



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

*“COMPORTAMIENTO TÉRMICO PARA CABLES
ACSR EN ESTADO PERMANENTE”*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTA:

OSCAR ARTURO CHÁVEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE



MÉXICO, D. F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1 Introducción

1.1 Generalidades.....	8
1.2 Antecedentes.....	11

2 Formulación matemática del modelo físico

2.1 Modelo físico.....	13
2.1.1 Cable ACSR 6/1 “Penguin”.....	14
2.1.2 Cable ACSR 26/7 “Drake”.....	15
2.1.3 Cable ACSR 84/19 “Bluebird”.....	16
2.2 Modelo matemático.....	17
2.2.1 Efecto de la porosidad.....	17
2.2.2 Calor generado por el efecto Joule.....	21
2.2.3 Ecuaciones de difusión de calor.....	22
2.2.4 Condiciones de frontera y condición inicial.....	22
2.3 Estimación de los órdenes de magnitud.....	24
2.3.1 Generalidades.....	24
2.3.2 Análisis de órdenes de magnitud.....	25
2.4 Ecuaciones adimensionales.....	26
2.4.1 Para el aluminio.....	26
2.4.2 Para el acero.....	27

3 Método de solución del problema

3.1 Generalidades.....	29
3.2 Método de diferencias finitas.....	29

3.2.1 Discretización de la ecuación de calor y condiciones de frontera.....	30
3.2.2 Discretización del dominio espacial.....	34
3.2.3 Reducción a ecuaciones algebraicas.....	36
3.2.4 Método de solución de las ecuaciones.....	39
3.3 Solución Analítica.....	41

4 Resultados y conclusiones

4.1 Validación del código numérico.....	45
4.2 Efecto del número de Biot en la distribución de temperaturas.....	48
4.3 Efecto de la porosidad.....	51
4.4 Conclusiones.....	52
Referencias.....	55

Resumen

El estudio del comportamiento térmico de los conductores eléctricos ACSR es gran importancia, debido a que a través de dichos cables se distribuye gran parte de la energía eléctrica generada. Por lo que el análisis térmico sirve para determinar la mayor cantidad de corriente eléctrica que es posible transportar sin afectar las propiedades mecánicas de los cables, y de esta forma aprovechar al máximo los cables ya instalados.

La corriente eléctrica que pasa a través de cualquier conductor eléctrico, se enfrenta a una resistencia del conductor a dicho flujo de corriente eléctrica, ocasionando que el conductor genere calor, a este hecho se le conoce como efecto Joule. El calor generado a causa del efecto Joule depende de la resistencia eléctrica y de las dimensiones del conductor, pero principalmente depende de la cantidad de corriente eléctrica que se hace pasar a través de él.

Una limitante muy importante para transportar una cierta cantidad de corriente eléctrica es la temperatura máxima de operación, y esta se establece como la temperatura máxima en la cual el conductor no sufre ningún cambio en sus propiedades mecánicas. La generación de calor ocasiona que el conductor eleve su temperatura, por lo que si se llegara a elevar la temperatura del conductor, por encima de la temperatura máxima de operación es posible que alcance la temperatura de recristalización, perdiendo de esta manera sus propiedades mecánicas.

El estudio de ampacidad consiste en determinar la cantidad máxima de corriente eléctrica que puede ser transportada a través de un conductor eléctrico. Para cada conductor no hay una corriente eléctrica máxima determinada, sino que la cantidad de corriente depende en gran medida de las condiciones ambientales, es decir, del régimen del flujo y de la temperatura ambiente.

En esta tesis se realizó un análisis del comportamiento térmico de tres conductores eléctricos tipo ACSR en estado permanente, con el fin de observar como se ven afectados los perfiles de temperatura debido a las condiciones climáticas y a la porosidad.

Los cables ACSR analizados son: 6/1 "Penguin", 26/7 "Drake" y 84/19 "Bluebird", los tres cables están constituidos de formas y tamaños muy diferentes, no obstante la porosidad en el aluminio es muy parecida en los tres casos y aunque la porosidad en el acero varía en gran medida, en el estado permanente no afectó en forma alguna.

El modelo matemático debía tomar en cuenta la transferencia de calor a través de un medio poroso, por lo que se tomó un modelo bajo la condición de equilibrio térmico local; es decir, supone que el sólido y el aire se encuentran a la misma temperatura.

Determinar la conductividad térmica equivalente fue la tarea principal de este modelo, por lo que se usó el modelo de capa de fase segregada, es decir considera una serie de capas concéntricas de material sólido y gaseoso intercaladas.

Para modelar la transferencia de calor tanto en el aluminio como en el acero, se requirió la ecuación de difusión de calor en estado permanente aplicada al acero sujeta a la condición de simetría en el centro, y al aluminio sujeta a la condición de transferencia de calor al ambiente en la superficie del conductor, y

dos condiciones de frontera en la interfase del acero y el aluminio, las cuales son la tasa de transferencia de calor del aluminio al acero y la condición de equilibrio térmico, es decir, se encuentran a la misma temperatura. Las ecuaciones de transferencia de calor con sus respectivas condiciones de frontera se deben aplicar a cada uno de los cables bajo estudio.

El modelo matemático resultante fue posible resolverlo tanto de forma analítica como de forma numérica, esto sirvió para poder validar el código numérico, por lo que el presente trabajo es el punto de partida para el estudio del comportamiento térmico de los cables ACSR en estado transitorio y el código numérico será extrapolado al estado transitorio.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

Los cables ACSR (aluminum conductor, steel reinforced) están conformados por un núcleo hecho de alambres de acero, y se encuentra cubierto por alambres de aluminio, la función principal del núcleo es la de proporcionar fuerza de tensión, mientras que la función principal de los alambres de aluminio es la de transportar prácticamente toda la corriente eléctrica.

Debido a las propiedades físicas que poseen los conductores tipo ACSR es posible obtener un cable con una gran fuerza de tensión sin disminuir considerablemente la conducción de la corriente eléctrica. Con el fin de obtener un cable que mejor se ajuste a las necesidades de la energía eléctrica requerida, existe una gran variedad de conductores tipo ACSR, estas se pueden dividir de

acuerdo con la relación entre el número de alambres de aluminio y el número de alambres de acero (n_{al}/n_{ac}).

Debido a que en los cables tipo ACSR se aprovechan las mejores propiedades físicas de cada material que lo conforman, es decir del acero se aprovecha la gran resistencia mecánica, mientras que del aluminio se aprovecha la baja resistencia eléctrica, por esta razón los cables tipo ACSR tienen un gran uso, ya que sirven principalmente en la distribución primaria y secundaria de la energía eléctrica.

El flujo de la corriente eléctrica trae consigo una generación de calor debido a la resistencia que proporciona el material a dicho flujo de corriente eléctrica, al calor generado se le conoce como efecto Joule. Como la función principal de los alambres de aluminio es la de transportar prácticamente toda la corriente eléctrica, el calor generado por el efecto Joule se da principalmente en el aluminio, lo que da origen a la transferencia de calor entre el aluminio y el acero, así como entre el aluminio y el ambiente.

La temperatura que alcanza el núcleo de acero es la única limitante en la cantidad de corriente eléctrica que puede transportarse en el conductor, ya que si el conductor sobrepasa su temperatura máxima de operación es posible que se presente el tratamiento térmico de recocido, el cual consiste en calentar al acero y enfriarlo lentamente, este tratamiento térmico se usa comúnmente para ablandar los aceros y cambiarles la estructura cristalina.

El estudio del comportamiento térmico de los conductores tipo ACSR es de gran importancia, debido a que si se conoce la respuesta térmica del conductor es posible determinar la cantidad de corriente eléctrica que se puede transportar sin sobrepasar su temperatura máxima de operación, a este estudio se le denomina *ampacidad* [1].

En la actualidad el estudio de la ampacidad es de gran importancia, debido a que resulta más costoso instalar nuevas líneas de transmisión, por lo que es preferible usar a su máxima capacidad los cables ya instalados sin afectar sus propiedades mecánicas.

La ampacidad del conductor depende principalmente de las condiciones climáticas, ya que si existe una buena tasa de transferencia de calor entre el conductor y el ambiente, el conductor no alcanza temperaturas elevadas, por lo que es posible transmitir una mayor cantidad de corriente eléctrica como lo muestra la figura 1.

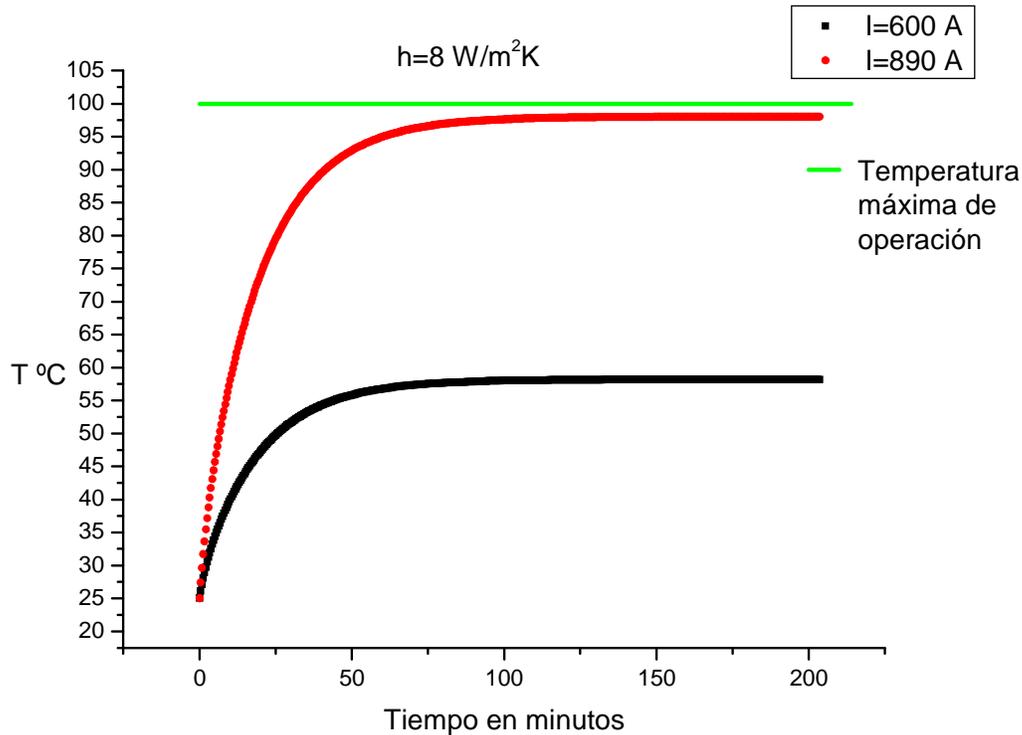


Figura 1. Comportamiento de la temperatura exterior de un cable ACSR DRAKE para distintas corrientes eléctricas.

