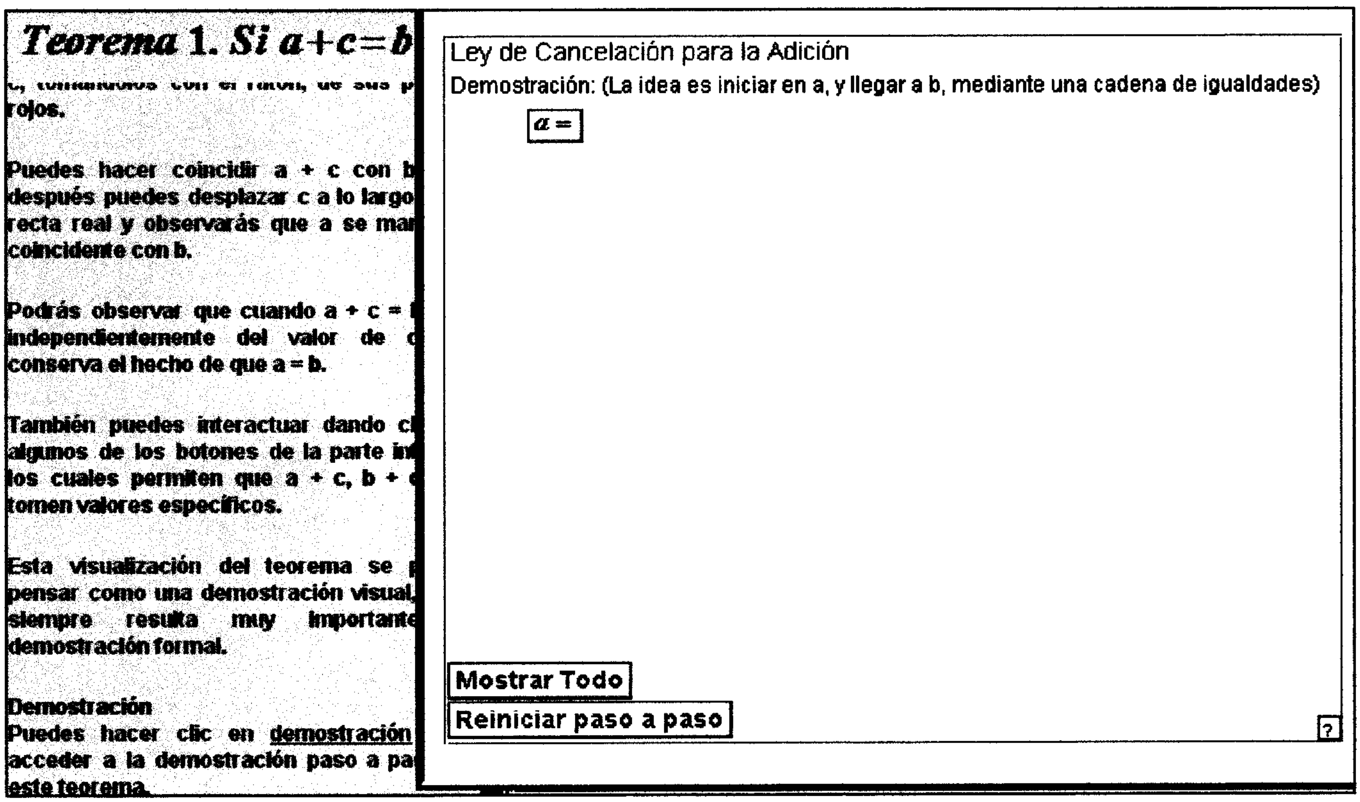
- Explorar y analizar las diferentes situaciones de sistema de ecuaciones lineales dos por dos.
- Explorar y analizar diversas situaciones en una desigualdad cuadrática con valor absoluto.
- Resolver una desigualdad cuadrática paso a paso y de manera interactiva.
- Ilustrar la ley del triángulo.



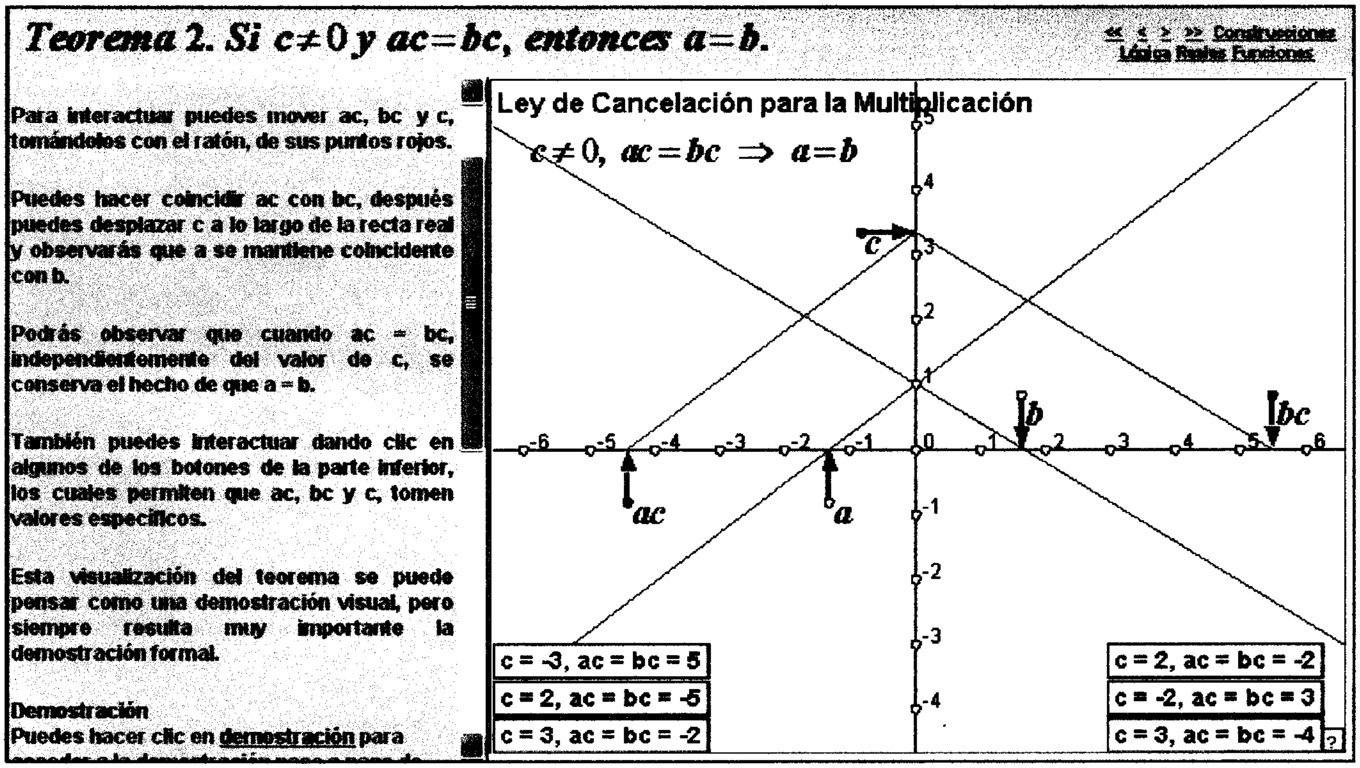
Haciendo coincidir a+c con b+c, se observará la coincidencia de a con b.



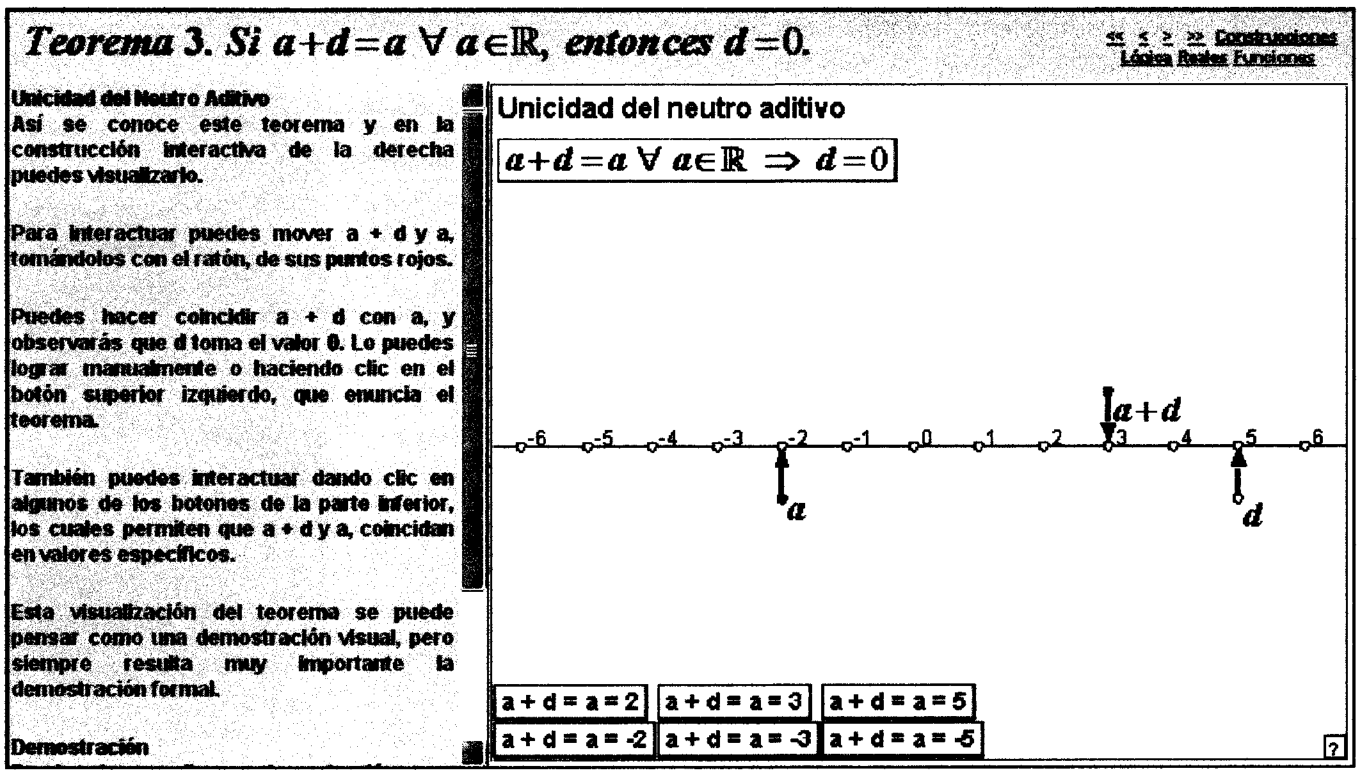
Pero además, se tiene acceso a la demostración formal en una ventana flotante.



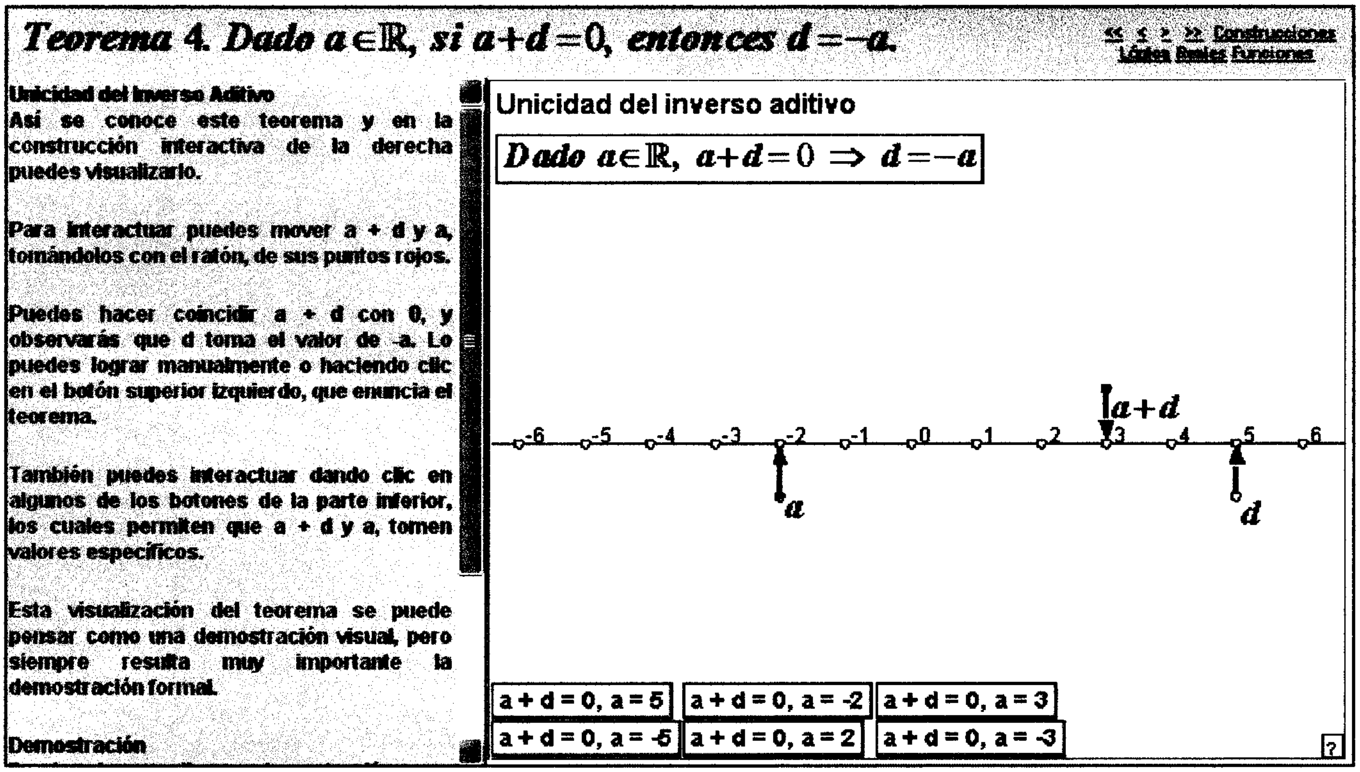
Haciendo coincidir ac con bc, se observará la coincidencia de a con b.



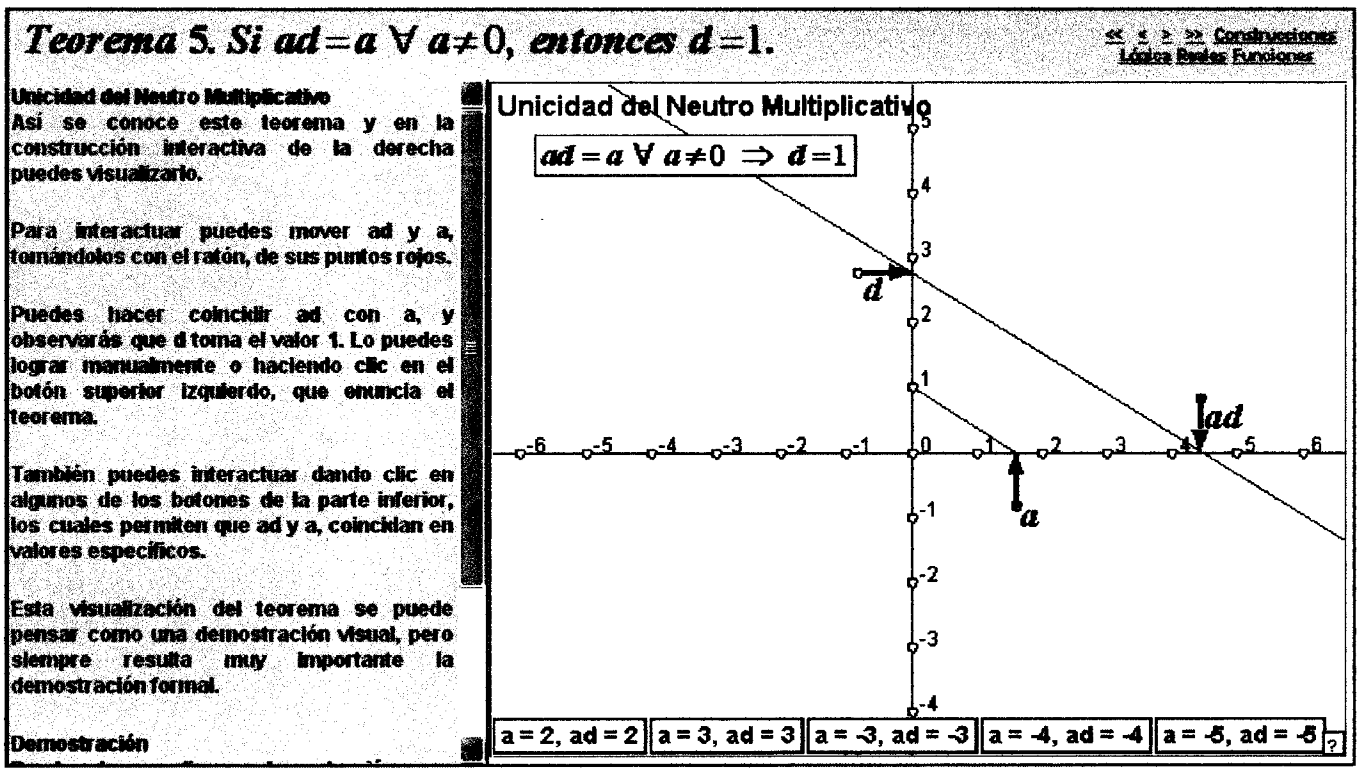
Haciendo coincidir a+d con a, se observará la coincidencia de d con 0.



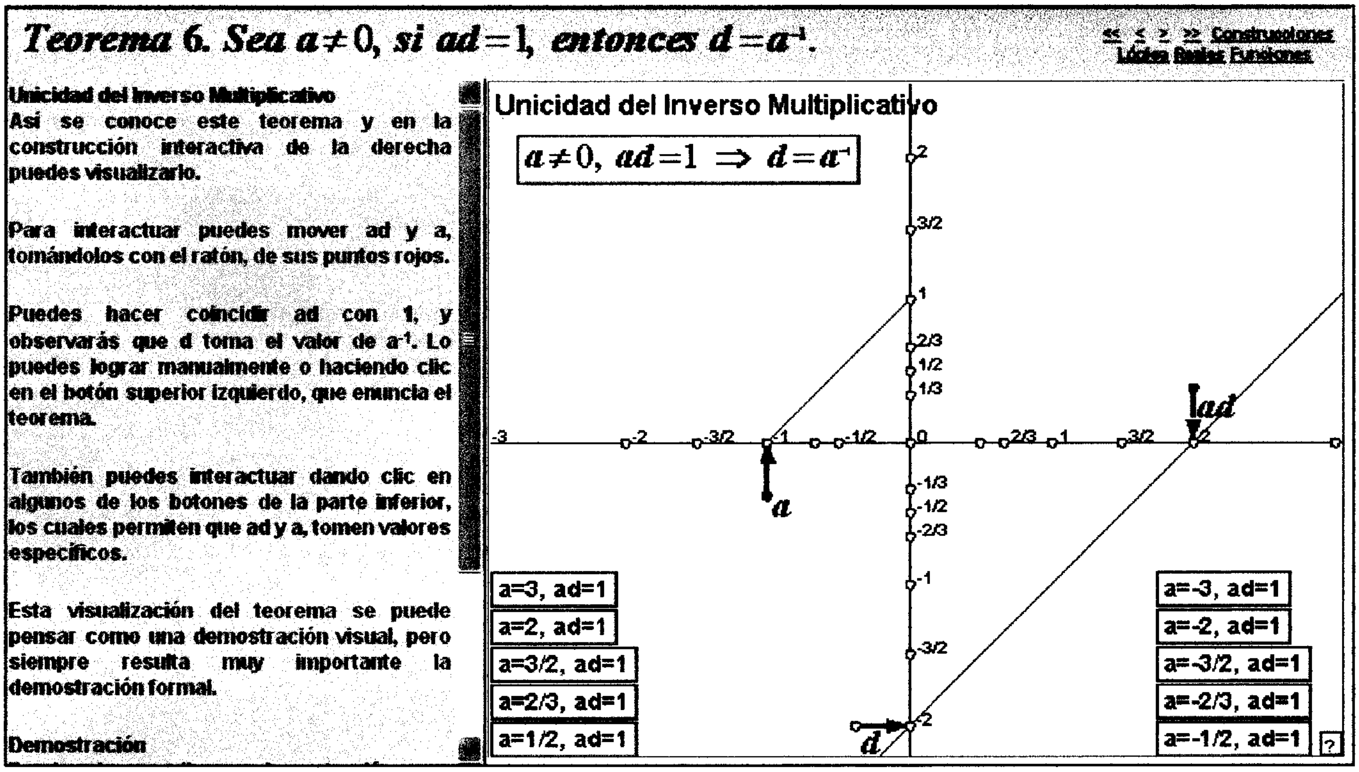
Haciendo coincidir a+d con 0, se observará la coincidencia de d con –a.



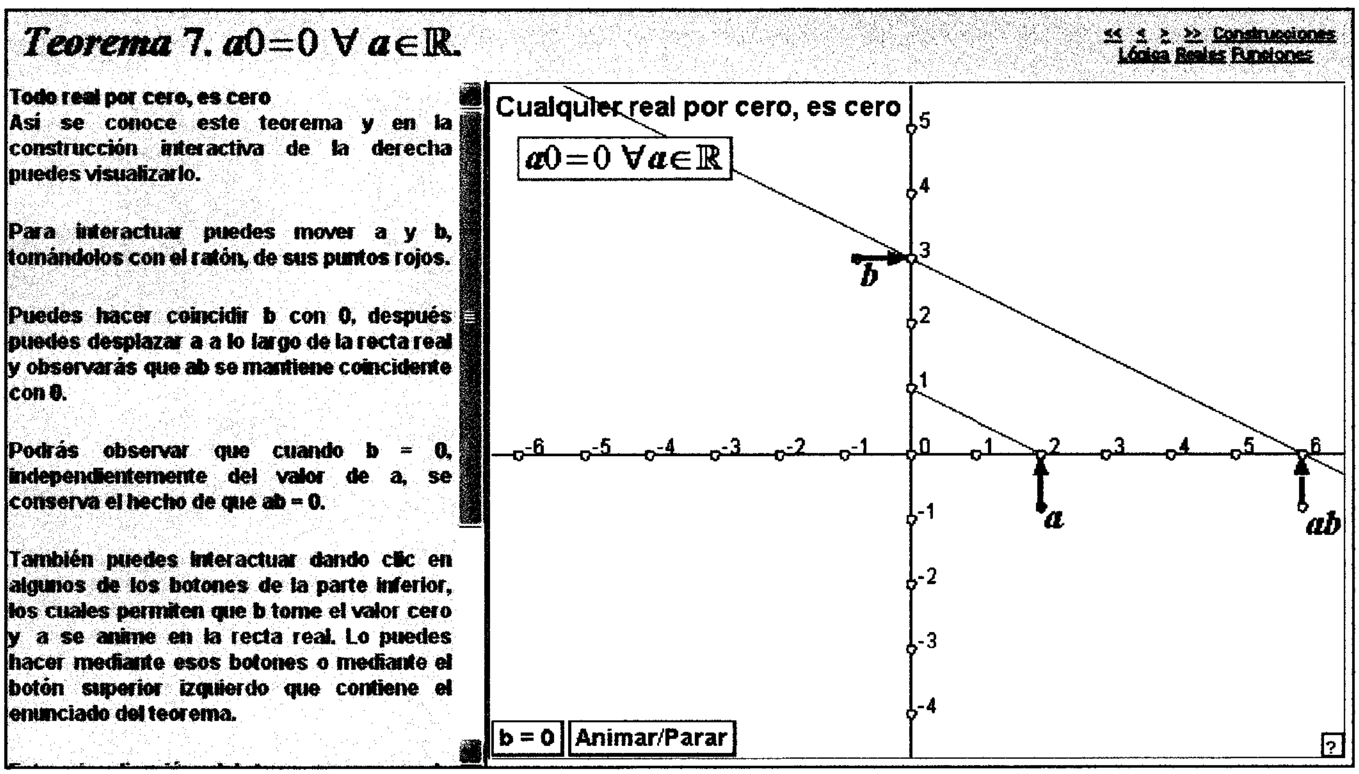
Haciendo coincidir ad con a, se observará la coincidencia de d con 1.



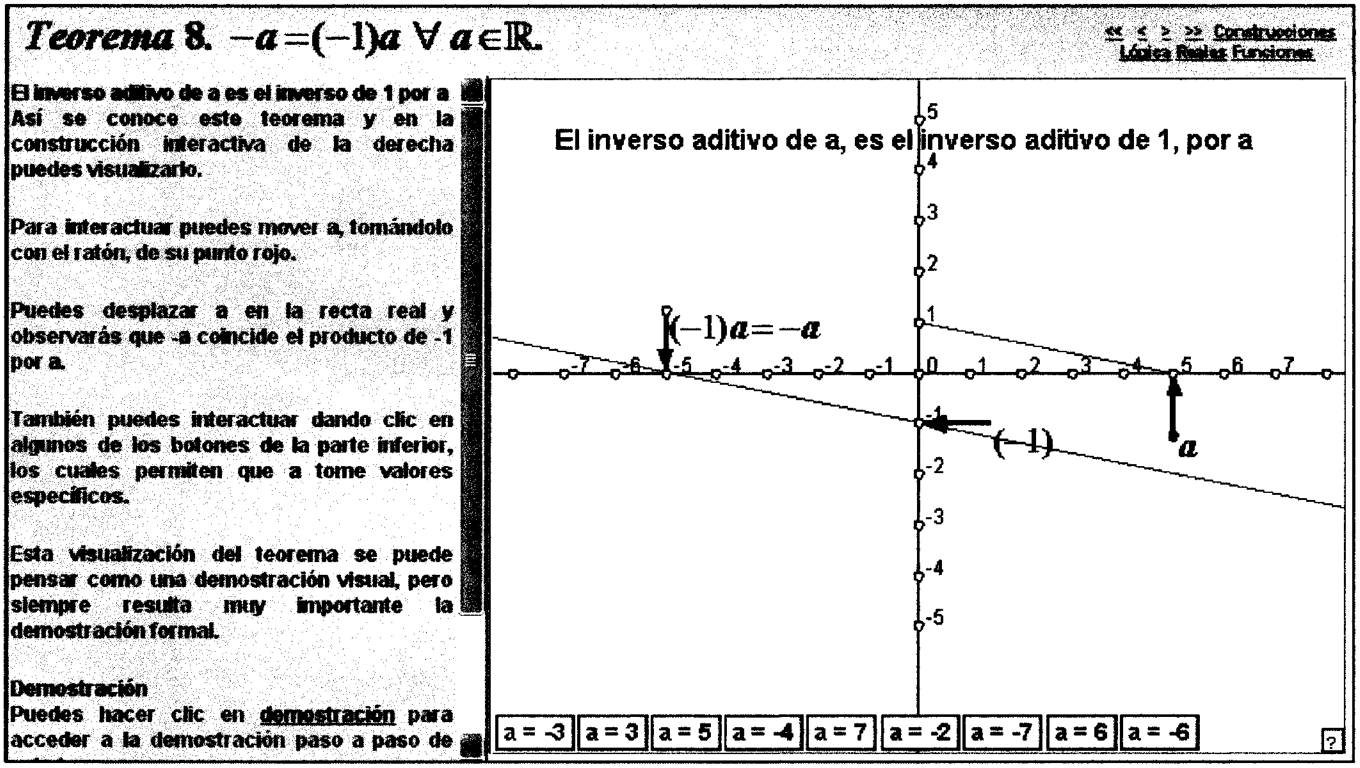
Haciendo coincidir ad con 1, se observará la coincidencia de d con a^{-1}.



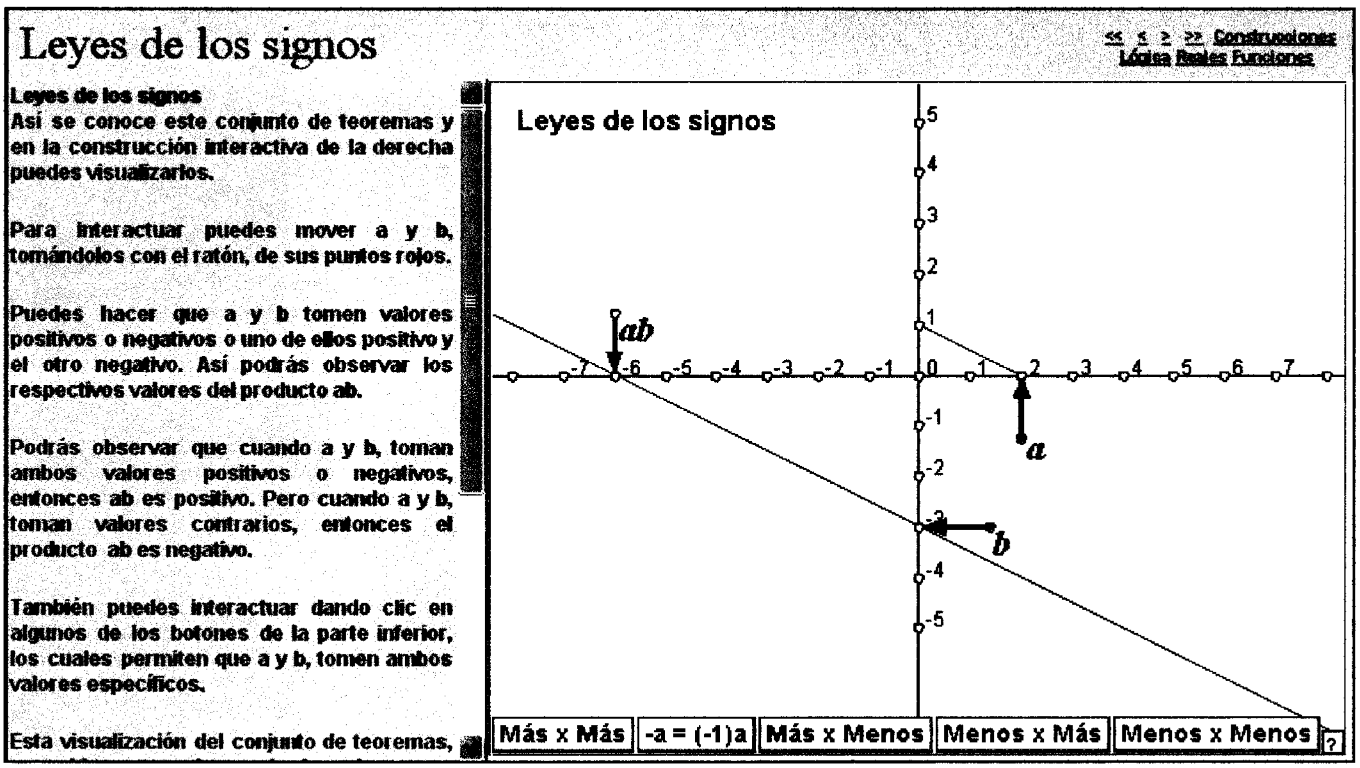
Haciendo coincidir b con 0, se observará la coincidencia de ab con 0.



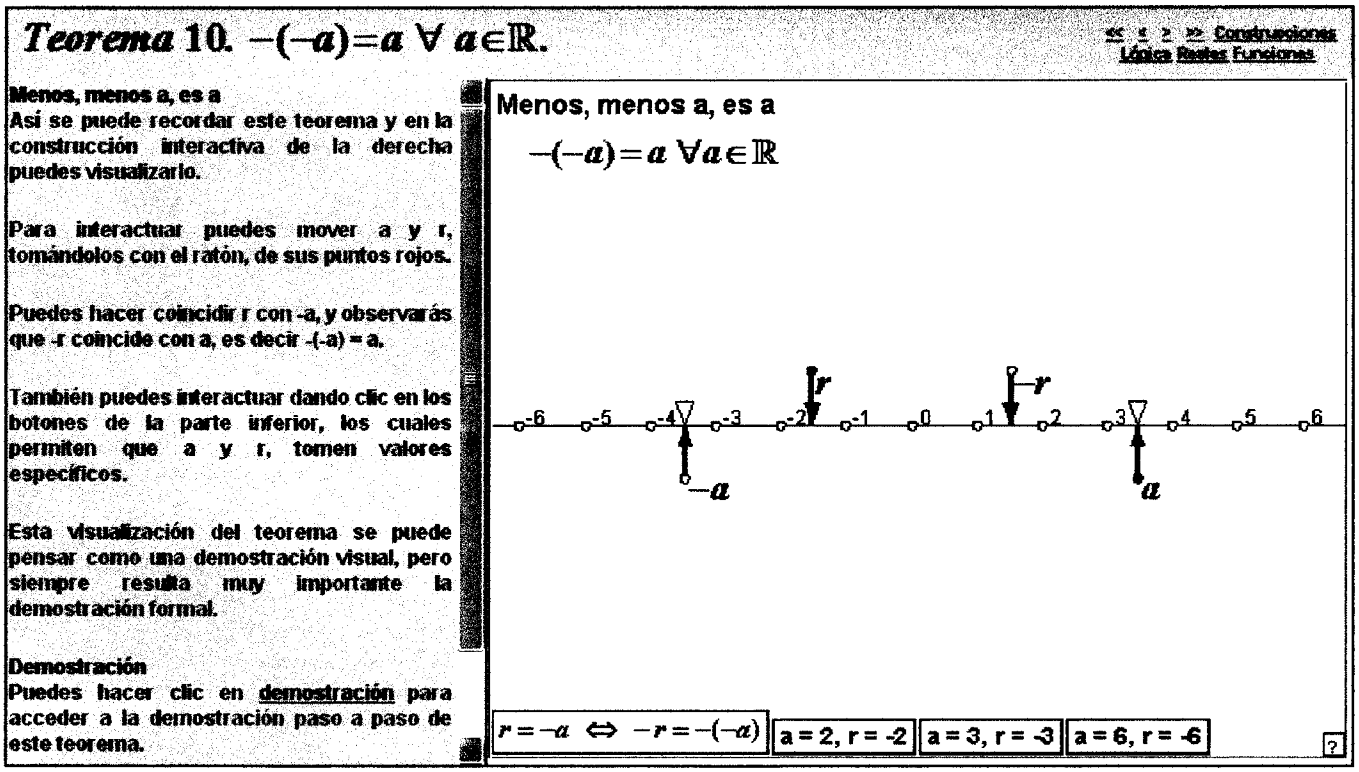
Moviendo a, se observará la coincidencia de (-1)a con –a.



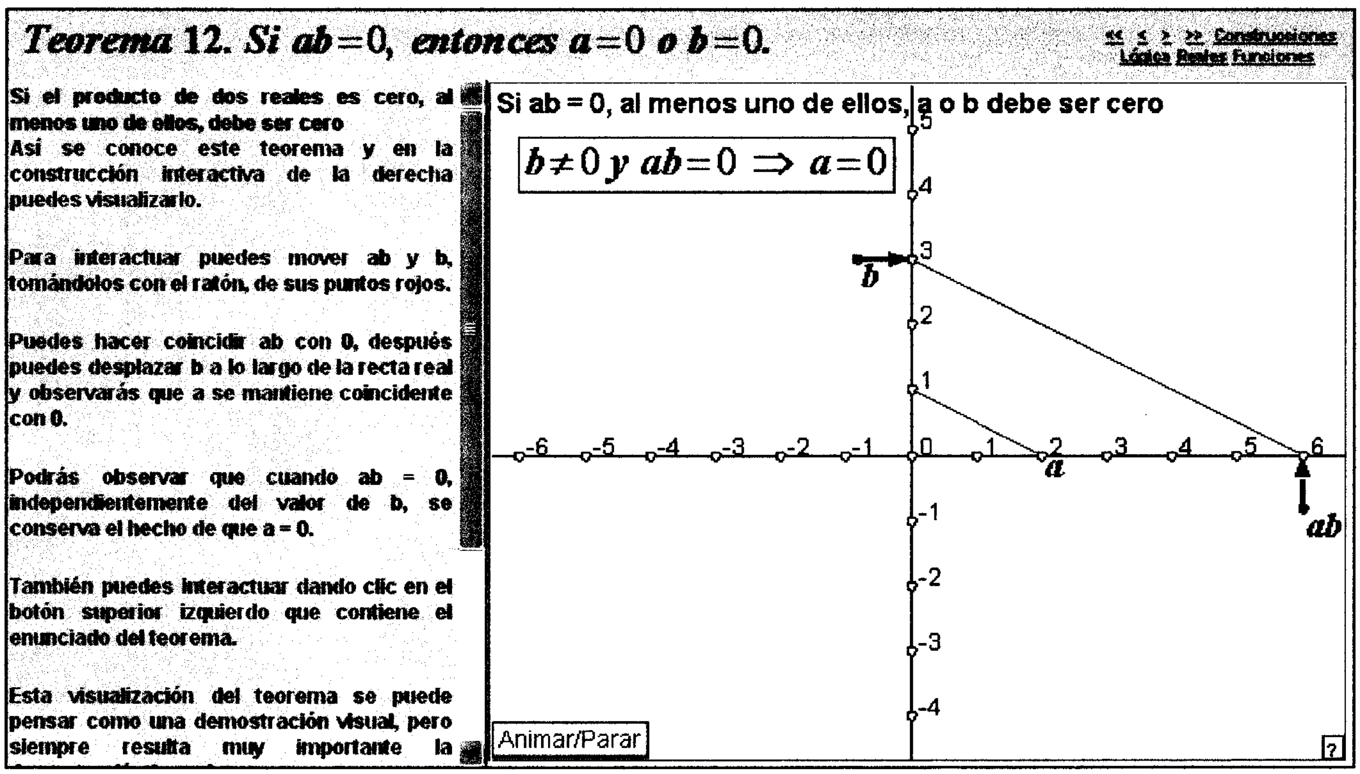
Moviendo a y b en distintas situaciones se puede observar ab.



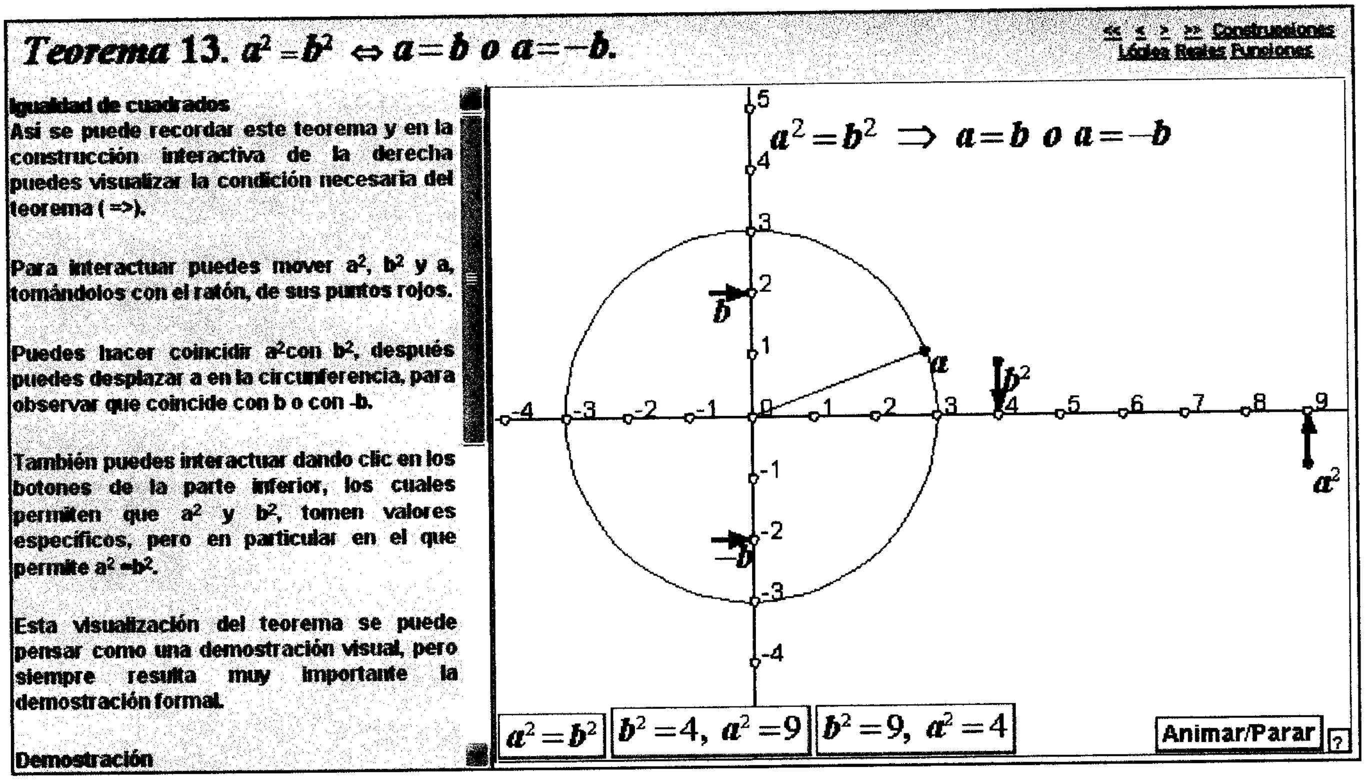
Haciendo coincidir r con –a, se observará la coincidencia de –r con a.



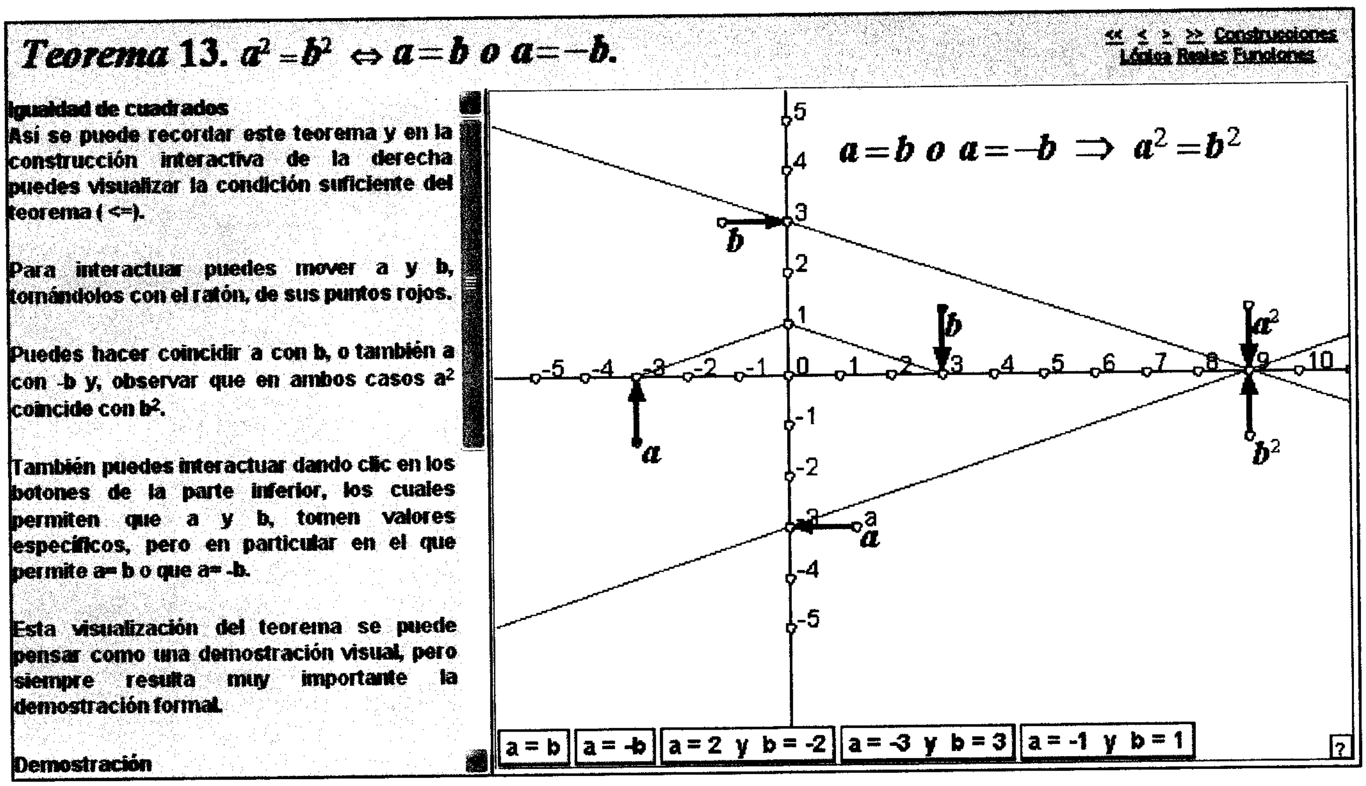
Haciendo coincidir ab con 0 y b≠0, se observará la coincidencia de a con 0.



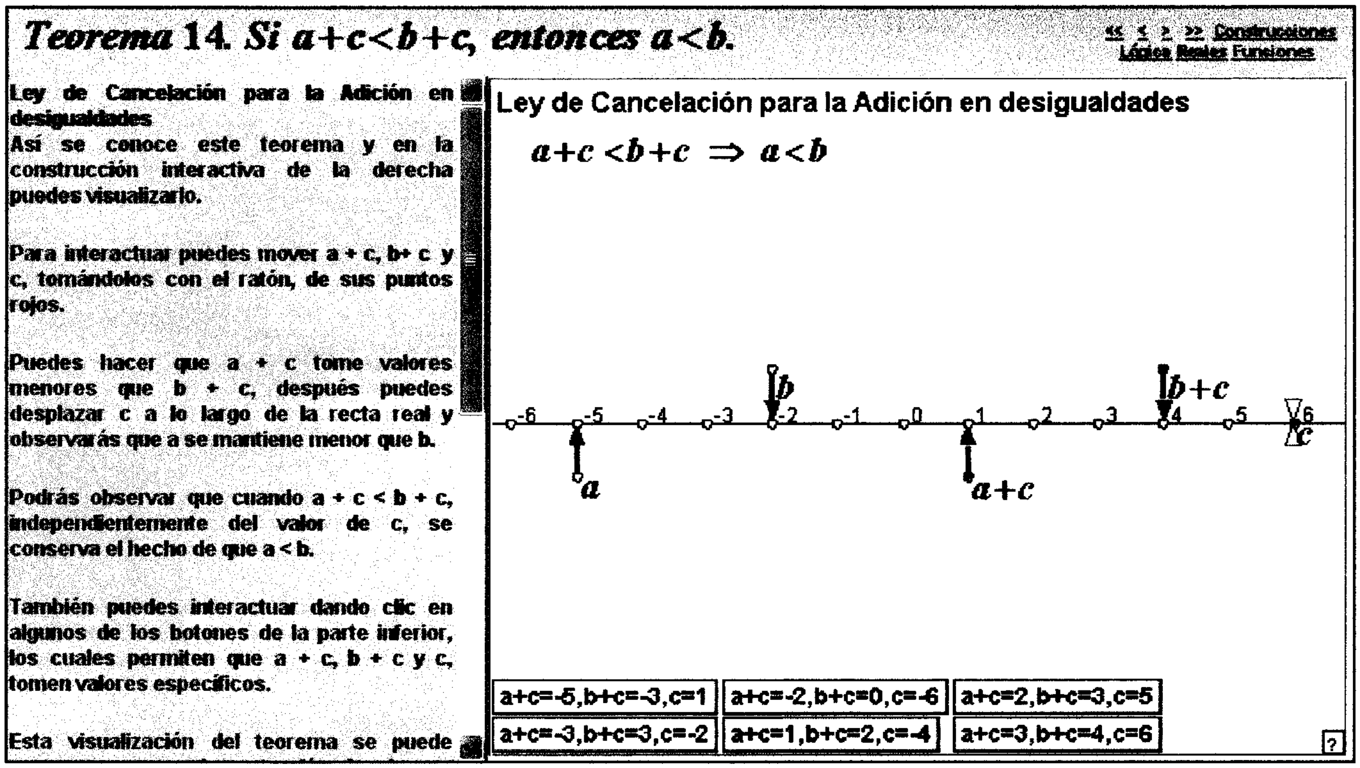
Haciendo coincidir a^2 con b^2, se observará la coincidencia de a con b o –b.



