



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS COMPARATIVO DE ALGORITMOS  
PARA EL CONTROL DE LA *LOS* DE UN SENSOR  
SOBRE UNA PLATAFORMA MÓVIL

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

ÁREA: ELÉCTRICA – CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A :

SERGIO ATAYDE DEL MORAL

TUTOR:

DR. YU TANG XU

2007





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez  
Secretario: Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoría  
Vocal: Dr. Yu Tang Xu  
1er. Suplente: Dr. Héctor Pérez Benítez  
2do. Suplente: Dr. Marco Arteaga Pérez

Lugar donde se realizó la tesis:

México, D.F., Ciudad Universitaria

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Yu Tang Xu

---

**FIRMA**

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mi asesor el Doctor Yu Tang Xu por dirigir este trabajo de tesis.

Agradezco a los sinodales por el tiempo que dedicaron a revisar y comentar este trabajo de tesis.

Agradezco al Colegio de Control de la DEPFI por sus enseñanzas durante el curso de las asignaturas de la maestría en control.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por su apoyo económico al concederme una beca de maestría, a través del programa de Formación de Científicos y Tecnólogos.

Agradezco a la Secretaría de Marina por el apoyo y las facilidades prestadas para la realización de este trabajo, en particular al Capitán de Corbeta y Maestro en Ingeniería Alberto Fuentes Maya y al Almirante Laureano Suárez Allen

**Sergio Atayde Del Moral**  
**2007**

**Análisis comparativo de algoritmos  
para el control de la LOS de un  
sensor sobre una plataforma móvil**

Sergio Atayde Del Moral

2007

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Motivación . . . . .	9
1.2. Objetivo . . . . .	10
1.2.1. Orientación de la <i>LOS</i> . . . . .	11
1.2.2. Estabilización de la <i>LOS</i> . . . . .	11
1.3. Definición geométrica de la tarea de control . . . . .	12
1.4. Estado del arte . . . . .	14
1.5. Ubicación de este trabajo de tesis . . . . .	14
1.6. Contribución . . . . .	15
<b>2. Modelo del sistema</b>	<b>16</b>
2.1. Introducción . . . . .	16
2.2. Configuración cinemática . . . . .	16
2.3. Marcos de referencia: Convención Denavit-Hartenberg . . . . .	18
2.4. Relaciones cinemáticas de la plataforma . . . . .	19
2.5. Sistemas Lagrangianos . . . . .	21
2.5.1. Modelado mediante métodos energéticos: Ecuaciones Euler-Lagrange [3] . . . . .	21
2.5.2. Desarrollo de las ecuaciones Euler-Lagrange para ma- nipuladores mecánicos de $n$ grados de libertad . . . . .	23
2.6. Desarrollo del modelo . . . . .	26
2.7. Modelo de fricción . . . . .	29
2.7.1. Fenómeno de fricción [8] . . . . .	29
2.7.2. Modelo de fricción LuGre [7] . . . . .	30
<b>3. Algoritmos de Control: Comparación cualitativa</b>	<b>32</b>
3.1. Introducción . . . . .	32

3.2.	Control de Orientación . . . . .	33
3.3.	Control de Estabilización . . . . .	34
3.3.1.	Estabilización de balanceo: Grado de libertad “virtual” en balanceo . . . . .	35
3.4.	Métodos de control para manipuladores . . . . .	36
3.4.1.	PD+ . . . . .	37
3.4.2.	Control Adaptable . . . . .	38
3.4.3.	Control Robusto . . . . .	40
3.4.4.	Modos deslizantes . . . . .	43
3.4.5.	Compensación de fricción: observador . . . . .	49
3.5.	Comparación cualitativa entre algoritmos . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Simulación: Comparación cuantitativa</b>	<b>53</b>
4.1.	Introducción . . . . .	53
4.2.	Señal característica de la mar . . . . .	54
4.3.	Sensores de giro y su disposición física: aproximación directa e indirecta . . . . .	55
4.4.	Señal de referencia: aproximación directa . . . . .	57
4.5.	Suavización de señales de simulación . . . . .	58
4.6.	Simulaciones . . . . .	60
4.7.	Comparación Cualitativa . . . . .	73
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>80</b>
5.1.	Conclusiones, aportación y trabajo futuro . . . . .	80
<b>A.</b>	<b>Códigos y Diagramas para las simulaciones en Simulink</b>	<b>82</b>
<b>B.</b>	<b>Grado de libertad virtual en eje de balanceo</b>	<b>89</b>
<b>C.</b>	<b>Suavización de señales</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

1.1. Rotaciones de una embarcación . . . . .	10
1.2. Tareas de control: orientación y estabilización . . . . .	12
1.3. Disposición de ejes para formar la señal de referencia . . . . .	13
2.1. Plataforma de dos Grados de Libertad . . . . .	17
2.2. Representación general de plataforma $2GDF$ . . . . .	18
2.3. Disposición de ejes para la plataforma $2DOF$ . . . . .	20
2.4. Cuerpos simples para representar a la plataforma de dos gra- dos de libertad . . . . .	26
2.5. Cerdas microscópicas entre dos superficies en contacto . . . . .	30
3.1. Esquema de control. Las lecturas del sensor de giro alimentan las correcciones mecánicas en cabeceo y guiñada y la corrección en balanceo de la imagen. . . . .	36
3.2. Diagrama a bloques del sistema con fricción y observador de fricción . . . . .	50
4.1. Señal característica de las rotaciones en una embarcación a la mar. El eje horizontal tiene escala en segundos y el vertical en grados . . . . .	55
4.2. Señales características de un par de movimientos del buque hacia adelante . . . . .	56
4.3. Disposición de ejes para formar la señal de referencia . . . . .	58
4.4. Señales de velocidad y aceleración caculadas con diferenciación numérica . . . . .	59
4.5. Señales de velocidad y aceleración caculadas con diferenciación numérica y suavizadas . . . . .	60
4.6. Señal de referencia para guiñada (a) y cabeceo (b) . . . . .	62

4.7. Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7), con señales de referencia filtradas-suavizadas-. . . . .	63
4.8. Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7), con señales de referencia filtradas -suavizadas-. (detalle). . . . .	64
4.9. Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7), con señales de referencia filtradas-suavizadas-. . . . .	65
4.10. Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo 2.6, con señales de referencia no filtradas (contrástese con la Figura 4.9) . . . . .	67
4.11. Señales de fricción típica inyectada . . . . .	68
4.12. Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo 2.6 con referencias filtradas y fricción no compensada . . . . .	69
4.13. Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción no compensada (detalle) . . . . .	70
4.14. Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción no compensada . . . . .	71
4.15. Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con fricción compensada . . . . .	72
4.16. Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción compensada (detalle) . . . . .	73
4.17. Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción compensada . . . . .	74
4.18. Señales de fricción “real” y observada con detalle de convergencia . . . . .	75
4.19. Energía de la señal de error . . . . .	76
4.20. Energía de la señal de control . . . . .	77
A.1. Modelo de simulación en Simulink . . . . .	83

B.1. Ejes de referencia convencionales para el manejo de imágenes digitales . . . . .	90
B.2. Ejes de referencia propuestos . . . . .	90
B.3. Rotación de $n$ grados, algoritmo con píxeles ciegos . . . . .	91
B.4. Rotación de $n$ grados, algoritmo sin puntos ciegos . . . . .	92
C.1. Señal escalonada (línea sólida) y su contraparte “suavizada” (línea discontinua) . . . . .	94

# Índice de cuadros

2.1. Tabla de parámetros D-H . . . . .	20
2.2. Tabla de Momentos de Inercia . . . . .	27
4.1. Tabla de leyes de control . . . . .	61
4.2. Tabla de resultados: Tanto en las calificaciones de los incisos como en el renglón de Índice Final, una cifra menor representa un mejor desempeño . . . . .	78
4.3. Tabla de ponderación de incisos de comparación . . . . .	79
4.4. Ejemplo del cálculo del Índice Final para el control $PD+$ . . . . .	79
A.1. código de control (1) . . . . .	85
A.2. código de control (2) . . . . .	86
A.3. Modelo de aceleración . . . . .	87
A.4. Modelo de fricción . . . . .	87
A.5. Observador de fricción . . . . .	88

# Prefacio

## Organización de la tesis

En esta tesis se analiza comparativamente el desempeño de varios algoritmos de control aplicados a la estabilización y orientación de la línea de vista de un sensor montado en una plataforma móvil en un ambiente con perturbaciones. Siendo más específicos, el sensor de interés es una cámara de video montada en una embarcación<sup>1</sup>, por tanto las perturbaciones son las propias del medio marino, principalmente el oleaje.

La tesis se organiza de la siguiente manera:

El Capítulo 1 es una introducción en la que se presenta la motivación de este trabajo de tesis, revisándose el contexto en el que es deseable lograr la orientación y estabilización de dispositivos mediante el empleo de plataformas móviles. Una vez descrita la problemática se establecen los objetivos de control. Se mencionan así mismo, trabajos en los que se han desarrollado varias aproximaciones a la tarea de manipulación de plataformas. Por último, se ubica este trabajo de tesis y se resaltan las contribuciones del mismo.

En el Capítulo 2 se desarrolla un modelo del sistema *plataforma móvil*. Primero se propone una configuración cinemática para la plataforma y a continuación se emplea la convención Denavit-Hartenberg para establecer marcos de referencia y obtener las matrices de transformación asociadas. Después se hace una breve revisión del modelado mediante métodos energéticos (indicador variacional, variables de flujo y esfuerzo) y de las ecuaciones Euler-Lagrange. En la sección final del capítulo, se llega a una expresión

---

<sup>1</sup>La naturaleza específica del sensor y el medio en el que opera resulta de relevancia en el desarrollo de este trabajo

parametrizada puntual para el modelo de la plataforma.

En el Capítulo 3 se revisan varios de los métodos de control de manipuladores mecánicos, haciendo énfasis en los de tipo robusto, incluyéndose el análisis de estabilidad y convergencia en lazo cerrado para los casos nominales. En uno de los incisos de simulación se prueba el desempeño de los controladores ante la presencia de fricción, por lo que en este capítulo se revisa brevemente el modelo LuGre, así como un observador de fricción. El capítulo finaliza con una comparación cualitativa entre los algoritmos de control presentados.

El capítulo 4 está dedicado a simulaciones del control de la plataforma usando los algoritmos revisados en el Capítulo 3, así como a la comparación cuantitativa del desempeño de las diferentes leyes de control presentadas. Primero se presentan señales de giro típicas (reales) para varios estados de la mar. Dicho tipo de señal es el que se alimenta como perturbación al sistema controlado en lazo cerrado. Después se enuncian las características de las aproximaciones directa e indirecta para la medición de rotaciones y tasas de giro. Por último se presenta el análisis comparativo de los distintos controles, el cual incluye un conjunto de gráficas y tablas en las que se resume y analiza el desempeño de los controles con base en parámetros como, tiempo de asentamiento, energía de las señales de error y de control, magnitud del error residual, suposiciones *a priori* etc<sup>2</sup>.

En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis, se resalta lo que se considera como aportaciones y se esboza el trabajo a futuro.

---

<sup>2</sup>En su momento en los casos que no se pueda obviar, se definen los parámetros de comparación

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Varios son los vehículos aéreos, terrestres y marinos que transportan equipo de sensado el cual entra en operación mientras dichos vehículos se mueven y está, por ende, sujeto a movimientos aleatorios debidos a las irregularidades de la vía, sea ésta un terreno pedregoso, un mar con oleaje o un cielo turbulento. Frecuentemente para cumplir su fin específico de manera óptima, los sensores montados en los vehículos deben conservar en la medida de lo posible cierta orientación, aún cuando perturbaciones del medio tiendan a “desorientarlos”. Por ejemplo, en el caso de sistemas de comunicación se busca que las antenas receptoras/transmisoras apunten hacia la fuente/destino de la señal a fin de recibir/enviar íntegramente la información de interés. En tales casos, el equipo de sensado se monta sobre una plataforma móvil que lo estabiliza respecto a los movimientos del vehículo en uno o más de sus ejes, con base en información de rotación proporcionada por sensores de giro adosados a la plataforma y/o al sensor.

En particular, en esta tesis se revisará el caso en que **el vehículo de interés es una embarcación y el sensor es una cámara de video montada en una plataforma móvil actuada**. El objetivo primordial del control es conservar cierta línea de visión o *LOS*<sup>1</sup>. Por lo tanto, cuando la embarcación sufre rotaciones respecto a sus ejes, Figura 1.1, se busca que el control

---

<sup>1</sup>Por las siglas en inglés de *Line Of Sight*, la abreviacion *LOS* se usa a lo largo de la tesis

adquiera y/o mantenga la orientación de la *LOS* respecto al blanco u objetivo de interés, al generar en la plataforma los movimientos que logren la *LOS* comandada y contrarresten las perturbaciones que sufre la embarcación.

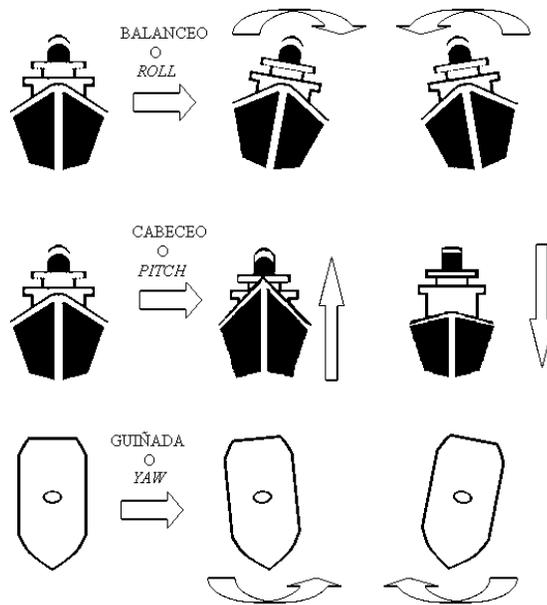


Figura 1.1: Rotaciones de una embarcación

## 1.2. Objetivo

Es necesario establecer claramente el objetivo de control para determinar qué eventos y/o perturbaciones generan una reacción del esquema de control, y aquellas que no lo hacen por no contravenir el objetivo establecido. Así mismo, al haber delimitado el objetivo se puede elegir un tipo de configuración mecánica para la plataforma, cuya cinemática permita cumplir el objetivo

planteado dentro de una buena relación complejidad-desempeño.

La tarea de interés se puede resumir de la siguiente manera: la línea de vista del sensor en cuestión, cámara, debe apuntar en dirección del blanco u objetivo de interés, el cual puede estar fijo o en movimiento. Aunado a lo anterior, la embarcación en que se encuentra el sensor está expuesta a movimientos continuos debidos al medio marino. Esto es, se tiene en el caso más general una *LOS* variable en un medio con perturbaciones. De esta forma, el objetivo de dirigir la *LOS* del sensor hacia un blanco puede definirse en dos subtareas: tarea de orientación o seguimiento y tarea de estabilización o rechazo de perturbaciones. Las perturbaciones y movimientos de orientación/seguimiento considerados serán de tipo rotacional, en consecuencia las tareas de orientación y estabilización se satisfacen con grados de libertad rotacionales.

### 1.2.1. Orientación de la *LOS*

La tarea de orientación de la *LOS* de un sensor mediante el uso de una plataforma móvil, consiste en dirigir el *vector característico* de la *LOS*<sup>2</sup> hacia el objetivo de interés a través de la manipulación de los grados de libertad de la plataforma. En general puede identificarse lo anterior como una tarea de seguimiento, en la que se busca llevar el estado de operación de un sistema a lo largo de cierta trayectoria y/o hacia cierta referencia constante.

En el caso particular en que el sensor es una cámara, la tarea de adquirir y preservar cierta *LOS* puede traducirse, por ejemplo, en mantener centrado y en foco un objetivo en movimiento relativo respecto a la embarcación que transporta al sensor. Así, con un objeto en movimiento y un sensor con el que se le quiere apuntar, se tiene en general una tarea de seguimiento.

### 1.2.2. Estabilización de la *LOS*

El vector característico de la *LOS* de un sensor sobre una plataforma en una embarcación marina se encuentra expuesto a multiples fuentes de perturbación, siendo la principal la acción de las olas. Otras fuentes de perturbación

---

<sup>2</sup>La línea de vista de un sensor tiene asociado un *vector característico* o *vector de dirección*, el cual es unitario, deslizante y está dirigido sobre la línea recta no obstruida que une al sensor y su objetivo.

pueden deberse a *torcas inducidas* por corrientes de viento. También las vibraciones y movimientos lineales de la embarcación pueden generar *torcas de perturbación* debido a desbalances de masa por la disposición geométrica de los componentes de la plataforma. Recordando que en este trabajo de tesis se consideran sólo perturbaciones de orden rotacional, las perturbaciones traslacionales se toman en cuenta sólo en la medida que impacten la orientación de la *LOS* respecto al blanco de interés.

La Figura 1.2 resume las tareas de control descritas en esta sección. Se puede hacer la siguiente analogía: las perturbaciones marinas impactan la cola del vector que define a la *LOS* en tanto que el movimiento relativo del blanco del sensor afecta la punta del vector de la *LOS*.

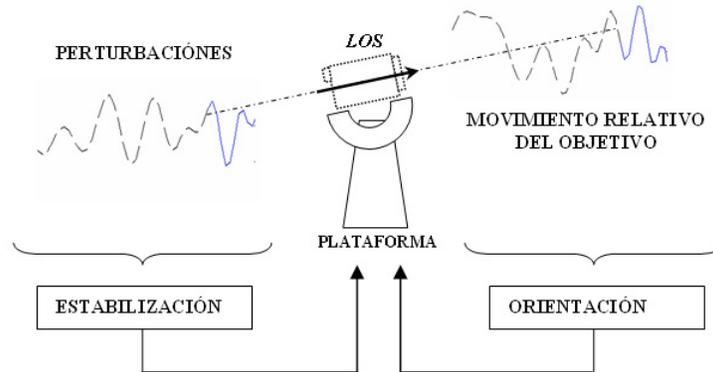


Figura 1.2: Tareas de control: orientación y estabilización

### 1.3. Definición geométrica de la tarea de control

Con ayuda de la Figura 1.3 se pueden definir geoméricamente las tareas de orientación y estabilización. La figura representa una vista aérea del conjunto buque-plataforma-sensor. Considérese por simplicidad sólo el

movimiento en el eje de guiñada. Los vectores  $LOS_{des}$  y  $LOS_{act}$  definen, respectivamente, la orientación deseada del sensor y la orientación actual referidas a un sistema de ejes inercial (ejes línea gruesa discontinua) respecto al cual se tienen mediciones de giro de posición/velocidad angular. El vector  $LOS_{des}$  es en general variable, pues cambia conforme al movimiento relativo entre el buque y el objetivo de interés. El vector  $LOS_{act}$  por su parte, está expuesto a las perturbaciones de la mar.

Se tiene además, otro marco de referencia (ejes línea delgada discontinua) respecto al cual se establece, mediante un codificador de posición, el estado en guiñada  $q_{act}$  del eje mecánico de la plataforma móvil que orienta al sensor.

La tarea de control consiste en combinar la  $LOS_{des}$  con la información de los sensores de giro  $LOS_{act}$  y posición  $q_{act}$  a fin de generar una referencia  $q_{des}$  que, como entrada a un esquema de control, permita que el vector  $LOS_{act}$  siga a la referencia  $LOS_{des}$  (orientación) a la vez que se rechazan las perturbaciones de la mar (estabilización).

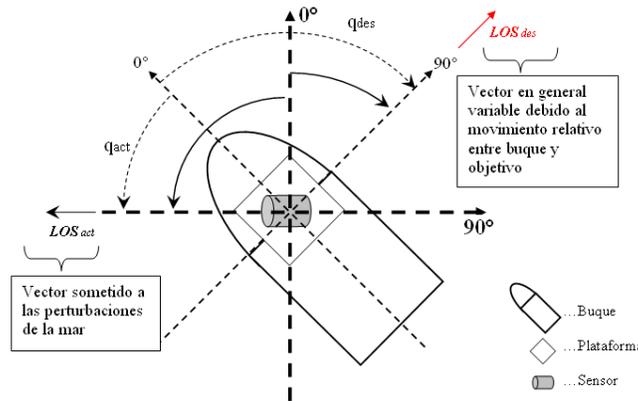


Figura 1.3: Disposición de ejes para formar la señal de referencia

## 1.4. Estado del arte

La tarea de estabilización y orientación de una plataforma ha sido abordada en varios trabajos con el empleo de un manipulador Stewart, [11] y [12]. Esta aproximación a la tarea de estabilización es buena para el control de vibraciones, es decir, para casos en que las desviaciones del punto de operación son relativamente pequeñas. Este tipo de plataforma puede corregir en seis grados de libertad, es decir en tres grados de posición y tres de orientación. Sin embargo, la amplitud de sus movimientos es limitada y la complejidad de control es elevada.