En la figura anterior se observa que para una situación climática y régimen de flujo determinado, un conductor ACSR DRAKE transporta 600 amperes y alcanza una temperatura de alrededor de 60 °C, mientras que para una corriente

de 890 amperes alcanza una temperatura de 98°C, la cual no sobrepasa la temperatura máxima de operación, es decir en este caso fue posible transportar una corriente eléctrica casi 50% mayor.

1.2 Antecedentes

El estudio del comportamiento térmico de los cables ACSR inicialmente se llevó a cabo mediante sistemas que calculaban la temperatura del cable en tiempo real, dicho sistema incluía ecuaciones de transferencia de calor por convección forzada y natural, tomando en cuenta el régimen y dirección del viento. Los sistemas no contaban con representaciones matemáticas rigurosas, y las temperaturas calculadas eran generalmente superiores a las reales Davis [2] y [3], lo que impedía la completa utilización del conductor. Paralelamente se realizaron estudios sobre la pérdida de tensión debido al incremento de temperatura del conductor [4-6] y en base a estos experimentos realizados, una serie de relaciones empíricas han sido obtenidas para distintos tipos de conductores.

Posteriormente el objetivo principal era optimizar el proceso de traducir los datos meteorológicos y de corriente eléctrica en una temperatura en estado transitorio, en base a modelos térmicos simplificados, con el fin de poder determinar la ampacidad; es decir, la corriente eléctrica máxima que puede transportar el conductor sin sobrepasar la temperatura máxima permisible. Foss et al. [7-8] desarrollaron un algoritmo dinámico de ampacidad combinado con mediciones meteorológicas y del cable en tiempo real, mostrando el modelo de fase segregada en capas para determinar la conductividad térmica efectiva radial.

Con el fin de obtener una mejor aproximación a la temperatura real, los modelos son mejorados, Black et al [9] formularon un modelo térmico que no

considera que existan gradientes de temperatura, dicho modelo consiste en un balance de energía tanto en estado transitorio como en estado permanente.

Posteriormente se observó que los gradientes de temperatura en los cables trenzados son mucho mayores que los gradientes de temperatura de los cables sólidos, debido al aire atrapado entre los alambres que conforman al cable. Morgan [10] mostró la función de la distribución de temperaturas en estado permanente de cables monometálicos, sólidos y trenzados, con densidad de corriente uniforme. Además presentó un nuevo análisis para el cálculo de la conductividad térmica equivalente en conductores trenzados. Black et al. [11] hicieron una comparación de los gradientes de temperatura en estado permanente con los resultados obtenidos bajo la suposición de que la temperatura en el conductor es uniforme, mostrando que la temperatura en el centro del conductor es siempre superior a la temperatura calculada bajo la suposición de temperatura constante.

En la actualidad con el avance computacional, es posible obtener de manera sencilla la solución de las ecuaciones de transferencia de calor en estado transitorio, y de esta manera obtener los perfiles de temperatura en cualquier instante durante el estado transitorio. Miñambres et al 1999 [12] realizaron un modelo basado en la técnica de elemento finito para la transferencia de calor en un cable trenzado. Por lo que la tendencia actual es observar el efecto que tiene el calor generado en el aluminio sobre el acero durante el estado transitorio.

En la presente tesis se muestra el efecto que tienen las condiciones climáticas y la porosidad en la temperatura máxima que alcanza el conductor, así como el efecto que tienen sobre el perfil de temperaturas de los conductores ACSR.

Nomenclatura

Definición de símbolos

a	Radio del núcleo de acero, coeficiente de la ecuación discretizada del acero
b	Radio del conductor
Bi	Número de Biot
C	Constante de integración
c	Coefficiente de la ecuación discretizada del aluminio
d	Coefficiente de la ecuación discretizada del aluminio
h	Coefficiente convectivo
I	Corriente eléctrica
k	Conductividad térmica
L	Longitud del alambre
n	Número de alambres
ϕ	Porosidad
q	Calor generado
r	Dirección radial, radio de cada alambre
T	Temperatura
z	Dirección longitudinal

Griegos

β	Parámetro definido en la ecuación (25)
χ	Coordenada radial adimensional del aluminio
Δ	Diferencia
ε	Relación geométrica (a/b)
λ	Resistividad eléctrica
θ	Temperatura adimensional
ζ	Coordenada radial adimensional

Subíndices

<i>ac</i>	Referente al acero
<i>air</i>	Referente al aire
<i>al</i>	Referente al aluminio
<i>c</i>	Característico
<i>e</i>	Equivalente
<i>i</i>	Punto a estudiar en el aluminio
<i>j</i>	Punto a estudiar en el acero
<i>M</i>	Referente al último punto en el aluminio
<i>N</i>	Referente al último punto en el acero
0	Referente al primer punto a estudiar en ambos dominios
$\frac{6}{1}$	Referente al conductor ACSR 6/1 "Penguin"
$\frac{26}{7}$	Referente al conductor ACSR 26/7 "Drake"
$\frac{84}{19}$	Referente al conductor ACSR 84/19 "Bluebird"

Capítulo 2

Formulación matemática del modelo físico

2.1 Modelo físico

Existe una gran variedad de cables ACSR, la diferencia entre los tipos de cables depende de cómo están hechos; es decir, del número de alambres de aluminio y el número de alambres de acero, por ejemplo el cable 6/1 quiere decir que el conductor está formado por 6 alambres de aluminio y uno de acero. Entre los más importantes se encuentran los siguientes tipos de cables: 6/1, 18/1, 36/1, 12/7, 26/7, 45/7, 54/7, 54/19 y 84/19. Además de cada uno de estos tipos de cables se dividen de acuerdo a su diámetro, generalmente se identifican por una palabra clave.

Con la finalidad de observar el comportamiento térmico de los conductores eléctricos tipo ACSR, se seleccionaron los cables ACSR 6/1 "Penguin", ACSR 26/7 "Drake" y ACSR 84/19 "Bluebird". En las figuras 2, 3 y 4 la parte sombreada representa al núcleo de acero, mientras que la parte sin sombreada representa a los alambres de aluminio.

A continuación se presentan las características físicas de cada uno de los conductores mencionados en el párrafo anterior [13].

2.1.1 Cable ACSR 6/1 “Penguin”

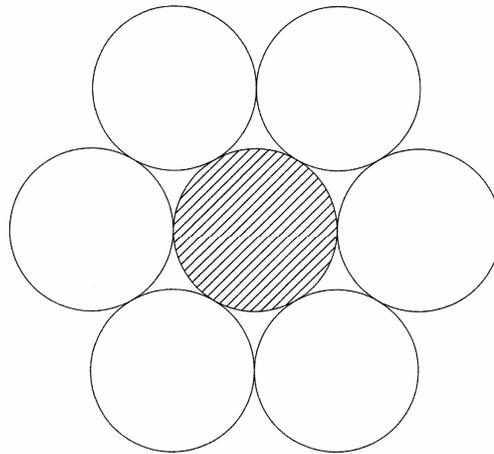


Figura 2. Representación del conductor ACSR 6/1 “Penguin”.

Número de alambres de acero del núcleo (n_{ac})	1
Número de alambres de aluminio (n_{al})	6
Radio del conductor (b)	0.007155 [m]
Radio del núcleo de acero (a)	0.002385 [m]
Radio de cada alambre de aluminio (r_{al})	0.002385 [m]
Radio de cada alambre de acero (r_{ac})	0.002385 [m]

Tabla 1. Características del conductor ACSR 6/1 Penguin.

2.1.2 Cable ACSR 26/7 “Drake”

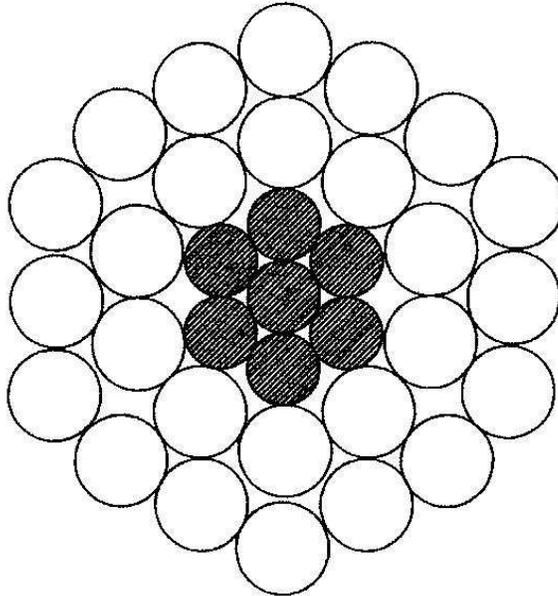


Figura 3. Representación del conductor ACSR 26/7 “Drake”.

Número de alambres de acero del núcleo (n_{ac})	7
Número de alambres de aluminio (n_{al})	26
Radio del conductor (b)	0.014072 [m]
Radio del núcleo de acero (a)	0.005182 [m]
Radio de cada alambre de aluminio (r_{al})	0.002223 [m]
Radio de cada alambre de acero (r_{ac})	0.001735 [m]

Tabla 2. Características del conductor ACSR 26/7 “Drake”

2.1.3 Cable ACSR 84/19 “Bluebird”

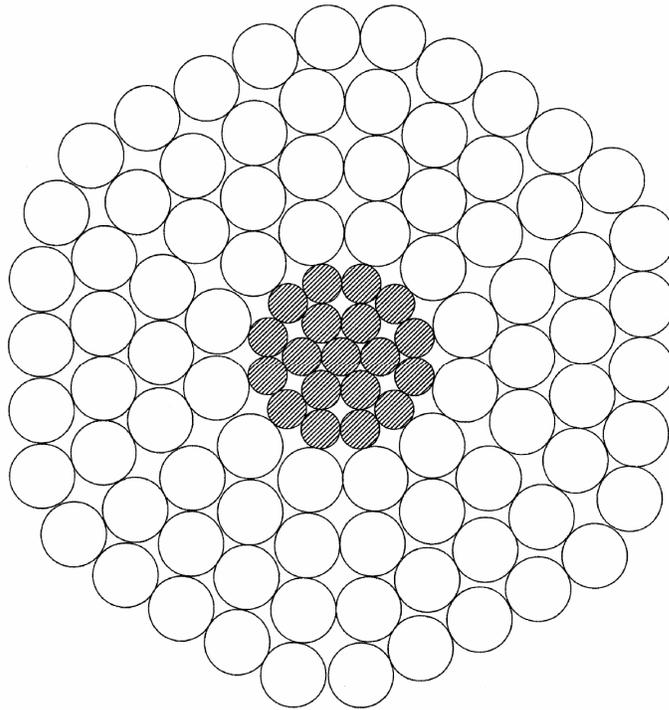


Figura 4. Representación del cable ACSR 84/19 “Bluebird”.

