UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

NOMBRE DEL ALUMNO
VALENTE SANTIAGO VARGAS

TUTOR
DR. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

FACULTAD DE CIENCIAS

VNIVERSDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos"

realizado por **Santiago Vargas Valente,** con número de cuenta **40300874-6,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Octavio Mendoza Hernández	
Propietario	Dr.	José Antonio Stephan de la Peña Mena	
Propietario	Dra.	Edith Corina Sáenz Valadez	Edith C. Sáenz V.
Suplente	Dr.	Michael Barot Schlatter	
Suplente	Dr.	Christof Geiss Hahn	

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 16 de enero del 2007.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecer a mis padres,: Angelina y Valente, por su amor, sus ejemplos y consejos que siempre tuve conmigo a pesar de la distancia. Y por alentarme a conseguir siempre mis metas.

A mis hermanos, con quienes viví una infancia inolvidable.

En forma especial, agradezco a mi asesor Octavio Mendoza, por haberme brindado todo el tiempo necesario y haberme enseñado tantas cosas durante ésta tesis.

Quiero agradecer a José Antonio de la Peña, por su apoyo en el proyecto PAPPIT, para la elaboración de ésta tesis.

A mis profesores de la facultad: A Paco Larrión, quien me enseñó durante dos años que el álgebra es fascinante y por las largas platicas que tuvimos. A Ernesto Rosales y Laura Ortiz por todo su apoyo y comprensión, y de los que aprendí mucho más que matemáticas.

A mis amigos de la facultad: Julio por su gran amistad y por las aventuras que hemos vivido; A Miguel por ser un cuate alivianado y por las desapariciones que hacía; a Isaac por ser un buen amigo y compartir el gusto por las matemáticas; y a Marta por hacernos reir con sus narraciones en la escuela de álgebra a la que fuimos.

Índice general

Introducción

A mediados del siglo XX, S. Eilenberg y S. MacLane (ver [3] y [4]) introdujeron las nociones de categoría, funtor, transformaciones naturales y dualidad. S. MacLane describió, en 1948, condiciones sobre una categoría, de tal manera que muchos teoremas que se valen para la categoría de grupos abelianos, fueran ciertos en tal categoría. Además, identificó ciertos tipos de enunciados que eran ciertos si y sólo si su dual lo era; y llamó a tales categorías con el nombre de categorías abelianas. En 1957, Grothendieck descubrió que ciertos tipos de categorías de gavillas eran abelianas y con base en esto le dió una fundamentación categoríca a la geometría algebraica, revolucionándola por completo. Aunque inicialmente hubo resistencia a aceptar éste enfoque, no tomó mucho tiempo para reconocer que éste era un enfoque natural para el estudio de la geometría algebraica. La noción de categoría abeliana llegó a ser importante y ampliamente aceptada en matemáticas. A partir de ese momento, las ideas categóricas y holomógicas crecieron rápidamente para tomar finalmente forma en el famoso libro de "álgebra homológica", escrito por H. Cartan y S. Eilenberg.

Hacía 1960, (ver [5] y [8]) los matemáticos se empezaron a dar cuenta de ciertos tipos de enunciados que si eran ciertos en la categoría de grupos abelianos entonces eran ciertos en una categoría abeliana. Fué en ésta dirección, donde Lubkin, Heron y Freyd demostraron independientemente el famoso teorema de inmersión que dice: "toda categoría abeliana pequeña admite una inmersión fiel, covariante y exacta en la categoría de grupos abelianos". Este primer teorema de inmersión es muy importante, pues de él se sigue que todo enunciado concerniente a exactitud y conmutatividad de un diagrama en una categoría abeliana es cierto, si se prueba que es cierto en la categoría de grupos abelianos. Sin embargo, dado que en el teorema anterior la inmersión no es necesariamente plena, se tienen dificultades con los enunciados que involucran la existencia de morfismos en un diagrama. Unos años después, en [10], B. Mitchell, resuelve dicho problema probando el conocido teorema de "Inmersión completa" el cual afirma que: "toda categoría abeliana pequeña admite una inmersión fiel, plena, exacta y covariante en una categoría de R-módulos para algún anillo R".

Esta tesis tiene dos objetivos. Por un lado, se pretende presentar las bases necesarias para entender y demostrar el primer teorema de inmersión; y por otro, se pretende escribir de manera clara y precisa los temas básicos de categorías y álgebra homológica que son necesarios para introducirse en el estudio de la teoría de Representaciones de Álgebras. Se ha tomado como base el libro [9] de "Theory of categories"de B. Mitchell, completando los huecos en las demostraciones de dicho libro al introducir los lemas o proposiciones necesarias; así como también, se han redactado de mejor manera muchas de las definiciones y cambiado el orden de exposición, con el fin de hacer más accesible el contenido. De manera similar, se han usado varias fuentes (ver [1], [2], [6], [7] y [11]) para escribir el contenido de álgebra homológica en ésta tesis, para lo cual, se han introducido en el lenguaje de las categorías abelianas: la categoría de complejos, las dimensiones proyectivas e inyectivas de objetos, algo sobre funtores derivados, categorías de Grothendieck, nociones sobre objetos simples, artinianos y noetherianos, existencia y propiedades de resoluciones inyectivas (resp. proyectivas) minimales.

En el capítulo 1, introducimos la noción de categoría y algunos ejemplos. Se dá la noción de equivalencia natural entre categorías, la cual se ha vuelto muy importante en el álgebra. Trabajamos con las categorías de sub-objetos y objetos cociente de un objeto A de una categoría $\mathscr{A}$; y se demuestra que, en el caso en el que $\mathscr{A}$ tiene kerneles, cokerneles, es normal y conormal las categorías de sub-objetos y objetos cociente resultan ser equivalentes. Asimismo, enunciamos y demostramos algunos resultados sobre categorías exactas, como el primer y segundo teorema de isomorfismo de E. Noether. Se presenta el teorema de S. MacLane, el cual afirma que toda categoría con biproductos tiene una única estructura semiaditiva. El capítulo finaliza con el concepto de categoría abeliana el cual es fundamental en todo el trabajo.

En el capítulo 2, se presenta la categoría de representaciones de una categoría $\mathscr{A}$ sobre un diagrama Σ. Se introduce la noción de límite y colímite de una representación - la cual será fundamental en el camino a la prueba del teorema de inmersión - así como las condiciones suficientes para la existencia de límites. Presentamos también las propiedades que cumplen los funtores fieles, debidas a P. Freyd, que nos guiarán a los metateoremas del capítulo 4. Se estudia la categoría $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ de funtores covariantes de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, cuando $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña; y se dan sus principales propiedades derivadas de $\mathscr{B}$.
Se introduce el funtor $\lim_\Sigma$ y se demuestra que en el caso en que $\mathscr{A}$ es una categoría Σ-completa, tal funtor es un monofuntor. Asimismo, damos propiedades de los objetos inyectivos y proyectivos y la noción de generador que será de vital importancia en el capítulo 3.

El capítulo 3 es una de las partes centrales de ésta tesis. Se presentan a las categorías C_3 (noción que apareció por primera vez, como el axioma AB5, en el artículo [6] de A. Grothendieck). Se prueba que una categoría es C_3 si sólo si el funtor $\lim_\Sigma$ es exacto. Tratamos con la noción de envolvente inyectiva que fue descubierta por B. Eckmann y A. Schopf. Uno de los resultados principales de este capítulo es el teorema que dá las condiciones suficientes para la existencia de envolventes inyectivas en categorías abelianas; el cual nos será de ayuda la demostración del primer teorema de inmersión.

El capítulo 4 comienza con el conocido Lema de Yoneda, el cual es fundamental en el estudio de la categoría de funtores aditivos $(\mathscr{A}, Ab)$ de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, cuando $\mathscr{A}$ es pequeña. Se demuestra que la categoría $(\mathscr{A}, Ab)$ admite un generador proyectivo. Es en éste capítulo donde se demuestra el primer teorema de inmersión, dándose algunas consecuencias de dicho teorema, como por ejemplo, que el Lema de la Serpiente es válido en cualquier categoría abeliana.

En el capítulo 5, se estudia la categoria de complejos en una categoría abeliana. Se trabaja sobre categorías de Grothendieck y categorías con suficientes proyectivos, en las cuales se puede hacer álgebra homológica. Se introduce la noción de cohomología y de funtores derivados. Se demuestran los teoremas clásicos del álgebra homológica y hace su aparición el funtor Ext^i (uno de los funtores del apocalipsis, según una anecdota de Michael Barot). Se presenta la noción de dimensión proyectiva e inyectiva de un objeto, así como las resoluciones minimales que nos ayudan en el cálculo de tales dimensiones. Damos condiciones suficientes para la existencia de objetos simples; y la noción de objeto de longitud finita. Finalmente, presentamos la noción de cubierta proyectiva y damos condiciones suficientes para su existencia.

Cabe mencionar que la mayoría de los teoremas presentados en ésta tesis, se demuestran con todo detalle, de tal manera que los únicos prerrequisitos necesarios para el entendimiento de ésta son los primeros tres cursos de álgebra moderna de la Licenciatura en Matemáticas. Al empezar a trabajar en ésta tesis, uno de los objetivos principales, es que fuera autocontenida, espero que en gran medida se haya logrado, pero lo dejamos a consideración del lector.

Capítulo 1

Nociones básicas

Si tan sólo entendiera la hermosa consecuencia
que se sigue de la proposición concisa $d^2 = 0$.
Henry Cartan Laudatio.

1.1. Conjuntos y clases

A lo largo de esta tesis usaremos los conjuntos de manera intuitiva. Para estudiar categorías, necesitaremos considerar colecciones de conjuntos. Sin embargo, como lo ilustra la siguiente paradoja de B. Russell, hay problemas cuando consideramos colecciones arbitrarias de conjuntos. En efecto, supongamos que la colección $\mathscr{U}$ de todos los conjuntos es un conjunto. Entonces el subconjunto $A = \{X \in \mathscr{U} \mid X \notin X\}$ de $\mathscr{U}$ tendría la siguiente propiedad: $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$, lo cual es absurdo. Para evitar tales paradojas, consideraremos una nueva jerarquía en las colecciones de conjuntos, esto es, la noción intuitiva de clase.

Como vimos arriba, la colección $\mathscr{U}$ de todos los conjuntos no es mas un conjunto. Por lo tanto, diremos que $\mathscr{U}$ es una clase y la llamaremos la **clase universal**. Diremos que la colección $\mathscr{A}$ es una **clase**, si existe una propiedad P tal que $\mathscr{A}$ tiene como miembros a los conjuntos que satisfacen P, esto es, $\mathscr{A} = \{X \in \mathscr{U} \mid P(X) \quad \text{es verdadera}\}$, donde $\mathscr{U}$ es la clase universal. Por ejemplo, la clase de grupos abelianos, la clase de anillos asociativos y la clase de espacios topológicos. Como se acaba de ver, una clase es simplemente una subcolección de la clase universal $\mathscr{U}$.

Por conveniencia, los conjuntos se pueden pensar como tipos especiales de clases. Esto es, un conjunto $\mathscr{A}$ es una clase $\mathscr{A}$ tal que toda subclase $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ es un conjunto. Las clases que no son conjuntos se llaman **clases propias**. Muy frecuentemente, los conjuntos son llamados **clases pequeñas**, y las clases propias son llamadas "clases grandes". Observe que la clase universal $\mathscr{U}$ de todos los conjuntos es una clase propia, pues $\mathscr{U}$ no es mas un conjunto. De esta manera, la paradoja de Russell se traduce ahora en la prueba de que la clase universal

$\mathscr{U}$ es una clase grande.
Análogamente a como se hace en conjuntos, podemos hacer ciertas construcciones con clases. Dadas las clases $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ podemos formar, por ejemplo, las siguientes clases:

(1) la unión de clases $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} := \{X \mid X \in \mathscr{A} \quad \text{ó} \quad X \in \mathscr{B}\}$,

(2) la intersección de clases $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} := \{X \mid X \in \mathscr{A} \quad \text{y} \quad X \in \mathscr{B}\}$,

(3) la diferencia de clases $\mathscr{A} - \mathscr{B} := \{X \mid X \in \mathscr{A} \quad \text{y} \quad X \notin \mathscr{B}\}$,

(4) el producto cartesiano de clases $\mathscr{A} \times \mathscr{B} := \{(a, b) \mid a \in \mathscr{A}, b \in \mathscr{B}\}$

(5) funciones de la clase $\mathscr{A}$ en la clase $\mathscr{B}$,

$$\mathscr{B}^{\mathscr{A}} = \{f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B} \mid \text{f es función}\}$$

1.2. Definición de categoría

Definición 1.2.1 *Una categoría $\mathscr{A}$ está dada por una clase $Obj(\mathscr{A})$ de objetos, una clase $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ de morfismos y una operación parcial binaria $\circ$ definida en $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$, tales que:*

(1) $\mathscr{M}_{\mathscr{A}} = \bigcup_{(A,B) \in Obj(\mathscr{A}) \times Obj(\mathscr{A})} [A, B]_{\mathscr{A}}$, donde $[A, B]_{\mathscr{A}}$ es un conjunto para todo par $(A, B) \in Obj(\mathscr{A}) \times Obj(\mathscr{A})$,

(2) $[A, B]_{\mathscr{A}} = [C, D]_{\mathscr{A}}$ si y sólo si $A = C$ y $B = D$,

(3) para cada triple $(A, B, C) \in Obj(\mathscr{A}) \times Obj(\mathscr{A}) \times Obj(\mathscr{A})$, la operación parcial binaria $\circ$ definida en $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$, induce por restricción, una función

$$\Omega : [B, C]_{\mathscr{A}} \times [A, B]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [A, C]_{\mathscr{A}}$$

definida por $\Omega(\beta, \alpha) = \beta \circ \alpha$, que satisface las siguientes propiedades:

(i) asociatividad: $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ siempre que dicha composición esté definida,

(ii) existencia de identidades: $\forall A \in Obj(\mathscr{A})$ existe $1_A \in [A, A]_{\mathscr{A}}$ tal que $\forall \alpha \in [B, A]_{\mathscr{A}}$ y $\forall \beta \in [A, C]_{\mathscr{A}}$ se tiene que $1_A \circ \alpha = \alpha$, $\beta \circ 1_A = \beta$.

Para simplificar la notación, escribiremos $\beta\alpha$ en lugar de $\beta \circ \alpha$. Más aún, dado un morfismo $\alpha \in [A, B]_{\mathscr{A}}$ lo representaremos por $\alpha : A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{\alpha} B$, y diremos que A es el **dominio** de α y B es el **codominio** de α, en símbolos, $Dom(\alpha) := A$ y $Codom(\alpha) := B$. En particular, las propiedades (1) y (2) de la definición anterior, se traducen en lo siguiente: todo morfismo $\alpha \in \mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ tiene asociado un único dominio y codominio. Por otro lado, de (3) se tiene que la identidad 1_A asociada a un objeto $A \in \mathscr{A}$ es única.

Observación 1.2.2 *A veces denotaremos al conjunto $[A, B]_{\mathscr{A}}$ por $Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$.*

Definición 1.2.3 *Una categoría $\mathscr{A}$ es* ***pequeña*** *si la clase de objetos $Obj(\mathscr{A})$ es un conjunto.*

Definición 1.2.4 *Diremos que $\mathscr{A}'$ es una* ***subcategoría*** *de $\mathscr{A}$ si satisface lo siguiente:*

(i) $Obj(\mathscr{A}') \subset Obj(\mathscr{A})$,

(ii) $[A, B]_{\mathscr{A}'} \subset [A, B]_{\mathscr{A}}$ $\forall (A, B) \in Obj(\mathscr{A}') \times Obj(\mathscr{A}')$,

(iii) la composición de morfismos en $\mathscr{A}'$ es la misma que en $\mathscr{A}$,

(iv) Si $1'_A \in [A, A]_{\mathscr{A}'}$ es la identidad en $\mathscr{A}'$ entonces $1'_A = 1_A$, donde $1_A \in [A, A]_{\mathscr{A}}$ es la identidad en $\mathscr{A}$.

Si además, $[A, B]_{\mathscr{A}'} = [A, B]_{\mathscr{A}}$ $\forall (A, B) \in Obj(\mathscr{A}') \times Obj(\mathscr{A}')$, diremos que $\mathscr{A}'$ es una ***subcategoría plena*** *de $\mathscr{A}$.*

1.3. Ejemplos

En los ejemplos del (1) al (4), la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

(1) La categoría **Sets** cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos y donde $[A, B]_{Sets}$ es el conjunto de todas las funciones de A en B.

(2) La categoría **Top** cuyos objetos son todos los espacios topológicos, y los morfismos del espacio A al espacio B son las funciones continuas de A en B.

(3) La categoría $\mathbf{Sets}_0$ cuyos objetos son parejas ordenadas (A, a), donde A es un conjunto y $a \in A$. Un morfismo de (A, a) a (B, b) es una función $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(a) = b$.

(4) La categoría $\mathbf{Top}_0$ cuyos objetos son los espacios topológicos con punto base, esto es, parejas ordenadas (A, a) donde A es un espacio topológico y $a \in A$. Un morfismo f de (A, a) en (B, b) es una función continua de $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(a) = b$.

(5) Sea G un semigrupo. Podemos pensar a G como una categoría con un solo objeto, haciendo $Obj(G) := \{\star\}$, $\mathscr{M}_G := G$ y la composición de morfismos en $\mathscr{M}_G$ es la composición en G. Recíprocamente, si $\mathscr{A}$ es una categoría con un solo objeto entonces $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ es un semigrupo.

(6) Sea $\mathscr{A}$ una clase y $\leq$ un pre-orden en $\mathscr{A}$, esto es, $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva en $\mathscr{A}$. La clase pre-ordenada $(\mathscr{A}, \leq)$ se puede pensar como una categoría en la siguiente forma:

$Obj(\mathscr{A}) := \mathscr{A}$ y el conjunto $[x,y]_{\mathscr{A}}$ tiene a lo más un elemento que denotaremos por f_x^y, esto es,

$$[x,y]_{\mathscr{A}} := \begin{cases} f_x^y & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{si } x \nleq y. \end{cases}$$

La composición $\circ : [b,c]_{\mathscr{A}} \times [a,b]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [a,c]_{\mathscr{A}}$ está dada por $f_b^c f_a^b := f_a^c$. Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría con la propiedad de que $[a,b]_{\mathscr{A}}$ tiene a lo sumo un elemento $\forall a,b \in Obj(\mathscr{A})$. Definimos un pre-orden $\leq$ en $Obj(\mathscr{A})$ como sigue: $a \leq b$ si y sólo si $[a,b]_{\mathscr{A}} \neq \emptyset$.
Luego tenemos que $(Obj(\mathscr{A}), \leq)$ es una clase pre-ordenada.

(7) **Categorías cociente**. Sea $\mathscr{A}$ una categoría y $\sim$ una relación de equivalencia en la clase de morfismos $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{A}$. Diremos que $\sim$ es compatible con $\mathscr{A}$ si satisface lo siguiente:

(a) la restricción de $\sim$ a cada conjunto $[A,B]_{\mathscr{A}}$ es una relación de equivalencia en dicho conjunto,

(b) $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}/\sim = \bigcup_{(A,B)\in Obj(\mathscr{A})\times Obj(\mathscr{A})}[A,B]_{\mathscr{B}}/\sim$, y

(c) si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $fg \sim f'g'$ cada vez que dicha composición esté definida en $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$, compatible con $\mathscr{A}$, podemos construir la categoría cociente $\mathscr{A}/\sim$ como sigue:

(i) $Obj(\mathscr{A}/\sim) := Obj(\mathscr{A})$,

(ii) $[A,B]_{\mathscr{A}/\sim} := [A,B]_{\mathscr{A}}/\sim$ y la composición en $\mathscr{M}_{\mathscr{A}/\sim}$ está definida por

$$\diamond : [B,C]_{\mathscr{A}/\sim} \times [A,B]_{\mathscr{A}/\sim} \longrightarrow [A,C]_{\mathscr{A}/\sim}$$

$[\beta] \diamond [\alpha] = [\beta \circ \alpha]$, donde $\circ$ es la composición en $\mathscr{A}$.

1.4. Funtores

Definición 1.4.1 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Un* ***funtor covariante*** $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *es una asignación de un objeto $T(A) \in \mathscr{B}$ para cada objeto $A \in \mathscr{A}$ y un morfismo $T(\alpha) \in [T(A), T(A')]_{\mathscr{B}}$ para cada morfismo $\alpha \in [A,A']_{\mathscr{A}}$, tal que:*

1. *preserva la composición, esto es, si $\alpha'\alpha$ está definida en $\mathscr{A}$ entonces*

$$T(\alpha'\alpha) = T(\alpha')T(\alpha); \quad y$$

2. *preserva las identidades, esto es, para cada $A \in \mathscr{A}$ se tiene que $T(1_A) = 1_{T(A)}$.*

Observación 1.4.2 *Dado un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, diremos que $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) es el dominio (resp. codominio) de T. En general, un funtor preserva ciertas propiedades de los morfismos de su dominio.*

Definición 1.4.3 *Un **funtor contravariante** $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una asignación de un objeto $T(A) \in \mathscr{B}$ para cada objeto $A \in \mathscr{A}$ y un morfismo $T(\alpha) \in [T(A'), T(A)]_{\mathscr{B}}$ para cada morfismo $\alpha \in [A, A']_{\mathscr{A}}$, tal que:*

1. *invierte la composición, esto es, si $\alpha'\alpha$ está definida en $\mathscr{A}$, entonces*
$$T(\alpha'\alpha) = T(\alpha)T(\alpha'); \quad y$$
2. *preserva las identidades, esto es, para cada $A \in \mathscr{A}$ se tiene que $T(1_A) = 1_{T(A)}$.*

Ejemplos de funtores:

(1) El funtor covariante $1_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$, tal que $1_{\mathscr{A}}(A) = A$ para toda $A \in \mathscr{A}$ y $1_{\mathscr{A}}(\alpha) = \alpha$ para todos los morfismos $\alpha \in \mathscr{A}$, es llamado el **funtor identidad** sobre $\mathscr{A}$.

(2) Sea $\mathscr{A}'$ una subcategoría de $\mathscr{A}$, el funtor covariante $I : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que: $I(A) = A$ para toda $A \in \mathscr{A}'$ y $I(\alpha) = \alpha$ para todos los morfismos α en $\mathscr{A}'$, es llamado el **funtor inclusión** de $\mathscr{A}'$ en $\mathscr{A}$.

(3) Sea $\mathscr{A}''$ una categoría cociente de $\mathscr{A}$, el funtor covariante $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}''$ tal que: $\pi(A) = A$ para todo $A \in \mathscr{A}$ y $\pi(\alpha) = [\alpha]$ para todos los morfismos α en $\mathscr{A}$, es llamado el **funtor proyección** de $\mathscr{A}$ sobre $\mathscr{A}''$.

(4) El funtor olvido $F : Ab \longrightarrow Sets$, de la categoría de grupos abelianos a la categoría de conjuntos, es el funtor que olvida la estructura de grupo abeliano sobre los objetos de Ab. Es decir, si G es un grupo abeliano, entonces $F(G) = G$ como conjunto; y si α es un morfismo de grupos abelianos entonces $F(\alpha) = \alpha$ como función. De manera análoga, tenemos un funtor olvido $F_0 : Ab \longrightarrow Sets_0$ el cual le asigna a cada grupo abeliano G el objeto $(F(G), 0)$ donde 0 es el cero de G.

Definición 1.4.4 *Sean $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores. Definimos la composición $ST : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ por las reglas $ST(A) = S(T(A))$ y $ST(\alpha) = S(T(\alpha))$. No es difícil ver que ocurre lo siguiente: si S y T son ambos covariantes ó contravariantes entonces ST es covariante; mientras que, si uno es covariante y el otro contravariante entonces ST es contravariante.*

Definición 1.4.5 *Sean $S, T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ funtores covariantes. Una **transformación natural** $\eta : S \longrightarrow T$ es una familia de morfismos $\eta = \{\eta_A : S(A) \longrightarrow T(A)\}_{A \in \mathscr{A}}$ en $\mathscr{B}$ tal que para todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "S(\alpha)"'] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ S(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] & T(A'). \end{tikzcd}$$

Observación 1.4.6 *1. Si η_A es un isomorfismo para cada $A \in \mathscr{A}$, decimos que η es una* ***equivalencia natural****. En este caso, tenemos una transformación natural $\eta^{-1} : T \longrightarrow S$ definida por $(\eta^{-1})_A = (\eta_A)^{-1}$. Escribiremos $S \simeq T$ para denotar que S y T son naturalmente equivalentes.*

2. Si $\eta : S \longrightarrow T$ y $\rho : T \longrightarrow U$ son transformaciones naturales de funtores, definimos la composición $\rho\eta : S \longrightarrow U$ por $(\rho\eta)_A = \rho_A\eta_A$. Para cualquier funtor T, la transformación natural identidad $1_T : T \longrightarrow T$ es por definición $(1_T)_A = 1_{T(A)}$ para toda $A \in \mathscr{A}$.

3. Sean $S, T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $U : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores y $\eta : S \longrightarrow T$ una transformación natural. Entonces, tenemos una transformación natural $U\eta : US \longrightarrow UT$ definida por $(U\eta)_A = U(\eta_A)$ para toda $A \in \mathscr{A}$. Similarmente, si $V : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor, entonces $\eta V : SV \longrightarrow TV$ está dada por $(\eta V)_D = \eta_{V(D)}$ para toda $D \in \mathscr{D}$.

Definición 1.4.7 *Un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es llamado* ***fiel*** *(resp.* ***pleno****) si para todo par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$ la función inducida por T*

$$[A, B]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [T(A), T(B)]_{\mathscr{B}} \tag{1.1}$$

es inyectiva (resp. suprayectiva).Un funtor fiel que manda objetos distintos en objetos distintos es llamado una ***inmersión****. Decimos que T es* ***denso*** *si para todo $B \in \mathscr{B}$ existe un objeto $A \in \mathscr{A}$, tal que $T(A)$ es isomorfo a B.*
Decimos que $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una ***equivalencia*** *de categorías, si existe un funtor $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que $TS \simeq 1_{\mathscr{B}}$ y $ST \simeq 1_{\mathscr{A}}$.*

1.5. Categoría dual

Definición 1.5.1 *Dada una categoría $\mathscr{A}$, definimos la* ***categoría dual*** *$\mathscr{A}^*$ de $\mathscr{A}$ como sigue: los objetos de $\mathscr{A}^*$ son los mismos de $\mathscr{A}$ y $[B, A]_{\mathscr{A}^*} := [A, B]_{\mathscr{A}}$. La composición fg en $\mathscr{A}^*$ está definida como la composición gf en $\mathscr{A}$.*

Notación: Sea $\mathscr{A}$ una categoría y $\mathscr{A}^*$ la categoría dual. Para evitar confusiones, escribimos $A^* := A$ para $A \in Obj(\mathscr{A})$; y diremos que $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ es un morfismo en $\mathscr{A}^*$ si y sólo si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$. Usando ésta convención, la composición de morfismos en $\mathscr{A}^*$ es:

$$f^*g^* := gf \quad \forall f \in [A, B]_{\mathscr{A}} \quad \text{y} \quad \forall g \in [B, C]_{\mathscr{A}}.$$

Observación 1.5.2

(1) La asignación $D_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^*$, donde $D_{\mathscr{A}}(A) = A^*$ en objetos y $D_{\mathscr{A}}(f) = f^*$ en morfismos, es un funtor contravariante.

(2) $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$; por lo tanto, la composición de funtores $D_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^*$ y $D_{\mathscr{A}^*} : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A}$ satisface las igualdades $D_{\mathscr{A}^*}D_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}$ y $D_{\mathscr{A}}D_{\mathscr{A}^*} = 1_{\mathscr{A}^*}$.

(3) Si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor covariante (resp. contravariante), entonces tenemos un funtor contravariante (resp. covariante) $T_* : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{B}$, donde $T_* := TD_{\mathscr{A}^*}$. Análogamente, se tiene un funtor $T^* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}^*$, donde $T^* := D_{\mathscr{B}}T$. Además, $T_*^* := (T^*)_* = (T_*)^*$.

Observación 1.5.3 ***El principio de dualidad***
La propiedad (2) de 1.5.2, nos permite definir para cada "concepto categórico" y cada "enunciado categórico" sus respectivas versiones duales. Daremos solamente una idea de los conceptos duales.
Supongamos que P es una propiedad que relaciona objetos y morfismos en una categoría $\mathscr{A}$, la propiedad dual P^* en $\mathscr{A}$ se obtiene como sigue: primero se escribe la propiedad P en términos de la categoría $\mathscr{A}^*$ y luego se aplica el funtor $D_{\mathscr{A}^*} : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A}$ a la propiedad P, es decir, P^* es la propiedad obtenida de P "dando vuelta" a las flechas.
Veamos un ejemplo, sea $P(X)$ la siguiente propiedad asociada a un objeto X de $\mathscr{A}$:

$$P(X): \quad \forall Y \in Obj(\mathscr{A}) \text{ existe un único } f : Y \longrightarrow X \text{ en } \mathscr{A}.$$

Escribiendo la propiedad $P(X)$ en términos de $\mathscr{A}^*$ se tiene: $P(X)$: $\forall Y^* \in Obj(\mathscr{A}^*)$ existe un único $f^* : Y^* \longrightarrow X^*$ en $\mathscr{A}^*$. Luego, aplicando el funtor $D_{\mathscr{A}^*} : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A}$ a la propiedad anterior, se obtiene la propiedad dual:

$$P(X)^*: \quad \forall Y \in Obj(\mathscr{A}) \text{ existe un único } f : X \longrightarrow Y \text{ en } \mathscr{A}.$$

Muy frecuentemente, el concepto dual P^* de un concepto categórico P se denota por "co-P". Como se verá más adelante, tendremos objeto nulo y objeto co-nulo, kernel y cokernel, producto y coproducto etc.
*El hecho de que la dualidad sea muy importante, radica en la posibilidad de que no solamente se pueden dualizar los conceptos sino también los enunciados, lemas, teoremas, etc. Por ejemplo, si S es un enunciado relacionado con morfismos y objetos de $\mathscr{A}$ entonces, por definición, el enunciado dual S^* es verdadero en $\mathscr{A}$ si y sólo si S es verdadero en $\mathscr{A}^*$. Esto último, junto con el hecho de que $D_{\mathscr{A}^*}D_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}$ y $D_{\mathscr{A}}D_{\mathscr{A}^*} = 1_{\mathscr{A}^*}$, implica el **principio de dualidad para categorías** que dice lo siguiente:*
Si S es un enunciado categórico que es verdadero para todas las categorías, entonces S^* también es verdadero para todas las categorías.

1.6. Morfismos y sub-objetos

Definición 1.6.1 *Un morfismo $\theta : A \longrightarrow B$ es llamado un **split-mono** si existe un morfismo $\theta' : B \longrightarrow A$ tal que $\theta'\theta = 1_A$. Decimos que θ es un **split-epi** si existe un morfismo $\theta'' : B \longrightarrow A$ tal que $\theta\theta'' = 1_B$. Si θ es split-mono y split-epi decimos que θ es un **isomorfismo** y que A es isomorfo a B, en símbolos $A \simeq B$.*

Observación 1.6.2

(1) Note que en el caso de un isomorfismo se tiene que:

$$\theta' = \theta' 1_B = \theta'(\theta\theta'') = (\theta'\theta)\theta'' = 1_A\theta'' = \theta''.$$

*Por lo tanto, se dice que $\theta' = \theta''$ es el **inverso** de θ y se denota por θ^{-1}.*

(2) Es fácil ver que si $\theta \in [A, B]_{\mathscr{A}}$ es un split-mono (resp. split-epi) y $\mathscr{A}''$ es una categoría cociente de $\mathscr{A}$, entonces $[\theta]$ es un split-mono (resp. split-epi) en $\mathscr{A}''$.

(3) El concepto dual de "split-mono" es "split-epi", pues $\theta : A \longrightarrow B$ es split-mono en $\mathscr{A}$ si y sólo si $\theta^* : B^* \longrightarrow A^*$ es split-epi en $\mathscr{A}^*$.

Definición 1.6.3 *Un morfismo $\alpha \in [A, B]_{\mathscr{A}}$ es un **monomorfismo** si $\alpha f = \alpha g$ implica $f = g$ para todo par de morfismos f y g con codomonio A. Un morfismo α es un **epimorfismo** si $f\alpha = g\alpha$ implica que $f = g$ para todo par de morfismos f y g con dominio A.*

La noción de epimorfismo es dual a la de monomorfismo pues α es un epimorfismo en $\mathscr{A}$ si y sólo si α^* es un monomorfismo en $\mathscr{A}^*$.
Es fácil ver que si α y β son monomorfismos y $\beta\alpha$ está definida entonces $\beta\alpha$ es un monomorfismo. Por otro lado, si $\beta\alpha$ es un monomorfismo, entonces α es un monomorfismo, pero no necesariamente β lo es.
Dualmente, se tiene que si α y β son epimorfismos entonces $\alpha\beta$ es un epimorfismo; y si $\alpha\beta$ es un epimorfismo entonces α es un epimorfismo, pero no necesariamente β lo es.
Por otro lado, un split-mono es necesariamente un monomorfismo y un split-epi es necesariamente un epimorfismo.

Definición 1.6.4 *Una categoría $\mathscr{A}$ es **balanceada** si todo morfismo que es un monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo.*

Proposición 1.6.5 *Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un split-mono y también es un epimorfismo, entonces es un isomorfismo.*

Demostración. Tenemos que existe un morfismo $\beta : B \longrightarrow A$ tal que $\beta\alpha = 1_A$. Por lo tanto, $(\alpha\beta)\alpha = \alpha(\beta\alpha) = \alpha 1_A = \alpha = 1_B\alpha$, y como α es un epimorfismo, entonces $\alpha\beta = 1_B$. Por lo tanto α es un isomorfismo. □

La proposición dual es la siguiente:

Proposición 1.6.6 *Si $\alpha : B \longrightarrow A$ es un split-epi y también es un monomorfismo, entonces es un isomorfismo.*

Definición 1.6.7 *Si $\alpha : A' \longrightarrow A$ es un monomorfismo, decimos que A' es un **sub-objeto** de A y que α es una **inclusión** de A' en A.*

A veces escribiremos $A' \subset A$ para indicar que A' es un sub-objeto de A, y diremos que A' está **contenido** en A ó que A **contiene** a A'.

Si el monomorfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ no es un isomorfismo diremos que A' es un **sub-objeto propio** de A. La composición de un monomorfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ con un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es denotado por $f\mid_{A'}$ y se dice que $f\mid_{A'}$ es una **restricción** de f a A'.

Definición 1.6.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{A}$. La* ***categoría de sub-objetos*** *de A, que denotaremos por $[\mathscr{A}, A]$, se define como sigue.*
Los objetos de $[\mathscr{A}, A]$ son pares (α, A) tales que $\alpha : Dom(\alpha) \longrightarrow A$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$. Dados (α, A) y (α', A) en $Obj([\mathscr{A}, A])$, definimos

$$[(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]} := \{\gamma \in [Dom(\alpha), Dom(\alpha')]_{\mathscr{A}} \mid \alpha'\gamma = \alpha\}.$$

La composición de morfismos en $[\mathscr{A}, A]$ es la misma que en $\mathscr{A}$, pues como vimos arriba $[(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]} \subset [Dom(\alpha), Dom(\alpha')]_{\mathscr{A}}$. Se puede ver fácilmente que con estos datos $[\mathscr{A}, A]$ es en efecto una categoría.

Veamos algunas propiedades básicas de la categoría $[\mathscr{A}, A]$.

Lema 1.6.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces*

(a) $[(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]}$ *tiene a lo sumo un elemento,*

(b) si $\gamma \in [(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]}$ entonces $\gamma : Dom(\alpha) \longrightarrow Dom(\alpha')$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$,

(c) si $[(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]} \neq \emptyset$ y $[(\alpha', A), (\alpha, A)]_{[\mathscr{A},A]} \neq \emptyset$, entonces existe un único isomorfismo $\gamma : (\alpha, A) \longrightarrow (\alpha', A)$ en $[\mathscr{A}, A]$.

Demostración.

(a) Sean $\gamma, \gamma' \in [(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]}$. Entonces $\alpha'\gamma = \alpha = \alpha'\gamma'$. Luego, como α' es un monomorfismo, concluimos que $\gamma = \gamma'$.

(b) Sea $\gamma \in [(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]}$. Por lo tanto, $\alpha'\gamma = \alpha$ y entonces, como α es un monomorfismo, se tiene que γ es un monomorfismo.

(c) Sean $\gamma \in [(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]}$ y $\gamma' \in [(\alpha', A), (\alpha, A)]_{[\mathscr{A},A]}$. Por lo tanto $\gamma'\gamma \in [(\alpha, A), (\alpha, A)]_{[\mathscr{A},A]}$, y entonces como $1_{(\alpha,A)} \in [(\alpha, A), (\alpha, A)]_{[\mathscr{A},A]}$, se tiene por (a) que $\gamma'\gamma = 1_{(\alpha,A)}$. Análogamente $\gamma\gamma' = 1_{(\alpha',A)}$. Entonces, $\gamma : Dom(\alpha) \longrightarrow Dom(\alpha')$ es un isomorfismo y es único por (a).

□
Del lema anterior y del ejemplo (6) en la sección 1.3. Se tiene lo siguiente.

Definición 1.6.10 *Definimos un pre-orden en $[\mathscr{A}, A]$ como sigue: $(\alpha, A) \leq (\alpha', A)$ si y sólo si $[(\alpha, A), (\alpha', A)]_{[\mathscr{A},A]} \neq \emptyset$. Para simplificar la notación, escribiremos algunas veces $\alpha \leq \alpha'$ en lugar de $(\alpha, A) \leq (\alpha', A)$, siempre teniendo en cuenta al objeto fijo A.*

Definición 1.6.11 *Una clase $\mathscr{C}$ de sub-objetos de $A \in \mathscr{A}$ se dice que es una **clase representativa** de sub-objetos de A, si todo sub-objeto de A es isomorfo a un sub-objeto en $\mathscr{C}$. Si todo $A \in \mathscr{A}$ tiene una clase representativa la cual es un conjunto, diremos que $\mathscr{A}$ es **localmente pequeña**.*

El concepto dual de sub-objeto es el de objeto cociente. A continuación, enunciaremos brevemente las propiedades duales de los sub-objetos.

Definición 1.6.12 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{A}$. La **categoría de objetos cociente** de A, que denotaremos por $[A, \mathscr{A}]$, se define como sigue. Los objetos de $[A, \mathscr{A}]$ son pares (A, α) tales que $\alpha : A \longrightarrow Codom(\alpha)$ es un epimorfismo en $\mathscr{A}$. Dados (A, α) y (A, α') en $Obj([A, \mathscr{A}])$, definimos*

$$[(A, \alpha), (A, \alpha')]_{[A,\mathscr{A}]} := \{\gamma \in [Codom(\alpha), Codom(\alpha')]_{\mathscr{A}} \mid \gamma\alpha = \alpha'\}.$$

La composición de morfismos en $[A, \mathscr{A}]$ es la misma que en $\mathscr{A}$, pues como vimos arriba $[(A, \alpha), (A, \alpha')]_{[A,\mathscr{A}]} \subset [Codom(\alpha), Codom(\alpha')]_{\mathscr{A}}$. Se puede ver fácilmente que con estos datos $[A, \mathscr{A}]$ es en efecto una categoría.

Lema 1.6.13 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces*

(a) $[(A, \alpha), (A, \alpha')]_{[A,\mathscr{A}]}$ *tiene a lo sumo un elemento,*

(b) si $\gamma \in [(A, \alpha), (A, \alpha')]_{[A,\mathscr{A}]}$ entonces $\gamma : Codom(\alpha) \longrightarrow Codom(\alpha')$ es un epimorfismo en $\mathscr{A}$,

(c) si $[(A, \alpha), (A, \alpha')]_{[A,\mathscr{A}]} \neq \emptyset$ y $[(A, \alpha'), (A, \alpha)]_{[A,\mathscr{A}]} \neq \emptyset$, entonces existe un único isomorfismo $\gamma : (A, \alpha) \longrightarrow (A, \alpha')$ en $[A, \mathscr{A}]$.

Demostración. Se obtiene de 1.6.9 por el principio de dualidad. □

Definición 1.6.14 *Definimos un pre-orden en $[A, \mathscr{A}]$ como sigue: $(A, \alpha) \leq (A, \alpha')$ si y sólo si $[(A, \alpha'), (A, \alpha)]_{[A,\mathscr{A}]} \neq \emptyset$. Para simplificar la notación, escribiremos $\alpha \leq \alpha'$ en lugar de $(A, \alpha) \leq (A, \alpha')$, siempre teniendo en cuenta al objeto fijo A.*

Observación 1.6.15 *La noción de pre-orden en $[\mathscr{A}, A]$ es autodual pues se tiene que: $\alpha \leq \beta$ en $[\mathscr{A}, A]$ si y sólo si $\alpha^* \leq \beta^*$ en $[A, \mathscr{A}^*]$.*

Definición 1.6.16 *Decimos que $\mathscr{A}$ es **colocalmente pequeña** si $\mathscr{A}^*$ es localmente pequeña.*

1.7. Equalizadores

Definición 1.7.1 *Sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ morfismos en una categoría $\mathscr{A}$. Decimos que $\mu : K \longrightarrow A$ es un **equalizador** para α y β, si*

(a) $\alpha\mu = \beta\mu$, y

(b) para cualquier morfismo $\mu' : K' \longrightarrow A$ tal que $\alpha\mu' = \beta\mu'$, existe un único morfismo $\gamma : K' \longrightarrow K$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\mu'"] & \\ K \arrow[r, "\mu"'] & A. \end{tikzcd}$$

Proposición 1.7.2 *Si $\mu : K \longrightarrow A$ es un equalizador para α, $\beta : A \longrightarrow B$ entonces $\mu : K \longrightarrow A$ es un sub-objeto de A. Además, dos equalizadores cualesquiera para α y β son sub-objetos isomorfos de A.*

Demostración. Veamos que $\mu : K \longrightarrow A$ es un monomorfismo. Sean γ_1, $\gamma_2 : K' \longrightarrow K$ tales que $\mu\gamma_1 = \mu\gamma_2$. Consideremos $\delta = \mu\gamma_1 : K' \longrightarrow A$. Luego tenemos que $\alpha\delta = \alpha(\mu\gamma_1) = (\alpha\mu)\gamma_1 = (\beta\mu)\gamma_1 = \beta(\mu\gamma_1) = \beta\delta$. Pero por la definición de equalizador, la factorización de $\delta = \mu\gamma_1$ a través de $\mu : K \longrightarrow A$ debe ser única; por lo tanto $\gamma_1 = \gamma_2$ pues $\mu\gamma_1 = \mu\gamma_2$, probándose que μ es un monomorfismo.
Supongamos que $\mu' : K' \longrightarrow A$ es también un equalizador para α y β. Entonces existen $\gamma' : K \longrightarrow K'$ y $\gamma : K' \longrightarrow K$ tales que: $\mu'\gamma' = \mu$ y $\mu\gamma = \mu'$. Luego $\mu\gamma\gamma' = \mu'\gamma' = \mu = \mu 1_K$. Como μ es un monomorfismo, se tiene que $\gamma\gamma' = 1_K$. Análogamente obtenemos que $\gamma'\gamma = 1_{K'}$; y por lo tanto γ es un isomorfismo con inversa γ'. $\square$

Por la proposición anterior tenemos que, si existe un equalizador para $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ es único hasta isomorfismos como sub-objeto de A.
El equalizador de α y β será denotado por $Equ(\alpha, \beta) \longrightarrow A$. Si el equalizador existe, para toda par de morfismos en $\mathscr{A}$ con el mismo dominio y el mismo codominio, diremos que $\mathscr{A}$ tiene **equalizadores**. Notemos además que: $\alpha = \beta$ si y sólo si 1_A es el equalizador de α y β.
Dualmente, decimos que el objeto cociente $f : B \longrightarrow Coequ(\alpha, \beta)$ es el co-equalizador de $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ si y sólo si $f^* : Coequ(\alpha, \beta)^* \longrightarrow B^*$ es el equalizador de $\alpha^*, \beta^* : B^* \longrightarrow A^*$ en $\mathscr{A}^*$. Por lo tanto $\mathscr{A}^*$ tiene equalizadores si y sólo si $\mathscr{A}$ tiene co-equalizadores.

1.8. Pullbacks y pushouts

Definición 1.8.1 *Dados dos morfismos $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2 : A_2 \longrightarrow A$ en una categoría $\mathscr{A}$, diremos que el diagrama conmutativo es un **pullback** para α_1 y α_2*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

si se satisface lo siguiente: para todo par de morfismos $\beta_1' : P' \longrightarrow A_1$ *y* $\beta_2' : P' \longrightarrow A_2$ *tales que* $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$ *existe un único morfismo* $\gamma : P' \longrightarrow P$ *tal que* $\beta_1' = \beta_1\gamma$ *y* $\beta_2' = \beta_2\gamma$. *Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

En el siguiente lema, veremos que si el pullback existe éste es único hasta isomorfismos.

Lema 1.8.2 *Sea*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

un pullback de α_1 *y* α_2. *Si el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

es también en pullback de α_1 *y* α_2, *entonces existe un único isomorfismo* $\gamma' : P \longrightarrow P'$ *tal que* $\beta_1 = \beta_1'\gamma'$ *y* $\beta_2 = \beta_2'\gamma'$.

Demostración. Por definición de pullback, existe un único morfismo $\gamma' : P \longrightarrow P'$ tal que $\beta_1 = \beta_1'\gamma'$ y $\beta_2 = \beta_2'\gamma'$. De la misma manera, existe un único morfismo $\gamma : P' \longrightarrow P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$. Entonces tenemos que $\beta_1\gamma\gamma' = \beta_1'\gamma' = \beta_1 = \beta_1 1_P$ y similarmente $\beta_2\gamma\gamma' = \beta_2 1_P$. Luego, por la unicidad de las factorizaciónes a través del pullback, se tiene que $\gamma\gamma' = 1_P$. Análogamente, se obtiene que $\gamma'\gamma = 1_{P'}$, probándose el lema. $\square$

Proposición 1.8.3 *Consideremos el siguiente diagrama de pullback*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Si $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ *es un monomorfismo entonces* $\beta_2 : P \longrightarrow A_2$ *es también un monomorfismo.*

Demostración. Sean $f, g : B \longrightarrow P$ y supongamos que $\beta_2 f = \beta_2 g$. Entonces $\alpha_1\beta_1 f = \alpha_2\beta_2 f = \alpha_2\beta_2 g = \alpha_1\beta_1 g$; por lo tanto, como α_1 es un monomorfismo tenemos que $\beta_1 f = \beta_1 g$. Luego, por la unicidad de la factorización a través del pullback (aplicada al par de morfismos $\beta_1 f = \beta_1 g$ y $\beta_2 f = \beta_2 g$) se tiene que $f = g$, probándose que β_2 es un monomorfismo. $\square$

Proposición 1.8.4 *Si cada cuadrado en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & B' \arrow[d, "\beta_3"'] \\ A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B \end{tikzcd}$$

es un pullback y $\beta_3 : B' \longrightarrow B$ es un monomorfismo, entonces el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_2\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\beta_3"] \\ A \arrow[r, "\gamma_2\gamma_1"'] & B \end{tikzcd}$$

es un pullback.

Demostración. Sean $\theta : X \longrightarrow A$, $\psi : X \longrightarrow B'$ morfismos tales que $\gamma_2\gamma_1\theta = \beta_3\psi$. Debemos encontrar un único morfismo $\mu : X \longrightarrow P$ tal que $\beta_1\mu = \theta$ y $\alpha_2\alpha_1\mu = \psi$. Ahora como el cuadrado del lado derecho es pullback, entonces tenemos un morfismo $\delta : X \longrightarrow Q$ tal que $\beta_2\delta = \gamma_1\theta$ y $\alpha_2\delta = \psi$.
Usando ahora que el cuadrado del lado izquierdo es pullback, obtenemos un morfismo $\eta : X \longrightarrow P$ tal que $\beta_1\eta = \theta$ y $\alpha_1\eta = \delta$. Entonces el morfismo η es el morfismo buscado. Puesto que aplicando dos veces la proposición anterior se ve que β_1 es un monomorfismo y de esto se sigue la unicidad del morfismo η. En efecto, si $\mu : X \longrightarrow P$ es tal que $\beta_1\mu = \theta = \beta_1\eta$, entonces $\mu = \eta$ ya que β_1 es un monomorfismo. $\square$

Lema 1.8.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y supongamos que los siguientes dos cuadrados conmutativos*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"'] & Q \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "f"] & B & I \arrow[l, "\gamma_2"'] \end{tikzcd}$$

son pullbacks. Si θ_1 y γ_2 son monomorfismos y existe $\gamma_1 : A \longrightarrow I$ con $f = \gamma_2\gamma_1$, entonces existe $\alpha_1 : P \longrightarrow Q$ tal que $\alpha_2\alpha_1 = g$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \end{tikzcd}$$

es un pullback.

Demostración. Supongamos que θ_1 y γ_2 son monomorfismos y que existe $\gamma_1 : A \longrightarrow I$ tal que $f = \gamma_2\gamma_1$.
Dado que $\theta_1 g = \gamma_2\gamma_1\beta_1$, de la propiedad del pullback, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\beta_1"'] & & B' \arrow[dd, "\theta_1"] \\
& Q \arrow[ur, "\alpha_2"'] \arrow[dd, "\theta_2"] & \\
A \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma_1"'] & & B \\
& I. \arrow[ur, "\gamma_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Sean $\lambda_1 : X \longrightarrow Q$ y $\lambda_2 : X \longrightarrow A$ tales que $\theta_2\lambda_1 = \gamma_1\lambda_2$. Veamos que existe un único morfismo $\xi : X \longrightarrow P$ tal que $\alpha_1\xi = \lambda_1$ y $\beta_1\xi = \lambda_2$. En efecto, por la conmutatividad del diagrama anterior, obtenemos que $\theta_1(\alpha_2\lambda_1) = f\lambda_2$. Luego existe $\xi : X \longrightarrow P$ tal que $g\xi = \alpha_2\lambda_1$ y $\lambda_2 = \beta_1\xi$. Por otro lado, $\alpha_2(\alpha_1\xi) = g\xi = \alpha_2\lambda_1$ y α_2 es un monomorfismo por 1.8.3, entonces $\lambda_1 = \alpha_1\xi$. Finalmente, por 1.8.3, tenemos que β_1 es un monomorfismo, pues θ_1 lo es. Esto último nos dice que sólo podemos tener un único morfismo $\xi : X \longrightarrow P$ con las propiedades requeridas. $\square$

La noción dual del pullback es el **pushout**. Esto es, dados los morfismos $\alpha_1 : A \longrightarrow A_1$ y $\alpha_2 : A \longrightarrow A_2$, el pushout de α_1 y α_2 es el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\
A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & P
\end{tikzcd}$$

tal que para todo par de morfismos $\beta_1' : A_1 \longrightarrow P'$ y $\beta_2' : A_2 \longrightarrow P'$ tales que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$ existe un único morfismo $\gamma : P \longrightarrow P'$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta_1'"] & \\
A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[drr, bend right, "\beta_2'"'] & P \arrow[dr, "\gamma"] & \\
& & P'.
\end{tikzcd}$$

Similarmente a como se hizo en el pullback, se prueba que si el pushout existe, éste es único hasta isomorfismos.