Shtessel en [13] y [14] trata el problema de estabilización de una plataforma inercial de tres ejes mediante técnicas de modos deslizantes y desacoplamiento.

Peter *et al* en [6] trataron el tema de la estabilización de una plataforma de dos grados de libertad, haciendo una comparación de desempeño entre la aproximación de mediciones de giro directamente sobre la *LOS*, y mediciones indirectas en la base de la plataforma, caso en el cual han de reconstruirse las perturbaciones sobre la *LOS* a partir de las perturbaciones medidas en la base. La conclusión es que el desempeño de la aproximación directa es superior.

## 1.5. Ubicación de este trabajo de tesis

En este trabajo de tesis se aplica la metodología de control como trasfondo y sustento académico de una tarea de interés práctico. El objetivo principal de índole teórico-académico se aborda vía la comparación de algoritmos de control de tipo adaptable y robusto para el control de orientación y estabilización de la Línea de Vista de un sensor.

Las tareas de estabilización y orientación de la *LOS* se desarrollan tomando en cuenta las condiciones que presenta el medio marino, así como restricciones y limitaciones que es necesario imponer a fin de poder presumir la “implementabilidad” de los esquemas de control revisados. Tales restricciones son por ejemplo: viabilidad física-mecánica del esquema de control -simplicidad

de implementación-; accesibilidad de señales de referencia y estado; magnitud de la señal de control dentro de un rango razonable; robustez del esquema ante perturbaciones, dinámicas no modeladas, variaciones del sistema, etc.

La comparación de los distintos algoritmos presentados se hace mediante la evaluación de parámetros ponderados. Se presume que los resultados de este trabajo permitirán llevar a cabo una implementación práctica óptima.

## **1.6. Contribución**

Este trabajo a sido apoyado por el INIDETAM (Instituto de Investigación y Desarrollo Tecnológico de la Armada de México) de la Secretaría de Marina, uno de cuyos objetivos es realizar y fomentar la investigación en áreas de interés naval a fin de aumentar el nivel de independencia tecnológica de la institución.

Este trabajo sirve de base teórico-académica para la implementación de esquemas de control de orientación y estabilización de sistemas de vigilancia de desarrollo nacional en buques de la Secretaria de Marina, coadyudando eventualmente a reducir la dependencia tecnológica, con las ventajas que ello implica: menores costos de implementación, mantenimiento y actualización; aumento del cuerpo de conocimientos con base en el cual se pueden realizar otros proyectos de investigación afines, etc.

# Capítulo 2

## Modelo del sistema

### 2.1. Introducción

El paso inicial hacia la consecución de un buen esquema de control para un sistema, es la obtención de un modelo matemático que capture las características dinámicas de la planta y con base en la cual puedan realizarse tareas de análisis y síntesis que conduzcan al controlador adecuado.

Es difícil que un modelo represente a plenitud la dinámica de su contraparte real. Un buen modelo representará las características más significativas del sistema, en tanto que las incertidumbres por dinámicas no modeladas, perturbaciones, variación de parámetros, etc., pueden considerarse en el diseño del controlador.

Para la obtención de modelos matemáticos de sistemas mecánicos (como el de interés) existen metodologías ampliamente desarrolladas y bien documentadas. Son de especial interés los métodos de modelado energético, los cuales permiten llegar a modelos para sistemas de mediana y alta complejidad sin la necesidad de establecer de manera explícita las restricciones de interconexión entre los distintos elementos del sistema.

### 2.2. Configuración cinemática

El tipo de plataforma propuesto para el objetivo, es el que se muestra en la Figura 2.1.

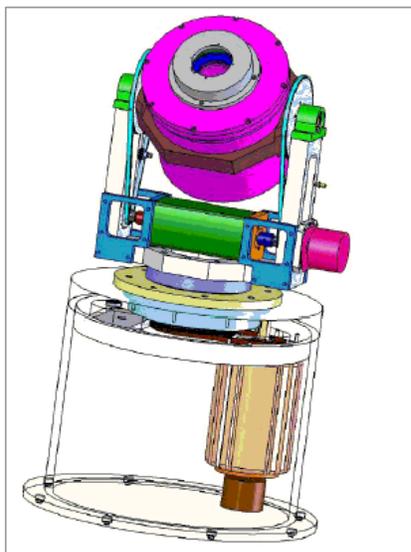


Figura 2.1: Plataforma de dos Grados de Libertad

La Figura 2.2 es una representación general del tipo de plataforma de dos Grados de Libertad (*2GDL*), en la que se describen algunos elementos básicos del arreglo: la plataforma consta de dos articulaciones de revolución, en el eje de guiñada -o *yaw*- y en el eje de elevación -o *pitch*-. La característica principal de este tipo de plataforma es la de que los ejes de sus articulaciones de revolución se intersectan en un punto en común.

Como puede apreciarse el tipo de plataforma mostrada no tiene la capacidad de realizar movimientos alrededor del eje de balanceo. Cuando el sensor de interés que va montado en la plataforma es, por ejemplo, un telémetro laser, las correcciones en balanceo no son necesarias pues la señal enviada/recibida por el sensor es un haz. No obstante cuando el sensor de interés es, como en el caso de este trabajo, una cámara de video, las perturbaciones en balanceo resultan en imágenes sesgadas. No obstante, como se verá en el Capítulo 3, se propone una estabilización “*virtual*” en el eje de balanceo.

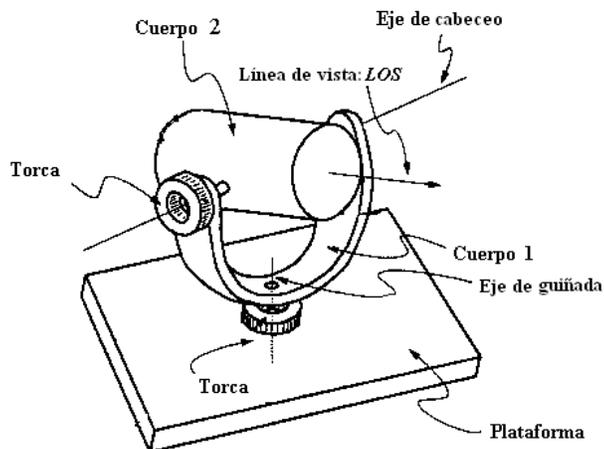


Figura 2.2: Representación general de plataforma 2GDF

La configuración de la plataforma permite delimitar los alcances del control: las acciones de control de orientación y estabilización se efectuarán sólo con rotaciones en dos ejes. Lo anterior simplifica el análisis cinemático, al no existir movimientos de traslación.

La cinemática directa de este tipo de plataforma es simple, pues se puede determinar la orientación del sensor de forma inmediata al conocer la posición angular de los ejes, lo cual en las implementaciones se realiza fácilmente con codificadores de posición.

### 2.3. Marcos de referencia: Convención Denavit-Hartenberg

La primera tarea hacia el desarrollo de un modelo es establecer los sistemas coordenados para representar la posición y orientación de los varios cuerpos (considerados rígidos) que conforman la plataforma. Para ello se

empleará la representación Denavit-Hartenberg ( $D-H$ ), la cual permite establecer de manera sistemática los marcos de referencia en cada articulación y facilita posteriormente la obtención de parámetros con los cuales se forman las matrices de transformación entre los sistemas referenciales.

A continuación se enuncian 6 primeros pasos hacia la obtención de la cinemática directa del manipulador, los cuales se relacionan con el establecimiento de los marcos de referencia:

### Representación D-H [2]:

1. Localizar y etiquetar los ejes de las articulaciones  $z_0, \dots, z_{n-1}$ , donde  $n$  representa el número de articulaciones. El eje  $z_i$ , se alinea con el eje de movimiento de la articulación  $i+1$ ,
2. Establecer un marco de referencia base  $x_0y_0z_0$ . Poner el origen en cualquier posición sobre el eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  y  $y_0$  respectivos se establecen de forma tal que se forme un sistema dextrogiro. Los pasos 3 al 5 se repiten para  $i=1, \dots, n-1$ .
3. Localizar el origen  $O_i$  en el punto en el que la normal común  $z_i$  y  $z_{i-1}$  interseca a  $z_i$ . Si  $z_i$  y  $z_{i-1}$  son paralelos, se ubica  $O_i$  en la  $i$ -ésima articulación.
4. Establecer  $x_i$  a lo largo de la normal común entre  $z_i$  y  $z_{i-1}$  tal que cruce  $O_i$ , o, si  $z_{i-1}$  y  $z_i$  se intersecan, en la dirección normal al plano que forman  $z_i - z_{i-1}$ .
5. Establecer  $y_i$  tal que complete un marco de referencia derecho.
6. Establecer el marco referencial del efector final  $o_nx_ny_nz_n$ , asumiendo la  $n$ -ésima articulación de revolución,

Tras aplicar los pasos enunciados anteriormente, los marcos de referencia se establecen de acuerdo a la Figura 2.3:

## 2.4. Relaciones cinemáticas de la plataforma

Una vez establecidos los marcos de referencia, han de obtenerse las relaciones de transformación entre los sistemas coordenados, para poder referir

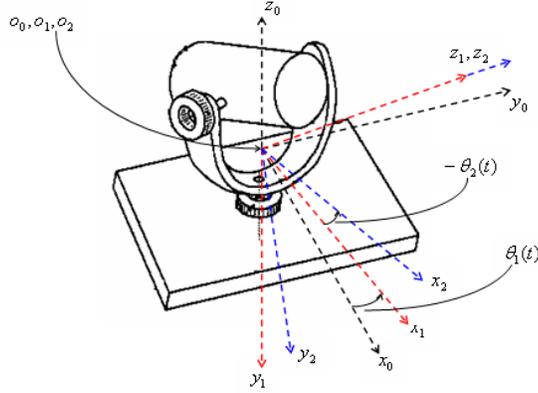


Figura 2.3: Disposición de ejes para la plataforma  $2DOF$

posiciones y velocidades de un sistema a otro. Ello es sencillo una vez aplicada la convención D-H, al formar una tabla de parámetros  $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$  de la siguiente manera [2]:

1.  $a_i$  es la distancia medida a lo largo del eje  $x_i$  desde el origen  $O_i$ , hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  (distancia más corta entre  $z_{i-1}$  y  $x_i$ ) con signo contrario al sentido del eje  $x_i$ .
2.  $d_i$  es la distancia a lo largo del origen  $z_{i-1}$  desde  $O_{i-1}$  hasta la intersección de  $z_{i-1}$  con  $x_i$  (respetando el signo del eje  $z_{i-1}$ ).
3.  $\alpha_i$  es el ángulo entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , medido alrededor de  $x_i$ .
4.  $\theta_i$  es el ángulo entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medida alrededor de  $x_i$ , siendo variable para las articulaciones de revolución.

La Tabla 2.1 resume los parámetros para la configuración propuesta:

Articulación	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90	0	$\theta_1(t)$
2	0	0	0	$\theta_2(t)$

Cuadro 2.1: Tabla de parámetros D-H

Una vez formada la tabla, la matriz de transformación del sistema  $i$  al  $i-1$ ,  $A_i^{i-1}$ , está dada por el producto de 4 transformaciones básicas, dos rotaciones y dos traslaciones:

$$A_i^{i-1} = Rot_{z,\theta_i} Tras_{z,d_i} Tras_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & 0 \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $C_{\theta_i}$  y  $S_{\theta_i}$  denotan respectivamente coseno y seno de  $\theta_i$ .

Las matrices de transformación homogéneas son por tanto:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & 0 & -S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} & 0 & C_{\theta_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 \\ S_{\theta_2} & C_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación del sistema es:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1}C_{\theta_2} & -C_{\theta_1}S_{\theta_2} & S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1}C_{\theta_2} & -S_{\theta_1}S_{\theta_2} & C_{\theta_1} \\ -S_{\theta_2} & -C_{\theta_2} & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.5. Sistemas Lagrangianos

### 2.5.1. Modelado mediante métodos energéticos: Ecuaciones Euler-Lagrange [3]

La formulación de un modelo matemático para un sistema de índole mecánico puede realizarse de manera sistemática considerando al sistema como un dispositivo manejador de energía y utilizando los denominados *Métodos Variacionales*, en los cuales, los intercambios energéticos del sis-

tema se asocian con una función de cambio de energía total del sistema, *Indicador Variacional*, la cual se conserva balanceada a cero en tanto la conducta dinámica del sistema sea “correcta”. Por “conducta correcta” ha de entenderse que las variaciones de las variables de almacenamiento de esfuerzo y flujo no transgreden las restricciones de interconexión del sistema, es decir, tales *variaciones permisibles* no violan las restricciones de compatibilidad ni las de continuidad<sup>1</sup>

En términos llanos, lo anterior es un refinamiento del concepto básico de que la energía de entrada a un sistema es igual a la que se almacena (por ejemplo en forma cinética o potencial) y a la que se disipa.

Un indicador variacional  $\delta V$  que se balancea a cero para cualquier transición permisible de un sistema con  $m$  coordenadas generalizadas de almacenamiento de esfuerzo ( $q_1, \dots, q_m$ ) y  $l$  coordenadas generalizadas variacionales ( $\delta q_1, \dots, \delta q_l$ ) es:

$$\delta V = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta U^* - \delta T - \sum_{j=1}^l \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_j} - \tau_j \right) \delta q_j \right] dt = 0$$

donde:

$U^*$ : Co-energía total almacenada en elementos almacenadores de flujo en función de las coordenadas generalizadas de esfuerzo.

$T$ : Energía total almacenada en elementos almacenadores de esfuerzo en función de las coordenadas generalizadas de almacenamiento de esfuerzo.

$J$ : Co-contenido total en los disipadores del sistema.

Un resultado de uso inmediato del análisis variacional, es el conjunto de ecuaciones *Euler-Lagrange*, las cuales deben de satisfacerse en tanto el indicador variacional  $\delta V$  se conserve nulo para cualquier transición dinámica

---

<sup>1</sup>*Restricción de Compatibilidad*: La suma de esfuerzos para el lazo cerrado formado por  $n$  puertos de energía debe ser cero.

*Restricción de Continuidad*: La suma de flujos en la terminal común de  $n$  puertos de energía debe ser cero [3].

permisible del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i \text{ para } i=1, \dots, l$$

donde, el *lagrangiano*  $L$  está dado por:

$$L = U^*(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) - T(q_1, \dots, q_m)$$

### 2.5.2. Desarrollo de las ecuaciones Euler-Lagrange para manipuladores mecánicos de $n$ grados de libertad

Se puede establecer la correspondencia entre los elementos generales de la subsección anterior, y los elementos particulares de los sistemas mecánicos. En el ámbito de los sistemas mecánicos, puede identificarse a las velocidades (lineales o angulares) como las variables de esfuerzo y a los desplazamientos (lineales o angulares) como las variables de almacenamiento de esfuerzo. Así mismo, las fuerzas y torcas se corresponden con las variables de flujo, y las variables de almacenamiento asociadas son los momentos (lineales o angulares).

Dadas las correspondencias anteriores, puede establecerse a la función de co-energía  $U^*(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$  como la función de co-energía cinética<sup>2</sup> respecto a las velocidades del sistema, y a la función  $T(q_1, \dots, q_m)$  como la energía potencial en función de los desplazamientos.

Para manipuladores rígidos de  $n$  grados de libertad pueden aplicarse directamente la formulación Euler-Lagrange. Sólo se requiere encontrar la función de energía cinética ( co-energía ) y la de energía potencial.

El modelo dinámico general del manipulador al que se llega desarrollando

---

<sup>2</sup>Para un objeto de masa constante, de acuerdo a la segunda ley de Newton, se establece una relación lineal entre el momento y la velocidad del objeto, por lo cual la co-energía cinética (área bajo la curva *momento vs. velocidad*) es igual a la energía cinética (área bajo la curva *velocidad vs. momento*).

el conjunto de ecuaciones Euler-Lagrange es no lineal, y está dado por la siguiente expresión [2] :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Dq + g(q) = \tau \quad (2.1)$$

siendo  $H(q)_{n \times n}$  la matriz de inercia tal que:

$$h_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n Tr(\mathbb{U}_{ki}J_k\mathbb{U}_{kj}^T) \quad (2.2)$$

donde, el término  $J_k$  representan la pseudo matriz de inercia del cuerpo  $k$  respecto al sistema de referencia  $x_k y_k z_k$ :

$$J_k = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Además:

$$\mathbb{U}_{ij} = \frac{\partial \mathbb{T}_i^0}{\partial q_j}$$

donde:

$$\mathbb{T}_j^0 = A_i^0 A_2^1 \dots A_i^{i-1} \quad i=1, \dots, n$$

siendo  $A_j^i$  la matriz de transformación del sistema  $j$  al  $i$ .

En el caso de que la matriz  $A_j^i$  represente una transformación ortogonal, se tiene:

$$\mathbb{U}_{ij} = \begin{cases} \mathbb{T}_{j-i}^0 Q_j \mathbb{T}_j^{j-i} & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

donde, si  $q_j$  representa una variable de almacenamiento de esfuerzo angular:

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En cuanto a los elementos de la matriz  $C(q, \dot{q})$  que representa términos centrífugos y de Coriolis, se tiene:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{kji} \dot{q}_k \quad (2.4)$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

con:

$$C_{kji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) \quad (2.5)$$

Para  $g(q)$  que representa el vector de términos gravitacionales, se tiene la siguiente expresión:

$$g(q) = \frac{\partial P}{\partial q} \quad (2.6)$$

siendo  $P$  la función para la energía Potencial del sistema.

La Ecuación (2.1) y las matrices de inercia  $H(q)$  y de Coriolis  $C(q, \dot{q})$ , tienen importantes propiedades:

- Acotamiento y positividad de  $H(q)_{n \times n}$ :

$$\underline{m}I \leq H(q) \leq \overline{m}I, \forall q \in R^n, \text{ con } 0 \leq \underline{m} \leq \overline{m}$$

- Antisimetría de la matriz  $\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$ :

$$s^T [\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})] s = 0, \forall s \in R^n$$

- Parametrización lineal. La Ecuación (2.1) puede representarse como:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Dq + g(q) = \tau = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q})\varphi$$

siendo  $\varphi$  un vector de parámetros de dimensión  $n_\varphi$

## 2.6. Desarrollo del modelo

En esta sección se desarrolla un modelo del sistema a partir de una geometría simplificada de la plataforma.

Para fines de modelado y simulación, se propone una representación simplificada de la plataforma, como lo muestra la Figura 2.4. Además se definen:  $q = [q_1 \quad q_2]^T$  donde  $q_1 = \theta_1$  y  $q_2 = \theta_2$ .

La plataforma mostrada se compone de dos cuerpos principales, un cilindro y una especie de horquilla formada a su vez por tres paralelepípedos.

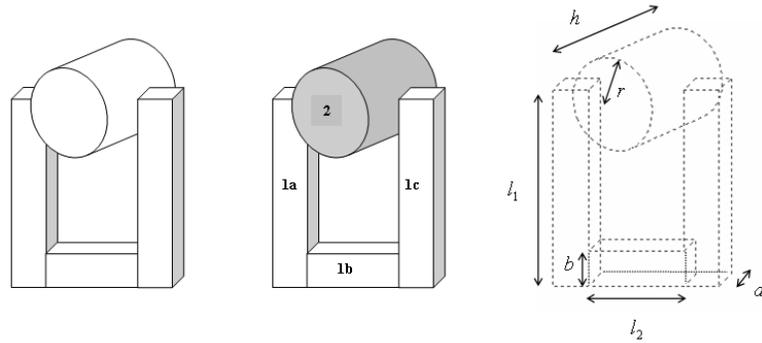


Figura 2.4: Cuerpos simples para representar a la plataforma de dos grados de libertad

El momento de inercia del cuerpo  $k=1,2$  se establece respecto al sistema de referencia  $x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$ . De tablas de momentos inerciales y utilizando el teorema de ejes paralelos ( ver la disposición de ejes en la Figura 2.3), la Tabla 2.2 resume los momentos de inercia de los cuerpos representados en la

Figura 2.4 <sup>3</sup>.