Número de alambres de acero del núcleo (n_{ac})	19
Número de alambres de aluminio (n_{al})	84
Radio del conductor (b)	0.02238 [m]
Radio del núcleo de acero (a)	0.0061 [m]
Radio de cada alambre de aluminio (r_{al})	0.0020345 [m]
Radio de cada alambre de acero (r_{ac})	0.0012205 [m]

Tabla 3. Características del conductor ACSR 84/19 “Bluebird”

2.2 Modelo matemático

El análisis matemático parte de la ecuación de difusión de calor aplicada tanto para el aluminio como para el acero, en cada cable que se esté analizando. Con el fin de simplificar dicho modelo es necesario hacer las siguientes simplificaciones:

- 1.- La temperatura del conductor está en función solamente de la dirección radial.
- 2.- Las conductividades térmicas de los materiales del conductor así como la del aire son constantes, además los alambres se encuentran en buen contacto térmico.
- 3.- Las resistencias eléctricas se consideran constantes.
- 4.- La distribución de corriente eléctrica se supone uniforme.
- 5.- Las ganancias de calor solo son por el efecto Joule.

El modelo matemático debe tener en cuenta que el proceso de transferencia de calor es a través de un medio poroso, como se observa en las figuras 2, 3 y 4 existe aire atrapado entre los alambres que conforman al conductor, por lo que es necesario conocer en que forma se ven afectadas las propiedades físicas del conductor por el aire atrapado en dichos cables.

2.2.1 Efecto de la porosidad

En el estudio de la transferencia de calor en medios porosos la tarea principal es encontrar la conductividad térmica equivalente, ya que la conductividad térmica del aire atrapado es muy baja por lo que el aire funciona

como un buen aislante térmico, es por esta razón que los conductores tipo ACSR tienen una conductividad térmica baja.

El primer paso es determinar que tan poroso es el cable, tanto en el acero como en el aluminio, es decir se quiere determinar la cantidad de aire atrapado entre los alambres que conforman al conductor, y se determina de la siguiente manera [10, 14-16]:

Para el acero.

$$\phi_{ac} = 1 - \frac{V_{ac}}{V_{T,ac}} \quad , \quad (1)$$

Donde el volumen V_{ac} representa al volumen ocupado por los alambres de acero, mientras que $V_{T,ac}$ representa al volumen total del núcleo de acero y quedan definidos de la siguiente manera:

$$V_{ac} = n_{ac} \times \pi \times r_{ac}^2 \times L \quad , \quad V_{T,ac} = \pi \times a^2 \times L \quad . \quad (2)$$

De igual forma para el aluminio,

$$\phi_{al} = 1 - \frac{V_{al}}{V_T} \quad , \quad (3)$$

donde V_{al} es el volumen ocupado por los alambres de aluminio y V_T es el volumen total que ocupa la cubierta de aluminio y se definen de la siguiente manera:

$$V_{al} = n_{al} \times \pi \times r_{al}^2 \times L \quad , \quad V_T = \pi \times (b^2 - a^2) \times L \quad . \quad (4)$$

Donde ϕ es la porosidad que hay en cada material y V es el volumen, con base a los datos proporcionados por las tablas 1, 2 y 3 es posible determinar la porosidad de cada uno de los conductores. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

Penguin

$$\phi_{ac,6/1} = 0.0$$

$$\phi_{al,6/1} = 0.2500001$$

Drake

$$\phi_{ac,26/7} = 0.2153026$$

$$\phi_{al,26/7} = 0.2493638$$

Bluebird

$$\phi_{ac,84/19} = 0.2393769$$

$$\phi_{al,84/19} = 0.2501052$$

Una vez que se ha obtenido el factor de porosidad es posible determinar la conductividad térmica equivalente. El modelo de fase segregada fue seleccionado para determinar la conductividad térmica equivalente, dicho modelo consiste en suponer que el material se encuentra distribuido en capas concéntricas de material sólido y aire [10, 14-16], y se determina de la siguiente manera:

$$k_{ac,e} = \frac{k_{ac} \cdot k_{air}}{\phi_{ac} k_{ac} + (1 - \phi_{ac}) k_{air}} \quad , \quad (5a)$$

$$k_{al,e} = \frac{k_{al} \cdot k_{air}}{\phi_{al} k_{al} + (1 - \phi_{al}) k_{air}} \quad . \quad (5b)$$

Con el fin de poder determinar los valores de la conductividad equivalente, se requiere el uso de los valores de la conductividad térmica del acero, aluminio y el aire, para este caso se usaron los valores mostrados en la referencia [17].

$$k_{ac} = 15.1 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right],$$

$$k_{al} = 237.0 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right],$$

$$k_{air} = 0.0263 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right].$$

Con ayuda del valor de la porosidad y las conductividades térmicas de los materiales que conforman al conductor, es posible determinar la conductividad térmica equivalente. En la siguiente tabla se muestran los valores de las conductividades térmicas equivalentes para los distintos casos de estudio.

	Penguin	Drake	Bluebird
$k_{ac,e} \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$	15.1	0.1213831	0.1092639
$k_{al,e} \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$	0.105165	0.1054332	0.1051208

Tabla 4. Valores de la conductividades térmicas equivalentes.

2.2.2 Calor generado por el efecto Joule

El calor generado por unidad de volumen en el acero así como en el aluminio debido al efecto Joule se determina de la siguiente manera:

$$\dot{q}_{ac} = \frac{\lambda_{ac} I_{ac}^2}{\pi^2 n_{ac} r_{ac}^2 a^2}, \quad (8)$$

$$\dot{q}_{al} = \frac{\lambda_{al} I_{al}^2}{\pi^2 n_{al} r_{al}^2 (b^2 - a^2)}. \quad (9)$$

donde las corrientes eléctricas que fluyen a través del acero y el aluminio dependen directamente de sus resistividades eléctricas y de las dimensiones del núcleo de acero y del recubrimiento de aluminio, como se muestra a continuación:

$$I_{ac} = \frac{\lambda_{al} I_T}{\lambda_{al} + \lambda_{ac} \left(\frac{(b^2 - a^2)}{a^2} \right)}, \quad (10)$$

$$I_{al} = \frac{\lambda_{ac} I_T}{\lambda_{ac} + \lambda_{al} \left(\frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \right)}, \quad (11)$$

donde I corresponde a la corriente eléctrica, mientras λ es la resistividad eléctrica y sus valores fueron tomados de la referencia [18] y son los siguientes:

$$\lambda_{al} = 2.63 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m],$$

$$\lambda_{ac} = 20 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m].$$

2.2.3 Ecuaciones de difusión de calor

Bajo las consideraciones mencionadas anteriormente se obtienen las ecuaciones de difusión de calor en estado permanente para el aluminio y el acero.

Ecuación de conducción de calor en el aluminio en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{k_{al,e}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_{al}}{dr} \right) + \dot{q}_{al} = 0. \quad (12)$$

Ecuación de conducción de calor en el acero en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{k_{ac,e}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_{ac}}{dr} \right) + \dot{q}_{ac} = 0. \quad (13)$$

2.2.4 Condiciones de frontera

La distribución de temperaturas se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones sujeto a las siguientes condiciones de frontera.

En el centro del conductor existe simetría en la distribución de temperaturas, debido a que se considera que no hay gradiente de temperaturas en la dirección angular.

$$r = 0: \quad \left. \frac{dT_{ac}}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (14)$$

Las condiciones de frontera en la interfase tienen una gran importancia, ya que dichas condiciones de frontera dan la información de la tasa de transferencia de calor del aluminio al acero, además por que el acero y el aluminio tienen buen contacto la temperatura en la interfase debe ser la misma. Estas condiciones de frontera acoplan la ecuación de difusión de calor del aluminio y del acero, por lo que se tienen que resolver simultáneamente.

$$r = a : \quad T_{al} = T_{ac}, \quad -k_{al,e} \left. \frac{dT_{al}}{dr} \right|_{r=a} = -k_{ac,e} \left. \frac{dT_{ac}}{dr} \right|_{r=a} \quad (15)$$

La condición de frontera en el exterior del conductor depende directamente de las condiciones atmosféricas como la velocidad del viento y su temperatura, ya que nos dice la tasa de transferencia de calor del conductor al ambiente.

$$r = b : \quad -k_{al,e} \left. \frac{dT_{al}}{dr} \right|_{r=b} = h(T_{al} - T_i) \quad (16)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales con las condiciones de frontera se deberán aplicar a cada uno de los conductores eléctricos que se encuentran bajo análisis, modificando para cada caso la conductividad eléctrica equivalente, así como el calor generado.

El modelo matemático resultante de la transferencia de calor a través de un medio poroso es equivalente a considerar al medio poroso como un sólido pero con las propiedades afectadas debido al aire atrapado entre los alambres. Por lo que el conductor a modelar se muestra en la siguiente figura.

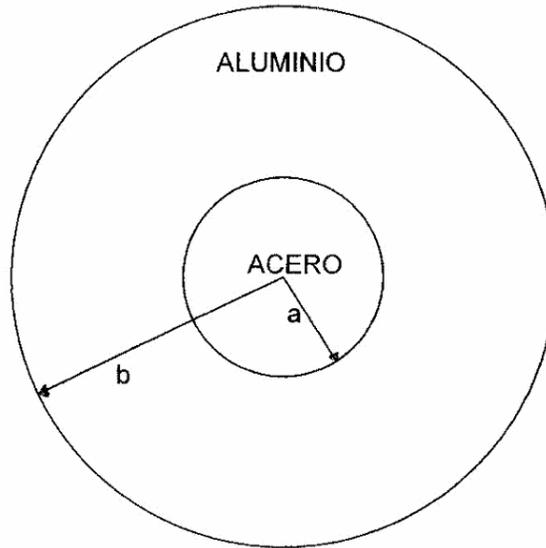


Figura 5. Representación del conductor equivalente.

2.3 Estimación de los órdenes de magnitud

En esta sección, se analizarán los órdenes de magnitud del proceso de transferencia de calor, con el fin de obtener parámetros adimensionales que relacionen las propiedades físicas del fenómeno.

2.3.1 Generalidades

En los problemas de transferencia de calor existen una gran cantidad de variables y propiedades físicas involucradas, que dan como resultado la posibilidad de obtener una amplia gama de soluciones. Por lo anterior es recomendable que antes de resolver las ecuaciones que modelan un problema físico, se realice un análisis de órdenes de magnitud con el fin de obtener parámetros adimensionales. El objetivo de introducir los parámetros adimensionales, es debido a que ellos engloban un conjunto de dichas variables y propiedades físicas, y de esta manera es posible hacer un comparativo de los términos dominantes de la ecuación, así como para englobar una gran multiplicidad de soluciones.

2.3.2 Análisis de órdenes de magnitud

La escala espacial correspondiente al núcleo acero en este proceso de transferencia de calor corresponde directamente al radio del núcleo; entonces $r_{ac} \sim a$, mientras que la escala espacial correspondiente al aluminio es el espesor del conductor de aluminio que recubre al núcleo de acero, por lo tanto $r_{al} \sim b - a$.