1.9. Intersecciones

Definición 1.9.1 *Sea $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de sub-objetos de A. Diremos que un morfismo $\mu : A' \longrightarrow A$ es la* ***intersección*** *de dicha familia si las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para cada $i \in I$ existe $v_i : A' \longrightarrow A_i$ tal que $\mu = \mu_i v_i$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "v_i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo $\forall i \in I$.

(b) Si $\theta : B \longrightarrow A$ es un morfismo y existen $\eta_i : B \longrightarrow A_i$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\eta_i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall i \in I$, entonces existe un único morfismo $\eta : B \longrightarrow A'$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\eta"'] & A \\ A' \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación 1.9.2 *(1) Los morfismos $\{v_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ tales que $\mu = \mu_i v_i$ son únicos. En efecto, si existen $v_i' : A' \longrightarrow A_i$ tal que $\mu_i v_i' = \mu$, entonces $\mu_i v_i = \mu = \mu_i v_i'$. Luego, $v_i = v_i'$ $\forall i \in I$, ya que μ_i es un monomorfismo $\forall i \in I$.*

(2) μ es un monomorfismo, ya que si $\mu\alpha_1 = \mu\alpha_2$, consideremos $f = \mu\alpha_1 : A'' \longrightarrow A$, entonces $f = \mu\alpha_1 = \mu_i v_i \alpha_1$ $\forall i \in I$. Es decir, f se factoriza a través de los μ_i y por lo tanto f se debe factorizar a través de μ de manera única; pero $f = \mu\alpha_1 = \mu\alpha_2$, por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2$. En particular, dado que μ es un monomorfismo y $\mu = \mu_i v_i$ concluimos que v_i es un monomorfismo $\forall i \in I$.

(3) En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, "v_i"] \arrow[ddr, "\mu"'] & & B \arrow[ll, "\eta"'] \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[ddl, "\theta"] \\
& A_i \arrow[d, "\mu_i"] & \\
& A &
\end{tikzcd}$$

el triángulo izquierdo, el derecho, y el exterior conmutan. Pero del hecho de que μ_i es un monomorfismo, se ve fácilmente que $v_i\eta = \eta_i$; y por lo tanto todo el diagrama anterior conmuta. De la unicidad en el inciso (b), se ve que cualesquiera dos intersecciones son sub-objetos isomorfos de A. Denotaremos A' por $\bigcap_{i\in I} A_i$ ó simplemente $\bigcap A_i$ cuando esté claro el conjunto de índices I.

(4) La intersección de la familia vacía de sub-objetos de A es A. Si la intersección de la famila $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ existe, entonces $\mu : \bigcap_{i\in i} A_i \longrightarrow A$ es el sub-objeto más grande de A tal que $\mu \leq \mu_i$ en $[\mathscr{A}, A]$.

Definición 1.9.3 *Dada una categoría $\mathscr{A}$, diremos que $\mathscr{A}$* ***tiene intersecciones*** *si $\forall A \in Obj(\mathscr{A})$ y cualquier familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ de sub-objetos de A existe la intersección $\mu : \bigcap_{i\in I} A_i \longrightarrow A$. Si las intersecciones existen sólo para conjuntos finitos, diremos que $\mathscr{A}$ tiene* ***intersecciones finitas****.*

Proposición 1.9.4 *Si $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2 : A_2 \longrightarrow A$ son monomorfismos en una categoría $\mathscr{A}$, entonces el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

es un pullback si y sólo si $\alpha_2\beta_2 : P \longrightarrow A$ es la intersección de α_1 y α_2. Por lo tanto, si $\mathscr{A}$ tiene pullbacks entonces tiene intersecciones finitas.

Demostración. Que el diagrama de arriba es un pullback si y sólo si es una intersección se sigue inmediatamante de la definición de pullback y de intersección. Si $\mathscr{A}$ tiene pullbacks, entonces la intersección de n sub-objetos se obtiene inductivamente por la fórmula

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \bigcap A_n.$$

□

1.10. Uniones

Definición 1.10.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "u"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son monomorfismos. Decimos que el sub-objeto $u : A' \longrightarrow A$ es ***llevado*** *a el sub-objeto $h : B' \longrightarrow B$ por f si existe un morfismo $f' : A' \longrightarrow B'$ tal que el diagrama de arriba conmuta.*

El morfismo f' es necesariamente único pues $h : B' \longrightarrow B$ es un monomorfismo.

Definición 1.10.2 *La* ***unión*** *de una familia $\{u_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ de sub-objetos de A es un sub-objeto $u : A' \longrightarrow A$ de A tal que:*

(a) $u_i \leq u$ para toda $i \in I$,

(b) si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo y cada $u_i : A_i \longrightarrow A$ es llevado a algún sub-objeto $\mu : B' \longrightarrow B$ de B por f, entonces también $u : A' \longrightarrow A$ es llevado a $\mu : B' \longrightarrow B$ por f.

El objeto A' será denotado por $\cup_{i\in I} A_i$ ó por $\cup A_i$ si está claro del contexto cual es el conjunto de índices.

Observación 1.10.3

(1) Dado que $u_i \leq u$ tenemos un único monomorfismo $v_i : A_i \longrightarrow A'$ tal que $u_i = uv_i$. De acuerdo a la definición de unión, en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & A_i \arrow[ul, "v_i"'] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u_i"] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

tenemos que el triángulo de la izquierda, el cuadrado central y el cuadrado exterior conmutan. Más aún, dado que μ es un monomorfismo tenemos que $f' = f''v_i$; y por lo tanto, dicho diagrama es conmutativo.

(2) Sea $u_i \leq \mu$ $\forall i \in I$ con $\mu : B \longrightarrow A$ un sub-objeto de A. Tomando $f = 1_A$, se ve que entonces $u \leq \mu$, donde $u : \cup A_i \longrightarrow A$ es una unión de $\{u_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$. En particular, cualesquiera dos sub-objetos de A que se comportan como la unión, deben ser isomorfos. En efecto, si $u' : A'' \longrightarrow A$ es otra unión de

dicha familia, entonces como $u_i \leq u'$ para toda i, se tiene que $u \leq u'$, pues u es una unión de dicha familia, análogamente se tiene que $u' \leq u$, de donde u es isomorfo a u' como sub-objeto de A.

Definición 1.10.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Si la unión existe para todo conjunto de sub-objetos de cualquier objeto $A \in \mathscr{A}$ decimos que $\mathscr{A}$* ***tiene uniones****.*

Proposición 1.10.5 *Sean α, $\beta : A \longrightarrow B$ morfismos en una categoría $\mathscr{A}$ con equalizadores, y sea $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i \in I}$ una familia de sub-objetos de A. Si la unión existe y $\alpha\mid_{A_i} = \beta\mid_{A_i}$ $\forall i \in I$, entonces $\alpha\mid_{\cup A_i} = \beta\mid_{\cup A_i}$.*

Demostración. Sea $\mu : \cup_{i \in I} A_i \longrightarrow A$ la unión de la familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i \in I}$ de sub-objetos de A. Sea $\psi : K \longrightarrow \cup A_i$ el equalizador de los morfismos $\beta\mu, \alpha\mu : \cup A_i \longrightarrow B$. Para ver que $\beta\mu = \alpha\mu$ es suficiente probar que ψ es un isomorfismo. Como ψ es un monomorfismo tenemos que $\mu\psi : K \longrightarrow A$ es un monomorfismo. Veamos que $\mu\psi : K \longrightarrow A$ satisface la definición de unión de la familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i \in I}$. Para esto tenemos que verificar las propiedades (a) y (b) de la definición de unión.

(a) $\mu_i \leq \mu\psi$ $\forall i \in I$. Sea $v_i : A_i \longrightarrow \cup A_i$ el único morfismo tal que $\mu_i = \mu v_i$ $\forall i \in I$. Usando que $\alpha\mu_i = \beta\mu_i$ (pues $\alpha\mid_{A_i} = \beta\mid_{A_i}$) se tiene que $\alpha\mu v_i = \beta\mu v_i$ $\forall i \in I$. Por lo tanto, para cada $i \in I$ existe un único morfismo $h_i : A_i \longrightarrow K$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[dl, "h_i"'] \arrow[d, "v_i"] & \\
K \arrow[r, "\psi"] & \cup A_i \arrow[r, shift left, "\beta\mu"] \arrow[r, shift right, "\alpha\mu"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego $\mu\psi h_i = \mu v_i = \mu_i$ y entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[dl, "h_i"'] \arrow[d, "\mu_i"] \\
K \arrow[r, "\mu\psi"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta, probándose que $\mu_i \leq \mu\psi$ $\forall i \in I$.

(b) La propiedad de ser llevado. Sean $f : A \longrightarrow C$ y $\theta : C' \longrightarrow C$ morfismos con θ un monomorfismo, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cup A_i \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
 & A_i \arrow[ul, "v_i"'] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\mu_i"] & C' \arrow[d, "\theta"] \\
 & A \arrow[r, "f"] & C.
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad del diagrama de arriba se obtiene fácilmente que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrd, bend left, "f''\psi"] \arrow[rdd, bend right, "\mu\psi"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "h_i"'] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\mu_i"] & C' \arrow[d, "\theta"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por la unicidad de la unión, obtenemos que existe un isomorfismo $\lambda : K \longrightarrow \cup A_i$ tal que $\mu\lambda = \mu\psi$. Dado que a lo sumo existe un morfismo $\lambda : K \longrightarrow \cup A_i$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu\psi"'] & & \cup A_i \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

obtenemos que $\lambda = \psi$, y por lo tanto ψ, es un isomorfismo.

□

1.11. Imágenes

Definición 1.11.1 *La **imagen** de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ se define, como el sub-objeto mas pequeño de B que factoriza a f. Esto es, el sub-objeto $\mu : I \longrightarrow B$ de B es una imagen de f si:*

(a) existe un morfismo morfismo $f' : A \longrightarrow I$ tal que $f = \mu f'$, y

(b) si $\mu' : I' \longrightarrow B$ es otro sub-objeto de B tal que existe $f'' : A \longrightarrow I'$ con $f = \mu' f''$ entonces $\mu \leq \mu'$. Es decir, el triangulo del lado derecho del siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& I' \arrow[dr, "\mu'"] & \\
A \arrow[ur, "f''"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.11.2 *(1) Dado que μ y μ' son monomorfismos se tiene que el diagrama de arriba conmuta.*

(2) La imagen, si existe, está definida univocamente hasta isomorfismos de sub-objetos de B. Se denotará por $\mu : Im(f) \longrightarrow B$ a una elección de una imagen de $f : A \longrightarrow B$.

(3) Si $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo entonces f es su imagen. En efecto, considere la factorización trivial $f = f1_A$.

Definición 1.11.3 *Si todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathscr{A}$ tiene imagen $\mu : I \longrightarrow B$ se dice que la categoría **tiene imágenes**. Si además, el morfismo $f' : A \longrightarrow I$, tal que $f = \mu f'$, es siempre un epimorfismo, decimos que $\mathscr{A}$ tiene **imágenes epimórficas**.*

Proposición 1.11.4 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría con equalizadores. Si $A \xrightarrow{f'} I \xrightarrow{\mu} B$ es una factorización de f a través de su imagen, entonces f' es un epimorfismo.*

Demostración. Sean α, $\beta : I \longrightarrow X$ tales que $\alpha f' = \beta f'$. Sea $\lambda : K \longrightarrow I$ el equalizador de α y β. Entonces se tiene un único morfismo $h : A \longrightarrow K$ tal que $f' = \lambda h$. Por lo tanto, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dr, "\mu\lambda"] \arrow[dd, "\lambda"] & \\
A \arrow[ur, "h"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
 & I \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, lo que implica en particular que $\mu\lambda \leq \mu$. Ahora bien, por la propiedad de la imagen, se tiene que existe un único monomorfismo $\theta : I \longrightarrow K$ tal que $\mu\lambda\theta = \mu$. Por lo tanto $\lambda\theta = 1_I$ pues μ es un monomorfismo. Análogamente, de la igualdad $\mu\lambda\theta\lambda = \mu\lambda$ se tiene que $\lambda\theta\lambda = \lambda$; y usando que λ es un monomorfismo obtenemos que $\theta\lambda = 1_K$. Es decir, λ es un isomorfismo. Finalmente, de $\beta\lambda = \alpha\lambda$ concluimos que $\alpha = \beta$, probándose que f' es un epimorfismo. $\square$

Proposición 1.11.5 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría balanceada tal que f tiene una imagen. Si f se factoriza como $A \xrightarrow{f'} I \xrightarrow{\mu} B$ con f' un epimorfismo y μ un monomorfismo, entonces μ es la imagen de f.*

Demostración. Sea $A \xrightarrow{f''} Im(f) \xrightarrow{\mu'} B$ la factorización de f a través de su imagen. Por la propiedad de la imagen, existe un monomorfismo h :

$Im(f) \longrightarrow I$ tal que $\mu' = \mu h$. Esto es, en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f''"'] & & B \\
& Im(f) \arrow[uu, dashed, "h"] \arrow[ur, "\mu'"'] &
\end{tikzcd}$$

el triángulo de la derecha conmuta. El triángulo de la izquierda, en el diagrama de arriba también conmuta pues $\mu : I \longrightarrow B$ es un monomorfismo. Por lo tanto $f' = hf''$; y como f' es epimorfismo, concluimos que h es también un epimorfismo. Luego h es un isomorfismo, ya que la categoría es balanceada, probándose que $\mu : I \longrightarrow B$ es la imagen de f. $\square$

Sean $f : A \longrightarrow B$ y $\mu : A' \longrightarrow A$ morfismos con μ monomorfismo. Denotaremos a la imagen de la composición $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{f} B$ por $f(A')$.
Como consecuencia inmediata de la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.11.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría balanceada con imagenes epimórficas, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ morfismos en $\mathscr{A}$. Si $\mu : A' \longrightarrow A$ es un sub-objeto de A entonces*

$$g(f(A')) = gf(A').$$

Demostración. $\square$

Definición 1.11.7 *La **coimagen** de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ se define, como el objeto cociente mas pequeño de A que factoriza a f. Esto es, el objeto cociente $p : A \longrightarrow J$ de A es una coimagen de f si:*

(a) existe un morfismo $f' : J \longrightarrow B$ tal que $f = f'p$, y

(b) si $p' : A \longrightarrow J'$ es otro objeto cociente de A tal que existe $f'' : J' \longrightarrow B$ con $f = f''p'$ entonces $p \leq p'$. Es decir, el triangulo del lado izquierdo del siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& J \arrow[dr, "f'"] & \\
A \arrow[ur, "p"] \arrow[rr] \arrow[dr, "p'"'] & & B \\
& J'. \arrow[uu, dashed] \arrow[ur, "f''"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.11.8 *$p : A \longrightarrow J$ es una coimagen de f en $\mathscr{A}$ si y sólo si $p : J^* \longrightarrow A^*$ es la imagen de f^* en $\mathscr{A}^*$. En este caso, denotaremos por $q : A \longrightarrow Coim(f)$ a una elección de una coimagen de $f : A \longrightarrow B$. En categorías exactas veremos que $Im(f)$ y $Coim(f)$ son isomorfas, pero en general esta relación no se dá.*

1.12. Imágenes inversas

Definición 1.12.1 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{A}$. La **imagen inversa** por f del sub-objeto $\alpha_1 : B' \longrightarrow B$ de B es el pullback*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

El objeto P es usualmente denotado por $f^{-1}(B')$. Por 1.8.3, tenemos que $\beta_1 : f^{-1}(B') \longrightarrow A$ es un sub-objeto de A, y además, es el sub-objeto más grande de A que es llevado a $\alpha_1 : B' \longrightarrow B$ por f.

Lema 1.12.2 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo y $\beta_1 : f^{-1}(B') \longrightarrow A$ la imagen inversa del sub-objeto $\alpha_1 : B' \longrightarrow B$. Consideremos el diagrama de pullback (1.3) de arriba, donde $P = f^{-1}(B')$. Si $\beta_2 = \mu f'$ donde $f' : P \longrightarrow B_1$ es un morfismo y $\mu : B_1 \longrightarrow B'$ es un sub-objeto de B', entonces $\beta_1 : f^{-1}(B') \longrightarrow A$ es la imagen inversa por f del sub-objeto $\alpha_1\mu : B_1 \longrightarrow B$ de B.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "\beta_2"'] \arrow[dd, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[d, "\mu"] \\ & B' \arrow[d, "\alpha_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Sean $g_1 : X \longrightarrow B_1$ y $g_2 : X \longrightarrow A$ tales que $fg_2 = \alpha_1\mu g_1$. Por lo tanto, existe un único morfismo $h : X \longrightarrow f^{-1}(B')$ tal que $g_2 = \beta_1 h$ y $\beta_2 h = \mu g_1$. Usando ahora que $\beta_2 = \mu f'$ se tiene que $\mu f' h = \mu g_1$; pero como μ es un monomorfismo se tiene que $f'h = g_1$, probándose que $\beta_1 : f^{-1}(B') \longrightarrow A$ es la imagen inversa de $\alpha_1\mu$. $\square$

Lema 1.12.3 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo y $\mu : I \longrightarrow B$ un sub-objeto de B tal que existe un morfismo $f' : A \longrightarrow I$ con $f = \mu f'$. Si $h : B' \longrightarrow B$ es un sub-objeto de B y la imagen inversa $f^{-1}(B')$ y la intersección $I \cap B'$ están definidas, entonces $f^{-1}(I \cap B')$ está definida y es igual a $f^{-1}(B')$.*

Demostración. Consideremos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \cap B' \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ I \arrow[r, "\mu"] & B. \end{tikzcd}$$

Como $f = \mu f'$ y el cuadrado de la derecha es un pullback por 1.9.4, tenemos que existe $\theta : f^{-1}(B') \longrightarrow I \cap B'$ tal que $\beta_2 = \gamma_1\theta$. Luego, este lema se sigue del anterior. $\square$

Para simplicar la notación, en lo que sigue diremos que A está incluido en B, en símbolos $A \subset B$, si A es un sub-objeto de B.

Proposición 1.12.4 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo. Consideremos las inclusiones $A_1 \subset A_2 \subset A$ y $B_1 \subset B_2 \subset B$. Entonces, se satisfacen las siguientes relaciones cada vez que ambos lados de dichas relaciones estén definidas.*

(i) $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(ii) $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(iii) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

(iv) $f(f^{-1}(B_1) \subset B_1$.

(v) $f(A_1) = f(f^{-1}(f(A_1)))$.

(vi) $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(f(f^{-1}(B_1)))$.

Demostración. Probemos sólo (i) ya que el resto de los incisos se prueban análogamente.

(i) Sean $v_1 : A_1 \longrightarrow A$, $v_2 : A_2 \longrightarrow A$ y $v : A_1 \longrightarrow A_2$ con $v_2 v = v_1$, las inclusiones consideradas arriba. Supongamos que $f(A_1) := Im(fv_1)$ y $f(A_2) := Im(fv_2)$ existen. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & f(A_1) \arrow[dr, "\mu_1"] & \\ A_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\ A_2 \arrow[ur, "v_2"'] \arrow[r, "f_2"'] & f(A_2). \arrow[ur, "\mu_2"'] & \end{tikzcd}$$

Dado que $\mu_2 f_2 v = f v_1$, obtenemos, por la propiedad de la imagen $\mu_1 : f(A_1) \longrightarrow B$, que existe un único monomorfismo $\gamma : f(A_1) \longrightarrow f(A_2)$ tal que $\mu_2\gamma = \mu_1$. Por lo tanto $f(A_1) \subset f(A_2)$.

□

Proposición 1.12.5 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría con imágenes e imágenes inversas. Si $\{ A_i \xrightarrow{\mu_i} A \}_{i\in I}$ es una familia de sub-objetos de A para la cual $\cup A_i$ está definida, entonces $\cup f(A_i)$ está definida y además $\cup f(A_i) = f(\cup A_i)$.*

Demostración. Supongamos que $\mu : \cup A_i \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{ A_i \xrightarrow{\mu_i} A \}_{i\in I}$ de sub-objetos de A. Sean $\mu'_i : A_i \longrightarrow \cup A_i$ tales que $\mu\mu'_i = \mu_i$ $\forall i \in I$. Dado que $f(\cup A_i) = Im(f\mu)$ y $f(A_i) = Im(f\mu_i)$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & f(\cup A_i) \arrow[dr, "\lambda"] & \\
\cup A_i \arrow[ur, "\bar{\lambda}"] \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
A_i \arrow[u, "\mu'_i"] \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[r, "\theta'_i"'] & f(A_i) \arrow[ur, "\theta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda : f(\cup A_i) \longrightarrow B$ y $\theta_i : f(A_i) \longrightarrow B$ son las imágenes de $f\mu$ y $f\mu_i$ respectivamente.
Dado que $f\mu_i = \lambda\bar{\lambda}\mu'_i$ y $f(A_i) = Im(f\mu_i)$, se tiene que existe $\lambda_i : f(A_i) \longrightarrow f(\cup A_i)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & f(\cup A_i) \arrow[dr, "\lambda"] & \\
A_i \arrow[ur, "\bar{\lambda}\mu'_i"] \arrow[dr, "\theta'_i"'] & & B \\
 & f(A_i). \arrow[uu, "\lambda_i"] \arrow[ur, "\theta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\lambda : f(\cup A_i) \longrightarrow B$ es la unión de la familia $\{\theta_i : f(A_i) \longrightarrow B\}_{i\in I}$ de sub-objetos de B. Sea $g : B \longrightarrow C$ un morfismo y supongamos que $\theta_i : f(A_i) \longrightarrow B$ es llevado por g a algún sub-objeto $h : C' \longrightarrow C$. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f(A_i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\theta_i"'] & C' \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Luego, usando que la imagen inversa es un pullback, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f(A_i) \arrow[dr, dashed, "\gamma_i"] \arrow[drr, bend left, "g_i"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_i"'] & & \\
& g^{-1}(C') \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C' \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Usando ahora que α_2 es un monomorfismo y $\alpha_2\gamma_i\theta_i' = f\mu_i$. De la propiedad de la unión $\mu : \cup A_i \longrightarrow A$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cup A_i \arrow[drr, bend left, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "\mu_i'"'] \arrow[r, "\gamma_i\theta_i'"] \arrow[d, "\mu_i"] & g^{-1}(C') \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B.
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, $\alpha_2\bar{f} = f\mu = \lambda\bar{\lambda}$ y dado que $f(\cup A_i) = Im(f\mu)$; del diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& f(\cup A_i) \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\xi"] & \\
\cup A_i \arrow[ur, "\bar{\lambda}"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & B \\
& g^{-1}(C'). \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos el morfismo $\alpha_1\xi : f(\cup A_i) \longrightarrow C'$. De los diagramas anteriores, tenemos que $h\alpha_1\xi = g\alpha_2\xi = g\lambda$. Esto significa que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
f(\cup A_i) \arrow[drr, bend left, "\alpha_1\xi"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"'] & & \\
& f(A_i) \arrow[ul, "\lambda_i"'] \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\theta_i"] & C' \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "g"] & C.
\end{tikzcd}$$

Del último diagrama, se concluye que $\lambda : f(\cup A_i) \longrightarrow B$ es una unión de la familia de sub-objetos $\{\theta_i : f(A_i) \longrightarrow B\}_{i\in I}$ de B. Esto es, $\cup f(A_i)$ está definida y $f(\cup A_i) = \cup f(A_i)$.
$\square$

De forma análoga se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 1.12.6 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría con imágenes inversas, y sea $\{\mu_i : B_i \longrightarrow B\}_{i\in I}$ una familia de sub-objetos de B para la cual la intersección $\cap B_i$ está definida. Entonces $\cap f^{-1}(B_i)$ está definida y es igual a $f^{-1}(\cap B_i)$.*

1.13. Objetos cero

Definición 1.13.1 *Un objeto 0 en una categoría es llamado **objeto nulo** si existe un único morfismo $\alpha : A \longrightarrow 0$ para cada $A \in \mathscr{A}$. Dualmente, $0'$ es un objeto **conulo** si existe un único morfismo $\alpha : 0' \longrightarrow A$ $\forall A \in \mathscr{A}$.*

Lema 1.13.2 *Si la categoría $\mathscr{A}$ tiene un objeto nulo (resp. conulo) éste es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que 0 y $0'$ son objetos nulos en $\mathscr{A}$. Entonces $[0, 0']_{\mathscr{A}}$ y $[0', 0]_{\mathscr{A}}$ tienen cada uno un morfismo, digamos θ y θ' respectivamente. Luego $\theta'\theta = 1_0$ pues $[0, 0]_{\mathscr{A}}$ tiene un solo elemento, y análogamente $\theta\theta' = 1_{0'}$.
$\square$

Definición 1.13.3 *Diremos que 0 es un **objeto cero** para $\mathscr{A}$ si es nulo y conulo. En este caso, diremos que un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ es el **morfismo cero** si se factoriza a través del objeto cero.*

Lema 1.13.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero. Entonces, cada conjunto $[A, B]_{\mathscr{A}}$ tiene precisamente un morfismo cero que se denotará por 0_{AB} ó simplemente por 0.*

Demostración. Sea 0 un objeto cero en $\mathscr{A}$. Luego, como 0 es nulo y conulo existen morfismos $\alpha : A \longrightarrow 0$ y $\beta : 0 \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$; esto es, $0_{AB} := \beta\alpha$ es un morfismo cero. Veamos que es único; en efecto, sea $0'$ otro objeto cero en $\mathscr{A}$ y $0'_{AB} = \beta'\alpha'$, donde $\alpha' : A \longrightarrow 0'$ y $\beta' : 0' \longrightarrow B$ son morfismos en $\mathscr{A}$. Por ser 0 y $0'$ objetos cero en $\mathscr{A}$, existe un único morfismo $h : 0' \longrightarrow 0$ tal que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0' \arrow[dd] \arrow[dr, "\beta'"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \\
 & 0. \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego $0_{AB} = \beta\alpha = \beta'\alpha' = 0'_{AB}$. $\square$

1.14. Kerneles

Definición 1.14.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero y $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Diremos que un morfismo $\mu : K \longrightarrow A$ es un **kernel** de α si*

(a) $\alpha\mu = 0$, *y*

(b) para todo morfismo $\mu' : K' \longrightarrow A$ tal que $\alpha\mu' = 0$ existe un único morfismo $\gamma : K' \longrightarrow K$ tal que $\mu\gamma = \mu'$.

Equivalentemente, el kernel $\mu : K \longrightarrow A$ de α está dado por el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B. \end{tikzcd}$$

Observación 1.14.2

(1) Dado que el kernel $\mu : K \longrightarrow A$ de α está dado por el diagrama de pullback anterior, entonces $K = \alpha^{-1}(0)$; por lo que en particular, μ es un monomorfismo, y cualesquiera dos kerneles son sub-objetos isomorfos de A. El objeto K será denotado por $Ker(\alpha)$.

(2) Dada una categoría $\mathscr{A}$ con objeto cero y un morfismo $f : A \longrightarrow B$, denotaremos por $\alpha : Ker(f) \longrightarrow A$ a una elección arbitraria, pero que consideraremos fija, de un kernel de f.

Definición 1.14.3 *Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ **tiene kerneles**, si*

(a) $\mathscr{A}$ tiene objeto cero

(b) todo morfismo de $\mathscr{A}$ tiene un kernel.

En el siguiente lema veremos que si α es un monomorfismo entonces $Ker(\alpha) = 0$, pero el inverso no es cierto en general.

Lema 1.14.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero. Por lo tanto*

(a) si $\mathscr{A}$ tiene equalizadores entonces tiene kerneles,

(b) si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo entonces $Ker(\alpha) = 0$,

(c) sean $\alpha : A \longrightarrow B$ y $\beta : B \longrightarrow C$ morfismos en $\mathscr{A}$. Si existen $Ker(\alpha)$ y $Ker(\beta\alpha)$ entonces $Ker(\alpha) \subset Ker(\beta\alpha)$. Más aún, si β es un monomorfismo entonces $Ker(\alpha) = Ker(\beta\alpha)$.

Demostración.

(a) Se sigue del hecho de que el kernel de un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ es el equalizador de α y el morfismo cero.

(b) Sea $\mu : K \longrightarrow A$ el kernel de $\alpha : A \longrightarrow B$. En particular $\alpha\mu = 0$. Si α es un monomorfismo entonces $\mu = 0$.

(c) Sea $\mu : K \longrightarrow A$ el kernel de $\beta\alpha$ y sea $\mu' : K' \longrightarrow A$ el kernel de α. Entonces $(\beta\alpha)\mu' = \beta(\alpha\mu') = \beta 0 = 0$. Luego, por la propiedad del kernel, existe un único morfismo $\gamma : K' \longrightarrow K$ tal que $\mu' = \mu\gamma$, de donde γ es un monomorfismo pues μ' lo es. Por lo tanto $Ker(\alpha) \subset Ker(\beta\alpha)$. Si β es un monomorfismo, entonces $\alpha\mu = 0$ pues $\beta\alpha\mu = 0$. Por lo tanto, existe un único morfismo $\gamma' : K \longrightarrow K'$ tal que $\mu = \mu'\gamma'$. Pero ya teníamos que $\mu' = \mu\gamma$, de donde $\mu = \mu\gamma\gamma'$. Luego, como μ es un monomorfismo tenemos que $\gamma\gamma' = 1_K$. Análogamente, de $\mu' = \mu\gamma = \mu'\gamma'\gamma$, se tiene que $\gamma'\gamma = 1_{K'}$. Por lo tanto, γ es isomorfismo y entonces $Ker(\alpha) = Ker(\beta\alpha)$.

□

Definición 1.14.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero y sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Diremos que un morfismo $p : B \longrightarrow C$ es un* ***cokernel*** *de α si*

(a) $p\alpha = 0$, y

(b) para todo morfismo $p' : B \longrightarrow C'$ tal que $p'\alpha = 0$ existe un único morfismo $\gamma : C \longrightarrow C'$ tal que $\gamma p = p'$.

En el caso en que todo morfismo de $\mathscr{A}$ tenga un cokernel, diremos que $\mathscr{A}$ **tiene cokerneles**.

Observación 1.14.6

(1) $p : B \longrightarrow C$ es el cokernel de $\alpha : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ si y sólo si p^* es el kernel de α^* en la categoría dual $\mathscr{A}^*$.

(2) Dada una categoría $\mathscr{A}$ con objeto cero y un morfismo $f : A \longrightarrow B$, denotaremos por $p : B \longrightarrow Coker(f)$ a una elección arbitraria, pero que consideraremos fija, de un cokernel de f.

Proposición 1.14.7 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{A}$ con objeto cero*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
K \arrow[r, "\mu"] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A.
\end{tikzcd}$$

Si el cuadrado del lado derecho es un pullback, μ es el kernel de α_1 y γ es el morfismo inducido en el pullback por los morfismos $\mu : K \longrightarrow A_1$ y $0 : K \longrightarrow A_2$, entonces γ es el kernel de β_2.

Demostración. Dado que $\beta_1\gamma = \mu$ y μ es un monomorfismo, concluimos que γ es un monomorfismo. También $\beta_2\gamma = 0$ por construcción de γ. Ahora, sea

$v : X \longrightarrow P$ tal que $\beta_2 v = 0$. Entonces $0 = \alpha_2\beta_2 v = \alpha_1\beta_1 v$; y como μ es el kernel de α_1, tenemos un morfismo $w : X \longrightarrow K$ tal que $\mu w = \beta_1 v$. Por lo tanto, $\gamma w = v$ ya que $\beta_1\gamma w = \beta_1 v$ y $\beta_2\gamma w = \beta_2 v$. La unicidad de la factorización de v a través de γ sale usando que γ es un monomorfismo, probándose que γ es el kernel de β_2. $\square$

Proposición 1.14.8 *Consideremos el siguiente diagrama en una categoría $\mathscr{A}$ con objeto cero*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\beta"] & A \arrow[d, "\alpha_1"] & \\ B' \arrow[r, "\alpha_2"'] & B \arrow[r, "\alpha_3"'] & B'', \end{tikzcd}$$

donde α_2 es el kernel α_3. Entonces, el diagrama anterior puede ser extendido a un pullback si y sólo si β es el kernel de $\alpha_3\alpha_1$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que β es el kernel de $\alpha_3\alpha_1$. Entonces $\alpha_3\alpha_1\beta = 0$; y como α_2 es el kernel de α_3, existe un único morfismo $\gamma : A' \longrightarrow B'$ que hace al diagrama anterior conmutativo. Sean $\theta : X \longrightarrow A$ y $\eta : X \longrightarrow B'$ morfismos tales que $\alpha_1\theta = \alpha_2\eta$. Luego $\alpha_3\alpha_1\theta = \alpha_3\alpha_2\eta = 0$; por lo tanto existe un único morfismo $\delta : X \longrightarrow A'$ tal que $\beta\delta = \theta$. Por otro lado, $\alpha_2\gamma\delta = \alpha_1\beta\delta = \alpha_2\eta$ y como α_2 es un monomorfismo obtenemos que $\gamma\delta = \eta$. Esto prueba que el diagrama anterior puede ser extendido a un pullback.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que el diagrama anterior puede ser extendido a un pullback via un morfismo $\gamma : A' \longrightarrow B'$. En particular, $\alpha_1\beta = \alpha_2\gamma$ y como $\alpha_3\alpha_2 = 0$, esto implica que $\alpha_3\alpha_1\beta = \alpha_3\alpha_2\gamma = 0$. Ahora supongamos existe $\theta : X \longrightarrow A$ tal que $\alpha_3\alpha_1\theta = 0$; pero como α_2 es el kernel de α_3, entonces existe un morfismo $\eta : X \longrightarrow B'$ tal que $\alpha_2\eta = \alpha_1\theta$. Usando ahora que el diagrama de arriba es un pullback, obtenemos que existe un único morfismo $\delta : X \longrightarrow A'$ tal que $\theta = \beta\delta$ y $\eta = \gamma\delta$. Finalmente, como β es un monomorfismo, concluimos que β es el kernel de $\alpha_3\alpha_1$. $\square$

Proposición 1.14.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero. Si $\mu : K \longrightarrow A$ es el kernel de $\alpha : A \longrightarrow B$ y $p : A \longrightarrow C$ es el cokernel de μ, entonces μ es un kernel de p.*

Demostración. Sea $K = Ker(\alpha)$, $C = Coker(\mu)$ y $v : X \longrightarrow A$ con $pv = 0$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\mu"] & & A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "p"] & & B \\ & X \arrow[ur, "v"] & & C, \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

donde q está definido en virtud del hecho de que $\alpha\mu = 0$ y p es el cokernel de μ. Luego $\alpha v = qpv = 0$; y puesto que μ es el kernel de α, entonces existe un único morfismo $\gamma : X \longrightarrow K$ tal que $\mu\gamma = v$, probándose que μ es el kernel de p. $\square$

1.15. Los funtores Ker y Coker

Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría con cokerneles. Dado un objeto $A \in \mathscr{A}$, construiremos el funtor $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$.
Sean $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ con $i = 1, 2$ sub-objetos de A y $\gamma \in [(\alpha_1, A), (\alpha_2, A)]_{[\mathscr{A}, A]}$ un morfismo de sub-objetos de A. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"] & Coker(\alpha_1) \\
A_2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] & & Coker(\alpha_2).
\end{tikzcd}$$

Dado que $\beta_2 \alpha_1 = 0$, existe un único morfismo $\bar{\gamma} : Coker(\alpha_1) \longrightarrow Coker(\alpha_2)$ tal que $\bar{\gamma}\beta_1 = \beta_2$.

Definición 1.15.1 *Dada una categoría con cokerneles y un objeto $A \in \mathscr{A}$, se define la correspondencia*

$$Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$$

como sigue:

(a) $Coker(\alpha, A) := (A, \beta)$, *donde* $\beta : A \longrightarrow Coker(\alpha)$ *es el cokernel del sub-objeto* $\alpha : Dom(\alpha) \longrightarrow A$ *de* A, *y*

(b) dado $\gamma : (\alpha_1, A) \longrightarrow (\alpha_2, A)$ *un morfismo en* $[A, \mathscr{A}]$,
$Coker(\gamma) : Coker(\alpha_1) \longrightarrow Coker(\alpha_2)$ *es el único morfismo tal que* $Coker(\gamma)\beta_1 = \beta_2$.

Observación 1.15.2 *De la unicidad del morfismo $\bar{\gamma} : Coker(\alpha_1) \longrightarrow Coker(\alpha_2)$ con la propiedad $\bar{\gamma}\beta_1 = \beta_2$, no es difícil ver que $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$ es en efecto un funtor.*

Supongamos ahora que $\mathscr{A}$ es una categoría con kerneles. Dado un objeto $A \in \mathscr{A}$ construiremos el funtor $Ker : [A, \mathscr{A}] \longrightarrow [\mathscr{A}, A]$. Esta construcción es la dual del funtor $Coker$.
Sean $\beta_i : A \longrightarrow B_i$ con $i = 1, 2$ dos objetos cociente de A. Dado un morfismo $\delta : (A, \beta_1) \longrightarrow (A, \beta_2)$ de objetos cociente, existe un único morfismo $\bar{\delta} : Ker(\beta_1) \longrightarrow Ker(\beta_2)$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
Ker(\beta_1) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\bar{\delta}"'] & A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & B_1 \arrow[d, "\delta"] \\
Ker(\beta_2) \arrow[ur, "\alpha_2"'] & & B_2.
\end{tikzcd}$$

Definición 1.15.3 *Dada una categoría con kerneles y un objeto $A \in \mathscr{A}$. Se define el funtor $Ker : [A, \mathscr{A}] \longrightarrow [\mathscr{A}, A]$ como sigue:*

(a) $Ker(A, \beta) := (\alpha, A)$, donde $\alpha : Ker(\beta) \longrightarrow A$ es el kernel del objeto cociente $\beta : A \longrightarrow B$,

(b) dado $\delta : (A, \beta_1) \longrightarrow (A, \beta_2)$ un morfismo en $[A, \mathscr{A}]$, $Ker(\delta) : Ker(\beta_1) \longrightarrow Ker(\beta_2)$ es el único morfismo tal que $\alpha_2 Ker(\delta) = \alpha_1$.

Observación 1.15.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{A}$.*

(1) Si $\mathscr{A}$ tiene cokerneles, entonces el funtor $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$ induce una función $Coker : (Obj([\mathscr{A}, A]), \leq) \longrightarrow (Obj([A, \mathscr{A}]), \leq)$, la cual invierte el orden; esto es,

$$(\alpha_1, A) \leq (\alpha_2, A) \Rightarrow Coker(\alpha_2, A) \leq Coker(\alpha_1, A).$$

(2) Dualmente, si $\mathscr{A}$ tiene kerneles, entonces el funtor $Ker : [A, \mathscr{A}] \longrightarrow [\mathscr{A}, A]$ induce una función $Ker : (Obj([A, \mathscr{A}]), \leq) \longrightarrow (Obj([\mathscr{A}, A]), \leq)$, la cual invierte el orden; esto es,

$$(A, \beta_1) \leq (A, \beta_2) \Rightarrow Ker(A, \beta_2) \leq Ker(A, \beta_1).$$

1.16. Normalidad

Definición 1.16.1 *Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ es **normal** si*

(a) $\mathscr{A}$ tiene objeto cero, y

(b) todo monomorfismo α en $\mathscr{A}$ es el kernel de algún morfismo de $\mathscr{A}$.

*Dualmente, $\mathscr{A}$ es **conormal** si*

$(a)^*$ $\mathscr{A}$ tiene objeto cero, y

$(b)^*$ todo epimorfismo α en $\mathscr{A}$ es el cokernel de algún morfismo de $\mathscr{A}$.

Proposición 1.16.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría normal. Si $\mathscr{A}$ tiene kerneles, entonces $\mathscr{A}$ tiene imágenes inversas e intersecciones finitas.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo y $\mu : B' \longrightarrow B$ un sub-objeto de B. Como la categoría $\mathscr{A}$ es normal existe un morfismo $\alpha : B \longrightarrow C$ tal que μ es el kernel de α. Ahora bien, podemos encontrar $\mu' : A' \longrightarrow A$ que es el kernel del morfismo αf ya que la categoría $\mathscr{A}$ tiene kerneles; y luego, por 1.14.8, existe un morfismo γ tal que el siguiente diagrama es pullback

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B' \arrow[r, "\mu"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Esto es, $f^{-1}(B') = A'$, probándose que la categoría $\mathscr{A}$ tiene imágenes inversas. Por otro lado, dado que la intersección de dos sub-objetos es la imagen inversa de uno de ellos, obtenemos que la categoría $\mathscr{A}$ tiene intersecciones finitas. $\square$

Proposición 1.16.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con kerneles y cokerneles. Consideremos los funtores $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$ y $Ker : [A, \mathscr{A}] \longrightarrow [\mathscr{A}, A]$ introducidos en la sección anterior, donde A es un objeto de $\mathscr{A}$.*

(a) Si $\mathscr{A}$ es normal entonces $Ker\, Coker \simeq 1_{[\mathscr{A},A]}$.

(b) Si $\mathscr{A}$ es conormal entonces $Coker\, Ker \simeq 1_{[A,\mathscr{A}]}$.

Demostración. Probaremos sólo (a) ya que la prueba de (b) es dual. Supongamos que $\mathscr{A}$ es normal. Esto es, todo monomorfismo es el kernel de un morfismo. Sea $\alpha : A' \longrightarrow A$ un sub-objeto de A; por 1.14.9, existe un único morfismo (el cual es un isomorfismo) $\bar{\alpha} : A' \longrightarrow Ker(Coker(\alpha))$ en $\mathscr{A}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\bar{\alpha}"'] & & A \arrow[r, "\beta"] & Coker(\alpha) \\ & Ker(\beta). \arrow[ur, "\alpha'"'] & & \end{tikzcd}$$

Definamos la transformación

$$\eta_{(\alpha,A)} : (\alpha, A) \longrightarrow Ker(Coker(\alpha, A)) = (\alpha', A)$$

donde $\eta_{(\alpha,A)} := \bar{\alpha}$ es el isomorfismo de arriba. Se puede ver fácilmente que la transformación $\eta : 1_{[\mathscr{A},A]} \longrightarrow Ker\, Coker$ es natural y por lo tanto una equivalencia natural de funtores. $\square$

Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Consideremos la clase $Obj(\mathscr{A})$ de objetos de $\mathscr{A}$ y la relación de equivalencia $\sim$ en $Obj(\mathscr{A})$, donde $A \sim B$ si y sólo si A es isomorfo a B. Dado un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, éste induce una función $\overline{F} : Obj(\mathscr{A})/\sim \longrightarrow Obj(\mathscr{B})/\sim$ definida por $\overline{F}([A]) := [F(A)]$ para cada $[A] \in Obj(\mathscr{A})/\sim$, donde $[A] := \{A' \in Obj(\mathscr{A}) \mid A' \sim A\}$ y $[F(A)] := \{B \in Obj(\mathscr{B}) \mid B \sim F(A)\}$.

Corolario 1.16.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con kerneles y cokerneles. Para cada $A \in Obj(\mathscr{A})$ consideremos la función $\overline{Coker} : Obj([\mathscr{A}, A])/\sim \longrightarrow Obj([A, \mathscr{A}])/\sim$ inducida por el funtor $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$.*

(a) Si $\mathscr{A}$ es normal entonces la función $\overline{Coker}$ es inyectiva. Más aún, si además $\mathscr{A}$ es colocalmente pequeña entonces $\mathscr{A}$ es localmente pequeña.

(b) Si $\mathscr{A}$ es normal y conormal entonces, el funtor $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$ es una equivalencia de categorías; en particular, la función $\overline{Coker}$ es biyectiva.

Demostración.

(a) Sean (α_1, A) y $(\alpha_2, A) \in [\mathscr{A}, A]$ tales que $Coker(\alpha_1, A) \simeq Coker(\alpha_2, A)$. Luego $Ker\,Coker(\alpha_1, A) \simeq Ker\,Coker(\alpha_2, A)$; y entonces, por 1.16.3(a), concluimos que $(\alpha_1, A) \simeq (\alpha_2, A)$.

(b) Por 1.16.3, tenemos que $Coker : [\mathscr{A}, A] \longrightarrow [A, \mathscr{A}]$ es una equivalencia de categorías. De aquí se concluye que la función $\overline{Coker}$ es biyectiva.

□

Proposición 1.16.5 *Toda categoría normal es balanceada.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una categoría normal y $\alpha : A \longrightarrow B$ un monomorfismo que es un epimorfismo. Por 1.16.3(a), el sub-objeto $\alpha : A \longrightarrow B$ es isomorfo a $Ker(Coker(\alpha))$. Pero como el cokernel de un epimorfismo es 0, entonces el kernel para este es $1_B : B \longrightarrow B$. De esto se sigue que existe un isomorfismo $\gamma : A \longrightarrow B$ tal que $1_B\gamma = \alpha$. Por lo tanto α es un isomorfismo. □

Lema 1.16.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero y $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo. Supongamos que existen $p : B \longrightarrow Coker(\alpha)$ y $v : Ker(p) \longrightarrow B$ que son el cokernel de α y el kernel de p, respectivamente. Entonces*

(a) existe un único morfismo $q : A \longrightarrow Ker(p)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "q"'] & & B \arrow[r, "p"] & Coker(\alpha) \\
& Ker(p), \arrow[ur, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

(b) si $\mathscr{A}$ tiene cokerneles y es normal, entonces $Im(\alpha) = Ker(Coker(\alpha))$. Más aún, si además $\mathscr{A}$ tiene equalizadores, entonces $q : A \longrightarrow Ker(p)$ es la coimagen de α.

Demostración.

(a) La existencia y la unicidad de q se sigue del hecho de que $p\alpha = 0$ y de que v es el kernel de p.

(b) Supongamos que $\mathscr{A}$ tiene cokerneles y es normal. Sea $\gamma : B' \longrightarrow B$ un sub-objeto de B a través del cual se factoriza α. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & B' \arrow[d, "\gamma"] & \\
A \arrow[urr, "\beta"] \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & Ker(p) \arrow[r, "v"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\delta"] & Coker(\alpha) \arrow[dl, "\eta"] \\
& I' \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "v'"'] & Coker(\gamma), &
\end{tikzcd}$$

donde δ es el cokernel de γ (entonces $\gamma = Ker(\delta)$ puesto que $Ker\,Coker \simeq 1_{[\mathscr{A},A]}$) y η está definida ya que $\delta\alpha = 0$. Entonces $\delta v = \eta p v = 0$ por lo tanto existe $\psi : Ker(p) \longrightarrow B'$ tal que $\gamma\psi = v$. Esto muestra que v es la imagen de α. Si $\mathscr{A}$ tiene equalizadores entonces, por 1.11.4, q es un epimorfismo. Consideremos cualquier factorización $\alpha = v'q'$ de α con q' un epimorfismo. Luego $pv' = 0$, y por lo tanto, existe un morfismo $\theta : I' \longrightarrow Ker(p)$ tal que $v' = v\theta$. Usando el hecho de que v es un monomorfismo, se ve que $q = \theta q'$. Por lo tanto $q \leq q'$, como objetos cociente de A, probándose que q es la coimagen de α.

□

1.17. Categorías exactas

Definición 1.17.1 *Una categoría $\mathscr{A}$ es* ***exacta*** *si es normal, conormal, tiene kerneles y cokerneles y si todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ puede ser escrito como $A \xrightarrow{q} I \xrightarrow{v} B$, donde q es un epimorfismo y v es un monomorfismo.*

Lema 1.17.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta y $A \xrightarrow{q} I \xrightarrow{v} B$ la factorización de $\alpha : A \longrightarrow B$ como en la definición anterior. Consideremos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Ker(q) \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "q"'] & & B \arrow[r, "p"] & Coker(v) \\ & & I, \arrow[ur, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

donde μ es el kernel de q y p es el cokernel de v. Entonces,

(a) $\mathscr{A}$ es balanceada y tiene imágenes,

(b) $Ker(\alpha) = \mu$, $Coker(\alpha) = p$ y $Im(\alpha) = v$.

Demostración.

(a) Como $\mathscr{A}$ es normal, de 1.16.5, se tiene que $\mathscr{A}$ es balanceada. Por otro lado, de 1.16.6(b), concluimos que $\mathscr{A}$ tiene imágenes.

(b) Dado que v es un monomorfismo, por 1.14.4(c), se tiene que $\mu = ker(q) = Ker(vq) = Ker(\alpha)$. Por otro lado, dado que $\mathscr{A}$ es balanceada y tiene imágenes, se tiene, de 1.11.5 y 1.16.6(b), que $v = Im(\alpha) = Ker\,Coker(\alpha)$. Luego, por 1.16.3, $p = Coker(v) = Coker(Ker(Coker(\alpha))) = Coker(\alpha)$.

□

Observación 1.17.3 *(1) Una categoría normal y conormal con kerneles, cokerneles y equalizadores es una categoría exacta. En efecto, es una consecuencia inmediata de 1.16.6.*

(2) *$\mathscr{A}$ es exacta si y sólo si $\mathscr{A}^*$ es exacta. En particular, si $\mathscr{A}$ es exacta entonces $\mathscr{A}$ tiene coimágenes. Más aún, $Coim(\alpha) = Coker\, Ker(\alpha) = q$, donde α y q son los morfismos de 1.17.2.*

Definición 1.17.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta. Consideremos la siguiente sucesión η de morfismos en $\mathscr{A}$*

$$\eta : \qquad \cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow \cdots .$$

(a) *Decimos que η es una **sucesión exacta** en $\mathscr{A}$ si $Ker(\alpha_{i+1}) = Im(\alpha_i)$ como sub-objetos de A_{i+1} para todo i.*

(b) *Si en η se tiene que $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$ (equivalentemente, $Im(\alpha_i) \subset Ker(\alpha_{i+1})$) $\forall i$, se dice que η es un **complejo** en $\mathscr{A}$.*

Proposición 1.17.5 *Las siguientes condiciones son equivalentes en una categoría exacta $\mathscr{A}$.*

(1) $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si* $A \xleftarrow{\alpha^*} B \xleftarrow{\beta^*} C$ *es exacta en $\mathscr{A}^*$.*

(2) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ *es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si α es un monomorfismo.*

(3) $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ *es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si α es un epimorfismo.*

(4) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ *es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si α es un isomorfismo.*

Demostración.

(1) Por obs 1.17.3(2), basta con probar una de las implicaciones. Consideremos la siguiente sucesión de morfismos $A \xrightarrow{q} I \xrightarrow{v} B \xrightarrow{r} J \xrightarrow{w} C$, donde v es la imagen de α y w es la imagen de β. Entonces r es la coimagen de β. Si $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ es exacta, se tiene que v es el kernel de β y por lo tanto también el kernel de r. Luego, r es el cokernel de v. Veamos que $r = Coker(\alpha)$. En efecto, $Coker(\alpha) = Coker(v) = Coker\, Ker(\beta) = Coim(\beta) = r$. Luego, $r = Coker(\alpha)$ y $r = Coim(\beta)$, en la categoría dual $\mathscr{A}^*$, nos dán $r^* = Ker(\alpha^*)$ y $r^* = Im(\beta^*)$; y por lo tanto $A \xleftarrow{\alpha^*} B \xleftarrow{\beta^*} C$ es exacta, probándose (1).