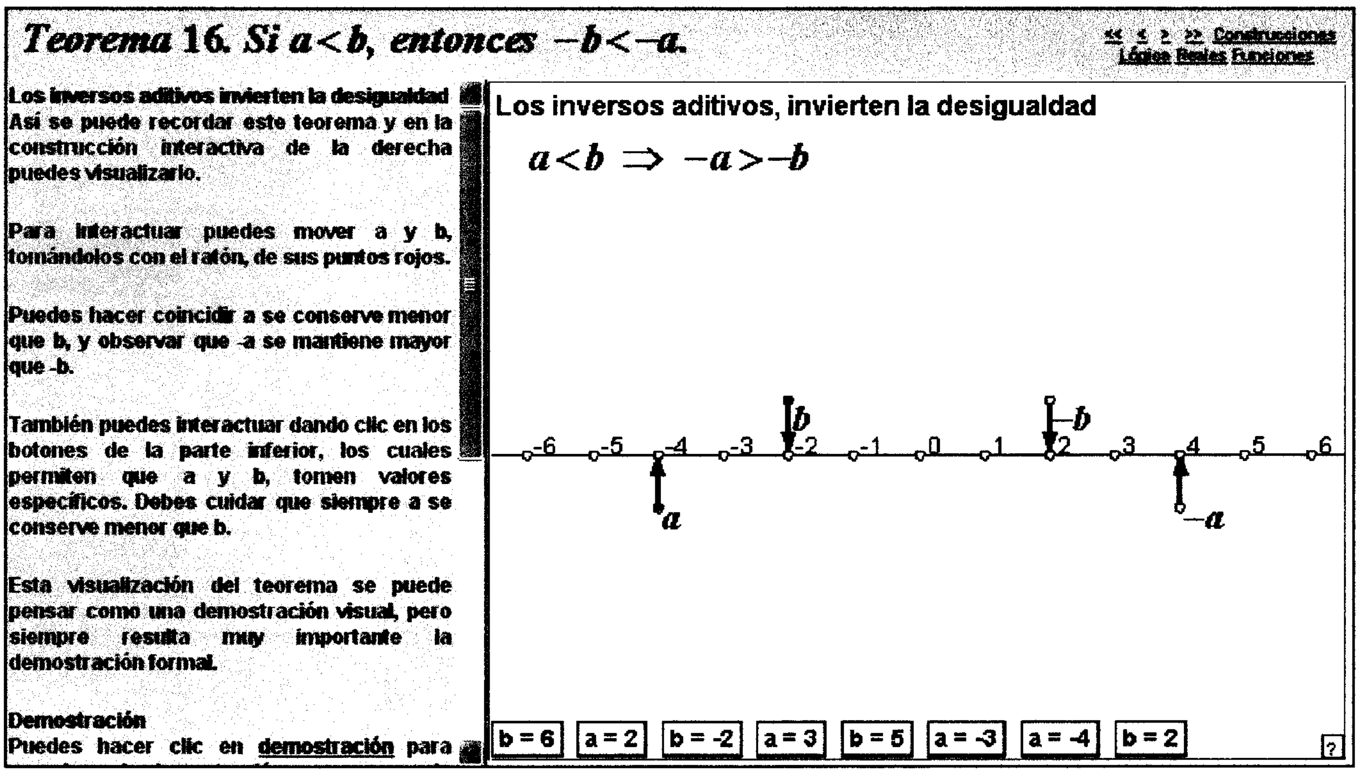
Haciendo coincidir a con b o con –b, se observará la coincidencia de a^2 con b^2.



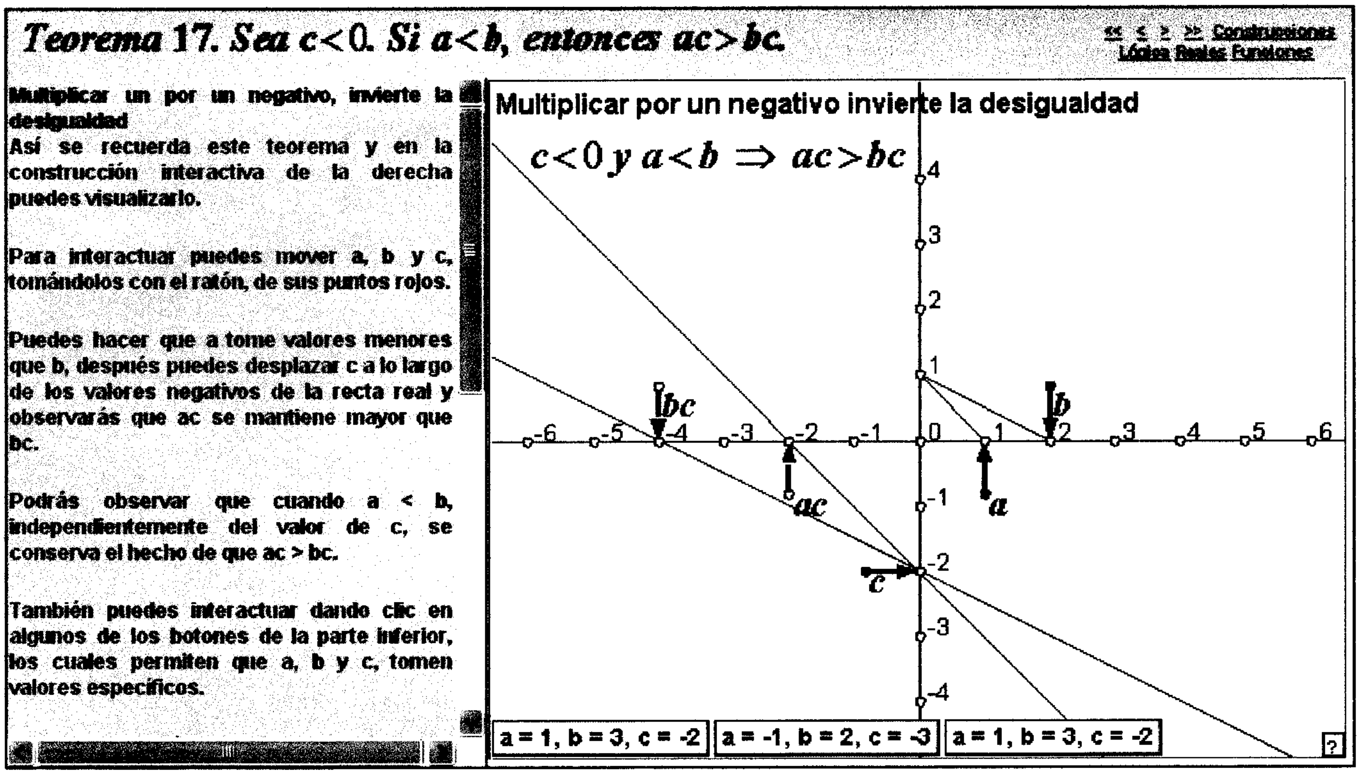
Manteniendo a+c menor que b+c, se observará que a se mantiene menor que b.



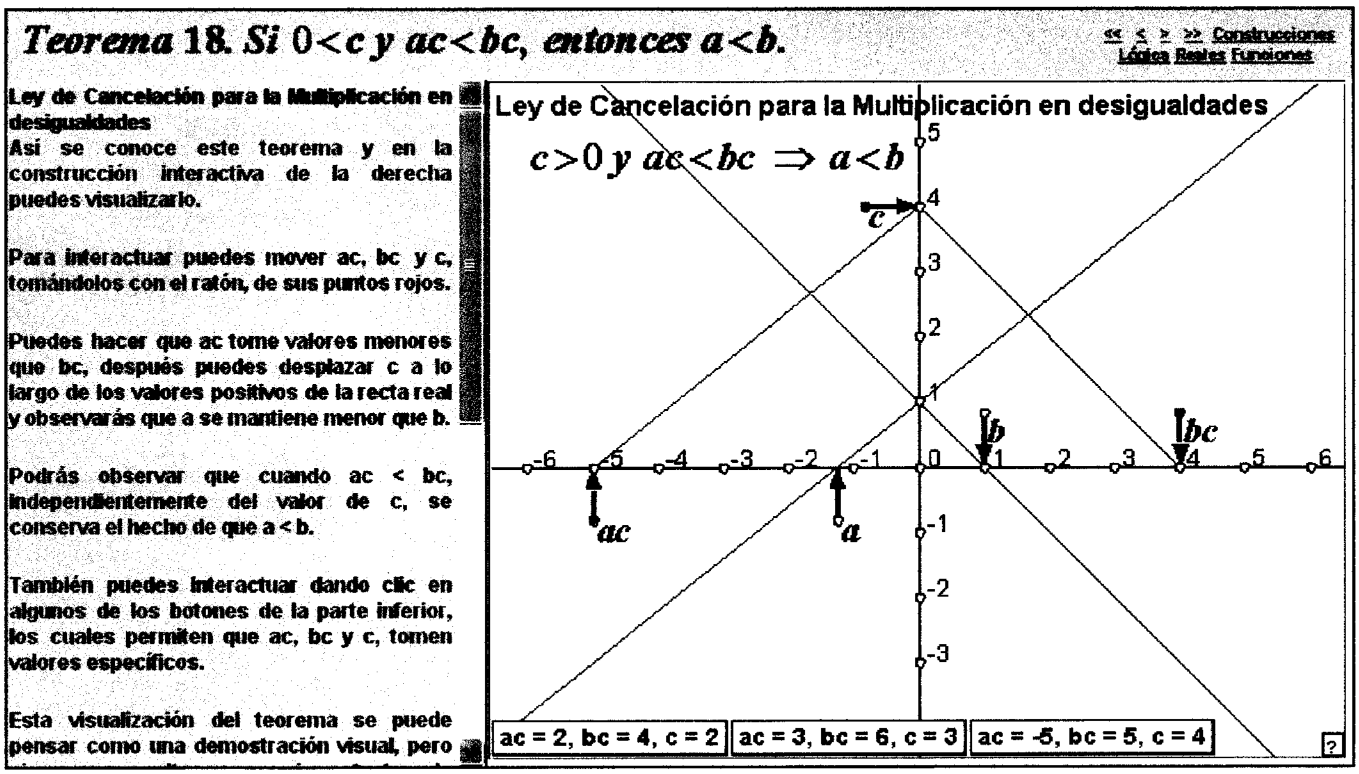
Manteniendo a menor que b, se observará que -b se mantiene menor que –a.



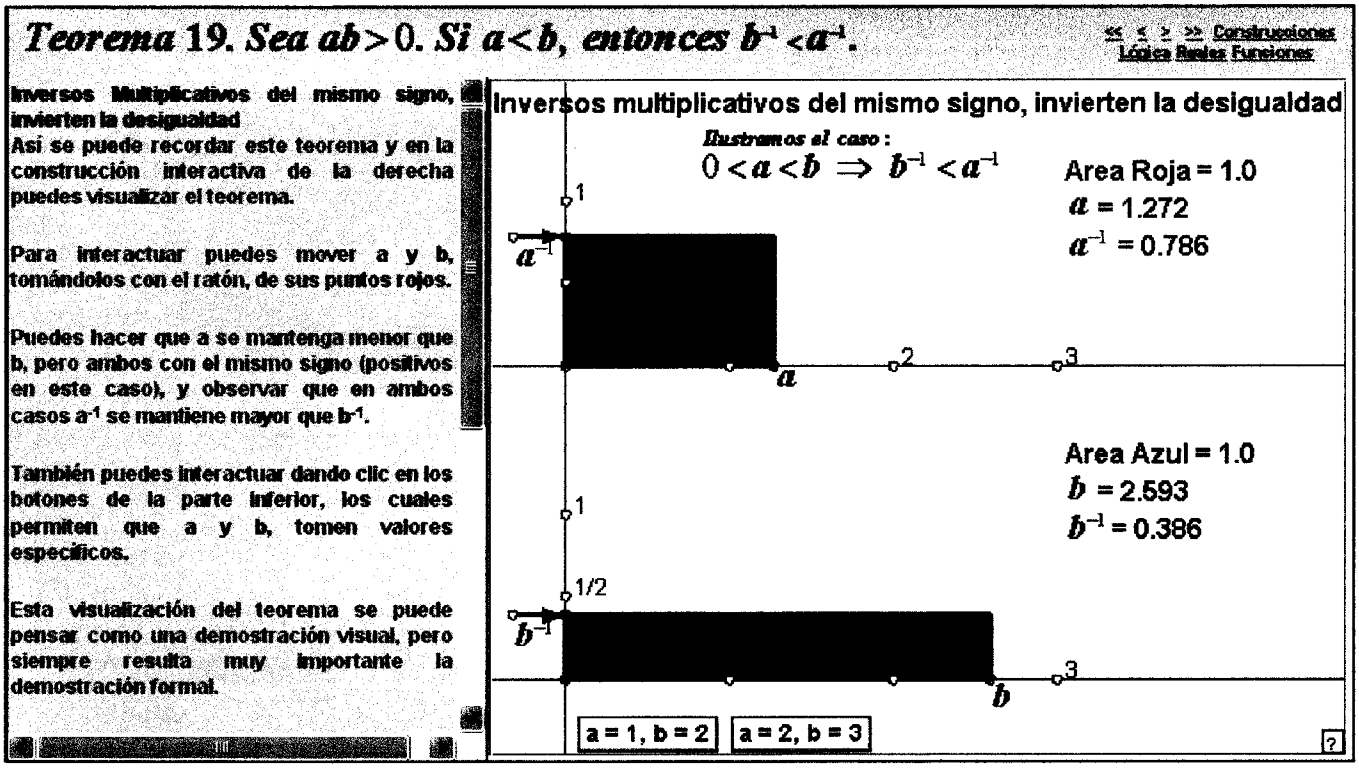
Manteniendo a menor que b y c<0, se verá que ac se mantiene mayor que bc.



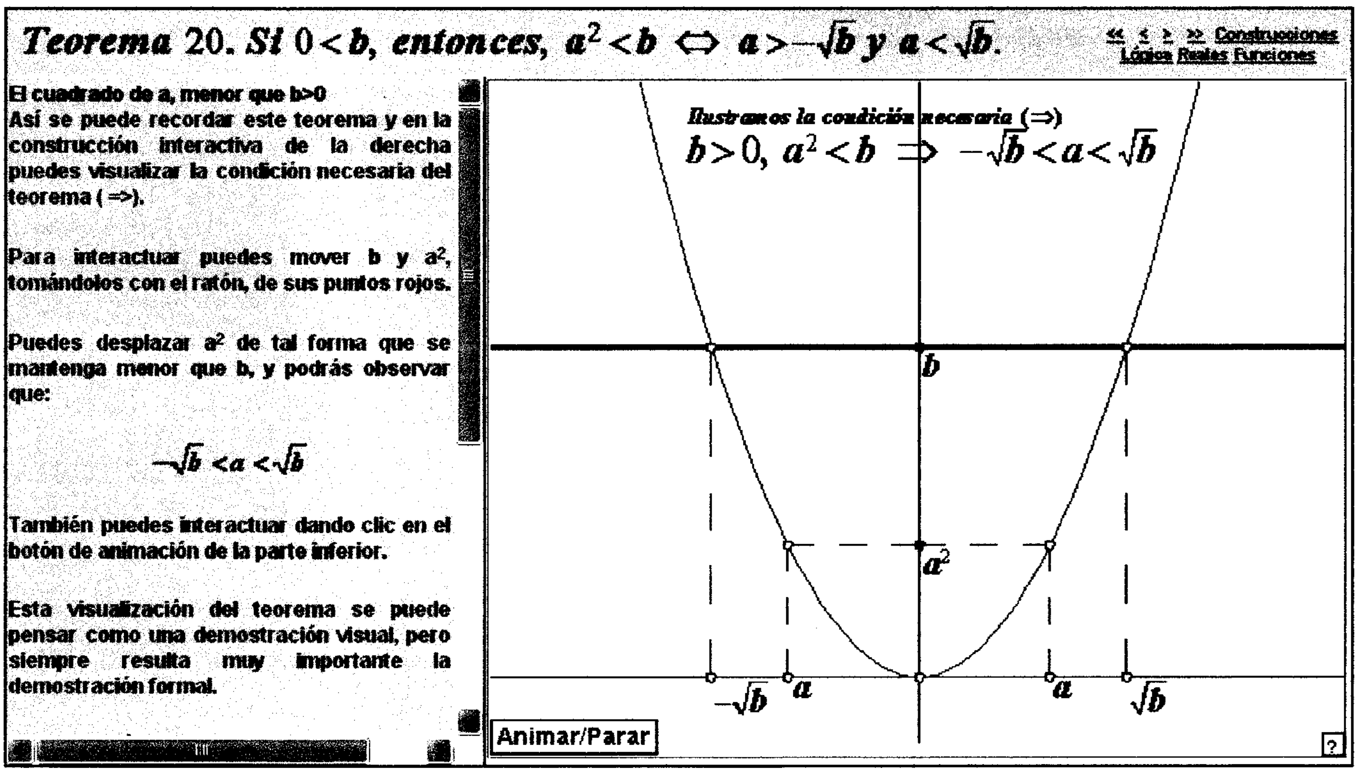
Manteniendo ac menor que bc y c>0, se verá que a se mantiene menor que b.



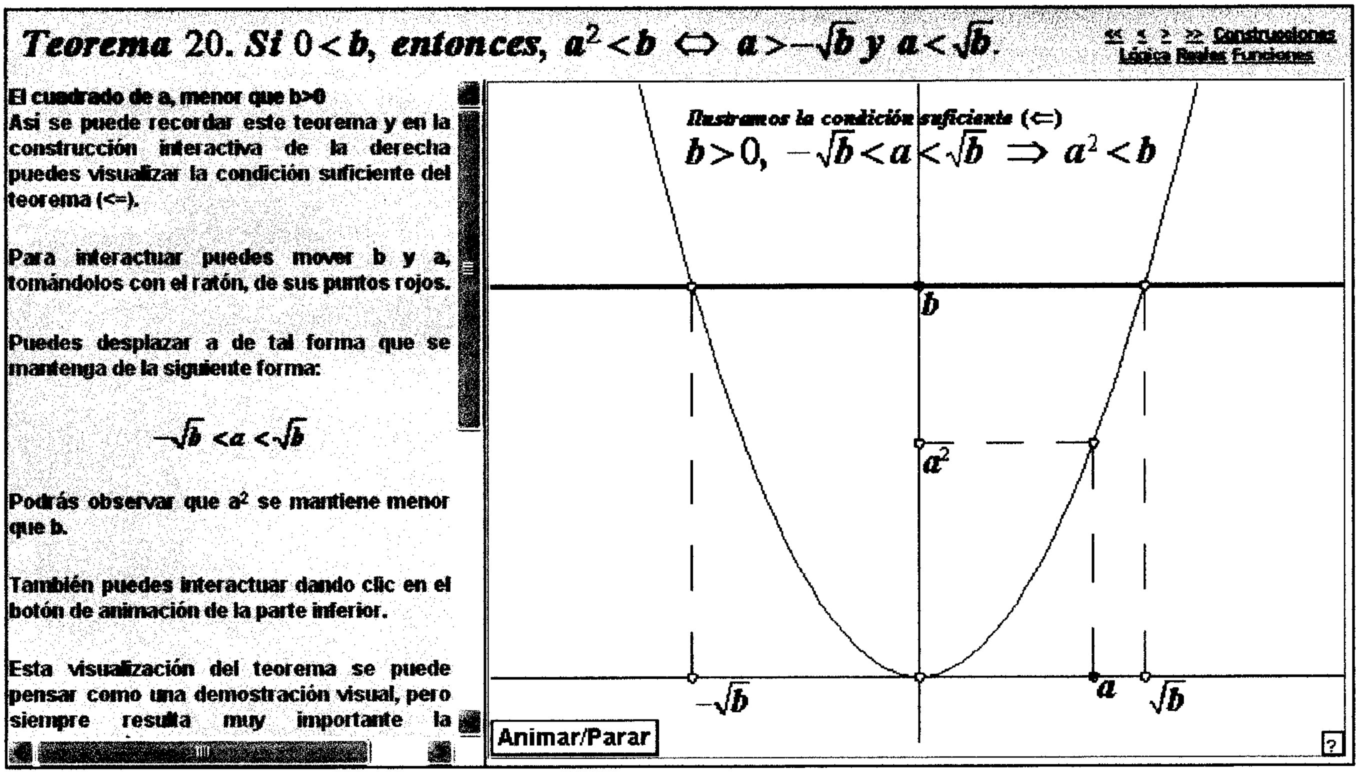
Manteniendo 0<a menor que b, se observará que b^{-1} se mantiene menor que a^{-1}.



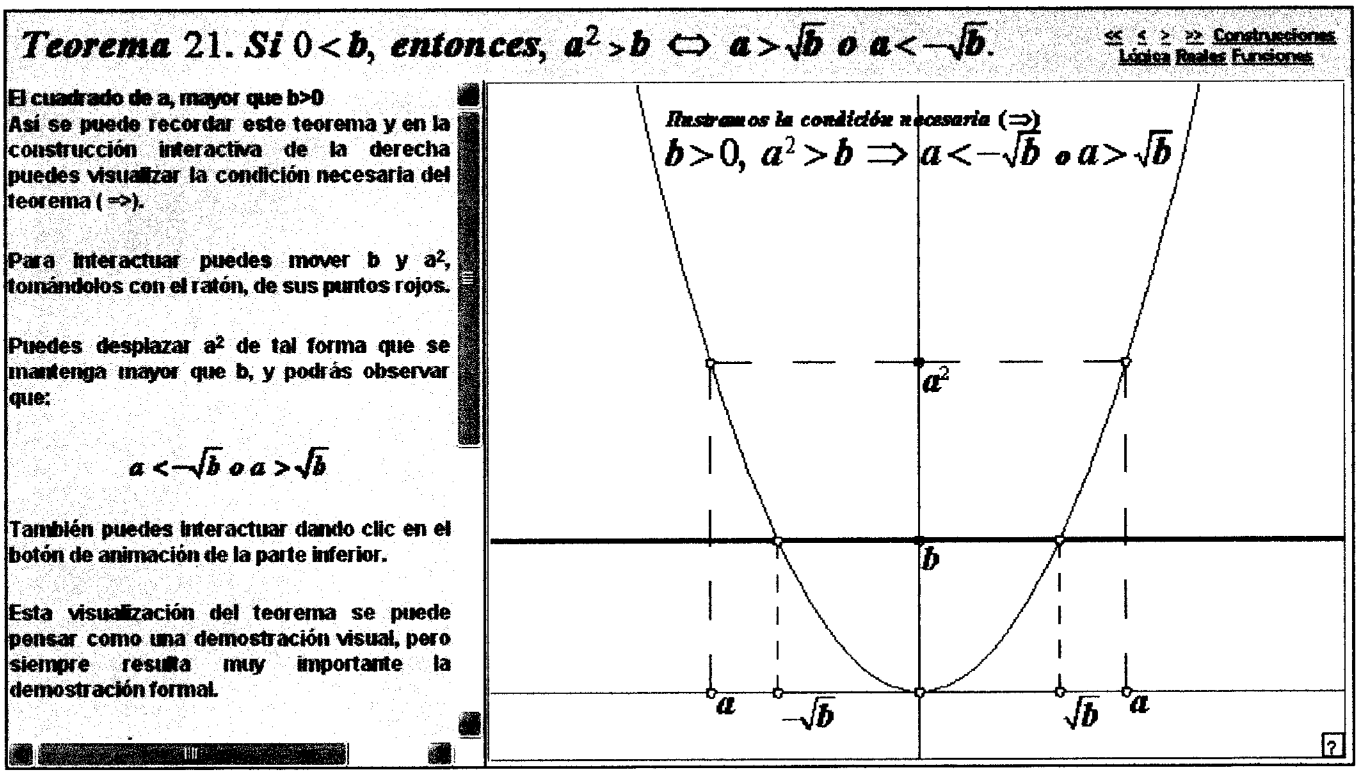
Manteniendo a^2 menor que b, se verá que a se mantiene entre $-\sqrt{b}$ y $\sqrt{b}$.



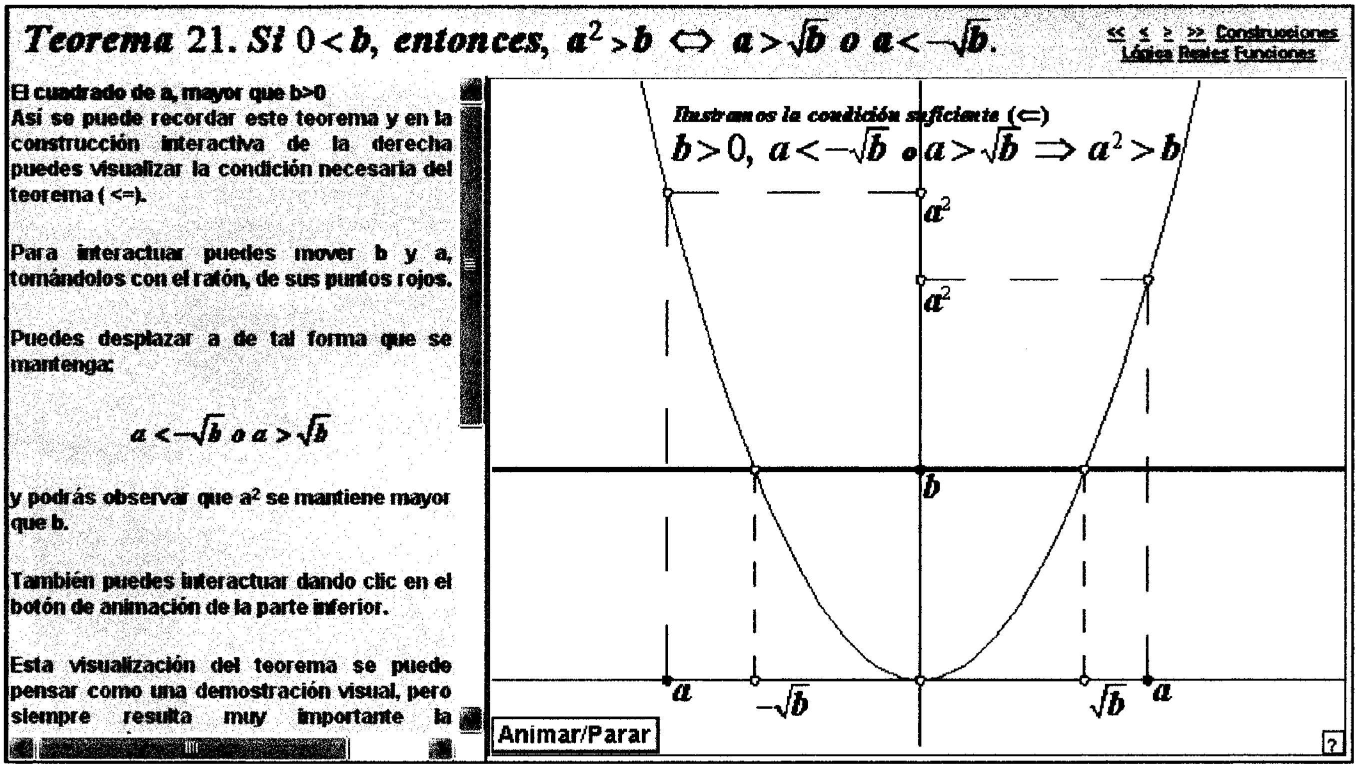
Manteniendo a entre $-\sqrt{b}$ y $\sqrt{b}$, se verá que a^2 se mantiene menor que b.



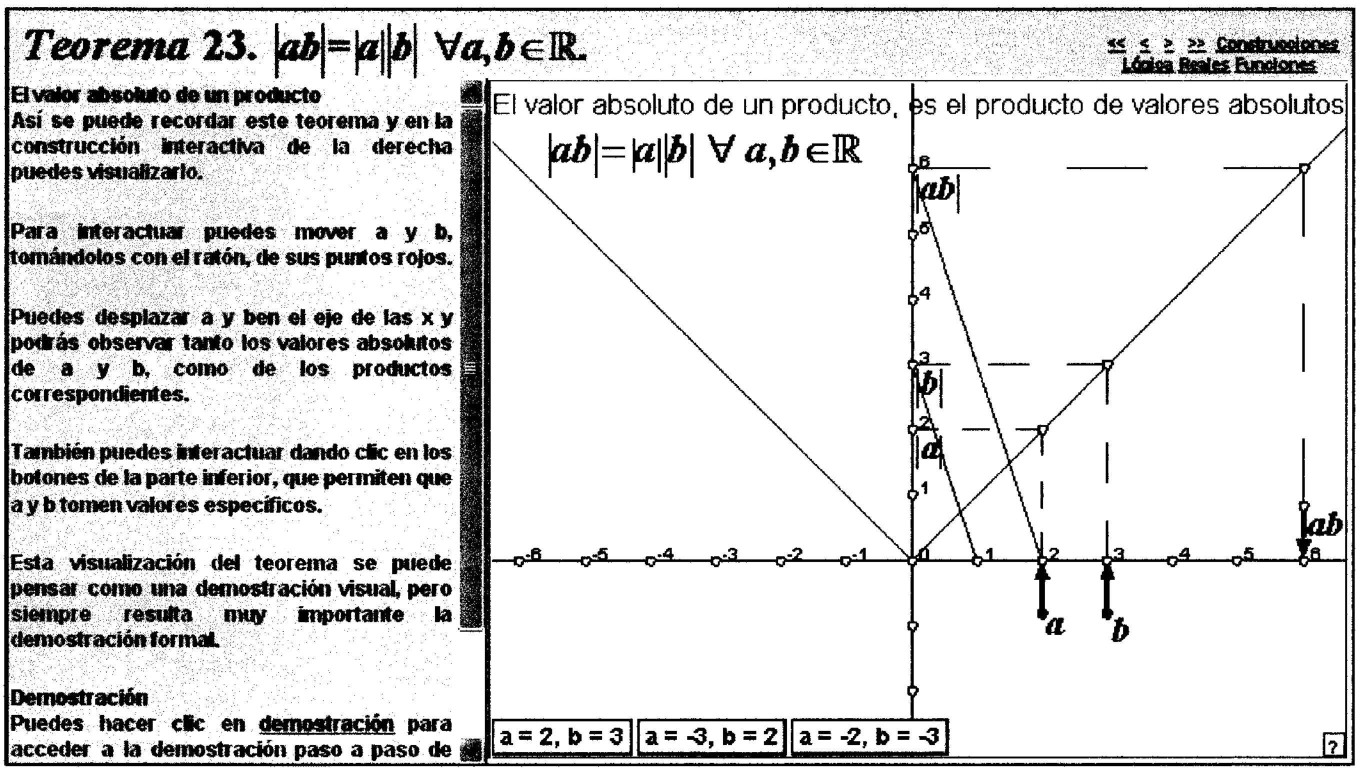
Manteniendo $a^2 > b$ y $b > 0$, se observará que se mantiene $a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$.



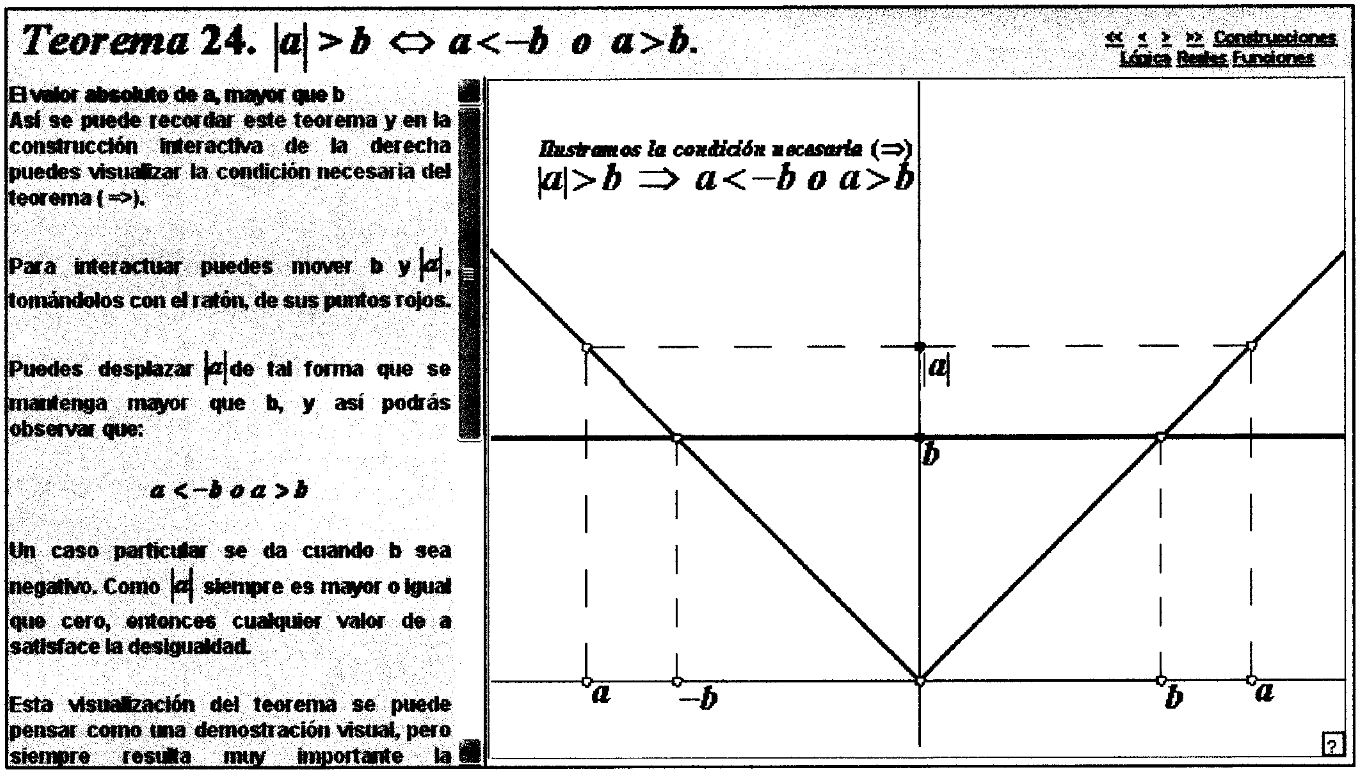
Manteniendo $a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$, se verá que a^2 se mantiene mayor que b.



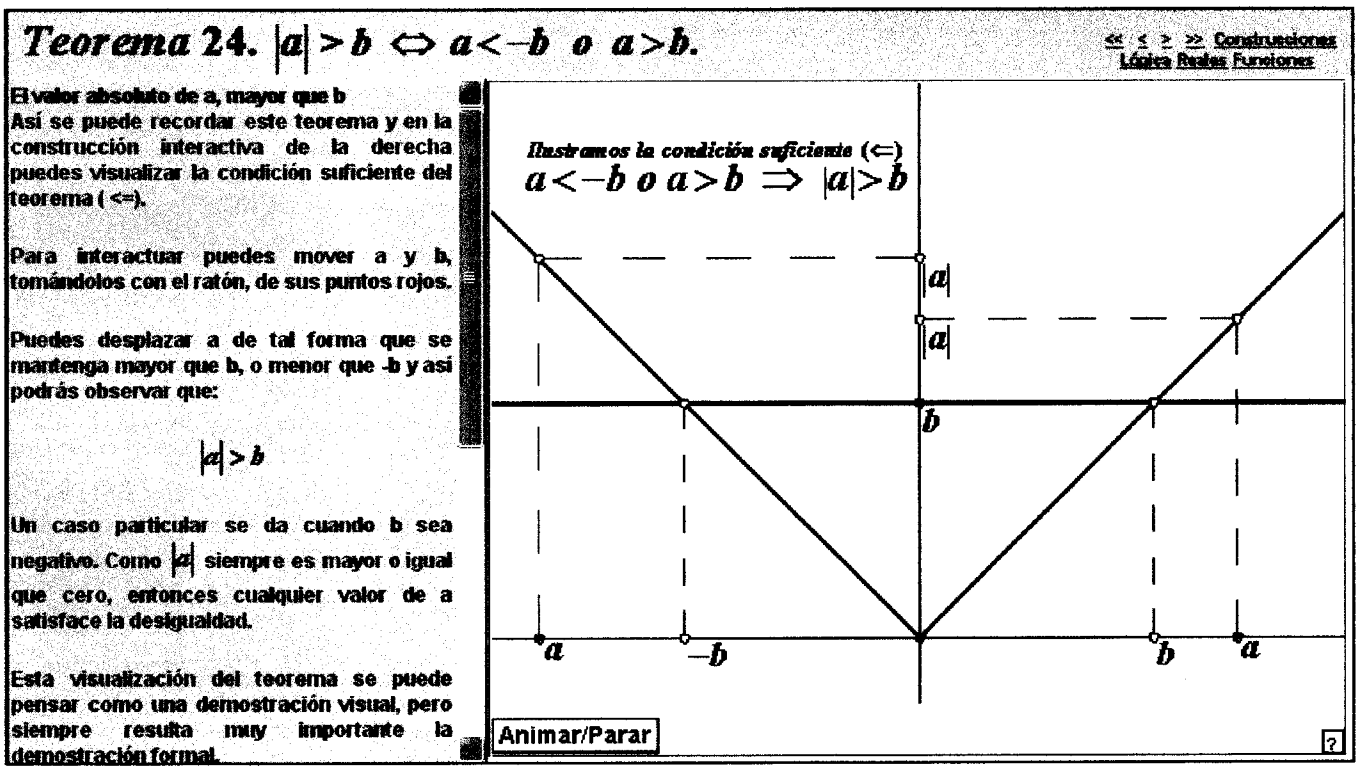
Moviendo a y b en distintas situaciones se verá la coincidencia de $|ab|$ con $|a||b|$



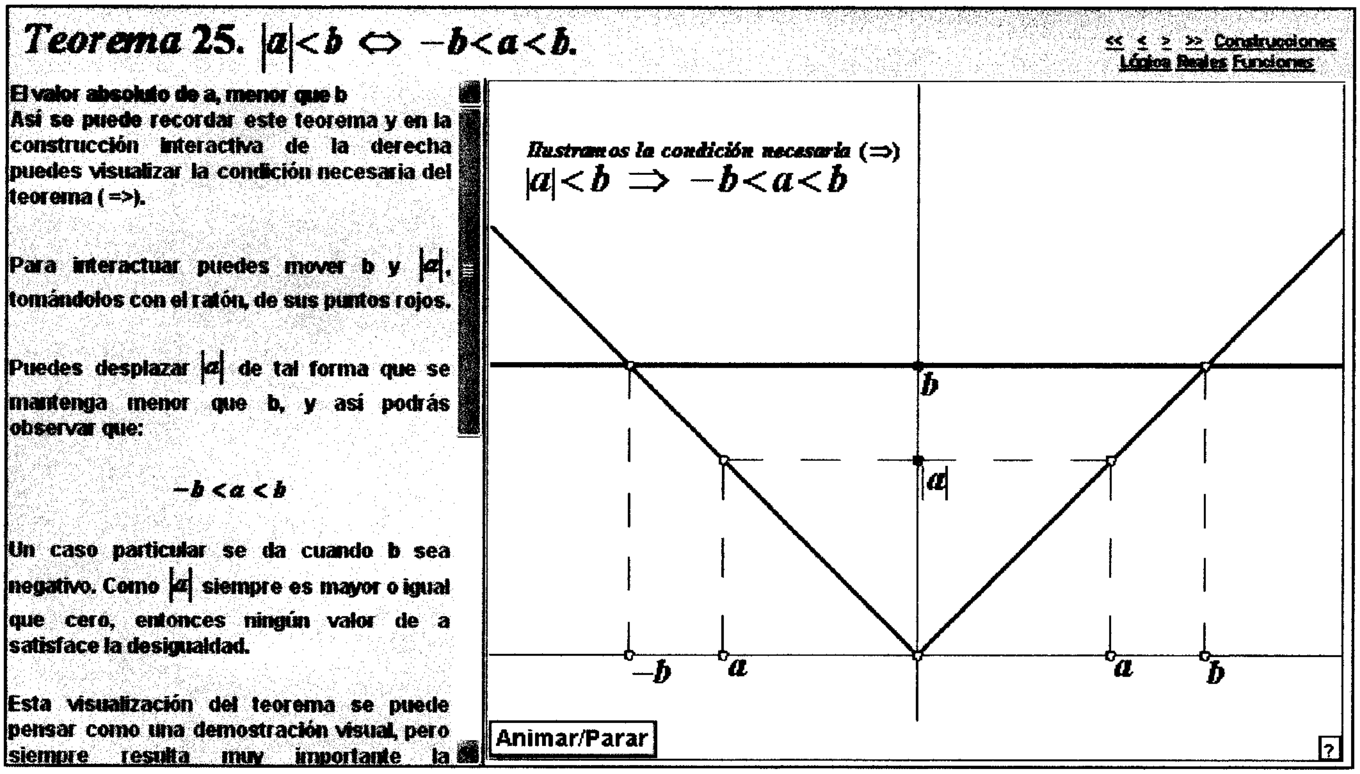
Manteniendo $|a|$ mayor que b, se observará que se mantiene $a<-b$ o $a>b$.



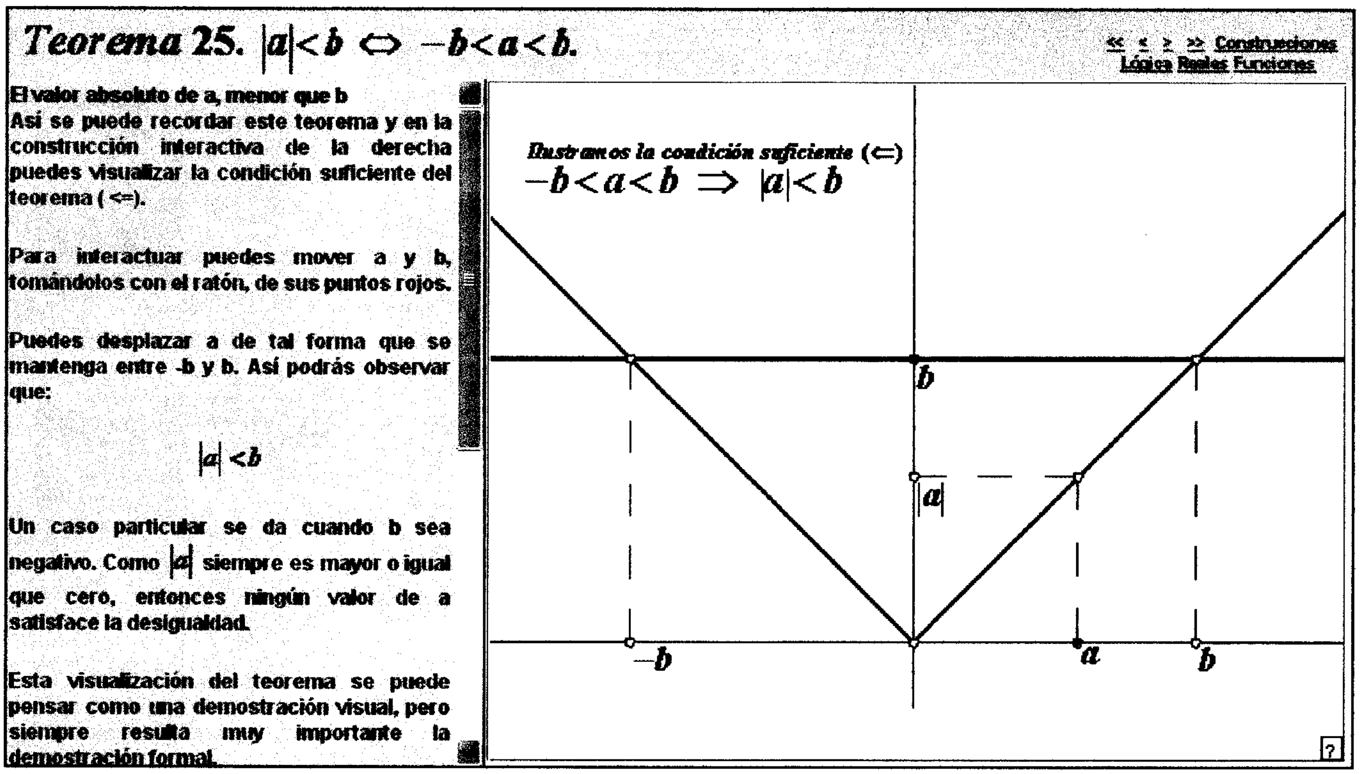
Manteniendo $a<-b$ o $a>b$, se observará que $|a|$ se mantiene mayor que b



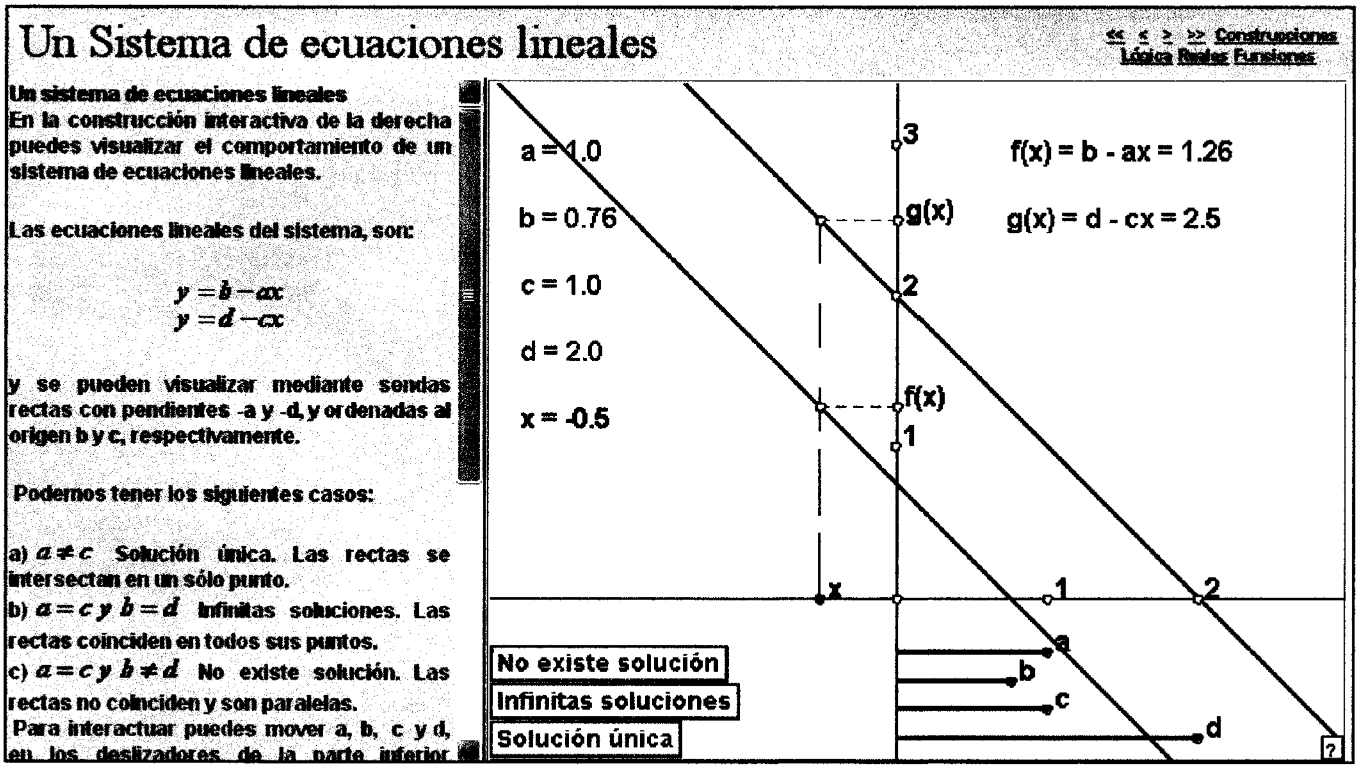
Manteniendo $|a|$ menor que b, se observará que a se mantiene entre $-b$ y b.