Cuerpo	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$I_{zz}$
1a	$\frac{m_{1a}}{12}(b^2 + l_1^2) + m_{1a}(\frac{l_2}{2} + \frac{b}{2})^2$	$\frac{m_{1a}}{12}(a^2 + b^2) + m_{1a}(\frac{l_2}{2} + \frac{b}{2})^2$	$\frac{m_{1a}}{12}(l_1^2 + a^2) + m_{1a}(\frac{l_1}{2})^2$
1b	$\frac{m_{1b}}{12}(b^2 + l_2^2) + m_{1b}(l_1 - \frac{b}{2})^2$	$\frac{m_{1b}}{12}(a^2 + l_2^2)$	$\frac{m_{1b}}{12}(b^2 + a^2) + m_{1b}(l_1 - \frac{b}{2})^2$
1c	$\frac{m_{1a}}{12}(b^2 + l_1^2) + m_{1a}(\frac{l_2}{2} + \frac{b}{2})^2$	$\frac{m_{1a}}{12}(a^2 + b^2) + m_{1a}(\frac{l_2}{2} + \frac{b}{2})^2$	$\frac{m_{1a}}{12}(l_1^2 + a^2) + m_{1a}(\frac{l_1}{2})^2$
2	$\frac{1}{2}m_2r^2$	$\frac{m_2}{12}(3r^2 + h^2)$	$\frac{m_2}{12}(3r^2 + h^2)$

Cuadro 2.2: Tabla de Momentos de Inercia

En la Ecuación (2.3):

$$J_1 = \text{diag} \left( \begin{array}{c} \frac{m_{1b}}{24}(2a^2) + \frac{m_{1a}}{12}(3l_1^2 + 2a^2) \\ \frac{m_{1b}}{24}(2b^2 + 6(2l_1 - b)^2) + \frac{m_{1a}}{12}(5l_1^2) \\ \frac{m_{1b}}{24}(2l_2^2) + \frac{m_{1a}}{12}(-3l_1^2 + 2b^2 + 6(l_2 + b)^2) \end{array} \right) = \text{diag} \left( \begin{array}{c} J_{1x} \\ J_{1y} \\ J_{1z} \end{array} \right)$$

$$J_2 = \text{diag} \left( \begin{array}{c} \frac{1}{12}m_2h^2 \\ \frac{1}{4}m_2r^2 \\ \frac{1}{4}m_2r^2 \end{array} \right) = \text{diag} \left( \begin{array}{c} J_{2x} \\ J_{2y} \\ J_{2z} \end{array} \right)$$

Se tiene que:

$$\mathbb{U}_{11} = \frac{\partial A_1^0}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} \\ C_{\theta_1} & 0 & -S_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{U}_{12} = \frac{\partial A_1^0}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\mathbb{U}_{21} = \frac{\partial A_2^0}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S_{\theta_1}C_{\theta_2} & S_{\theta_1}S_{\theta_2} & -C_{\theta_1} \\ -C_{\theta_1}C_{\theta_2} & -C_{\theta_1}S_{\theta_2} & -S_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{U}_{22} = \frac{\partial A_2^0}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} -C_{\theta_1}S_{\theta_2} & -C_{\theta_1}C_{\theta_2} & 0 \\ -S_{\theta_1}S_{\theta_2} & -S_{\theta_1}C_{\theta_2} & 0 \\ -C_{\theta_2} & S_{\theta_2} & 0 \end{bmatrix}$$

en la Ecuación (2.2), desarrollando y simplificando:

$$h_{11} = J_{1x} + J_{1z} + J_{2y} + J_{2z} + (J_{2x} - J_{2y})C_{\theta_2}^2$$

<sup>3</sup>Se asume para fines de modelado, que los cuerpos son simétricos y homogéneos, tales que los productos de inercia  $I_{xy}, I_{yz}, \dots$  son cero

$$h_{12} = 0$$

$$h_{21} = 0$$

$$h_{12} = J_{2x} + J_{2y}$$

En cuanto a los términos centrífugos y de Coriolis, se tiene de la Ecuación (2.5):

$$C_{211} = (J_{2x} - J_{2y})C_{\theta_2}S_{\theta_2} = C_{121} = -C_{112}$$

todos los demás términos son cero. En la Ecuación (2.4):

$$C_{11} = (J_{2x} - J_{2y})C_{\theta_2}S_{\theta_2}\dot{\theta}_2$$

$$C_{12} = (J_{2x} - J_{2y})C_{\theta_2}S_{\theta_2}\dot{\theta}_1 = -C_{21}$$

$$C_{22} = 0$$

Para el vector de términos gravitacionales (2.6), dada la disposición geométrica simétrica de la plataforma y la suposición de homogeneidad de los cuerpos que la componen, se tiene que:

$$g(q) = \frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

Por último se considera al término de disipación  $Dq$  como cero. Resumiendo los resultados anteriores en la Ecuación (2.1), el modelo del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta C_{\theta_2}^2 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma C_{\theta_2} S_{\theta_2} \dot{\theta}_2 & \gamma C_{\theta_2} S_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \\ -\gamma C_{\theta_2} S_{\theta_2} \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

con:

$$\alpha = J_{1x} + J_{1z} + J_+ + 2y + J_{2z}$$

$$\beta = J_{2x} - J_{2y}$$

$$\gamma = J_{2x} + J_{2y}$$

## 2.7. Modelo de fricción

En el capítulo de simulaciones se presenta un inciso en el que se prueba el desempeño de los distintos algoritmos ante la presencia de fricción. En esta sección se presentan generalidades de la fricción y el modelo particular de fricción que se utilizó, el modelo LuGre [7].

### 2.7.1. Fenómeno de fricción [8]

La fricción ocurre siempre que cuerpos en contacto experimentan un movimiento relativo. Este movimiento puede ser lineal o rotacional, pero en ambos casos la fricción se comporta básicamente de la misma forma.

La fricción es la fuerza de reacción tangencial entre dos superficies en contacto. Físicamente estas fuerzas de reacción son el resultado de toda una variedad de mecanismos y fenómenos que dependen de la geometría y topología del contacto, propiedades de porosidad y dureza de las superficies en contacto, existencia de sustancias entre las superficies, etc. Involucrados tantos factores en el fenómeno de fricción es de esperarse que sea altamente no lineal. En un sistema mecánico cuyo control se desea lograr, la fricción puede llevar a errores en estado estable, ciclos límite y bajo desempeño en general.

Existe una gran cantidad de modelos de fricción que varían tanto en complejidad como en su capacidad de replicar los fenómenos de fricción observados experimentalmente. Independientemente de la complejidad del modelo de fricción, se puede observar como factor común en todos ellos dos componentes: una de fricción viscosa y otra de fricción Coulomb. Ambas producen una fuerza que se opone al movimiento, siendo la primera proporcional a la magnitud y signo de la velocidad, en tanto que la última depende sólo del signo de la velocidad. Las componentes de fricción anteriores no presentan ningún efecto de memoria, dicho de otra forma son mapeos estáticos,

y por ende fallan en capturar importantes efectos dinámicos observados en presencia de fuerzas de fricción.

### 2.7.2. Modelo de fricción LuGre [7]

El modelo de fricción considerado en este apartado es el modelo *LuGre*, el cual captura la mayoría de los efectos de la fricción observados experimentalmente, entre los que se encuentran el efecto Stribeck, histéresis (*Frictional Lag*), efecto “*stick-slip*”, desplazamiento de predeslizamiento, fuerza de rompimiento variable, “*stiction*”, y por supuesto fricción viscosa y de Coulomb.

El modelo LuGre se relaciona con una interpretación de la fricción basada en cerdas. La fricción se modela como la deflexión promedio de cerdas microscópicas que actúan como resortes, Figura 2.5. Cuando una fuerza tangencial es aplicada, las cerdas sufren una deflexión elástica. Si la deflexión es suficientemente grande las cerdas empiezan a deslizarse. La deflexión promedio de las cerdas para un movimiento en estado estable queda determinado por la velocidad. La deflexión promedio queda denotada por  $z$  y se modela por:

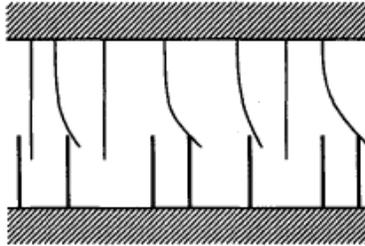


Figura 2.5: Cerdas microscópicas entre dos superficies en contacto

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)}z \quad (2.8)$$

siendo  $v$  la velocidad relativa entre las dos superficies. El primer término indica que la deflexión es proporcional a la integral de la velocidad relativa. El segundo término indica que la deflexión  $z$  tiende a un valor  $z_{ss}$  en estado estable, cuando  $v$  es constante:

$$z_{ss} = \frac{v}{|v|}g(z) = g(v)sgn(v)$$

La función  $g$  es positiva, dependiendo de factores tales como propiedades de los materiales, lubricación, temperatura, etc. Típicamente  $g(v)$  decrece monótonamente a partir de  $g(0)$  conforme  $v$  se incrementa. El modelo queda completo con la expresión de la fuerza de fricción:

$$F_L = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (2.9)$$

El parámetro  $\sigma_0$  representa la rigidez de las cerdas,  $\sigma_1$  es un coeficiente de amortiguamiento y  $\sigma_2$  es un parámetro de fricción viscosa. Para la función  $g(v)$  existe una parametrización que captura el efecto *Stribeck*, tal que:

$$\sigma_0 g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-(v/v_s)^2}$$

$F_c$  es el nivel de fricción Coulomb,  $F_s$  el nivel de fricción estática y  $v_s$  la velocidad *Stribeck*. Así, con esta parametrización de  $g(v)$  el modelo de fricción LuGre está caracterizado por 6 parámetros:  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $F_c$ ,  $F_s$  y  $v_s$ .

El modelo de fricción anterior se introduce en un par de incisos de simulación del Capítulo 4 a fin de evaluar el desempeño de los algoritmos de control ante la presencia de una dinámica no modelada. En uno de los incisos se introduce la fricción sin compensarla, mientras que en el otro se inyecta la fricción a la vez que se compensa con un observador de fricción [7]. En ambos casos, la fuerza de fricción queda fuera del análisis de estabilidad de los algoritmos de control.

# Capítulo 3

## Algoritmos de Control: Comparación cualitativa

### 3.1. Introducción

En este capítulo se revisan y comparan algoritmos de interés para cumplir la tarea de control propuesta. Las leyes de control asociadas presentan distintos grados de complejidad lo que es de por sí un punto de comparación. También queda de manifiesto que el nivel de simplicidad del algoritmo corresponde de manera inversa al peso de las suposiciones en que se basa. Las consideraciones anteriores permiten por tanto, formular ya una comparación cualitativa entre los algoritmos presentados, restando para el capítulo de simulación la comparación cuantitativa del desempeño de los distintos algoritmos.

En las secciones 3.2 y 3.3 de este capítulo se pormenorizan los objetivos de control. En particular en la sección de *Control de estabilización*, dada la naturaleza del sensor cuya *LOS* se desea estabilizar, se propone un *eje virtual* para auxiliar la tarea de rechazo de perturbaciones. Al final de estas dos secciones se presenta un diagrama del sistema de control, en el que resalta el hecho de que los objetivos de control de orientación y estabilización pueden tratarse como uno solo. El resto del capítulo presenta seis algoritmos de control con sus respectivas expresiones y análisis de estabilidad en lazo cerrado.

Los algoritmos revisados se eligieron tomando en consideración su eventual implementación. Los algoritmos presentados manejan en mayor o menor medida consideraciones de índole práctico: incertidumbres paramétricas, variaciones lentas del sistema, perturbaciones, dinámicas no modeladas, etc. Así mismo las leyes de control son expresiones cuya complejidad no es elevada, ni requieren un extenso conocimiento *a priori*.

Al final del capítulo se presenta un observador de fricción y una sección en que se hace una comparación cualitativa entre los controladores.

## 3.2. Control de Orientación

Como se adelantó en el capítulo introductorio, el objetivo de orientación se identifica con el de seguimiento, entendiéndose por seguimiento el llevar y/o conservar a la plataforma móvil en un punto de operación tal que la *LOS* del sensor que soporta (cámara) permanezca dirigido hacia el blanco. En resumen, se desea que la *LOS* siga una referencia, por lo general variable en el tiempo.

Los **comandos de orientación** que definen la trayectoria deseada para la *LOS* de un sensor, siendo éste una cámara, pueden asociarse a varias fuentes:

- **Generación autónoma de trayectoria de seguimiento:** Si el fin ulterior de la cámara es la vigilancia autónoma y el “*enganche*”<sup>1</sup> y seguimiento de blancos, los comandos de orientación de la *LOS* deseada provendrán del procesamiento digital de las mismas imágenes capturadas por la cámara. Un algoritmo de procesamiento de imágenes puede extraer coordenadas de orientación del objeto de interés “enganchado”, generalmente en movimiento, y generar las coordenadas de orientación correspondientes a fin de mantener la *LOS* dirigida hacia dicho objeto.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Término coloquial que en procesamiento de imágenes se refiere a la adquisición de un blanco en una imagen. El procesamiento extrae características significativas de la imagen, lo cual permite identificar patrones para, por ejemplo, aislar objetos, asociarles un centroide, vector de posición, vector de velocidad, etc.

<sup>2</sup>En este trabajo de tesis no se abordan detalles del procesamiento de imágenes para

- **Generación semi-autónoma de trayectoria de seguimiento:** Para fines de vigilancia o tareas de búsqueda, la *LOS* de una cámara comúnmente deberá seguir un patrón predeterminado que replique cierta *trayectoria de barrido*.
- **Generación manual de trayectoria de seguimiento:** Un operador humano puede generar mediante alguna interfaz (*joystick*, pantalla táctil, etc.) los comandos de orientación de la *LOS* de una cámara

### 3.3. Control de Estabilización

Los movimientos irregulares en las embarcaciones a la mar son el resultado de una gran cantidad de factores: tipo de mar que se navega (nivel del oleaje); velocidad de la embarcación; dirección y sentido de movimiento; peso y tamaño de la embarcación, distribución de la carga, etc. Como puede verse se trata de un sistema muy complejo en el que lo más conveniente es centrarse en el efecto final sobre el sistema de interés, que en el caso de este trabajo son las perturbaciones rotacionales que sufre la *LOS* de referencia de una cámara sobre una plataforma móvil.

Como en el caso de la orientación, pueden reconocerse varias fuentes que dirigen la **tarea de estabilización**

- **Acelerómetros lineales:** Una de las técnicas para conocer los movimientos lineales y rotacionales que sufre un cuerpo es adosándole sensores de aceleración lineal. Al disponer varios de estos sensores en ejes de movimiento ortogonales, y conociendo la disposición relativa entre ellos, se puede, con base en las mediciones lineales y operaciones de integración y geometría, conocer desplazamientos lineales y angulares.
- **Sensores de tasa de giro:** Este tipo de sensor mide velocidades de giro de un objeto alrededor de ejes de movimiento perpendiculares. La integración de estas señales permite conocer los desplazamientos angulares.

---

obtener una *LOS* deseada, se da por hecho que se tiene una señal que comanda la orientación de la plataforma. Las únicas referencias que se hacen al procesamiento de imágenes (en la subsección 3.3.1) quedan circunscritas a la tarea de estabilización.

- **Giros de estado sólido:** Una giro de estado sólido suele componerse a su vez de acelerómetros lineales, sensores de tasa de giro e incluso sensores de campo magnético, para integrar su información y proporcionar lecturas de posición angular, absoluta o relativa.

Tan importante como el tipo de fuente que genera la información de desplazamientos angulares, es el lugar en que se ubica. En el próximo capítulo se hacen consideraciones sobre la ubicación de los sensores para una tarea de estabilización. También se indicará a detalle como se miden los ángulos y se establecen las referencias respectivas.

### 3.3.1. Estabilización de balanceo: Grado de libertad “virtual” en balanceo

Hasta ahora se ha considerado que el sistema propuesto opera con dos articulaciones de revolución. Como se mencionó antes, dos grados de libertad rotacionales son suficientes para mantener dirigido un haz hacia un objetivo de interés. Pero tratándose el sensor de una cámara, las rotaciones alrededor de su eje de balanceo no pueden pasarse por alto, pues detrimentan la imagen observada. Con el fin de estabilizar perturbaciones de la imagen en el eje de balanceo se propone un tercer grado de libertad en el eje de balanceo, sólo que “virtual” y que opera a nivel de procesamiento de imagen.

A continuación se presentan las tareas propuestas para la implementación del grado de libertad virtual ya mencionado<sup>3</sup>:

1. Algoritmo para rotar la imagen  $n$  grados.
2. Conexión del algoritmo de rotación de imagen con el sensor de posición angular que mide el estado del eje de balanceo, a fin de efectuar el giro proporcional que estabilice la imagen.
3. Filtro suavizador y predictor para las lecturas del sensor de posición angular, que por un lado ofrezca valores “suaves” del estado del eje de

---

<sup>3</sup>Se pueden consultar algunos otros detalles en el apéndice “Grado de libertad virtual en eje de balanceo”

balanceo (lo que se traduce en rotaciones “suaves” de la imagen) y que por otro lado estime el próximo estado del eje de balanceo permitiendo un desempeño predictivo del sistema.

El esquema de control propuesto es el que se ilustra en la Figura 3.1. En el puede verse como las tareas de orientación y estabilización se resuelven en una especie de “seguimiento diferencial”, como se sugería ya en la Figura 1.2 del Capítulo 1. El esquema representa el caso general en que se considera la fricción y su compensación así como la estabilización de imagen (que no obstante, no son temas capitales de este trabajo).

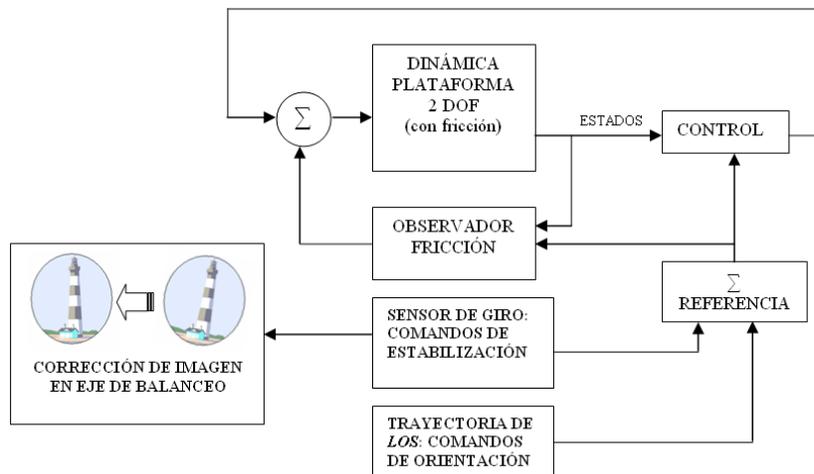


Figura 3.1: Esquema de control. Las lecturas del sensor de giro alimentan las correcciones mecánicas en cabeceo y guiñada y la corrección en balanceo de la imagen.

### 3.4. Métodos de control para manipuladores

No existe un método general en el diseño de controladores para sistemas no lineales. Lo que se suele hacer por tanto, es usar técnicas complementarias de análisis y síntesis: en base al análisis del modelo del sistema por alguno o varios de los métodos disponibles (análisis de Lyapunov, método de función

descriptiva, análisis del plano de fase, etc.) se puede sintetizar un controlador cuyo buen desempeño en la práctica pueda presumirse en base al análisis previo y las simulaciones computacionales realizadas.

### 3.4.1. PD+

El primer tipo de control revisado, con una expresión bastante sencilla es el  $PD+$ . El control  $PD+$  compensa las no linealidades modeladas del manipulador de interés a la vez que incorpora términos que garantizan la convergencia (asintótica como se verá adelante) del error a cero en condiciones nominales. El  $PD+$  puede también tener un buen desempeño en condiciones de perturbación o incertidumbre paramétrica pero a costa de valores de ganancia relativamente altos.

Sea la ley de control  $PD+$  [2]:

$$\tau = H(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + D\dot{q}_d + g(q) - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q} \quad (3.1)$$

con  $D \geq 0$ ,  $K_v$ ,  $K_p > 0$  diagonales, y definiéndose  $\tilde{q} = q - q_d$ , siendo  $q_d$  el estado deseado y  $q$  el estado actual. Se pueden analizar las propiedades de esta ley de control empleando teoría de Lyapunov. Sea (3.1) en la Ecuación (2.1):

$$H(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} + (K_v + D)\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} = 0 \quad (3.2)$$

Si se usa como candidata a función de Lyapunov la función:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T H(q)\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p\tilde{q}$$

derivando  $V$ :

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \dot{H}(q)\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T H(q)\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T K_p\tilde{q}$$

sustituyendo  $H(q)\ddot{\tilde{q}}$  de (3.2), agrupando términos y por la propiedad de antisimetría de  $H(q) - 2C(q, \dot{q}) = 0$ , se tiene:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T (K_v + D) \dot{\tilde{q}}$$

que es una función negativa semi-definida. Empleando el teorema de *La Salle* de conjuntos invariantes al conjunto de puntos:

$$\{(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \mid \dot{\tilde{q}} = 0\}$$

en (3.2):

$$K_p \tilde{q} = 0$$

que se cumple sólo para  $\tilde{q} = 0$  pues por definición  $K_p$  es positiva definida. Se tiene pues un resultado de estabilidad asintótica para el sistema en lazo cerrado (3.2).