(2) Si α es un monomorfismo entonces su kernel es cero; y claramente, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} C$ es exacta.

Recíprocamente, si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} C$ es exacta entonces α tiene kernel cero. Sea $A \xrightarrow{q} Im(\alpha) \xrightarrow{v} B$ una factorización de α a través de su imagen. Luego, $q = Coker(Ker(\alpha))$ y $Ker(\alpha) = 0$. Pero $Coker(\ 0 \longrightarrow A\ )$ es un isomorfismo y por lo tanto q es un isomorfismo. Por lo tanto $\alpha = vq$ es un monomorfismo.

(3) Se sigue de (1) y (2).

(4) Como la categoría $\mathscr{A}$ es balanceada, (4) se sigue de (2) y (3).

□

Observación 1.17.6 *Una* ***sucesión exacta corta****, en una categoría exacta $\mathscr{A}$, es una sucesión exacta*

$$\eta: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Por 1.17.5, tenemos qu η es exacta si y sólo si α es un monomorfismo, β es un epimorfismo y α es el kernel de β. En tal caso, denotaremos al objeto C por B/A.

Lema 1.17.7 *Consideremos el siguiente diagrama en una categoría exacta $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & B/A \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & B'/A' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde la primera y segunda fila son sucesiones exactas cortas. Entonces, existe un morfismo $\theta : A \longrightarrow A'$ tal que hace al diagrama anterior conmutativo si y sólo si existe un morfismo $\delta : B/A \longrightarrow B'/A'$ que hace conmutar a dicho diagrama. Más aún, la existencia de uno de tales morfismos determina al otro de manera única.

Demostración. Probaremos sólo una implicación ya que la otra es dual. Supongamos que existe $\delta : B/A \longrightarrow B'/A'$ tal que $\delta\beta = \beta'\gamma$. Por lo tanto, $\beta'\gamma\alpha = \delta\beta\alpha = 0$; y como α' es el kernel de β', entonces existe un único morfismo $\theta : A \longrightarrow A'$ tal que $\alpha'\theta = \gamma\alpha$. □

Observación 1.17.8 *Haciendo $B = B'$ y $\gamma = 1_B$ en el lema anterior. Vemos que, $\alpha \leq \alpha'$ como sub-objetos de B si y sólo si $\beta' \leq \beta$ como objetos cociente de B.*

Proposición 1.17.9 *Sea $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de sub-objetos de A en una categoría exacta $\mathscr{A}$. Si $\theta : A \longrightarrow A/A'$ es la cointersección de la familia de objetos cocientes $\{\beta_i : A \longrightarrow Coker(\alpha_i) = A/A_i\}_{i\in I}$ de A, entonces $\mu : A' = Ker(\theta) \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$.*

Demostración. Por ser $\theta : A \longrightarrow A/A'$ la cointersección de $\{\beta_i : A \longrightarrow A/A_i\}_{i\in I}$, sabemos que existen $\bar{\beta}_i : A/A_i \longrightarrow A/A'$ tal que $\bar{\beta}_i\beta_i = \theta$ $\forall i \in I$. Luego por 1.15.4(2), existen $\mu_i : A_i \longrightarrow A'$ tal que $\mu\mu_i = \alpha_i$ $\forall i \in I$. Esto es, $\mu : A' \longrightarrow A$ factoriza a cada $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ (que es la primera propiedad que debe tener $\mu : A' \longrightarrow A$ para ser la unión de $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$). Veamos que el morfismo $\mu : A' \longrightarrow A$ satisface la propiedad de ser llevado. En efecto, sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo y $h : B' \longrightarrow B$ un sub-objeto de B tal que cada $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$ es llevado a $h : B' \longrightarrow B$ por f. Luego, por 1.17.7, para cada $i \in I$ existe $\theta_i : A/A_i \longrightarrow B/B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"] & A \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "f"] & A/A_i \arrow[r] \arrow[d, "\theta_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "h"'] & B \arrow[r, "\delta"'] & B/B' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dado que $\theta : A \longrightarrow A/A'$ es la cointersección de $\{\beta_i : A \longrightarrow A/A_i\}_{i\in I}$ y δf se factoriza a través de β_i, existe $\bar{\theta} : A/A' \longrightarrow B/B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & A/A' \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\theta}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "h"'] & B \arrow[r, "\delta"'] & B/B' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De 1.17.7, obtenemos un morfismo $\eta : A' \longrightarrow B'$ que hace conmutar al diagrama anterior. Esto significa precisamente que $\mu : A' \longrightarrow A$ es llevado a $h : B' \longrightarrow B$ por f, probándose que $\mu : A' \longrightarrow A$ es la unión de la familia de sub-objetos $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ de A. $\square$

Corolario 1.17.10 *Toda categoría exacta tiene uniones finitas.*

Demostración. Por el resultado dual de 1.16.2, toda categoría exacta tiene cointersecciones finitas. Por lo tanto, de 1.17.9, se tiene el resultado. $\square$

1.18. El lema del 9

Proposición 1.18.1 *Dado el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d, "\gamma_1"] & A \arrow[d, "\theta_1"] & A'' \arrow[d, "\psi_1"] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\gamma_2"] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en una categoría exacta $\mathscr{A}$, donde todas las filas y columnas son exactas. Entonces, existen morfismos $f : A' \longrightarrow A$ y $g : A \longrightarrow A''$ que hacen conmutar el diagrama anterior. Además, la sucesión $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ *es exacta.*

Demostración. Por 1.17.7, existen $f : A' \longrightarrow A$ y $g : A \longrightarrow A''$ tales que hacen al diagrama anterior conmutativo. Además, como $\alpha_1\gamma_1$ es un monomorfismo, se tiene que f es un monomorfismo. Por otro lado, tenemos que $\alpha_2\theta_1 f = \alpha_2\alpha_1\gamma_1 = 0$. Veamos ahora, que la siguiente sucesión es exacta

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B'' \xrightarrow{\psi_2} C'' \longrightarrow 0.$$

Probaremos primero que $Ker(\alpha_2\theta_1) = f$. Sea $\mu : X \longrightarrow A$ un morfismo tal que $\alpha_2\theta_1\mu = 0$. Por lo tanto, usando que $Ker(\alpha_2) = \alpha_1$, existe un morfismo $v : X \longrightarrow B'$ tal que $\alpha_1 v = \theta_1\mu$. Pero como $\beta_1\gamma_2 = \theta_2\alpha_1$, entonces $(\beta_1\gamma_2)v = (\theta_2\alpha_1)v = \theta_2(\theta_1\mu) = 0$. Dado que β_1 es un monomorfismo, esto implica que $\gamma_2 v = 0$. Por lo tanto, existe un morfismo $w : X \longrightarrow A'$ tal que $v = \gamma_1 w$ (esto por ser γ_1 el kernel de γ_2). Esto nos dá la siguiente cadena de igualdades $\theta_1 f w = \alpha_1\gamma_1 w = \alpha_1 v = \theta_1\mu$. Pero como θ_1 es un monomorfismo, entonces $fw = \mu$; además, como $(\alpha_2\theta_1)f = 0$ se tiene que $f : A' \longrightarrow A$ es el kernel de $\alpha_2\theta_1$, probándose que la sucesión $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B''$ es exacta. Por dualidad, la sucesión $A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B'' \xrightarrow{\psi_2} C'' \longrightarrow 0$ es exacta. Por lo tanto, la sucesión $(*)$ es exacta.
Consideremos ahora el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2\theta_1"] & A'' \arrow[d, "\psi_1"] \\
I \arrow[r, "\rho_2"'] & B'' \arrow[d, "\psi_2"] \\
 & C''.
\end{tikzcd}$$

Como $\alpha_2\theta_1 = \psi_1 g$, entonces $Ker(\alpha_2\theta_1) = Ker(\psi_1 g) = Ker(g)$ pues ψ_1 es un monomorfismo. Por lo tanto, de la sucesión $(*)$, obtenemos que $f = Im(f) = Ker(\alpha_2\theta_1) = Ker(g)$. Veamos ahora que g es un epimorfismo. En efecto, sea $\rho_2\rho_1$ una factorización de $\alpha_2\theta_1$ a través de su imagen. Como $Ker(\psi_2) = Im(\alpha_2\theta_1)$ y $Ker(\psi_2) = \psi_1$ (la sucesión $(*)$ es exacta), obtenemos que $\psi_1 = Im(\alpha_2\theta_1)$. Esto implica que existe un isomorfismo $\eta : A'' \longrightarrow I$ tal que $\rho_2\eta = \psi_1$. Luego, usando que ρ_2 es un monomorfismo, concluimos que $\eta g = \rho_1$. Por lo tanto g es un epimorfismo pues $g = \eta^{-1}\rho_1$ y ρ_1 es un epimorfismo. Por lo tanto tenemos la exactitud de la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0.$$

□

Corolario 1.18.2 *(Primer Teorema de Isomorfismo de Noether). Sean $B \subset A_2 \subset A_1$ sub-objetos en una categoría exacta $\mathscr{A}$. Entonces, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_1/A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2/B \arrow[r] & A_1/B \arrow[r] & A_1/A_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y con filas exactas.

Demostración. La demostración se sigue de aplicar el dual de 1.18.1 al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_1/A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A_2/B \arrow[d] & A_1/B \arrow[d] & A_1/A_2 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 1.18.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta. Si el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[d, "\alpha_1"] \\
B \arrow[r, "\alpha_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

es un pullback, α_1 es un monomorfismo y α_2 es un epimorfismo, entonces dicho diagrama puede ser extendido al siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$ con filas *y columnas exactas*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
 & & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea γ el cokernel de α_1 y θ el kernel de α_2. Entonces, por 1.14.8, β_2 es el kernel de $\gamma\alpha_2$, y como ésta composición es un epimorfismo, entonces se tiene la exactitud de las columnas. Por otro lado, como $\gamma\alpha_2\beta_2 = 0$ y $\alpha_1 = Ker(\gamma)$, se tiene que $\beta_1 : B' \longrightarrow C'$ es el único morfismo tal que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$. Consideremos el siguiente diagrama, con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A \arrow[d, equal] & B' \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[d, "\alpha_1"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"'] \arrow[d] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Aplicando 1.18.1 al diagrama anterior, obtenemos morfismos $\delta : A \longrightarrow B'$ y $\lambda : B' \longrightarrow C'$ tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta_2"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"] & B \arrow[r, "\alpha_2"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y exacto. Dado que $\alpha_1\lambda = \alpha_2\beta_2$, concluimos por la unicidad mencionada antes, que $\lambda = \beta_1$; y con esto se prueba el corolario. $\square$

Corolario 1.18.4 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría exacta. Si $\theta_1 : B' \longrightarrow B$ es un sub-objeto de B, entonces se tiene un epimorfismo*

$$f^{-1}(B') \longrightarrow Im(f) \cap B'$$

y una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow f^{-1}(B') \longrightarrow A \longrightarrow Im(f)/Im(f) \cap B' \longrightarrow 0.$$

Demostración. Dado que los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"'] & Im(f) \cap B' \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "f"] & B & Im(f) \arrow[l, "\gamma_2"']
\end{tikzcd}$$

son pullbacks, obtenemos del lema 1.8.5, el siguiente pullback

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Im(f) \cap B' \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "\gamma_1"'] & Im(f)
\end{tikzcd}$$

Ahora, el resultado se sigue de aplicar 1.18.3, al pullback anterior. □

Proposición 1.18.5 *En una categoría exacta $\mathscr{A}$ consideremos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_1"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_1"] \arrow[dr, phantom, "I"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\gamma_2"'] \arrow[dr, phantom, "III"] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \arrow[dr, phantom, "IV"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

donde la fila y la columna de enmedio son exactas. Entonces, el diagrama anterior es conmutativo con filas y columnas exactas si y sólo si II es un pullback, IV es un pushout, I y III son las factorizaciones de $\alpha_2\theta_1$ y $\theta_2\alpha_1$ a través de sus respectivas imágenes.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que el diagrama anterior es conmutativo con filas y columnas exactas. Como g es un epimorfismo y ψ_1 es un monomorfismo, esto implica que I es la factorización de $\alpha_2\theta_1$ a través de su imagen. Análogamente, III es la factorización de $\theta_2\alpha_1$ a través de su imagen. Ahora, como γ_1 es el kernel de γ_2 y β_1 es un monomorfismo, entonces por 1.14.4, γ_1 es también el kernel de $\beta_1\gamma_2 = \theta_2\alpha_1$; y por lo tanto por 1.14.8, II es un pullback. Dualmente, IV es un pushout.
($\Leftarrow$) Dadas la fila y la columna de enmedio exactas, construimos II como un pullback, IV como un pushout, I y III como las factorizaciones a través de sus imágenes. Ahora demostraremos que la fila superior es exacta; luego la columna izquierda será exacta por simetría, y la fila inferior y la columna derecha serán exactas por dualidad. Por 1.14.8, sabemos que f es el kernel de $\alpha_2\theta_1 = \psi_1 g$; y puesto que ψ_1 es un monomorfismo, se tiene que f es el kernel de g. Dado que g es un epimorfismo se sigue que la fila superior es exacta. $\square$

Corolario 1.18.6 *Si $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\theta_1 : A_2 \longrightarrow A$ son dos sub-objetos de A en una categoría exacta $\mathscr{A}$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_1"] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] & A/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & A/A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & A/A_1 \cup A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Demostración. El pullback de los dos sub-objetos $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$, $\theta_1 : A_2 \longrightarrow A$ es $A_1 \cap A_2$. Y entonces por 1.17.9, el pushout de dos objetos cociente $\alpha_2 : A \longrightarrow A/A_1$ y $\theta_2 : A \longrightarrow A/A_2$ es $A/A_1 \cup A_2$. Luego el corolario se sigue de 1.18.5. $\square$

Corolario 1.18.7 *(Segundo Teorema de Isomorfismo de Noether). Si $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\theta_1 : A_2 \longrightarrow A$ son sub-objetos de A en una categoría exacta, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_1 \cup A_2 \arrow[r] & A_1 \cup A_2/A_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Se sigue, reemplazando A por $A_1 \cup A_2$ en el diagrama del corolario anterior. $\square$

Corolario 1.18.8 *Consideremos el siguiente diagrama con fila y columna exactas*

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A \arrow[d, "\theta_1"] & & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha_1"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] & B'' \arrow[r] & 0 \\
 & & C \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

en una categoría exacta $\mathscr{A}$. Entonces

(a) $\theta_2\alpha_1$ es un epimorfismo (rep. monomorfismo) si y sólo si $\alpha_2\theta_1$ lo es.

(b) $\theta_2\alpha_1$ es un isomorfismo si y sólo si $\alpha_2\theta_1$ lo es.

Demostración.

(a) De acuerdo al diagrama de la proposición 1.18.5, si $\theta_2\alpha_1$ es un epimorfismo entonces $\beta_1 : C' \longrightarrow C$ es un epimorfismo; y por lo tanto $C'' = 0$. Pero esto implica que $\psi_1 : A'' \longrightarrow B''$ es un epimorfismo. Luego $\alpha_2\theta_1$ es un epimorfismo. La demostración para el caso en que $\theta_2\alpha_1$ es un monomorfismo es dual.

(b) Dada que $\mathscr{A}$ es balanceada por 1.16.5, (b) se sigue de (a).

$\square$

1.19. Productos y coproductos

Definición 1.19.1 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en una categoría arbitraria $\mathscr{A}$. Un* ***producto*** *para $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ con la siguiente propiedad: para cualquier familia $\{\alpha_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ de morfismos existe un único morfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & A \arrow[dl, "p_i"] \\
 & A_i &
\end{tikzcd}
$$

para todo $i \in I$.

Las siguientes observaciones son fáciles de verificar usando la definición de producto.

Observación 1.19.2 *(1) Si la familia $\{\alpha_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ es también un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces el morfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ del diagrama anterior es un isomorfismo. Esto es, el producto, si existe, es único salvo isomorfismos. En el caso que exista, denotaremos por $\{p_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ a uno de estos productos; y cada morfismo $p_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ será llamado la **i-ésima proyección** del producto sobre A_i.*

(2) Una familia $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ de morfismos es un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$, si y sólo si la función

$$\varphi_B : [B, A]_{\mathscr{A}} \longrightarrow \prod_{i\in I}[B, A_i]_{\mathscr{A}}$$

definida por $\varphi_B(\beta) = (p_i\beta)_{i\in I}$ $\forall\beta \in [B, A]_{\mathscr{A}}$ es biyectiva para todo objeto $B \in \mathscr{A}$, donde $\prod_{i\in I}[B, A_i]_{\mathscr{A}}$ es el producto cartesiano de conjuntos.

(3) Un objeto $0 \in \mathscr{A}$, es un objeto nulo en $\mathscr{A}$ si y sólo si sirve como producto para la familia vacía.

*(4) Supongamos que la categoría $\mathscr{A}$ tiene objeto cero. Para cada $i \in I$, definimos el morfismo $\delta_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$, donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ii} = 1_{A_i}$. Si existe el producto de $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces existen morfismos $\mu_i : A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$, llamados **inclusiones**, tales que $p_j\mu_i = \delta_{ij}$ $\forall i, j \in I$. En particular, cada proyección p_i es un split-epi y cada inclusión μ_i es un split-mono.*

Proposición 1.19.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero. Si $p_i : A_1 \prod A_2 \longrightarrow A_i$ y $\mu_i : A_i \longrightarrow A_1 \prod A_2$ son respectivamente las proyecciones e inclusiones del producto $A_1 \prod A_2$, entonces $Ker(p_2) = \mu_1$.*

Demostración. Sea $\alpha : A' \longrightarrow A_1 \prod A_2$ tal que $p_2\alpha = 0$. Definimos $\alpha_1 = p_1\alpha$; entonces tenemos que $\mu_1\alpha_1 = \alpha$ puesto que $p_i(\mu_1\alpha_1) = p_i\alpha$ con $i = 1, 2$. Pero como μ_1 es un monomorfismo y $p_2\mu_1 = 0$, se tiene que μ_1 es el kernel de p_2. $\square$

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathscr{A}$ y sea $I = \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ una unión disjunta de conjuntos. Si el producto $A_\lambda = \prod_{i\in I_\lambda} A_i$ está definido con proyecciones $\{p_i : A_\lambda \longrightarrow A_i\}_{i\in I_\lambda}$ para toda λ, y además $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ está definido con proyecciones $\{p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Entonces, la familia $\{p_ip_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A_i \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ dá al producto $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ una estructura de producto para $\{A_i\}_{i\in I}$.

Por otro lado, sea J un subconjunto de I y supongamos que los productos $\prod_{i\in J} A_i$ y $\prod_{i\in I} A_i$ están definidos. Entonces, tenemos un morfismo

$$p_{JI} : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in J} A_i$$

inducido por las proyecciones. Esto es, si lo componemos con la i-ésima proyección de $\prod_{i\in J} A_i$ obtenemos la i-ésima proyección de $\prod_{i\in I} A_i$. Si $\mathscr{A}$ tiene objeto cero entonces p_{JI} es un epimorfismo. De hecho p_{JI} puede ser interpretado como una de las proyecciones p_λ relativa a una descomposición conveniente del conjunto I como en el parrafo anterior. Consideremos ahora una familia de morfismos $\{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i\in I}$ y supongamos que existen $\prod_{i\in I} A_i$ y $\prod_{i\in I} B_i$. En este caso, definimos un morfismo

$$\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i,$$

como el único morfismo tal que para toda $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[r] \arrow[d, "p_i"'] & \prod B_i \arrow[d, "p'_i"] \\
A_i \arrow[r, "f_i"] & B_i.
\end{tikzcd}$$

Además, tenemos la siguientes relaciones

$$\prod_{i\in I} g_i \prod_{i\in I} f_i = \prod_{i\in I}(g_i f_i), \qquad \prod_{i\in I} 1_{A_i} = 1_{\prod_{i\in I} A_i}.$$

Las cuales son válidas siempre y cuando los productos estén definidos y las composiciones tengan sentido. Esto nos dice precisamente, que si existe el producto $\prod_{i\in I} A_i$ para cualquier familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de A (i.e, $\mathscr{A}$ tiene productos) entonces $\prod_{i\in I} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor.
La noción dual de producto es el coproducto, el cual definimos a continuación.

Definición 1.19.4 *Un **coproducto** de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en una categoría $\mathscr{A}$, es un producto de dicha familia en la categoría dual. Esto es, un coproducto es una familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}$ llamados inclusiones, con la siguiente propiedad: para cada familia $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A'\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, "\alpha"] & & A' \\
& A_i \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] &
\end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$.

Observación 1.19.5

*(a) Como en el caso del producto, si el coproducto existe éste es único salvo isomorfismos. En el caso que exista, denotaremos por $\{\mu_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ a uno de estos coproductos; y cada morfismo $\mu_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ será llamado la **i-ésima inclusión** de A_i en el coproducto.*

(b) Análogamente, si $\mathscr{A}$ tiene objeto cero, se definen las proyecciones $p_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ tales que $p_j\mu_i = \delta_{ij}$ $\forall i, j \in I$. En particular, cada proyección p_i es un split-epi y cada inclusión μ_i es un split-mono.

Proposición 1.19.6 *Si $\mathscr{A}$ tiene imágenes, imágenes inversas y coproductos entonces $\mathscr{A}$ tiene uniones. De hecho, si $\{f_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ es una familia de sub-objetos de A, entonces su unión está dada por la imagen del morfismo $f : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow A$ tal que para cada i, $f\mu_i$ es el sub-objeto $f_i : A_i \longrightarrow A$ de A.*

Demostración. Sea $\bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{\bar{f}} Im(f) \xrightarrow{\mu} A$ la factorización de f a través de su imagen. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\bar{f}\mu_i"'] & & A \\ & Im(f) \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$, donde $\mu_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ es la i-ésima inclusión en el coproducto. Veamos que $\mu : Im(f) \longrightarrow A$ es la unión de $\{f_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$.
En efecto, el diagrama anterior, muestra la primera propiedad de factorización que debe tener la unión. Falta ver que satisface la propiedad de ser llevado. Sea $g : A \longrightarrow B$ un morfismo y $h : B' \longrightarrow B$ un sub-objeto de B. Supongamos que cada $f_i : A_i \longrightarrow A$ es llevado a $h : B' \longrightarrow B$ por g. Esto es, el siguiente diagrama es conmutativo $\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"] & B. \end{tikzcd}$$

Consideremos la imagen inversa de $h : B' \longrightarrow B$ por g. Es decir, tenemos el siguiente pullback

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(B') \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B, \end{tikzcd}$$

donde, por ser h un monomorfismo, α_2 también lo es. Dado que $hg_i = gf_i$, se tiene por la propiedad del pullback la existencia de $\gamma_i : A_i \longrightarrow g^{-1}(B')$ tal que $\alpha_1\gamma_i = g_i$ y $\alpha_2\gamma_i = f_i$ $\forall i \in I$. Veamos que $\alpha_2\gamma = f$, donde $\gamma : \bigoplus_{i\in i} A_i \longrightarrow g^{-1}(B')$ es el morfismo tal que $\gamma\mu_i = \gamma_i$. En efecto, $(\alpha_2\gamma)\mu_i = \alpha_2(\gamma\mu_i) = \alpha_2\gamma_i = f_i = f\mu_i$; y por la unicidad de morfismos en el coproducto se tiene la igualdad $\alpha_2\gamma = f$. Por lo tanto, dado que α_2 es un monomorfismo, obtenemos que existe

$\lambda : Im(f) \longrightarrow g^{-1}(B')$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "\mu"] \\ \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "f"'] & g^{-1}(B') \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A. \end{tikzcd}$$

Consideremos el morfismo $\alpha_1\lambda : Im(f) \longrightarrow B'$. Luego $h(\alpha_1\lambda) = (h\alpha_1)\lambda = g\alpha_2\lambda = g\mu$. Esto es, $\mu : Im(f) \longrightarrow A$ es llevado por g al sub-objeto $h : B' \longrightarrow B$, probándose que $\mu : Im(f) \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{f_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$. $\square$

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathscr{A}$. Supongamos que para toda $i \in I$ se tiene que $A_i = A$. En éste caso, denotaremos al producto $\prod_{i\in I} A_i$ por A^I y al coproducto $\bigoplus_{i\in I} A_i$ por ${}^IA$. Definimos el **morfismo diagonal** $\Delta : A \longrightarrow A^I$ definido por $p_i\Delta = 1_A$ para todo $i \in I$; y dualmente, el **morfismo codiagonal** $\nabla : {}^IA \longrightarrow A$ por $\nabla\mu_i = 1_A$ para todo $i \in I$. Entonces, Δ es un monomorfismo y ∇ es un epimorfismo.

Lema 1.19.7 *Sean $\{A_j\}_{j\in J}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ familias de objetos en una categoría $\mathscr{A}$. Denotemos por $Mat_{I\times J}(A,B)$ al conjunto de matrices $I\times J$ de la forma $(f_{ij})_{I\times J}$ con $f_{ij} \in [A_j, B_i]_{\mathscr{A}}$. Entonces, la correspondencia*

$$\varphi : [\bigoplus_{j\in J} A_j, \prod_{i\in I} B_i]_{\mathscr{A}} \longrightarrow Mat_{I\times J}(A,B)$$

definida por $\varphi(f) = (f_{ij})_{I\times J}$ con $f_{ij} := p_i f \mu_j$, donde μ_j es la j-ésima inclusión en el coproducto y p_i es la i-ésima proyección del producto, es una biyección.

Demostración. Inyectividad: si $\varphi(f) = \varphi(g)$ entonces $p_i f\mu_j = p_i g\mu_j$ $\forall i \in I$ y $\forall j \in J$. Fijando $i \in I$ y dado que $(p_i f)\mu_j = (p_i g)\mu_j$ $\forall j \in J$; concluimos de la unicidad de morfismos en el coproducto que $p_i f = p_i g$ $\forall i \in I$. Esto último a su vez nos dice que $f = g$ por la unicidad de morfismos en el producto.
Suprayectividad: sea $(f_{ij})_{I\times J} \in Mat_{I\times J}(A,B)$. Haciendo $f := \prod_{i\in I}(\bigoplus_{j\in J} f_{ij})$ obtenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[r, "f"] & \prod_{i\in I} B_i \arrow[d, "p_i"] \\ A_j \arrow[u, "\mu_j"] \arrow[r, "f_{ij}"] & B_i. \end{tikzcd}$$

Esto último nos dice precisamente que $\varphi(f) = (f_{ij})_{I\times J}$. $\square$

Observación 1.19.8 *Identificaremos frecuentemente al morfismo* $f : \bigoplus_{j\in J} A_j \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ *con su matriz asociada, haciendo* $f = (f_{ij})$.

Definición 1.19.9 *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría con objeto cero y* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una familia de objetos de* $\mathscr{A}$. *Decimos que* $\bigoplus_{i\in I} A_i$ *es un* ***biproducto*** *si el morfismo* $\delta = (\delta_{ij}) : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$, *con* $\delta_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$ *y* $\delta_{ii} = 1_{A_i}$, *es un isomorfismo.*

Lema 1.19.10 *Sean* $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ *morfismos en una categoría* $\mathscr{A}$. *Consideremos los morfismos* $\theta_1 = \begin{pmatrix} 1_A \\ \beta \end{pmatrix} : A \longrightarrow A \prod B$ *y* $\theta_2 = \begin{pmatrix} 1_A \\ \alpha \end{pmatrix} : A \longrightarrow A \prod B$. *Entonces, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] \\ A \arrow[r, "\theta_2"'] & A \prod B \end{tikzcd}$$

es una intersección si y sólo si μ *es el equalizador de* α *y* β.

Demostración. Primeramente, es fácil ver que en efecto θ_1 y θ_2 son monomorfismos.
($\Rightarrow$) Supongamos que el diagrama anterior es una intersección. En particular, por 1.9.4, obtenemos que dicho diagrama es un pullback; y por lo tanto μ es el equalizador de α y β.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que μ es el equalizador de α y β. Sean $\alpha_1 : X \longrightarrow A$ y $\alpha_2 : X \longrightarrow A$ tales que $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_2$; lo cual implica que $p_1\theta_1\alpha_1 = p_1\theta_2\alpha_2$, pero como $p_1\theta_1 = 1_A = p_1\theta_2$, se tiene entonces que $\alpha_1 = \alpha_2$. Por lo tanto $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_1$ y entonces $\beta\alpha_1 = p_2\theta_1\alpha_1 = p_2\theta_2\alpha_1 = \alpha\alpha_1$; luego como μ es el equalizador, existe un único $\eta : X \longrightarrow K$ tal que $\mu\eta = \alpha_1 = \alpha_2$. Esto es, el diagrama anterior es un pullback, de donde se sigue el lema. $\square$

En el siguiente lema, veremos como construir el pullback usando productos y equalizadores.

Lema 1.19.11 *Dados dos morfismos* $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ *y* $\alpha_2 : A_2 \longrightarrow A$ *en una categoría* $\mathscr{A}$; *consideremos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\beta_2"] \arrow[dd, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta"] & & A_2 \arrow[dd, "\alpha_2"] \\ & A_1 \prod A_2 \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dl, "p_1"] & \\ A_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & A, \end{tikzcd}$$

donde p_1 *y* p_2 *son las proyecciones del producto* $A_1 \prod A_2$ *y* $\beta_i = p_i\beta$ *para* $i = 1, 2$. *Entonces, el cuadrado anterior es un pullback si y sólo si* β *es el equalizador de los morfismos* $\alpha_1 p_1$ *y* $\alpha_2 p_2$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\beta = Equ(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2)$. Sean $\beta_2' : X \longrightarrow A_2$ y $\beta_1' : X \longrightarrow A_1$ tales que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$. Por la propiedad del producto; existe un único $\delta : X \longrightarrow A_1 \prod A_2$ tal que $p_2\delta = \beta_2'$ y $p_1\delta = \beta_1'$. Pero entonces $(\alpha_1 p_1)\delta = \alpha_1(p_1\delta) = \alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2' = (\alpha_2 p_2)\delta$; y como β es el equalizador de $\alpha_1 p_1$ y $\alpha_2 p_2$, esto implica que existe un único morfismo $\psi : X \longrightarrow P$ tal que $\delta = \beta\psi$. Por lo tanto $\beta_i' = p_i\delta = p_i(\beta\psi) = \beta_i\psi$ para $i = 1, 2$. Ahora, si existiera otro $\psi' : X \longrightarrow P$ tal que $\beta_i' = \beta_i\psi' = p_i\beta\psi'$ esto implicaría, por la propiedad del producto, que $\delta = \beta\psi'$; pero $\delta = \beta\psi$, por lo tanto $\beta\psi = \beta\psi'$. Dado que β es un monomorfismo, concluimos que $\psi = \psi'$. Entonces, el diagrama de arriba es un pullback.
($\Rightarrow$) Supongamos ahora que el diagrama de arriba es un pullback. Veamos que $\beta = Equ(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2)$. En efecto $(\alpha_2 p_2)\beta = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_1 = (\alpha_1 p_1)\beta$. Ahora sea $\delta : X \longrightarrow A_1 \prod A_2$ tal que $(\alpha_2 p_2)\delta = (\alpha_1 p_1)\delta$. Usando la propiedad del pullback, existe un único morfismo $\theta : X \longrightarrow P$ tal que $\beta_i\theta = p_i\delta$ para $i = 1, 2$; entonces $p_i\beta\theta = p_i\delta$ con $i = 1, 2$ lo que implica que $\beta\theta = \delta$. Veamos que la factorización de δ a través de β es única. En efecto, supongamos que existe $\theta' : X \longrightarrow P$ tal que $\beta\theta' = \delta$. Entonces se tiene que $p_i\beta\theta' = p_i\delta$, lo cual implica que, $\beta_i\theta' = p_i\delta$ para $i = 1, 2$ y entonces $\theta = \theta'$. Por lo tanto β es el equalizador de $\alpha_1 p_1$ y $\alpha_2 p_2$.
□

Lema 1.19.12 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto nulo 0, y sean A_1 y A_2 objetos de $\mathscr{A}$. Entonces, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es un pullback si y sólo si $P = A_1 \prod A_2$ con proyecciones p_1 y p_2.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $P = A_1 \prod A_2$ con proyecciones p_1 y p_2. Si $\alpha_1 : X \longrightarrow A_1$ y $\alpha_2 : X \longrightarrow A_2$ son tales que $0\alpha_1 = 0\alpha_2 = 0$ (es decir, no hay restricciones sobre α_1 y α_2), entonces existe un único $\psi : X \longrightarrow P$ tal que $p_2\psi = \alpha_2$ y $p_1\psi = \alpha_1$. Por lo tanto el diagrama anterior es un pullback.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que el diagrama anterior es un pullback. Sean $\alpha_1 : X \longrightarrow A_1$ y $\alpha_2 : X \longrightarrow A_2$, entonces $0\alpha_1 = 0\alpha_2 = 0$. Por lo tanto, existe un único morfismo $\psi : X \longrightarrow P$ tal que $p_i\psi = \alpha_i$ con $i = 1, 2$. Luego $P = A_1 \prod A_2$ con proyecciones p_1 y p_2. □

Proposición 1.19.13 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría.*

(1) Si $\mathscr{A}$ tiene un objeto nulo, entonces $\mathscr{A}$ tiene pullbacks si y sólo si tiene equalizadores y productos finitos.

(2) Si $\mathscr{A}$ tiene productos finitos, entonces $\mathscr{A}$ tiene intersecciones finitas si y sólo si tiene equalizadores.

Demostración.

(1) Supongamos que $\mathscr{A}$ tiene objeto nulo.
($\Rightarrow$) Si $\mathscr{A}$ tiene pullbacks entonces, por 1.19.12, $\mathscr{A}$ tiene productos finitos. Más aún, de 1.19.10, concluimos que $\mathscr{A}$ tiene equalizadores.
($\Leftarrow$) Consecuencia de 1.19.11.

(2) Supongamos que $\mathscr{A}$ tiene productos finitos. En particular, $\mathscr{A}$ tiene objeto nulo (el producto de la familia vacía de objetos).
($\Rightarrow$) Inmediato de 1.19.10.
($\Leftarrow$) Si $\mathscr{A}$ tiene equalizadores entonces por (1), se tiene que $\mathscr{A}$ tiene pullbacks. En particular, intersecciones finitas.

□

1.20. Categorías aditivas

Definición 1.20.1 *Una categoría $\mathscr{A}$ es **semiaditiva** si tiene objeto cero y cada conjunto de morfismos $[A,B]_{\mathscr{A}}$ tiene una estructura de monoide abeliano tal que:*

1. *la composición de funciones $[B,C]_{\mathscr{A}} \times [A,B]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [A,C]_{\mathscr{A}}$ es bilineal. Es decir, $\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$ y $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ cada vez que las composiciones anteriores estén definidas.*

2. *el elemento cero de cada monoide $[A,B]_{\mathscr{A}}$ coincide con el morfismo cero en $[A,B]_{\mathscr{A}}$.*

*Si además, cada monoide $[A,B]_{\mathscr{A}}$ tiene inversos aditivos, es decir, es un grupo abeliano, decimos que $\mathscr{A}$ es una **categoría aditiva**.*

Observación 1.20.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva.*

1. *La condición (2) de la definición anterior se sigue de la (1). En efecto, sea 0_{AB} el neutro aditivo del grupo abeliano $[A,B]_{\mathscr{A}}$ y $0 : A \longrightarrow A$ el morfismo cero. Luego $0_{AB}0 = (0_{AB} + 0_{AB})0 = 0_{AB}0 + 0_{AB}0$, de donde se sigue que $0_{AB} = 0_{AB}0$. Por otro lado, sabemos que $0_{AB}0 = 0$. Por lo tanto $0_{AB} = 0$. También*
$$\alpha(-\beta) + \alpha\beta = \alpha((-\beta)+\beta) = \alpha 0 = 0,$$
por lo tanto $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$. Similarmente $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$ y $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

2. *El kernel de $\alpha - \beta$ es el equalizador de α y β. Por lo tanto, una categoría aditiva tiene kerneles si y sólo si tiene equalizadores. Además, un morfismo en una categoría aditiva es un monomorfismo si y sólo si su kernel es 0.*

3. *Sea $End_{\mathscr{A}}(M) := [M,M]_{\mathscr{A}}$. Es fácil ver que si $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva, entonces $End_{\mathscr{A}}(M)$ es un anillo asociativo con 1.*

Proposición 1.20.3 *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de objetos en una categoría semiaditiva $\mathscr{A}$. Entonces, una familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i=1}^n$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ si y sólo si existe una familia de morfismos $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i=1}^n$ tales que $p_i\mu_j = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^n \mu_k p_k = 1_A$, donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ii} = 1_{A_i}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i=1}^n$ es un coproducto de $\{A_i\}_{i=1}^n$. Luego, por 1.19.5, existen morfismos $p_i : A \longrightarrow A_i$ tales que $p_i\mu_j = \delta_{ij}$. Por otro lado, tenemos que para cada i

$$\Big(\sum_{k=1}^n \mu_k p_k\Big)\mu_i = \sum_{k=1}^n (\mu_k p_k \mu_i) = \sum_{k=1}^n \mu_k \delta_{ki} = \mu_i = 1_A \mu_i,$$

entonces, por la definición de coproducto, se tiene que $\sum_{k=1}^n \mu_k p_k = 1_A$.
($\Leftarrow$) Supongamos que tenemos los morfismos p_i y μ_i satisfaciendo las condiciones $p_i\mu_j = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^n \mu_k p_k = 1_A$. Dada una familia de morfismos $\{f_i : A_i \longrightarrow A'\}_{i=1}^n$, definimos $f = \sum_{k=1}^n f_k p_k$. Entonces, se tiene que

$$f\mu_i = \sum_{k=1}^n f_k p_k \mu_i = \sum_{k=1}^n f_k \delta_{ki} = f_i.$$

Además, si f' es otro morfismo que satisface la igualdad $f'\mu_i = f_i$ para toda i, entonces se tiene que

$$f' = f' 1_A = f' \sum_{k=1}^n \mu_k p_k = \sum_{k=1}^n f' \mu_k p_k = \sum_{k=1}^n f_k p_k = f;$$

probándose que f es única, y por lo tanto $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i=1}^n$ es un coproducto de $\{A_i\}_{i=1}^n$. $\square$

Lema 1.20.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Consideremos morfismos $\mu_i : A_i \longrightarrow A$ y $p_i : A \longrightarrow A_i$ con $i = 1, 2$. Si $p_i\mu_i = 1_{A_i}$ para $i = 1, 2$ y $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 1_A$, entonces $p_2\mu_1 = 0 = p_1\mu_2$.*

Demostración. Como $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 1_A$, entonces $p_2\mu_1 p_1 + p_2\mu_2 p_2 = p_2$. Por lo tanto $p_2\mu_1 p_1 + p_2 = p_2$. De donde como $\mathscr{A}$ es aditiva, tenemos que $p_2\mu_1 p_1 = 0$. Luego, como p_1 es un epimorfismo tenemos que $p_2\mu_1 = 0$. Análogamente obtenemos que $p_1\mu_2 = 0$. $\square$

Corolario 1.20.5 *En una categoría semiaditiva $\mathscr{A}$ todo coproducto finito es un biproducto.*

Demostración. Por 1.20.3, tenemos que, si $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i=1}^n$ es el coproducto de $\{A_i\}_{i=1}^n$, entonces existen morfismos $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i=1}^n$ tales que $p_i\mu_j = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^n \mu_k p_k = 1_A$. Ahora, sea $\{\alpha_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos. Definimos $\alpha : A' \longrightarrow A$ como

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \mu_k \alpha_k;$$

lo que implica que

$$p_i\alpha = \sum_{k=1}^{n} p_i\mu_k\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\alpha_k = \alpha_i.$$

Si $\alpha' : A' \longrightarrow A$ es tal que $p_i\alpha' = \alpha_i$, entonces

$$\alpha' = 1_A\alpha' = \big(\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k\big)\alpha' = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\alpha_k = \alpha.$$

Por lo tanto $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i=1}^n$ es un producto de $\{A_i\}_{i=1}^n$. $\square$

Observación 1.20.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría semiaditiva. Por la proposición anterior, en el caso de un conjunto finito de índices, podemos intercambiar $\prod$ por $\bigoplus$. Luego, por 1.19.7, tenemos los siguientes morfismos vistos como matrices*

$$f = (f_{jk}) : \bigoplus_{k\in K} A_k \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} B_j,$$

$$g = (g_{ij}) : \bigoplus_{j\in J} B_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} C_i,$$

donde I, J y K son conjuntos finitos. Para $h = fg$ tenemos que

$$h_{ik} = p_i^C gf\mu_k^A = p_i^C g\big(\sum_{j\in J} \mu_j^B p_j^B\big)f\mu_k^A =$$

$$= \sum_{j\in J} \big(p_i^C g\mu_j^B\big)\big(p_j^B f\mu_k^A\big) = \sum_{j\in J} g_{ij}f_{jk}.$$

Es decir, la matriz correspondiente a la composición gf es el producto de las matrices $(g_{ij})(f_{ij})$.

Proposición 1.20.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría semiaditiva, A un objeto de $\mathscr{A}$ e I un conjunto finito. Consideremos la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ con $A_i = A$ $\forall i \in I$. Si existe el coproducto ${}^IA = \bigoplus_{i\in I} A_i$, entonces la función*

$$\varphi : End_{\mathscr{A}}({}^IA) \longrightarrow Mat_{I\times I}(End_{\mathscr{A}}(A))$$

definida por $\varphi(f) = (f_{ij})_{I\times I}$ es un isomorfismo de anillos.

Demostración. Se sigue de la observación anterior y de 1.19.7. $\square$

Lema 1.20.8 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría semiaditiva con biproductos $M \bigoplus M$ $\forall M \in \mathscr{A}$, entonces la suma $\alpha + \beta$ de dos morfismos α y $\beta : A \longrightarrow B$ está dada por cualquiera de las siguientes tres composiciones:*

1. $A \xrightarrow{\Delta} A \bigoplus A \xrightarrow{\theta_1} B$,

2. $A \xrightarrow{\theta_2} B \bigoplus B \xrightarrow{\nabla} B$,

3. $A \xrightarrow{\Delta} A \bigoplus A \xrightarrow{\theta_3} B \bigoplus B \xrightarrow{\nabla} B$,

donde $\theta_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\theta_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *y* $\theta_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Demostración. Dado que $\Delta = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}$ y $\nabla = \begin{pmatrix} 1_A & 1_A \end{pmatrix}$, el resultado se sigue de la multiplicación de matrices. □

Recordamos que un monoide $(G, +)$ es cancelativo, si $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ implica que $\beta = \gamma$ para todo α, $\beta \in G$.

Proposición 1.20.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero.*

(a) Si $\mathscr{A}$ tiene biproductos de la forma $A \bigoplus A$ $\forall A \in \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A}$ admite una única estructura semiaditiva. Si además, $\mathscr{A}$ es balanceada y cada monoide $[A, B]_{\mathscr{A}}$ es cancelativo, entonces la estructura semiaditiva de $\mathscr{A}$ es aditiva.

(b) Si $\mathscr{A}$ tiene biproductos de la forma $A \bigoplus B$ $\forall A, B \in \mathscr{A}$ y además $\mathscr{A}$ es balanceada y exacta, entonces $\mathscr{A}$ admite una única estructura aditiva.

Demostración.

(a) Para α, $\beta : A \longrightarrow B$ tenemos los morfismos $A \xrightarrow{\Delta} A \bigoplus A \xrightarrow{\alpha \bigoplus \beta} B$. Definimos $\alpha + \beta := (\alpha \bigoplus \beta)\Delta$. Luego, si probamos que $([A, B]_{\mathscr{A}}, +)$ es un monoide, obtendríamos de 1.20.8, que dicha estructura de monoide en $[A, B]_{\mathscr{A}}$ es única. Definimos ahora $\alpha \times \beta$ como la composición (2) de 1.20.8. Entonces, si p_1 es la primera proyección de $A \bigoplus A$ en A se tiene que $(\alpha, 0) = \alpha p_1$ puesto que $(\alpha, 0)\mu_1 = \alpha = \alpha p_1 \mu_1$ y $(\alpha, 0)\mu_2 = 0 = \alpha p_1 \mu_2$. Luego se sigue que $\alpha + 0 = \alpha$. Similarmente $0 + \alpha = \alpha$; y dualmente, $\alpha \times 0 = \alpha$ y $0 \times \alpha = \alpha$.
Ahora, sea $\gamma : B \longrightarrow B'$, entonces tenemos que $\gamma(\alpha, \beta) = (\gamma\alpha, \gamma\beta)$; de donde se sigue la ecuación

$$\gamma(\alpha + \beta) = (\gamma\alpha) + (\gamma\beta). \tag{1.4}$$

Dualmente, si $\rho : A' \longrightarrow A$ entonces se tiene la siguiente igualdad

$$(\alpha \times \beta)\rho = (\alpha\rho) + (\beta\rho). \tag{1.5}$$

Finalmente, sean θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4 morfismos de A en B. Consideremos el morfismo $\psi = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_4 \end{pmatrix} : A \bigoplus A \longrightarrow B \bigoplus B$. Veamos que se puede obtener la siguiente cadena de igualdades

$$(\theta_1 + \theta_3) \times (\theta_2 + \theta_4) = \nabla(\psi\Delta) = (\nabla\psi)\Delta = (\theta_1 \times \theta_2) + (\theta_3 \times \theta_4). \tag{1.6}$$

En efecto, la primera igualdad es debido a la siguiente igualdad

$$\psi\Delta = \begin{pmatrix} (\theta_1 & \theta_3)\Delta \\ (\theta_2 & \theta_4)\Delta \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Para probar (1.7), basta ver que $p_1\psi\Delta = (\theta_1, \theta_3)\Delta$ y $p_2\psi\Delta = (\theta_2, \theta_4)\Delta$. Demostraremos la primera igualdad, pues la otra es análoga.
Como $p_1\psi\mu_1 = \theta_1$ y $p_1\psi\mu_2 = \theta_3$, esto implica que $p_1\psi = (\theta_1, \theta_3)$; y por lo tanto $p_1\psi\Delta = (\theta_1, \theta_3)\Delta$, de donde se sigue (1.7). Análogamente se tiene la última igualdad de (1.6).
Ahora bien, haciendo $\theta_2 = 0 = \theta_3$ en (1.6), obtenemos que $\theta_1+\theta_4 = \theta_1\times\theta_4$; y entonces las operaciones $+$ y $\times$ son iguales. Por otro lado, haciendo $\theta_1 = \theta_4 = 0$ en (1.6), obtenemos que $\theta_3 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_3$. Finalmente, haciendo $\theta_2 = 0$ en (1.6), obtenemos que

$$(\theta_1 + \theta_3) + \theta_4 = \theta_1 + (\theta_3 + \theta_4).$$

Por lo tanto $([A, B]_{\mathscr{A}}, +)$ es un monoide abeliano; y la bilinealidad de la composición de morfismos se sigue de (1.4) y (1.5) pues $+ = \times$. Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría balanceada y que cada monoide $([A, B]_{\mathscr{A}}, +)$ es cancelativo. Veamos que $[A, B]_{\mathscr{A}}$ tiene inversos aditivos. En efecto, consideremos el morfismo

$$\theta : A \bigoplus A \longrightarrow A \bigoplus A$$

con $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sean α, $\alpha' : A \bigoplus A \longrightarrow B$ tales que $\alpha\theta = \alpha'\theta$. Expresando a α y α' como matrices y usando la propiedad cancelativa del monoide $[A \bigoplus A, B]_{\mathscr{A}}$ tenemos que $\alpha = \alpha'$. Luego θ es un epimorfismo; y dualmente θ es un monomorfismo. Usando ahora que $\mathscr{A}$ es balanceada, obtenemos que θ es un isomorfismo. Escribiendo $\theta^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relación $\theta^{-1}\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nos dá que $1 + b = 0$. Entonces para cualquier morfismo $x : A \longrightarrow B$ se tiene que

$$x + xb = x1 + xb = x(1 + b) = x0 = 0.$$

Probándose que $[A, B]_{\mathscr{A}}$ es un grupo abeliano.

(b) Por (a) tenemos que $\mathscr{A}$ admite una única estructura semiaditiva. Veamos que ésta es aditiva. En efecto, sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo; y como $A \bigoplus B$ es un biproducto, tenemos el morfismo $\theta = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix} : A \bigoplus B \longrightarrow A \bigoplus B$. Sea $f : X \longrightarrow A \bigoplus B$ tal que $\theta f = 0$. Veamos que $f = 0$. Dado que $f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con $a : X \longrightarrow A$ y $b : X \longrightarrow B$, se tiene que

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \alpha a + b \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $a = 0 = b$, y entonces $f = 0$. Lo anterior, implica que $Ker(\theta)$ existe y es igual a cero. Análogamente $Coker(\theta) = 0$; y por ser $\mathscr{A}$ balanceada, θ es un isomorfismo. Sea $\theta^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; luego como $\theta\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$ se tiene que $\alpha + c = 0$, probándose que $c : A \longrightarrow B$ es el inverso aditivo de α.

□

Definición 1.20.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría cualquiera y $\theta : A \longrightarrow A$ un morfismo. Decimos que θ es **idempotente** si $\theta^2 = \theta$.*

Observación 1.20.11 *Si $\mathscr{A}$ es aditiva y $\theta : A \longrightarrow A$ es un idempotente entonces $1_A - \theta$ también lo es.*

Proposición 1.20.12 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva.*

(a) Si $\mu_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $p_1 : A \longrightarrow A_1$ son tales que $p_1\mu_1 = 1_{A_1}$, entonces $\theta := \mu_1 p_1$ es un idempotente y $Ker(\ A \xrightarrow{1_A - \theta} A\ ) = \ A_1 \xrightarrow{\mu_1} A$.

(b) Si $\theta : A \longrightarrow A$ es un idempotente y $Ker(\ A \xrightarrow{1_A - \theta} A\ ) = \ A_1 \xrightarrow{\mu_1} A$, $Ker(\ A \xrightarrow{\theta} A\ ) = \ A_2 \xrightarrow{\mu_2} A$, entonces $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2.

Demostración.

(a) Si $p_1\mu_1 = 1_{A_1}$, entonces se tiene la siguiente igualdad

$$\theta\theta = \mu_1 p_1 \mu_1 p_1 = \mu_1 1_{A_1} p_1 = \mu_1 p_1 = \theta.$$

Sea $\alpha : X \longrightarrow A$ tal que $(1_A - \theta)\alpha = 0$, entonces tenemos que $\mu_1(p_1\alpha) = \theta\alpha = \alpha$. Puesto que μ_1 es un monomorfismo y $(1_A - \theta)\mu_1 = \mu_1 - \mu_1 p_1 \mu_1 = 0$ concluimos que μ_1 es el kernel de $1_A - \theta$.