El aumento característico de temperatura ΔT_c del sistema, se obtiene fácilmente mediante un balance de energía entre el término de generación interna de calor y el término difusivo, pero además para escalar correctamente el incremento de temperatura característico es necesario involucrar al número de Biot, por lo que el orden de magnitud del incremento de temperatura característico ΔT_c queda de la siguiente manera:

$$\Delta T_c \sim \frac{\dot{q}_{al}(b-a)^2}{k_{al,e}Bi}, \quad (17)$$

donde Bi es el número de Biot, que en este caso queda definido para el fenómeno a estudiar como:

$$Bi = \frac{h(b-a)}{k_{al,e}}. \quad (18)$$

Se observa que el incremento de temperatura crítico ΔT_c queda escalado primordialmente por el número de Biot, ya que si el número de Biot es pequeño, el incremento de temperatura es muy alto, lo que quiere decir que la transferencia de calor al ambiente puede ser muy deficiente, y por lo tanto el conductor se calienta más, que en comparación con un número de Biot grande, que significa una buena tasa de transferencia de calor entre el conductor y el ambiente, por lo tanto un menor incremento de temperatura.

2.4 Ecuaciones adimensionales

En esta sección se obtendrá el sistema de ecuaciones adimensionales que describen el fenómeno de transferencia de calor a estudiar; para tal efecto es necesario definir una serie de valores adimensionales, con el uso de las escalas físicas y geométricas obtenidas en la sección anterior, además se define un parámetro que da la relación del radio del acero con el del aluminio.

$$\varepsilon = \frac{a}{b} . \quad (19)$$

2.4.1 Para el aluminio

La ecuación de difusión de calor en el aluminio puede adimensionalizarse sustituyendo las siguientes variables adimensionales:

$$\theta_{al,ac} = \frac{T_{al,ac} - T_i}{\Delta T_c} , \quad (20)$$

$$\chi = \frac{r - a}{b - a} . \quad (21)$$

En las expresiones anteriores ΔT_c es el aumento de temperatura característico definido en la relación (17). Sustituyendo las variables anteriores en la ecuación de difusión de calor del aluminio (12), se obtiene la ecuación de difusión de calor en forma adimensional,

$$\frac{1}{\chi + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}} \frac{d}{d\chi} \left(\chi + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \frac{d\theta_{al}}{d\chi} + Bi = 0 . \quad (22)$$

2.4.2 Para el acero

La ecuación de difusión de calor en el acero puede adimensionalizarse introduciendo la variable adimensional (20) y la variable adimensional,

$$\zeta = \frac{r}{a}. \quad (23)$$

Sustituyendo las variables adimensionales en la ecuación de difusión de calor del acero (13), se obtiene la ecuación de forma adimensional,

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \zeta \frac{d\theta_{ac}}{d\zeta} + \beta \cdot Bi = 0, \quad (24)$$

donde el parámetro β queda definido de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{k_{al,e} \dot{q}_{ac}}{k_{ac,e} \dot{q}_{al}} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2. \quad (25)$$

Haciendo uso de los valores correspondientes para cada conductor el parámetro β adopta los siguientes valores:

Cable	β
Penguin	0.000171720
Drake	0.037124731
Bluebird	0.01751134

Tabla 5. Valor del parámetro β para los distintos tipos de cables.

Como se observa en la tabla 5 el parámetro β es del orden $O(10^{-2})$, es decir es dos órdenes de magnitud menor en comparación con el termino de

generación de calor en la ecuación correspondiente al aluminio, por lo se puede despreciar el termino de generación de calor en el acero y la ecuación (24) queda de la siguiente manera.

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \zeta \frac{d\theta_{ac}}{d\zeta} = 0. \quad (27)$$

El sistema resultante de ecuaciones a resolver son las ecuaciones (22) y (27) con las siguientes condiciones de frontera:

$$\zeta = 0: \quad \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad (28)$$

$$\zeta - 1 = \chi = 0: \quad \left. \frac{k_{ac,e} (1 - \varepsilon)}{k_{al,e}} \frac{d\theta_{ac}}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = \left. \frac{d\theta_{al}}{d\chi} \right|_{\chi=0} \quad \text{y} \quad \theta_{ac} = \theta_{al}, \quad (29)$$

$$\chi = 1: \quad \left. \frac{d\theta_{al}}{d\chi} \right|_{\chi=1} = -Bi\theta_{al}. \quad (30)$$

Capítulo 3

Método de solución del problema

3.1 Generalidades

Las ecuaciones que gobiernan al fenómeno físico bajo estudio tienen solución analítica, por lo que en la presente tesis se obtendrá la solución analítica y además la solución numérica con el fin de comparar ambos resultados para validar el código numérico.

El código numérico para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales es mediante el método de “diferencias finitas”, ya que es un método fácil de utilizar, además de que es capaz de resolver ecuaciones lineales y no lineales, y puede ser extendida a problemas de dos o tres dimensiones, así como transitorios.

3.2 Método de diferencias finitas

Con el aumento de capacidad computacional y velocidad de procesos, el interés en los métodos numéricos ha aumentado considerablemente, para resolver problemas gobernados por ecuaciones diferenciales. Por lo que la solución de problemas de ingeniería puede ahora obtenerse con ayuda de computadoras en un tiempo muy corto y a muy bajo costo.

El primer paso para aplicar el método de diferencias finitas es discretizar la ecuación de difusión y las condiciones de frontera, posteriormente se tiene que discretizar el dominio espacial, para después transformar la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y finalmente se selecciona el método de solución del sistema de ecuaciones, ya sea iterativo o exacto, dependiendo de la capacidad computacional.

3.2.1 Discretización de la ecuación de difusión y las condiciones de frontera

Para discretizar una ecuación diferencial es necesario conocer primero la representación de las derivadas en diferencias finitas. A continuación se muestra la representación de las primeras derivadas en diferencias finitas [19-20]:

Representación de la primera derivada hacia adelante, es decir se ocupa un punto posterior y el punto de análisis, generando un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} = \frac{\theta_{al,i+1} - \theta_{al,i}}{\Delta\chi} + O(\Delta\chi), \quad (31a)$$

Acero:

$$\frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} = \frac{\theta_{ac,j+1} - \theta_{ac,j}}{\Delta\zeta} + O(\Delta\zeta). \quad (31b)$$

Representación de la primera derivada hacia atrás, se le llama así porque se ocupa un punto anterior y el punto de análisis, generando un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} = \frac{\theta_{al,i} - \theta_{al,i-1}}{\Delta\chi} + O(\Delta\chi), \quad (32a)$$

Acero:

$$\frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} = \frac{\theta_{ac,j} - \theta_{ac,j-1}}{\Delta\zeta} + O(\Delta\zeta). \quad (32b)$$

Cuando se ocupa un punto posterior y un punto anterior al punto de análisis se le llama representación central y genera un error de orden $\Delta\chi^2$ y $\Delta\zeta^2$.

Aluminio:

$$\frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} = \frac{\theta_{al,i+1} - \theta_{al,i-1}}{2 \cdot \Delta\chi} + O(\Delta\chi^2), \quad (33a)$$

Acero:

$$\frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} = \frac{\theta_{ac,j+1} - \theta_{ac,j-1}}{2 \cdot \Delta\zeta} + O(\Delta\zeta^2). \quad (33b)$$

La representación de las segundas derivadas en diferencias finitas queda de la siguiente manera:

Hacia delante: en este caso se usa el punto de análisis y dos puntos posteriores, generando un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial^2 \theta_{al}}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{al,i} - 2\theta_{al,i+1} + \theta_{al,i+2}}{(\Delta\chi)^2} + O(\Delta\chi), \quad (34a)$$

Acero:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ac}}{\partial \zeta^2} = \frac{\theta_{ac,j} - 2\theta_{ac,j+1} + \theta_{ac,j+2}}{(\Delta\zeta)^2} + O(\Delta\zeta). \quad (34b)$$

Hacia atrás: es decir se usa el punto de análisis y dos puntos anteriores y genera un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial^2 \theta_{al}}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{al,i-2} - 2\theta_{al,i-1} + \theta_{al,i}}{(\Delta\chi)^2} + O(\Delta\chi), \quad (35a)$$

Acero:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ac}}{\partial \zeta^2} = \frac{\theta_{ac,j-2} - 2\theta_{ac,j-1} + \theta_{ac,j}}{(\Delta\zeta)^2} + O(\Delta\zeta). \quad (35b)$$

En la representación central se usa el punto de análisis, un punto anterior y un punto posterior, dando un error de orden $\Delta\chi^2$ y $\Delta\zeta^2$.

Aluminio:

$$\frac{\partial^2 \theta_{al}}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{al,i-1} - 2\theta_{al,i} + \theta_{al,i+1}}{(\Delta\chi)^2} + O(\Delta\chi^2), \quad (36a)$$

Acero:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ac}}{\partial \zeta^2} = \frac{\theta_{ac,j-1} - 2\theta_{ac,j} + \theta_{ac,j+1}}{(\Delta\zeta)^2} + O(\Delta\zeta^2). \quad (36b)$$

De las discretizaciones anteriores es posible observar que se obtiene un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$ en las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás, mientras que en las aproximaciones centrales el error se reduce en forma cuadrática. Por lo que en el presente trabajo se tomarán las aproximaciones centrales debido a su mayor exactitud.

El dominio de las variables χ y ζ es de cero a uno y quedan definidas de la siguiente forma.

$$\chi = i \cdot \Delta\chi$$

$$\zeta = j \cdot \Delta\zeta$$

3.2.2 Discretización del dominio espacial

Una vez discretizadas las ecuaciones y condiciones de frontera es necesario definir como se discretizará el dominio; es decir, definir las magnitudes de $\Delta\zeta$, $\Delta\chi$; en las discretizaciones espaciales, entre más divisiones se hagan en el dominio, el error en la aproximación disminuye en proporción cuadrática. A continuación se muestra una representación de la forma en que se realizó la discretización del cable mostrado en la figura 5.

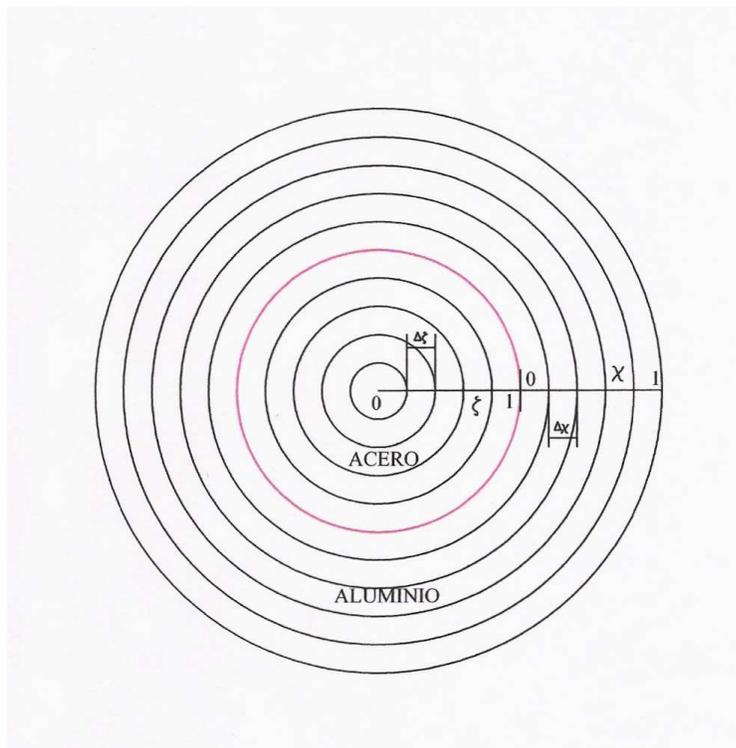


Figura 6. Representación de la discretización espacial del cable equivalente.