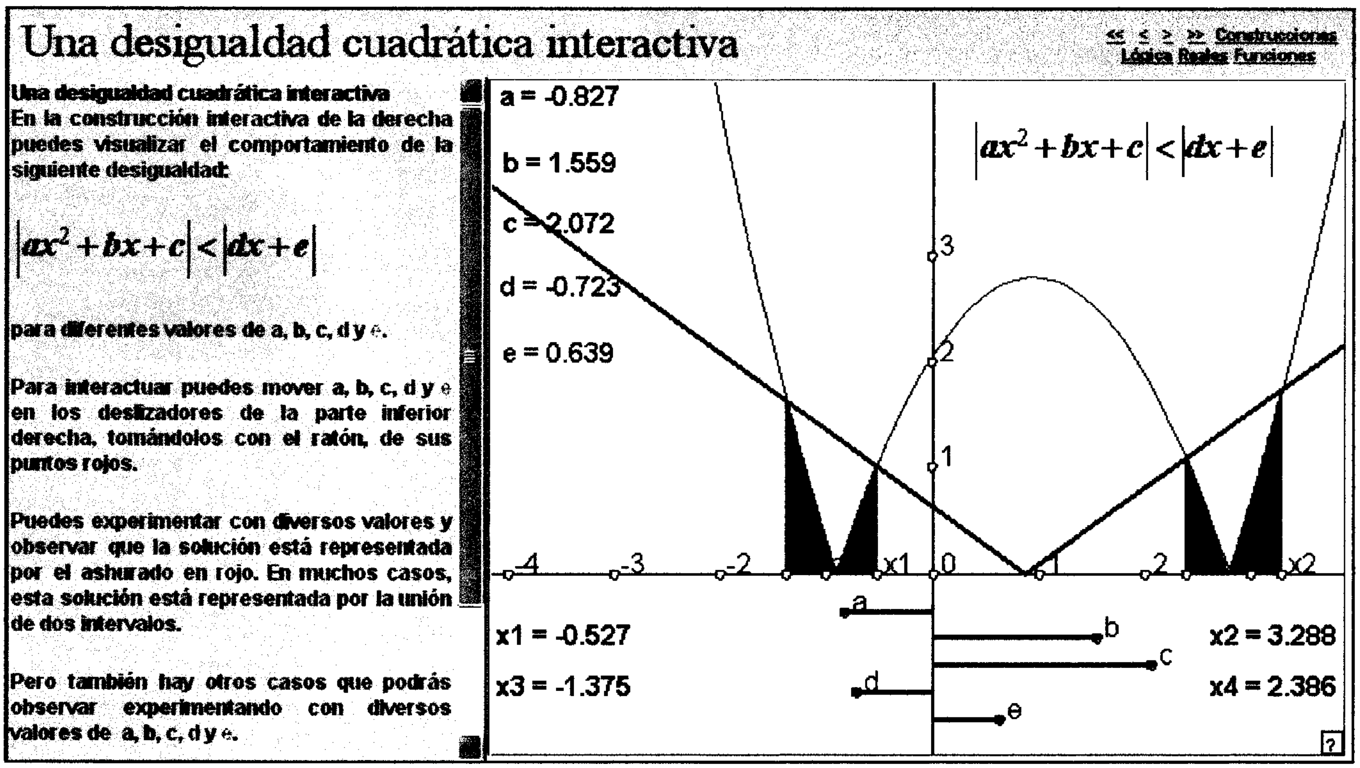
Manteniendo a entre $-b$ y b, se observará que $|a|$ se mantiene menor que b.



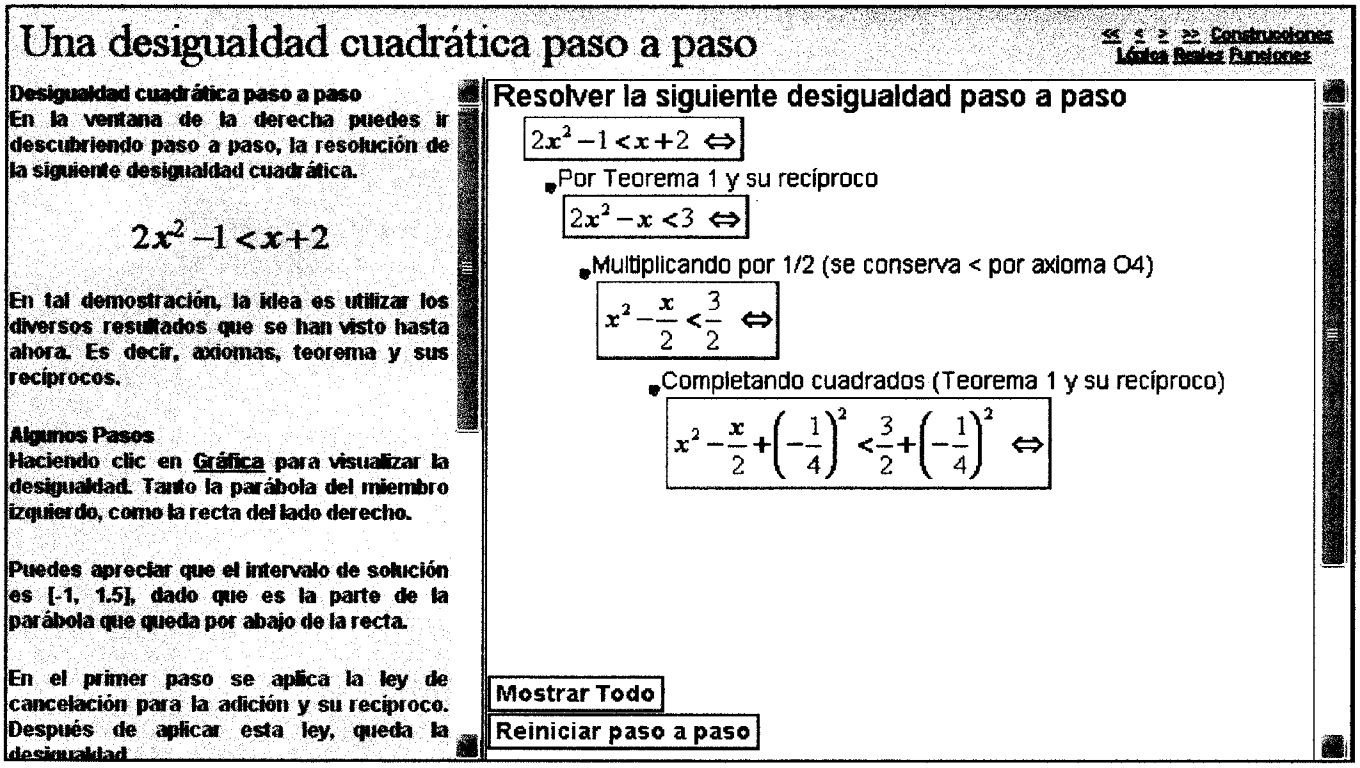
Se pueden mover a, b, c y d para cambiar la situación de las ecuaciones.



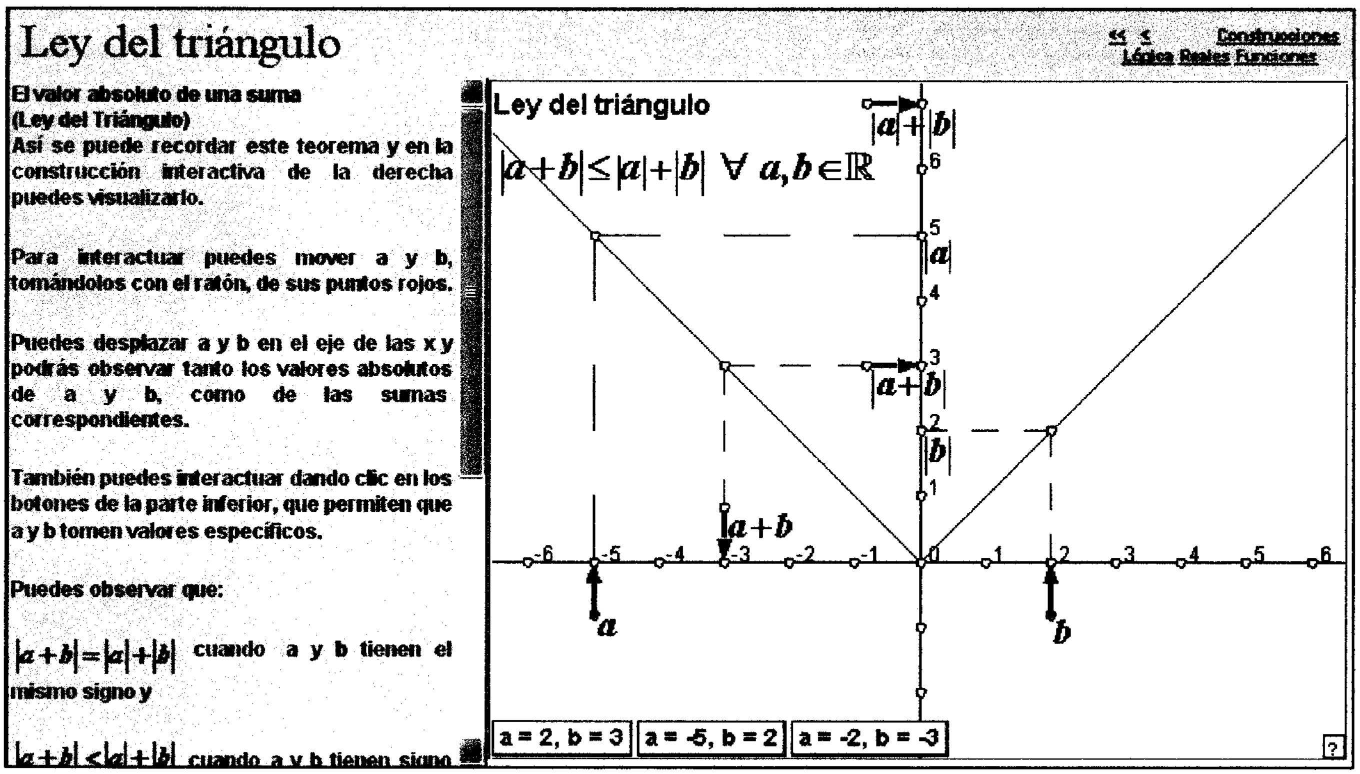
Se pueden mover a, b, c y d para cambiar la situación de la desigualdad.



Además de la solución paso a paso, se puede acceder a la gráfica (lado izquierdo).



Se pueden mover a y b para cambiar la situación de la ley del triángulo



En la sección **Otros modelos** se presentan diversos resultados sobre los Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales, así como algunas notas importantes sobre los infinitos y su cardinalidad y una reflexión sobre otros campos.

También se introducen algunas notas sobre los números y su desarrollo y una parte importante es el axioma del supremo y algunos resultados aplicando este axioma.

Se trabajan los axiomas de Peano, la inducción matemática y su equivalente principio del buen orden, teoremas sobre un entero y su cuadrado, la densidad de los racionales, la aparición de $\sqrt{2}$ y sus consecuencias en la construcción de irracionales.

Vale mencionar que en los naturales y los enteros, se demuestran leyes de cancelación, pero haciendo notar que el método seguido en los reales, no es aplicable en ninguno de estos casos.

Otros Modelos

Reales
Lógica Funciones

Los Números Naturales	**Los Números Irracionales**
Axiomas	Raíz de 2 y sus consecuencias
Cancelación para la Adición	**Los Reales y el Axioma del Supremo**
Inducción Matemática	El axioma del supremo
Los Números Enteros	Algunas proposiciones
Axiomas	**La Cardinalidad**
Cancelación para la Multiplicación	Clases de Infinitos
Algunas proposiciones	**Otros Campos**
Los Números Racionales	Los enteros módulo n
Axiomas y algunas proposiciones	Más campos

Se insiste en el axioma P5 por su importancia

Los números naturales

≥ ≫ Modelos
Lógica Reales Funciones

Los Números Naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Los Axiomas de Peano

Los números naturales son un conjunto que satisface los siguientes axiomas:

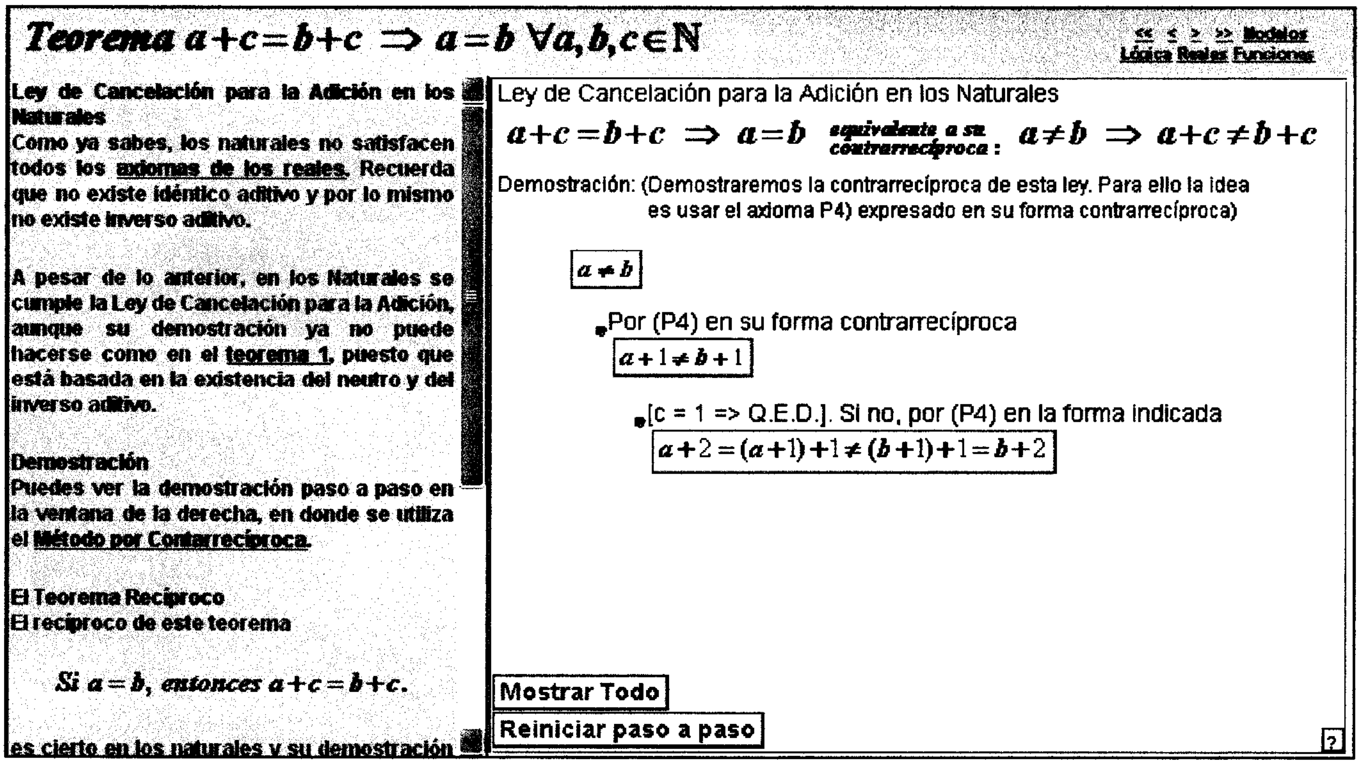
$P1)$ $1 \in \mathbb{N}$
$P2)$ *Si* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\exists n'$ *único, sucesor de* n
$P3)$ *El* 1 *no es sucesor de ningún natural*
$P4)$ *Si* $n' = m'$, *entonces* $n = m$
$P5)$ *Si* $M \subset \mathbb{N}$ *con las propiedades*:
    $i)$ $1 \in M$
    $ii)$ $n' \in M$ *siempre que* $n \in M$,
  entonces $M = \mathbb{N}$

conocidos como Axiomas de Peano, en honor al matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932), quien los estableciera de manera precisa.

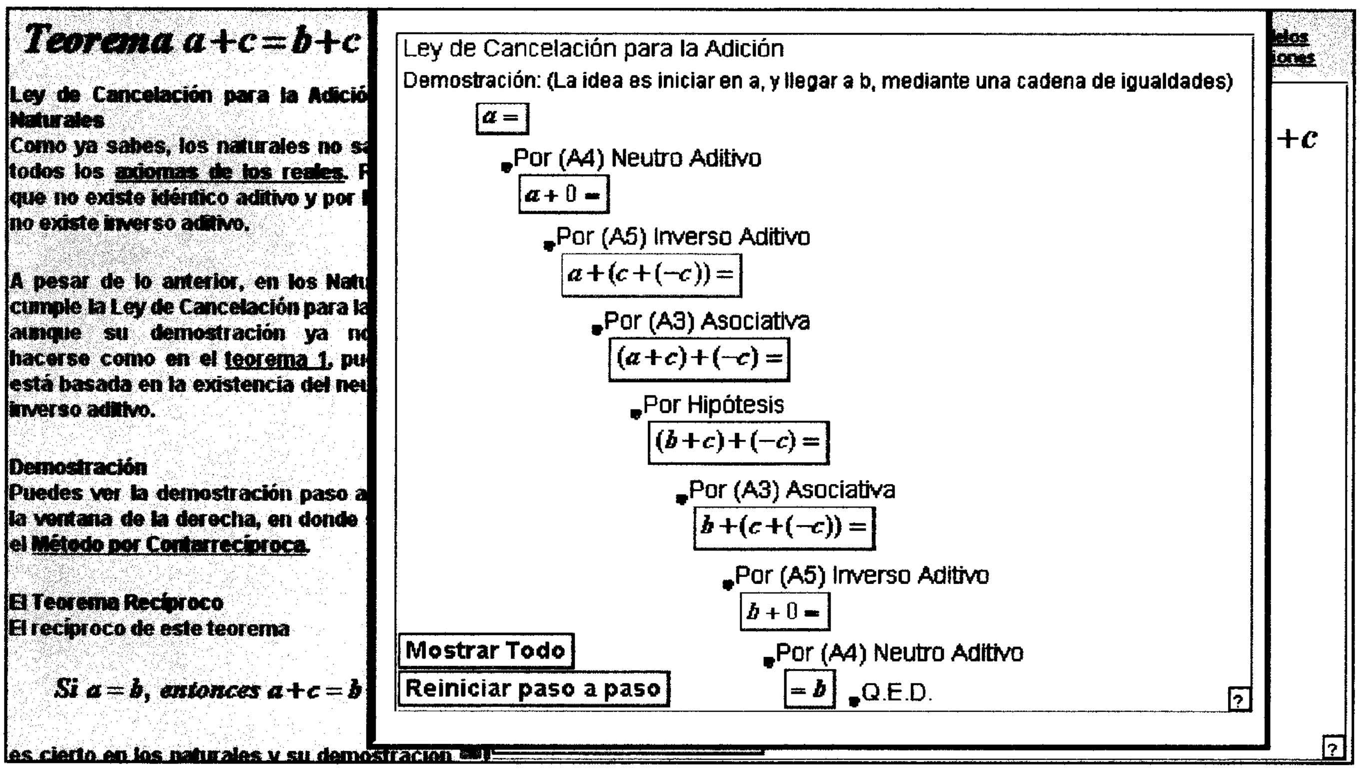
Una observación muy importante

Los axiomas de Peano definen de manera unívoca a los números Naturales. Es decir, cualquier conjunto que satisfaga los Axiomas de Peano, no será otro que los naturales.

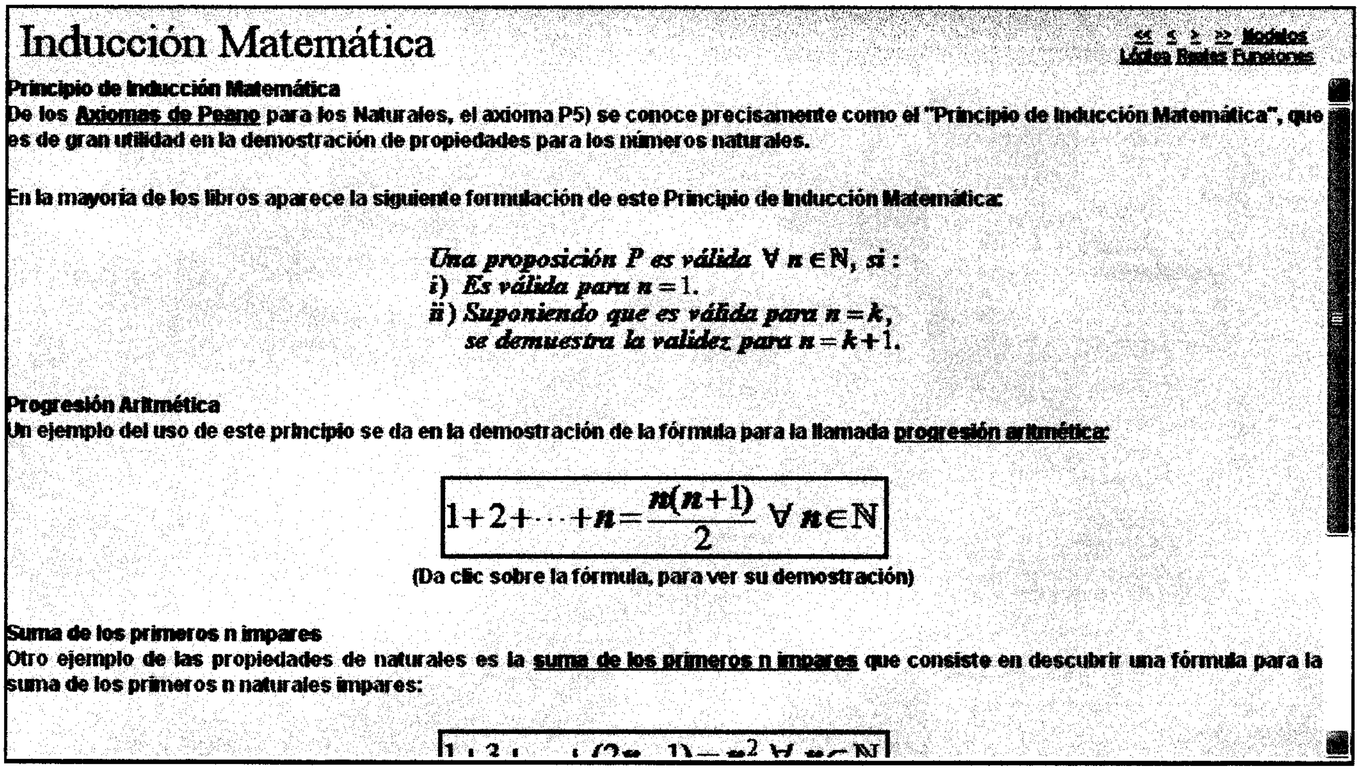
Ley de cancelación para la adición en los naturales



Haciendo ver que no se puede demostrar como en los reales



La inducción matemática y ejemplos



Inducción Matemática

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

Principio de Inducción Matemática

De los Axiomas de Peano para los Naturales, el axioma P5) se conoce precisamente como el "Principio de Inducción Matemática", que es de gran utilidad en la demostración de propiedades para los números naturales.

En la mayoría de los libros aparece la siguiente formulación de este Principio de Inducción Matemática:

Una proposición P es válida $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ***si*** :
i) ***Es válida para*** $n = 1$.
ii) ***Suponiendo que es válida para*** $n = k$,
se demuestra la validez para $n = k+1$.

Progresión Aritmética

Un ejemplo del uso de este principio se da en la demostración de la fórmula para la llamada progresión aritmética:

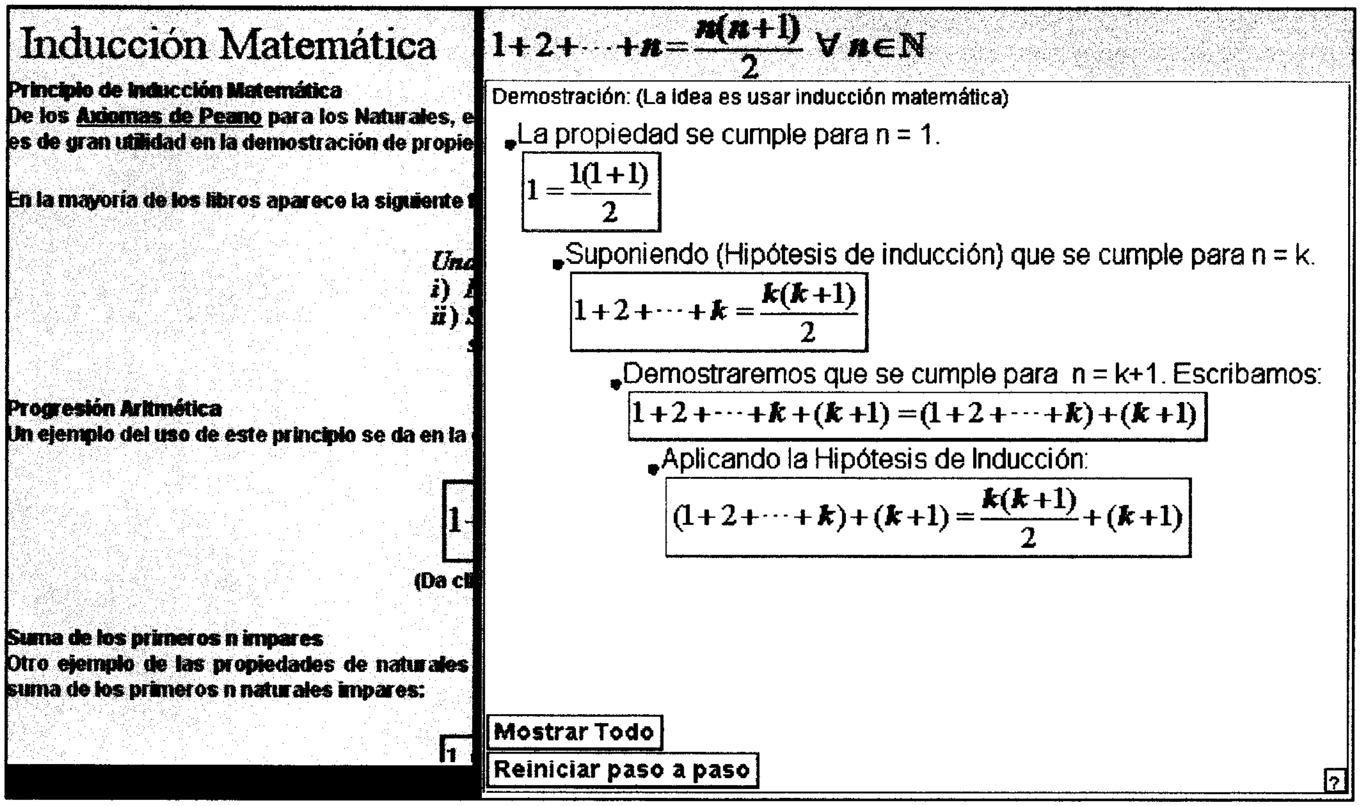
$$\boxed{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \forall\, n\in\mathbb{N}}$$

(Da clic sobre la fórmula, para ver su demostración)

Suma de los primeros n impares

Otro ejemplo de las propiedades de naturales es la suma de los primeros n impares que consiste en descubrir una fórmula para la suma de los primeros n naturales impares:

Ejemplo de inducción matemática con demostración interactiva paso a paso, en una ventana flotante.



Inducción Matemática

Principio de Inducción Matemática

De los Axiomas de Peano para los Naturales, e
es de gran utilidad en la demostración de propie

En la mayoría de los libros aparece la siguiente

Progresión Aritmética

Un ejemplo del uso de este principio se da en la

(Da cl

Suma de los primeros n impares

Otro ejemplo de las propiedades de naturales
suma de los primeros n naturales impares:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$$

Demostración: (La idea es usar inducción matemática)

- La propiedad se cumple para n = 1.

$$\boxed{1=\frac{1(1+1)}{2}}$$

- Suponiendo (Hipótesis de inducción) que se cumple para n = k.

$$\boxed{1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}}$$

- Demostraremos que se cumple para n = k+1. Escribamos:

$$\boxed{1+2+\cdots+k+(k+1)=(1+2+\cdots+k)+(k+1)}$$

- Aplicando la Hipótesis de Inducción:

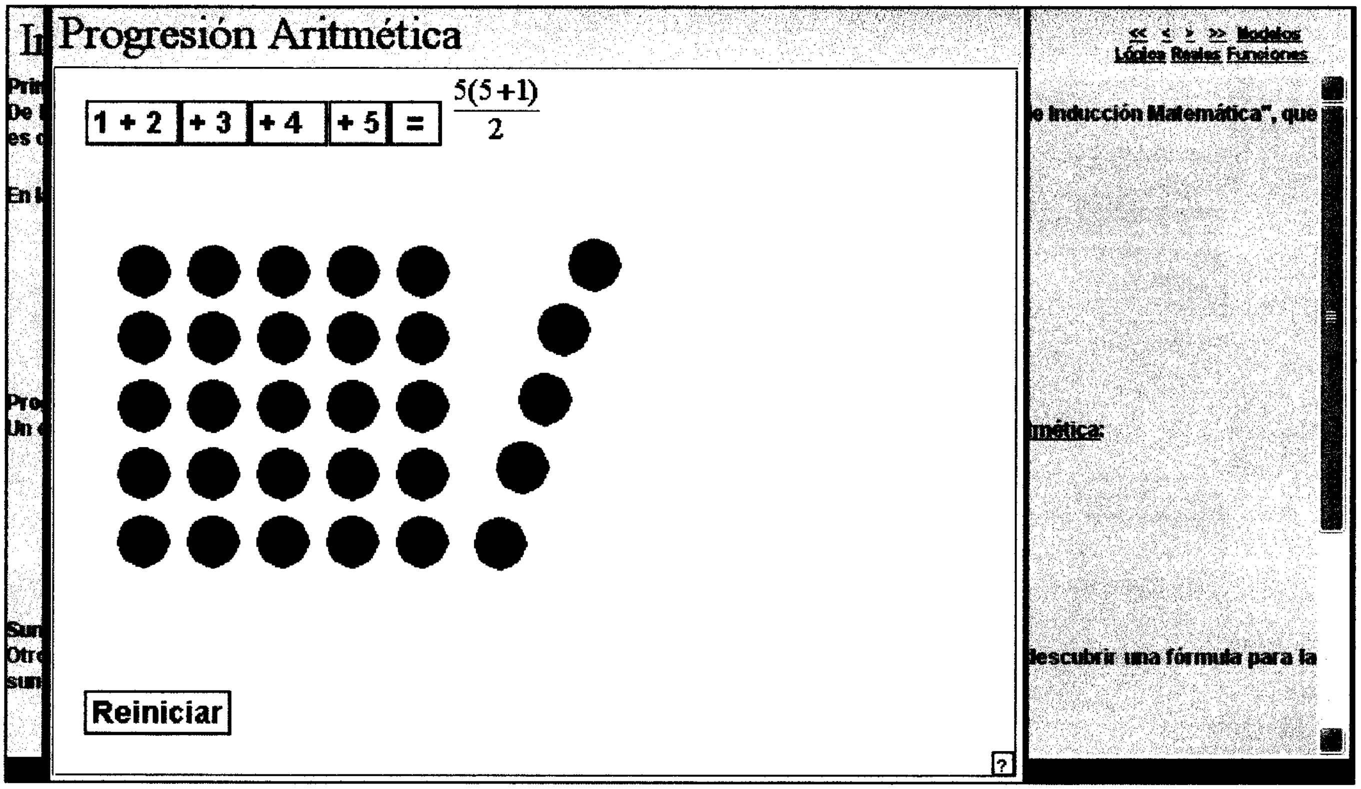
$$\boxed{(1+2+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)}$$

Mostrar Todo

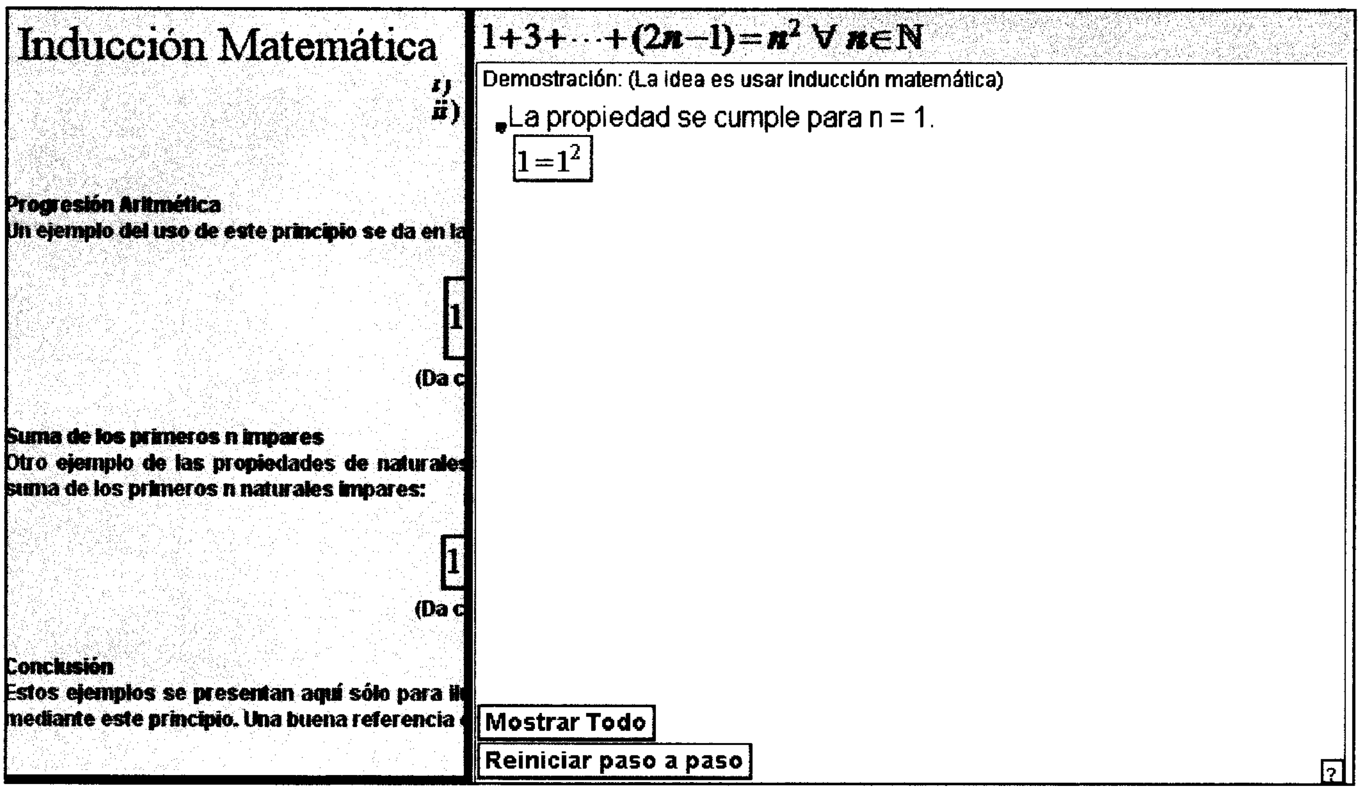
Reiniciar paso a paso

?

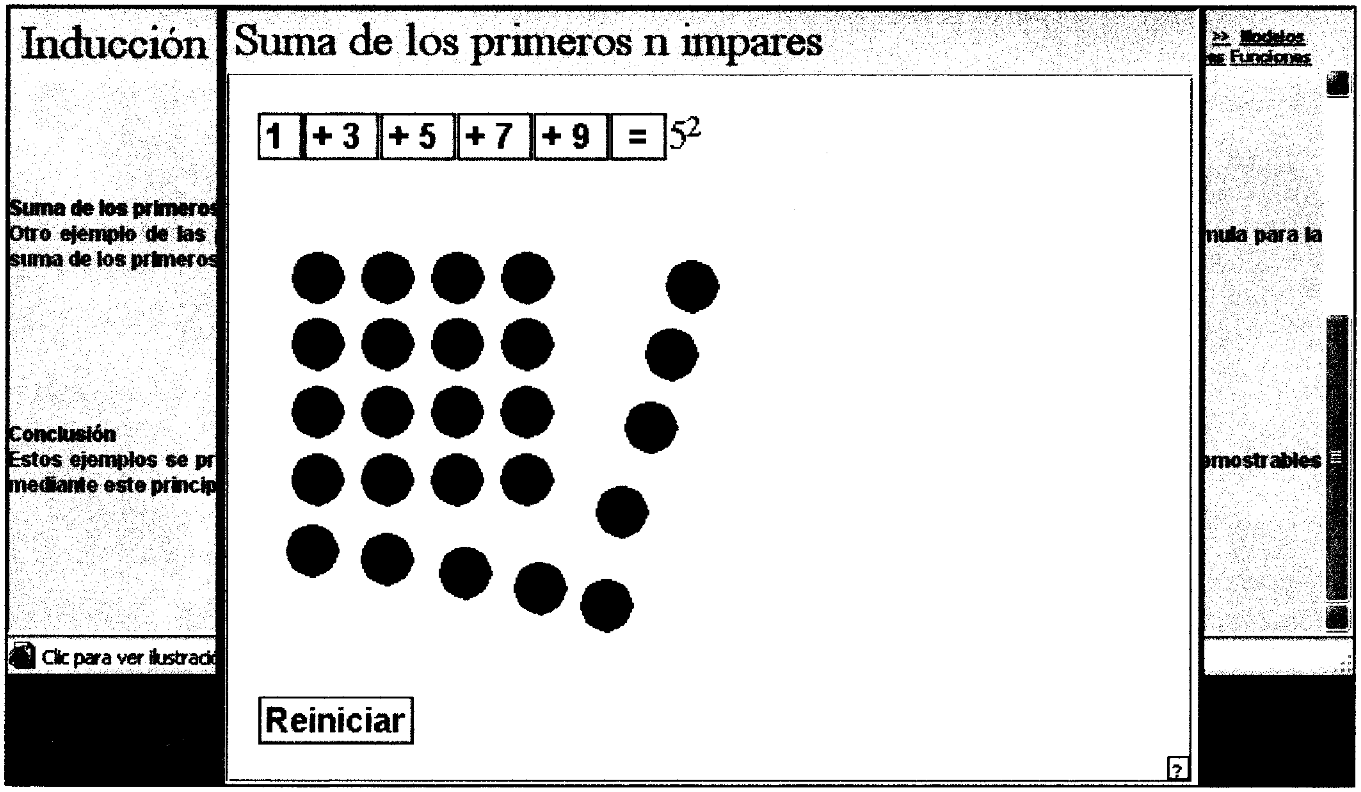
Ilustración interactiva de la suma de los primeros cinco naturales en ventana flotante.



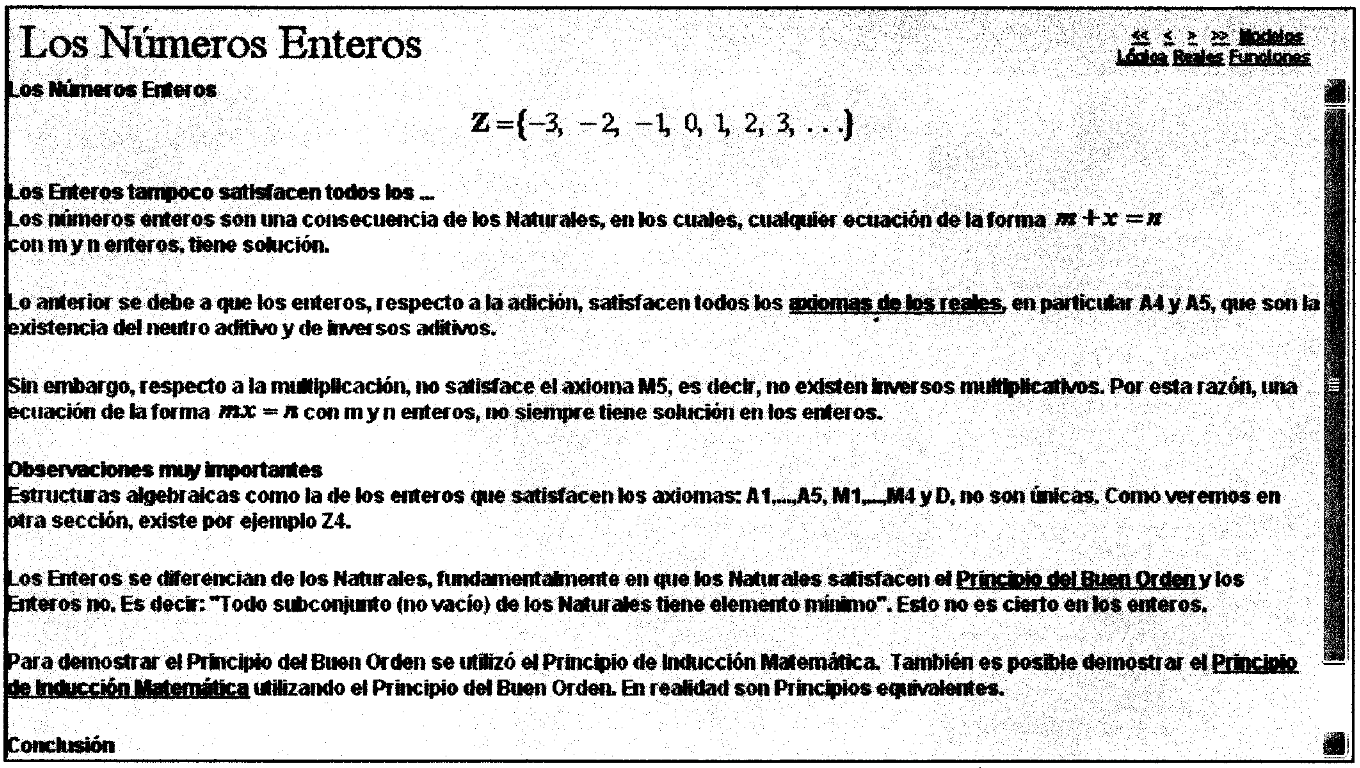
Otro ejemplo de inducción matemática y su demostración interactiva paso a paso, que se despliega en una ventana flotante.



Una ilustración interactiva de la suma de los primeros cinco impares



Diferencia entre Enteros y Naturales (Principio del buen orden)



Los Números Enteros

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

Los Números Enteros

$$\mathbf{Z} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Los Enteros tampoco satisfacen todos los ...

Los números enteros son una consecuencia de los Naturales, en los cuales, cualquier ecuación de la forma $m + x = n$ con m y n enteros, tiene solución.

Lo anterior se debe a que los enteros, respecto a la adición, satisfacen todos los axiomas de los reales, en particular A4 y A5, que son la existencia del neutro aditivo y de inversos aditivos.

Sin embargo, respecto a la multiplicación, no satisface el axioma M5, es decir, no existen inversos multiplicativos. Por esta razón, una ecuación de la forma $mx = n$ con m y n enteros, no siempre tiene solución en los enteros.

Observaciones muy importantes

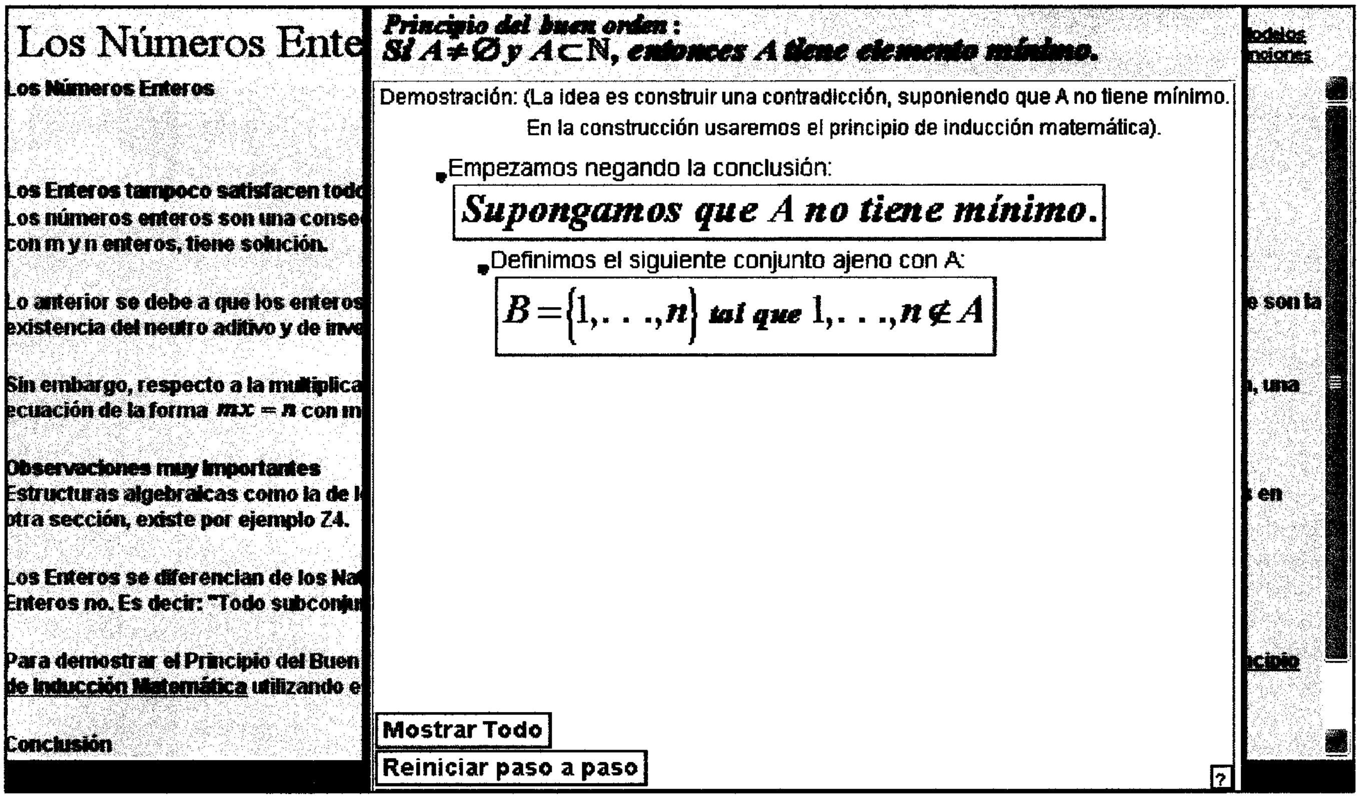
Estructuras algebraicas como la de los enteros que satisfacen los axiomas: A1,...,A5, M1,...,M4 y D, no son únicas. Como veremos en otra sección, existe por ejemplo Z4.