(b) Ahora supongamos que θ es idempotente y que μ_1 y μ_2 son kerneles de $1_A - \theta$ y θ respectivamente. Puesto que $(1_A - \theta)\theta = 0$, existe un único morfismo $p_1 : A \longrightarrow A_1$ tal que $\mu_1 p_1 = \theta$. Entonces, tenemos que $\mu_1 p_1 \mu_1 = \theta\mu_1 = \mu_1$; y por lo tanto $p_1\mu_1 = 1_{A_1}$ puesto que μ_1 es un monomorfismo. De igual manera se tiene $p_2 : A \longrightarrow A_2$ tal que $\mu_2 p_2 = 1_A - \theta$ y $p_2\mu_2 = 1_{A_2}$. Luego, como $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = \theta + (1_A - \theta) = 1_A$ se sigue, por 1.20.4 y 1.20.3, que $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2.

□

1.21. Categorías exactas y aditivas

Definición 1.21.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta, decimos que una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{1.8}$$

se parte *si β es un split-epi.*

Proposición 1.21.2 *Si en una categoría exacta y aditiva $\mathscr{A}$, la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ se parte, entonces existen $\gamma : C \longrightarrow B$ y $\delta : B \longrightarrow A$ tales que $B = A \bigoplus C$ con inclusiones α, γ y proyecciones β, δ.*

Demostración. Como la sucesión anterior se parte, existe $\gamma : C \longrightarrow B$ tal que $\beta\gamma = 1_C$. Entonces, por 1.20.12, se tiene que $\theta = \gamma\beta$ es idempotente y $\gamma = Ker(1_B - \theta)$. Además, como la sucesión anterior es exacta, tenemos que $\alpha = Ker(\beta)$; pero como γ es un monomorfismo, concluimos que $Ker(\beta) = Ker(\gamma\beta) = Ker(\theta)$. Por lo tanto, por 1.20.12, se tiene que $B = A \bigoplus C$ con inclusiones α y γ. Sean $\delta : B \longrightarrow A$ y $p : B \longrightarrow C$ las proyecciones del coproducto. Dado que $p\alpha = 0 = \beta\alpha$ y $p\gamma = 1_C = \beta\gamma$, obtenemos que $p = \beta$. $\square$

Corolario 1.21.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta y aditiva. Si*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C,$$

$$A \xleftarrow{\rho} B \xleftarrow{\gamma} C$$

son sucesiones exactas tales que $\rho\alpha = 1_A$ y $\beta\gamma = 1_C$, entonces $B = A \bigoplus C$ con inclusiones α, γ y proyecciones β, ρ.

Demostración. Como β es un split-epi, en particular es un epimorfismo. Similarmente, α es un monomorfismo; y por lo tanto, la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es exacta. Luego, por 1.21.2, α y γ son las inclusiones en el coproducto $B = A \bigoplus C$ y β es una de las proyecciones. Las relaciones $\rho\alpha = 1_A$ y $\rho\gamma = 0$ muestran que ρ es la otra proyección, puesto que la otra proyección tendría que cumplir con estas condiciones, pero sólo hay una ya que ambas salen del coproducto. $\square$

Proposición 1.21.4 *Sean $\mu_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\mu_2 : A_2 \longrightarrow A$ dos monomorfismos en una categoría exacta $\mathscr{A}$. Si $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2, entonces $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$. Por otra parte, si $\mathscr{A}$ es aditiva, $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$, entonces $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2.*

Demostración. Supongamos que $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1, μ_2 y proyecciones p_1, p_2. Por el dual de 1.19.3, se tiene que p_1 es el cokernel de μ_2. Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_1 \bigoplus A_2 \xrightarrow{p_1} A_1 \longrightarrow 0\ .$$

Entonces $A_1 \simeq A_1 \bigoplus A_2/A_2$; y por 1.18.6, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu_2"] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A_1 \bigoplus A_2 \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & A_1 \bigoplus A_2/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & A_1 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & A_1 \bigoplus A_2/A_1 \cup A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\beta_1\gamma_2 = p_1\mu_1 = 1_{A_1}$, se tiene que γ_2 es un monomorfismo; pero γ_2 ya es un epimorfismo y como $\mathscr{A}$ es exacta, en particular es balanceada, por lo que concluimos que γ_2 es un isomorfismo. De donde $A_1 \cap A_2 = 0$. Por otro lado, como $\beta_1\gamma_2 = 1_{A_1}$ y γ_2 es un isomorfismo, obtenemos que β_1 es un isomorfismo; lo cual implica $A_1 \bigoplus A_2/A_1 \cup A_2 = 0$. Esto es, la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow A_1 \cup A_2 \longrightarrow A_1 \bigoplus A_2 \longrightarrow 0$$

es exacta, probándose que $A_1 \cup A_2 = A$.

Ahora supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría exacta y aditiva, $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$. Pero como $A_1 \cup A_2 = A$, entonces $A/A_1 \cup A_2 = 0$; luego por 1.18.6, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu_2"] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\alpha_1"] & A/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & A/A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\alpha_1\mu_1 : A_1 \longrightarrow A/A_2$ es un isomorfismo ya que γ_2 y β_1 lo son. Por lo tanto, existe $\theta : A/A_2 \longrightarrow A_1$ tal que $(\alpha_1\mu_1)\theta = \alpha_1(\mu_1\theta) = 1_{A/A_2}$; de donde por 1.20.12, se tiene que $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2. $\square$

Proposición 1.21.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta y aditiva. Si la siguiente sucesión*

$$\eta : \qquad A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} A_3$$

es tal que $d_2 d_1 = 0$ y existen morfismos $s_1 : A_2 \longrightarrow A_1$ y $s_2 : A_3 \longrightarrow A_2$ tales que $d_1 s_1 + s_2 d_2 = 1_{A_2}$, entonces η es exacta.

Demostración. Sea $A_1 \xrightarrow{p} I \xrightarrow{\mu} A_2$ la factorización de d_1 a través de su imagen. Entonces, tenemos que $0 = d_2 d_1 = d_2 \mu p$ y por lo tanto $d_2 \mu = 0$ ya que p es un epimorfismo. Sea $\alpha : A \longrightarrow A_2$ tal que $d_2 \alpha = 0$. Usando que $d_1 s_1 + s_2 d_2 = 1_{A_2}$, obtenemos que $\alpha = (d_1 s_1 + s_2 d_2)\alpha = \mu p s_1 \alpha$. Esto es, α se factoriza a través de μ y dicha factorización es única pues μ es un monomorfismo. Esto muestra que μ es el kernel de d_2 y por lo tanto η es exacta. $\square$

1.22. Categorías Abelianas

Definición 1.22.1 *Una categoría $\mathscr{A}$ es **abeliana**, si es exacta, aditiva y con productos finitos.*

Teorema 1.22.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes para una categoría $\mathscr{A}$.*

(1) $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana.

(2) $\mathscr{A}$ tiene kerneles, cokerneles, productos finitos, coproductos finitos, es normal y conormal.

(3) $\mathscr{A}$ tiene pushouts, pullbacks, es normal y conormal.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Esta implicación es inmediata de la definición de categoría exacta y de que el producto y coproducto finito son isomorfos en una categoría aditiva.
(2) $\Rightarrow$ (3) Por 1.16.2, $\mathscr{A}$ tiene interseciones finitas; y por lo tanto, por 1.19.13, se tiene que $\mathscr{A}$ tiene pullbacks. Dualmente, $\mathscr{A}$ tiene pushouts.
(3) $\Rightarrow$ (1) Por 1.19.13 y su dual, $\mathscr{A}$ tiene productos finitos, coproductos finitos, equalizadores y coequalizadores. Entonces, por 1.16.6, $\mathscr{A}$ es exacta y en particular balanceada por 1.16.5. Ahora veamos que $\mathscr{A}$ es aditiva; para hacer esto, es suficiente mostrar por 1.20.9, que el morfismo $\delta : A \bigoplus B \longrightarrow A \prod B$ es un isomorfismo para todo par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$. Para esto, completamos δ a una sucesión exacta, es decir, sean K y K' definidos por la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\delta_1} A \bigoplus B \xrightarrow{\delta} A \prod B \xrightarrow{\delta_2} K' \longrightarrow 0.$$

Sean μ_1, μ_2, p_1, p_2 las inclusiones y las proyecciones del coproducto $A \bigoplus B$; y μ_1', μ_2', p_1', p_2' las inclusiones y las proyecciones del producto $A \prod B$. Por lo tanto, dado que $p_1 \mu_1 = 1_A$, $p_1 \mu_2 = 0$, $p_1' \delta \mu_1 = 1_A$ y $p_1' \delta \mu_2 = 0$, entonces por la propiedad del coproducto se tiene que $p_1 = p_1' \delta$. Luego $p_1 \delta_1 = p_1' \delta \delta_1 = 0$; y como μ_2 es el kernel de p_1, se tiene que existe un único morfismo $\eta : K \longrightarrow B$ tal que $\delta_1 = \mu_2\eta$. Pero como δ_1 es un monomorfismo entonces η también lo es; de donde $\eta : K \longrightarrow B$ es un sub-objeto de B en $A \bigoplus B$. Similarmente se tiene que K es un sub-objeto de A; y por lo tanto $K \subset A \cap B$ pero $A \cap B = 0$, de donde concluimos que $K = 0$. Dualmente, $K' = 0$. Por lo tanto, por 1.17.5, δ es un isomorfismo. $\square$

Proposición 1.22.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A \end{tikzcd}$$

es un pullback y α_1 es un epimorfismo, entonces β_2 también lo es.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & \\ & & A_1 \arrow[d, "\mu_1"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & A_1 \prod A_2 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "p_2"] & A \\ & & A_2 \arrow[d] & \\ & & 0 & \end{tikzcd}$$

con $\psi = \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2$, donde μ_1 es la primera inclusión en el producto $A_1 \prod A_2$ y p_2 es la segunda proyección del producto $A_1 \prod A_2$. La exactitud de la fila en el diagrama se sigue del hecho que P es el equalizador de $\alpha_1 p_1$ y $\alpha_2 p_2$ (esto por 1.19.11); y por lo tanto μ es el kernel de ψ. Además, como los triangulos del diagrama son conmutativos y α_1 es un epimorfismo, entonces ψ es un epimorfismo. Luego por 1.18.8, se tiene que β_2 es un epimorfismo. $\square$

Corolario 1.22.4 *En una categoría abeliana $\mathscr{A}$, una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

y un morfismo $\gamma : C' \longrightarrow C$ pueden ser completados al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde la fila superior es exacta y el cuadrado derecho es un pullback.

Demostración. Se sigue inmediatamente de 1.14.7 y de 1.22.3. □

Capítulo 2

Diagramas y funtores

2.1. Diagramas

Definición 2.1.1 *Un **diagrama** ó **carcaj** Σ es un triple (Σ_0, Σ_1, d), donde Σ_0 (resp. Σ_1) es un conjunto cuyos elementos son llamados vértices (resp. flechas) y $d : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_0 \times \Sigma_0$ es una función que asocia a cada flecha $m \in \Sigma_1$ el par $(o(m), t(m))$ llamados origen $o(m)$ y final $t(m)$ de α.*

Definición 2.1.2 *Dados un diagrama Σ y una categoría $\mathscr{A}$, una **representación** D de $\mathscr{A}$ sobre Σ es una función $D : \Sigma \longrightarrow \mathscr{A}$ que asocia a cada $i \in \Sigma_0$ un objeto D_i de $\mathscr{A}$, y cada flecha $m : i \longrightarrow j$ de Σ_1 un morfismo $D_m : D_i \longrightarrow D_j$ de $\mathscr{A}$. Denotaremos por $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ a la clase de todas las representaciones de $\mathscr{A}$ sobre Σ.*

Observación 2.1.3 *(1) $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ es una categoría cuyos objetos son las representaciones de $\mathscr{A}$ sobre Σ, y un morfismo $\alpha : D \longrightarrow D'$ entre representaciones es una familia $\{\alpha_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i\in\Sigma_0}$ de morfismos en $\mathscr{A}$ tales que: para cada flecha $m : i \longrightarrow j$ en Σ_1 el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "D_m"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & D_j \arrow[d, "\alpha_j"] \\ D'_i \arrow[r, "D'_m"'] & D'_j. \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos $D \xrightarrow{\alpha} D' \xrightarrow{\beta} D''$ se define como la familia $\{\beta_i\alpha_i : D_i \longrightarrow D''_i\}_{i\in\Sigma_0}$.

*(2) Con el diagrama Σ se puede construir la **categoría de caminos** $\mathscr{P}\Sigma$ de Σ como sigue (¡ésta es la forma de pensar a Σ como una categoría!). Los objetos de $\mathscr{P}\Sigma$ son los vértices Σ_0 y los morfismos de $\mathscr{P}\Sigma$ son todos los caminos posibles de Σ. Los caminos de Σ son de dos tipos:*

(2a) *los triviales ó de longitud nula son de la forma* $e_i = (i\|i)$ *para* $i \in \Sigma_0$, *y se identifican con el vértice* i.

(b) *de longitud* n *con* $n \geq 1$. *Estos son de la forma* $m = (j \mid m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1 \mid i)$ *donde*

$$i = o(m_1) \xrightarrow{m_1} o(m_2) \xrightarrow{m_2} \cdots \longrightarrow t(m_{n-1}) = o(m_n) \xrightarrow{m_n} j.$$

Observemos que la longitud de un camino en Σ *es exactamente el número de flechas que lo componen. Por ejemplo, el camino trivial* $e_i = (i\|i)$ *del vértice* i *al* i *tiene longitud cero (¡no hay flechas, es solo un punto!), y el* m *anterior va del vértice* i *(el origen de* m*) al* j *(el final de* m*). La composición de dos caminos se hace por concatenación cuando esto es posible. Es decir, si* $m = (j \mid m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1 \mid i)$ *y* $m' = (j' \mid m'_l, m'_{l-1}, \ldots, m'_1 \mid i')$ *son caminos de* Σ, *la composición* $m'm$ *está definida sólo si* $j = i'$. *Si éste es el caso,* $m'm = (j' \mid m'_l, \ldots, m'_1, m_n, \ldots, m_1 \mid i)$ *es el camino del vértice* i *al* j' *de longitud* $n + l$. *La composición anterior se puede ver diagramaticamente como sigue*

$$i \xrightarrow{m_1} \cdots \xrightarrow{m_n} j = i' \xrightarrow{m'_1} \cdots \xrightarrow{m'_l} j' .$$

Es claro que $\Sigma \subset \mathscr{P}\Sigma$ *y que el camino trivial* $e_i = (i\|i)$ *es la identidad del vértice* i, *esto es* $e_i = 1_i \ \forall i \in \Sigma_0$.

La categoría de representaciones se puede interpretar, via una equivalencia, como una categoría de funtores (ver sección 2.11). En lo que sigue, daremos más detalles de dicha conexión.

Proposición 2.1.4 *Sea* Σ *un diagrama y* $\mathscr{A}$ *una categoría. Entonces, la restricción* $\varphi : [\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}] \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ *definida por* $\varphi(F) = F\mid_\Sigma \ \forall F \in [\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}]$ *es un isomorfismo de categorías, donde* $[\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}]$ *es la categoría de funtores de* $\mathscr{P}\Sigma$ *en* $\mathscr{A}$.

Demostración. Definamos la extensión $\psi : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A}) \longrightarrow [\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}]$ como sigue. Dado $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, definimos D en los caminos $e_i = (i\|i)$ de longitud cero como $D(e_i) := 1_{D_i}$; y extendemos D de las flechas de Σ_1 a todos los caminos de Σ. Si $m = (j \mid m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1 \mid i) \in Hom_{\mathscr{P}\Sigma}(i, j)$, definimos $\psi(D)(m) = D(m_n)D(m_{n-1}) \ldots D(m_1)$. Ahora bien, dado un morfismo $\alpha : D \longrightarrow D'$ de representaciones, usando la conmutatividad de cada cuadrado en la observación 2.1.3(1), tenemos que $\alpha : \psi(D) \longrightarrow \psi(D')$ es una transformación natural. Finalmente, es cuestión de rutina ver que $\psi\varphi = 1_{[\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}]}$ y $\varphi\psi = 1_{\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})}$. $\square$

Definición 2.1.5 *Sea* Σ *un diagrama. Diremos que* $\sim$ *es una* ***relación de conmutatividad*** *en* Σ, *si* $\sim$ *es una relación de equivalencia en la clase de morfismos de* $\mathscr{P}\Sigma$ *compatible con* $\mathscr{P}\Sigma$ *(ver capítulo 1). Esto es,* $\sim$ *es una relación de equivalencia en los caminos de* Σ *tal que* *(a) si c y c' son caminos en Σ y $c \sim c'$, entonces el origen de c y c' coinciden y también tienen el mismo final,*

(b) si c, c', d y d' son caminos en Σ con $c \sim c'$ y $d \sim d'$, entonces $cd \sim c'd'$ cada vez que dicha composición esté definida.

Definición 2.1.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría, Σ un diagrama y $\sim$ una relación de conmutatividad en Σ. Dada la extensión $\psi : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A}) \longrightarrow [\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}]$, construida en la prueba de 2.1.4, definimos a $Rep_{\Sigma/\sim}(\mathscr{A})$ como la subcategoría plena de $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ cuyos objetos son los $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ tales que: $\forall m, m'$ caminos en Σ, si $m \sim m'$ entonces $\psi(D)(m) = \psi(D)(m')$. Por otro lado, la proyección canónica $\pi : \mathscr{P}\Sigma \longrightarrow \mathscr{P}\Sigma/\sim$ induce un funtor $\Phi_\pi : [\mathscr{P}\Sigma/\sim, \mathscr{A}] \longrightarrow [\mathscr{P}\Sigma, \mathscr{A}]$ definido por $\Phi_\pi(F) = F\pi \ \forall F \in [\mathscr{P}\Sigma/\sim, \mathscr{A}]$ que es fiel y pleno.*

No es difícil probar la siguiente proposición.

Proposición 2.1.7 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría, Σ es un diagrama y $\sim$ una relación de conmutatividad en Σ, entonces*

$$\varphi\Phi_\pi : [\mathscr{P}\Sigma/\sim, \mathscr{A}] \longrightarrow Rep_{\Sigma/\sim}(\mathscr{A})$$

es una equivalencia de categorías, donde φ es el funtor de 2.1.4 y Φ_π es el de 2.1.6.

La relación de conmutatividad más pequeña para Σ es la que identifica dos caminos de Σ si y sólo llegan a ser los mismos después de quitar las flechas identidades de sus composiciones. En este caso, se tiene que $[\Sigma, \mathscr{A}] = [\Sigma/\sim, \mathscr{A}]$. La relación de conmutatividad más grande para Σ es la cual identifica cualesquiera dos caminos en Σ que tienen el mismo origen y el mismo final; en este caso, los objetos de $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{A})$ son llamados **diagramas conmutativos** en $\mathscr{A}$ sobre Σ.

2.2. Límites

Definición 2.2.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y Σ un diagrama. Definamos el funtor*

$$\mathbb{I} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$$

como sigue:

(a) para cada $X \in \mathscr{A}$, $\mathbb{I}(X) := \mathbb{I}_X : \Sigma \longrightarrow \mathscr{A}$ está definido para cada $i \in \Sigma_0$ por $\mathbb{I}_X(i) = X$, y si $m : i \longrightarrow j$ es una flecha en Σ_1 definimos $\mathbb{I}_X(m) = 1_X$,

(b) si $\alpha : X \longrightarrow Y$ es un mofismo de $\mathscr{A}$, $\mathbb{I}(\alpha) := \mathbb{I}_\alpha : \mathbb{I}_X \longrightarrow \mathbb{I}_Y$ es tal que $\mathbb{I}(\alpha)_i = \alpha \ \forall i \in \Sigma_0$.

Es fácil ver que $\mathbb{I} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ es un funtor fiel y pleno; y es la manera de ver al objeto $A \in \mathscr{A}$ como una representación (llamada representación trivial) $\mathbb{I}_A$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$.

Definición 2.2.2 *Sea $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, una familia $f = \{f_i : X \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$ de morfismos en $\mathscr{A}$ es compatible para D si $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Esto es, para todo $m \in \Sigma_1$ el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dd, "D(m)"] \\
X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & D_j .
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2.3 *Un morfismo $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ se dice que es un **límite** para D, si para cualquier otro morfismo $\alpha : \mathbb{I}_Y \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ existe un único morfismo $\mathbb{I}_\beta : \mathbb{I}_Y \longrightarrow \mathbb{I}_X$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ tal que $\alpha = f\mathbb{I}_\beta$. Esto es, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddr, "f_j"'] & & Y \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[ddl, "\alpha_j"] \\
 & D_i \arrow[d, "D(m)"] & \\
 & D_j . &
\end{tikzcd}$$

Observación 2.2.4 *Si $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ y $f' : \mathbb{I}_Y \longrightarrow D$ son límites para D, entonces el morfimo $\mathbb{I}_\beta : \mathbb{I}_Y \longrightarrow \mathbb{I}_X$ tal que $f' = f\mathbb{I}_\beta$, es un isomorfismo. Esto es, el límite, si existe, es único salvo isomorfismos. Dada $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, denotaremos por $f : \lim D \longrightarrow D$ a una elección de un límite para D. Si por alguna razón necesitamos del diagrama Σ, escribiremos $\lim_{i\in\Sigma_0} D_i$ en lugar de $\lim D$.*

Proposición 2.2.5 *Si $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ es un límite para D y $\mathbb{I}_\theta : \mathbb{I}_Y \longrightarrow \mathbb{I}_X$ es un isomorfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ (es decir, $\theta : Y \longrightarrow X$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$), entonces $f\mathbb{I}_\theta : \mathbb{I}_Y \longrightarrow D$ es un límite para D.*

Demostración. Sea $f' : \mathbb{I}_Z \longrightarrow D$ un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Entonces, existe $\mathbb{I}_\alpha : \mathbb{I}_Z \longrightarrow \mathbb{I}_X$ tal que $f\mathbb{I}_\alpha = f'$. Luego, $\theta^{-1}\alpha : Z \longrightarrow Y$ es el único morfismo en $\mathscr{A}$ tal que $f\mathbb{I}_\theta(\mathbb{I}_{\theta^{-1}\alpha}) = f'$. $\square$

Proposición 2.2.6 *Sea $\theta : D \longrightarrow D'$ un isomorfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ (es decir, para cada i, $\theta_i : D_i \longrightarrow D'_i$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$). Si $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ es un límite para D, entonces $\theta f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D'$ es un límite para D'.*

Demostración. Análoga a la anterior. $\square$

Definición 2.2.7 *Una categoría $\mathscr{A}$ es Σ-**completa** si toda $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ tiene límite. Si $\mathscr{A}$ es Σ-completa para todo diagrama Σ, $\mathscr{A}$ será llamada **completa**. Si $\mathscr{A}$ es Σ-completa para todos los diagramas finitos Σ, $\mathscr{A}$ se llamará **finitamente completa**.*

Proposición 2.2.8 *Si $\mathscr{A}$ es finitamente completa entonces $\mathscr{A}$ tiene pullbacks. Si $\mathscr{A}$ es completa entonces $\mathscr{A}$ tiene intersecciones y productos.*

Demostración. Consideremos el diagrama $\Sigma = \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$. El límite de la siguiente representación D sobre Σ

$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

es el pullback. Por otro lado, la intersección de una familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ de sub-objetos de A está dada por el límite de la siguiente representación D sobre un diagrama Σ que se construye como sigue. $\Sigma_0 = I \cup \{p\}$, donde p es un elemento que no está en I y hay exactamente una flecha de i a p para cada $i \in I$. La representación D es: $D_i = A_i$, $D_p = A$, y si m es la flecha que va de i a p entonces $D(m)$ es la inclusión de $\mu_i : A_i \longrightarrow A$. Finalmente, el producto de una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$ es el límite de la representación D sobre el diagrama cuyo conjunto de vértices es el conjunto I y cuyo conjunto de flechas es el vacío, definiendo $D_i = A_i$ para toda $i \in I$. $\square$

Sea D una representación en $\mathscr{A}$ sobre Σ. En la busqueda de un límite para D, podemos suponer que Σ tiene la siguiente propiedad: si i es cualquier vértice de Σ, entonces existe una flecha $m \in \Sigma_1$ tal que $o(m) = i$, es decir, Σ no tiene **pozos**. En efecto, supongamos que Σ tiene un pozo en $i \in \Sigma_0$. Consideremos el nuevo diagrama Σ', donde $\Sigma'_0 = \Sigma_0 \cup \{v\}$ con $v \notin \Sigma_0$ y $\Sigma'_1 = \Sigma_1 \cup \{\ i \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} v\ \}$. Es claro que en Σ' el vértice i no es un pozo y además no agregamos nuevos pozos en Σ'. Extendemos $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ a $D' \in \mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathscr{A})$ como sigue: $D'_v = D_i$, $D'_\alpha = 1_{D_i} = D'_\beta$. Claramente, si $\alpha : \mathbb{I}_X \longrightarrow D'$ es un límite para D', la restricción $\alpha\mid_\Sigma : \mathbb{I}_X\mid_\Sigma \longrightarrow D$ es un límite para D.

Supongamos ahora que Σ no tiene pozos y que $\mathscr{A}$ tiene productos; dada una representación $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, definamos $P = \prod_{i\in\Sigma_0} D_i$, y sea $p_i : P \longrightarrow D_i$ la i-ésima proyección. También para $m \in \Sigma_1$ sea $q_m : P^{\Sigma_1} \longrightarrow P$ la m-ésima proyección. Pero a P^{Σ_1} lo podemos ver como el producto de la siguiente familia de productos $\{D_i^{\Sigma_1}\}_{i\in\Sigma_0}$; por lo tanto las proyecciones de P^{Σ_1} a los D_i están dadas por la siguiente familia $\{p_i q_m : P^{\Sigma_1} \longrightarrow D_i \mid i \in \Sigma_0, m \in \Sigma_1\}$. Consideremos el siguiente morfismo en $\mathscr{A}$

$$\mu : P \longrightarrow P^{\Sigma_1}$$

definido como sigue. Para cada flecha $m : j \longrightarrow k$ de Σ, μ satisface las condiciones:

(a) $p_k q_m \mu = D(m) p_j$, y

(b) $p_i q_m \mu = p_i$ para $i \neq k$.

Teorema 2.2.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con productos, Σ un diagrama sin pozos, $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ y $\mu : P \longrightarrow P^{\Sigma_1}$ el morfismo definido arriba. Entonces μ es un monomorfismo. Además, si $\Delta : P \longrightarrow P^{\Sigma_1}$ es el morfismo diagonal y el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, "\bar{\Delta}"'] & P \arrow[d, "\Delta"] \\ P \arrow[r, "\mu"] & P^{\Sigma_1} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

es un pullback (intersección), entonces $p\mathbb{I}_{\bar{\Delta}} : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un límite para D, donde $p : \mathbb{I}_P \longrightarrow D$ está dado por la familia de proyecciones $\{p_i : P \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$. Recíprocamente, si $\alpha : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un límite para D y $\gamma : L \longrightarrow P$ es el morfismo inducido en el producto $P = \prod_{i\in\Sigma_0} D_i$ por la familia $\{\alpha_i : L \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$, entonces reemplazando a $\bar{\Delta}$ y $\bar{\mu}$ por γ en (2.1) se obtiene un diagrama de pullback.

Demostración. Veamos primero que μ es un monomorfismo. Sean $\alpha, \beta : X \longrightarrow P$ tales que $\mu\alpha = \mu\beta$. Sea $i \in \Sigma_0$ y $m \in \Sigma_1$ una flecha que no termina en i. Entonces, por definición de μ, tenemos las siguientes igualdades

$$p_i\alpha = p_i q_m \mu\alpha = p_i q_m \mu\beta = p_i\beta.$$

Por lo tanto, $p_i\alpha = p_i\beta$ $\forall i \in \Sigma_0$ y de la unicidad de morfismos en el producto $P = \prod_{i\in\Sigma_0} D_i$ tenemos que $\alpha = \beta$. Luego μ es un monomorfismo.
Ahora demostraremos que $\bar{\Delta} = \bar{\mu}$. Otra vez, para cada $i \in \Sigma_0$ escogemos una flecha $m \in \Sigma_1$ que no termine en i. Entonces, se tienen las siguientes igualdades

$$p_i\bar{\Delta} = p_i q_m \mu\bar{\Delta} = p_i q_m \Delta\bar{\mu} = p_i 1_P \bar{\mu} = p_i\bar{\mu}.$$

Por lo tanto $\bar{\Delta} = \bar{\mu}$. Ahora veamos que $p\mathbb{I}_{\bar{\Delta}} : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$, con $p : \mathbb{I}_P \longrightarrow D$ dado por $\{p_i : P \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$, es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Consideremos una flecha $m : j \longrightarrow k$ en Σ_1. Entonces, tenemos los siguientes igualdades

$$D(m)p_j\bar{\Delta} = p_k q_m \mu\bar{\Delta} = p_k q_m \Delta\bar{\mu} = p_k 1_P \bar{\mu} = p_k\bar{\mu} = p_k\bar{\Delta}.$$

Por lo tanto $p\mathbb{I}_{\bar{\Delta}} : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$.
Finalmente, veamos que el morfismo anterior es un límite para D. Sea $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ un morfismo de representaciones. Luego, por la propiedad del producto, tenemos un morfismos $\bar{f} : X \longrightarrow P$ tal $f_i = p_i\bar{f}$. Ahora demostraremos que $\Delta\bar{f} = \mu\bar{f} : X \longrightarrow P^{\Sigma_1}$. En efecto, sea $m : j \longrightarrow k$ en Σ_1. Entonces, para $i \neq k$ tenemos que

$$p_i q_m \mu\bar{f} = p_i\bar{f} = p_i 1_P \bar{f} = p_i q_m \Delta\bar{f},$$

y para $i = k$, usaremos que $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ para obtener las igualdades

$$p_k q_m \mu \bar{f} = D(m) p_j \bar{f} = D(m) f_j = f_k = p_k \bar{f} = p_k 1_P \bar{f} = p_k q_m \Delta \bar{f}.$$

Por lo tanto $\Delta f = \mu f$; luego por la propiedad de pullback, existe un único morfismo f' que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "f'"] \arrow[drr, bend left, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{f}"'] & & \\
& L \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, "\bar{\Delta}"'] & P \arrow[d, "\Delta"] \\
& P \arrow[r, "\mu"'] & P^{\Sigma_1}.
\end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{\Delta} f' = \bar{f}$, es decir, $p_i \bar{\Delta} f' = f_i$ para toda i. En particular, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "p_i \bar{\Delta}"] \arrow[ddr, "p_j \bar{\Delta}"'] & & X \arrow[ll, "f'"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& D_i \arrow[d] & \\
& D_j, &
\end{tikzcd}$$

probándose que $p\mathbb{I}_{\bar{\Delta}} : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un límite de D.
Recíprocamente, supongamos que $\alpha : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un límite para D. Reemplazando $\bar{\Delta}$ y $\bar{\mu}$ en el diagrama (2.1) por el morfismo $\gamma : L \longrightarrow P$ el cual es inducido por la familia $\{\alpha_i : L \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$ en el producto, es decir, γ es tal que $\alpha_i = p_i \gamma\ \forall i \in \Sigma_0$. Entonces, como se hizo anteriormente, se demuestra que $\Delta\gamma = \mu\gamma$. Ahora sean $f : X \longrightarrow P$ y $g : X \longrightarrow P$ tales que $\mu f = \Delta g$. También reemplazando $\bar{\Delta}$ y $\bar{\mu}$ por f y g en lo hecho anteriormente para demostrar que $\bar{\Delta} = \bar{\mu}$, se obtiene que $f = g$ y que la familia $\{p_i f : X \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$ induce un morfismo $\mathbb{I}_X \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Por lo tanto, existe un único morfismo $f' : X \longrightarrow L$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, "f'"'] \arrow[dl, "p_i f"'] \arrow[ddl, "p_j f"] \\
& D_i \arrow[d] & \\
& D_j. &
\end{tikzcd}$$

Es decir $p_i\gamma f' = \alpha_i f' = p_i f$; por lo tanto $\gamma f' = f$, y entonces el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma"'] & P \arrow[d, "\Delta"] \\
P \arrow[r, "\mu"'] & P^{\Sigma_1}
\end{tikzcd}$$

es un pullback. □

Corolario 2.2.10 *Una categoría $\mathscr{A}$ es (resp. finitamente) completa si y sólo si tiene intersecciones finitas y productos (resp. finitos).*

Demostración. Es consecuencia de 2.2.9 y de la discusión previa a dicho teorema. □

Corolario 2.2.11 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva ó normal. Entonces, $\mathscr{A}$ es (resp. finitamente) completa si y sólo si tiene kerneles y productos (resp. finitos).*

Demostración. Si $\mathscr{A}$ es completa entonces tiene kerneles y productos, ya que son casos especiales de límites. Recíprocamente, supongamos que que $\mathscr{A}$ es aditiva y tiene kerneles y productos; entonces, $\mathscr{A}$ tiene equalizadores y por lo tanto, por 1.19.13(2), $\mathscr{A}$ tiene intersecciones finitas. De igual manera, en el caso en que $\mathscr{A}$ sea normal y con kerneles y productos, se tiene por 1.16.2, que $\mathscr{A}$ tiene intersecciones finitas. Luego, se sigue de 2.2.10, que $\mathscr{A}$ es completa. □

Definición 2.2.12 *Sea $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, decimos que $f = \{f_i : D_i \longrightarrow X\}_{i\in\Sigma_0}$ es una familia cocompatible para D si $f : D \longrightarrow \mathbb{I}_X$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Esto es, para todo $m \in \Sigma_1$ el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
& D_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dd, "D(m)"] \\
X & \\
& D_j. \arrow[ul, "f_j"]
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2.13 *Un morfismo $f : D \longrightarrow \mathbb{I}_X$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ se dice que es un* ***colímite*** *para D, si para cualquier otro morfismo $\alpha : D \longrightarrow \mathbb{I}_Y$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ existe un único morfismo $\mathbb{I}_\beta : \mathbb{I}_X \longrightarrow \mathbb{I}_Y$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ tal que $\alpha = \mathbb{I}_\beta f$. Esto es, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & Y \\
& D_i \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[d, "D(m)"] & \\
& D_j. \arrow[uul, "f_j"] \arrow[uur, "\alpha_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 2.2.14 *Si $f : D \longrightarrow \mathbb{I}_X$ y $f' : D \longrightarrow \mathbb{I}_Y$ son colímites para D, entonces el morfismo $\mathbb{I}_\beta : \mathbb{I}_X \longrightarrow \mathbb{I}_Y$ tal que $f' = \mathbb{I}_\beta f$, es un isomorfismo. Esto es, el colímite, si existe, es único salvo isomorfismos. Dada $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, denotaremos por $f : D \longrightarrow \operatorname{colim} D$ a una elección de un colímite para D. Si por alguna razón necesitamos del diagrama Σ, escribiremos $\operatorname{colim}_{i\in\Sigma_0} D_i$ en lugar de $\operatorname{colim} D$.*

Definición 2.2.15 *Una categoría $\mathscr{A}$ es Σ-**cocompleta** si toda $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ tiene colímite. Si $\mathscr{A}$ es Σ-cocompleta para todo diagrama Σ, $\mathscr{A}$ será llamada **cocompleta**. Si $\mathscr{A}$ es Σ-cocompleta para todos los diagramas finitos Σ, $\mathscr{A}$ se llamará **finitamente cocompleta**.*

Observación 2.2.16 *$f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ es un límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ si y sólo si $f^* : D^* \longrightarrow \mathbb{I}_{X^*}$ es un colímite para $D^* \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A}^*)$. Por lo tanto, $\mathscr{A}$ es Σ-cocompleta si y sólo si $\mathscr{A}^*$ es Σ-completa.*

Corolario 2.2.17 *Una categoría es abeliana si y sólo si es finitamente completa y cocompleta, normal y conormal.*

Demostración. Se sigue de 1.22.2, del corolario 2.2.11 y su dual. $\square$

Proposición 2.2.18 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con imágenes e imágenes inversas, y sea $q : D \longrightarrow \mathbb{I}_L$ el colímite de una $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Si $f : D \longrightarrow \mathbb{I}_A$ es un morfismo de representaciones y $\bar{f} : L \longrightarrow A$ es el morfismo en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ conmuta*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{I}_L \arrow[dl, "\mathbb{I}_{\bar{f}}"] \\ & \mathbb{I}_A, & \end{tikzcd}$$

entonces $\bigcup_{i\in\Sigma_0} Im(f_i)$ está definida y es igual a la imagen de $\bar{f}$.

Demostración. Sea $L \xrightarrow{f'} Im(\bar{f}) \xrightarrow{\mu} A$ la factorización de $\bar{f}$ a través de su imagen. Para cada $i \in \Sigma_0$, sea $D_i \xrightarrow{f_i'} Im(f_i) \xrightarrow{\mu_i} A$ la factorización de f_i a través de su imagen. Dado que $\mu f' q_i = \bar{f} q_i = f_i = \mu_i f_i'$, entonces existe $\xi_i : Im(f_i) \longrightarrow Im(\bar{f})$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} Im(\bar{f}) \arrow[rr, "\mu"] & & A \\ & Im(f_i) \arrow[ul, "\xi_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo $\forall i \in \Sigma_0$, es decir, $\mu_i \leq \mu$ $\forall i \in \Sigma_0$. Veamos que $\mu : Im(\bar{f}) \longrightarrow A$ es la unión de $\{\mu_i : Im(f_i) \longrightarrow A\}_{i\in\Sigma_0}$. La primera propiedad de la unión

está dada por el diagrama anterior.
Chequemos ahora la propiedad de ser llevado. Sea $g : A \longrightarrow B$ un morfismo y sea $B' \xrightarrow{h} B$ un sub-objeto de B tal que $\mu_i : Im(f_i) \longrightarrow A$ es llevado a $h : B' \longrightarrow B$ por g para cada $i \in \Sigma_0$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "f'_i"] \arrow[dd, "D(m)"] \arrow[dr, "f_i"] & Im(f_i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\mu_i"] & B' \arrow[d, "h"] \\
 & A \arrow[r, "g"] & B \\
D_j \arrow[r, "f'_j"'] \arrow[ur, "f_j"] & Im(f_j) \arrow[r, "g_j"'] \arrow[u, "\mu_j"] & B'. \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Esto implica que $hg_if'_i = g\mu_if'_i = gf_i = gf_jD(m) = g\mu_jf'_jD(m) = hg_jf'_jD(m)$; pero como h es un monomorfismo, se tiene que $g_if'_i = g_jf'_jD(m)$. Por lo tanto, haciendo $\alpha_i := g_if'_i : D_i \longrightarrow B'$, obtenemos un morfismo $\alpha : D \longrightarrow \mathbb{I}_{B'}$ de representaciones. Ahora bien, de la definición de colímite, existe un único morfismo $\theta : L \longrightarrow B'$ tal que $g_if'_i = \theta q_i$ para toda $i \in \Sigma_0$.
Por otro lado, consideremos $\mathbb{I}_g f : D \longrightarrow \mathbb{I}_B$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Pero $gf_i = hg_if'_i$, por lo tanto $(g\bar{f})q_i = gf_i = hg_if'_i = (h\theta)q_i \; \forall i \in \Sigma_0$. De la unicidad del morfismo inducido en el colímite se tiene que $g\bar{f} = h\theta$. Luego, por la definición de imagen inversa, existe un único morfismo $\psi : L \longrightarrow g^{-1}(B')$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "\psi"] \arrow[drr, "\theta"] \arrow[ddr, "\bar{f}"'] & & \\
 & g^{-1}(B') \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "w_2"] & B' \arrow[d, "h"] \\
 & A \arrow[r, "g"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Esto implica que $\bar{f} = w_2\psi$ y entonces existe un morfismo $\lambda : Im(\bar{f}) \longrightarrow g^{-1}(B')$ tal que $\mu = w_2\lambda$. Consideremos el morfismo $w_1\lambda : Im(\bar{f}) \longrightarrow B'$. Luego $hw_1\lambda = gw_2\lambda = g\mu$. Por lo tanto, $\mu : Im(\bar{f}) \longrightarrow A$ es llevado por g a $h : B' \longrightarrow B$, probándose que $\mu : Im(\bar{f}) \longrightarrow A$ es la unión de $\{\mu_i : Im(f_i) \longrightarrow A\}_{i\in\Sigma_0}$. $\square$

Proposición 2.2.19 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con productos e intersecciones y sea $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Entonces, el límite para D está dado por la familia de composiciones*

$$\bigcap_{m:j\longrightarrow k\in\Sigma_1} Equ(p_k, D(m)p_j) \subset \prod_{h\in\Sigma_0} D_h \xrightarrow{p_i} D_i\ ,$$

donde $p_i : \prod_{h\in\Sigma_0} D_h \longrightarrow D_i$ es la i-ésima proyección del producto.

Demostración. Sea $P = \prod_{h\in\Sigma_0} D_h$ y $m : j \longrightarrow k$ en Σ_1. Consideremos el equalizador de los siguientes morfismos de p_k, $D(m)p_j : P \longrightarrow D_k$

$$A_m = Equ(p_k, D(m)p_j) \xrightarrow{\quad \mu_m \quad} P,$$

y sea $\cap_{m\in\Sigma_1} A_m \xrightarrow{\theta} P$ la intersección de la familia $\{\mu_m : A_m \longrightarrow P\}_{m\in\Sigma_1}$ de sub-objetos de P. Veamos que $q = \{p_i\theta : \bigcap_{m\in\Sigma_1} A_m \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$ es un morfismo $q : \mathbb{I}_{\bigcap_{m\in\Sigma_1} A_m} \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Como $\theta = \mu_m v_m$ para toda $m \in \Sigma_1$ (esto por la definición de intersección de los μ_m), entonces se tienen las igualdades

$$D(m)p_j\theta = D(m)p_j\mu_m v_m = (D(m)p_j\mu_m)v_m = (p_k\mu_m)v_m$$

donde la última igualdad es por la definición de equalizador. Pero como $\theta = \mu_m v_m$, se sigue que $D(m)p_j\theta = p_k\theta$. Por lo tanto $q : \mathbb{I}_{\bigcap_{m\in\Sigma_1} A_m} \longrightarrow D$, con q_j la siguiente composición $\cap A_m \xrightarrow{\theta} P \xrightarrow{p_i} D_j$, es un morfismo de representaciones.

Consideremos ahora un morfismo $f : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Entonces, por la propiedad del producto $P = \prod_{h\in\Sigma_0} D_h$, existe un único morfismo $\bar{f} : X \longrightarrow P$ tal que $p_i\bar{f} = f_i$ para toda $i \in \Sigma_0$. Luego, para $m : j \longrightarrow k$ en Σ_1 tenemos que $D(m)p_j\bar{f} = D(m)f_j = f_k = p_k\bar{f}$. Por lo tanto, existe un morfismo v'_m tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "v'_m"] \arrow[drr, bend left, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{f}"'] & & \\
& A_m \arrow[r, "\mu_m"] \arrow[d, "\mu_m"] & P \arrow[d, "D(m)p_j"] \\
& P \arrow[r, "p_k"'] & D_k.
\end{tikzcd}$$

Es decir, el morfismo $\bar{f}$ se factoriza a través de los μ_m y entonces, por definición de intersección, existe un único morfismo $g : X \longrightarrow \cap A_m$ tal que $\bar{f} = \theta g$; lo que implica que $p_i\theta g = p_i\bar{f} = f_i$ $\forall i \in \Sigma_0$. Esto es, el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_{\bigcap A_m} \arrow[r, "q"] & D \\
\mathbb{I}_X. \arrow[u, "\mathbb{I}_g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

La unicidad de g se comprueba fácilmente, probándose la proposición. $\square$

Corolario 2.2.20 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana cocompleta y $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Entonces, el colímite para D está dado por la familia de composiciones*

$$D_i \xrightarrow{\mu_i} \bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h \longrightarrow \bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h / \bigcup_{m:k\longrightarrow j\in\Sigma_1} Im(\mu_k - \mu_j D(m)) \ ,$$

donde μ_i es la inclusión en el coproducto.

Demostración. Dualizando la proposición anterior, se tiene que el colímite de D es la siguiente familia

$$D_i \xrightarrow{\mu_i} \bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h \longrightarrow \bigcap^*_{m:k\longrightarrow j\in\Sigma_1} Coequ(\mu_k, \mu_j D(m)) \ ,$$

donde $\bigcap^*$ denota a la noción dual de $\bigcap$, es decir, la cointersección. Ahora bien, en una categoría aditiva se tiene que

$$Coequ(\mu_k, \mu_j D(m)) = Coker(\mu_k - \mu_j D(m)).$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} D(k) \arrow[rr, "\mu_k-\mu_j D(m)"] \arrow[dr] & & \bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h \arrow[r] & Coker(\mu_k - \mu_j D(m)) \\ & Im(\mu_k - \mu_j D(m)). \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Luego, $Coker(\mu_k - \mu_j D(m)) = \bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h/Im(\mu_k - \mu_j D(m))$; y por lo tanto, se tiene que $\bigcap^*_{m\in\Sigma_1} Coequ(\mu_k, \mu_j D(m)) = \bigcap^*_{m\in\Sigma_1}\Big(\bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h/Im(\mu_k - \mu_j D(m))\Big)$. Finalmente, por 1.17.9, sabemos que el lado derecho de la igualdad anterior es $\bigoplus_{h\in\Sigma_0} D_h/\bigcup_{m\in\Sigma_1} Im(\mu_k - \mu_j D(m))$, probándose el corolario. □

2.3. Límites inversos y directos

Definición 2.3.1 *Sea $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $(I, \leq)$ es* ***dirigido****, si $\forall i, j \in I$ existe $t \in I$ tal que $i \leq t$ y $j \leq t$. Recordamos que $i < j$ si y sólo si $i \leq j$ e $i \neq j$.*

Definición 2.3.2 *Dado un conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$, denotaremos por $Ord(I)$ al siguiente diagrama:*

(a) $(Ord(I))_0 := I$,

(b) por cada par de vértices $i, j \in I$ con $i < j$, colocamos exactamente una única flecha $m : i \longrightarrow j$ en $Ord(I)$.

Definición 2.3.3 *Sea $(I, \leq)$ dirigido. Consideremos en $Ord(I)$ la mayor relación de conmutatividad $\sim$. Esto es, dos caminos γ, δ están relacionados $\gamma \sim \delta$ si y sólo si sus extremos (inicial y final) son iguales. Un* ***sistema directo*** *D en $\mathscr{A}$ sobre I, es simplemente una representación D de $\mathscr{A}$ sobre $Ord(I)/\sim$. Dada una representación $D \in \mathrm{Rep}_{Ord(I)/\sim}(\mathscr{A})$, la conmutatividad del diagrama $Ord(I)/\sim$ implica que: si $i \leq j$ existe un único morfismo $\pi^D_{ij} : D_i \longrightarrow D_j$ en $\mathscr{A}$*

*(para simplificar, escribiremos π_{ij} en lugar de π^D_{ij} cuando no haya ambiguedad) tal que $\pi^D_{jk}\pi^D_{ij} = \pi^D_{ik}$ para $i \leq j \leq k$ y $\pi^D_{ii} = 1_{D_i}$ $\forall i \in I$. El colímite $q : D \longrightarrow \mathbb{I}_L$ será llamado el **límite directo** para el sistema directo $\{D_i, \pi^D\}_{i\in I}$, y el objeto L será denotado por $\varinjlim_{i\in I} D_i$ ó simplemente por $\varinjlim D$. Esto es, por definición, tenemos que $\varinjlim D = \operatorname{colim} D$.*

Dualmente, un **sistema inverso** en $\mathscr{A}$ sobre I, es un sistema directo en $\mathscr{A}^*$. Entonces, un sistema inverso es una familia de objetos $\{D_i\}_{i\in I}$ y de morfismos $\{\pi_{ij} : D_j \longrightarrow D_i\}_{i\leq j}$ en $\mathscr{A}$ tales que para $i \leq j \leq k$ se tiene que $\pi_{ij}\pi_{jk} = \pi_{ik}$ y $\pi_{ii} = 1_{D_i}$ para toda $i \in I$. En este caso, el límite es llamado el **límite inverso** de D, y será denotado por $\varprojlim_{i\in I} D_i$. Esto es, por definición, tenemos que $\varprojlim D = \lim (D)$.
Recordemos que un subconjunto J de un conjunto dirigido $(I, \leq)$ es llamado **cofinal** si $\forall i \in I$ existe $j \in J$ tal que $i \leq j$. Si el conjunto J es cofinal, entonces J es dirigido. De esta manera, si D es un sistema directo en $\mathscr{A}$ sobre I, entonces la restricción $D\mid_J$ de D sobre J es un sistema directo en $\mathscr{A}$ sobre J. No es difícil probar la siguiente propiedad de los subconjuntos cofinales.

Proposición 2.3.4 *Sea D un sistema directo en $\mathscr{A}$ sobre I y sea J un subconjunto cofinal de I. Si $\{\pi_i : D_i \longrightarrow L\}_{i\in I}$ es el límite directo para D, entonces $\{\pi_i : D_i \longrightarrow L\}_{i\in J}$ es el límite directo para $D\mid_J$.*

En otras palabras, el límite directo de un sistema está determinado por los valores del sistema en cualquier subconjunto cofinal. En particular, si $\mathscr{A}$ tiene objeto cero y si $D_i = 0$ para toda i en un conjunto cofinal de I, entonces $\varinjlim D_i = 0$.

Proposición 2.3.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Entonces, $\mathscr{A}$ es cocompleta si y sólo si tiene límites directos.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es trivial puesto que el límite directo es un tipo especial de colímite
($\Leftarrow$) Veamos que $\mathscr{A}$ tiene coproductos arbitrarios. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un conjunto de objetos en una categoría $\mathscr{A}$. Sea $I = \{F \subset \Lambda \mid F \quad \text{es finito}\}$. Definimos un orden parcial $\leq$ en I: $F \leq G$ si y sólo si $F \subset G$. Con este orden, I es un conjunto dirigido pues $F \cup G \in I$, $F \subset F \cup G$ y $G \subset F \cup G$. Consideremos el diagrama $Ord(I)$. Dado que existe $m : F \longrightarrow G$ en $Ord(I)$ si y sólo si $F < G$. Entonces, definimos un sistema directo D sobre I como:

(a) $D(F) = \bigoplus_{\lambda\in F} A_\lambda$ $\forall F \in I$,

(b) para $m : F \longrightarrow G$ definimos $D(m) = u_{FG}$, donde $u_{FG} : \bigoplus_{\lambda\in F} A_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in G} A_\lambda$ es el morfismo inducido por las inclusiones en el coproducto.