Debido a que no existe gradiente de temperatura en la dirección angular la discretización del dominio queda en forma de círculos concéntricos, y entre mayor sea el número de divisiones, $\Delta\zeta$ y $\Delta\chi$ son de menor longitud y por lo tanto generan un menor error.

Haciendo un balance para que $\Delta\zeta$ fuera lo suficientemente pequeño con el fin de que el error sea despreciable y además no requiera grandes recursos

computacionales. Se determinó discretizar el dominio del acero en cien celdas, Por lo que la magnitud de $\Delta\zeta$ es 0.01, como lo muestra la figura 7.

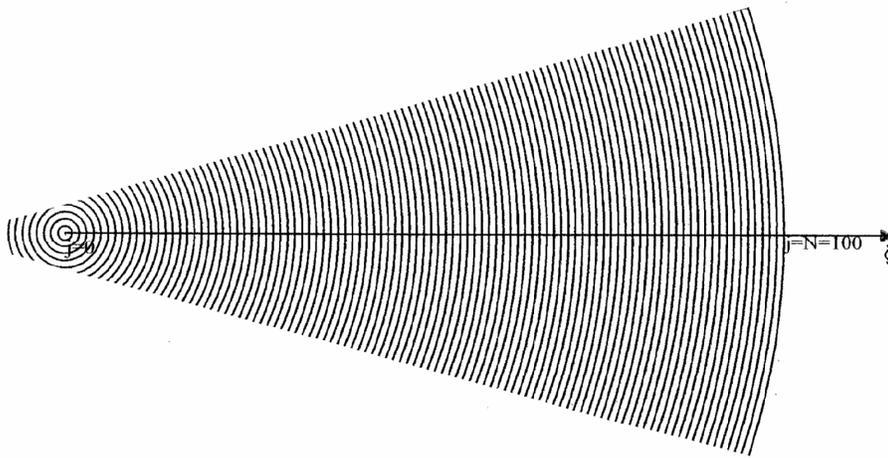


Figura 7. Discretización del núcleo de acero.

De la misma forma se determinó que el dominio del aluminio se dividiera en cien celdas como se muestra en la figura 8. Y la magnitud de $\Delta\chi$ es también 0.01.

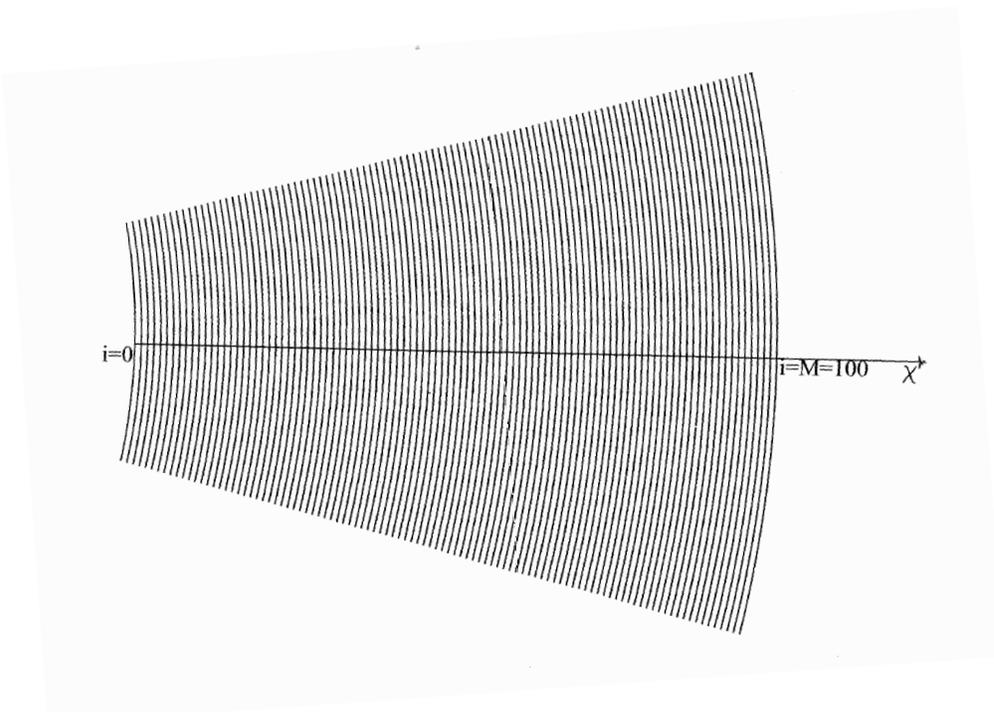


Figura 8. Discretización del aluminio.

3.2.3 Reducción a ecuaciones algebraicas

El siguiente paso es reacomodar los términos de las ecuaciones discretizadas de tal modo que queden ordenadas de la siguiente forma.

$$c_{i,i-1}\theta_{i-1} + c_{i,i}\theta_i + c_{i,i+1}\theta_{i+1} = d_i, \quad (37)$$

Por lo que la ecuación (22) queda como se muestra a continuación

$$\left(1 - \frac{1}{2\left(i + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi}\right)}\right)\theta_{i-1} - 2\theta_i + \left(1 + \frac{1}{2\left(i + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi}\right)}\right)\theta_{i+1} = -Bi(\Delta\chi)^2. \quad (38)$$

De la misma forma se reagrupa la ecuación (27), con en fin que tenga la siguiente forma

$$a_{j,j-1}\theta_{j-1} + a_{j,j}\theta_j + a_{j,j+1}\theta_{j+1} = 0. \quad (39)$$

Por lo que queda reagrupada como se muestra a continuación

$$\left(1 - \frac{1}{2j}\right)\theta_{j-1} - 2\theta_j + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)\theta_{j+1} = 0. \quad (40)$$

A continuación se muestra la discretización de las condiciones de frontera:

La discretización en el centro queda de la siguiente manera:

$$j = 0: \quad -2\theta_0 + 2\theta_1 = 0 \quad (41)$$

Se observa que la condición de frontera en el centro tiene la siguiente forma:

$$a_{0,0}\theta_0 + a_{0,1}\theta_1 = 0$$

Representación en diferencias finitas del acoplamiento:

$$j = N, i = 0:$$

$$2\theta_{N-1} + \left[-2 - \left(1 - \frac{1}{2N} \right) \frac{2\Delta\zeta}{\Delta\chi} \frac{k_{al,e}}{k_{ac,e}} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right] \theta_N + \left(1 - \frac{1}{2N} \right) \frac{2\Delta\zeta}{\Delta\chi} \frac{k_{al,e}}{k_{ac,e}} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \theta_{N+1} = 0 \quad (42)$$

Y la ecuación del acoplamiento tiene la siguiente forma

$$a_{N,N-1}\theta_{N-1} + a_{N,N}\theta_{N,0} + a_{N,N+1}\theta_1 = 0$$

Representación en diferencias finitas del exterior:

$$i = M:$$

$$2\theta_{M-1} - 2\theta_M = \frac{Bi(\Delta\chi)^2}{2 \left(M + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \quad (43)$$

A continuación se muestra la forma que tiene la ecuación de la condición de frontera al exterior

$$c_{M,M-1}\theta_{M-1} + c_{M,M}\theta_M = d_M$$

A continuación se acomodan los términos de las ecuaciones en matrices con el fin de representar el sistema de ecuaciones de la siguiente forma matricial.

$$[A][\theta] = [B].$$

Colocando respectivamente los coeficientes en la matriz A se obtiene una matriz tridiagonal.

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} & a_{N,N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{M-2,M-3} & c_{M-2,M-2} & c_{M-2,M-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{M-1,M-2} & c_{M-1,M-1} & c_{M-1,M} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{M,M-1} & c_{MM}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \theta_0^{n+1} \\
 \theta_1^{n+1} \\
 \theta_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \theta_{N,0}^{n+1} \\
 \theta_1^{n+1} \\
 \vdots \\
 \theta_{M-2}^{n+1} \\
 \theta_{M-1}^{n+1} \\
 \theta_M^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =$$

$$=
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 -Bi(\Delta\chi)^2 \\
 \vdots \\
 -Bi(\Delta\chi)^2 \\
 -Bi(\Delta\chi)^2 \\
 Bi(\Delta\chi)^2 \\
 \hline
 2\left(M + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi}\right)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 d_1 \\
 \vdots \\
 d_{M-2} \\
 d_{M-1} \\
 d_M
 \end{bmatrix}
 \cdot$$

De esta forma la ecuación diferencial queda representada por un sistema algebraico de ecuaciones lineales, en éste caso como se decidió dividir el dominio del acero y el aluminio en cien partes cada uno, el sistema resultante es un sistema de doscientas una ecuaciones con doscientas una incógnitas, que deberán resolverse para cada cable a distintos números de Biot.

3.2.4 Método de solución de las ecuaciones

Hasta ahora el fenómeno físico gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera está ahora transformado a un sistema de ecuaciones algebraicas. Los métodos para resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas pueden clasificarse en dos categorías:

1.- Métodos directos: son los métodos en los cuales un número finito de operaciones están involucrados en la solución.

2.- Métodos iterativos: son los métodos en los cuales la solución se vuelve progresivamente más exacta conforme el número de iteraciones es incrementado hasta que el criterio de convergencia se satisface.

La selección apropiada del método para resolver el sistema de ecuaciones depende principalmente del número de ecuaciones, por lo que en este trabajo se determinó usar un método directo, mas específicamente se usó el algoritmo de Thomas [19].

El algoritmo de Thomas, es básicamente el método de eliminación de Gauss, sólo que aprovecha la gran cantidad de ceros que hay en la matriz tridiagonal [A] y el método consiste en transformar la matriz tridiagonal en una matriz bidiagonal por medio del siguiente cambio:

Reemplazar “ $a_{j,j}$ ” por $\left(a_{j,j} - \frac{a_{j,j-1} \cdot a_{j-1,j}}{a_{j-1,j-1}} \right)$ para $j=1, 2, 3, \dots, N$

Reemplazar “ $c_{i,i}$ ” por $\left(c_{i,i} - \frac{c_{i,i-1} \cdot c_{i-1,i}}{c_{i-1,i-1}} \right)$ para $i=1, 2, 3, \dots, M$

Además es necesario modificar el vector [B] de la siguiente manera.

Reemplazar “ b_j ” por $\left(b_j - \frac{a_{j,j-1} b_{j-1}}{a_{j-1,j-1}} \right)$ para $j=1, 2, 3, \dots, N$,

Reemplazar “ d_i ” por $\left(d_i - \frac{a_{i,i-1} d_{i-1}}{a_{i-1,i-1}} \right)$ para $i=1, 2, 3, \dots, M$.