### 3.4.2. Control Adaptable

La aproximación adaptable al problema de control permite lidiar con incertidumbres de orden paramétrico en el modelo del sistema, o bien con sistemas variantes (lentamente) en el tiempo. Así pues, la incertidumbre de los sistemas atacables con el control adaptable se atribuye al conocimiento impreciso de los parámetros del modelo, y no a su estructura en sí. El control adaptable como método de control único en una aplicación real no es muy usado, pues no tiene un buen desempeño ante perturbaciones, dinámicas no modeladas o parámetros que varían rápidamente (este último fenómeno puede deberse a su vez a un modelado inadecuado), y por tanto suele emplearse en complemento con un método de control robusto.

Sea el sistema (2.1) representado mediante una *parametrización lineal* de la forma:

$$\tau = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{\varphi}_0 = \Psi_a \quad (3.3)$$

siendo  $\Psi$  una matriz conocida y  $\hat{\varphi}_0$  un vector de parámetros nominales [1]. A  $\Psi$  se le denomina *matriz regresora* o simplemente *regresor*.

El control adaptable propone una ley de variación para el vector de parámetros nominales  $\hat{\varphi}_0$  tal que cada iteración de control ajusta dicho vector

de forma que el error de seguimiento disminuye, e incluso, si las condiciones son adecuadas <sup>4</sup>, el vector nominal puede converger al vector de parámetros reales  $\varphi$ .

Sea la ley de control adaptable [1] :

$$\tau = \Psi(q, \dot{q}, \dot{q}_v, \ddot{q}_v)\hat{\varphi}_0 - K_v S \quad (3.4)$$

con la ley de adaptación:

$$\dot{\hat{\varphi}}_0 = -\Gamma^{-1}\Psi^T(q, \dot{q}, \dot{q}_v, \ddot{q}_v)S$$

donde:

$K_v = D + K$ ,  $K > 0$  diagonal;  $\Lambda, \Gamma > 0$  diagonales;  $S = \dot{q} - \dot{q}_v = \dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q}$ , y  $\dot{q}_v = \dot{q}_d - \Lambda\tilde{q}$ ;  $q_d$  y  $\tilde{q}$  como se definieron en 3.4.1.

La ley de control se puede reescribir como:

$$\tau = \Psi\hat{\varphi}_0 - K_v S + \Psi\varphi - \Psi\varphi = \Psi\varphi - K_v S + \Psi\tilde{\varphi}; \text{ con } \tilde{\varphi} \triangleq \hat{\varphi}_0 - \varphi.$$

En lazo cerrado en la Ecuación del sistema (2.1):

$$H(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_v) + C(q, \dot{q})(\dot{q} - \dot{q}_v) + D(\dot{q} - \dot{q}_v) + K_v S = \Psi\tilde{\varphi}$$

por la definición de  $S$ :

$$H(q)\dot{S} + C(q, \dot{q})S + (K_v + D)S = \Psi\tilde{\varphi} \quad (3.5)$$

Si se propone como candidata a función Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}S^T H(q)S + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}^T \Gamma \tilde{\varphi}$$

---

<sup>4</sup>La condición de convergencia paramétrica para control adaptable de sistemas no lineales y lineales se conoce como *excitación persistente* y en general implica que la señal de referencia contenga suficiente “riqueza” frecuencial para estimular la dinámica de adaptación. Para sistemas lineales en general se requieren  $m/2$  frecuencias para la convergencia de  $m$  parámetros desconocidos. Para sistemas no lineales con parametrización lineal la regla aplica sobre la matriz regresora, tal que  $\int_0^T \Psi^T \Psi dt > \alpha I$  para un determinado tiempo  $T$  y  $\alpha > 0$

que derivando:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}S^T H(\dot{q})S + S^T H(q)\dot{S} + \tilde{\varphi}^T \Gamma \dot{\tilde{\varphi}}$$

sustituyendo  $H(q)\dot{S}$  de 3.5 y dado que  $\dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\tilde{\varphi}}_0 = -\Gamma^{-1}\Psi^T S$ , se tiene:

$$\dot{V} = -S^T(D + K_v)S \leq 0$$

Se puede alcanzar un resultado de estabilidad si  $S \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . El lema de Barbalat permite obtener este resultado. Dado que  $V$  tiene un límite inferior y  $\dot{V} \leq 0$ , entonces  $V(t) \leq V(0)$  y  $S$  y  $\tilde{\varphi}$  están acotados (así como los términos asociados  $q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$ ). Puesto que  $\dot{V} = -2S^T(D + K_v)\dot{S}$  está acotada ( $\dot{S}$  está en función de términos acotados) entonces  $\dot{V} \rightarrow 0$  con  $t \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.4.3. Control Robusto

La implementación de la ley de control ( 3.1) requiere que el modelo dinámico y los parámetros asociados se conozcan de manera precisa y además que el conjunto de ecuaciones de movimiento se pueda calcular en tiempo real. En la práctica, tales requerimientos son difíciles de satisfacer. Para los sistemas físicos siempre existirá incertidumbre respecto a los valores de los parámetros que lo describen. Por su parte la ley de control (3.4) representa un avance permitiendo incertidumbre paramétrica, pero con la premisa de la certeza del modelo dinámico. Prácticamente siempre habrá cancelaciones inexactas de las no linealidades del sistema debido a las incertidumbres, el redondeo computacional, etc. El siguiente paso natural hacia una expresión de control es una ley que tolere la incertidumbre paramétrica y de modelado.

Con relación a la parametrización lineal ( 3.3), cuando se puede hacer una aseveración del valor  $\rho$  tal que  $\|\hat{\varphi}_0 - \varphi\| \leq \rho$ , siendo  $\varphi$  el valor real del vector de parámetros, entonces puede aplicarse una ley de control que compensa la incertidumbre del vector nominal  $\hat{\varphi}_0$ , tal que :

$$\tau = \Psi_a - K_v S + \Psi_a U \tag{3.6}$$

donde:

$$U = \begin{cases} -\rho \frac{\Psi_a^T S}{\|\Psi_a^T S\|} & \|\Psi_a^T S\| > \epsilon \\ -\rho \Psi_a^T S / \epsilon & \Psi_a^T S \leq \epsilon \end{cases}$$

con:

$K_v = D + K$ ,  $K > 0$  diagonal, y  $\Psi_a$  como en (( 3.3)) [2].

Procediendo como en la sección anterior, sumando y restando a la expresión (3.6) el valor real  $\varphi$ , en lazo cerrado en la Ecuación (2.1) y de la definición de  $S$ :

$$H(q)\dot{S} + C(q, \dot{q})S + K_v S = \Psi_a(\tilde{\varphi} + U) \quad (3.7)$$

con  $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_0 - \varphi$

Proponiendo como candidata a función Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} S^T H(q) S + q^T \Lambda K_v \tilde{q}$$

Derivando  $V$ , sustituyendo  $H(q)\dot{S}$  de (3.7), y por  $\dot{H} - 2C = 0$ , se tiene:

$$\dot{V} = S^T \Psi_a \tilde{\varphi} + S^T \Psi_a U + 2\tilde{q}^T \Lambda K_v \dot{\tilde{q}} - S^T K_v S$$

de la definición de  $S$ , desarrollando:

$$S^T K_v S = \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} + \tilde{q}^T \Lambda K_v \Lambda \tilde{q} + 2\dot{\tilde{q}}^T K_v \Lambda \tilde{q}$$

Si se definen  $x = [\tilde{q}; \dot{\tilde{q}}]^T$  y  $Q = \begin{bmatrix} \Lambda K_v \Lambda & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix}$ , se tiene:

$$\dot{V} = S^T \Psi_a (\tilde{\varphi} + U) - x^T Q x$$

**CASO A:**  $\|\Psi_a^T S\| > \epsilon$

$$\dot{V} = S^T \Psi_a \tilde{\varphi} - \frac{\rho S^T \Psi_a}{\|\Psi_a^T S\|} S^T \Psi_a - x^T Q x \leq \|\Psi_a^T S\| \|\tilde{\varphi}\| - \rho \|\Psi_a^T S\| - x^T Q x$$

pero por definición  $\|\tilde{\varphi}\| \leq \rho$

$$\dot{V} \leq 0$$

**CASO B:**  $\|\Psi_a^T S\| \leq \epsilon$

$$\dot{V} = S^T \Psi_A \tilde{\varphi} - \frac{\rho}{\epsilon} \|\Psi_a^T S\|^2 \leq \|\Psi_a^T S\| \rho - \frac{\rho}{\epsilon} \|\Psi_a^T S\|^2$$

el lado derecho de la desigualdad representa una ecuación en  $\|\Psi_a^T S\|$  con un valor máximo en el intervalo  $[0, \epsilon]$  de  $\frac{\epsilon\rho}{4}$  en  $\|\Psi_a^T S\| = \frac{\epsilon}{2}$ , por tanto:

$$\dot{V} \leq -x^T Q x + \frac{\epsilon\rho}{4}$$

Para matrices positivas definidas como  $Q$  existen los eigenvalores  $\lambda_{min}(Q)$ ,  $\lambda_{max}(Q)$  tales que:

$$\lambda_{min}(Q) \|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{max}(Q) \|x\|^2$$

por tanto

$$\dot{V} \leq -\lambda_{min}(Q) \|x\|^2 + \frac{\epsilon\rho}{4}$$

así mismo para toda función cuadrática como  $V \exists \lambda_1, \lambda_2 > 0$  tales que:

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq V \leq \lambda_2 \|x\|^2$$

si,  $\dot{V} < 0 \Rightarrow V(t) \leq V(t_0)$ , por tanto

$$\|x\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|x(t_0)\|$$

para que  $\dot{V} < 0$  es necesario que:

$$\|x\| > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\rho}{\lambda_{min}(Q)}} \quad (I)$$

así que, cuando  $\dot{V} > 0$ ,  $\|x\|$  crece hasta que (I) se vuelve a satisfacer y  $\dot{V} < 0$ , y  $\|x\|$  está acotado por:

$$\|x\| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \sqrt{\frac{\epsilon \rho}{\lambda_{\min}(Q)}}$$

y se tiene un resultado de estabilidad práctica.

### 3.4.4. Modos deslizantes

El control por modos deslizantes es un tipo de control de los denominados de estructura variable. Un controlador robusto fuerza a los estados, combinados en una *variable deslizante*, a alcanzar una superficie o *modo deslizante*, en la que la dinámica se reduce. La dinámica se conserva en el modo deslizante, sobre el cual se persigue la convergencia a cero del error de seguimiento. Los modos deslizantes convencionales (lineales) son un control relevado basado en la función signo, lo que resulta en controladores de alta ganancia y con un efecto indeseable conocido como troceo o *chattering*, que es la conmutación excesivamente rápida de la señal de control. Ante la poca practicidad de los Modos Deslizantes Lineales, se han desarrollado otras formas como los Modos Deslizantes Terminales, tipo de control basado en una función “suave” (en vez de la función discontinua signo) que resulta en un esfuerzo de control reducido en el transitorio y atenuación del *chattering*. Se revisan a continuación dos de estos algoritmos.

#### MODOS DESLIZANTES TERMINALES I: MDT1 [15]

Pártase nuevamente de la parametrización lineal del sistema, con vector de parámetros nominales  $\hat{\varphi}_0$  tal que  $\|\hat{\varphi}_0 - \varphi\| \leq \rho$ . Sea la ley de control :

$$\tau = \Psi(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\hat{\varphi}_0 + w) - K s^r \quad (3.8)$$

con :

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}^p$$

$$\ddot{q}_r = \ddot{q}_d - p \Lambda \text{Dia}[\tilde{q}_1^{p-1} \dots \tilde{q}_n^{p-1}] \dot{\tilde{q}}$$

$$\tilde{q}^p \triangleq [\tilde{q}_1^p \dots \tilde{q}_n^p]^T$$

$$s^r \triangleq [s_1^r \dots s_n^r]^T$$

$$s = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}^p$$

$\frac{1}{2} < p \leq 1, 0 < r \leq 1; K, \Lambda > 0$ , diagonales

$$w = \begin{cases} -\rho \frac{\Psi^T s}{\|\Psi^T s\|} & \|\Psi^T s\| > 0 \\ 0 & \|\Psi^T s\| = 0 \end{cases}$$

De (3.8) en lazo cerrado en (2.1):

$$H(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Ks^r = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)(\tilde{\varphi} + w)$$

Proponiendo como candidata a función Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} s^T H(q) s$$

derivando  $V$  y por  $\dot{H} - 2C = 0$ , se tiene:

$$\dot{V} = -s^T K s^r + s^T \Psi(\tilde{\varphi}_0 + w) \quad (3.9)$$

Para el término  $s^T K s^r$  se tiene:

$$s^T K s^r = \sum_{i=1}^n k_i s_i^{r+1} \geq \alpha \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \bar{m} s_i^2 \right\}^\eta \geq \alpha V^\eta$$

con  $\eta \triangleq (1+r)/2$ ,  $\alpha \triangleq k_{\min} \left\{ \frac{2}{\bar{m}} \right\}^\eta$ , con  $k_{\min} \triangleq \min_i \{k_i\}$

cuando  $\|\Psi^T s\| = 0$  el término  $s^T \Psi(\tilde{\varphi}_0 + w)$  es cero, y de las definiciones de  $w$  y  $\rho$  cuando  $\|\Psi^T s\| > 0$ , se tiene:

$$s^T \Psi(\tilde{\varphi}_0 + w) = s^T \Psi \left( \tilde{\varphi} - \rho \frac{\Psi^T s}{\|\Psi^T s\|} \right) \leq \|s^T \Psi\| (\|\tilde{\varphi}\| - \rho) \leq 0$$

en resumen, conjuntando los resultados para los dos términos de (3.9):

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V^\eta, \forall t \geq 0 \quad (3.10)$$

Un lema de desigualdades diferenciales establece que, siendo  $V(t)$  una función positiva definida cuya derivada satisface (3.10),  $\forall t_0 \geq 0, V(t_0) \geq 0$  con  $\alpha > 0, 0 < \eta < 1$ , entonces,  $V(t) = 0, \forall t \geq t_1$  con  $t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{\alpha(1-\eta)}$ .

Dado lo anterior, el algoritmo de control conduce a señales uniformemente acotadas y a un error de seguimiento  $\tilde{q}(t) = 0$  para  $t \geq t_T$  con  $t_T < \infty$

## MODOS DESLIZANTES TERMINALES II: MDT2 [15]

Respecto al control anterior [15], en cuyo algoritmo aparece el término  $\rho$ , tal que  $\|\hat{\varphi}_0 - \varphi\| \leq \rho$ , y un término  $w$  cuyo valor depende de la magnitud  $\|\Psi^T s\|$ , se propone una variación del control en la cual se estime  $\rho$  y la expresión de  $w$  conste de un sólo término. Lo anterior implica, por un lado, que no sea necesario el conocimiento *a priori* de  $\rho$ , y por otro lado, que la ley de control adquiriera una expresión más sencilla. Sea pues:

$$\dot{\hat{\rho}} = -\sigma \hat{\rho} + \gamma \frac{\|\Psi^T s\|}{\|\Psi^T s\| + \epsilon}$$

y

$$w = -\hat{\rho} \frac{\Psi^T s}{\|\Psi^T s\| + \epsilon}$$

con  $\epsilon, \sigma, \gamma > 0$ , conservándose todos los demás términos como en el control anterior.

De (3.8) en lazo cerrado en (2.1) con las nuevas expresiones de  $w$  y  $\rho$ , y de la definición de  $s$ , se tiene la siguiente dinámica para el error:

$$H(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Ks^r = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)(\tilde{\varphi} + w)$$

Sea la candidata a función Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}s^T H(q)s + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\rho}^2, \text{ con } \tilde{\rho} \triangleq \hat{\rho} - \rho$$

de donde la derivada de  $V$  sobre las trayectorias de la dinámica del error, es:

$$\dot{V} = s^T H(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{H}(q)s + \frac{1}{\gamma}\tilde{\rho}\dot{\tilde{\rho}}$$

$$\dot{V} = s^T [-C(q, \dot{q}) - Ks^r + \Psi(\tilde{\varphi} + w)] + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \frac{1}{2} s^T H(q) s$$

$$\dot{V} = -s^T K s^r + s^T \Psi(\tilde{\varphi} + w) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho} \dot{\hat{\rho}}$$

o de la definición de  $w$  y  $\hat{\rho}$

$$\dot{V} = \underbrace{-s^T K s^r}_{-\kappa} + \underbrace{s^T \Psi \left( \tilde{\varphi} - \rho \frac{\Psi^T s}{\|\Psi^T s\| + \epsilon} \right)}_{\lambda} \underbrace{- \tilde{\rho} \frac{\|\Psi^T s\|^2}{\|\Psi^T s\| + \epsilon} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho} \dot{\hat{\rho}}}_{\mu}$$

Del inciso anterior para  $\kappa$ :

$$\kappa \geq \alpha V^\eta$$

además para  $\lambda$ :

$$\lambda \leq \|\Psi^T s\| \left( \|\tilde{\varphi}\| - \rho \frac{\|\Psi^T s\|}{\|\Psi^T s\| + \epsilon} \right)$$

$$\text{si } \|\Psi^T s\| \leq \epsilon :$$

$$\lambda \leq \frac{\epsilon}{2} \rho$$

$$\text{si } \|\Psi^T s\| \gg \epsilon :$$

$$\lambda \leq 0.$$

Para  $\mu$ , dado que  $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\tilde{\rho}}$ , y de la definición de  $\tilde{\rho}$ :

$$\mu = \frac{\tilde{\rho}}{\gamma} \left( \dot{\tilde{\rho}} - \gamma \frac{\|\Psi^T s\|}{\|\Psi^T s\| + \epsilon} \right)$$

$$\mu = \frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho} \tilde{\rho}$$

$$\mu = -\frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho}^2 + \frac{\sigma}{\gamma} \rho$$

Conjuntando los resultados se puede establecer que:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^\eta - \frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho}^2 + K$$

siendo  $K = \frac{\sigma}{\gamma} \rho + \frac{\epsilon}{2} \rho$  una constante positiva que depende del parámetro constante desconocido  $\rho$ , pero también de los parámetros controlables  $\gamma$ ,  $\epsilon$  y  $\sigma$ . En cualquier caso, cuando  $\dot{V} > 0$ ,  $V$  aumenta hasta que nuevamente  $\dot{V} < 0$  y se tiene un resultado de estabilidad práctica.

### MODOS DESLIZANTES TERMINALES III: NMDT [16]

Otra forma de Modos Deslizantes Terminales que ofrece un desempeño rápido y de alta precisión, es la presentada a continuación. Sea la representación del sistema en la forma:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + \tau_d + F(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (3.11)$$

representando  $\tau$  el control,  $\tau_d$  un vector de perturbación externa acotada y  $F(q, \dot{q}, \ddot{q})$  incertidumbre concentrada del sistema. Sea pues, la siguiente ley de control:

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 \quad (3.12)$$

donde:

$$\tau_0 = H(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

$$\tau_1 = -H(q)(k_1 s - k_2 \text{sig}(s)^\rho)$$

siendo el modo deslizante:

$$s = \tilde{q} + \beta \text{sig}(\tilde{q}^\gamma) = 0$$

con:

$$k_1 = \text{diag}(k_{11}, \dots, k_{1n}), k_2 = \text{diag}(k_{21}, \dots, k_{2n}), k_{1i} > 0, k_{2i} > 0, \beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n), \beta_i > 0, 0 < \gamma_i < 1, 0 < \rho = \rho_i = \dots = \rho_n < 1.$$

definiéndose  $\text{sig}(x)^\gamma$  como:  $\text{sig}(x)^\gamma = [|x_1|^{\gamma_1} \text{sign}(x_1) \dots \text{sig}(x)^\gamma |x_n|^{\gamma_n} \text{sign}(x_n)]$ .