Como $\mathscr{A}$ tiene límites directos, consideremos el límite directo $\varinjlim D$ de D. Es fácil ver que $\varinjlim D = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Por lo tanto $\mathscr{A}$ tiene coproductos arbitrarios. Luego, por el dual de 2.2.11, $\mathscr{A}$ es cocompleta. $\square$

Definición 2.3.6 *Sea $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de sub-objetos de A en una categoría $\mathscr{A}$. Definimos un orden parcial $\leq$ en I como sigue: $i \leq j$ si y sólo si $\mu_i \leq \mu_j$.*
*Diremos que la familia anterior es una **familia dirigida de sub-objetos** de A, si $(I, \leq)$ es un conjunto dirigido. Definimos el sistema directo D asociado a la familia dirigida $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ como $D(i) = A_i\ \forall i \in I$ y para $m : i \longrightarrow j$, $D(m) = \pi_{ij}$, donde π_{ij} es el único morfismo en $[(\mu_i, A), (\mu_j, A)]_{[\mathscr{A},A]}$.*

Observación 2.3.7 *Sea $\{\mu_i : A_i \longrightarrow B\}_{i\in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de B en una categoría $\mathscr{A}$. En particular, tenemos que $\mu : D \longrightarrow \mathbb{I}_B$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_{Ord(I)/\sim}(\mathscr{A})$, donde $\mu = \{\mu_i\}_{i\in I}$ y D es el sistema directo asociado a la familia dirigida $\{\mu_i : A_i \longrightarrow B\}$. Por lo tanto, si existe $\varinjlim_{i\in I} A_i$ entonces se obtiene un único morfismo $\bar{\mu} : \varinjlim A_i \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim A_i \arrow[rr, "\bar{\mu}"] & & B \\
& A_i \arrow[ul] \arrow[ur, "\mu_i"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in I$. En general $\bar{\mu} : \varinjlim A_i \longrightarrow B$ no es un monomorfismo. Lo más que se puede decir, es que, si $\mathscr{A}$ tiene imágenes e imágenes inversas entonces $Im(\bar{\mu}) = \cup_{i\in I} A_i$ (ver 2.2.18).

2.4. Funtores aditivos

Definición 2.4.1 *Un funtor covariante $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **aditivo** si satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías aditivas,

(b) $\forall (A, B) \in Obj(\mathscr{A}) \times Obj(\mathscr{A})$, el morfismo inducido por T

$$[A, B]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [T(A), T(B)]_{\mathscr{B}}$$

es un morfismo de grupos abelianos.

Recordemos que si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ son funtores, la composición $ST : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ se define por las reglas $ST(A) = S(T(A))$ y $ST(\alpha) = S(T(\alpha))$. Más aún, si S y T son ambos covariantes ó contravariantes entonces ST es covariante; mientras que, si uno es covariante y el otro controvariante entonces ST es contravariante. Si S y T son funtores aditivos entonces ST es aditivo. Por otro lado, si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor covariante (resp. contravariante) entonces tenemos un funtor contravariante (resp. covariante) $T_* : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{B}$ donde $T_* = TD_{\mathscr{A}^*}$ con $D_{\mathscr{A}^*} : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A}$ el funtor dualidad. De igual manera, obtenemos un funtor contravariante (resp. covariante) $T^* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}^*$ por composición de T con el funtor de dualidad $D_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}^*$. Además, podemos escribir $T^*_* = (T^*)_* = (T_*)^*$.

Definición 2.4.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{A}$. El funtor Hom covariante $H^A : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$, con respecto a A, se define como sigue: $H^A(B) := [A, B]_{\mathscr{A}}$ $\forall B \in \mathscr{A}$, y si $\alpha : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathscr{A}$ entonces la función*

$$H^A(\alpha) : [A, B] \longrightarrow [A, C]$$

está dada por la regla $H^A(\alpha)(f) = \alpha f$.

Observación 2.4.3 *(1) Si $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva entonces $H^A(B)$ es un grupo abeliano y $H^A(\alpha)$ es un morfismo de grupos abelianos. Por lo tanto, H^A puede ser considerado como un funtor aditivo de $\mathscr{A}$ en la categoría Ab de grupos abelianos.*

(2) Análogamente, tenemos el funtor Hom contravariante $H_A : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ definido por $H_A(B) = [B, A]_{\mathscr{A}}$ $\forall B \in \mathscr{A}$ y $H_A(\alpha)(f) = f\alpha$ para $\alpha \in [B, C]_{\mathscr{A}}$ y $f \in [C, A]_{\mathscr{A}}$. Notemos que lo hecho para H^A cuando $\mathscr{A}$ es aditiva, vale para H_A. Además $(H^A)_* = H_{A^*}$, es decir, $H^A D_{\mathscr{A}^*} = H_{A^*}$. Para ver esto, notemos que en objetos valen las siguientes igualdades

$$H^A D_{\mathscr{A}^*}(B^*) = H^A(B) = [A, B]_{\mathscr{A}} = [B^*, A^*]_{\mathscr{A}^*} = H_{A^*}(B^*),$$

y en morfismos $H^A D_{\mathscr{A}^*}(\alpha^*)(\beta) = H^A(\alpha)(\beta) = \alpha\beta$.
Por lo tanto $(H^A)_*(\alpha^*)(\beta^*) = H^A(\alpha)(\beta)$. Por otro lado, $H_{A^*}(\alpha^*)(\beta^*) = \beta^*\alpha^* = \alpha\beta$, probándose que $(H^A)_* = H_{A^*}$.

2.5. Propiedades que preservan los funtores

Definición 2.5.1 *Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor covariante.*

(a) Decimos que T es un ***monofuntor*** *(resp.* ***epifuntor****) si $T(\alpha)$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en $\mathscr{B}$ siempre que α lo sea en $\mathscr{A}$.*

(b) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías con cero, se dice que T preserva objetos (resp. morfismos) cero si $T(0)$ es un objeto (resp. morfismo) cero en $\mathscr{B}$ siempre que 0 lo sea en $\mathscr{A}$.

(c) T ***preserva kerneles*** *si $T(K) \xrightarrow{T(\mu)} T(A) = Ker(\, T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B)\,)$ siempre que $K \xrightarrow{\mu} A = Ker(\, A \xrightarrow{\alpha} B\,)$.*

Lema 2.5.2 *Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor covariante. Entonces*

(a) T es un epifuntor si y sólo si T^*_* es un monofuntor,

(b) T preserva objetos cero si y sólo si T preserva morfismos cero. En particular, si T es aditivo entonces T preserva ceros,

(c) si T preserva kerneles entonces preserva objetos cero,

(d) si T preserva kerneles y $\mathscr{A}$ es normal, entonces T es un monofuntor.

Demostración.

(a) Dado que $T_*^* = D_{\mathscr{B}} T D_{\mathscr{A}^*}$ con $D_{\mathscr{A}^*} : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A}$ y $D_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}^*$ los funtores dualidad, usando que dichos funtores mandan epimorfismos a monomorfismos (y viceversa) se obtiene (a).

(b) Es consecuencia de que un objeto en una categoría está caracterizado por su morfismo identidad.

(c) Supongamos que T preserva kerneles. Dado que

$$0 \xrightarrow{1_0} 0 = Ker(\, 0 \xrightarrow{1_0} 0 \,)$$

y el kernel del morfismo identidad es cero, se tiene que T preserva ceros.

(d) Sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un monomorfismo. Si $\mathscr{A}$ es normal, sabemos que $\alpha = Ker(\beta)$ para algún $\beta : B \longrightarrow C$ en $\mathscr{A}$. Luego, si T preserva kerneles entonces preserva monomorfismos.

□

Definición 2.5.3 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías exactas. Decimos que el funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **exacto**, si $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$ es una sucesión exacta en $\mathscr{B}$ para toda sucesión exacta $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ en $\mathscr{A}$.*

Proposición 2.5.4 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías exactas y $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor covariante. Entonces,*

(a) T preserva kerneles si y sólo si para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

en $\mathscr{A}$, la sucesión $0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$ es exacta en $\mathscr{B}$.

(b) T preserva cokerneles si y sólo si para toda sucesión exacta corta (2.2), la sucesión $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

(c) T es exacto si y sólo si para toda sucesión exacta corta (2.2) en $\mathscr{A}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{B}$.

Demostración.

(a) ($\Rightarrow$) Si T preserva kerneles entonces, por 2.5.2(d), obtenemos que T preserva monomorfismos. Luego, como $\alpha = Ker(\beta)$, concluimos que la sucesión $0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$ es exacta en $\mathscr{B}$.

($\Leftarrow$) Veamos que T preserva kerneles. En efecto, sea $\alpha : A_1 \longrightarrow A_2$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Consideremos las siguientes sucesiones exactas cortas en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} I \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\beta_1} A_2 \xrightarrow{\beta_2} K' \longrightarrow 0,$$

donde α_1 es el kernel de α, β_2 es el cokernel de α y $\alpha = \beta_1\alpha_2$ es la factorización de α a través de su imagen. La condición sobre T, nos dice que

$$0 \longrightarrow T(K) \xrightarrow{T(\alpha_1)} T(A_1) \xrightarrow{T(\alpha_2)} T(I)$$

y

$$0 \longrightarrow T(I) \xrightarrow{T(\beta_1)} T(A_2) \xrightarrow{T(\beta_2)} T(K')$$

son sucesiones exactas. Entonces, $T(\alpha_1)$ es el kernel de $T(\alpha_2)$ y $T(\beta_1)$ es un monomorfismo. Luego $T(\alpha_1)$ es el kernel de $T(\beta_1)T(\alpha_2)$ y por lo tanto de $T(\alpha)$, pues $\beta_1\alpha_2 = \alpha$.

(b) Se sigue por dualidad de (a); y (c) se prueba análogamente a (a).

□

Definición 2.5.5 *Sea Σ un diagrama y $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor (covariante). Por composición punto a punto, T induce un funtor, que denotaremos también por T, $T : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ como sigue: Para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, $(TD)_i := T(D_i)$ $\forall i \in \Sigma_0$ y $(TD)_m := T(D(m))$ $\forall m \in \Sigma_1$. Dado un morfismo de representaciones $\alpha : D \longrightarrow D'$, definimos el morfismo $T(\alpha) : TD \longrightarrow TD'$, donde $T(\alpha) = \{T(\alpha_i) : T(D_i) \longrightarrow T(D'_i)\}_{i\in\Sigma_0}$. Decimos que T **preserva límites**, si $T(\alpha) : \mathbb{I}_{T(X)} \longrightarrow T(D)$ es un límite para TD siempre que $\alpha : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ lo sea de D, esto es, $T(\lim D) = \lim (TD)$. Dualmente, T **preserva colímites** si $T(\operatorname{colim} D) = \operatorname{colim} (TD)$.*

Observación 2.5.6 *(1) T preserva límites si y sólo si T^*_* preserva colímites.*

(2) Si T preserva límites entonces preserva pullbacks y productos.

Lema 2.5.7 *Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor que preserva ceros. Si T preserva límites entonces,*

(a) T preserva imágenes inversas y kerneles,

(b) si $\mathscr{A}$ es normal entonces T es un monofuntor.

Demostración.

(a) Dado que T preserva pullbacks (un tipo de límite), y que el kernel y la imagen inversa son pullbacks, entonces son preservados.

(b) Es inmediato de (a) y de 2.5.2(d).

□

Ejemplos:

(1) El funtor olvido $F : Ab \longrightarrow Sets$ es un monofuntor, epifuntor, preserva límites, también es denso y fiel; pero no es pleno ni preserva colímites.

(2) Sea $\mathscr{A}$ una categoría y $\mathscr{A}'$ una subcategoría de $\mathscr{A}$. Entonces, el funtor inclusión $I : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ es una inmersión; pero no necesariamente es un monofuntor, epifuntor, ni necesariamente preserva límites ó colímites. Si $\mathscr{A}'$ es completa e $I : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ preserva límites entonces diremos que $\mathscr{A}'$ es una **subcategoría completa** de $\mathscr{A}$. Equivalentemente, $\mathscr{A}'$ es una subcategoría completa de $\mathscr{A}$, si toda representación D en $\mathscr{A}'$ tiene límite en $\mathscr{A}$ y éste límite está en $\mathscr{A}'$.

Definición 2.5.8 *Si $\mathscr{A}'$ y $\mathscr{A}$ son categorías exactas y el funtor inclusión $I : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ es exacto, decimos que $\mathscr{A}'$ es una **subcategoría exacta** de $\mathscr{A}$; y si I es aditivo, diremos que $\mathscr{A}'$ es una **subcategoría aditiva** de $\mathscr{A}$. Si I es una equivalencia, $\mathscr{A}'$ será llamada una **subcategoría equivalente** de $\mathscr{A}$. De esta manera, $\mathscr{A}'$ es una subcategoría equivalente de $\mathscr{A}$ si y sólo si $\mathscr{A}'$ es una subcategoría plena de $\mathscr{A}$ tal que todo objeto en $\mathscr{A}$ es isomorfo a un objeto de $\mathscr{A}'$.*

Las propiedades de funtores definidas en esta sección son llamadas propiedades que preservan los funtores. Si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ son funtores covariantes teniendo ambos la misma propiedad de preservación, entonces ST preserva dicha propiedad.

Definición 2.5.9 *Diremos que un funtor contravariante $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ tiene una propiedad de preservación si y sólo si el funtor covariante $T_* : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{B}$ tiene tal propiedad, donde $T_* := TD_{\mathscr{A}^*}$.*

2.6. Propiedades del funtor Hom

Proposición 2.6.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Entonces*

(a) $\theta : B \longrightarrow C$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$ si y sólo si $H^A(\theta) : H^A(B) \longrightarrow H^A(C)$ lo es en Sets $\forall A \in \mathscr{A}$,

(b) una familia $F = \{f_i : L \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$ de morfismos en $\mathscr{A}$ es un límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ si y sólo si $H^A(F) = \{H^A(f_i) : H^A(L) \longrightarrow H^A(D_i)\}_{i\in\Sigma_0}$ es un límite para $H^A D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathrm{Sets})$ $\forall A \in \mathscr{A}$. En particular, si el límite existe, se tiene que $H^A(\lim D) = \lim H^A(D)$.

(c) *Si $\mathscr{A}$ es aditiva entonces la categoría Sets puede reemplazarse, en (a) y (b), por la categoría de grupos abelianos Ab.*

Demostración.

(a) Por definición, el morfismo $\theta : B \longrightarrow C$ es un monomorfismo si y sólo si para cada $A \in \mathscr{A}$ el morfismo inducido $H^A(\theta) : [A, B] \longrightarrow [A, C]$ es inyectivo. Pero un morfismo en la categoría de conjuntos es inyectivo si y sólo si es un monomorfismo, probándose la primera afirmación.

(b) ($\Rightarrow$) Sea $F = \{f_i : L \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$ un límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Consideremos un morfismo $\alpha : \mathbb{I}_X \longrightarrow H^A D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathrm{Sets})$. Entonces, para cada $x \in X$, tenemos un morfismo $\alpha(x) : \mathbb{I}_A \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ dado por la familia de morfismos $\{\alpha_i(x) : A \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$ en $\mathscr{A}$. Por ser F un límite para D, para cada $x \in X$, existe un único morfismo $\bar{\alpha}(x) : A \longrightarrow L$ en $\mathscr{A}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_A \arrow[r, "\alpha(x)"] \arrow[d, "\mathbb{I}_{\bar{\alpha}(x)}"'] & D \\
\mathbb{I}_L \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Ahora bien, como X es un conjunto, el morfismo $\bar{\alpha}(x) : A \longrightarrow L$ con $x \in X$ induce un único morfismo $\bar{\alpha} : X \longrightarrow H^A(L)$ en *Sets*. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathbb{I}_{\bar{\alpha}}"'] & H^A D \\
\mathbb{I}_{H^A(L)} \arrow[ur, "H^A(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathrm{Sets})$. En efecto, sabemos que $F\mathbb{I}_{\bar{\alpha}(x)} = \alpha(x)$ $\forall x \in X$. Por otro lado, $(H^A(F)\mathbb{I}_{\bar{\alpha}})(x) = F\mathbb{I}_{\bar{\alpha}(x)}$ $\forall x \in X$, probándose que $H^A(F)\mathbb{I}_{\bar{\alpha}} = \alpha$. Esto último, implica que $H^A(F) : \mathbb{I}_{H^A(L)} \longrightarrow H^A D$ es un límite para $H^A D$.
($\Leftarrow$) Sea $H^A(F) : \mathbb{I}_{H^A(L)} \longrightarrow H^A D$ un límite para $H^A D$ $\forall A \in \mathscr{A}$. Supongamos que F no es el límite para D. Entonces, tenemos tres posibilidades:

(1) $F : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ no es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Por lo tanto, existe una flecha $m : i \longrightarrow j$ en Σ_1 tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dd, "D(m)"] \\
L \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & D_j
\end{tikzcd}$$

no conmuta en $\mathscr{A}$. Tomando $1_L \in H^L(L)$, se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & H^L(D_i) \arrow[dd] \\ H^L(L) \arrow[ur, "H^L(f_i)"] \arrow[dr, "H^L(f_j)"'] & \\ & H^L(D_j) \end{tikzcd}$$

no conmuta en *Sets*. Por lo tanto $H^L(F)$ no es un límite para $H^L D$, contradiciendo la hipótesis.

(2) Existe un morfismo $\gamma : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ y dos morfismos distintos $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}' : X \longrightarrow L$ en $\mathscr{A}$ tales que $\gamma = F\mathbb{I}_{\bar{\gamma}} = F\mathbb{I}_{\bar{\gamma}'}$. En particular,

$$H^X(\bar{\gamma})(1_X) = \bar{\gamma} \neq \bar{\gamma}' = H^X(\bar{\gamma}')(1_X);$$

y en consecuencia $H^X(\mathbb{I}_{\bar{\gamma}})$ y $H^X(\mathbb{I}_{\bar{\gamma}'})$ son dos factorizaciones distintas del morfismo $H^X(\gamma) : \mathbb{I}_{H^X(X)} \longrightarrow H^X D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathrm{Sets})$. Entonces $H^X(F)$ no es el límite para $H^X D$, contradicción.

(3) Para algún morfismo $\gamma : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$, no existe factorización $\mathbb{I}_\psi : \mathbb{I}_X \longrightarrow \mathbb{I}_L$ tal que $\gamma = F\mathbb{I}_\psi$. Luego, no existe $\mathbb{I}_u : \mathbb{I}_{H^X(X)} \longrightarrow \mathbb{I}_{H^X(L)}$ tal que $H^X(\gamma) = H^X(F)\mathbb{I}_u$. En efecto, supongamos que existe $\mathbb{I}_u$ tal que $H^X(\gamma) = H^X(F)\mathbb{I}_u$. Pero $H^X(F)\mathbb{I}_u(1_X) = H^X(F)\mathbb{I}_{u(1_X)} = F\mathbb{I}_{u(1_X)}$. Por otro lado,

$$H^X(\gamma)(1_X) = H^X(\gamma)\mathbb{I}_{1_{H^X(X)}}(1_X) = H^X(\gamma)\mathbb{I}_{1_{H^X(X)}(1_X)} = \gamma\mathbb{I}_{1_{H^X(X)}(1_X)} =$$

$\gamma\mathbb{I}_{1_X} = \gamma$.
Entonces $\mathbb{I}_{u(1_X)} : \mathbb{I}_X \longrightarrow \mathbb{I}_L$ es una factorización de $\gamma : \mathbb{I}_X \longrightarrow D$, contradicción. Luego no existe tal $\mathbb{I}_u$, por lo tanto $H^X(F)$ no es un límite para $H^X(D)$, contradicción.
Por lo tanto, dado que las tres posibilidades anteriores nos llevan a una contradicción, concluimos que F es el límite para D.

(c) Si *Sets* es reemplazado por *Ab*, la única diferencia en la demostración de (a) y (b) es en el punto en que se tiene que demostrar que $H^A(F)$ es un límite para $H^A(D)$. Aquí, lo que se debe checar es que el morfismo $\bar{\alpha}$ es un morfismo de grupos abelianos; pero eso se sigue de que los morfismos α_i son así.

□

Usando la igualdad $(H_A)_* = H^{A^*}$, probada en 2.4.3, se obtiene la siguiente proposición dual a la anterior.

Proposición 2.6.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Entonces*

(a) *Un morfismo $\theta : C \longrightarrow B$ es un epimorfismo en $\mathscr{A}$ si y sólo si $H_A(\theta) : H_A(B) \longrightarrow H_A(C)$ es un monomorfismo en Sets $\forall A \in \mathscr{A}$.*

(b) *Una familia $F = \{f_i : D_i \longrightarrow L\}_{i \in \Sigma_0}$ de morfismos en $\mathscr{A}$ es un colímite de $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ si y sólo si $H_A(F) = \{H_A(f_i) : H_A(L) \longrightarrow H_A(D_i)\}_{i \in \Sigma_0}$ es un límite para $H_A D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathrm{Sets})$ $\forall A \in \mathscr{A}$. En particular, si el colímite existe, se tiene que $H_A(\operatorname{colim} D) = \lim(H_A(D))$.*

(c) *Si $\mathscr{A}$ es aditiva entonces la categoría Sets puede reemplazarse, en (a) y (b), por la categoría de grupos abelianos Ab.*

2.7. Funtores que preservan límites

Definición 2.7.1 *Un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ **preserva intersecciones finitas** si cada vez que T preserva dos monomorfismos, para los cuales su intersección está definida, entonces T preserva su intersección.*

Note que la definición anterior no requiere que T sea un monofuntor ni que T preserve pullbacks.

Proposición 2.7.2 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Si $\mathscr{A}$ tiene productos, entonces el funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ preserva límites si y sólo si preserva productos e intersecciones finitas.*

Demostración. Si T preserva límites, puesto que los productos e intersecciones son casos especiales de límites, se sigue que T preserva productos e intersecciones finitas.
Recíprocamente, supongamos que T preserva productos e intersecciones finitas. Sea $f = \{f_i : L \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$ el límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Consideremos el diagrama de 2.2.9

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma"'] & P \arrow[d, "\Delta"] \\ P \arrow[r, "\mu"] & P^{\Sigma_1}. \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Como es usual, sin perdida de generalidad, podemos asumir que Σ no tiene pozos. Por lo tanto, de 2.2.9 se tiene que el diagrama (2.3) es un diagrama de intersección. Ahora $T(\Delta) : T(P) \longrightarrow T(P^{\Sigma_1}) = T(P)^{\Sigma_1}$ es otra vez el morfismo diagonal pues T preserva productos. Similarmente, $T(\mu)$ satisface las mismas relaciones para TD que las que satisface μ para D. En particular, esto quiere decir que $T(\Delta)$ y $T(\mu)$ son monomorfismos; y en consecuencia, si aplicamos T al diagrama (2.3), se tiene un diagrama de intersección (por la hipótesis sobre T). Por lo tanto, al aplicar el teorema 2.2.9 se tiene que $T(f) = \{T(f_i) : T(L) \longrightarrow T(D_i)\}_{i \in \Sigma_0}$ es un límite para TD. $\square$

Corolario 2.7.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con productos y $\mathscr{B}$ una categoría arbitraria. Entonces, el funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ preserva límites si y sólo si T preserva productos y equalizadores.*

Demostración. Si T preserva límites entonces preserva equalizadores, pues los equalizadores son un tipo de límites.
Recíprocamente, si T preserva productos y equalizadores entonces por 1.19.11 se tiene que T preserva pullbacks; y en particular, intersecciones finitas. Entonces, por 2.7.2, se tiene que T preserva límites. $\square$

Corolario 2.7.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría normal con productos. Si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor que preserva ceros, entonces T preserva límites si y sólo si preserva productos y kerneles.*

Demostración. Ya hemos visto, en 2.7.2, que si T preserva límites, entonces T preserva productos y kerneles, ya que el kernel es un tipo de límite.
Recíprocamente, se tiene, de 1.14.8 que si T preserva kerneles entonces T preserva intersecciones finitas. Luego, si T también preserva productos, entonces, por 2.7.2, concluimos que T preserva límites. $\square$

Proposición 2.7.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva con productos finitos y sea $\mathscr{B}$ cualquier otra categoría aditiva. Entonces, $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ preserva productos finitos si y sólo si T es aditivo.*

Demostración. Si T preserva productos finitos entonces se sigue de 1.20.8, que T es aditivo. Recíprocamente, si T es aditivo se tiene, por 1.20.3, que T preserva productos finitos. $\square$

Corolario 2.7.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva con productos finitos y sea $\mathscr{B}$ cualquier categoría aditiva. Entonces, $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ preserva límites de representaciones sobre diagramas finitos si y sólo si T es aditivo y preserva kerneles.*

Demostración. Si T es aditivo y preserva kerneles, entonces T preserva equalizadores. Por lo tanto se tiene, por 2.7.5 y 2.7.3 aplicados a representaciones sobre diagramas finitos, que T preserva los límites de representaciones sobre diagramas finitos si y sólo si T es aditivo y preserva kerneles. $\square$

Definición 2.7.7 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías exactas. Decimos que un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **medio exacto** si para toda sucesión exacta corta en $\mathscr{A}$*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

la sucesión $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$ *es exacta en $\mathscr{B}$.*

Proposición 2.7.8 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, $\mathscr{B}$ es exacta y $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor medio exacto, entonces T es aditivo.*

Demostración. Se sigue de 1.21.3, que T preserva productos finitos; y por lo tanto, por 2.7.5, se tiene que T es aditivo. $\square$

Corolario 2.7.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{B}$ una categoría exacta y aditiva. Entonces, un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ preserva límites de representaciones sobre diagramas finitos si y sólo si preserva kerneles.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es consecuencia inmediata de 2.7.6.
($\Leftarrow$) Si T preserva kerneles entonces, por 2.5.4, es medio exacto. Luego, de 2.7.6 y 2.7.8, se sigue que preserva límites de representaciones sobre diagramas finitos. □

Observación 2.7.10 *(1) De 2.7.9 y su dual, se tiene que si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías abelianas, entonces el funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es exacto si y sólo si T preserva límites y colímites de todas las representaciones sobre diagramas finitos.*

*(2) Si T es la inclusión de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ en una categoría abeliana $\mathscr{B}$ y T es exacto, diremos que $\mathscr{A}$ es una **subcategoría abeliana** de $\mathscr{B}$.*

2.8. Propiedades de los funtores fieles

Definición 2.8.1 *Se dice que un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ refleja una propiedad de una representación $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, si la condición de que $TD \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ tiene tal propiedad implica que D también. De esta manera, por ejemplo, T refleja límites si para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, $\alpha : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un límite para D siempre que $T(\alpha) : \mathbb{I}_{TL} \longrightarrow TD$ lo sea para $TD \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$.*

Teorema 2.8.2 *(P.Freyd). Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor fiel con $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías arbitrarias. Entonces*

(a) T refleja monomorfismos, epimorfismos y diagramas conmutativos,

(b) si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías con cero, entonces T refleja objetos cero,

(c) si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías exactas, entonces T refleja sucesiones exactas,

(d) si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, $\mathscr{B}$ es una categoría aditiva y T es aditivo, entonces T refleja límites y colímites de representaciones sobre diagramas finitos. Finalmente, si T es pleno entonces, sin ninguna condición sobre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, T refleja límites y colímites.

Demostración.

(a) Consideremos un morfismo α en $\mathscr{A}$ y supongamos que $T(\alpha)$ es un monomorfismo. Si $\alpha f = \alpha g$, entonces $T(\alpha)T(f) = T(\alpha)T(g)$; y como $T(\alpha)$ es un monomorfismo, se tiene que $T(f) = T(g)$. Luego, como T es fiel, entonces $f = g$, probándose que α es un monomorfismo. Por lo tanto, T refleja monomorfismos y dualmente T refleja epimorfismos.
Por otro lado, recordemos que un diagrama conmutativo es uno en el cual dos composiciones con el mismo origen y el mismo final son iguales. Pero como T preserva composiciones es claro que T lleva diagramas no conmutativos en diagramas no conmutativos; en otras palabras, T refleja diagramas conmutativos.

(b) Supongamos que $T(X)$ es cero en $\mathscr{B}$. Sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow X$ morfismos en $\mathscr{A}$; como $T(X)$ es cero, entonces $T(\alpha) = T(\beta)$. Luego $\alpha = \beta$ por ser T fiel, esto implica que X es un objeto nulo en $\mathscr{A}$. Dualmente, tomando morfismos de X en A, se tiene que X es conulo; y por lo tanto, cero en $\mathscr{A}$.

(c) Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías exactas, y $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A''$ una sucesión en $\mathscr{A}$ tal que $T(A') \xrightarrow{T(\alpha)} T(A) \xrightarrow{T(\beta)} T(A'')$ es exacta en $\mathscr{B}$. Dado que $T(\beta\alpha) = T(\beta)T(\alpha) = 0$ y T es fiel, se tiene que $\beta\alpha = 0$.
Supongamos que $Ker(\beta)$ no es un sub-objeto de $Im(\alpha)$. Consideremos los morfismos $\mu : K \longrightarrow A$ y $p : A \longrightarrow F$ con $\mu = Ker(\beta)$ y $p = Coker(\alpha)$. Veamos que $p\mu \neq 0$. En efecto, factorizando a α a través de su imagen $A' \xrightarrow{f} Im(\alpha) \xrightarrow{\mu'} A$, se tiene que $\mu' = Ker(p)$ (esto por que $\mathscr{A}$ es exacta y $p = Coker(\mu')$). Por lo tanto, si $p\mu = 0$, existe un único monomorfismo $\gamma : K \longrightarrow Im(\alpha)$ tal que $\mu = \mu'\gamma$ de donde $Ker(\beta)$ es un sub-objeto de $Im(\alpha)$, lo cual es una contradicción; probándose que $p\mu \neq 0$. Por otro lado, como $\beta\mu = 0$ se tiene que $T(\mu)$ se factoriza a través de $Ker(T(\beta))$; similarmente, dado que $p\alpha = 0$, concluimos que $T(p)$ se factoriza a través de $Coker(T(\alpha))$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & KerT(\beta) \arrow[dr, "\theta_2"] & T(K) \arrow[l, "\theta_1"'] \arrow[d, "T(\mu)"] \arrow[dr, "0"] & \\
T(A') \arrow[rr, "T(\alpha)"] \arrow[drr, "0"] & & T(A) \arrow[r, "T(\beta)"] \arrow[d, "T(p)"] \arrow[dr, "\psi_1"] & T(A'') \\
 & & T(F) & CokerT(\alpha). \arrow[l, "\psi_2"']
\end{tikzcd}$$

Como la sucesión horizontal, en el diagrama anterior, es exacta, tenemos que $Im(T(\alpha)) = Ker(T(\beta))$; esto es, $Ker(\psi_1) = \theta_2$. En particular, la composición

$$Ker(T(\beta)) \xrightarrow{\theta_2} T(A) \xrightarrow{\psi_1} Coker(T(\alpha))$$

es cero. Por lo tanto, $T(p\mu) = T(p)T(\mu) = 0$; contradiciendo la fidelidad de T.

(d) Sin condiciones sobre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, supongamos que $T(F) : \mathbb{I}_{T(L)} \longrightarrow TD$ es un límite para $TD \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$. Por (a), sabemos que T refleja diagramas conmutativos; por lo tanto $F : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Por otro lado, por (a), sabemos que si existe un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ el cual se factoriza a través de F, dicha factorización es única ya que T es fiel.
Finalmente, supongamos que existe un morfismo $F' : \mathbb{I}_{L'} \longrightarrow D$ en

$\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ que no se factoriza a través de F. Si T es pleno, es claro en este caso que $T(F')$ no puede ser factorizado a través de $T(F)$; y por lo tanto, $T(F)$ no es el límite para TD.
Si T no es pleno, asumimos que $\mathscr{A}$ es abeliana, $\mathscr{B}$ y T son aditivos y Σ es un diagrama finito. Consideremos el producto $\prod_{i\in\Sigma_0} D_i$ y los morfismos $\theta : L \longrightarrow \prod_{i\in\Sigma_0} D_i$ y $\theta' : L' \longrightarrow \prod_{i\in\Sigma_0} D_i$ inducidos por F y F' respectivamente. Esto es, $F = \{p_i\theta : L \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$ y $F' = \{p_i\theta' : L' \longrightarrow D_i\}_{i\in\Sigma_0}$ donde $p_j : \prod_{i\in\Sigma_0} D_i \longrightarrow D_j$ es la proyección natural del producto. Se puede ver fácilmente que F' se factoriza a través de F si y sólo si θ' se factoriza a través de θ. Además θ es un monomorfismo. En efecto, sean $\alpha, \beta : X \longrightarrow L$ tales que $\theta\alpha = \theta\beta$, luego $T(F)\mathbb{I}_{T(\alpha)} : \mathbb{I}_{T(X)} \longrightarrow TD$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, por lo tanto existe un único morfismo $\xi : T(X) \longrightarrow T(L)$ en $\mathscr{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_{T(L)} \arrow[r, "T(F)"] & TD \\
\mathbb{I}_{T(X)}. \arrow[u, "\mathbb{I}_\xi"] \arrow[ur, "T(F)\mathbb{I}_{T(\alpha)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\xi = \alpha$ y $T(F)\mathbb{I}_{T(\alpha)} = \{T(p_i)T(\theta)T(\alpha) : T(X) \longrightarrow T(D_i)\}_{i\in\Sigma_0}$, pero $T(p_i)T(\theta)T(\alpha) = T(p_i)T(\theta)T(\beta)$ $\forall i \in \Sigma_0$, de donde $T(F)\mathbb{I}_{T(\alpha)} = T(F)\mathbb{I}_{T(\beta)}$ y entonces $\xi = T(\beta)$ lo que implica que $T(\alpha) = T(\beta)$. Luego como T es fiel, tenemos que $\alpha = \beta$, probándose que θ es un monomorfismo. En particular, se tiene que $\bar{\theta}\theta' \neq 0$, donde $\bar{\theta} : \prod_{i\in\Sigma_0} D_i \longrightarrow Coker(\bar{\theta})$ es el cokernel de θ. Ahora bien, dado que T preserva productos finitos (por ser un funtor aditivo), se tiene que $T(F) = \{T(p_i)T(\theta) : T(L) \longrightarrow T(D_i)\}_{i\in\Sigma_0}$ y $T(F') = \{T(p_i)T(\theta') : T(L') \longrightarrow T(D_i)\}_{i\in\Sigma_0}$, donde $T(p_j) : \prod_{i\in\Sigma_0} T(D_i) \longrightarrow T(D_j)$ es la proyección natural del producto. Usando ahora que $T(F)$ es un límite para TD, obtenemos que existe un único $\mu : T(L') \longrightarrow T(L)$ en $\mathscr{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_{T(L)} \arrow[r, "T(F)"] & T(D) \\
\mathbb{I}_{T(L')}. \arrow[u, "\mathbb{I}_\mu"] \arrow[ur, "T(F')"'] &
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad del diagrama anterior y de la propiedad de la unicidad en el producto $\prod_{i\in\Sigma_0} T(D_i)$, se concluye la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(L) \arrow[r, "T(\theta)"] & \prod_{i\in\Sigma_0} T(D_i) \\
T(L'). \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "T(\theta')"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $T(\bar{\theta}\theta') = T(\bar{\theta})T(\theta)\mu = T(\bar{\theta}\theta)\mu = 0$, lo cual contradice la fidelidad de T pues $\bar{\theta}\theta' \neq 0$. Esto permite concluir que todo morfismo $F' : \mathbb{I}_{L'} \longrightarrow D$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$ se factoriza a través de F. Finalmente, la prueba de que T refleja colímites se obtiene por dualidad.

□

Proposición 2.8.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{B}$ una categoría aditiva. Si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor exacto que refleja objetos cero, entonces T es fiel.*

Demostración. Por 2.7.8, T es aditivo; y por lo tanto, es suficiente probar que si $\alpha \neq 0$ entonces $T(\alpha) \neq 0$. Ahora, si $\alpha \neq 0$ entonces $Im(\alpha) \neq 0$, ya que si $Im(\alpha)$ fuera cero entonces α sería cero. Luego, como T refleja objetos cero, tenemos que $T(Im(\alpha)) \neq 0$. Por la exactitud de T, sabemos que $T(Im(\alpha)) = Im(T(\alpha))$; probándose que $T(\alpha) \neq 0$. □

2.9. Bifuntores

En esta sección introduciremos la noción de producto de categorías y la de funtores en dos variables, es decir, bifuntores.

Definición 2.9.1 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. El producto $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ es una categoría cuyos objetos son todos los pares ordenados (A, B) de objetos de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. El conjunto de morfismos entre dos pares está definido por pares ordenados de morfismos*

$$[(A, B), (A', B')]_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}} := [A, A']_{\mathscr{A}} \times [B, B']_{\mathscr{B}},$$

y la composición de pares de morfismos es componente a componente; esto es, si $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A', B')$ y $(f', g') : (A', B') \longrightarrow (A'', B'')$ son morfismos en $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, se define $(f', g')(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A'', B'')$ como $(f', g')(f, g) = (f'f, g'g)$. Se puede ver fácilmente que con el producto así definido, $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ es en efecto una categoría donde el morfismo identidad $1_{(A,B)}$ es el par $(1_A, 1_B)$.

Definición 2.9.2 *Un **bifuntor** es un funtor covariante cuyo dominio es el producto de dos categorías; esto es, uno de la forma $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$.*

Ejemplos:

(1) si $R : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{A}$ y $S : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{B}$ son funtores, entonces la asignación $(f, g) \longmapsto (R(f), S(g))$ induce un bifuntor $R \times S : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A} \times \mathscr{B}$,

(2) sea R un anillo, el producto tensorial $M_R \otimes_R {}_RN$ es un bifuntor

$$- \otimes - : Mod(R)^* \times Mod(R) \longrightarrow Ab.$$

Observación 2.9.3 *Sea $T : \mathscr{A}^* \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ un bifuntor. Definiendo $T'(A, B) := T(A^*, B)$ en objetos y $T'(f, g) := T(f^*, g)$ en morfismos, el funtor T se puede ver como un funtor en dos variables $T' : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$, que es contravariante*

en la primera coordenada y covariante en la segunda, pues $T'(f,g)T'(h,t) = T((hf)^*, gt) = T'(hf, gt)$*; estrictamente hablando,* T' *no es un bifuntor de* $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ *en* $\mathscr{C}$ *ya que* $T'(f,g)T'(h,t) \neq T'(fh, gt)$*.*
Recíprocamente, todo funtor en dos variables $T' : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ *que sea contra-covariante (es decir, tal que* $T'(f,g)T'(h,t) = T'(hf, gt)$ *y* $T'(1_A, 1_B) = 1_{T'(A,B)}$*) se puede ver como un bifuntor* $T : \mathscr{A}^* \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$*. En general, se identifican* T *con* T' *y se escoge uno de ellos dependiendo de lo que se quiera: ver a* T *como bifuntor ó como funtor en dos variables. Análogamente, se tienen las versiones: co-contravariante* $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B}^* \longrightarrow \mathscr{C}$*, contra-contravariante* $T : \mathscr{A}^* \times \mathscr{B}^* \longrightarrow \mathscr{C}$ *y co-covariante* $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ *(esta última es exactamente la de bifuntor* $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$*).*

Ejemplo: el **Hom-bifuntor**. Dada una categoría $\mathscr{A}$, el Hom-bifuntor $F = [-,-]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^* \times \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ (es decir, contra-covariante) está definido como sigue.

(a) $F(A^*, B) = [A, B]_{\mathscr{A}}\ \forall (A^*, B) \in \mathscr{A}^* \times \mathscr{A}$.

(b) Dado un morfismo $(f^*, g) : (A^*, B) \longrightarrow (A'^*, B')$ en $\mathscr{A}^* \times \mathscr{A}$, $F(f^*, g) : [A, B]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [A', B']_{\mathscr{A}}$ es tal que $F(f^*, g)(u) = guf\ \forall u \in [A, B]_{\mathscr{A}}$.

Haciendo $f = 1_A$ (en F) se obtiene un funtor covariante $[A, -]_{\mathscr{A}} := [1_A^*, -]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ (no es más que el funtor Hom-covariante H^A introducido en la sección 2.4). Análogamente, haciendo $g = 1_B$ en F, se obtiene un funtor contravariante $[-, B]_{\mathscr{A}} := [-, 1_B]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^* \longrightarrow Sets$ (se trata del funtor Hom-contravariante H_B introducido en la sección 2.4). Por otro lado, se tiene que $[1_{A'}^*, g]_{\mathscr{A}}[f^*, 1_B]_{\mathscr{A}} = [f^*, g]_{\mathscr{A}} = [f^*, 1_{B'}]_{\mathscr{A}}[1_A^*, g]_{\mathscr{A}}$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta en $Sets$

$$\begin{tikzcd}
{[A,B]_{\mathscr{A}}} \arrow[r, "{[A,g]_{\mathscr{A}}}"] \arrow[d, "{[f,B]_{\mathscr{A}}}"'] & {[A,B']_{\mathscr{A}}} \arrow[d, "{[f,B']_{\mathscr{A}}}"] \\
{[A',B]_{\mathscr{A}}} \arrow[r, "{[A',g]_{\mathscr{A}}}"'] & {[A',B']_{\mathscr{A}}.}
\end{tikzcd}$$

Definición 2.9.4 *Dado un bifuntor* $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$*, en analogía con el ejemplo anterior, se define* $T(A, g) := T(1_A, g)$ *y* $T(f, B) := T(f, 1_B)$*. En particular,* T *induce dos funtores parciales* $T(A, -) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ *y* $T(-, B) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$*.*

Teorema 2.9.5 *Sean* $\mathscr{A}$*,* $\mathscr{B}$ *y* $\mathscr{C}$ *categorías. Supongamos que para cada objeto* $A \in \mathscr{A}$ *(resp.* $B \in \mathscr{B}$*) tenemos un funtor* $F_A : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ *(resp.* $G_B : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$*). Si las condiciones siguientes (a) y (b) se satisfacen:*

(a) $F_A(B) = G_B(A)\ \forall (A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$*,*

(b) para cada par de morfismos $(f, u) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$*, con* $f : A \longrightarrow A'$ *en* $\mathscr{A}$ *y*

$u : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{B}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F_A(B) = G_B(A) \arrow[r, "G_B(f)"] \arrow[d, "F_A(u)"'] & G_B(A') = F_{A'}(B) \arrow[d, "F_{A'}(u)"'] \\ F_A(B') = G_{B'}(A) \arrow[r, "G_{B'}(f)"'] & G_{B'}(A') = F_{A'}(B'), \end{tikzcd}$$

entonces, haciendo $T(A,B) := F_A(B)$ y $T(f,u) = G_{B'}(f)F_A(u)$, se obtiene un bifuntor $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$.

Demostración. $T(1_A, 1_B) = G_B(1_A)F_A(1_B) = 1_{G_B(A)}1_{F_A(B)} = 1_{T(A,B)}$. Veamos que T preserva la composición de morfismos. En efecto, sean $f_i : A_i \longrightarrow A'_i$ y $u_i : B_i \longrightarrow B'_i$ con $i = 1, 2$ y $A'_1 = A_2$, $B'_1 = B_2$. Del diagrama conmutativo en (b), se tiene que

$$\begin{aligned} T(f_2, u_2)T(f_1, u_1) &= G_{B'_2}(f_2)\big(F_{A_2}(u_2)G_{B'_1}(f_1)\big)F_{A_1}(u_1) \\ &= G_{B'_2}(f_2)\big(G_{B'_2}(f_1)F_{A_1}(u_2)\big)F_{A_1}(u_1) \\ &= G_{B'_2}(f_2f_1)F_{A_1}(u_2u_1) \\ &= T(f_2f_1, u_2u_1). \end{aligned}$$

□

Observación 2.9.6 *(1) Sea $T : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$ un bifuntor. Dados los morfismos $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ y $u : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{D}$, se tiene que $T(f, 1_Y)T(1_A, u) = T(f, u) = T(1_B, u)T(f, 1_X)$. Esto es, el siguiente diagrama en $\mathscr{E}$ conmuta*

$$\begin{tikzcd} T(A,X) \arrow[r, "T(A,u)"] \arrow[d, "T(f,X)"'] \arrow[dr, "T(f,u)"] & T(A,Y) \arrow[d, "T(f,Y)"] \\ T(B,X) \arrow[r, "T(B,u)"'] & T(B,Y). \end{tikzcd}$$

El diagrama anterior, nos dice precisamente, que los morfismos f y u inducen las siguientes transformaciones naturales en los respectivos funtores parciales

$$T(f,-) : T(A,-) \longrightarrow T(B,-) \quad y \quad T(-,u) : T(-,X) \longrightarrow T(-,Y).$$

(2) Sean $S, T : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$ bifuntores. Si $\alpha : S \longrightarrow T$ es una transformación natural, entonces para $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ y $u : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{D}$ los siguientes dos diagramas en $\mathscr{E}$ conmutan

$$\begin{tikzcd} S(A,X) \arrow[r, "\alpha_{(A,X)}"] \arrow[d, "S(f,X)"'] & T(A,X) \arrow[d, "T(f,X)"] \\ S(B,X) \arrow[r, "\alpha_{(B,X)}"'] & T(B,X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(B,X) \arrow[r, "\alpha_{(B,X)}"] \arrow[d, "S(B,u)"'] & T(B,X) \arrow[d, "T(B,u)"] \\ S(B,Y) \arrow[r, "\alpha_{(B,Y)}"'] & T(B,Y). \end{tikzcd}$$

Recíprocamente, para cada par $(A, X) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{D})$, *supongamos que tenemos un morfismo* $\alpha_{(A,X)} : S(A, X) \longrightarrow T(A, X)$ *en* $\mathscr{E}$ *tal que el par de diagramas anterior conmutan. Componiendo estos dos diagramas, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathscr{E}$

$$\begin{tikzcd} S(A,X) \arrow[r, "\alpha_{(A,X)}"] \arrow[d, "S(B,u)S(f,X)"'] & T(A,X) \arrow[d, "T(B,u)T(f,X)"] \\ S(B,Y) \arrow[r, "\alpha_{(B,Y)}"'] & T(B,Y). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, la asignación $(A, X) \longmapsto \alpha_{(A,X)}$, *es una transformación natural* $\alpha : S \longrightarrow T$.

2.10. Equivalencia de categorías

Recordemos que un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **fiel** (resp. **pleno**) si para todo par de objetos A, $B \in \mathscr{A}$ la función inducida por T

$$[A, B]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [T(A), T(B)]_{\mathscr{B}}$$

es inyectiva (resp. suprayectiva).Un funtor fiel que manda objetos distintos en objetos distintos es una **inmersión**. Decimos que T es **denso** si para todo $B \in \mathscr{B}$ existe un objeto $A \in \mathscr{A}$, tal que $T(A)$ es isomorfo a B.
Decimos que $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una **equivalencia**, si existe un funtor $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que $TS \simeq 1_{\mathscr{B}}$ y $ST \simeq 1_{\mathscr{A}}$. Una equivalencia la cual induce una correspondencia biyectiva entre los objetos de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ es un **isomorfismo de categorías**.
Por otro lado, si $S, T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ son funtores covariantes, una transformación natural $\eta : S \longrightarrow T$ es una familia de morfismos $\eta = \{\eta_A : S(A) \longrightarrow T(A)\}_{A \in \mathscr{A}}$ en $\mathscr{B}$ tal que, para todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "S(\alpha)"'] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ S(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] & T(A'). \end{tikzcd}$$

Si η_A es un isomorfismo para cada $A \in \mathscr{A}$, decimos que η es una equivalencia natural. En este caso, tenemos una transformación natural $\eta^{-1} : T \longrightarrow S$ definida por $(\eta^{-1})_A = (\eta_A)^{-1}$. Si $\eta : S \longrightarrow T$ y $\rho : T \longrightarrow U$ son transformaciones naturales de funtores, definimos la composición $\rho\eta : S \longrightarrow U$ por $(\rho\eta)_A = \rho_A \eta_A$. Para cualquier funtor T, la transformación natural identidad $1_T : T \longrightarrow T$ es por definición $(1_T)_A = 1_{T(A)}$ para toda $A \in \mathscr{A}$.
La composición de funtores y transformaciones naturales es como sigue. Sean S, $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $U : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores y $\eta : S \longrightarrow T$ una transformación natural. Entonces, tenemos una transformación natural $U\eta : US \longrightarrow UT$ definida por

$(U\eta)_A = U(\eta_A)$ para toda $A \in \mathscr{A}$. Similarmente, si $V : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor, entonces $\eta V : SV \longrightarrow TV$ está dada por $(\eta V)_D = \eta_{V(D)}$ para toda $D \in \mathscr{D}$.