Una vez que la matriz está transformada, en el último renglón queda solo un término, de tal manera que es posible determinar el valor de θ_M como se muestra a continuación:

$$\theta_M = \frac{d_M}{c_{i,i}} .$$

Con el valor de θ_M es posible determinar el valor anterior θ_{M-1} haciendo una sustitución hacia atrás hasta llegar a θ_0 mediante la siguiente expresión:

$$\theta_i = \frac{d_i - c_{i,i+1} \theta_{i+1}}{c_{i,i}} \quad i=M-1, M-2, \dots, 1, 0.$$

$$\theta_j = \frac{b_j - a_{j,j+1} \theta_{j+1}}{a_{j,j}} \quad j=N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

3.3 Solución analítica

La solución analítica de la ec. (22) es la siguiente:

$$\theta_{al}(\chi) = \frac{-Bi}{4} \left[\chi^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \chi - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(\chi + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) + C_1 \ln \left(\chi + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right] + C_2. \quad (44)$$

La solución analítica de la ec. (27) es la siguiente:

$$\theta_{ac}(\zeta) = C_3 \ln(\zeta) + C_4. \quad (45)$$

Con ayuda de las condiciones de frontera es posible determinar las cuatro constantes de integración, como se muestra a continuación:

Con la ecuación de frontera (28) se tiene lo siguiente:

$$\left. \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \left. \frac{C_3}{\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0. \quad (46)$$

Por lo que $C_3 = 0$. Esto quiere decir que la distribución de la temperatura adimensional en el acero es constante.

Por lo que con ayuda de la primer ecuación de frontera (29) se determina que $C_1 = 0$. Y con la condicion de frontera (30) se determina lo siguiente:

$$C_2 = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + 1} + \frac{Bi}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right]. \quad (47)$$

Finalmente la constante C_4 se obtiene con la ayuda de la segunda ecuación de frontera (29) y su valor es el siguiente:

$$C_4 = -\frac{Bi}{4} \left[\chi^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \chi - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(\chi + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right] + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + 1} + \frac{Bi}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right] \quad (48)$$

Una vez que los valores de las constantes de integración han sido obtenidos se obtiene la solución analítica para ambos materiales que conforman al conductor.

Solución analítica del aluminio:

$$\theta_{al}(\chi) = -\frac{Bi}{4} \left[\chi^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \chi - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(\chi + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right] + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + 1} + \frac{Bi}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right] \quad (49)$$

Para $0 \leq \chi \leq 1$

Solución analítica del acero:

$$\theta_{ac}(\zeta) = \frac{Bi}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right] + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + 1} \quad (50)$$

Para $0 \leq \zeta \leq 1$

Las soluciones (46) y (47) se deberán aplicar para cada uno de los conductores bajo estudio, teniendo en cuenta que el parámetro de forma cambia para cada cable estudiado.

Cable	$\varepsilon(a/b)$
Penguin	0.33333
Drake	0.3682490
Bluebird	0.2725648

Tabla 6. Valor del parámetro de forma ε para los distintos cables.

Capítulo 4

Resultados y conclusiones

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos para el problema de transferencia de calor en los conductores tipo ACSR en estado permanente, se muestra la comparación de los resultados numéricos con los resultados analíticos, con el fin de validar el código numérico. Además se analizara el efecto que tiene el número de Biot en los perfiles de temperatura. Finalmente se observara el efecto que tiene la porosidad en la distribución de la temperatura.

4.1 Validación del código numérico

A continuación se muestra la comparación de las soluciones analítica y numérica, con la finalidad de validar el código numérico. En las figuras 9, 10 y 11 se hace la comparación de la solución analítica y la solución numérica de los tres cables con distintos números de Biot.

La siguiente figura muestra la distribución de temperaturas adimensionales analíticas y numéricas para el cable ACSR 6/1 con un número de Biot $Bi=0.5$.

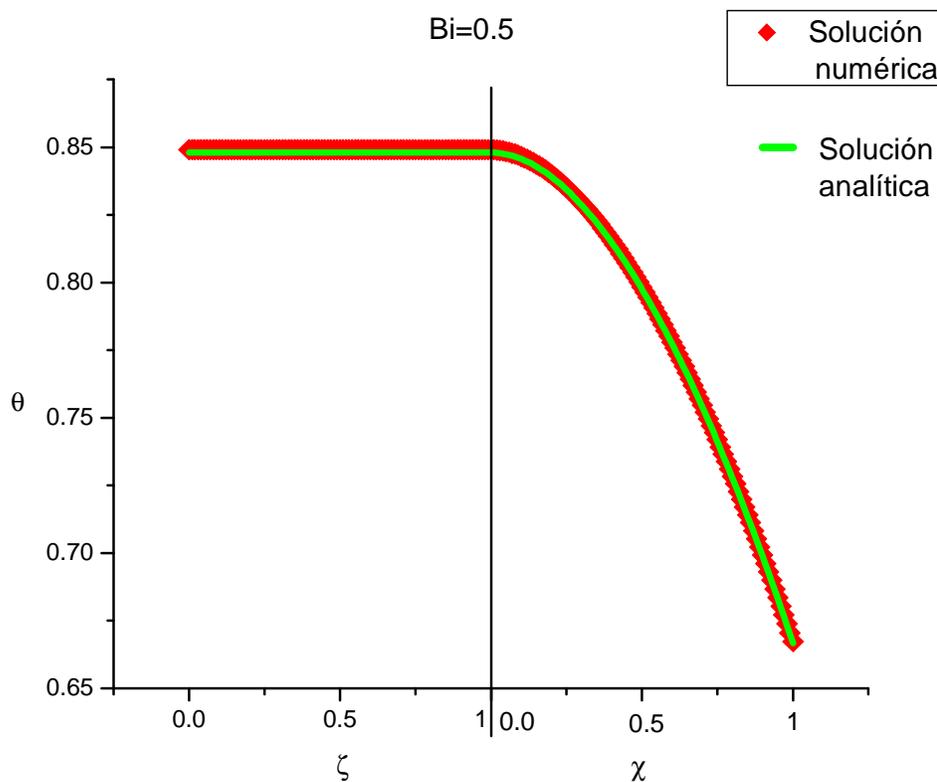


Figura 9. Comparación de la solución analítica y numérica para el cable ACSR 6/1 con un número $Bi=0.5$.

A continuación se muestra la distribución de temperaturas adimensionales para el cable ACSR 26/7

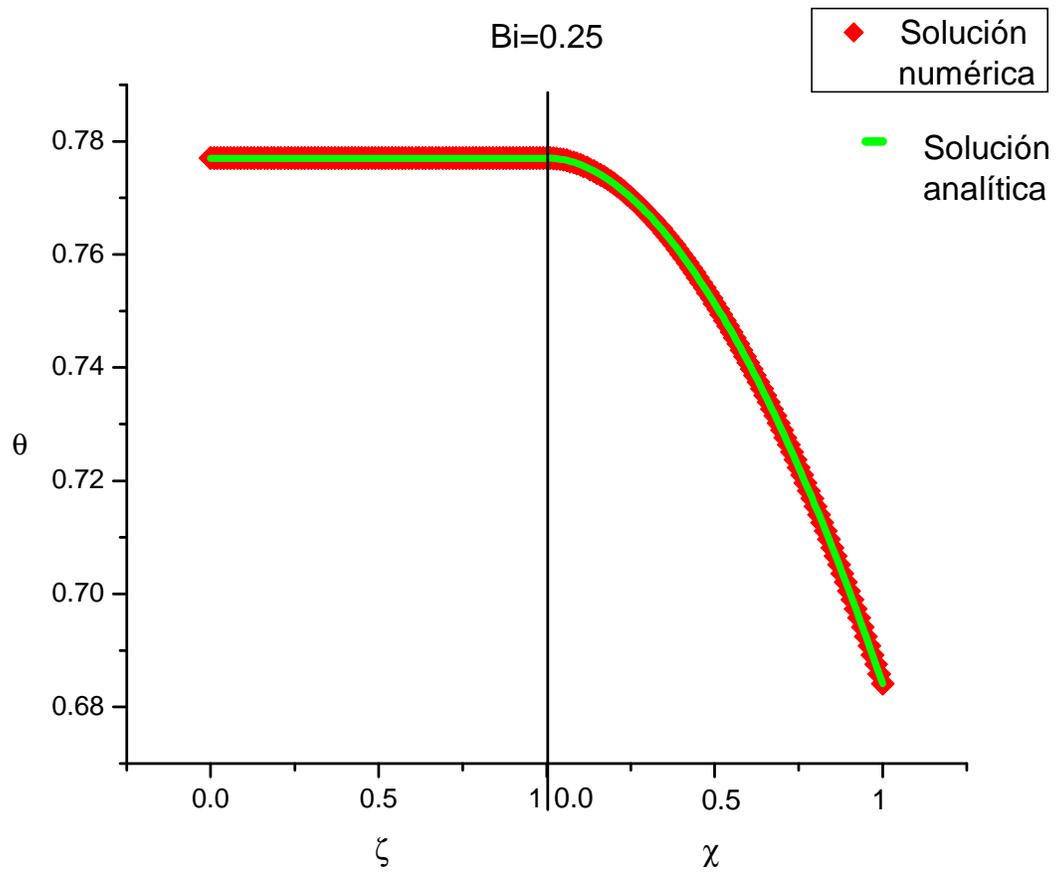


Figura 10. Comparación de la solución analítica y numérica para el cable ACSR 26/7 con un número $Bi=0.25$.