Para analizar las propiedades de estabilidad de la ley de control (3.12), se presenta el Lema 1 y una forma extendida de Lyapunov para estabilidad en tiempo finito para modos deslizantes terminales [16]:

**Lema 1:** Supóngase que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $0 < p < 2$  son todos números positivos, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^2$$

**Forma extendida de Lyapunov para MDT:**

$$\dot{V}(x) + \alpha V(x) + \beta V^\gamma(x) \leq 0, 0 < \gamma < 1$$

Sea la candidata a función Lyapunov:

$$V = \frac{\|s\|^2}{2}$$

Derivando  $V$ , sustituyendo (3.12) y utilizando el Lema 1, se tiene:

$$\dot{V} = s^T \beta \gamma \text{diag}(|\dot{\tilde{q}}|^{\gamma-1}) H(q)^{-1} (\tau_1 + F + \tau_d) \quad (3.13)$$

Para  $F=0$  y  $\tau_d = 0$  (3.13) se puede expresar como:

$$\dot{V} = -s^T \underline{\mathbf{k}}_1 s - s^T \underline{\mathbf{k}}_2 \text{sig}(s)^p$$

con  $\underline{\mathbf{k}}_1 = \beta \gamma \text{diag}(|\tilde{q}^{\gamma-1}|) k_1 \in R^{n \times n}$  y  $\underline{\mathbf{k}}_2 = \beta \gamma \text{diag}(|\tilde{q}^{\gamma-1}|) k_2 \in R^{n \times n}$  son

matrices diagonales positivas definidas si cualquier  $\dot{\tilde{q}}_i \neq 0$ . Del Lema 2, se tiene:

$$\dot{V} \leq -2\underline{k}_1 V - 2^{(p+1)/2} \underline{k}_2 V^{(p+1)/2}$$

donde  $\underline{k}_1 = \min_i \underline{k}_{1i} > 0$  y  $\underline{k}_2 = \min_i \underline{k}_{2i} > 0$  son los mínimos eigenvalores de  $\underline{\mathbf{k}}_1$  y  $\underline{\mathbf{k}}_2$  respectivamente y  $1/2 < (p+1)/2 < 1$ . De acuerdo al criterio de estabilidad en tiempo finito, el modo deslizante terminal se alcanzará en tiempo finito y posteriormente el error de seguimiento  $\tilde{q}$  convergirá a cero también en tiempo finito.

**II:** Para  $F \neq 0$  y  $\tau_d \neq 0$  la trayectoria del sistema converge a la vecindad del TSM  $s=0$  tal que:

$$\|s\| \leq \Delta = \min \Delta_1, \Delta_2,$$

$$\Delta_1 = \frac{\|M_0^{-1}(q)\|(b_0+b_1\|q\|+b_2\|\dot{q}\|^2)}{\underline{k}_1}, \quad \Delta_2 = \left( \frac{\|M_0^{-1}(q)\|(b_0+b_1\|q\|+b_2\|\dot{q}\|^2)}{\underline{k}_2} \right)^{1/p},$$

$$\text{donde } \|F(q, \dot{q}, \ddot{q})\| \leq b_0 + b_1 \|q\| + b_2 \|\dot{q}\|^2 \text{ y } \tau_d \leq d$$

El error de seguimiento  $\tilde{q}_i$  y  $\dot{\tilde{q}}$  convergen a las regiones:

$$|\tilde{q}_i| \leq \Delta_{\tilde{q}} = 2\Delta, \quad |\dot{\tilde{q}}_i| \leq \Delta_{\dot{\tilde{q}}} = \left( \frac{\Delta}{\beta_i} \right)^{1/\gamma_i} \text{ en tiempo finito}^5.$$

### 3.4.5. Compensación de fricción: observador

El término de fricción  $F_L$  se puede integrar al modelo (2.1) como un término aditivo

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Dq + g(q) = \tau - F_L \quad (3.14)$$

Un esquema de control que compense el fenómeno de fricción debe incluir un estimador que prediga su valor. Este estimador ha de basarse en un modelo de fricción, en el caso considerado, el modelo LuGre, el cual como ya se

---

<sup>5</sup>La demostración de las propiedades enunciadas resulta extensa y no se consigna en este trabajo. Puede consultarse en [16]

vió depende de seis parámetros, es dinámico y tiene un estado no medible  $z$ . Si se asume que se conocen los parámetros  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $g(v)$  de (2.8) y (2.9) se puede usar un observador no lineal de fricción, tal que:

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)}\hat{z} - ke$$

$$\hat{F}_L = \sigma_0\hat{z} + \sigma_1\frac{d\hat{z}}{dt} + \sigma_2v$$

donde  $e = x - x_d$  es el error de posición y  $x_d$  es la posición deseada que se asume 2 veces diferenciable.

El diagrama a bloques de la Figura 3.2 describe al sistema con la adición de la fuerza de fricción y el observador correspondiente:

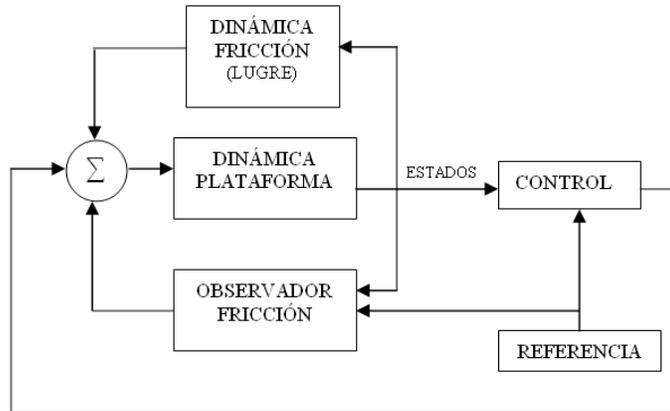


Figura 3.2: Diagrama a bloques del sistema con fricción y observador de fricción

Como se mencionó en la sección 2.7.2, no se presenta en este trabajo prueba formal de estabilidad del sistema de control ante la presencia de fricción ni tras la inclusión del observador de fricción. Este trabajo se limita a incorporar la fricción como una dinámica no modelada, en su oportunidad simplemente compensada con la ayuda del observador ya presentado<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>En [7] se demuestra que cuando los parámetros de fricción se conocen, el error del

## 3.5. Comparación cualitativa entre algoritmos

### *PD+*

Presenta la estructura más simple, con un término que compensa no linealidades. La convergencia asintótica se asegura para el caso nominal y sólo una alta ganancia asegura un desempeño adecuado para casos no nominales. Es el control con más exigencias *a priori* y restricciones.

### *Control Adaptable*

Permite lidiar con incertidumbre paramétrica, pero parte de la premisa de estructura conocida. Se sabe que su respuesta ante perturbaciones o dinámicas no modeladas no es muy buena. Los parámetros convergen en condición de excitación persistente, pero en caso de excitación no persistente o dinámicas no modeladas puede ocurrir un problema de *deriva*: el error de seguimiento puede mantenerse pequeño en tanto los parámetros divergen de los reales hasta un punto tal en que el sistema se vuelve inestable. Respecto al control PD+, aumenta el número de expresiones y por los problemas conocidos de deriva resulta un tipo de control que no se autosustenta en términos prácticos.

### *Control Robusto*

Este control es un paso adelante respecto al controlador adaptable. Igual que en el control adaptable se parte del supuesto que el vector de parámetros nominales difiere del real, pero en vez de implementar una ley de adaptación para el vector de parámetros nominales, se compensa la ley de control con un término que depende de la magnitud del error entre los parámetros nominales y los reales. Esta aproximación solventa el problema de *deriva* de parámetros, evitando que el sistema escape y se desestabilice. A fin de cuentas se alcanza un resultado de estabilidad práctica al estar los estados ultimadamente acotados en función de parámetros manipulables. Este resultado de estabilidad es menos fuerte que el del caso adaptable, pero más robusto ante dinámicas no modeladas y perturbaciones. Se advierte en el controlador robusto un compromiso entre la cota final del vector de estados y la ganancia del control, al ser estas dos magnitudes inversamente proporcionales.

---

observador de fricción converge asintóticamente a cero

## ***Control por Modos Deslizantes***

### *MDT1*

El control MDT1 al igual que el control robusto, compensa la incertidumbre en el vector de parámetros, pero el término de compensación  $w$  es un término de magnitud constante que se aplica sólo cuando existe error de seguimiento. A diferencia de los controladores previos que presentan en la ley de control un término proporcional al error de seguimiento y a la tasa de error de seguimiento, esta ley de control presenta una función exponencial fraccionaria de dichas magnitudes. Esto tiene como efecto un control suave y con magnitudes menores a los casos anteriores (en la etapa transitoria), pero que usualmente requiere tiempos de respuesta mayores. La expresión de control resulta la más sencilla entre los controladores deslizantes revisados, además de alcanzar un fuerte resultado de estabilidad, como lo es el de señales uniformemente acotadas y convergencia del error de seguimiento a cero en tiempo finito.

### *MDT2*

Partiendo de MDT1, la ley MDT2 propone una simplificación a la expresión de control para el término  $w$ , así como un esquema adaptable para establecer el valor del término  $\rho$ . El esquema MDT2 representa una mejora respecto a MDT1 en los rubros de simplicidad del algoritmo y cantidad de información *a priori* (al no tener que conocerse de antemano el valor de  $\rho$ ). Sin embargo para MDT2 se establece un resultado de estabilidad menos fuerte que para MDT1: estabilidad práctica.

### *NMDT*

La expresión de control resulta la más compleja de las revisadas, pero así mismo la más completa al incluir términos que compensan explícitamente las perturbaciones y dinámicas no modeladas. Los resultados de estabilidad obtenidos son fuertes: de convergencia del error a cero en tiempo finito para casos nominales y de estabilidad práctica para el caso con perturbación.

# Capítulo 4

## Simulación: Comparación cuantitativa

### 4.1. Introducción

En este capítulo se realizan simulaciones del sistema para las leyes de control revisadas en el capítulo anterior con lo que se pueden comparar cuantitativamente los distintos algoritmos. En la sección 4.2 se presentan señales reales características del movimiento del tipo de buque de interés, las cuales se usan para alimentar las simulaciones.

En la sección 4.3 se hacen consideraciones respecto a la aproximaciones *directa* e *indirecta* al realizar la disposición de los sensores que miden el giro alrededor de los ejes de interés, haciendo alusión a los resultados de [6]. Así mismo se ejemplifica como se realizan las mediciones angulares en el esquema de control propuesto.

En la sección 4.5 se presenta una estrategia que permite disminuir significativamente la amplitud de las transiciones abruptas de la señal de control, al suavizar las derivadas de las señales de referencia.

En la sección 4.6 se resume en una tabla los algoritmos de control revisados y se presentan las gráficas resultantes de las simulaciones de control del sistema representado por la Ecuación (2.7) para varias condiciones.

En la sección final se realiza la comparación cualitativa del desempeño de los controladores. Se presenta una tabla de parámetros ponderados en base a los cuales se califica el desempeño de los algoritmos.

## 4.2. Señal característica de la mar

Como se adelantó en la sección 3.3 el movimiento que se experimenta sobre un barco depende de factores muy diversos, como por ejemplo, la velocidad de navegación (que para las embarcaciones de interés es de 0 a 20 nudos<sup>1</sup>), el sentido de movimiento, el estado de la mar, incluso la disposición de la carga al interior del buque.

En general se pueden identificar 4 tipos de movimiento importantes del buque, a saber: el movimiento hacia adelante, el movimiento hacia atrás, el movimiento de cambio de rumbo y el estado en el que el buque debe conservar su posición respecto al fondo del mar, en lenguaje marinerero se denomina “*estar al paio*”.

Las gráficas de la Figura 4.1 presentan un conjunto de señales características de los movimientos de rotación que experimenta un buque a la mar y permiten tener una idea de las perturbaciones a que se ve sometido un sensor abordo de una embarcación.

Las señales que se presentan fueron obtenidas de giros de estado sólido en un buque de la marina de México. Cabe resaltar que la frecuencia de muestreo es de entre 9 y 10 Hz por limitaciones de las giros usadas. Ello indica que de acuerdo al teorema de Nyquist<sup>2</sup> tal frecuencia de muestreo captura fenómenos en frecuencias dentro del rango de 0 a 5 hertz. Se tiene reportado que para las embarcaciones de interés, existe una componente de vibración persistente alrededor de 15 Hz, la cual se atribuye al conjunto estructura-sistema de máquinas del buque. No obstante, esta frecuencia resulta muy alta comparada con la dinámica del mar y su componente de energía es

---

<sup>1</sup>Un nudo, *knt* equivale a 0.515 m/s

<sup>2</sup>La frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble del ancho de banda de la señal de entrada, si el criterio no es satisfecho existirán frecuencias cuyo muestreo coincide con el de otra(s)-el denominado *aliasing*-

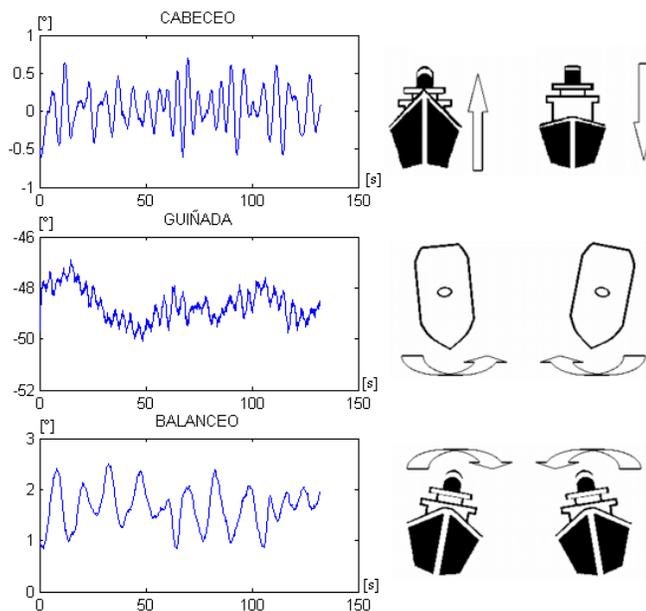


Figura 4.1: Señal característica de las rotaciones en una embarcación a la mar. El eje horizontal tiene escala en segundos y el vertical en grados

soslayable comparada con la energía de las frecuencias por abajo de 5 Hz. La Figura 4.2 muestra un par de movimientos de buque hacia adelante, los espectros permiten ver el rango de frecuencia en que ocurre el fenómeno de perturbación.

Las datos de las señales reales de giro se usan en las simulaciones computacionales que se presentan en la sección final.

### 4.3. Sensores de giro y su disposición física: aproximación directa e indirecta

La disposición del sensor de giro en una aplicación de estabilización puede tener un impacto significativo en el desempeño del sistema. En este sentido, existen dos aproximaciones al problema de sensado de giro, la directa y la indirecta.

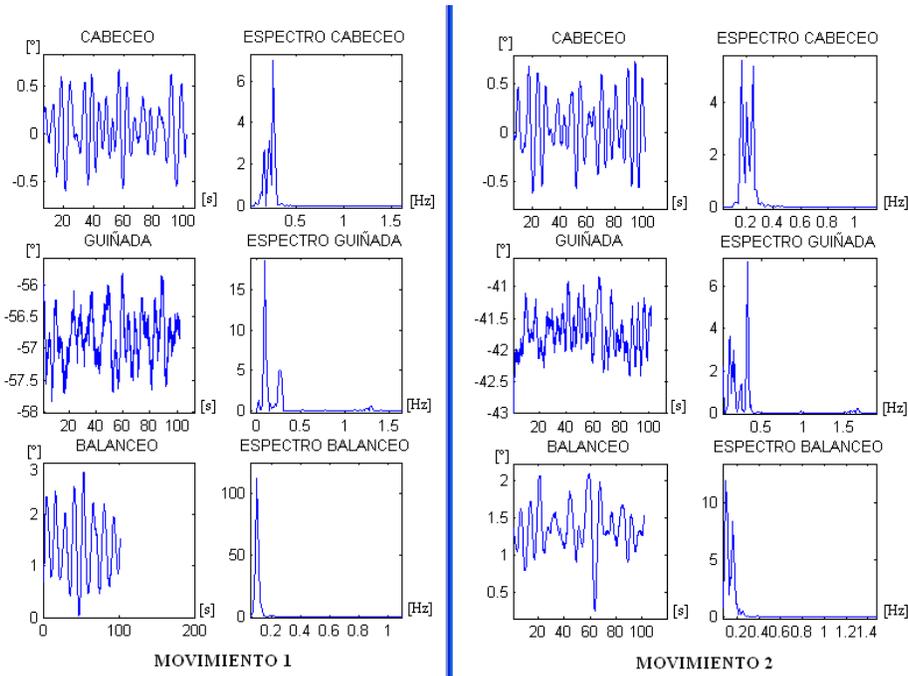


Figura 4.2: Señales características de un par de movimientos del buque hacia adelante

La **aproximación directa**, consiste en establecer los sensores de giro directamente sobre la línea de vista.

En la **aproximación indirecta**, se establecen los sensores en la base de la plataforma. Por ende si la tarea es estabilizar la *LOS*, deben aplicarse las transformaciones necesarias para obtener la perturbación equivalente alrededor del eje de referencia de la *LOS*. La relación entre la perturbación real alrededor de la *LOS* y aquella medida en la base de la plataforma dependerá de la geometría de la plataforma, su rigidez estructural, la precisión de los sensores de posición (tacómetro y o codificador de posición), juegos entre los mecanismos de transmisión de movimiento, etc.

En resumen, puede establecerse lo siguiente respecto a la disposición de los

sensores de giro en una aplicación de estabilización:

■ **Aproximación directa**

- El sensor o sensores se montan directamente sobre la *LOS*.
- La corrección de la perturbación es directa
- Dependiendo del tamaño del sensor, puede impactar el tamaño de la base y limitar rangos de movimiento.
- El método directo ofrece ventajas para aplicaciones de precisión pues las perturbaciones se miden directamente sobre línea de vista.

■ **Aproximación indirecta**

- El sensor o sensores se montan en la base de la plataforma.
- No se miden las perturbaciones alrededor de la *LOS*.
- La perturbación alrededor de la *LOS* se obtiene mediante transformaciones.
- Las ventajas de esta configuración son de tipo mecánico, lo cual se puede traducir en una disposición de elementos menos complicada, y que presente menos restricciones de movimiento.

#### 4.4. Señal de referencia: aproximación directa

En este trabajo se considera la aproximación de medición directa. La forma en que se hacen las mediciones para generar las señales de referencia para el control del sistema se ilustra a continuación. Considérese nuevamente una vista aérea del conjunto buque-plataforma-sensor y supóngase sólo el movimiento en el eje de guiñada. Con referencia a la Figura 4.3, se establece un primer sistema de coordenadas inercial (ejes línea discontinua gruesa) respecto al cual se establece la referencia  $\theta_{ref}$  hacia la cual se quiere dirigir el sensor,  $LOS_{des}$ . La medición del sensor de posición angular (montado sobre el sensor -aproximación directa-)  $\theta_{snr}$  es referida a este sistema inercial. Se

establece un segundo conjunto de ejes (ejes línea discontinua delgada) respecto al cual se mide el estado del eje mecánico de la plataforma en guiñada,  $q$ .

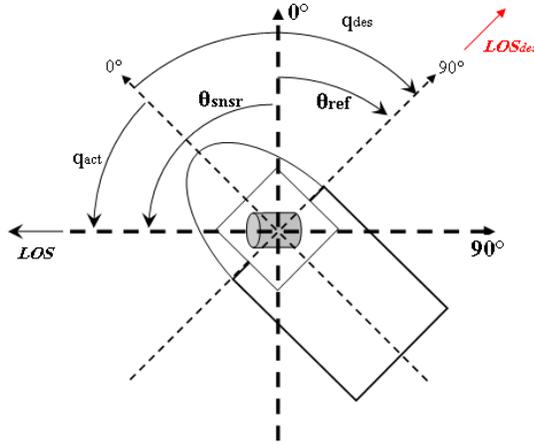


Figura 4.3: Disposición de ejes para formar la señal de referencia

Sea pues en general una  $\theta_{ref} = f(t)$  deseada, una  $\theta_{snsr} = g(t)$  medida por una giro y la posición actual del eje de guiñada  $q_{act}$  proporcionada por un codificador de posición. El valor deseado del estado del eje mecánico de guiñada  $q_{des}$  es, de la Figura 4.3:

$$q_{des} = q_{act} + \theta_{ref} - \theta_{snsr}$$

## 4.5. Suavización de señales de simulación

Varios de los términos de las leyes de los algoritmos de control revisados (adaptable, robusto y modos deslizantes) usan la primera y segunda derivada de la posición deseada. Dicho de otro modo, requieren una “velocidad deseada” y una “aceleración deseada”. Dado que la única información que

se tiene proviene de sensores de posición digitales con una determinada tasa de muestreo (en el caso de las señales usadas es de entre 9 y 10 Hz), los valores intermedios entre tiempos de muestreo se obtienen mediante interpolación lineal. Por tanto, la señal de posición deseada es una sucesión de funciones tipo rampa, Figura 4.4(a). La derivada de un conjunto de rampas es un conjunto de escalones, Figura 4.4(b), y a su vez la derivada de los escalones resulta en impulsos, Figura 4.4(c). Alimentar las ecuaciones de control con estas señales, resulta en valores de la señal de control con fluctuaciones abruptas y de gran amplitud. 4.4(d).