Los Enteros se diferencian de los Naturales, fundamentalmente en que los Naturales satisfacen el Principio del Buen Orden y los Enteros no. Es decir: "Todo subconjunto (no vacío) de los Naturales tiene elemento mínimo". Esto no es cierto en los enteros.

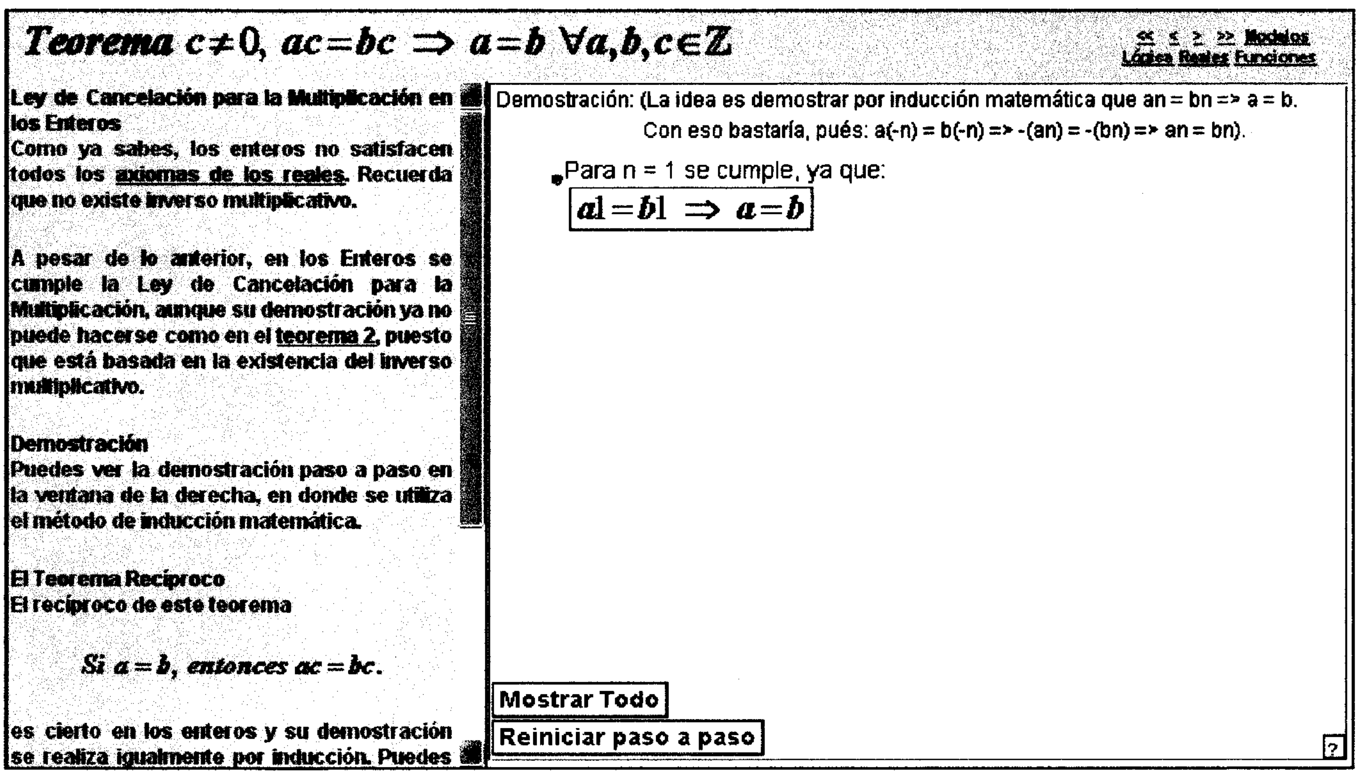
Para demostrar el Principio del Buen Orden se utilizó el Principio de Inducción Matemática. También es posible demostrar el Principio de Inducción Matemática utilizando el Principio del Buen Orden. En realidad son Principios equivalentes.

Conclusión

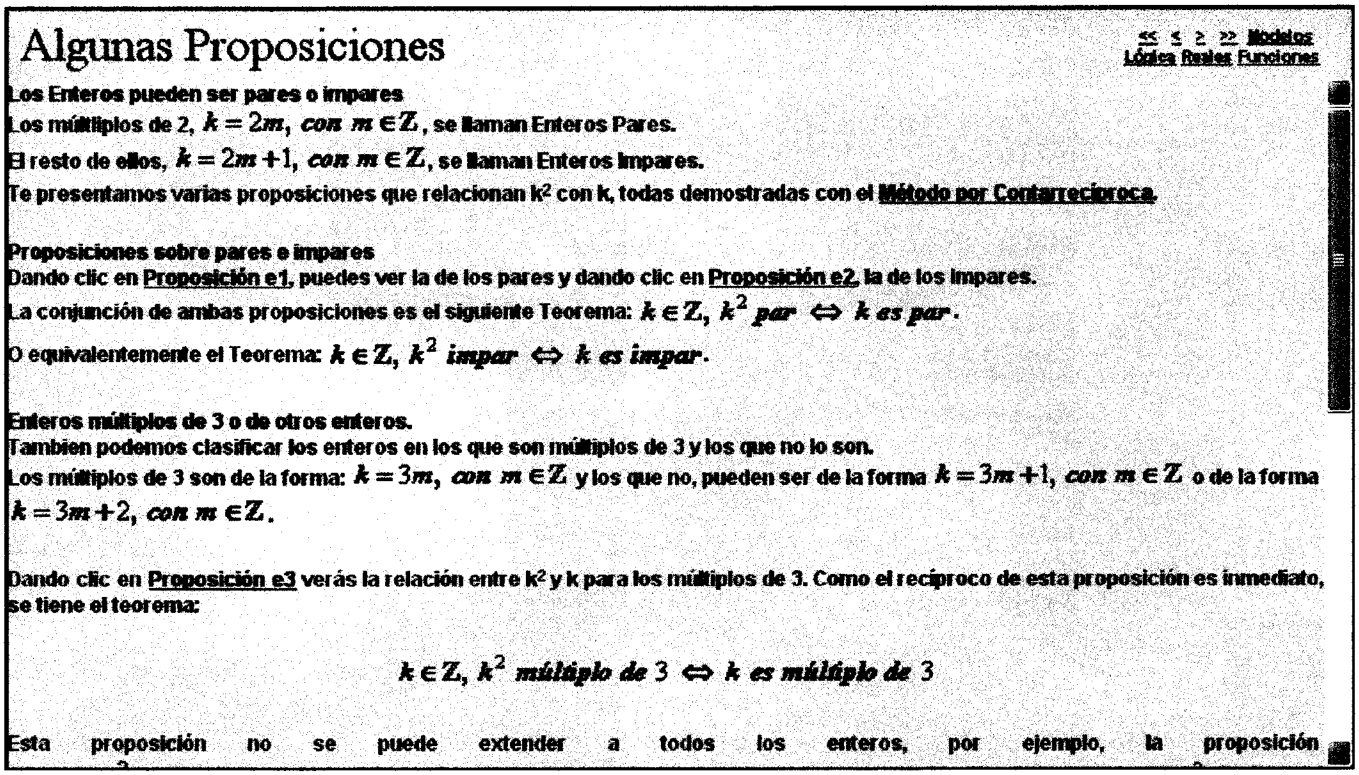
Principio de inducción matemática implica Principio del buen orden y viceversa. Su demostración se presenta en una ventana flotante.



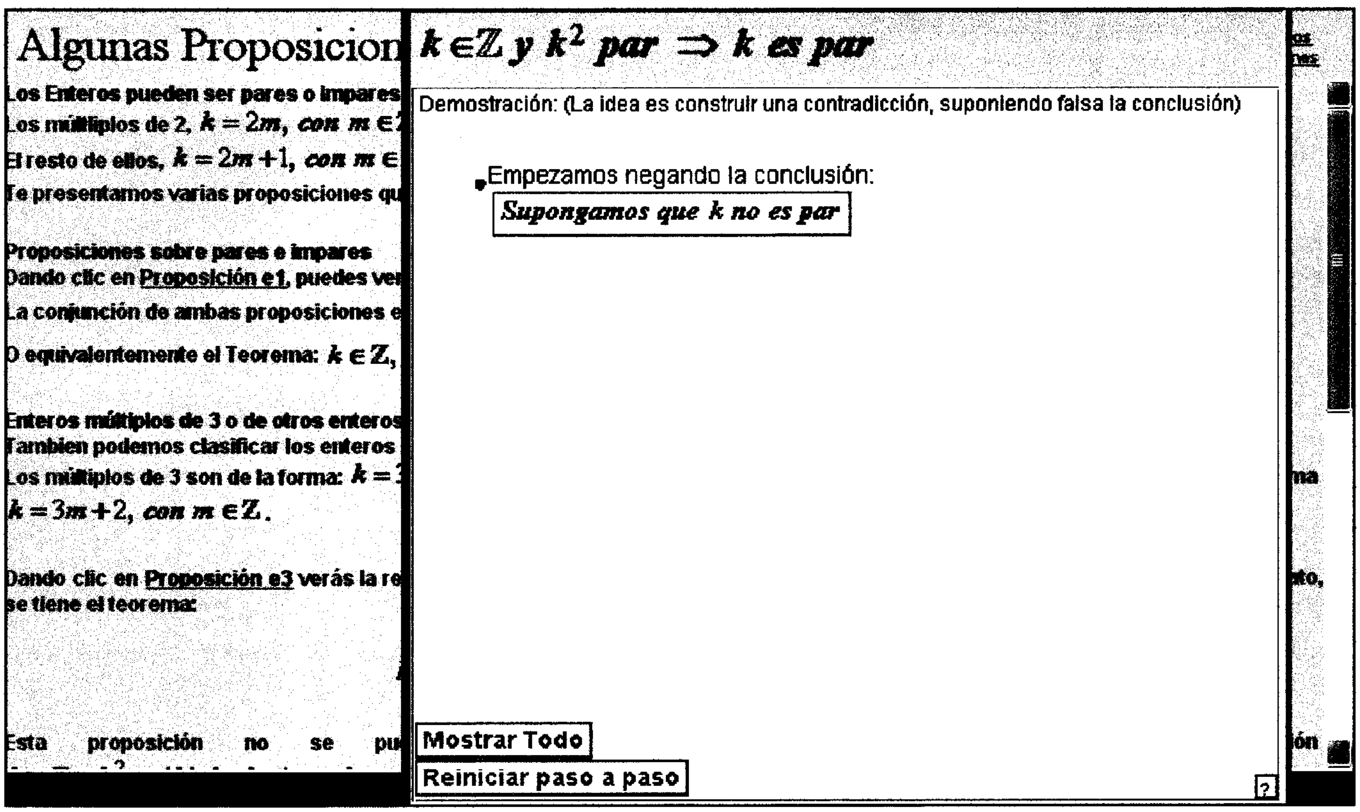
Ley de cancelación para la multiplicación en los Enteros



Diversas proposiciones en los Enteros, varias de ellas de mucha utilidad en demostraciones sobre irracionales.



Relacionando el cuadrado de un entero, con el mismo entero



Los racionales y el teorema de Pitágoras

Los Números Racionales

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

Los Números Racionales son un Campo

Los números racionales son cocientes de enteros y con las operaciones de adición y multiplicación, satisfacen todos los axiomas de los reales: A1, A2, A3, A4, A5, M1, M2, M3, M4, M5 y D, con lo que se dice que son un Campo, al igual que los Reales. Inclusive satisface los Axiomas de Orden O1, O2, O3 y O4.

Así que todas los resultados que hemos demostrado para los Reales, se aplican a los Racionales. En particular las leyes de cancelación y el hecho de que toda ecuación del tipo $mx + b = c$ tiene solución en $\mathbb{Q}$.

Observaciones muy importantes

Como los Racionales satisfacen los Axiomas Campo y de Orden, se dice que son un Campo ordenado, al igual que los Reales.

Los Racionales difieren de los Reales en el Axioma del Supremo, cuya importancia consiste en la posibilidad de poder establecer una correspondencia biunívoca entre los Reales y los puntos de una recta. Los Racionales por sí mismos no llenan la recta, no obstante que "entre dos racionales cualesquiera hay una infinidad de ellos", como veremos en el siguiente apartado.

Los griegos, con el Teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo con catetos igual a 1, descubrieron el número $\sqrt{2}$ que no es posible escribirlo como cociente de enteros, es decir, no es racional. A este tipo de números les llamaron inconmensurables y actualmente se les llaman Irracionales. En la siguiente sección podremos ver algunas de estas demostraciones.

Los Racionales difieren de los Naturales o los Enteros en la propiedad de los sucesores. Recuerda que en todo Natural o Entero tiene un sucesor. Esto no es así en $\mathbb{Q}$, como podremos ver en el siguiente apartado.

Algunas proposiciones interesantes

Dando clic Proposición 1 encontrarás la demostración de que "entre cualesquiera dos racionales, hay otro racional".

Descubriendo irracionales. El primero $\sqrt{2}$ resultado del teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1.

$\sqrt{2}$ *y sus consecuencias*

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

El Números $\sqrt{2}$ es irracional

Los griegos, con el Teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo con catetos igual a 1, descubrieron el número $\sqrt{2}$ y dando clic en Proposición i1 encontrarás la demostración, por Reducción al Absurdo, al igual que las tres siguientes, de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Así, este sería seguramente el primer irracional que registraron.
Llamando I a los números irracionales (que los Griegos llamaron inconmensurables), tenemos que $\sqrt{2} \in I$.

Algunos otros Números Irracionales

También dando clic Proposición i2 encontrarás la demostración de que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (i.e. $\sqrt{3} \in I$).

De manera mas general, dando clic Proposición i3 encontrarás la demostración de que *Si p primo, entonces* $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ (i.e. $\sqrt{p} \in I$).

De manera general

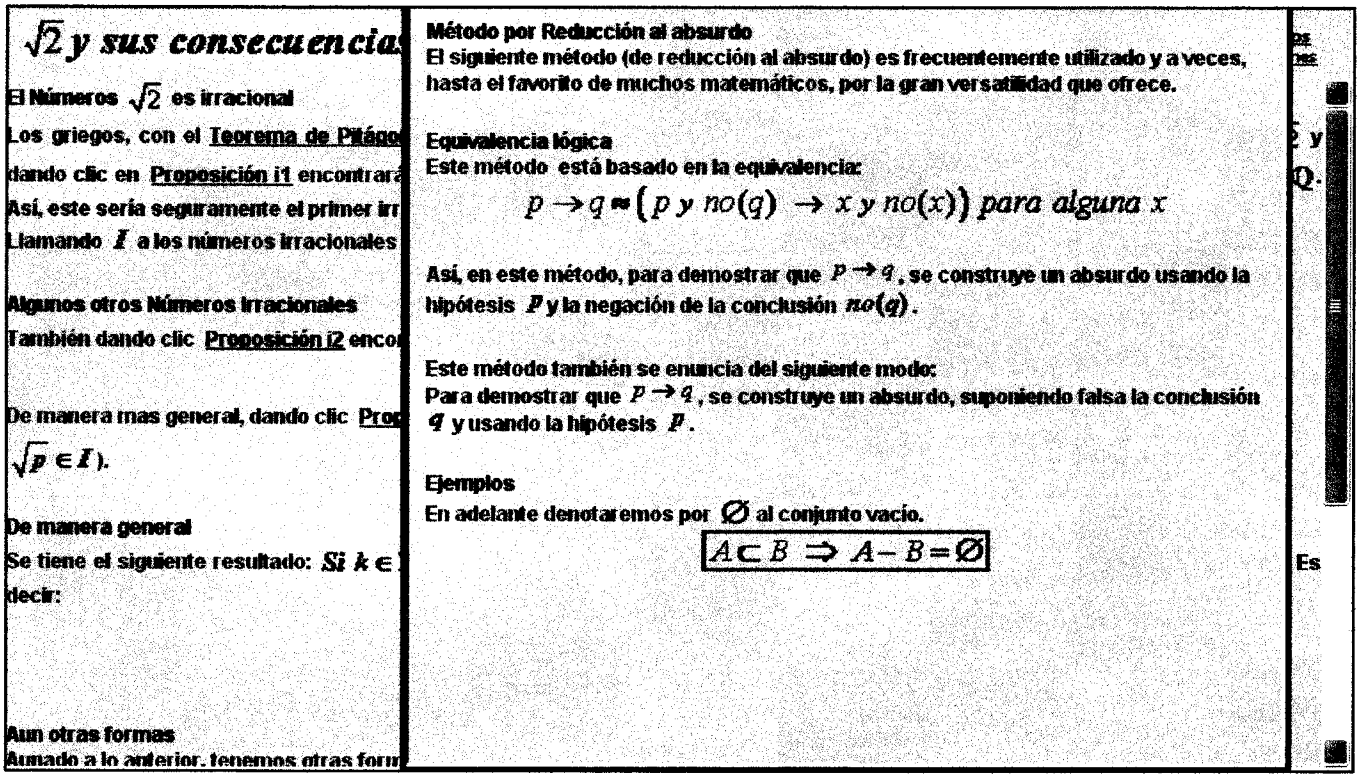
Se tiene el siguiente resultado: *Si* $k \in \mathbb{N}$ *y* $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$, *entonces* $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$, dando clic Proposición i4 encontrarás la demostración. Es decir:

$$Si\ k \in \mathbb{N}\ y\ \sqrt{k} \notin \mathbb{N},\ entonces\ \sqrt{k} \in I$$

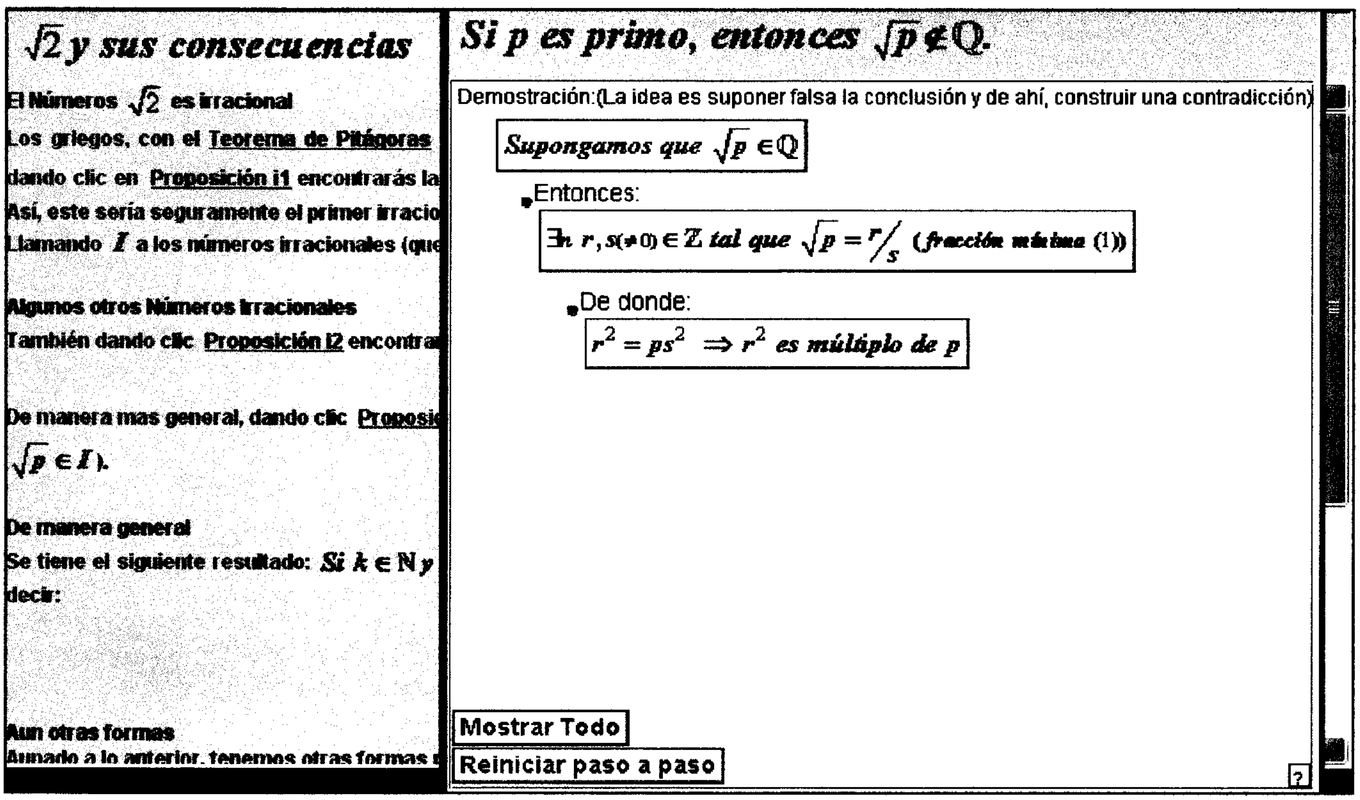
Aun otras formas

Aunado a lo anterior, tenemos otras formas para producir números irracionales, como lo podrás ver dando clic en

Empezando a usar el método de reducción al absurdo. Se puede acceder al método y a un ejemplo desde la misma página en una ventana flotante.



Un resultado general en el descubrimiento de irracionales.



El Axioma del supremo, destacando su importancia. Se hace notar que los racionales, por ejemplo no lo cumplen.

El axioma del supremo

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

S) El axioma del supremo

De los axiomas de los reales, éste es el que nos faltaba. A diferencia de los demás axiomas que tiene que ver más con propiedades algebraícas, aplicables a diversos campos, éste es realmente característico de los reales.

¿Qué establece?

Todo conjunto A (no vacío) de reales, acotado superiormente posee un supremo, es decir, existe un real s tal que $s = \sup A$.

En donde:

A está acotado superiormente si $\exists$ un real M tal que $x \leq M \ \forall x \in A$ **Además:** *A todo número M con esta propiedad se le llama cota superior de A*	*$s = \sup A$ si :* *a) s es cota superior de A* *b) t cota superior de $A \Rightarrow s \leq t$.* **Es decir:** *s es la mínima de todas las cotas superiores de A*

Su importancia

1) Este axioma es característico de los números reales. Los racionales por ejemplo, no lo cumplen:

Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$	$A \neq \emptyset$, **pues al menos** $1 \in A$. **Además, por ejemplo, 2 es una cota superior de** A. **Sin embargo, no existe** $\sup A$.
Es decir, no existe un racional que sea la mínima de todas las cotas superiores.	

Enseguida algunas proposiciones que solo se demuestran utilizando el Axioma del supremo o alguna de sus equivalencias.

Algunas proposiciones

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

Algunas proposiciones

Para comprender un poco más la importancia del axioma del supremo presentamos una secuencia de proposiciones muy interesantes cuyas demostraciones están estrechamente relacionadas con tal axioma.

Proposición S1. *El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente*

Es claro que los naturales son un conjunto acotado inferiormente, sin embargo aunque de manera intuitiva se observa que no lo están superiormente, la demostración formal es indispensable. Dando clic en Proposición S1 podrás acceder a su demostración.

Proposición S2. $\forall\ \varepsilon > 0$, ***existe*** $n \in \mathbb{N}$ ***tal que*** $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Es decir, dado un número arbitrariamente pequeño, siempre existe un natural, tal que su inverso multiplicativo es aun menor. Dando clic en Proposición S2 podrás acceder a su demostración.

Proposición S3. *Si* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $y - x > 1$, *entonces* $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x < k < y$

Es decir, entre dos reales que distan en más de 1, existe un entero. Dando clic en Proposición S3 podrás acceder a su demostración.

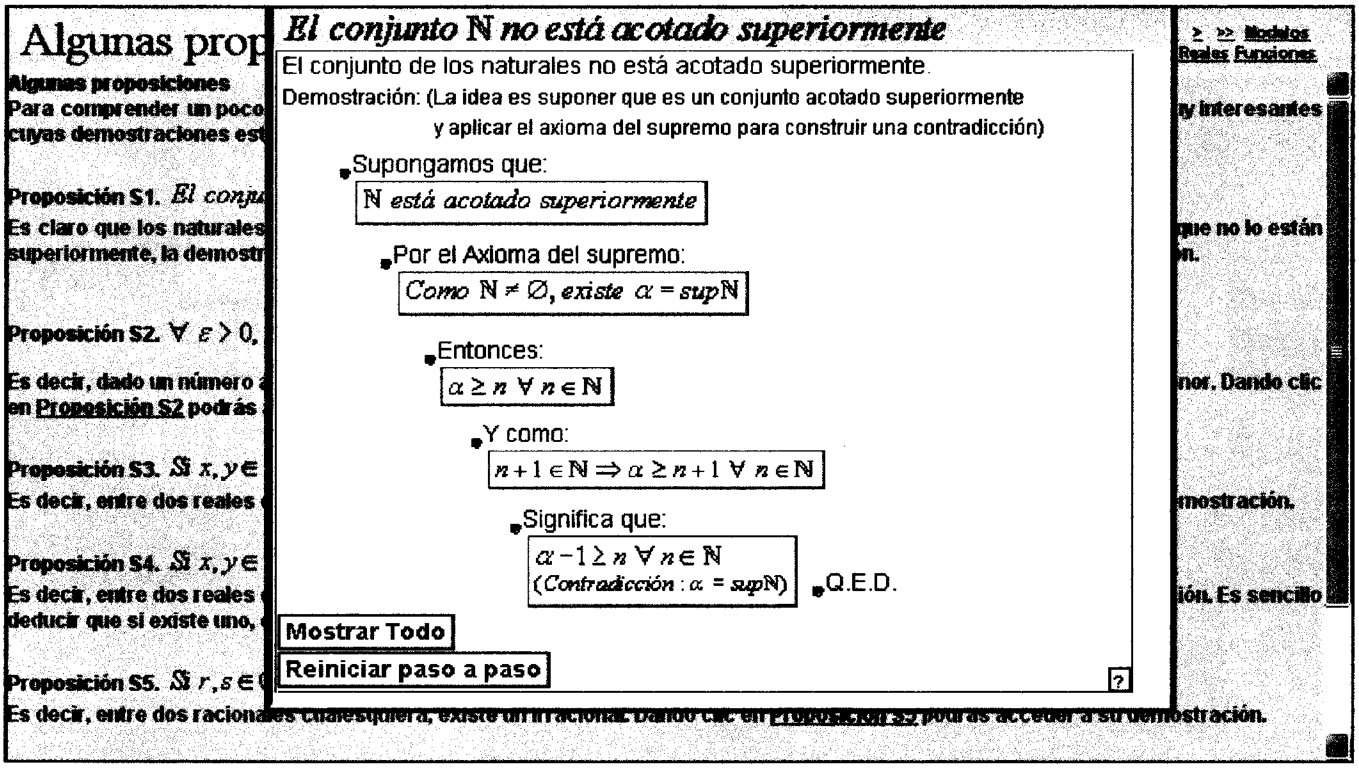
Proposición S4. *Si* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $x < y$, *entonces* $\exists\ r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x < r < y$

Es decir, entre dos reales cualesquiera, existe un racional. Dando clic en Proposición S4 podrás acceder a su demostración. Es sencillo deducir que si existe uno, existe una infinidad (¿puedes argumentarlo?).

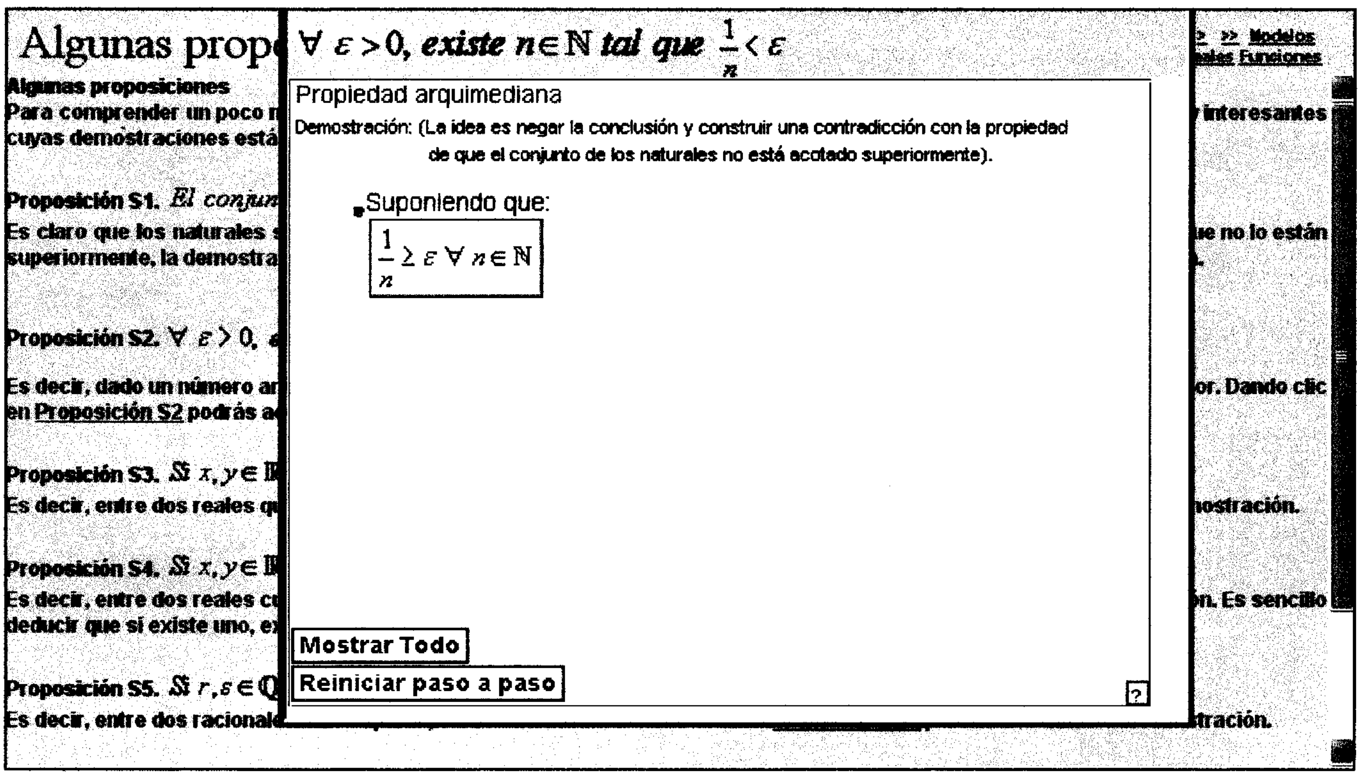
Proposición S5. *Si* $r, s \in \mathbb{Q}$ *y* $r < s$, *entonces* $\exists\ j \in I$ *tal que* $x < j < y$

Es decir, entre dos racionales cualesquiera, existe un irracional. Dando clic en Proposición S5 podrás acceder a su demostración.

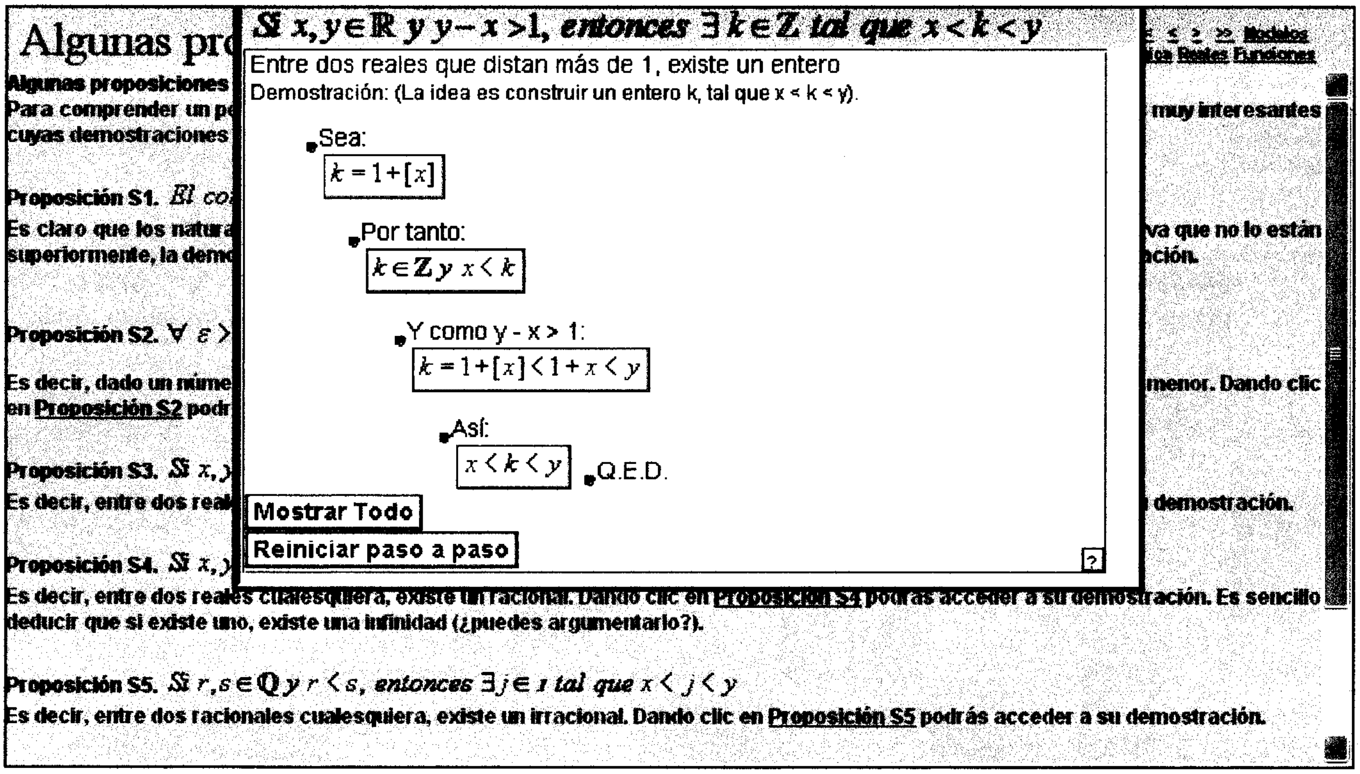
El conjunto de los números naturales, no está acotado superiormente. Su demostración es paso a paso y se presenta en una ventana flotante.



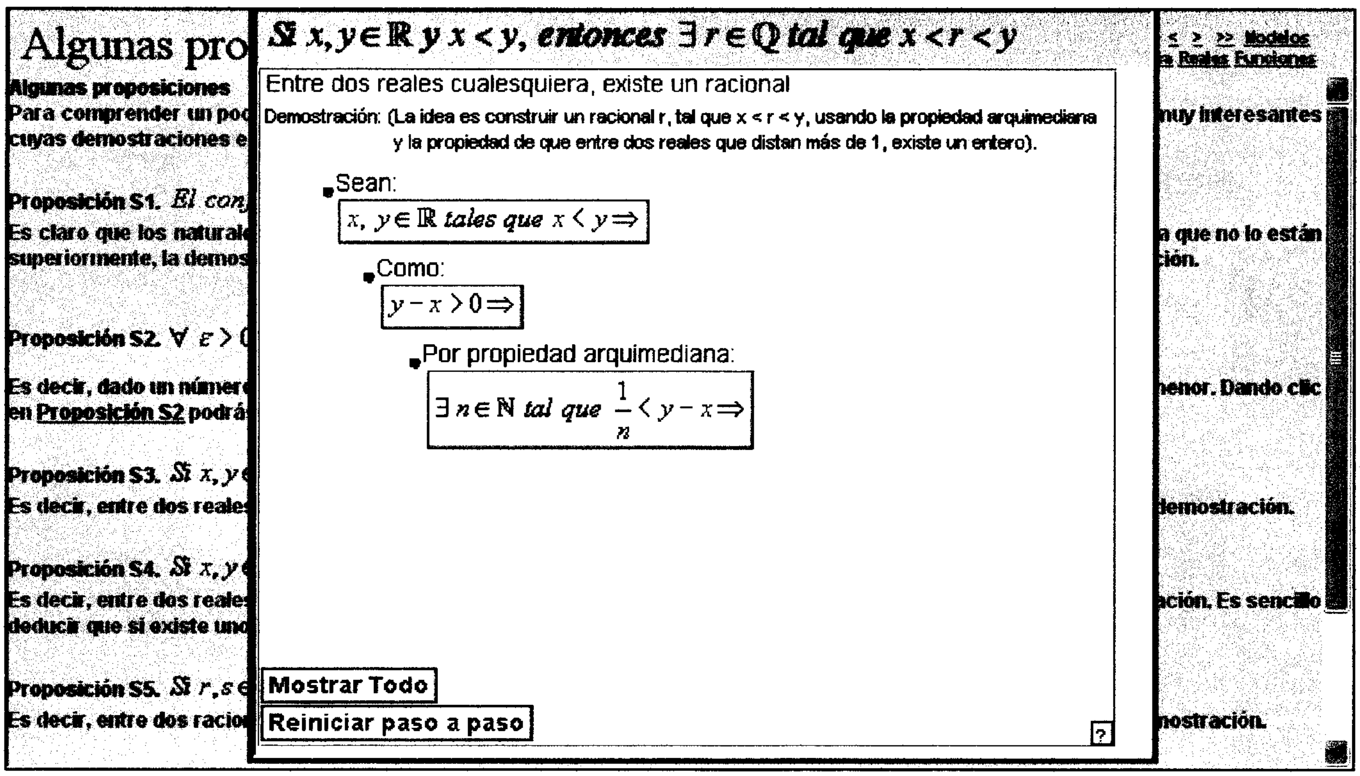
Esta propiedad es de gran importancia en la teoría de límites y continuidad y, se presenta en una ventana flotante.



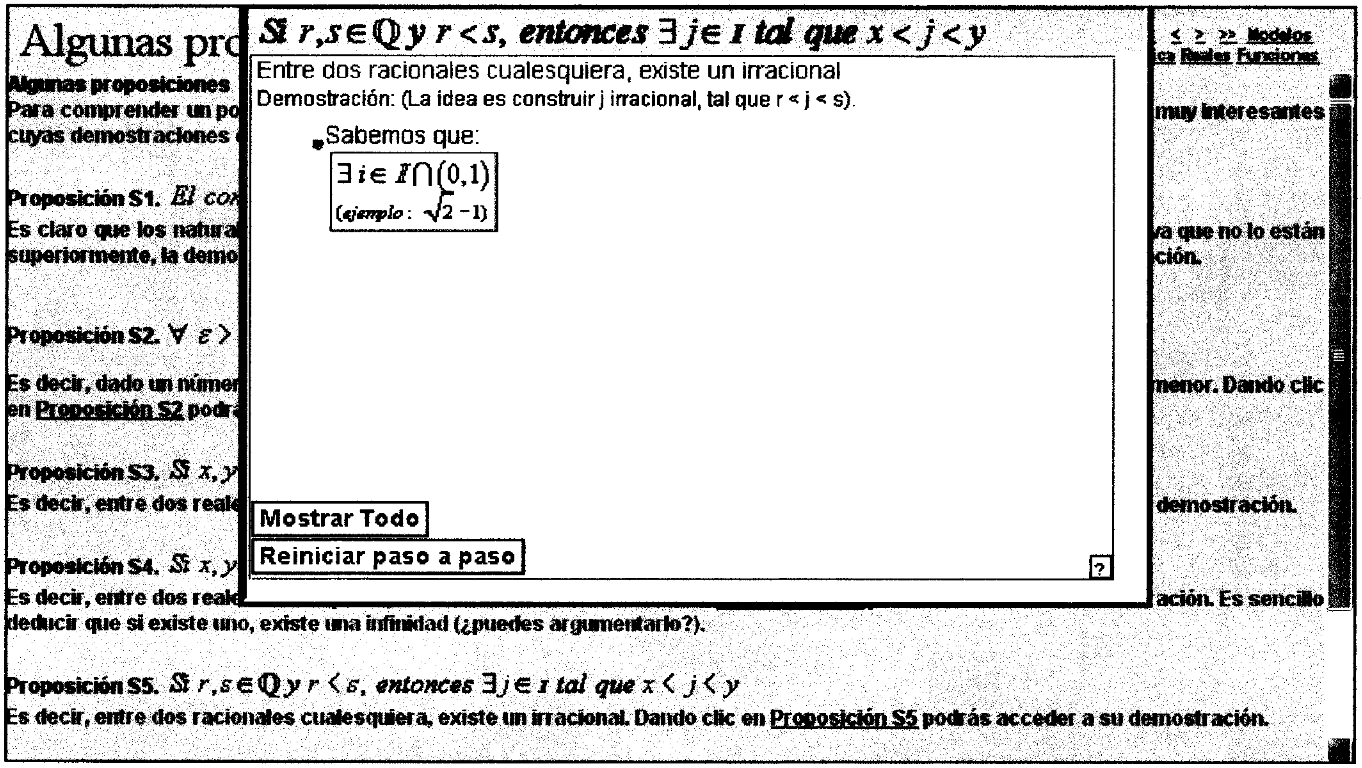
Si dos reales distan en más de 1, entonces entre ellos existe un entero.



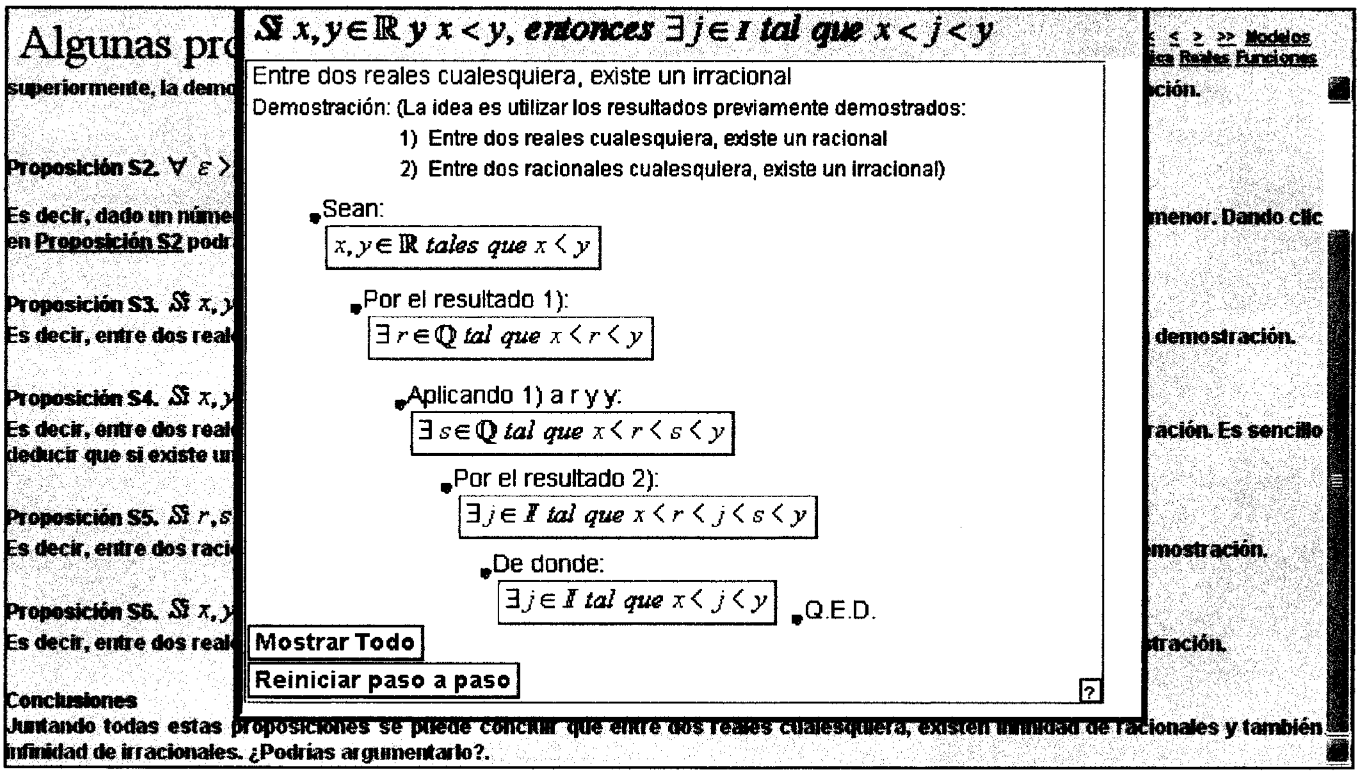
Entre dos reales cualesquiera, existe un racional. Para su demostración es necesaria la propiedad arquimediana. Su demostración se presenta en una ventana flotante.



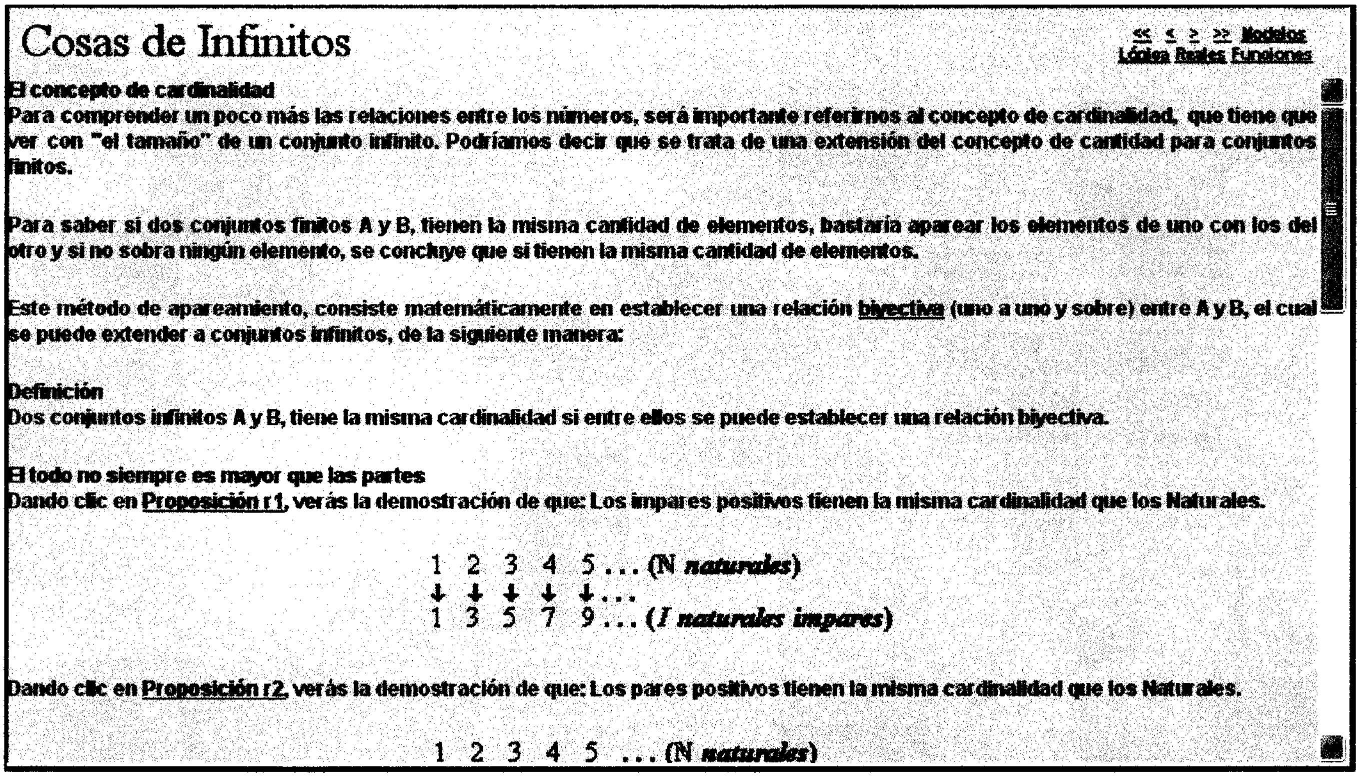
Entre dos racionales cualesquiera existe un irracional. Aquí se requiere la existencia de un irracional entre 0 y 1, cosa que ya se sabe.



Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene que entre dos reales cualesquiera, existe un irracional.



Reflexionando sobre los infinitos y la cardinalidad. La primera vez que uno encuentra estos resultados, le parecen sorprendentes.



Cosas de Infinitos

<< < > >> Modelos
Lógica Reales Funciones

El concepto de cardinalidad
Para comprender un poco más las relaciones entre los números, será importante referirnos al concepto de cardinalidad, que tiene que ver con "el tamaño" de un conjunto infinito. Podríamos decir que se trata de una extensión del concepto de cantidad para conjuntos finitos.

Para saber si dos conjuntos finitos A y B, tienen la misma cantidad de elementos, bastaría aparear los elementos de uno con los del otro y si no sobra ningún elemento, se concluye que si tienen la misma cantidad de elementos.

Este método de apareamiento, consiste matemáticamente en establecer una relación biyectiva (uno a uno y sobre) entre A y B, el cual se puede extender a conjuntos infinitos, de la siguiente manera:

Definición
Dos conjuntos infinitos A y B, tiene la misma cardinalidad si entre ellos se puede establecer una relación biyectiva.

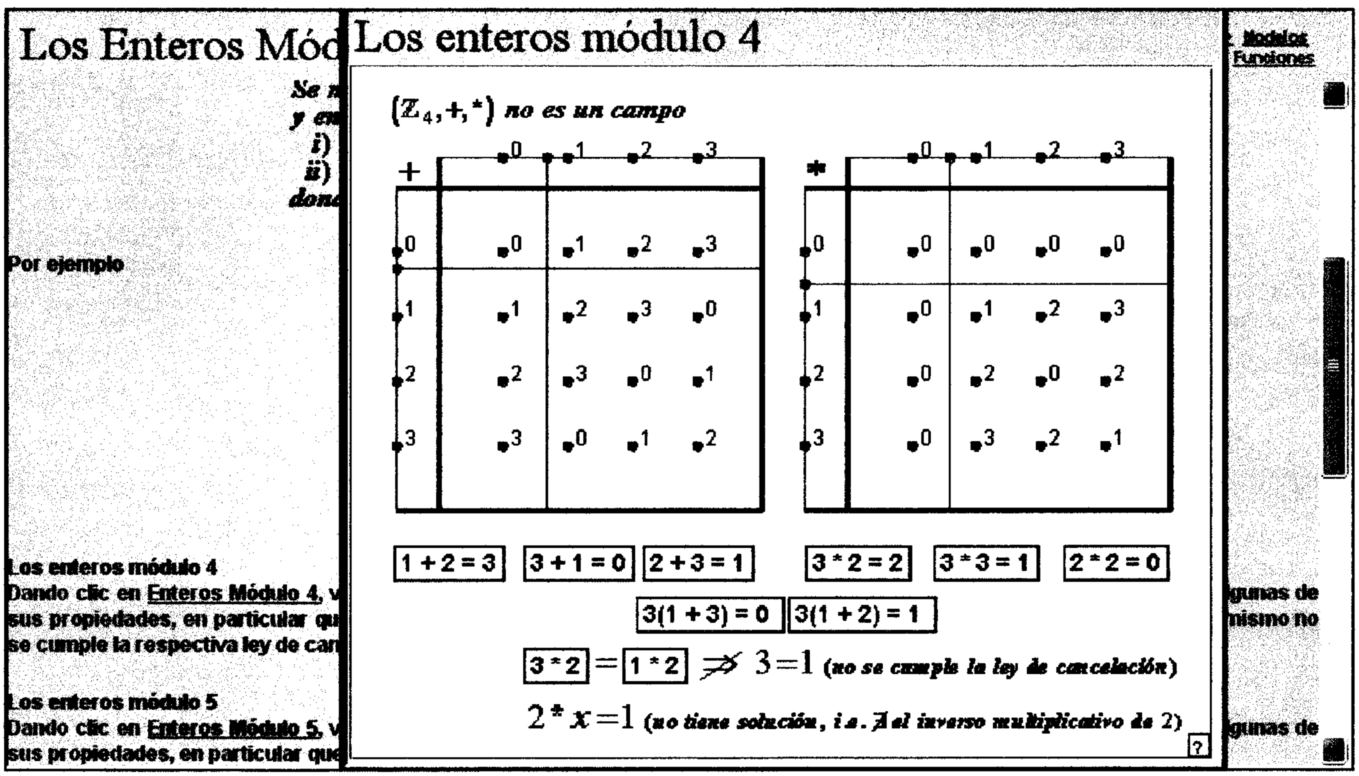
El todo no siempre es mayor que las partes
Dando clic en Proposición r1, verás la demostración de que: Los impares positivos tienen la misma cardinalidad que los Naturales.

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \ (\mathbb{N}\ \textit{naturales}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots \ (I\ \textit{naturales impares}) \end{array}$$

Dando clic en Proposición r2, verás la demostración de que: Los pares positivos tienen la misma cardinalidad que los Naturales.

1 2 3 4 5 ... (N *naturales*)

Sumando y multiplicando de manera interactiva en enteros módulo 4.



+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Mostrando otros campos.

Más Campos

« ‹ Modelos
Lógica Reales Funciones

Más Campos

A pesar de que los irracionales no son un campo, existen subconjuntos de irracionales que en unión con los racionales y con las operaciones usuales en los reales, conforman un campo, por ejemplo:

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

con cierta dificultad, pero se pueden comprobar todas las propiedades de campo. En particular se puede ver que:

$$0 + 0\sqrt{2} \textit{ es el neutro aditivo}$$
$$1 + 0\sqrt{2} \textit{ es el neutro multiplicativo}$$

y aun más, se puede comprobar que:

$$\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2} \textit{ es el inverso multiplicativo de } a + b\sqrt{2}$$

Por ejemplo:

$$3 - 2\sqrt{2} \textit{ es el inverso multiplicativo de } 3 + 2\sqrt{2}$$

Similarmente se puede construir el campo:

$$G = \{a + b\sqrt{3} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

En este caso:
¿Quienes serían los neutros aditivo y multiplicativo? y
¿Cuál sería la expresión para los inversos multiplicativos?

Extendiendo el concepto tendríamos que los siguientes también serían campos:

Presentando algunas notas sobre el número y su desarrollo

El concepto de número

Reales
Lógica Funciones

El concepto de número (natural)

Los números enteros

Las fracciones

Los inconmensurables

Conclusiones

El concepto de Número

Aquí podrás encontrar unas cuantas notas sobre el concepto de número y su desarrollo.

Los inconmensurables y el axioma del supremo

El concepto de número

Reales
Lógica Funciones

El concepto de número (natural)

Los números enteros

Las fracciones

Los inconmensurables

Conclusiones

Los inconmensurables

Pero la aparición de las fracciones fue solo la primera etapa. La siguiente etapa y muy importante, fue el descubrimiento de los intervalos inconmensurables y que dieron origen a los llamados números irracionales, mismos que no pueden expresarse por una fracción ordinaria de enteros.

Con el descubrimiento de estos números, la construcción de los reales se dio a partir de la conjunción de los racionales (fracciones) y los irracionales (inconmensurables), con reglas y operaciones comunes.

Se pudieron axiomatizar y a partir de esto, se han demostrado diversas propiedades como las leyes de cancelación, las leyes de los signos, etc.

El Axioma del Supremo:

Todo conjunto A (no vacío) de reales, acotado superiormente posee un supremo, es decir, existe un real s tal que $s = \sup A$

fue clave en la construcción de los irracionales y por consecuencia en la posibilidad de axiomatizar los números reales.

Con este axioma ha sido posible atribuir a los números reales la propiedad de continuidad, es decir, de poder establecer una correspondencia biunívoca de los reales con los puntos de una recta.

Algunos ejercicios de reforzamiento

Ejercicios

Reales
Lógica Funciones

1) ***Demuestra que*** $-0=0$

2) ***Demuestra que*** $-(a-b)=-a+b$

3) ***Demuestra que si*** $a\neq 0$ ***y*** $b\neq 0$, ***entonces*** $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

4) ***Demuestra que si*** $a\neq 0$, ***entonces*** $a^2>0$

5) ***Demuestra que si*** $0\leq a<b$ ***y*** $0\leq c<d$, ***entonces*** $ac<bd$

6) ***Demuestra que si*** a^{-1} ***tiene el mismo signo que*** a

7) ***Demuestra que si*** $ab>0$, ***entonces*** $a^{-1}b^{-1}>0$

8) ***Demuestra que*** $ab<0$, ***si y solo sí*** $\begin{cases} i)\ a>0 \text{ y } b<0 \\ \quad o \\ ii)\ a<0 \text{ y } b>0 \end{cases}$

9) ***Demuestra que*** $ab>0$, ***si y solo sí*** $\begin{cases} i)\ a>0 \text{ y } b>0 \\ \quad o \\ ii)\ a<0 \text{ y } b<0 \end{cases}$

10) ***Demuestra que*** $|a|=|-a|$

11) ***Demuestra que*** $a\leq|a|$ ***y*** $-a\leq|a|$

12) ***Demuestra que*** $|a+b|\leq|a|+|b|$

Referencias bibliográficas y de Internet

Referencias

Reales
Lógica Funciones

Referencias

En este apartado proporcionamos algunas referencias útiles para la creación de este tema de Números Reales, tanto en material impreso como de Internet.

Bibliográficas

Calculus I **Michael Spivak** **Editorial Reverté**	**Análisis Matemático I** **Haaser, LaSalle y Sullivan** **Editorial Trillas**	**Método de Inducción Matemática** **S. Sominski Lecciones Populares de Matemáticas** **Editorial Mir.**
Calculus I **Tom M. Apostol** **Editorial Reverté**	**Calculus I** **Edwin Moise** **Editorial Addison Wesley**	**La Matemática: su contenido, métodos y significado** **Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros** **Allanza Editorial**
Álgebra **Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo** **Editorial Pearson Educación**	**¿Qué es la Matemática?** **Courant y Robbins** **Editorial Aguilar**	**Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad** **Scher, Steketee, Kunkel, Lyublinskaya** **Key Curriculum Press**

En Internet

Sitio de Key Curriculum Press
Innovators in Mathematics Education
(Creadores de The Geometer's Sketchpad)
http://www.keypress.com

Compendio temático de Matemáticas
http://mathworld.wolfram.com

Investigación sobre si es innato el concepto de número
http://axxon.com.ar/not/141/c-1410112.htm

El tercer tema: Funciones

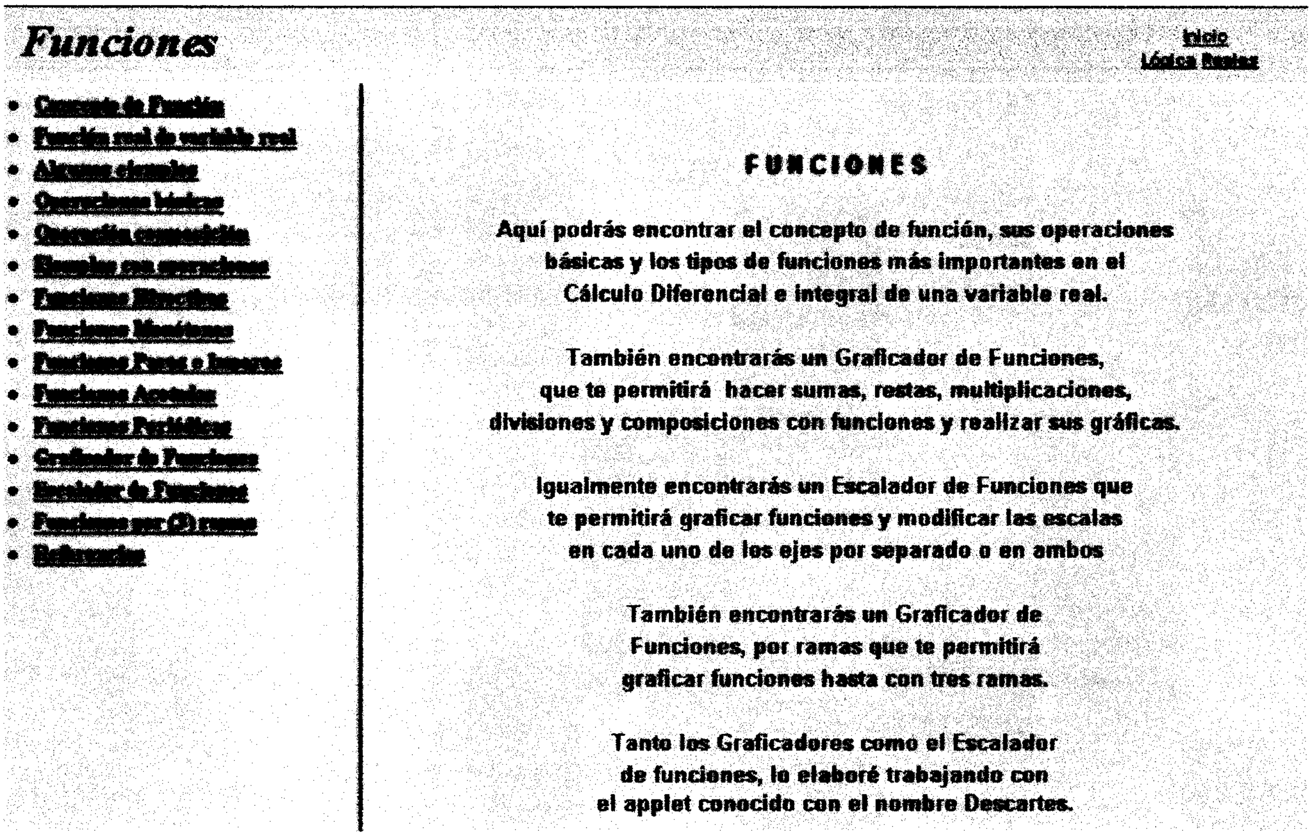
Se trata de estudiar las funciones a partir del concepto de regla de correspondencia, sus **operaciones** y los distintos **tipos de funciones**. Para aclarar el concepto se muestran reglas de correspondencia, que no satisfacen alguna de las características del concepto de función. En los diferentes temas, las funciones se ejemplifican mediante **construcciones interactivas** que permiten explorar y analizar distintas situaciones.

También se establecen **demostraciones formales interactivas paso a paso**. En todos los tipos de funciones se exhiben **ejemplos y no ejemplos** con la idea de aclarar los conceptos.

Se proporciona un **Graficador de funciones** que permite tanto realizar operaciones entre funciones, así como cambiar las expresiones de sus reglas de correspondencia y graficar sus resultados. Igualmente se proporciona un **Escalador de funciones** que, permite graficar funciones bastante complicadas como por ejemplo $f(x) = xsen\left(\frac{1}{x}\right)$ o del estilo y proporciona la posibilidad de un escalamiento en cada uno de los ejes y un zoom de bastante profundidad.

También se proporciona un **Graficador de funciones por (3) ramas**.

Por último se presentan diversas **Referencias**, tanto bibliográficas, como de Internet.



El concepto de función y algunas definiciones

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Biyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (3) ramas
- Referencias

Concepto de función

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B es una regla de correspondencia tal que, a cada elemento de A le asocia un único elemento en B.

Notación

$f : A \to B$ f función de A en B	$A = Domf$ A Dominio de la función f
$B = Codf$ B Codominio de la función f	$Ranf = \{b \in B : b = f(a)\ para\ alguna\ a \in A\} \subset B$ Rango de la función f

Ejemplos

"Cada ser humano tiene una fecha real de nacimiento".
"Cada alumno en la UNAM tiene un número de cuenta".

Cada elemento del Dominio tiene asociado un único elemento en el Codominio. Así, son reglas de asociación que establecen una función.
Varios elementos del dominio pueden tener asociado el mismo elemento del codominio. Es seguro que muchos seres humanos hayan nacido en la misma fecha.

No ejemplos

"Cada alumno de la Facultad de Ciencias tiene computadora"

Trabajando funciones reales de variable real y no ejemplos.

Funciones

Inicio
Lógica Reales

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Biyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (3) ramas
- Referencias

Función Real de Variable Real

$f : A \to B$ es una función real de variable real, si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$. Es decir, cada real de A, tiene asociado un único real en B. En adelante, a menos que se diga lo contrario, se tomará $B = \mathbb{R}$.
Como $B \subset \mathbb{R}$, se le llama función real y como $A \subset \mathbb{R}$, se le llama de variable real.

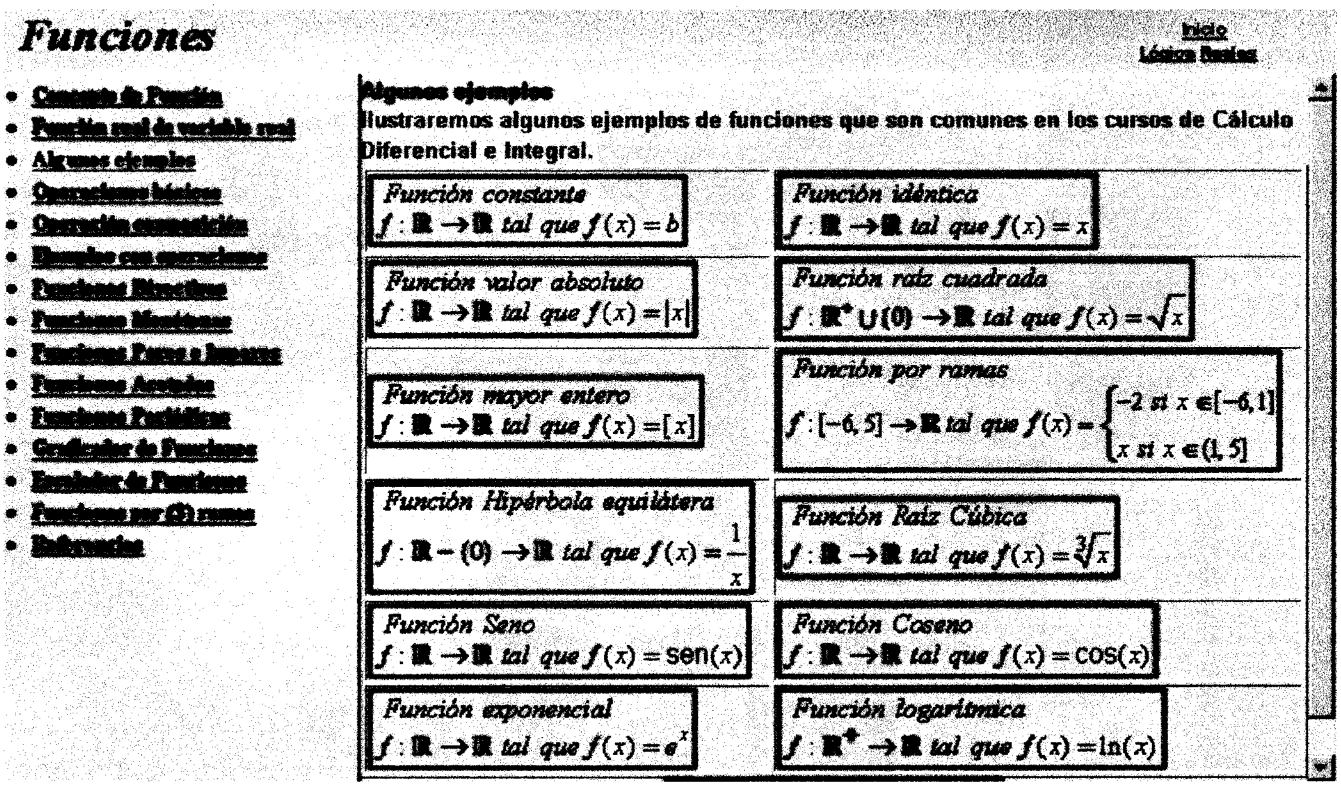
No ejemplos

$a)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x) = \frac{1}{x-1}$ Observa que $f(1)$ no existe.	$b)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x) = \sqrt{x}$ Observa que $f(-1) \notin \mathbb{R}$.
$c)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x^2) = x$ Observa que el 1 tiene dos asociados: $f(1) = \begin{cases} f\left((-1)^2\right) = -1 \\ f\left((1)^2\right) = 1 \end{cases}$	$d)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(\lvert x \rvert) = x$ Observa que el 1 tiene dos asociados: $f(1) = \begin{cases} f(\lvert -1 \rvert) = -1 \\ f(\lvert 1 \rvert) = 1 \end{cases}$

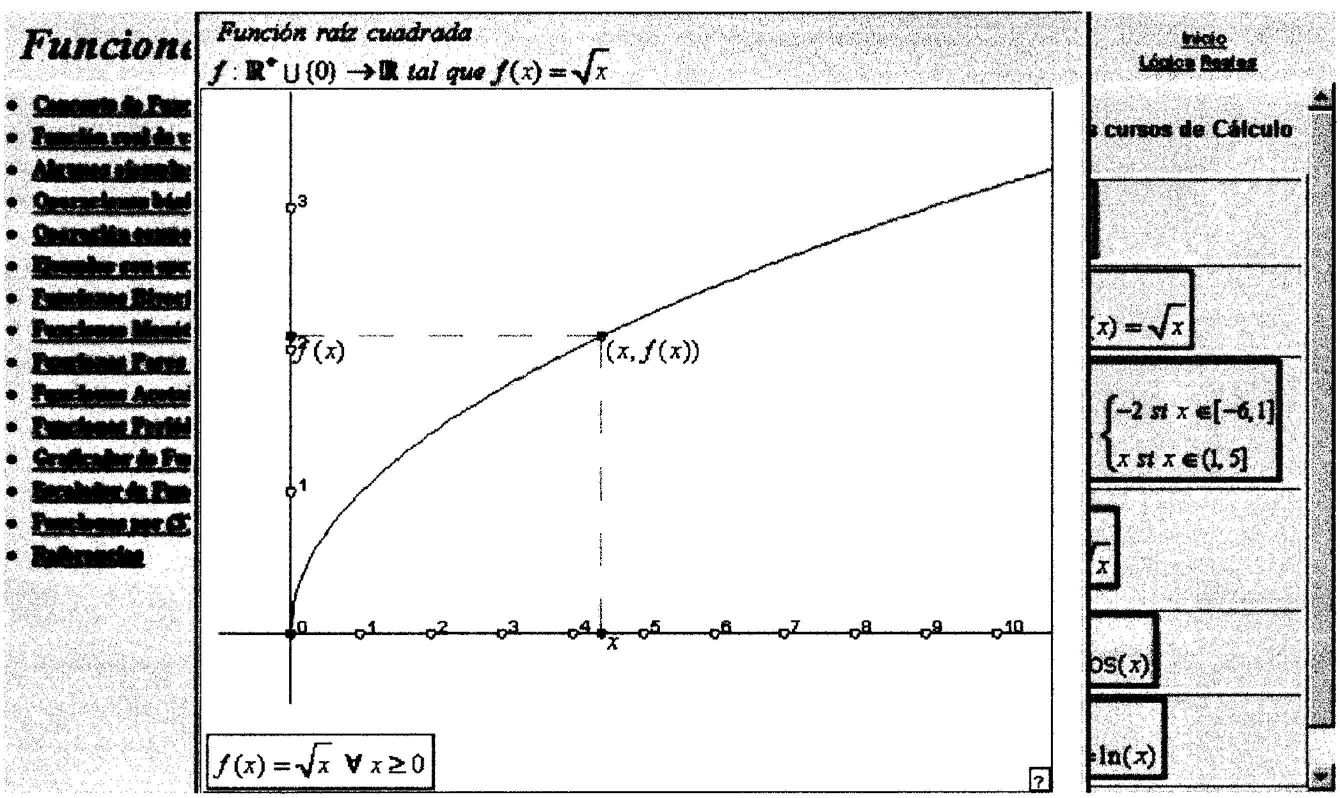
Observación

Los cuatro casos anteriores podrían ser funciones con sólo corregir el dominio. Por ejemplo en a) bastaría quitar del dominio el valor 1 y en b) bastaría tomar como dominio los reales no negativos. ¿Qué correcciones habría que hacer en los otros dos

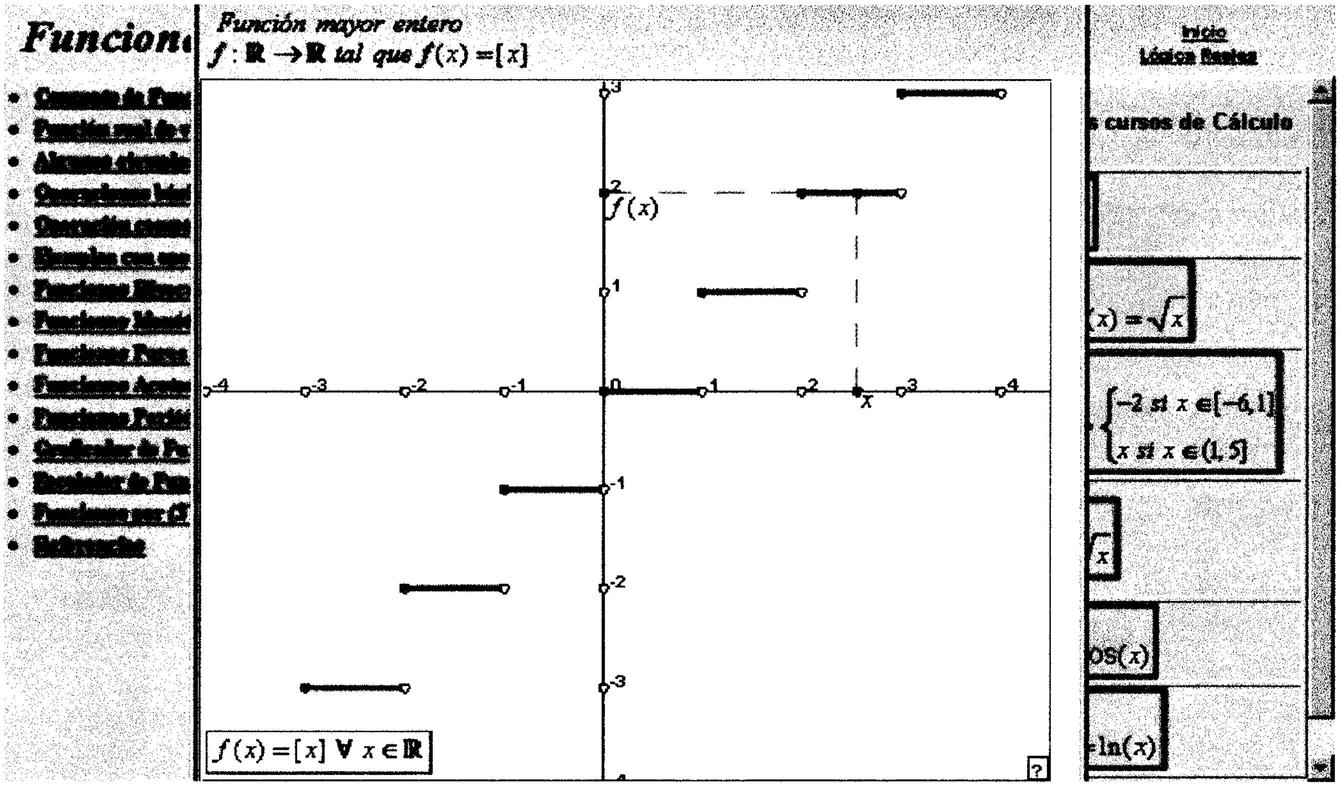
Algunos ejemplos que se pueden desplegar en ventanas flotantes.



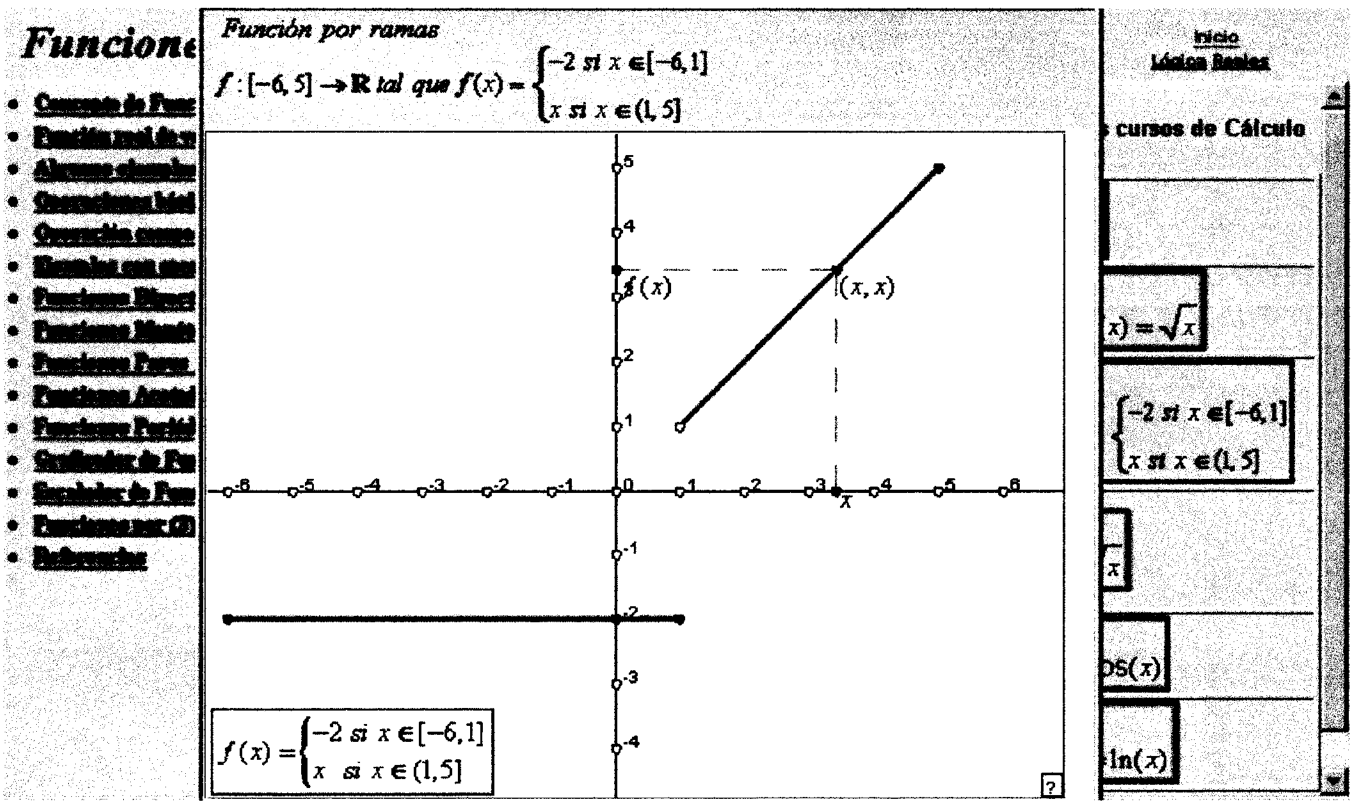
La función raíz cuadrada



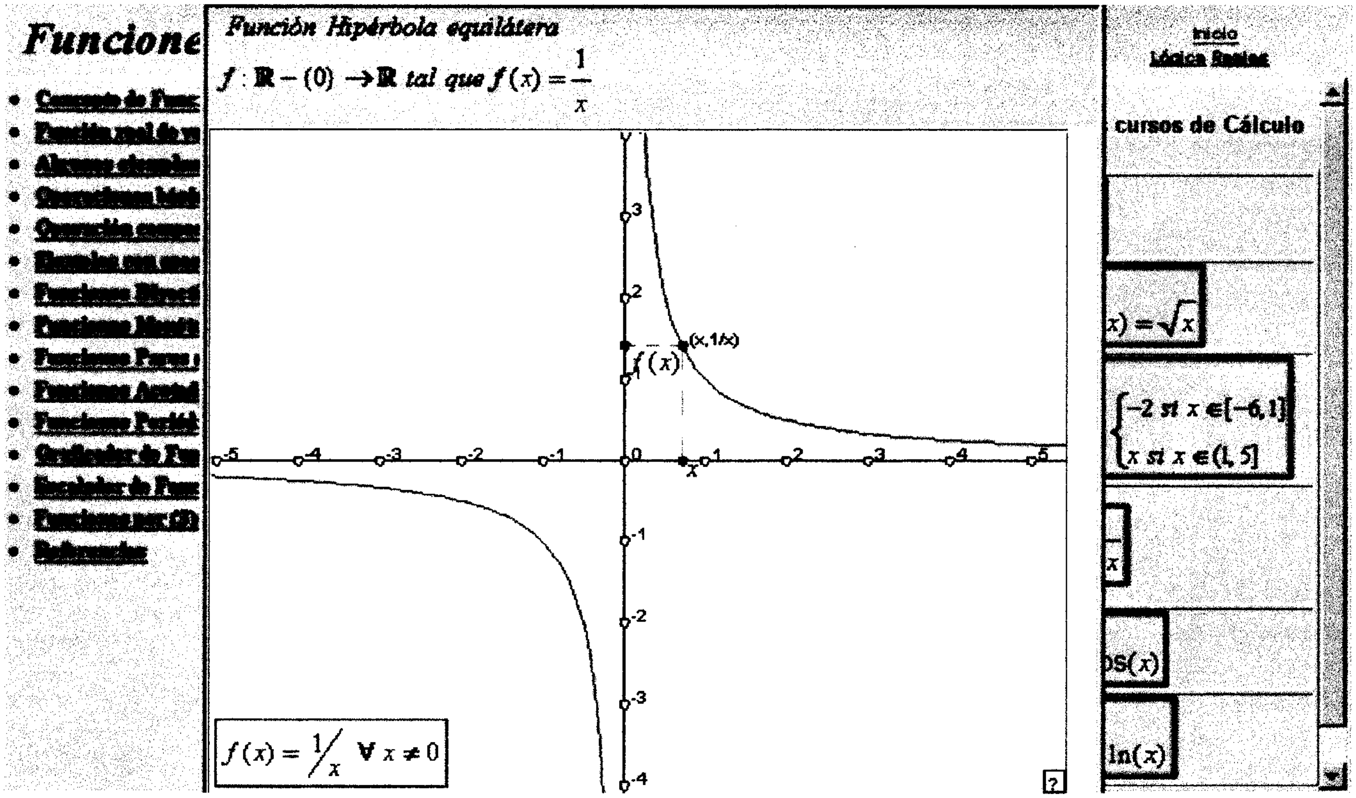
La función mayor entero. Se pueden apreciar las discontinuidades.



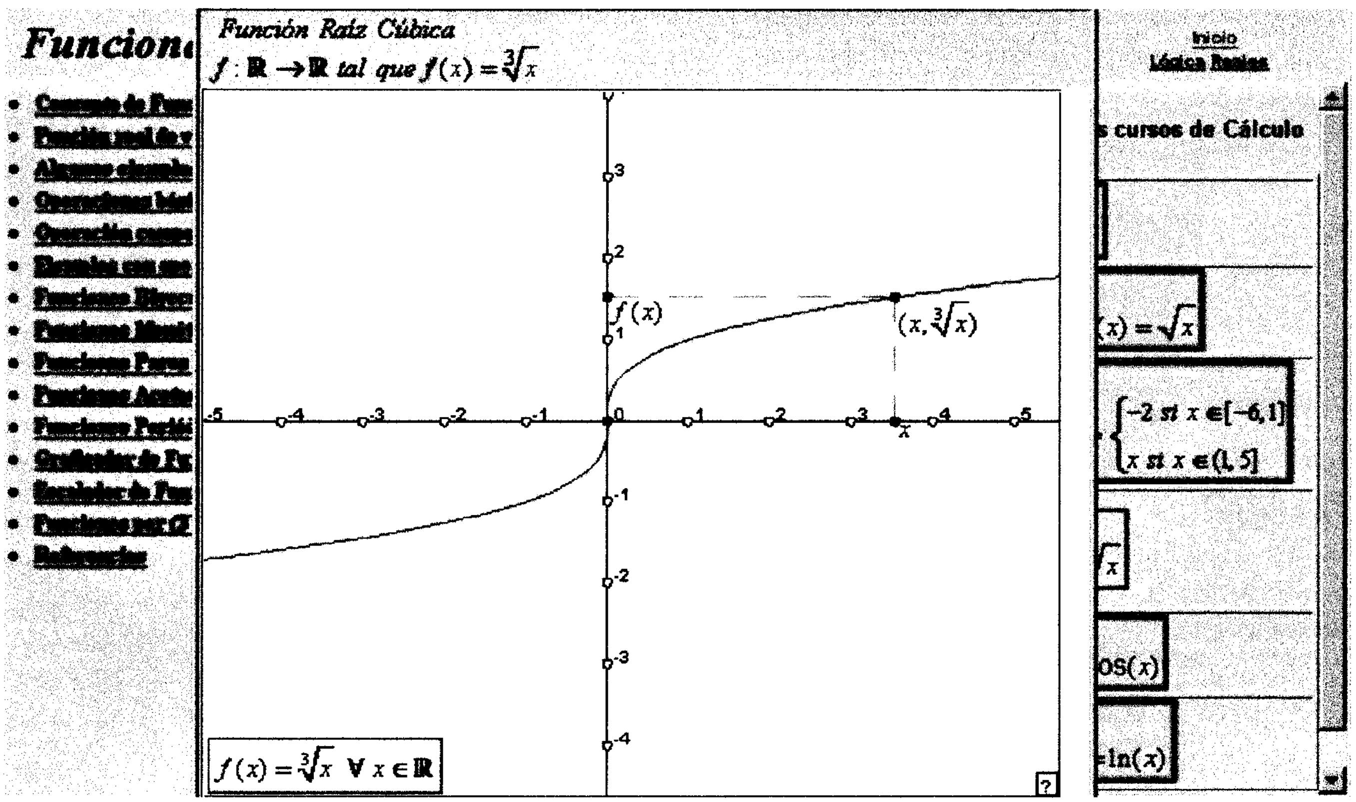
Una función por ramas



La función hipérbola equilátera



La función raíz cúbica



Operaciones básicas

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Biyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (2) ramas
- Referencias

Operaciones básicas

Sean las funciones $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$, *entonces definimos*:

Adición de funciones $(f+g): \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ *tal que*: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Sustracción de funciones $(f-g): \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ *tal que*: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación de funciones $(fg): \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ *tal que*: $(fg)(x) = f(x)g(x)$
División de funciones $\left(\frac{f}{g}\right): C \to \mathbb{R}$ *tal que* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *donde* $C = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} - \{x : g(x) = 0\}$

Observación

En todos los casos el dominio debe ser la intersección de A y B para garantizar la existencia de $f(x)$ y $g(x)$ y por consecuencia poderlas sumar. Pero además en la división se deben quitar los valores donde el denominador $g(x)$ sea cero.

Operación composición

Funciones

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Biyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Escalador de Funciones
- Funciones por (2) ramas
- Referencias

Operación composición

Sean f y g funciones reales de variable real. Definimos $(f \circ g): D \to \mathbb{R}$ *tal que*:
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *y* $D = \{x : x \in Dom\, g \text{ y } g(x) \in Dom\, f\}$

La variable x debe estar en el dominio de g para garantizar que exista $g(x)$ y éste a su vez debe estar en el dominio de f para garantizar que exista $f(g(x))$. La composición no es conmutativa

Reglas de asociación distintas:

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \text{sen}(x)$

$$\left.\begin{array}{l}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\text{sen}(x))^2 \text{ y} \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(x^2)\end{array}\right\} \textit{Pero } (\text{sen}(x))^2 \neq \text{sen}(x^2)$$

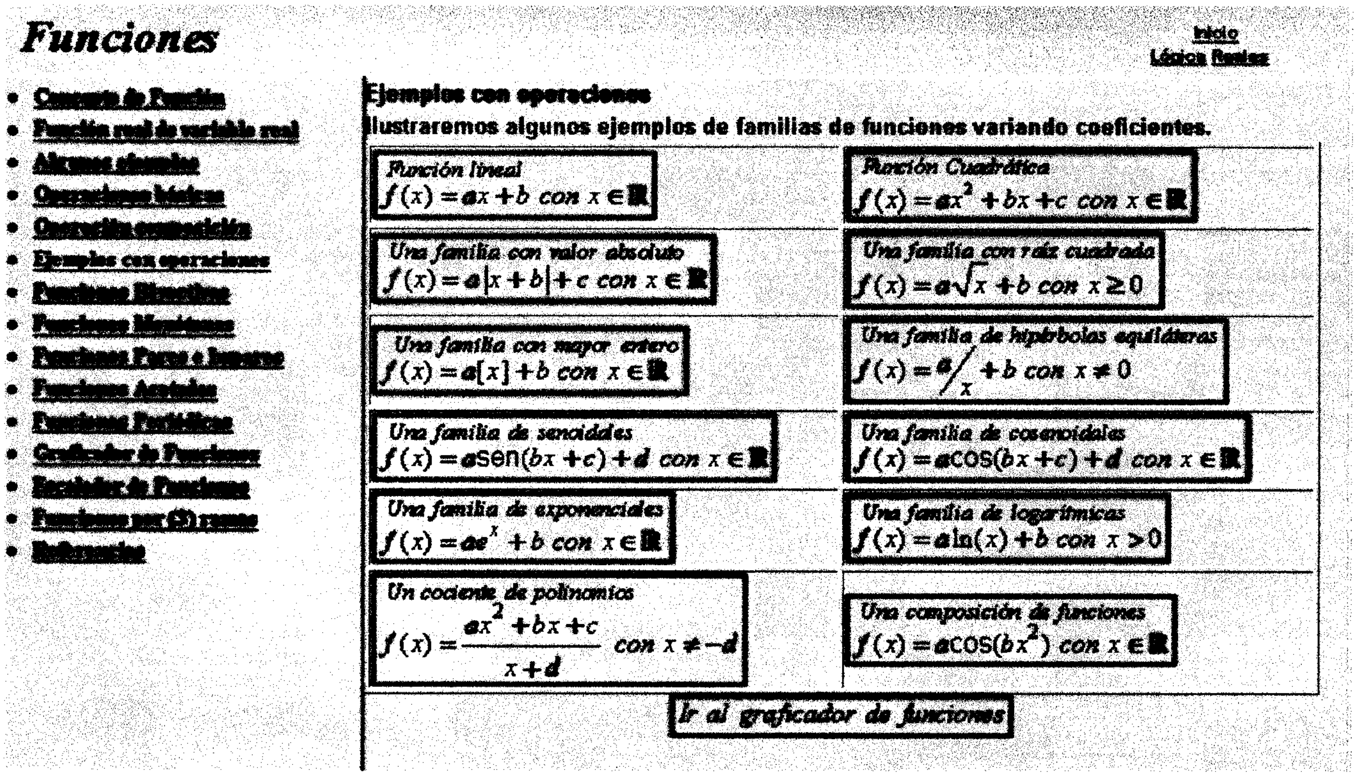
¿Puede ilustrar un caso donde $Dom(f \circ g) \neq Dom(g \circ f)$?.