Definición 2.10.1 *Sea $\eta : S \longrightarrow T$ una transformación natural. Si para cada $A \in \mathscr{A}$, el morfismo $\eta_A : S(A) \longrightarrow T(A)$ es monomorfismo η será llamada* ***monomorfismo punto a punto****. Por dualidad, se tiene la definición de* ***epimorfismo punto a punto****.*

Observación 2.10.2 *Si $\eta : S \longrightarrow T$ es un monomorfismo punto a punto y T es un funtor aditivo, entonces S es aditivo. Dualmente, si η es un epimorfismo punto a punto y S es aditivo, entonces T es aditivo.*

Proposición 2.10.3 *Un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es fiel, pleno y denso si y sólo si existe un funtor $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ junto con equivalencias naturales*

$$\varphi : 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow TS \qquad y \qquad \psi : ST \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}.$$

Si este es el caso, entonces siempre podemos escoger ψ tal que $T\psi = (\varphi T)^{-1}$ y $S\varphi = (\psi S)^{-1}$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor, $\varphi : 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow TS$ y $\psi : ST \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ equivalencias naturales. Entonces, el isomorfismo $\varphi_B : B \longrightarrow T(S(B))$ para toda $B \in \mathscr{B}$ muestra que T es denso. Dado un morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} ST(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "ST(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ ST(A') \arrow[r, "\psi_{A'}"] & A'. \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Sean $f,g \in [A, A']_{\mathscr{A}}$ tales que $T(f) = T(g)$. Luego $ST(f) = ST(g)$; y por lo tanto, como $g = \psi_{A'}ST(g)\psi_A^{-1}$ y $f = \psi_{A'}ST(f)\psi_A^{-1}$, se tiene que $g = \psi_{A'}ST(g)\psi_A^{-1} = \psi_{A'}ST(f)\psi_A^{-1} = f$. Luego, T es fiel y por simetría S es fiel. Un morfismo $\beta : T(A) \longrightarrow T(A')$ induce un morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ donde $\alpha := \psi_{A'}S(\beta)\psi_A^{-1}$. Veamos que $\beta = T(\alpha)$; para hacer esto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} ST(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "S(\beta)"'] & A \arrow[r, "\psi_A^{-1}"] \arrow[d, "\alpha"] & ST(A) \arrow[d, "{ST(\alpha),}"] \\ ST(A') \arrow[r, "\psi_{A'}"'] & A' \arrow[r, "\psi_{A'}^{-1}"'] & ST(A'), \end{tikzcd}$$

de donde se tiene que $ST(\alpha) = S(\beta)$; pero como S es fiel se sigue que $\beta = T(\alpha)$, probándose que T es pleno.
($\Rightarrow$) Supongamos que T es fiel, pleno y denso. Como T es denso, para cada objeto

$B \in \mathscr{B}$ fijamos un objeto $S(B) \in \mathscr{A}$ y un isomorfismo $\varphi_B : B \longrightarrow TS(B)$. Ahora, sea $\beta : B \longrightarrow B'$ un morfismo en $\mathscr{B}$, entonces éste induce un morfismo $\varphi_{B'}\beta\varphi_B^{-1} : TS(B) \longrightarrow TS(B')$. Como T es fiel y pleno, existe un único morfismo $S(\beta) : S(B) \longrightarrow S(B')$ tal que $\varphi_{B'}\beta\varphi_B^{-1} = T(S(\beta))$. En otras palabras, para cada $\beta : B \longrightarrow B'$ existe un único morfismo $S(\beta) : S(B) \longrightarrow S(B')$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "\beta"'] & TS(B) \arrow[d, "TS(\beta)"] \\ B' \arrow[r, "\varphi_{B'}"'] & TS(B'). \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Veamos que S es un funtor. Haciendo $\beta = 1_B$ en el diagrama anterior, existe un único $S(1_B) : S(B) \longrightarrow S(B)$ tal que $TS(1_B) = 1_B$; pero como T es un funtor pleno se tiene que $S(1_B) = 1_{S(B)}$.
Probemos ahora que S preserva la composición de $\mathscr{B}$. En efecto, sean $\beta : B \longrightarrow B'$ y $\alpha : B' \longrightarrow B''$ morfismos en $\mathscr{B}$, como T es pleno y fiel, existe un único morfismo $S(\alpha\beta) : S(B) \longrightarrow S(B'')$ en $\mathscr{A}$ tal que $\varphi_{B''}(\alpha\beta)\varphi_B^{-1} = T(S(\alpha\beta))$; pero también se tiene que $\varphi_{B''}(\alpha\beta)\varphi_B^{-1} = T(S(\alpha))T(S(\beta))$. Por lo que $T(S(\alpha\beta)) = T(S(\alpha))T(S(\beta)) = T(S(\alpha)S(\beta))$. Por lo tanto $S(\alpha\beta) = S(\alpha)S(\beta)$ pues T es fiel, probándose que $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor.
Por otro lado, de (2.5), se ve que $\varphi : 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow TS$ es una equivalencia natural. Entonces, para cada $A \in \mathscr{A}$ tenemos un isomorfismo $\varphi_{T(A)} : T(A) \longrightarrow TST(A)$ en $\mathscr{B}$; en particular, existe $\psi'_A : A \longrightarrow ST(A)$ tal que $T(\psi'_A) = \varphi_{T(A)}$. Por otro lado, como $\varphi_{T(A)}$ es un isomorfismo, existe $\varphi_{T(A)}^{-1} : TST(A) \longrightarrow T(A)$ tal que $\varphi_{T(A)}^{-1}\varphi_{T(A)} = 1_{T(A)}$; y como T es pleno, existe $\psi_A : ST(A) \longrightarrow A$ tal que

$$T(\psi_A) = \varphi_{T(A)}^{-1}. \tag{2.6}$$

Por lo tanto $T(\psi_A\psi'_A) = 1_{T(A)}$; y como T es fiel, entonces $\psi_A\psi'_A = 1_A$. Análogamente $\psi'_A\psi_A = 1_{ST(A)}$, por lo que ψ_A es isomorfismo. Veamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} ST(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "ST(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ ST(A') \arrow[r, "\psi_{A'}"'] & A' \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathscr{A}$. En efecto, aplicandole T al diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} TST(A) \arrow[r, "T(\psi_A)"] \arrow[d, "TST(\alpha)"'] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ TST(A) \arrow[r, "T(\psi_{A'})"'] & T(A'). \end{tikzcd}$$

Dado que $T(\psi_A) = \varphi^{-1}_{T(A)}$ y $T(\psi_{A'}) = \varphi^{-1}_{T(A')}$, reemplazando a β por $T(\alpha)$ en (2.5) obtenemos que el diagrama anterior conmuta. Pero como T es fiel, entonces T refleja diagramas conmutativos; por lo tanto $\psi : ST \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ es una equivalencia natural.
Finalmente, observemos que $(T\psi)^{-1}_A = (T(\psi_A))^{-1} = \varphi_{T(A)} = (\varphi T)_A$, lo que implica que $T\psi = (\varphi T)^{-1}$. Probemos ahora que $(S\varphi)_B = \psi^{-1}_{S(B)}$ para toda $B \in \mathscr{B}$. Para hacer esto, como T es fiel, es suficiente demostrar que $TS(\varphi_B) = T\psi^{-1}_{S(B)}$. Por (2.6), se tiene que $T\psi^{-1}_{S(B)} = \varphi_{TS(B)}$, y reemplazando β por φ_B en (2.5), tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & TS(B) \arrow[d, "TS(\varphi_B)"] \\ TS(B) \arrow[r, "\varphi_{TS(B)}"'] & TS(TS(B)). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, como φ_B es un isomorfismo, se tiene que $TS(\varphi_B) = \varphi_{TS(B)}$; luego $TS(\varphi_B) = T(\psi^{-1}_{S(B)})$. De donde $S(\varphi_B) = \psi^{-1}_{S(B)}$ y entonces $S\varphi = (\psi S)^{-1}$. $\square$

Observación 2.10.4 *Sean S, $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ funtores covariantes y $\theta : S \longrightarrow T$ una equivalencia natural. Si $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, entonces SD y TD son representaciones isomorfas en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$. Ahora supongamos que S preserva límites, y sea $f : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ el límite para D. Entonces, $S(f) : \mathbb{I}_{S(L)} \longrightarrow SD$ es el límite para SD. Luego, por 2.2.6, $\theta S(f) : S(L) \longrightarrow T(D)$ es el límite para TD. Consideremos $\theta_L^{-1} : T(L) \longrightarrow S(L)$, por 2.2.5, tenemos que $\theta S(f)\mathbb{I}_{\theta_L^{-1}} = T(f)\mathbb{I}_{\theta_L}\mathbb{I}_{\theta_L^{-1}} = T(f)$ es el límite para TD.*
En otras palabras, si T es naturalmente equivalente a S y S preserva límites, entonces T también preserva límites. En una forma similar, se puede demostrar que si T tiene alguna propiedad de preservación, entonces S también la tiene.

Proposición 2.10.5 *Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ una equivalencia de categorías. Entonces*

(a) T es un monofuntor, epifuntor, preserva límites y preserva colímites,

(b) $\mathscr{A}$ es completa, cocompleta, normal, conormal ó exacta si y sólo si $\mathscr{B}$ tiene la correspondiente propiedad,

(c) si alguna de las dos categorías es aditiva, entonces existe una única estructura aditiva sobre la otra que hace a T un funtor aditivo.

Demostración.
Sea $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ la equivalencia de 2.10.3.

(a) Para mostrar que T preserva límites, sea $\gamma : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ el límite de una representación $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Si $T(\gamma) : \mathbb{I}_{T(L)} \longrightarrow TD$ no es el límite para TD en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, entonces por 2.8.2, $ST(\gamma) : \mathbb{I}_{ST(L)} \longrightarrow ST(D)$ no es el límite para $ST(D)$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Pero por 2.10.4, esto implica que $\gamma : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ no es el límite para D, esto en vista de la equivalencia natural $\psi : ST \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$. Esta contradicción, muestra que T preserva límites. Las otras propiedades de preservación se demuestran de manera análoga.

(b) Supongamos que $\mathscr{B}$ es completa. Sea $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$, como $\mathscr{B}$ es completa, podemos encontrar el límite $\gamma : \mathbb{I}_X \longrightarrow TD$ para $TD \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$. Pero por (a), S preserva límites, esto significa que $S(\gamma) : \mathbb{I}_{S(X)} \longrightarrow ST(D)$ es el límite para $STD \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Entonces, por 2.2.6, $\psi S(\gamma) : \mathbb{I}_{S(X)} \longrightarrow D$ es el límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$; probándose que $\mathscr{A}$ es completa. Las demás propiedades se demuestran de manera análoga.

(c) Por 2.10.3, T es fiel, pleno y denso. En particular, para cada par (X, Y) de objetos de $\mathscr{A}$, el funtor T induce una biyección $[X, Y]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [T(X), T(Y)]_{\mathscr{B}}$. Usando tal biyección es que se traslada, de manera única, la estructura aditiva de tal forma que T resulte ser un funtor aditivo.

□

Si definimos la imagen $Im(T)$ de un funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ como la clase $\{T(A) \mid A \in \mathscr{A}\}$ de objetos junto con la clase $\{T(\alpha) \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ de morfismos, se tiene que $Im(T)$ no necesariamente es una subcategoría de $\mathscr{B}$. El problema es que T podría no ser inyectivo en objetos. Si $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2 : A' \longrightarrow A_2$ son morfismos en $\mathscr{A}$ tales que $T(A) = T(A')$ pero $A \neq A'$, entonces $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ están en $Im(T)$, pero $T(\alpha_1)T(\alpha_2)$ no necesariamente está en $Im(T)$. Sin embargo, si T es inyectivo en objetos entonces $Im(T)$ es una subcategoría de $\mathscr{B}$. La siguiente proposición, nos dice que, sin perdida de generalidad, podemos asumir que T es inyectivo en objetos.

Proposición 2.10.6 *Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor. Entonces, existe una categoría $\mathscr{B}'$, la cual contiene a $\mathscr{B}$ como subcategoría equivalente, y un funtor $T' : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}'$ que es inyectivo en objetos y naturalmente equivalente a IT, donde $I : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}'$ es el funtor inclusión.*

Demostración. Ver [9]. □

La siguiente proposición, la cual se usará mas adelante, muestra que si reemplazamos a $\mathscr{B}$, en 2.10.6, por la categoría de grupos abelianos Ab, entonces se puede suponer que $\mathscr{B}' = Ab$.

Proposición 2.10.7 *Si $T : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es un funtor cualquiera, entonces T es naturalmente equivalente a un funtor $T' : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ el cual es inyectivo en objetos.*

Demostración. Para $A \in \mathscr{A}$, definimos $T'(A) = \{(A, x) \mid x \in T(A)\}$. La suma en $T'(A)$ está definida por $(A, x) + (A, y) = (A, x + y)$. Para un morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$, definimos $T'(\alpha)(A, x) = (A', T(\alpha)(x))$. No es difícil ver que que la aplicación $\theta : T \longrightarrow T'$, dada por $\theta_A(x) = (A, x)$, es una equivalencia natural de funtores. □

2.11. Categorías de funtores

Definición 2.11.1 *Para cualesquiera dos categorías $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ denotaremos por $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ a la clase de todos los funtores covariantes de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$. Dados S, $T \in [\mathscr{A},\mathscr{B}]$, denotaremos por $[S,T]$ la clase de todas las transformaciones naturales de S a T.*

Observación 2.11.2 *Con la regla de composición de transformaciones naturales de funtores dada en 1.4.6, tenemos que $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ está muy cerca de ser una categoría. El único requerimiento que hace falta es que $[S,T]$ sea un conjunto.*

Lema 2.11.3 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña, entonces la clase $Mor(\mathscr{A})$ de morfismos de $\mathscr{A}$, y el producto de morfismos $\prod_{(A,B)\in Obj(\mathscr{A})\times Obj(\mathscr{A})}[A,B]_{\mathscr{A}}$ son conjuntos.*

Demostración. Dado que la clase de objetos de $\mathscr{A}$, $Obj(\mathscr{A})$, es un conjunto y $Mor(\mathscr{A}) = \bigcup_{(A,B)\in Obj(\mathscr{A})\times Obj(\mathscr{A})}[A,B]_{\mathscr{A}}$ concluimos que $Mor(\mathscr{A})$ es un conjunto. De la misma manera, $\prod_{(A,B)\in Obj(\mathscr{A})\times Obj(\mathscr{A})}[A,B]_{\mathscr{A}}$ es un conjunto pues cada $[A,B]_{\mathscr{A}}$ lo es. $\square$

Proposición 2.11.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequeña y $\mathscr{B}$ una categoría arbitraria. Entonces*

(a) los funtores de $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ son los objetos, y las transformaciones naturales de dichos funtores son los morfismos, de una categoría que será denotada por $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$,

(b) si $\mathscr{B}$ es pequeña entonces $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ también lo es.

Demostración. Dada dos clases cualesquiera $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$, denotaremos por $[\mathscr{U},\mathscr{V}]_{Sets}$ a la clase de todas las funciones de $\mathscr{U}$ en $\mathscr{V}$.

(a) Sean $S,T \in [\mathscr{A},\mathscr{B}]$. Como $\mathscr{A}$ es pequeña, obtenemos que las siguientes clases
$$\mu_S = \bigcup_{(A,B)\in Obj(\mathscr{A})\times Obj(\mathscr{A})}[S(A),S(B)]_{\mathscr{B}} \quad y$$
$$\eta_{(S,T)} = \prod_{A\in Obj(\mathscr{A})}[S(A),T(A)]_{\mathscr{B}}$$
son conjuntos. Más aún, de 2.11.3, la clase $\mathscr{C}_{(S,T)} = [Mor(\mathscr{A}),\mu_S]_{Sets} \times [Mor(\mathscr{A}),\mu_T]_{Sets} \times \eta_{(S,T)}$ es un conjunto. Ahora bien, cada funtor $S \in [\mathscr{A},\mathscr{B}]$, define una función $\Phi_S : Mor(\mathscr{A}) \longrightarrow \mu_S$, donde $\Phi_S(f) = S(f)$; claramente, el funtor S está completamente determinado por $\Phi_S \in [Mor(\mathscr{A}),\mu_S]_{Sets}$. Por otro lado, una transformación natural $\alpha : S \longrightarrow T$ es un elemento $\bar{\alpha} := (\alpha_A)_{A\in Obj(\mathscr{A})}$ del conjunto $\eta_{(S,T)}$. Por lo tanto, cada $\alpha \in [S,T]$ se puede ver como cierto triple $(\Phi_S,\Phi_T,\bar{\alpha}) \in \mathscr{C}_{(S,T)}$. Entonces, $[S,T]$ es una subclase de $\mathscr{C}_{(S,T)}$ la cual es un conjunto; y esto implica que $[S,T]$ es un conjunto.

(b) Supongamos que $\mathscr{B}$ es pequeña.
Usando la notación de (a), tenemos que para cada $S \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, necesariamente $\Phi_S \in [Mor(\mathscr{A}), \mu_S]_{Sets} \subset [Mor(\mathscr{A}), Mor(\mathscr{B})]_{Sets}$. Por lo tanto, dado que $Mor(\mathscr{A})$ y $Mor(\mathscr{B})$ son conjuntos (por 2.11.3), se obtiene que la clase de funtores de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ es un conjunto.

□

Observación 2.11.5 *(1) El funtor $\mathbb{D} : [\mathscr{A}, \mathscr{B}] \longrightarrow [\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*]$, definido en objetos por $\mathbb{D}(T) = T^*_* \ \forall T \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y en morfismos $\alpha : T \longrightarrow S$ por $\mathbb{D}(\alpha) = \alpha^*_* : S^*_* \longrightarrow T^*_*$, es un isomorfismo contravariante de categorías, donde T^*_* es la composición de funtores $\mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{T} \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}^*$ y $(\alpha^*_*)_{A^*} := \alpha^*_A \ \forall A \in Obj(\mathscr{A})$. Esto es, la categoría dual de funtores $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]^*$ es isomorfa a $[\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*]$.*

(2) Dado un morfismo $\alpha : T \longrightarrow S$ en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, tenemos que α es un isomorfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ si y sólo si $\alpha_A : T(A) \longrightarrow S(A)$ también lo es en $\mathscr{B}$ para todo objeto $A \in \mathscr{A}$.

(3) Sea $\alpha : T \longrightarrow S$ un morfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Si $\alpha_A : T(A) \longrightarrow S(A)$ es un monomorfismo en $\mathscr{B} \ \forall A \in Obj(\mathscr{A})$, entonces α es un monomorfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. En efecto, si no fuera así tendríamos que $\alpha\varphi = \alpha\psi$ para algunos $\varphi \neq \psi$. Por lo tanto, para algún objeto $A \in \mathscr{A}$, $\varphi_A \neq \psi_A$. Pero como $\alpha_A\varphi_A = \alpha\psi_A$ y α_A es un monomorfismo, entonces $\varphi_A = \psi_A$, lo cual contradice que $\varphi \neq \psi$; probándose que α es un monomorfismo.

(4) Si $\mathscr{B}$ tiene objeto cero, el funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ tal que $T(A) = 0 \ \forall A \in \mathscr{A}$ es un objeto cero en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. En este caso, el funtor T será también denotado por 0.

(5) Si $\mathscr{B}$ es aditiva entonces $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ también lo és. En efecto, la estructura de grupo abeliano en $[S(A), T(A)]_{\mathscr{B}}$ induce una estructura aditiva en $[S, T]$; y por lo tanto en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, haciendo $(\varphi + \psi)_A = \varphi_A + \psi_A$ para todo $A \in Obj(\mathscr{A})$.

En lo que sigue, veremos que el límite de $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A}, \mathscr{B}])$ se puede calcular si conocemos el límite de $D(A) \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ para cada objeto $A \in \mathscr{A}$. La representación $D(A)$ se define como sigue.

Definición 2.11.6 *Dados $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A}, \mathscr{B}])$ y $A \in \mathscr{A}$, hacemos*

$$D(A)(i) := D_i(A) \qquad \forall i \in \Sigma_0,$$

$$D(A)(m) := D(m)_A : D_i(A) \longrightarrow D_j(A) \quad \forall m : i \longrightarrow j \in \Sigma_1.$$

Usando que $D(m) : D_i \longrightarrow D_j$ es un morfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, y evaluando en A, concluimos que $D(A) \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$.

Lema 2.11.7 *Las siguientes correspondencias entre categorías son funtores.*

(a) *El funtor evaluación en objetos* $E_A : \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A},\mathscr{B}]) \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ *con* $A \in Obj(\mathscr{A})$*, definido por:*

(i) $E_A(D) = D(A)\ \forall D \in Obj\big(\mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A},\mathscr{B}])\big)$,

(ii) *si* $\alpha : D \longrightarrow D'$ *es un morfismo en* $\mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A},\mathscr{B}])$*, el morfismo* $E_A(\alpha) : E_A(D) \longrightarrow E_A(D')$ *en* $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ *está definido como*

$$E_A(\alpha) = \{(\alpha_i)_A : D_i(A) \longrightarrow D'_i(A)\}_{i\in\Sigma_0}.$$

(b) *El funtor evaluación en representaciones* $E^D : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ *con* $D \in Obj\big(\mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A},\mathscr{B}])\big)$ *definido por:*

(i) $E^D(A) = D(A)\ \forall A \in Obj(\mathscr{A})$,

(ii) *si* $f : A \longrightarrow A'$ *es un morfismo en* $\mathscr{A}$*, el morfismo* $E^D(f) : E^D(A) \longrightarrow E^D(A')$ *en* $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ *está definido como*

$$E^D(f) = \{D_i(f) : D_i(A) \longrightarrow D_i(A')\}_{i\in\Sigma_0}.$$

Demostración. Son cálculos de rutina. □

Los funtores del lema anterior se conocen como **funtores evaluación**. El primero de ellos, tiene la propiedad de conmutar con límites.

Teorema 2.11.8 *Sea* $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A},\mathscr{B}])$*. Si existe* $\lim E_A(D)\ \forall A \in \mathscr{A}$*, entonces existe* $\lim D$ *y además* $E_A(\lim D) = \lim E_A(D)\ \forall A \in \mathscr{A}$*.*

Demostración. Supongamos que existe $L(A) := \lim E_A(D)\ \forall A \in \mathscr{A}$, y sea $\alpha^A : \mathbb{I}_{L(A)} \longrightarrow D(A)$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ el límite para cada $A \in \mathscr{A}$. Sea $f : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$. Usando que $E^D(f) : D(A) \longrightarrow D(A')$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ (ver 2.11.7), de la propiedad universal del límite, existe un único morfismo $L(f) : L(A) \longrightarrow L(A')$ tal que el siguiente diagrama en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}_{L(A)} \arrow[r, "\alpha^A"] \arrow[d, "\mathbb{I}_{L(f)}"'] & D(A) \arrow[d, "E^D(f)"] \\ \mathbb{I}_{L(A')} \arrow[r, "\alpha^{A'}"'] & D(A'). \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Por la unicidad del morfismo $L(f) : L(A) \longrightarrow L(A')$, que hace conmutar el diagrama (2.7), se obtiene que $L \in [\mathscr{A},\mathscr{B}]$. Por otro lado, de (2.7), se obtiene que $\forall i \in \Sigma_0$ y $\forall A \in \mathscr{A}$, el siguiente diagrama en $\mathscr{B}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} L(A) \arrow[r, "\alpha_i^A"] \arrow[d, "L(f)"'] & D_i(A) \arrow[d, "D_i(f)"] \\ L(A') \arrow[r, "\alpha_i^{A'}"'] & D_i(A'). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\alpha_i : L \longrightarrow D_i$ es un morfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ para cada $i \in \Sigma_0$, donde $\alpha_i = \{\alpha_i^A : L(A) \longrightarrow D_i(A)\}_{A \in \mathscr{A}}$. Veamos que $\alpha : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es el límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A}, \mathscr{B}])$, donde $\alpha = \{\alpha_i : L \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$. Probemos primero que $\alpha : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un morfismo de representaciones; en efecto, sean $m : i \longrightarrow j$ en Σ_1 y $A \in \mathscr{A}$. Dado que $\alpha^A : \mathbb{I}_{LA} \longrightarrow D(A)$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, se tiene que $D(m)_A \alpha_i^A = \alpha_j^A$; por lo tanto $D(m)\alpha_i = \alpha_j$, probándose que $\alpha \in \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A}, \mathscr{B}])$.
Sea $\beta : \mathbb{I}_S \longrightarrow D$ un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A}, \mathscr{B}])$. Aplicando el funtor evaluación E_A al morfismo β, obtenemos que $E_A(\beta) : \mathbb{I}_{S(A)} \longrightarrow D(A)$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$. Por lo tanto, existe un único morfismo $\psi_A : S(A) \longrightarrow L(A)$ tal que $E_A(\beta) = \alpha^A \mathbb{I}_{\psi_A}$. Definimos $\psi : S \longrightarrow L$ como $\psi = \{\psi_A : S(A) \longrightarrow L(A)\}_{A \in \mathscr{A}}$. Resta probar que ψ es una transformación natural. En efecto, sea $f : A \longrightarrow A'$ un morfismo en $\mathscr{A}$, de la composición de morfismos en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$

$$\mathbb{I}_{S(A)} \xrightarrow{\mathbb{I}_{\psi_A}} \mathbb{I}_{L(A)} \xrightarrow{\alpha^A} D(A) \xrightarrow{E^D(f)} D(A'),$$

se tiene que existe un único morfismo $h : S(A) \longrightarrow L(A')$ en $\mathscr{B}$ tal que

$$\alpha^{A'} \mathbb{I}_h = E^D(f) \alpha^A \mathbb{I}_{\psi_A}. \tag{2.8}$$

Usando ahora que $\alpha_i : L \longrightarrow D_i$ es transformación natural, se tiene que $\alpha_i^{A'} L(f)\psi_A = D_i(f)\alpha_i^A \psi_A$; y entonces por el diagrama (2.7), concluimos que $h = L(f)\psi_A$.
Por otro lado, dado que $E_A(\beta) = \alpha^A \mathbb{I}_{\psi_A}$ y $\beta_i : S \longrightarrow D_i$ es una transformación natural, obtenemos las igualdades

$$\alpha_i^{A'} \psi_{A'} S(f) = (E_{A'}(\beta))_i S(f) = D_i(f)(E_A(\beta))_i = D_i(f)\alpha_i^A \psi_A.$$

Luego, por (2.8), se obtiene que $h = \psi_{A'} S(f)$. Esto es, $L(f)\psi_A = \psi_{A'} S(f)$; probándose que $\psi : S \longrightarrow L$ es un morfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Por lo tanto, $\alpha : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es el límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma([\mathscr{A}, \mathscr{B}])$. Si denotamos al funtor L como $\lim D$, identificando a L con su representación trivial $\mathbb{I}_L$, se tiene fácilmente que $E_A(\lim D) = \lim E_A(D)$. $\square$

Corolario 2.11.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequeña, $\mathscr{B}$ una categoría arbitraria y Σ un diagrama.*

(a) Si $\mathscr{B}$ es Σ-completa entonces $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ es Σ-completa.

(b) Si $\mathscr{B}$ tiene productos, entonces el producto $\prod_{i \in I} T_i$ de una familia $\{T_i\}_{i \in I}$ en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ existe; y además, $(\prod_{i \in I} T_i)(A)$ es el producto $\prod_{i \in I} T_i(A)$ en $\mathscr{B}$, y la proyección $p_k : \prod_{i \in I} T_i \longrightarrow T_k$ es la transformación natural inducida por cada proyección $p_k^A : \prod_{i \in I} T_i(A) \longrightarrow T_k(A)$ en $\mathscr{B}$ para cada $A \in \mathscr{A}$.

(c) Si $\mathscr{B}$ tiene kerneles y $\psi : S \longrightarrow T$ es un morfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, entonces existe $\theta : K \longrightarrow S$ con $Ker(\psi) = \theta$ en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$; y además, $\theta_A : K(A) \longrightarrow S(A)$ es el kernel de $\psi_A : S(A) \longrightarrow T(A)$ en $\mathscr{B}$.

(d) Si $\mathscr{B}$ es exacta (resp. abeliana) entonces $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ también lo es.

Demostración.

(a) Se sigue inmediatamente de 2.11.8, ya que el límite se calcula punto a punto.

(b) Se sigue de 2.11.8, ya que el producto es un tipo de límite.

(c) Se sigue de 2.11.8, ya que el kernel es un tipo de límite.

(d) Supongamos que $\mathscr{B}$ es una categoría exacta. Sea $\varphi : T' \longrightarrow T$ un monomorfismo en $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$. Entonces φ tiene kernel cero; por lo tanto φ_A tiene kernel cero en $\mathscr{B}$ para toda $A \in \mathscr{A}$, y como $\mathscr{B}$ es exacta, esto implica que φ_A es un monomorfismo para toda $A \in \mathscr{A}$. Sea $F : T \longrightarrow T''$ el cokernel de φ en $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$, por el dual de (c), $F_A : T(A) \longrightarrow T''(A)$ es el cokernel de φ_A para toda $A \in \mathscr{A}$. Luego, de la normalidad de $\mathscr{B}$, φ_A es el kernel de F_A; entonces φ es el kernel de F. De donde $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ es normal y dualmente es conormal. Sea $\eta : S \longrightarrow T$ una transformación natural y $\Gamma : I \longrightarrow T$ el kernel de su cokernel. Luego $\Gamma_A : I(A) \longrightarrow T(A)$ es la imagen de $\eta_A : S(A) \longrightarrow T(A)$, y por lo tanto tenemos un epimorfismo $\psi_A : S(A) \longrightarrow I(A)$ tal que $\eta_A = \Gamma_A\psi_A$ para toda $A \in \mathscr{A}$. No es difícil verificar, del hecho que $\Gamma : I \longrightarrow T$ es monomorfismo punto a punto, que $\psi_A : S(A) \longrightarrow I(A)$ se levanta a una transformación natural $\psi : S \longrightarrow I$. Hemos mostrado que todo morfismo en $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ se escribe como un epimorfismo seguido de un monomorfismo, y por lo tanto $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ es una categoría exacta. Entonces, por (b) y (c) y por 2.11.5(5), se ve que si $\mathscr{B}$ es abeliana entonces $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ también lo es.

□

Lema 2.11.10 *Sean Σ y Σ' diagramas, y sea $\equiv$ una relación de conmutatividad en Σ (ver seccion 2.1). Si $\mathscr{B}$ es una categoría Σ'-completa y $\sim$ es una relación de conmutatividad en Σ tal que $\sim$ es una subrelación de $\equiv$, entonces $Rep_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B})$ es una subcategoría Σ'-completa de $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{B}$ es Σ'-completa, y sea $\sim$ una relación de conmutatividad en Σ tal que $\sim$ es una subrelación de $\equiv$. Por 2.1.6, tenemos que $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$ es la subcategoría plena de $\mathrm{Rep}_{\Sigma}(\mathscr{B})$ cuyos objetos son los objetos $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma}(\mathscr{B})$ que satisfacen la relación $\sim$, esto es, tales que $\psi(D)(m) = \psi(D)(m')$ si $m \sim m'$. Por 2.1.7, $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B}) \simeq [\mathscr{P}\Sigma/\sim,\mathscr{B}]$; y por lo tanto; por 2.11.9, $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$ es Σ'-completa. Sea $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B})$, dado que $\sim$ es una subrelación de $\equiv$ y D satisface la relación $\equiv$, se tiene que D satisface la relación $\sim$; por lo tanto $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$. Entonces, $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B})$ es una subcategoría plena de $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$.
Sea ahora $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathrm{Rep}_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B}))$, y sea $\lim D$ el límite en $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$. Hay que ver que $\lim D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B})$. Para esto, usamos que $\mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$ es equivalente a la categoría de funtores $[\mathscr{P}\Sigma/\sim,\mathscr{B}]$. Identificando estas categorías, podemos

asumir que $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma'}([\mathscr{P}\Sigma/\sim, \mathscr{B}])$. En el teorema 2.11.8, está la receta para calcular $\lim D$, lo cual nos dice que hay que calcularlo "punto a punto", es decir, calcular $\lim D(i)$ en $\mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathscr{B})$ para cada vértice $i \in \Sigma_0$. Usando que $\sim$ es una subrelación de $\equiv$, tenemos que $\lim D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B})$, probándose el lema. $\square$

Corolario 2.11.11 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequeña y $\mathscr{B}$ una categoría Σ'-completa. Si $\mathscr{A}'$ es una categoría cociente de $\mathscr{A}$, entonces $[\mathscr{A}', \mathscr{B}]$ es una subcategoría Σ'-completa de $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$.*

Demostración. Como $\mathscr{A}$ es pequeña, se puede probar que existe un diagrama Σ y una relación de conmutatividad $\sim$ en Σ tales que $\mathscr{A} = \mathscr{P}\Sigma/\sim$. Dado que $\mathscr{A}'$ es un cociente de $\mathscr{A}$, entonces es de la forma $\mathscr{A}' = \mathscr{A}/\sim_0$, donde $\sim_0$ es una relación compatible con $\mathscr{A}$. Luego, $\mathscr{A}' = (\mathscr{P}\Sigma/\sim)/\sim_0$ y con esto definimos una relación $\equiv$ de conmutatividad en Σ como sigue. Dados m, $m' \in \mathscr{P}\Sigma$, decimos que $m \equiv m'$ si y sólo si $[m]_\sim \sim_0 [m']_\sim$, donde $[m]_\sim := \{x \in \mathscr{P}\Sigma \mid x \sim m\}$. Ahora veamos que $\sim$ es una subrelación de $\equiv$. En efecto, se tiene que si $m \sim m'$ entonces $[m]_\sim = [m']_\sim$. De donde se tiene que $[m]_\sim \sim_0 [m']_\sim$; y por lo tanto $m \equiv m'$. Esto es, $\sim$ es una subrelación de $\equiv$; y además $\mathscr{A}' = \mathscr{P}\Sigma/\equiv$. Dado que, por 2.1.7, sabemos que $[\mathscr{A}', \mathscr{B}] \simeq \mathrm{Rep}_{\Sigma/\equiv}(\mathscr{B})$ y $[\mathscr{A}, \mathscr{B}] \simeq \mathrm{Rep}_{\Sigma/\sim}(\mathscr{B})$, entonces el corolario se sigue del lema anterior. $\square$

2.12. El Funtor $\lim_\Sigma$

Definición 2.12.1 *Sea $\mathscr{B}$ una categoría Σ-completa. En este caso, se define el funtor $\lim_\Sigma : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{B}$ como sigue. Sea $\alpha : D \longrightarrow D'$ un morfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ y $\eta : \mathbb{I}_{LD} \longrightarrow D$ (resp. $\eta' : \mathbb{I}_{LD'} \longrightarrow D'$) el límite de D (resp. D'). Por definición de límite, existe un único morfismo $\bar{\alpha} : LD \longrightarrow LD'$ en $\mathscr{B}$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{CD} \mathbb{I}_{LD} @>{\eta}>> D \\ @V{\mathbb{I}_{\bar{\alpha}}}VV @VV{\alpha}V \\ \mathbb{I}_{LD'} @>>{\eta'}> D' \end{CD}$$

conmuta en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$. Haciendo $\lim_\Sigma(D) := LD$ y $\lim_\Sigma(\alpha) := \bar{\alpha}$, es claro que se obtiene un funtor $\lim_\Sigma : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{B}$.

Observación 2.12.2 *Sea Σ' un diagrama, por composición punto a punto (ver 2.5.5), $\lim_\Sigma : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{B}$ induce un funtor, que será denotado también por $\lim_\Sigma$, $\lim_\Sigma : \mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathscr{B})$. Suponiendo que existe $\lim_{\Sigma'}(\lim_\Sigma D)$ para $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}))$, ¿vale la igualdad $\lim_{\Sigma'}(\lim_\Sigma D) = \lim_\Sigma(\lim_{\Sigma'} D)$? Más adelante veremos que si vale.*

Definición 2.12.3 *Sea $\mathscr{B}$ una categoría Σ-completa. Consideremos las siguientes correspondencias.*

(a) *Los bifuntores* $T = [\mathbb{I}_-, -]$, $S = [-, \lim_\Sigma -] : \mathscr{B}^* \times \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow Sets$, *donde:*

(i) *para cada par* $(B, D) \in Obj(\mathscr{B}^* \times \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}))$, *se define* $T(B, D) := [\mathbb{I}_B, D]$ *y* $S(B, D) := [B, \lim_\Sigma D]$,

(ii) *dados los morfismos* $\alpha^* : B \longrightarrow B'$ *en* $\mathscr{B}^*$ *y* $\beta : D \longrightarrow D'$ *en* $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, *se define*
$T(\alpha^*, \beta)(f) := \beta f \mathbb{I}_\alpha \qquad \forall f \in T(B, D)$,
$S(\alpha^*, \beta)(g) := \lim_\Sigma(\beta) g \alpha \qquad \forall g \in S(B, D)$.

(b) *Una correspondencia* $\eta_{(B,D)} : T(B, D) \longrightarrow S(B, D)$, *definida como sigue. Sea* $\beta \in T(B, D)$ *y* $\gamma : \mathbb{I}_{\lim_\Sigma(D)} \longrightarrow D$ *el límite de* D. *Por definición de límite, sabemos que existe un único* $\bar{\beta} : B \longrightarrow \lim_\Sigma D$ *en* $\mathscr{B}$ *tal que el siguiente diagrama conmuta en* $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}_{\lim_\Sigma D} \arrow[r, "\gamma"] & D \\ \mathbb{I}_B \arrow[u, "\mathbb{I}_{\bar{\beta}}"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Hacemos, por definición, $\eta_{(B,D)}(\beta) := \bar{\beta}$.

Lema 2.12.4 *Sea* $\mathscr{B}$ *una categoría* Σ*-completa,* $T, S : \mathscr{B}^* \times \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow Sets$ *y* $\eta_{(B,D)} : T(B, D) \longrightarrow S(B, D)$ *las correspondencias de la definición anterior. Entonces* $\eta : T \longrightarrow S$ *es una equivalencia natural.*

Demostración. Veamos primero que $\eta_{(B,D)} : T(B, D) \longrightarrow S(B, D)$ es biyectivo. En efecto, consideremos $\rho_{(B,D)} : S(B, D) \longrightarrow T(B, D)$ con $\rho_{(B,D)}(\theta) := \gamma \mathbb{I}_\theta$, donde $\gamma : \mathbb{I}_{\lim D} \longrightarrow D$ es el límite de D. Por la definición de $\eta_{(B,D)}$, se ve fácilmente que $\eta^{-1}_{(B,D)} = \rho_{(B,D)}$.
Finalmente, probemos que $\eta : T \longrightarrow S$ es natural. En efecto, sean $\alpha^* : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{B}^*$, $\beta : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ y $\gamma' : \mathbb{I}_{\lim_\Sigma D'} \longrightarrow D'$ el límite de D'. Hay que ver que el siguiente diagrama en $Sets$ conmuta

$$\begin{tikzcd} {[\mathbb{I}_B, D]} \arrow[r, "\eta_{(B,D)}"] \arrow[d, "T(\alpha^*,\beta)"'] & {[B, \lim_\Sigma D]} \arrow[d, "S(\alpha^*,\beta)"] \\ {[\mathbb{I}_{B'}, D']} \arrow[r, "\eta_{(B',D')}"'] & {[B', \lim_\Sigma D'].} \end{tikzcd}$$

Por definición, tenemos las siguientes igualdades, donde $f \in [\mathbb{I}_B, D]$

$$\gamma \mathbb{I}_{\eta_{(B,D)}(f)} = f, \quad \beta\gamma = \gamma' \mathbb{I}_{\lim_\Sigma(\beta)}, \quad \gamma' \mathbb{I}_{\eta_{(B',D')}(\beta f \mathbb{I}_\alpha)} = \beta f \mathbb{I}_\alpha. \tag{2.9}$$

Ahora bien, $S(\alpha^*, \beta)(\eta_{(B,D)}(f)) = \lim_\Sigma(\beta)\eta_{(B,D)}(f)\alpha$ y $T(\alpha^*, \beta)(f) = \beta f \mathbb{I}_\alpha$. Por otro lado, por (2.9), se tiene que

$$\gamma' \mathbb{I}_{\lim_\Sigma(\beta)} \mathbb{I}_{\eta_{(B,D)}(f)} \mathbb{I}_\alpha = \beta\gamma \mathbb{I}_{\eta_{(B,D)}(f)} \mathbb{I}_\alpha = \beta f \mathbb{I}_\alpha.$$

Aplicando (2.9), también tenemos que $\gamma'\mathbb{I}_{\eta_{(B',D')}(\beta f \mathbb{I}_\alpha)} = \beta f \mathbb{I}_\alpha$. Por lo tanto $\mathbb{I}_{\lim_\Sigma(\beta)\eta_{(B,D)}(f)\alpha} = \mathbb{I}_{\eta_{(B',D')}(\beta f \mathbb{I}_\alpha)}$, de donde concluimos que

$$\lim_\Sigma(\beta)\eta_{(B,D)}(f)\alpha = \eta_{(B',D')}(\beta f \mathbb{I}_\alpha),$$

probándose que $S(\alpha^*, \beta)\eta_{(B,D)}(f) = \eta_{(B',D')}T(\alpha^*, \beta)(f)\ \forall f \in [\mathbb{I}_B, D]$. $\square$

La siguiente definición es fundamental en la prueba de las propiedades básicas, del funtor $\lim_\Sigma$, dados en el teorema 2.12.8.

Definición 2.12.5 *Sean $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ funtores covariantes con $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías arbitrarias. Consideremos los bifuntores, inducidos por T y S, $\bar{T}, \bar{S} : \mathscr{B}^* \times \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ donde:*

(a) para cada par $(B, A) \in Obj(\mathscr{B}^* \times \mathscr{A})$
$\bar{T}(B, A) := [B, T(A)]_{\mathscr{B}}$,
$\bar{S}(B, A) := [S(B), A]_{\mathscr{A}}$,

(b) dados los morfismos $\alpha^* : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{B}^*$ y $\gamma : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$,
$\bar{T}(\alpha^*, \gamma)(f) := T(\gamma)f\alpha \qquad \forall f \in \bar{T}(B, A).$
$\bar{S}(\alpha^*, \gamma)(g) := \gamma g S(\alpha) \qquad \forall g \in \bar{S}(B, A).$

*Decimos que T es un **adjunto** de S ó que S es un **coadjunto** para T, si existe una equivalencia natural $\eta : \bar{S} \longrightarrow \bar{T}$.*

Corolario 2.12.6 *Si $\mathscr{B}$ es Σ-completa entonces $\lim_\Sigma : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{B}$ es un adjunto de $\mathbb{I} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$.*

Demostración. Se sigue de 2.12.4. $\square$

Proposición 2.12.7 *Si $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un adjunto de $S : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$, entonces T es un monofuntor que preserva límites.*

Demostración. Sea $F = \{\gamma_i : L \longrightarrow D_i\}_{i \in \Sigma_0}$ una familia de morfismos en $\mathscr{A}$ tal que $F : \mathbb{I}_L \longrightarrow D$ es un límite para $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{A})$. Por 2.6.1, se tiene que $H^{S(B)}(F) : \mathbb{I}_{H^{S(B)}(L)} \longrightarrow H^{S(B)}(D)$ es un límite de $H^{S(B)}(D) \in \mathrm{Rep}_\Sigma(Sets)$ $\forall B \in \mathscr{B}$. Como T es un adjunto de S, sea $\eta_{(B,A)} : [S(B), A]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [B, T(A)]_{\mathscr{B}}$ la equivalencia natural en las variables $(B, A) \in \mathscr{B}^* \times \mathscr{A}$. En particular, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $Sets$

$$\begin{tikzcd} {[S(B), D_i]_{\mathscr{A}}} \arrow[r, "\eta_{(B,D_i)}"] \arrow[d, "{[S(1_B), D(m)]}"'] & {[B, T(D_i)]_{\mathscr{B}}} \arrow[d, "{[1_B, TD(m)]}"] \\ {[S(B), D_j]_{\mathscr{A}}} \arrow[r, "\eta_{(B,D_j)}"'] & {[B, T(D_j)]_{\mathscr{B}},} \end{tikzcd}$$

donde $m : i \longrightarrow j$ es una flecha en Σ_1 y las flechas horizontales son isomorfismos. Por lo tanto, la familia $\eta_{(B,D)} := \{\eta_{(B,D_i)} : H^{S(B)}(D_i) \longrightarrow H^B(TD_i)\}_{i \in \Sigma_0}$ es un isomorfismo $\eta_{(B,D)} : H^{S(B)}(D) \longrightarrow H^B(TD)$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(Sets)$. Luego, de 2.2.6, se tiene que la siguiente composición en $\mathrm{Rep}_\Sigma(Sets)$

$$\eta_{(B,D)}H^{S(B)}(F) : \mathbb{I}_{H^{S(B)}(L)} \longrightarrow H^B(TD)$$

es un límite para $H^B(TD)$. Por otro lado, aplicando la naturalidad de $\eta_{(B,-)}$ a cada morfismo $\gamma_i : L \longrightarrow D_i$ en F, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $Sets$

$$\begin{tikzcd}
H^{S(B)}(D_i) \arrow[r, "\eta_{(B,D_i)}"] & H^B(TD_i) \\
H^{S(B)}(L) \arrow[u, "H^{S(B)}(\gamma_i)"] \arrow[r, "\eta_{(B,L)}"'] & H^B(TL), \arrow[u, "H^B(T(\gamma_i))"']
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son isomorfismos. El diagrama anterior, nos dice que el siguiente diagrama en $\mathrm{Rep}_\Sigma(Sets)$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_{H^{S(B)}(L)} \arrow[dr, "\eta_{(B,D)}H^{S(B)}(F)"] & \\
 & H^B(TD) \\
\mathbb{I}_{H^B(TL)}. \arrow[uu, "\mathbb{I}_{\eta^{-1}_{(B,L)}}"] \arrow[ur, "H^B(T(F))"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, de 2.2.5, se tiene que $\forall B \in Obj(\mathscr{B})$, el morfismo

$$H^B(T(F)) : \mathbb{I}_{H^B(TL)} \longrightarrow H^B(TD)$$

es un límite para $H^B(TD) \in \mathrm{Rep}_\Sigma(Sets)$. Luego, por 2.6.1,

$$T(F) : \mathbb{I}_{T(L)} \longrightarrow TD$$

es un límite para $TD \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$; probándose que T preserva límites. De manera análoga se prueba que T es un monofuntor. $\square$

Teorema 2.12.8 *Sean $\mathscr{B}$ una categoría Σ-completa y Σ' un diagrama. Entonces*

(a) si $D \in \mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}))$ y existe $\lim_{\Sigma'}(\lim_\Sigma D)$, entonces $\lim_{\Sigma'}(\lim_\Sigma D) = \lim_\Sigma(\lim_{\Sigma'} D)$,

(b) $\lim_\Sigma : \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{B}$ es un monofuntor.

Demostración. Se sigue de 2.12.7 y 2.12.6. $\square$

Corolario 2.12.9 *Sea $\mathscr{B}$ una categoría con productos y $\{u_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i\in I}$ una familia de monomorfismos en $\mathscr{B}$.*

(a) *Si u_i es un monomorfismo $\forall i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} u_i$ es un monomorfismo.*

(b) *Si $u_i = Ker(f_i)$ con $f_i : B_i \longrightarrow C_i$ $\forall i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} u_i = Ker(\prod_{i\in I} f_i)$.*

Demostración.

(a) Supongamos que u_i es un monomorfismo $\forall i \in I$. Consideremos el diagrama Σ con $\Sigma_0 = I$ y $\Sigma_1 = \emptyset$. Sea $\alpha : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, donde $D_i = A_i$, $\alpha_i = u_i$ y $D'_i = B_i$ $\forall i \in I$. Dado que u_i es un monomorfismo en $\mathscr{B}$ $\forall i \in I$, se tiene que α es un monomorfismo en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$. Luego, por 2.12.8(b), $\prod_{i\in I} u_i = \lim_\Sigma(\alpha)$ es un monomorfismo.

(b) Sea Σ el diagrama de (a) y $\Sigma' = \{\, 1 \rightrightarrows 2 \,\}$. Supongamos que $u_i = Ker(f_i)$ $\forall i \in I$. Definimos $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathrm{Rep}_{\Sigma'}(\mathscr{B}))$ como sigue. Para cada $i \in I$, ponemos $D_i = \{\, B_i \overset{f_i}{\underset{0}{\rightrightarrows}} C_i \,\}$. Es claro que $\lim_{\Sigma'} D_i = Ker(f_i)$; por lo tanto, de 2.12.8(a), se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} Ker(f_i) &= \lim_\Sigma(\lim_{\Sigma'} D)\\ &= \lim_{\Sigma'}(\lim_\Sigma D)\\ &= \lim_{\Sigma'}(\prod_{i\in I} f_i)\\ &= Ker(\prod_{i\in I} f_i).\end{aligned}$$

□

2.13. Categorías de funtores aditivos

Definición 2.13.1 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas con $\mathscr{A}$ pequeña. Denotaremos por $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ a la subcategoría plena de $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ cuyos objetos son todos los funtores aditivos de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$.*

Lema 2.13.2 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas con $\mathscr{A}$ pequeña. Si $\mathscr{B}$ es Σ-completa (resp. Σ-cocompleta) entonces $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ es una subcategoría Σ-completa (resp. Σ-cocompleta) de $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{B}$ es Σ-completa. Sabemos, por 2.11.9, que $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ es Σ-completa. Sea $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma((\mathscr{A},\mathscr{B}))$ y $\gamma : \mathbb{I}_{\lim D} \longrightarrow D$ el límite de D en $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$. Veamos que $\lim D \in (\mathscr{A},\mathscr{B})$. Sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ y consideremos la suma $\alpha + \beta : A \longrightarrow A'$. Dado que $D \in \mathrm{Rep}_\Sigma((\mathscr{A},\mathscr{B}))$, se tiene que el funtor $E^D : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, dado en 2.11.7, es aditivo.
Por otro lado, de 2.11.8, sabemos que $\gamma^A : \mathbb{I}_{\lim D(A)} \longrightarrow D(A)$ es el límite de $D(A)$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, para cada $A \in Obj(\mathscr{A})$. Por lo tanto, existe un único

morfismo $\lim D(\alpha+\beta) : \lim D(A) \longrightarrow \lim D(A')$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}_{\lim D(A)} \arrow[r, "\gamma^A"] \arrow[d, "\mathbb{I}_{\lim D(\alpha+\beta)}"'] & D(A) \arrow[d, "E^D(\alpha+\beta)"] \\ \mathbb{I}_{\lim D(A')} \arrow[r, "\gamma^{A'}"'] & D(A'). \end{tikzcd}$$

De igual manera, existen únicos morfismos $\lim D(\alpha), \lim D(\beta) : \lim D(A) \longrightarrow \lim D(A')$ en $\mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$ tales que

$$E^D(\alpha)\gamma^A = \gamma^{A'}\mathbb{I}_{\lim D(\alpha)} \quad y \quad E^D(\beta)\gamma^A = \gamma^{A'}\mathbb{I}_{\lim D(\beta)}.$$

Luego, usando la aditividad del funtor $E^D : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Sigma(\mathscr{B})$, se tiene:

$$\gamma^{A'}\mathbb{I}_{\lim D(\alpha+\beta)} = E^D(\alpha+\beta)\gamma^A = E^D(\alpha)\gamma^A + E^D(\beta)\gamma^A = \gamma^{A'}\mathbb{I}_{\lim D(\alpha)+\lim D(\beta)}$$

Por lo tanto $\mathbb{I}_{\lim D(\alpha+\beta)} = \mathbb{I}_{\lim D(\alpha)+\lim D(\beta)}$; y entonces $\lim D(\alpha+\beta) = \lim D(\alpha) + \lim D(\beta)$, probándose que $\lim D \in (\mathscr{A}, \mathscr{B})$. $\square$

Lema 2.13.3 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Si $\mathscr{B}$ es abeliana y $\mathscr{A}$ es aditiva y pequeña, entonces $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es una subcategoría abeliana de $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$.*

Demostración. Por 2.13.2, tenemos que, como $\mathscr{B}$ es abeliana, entonces $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ tiene kerneles, cokerneles, productos finitos y coproductos finitos, ya que estos son límites sobre diagramas especiales. Veamos que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es normal. Sea $\psi : S \longrightarrow T$ un monomorfismo en $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, entonces el kernel de este monomorfismo en $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es $0 : 0 \longrightarrow S$. Ahora sea $\eta : K \longrightarrow S$ el kernel de ψ en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, en particular η es el kernel de ψ en $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Por lo tanto, η es isomorfo al morfismo 0. Es decir, ψ tiene kernel cero en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, de donde ψ es un monomorfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Como $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ es abeliana, sea $\varphi : T \longrightarrow T'$ tal que $Ker(\varphi) = \psi$ en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Sea $T \xrightarrow{\theta} I \xrightarrow{\theta'} T'$ la factorización de φ a través de su imagen. Entonces ψ es el kernel de θ en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Veamos que $\theta \in (\mathscr{A}, \mathscr{B})$, para esto es suficiente ver que I es un funtor aditivo. En efecto, sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathscr{A}$ y $\alpha+\beta : A \longrightarrow B$ su suma. Luego $I(\alpha+\beta)\theta_A = \theta_B T(\alpha+\beta)$; pero T es aditivo, por lo tanto $\theta_B T(\alpha+\beta) = \theta_B T(\alpha) + \theta_B T(\beta) = I(\alpha)\theta_A + I(\beta)\theta_A$. Es decir, $I(\alpha+\beta)\theta_A = (I(\alpha)+I(\beta))\theta_A$; pero θ es un epimorfismo en $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, por lo tanto θ_A es un epimorfismo en $\mathscr{B}$ $\forall A \in \mathscr{A}$. De donde se sigue $I(\alpha+\beta) = I(\alpha) + I(\beta)$ y entonces I es un funtor aditivo; probándose que $\theta : T \longrightarrow I$ es un morfismo en $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ tal que $Ker(\theta) = \psi$, y entonces $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es normal. Dualmente es $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ conormal; luego, concluimos por 1.22.2, que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es abeliana. $\square$

En lo que sigue, el término anillo significa: anillo asociativo con 1. Recordemos que un anillo R, se puede ver como una categoría aditiva con un sólo objeto.