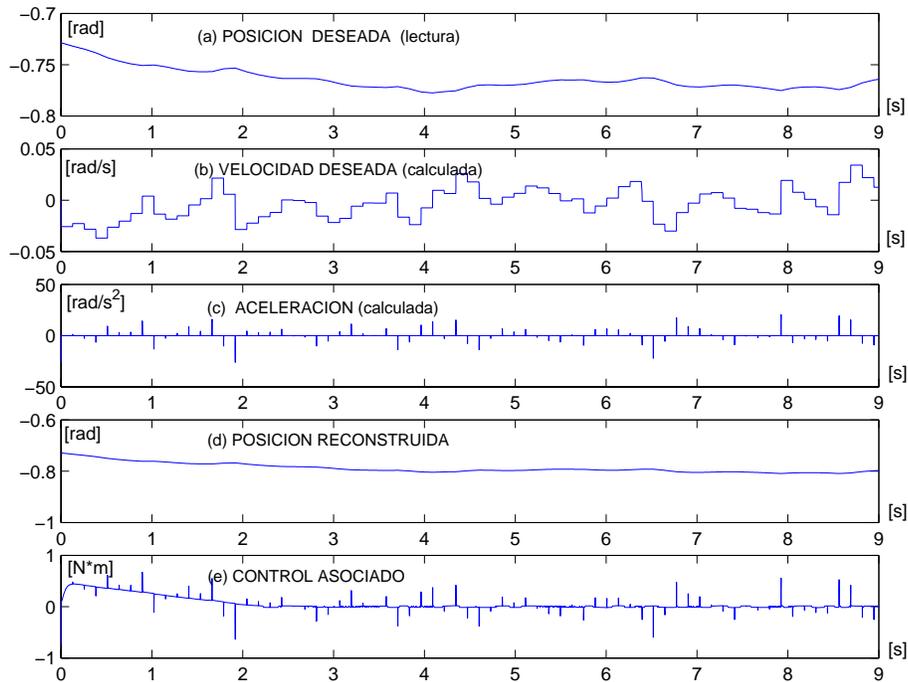


Figura 4.4: Señales de velocidad y aceleración caculadas con diferenciación numérica

Una estrategia para reducir e incluso eliminar estos valores pico altos consiste en suaviar las señales de velocidad estimadas, haciendo que las transiciones de un valor a otro ocurran de manera suave como lo ilustra la Figura 4.5(b). Así, la señal de “aceleración estimada” se puede apreciar en la Figura

4.5(c). Al alimentar las leyes de control con estas estimaciones suavizadas el control resulta en un señal con variaciones mucho menos abruptas, Figura 4.5(d). La Figura 4.5(d) es la segunda integral de la Figura 4.5(e) (más una constante de valor inicial ) y representa la posición deseada que se reconstruye con la aceleración estimada: puede contrastarse con la Figura 4.5(a) para evaluar la validez de las señales estimadas. En la sección de apéndices puede consultarse el algoritmo usado para suavizar la señal de velocidad, que en resumen es un filtro de segundo orden cuyos parámetros se calculan en base al periodo de muestreo del sensor que origina la señal de referencia.

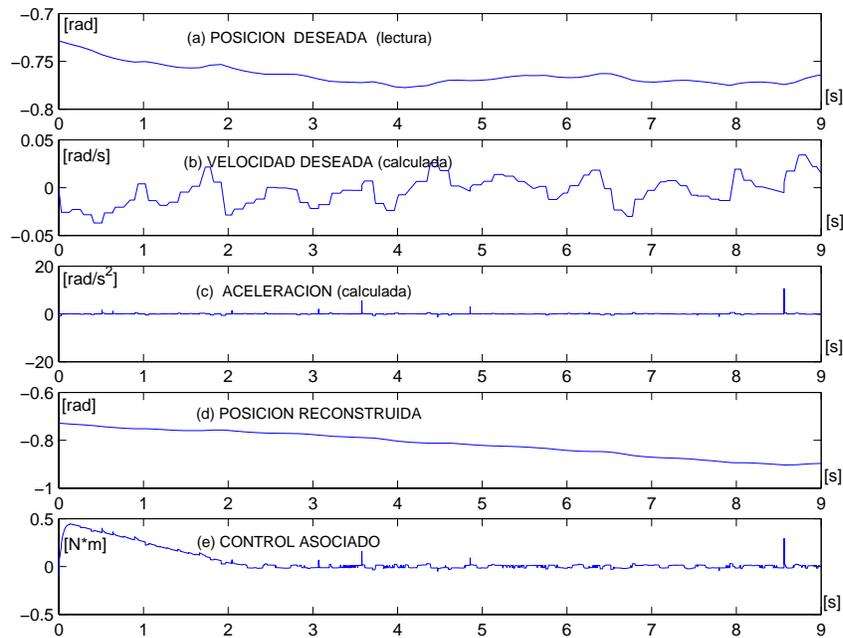


Figura 4.5: Señales de velocidad y aceleración caculadas con diferenciación numérica y suavizadas

## 4.6. Simulaciones

La Tabla 4.1 presenta un resumen de las leyes de control para cada uno de los métodos revisados en la seccion 3.4.

Método	Ley de Control	Observaciones
PD+	$\tau = H(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + D\dot{q}_d + g(q) - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q}$	$\tilde{q} = q - q_d$ $q_d$ : valor deseado $K_v, K_p > 0$ diagonales
Adaptable	$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q})\varphi$  $\tau = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q})\varphi - K_v S$ $\dot{\varphi} = -\Gamma\Psi^T(q, \dot{q}, \ddot{q})S$	$\Gamma > 0$ diagonal $S = \dot{q} - \dot{q}_v$ $\dot{q}_v = \dot{q}_d - \Lambda\tilde{q}$ $\varphi$ : vect. parámetros
Robusto	$\tau = \Psi_a - K_v S + \Psi_a U$ $\Psi_a = \Psi(q, \dot{q}, \ddot{q}_v)\hat{\varphi}_0$  $U = \begin{cases} -\rho \frac{\Psi_a^T S}{\ \Psi_a^T S\ } & \ \Psi_a^T S\  > \epsilon \\ -\rho \Psi_a^T S / \epsilon & \ \Psi_a^T S\  \leq \epsilon \end{cases}$	$\rho \geq \ \hat{\varphi}_0 - \varphi\ $ $\hat{\varphi}_0$ : vector param. nominal $\varphi$ : vector param. real
TSM1 <sup>3</sup>	$\tau = \Psi(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\varphi_0 + w) - K_v S^r$ $w = \begin{cases} -\rho \frac{\Psi_s^T s}{\ \Psi_s^T s\ } & \ \Psi_s^T s\  > 0 \\ 0 & \ \Psi_s^T s\  = 0 \end{cases}$	$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda\tilde{q}^p$ $s = \dot{q} + \Lambda\hat{q}_p$ $\frac{1}{2} < p \leq 1, 0 < r \leq 1$
TSM2 <sup>4</sup>	$\tau = \Psi(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\varphi_0 + w) - K_v S^r$ $w = -\hat{\rho} \frac{\Psi_s^T s}{\ \Psi_s^T s\  + \epsilon}$ $\dot{\hat{\rho}} = -\sigma\hat{\rho} + \gamma \frac{\ \Psi_s^T s\ }{\ \Psi_s^T s\  + \epsilon}$	$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda\tilde{q}^p$ $s = \dot{q} + \Lambda\hat{q}_p$ $\frac{1}{2} < p \leq 1, 0 < r \leq 1$ $\sigma, \gamma, \epsilon > 0$
NTSM <sup>5</sup>	$\tau = \tau_0 + \tau_1$ $\tau_0 = H(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q)$ $\tau_1 = -H(q)(k_1 s - k_2 sig(s)^\rho)$ $sig(x)^\gamma = [ x_1 ^{\gamma_1} sign(x_1) \dots sig(x)^\gamma  x_n ^{\gamma_n} sign(x_n)]$ $0 < \rho = \rho_i = \dots = \rho_n < 1$	$\beta = diag(\beta_1, \dots, \beta_n)$ $\beta_i > 0, 0 < \gamma_i < 1$ $s = \tilde{q} + \beta sig(\dot{\tilde{q}}^\gamma) = 0$ $k_1 = diag(k_{11}, \dots, k_{1n})$ $k_2 = diag(k_{21}, \dots, k_{2n})$ $k_{1i} > 0, k_{2i} > 0$ height

Cuadro 4.1: Tabla de leyes de control

Las señales de referencia utilizadas para el eje de guiñada y el de cabeceo se presentan en las Figuras 4.6(a) y 4.6(b) respectivamente. En las gráficas de simulación la señal discontinua corresponde al eje de guiñada y la continua al eje de cabeceo.

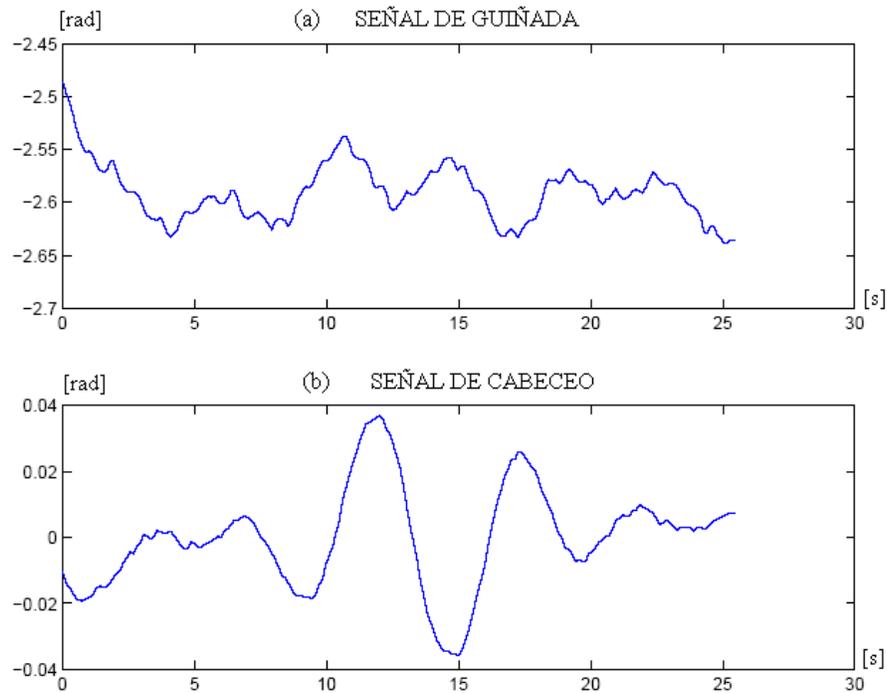


Figura 4.6: Señal de referencia para guiñada (a) y cabeceo (b)

#### A) SIMULACIONES NOMINALES Y CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA CON SEÑALES DE REFERENCIA FILTRADAS

Para las simulaciones, el sistema es el nominal para el control PD+;  $\varphi_{inicial} = 0$  para el control Adaptable;  $H_0 = 0,5H$  para los controles Robusto, TSM1, TSM2 y NTSM. En este insiso se realiza el control suavizando las señales de referencia.

El control robusto resulta tener una respuesta casi instantánea, Figura 4.7, sin por ello presentar un control grande, Figura 4.9, de hecho es el control mas pequeño. El menor error residual es el del control PD+ (del orden  $10^{-4}$ ), lo cual no es tan meritorio pues opera con valores reales y nominales iguales. No obstante el control NTSM es el único que opera con incertidumbre y cuyo error residual es del orden de  $10^{-4}$ , Figura 4.8.

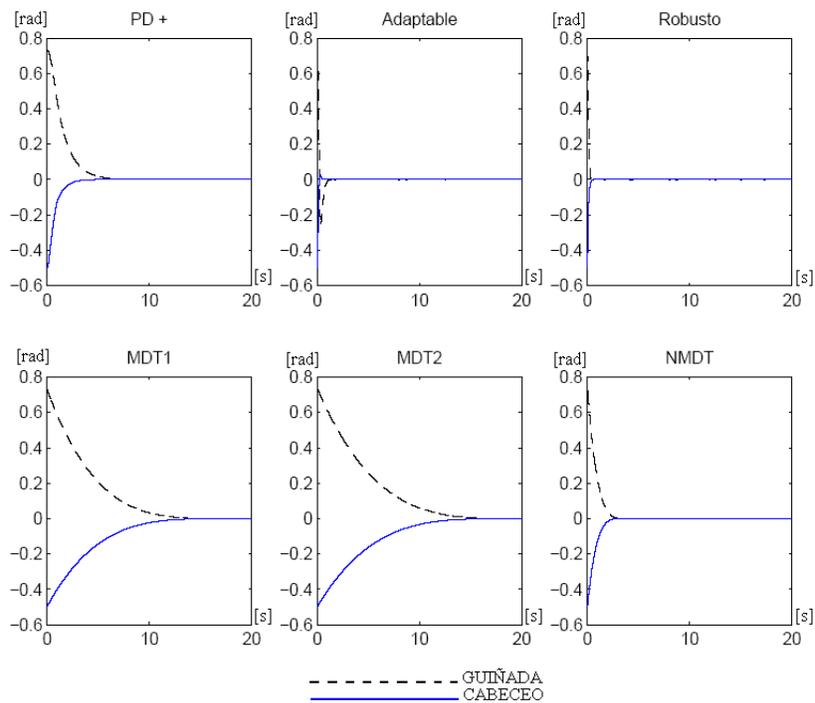


Figura 4.7: Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7), con señales de referencia filtradas-suavizadas-

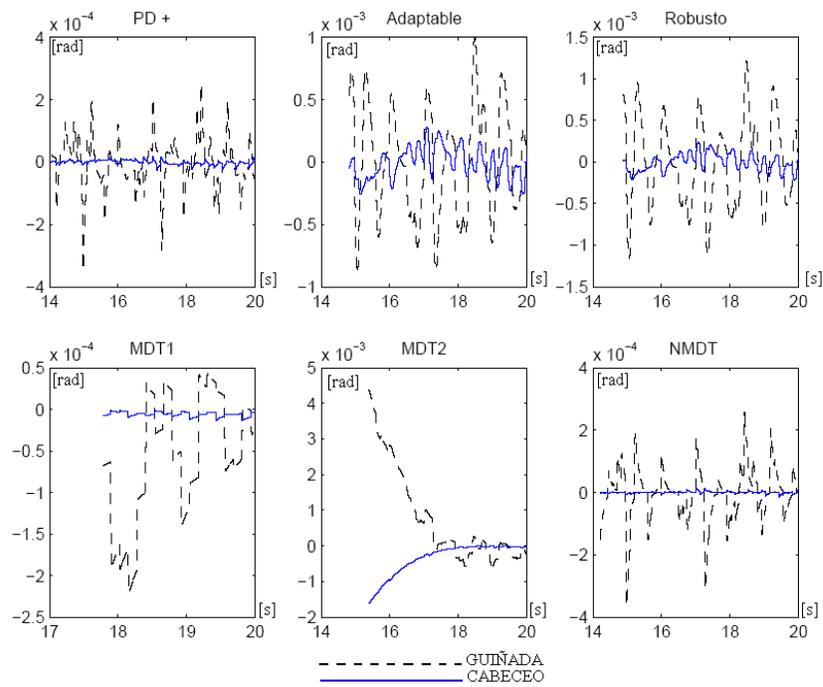


Figura 4.8: Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7), con señales de referencia filtradas -suavizadas- (detalle).

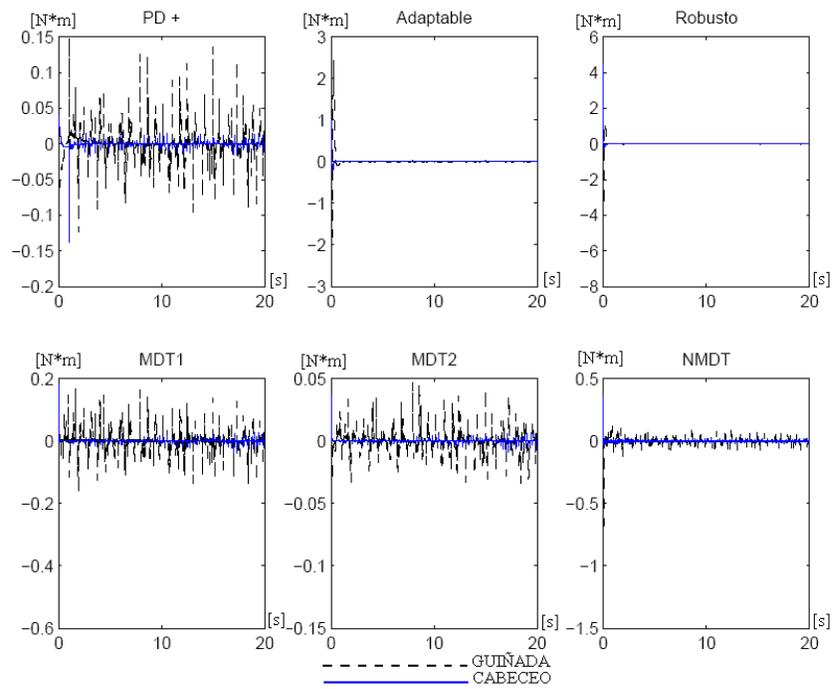


Figura 4.9: Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7), con señales de referencia filtradas-suavizadas-.

## **B)SIMULACIONES NOMINALES Y CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA CON SEÑALES DE REFERENCIA NO FIL- TRADAS**

En este inciso se contrasta el desempeño del control que resulta de señales de referencia no suavizadas. En este caso, las señales de error son bastante similares a las del inciso anterior, incluso al detalle. Sin embargo, la señal de control alcanza amplitudes significativamente mayores, Figura 4.10, prácticamente un orden de magnitud mayores a las del caso filtrado, Figura 4.9. El resto de las simulaciones en los incisos siguientes se hacen con referencias filtradas, el objetivo de este inciso era establecer la disminución sustancial en la amplitud de la señal de control respecto al caso de señales de referencia no filtradas.

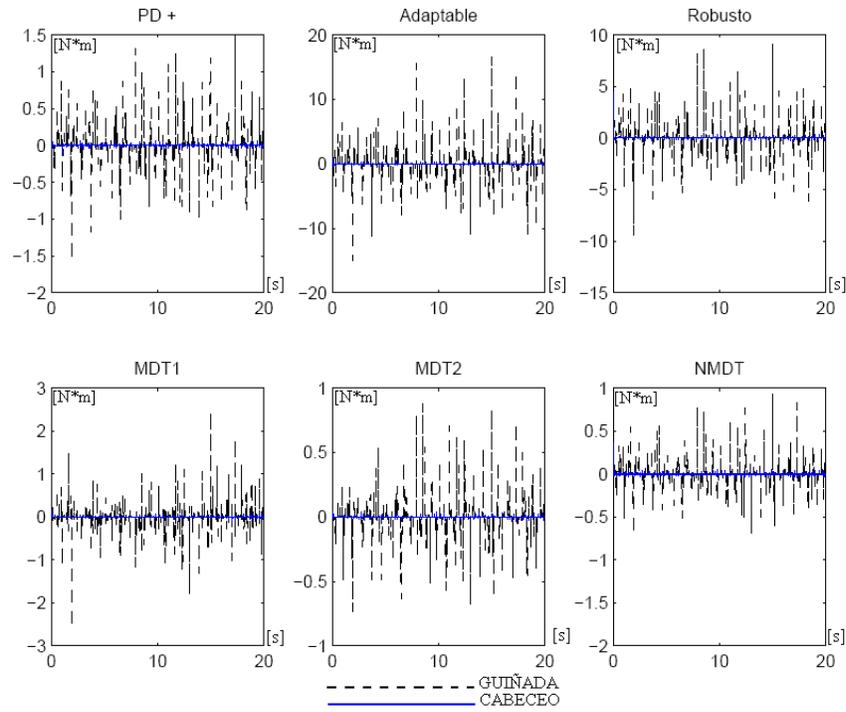


Figura 4.10: Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo 2.6, con señales de referencia no filtradas (contrástese con la Figura 4.9)

### C)SIMULACIONES CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA MÁS FRICCIÓN NO COMPENSADA

La señal típica de fricción con el modelo LuGre se presenta en la Figura 4.11

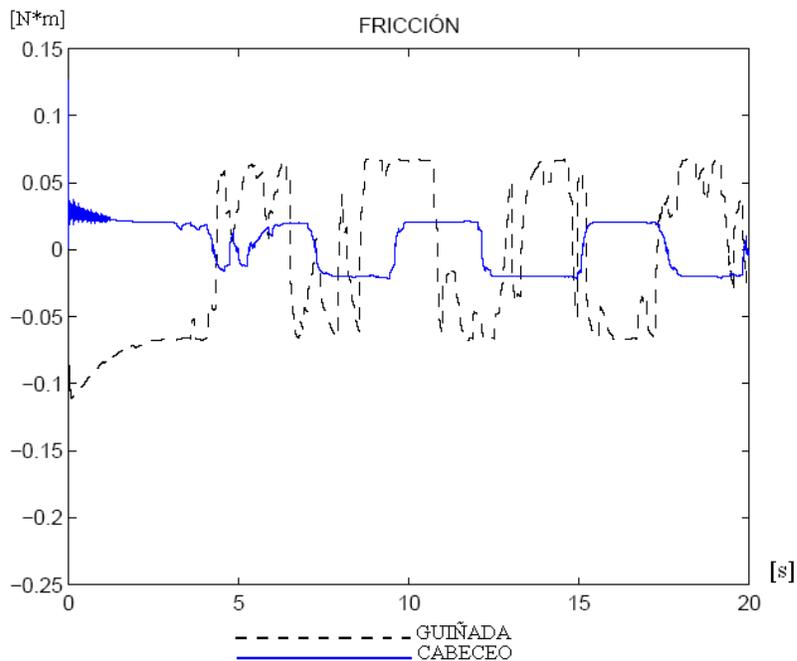


Figura 4.11: Señales de fricción típica inyectada

Como puede apreciarse ante la adición de fricción se degrada el desempeño de los controladores, en especial el PD+ cuya premisa es el conocimiento exacto de la estructura del sistema y sus parámetros, en tanto que el desempeño del controlador Robusto y el NMDT prácticamente se conservó, Figuras 4.12 y 4.13. La amplitud de la señal de control aumentó en todos los casos, principalmente en el transitorio, Figura 4.14.