Calculando componentes

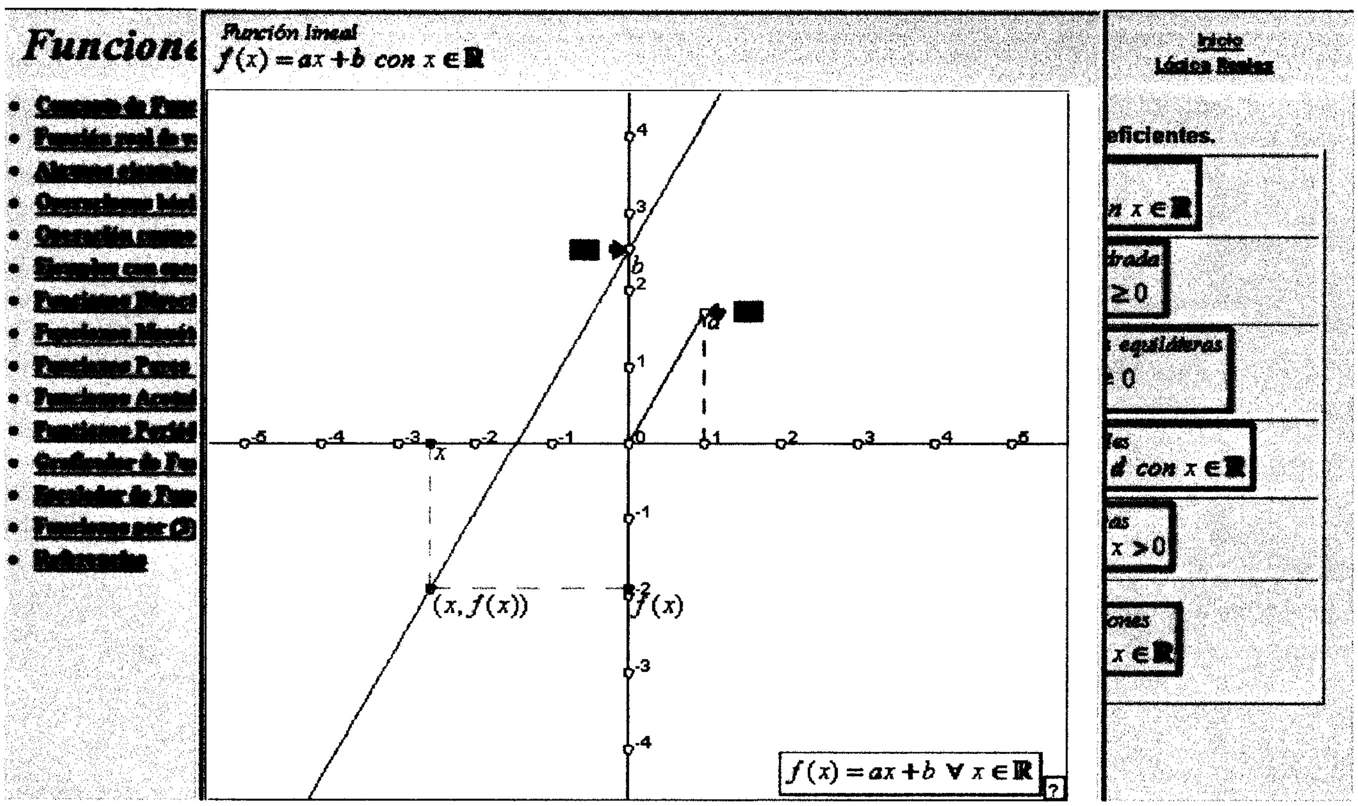
En una función compuesta ¿cómo puedes encontrar sus componentes?. Por ejemplo en

$$f(x) = \sqrt{\text{sen}(\cos(x^2))}$$

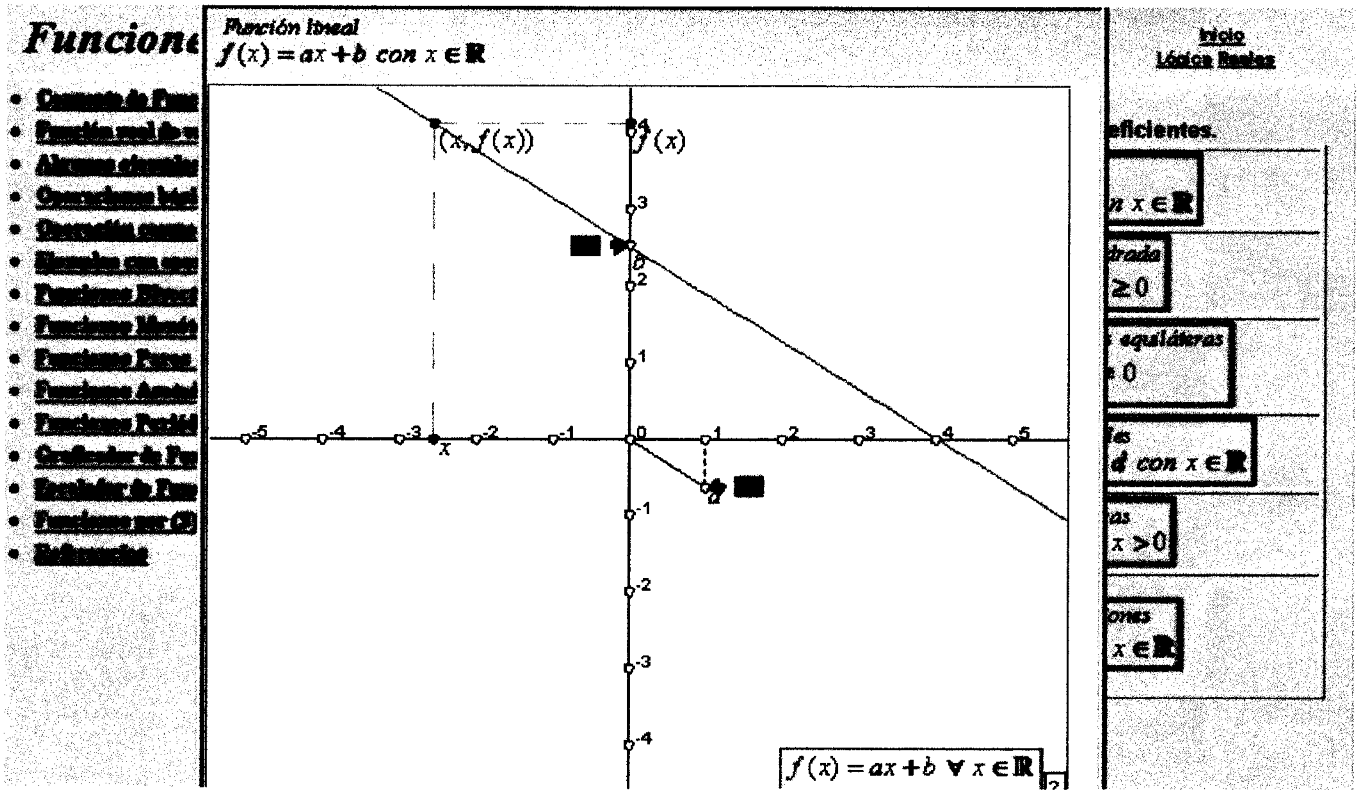
Funciones con parámetros variables que se pueden desplegar en ventanas flotantes.



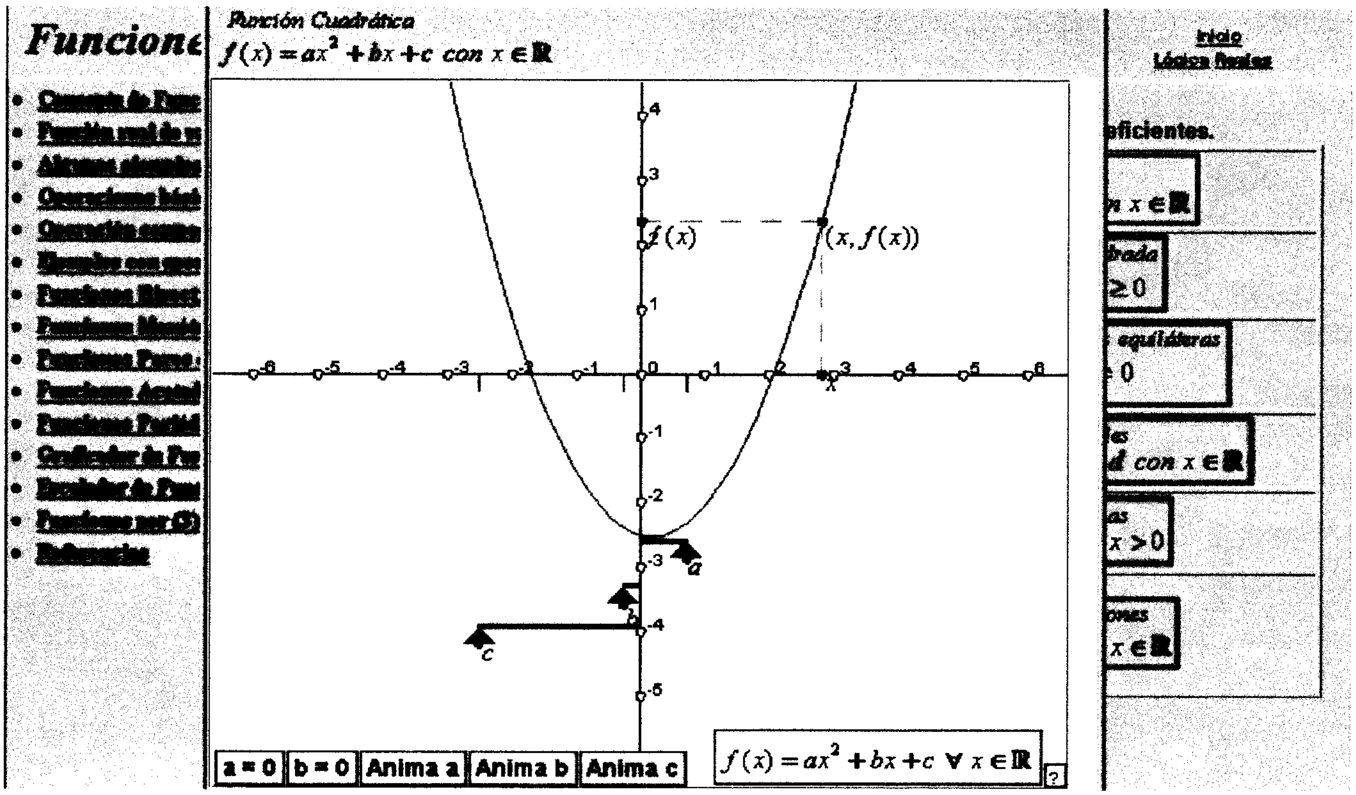
Se pueden cambiar la pendiente a y la ordenada al origen, b.



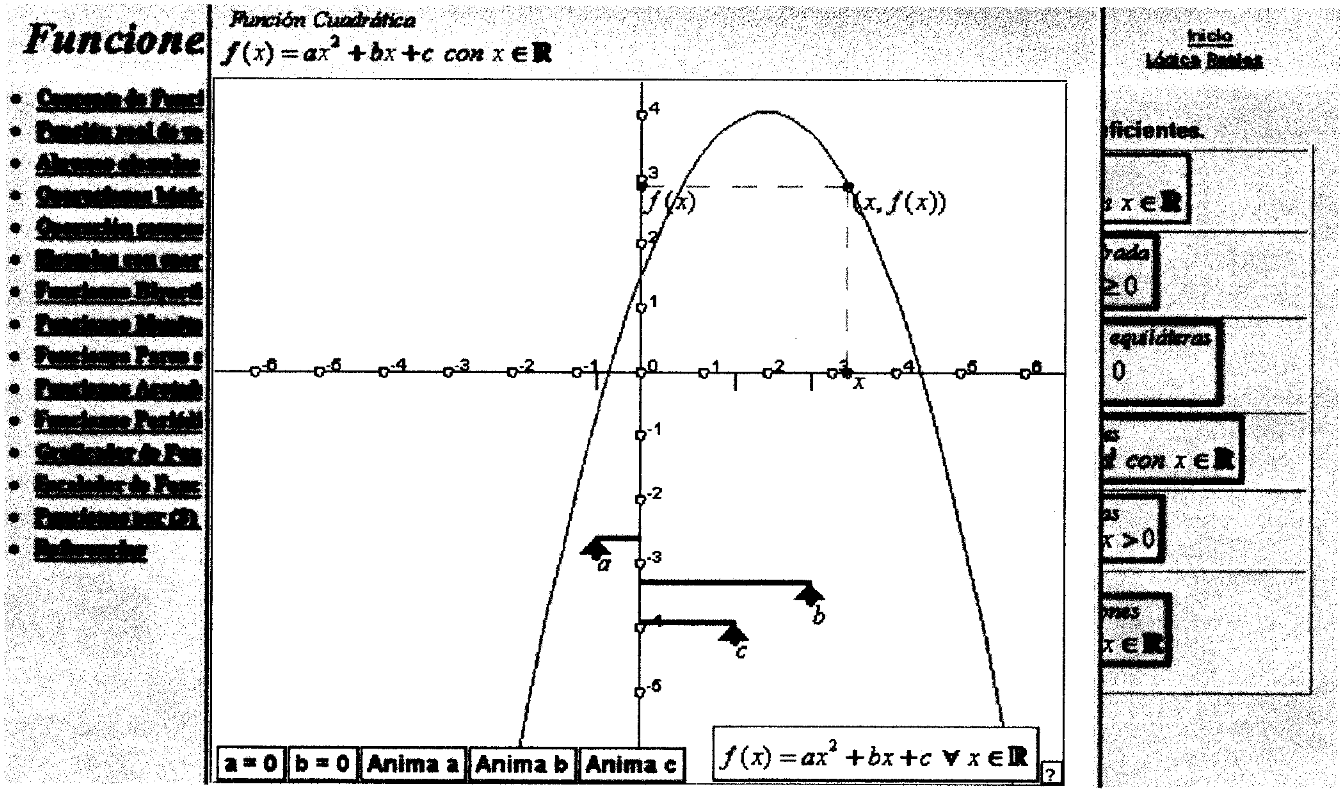
Y cambiar la posición, para entender la pendiente y la ordenada al origen.



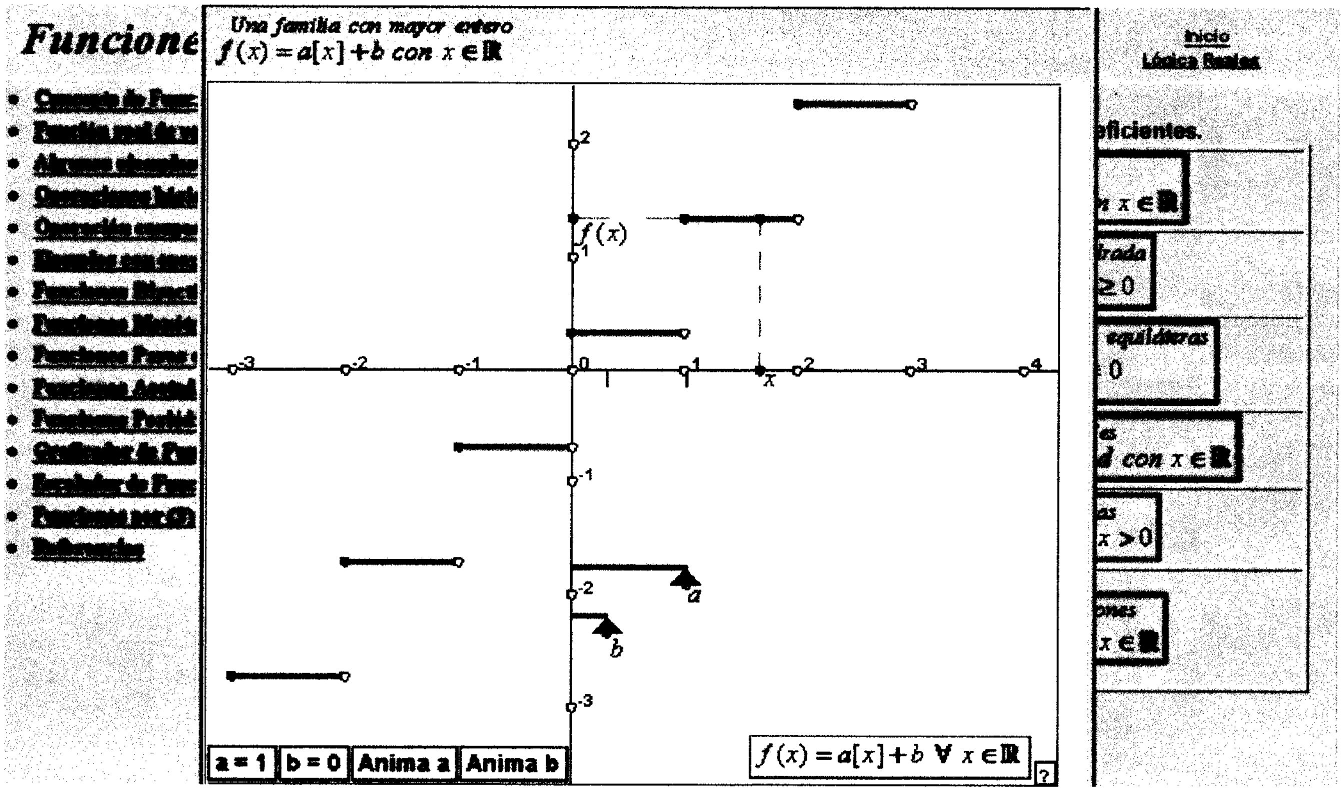
Se pueden cambiar a, b y c, para observar el comportamiento de la familia



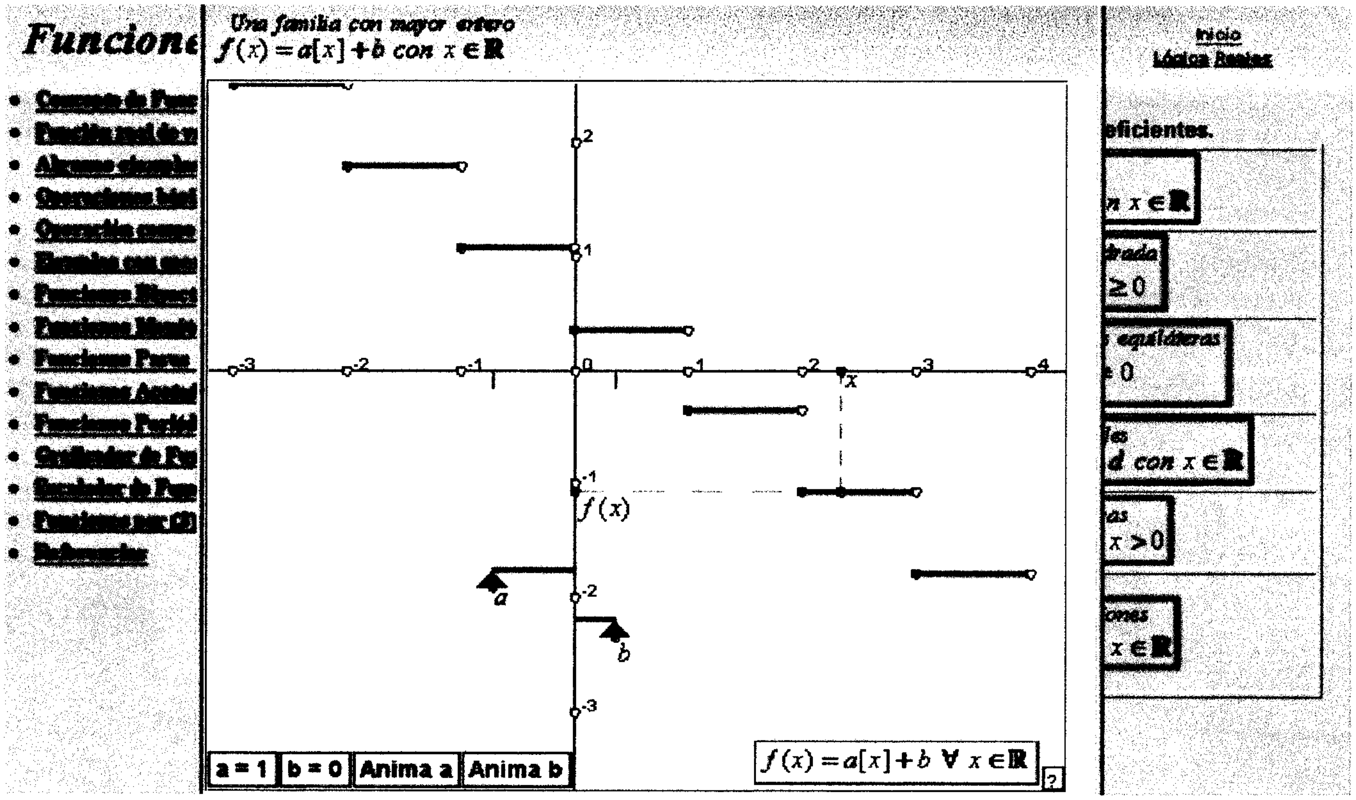
Aquí un ejemplo con a negativo y, b y c positivos.



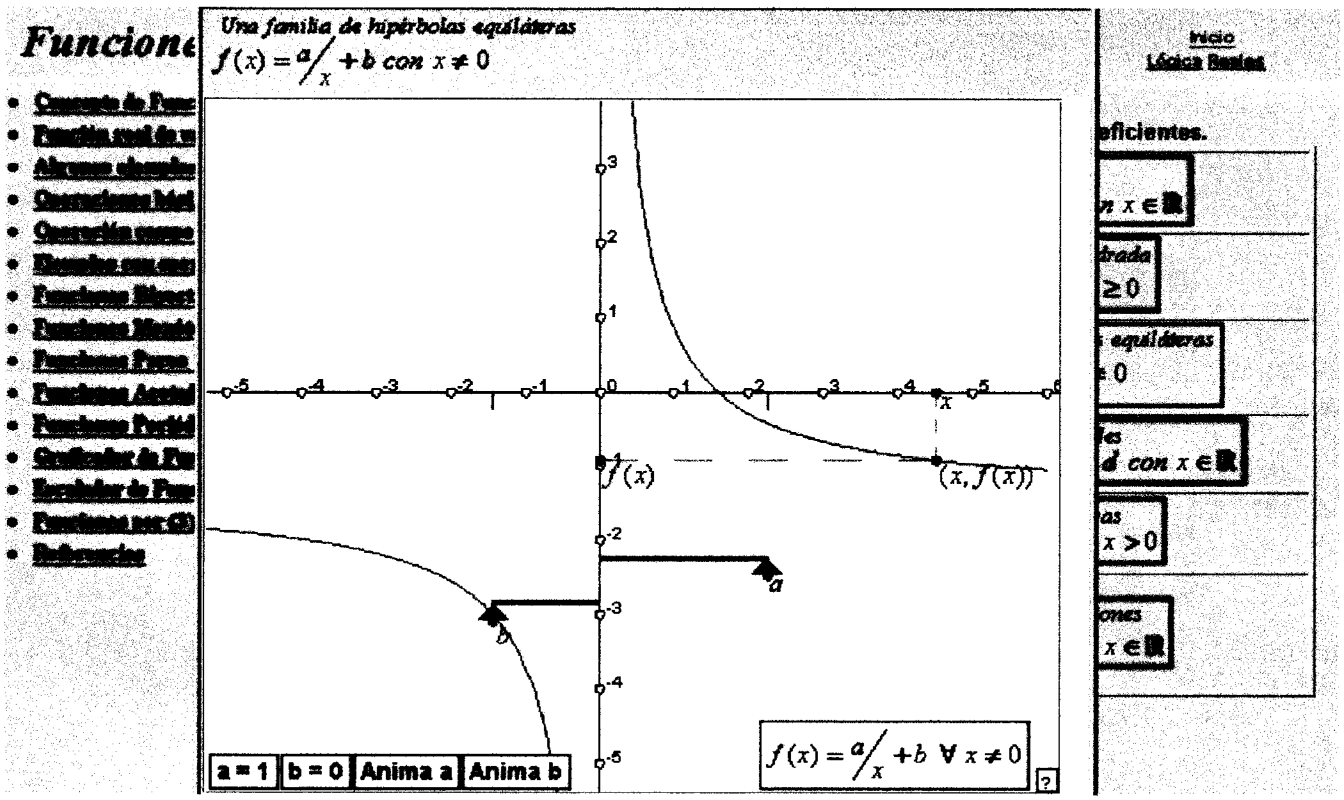
Se pueden cambiar a y b para observar el comportamiento de la familia



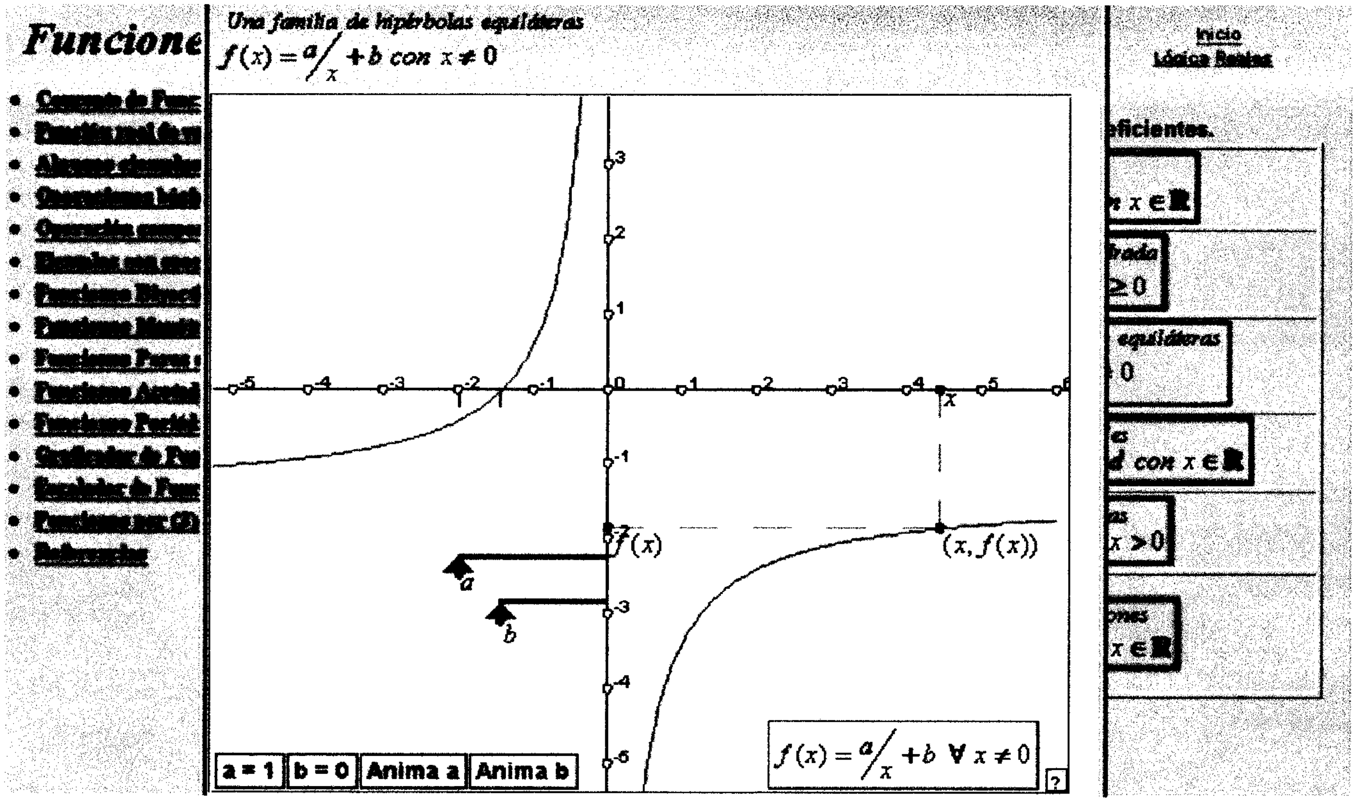
Aquí un ejemplo con a negativo y b positivo.



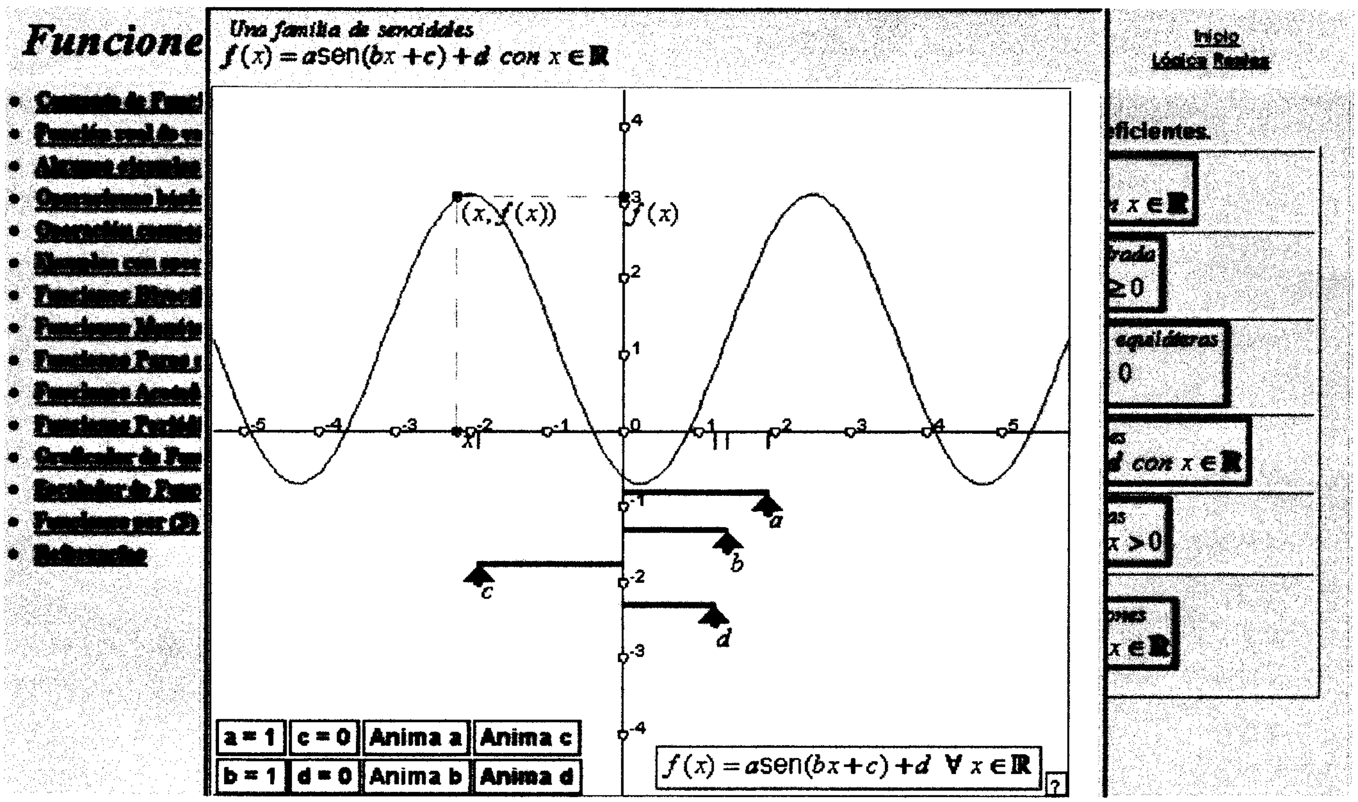
Se pueden cambiar a y b para observar el comportamiento de la familia



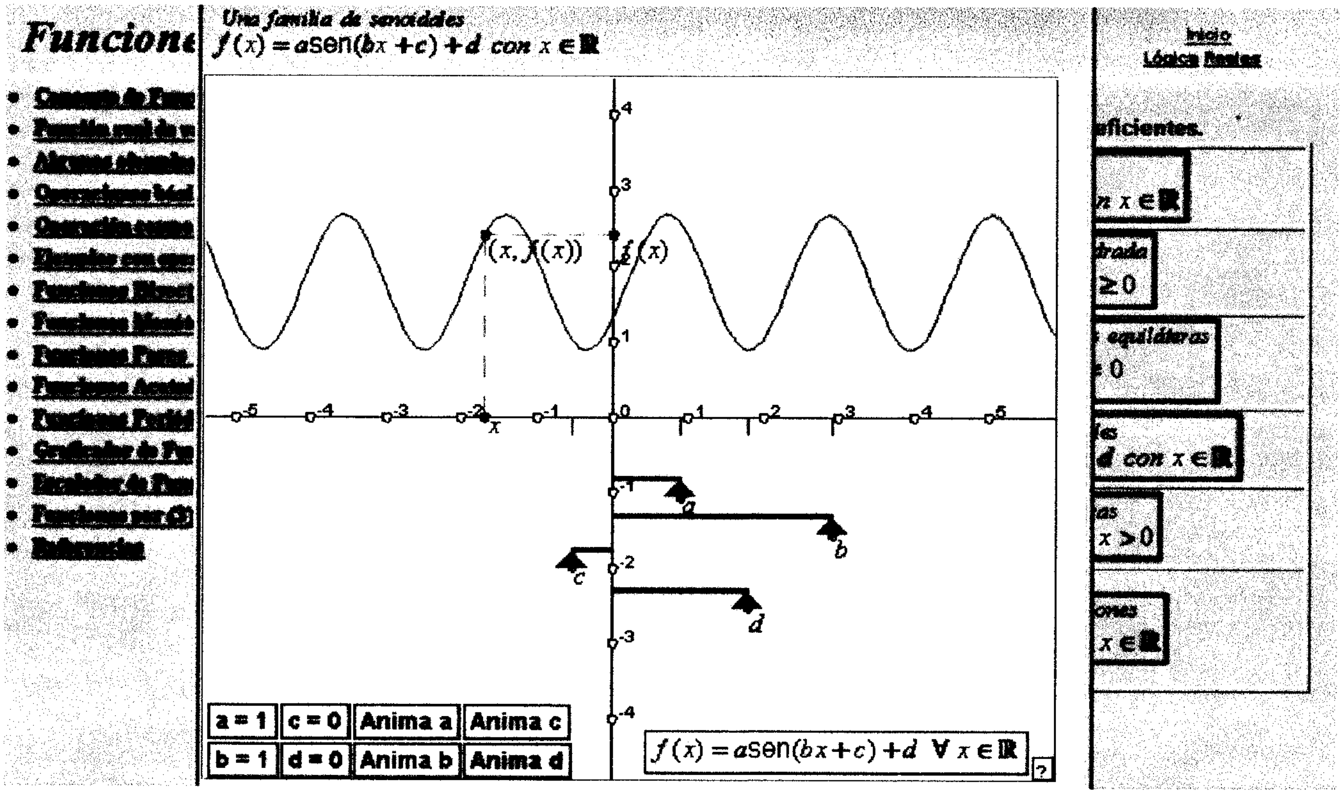
Aquí un ejemplo con a y b negativos.



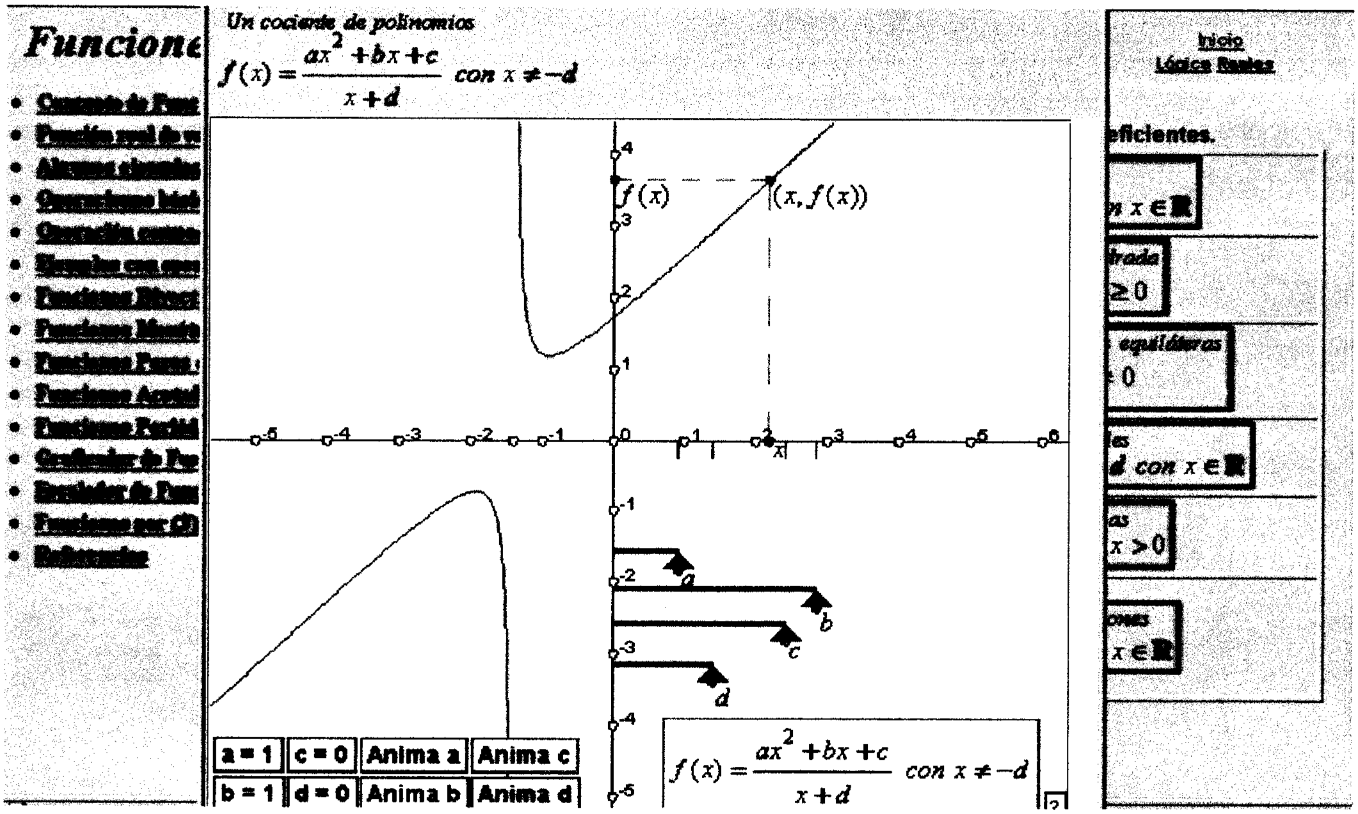
Se pueden cambiar a, b, c y d para observar el comportamiento de la familia.



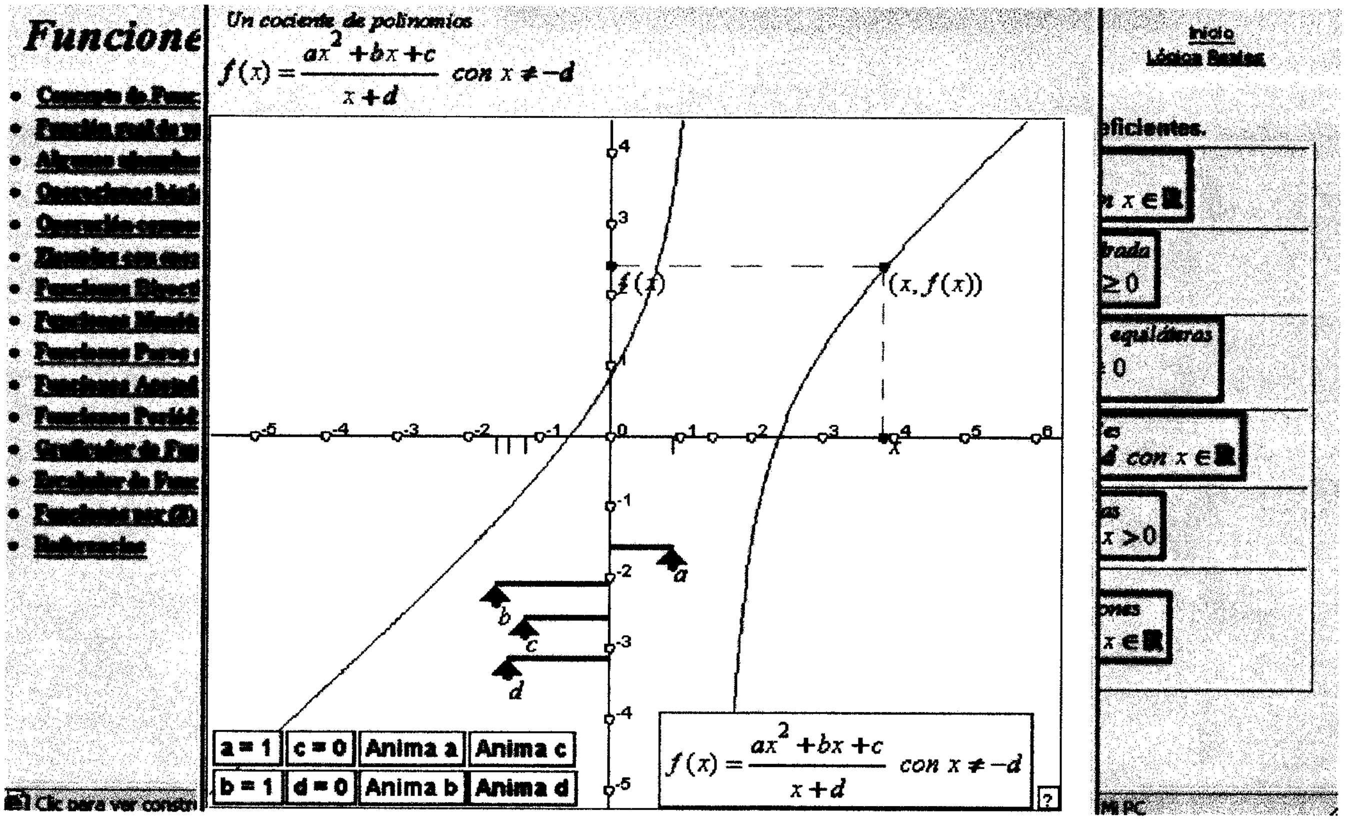
Aquí un ejemplo



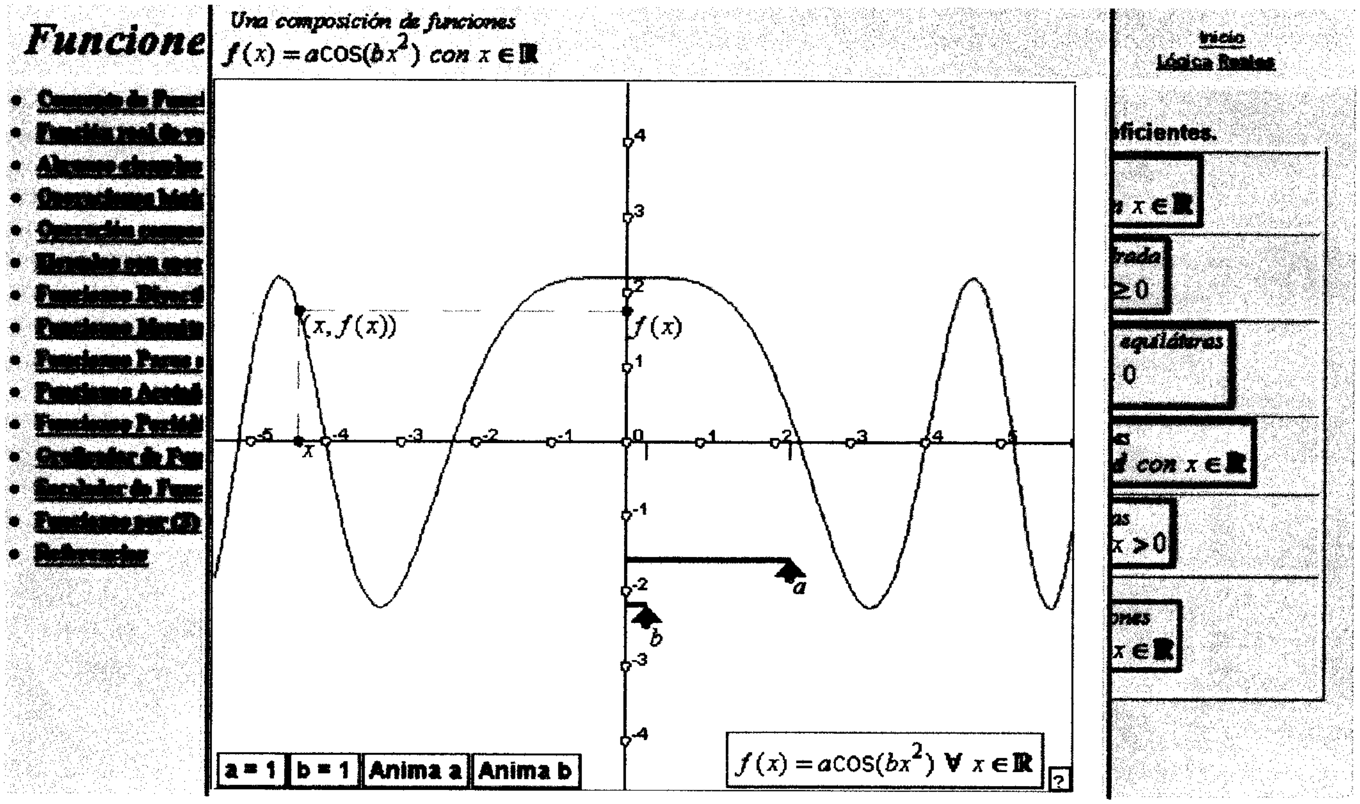
Se pueden cambiar a, b, c y d para observar el comportamiento de la familia.



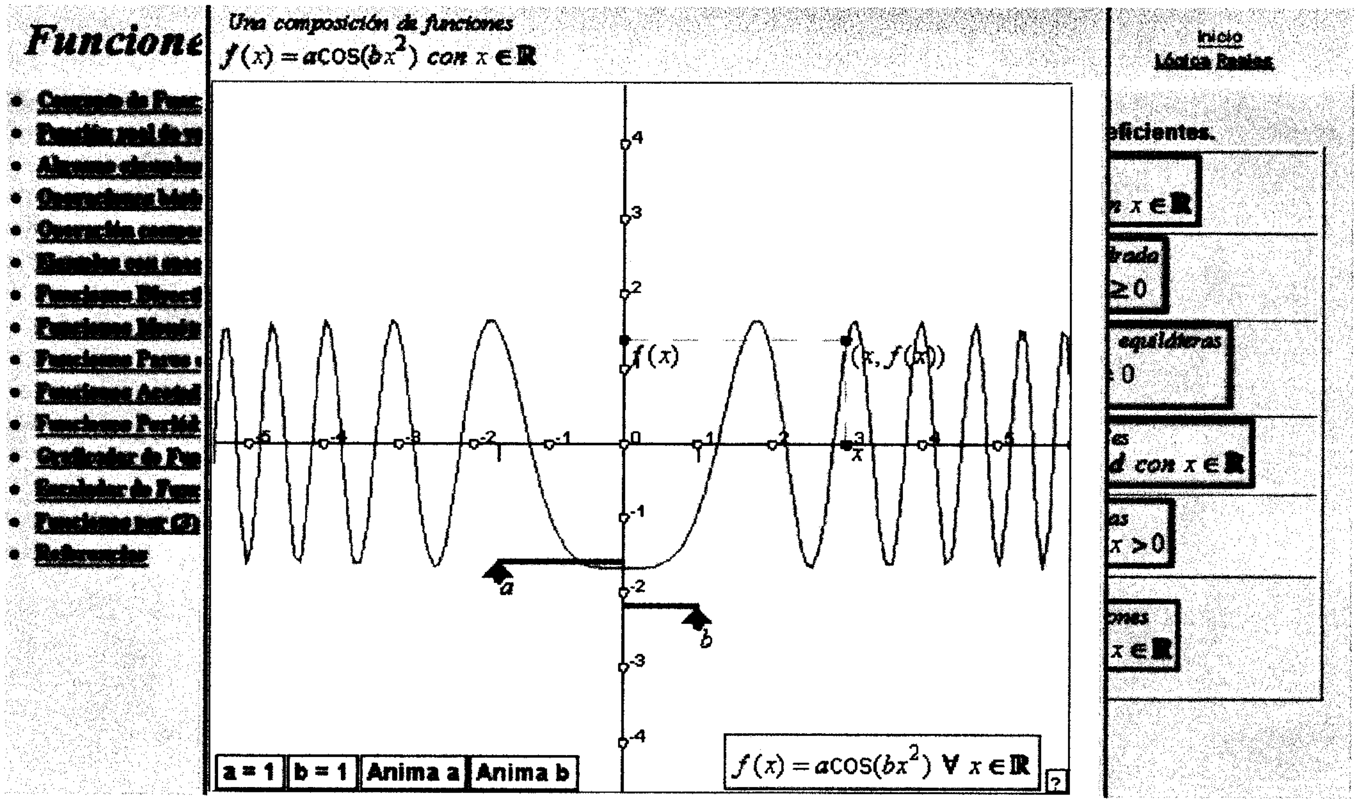
Aquí un ejemplo



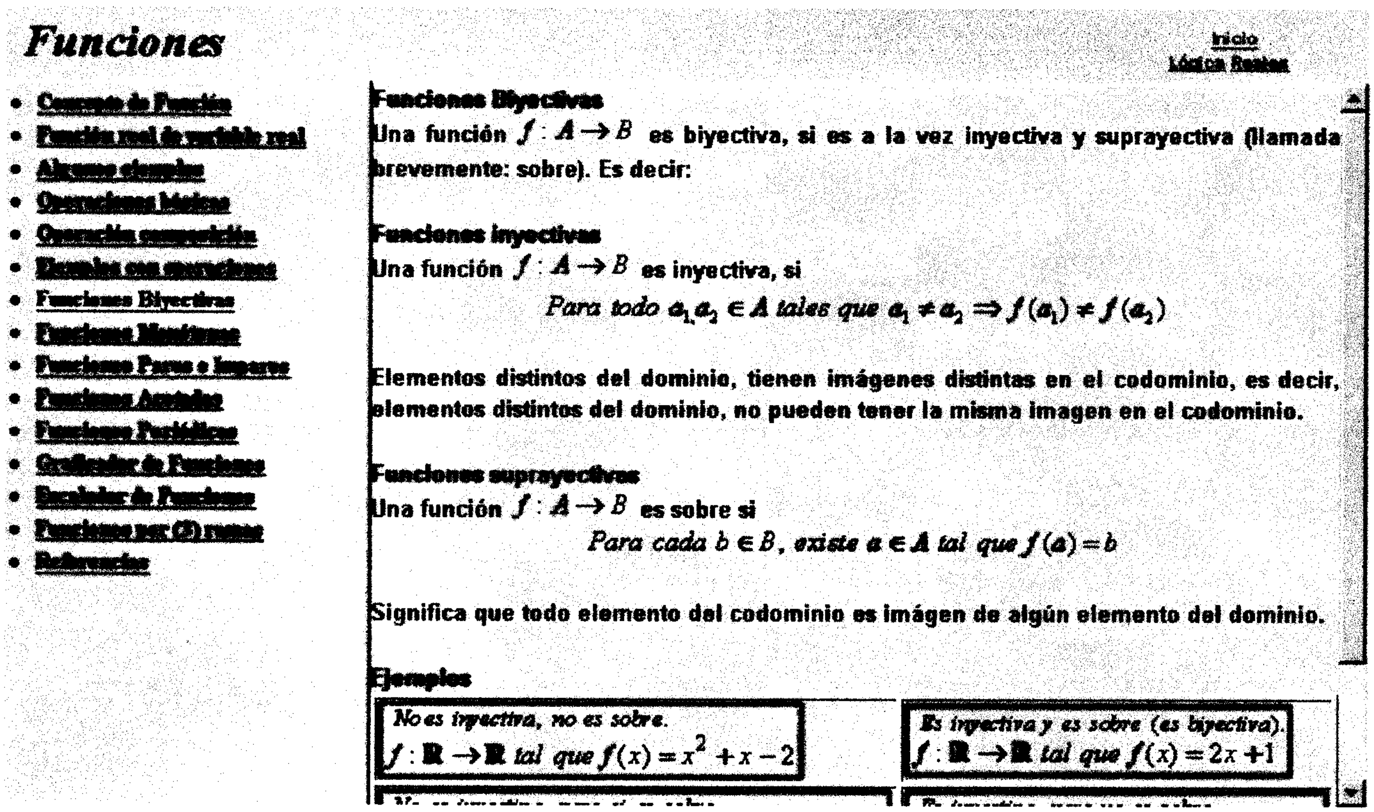
Se pueden cambiar a y b para observar el comportamiento de la familia



Aquí un ejemplo



Funciones biyectivas



Funciones

Funciones Biyectivas

Una función $f : A \to B$ es biyectiva, si es a la vez inyectiva y suprayectiva (llamada brevemente: sobre). Es decir:

Funciones inyectivas

Una función $f : A \to B$ es inyectiva, si

$$\textit{Para todo } a_1, a_2 \in A \textit{ tales que } a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Elementos distintos del dominio, tienen imágenes distintas en el codominio, es decir, elementos distintos del dominio, no pueden tener la misma imagen en el codominio.