Definición 2.13.4 *Sea R un anillo y $\mathscr{B}$ una categoría aditiva. La **categoría** de R-**objetos izquierdos** en $\mathscr{B}$, es la categoría de funtores aditivos $(R, \mathscr{B})$, que será denotada también por ${}^{R}\mathscr{B}$. Si R^{op} es el anillo opuesto de R, como categorías $R^{op} = R^{*}$, la **categoría** de R-**objetos derechos** en $\mathscr{B}$ es $(R^{*}, \mathscr{B})$.*

Observación 2.13.5 *Dado que R es una categoría con un sólo objeto, la categoría $(R, \mathscr{B})$ se puede ver como sigue.*

(a) Objetos de $(R, \mathscr{B})$: pares (B, ρ), donde $B \in Obj(\mathscr{B})$ y $\rho : R \longrightarrow End_{\mathscr{B}}(B)$ es un morfismo de anillos. En este caso, diremos que ρ induce una estructura de R-objeto izquierdo en B.

(b) Morfismos en $(R, \mathscr{B})$: un morfismo $\eta : (B, \rho) \longrightarrow (B', \rho')$ de R-objetos izquierdos, es un morfismo $\beta : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{B}$ tal que para toda $r \in R$ el siguiente diagrama en $\mathscr{B}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\rho(r)"'] & B' \arrow[d, "\rho'(r)"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & B'. \end{tikzcd}$$

Sean B y B' R-objetos izquierdos, el grupo de morfismos de B a B' será denotado por ${}^{R}[B, B']$. Si B y B' son R-objetos derechos, el grupo de morfismos de B a B' será denotado por $[B, B']^{R}$

Definición 2.13.6 *Sea R un anillo y Ab la categoría de grupos abelianos. A la categoría (R, Ab) se le conoce también como la **categoría de R-módulos izquierdos** y se denota usualmente por $\mathrm{Mod}(R)$.*

De acuerdo con la observación 2.13.5, tenemos que un R-módulo izquierdo es una pareja ordenada (G, ρ), donde G es un grupo abeliano y $\rho : R \longrightarrow End_{Ab}(G)$ es un morfismo de anillos. Si escribimos $\rho(r)(x) = rx$ para toda $r \in R$ y $x \in G$, tenemos que un R-módulo izquierdo satisface las siguientes reglas:

(1) $1x = x \ \forall x \in G$,

(2) $r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 \ \forall r \in R \ \forall x_1, x_2 \in G$,

(3) $(r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x \ \forall r_1, r_2 \in R \ \forall x \in G$,

(4) $r_1(r_2x) = (r_1r_2)x \ \forall r_1, r_2 \in R \ \forall x \in G$.

Para un R-módulo derecho, las primeras tres reglas son iguales pero la cuarta es reemplazada por $r_1(r_2x) = (r_2r_1)x$. Por ésta razón, para R-módulo derechos se escribe xr en lugar de rx; en este caso, la regla (4) se escribe como $(xr_2)r_1 = x(r_2r_1)$. Finalmente, notemos que por el diagrama de 2.13.5, un morfismo de R-módulos izquierdos es un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ de grupos abelianos tal que $\alpha(rx) = r\alpha(x)$ para todo $r \in R$ y $x \in A$.

Corolario 2.13.7 *La categoría* $\mathrm{Mod}(R)$ *es una categoría abeliana completa y cocompleta.*

Demostración. Se sigue de 2.13.2 y de 2.13.3, ya que Ab es una categoría abeliana completa y cocompleta. $\square$

2.14. Objetos Proyectivos e Inyectivos

Definición 2.14.1 *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría. Decimos que* $P \in \mathscr{A}$ *es* ***proyectivo*** *si para todo diagrama en* $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & A' \end{tikzcd}$$

con α *un epimorfismo, existe un morfismo* $f' : P \longrightarrow A$ *tal que* $f = \alpha f'$.

Observación 2.14.2 *(1)* P *es proyectivo si y sólo si* $H^P : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ *es un epifuntor.*

(2) Sea $\mathscr{A}$ *una categoría exacta y aditiva. Entonces, por 2.6.1, se tiene que* $H^P : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ *es un funtor exacto si y sólo si* P *es proyectivo.*

Lema 2.14.3 *Si* $\alpha : P \longrightarrow P'$ *es un split-mono con* P' *proyectivo, entonces* P *es proyectivo.*

Demostración. Sea $\beta : P' \longrightarrow P$ tal que $\beta\alpha = 1_P$. Sea $\gamma : A \longrightarrow A'$ un epimorfismo y $f : P \longrightarrow A'$ un morfismo cualquiera. Consideremos el morfismo $f\beta : P' \longrightarrow A'$. Como P' es proyectivo se tiene que existe $f' : P' \longrightarrow A$ tal que $\gamma f' = f\beta$, de donde se sigue que $\gamma f'\alpha = f\beta\alpha = f$. Por lo tanto, tomando $f'' = f'\alpha$ se tiene $\gamma f'' = f$, probándose que P es proyectivo. $\square$

Definición 2.14.4 *Una categoría* $\mathscr{A}$ ***tiene suficientes proyectivos*** *si para cada* $A \in \mathscr{A}$, *existe un epimorfismo* $\gamma : P \longrightarrow A$ *con* P *proyectivo.*

Proposición 2.14.5 *Si* P *es un proyectivo en* $\mathscr{A}$, *entonces todo epimorfismo* $\alpha : A \longrightarrow P$ *es un split-epi. Recíprocamente, sea* $\mathscr{A}$ *una categoría con suficientes proyectivos ó abeliana, si* $P \in \mathscr{A}$ *es tal que todo epimorfismo* $\alpha : A \longrightarrow P$ *es un split-epi entonces* P *es proyectivo.*

Demostración. Si P es un proyectivo y $\alpha : A \longrightarrow P$ es un epimorfismo, considerando el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & P, \end{tikzcd}$$

se tiene que existe $\beta : P \longrightarrow A$ tal que $\alpha\beta = 1_p$; esto es, α es un split-epi. Recíprocamente, supongamos que todo epimorfismo $\alpha : A \longrightarrow P$ es un split-epi. Si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces existe un split-epi $\alpha : P' \longrightarrow P$ con P' proyectivo. Sea $\beta : P \longrightarrow P'$ tal que $\alpha\beta = 1_P$. Luego, β es un split-mono con P' proyectivo; y por 2.14.3, se tiene que P es proyectivo. Por otra parte, si $\mathscr{A}$ es abeliana entonces, dado un epimorfismo $f : A \longrightarrow A'$ y un morfismo $u : P \longrightarrow A'$, podemos formar el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & P \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "f"] & A'; \end{tikzcd}$$

de donde, por 1.22.3, g es un epimorfismo. Entonces, por hipótesis, g es un split-epi. Por lo tanto, existe $h : P \longrightarrow X$ tal que $gh = 1_P$. Luego, tenemos que $fvh = ugh = u$. Esto prueba que P es proyectivo. $\square$

Proposición 2.14.6 *Sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathscr{A}$ tal que $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$.*

(a) Si P_i es proyectivo $\forall i \in I$, entonces P es proyectivo.

(b) Si $\mathscr{A}$ tiene objeto cero y P es proyectivo, entonces P_i es proyectivo $\forall i \in I$.

Demostración.

(a) Supongamos que P_i es proyectivo para cada i, y sea $\alpha : A \longrightarrow A'$ un epimorfismo. Sea $f : P \longrightarrow A'$ un morfismo, por lo que tenemos la siguiente familia de morfismos $\{fu_i : P_i \longrightarrow A'\}_{i\in I}$, donde $u_i : P_i \longrightarrow P$ es la inclusión de P_i en el coproducto. Dado que P_i es proyectivo para cada i, existe $\beta_i : P_i \longrightarrow A$ tal que $\alpha\beta_i = fu_i$. Además, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $\psi : P \longrightarrow A$ tal que $\beta_i = \psi u_i$ para toda $i \in I$. Ahora, como $\alpha\psi u_i = \alpha\beta_i = fu_i$ para toda i, entonces se tiene que $\alpha\psi = f$. Por lo tanto, P es proyectivo.

(b) Se sigue de 2.14.3, puesto que en una categoría con cero cada $u_i : P_i \longrightarrow P$ es un split-mono.

$\square$

Definición 2.14.7 *Un objeto Q, en una categoría $\mathscr{A}$, es **inyectivo** si para todo diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & A' \\ Q & \end{tikzcd}$$

con α un monomorfismo, existe un morfismo $f' : A' \longrightarrow Q$ tal que $f = f'\alpha$.

Observación 2.14.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta y aditiva. Entonces, Q es inyectivo si y sólo si el funtor $H_Q := [-, Q]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es exacto.*

Definición 2.14.9 *Una categoría $\mathscr{A}$ **tiene suficientes inyectivos**, si para cada $A \in \mathscr{A}$ existe un monomorfismo $\beta : A \longrightarrow Q$ con Q inyectivo.*

Definición 2.14.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría exacta. Una **resolución proyectiva**, para $A \in \mathscr{A}$, es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$\cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0 \qquad (2.10)$$

tal que cada P_i es proyectivo para toda $i \geq 0$.

Proposición 2.14.11 *Una categoría exacta $\mathscr{A}$ tiene resoluciones proyectivas para cada uno de sus objetos si y sólo si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos.*

Demostración. Si $A \in \mathscr{A}$ tiene una resolución proyectiva, entonces en particular $\alpha_0 : P_0 \longrightarrow A$ es un epimorfismo con P_0 proyectivo. Por lo tanto, si $\mathscr{A}$ tiene resoluciones proyectivas para cada uno de sus objetos, entonces $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos.
Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos. Entonces, dado $A \in \mathscr{A}$, podemos encontrar un epimorfismo $\alpha_0 : P_0 \longrightarrow A$ con P_0 proyectivo. Sea $\beta_1 : K_1 \longrightarrow P_0$ el kernel de α_0, luego existe un epimorfismo $\gamma_1 : P_1 \longrightarrow K_1$ tal que P_1 es proyectivo. Definimos $\alpha_1 : P_1 \longrightarrow P_0$ como $\alpha_1 = \beta_1\gamma_1$; y luego, definimos inductivamente $\alpha_i = \beta_i\gamma_i$ donde $\beta_i : K_i \longrightarrow P_{i-1}$ es el kernel de α_{i-1} y $\gamma_i : P_i \longrightarrow K_i$ es un epimorfismo tal que P_i es proyectivo. Por lo tanto, la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha_2} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de A. $\square$

2.15. Generadores

Definición 2.15.1 *Una familia de objetos $\{U_i\}_{i\in I}$ en una categoría $\mathscr{A}$, se dice que es una **familia de generadores**, si dados $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ con $\alpha \neq \beta$ existe un morfismo $u : U_i \longrightarrow A$ para algún $i \in I$ tal que $\alpha u \neq \beta u$.*

Observación 2.15.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Entonces, $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de generadores si y sólo si para cada morfismo $0 \neq \alpha : A \longrightarrow B$ existe $u : U_i \longrightarrow A$ en $\mathscr{A}$ tal que $\alpha u \neq 0$.*

Proposición 2.15.3 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría balanceada, con intersecciones finitas y una familia de generadores $\{U_i\}_{i\in I}$, entonces $\mathscr{A}$ es localmente pequeña.*

Demostración. Consideremos la clase $\mathscr{S}_A$ cuyos elementos son representantes de las clases de equivalencia de sub-objetos de A. Consideremos la siguiente función

$$T : \mathscr{S}_A \longrightarrow \mathscr{P}(\bigcup_{i \in I}[U_i, A]_{\mathscr{A}}),$$

entre una clase y un conjunto, donde $\mathscr{P}(\bigcup_{i\in I}[U_i, A]_{\mathscr{A}})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\bigcup_{i\in I}[U_i, A]_{\mathscr{A}}$. Por definición, hacemos

$$T(u) := \{u_i \in [U_i, A]_{\mathscr{A}} \mid \exists v_i \in [U_i, Dom(u)]_{\mathscr{A}} \quad \text{con} \quad u_i = uv_i\}.$$

Veamos que T es inyectiva. En efecto, sean $u_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $u_2 : A_2 \longrightarrow A$ sub-objetos no isomorfos de A. En particular $u_1 \nleq u_2$ o bien $u_2 \nleq u_1$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $u_1 \nleq u_2$. Consideremos el siguiente diagrama de pullback en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[d, "u_2"] \\ A_1 \arrow[r, "u_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Veamos que α_1 no puede ser un epimorfismo. En efecto, si α_1 fuera un epimorfismo entonces $u_2(\alpha_2\alpha_1^{-1}) = u_1$ (pues $\mathscr{A}$ es balanceada). Esto es $u_1 \leq u_2$, que contradice que $u_1 \nleq u_2$. Ahora bien, como α_1 no es un epimorfismo, entonces existen $\alpha, \beta : A_1 \longrightarrow B$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\alpha\alpha_1 = \beta\alpha_1$. Por otra parte, como $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de generadores, existe $u : U_i \longrightarrow A_1$ tal que $\alpha u \neq \beta u$. Entonces u no puede ser factorizada a través de α_1, pues si lo fuera, se tendría que $\alpha u = \beta u$. Luego $u_1 u$ no puede ser factorizado a través de u_2, en caso contrario se tendría que $u_1 u = u_2 f$ para algún $f : U_i \longrightarrow A_2$. De donde, por la propiedad del pullback, se tendría que existe $\gamma : U_i \longrightarrow A_1 \cap A_2$ tal que $u = \alpha_1\gamma$, lo cual ya habíamos dicho que no era posible. Por lo tanto $u_1 u$ es tal que se factoriza a través de u_1 pero no a través de u_2. Esto es, el morfismo $\varphi := u_1 u \in [U_i, A]_{\mathscr{A}}$ satisface que $\varphi \in T(u_1)$ y $\varphi \notin T(u_2)$. De donde $T(u_1) \neq T(u_2)$, y entonces T es inyectivo. Luego T induce una biyección entre la clase $\mathscr{S}_A$ de representantes de sub-objetos de A y el conjunto $Im(T)$, probándose que $\mathscr{S}_A$ es un conjunto. $\square$

Observación 2.15.4 *(a) Un objeto $U \in \mathscr{A}$ es un* ***generador*** *si la familia con un solo objeto $\{U\}$ es una familia de generadores. Notemos que, U es un generador si y sólo si el funtor $H^U : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ es una inmersión.*

(b) Sea $U = \bigoplus_{i\in I} U_i$ tal que cada $[U_i, A]_{\mathscr{A}} \neq \emptyset$ para todos los $i \in I$ y $A \in \mathscr{A}$. Entonces, U es un generador para $\mathscr{A}$ si y sólo si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de generadores para $\mathscr{A}$.

Definición 2.15.5 *Un objeto C en $\mathscr{A}$ es un* ***cogenerador*** *si para $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ con $\alpha \neq \beta$, existe un morfismo $u : B \longrightarrow C$ tal que $u\alpha \neq u\beta$. Es decir, C es un cogenerador en $\mathscr{A}$ si y sólo si C^* es un generador en $\mathscr{A}^*$.*

Proposición 2.15.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con coproductos. Entonces, U es un generador para $\mathscr{A}$ si y sólo si para cada $A \in \mathscr{A}$, existe un epimorfismo $\gamma : {}^I U \longrightarrow A$, para algún conjunto I. Además, en éste caso, podemos tomar $I = [U, A]_{\mathscr{A}}$ con γ el morfismo cuya u-ésima coordenada es u para toda $u \in [U, A]_{\mathscr{A}}$.*

Demostración. Supongamos que U es un generador. Tomando γ como arriba, es inmediato que γ es un epimorfismo. En efecto, sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ tales que $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Si $\mu_i : U \longrightarrow {}^I U$ es la i-ésima inclusión en el coproducto, entonces $\alpha\gamma\mu_i = \beta\gamma\mu_i$; pero por definición de γ, se tiene que $\gamma\mu_i = u_i$ para algún $u_i : U \longrightarrow A$. Es decir, $\alpha u_i = \beta u_i$ para toda $u_i \in [U, A]$; de donde $\alpha = \beta$ puesto que U es un generador (si $\alpha \neq \beta$ entonces existiría $u : U \longrightarrow A$ tal que $\alpha u \neq \beta u$, lo cual no es posible). Por lo tanto γ es un epimorfismo.
Recíprocamente, supongamos que $\gamma : {}^I U \longrightarrow A$ es un epimorfismo y sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ dos morfismos distintos; luego $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Por lo tanto existe una inclusión $\mu : U \longrightarrow {}^I U$ de U en el coproducto tal que $\alpha\gamma\mu \neq \beta\gamma\mu$; y así, tomando $u = \gamma\mu : U \longrightarrow A$ se tiene que $\alpha u \neq \beta u$. Esto prueba que U es un generador. $\square$

Definición 2.15.7 *Un objeto $A \in \mathscr{A}$, es **finitamente generado** con respecto a una familia de generadores $\{U_i\}_{i \in I}$ si existe $J \subset I$, con J finito, y un epimorfismo $\gamma : \bigoplus_{i \in J} U_i \longrightarrow A$. Un objeto A es **libre**, con respecto a una familia de generadores $\{U_i\}_{i \in I}$, si $A \simeq \bigoplus_{i \in K} U_i$ para algún $K \subset I$ (K no es necesariamente finito).*

Observación 2.15.8 *Si U es un generador en una categoría $\mathscr{A}$ y $\gamma : P \longrightarrow U$ es un epimorfismo, entonces P es un generador. De donde se sigue que, si $\mathscr{A}$ es una categoría con un generador y suficientes proyectivos, entonces existe un generador proyectivo. Por otra parte, si $\mathscr{A}$ es una categoría con coproductos y un generador proyectivo, entonces se sigue, de 2.14.6 y 2.15.6, que $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos.*

Proposición 2.15.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y U un objeto proyectivo en $\mathscr{A}$. Si $[U, A]_{\mathscr{A}} \neq 0$ para todo $A \in \mathscr{A}$ con $A \neq 0$, entonces U es un generador.*

Demostración. Como U es proyectivo, entonces por 2.14.2, se tiene que el funtor $H^U : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es exacto. Además por hipótesis H^U preserva objetos no cero, luego por 2.8.3, H^U es fiel; y por lo tanto H^U es una inmersión. De donde, por 2.15.4, se tiene que U es un generador. $\square$

Corolario 2.15.10 *Si R es un anillo, entonces R es un generador proyectivo en la categoría $\mathrm{Mod}(R)$. En particular, $\mathrm{Mod}(R)$ tiene suficientes proyectivos.*

Demostración. Usando la multiplicación del anillo, podemos considerar a R como un R-módulo a izquierda. Sea A un R-módulo. Entonces, los morfismos de R a A están en biyección con los elementos de A. Es decir, para cada $a \in A$ tenemos el morfismo $\varphi_a : R \longrightarrow A$ definido por $\varphi_a(r) = ra$ para toda $r \in R$. En el siguiente diagrama en $\mathrm{Mod}(R)$

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "\varphi_b"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & A', \end{tikzcd}$$

donde α es un epimorfismo, consideramos $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$. Luego el morfismo $\varphi_a : R \longrightarrow A$ es tal que $\alpha\varphi_a = \varphi_b$. Esto demuestra que R es un objeto proyectivo en $\mathrm{Mod}(R)$. Ahora sea $A \neq 0$ en $\mathrm{Mod}(R)$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \neq 0$. Por lo tanto, el morfismo $\varphi_a \neq 0$, de donde ${}^R[R, A] \neq 0$; y entonces, por 2.15.9, R es un generador proyectivo. En particular, por 2.15.8, se tiene que $\mathrm{Mod}(R)$ tiene suficientes proyectivos. $\square$

Definición 2.15.11 *Un grupo abeliano D es **divisible** si para todo $d \in D$ y todo entero n distinto de cero, existe $x \in D$ tal que $nx = d$.*

Lema 2.15.12 *Si D es un grupo abeliano divisible, entonces D es un objeto inyectivo en la categoría de grupos abelianos Ab.*

Demostración. Sea D un grupo abeliano divisible. Consideremos el siguiente diagrama de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & A \\ D, & \end{tikzcd}$$

donde u es un monomorfismo. Podemos suponer que u es la inclusión como subconjunto de A. Sea $\mathscr{C}$ el conjunto formado por los pares $\{(B, g)\}$ tal que B es un subgrupo de A que contiene a A' y $g : B \longrightarrow D$ extiende a f. Primero observemos que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ puesto que $(A', f) \in \mathscr{C}$. Definamos un orden $\leq$ en $\mathscr{C}$ como $(B_1, g_1) \leq (B_2, g_2)$ si $B_1 \subset B_2$ y g_2 extiende a g_1. Consideremos $\{(B_i, g_i)\}_{i \in I}$ una cadena en $\mathscr{C}$, luego claramente $(\cup B_i, \cup g_i)$ es una cota superior para la cadena. Entonces, por el lema de Zorn, $\mathscr{C}$ tiene un elemento maximal (B_0, g_0). Supongamos que $B_0 \neq A$, y sea $a \in A - B_0$. Consideremos el subgrupo de A

$$B' = \{b + na \mid b \in B_0, n \in \mathbb{Z}\},$$

el cual contiene propiamente a B_0. Si $na \notin B_0$ para todo entero distinto de cero, entonces $B' = B_0 \bigoplus \mathbb{Z}a$; y por lo tanto g_0 puede ser extendido a $g' : B' \longrightarrow D$, definiendo $g'(b + na) = g_0(b)$. Supongamos que existe $n_0 \neq 0$ tal que $n_0 a \in B_0$ y sea m el mínimo entero positivo tal que $ma \in B_0$. Haciendo $d := g_0(ma)$, definimos $g' : B' \longrightarrow D$ como $g'(b + na) = g_0(b) + nx$, donde $x \in D$ es tal que $mx = d$ (tal x existe ya que D es divisible). Veamos que g' está bien definida. Si $b_1 + n_1 a = b_2 + n_2 a$ con $b_1, b_2 \in B_0$, entonces $g_0(b_1) + n_1 x = g_0(b_2) + n_2 x$. En efecto, por el algoritmo de Euclides, existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n_2 - n_1 = km + r$

con $0 \leq r < m$. Luego como $b_1 - b_2 = (n_2 - n_1)a = kma + ra$, entonces $ra \in B_0$; y por la minimalidad de m, concluimos que $r = 0$. Entonces $g_0(b_1 - b_2) = kg_0(ma) = kd = kmx = (n_2 - n_1)x$; probándose que g' está bien definida. Por otro lado, es fácil ver que g' extiende a g_0. Por lo tanto $(B', g') \in \mathscr{C}$ y además $(B_0, g_0) < (B', g')$ puesto que $B_0 \neq B'$. Esto contradice la maximalidad de (B_0, g_0) y por lo tanto $B_0 = A$, probándose que D es inyectivo. $\square$

Lema 2.15.13 *El grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo en la categoría Ab.*

Demostración. Como el grupo de numeros racionales $\mathbb{Q}$ es un grupo divisible, y como todo cociente de un divisible es divisible, entonces $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible. Luego, por 2.15.12, tenemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un objeto inyectivo. Ahora sea $M \neq 0$ un grupo abeliano y $m \in M$ con $m \neq 0$. Si m tiene orden infinito, definimos $f : \langle m \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $f(m) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, donde $\langle m \rangle$ denota a el grupo generado por m. Por el contrario, si m tiene orden finito n, definimos $f : \langle m \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $f(m) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z}$. En los dos casos $f(m) \neq 0$, entonces por la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, existe $f' : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $f' \neq 0$ tal que $f = f'\alpha$ donde $\alpha : \langle m \rangle \longrightarrow M$ es la inclusión de subgrupo. Entonces $[M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \neq 0$ y por lo tanto, por el dual de 2.15.9, se tiene que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo para *Ab*. $\square$

Observación 2.15.14 *Sea R un anillo y G un grupo abeliano. Entonces, el grupo abeliano $[R, G]_{Ab}$ tiene una estructura natural de R-módulo izquierdo: dado $r \in R$ y $f \in [R, G]_{Ab}$ se define $rf \in [R, G]_{Ab}$ como $(rf)(x) = f(xr)$.*

Lema 2.15.15 *Sea G un grupo abeliano, R un anillo y $F : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow Ab$ el funtor olvido; esto es, F olvida la estructura de R-módulo izquierdo conservando la de grupo abeliano. Consideremos los funtores $H_{[R,G]_{Ab}}$, $H_G F(-) : \mathrm{Mod}(R)^* \longrightarrow Ab$, donde*

$$H_{[R,G]_{Ab}}(-) :=^R[-^*, [R, G]_{Ab}] \quad y \quad H_G F(-) := [F(-^*), G]_{Ab}.$$

Entonces, $\varphi_A : H_{[R,G]_{Ab}}(A) \longrightarrow H_G F(A)$, definida como $\varphi_A(\alpha)(a) := \alpha(a)(1)$ $\forall a \in A$, es una equivalencia natural $\varphi : H_{[R,G]_{Ab}} \longrightarrow H_G F$.

Demostración. Veamos que el siguiente diagrama en *Ab* conmuta, con $\alpha^* : A \longrightarrow B$ en $\mathrm{Mod}(R)^*$

$$\begin{tikzcd} {}^R[A, [R, G]_{Ab}] \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "H_{[R,G]_{Ab}}(\alpha)"'] & {[F(A), G]_{Ab}} \arrow[d, "H_G F(\alpha)"] \\ {}^R[B, [R, G]_{Ab}] \arrow[r, "\varphi_B"] & {[F(B), G]_{Ab}}. \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $\beta \in^R [A, [R, G]_{Ab}]$; luego tenemos que

$$H_G(F(\alpha))\varphi_A(\beta) = \varphi_A(\beta)F(\alpha) = \varphi_A(\beta)\alpha.$$

Por otro lado, $\varphi_B H_{[R,G]_{Ab}}(\alpha)(\beta) = \varphi_B(\beta\alpha)$. Ahora bien, si $x \in B$ entonces $\varphi_B(\beta\alpha)(x) = (\beta\alpha(x))(1) = \beta(\alpha(x))(1) = \varphi_A(\beta)(\alpha(x)) = (\varphi_A(\beta)\alpha)(x)$, probándose que el diagrama anterior conmuta. Esto es, $\varphi : H_{[R,G]_{Ab}} \longrightarrow H_G F$ es una transformación natural. No es difícil ver que φ^{-1} es la transformación natural $\psi : H_G F \longrightarrow H_{[R,G]_{Ab}}$, definida como sigue: $\psi_A(\beta)(a)(r) := \beta(ra)$ $\forall \beta \in [F(A), G]_{Ab}$, $\forall a \in A$, $\forall r \in R$. $\square$

Proposición 2.15.16 *Si R es un anillo, entonces $[R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab}$ es un cogenerador inyectivo en la categoría* $\mathrm{Mod}(R)$.

Demostración. Por 2.15.12, tenemos que $G := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo en Ab; y luego, de 2.14.8, concluimos que el funtor H_G es exacto. Entonces, dado que el funtor olvido F es exacto, se tiene que la composición de funtores $H_G F$ es un funtor exacto. Por la equivalencia natural de funtores $\varphi : H_{[R,G]_{Ab}} \longrightarrow H_G F$, se tiene que ${}^R[-, [R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab}]$ es un funtor exacto. Luego $I := [R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab}$ es un objeto inyectivo en $\mathrm{Mod}(R)$. Ahora bien, si $0 \neq A \in \mathrm{Mod}(R)$ se sabe, por 2.15.13, que $[F(A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab} \neq 0$. Entonces, de la equivalencia natural $\varphi : H_{[R,G]_{Ab}} \longrightarrow H_G F$, probada en 2.15.15, obtenemos que ${}^R[A, [R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab}] \neq 0$. Por lo tanto, por el resultado dual de 2.15.9, se tiene que $I = [R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab}$ es un cogenerador inyectivo de $\mathrm{Mod}(R)$. $\square$

2.16. Objetos pequeños

Definición 2.16.1 *Un objeto $A \in \mathscr{A}$ es **pequeño** si $\forall \alpha \in [A, \bigoplus_{i\in I} A_i]_{\mathscr{A}}$ existen un conjunto finito $J \subset I$ y un $\beta \in [A, \bigoplus_{i\in J} A_i]_{\mathscr{A}}$ tales que $\alpha = u_{JI}\beta$, donde $u_{JI} : \bigoplus_{i\in J} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ es el morfismo inducido por las inclusiones naturales $\{u_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i\}_{i\in J}$.*

Lema 2.16.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Entonces, $\alpha : A \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ se factoriza a través de $u_{JI} : \bigoplus_{i\in J} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ con $J \subset I$ finito si y sólo si $\alpha = \sum_{i\in J} u_i p_i \alpha$, donde $p_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ y $u_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ es la proyección e inclusión natural respectivamente.*

Demostración. Denotemos por $\bar{u}_i$ (resp. $\bar{p}_i$) la i-ésima inclusión (resp. proyección) natural en el coproducto $\bigoplus_{i\in J} A_i$. Entonces, $u_{JI} : \bigoplus_{i\in J} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ es el único morfismo tal que $u_{JI}\bar{u}_i = u_i \ \forall i \in J$. Pero el morfismo $\gamma : \bigoplus_{i\in J} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$, donde $\gamma = \sum_{i\in J} u_i \bar{p}_i$, es tal que $\gamma_i \bar{u}_i = u_i \ \forall i \in J$. Por lo tanto, se tiene que $u_{JI} = \sum_{i\in J} u_i \bar{p}_i$.
($\Rightarrow$) Supongamos que α se factoriza a través de u_{JI}. Luego existe $\bar{\alpha} : A \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} A_i$ tal que $\alpha = u_{JI}\bar{\alpha}$, es decir,

$$\alpha = \sum_{i\in J} u_i \bar{p}_i \bar{\alpha}. \tag{2.11}$$

De donde, componiendo con p_k, se tiene que $p_k\alpha = \bar{p}_k\bar{\alpha}$ para toda $k \in J$. Por lo tanto, a la ecuación (2.11) la podemos escribir como $\alpha = \sum_{i\in J} u_i p_i \alpha$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\alpha = \sum_{i\in J} u_i p_i \alpha$. Entonces, definamos $\bar{\alpha} : A \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} A_i$ como $\bar{\alpha} := \sum_{i\in J} \bar{u}_i p_i \alpha$. Así tenemos que

$$u_{JI}\bar{\alpha} = \sum_{k\in J} u_k \bar{p}_k \sum_{i\in J} \bar{u}_i p_i \alpha = \sum_{i\in J} u_i p_i \alpha = \alpha.$$

□

Proposición 2.16.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva con coproductos. Entonces, un objeto $A \in \mathscr{A}$ es pequeño si y sólo si el funtor $H^A : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ preserva coproductos.*

Demostración. Sea $\bigoplus_{i\in I} A_i$ un coproducto en $\mathscr{A}$ con u_i y p_i, respectivamente, la i-ésima inclusión y proyección. Consideremos la familia de morfismos en Ab $\{H^A(u_i) : H^A(A_i) \longrightarrow H^A(\bigoplus_{i\in I} A_i)\}_{i\in I}$, la cual induce un morfismo en Ab

$$\alpha : \bigoplus_{i\in I} H^A(A_i) \longrightarrow H^A(\bigoplus_{i\in I} A_i)$$

tal que $\alpha\bar{u_i} = H^A(u_i)$ para todo $i \in I$, donde $\bar{u_i} : H^A(A_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} H^A(A_i)$ es la i-ésima inclusión en el coproducto. Entonces, que H^A preserve coproductos es equivalente a que α sea un isomorfismo. Primero demostremos que α siempre es un monomorfismo. En efecto, como se sabe en la categoría Ab, un elemento $\beta \in \bigoplus_{i\in I} H^A(A_i)$ puede ser considerado como una familia $\{\beta_i : A \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ tal que el conjunto $\{i \in I \mid \beta_i \neq 0\}$ es finito. También como es sabido, $\alpha(\beta) = \sum_{i\in I} u_i\beta_i$ (notemos que la suma está bien definida pues sólo un número finito de β_i son distintos de cero). Por lo tanto, si $\beta \neq 0$, entonces $\beta_k \neq 0$ para algún $k \in I$; y luego

$$p_k\alpha(\beta) = p_k(\sum_{i\in I} u_i\beta_i) = \beta_k \neq 0,$$

probándose que $\alpha(\beta) \neq 0$, esto es, α es un monomorfismo.
Supongamos que $\alpha : \bigoplus_{i\in I} H^A(A_i) \longrightarrow H^A(\bigoplus_{i\in I} A_i)$ es un epimorfismo. En particular, es suprayectivo pues α es un morfismo en Ab. Sea $\gamma \in [A, \bigoplus_{i\in I} A_i]_{\mathscr{A}}$ y $\theta = \{\theta_i\}_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} H^A(A_i)$ tal que $\alpha(\theta) = \gamma$. Por lo tanto, el conjunto $J = \{i \in I \mid \theta_i \neq 0\}$ es finito y $\gamma = \sum_{i\in J} u_i\theta_i$. Luego $p_k\gamma = \sum_{i\in J} p_k u_i\theta_i = \theta_k$ $\forall k \in J$, de donde se tiene que $\gamma = \sum_{i\in J} u_i p_i\gamma$. Entonces, por 2.16.2, γ se factoriza por el coproducto finito $\bigoplus_{i\in J} A_i$, probándose que A es pequeño.
Recíprocamente, supongamos que A es pequeño y sea $\delta \in H^A(\bigoplus_{i\in I} A_i) = [A, \bigoplus_{i\in I} A_i]$. Luego, por 2.16.2, existe un conjunto finito $J \subset I$ tal que $\delta = \sum_{i\in J} u_i p_i\delta$. En particular, definiendo $\psi_i = p_i\delta$ si $i \in J$ y $\psi_i = 0$ en caso contrario, se tiene que $\psi = \{\psi_i\}_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} H^A(A_i)$. Calculando $\alpha(\psi) = \sum_{i\in I} u_i\psi_i = \sum_{i\in J} u_i p_i\delta = \delta$, y así se prueba que α es un epimorfismo.
□

Capítulo 3

Categorías completas

3.1. Categorías $\mathrm{C_i}$

Dada una categoría $\mathscr{A}$ con objeto cero, recordamos que si una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathscr{A}$ tiene producto y coproducto, los morfismos: la inclusión natural $u_j : A_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ y la proyección natural $p_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$, permiten escribir a cualquier morfismo $f : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ en forma de matriz $f = (f_{ij})$, donde $f_{ij} = p_i f u_j$.

Definición 3.1.1 *Una categoría $\mathscr{A}$ es una **categoría** $\mathbf{C_1}$ si*

(a) tiene coproductos, y

(b) para toda familia de monomorfismos $\{\mu_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{A}$, el morfismo $\bigoplus_{i\in I} \mu_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i$ es un monomorfismo.

*$\mathscr{A}$ es una **categoría** $\mathbf{C_2}$ si*

(a) tiene productos, coproductos, objeto cero y

(b) el morfismo $\delta = (\delta_{ij}) : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$, con $\delta_{ii} = 1_{A_i}$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, es un monomorfismo para toda familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{A}$.

Proposición 3.1.2 *Toda categoría C_2 es C_1.*

Demostración. Consideremos una familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i\in I}$ de monomorfismos en una categoría C_2.
Luego tenemos los morfismos, $\theta = \bigoplus_{i\in I} \mu_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i$ y $\psi = \prod_{i\in I} \mu_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i$ los cuales satisfacen: $\theta u_i = u_i'\mu_i$ y $p_i'\psi = \mu_i p_i$ $\forall i \in I$, donde u_i, u_i' son las inclusiones en sus respectivos coproductos y p_i, p_i' las proyecciones en sus respectivos productos. También tenemos los morfismos $\delta : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ y $\delta' : \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i$, que son monomorfismos

por hipótesis. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \bigoplus A_i \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\delta"'] & \bigoplus B_i \arrow[d, "\delta'"] \\ \prod A_i \arrow[r, "\psi"'] & \prod B_i. \end{tikzcd}$$

En efecto, $p_i'\delta'\theta u_i = p_i'\delta' u_i'\mu_i = 1_{B_i}\mu_i = \mu_i\ \forall i \in I$. Por otro lado, $p_i'\psi\delta u_i = \mu_i p_i \delta\mu_i = \mu_i 1_{A_i} = \mu_i\ \forall i \in I$. Entonces, se tiene que $\delta'\theta = \psi\delta$; y como ψ es un monomorfismo por 2.12.9, se concluye que $\theta = \bigoplus_{i\in I}\mu_i$ es un monomorfismo. □

Observación 3.1.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_2 y $\bigoplus_{i\in I} A_i$ un coproducto con proyecciones $p_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$. Si $f, g : A \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ son tales que $p_i f = p_i g$ para toda $i \in I$, entonces $f = g$.*

La ley distributiva para conjuntos

$$(\cup A_i) \cap B = \cup(A_i \cap B), \tag{3.1}$$

no se satisface en general en la categoría de grupos abelianos. Sin embargo, si suponemos que $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ es una familia dirigida (ver 2.3.6) de subgrupos abelianos de un grupo abeliano A y B es otro subgrupo de A. Entonces, se puede ver que la relación (3.1) se satisface. La relación (3.1) es muy importante y fué considerada primeramente por A. Grothendieck en [6].

Definición 3.1.4 *Una categoría $\mathscr{A}$ es una **categoría $\mathbf{C_3}$** si*

(a) $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana y cocompleta, y

(b) dada una familia dirigida $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ de sub-objetos de un objeto A y cualquier otro sub-objeto $v : B \longrightarrow A$ de A, se tiene que los sub-objetos inducidos $g : (\cup_{i\in I} A_i) \cap B \longrightarrow A$ y $h : \cup_{i\in I}(A_i \cap B) \longrightarrow A$ son isomorfos.

Definición 3.1.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría cocompleta y $(I, \leq)$ un conjunto dirigido. En este caso, se define el funtor $\varinjlim : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ como sigue: sea $\alpha : D \longrightarrow D'$ en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$; y sean $q : D \longrightarrow \mathbb{I}_{\varinjlim D}$ y $q' : D' \longrightarrow \mathbb{I}_{\varinjlim D'}$, respectivamente, los límites directos. Por definición, existe un único morfismo $\bar{\alpha} : \varinjlim D \longrightarrow \varinjlim D'$ en $\mathscr{A}$, que hace conmutar al siguiente diagrama en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q"'] & D' \arrow[d, "q'"] \\ \mathbb{I}_{\varinjlim D} \arrow[r, "\mathbb{I}_{\bar{\alpha}}"] & \mathbb{I}_{\varinjlim D'}. \end{tikzcd}$$

Haciendo, $\varinjlim(\alpha) := \bar{\alpha}$, no es difícil ver que se obtiene un funtor

$$\varinjlim : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}.$$

Lema 3.1.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría cocompleta y $\{\mu_i : C_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de $A \in \mathscr{A}$. Denotemos por c_{ij} al morfismo de sub-objetos $c_{ij} : (\mu_i, A) \longrightarrow (\mu_j, A)$ cada vez que $\mu_i \leq \mu_j$. Sea $\{v_i : B_i \longrightarrow C_i\}_{i\in I}$ una familia de monomorfismos en $\mathscr{A}$; y para $(i, j) \in I \times I$ con $\mu_i \leq \mu_j$, sea $b_{ij} : B_i \longrightarrow B_j$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "b_{ij}"'] & C_i \arrow[d, "c_{ij}"] \\ B_j \arrow[r, "v_j"'] & C_j. \end{tikzcd}$$

Esto es, $v : B = \{B_i, b_{ij}\}_{i,j\in I} \longrightarrow C = \{C_i, c_{ij}\}_{i,j\in I} \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$. Si el límite directo de cualquier familia dirigida de sub-objetos de A es la unión de dicha familia, entonces $\varinjlim(v) : \varinjlim(B) \longrightarrow \varinjlim(C)$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$.

Demostración. Como cada v_i es un monomorfismo y $v : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$, la composición $\mu v = \{\mu_i v_i : B_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ es una familia dirigida de sub-objetos de A y $\mu v : B \longrightarrow \mathbb{I}_A \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$. Sean $\{\pi_i : B_i \longrightarrow \cup_{i\in I} B_i\}_{i\in I}$ y $\{\pi'_i : C_i \longrightarrow \cup_{i\in I} C_i\}_{i\in I}$, respectivamente, los límites directos de las familias dirigidas $\{\mu_i v_i : B_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ y $\{\mu_i : C_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$. Esto es, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \cup B_i \arrow[rrr, "\psi:=\varinjlim(v)"] & & & \cup C_i \\ & B_i \arrow[ul, "\pi_i"'] \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "b_{ij}"] & C_i \arrow[ur, "\pi'_i"] \arrow[d, "c_{ij}"'] & \\ & B_j \arrow[uul, "\pi_j"] \arrow[r, "v_j"'] & C_j. \arrow[uur, "\pi'_j"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que ψ es un monomorfismo. En efecto, por definición de unión, tenemos morfismos $\theta : \cup B_i \longrightarrow A$ y $h : \cup C_i \longrightarrow A$ tales que que $\theta\pi_i = \mu_i v_i$ y $h\pi'_i = \mu_i$ $\forall i \in I$. En particular, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r, "\pi'_i v_i"] \arrow[d, "\mu_i v_i"'] & \cup C_i \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A. \end{tikzcd}$$

Luego, por la definición de unión, existe un morfismo $\varphi : \cup B_i \longrightarrow \cup C_i$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \cup B_i \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \cup C_i \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A. \end{tikzcd}$$

Notemos que φ es un monomorfismo pues $h\varphi = \theta$ y θ es un monomorfismo. Ahora bien, $h\varphi\pi_i = \theta\pi_i = \mu_i v_i = h\pi'_i v_i \ \forall i \in I$. Es decir, $h\varphi\pi_i = h\pi'_i v_i \ \forall i \in I$, y como h es un monomorfismo, entonces $\varphi\pi_i = \pi'_i v_i \ \forall i \in I$. De donde $\psi = \varphi$, probándose que ψ es un monomorfismo. $\square$

El siguiente, es un lema técnico que será muy útil en la prueba de los principales resultados de esta sección.

Lema 3.1.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría cocompleta, $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de $A \in \mathscr{A}$ y $\eta : B \longrightarrow A$ un sub-objeto de A. Denotemos por μ_{ij} al morfismo de sub-objetos $\mu_{ij} : (\mu_i, A) \longrightarrow (\mu_j, A)$ cada vez que $\mu_i \leq \mu_j$. Esto es, $\mu = \{\mu_i\} : \{A_i, \mu_{ij}\} \longrightarrow \mathbb{I}_A$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$. Para cada $i \in I$, consideremos:*

(a) el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "\gamma_i"'] & A \\
A_i \cup B \arrow[ur, "\psi_i"] & B, \arrow[l, "\eta'_i"] \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

donde $\psi_i : A_i \cup B \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A, \eta : B \longrightarrow A\}$ de sub-objetos de A, y γ_i, η'_i son los monomorfismos inducidos por dicha unión,

(b) el siguiente diagrama de pullback (α_i y β_i son monomorfismos pues η y μ_i lo son)

$$\begin{tikzcd}
A_i \cap B \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & B \arrow[d, "\eta"] \\
A_i \arrow[r, "\mu_i"] & A.
\end{tikzcd}$$

Entonces, para cada par $(i, j) \in I \times I$ con $\mu_i \leq \mu_j$, existe un único monomorfismo $\psi_{ij} : A_i \cup B \longrightarrow A_j \cup B$ y un único monomorfismo $\varphi_{ij} : A_i \cap B \longrightarrow A_j \cap B$ tales que, los siguientes diagramas son conmutativos y sus flechas son monomorfismos en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$.

(i) Diagrama de la unión

$$\begin{tikzcd}
\{A_i, \mu_{ij}\} \arrow[r, "\mu=\{\mu_i\}"] \arrow[d, "\gamma=\{\gamma_i\}"'] & \mathbb{I}_A \\
\{A_i \cup B, \psi_{ij}\} \arrow[ur, "\psi=\{\psi_i\}"] & \mathbb{I}_B. \arrow[l, "\eta'=\{\eta'_i\}"] \arrow[u, "\mathbb{I}_\eta"']
\end{tikzcd}$$

(ii) Diagrama de la intersección

$$\begin{tikzcd}
\{A_i \cap B, \varphi_{ij}\} \arrow[r, "\beta=\{\beta_i\}"] \arrow[d, "\alpha=\{\alpha_i\}"'] & \mathbb{I}_B \arrow[d, "\mathbb{I}_\eta"] \\
\{A_i, \mu_{ij}\} \arrow[r, "\mu=\{\mu_i\}"'] & \mathbb{I}_A.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $(i, j) \in I \times I$ tal que $\mu_i \leq \mu_j$.

(i) Diagrama de la unión: Dado que $\mu_j \mu_{ij} = \mu_i$, del diagrama conmutativo en (a), se obtiene que los siguientes dos diagramas conmutan en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_i \cup B \arrow[dr, "\psi_i"'] & B \arrow[l, "\eta'_i"'] \arrow[r, "\eta'_j"] \arrow[d, "\eta"'] & A_j \cup B \arrow[d, "\psi_j"'] \\
 & A \arrow[r, "1_A"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_i \cup B \arrow[dr, "\psi_i"'] & A_i \arrow[l, "\gamma_i"'] \arrow[r, "\gamma_j \mu_{ij}"] \arrow[d, "\mu_i"'] & A_j \cup B \arrow[d, "\psi_j"] \\
 & A \arrow[r, "1_A"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad de la unión, existe un único morfismo $\psi_{ij} : A_i \cup B \longrightarrow A_j \cup B$ tal que, si agregamos el morfismo ψ_{ij} a los dos diagramas anteriores, obtenemos de nuevo dos diagramas conmutativos. De aquí, resulta que ψ_{ij} es un monomorfismo (pues $\psi_j \psi_{ij} = \psi_i$ y ψ_i es un monomorfismo) y además se obtienen los diagramas en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$, del inciso (i).

(ii) Diagrama de la intersección. Dado que $\mu_j \mu_{ij} = \mu_i$, del diagrama de pullback en (b), se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_i \cap B \arrow[drr, bend left, "\beta_i"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_{ij}\alpha_i"'] & & \\
 & A_j \cap B \arrow[r, "\beta_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & B \arrow[d, "\eta"] \\
 & A_j \arrow[r, "\mu_j"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Por propiedad del pullback, existe un único morfismo $\varphi_{ij} : A_i \cap B \longrightarrow A_j \cap B$ tal que, si agregamos el morfismo φ_{ij} al diagrama anterior, obtenemos un diagrama conmutativo. De este diagrama, obtenemos el diagrama conmutativo de (ii) en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$, y además que φ_{ij} es un monomorfismo pues $\beta_j \varphi_{ij} = \beta_i$ y β_i es un monomorfismo.