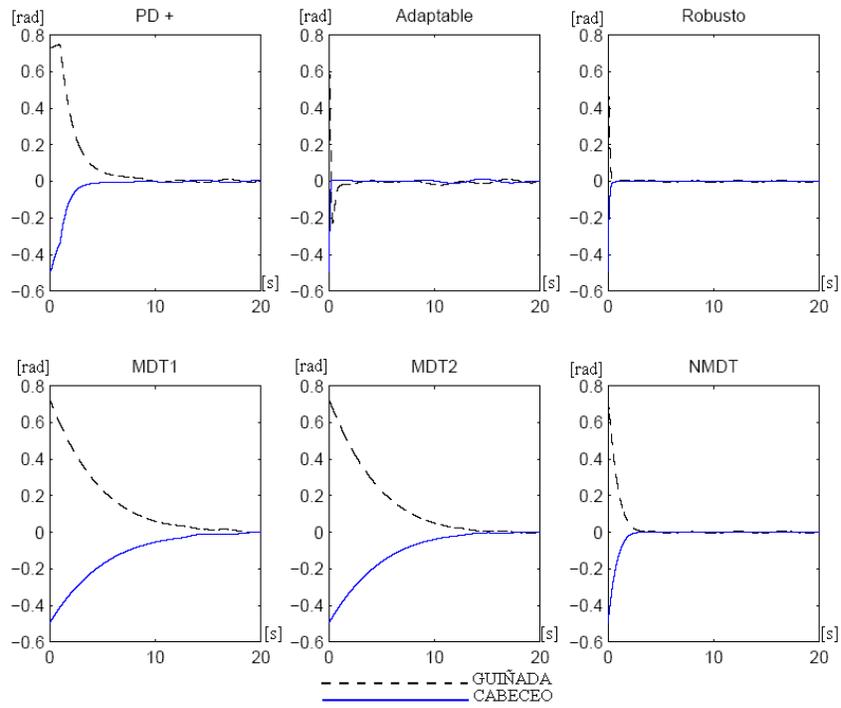


Figura 4.12: Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo 2.6 con referencias filtradas y fricción no compensada

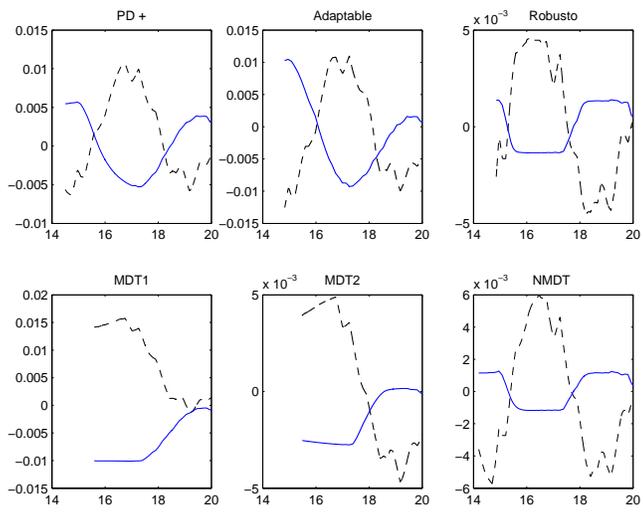


Figura 4.13: Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción no compensada (detalle)

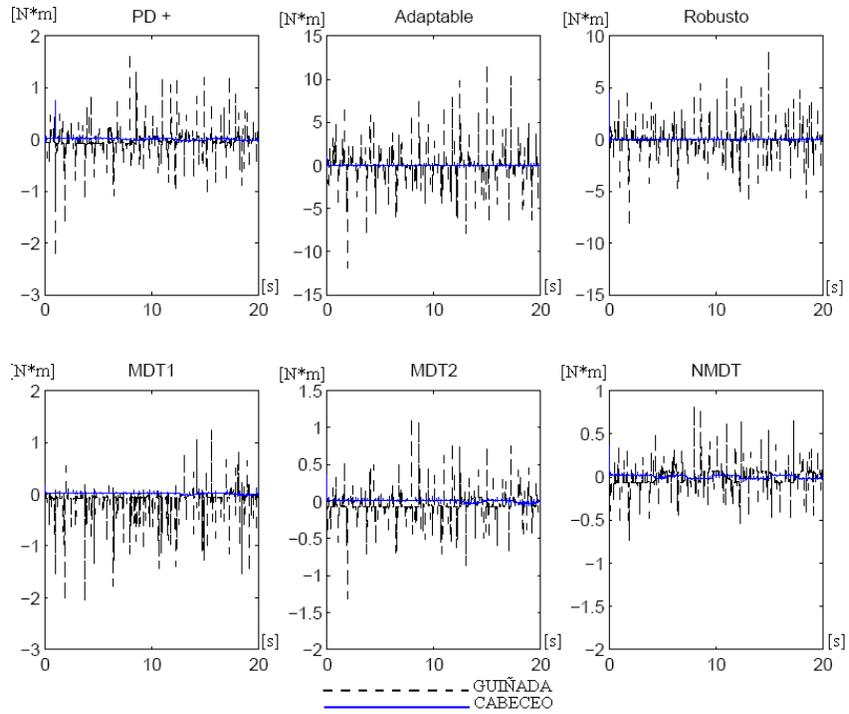


Figura 4.14: Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción no compensada

### C)SIMULACIONES CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA MÁS FRICCIÓN COMPENSADA

Para compensar la fricción, simplemente se aumentó a cada ley de control el observador<sup>6</sup> de fricción revisado en la sección 3.4.5. Como se puede ver, el control Adaptable fue el único que deterioró su desempeño respecto al control sin compensación de fricción, Figura 4.15. El resto de los controles, como se puede apreciar en las figuras 4.15 y 4.16 tuvieron un mejor desempeño. Las señales de control, por su parte permanecen dentro de rangos aceptables, sobre todo las correspondientes a los modos deslizantes terminales 4.17, pese a que el transitorio del observador de fricción suele tener gran amplitud y el observador no converge inmediatamente, Figura 4.18.

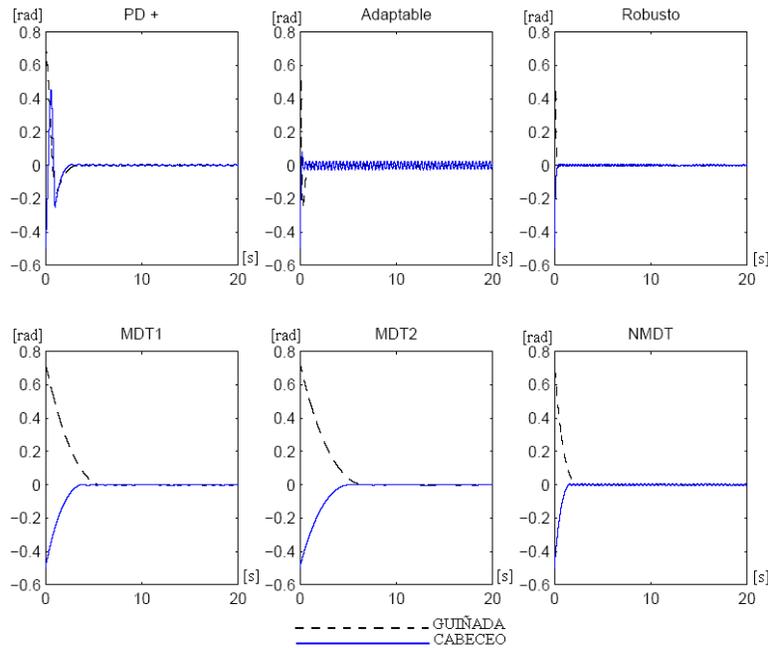


Figura 4.15: Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con fricción compensada

<sup>6</sup>Los parámetros del observador tienen variaciones del 50% aprox. respecto a los valores “reales”

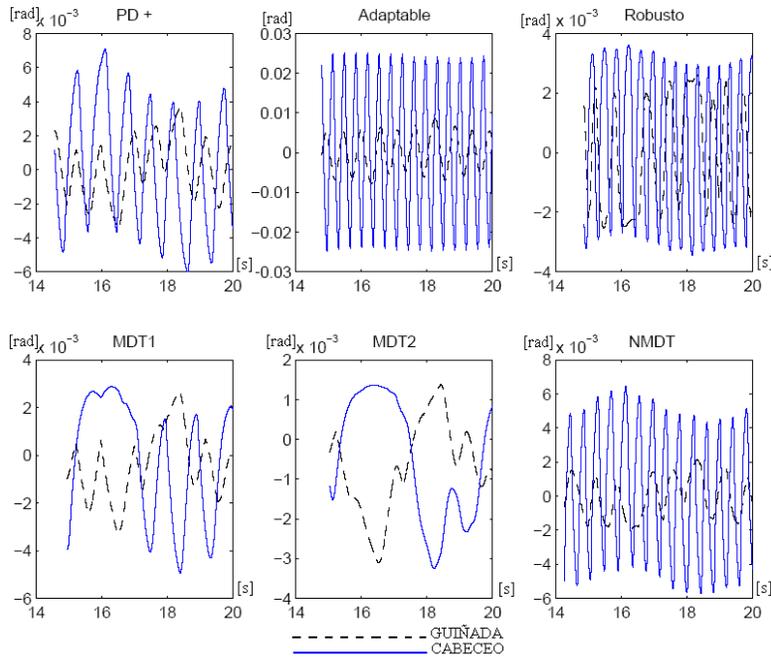


Figura 4.16: Señales de error para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción compensada (detalle)

## 4.7. Comparación Cualitativa

Como sección final de este capítulo se intenta evaluar mediante parámetros cuantitativos el desempeño de cada algoritmo de control. Se establecen los siguientes parámetros de evaluación: complejidad del algoritmo, conocimiento *a priori* necesario, cantidad de parámetros de la ley de control, tiempo de asentamiento, desempeño nominal, desempeño con perturbación, rango de magnitud del error residual y de la señal de control, así como energía de la señal de error y de la de control.

Algunas precisiones respecto a los parámetros recién enunciados son pertinentes:

- *Desempeño nominal.*- El desempeño del algoritmo de control consideran-

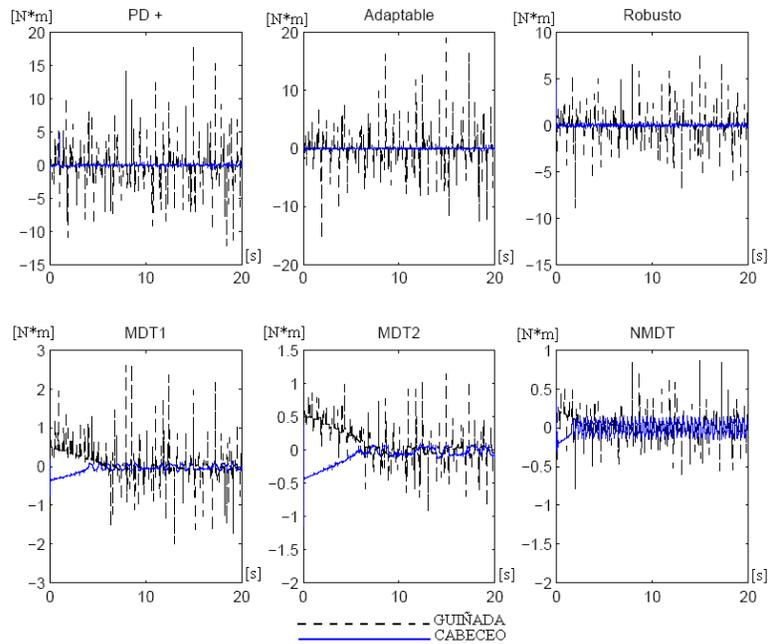


Figura 4.17: Señales de control para simulaciones de las leyes de control de la Tabla 4.1 en el modelo (2.7) con referencias filtradas y fricción compensada

do, dado el caso, sólo incertidumbre paramétrica. Así mismo el desempeño con perturbación involucra la adición no compensada de fricción. A menos que se especifique, los parámetros fueron evaluados bajo condiciones de fricción no compensada.

- *Energía de una señal.*-La integral de la señal de interés elevada al cuadrado .
- *Tiempo de asentamiento.*-El tiempo que tarda la señal de error en permanecer dentro del rango de  $\pm 5\%$ , de la excursión total, tomando como excursión total la diferencia entre la condición inicial de error y cero.
- *Error residual.*-Aquel que persiste después del tiempo de asentamiento.
- Existe un conjunto de parámetros que pueden fácilmente compararse cuantitativamente, como el tiempo de asentamiento, pero algunos otros

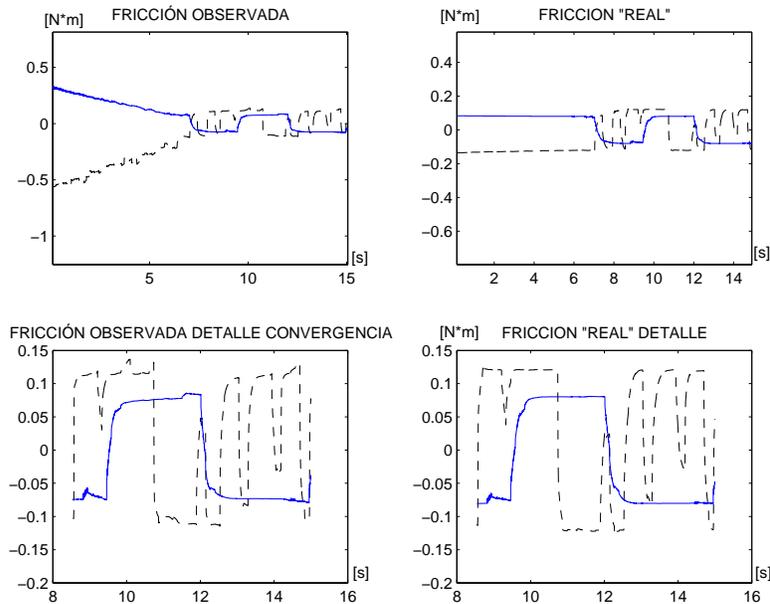


Figura 4.18: Señales de fricción “real” y observada con detalle de convergencia

son algo más subjetivos, como la complejidad del algoritmo y el peso de las asunciones *a priori*.

Las gráficas de las señales de energía de error y control se muestran en las Figuras 4.19 y 4.20 respectivamente.

A partir de las figuras 4.19 y 4.20, de las gráficas de simulación y de la tabla de algoritmos 4.1, se forma la Tabla de resultados 4.2. A cada inciso de comparación se le califica con un número del 1 al 6, de forma que un menor número representa un mejor desempeño, siendo por ejemplo el control *PD+* mejor al *MDT1* en el rubro de *Tiempo de asentamiento* (ver Figura 4.1). Así mismo se asignó una ponderación a cada inciso de acuerdo a la Tabla 4.3, a partir de la cual se obtiene un índice de desempeño final para cada algoritmo: un menor índice es mejor.

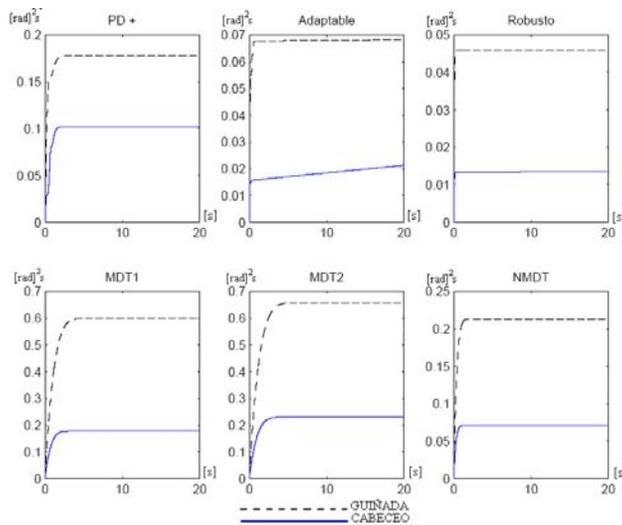


Figura 4.19: Energía de la señal de error

El índice de desempeño de cada algoritmo se obtiene como la suma ponderada de los incisos de comparación. A modo de ejemplo, la Tabla 4.4 presenta el cálculo del Índice Final para el control  $PD+$ .

Puede así comprobarse, que dados los parámetros considerados y el peso que se les asignó, el control con mejor desempeño fue el  $NMDT$ , seguido de cerca por la propuesta  $MDT2$ . La mejora del algoritmo  $MDT2$  respecto al  $MDT1$  es sustancial. Cabe mencionar que los parámetros de cada algoritmo fueron sintonizados de forma que dieran el mejor desempeño posible, y así se les pudiera evaluar de forma equilibrada.

Cabe resaltar que si los incisos de comparación se ponderan de modo distinto al propuesto, la evaluación del índice final puede arrojar resultados distintos. La ponderación presentada se eligió con miras a la implementación del esquema de control, dando mayor peso a parámetros de índole práctico, como son el desempeño ante perturbación, la magnitud del control, las suposiciones *a priori* y la magnitud del error residual.

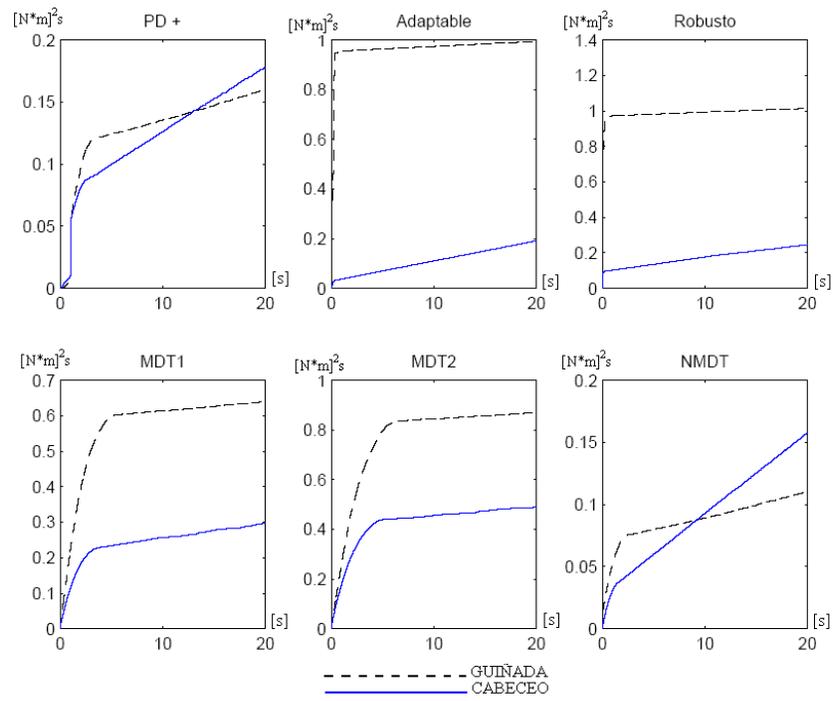


Figura 4.20: Energía de la señal de control

	PD+	Adaptable	Robusto	MDT1	MDT2	NMDT
Asunciones <i>a priori</i>	6	3	5	4	2	1
Número de parámetros	1	2	3	4	6	5
Complejidad del algoritmo	1	2	3	5	4	6
Desempeño nominal	3	6	5	2	1	4
Desempeño con perturbación	4	6	3	5	2	1
Magnitud error residual	4	5	3	6	1	2
Magnitud control	4	6	5	3	2	1
Tiempo de asentamiento	4	2	1	6	5	3
Energía del error	3	2	1	5	6	4
Energía del control	2	5	6	3	4	1
<b>Índice final</b>	<b>3.55</b>	<b>4.15</b>	<b>3.7</b>	<b>4.35</b>	<b>2.95</b>	<b>2.3</b>

Cuadro 4.2: Tabla de resultados: Tanto en las calificaciones de los incisos como en el renglón de Índice Final, una cifra menor representa un mejor desempeño

INCISO	PESO (%)
Suposiciones <i>a priori</i>	15
Número de parámetros	5
Complejidad del algoritmo	10
Desempeño nominal	5
Desempeño con perturbación	15
Magnitud error residual	10
Magnitud control	15
Tiempo de asentamiento	10
Energía del error	5
Energía del control	10

Cuadro 4.3: Tabla de ponderación de incisos de comparación

INCISO	CALIFICACIÓN	PESO	PARCIAL
Suposiciones <i>a priori</i>	6	0.15	0.9
Número de parámetros	1	.05	.05
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...
Energía del control	2	0.1	0.1
<b>Índice Final</b> (Suma de los parciales)			<b>3.55</b>

Cuadro 4.4: Ejemplo del cálculo del Índice Final para el control  $PD+$

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones, aportación y trabajo futuro

A lo largo de este trabajo de tesis se ha presentado y desarrollado la tarea de estabilización y control de la Línea de Vista de un sensor montado en una embarcación, con interés especial en la comparación de desempeño de seis tipos de algoritmos de control. Se cubrieron gradualmente las diversas tareas del proyecto: se estableció el trasfondo de la problemática de interés; se propuso un esquema de operación para un sistema que satisficiera los requerimientos planteados; se desarrolló un modelo del sistema propuesto y se revisaron los algoritmos de interés para controlarlo. Al final, con auxilio de simulaciones computacionales alimentadas con señales de mar reales, se pudo verificar, contrastar y ponderar el desempeño de los algoritmos de control revisados.