Funciones suprayectivas

Una función $f : A \to B$ es sobre si

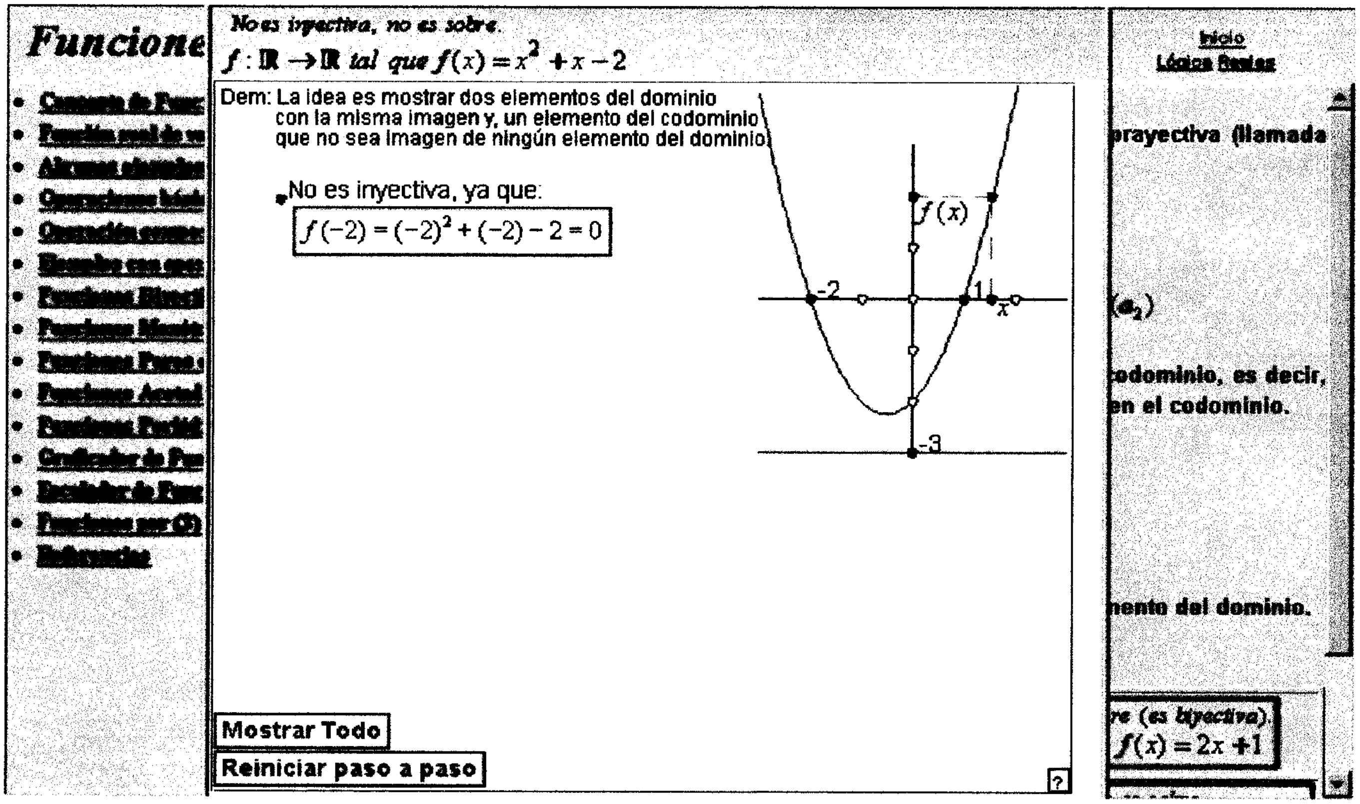
$$\textit{Para cada } b \in B, \textit{ existe } a \in A \textit{ tal que } f(a) = b$$

Significa que todo elemento del codominio es imágen de algún elemento del dominio.

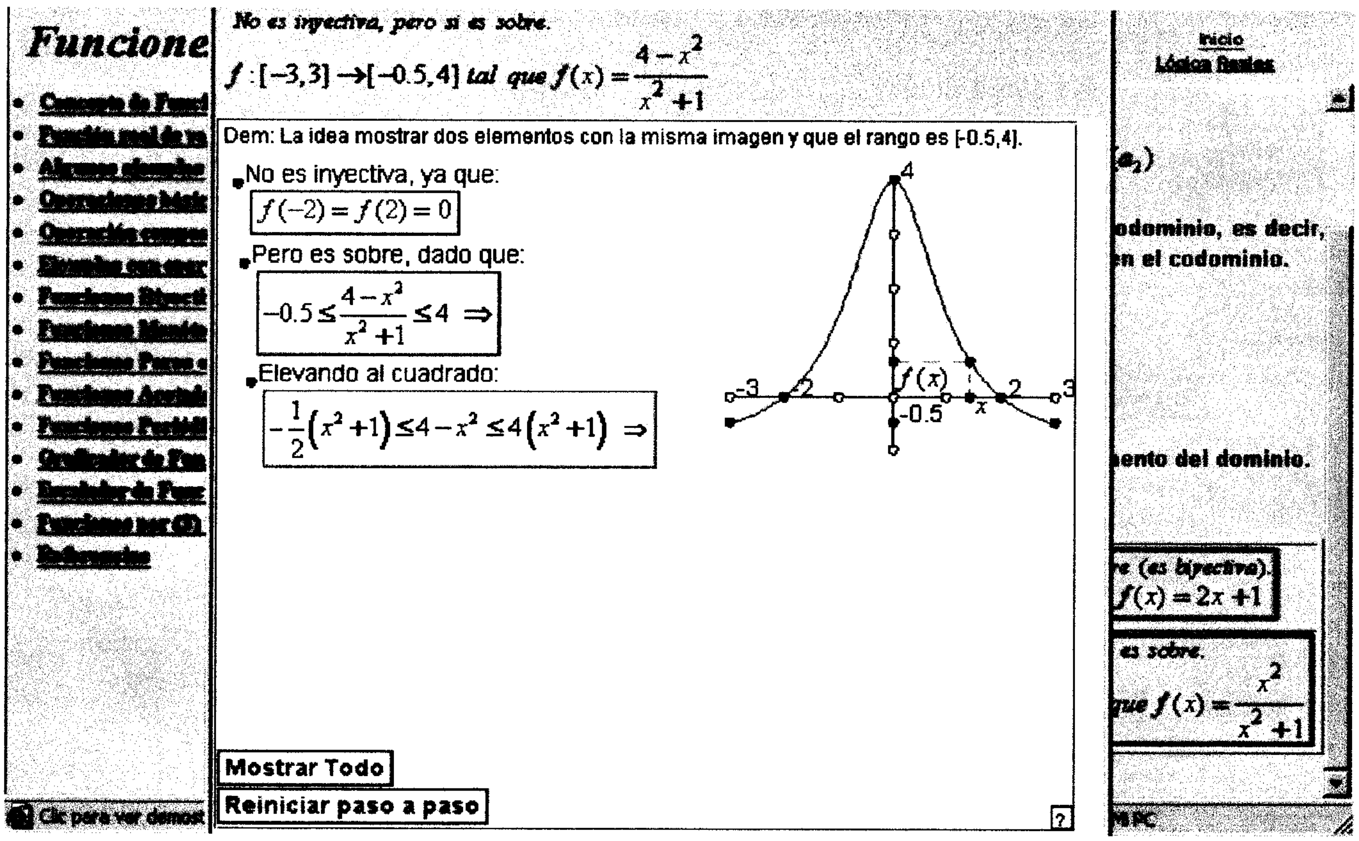
Ejemplos

No es inyectiva, no es sobre. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2 + x - 2$	*Es inyectiva y es sobre (es biyectiva).* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2x + 1$

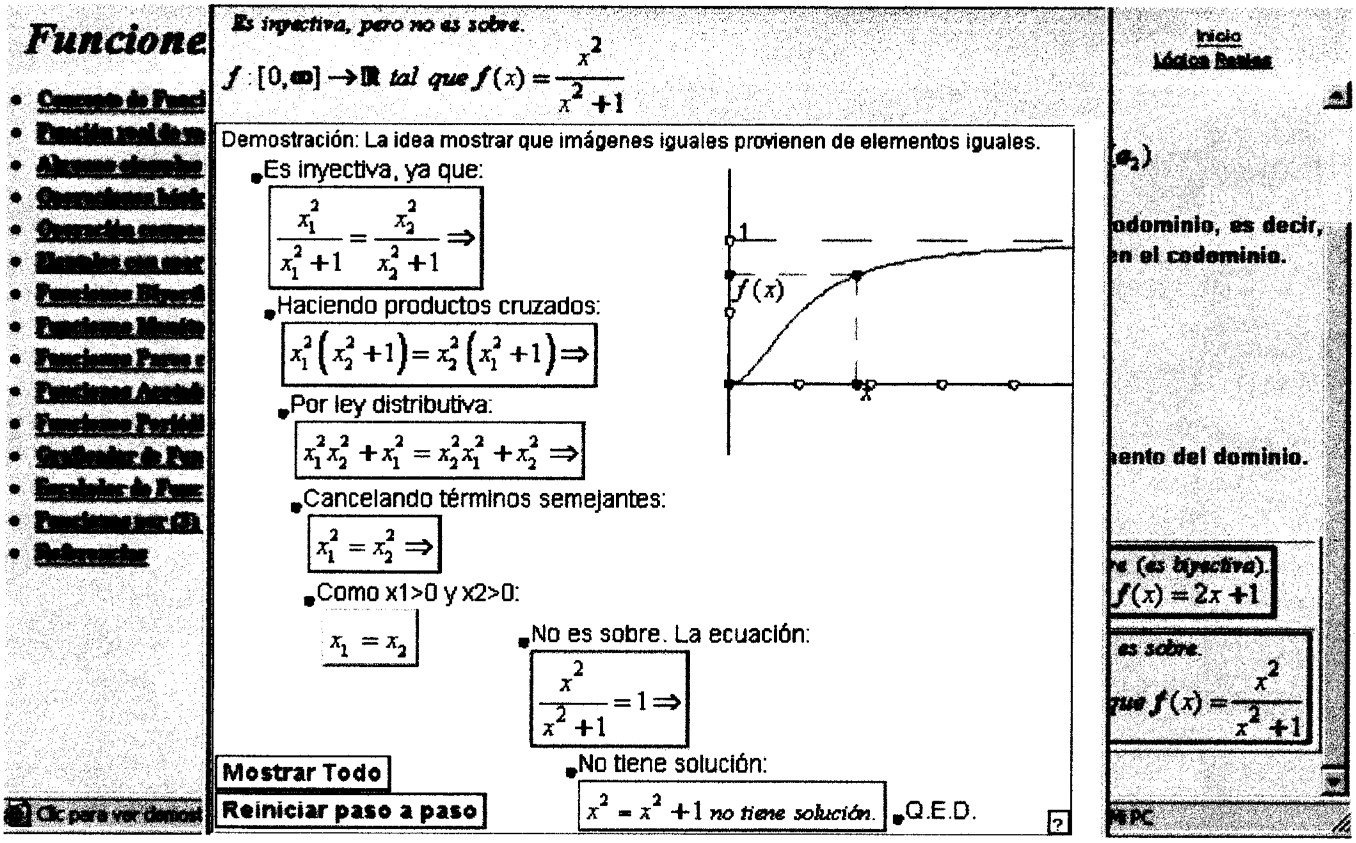
Demostración interactiva: no es inyectiva, ni sobre. Construcción interactiva.



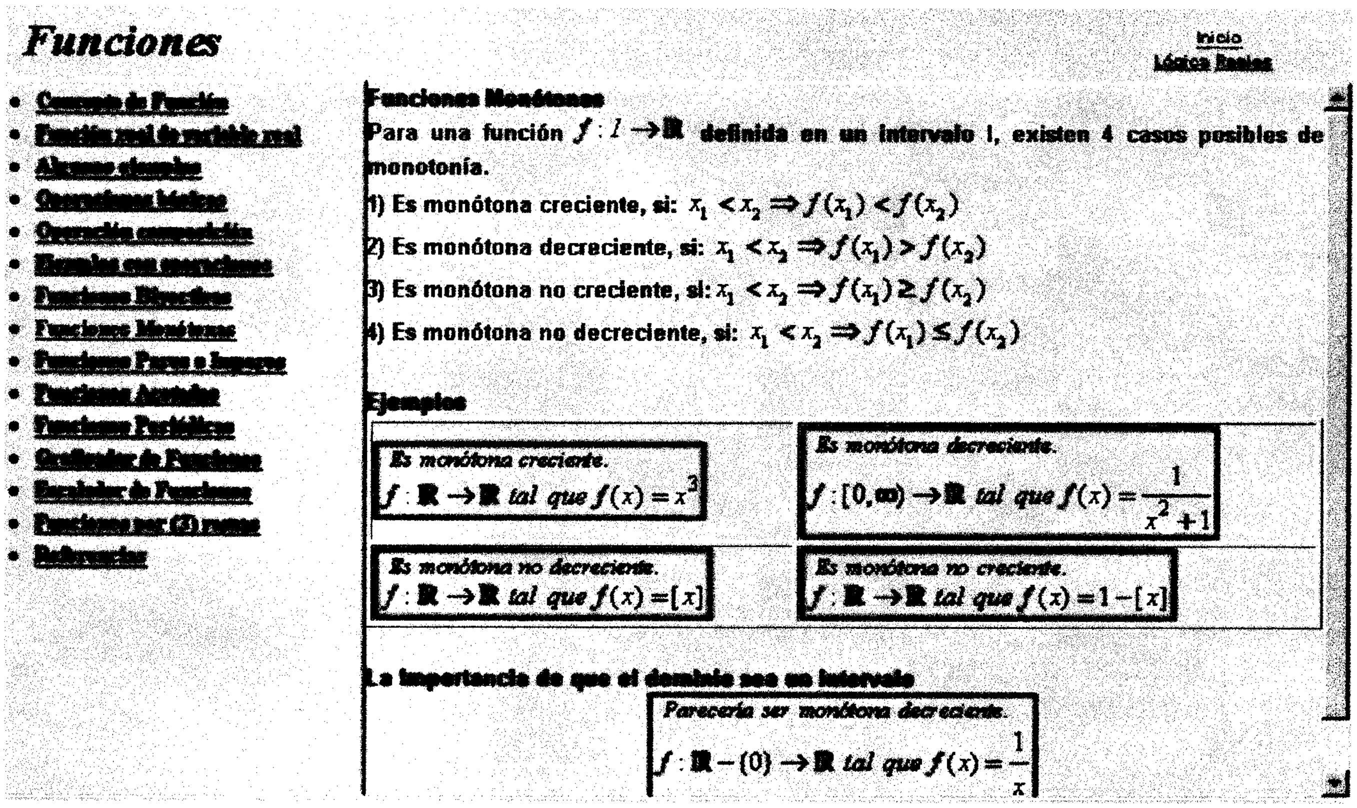
Demostración interactiva: no es inyectiva, pero es sobre. Construcción interactiva.



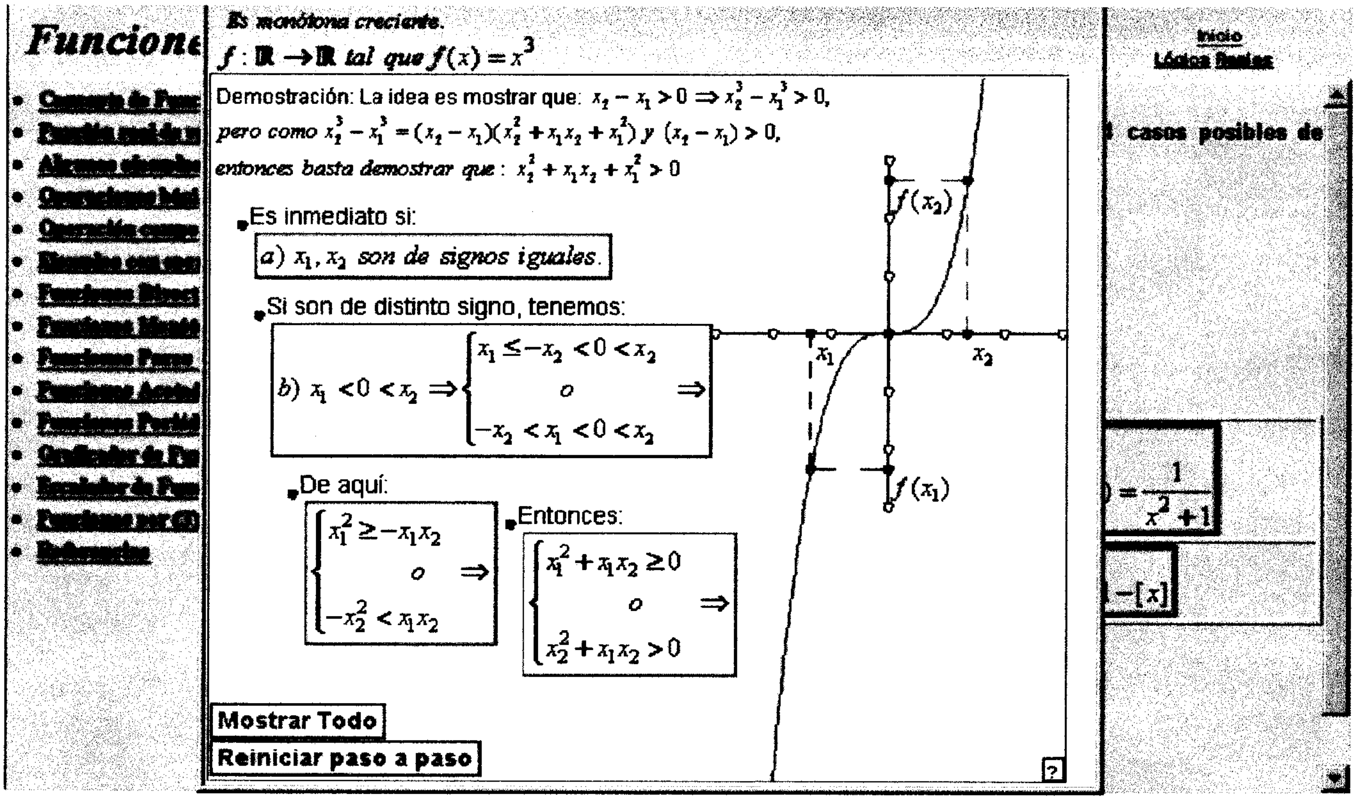
Demostración interactiva: es inyectiva, pero no es sobre. Construcción interactiva.



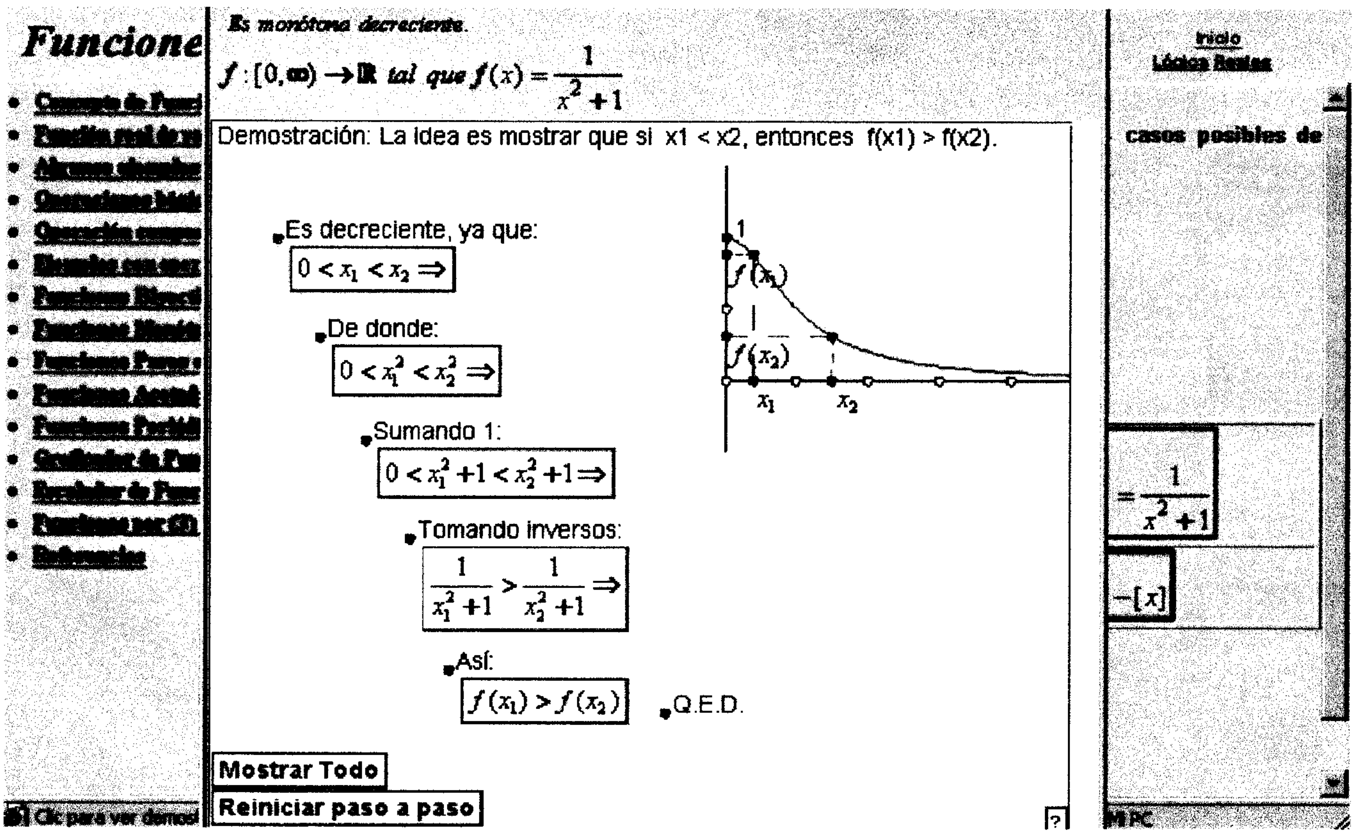
Funciones monótonas y los diversos tipos de monotonía



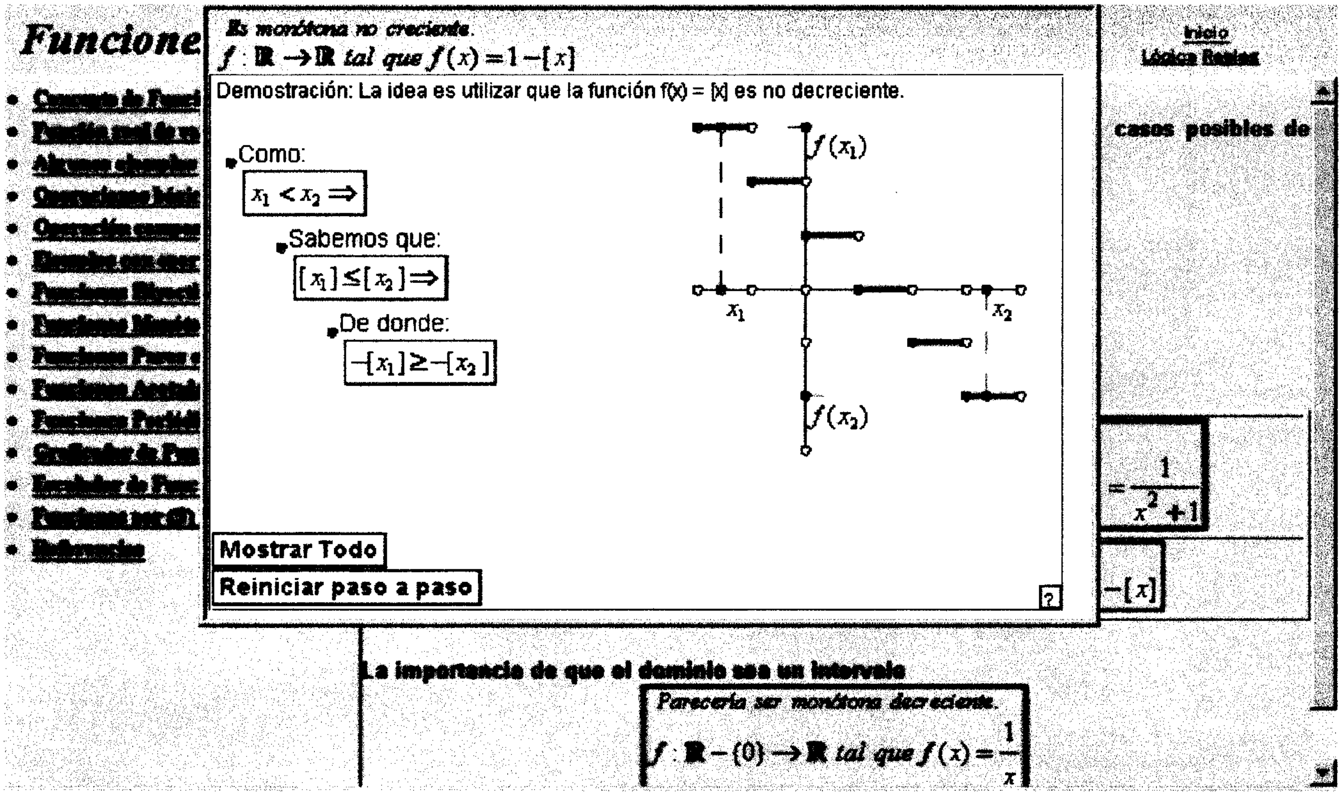
Demostración interactiva: es monótona creciente. Construcción interactiva.



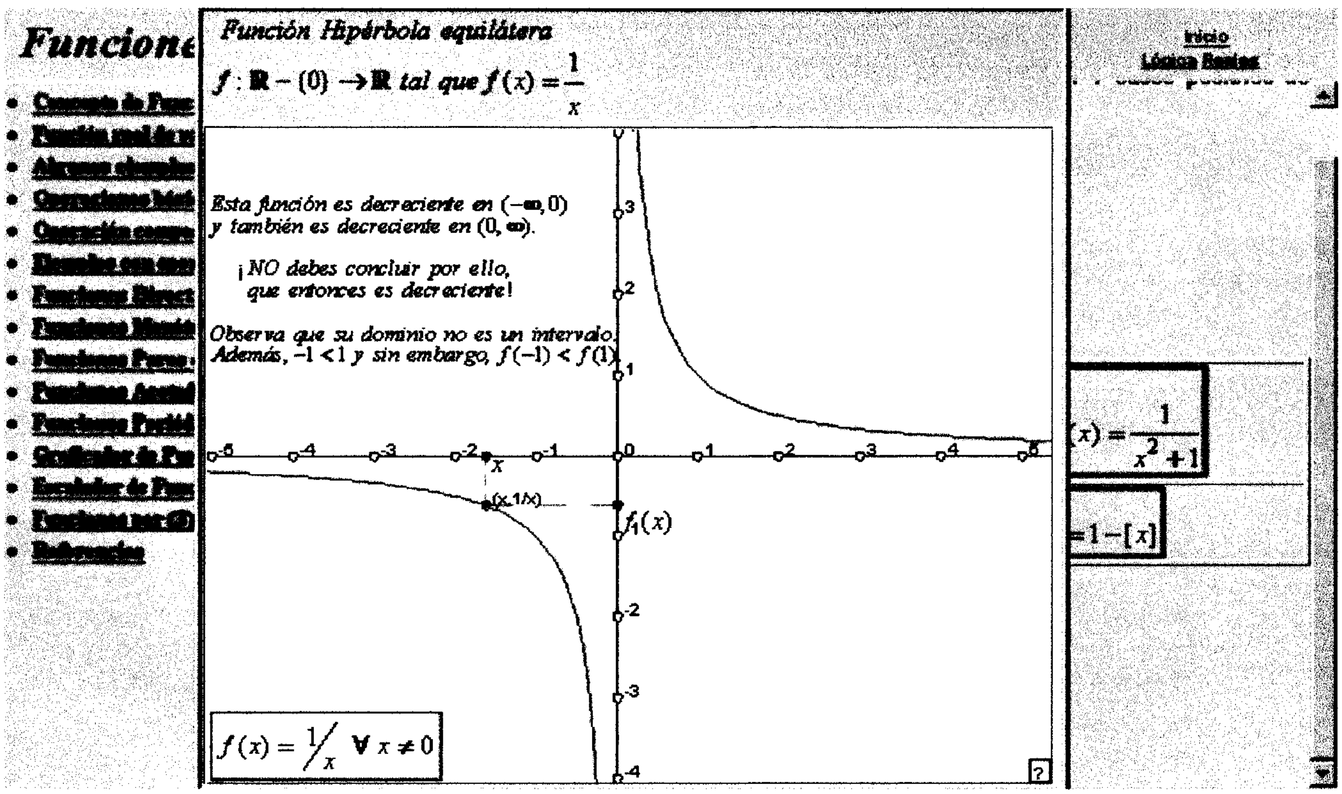
Demostración interactiva: es monótona decreciente. Construcción interactiva



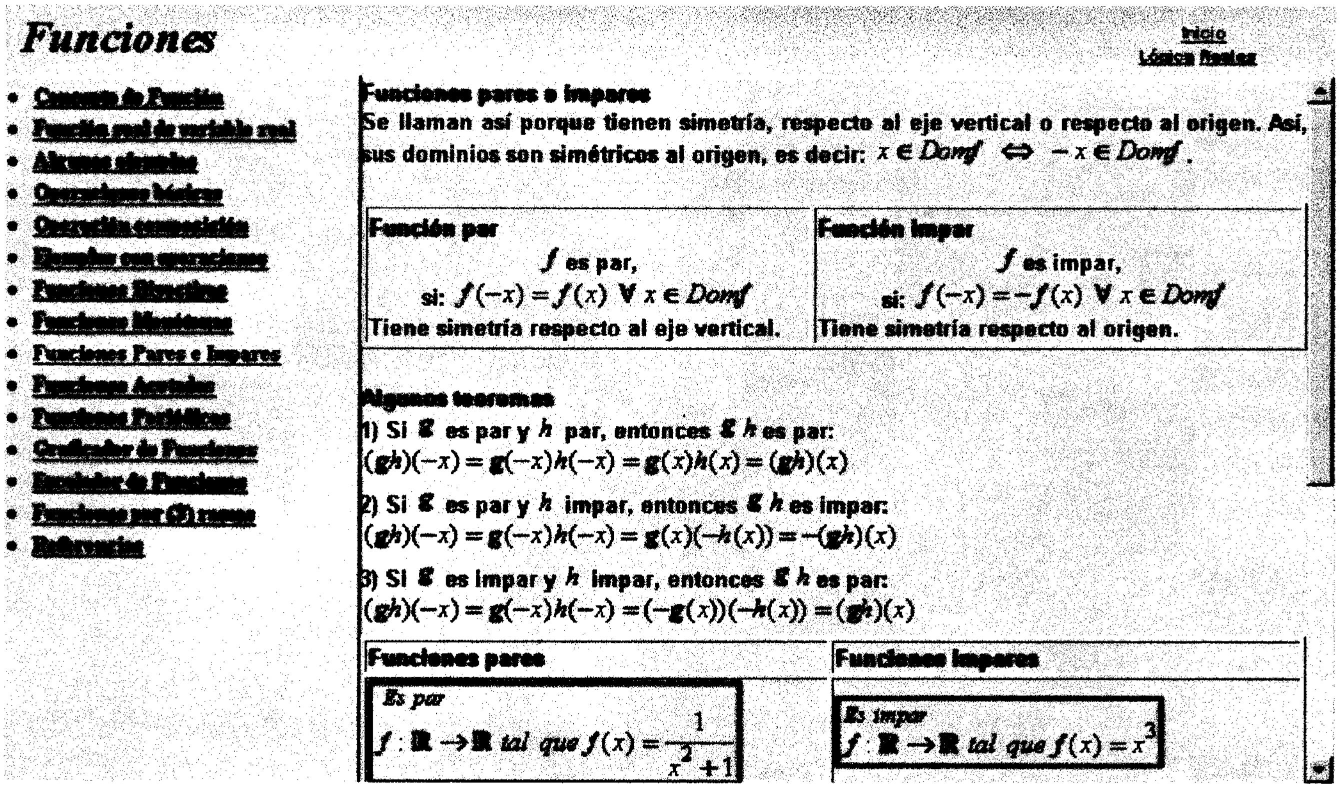
Demostración interactiva: es monótona no creciente. Construcción interactiva



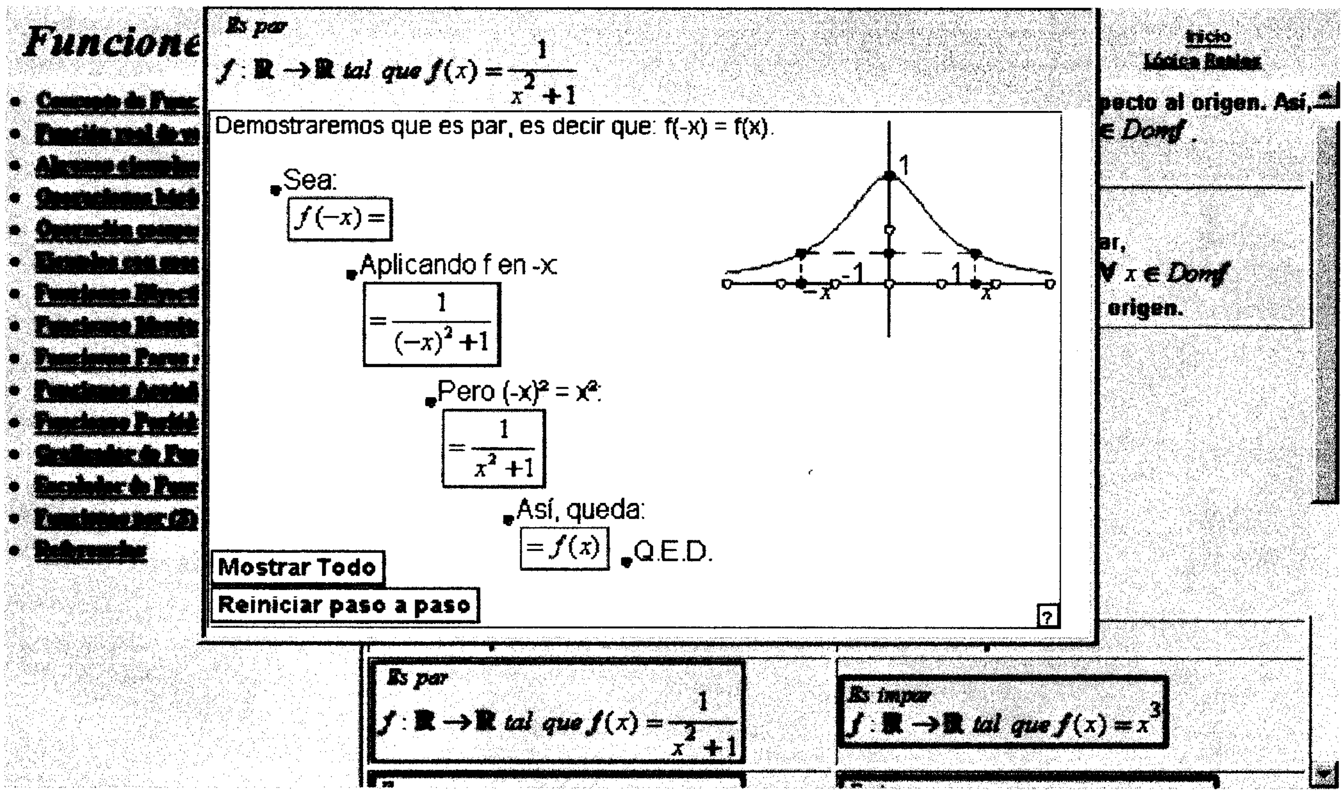
¡Cuidado!: su dominio no es un intervalo. Construcción interactiva.



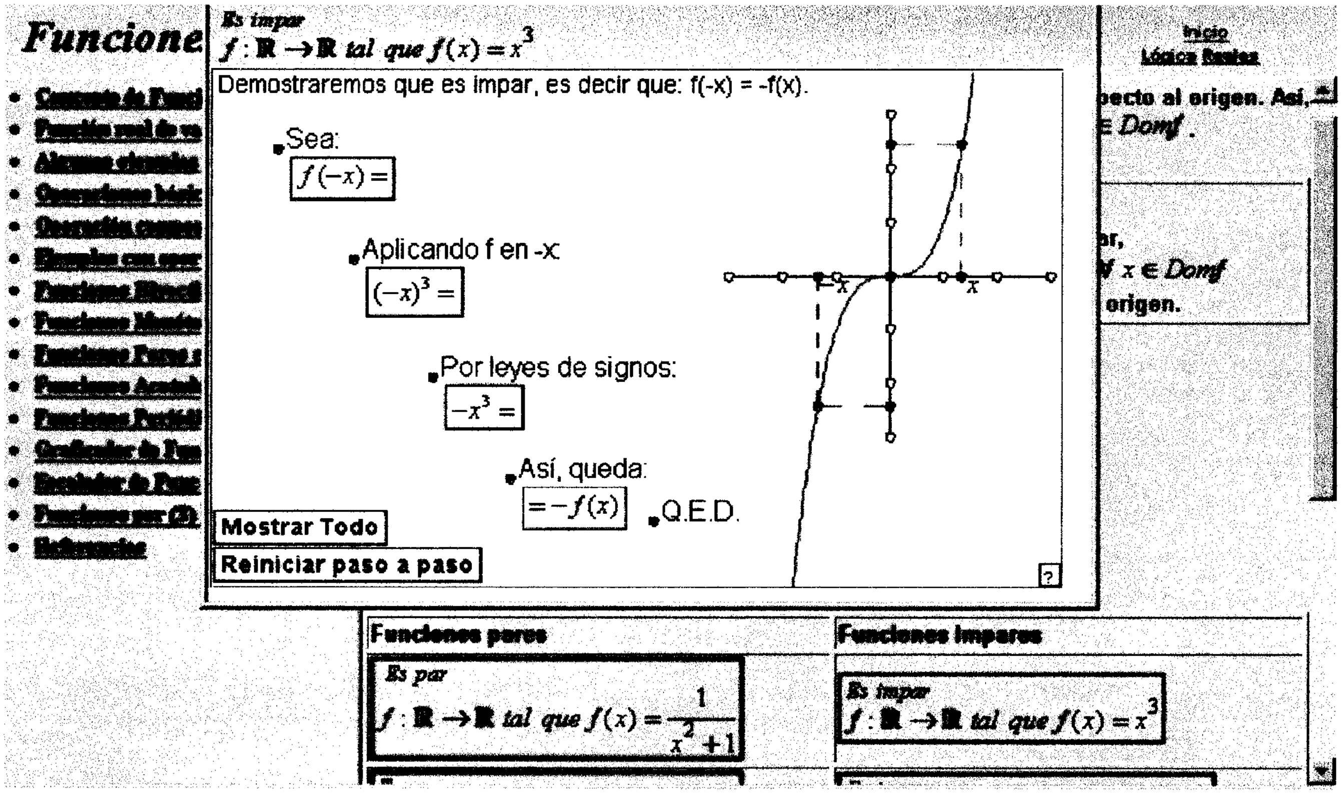
Funciones pares e impares y algunos teoremas



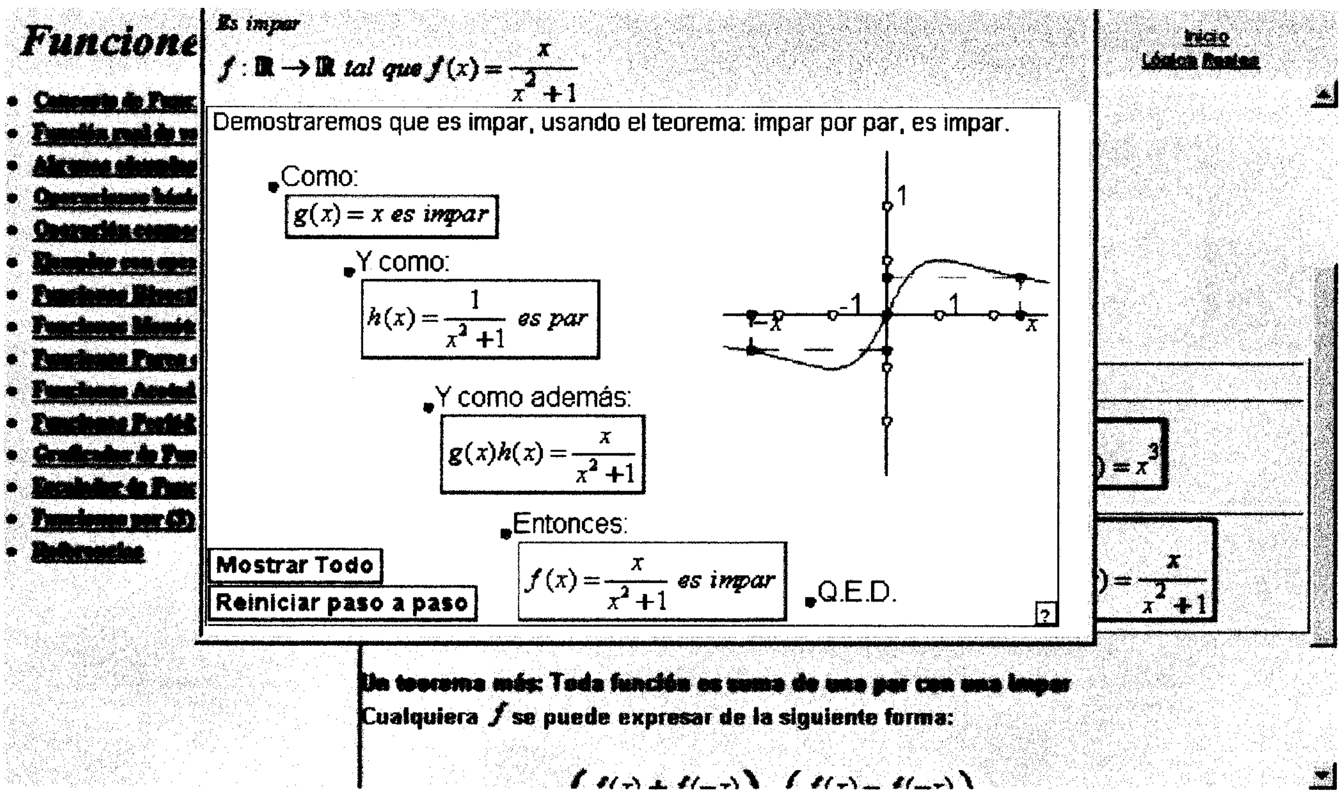
Demostración interactiva: es par. Construcción interactiva



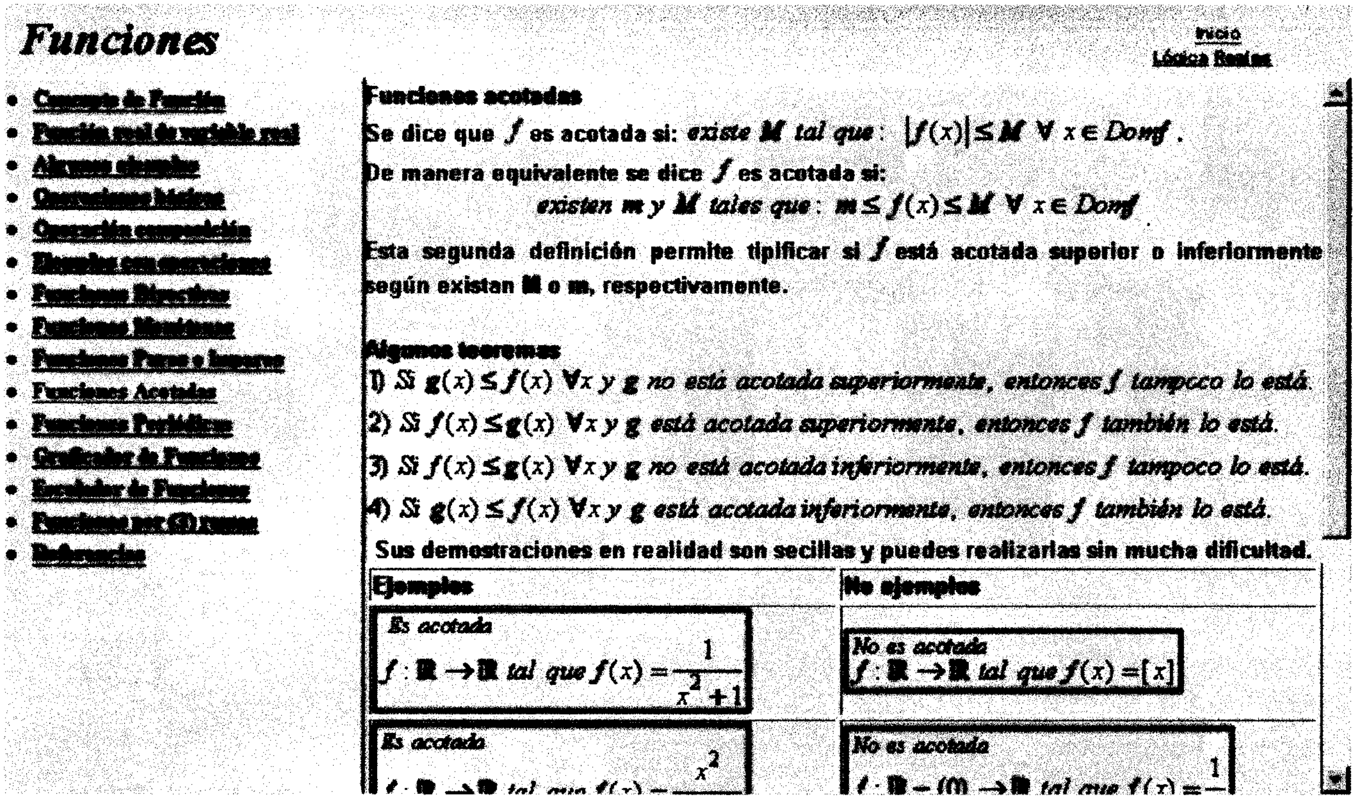
Demostración interactiva: es impar. Construcción interactiva



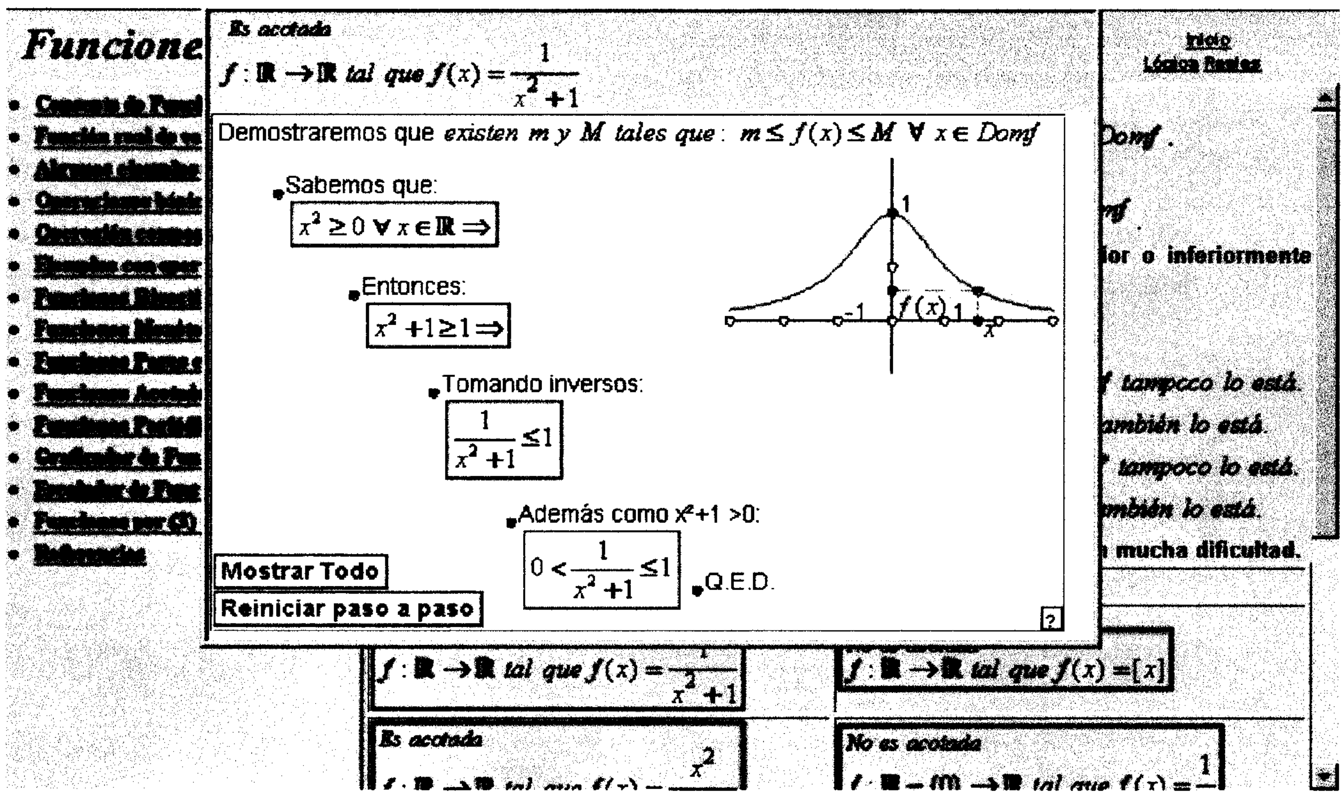
Demostración interactiva: es impar. Construcción interactiva.