La siguiente figura muestra la distribución de temperaturas adimensionales para el cable ACSR 84/19

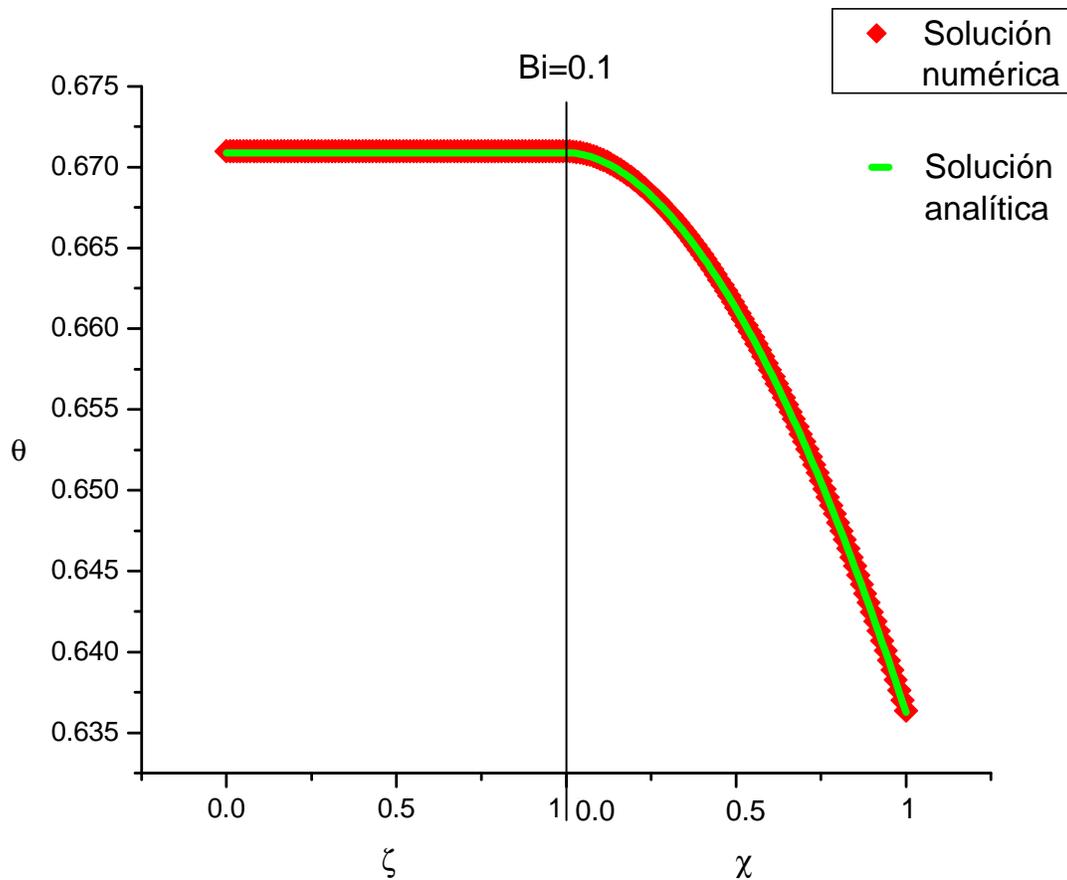


Figura 11. Comparación de la solución analítica y numérica para el cable ACSR 84/19 con un número $Bi=0.1$.

En las figuras 9, 10 y 11 se observa que la solución numérica se ajusta en gran medida a la solución analítica generando un error de alrededor de 0.12%, por lo que queda validado el código numérico.

4.2 Efecto del número de Biot en la distribución de temperaturas

Una vez que el código numérico ha sido validado, es posible usarlo con el fin de observar el comportamiento de los perfiles de temperaturas adimensionales con respecto al número de Biot.

A continuación se presenta el comportamiento térmico de los tres cables en estudio, bajo cinco números de Biot, $Bi=0.1$, $Bi=0.2$, $Bi=0.3$, $Bi=0.4$ y $Bi=0.5$, con el fin de observar el efecto de las condiciones climáticas tanto en el perfil de temperaturas adimensionales, así como en la temperatura máxima que alcanza el conductor.

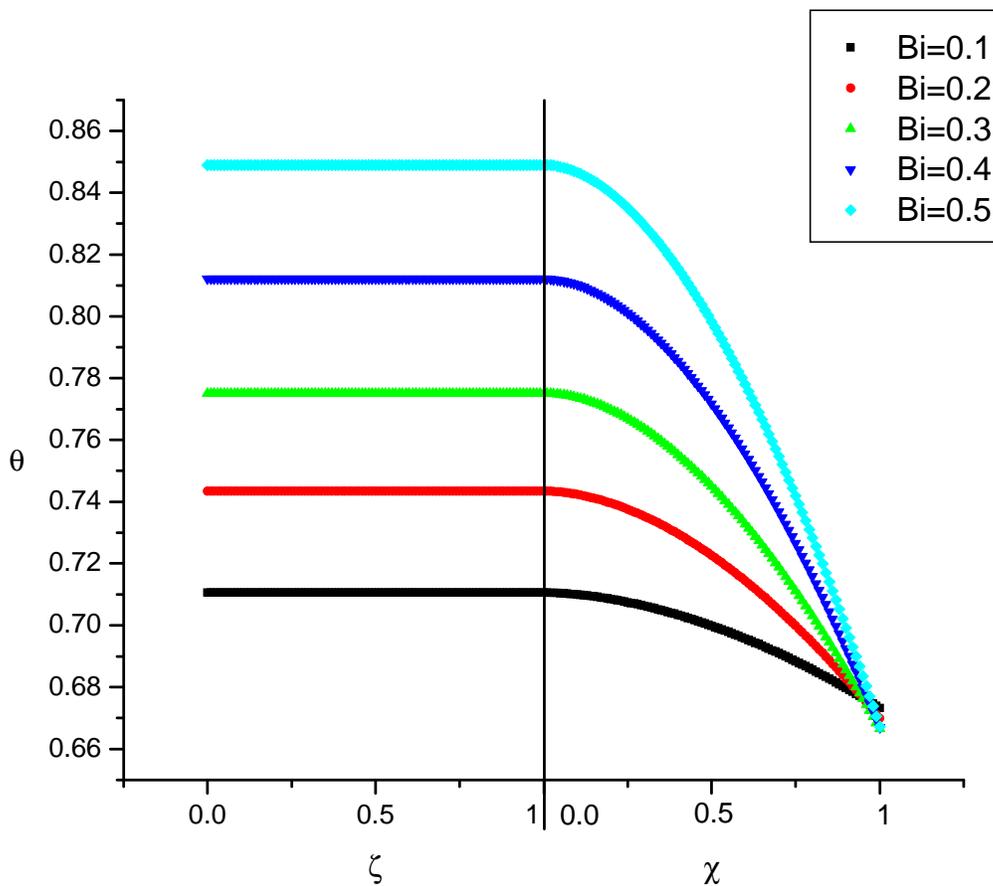


Figura 12. Distribución de temperaturas adimensionales del cable ACSR 6/1 para distintos números de Biot.

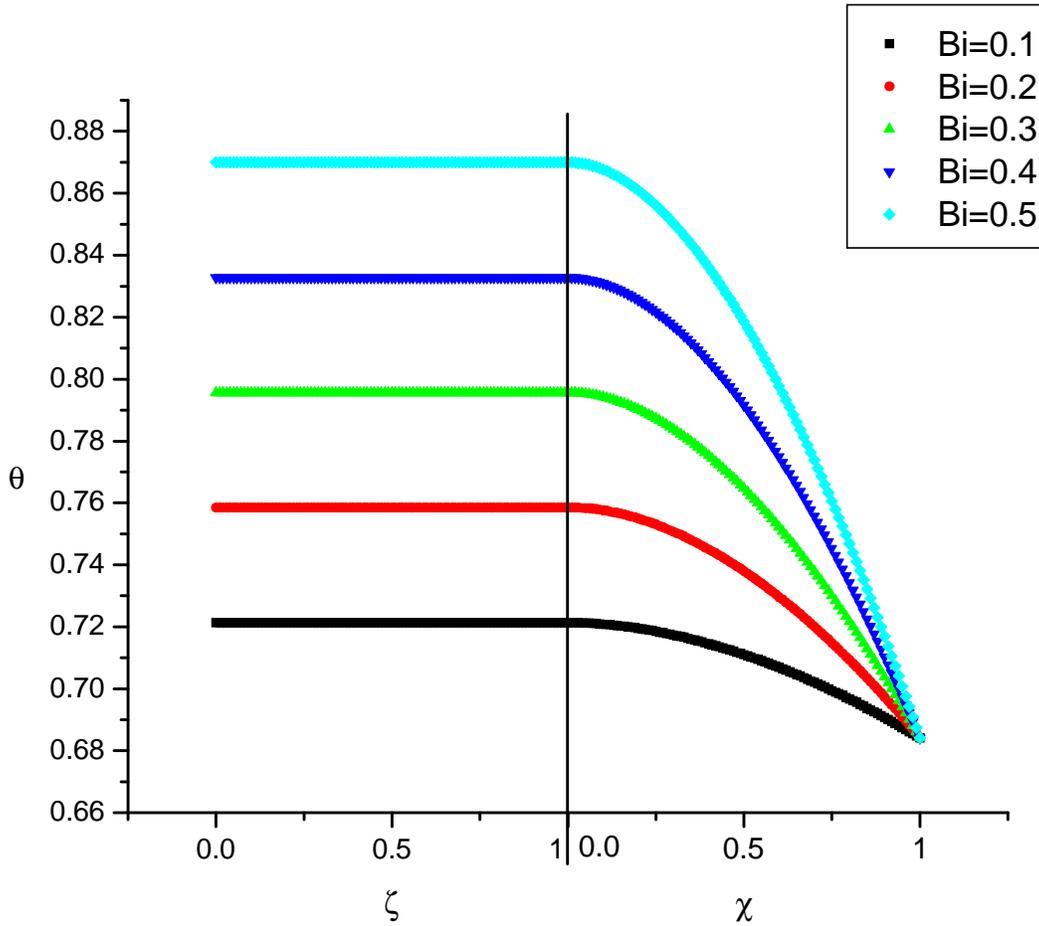


Figura 13. Distribución de temperaturas adimensionales del cable ACSR 26/7 para distintos números de Biot.

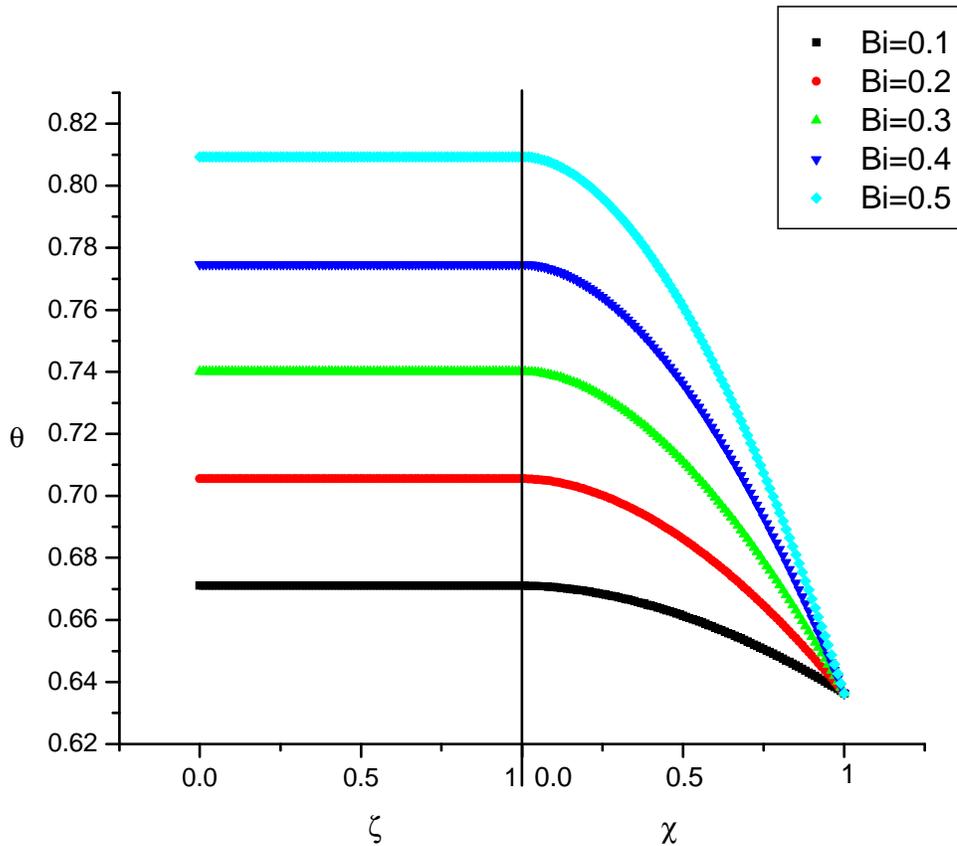


Figura 14. Distribución de temperaturas adimensionales del cable ACSR 84/19 para distintos números de Biot.