Las **aportaciones principales** de este trabajo son las siguientes:

- Establecer la base teórica-académica hacia la implementación de un dispositivo de control de estabilización en buques de la Secretaría de Marina, de quien se recibió apoyo durante la realización de este trabajo. El trabajo a futuro inmediato es la implementación física del sistema de estabilización de *LOS* y la contrastación de los resultados experimentales y teóricos.
- La propuesta del algoritmo *MDT2* mostró en simulaciones un desempeño

superior al algoritmo del cual parte, el *MDT1*. El algoritmo *MDT2* es el menos complejo de los algoritmos deslizantes revisados y su desempeño es bastante satisfactorio, lo suficiente para poder considerarlo una primera opción de implementación.

- Se propuso ponderar y evaluar una serie de parámetros para calificar el desempeño general de los distintos algoritmos de control revisados.
- Se propuso resolver la tarea de estabilización de una cámara mediante dos grados de libertad mecánicos operando en los ejes de guiñada y cabeceo y mediante un tercer grado de libertad virtual que operará a nivel de procesamiento de imagen en el eje de balanceo.
- Se propuso el uso de filtros de segundo orden (o superiores) para procesar las señales discretas de sensores digitales y así suavizar las señales de referencia, lo que resultó en señales de control más suaves y con una magnitud significativamente menor.

### **Trabajo a futuro**

- Implementación física de la configuración cinemática presentada con el uso preferente de los algoritmos mejor evaluados en este trabajo.
- Clasificación y análisis detallado de las señales de giro para tipos de movimiento específicos de la embarcación, de forma que al extraer las características frecuenciales de la perturbación se pueda proponer, si aplica, un esquema de control optimizado para cada tipo de movimiento, sacando ventaja del contenido frecuencial observado.
- Implementación de esquemas predictivos en todos los procesos de sentido.

# Apéndice A

## Códigos y Diagramas para las simulaciones en Simulink

El diagrama para la simulación en *Simulink* se presenta en la Figura A.1:



El código de los distintos bloques de la simulación en Simulink se presenta a continuación:

```

CONTROL (1)
function[v_out] = control(v,n)globalopcion; pos = [v_in(1); v_in(2)];
vel=[v_in(3);v_in(4)];
pos_dif=[v_in(5);v_in(6)];
vel_dif=[v_in(7);v_in(8)];
vel_des=[v_in(9);v_in(10)];
acel_des=[v_in(11);v_in(12)];
vel_v=[v_in(13);v_in(14)];
acel_v=[v_in(15);v_in(16)];
phi=[v_in(17);v_in(18);v_in(19)];
rho_est=v_in(20);
tiempo=v_in(21);
rho_=0;
S=vel-vel_v;
phi_=[0;0;0];
p=.75;
lambda=[.2 0 ;0 .6];
S_tsm=vel_dif + lambda*pos_dif.^p;
bb=.1*[1 0;0 2];
gg=.1*[1.6;1.6];
pp=.3; k1=.01*[120 0;0 600];
k2=.01*[120 0;0 600];
S_ntsm=pos_dif + bb*(abs(vel_dif).^gg) .* sign(vel_dif);
SS=S;
switch opcion
case 1
if tiempo >= 2
kv=100* [.5 0;0 1.6];
kd=100* [.4 0;0 1.6];
else
kv=30* [.5 0;0 .8];
kd=30* [.4 0;0 .8];
end
H=[511/10000+39/20000*cos(pos(2))^2 0; 093/10000];
C=[-39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(2) 0; 0 0];
torca=H*(acel_des-kv*vel_dif-kd*pos_dif) + C*vel;
case 2
if tiempo >= 1
kv=8* [.5 0;0 .3];
kd=8* [.4 0;0 .4];
else
kv=.2* [.5 0;0 .3];
kd=.2* [.4 0;0 .4];
end
H=[511/10000+39/20000*cos(pos(2))^2 0; 093/10000];
C=[-39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(2) 0; 0 0];
torca=H*acel_des + C*vel_des - kv*vel_dif-kd*pos_dif;
case 3
if tiempo >= 1
kv=5* [.5 0;0 .3];
else
kv=.25* [.5 0;0 .3];
end
H=[511/10000+39/20000*cos(pos(2))^2 0; 093/10000];
C=[-39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(2) 0; 0 0];
torca=H*acel_v + C*vel_v - kv*S;

```

Cuadro A.1: código de control (1)

```

CONTROL (2)
case 4
kv=.5*[.6 0;0 .4];
gama=400*diag([1 1 1]);
psi=[acel_v(1) acel_v(1)*(cos(pos(2)))2 cos(pos(2)) * sin(pos(2)) * vel(2) * vel_v(1); 93 * acel_v(2)/51100];
torca=psi*phi - kv*S;
phi=-inv(gama)*psi*S;
case 5
if tiempo < 11
kv=5* [.3 0;0 .3];
else
kv=1* [.9 0;0 .9];
end
psi=[acel_v(1) acel_v(1)*(cos(pos(2)))2 cos(pos(2)) * sin(pos(2)) * vel(2) * vel_v(1); 93 * acel_v(2)/51100];
phi=[511/10000*.5 ; 39/20000*.5;-39/20000*1.5];
rho=0.05;Ya=psi*phi;
E=0.001;
cota=norm(Ya*S);
if cota < E
U=(-rho/cota)*Ya*S;
else
U=(-rho/E)*Ya*S;
end
torca=Ya - kv*S + Ya*U;
case 6
kv=10*[.2 0 ; 0 .2];
r=.75;
Y=[acel_v(1) acel_v(1)*(cos(pos(2)))2 cos(pos(2)) * sin(pos(2)) * vel(2) * vel_v(1); 93 * acel_v(2)/51100];
teta_0=[511/10000*.5 ; 39/20000*.5;-39/20000*1.5];
rho=0.05;
cota=norm(Y*S_tsm);
if cota < 0
w=-rho*Y*S_tsm/cota;
else
w=0;
end
torca=Y*(teta_0+w)- kv*S_tsm.^r;
SS=S_tsm;
case 7
bb=[1 0; 0 1];
gg=[1.3;1.3];
pp=.45;
k1=10*[2.4 0; 0 2.4];
k2=10*[2.4 0; 0 9.0];
S_ntsm=pos_dif + bb*(abs(vel_dif).^gg) .* sign(vel_dif);
SS=S;
fact=.5;
M0=fact*[511/10000+39/20000*cos(pos(2))2 0; 093/10000];
C0=fact*[-39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(2) 0; 0 0];
t0=C0*vel + M0*acel_des - M0*inv(bb)*inv(diag(gg))*(abs(vel_dif).^(2-gg)) .* sign(vel_dif);
t1=-M0*( k1*S_ntsm + k2*(abs(S_ntsm).^pp) .* sign(S_ntsm));
torca=t0 + t1;
SS=S_ntsm;
case 8
kv=20*[.2 0 ; 0 .2];
r=.75;
Y=[acel_v(1) acel_v(1)*(cos(pos(2)))2 cos(pos(2)) * sin(pos(2)) * vel(2) * vel_v(1); 93 * acel_v(2)/51100];
teta_0=[511/10000*.5 ; 39/20000*.5;-39/20000*1.5];
cota=norm(Y*S_tsm);
E=0.001;
sigma=1500;
gamma=10;
w=-rho_est*(Y*S_tsm)/(cota+E);
rho=-sigma*rho_est + gamma*cota/(cota+E);
torca=Y*(teta_0+w)- kv*S_tsm.^r;
SS=S_tsm;
end
v_out=[torca;phi_rho_S_ntsm;SS];

```

```

MODELO_ACEL
function[acel]=modelo(v_in)
torca=[v_in(1);v_in(2)];
pos=[v_in(3);v_in(4)];
vel=[v_in(5);v_in(6)];
H=[511/10000+39/20000*cos(pos(2))^2 0;0 93/10000];
C=[-39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(2) -39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(1);
39/20000*cos(pos(2))*sin(pos(2))*vel(1) 0];
acel=inv(H)*(torca-C*vel);

```

Cuadro A.3: Modelo de aceleración

```

FRICCIÓN LUGRE
function[v_out]=lugre(v_in)
v=v_in(1);
z=v_in(2);
s0=1e3;
s1=sqrt(1e3);
s2=0.2;
fc=.25;
fs=.375;
vs=0.001;
gv=( fc + (fs-fc)*exp(-(v/vs)^2) )/s0;
z_=-v-abs(v)*z/gv;
fric=s0*z + s1*z_ +s2*v;
v_out=[fric;z_];

```

Cuadro A.4: Modelo de fricción

**FRICCIÓN LUGRE OBSERVADA**

```
function[v_out]=lugre(v_in);
v=v_in(1:2);
error=v_in(3:4);
z=v_in(5:6);
k=1.5;
s0=1.5e3;
s1=sqrt(1.5e3);
s2=.4;
fc=[1.; 1.3];
fs=[1; 1.4];
vs=0.003;
gv=( fc + (fs-fc).*exp(-(v/vs).^2) )/s0;
z_=-v-abs(v).*z./gv-k*error;
fric=s0*z + s1*z_ +s2*v;
v_out=[fric;z_];
```

Cuadro A.5: Observador de fricción

# Apéndice B

## Grado de libertad virtual en eje de balanceo

### 1.-Algoritmo para rotar la imagen n grados

La representación de imágenes digitales se hace en coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . La posición de cada píxel en la imagen está determinada por los índices  $(x, y)$ . El índice  $x$  determina la posición horizontal de izquierda a derecha, y el índice  $y$  determina la posición vertical de arriba hacia abajo. El origen se encuentra en la esquina superior izquierda de la imagen, Figura B.1.

Se desea rotar la imagen  $n$  grados alrededor de un punto en el centro de la imagen: es conveniente por tanto rotar y trasladar los ejes de referencia al centro y trabajar con coordenadas polares, Figura B.2. Las ecuaciones de transformación entre coordenadas cartesianas y polares son las siguientes:

Cartesianas a polares:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

Polares a cartesianas:  $x = r\cos(\theta)$ ;  $y = r\sin(\theta)$

**1.1.-Mapeo de rotación:** La forma más directa e intuitiva de hacer la rotación de la imagen es hacer un mapeo que realice una rotación píxel a píxel de la imagen original  $IO$ , a la imagen rotada  $IR$ . En este caso el algoritmo es el siguiente:

- Se toma un píxel en la imagen original en coordenadas  $(x,y)$  y se trasla-

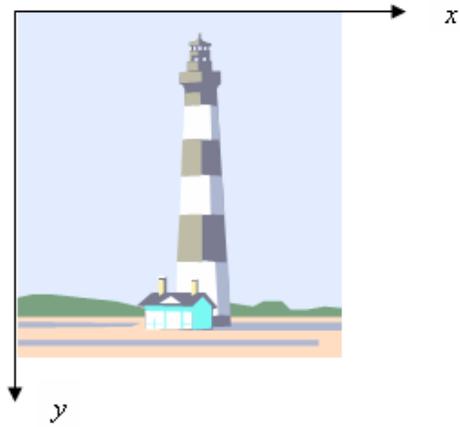


Figura B.1: Ejes de referencia convencionales para el manejo de imágenes digitales

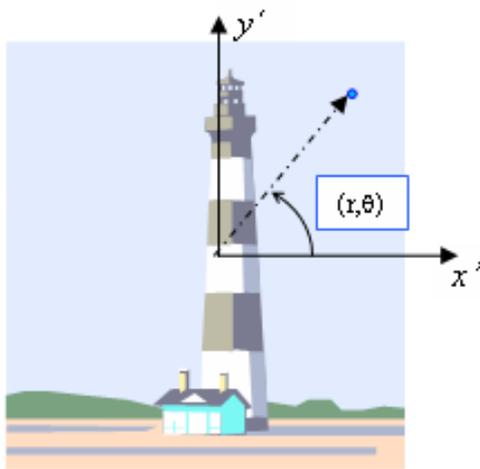


Figura B.2: Ejes de referencia propuestos

da respecto al origen  $(x', y')$ :  $P_{IO}(x, y) \implies P_{IO}(x', y')$

- Se transforma el píxel trasladado a coordenadas polares:  $P_{IO}(x', y') \implies P_{IO}(r, \theta)$
- Se *rota* el píxel en coordenadas polares el ángulo deseado  $\theta_d$ :  $P_{IO}(r, \theta) \implies P_{IR}(r, \theta + \theta_d)$
- Se transforma a coordenadas cartesianas-trasladadas el píxel rotado:  $P_{IR}(r, \theta) \implies P_{IR}(x', y')$
- Se traslada el píxel rotado a coordenadas  $(x, y)$ :  $P_{IR}(x', y') \implies P_{IR}(x, y)$

El mapeo anterior que va de  $IO$  a  $IR$  tiene el inconveniente de no ser uno a uno, debido a la representación discreta de la imagen. Varios puntos en  $IO$  comparten el mismo píxel en  $IR$ , lo que resulta en que  $IR$  tiene algunos pixeles ciegos o “agujeros”, B.3:

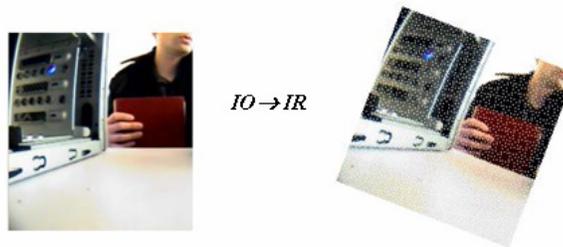


Figura B.3: Rotación de  $n$  grados, algoritmo con pixeles ciegos

Una alternativa para que la imagen rotada no presente estos píxeles ciegos, es hacer el mapeo “al revés”. Es decir, se recorre el lienzo en el que se desplegará la imagen rotada píxel a píxel, y se hace la transformación “inversa” a la que ya se describió. La transformación, nuevamente, no es uno a uno, pero se asegura que no existen puntos ciegos. Los píxeles que “llean” lo que antes eran píxeles ciegos, son píxeles repetidos que no desentonan, pues corresponden a una vecindad en la que los píxeles son bastante parecidos. El enfoque anterior puede por tanto representarse con el siguiente algoritmo:

- $P_{IR}(x, y) \implies P_{IR}(x', y')$
- $P_{IR}(x', y') \implies P_{IR}(r, \theta)$

- $P_{IR}(r, \theta + \theta_a \implies) P_{IO}(r, \theta)$
- $P_{IO}(r, \theta) \implies P_{IO}(x', y')$
- $P_{IO}(x', y') \implies P_{IO}(x, y)$

El resultado puede apreciarse en la imagen B.4:

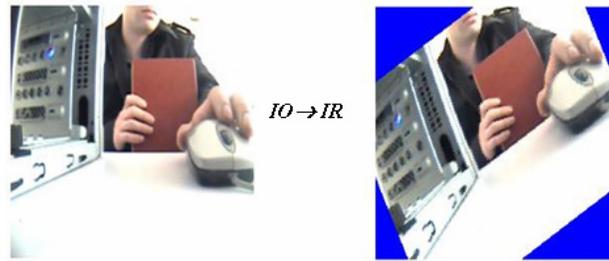


Figura B.4: Rotación de  $n$  grados, algoritmo sin puntos ciegos

# Apéndice C

## Suavización de señales

La señal de sensores de giro digitales es de tipo escalonado y la variación entre valores ocurre de una manera abrupta, por lo que tiene una derivada que asemeja pulsos, es decir espigas de corta duración y gran amplitud. Para suavizar estas señales y por ende el control que se basa en ellas, se utilizó un filtro de segundo grado. A continuación se detalla la forma en que se determinaron los coeficientes del mismo.

La función de transferencia de un filtro de segundo orden está dado por la expresión:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  y la frecuencia natural de oscilación no amortiguada  $\omega_n$  se eligen de forma que la respuesta sea críticamente amortiguada y tenga un tiempo de asentamiento  $T_{se}$  que sea una fracción del tiempo de muestreo  $T_{sa}$ , es decir  $T_{sa} = kT_{se}$  con  $k > 1$ . Para los datos manejados en las simulaciones el periodo de muestreo fue de  $T_{sa} = \frac{1}{9}s$ , y sea  $k=4$ . Por tanto de las propiedades de un sistema de segundo orden y dada la respuesta deseada:

$$\zeta = 1, T_{se} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{T_{sa}/k} = 144.$$

La Figura C.1 presenta una función escalonada y su respectiva suavización.

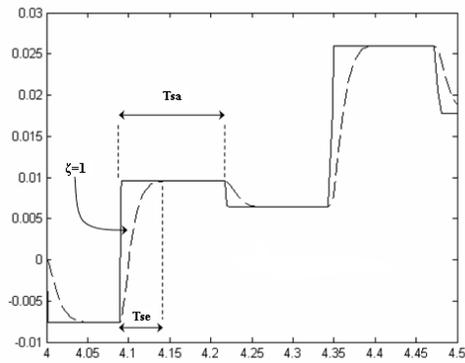


Figura C.1: Señal escalonada (línea sólida) y su contraparte “suavizada” (línea discontinua)

# Bibliografía

- [1] Jean-Jacques E.Slotine, Weiping Li: *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991
- [2] M.Vidyasagar, Mark W.Spong: *Robot Dynamics and Control*, Jhon Wiley & Sons, 1989
- [3] P.E.Wellstead *Physical System Modelling* Academic Press, 1979
- [4] Hassan K.Khalil *Non linear systems* Prentice Hall, Second Edition
- [5] Saeed B.Niku *Introduction to Robotics, Analisis, Systems, Applications* Prentice Hall, 2001
- [6] Peter J. y Rhonda L.Kennedy: *Direct Versus Indirect Line of Sight Stabilisation*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.11, No.1, January 2003
- [7] C.Canudas, H.Olsson, Åström, P.Lischinsky *A New Model for Control of Systems with Friction*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.40, No.3, March 1995
- [8] C.Canudas, H.Olsson, Åström, P.Lischinsky, M. Gäfvert *Friction Models and Friction Compensation*, Lund Institute of Technology, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, 1997
- [9] Rafael Kelly, J.Llamas, R.Campa, *A Measurement Procedure for Viscous and Coulomb Friction*, IEEE Transactions on Automatic Control and Measurement, Vol.49, No.4, Agosto 2000
- [10] C.Pérez y F.R.Rubio: *Implementation of an Inertial Controller for a 2 DOF platform*, Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications, México City

- [11] Zhou Qian,Zhang Hui: *Simulation and Experimental Analysis of the Stewart Parallel Mechanism for Vibration Control* , IEEE 2003.
- [12] Z.Jason Geng, Leonard S.Haynes *Six Degree of Freedom Active Vibration Control Using the Stewart Platform*, IEEE Transactions on Control Systems Thechnology Vol.2, No.1, March 1994.
- [13] Yuri B.Shtessel: *Sliding Mode Stabilization of Three Axis Inertial Platform*, IEEE 1994
- [14] Yuri B.Shtessel: *Decentralized Sliding Mode Control in Inertial Navigation Systems*, Proceedings of the American Control Conference, Washington 1995
- [15] Xu Yu Tang: *Terminal Sliding Mode Control for Rigid Robots*, Automatica Vol.34 No.1, 1998
- [16] Shuanghe Yu, Xinghuo Yu, Bijan Shirinzadeh, Zhihong Man: *Continuous Finite-Time Control for Robotic Manipulators with Terminal Sliding Mode*, Automatica Vol.41, 2005