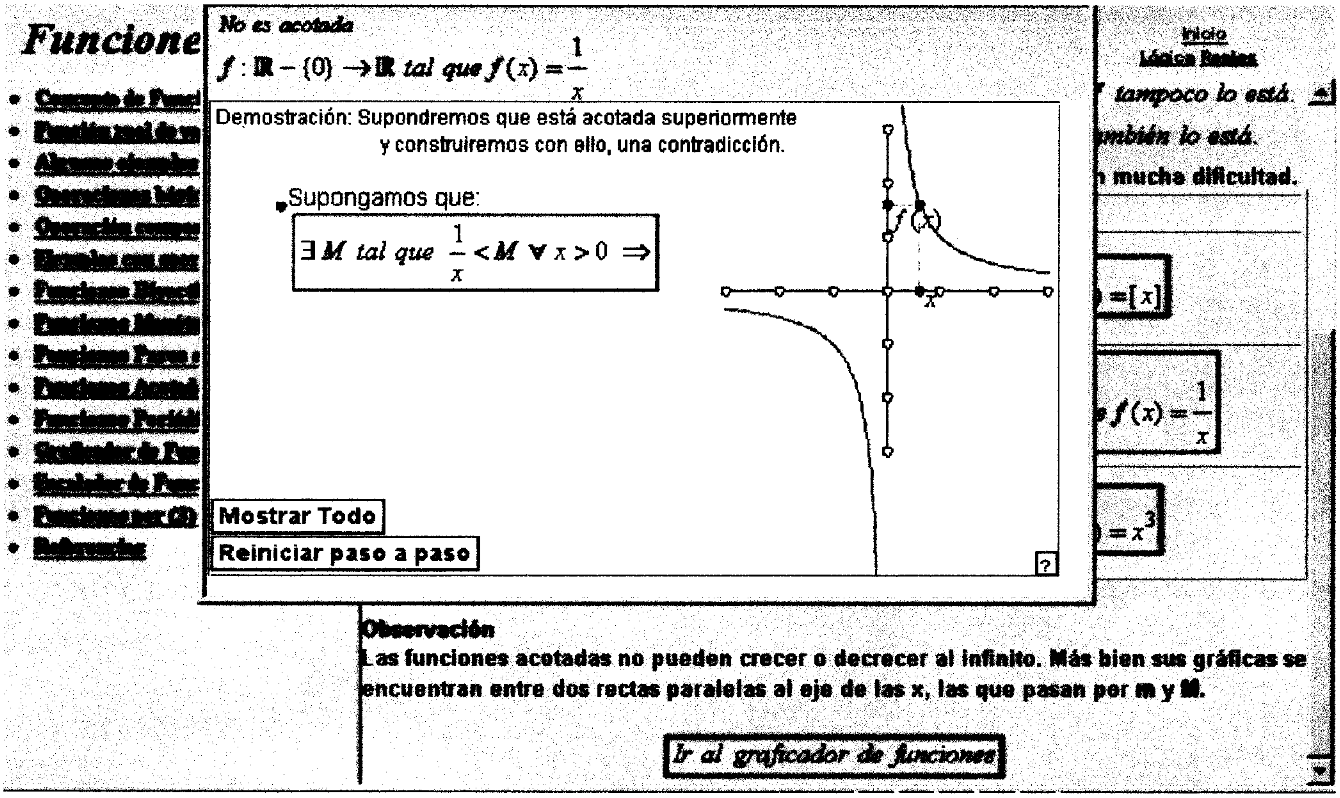
Funciones acotadas y algunos teoremas



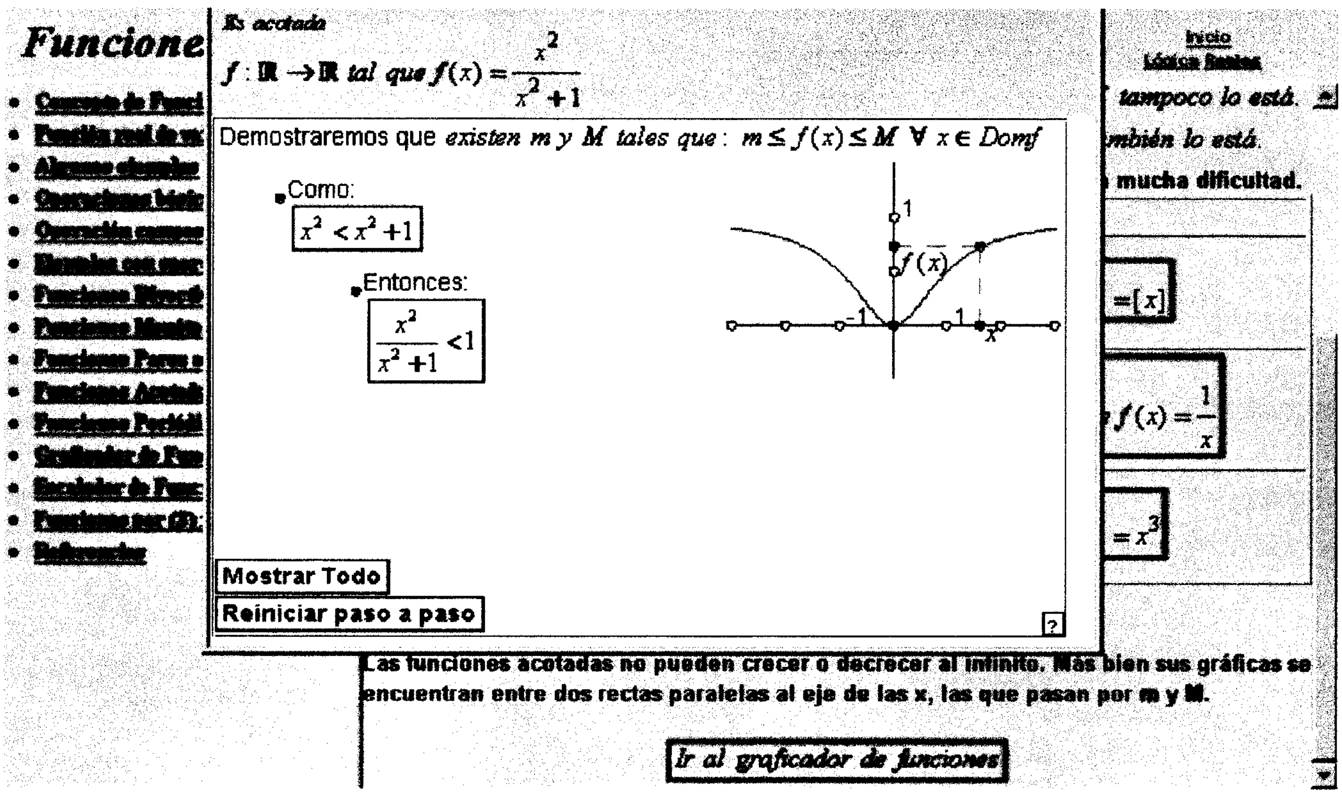
Demostración interactiva: es acotada. Construcción interactiva



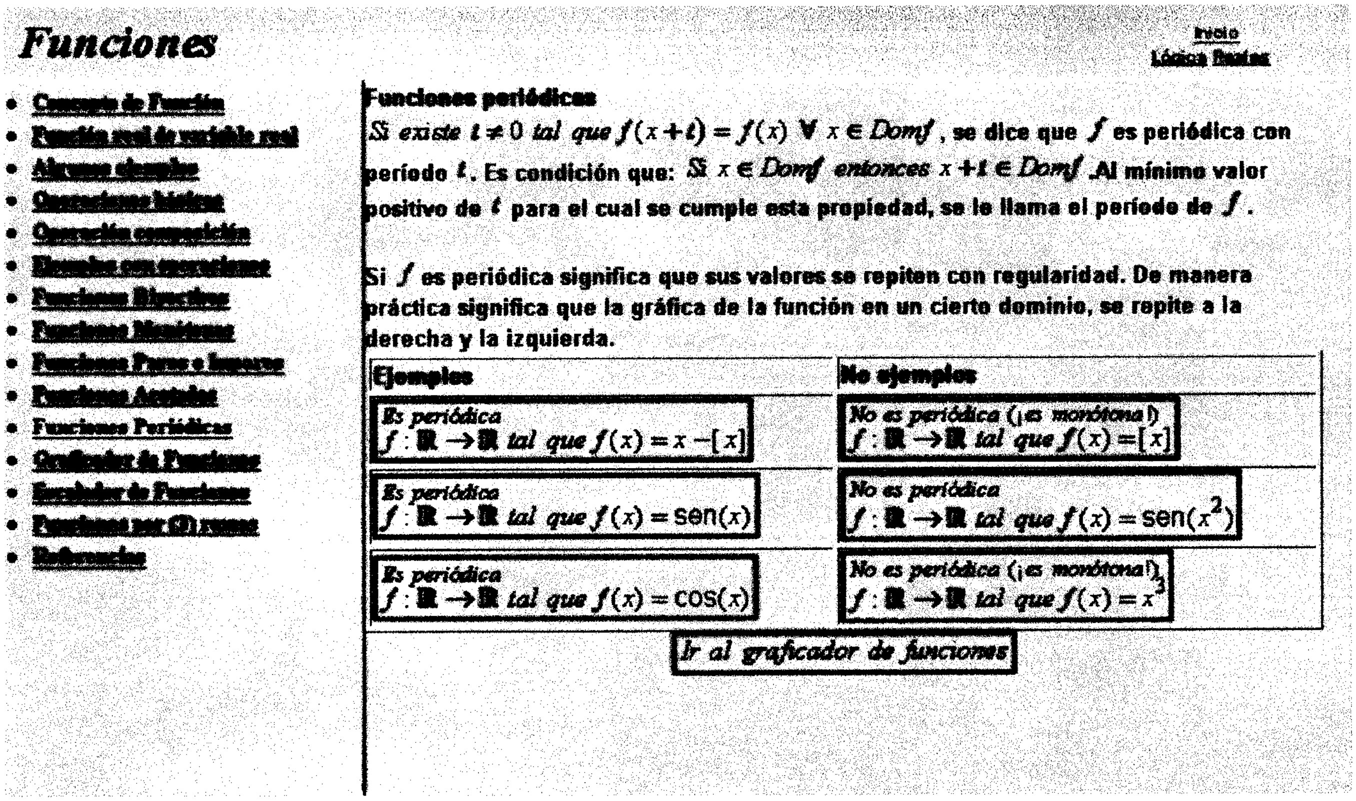
Demostración interactiva: no es acotada. Construcción interactiva



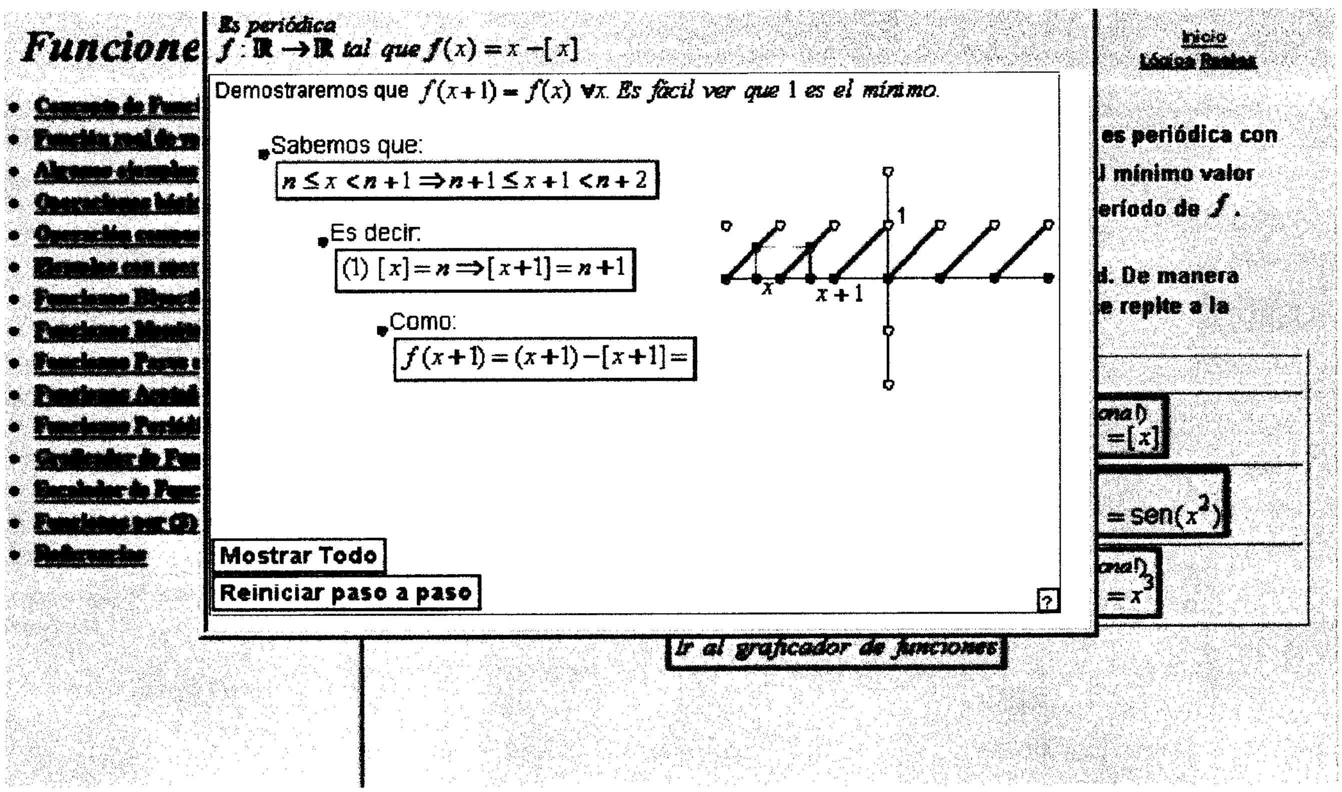
Demostración interactiva: es acotada. Construcción interactiva



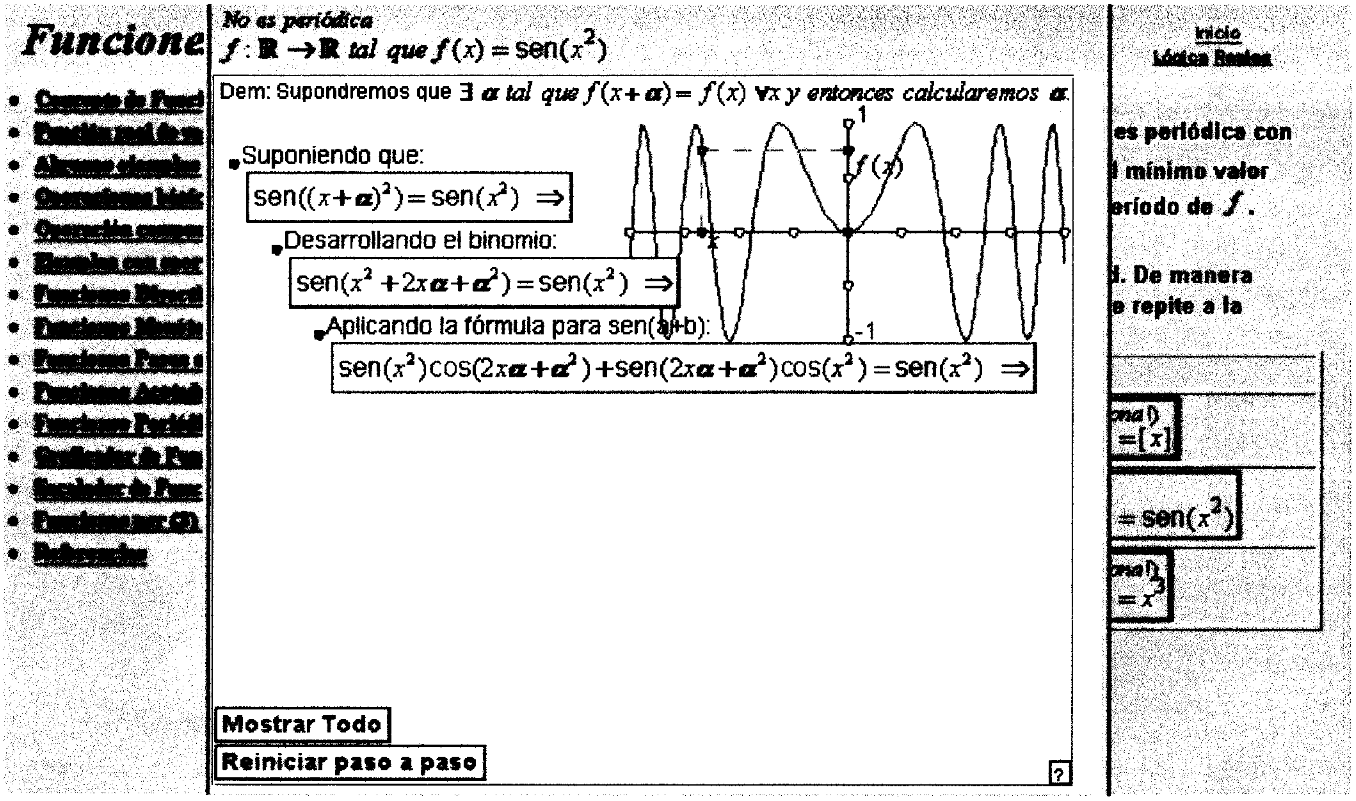
Funciones periódicas, ejemplos y no ejemplos



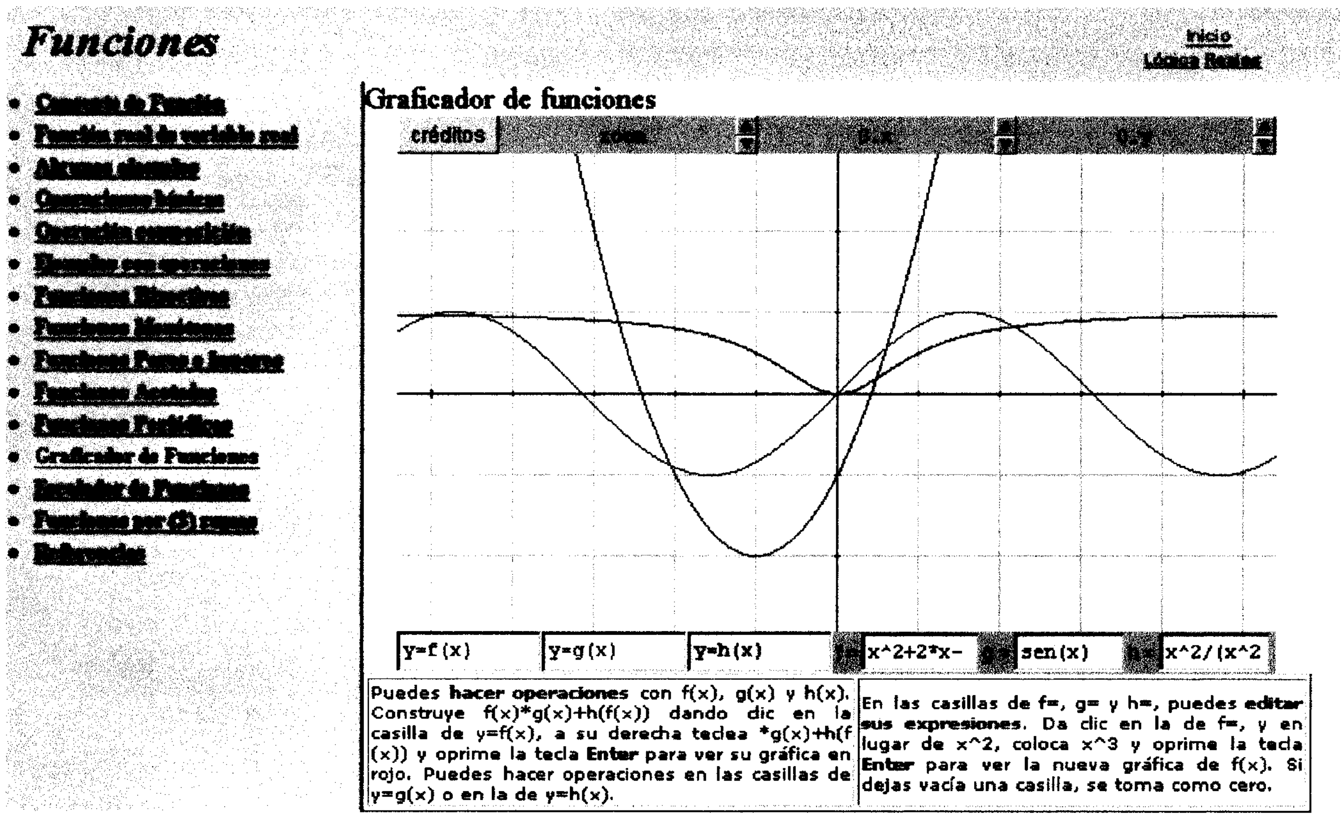
Demostración interactiva: es periódica. Construcción interactiva



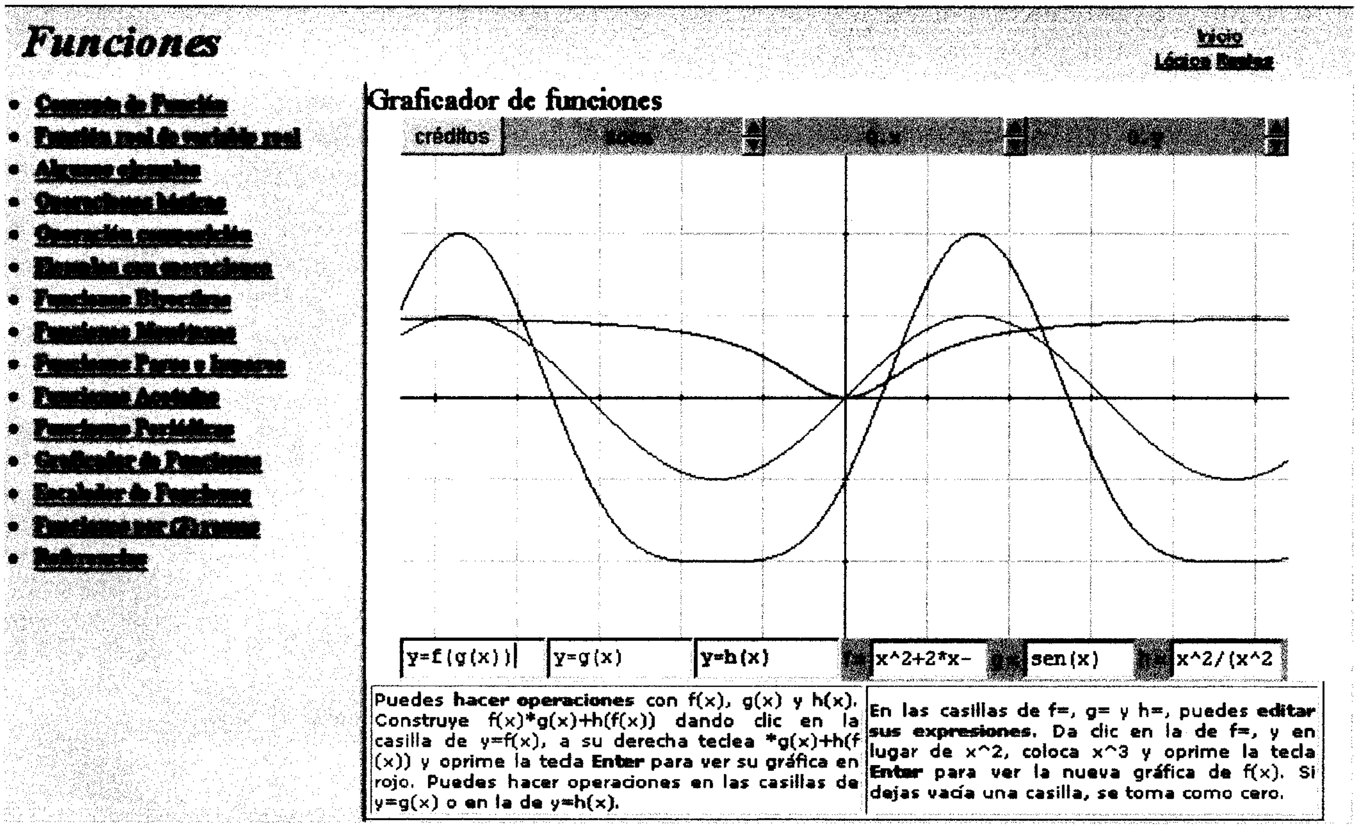
Demostración interactiva: no es periódica. Construcción interactiva.



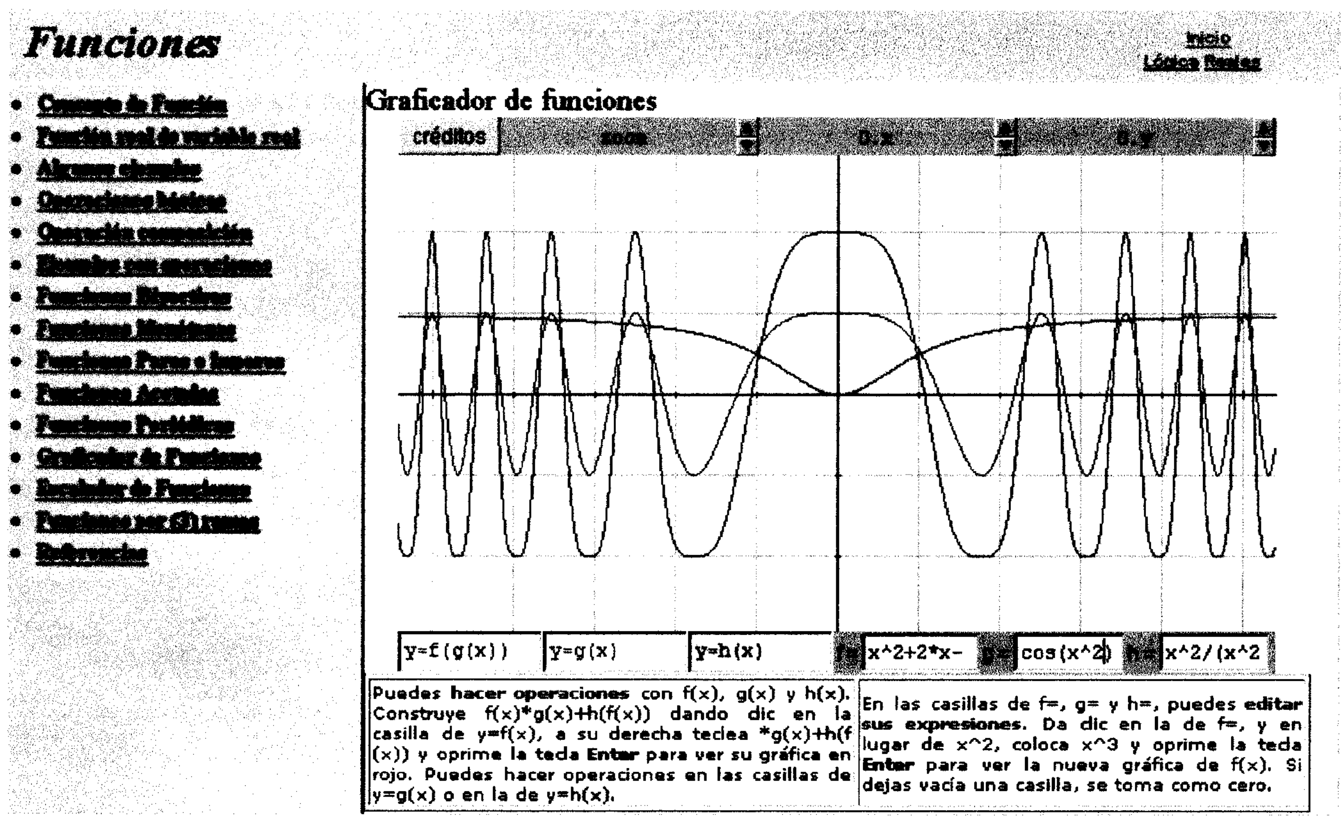
Graficador de funciones. Puedes hacer operaciones y editar expresiones.



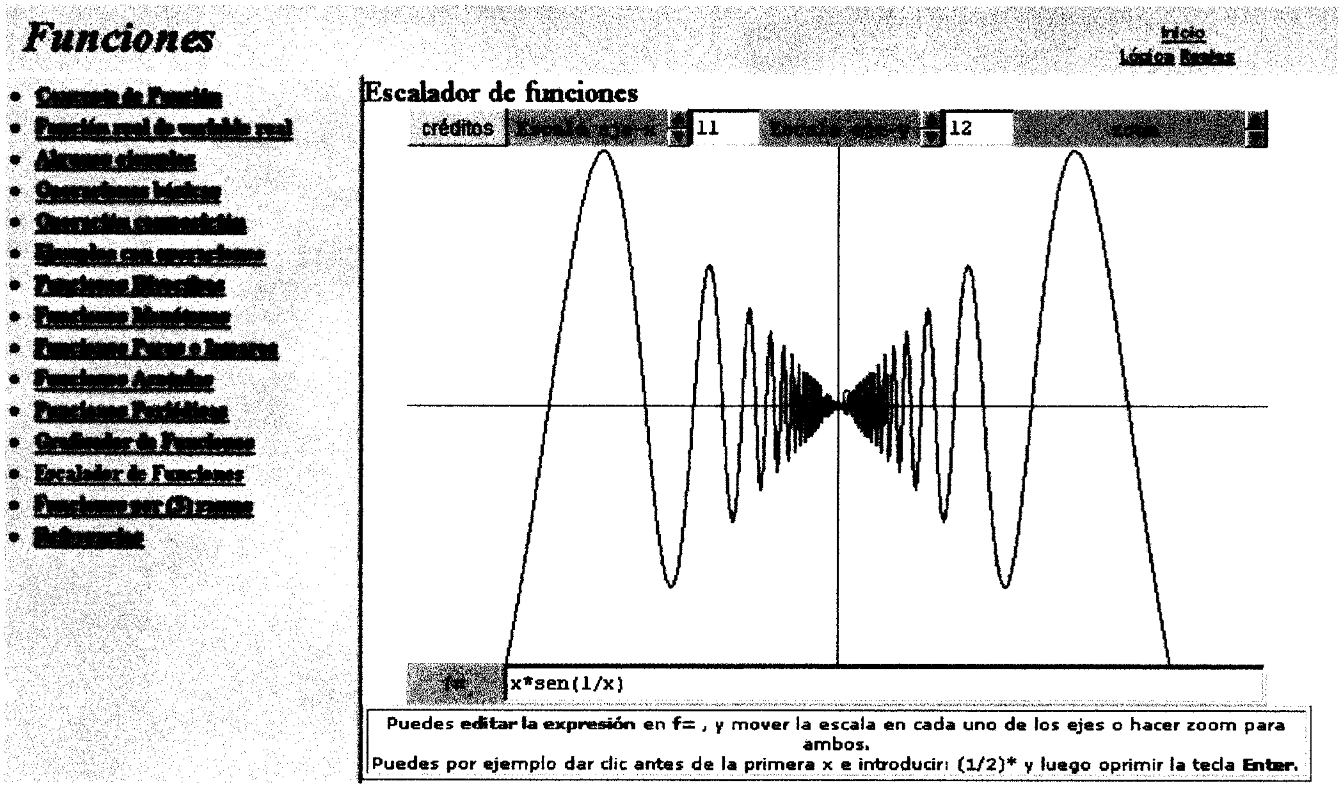
En la primera casilla se presenta una composición. Se puede operar en las otras dos



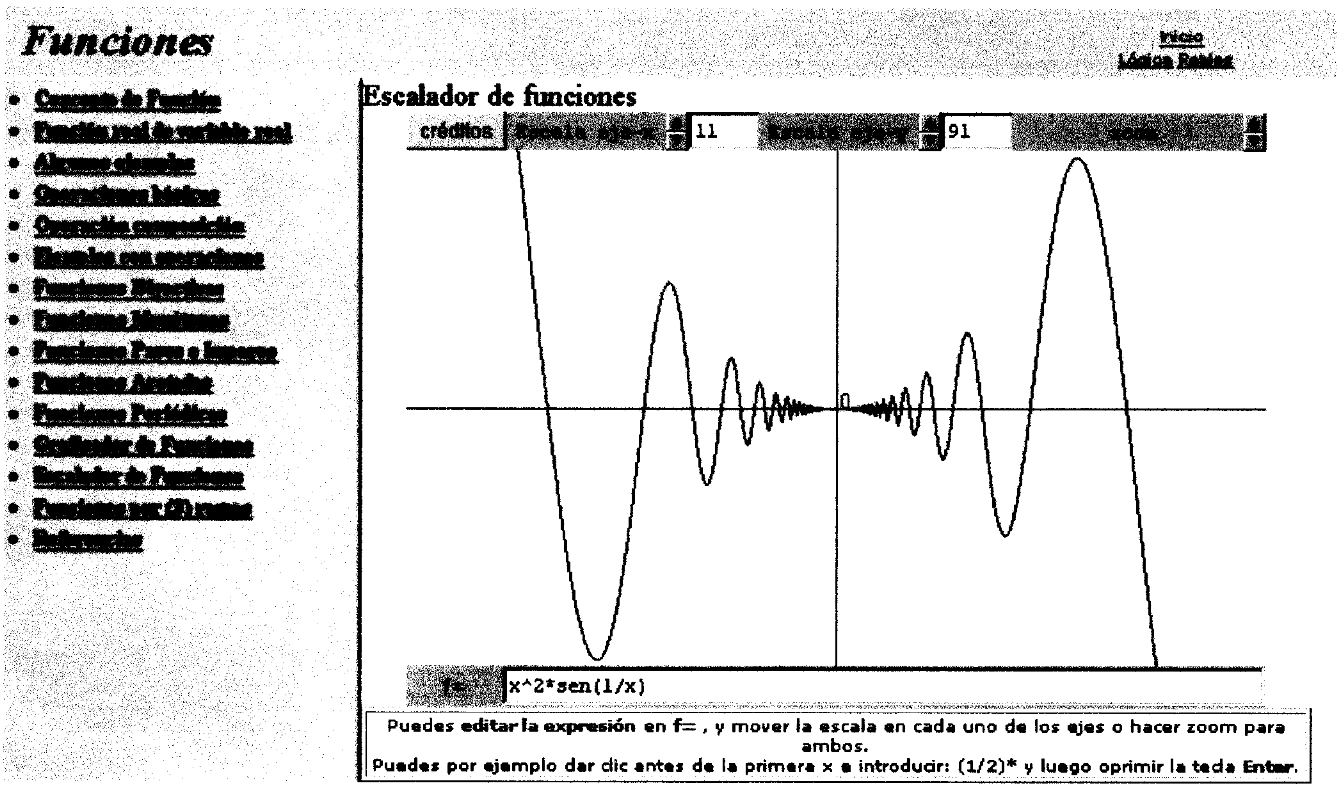
En la casilla g= se cambió la expresión. Una casilla vacía la toma como constante 0.



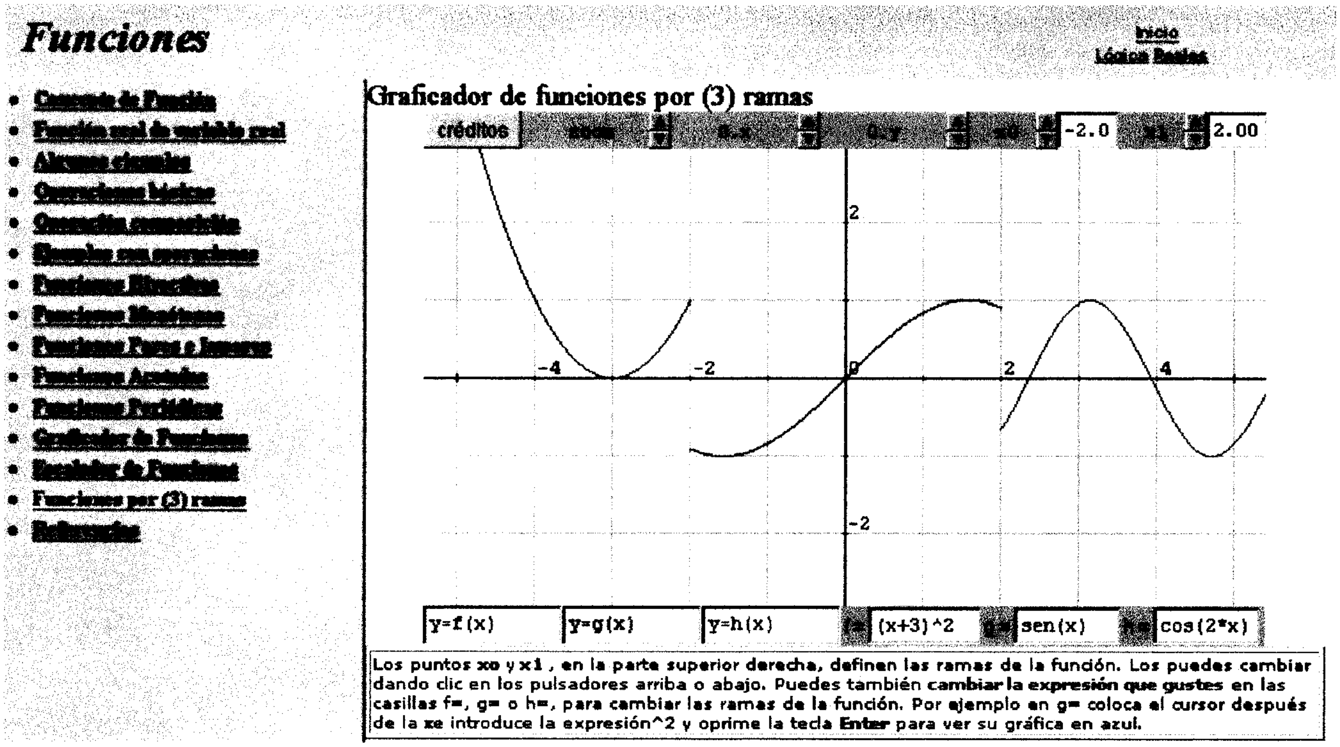
Se pueden cambiar las expresiones en las casillas derechas



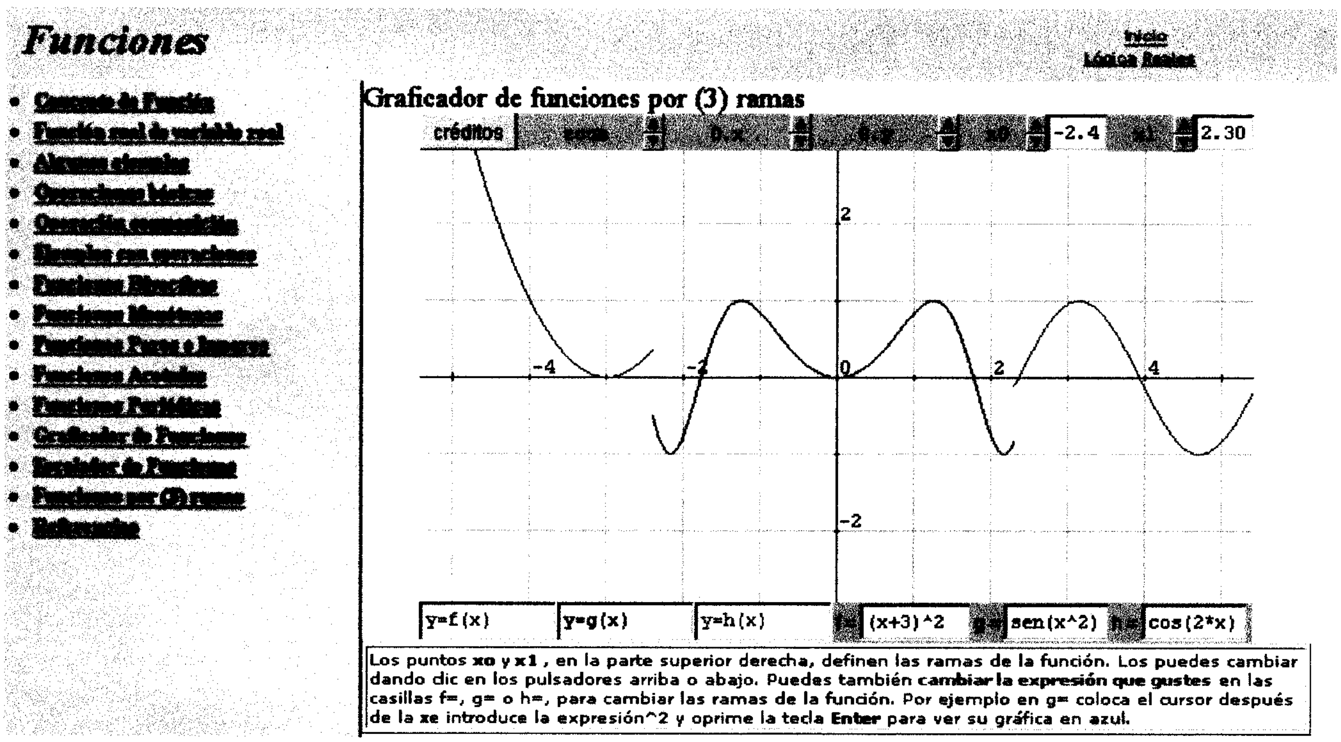
Se pueden cambiar la expresión de la función.



Un graficador de funciones por (3) ramas



Se pueden cambiar los valores de x0, x1 y las expresiones de las funciones



Referencias tanto bibliográficas, como de Internet.

Funciones

Inicio
Lógica Básica

- Concepto de Función
- Función real de variable real
- Algunos ejemplos
- Operaciones básicas
- Operación composición
- Ejemplos con operaciones
- Funciones Biyectivas
- Funciones Monótonas
- Funciones Pares e Impares
- Funciones Acotadas
- Funciones Periódicas
- Graficador de Funciones
- Resolutor de Funciones
- Funciones por (2) ramas
- Referencias

Referencias

En este apartado proporcionamos algunas referencias útiles para la creación de este tema de Funciones, tanto en material impreso como de Internet.

Bibliográficas

Calculus I Michael Spivak Editorial Reverté	Análisis Matemático I Haaser, LaSalle y Sullivan Editorial Trillas
Calculus I Tom M. Apostol Editorial Reverté	Calculus I Edwin Moise Editorial Addison Wesley

En Internet

Sitio de Key Curriculum Press
Innovators in Mathematics Education
(Creadores de The Geometer's Sketchpad)
http://www.keypress.com

Compendio temático de Matemáticas
http://mathworld.wolfram.com