En las figuras 12, 13 y 14 se observa que la distribución de temperaturas se ve afectada de manera importante por el número de Biot; es decir, de las condiciones climáticas. En los tres casos de estudio se observa que conforme el número de Biot disminuye el perfil de temperaturas tiende a uniformizarse, debido a que un número de Biot pequeño significa una deficiente transferencia de calor al ambiente, por lo que el calor generado se transfiere por conducción en el cable.

Por el contrario si el número de Biot es grande la transferencia de calor al ambiente es muy eficiente por lo que la diferencia de temperaturas entre el núcleo de acero y el exterior del cable es de mayor magnitud.

4.3 Efecto de la porosidad

Con la finalidad de poder observar el efecto de la porosidad, se realizó la siguiente gráfica para el cable ACSR 84/19 con un coeficiente convectivo $h = 3 \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$, y se comparó con el mismo cable bajo la suposición de que la parte correspondiente al aluminio no es porosa.

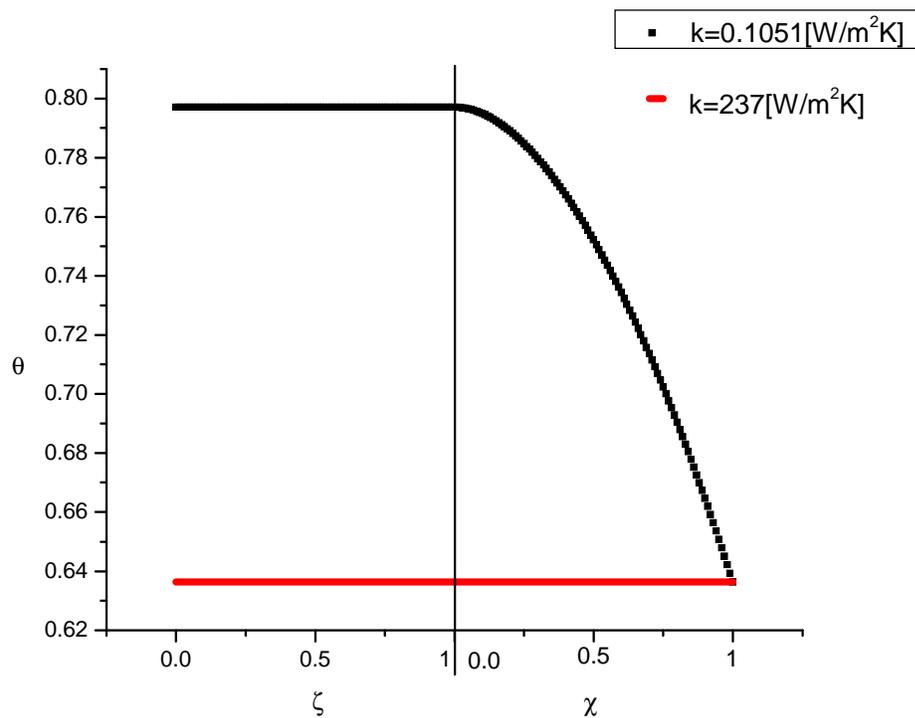


Figura 15. Comparación de las distribuciones de temperatura adimensional para distintas conductividades térmicas.

En la figura 15 se observa que existe una gran diferencia en la distribución de temperaturas para un conductor poroso y un conductor sólido, esto es debido a que el material sólido tiene una conductividad térmica elevada, por lo que para cualquier cambio que sufra el material se enteran todos los elementos diferenciales que conforman al conductor, por otro lado para una conductividad

térmica baja los elementos diferenciales que conforman al conductor tardan en enterarse de los cambios que sufre el conductor en la parte exterior, por lo que se originan gradientes de temperatura.

4.4 Conclusiones

Uno de los objetivos primordiales del presente trabajo fue el destacar la importancia del estudio de los conductores eléctricos tipo ACSR. Para ello se seleccionaron tres conductores ACSR (6/1 “Penguin”, 26/7 “Drake” y 84/19 “Bluebird”), con el fin de observar el comportamiento térmico en estado permanente de dichos conductores en distintas condiciones climáticas.

Debido al carácter matemático del problema fue posible determinar tanto su solución analítica, así como, su solución numérica con el método de diferencias finitas. El modelo matemático al ser adimensionalizado sirve para poder comparar los resultados en una sola escala, de otra manera no sería posible comparar dichos resultados, además los resultados obtenidos en base al modelo adimensionalizado engloban a una gran serie de conductores, no solo a los que se encuentran bajo estudio, por ejemplo los resultados obtenidos para el conductor ACSR “Drake” 26/7 no solo sirve para él, sino que estos resultados se pueden aplicar a todos los conductores ACSR 26/7 (Linnet, Hawk, Dove, etc.), debido a que todos los conductores con el mismo número de alambres de acero y aluminio tienen la misma relación de radios.

La validación del código numérico es de gran importancia, debido a que el presente trabajo es el punto de partida para el análisis de los conductores ACSR

en estado transitorio, por lo que los resultados obtenidos de manera numérica se aproximan en gran medida a la solución analítica (figs. 9, 10 y 11).

Los resultados de los tres conductores (figs. 12, 13 y 14) muestran que la distribución de temperatura adimensional, depende directamente de las condiciones climáticas, por lo que se puede concluir que es posible transportar una mayor cantidad de corriente eléctrica en un clima frío o con grandes corrientes de viento, debido a que gran parte del calor generado se transferiría por convección, en vez de acumularse en el conductor y distribuirse internamente por conducción. En las figuras 12, 13 y 14 se observa que el gradiente de temperatura se va incrementando conforme en número de Biot va aumentando, y por el contrario, la distribución de temperaturas tiende a ser uniforme conforme el número de Biot decrece.

Parece contradictorio que las temperaturas adimensionales correspondientes a $Bi=0.1$, sean menores que aquellas correspondientes a $Bi=0.5$, siendo que un número de Biot alto quiere decir que hay una buena transferencia de calor del cable al ambiente y por lo tanto su temperatura debería de ser menor, esto no deja de cumplirse, ya que debido a la forma en que se realizó la adimensionalización de la temperatura, los resultados nos muestran a todos los perfiles en una misma escala y solo basta con hacer la transformación de las variables adimensionales a las variables dimensionales.

Como se observa en la figura 15 el efecto de la porosidad del aluminio, afecta en gran medida al perfil de temperaturas, debido a que la porosidad disminuye a la conductividad térmica, mientras que un conductor eléctrico sólido tiene una gran conductividad térmica, esto repercute en el número de Biot ya que con una conductividad térmica mayor el número de Biot disminuye y como se

mencionó anteriormente el perfil de temperaturas tiende a ser uniforme a bajos números de Biot, debido a que la transferencia de calor por conducción es mayor que la transferencia de calor por convección.

De los resultados obtenidos es posible concluir que el número de Biot es el principal parámetro que afecta los perfiles de temperatura, ya que en él se engloba la transferencia de calor por convección; es decir las condiciones climáticas, y la transferencia de calor por conducción, en donde se observa el efecto de la porosidad.

Para la continuación del presente trabajo se recomendaría analizar la transferencia de calor en los conductores eléctricos ACSR en estado transitorio, y observar el efecto de la porosidad en el núcleo de acero, ya que en el estado permanente la porosidad del acero no tuvo efecto alguno. Además se recomienda analizar como se ve afectado el núcleo de acero en sus propiedades mecánicas como consecuencia de la transferencia de calor del aluminio.

REFERENCIAS

- [1] Koval, D. O. y Billinton, R. "Determination of transmission line ampacities by probability and numerical methods". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-89, No. 7, pp 1485-1492 (1970).
- [2] Davis, M.W. "A new thermal rating approach: the real time thermal rating system for strategic overhead conductor transmission lines. Part I. General description and justification of the real thermal rating system". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-96, No 3, pp 803-809 (1977).
- [3] Davis, M.W. "A new thermal rating approach: the real time thermal rating system for strategic overhead conductor transmission lines. Part II. Steady state thermal rating program". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-96, No 3, pp 810-821 (1977).
- [4] Morgan, V. T. "Effect of elevated temperature operation on tensile strength of overhead conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-11, No 1, pp 345-352 (1996).
- [5] Havey, J. R. "Effect of elevated temperature operation on the strength of aluminum conductors". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-91, pp 1769-1772 (1972).
- [6] Morgan, V. T. "The loss of tensile strength of hard-drawn conductors by annealing in service". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-98, No. 3, pp 700-7009 (1979).
- [7] Foss, S. D., Lin, S. H. y Fernandes, R. A. "Dynamic thermal line ratings: Part I. Dynamic ampacity rating algorithm". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 6, pp 1858-1864 (1983).
- [8] Foss, S. D., Lin, S. H. y Fernandes, R. A. "Dynamic thermal line ratings: Part II. Conductor temperature sensor and laboratory field test evaluation". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 6, pp 1865-1873 (1983).
- [9] Black, W. Z., y Byrd, W. R. "Real-time ampacity model for overhead lines". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 7, pp 2289-2293 (1983).
- [10] Morgan, V. T. "The radial temperature distribution and effective radial thermal conductivity in bare solid and stranded conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-5, pp 1443-1452 (1990).

- [11] Black, W. Z., Collins, S. S. y Hall, J. F. "Theoretical model for temperature gradients within bare overhead conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-3, No 2, pp 707-715 (1988).
- [12] Miñambres, J. F., Barandiarán, J.J., Alvarez-Isasi, Zorrozua, M. A., Zamora, I. y Mazón, A. J. "Radial temperature distribution in ACSR conductors applying finite elements". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-14, No 2, pp 472-478 (1999).
- [13] www.sural.com
- [14] Vafai, K. *Handbook of porous media*. Dekker, New York. (2000).
- [15] Kaviany, M. *Principles of heat transfer in porous media*. Springer, New York, (1995).
- [16] Morgan, V. T. *Thermal behaviour of electrical conductors: Steady, dynamic and fault-current ratings*. Wiley, Inglaterra, (1991).
- [17] Incropera, F. P. y Dewitt, D. P. *Fundamentals of heat and mass transfer*, Wiley, New York, (1990).
- [18] Sears, F. W., Zemansky, M. W. y Young, H. D. *Física Universitaria*. Addison-Wesley, Delaware (1988).
- [19] Ozisik, M. N. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC, Boca Raton (1994).
- [20] Fosythe, G. E. y Wasow, W. R. *Finite difference methods for partial differential equations*. Wiley, New York, (1960).