$\square$

Teorema 3.1.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y cocompleta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$\mathscr{A}$ es C_3.*

(b) *Si $\{\mu_i : B_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ es una familia dirigida de sub-objetos de $A \in \mathscr{A}$, entonces $\theta : \varinjlim B \longrightarrow A = \cup_{i\in I} B_i \longrightarrow A$, donde $\pi = \{\pi_i\} : B \longrightarrow \mathbb{I}_{\varinjlim B}$ es el límite directo de $B = \{B_i, b_{ij}\} \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$ y θ es el único morfismo en $\mathscr{A}$, que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$*

$$\begin{tikzcd}
B = \{B_i, b_{ij}\} \arrow[rr, "\mu=\{\mu_i\}"] \arrow[dr, "\pi=\{\pi_i\}"'] & & \mathbb{I}_A \\
& \mathbb{I}_{\varinjlim B}. \arrow[ur, "\mathbb{I}_\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
B_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & A \\
\varinjlim B \arrow[r, "\bar{\theta}"'] \arrow[ur, "\theta"] & Im(\theta), \arrow[u, "\theta'"']
\end{tikzcd}$$

donde $\theta = \theta'\bar{\theta}$ es la factorización de θ a través de su imagen. Dado que μ_i es un monomorfismo $\forall i \in I$, de 2.2.18, se tiene que el monomorfismo $\theta' : Im(\theta) \longrightarrow A$ es la unión $\cup_{i\in I} B_i \longrightarrow A$ de la familia $\{\mu_i : B_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$. Luego, si probamos que θ es un monomorfismo se tendría que $\bar{\theta}$ es un monomorfismo; y por lo tanto $\bar{\theta}$ sería un isomorfismo pues $\bar{\theta}$ ya es un epimorfismo y $\mathscr{A}$ es balanceada. Siendo $\bar{\theta}$ un isomorfismo, se tendría que $\theta : \varinjlim B \longrightarrow A = \cup_{i\in I} B_i \longrightarrow A$. Veamos que θ es un monomorfismo. En efecto, $\theta\pi_i = \mu_i$ y μ_i es un monomorfismo $\forall i \in I$, en particular π_i es un monomorfismo $\forall i \in I$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
Ker(\theta) \cap B_i \arrow[r, "\alpha_i'"] \arrow[d, "\pi_i'"'] & B_i \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
Ker(\theta) \arrow[r, "\alpha"'] & \varinjlim B \arrow[r, "\theta"'] & A,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es un pullback y $Ker(\ \varinjlim B \xrightarrow{\theta} A\ ) = \ Ker(\theta) \xrightarrow{\alpha} \varinjlim B$. Veamos que $\bigcup_{i\in I}\{\pi_i' : Ker(\theta) \cap B_i \longrightarrow Ker(\theta)\} = Ker(\theta)$. En efecto, dado que π_i es un monomorfismo $\forall i \in I$, de 2.2.18, se tiene que $\bigcup_{i\in I}\{\pi_i : B_i \longrightarrow \varinjlim B\} = \varinjlim B$. Luego, usando que $\mathscr{A}$ es C_3, obtenemos que

$$Ker(\theta) = Ker(\theta) \cap \varinjlim B = Ker(\theta) \cap (\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I}(Ker(\theta) \cap B_i).$$

Por otro lado, aplicando 1.14.8 al diagrama anterior, obtenemos que $Ker(\theta) \cap B_i = Ker(\mu_i)$; y como μ_i es un monomorfismo, entonces $Ker(\theta) = \cup_{i\in I}(Ker(\theta) \cap B_i) = 0$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Usaremos la notacion de 3.1.7. Sea $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de A y $\eta : B \longrightarrow A$ un monomorfismo. Luego, por 3.1.7, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \{A_i \cap B, \varphi_{ij}\} \arrow[r, "\alpha=\{\alpha_i\}"] \arrow[d, "\beta=\{\beta_i\}"'] & \{A_i, \mu_{ij}\} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\gamma=\{\gamma_i\}"] & Coker(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\gamma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{I}_B \arrow[r, "\eta'=\{\eta'_i\}"'] & \{A_i \cup B, \psi_{ij}\} \arrow[r, "\bar{\eta}'"'] & Coker(\eta') \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde γ es un monomorfismo y $\bar{\gamma}$ es un isomorfismo. En efecto, de los diagramas (i) y (ii) de 3.1.7, obtenemos que $\psi\gamma\alpha = \mu\alpha = \mathbb{I}_\eta\beta = \psi\eta'\beta$, y como ψ es un monomorfismo se tiene que $\gamma\alpha = \eta'\beta$. Por otro lado, el morfismo $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_i : A_i/A_i \cap B \longrightarrow A_i \cup B/B\}_{i\in I}$ es un isomorfismo punto a punto (es decir, cada $\bar{\gamma}_i$ con $i \in I$ es un isomorfismo) por 1.18.7.
Ahora bien, aplicando el funtor $L := \varinjlim : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ al diagrama anterior, obtenemos por 3.1.6 y el dual de 2.12.8(b), el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \cup(A_i \cap B) \arrow[r, "L(\alpha)"] \arrow[d, "L(\beta)"] & \cup A_i \arrow[r, "L(\bar{\alpha})"] \arrow[d, "L(\gamma)"] & \varinjlim A_i/A_i \cap B \arrow[r] \arrow[d, "L(\bar{\gamma})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "L(\eta')"'] & \cup(A_i \cup B) \arrow[r, "L(\bar{\eta'})"'] & \varinjlim A_i \cup B/B \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $L(\gamma)$ es un monomorfismo y $L(\bar{\gamma})$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$. Dado que $L(\alpha) = Ker(L(\bar{\alpha})) = Ker(L(\bar{\gamma})L(\bar{\alpha})) = Ker(L(\bar{\eta'})L(\gamma))$ y $L(\gamma)$ es un monomorfismo, concluimos de 1.14.8, que el cuadrado de la izquierda en el diagrama anterior es un pullback, al cual nos referiremos como el primer diagrama de pullback. Consideremos ahora el segundo diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
B \cap (\cup A_i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\eta"] \\
\cup A_i \arrow[r, "L(\mu)"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Veamos que los sub-objetos $L(\mu)g : B \cap (\cup A_i) \longrightarrow A$ y $L(\mu\alpha) : \cup(A_i \cap B) \longrightarrow A$ son isomorfos; para lo cual usaremos los dos diagramas de pullback.
Aplicando el funtor $L := \varinjlim$ al diagrama (ii) de 3.1.7, obtenemos que $L(\mu)L(\alpha) = \eta L(\beta)$; y del segundo diagrama de pullback se tiene que existe un único morfismo $f' : \cup(A_i \cap B) \longrightarrow B \cap (\cup A_i)$ tal que $L(\beta) = ff'$ y $L(\alpha) = gf'$. Por

otro lado, aplicando el funtor $L := \varinjlim$ al diagrama (i) de 3.1.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\cup A_i \arrow[r, "L(\mu)"] \arrow[d, "L(\gamma)"'] & A \\
\cup(A_i \cup B) \arrow[ur, "L(\psi)"] & B, \arrow[l, "L(\eta')"] \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

donde todos los morfismos, en dicho diagrama, son monomorfismos.
Luego $L(\psi)L(\eta')f = \eta f = L(\mu)g = L(\psi)L(\gamma)g$, y como $L(\psi)$ es un monomorfismo, se tiene que $L(\eta')f = L(\gamma)g$. De esto, y del primer diagrama de pullback, existe un único morfismo $g' : B \cap (\cup A_i) \longrightarrow \cup(A_i \cap B)$ tal que $L(\alpha)g' = g$ y $f = L(\beta)g'$. En particular $L(\mu)gf' = L(\mu)L(\alpha)$ y $L(\mu)L(\alpha)g' = L(\mu)g$, esto es el siguiente diagrama de monomorfismos

$$\begin{tikzcd}
B \cap (\cup A_i) \arrow[r, "L(\mu)g"] \arrow[d, shift left, "g'"] & A \\
\cup(A_i \cap B) \arrow[u, shift left, "f'"] \arrow[ur, "L(\mu\alpha)"']
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathscr{A}$; y por lo tanto, como sub-objetos de A, son isomorfos. $\square$

Corolario 3.1.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría completa. Si $\mathscr{A}$ es C_3 entonces es C_2.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{F}(I) = \{F \subset I \mid F \text{ es finito}\}$. Sean μ_i^F, p_i^F (resp. $\bar{\mu}_i$, $\bar{p}_i$) las inclusiones y proyecciones en el coproducto $\bigoplus_{i\in F} A_i$ (resp. en el producto $\prod_{i\in I} A_i$) y $u_F : \bigoplus_{i\in F} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ el morfismo inducido por las inclusiones $\{\bar{\mu}_i\}_{i\in F}$. Es fácil ver que u_F es un monomorfismo y además que $\{u_F : \bigoplus_{i\in F} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i\}_{F\in\mathscr{F}(I)}$ es una familia dirigida de sub-objetos de $\prod_{i\in I} A_i$. Luego por la demostración de 2.3.5, sabemos que $\varinjlim \bigoplus_{i\in F} A_i = \bigoplus_{i\in I} A_i$. Por lo tanto existe un único morfismo $\theta : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo siempre que $F \subset G$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[rrrr, dashed, "\theta"] & & & & \prod_{i\in I} A_i \\
& & \bigoplus_{i\in F} A_i \arrow[ull, "\mu_F"'] \arrow[urr, "u_F"] \arrow[d, "u_{FG}"] & & \\
& & \bigoplus_{i\in G} A_i. \arrow[uull, "\mu_G"] \arrow[uurr, "u_G"'] & &
\end{tikzcd}$$

En particular, para cada $i \in I$ se tiene que $\theta\mu_i = \bar{\mu}_i$, es decir, $\bar{p}_i\theta\mu_i = 1_{A_i}$ y $\bar{p}_j\theta\mu_i = 0$ para $i \neq j$, donde $\mu_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ es la inclusión canónica. Por lo tanto $\delta = (\delta_{ij}) = \theta$. Luego, por 3.1.8 y 3.1.6, tenemos que δ es un monomorfismo, probándose que $\mathscr{A}$ es C_2.

$\square$

Corolario 3.1.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_3, con una familia de generadores. Si A es un objeto de $\mathscr{A}$; entonces los sub-objetos de A que son finitamente generados forman una familia dirigida de sub-objetos de A cuyo límite directo es A.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de generadores de $\mathscr{A}$, por 2.15.3, $\mathscr{A}$ es localmente pequeña; y por lo tanto, la clase de todos los sub-objetos finitamente generados de A forman un conjunto. Ahora sean A_1 y A_2 dos sub-objetos finitamente generados, es decir, existen $q_1 : \bigoplus_{k\in K} U_k \longrightarrow A_2$ y $q_2 : \bigoplus_{j\in J} U_j \longrightarrow A_2$ con q_1, q_2 epimorfismos y K, J finitos. Entonces, por el dual de 2.12.9, se tiene que $q : \bigoplus_{i\in I} U_i \longrightarrow A_1 \bigoplus A_2$ es un epimorfismo donde $I = K \sqcup J$ (unión disjunta). Pero por 1.19.6, se tiene que $A_1 \cup A_2$ es la imagen del morfismo $f : A_1 \bigoplus A_2 \longrightarrow A$, donde $f\mu_i$ es la inclusión de A_i en A. De donde se sigue que $A_1 \cup A_2$ es finitamente generado. Por lo tanto, la familia de sub-objetos finitamente generados de A forman una familia dirigida. Por 3.1.8, el límite directo $\theta : L \longrightarrow A$ de ésta familia es un sub-objeto de A. Supongamos que θ no es un epimorfismo. Por lo tanto, existen $h, g : A \longrightarrow B$ tales que $g\theta = h\theta$ y $g \neq h$. Luego existen $i \in \Lambda$ y $\mu : U_i \longrightarrow A$ tales que $h\mu \neq g\mu$. Entonces, μ no se factoriza a través de θ, puesto si lo hiciera, se tendría que $\mu = \theta\alpha$ para algún $\alpha : U_i \longrightarrow L$; de donde $h\mu = g\mu$ lo cual es una contradicción. Sea $\mu = \eta\psi$ la factorización de μ a través de su imagen, donde $\eta : Im(\mu) \longrightarrow A$. En particular $Im(\mu)$ es, por definición, finitamente generado. Por lo tanto, existe un monomorfismo $v : Im(\mu) \longrightarrow L$ tal que $\eta = \theta v$, ya que $\theta : L \longrightarrow A$ es la unión de los sub-objetos de A que son finitamente generados. Luego $\mu = \theta v\psi$, lo cual es una contradicción pues μ no se puede factorizar a través de θ. Por lo tanto θ es un epimorfismo, y en consecuencia un isomorfismo. $\square$

Lema 3.1.11 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana cocompleta y $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de $A \in \mathscr{A}$. Denotemos por μ_{ij} al morfismo de sub-objetos $\mu_{ij} : (\mu_i, A) \longrightarrow (\mu_j, A)$ cada vez que $\mu_i \leq \mu_j$. Para cada $i \in I$, consideremos $A \xrightarrow{\pi} A/A_i = Coker(A_i \xrightarrow{\mu_i} A)$; y para $\mu_i \leq \mu_j$, sea $\bar{\mu}_{ij} : A/A_i \longrightarrow A/A_j$ el morfismo inducido por μ_{ij} en los cocientes. Esto es, se tiene la siguiente sucesión exacta en* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$0 \longrightarrow \{A_i, \mu_{ij}\} \xrightarrow{\mu=\{\mu_i\}} \mathbb{I}_A \xrightarrow{\pi=\{\pi_i\}} Coker(\mu) = \{A/A_i, \bar{\mu}_{ij}\} \longrightarrow 0.$$

Si $\theta : \cup_{i\in I} A_i \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow \cup_{i\in I} A_i \xrightarrow{\theta} A \xrightarrow{\varinjlim(\pi)} \varinjlim A/A_i \longrightarrow 0.$$

Demostración. Por el dual de 2.12.8, el funtor $\varinjlim : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ es exacto a derecha. Luego, se tiene la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$\varinjlim A_i \xrightarrow{\varinjlim(\mu)} A \xrightarrow{\varinjlim(\pi)} \varinjlim A/A_i \longrightarrow 0.$$

Sea $q : Im(\varinjlim(\mu)) \longrightarrow A$ la imagen del morfismo $\varinjlim(\mu)$. Por 2.2.18, sabemos que el monomorfismo $q : Im(\varinjlim(\mu)) \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$, probándose el lema. $\square$

Proposición 3.1.12 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana cocompleta. Entonces, $\mathscr{A}$ es C_3 si y sólo si para toda familia dirigida $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in J}$ de sub-objetos de $A \in \mathscr{A}$ y para todo morfismo $f : B \longrightarrow A$ se tiene que*

$$f^{-1}(\cup A_i) = \cup f^{-1}(A_i). \tag{3.2}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $\eta : \cup A_i \longrightarrow A$ la unión de $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in J}$ y $\mu : B \longrightarrow A$ un monomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
B \cap (\cup A_i) \arrow[r] \arrow[d] & \cup A_i \arrow[d, "\eta"] \\
B \arrow[r, "\mu"] & A.
\end{tikzcd}$$

Entonces, se tiene que $\mu^{-1}(\cup A_i) = B \cap (\cup A_i)$. Por otro lado, por hipótesis, tenemos que la unión es preservada por imágenes inversas; por lo tanto $\mu^{-1}(\cup A_i) = \cup \mu^{-1}(A_i) = \cup(A_i \cap B)$, probándose que $\mathscr{A}$ es C_3.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría C_3 y sea $B \xrightarrow{\bar{f}} I \xrightarrow{f'} A$ la factorización de f a través de su imagen. Entonces, por 1.18.3 y 1.8.4 tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Ker(\gamma_i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^{-1}(A_i) \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & A_i \cap I \arrow[r] \arrow[d, "\eta_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\bar{f}) \arrow[r] & B \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\psi_i"'] & I \arrow[r] \arrow[d, "q_i"] & 0 \\
 & & I/A_i \cap I \arrow[r, equal] \arrow[d] & I/A_i \cap I \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

No es difícil ver que, si $\mu_i \leq \mu_j$ entonces existe un único $\theta_{ij} : f^{-1}(A_i) \longrightarrow f^{-1}(A_j)$ y un único $\varphi_{ij} : I/A_i \cap I \longrightarrow I/A_j \cap I$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f^{-1}(A_i) \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\theta_{ij}"'] & B \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "1_B"'] & I/A_i \cap I \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & f^{-1}(A_j) \arrow[r, "\beta_j"] & B \arrow[r, "\psi_j"] & I/A_j \cap I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$. También es fácil ver que si $\mu_i \leq \mu_j$, entonces existe un único $\xi_{ij} : A_i \cap I \longrightarrow A_j \cap I$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_i \cap I \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "\xi_{ij}"'] & I \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "1_I"'] & I/A_i \cap I \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_j \cap I \arrow[r, "\eta_j"] & I \arrow[r, "q_j"] & I/A_j \cap I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$. En particular, $\{\beta_i : f^{-1}(A_i) \longrightarrow B\}_{i\in J}$ es una familia dirigida de sub-objetos de B; y además, de los tres diagramas anteriores, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(J)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \{f^{-1}(A_i), \theta_{ij}\} \arrow[r, "\beta=\{\beta_i\}"] \arrow[d, "\gamma=\{\gamma_i\}"] & \mathbb{I}_B \arrow[r, "\psi=\{\psi_i\}"] \arrow[d, "\mathbb{I}_{\bar{f}}"] & \{I/A_i \cap I, \varphi_{ij}\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Ker(q) \arrow[r, "\eta=\{\eta_i\}"'] & \mathbb{I}_I \arrow[r, "q=\{q_i\}"'] & \{I/A_i \cap I, \varphi_{ij}\} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dado que $\{\eta_i : A_i \cap I \longrightarrow I\}_{i\in J}$ es una familia dirigida de sub-objetos de I, aplicando el funtor $L := \varinjlim$ al diagrama anterior obtenemos, por 3.1.8 y 3.1.11, el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \cup f^{-1}(A_i) \arrow[r, "L(\beta)"] \arrow[d, "L(\gamma)"'] & B \arrow[r, "L(\psi)"] \arrow[d, "\bar{f}"] & I/\cup(A_i \cap I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \cup(A_i \cap I) \arrow[r, "L(\eta)"'] & I \arrow[r, "L(q)"'] & I/\cup(A_i \cap I) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(\cup A_i) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{\lambda}"'] & I \cap (\cup A_i) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & \cup A_i \arrow[d, "L(\mu)"] \\ B \arrow[r, "\bar{f}"'] & I \arrow[r, "f'"'] & A, \end{tikzcd}$$

donde los cuadrados izquierdo y derecho son pullbacks (ver en 1.8.4). Veamos que los sub-objetos de B: $(L(\beta), B)$ y $(\bar{\lambda}, B)$ son isomorfos. En efecto, por 1.18.3, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Ker(\bar{g}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^{-1}(\cup A_i) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{\lambda}"'] & I \cap (\cup A_i) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r] & B \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[d, "\rho"'] & I \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
 & & I/I \cap (\cup A_i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & I/I \cap (\cup A_i) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Por ser $\mathscr{A}$ una categoría C_3, tenemos que $f'L(\eta)$ y $f'\lambda$ son isomorfos como sub-objetos de A. Luego como f' es un monomorfismo, entonces $(L(\eta), I) \simeq (\lambda, I)$ como sub-objetos de I. Luego, existe un isomorfismo ξ tal que $\xi\pi = L(q)$. Por lo tanto $Ker(\rho) = Ker(\pi\bar{f}) \simeq Ker(\xi\pi\bar{f}) = Ker(L(\psi))$, probándose que $(L(\beta), B)$ y $(\bar{\lambda}, B)$ son sub-objetos isomorfos de B. $\square$

Proposición 3.1.13 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_3 y $\{A_i, \pi_{ij}\}_{i,j\in I}$ un sistema directo en $\mathscr{A}$ sobre I. Si $\pi = \{\pi_i\} : \{A_i, \pi_{ij}\} \longrightarrow \mathbb{I}_L$ es el límite directo de $\{A_i, \pi_{ij}\} \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$ entonces $K_k = \bigcup_{k\le p} K_{kp}$, donde $K_{kp} := Ker(\pi_{kp})$ para $k \le p$ y $K_k := Ker(\pi_k)$.*

Demostración. Para cada k fijo, consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
L & A_k \arrow[l, "\pi_k"'] \arrow[d, "\pi_{kp}"] \\
 & A_p. \arrow[ul, "\pi_p"]
\end{tikzcd}$$

Entonces, como $\pi_k = \pi_p\pi_{kp}$, se tiene que $Ker(\pi_{kp}) \subset Ker(\pi_p\pi_{kp}) = Ker(\pi_k)$; por lo que $\bigcup_{k\le p} K_{kp} \subset K_k$.
Ahora probaremos la otra inclusión. Sea $R := \{(i,j) \in I \times I \mid i \le j\}$ y $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ con $\mu_i : A_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ la inclusión en el coproducto. Si $S \subset R$, sea $A_S := \bigcup_{(i,j)\in S} Im(\mu_i - \mu_j\pi_{ij}) \subset A$. Luego, por 2.2.20, se tiene que $L = \varinjlim_{i\in I} A_i = A/A_R$. Pero $A_R = \cup_F A_F$, donde F corre sobre todos los subconjuntos finitos de R. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mu_k^{-1}(A_R) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & A_k \arrow[d, "\mu_k"] & & \\
0 \arrow[r] & A_R \arrow[r, "\mu"] & \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[r, "\eta"] & \bigoplus_{i\in I} A_i/A_R \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es un pullback y la fila inferior es una sucesión exacta corta. Por 1.14.8, se tiene que β es el kernel de $\eta\mu_k$. Pero por 2.2.20 $\pi_k = \eta\mu_k$, por lo que $\beta : \mu_k^{-1}(A_R) \longrightarrow A_k$ es el kernel de π_k. Luego, por 3.1.12, se tiene que $K_k = \mu_k^{-1}(A_R) = \bigcup_F \mu_k^{-1}(A_F)$. Por lo tanto, basta demostrar que $\mu_k^{-1}(A_F) \subset K_{kp}$ para algún $p \geq k$. Dado F, sea p un índice tal que:

(a) $p \geq k$, y

(b) si $(i,j) \in F$ entonces $p \geq i$ y $p \geq j$.

También tenemos el siguiente diagrama de pullback en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mu_k^{-1}(A_F) \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_k \arrow[d, "\mu_k"] & \\
A_F \arrow[r, "\mu_F"] & A \arrow[r, "\eta_F"] & A/A_F.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\beta_1 : \mu_k^{-1}(A_F) \longrightarrow A_k$ es el kernel de $\eta_F\mu_k$. Definamos $f : A \longrightarrow A_p$ como $f\mu_i = \pi_{ip}$ para $i \leq p$ y $f\mu_i = 0$ en el otro caso. Entonces, para $(i,j) \in F$ se tiene que

$$f(\mu_i - \mu_j\pi_{ij}) = f\mu_i - f\mu_j\pi_{ij} = \pi_{ip} - \pi_{jp}\pi_{ij} = \pi_{ip} - \pi_{ip} = 0.$$

Veamos que $f\mu_F = 0$. Sea $A_i \xrightarrow{\bar{\theta}_{ij}} C_{ij} \xrightarrow{\theta_{ij}} A$ la factorización de $\mu_i - \mu_j\pi_{ij} : A_i \longrightarrow A$ a través de su imagen con $C_{ij} = Im(\mu_i - \mu_j\pi_{ij})$. Luego $f\theta_{ij}\bar{\theta}_{ij} = 0$; y como $\bar{\theta}_{ij}$ es un epimorfismo, tenemos que $f\theta_{ij} = 0$ y entonces $f(C_{ij}) = 0$. Como $\mu_F : A_F \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{\theta_{ij} : C_{ij} \longrightarrow A\}_{(i,j)\in F}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_{ij} \arrow[r, "\theta_{ij}"] \arrow[d, "\gamma_{ij}^F"'] & A \\
A_F. \arrow[ur, "\mu_F"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego por 1.12.5, tenemos que $f(A_F) = f(\cup_{(i,j)\in F} C_{ij}) = \cup_{(i,j)\in F} f(C_{ij}) = 0$, es decir, $Im(f\mu_F) = 0$ y por lo tanto $f\mu_F = 0$. Por otro lado, como $\eta_F = Coker(\mu_F)$, existe $\theta : A/A_F \longrightarrow A_p$ tal que $f = \theta\eta_F$. Por lo tanto $f\mu_k\beta_1 = \theta(\eta_F\mu_k\beta_1) = 0$; y usando 1.11.6, se tiene que $0 = Im(f\mu_k\beta_1) = f(\mu_k(\mu_k^{-1}(A_F)))$. Entonces, concluimos que

$$0 = f(\mu_k(\mu_k^{-1}(A_F))) = \pi_{kp}(\mu_k^{-1}(A_F)).$$

Esto prueba que $\mu_k^{-1}(A_F) \subset K_{kp}$, que es lo que se quería. $\square$

Teorema 3.1.14 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana cocompleta. Entonces, $\mathscr{A}$ es C_3 si y sólo si para cualquier conjunto dirigido I, el funtor*

$$L := \varinjlim : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$$

es exacto.

Demostración. Tenemos que el funtor $L := \varinjlim : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ preserva cokerneles por el dual de 2.12.8. Por lo tanto, basta probar que $\mathscr{A}$ es C_3 si y sólo si L preserva monomorfismos.
($\Leftarrow$) Supongamos que L preserva monomorfismos. Sea $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de A y $\mu_{ij} : (\mu_i, A) \longrightarrow (\mu_j, A)$ el morfismo de sub-objetos de A. Esto es, $\mu = \{\mu_i\} : \{A_i, \mu_{ij}\} \longrightarrow \mathbb{I}_A$ es un monomorfismo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_{\varinjlim A_i} \arrow[rr, "\mathbb{I}_{L(\mu)}"] & & \mathbb{I}_A \\
& \{A_i, \mu_{ij}\}, \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\mu=\{\mu_i\}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $L(\mu) : \varinjlim A_i \longrightarrow A$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$. En particular, $Im(L(\mu)) = L(\mu)$, y por 2.2.18, obtenemos que $L(\mu) : \varinjlim A_i \longrightarrow A$ es la unión de la familia $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ de sub-objetos de A. Esto es, $\mathscr{A}$ es C_3 por 3.1.8.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{A}$ es C_3. Sea $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y dirigido. Consideremos un monomorfismo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$u = \{u_i\} : \{A_i, \pi_{ij}\} \longrightarrow \{B_i, \mu_{ij}\}.$$

Dado que $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \simeq [Ord(I)/\sim, \mathscr{A}]$ obtenemos por 2.11.9, que $u_i : A_i \longrightarrow B_i$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$ $\forall i \in I$. Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd}
\{A_i, \pi_{ij}\} \arrow[r, "u=\{u_i\}"] \arrow[d, "\{\pi_i\}"'] & \{B_i, \mu_{ij}\} \arrow[d, "\{\mu_i\}"] \\
\mathbb{I}_A \arrow[r, "L(u)"'] & \mathbb{I}_B
\end{tikzcd}$$

donde $A := \varinjlim A_i$ y $B := \varinjlim B_i$. Sea $(K \xrightarrow{\alpha} A) = Ker(A \xrightarrow{L(u)} B)$, y $A_i \xrightarrow{\pi_i''} Im(\pi_i) \xrightarrow{\pi_i'} A$ la factorización de $\pi_i : A_i \longrightarrow A$ a través de su imagen, hagamos $A_i' := Im(\pi_i)$. Luego, por 2.2.18, se tiene que $A = Im(1_A) = \cup_{i\in I} Im(\pi_i) = \cup_{i\in I} A_i'$. Usando ahora que $\mathscr{A}$ es una categoría C_3, se tiene que

$$K = K \cap (\cup_{i\in I} A_i') = \cup_{i\in I}(A_i' \cap K).$$

Supongamos que $K \neq 0$. Entonces existe $k \in I$ tal que $A_k' \cap K \neq 0$. Sea $M := \pi_k^{-1}(A_k' \cap K)$. Luego, por 1.8.4, tenemos que existe un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\pi_k^{-1}(K) \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha''"'] & A_k' \cap K \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\alpha'"'] & K \arrow[d, "\alpha"'] \\
A_k \arrow[r, "\pi_k''"] & A_k' \arrow[r, "\pi_k'"] & A
\end{tikzcd}$$

tal que

(a) $\pi_k^{-1}(K) = M$, (por 1.12.3)

(b) γ_2, α' y α'' son monomorfismos, y

(c) γ_1 es un epimorfismo.

Veamos que $\pi_k(M) \neq 0$. En efecto, supongamos que $\pi_k(M) = 0$. Luego por 1.11.6, $0 = \pi_k(M) = \pi_k\alpha'' = \alpha\gamma_2\gamma_1$; y como $\alpha\gamma_2$ es un monomorfismo, entonces $\gamma_1 = 0$. En particular, $0 = Im(\gamma_1) = A'_k \cap K$ pues γ_1 es un epimorfismo, lo cual contradice que $A'_k \cap K \neq 0$; probándose que $\pi_k(M) \neq 0$. Ahora bien, usando 1.11.6 y 1.12.4, obtenemos

$$\begin{aligned}\mu_k(u_k(M)) =& L(u)(\pi_k(M))\\ =& L(u)(\pi_k(\pi_k^{-1}(A'_k \cap K)))\\ \subset& L(u)(A'_k \cap K) \subset L(u)(K) = 0.\end{aligned}$$

Entonces, por 3.1.13, $u_k(M)$ es un sub-objeto de $\bigcup_{k\leq p} L_{kp}$, donde $L_{kp} := Ker(\mu_{kp})$. De nuevo, usando que $\mathscr{A}$ es C_3, se tiene que

$$u_k(M) = \bigcup_{k\leq p}(L_{kp} \cap u_k(M)).$$

Por lo tanto

$$M = u_k^{-1}(u_k(M)) = u_k^{-1}(\bigcup_{k\leq p}(L_{kp} \cap u_k(M))) = \bigcup_{k\leq p} u_k^{-1}(L_{kp} \cap u_k(M)). \quad (3.3)$$

En efecto, la primera igualdad es cierta por que u_k es un monomorfismo y la tercera por 3.1.12. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$ cuando $k \leq p$

$$\begin{tikzcd} u_k^{-1}(N_k) \arrow[r, "\eta_k"] \arrow[d, "\alpha_k"] & N_k \arrow[d, "\beta_k"] \\ A_k \arrow[r, "u_k"'] \arrow[d, "\pi_{kp}"] & B_k \arrow[d, "\mu_{kp}"] \\ A_p \arrow[r, "u_p"'] & B_p \end{tikzcd}$$

donde $N_k = L_{kp} \cap u_k(M)$. Ahora, como $\mu_{kp}\beta_k\eta_k = 0$ (puesto que $N_k \subset L_{kp}$), se tiene que $u_p\pi_{kp}\alpha_k = 0$; pero como u_p es un monomorfismo, entonces $\pi_{kp}\alpha_k = 0$. Por lo tanto $0 = Im(\pi_{kp}\alpha_k) = \pi_{kp}(u_k^{-1}(L_{kp} \cap u_k(M)))$ para $p \geq k$. Pero como $\pi_k = \pi_p\pi_{kp}$, concluimos que $\pi_k(u_k^{-1}(L_{kp} \cap u_k(M))) = 0$ para $p \geq k$.
Usando la ecuación (3.3) y por 1.12.5, se tiene que $\pi_k(M) = 0$. Esta contradicción prueba que $K = 0$; y por lo tanto, $L(u)$ es un monomorfismo. $\square$

3.2. Envolventes inyectivas

Definición 3.2.1 *Una **extensión esencial** de un objeto A' en una categoría abeliana, es un monomorfismo $\mu : A' \longrightarrow A$ tal que para todo sub-objeto $A_1 \neq 0$ de A se tiene que $\mu^{-1}(A_1) \neq 0$. Una extensión esencial $\mu : A' \longrightarrow A$ se dice que es **propia** si μ no es un isomorfismo.*

Observación 3.2.2

*(a) Al monomorfismo $\mu : A' \longrightarrow A$ de la definición anterior, se le conoce también como **monomorfismo esencial**.*

(b) Una inclusión $A' \subset A$ es una extensión esencial en $\mathrm{Mod}(R)$ si y sólo si para toda $a \in A$ con $a \neq 0$ existe $r \in R$ tal que $ra \in A'$ y $ra \neq 0$.

Lema 3.2.3 *Sea $\mu : A' \longrightarrow A$ un monomorfismo en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Son equivalentes*

(a) $\mu : A' \longrightarrow A$ es una extensión esencial;

(b) si $f\mu$ es un monomorfismo, entonces f lo es.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $f : A \longrightarrow B$ tal que $f\mu$ es un monomorfismo. Supongamos que $\alpha : K \longrightarrow A$ es el kernel de $f : A \longrightarrow B$ y $K \neq 0$. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
\mu^{-1}(A') \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d, "\mu"] & \\
K \arrow[r, "\alpha"'] & A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Por ser μ esencial y por 1.14.8, se tiene que $0 \neq \mu^{-1}(K) = Ker(f\mu)$; lo cual contradice que $f\mu$ es un monomorfismo. Luego f tiene que ser un monomorfismo. $(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\mu : A' \longrightarrow A$ no es esencial. Luego, existe un sub-objeto $0 \neq \mu_1 : A_1 \longrightarrow A$ de A tal que $\mu^{-1}(A_1) = 0$. Sea $p : A \longrightarrow B$ tal que $Coker(\mu_1) = p$. Luego, por 1.14.8, tenemos que $0 = \mu^{-1}(A_1) = Ker(p\mu)$; sin embargo $0 \neq A_1 = Ker(p)$. $\square$

Lema 3.2.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $Q \in \mathscr{A}$.*

(a) Si Q es inyectivo entonces todo monomorfismo esencial $\alpha : Q \longrightarrow A$ es un isomorfismo.

(b) Si $\mathscr{A}$ es C_3, localmente pequeña y Q no admite extensiones esenciales propias, entonces Q es inyectivo.

Demostración.

(a) Supongamos que Q es inyectivo. Sea $\mu : Q \longrightarrow A$ una extensión esencial. Si $\mu : Q \longrightarrow A$ no es un isomorfismo, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\beta} Q' \longrightarrow 0,$$

con $Q' \neq 0$ pues μ no es un isomorfismo. Como Q es inyectivo, se tiene que μ es un split-mono y por lo tanto, de 1.21.2, se tiene que existe $\gamma : Q' \longrightarrow A$ tal que $\beta\gamma = 1_{Q'}$. Luego, por 1.14.8, tenemos que $\mu^{-1}(Q') = Ker(\beta\gamma) = Ker(1_{Q'}) = 0$; lo cual contradice que μ es una extensión esencial. Por lo tanto $\mu : Q \longrightarrow A$ tiene que ser un isomorfismo.

(b) Supongamos que Q no admite extensiones esenciales propias. Para ver que Q es inyectivo, por el resultado dual de 2.14.5, es suficiente probar lo siguiente: si $\mu : Q \longrightarrow A$ es un monomorfismo entonces μ es un split-mono.
Supongamos que $\mu : Q \longrightarrow A$ es un monomorfismo que no es un split-mono; en particular tenemos que $Q \neq 0$ y $A \neq 0$. Por otro lado, como $\mathscr{A}$ es localmente pequeña, se tiene que la siguiente clase de sub-objetos de A

$$\mathscr{C} = \{(v, A) \in [\mathscr{A}, A] \mid Dom(v) \neq 0 \quad \text{y} \quad \mu^{-1}(Dom(v)) = 0\}$$

es un conjunto. Se tiene que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ pues Q no admite extensiones esenciales propias. Consideremos el orden parcial $\leq$ en $\mathscr{C}$ inducido por el pre-orden natural de sub-objetos de A. Sea $\mathscr{L} = \{u_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I} \subset \mathscr{C}$ tal que $(\mathscr{L}, \leq)$ es linealmente ordenado. Veamos que $\mathscr{L}$ tiene cota superior en $\mathscr{C}$. En efecto, consideremos la unión $u : \cup_{i\in I} A_i \longrightarrow A$ de la familia $\mathscr{L}$. Dado que $\mathscr{A}$ es C_3, obtenemos que

$$\mu^{-1}(\cup_{i\in I} A_i) = (\cup_{i\in I} A_i) \cap Q = \cup_{i\in I}(A_i \cap Q) = \cup_{i\in I} \mu^{-1}(Dom(u_i)) = 0.$$

Luego (u, A) es una cota superior de $\mathscr{L}$ en $\mathscr{C}$. Por lo tanto, del lema del Zorn, concluimos que existe un elemento maximal $v_0 : A_0 \longrightarrow A$ en $(\mathscr{C}, \leq)$. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
0 = \mu^{-1}(A_0) \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d, "\mu"] & \\
0 \neq A_0 \arrow[r, "v_0"'] & A \arrow[r, "p"'] & A/A_0,
\end{tikzcd}$$

donde $p = Coker(v_0)$. Luego $p\mu$ es un monomorfismo (pues $Ker(p\mu) = \mu^{-1}(A_0) = 0$) que no es un epimorfismo (si lo fuera, como ya es un monomorfismo, tendríamos que $p\mu$ es un isomorfismo; en particular μ es un split-mono, contradiciendo que μ no es un split-mono). Ahora bien, como $p\mu : Q \longrightarrow A/A_0$ es un monomorfismo que no es isomorfismo, concluimos que $p\mu$ no puede ser una extensión esencial. Luego, existe un monomorfismo $\theta : \bar{B} \longrightarrow A/A_0$, con $\bar{B} \neq 0$, tal que $(p\mu)^{-1}(\bar{B}) = Q \cap \bar{B} = 0$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} Q \cap B \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, "\theta''"'] & B \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\theta'"] & \bar{B} \arrow[d, "\theta"] \\ Q \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[r, "p"'] & A/A_0, \end{tikzcd}$$

donde los dos cuadrados son pullbacks. Entonces, por 1.8.4, se tiene que el rectangulo formado por los dos cuadrados es un pullback; y además, por 1.22.3, tenemos que $\bar{p}$ es un epimorfismo. En particular, $Q \cap B = Q \cap \bar{B} = 0$ y $B \neq 0$ (en efecto, como $\theta \neq 0$ y $\bar{p}$ es un epimorfismo entonces $p\theta' \neq 0$; y por lo tanto $B \neq 0$). Por otro lado, de 1.18.3, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\theta'"] & \bar{B} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "v_0"] & A \arrow[r, "p"] & A/A_0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Luego, como $\bar{B} \neq 0$, se tiene que $(v_0, A) < (\theta', A)$ y además $(\theta', A) \in \mathscr{C}$ (pues $\mu^{-1}(B) = Q \cap B = 0$); lo cual contradice que (v_0, A) es maximal en $(\mathscr{C}, \leq)$. Por lo tanto, $\mu : Q \longrightarrow A$ tiene que ser un split-mono.

□

Definición 3.2.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Un sub-objeto $u : B \longrightarrow A$ de A es una* ***extensión esencial*** *de otro sub-objeto $u' : A' \longrightarrow A$ de A, si existe un monomorfismo esencial $v : A' \longrightarrow B$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v"'] & A \\ B. \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Al morfismo $v : A' \longrightarrow B$ le llamaremos el ***morfismo esencial asociado*** *a B.*

Lema 3.2.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_3, $\{u_i : A_i \longrightarrow A\}_{i \in I}$ una familia dirigida de sub-objetos de A y $u : A' \longrightarrow A$ un sub-objeto de A. Si cada $u_i : A_i \longrightarrow A$ es una extensión esencial de $u : A' \longrightarrow A$, entonces se tiene el siguiente diagrama* *conmutativo* $\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} \cup_{i\in I}A_i \arrow[drr, bend left, "\psi"] & & \\ & A_i \arrow[ul, "\psi_i"'] \arrow[r, "u_i"] & A \\ & A', \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "u"'] \arrow[uul, bend left, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

donde: μ_i *es el morfismo esencial asociado a* A_i*,* ψ *y* ψ_i *son los monomorfismos inducidos por la unión y* φ *es un monomorfismo esencial que no depende de* $i \in I$*.*

Demostración. Como cada $u_i : A_i \longrightarrow A$ es una extensión esencial de $u : A' \longrightarrow A$ se tiene que, $\forall i \in I$, existe un monomorfismo esencial $\mu_i : A' \longrightarrow A_i$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mu_i"'] & A \\ A_i. \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

En particular, se tiene que $u_i\mu_i = u_j\mu_j \ \forall i, j \in I$. Por otro lado, de la definición de unión, tenemos que $\forall i \in I$ existe un monomorfismo $\psi_i : A_i \longrightarrow \cup_{i\in I}A_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & A \\ \cup_{i\in I}A_i. \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, $\psi\psi_i\mu_i = u_i\mu_i = u_j\mu_j = \psi\psi_j\mu_j$; y como ψ es un monomorfismo, entonces $\psi_i\mu_i = \psi_j\mu_j \ \forall i, j \in I$. Por lo tanto, $\varphi := \psi_i\mu_i : A' \longrightarrow \cup_{i\in I}A_i$, para algún i fijo, es un monomorfismo que no depende de $i \in I$ (es decir, $\varphi = \psi_j\mu_j \ \forall j \in I$) y además hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} & \cup_{i\in I}A_i \arrow[d, "\psi"] \\ A' \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "u"'] & A. \end{tikzcd}$$

Veamos que φ es un monomorfismo esencial. En efecto, sea $\theta : \bar{A} \longrightarrow \cup_{i\in I}A_i$ un monomorfismo con $\bar{A} \neq 0$. Por ser $\mathscr{A}$ una categoría C_3, tenemos que $0 \neq \bar{A} = \cup_{i\in I}(A_i \cap \bar{A})$; y por lo tanto, existe $i_0 \in I$ tal que $A_{i_0} \cap \bar{A} \neq 0$. Consideremos ahora el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(A_{i_0} \cap \bar{A}) \cap A' \arrow[r] \arrow[d] & A_{i_0} \cap \bar{A} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{A} \arrow[d, "\theta"] \\
A' \arrow[r, "\mu_{i_0}"'] & A_{i_0} \arrow[r, "\psi_{i_0}"'] & \cup A_i,
\end{tikzcd}$$

donde los dos cuadrados son pullbacks. Dado que $\varphi = \psi_{i_0}\mu_{i_0}$, obtenemos de 1.8.4 que $\varphi^{-1}(\bar{A}) = (A_{i_0} \cap \bar{A}) \cap A' = \mu_{i_0}^{-1}(A_{i_0} \cap \bar{A}) \neq 0$ pues μ_{i_0} es un monomorfismo esencial, probándose que φ es esencial. $\square$

Lema 3.2.7 *Sean $u : A \longrightarrow B$ y $v : B \longrightarrow C$ dos monomorfismos en una categoría abeliana. Entonces, vu es esencial si y sólo si u y v son esenciales.*

Demostración. Sea $h : \bar{C} \longrightarrow C$ un monomorfismo no nulo.
($\Rightarrow$) Tenemos por 1.8.4, que $(vu)^{-1}(\bar{C}) = u^{-1}(v^{-1}(\bar{C}))$, pues u y v son esenciales; probándose que vu es esencial.
($\Leftarrow$) De nuevo por 1.8.4, obtenemos un monomorfismo $\alpha : (vu)^{-1}(\bar{C}) \longrightarrow v^{-1}(\bar{C})$. Luego, como vu es esencial, entonces $v^{-1}(\bar{C}) \neq 0$; probándose que v es esencial. Veamos ahora que u es esencial. Sea $\theta : \bar{B} \longrightarrow B$ un monomorfismo con $\bar{B} \neq 0$; luego el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd}
\bar{B} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\theta"'] & \bar{B} \arrow[d, "v\theta"] \\
B \arrow[r, "v"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por 1.8.4, obtenemos que $u^{-1}(\bar{B}) = (vu)^{-1}(\bar{B}) \neq 0$, probándose que u es esencial. $\square$

Definición 3.2.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Una* ***envolvente inyectiva*** *Q de un objeto $A \in \mathscr{A}$, es una extensión esencial $u : A \longrightarrow Q$ con Q un objeto inyectivo en $\mathscr{A}$.*

Proposición 3.2.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Consideremos $u : A \longrightarrow Q$ y $u' : A \longrightarrow Q'$ dos envolventes inyectivas de A. Entonces, existe un isomorfismo $\theta : Q \longrightarrow Q'$ tal que $\theta u = u'$.*

Demostración. Por la inyectividad de Q' existe $\theta : Q \longrightarrow Q'$ tal que $u' = \theta u$. Luego, θ es un monomorfismo ya que u es una extensión esencial. Ahora, como u' es una extensión esencial, entonces se sigue inmediatamente de 3.2.7, que θ es una extensión esencial. Finalmente, como Q es inyectivo, entonces por 3.2.4(a), se tiene que θ es un isomorfismo. $\square$

Proposición 3.2.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_3 localmente pequeña. Si $v : A \longrightarrow Q$ es un sub-objeto de un objeto inyectivo Q, entonces A tiene envolvente inyectiva.*

Demostración. Supongamos que $v : A \longrightarrow Q$ es un monomorfismo con Q un objeto inyectivo. Dado que $\mathscr{A}$ es localmente pequeña, tenemos que la siguiente clase de pares de morfismos es un conjunto
$\mathscr{C} = \{(u_i, \mu_i) \mid u_i : B_i \longrightarrow Q \quad \text{y} \quad \mu_i : A \longrightarrow B_i \quad$ son monomorfismos con $\mu_i \quad$ esencial y $\quad u_i\mu_i = v\}$.
Es claro que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ pues $(v, 1_A) \in \mathscr{C}$. Definimos un orden parcial $\leq$ en $\mathscr{C}$ como sigue:

(i) $(u_i, \mu_i) \leq (u_j, \mu_j)$ si y sólo si $(u_i, Q) \leq (u_j, Q)$,

(ii) $(u_i, \mu_i) = (u_j, \mu_j)$ si y sólo si $(u_i, Q) \simeq (u_j, Q)$.

Sea $\mathscr{L} = \{(u_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ una cadena en $(\mathscr{C}, \leq)$. Luego, $\{u_i : B_i \longrightarrow Q\}_{i\in I}$ es una familia dirigida de sub-objetos de Q. De donde, por 3.2.6, tenemos el siguiente diagrama conmutativo para cada $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
 & \cup_{i\in I} B_i \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
 & B_i \arrow[u, "\psi_i"] \arrow[dr, "u_i"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[rr, "v"'] & & Q,
\end{tikzcd}$$

donde ψ_i, ψ son monomorfismos y φ es un monomorfismo esencial. Por lo tanto (ψ, φ) es una cota superior en $\mathscr{C}$ de $\mathscr{L}$. Entonces, por el lema de Zorn, existen monomorfismos $t : A \longrightarrow Q_1$, $w : Q_1 \longrightarrow Q$ tales que (w, t) es un elemento maximal en $(\mathscr{C}, \leq)$. Como t es un monomorfismo esencial, veamos que Q_1 es inyectivo. En efecto, si Q_1 no es inyectivo entonces, por 3.2.4(b), existe una extensión esencial propia $g : Q_1 \longrightarrow B$; y como Q es inyectivo, existe $w' : B \longrightarrow Q$ tal que $w = w'g$. En particular, w' es un monomorfismo pues w lo es y g es esencial. Ahora, notemos que $(w', gt) \in \mathscr{C}$ puesto gt es esencial (ya que g y t lo son) y además $w'gt = wt = v$. Pero $(w, t) < (w', gt)$ pues $w = w'g$ y g no es un isomorfismo. Esta contradicción muestra que $t : A \longrightarrow Q_1$ es la envolvente inyectiva de A. $\square$

3.3. Inyectivos en categorías abelianas

En esta sección, probaremos la existencia de envolventes inyectivas en ciertos tipos especiales de categorías abelianas. La idea es trasladar la existencia de inyectivos, en categorías de R^{op}-módulos a izquierda, a este tipo especial de categorías abelianas.

Definición 3.3.1 *Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y U un objeto de $\mathscr{A}$. Consideremos el anillo $End_{\mathscr{A}}(U)$ de endomorfismos de U. El funtor*

$$T := [U, -]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(End_{\mathscr{A}}(U)^{op}),$$

se define como sigue. Dado un objeto $A \in \mathscr{A}$, la composición de morfismos $U \xrightarrow{r} U \xrightarrow{f} A$, induce una estructura de $End_{\mathscr{A}}(U)$-módulo a derecha en $T(A)$. Por otro lado, si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, la composición $U \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha} B$ de morfismos, induce un morfismo de $End_{\mathscr{A}}(U)$-módulos a derecha $T(\alpha) : T(A) \longrightarrow T(B)$ con $T(\alpha)(f) := \alpha f \ \forall f \in T(A)$.

Observación 3.3.2 *El funtor $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(End_{\mathscr{A}}(U)^{op})$ tiene propiedades muy especiales. Por ejemplo, preserva monomorfismos y límites (ver 2.6.1); y además, si U es un generador entonces, de 2.15.4, se tiene que T es una inmersión (es decir, T es fiel e inyectivo en objetos).*

Lema 3.3.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, U un generador de $\mathscr{A}$ y T el funtor definido arriba. Si $u : A \longrightarrow B$ es una extensión esencial, entonces $T(u)$ es una extensión esencial.*

Demostración. Sea $u : A \longrightarrow B$ un monomorfismo esencial. Como T preserva kerneles, se tiene que $T(u)$ es un monomorfismo. Supongamos $f \in [U,B]_{\mathscr{A}} = T(B)$ y $f \neq 0$. Por la observación 3.2.2, debemos encontrar $r \in End_{\mathscr{A}}(U)$ tal que $0 \neq fr \in [U,A]_{\mathscr{A}}$ (es decir, $Im(fr) \subset Im(u)$). Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & A \cap I \arrow[r, "w"] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ U \arrow[r, "q"] & I \arrow[r, "v"] & B, \end{tikzcd}$$

donde el renglón inferior es la factorización de f a través de su imagen y los dos cuadrados son pullbacks. Como $f \neq 0$ entonces $I \neq 0$, y puesto que u es esencial, entonces $A \cap I \neq 0$. Ahora, como q es un epimorfismo, entonces g es un epimorfismo; y por lo tanto $g \neq 0$. Por lo tanto, dado que U es un generador de $\mathscr{A}$, existe un morfismo $k : U \longrightarrow V$ tal que $gk \neq 0$. Luego, como u y w son monomorfismos se tiene que $uwgk \neq 0$. Entonces $vqhk = fhk \neq 0$, por lo tanto podemos tomar $r = hk$. Finalmente, como $fr = uwgk$ con u monomorfismo, se tiene que $Im(fr) \subset Im(u)$. $\square$

Teorema 3.3.4 *Toda categoría C_3 con generador admite envolventes inyectivas para cada uno de sus objetos.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_3 y U un generador de $\mathscr{A}$. Consideremos el funtor

$$T := [U, -]_{\mathscr{A}} :\longrightarrow \mathrm{Mod}(R),$$

donde $R = End_{\mathscr{A}}(U)^{op}$. Sea A un objeto de $\mathscr{A}$, veamos que A admite envolventes inyectivas. Por 2.15.16 y el dual de 2.15.6, sabemos que existe un monomorfismo $u : T(A) \longrightarrow M$ en $\mathrm{Mod}(R)$, con M inyectivo.
Sea $\mathscr{C}$ la clase de tripletas (B, μ, f) tales que

(i) $\mu : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo esencial en $\mathscr{A}$,

(ii) $f : T(B) \longrightarrow M$ es un morfismo en $\mathrm{Mod}(R)$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[rr, "T(\mu)"] \arrow[dr, "u"'] & & T(B) \arrow[dl, "f"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, para cada $(B, \mu, f) \in \mathscr{C}$ se tiene que f es un monomorfismo. En efecto, por 3.3.3, sabemos que $T(\mu)$ es un monomorfismo esencial; luego, f es un monomorfismo pues u lo es. Definamos ahora un preorden $\leq$ en $\mathscr{C}$ como sigue: $(B, \mu, f) \leq (B', \mu', f')$ si y sólo si existe un morfismo $v : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{A}$ tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\mu'"] & \\ B \arrow[rr, "v"'] & & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(B) \arrow[rr, "T(v)"] \arrow[dr, "f"'] & & T(B') \arrow[dl, "f'"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Cabe señalar, que el morfismo $v : B \longrightarrow B'$ anterior es único. En efecto, si v' fuera otro morfismo en las mismas condiciones que v, tendríamos que $f'T(v) = f'T(v')$. Luego, como f' es un monomorfismo, se tiene que $T(v) = T(v')$; y entonces, $v = v'$ pues T es una inmersión.
Ahora bien, de la unicidad de $v : B \longrightarrow B'$, se sigue que: si $(B, \mu, f) \leq (B', \mu', f')$ y $(B', \mu', f') \leq (B, \mu, f)$, entonces $v : B \longrightarrow B'$ es un isomorfismo. En este caso, decimos que (B, μ, f) y (B', μ', f') son equivalentes; y además tenemos que en la clase $\mathscr{C}_0$ (de clases de equivalencia inducidas por la relación de equivalencia anterior de tripletas) el preorden $\leq$ de $\mathscr{C}$ induce un orden parcial $\leq$ en $\mathscr{C}_0$. Veamos que la clase $\mathscr{C}_0$ es un conjunto. En efecto, dado que $(B, \mu, f) \in \mathscr{C}$, sabemos que $f : T(B) \longrightarrow M$ es un monomorfismo; en particular, $Card(T(B)) \leq Card(M)$. Por otro lado, de 2.15.6, se tiene que existe un epimorfismo $\gamma : {}^{I}U \longrightarrow B$ con $I = [U, B]_{\mathscr{A}}$; y como $Card(T(B)) \leq Card(M)$, podemos encontrar un epimorfismo $\gamma' : {}^{M}U \longrightarrow B$. Esto es, B está determinado por la propiedad de ser objeto cociente de ${}^{M}U$; y usando que $\mathscr{A}$ es localmente pequeña (ver 2.15.3), se tiene que $\mathscr{C}_0$ es un conjunto.
Probemos ahora que $(\mathscr{C}_0, \leq)$ es inductivo. Sea $\mathscr{L} = \{(B_i, \mu_i, f_i)\}_{i \in I}$ un subconjunto linealmente ordenado de $(\mathscr{C}_0, \leq)$. Veamos que $\mathscr{L}$ tiene cota superior en $(\mathscr{C}_0, \leq)$. El orden lineal $(\mathscr{L}, \leq)$ induce un orden lineal en I como sigue: dados $i, j \in I$, definimos $i \leq j$ si y sólo si, $(B_i, \mu_i, f_i) \leq (B_j, \mu_j, f_j)$. En particular, tenemos que $(I, \leq)$ es dirigido. Dados $i, j \in I$ con $i \leq j$, denotemos por $v_{ij} : B_i \longrightarrow B_j$ al único morfismo (pues μ_i es un monomorfismo esencial) que

hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\ B_i \arrow[rr, "v_{ij}"'] & & B_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(B_i) \arrow[rr, "T(v_{ij})"] \arrow[dr, "f_i"'] & & T(B_j) \arrow[dl, "f_j"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Luego $\mu = \{\mu_i\} : \mathbb{I}_A \longrightarrow \{B_i, v_{ij}\}$ es un morfismo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$. Sea $\bar{u} = \{\bar{u}_i\} : \{B_i, v_{ij}\} \longrightarrow \mathbb{I}_{\varinjlim B_i}$ el límite directo de $\{B_i, v_{ij}\}_{i\in I}$ y $\bar{\mu} := \varinjlim(\mu) : A \longrightarrow \varinjlim B_i$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}_A \arrow[r, "\mu=\{\mu_i\}"] \arrow[dr, "\mathbb{I}_{\bar{\mu}}"'] & \{B_i, v_{ij}\} \arrow[d, "\bar{u}=\{\bar{u}_i\}"] \\ & \mathbb{I}_{\bar{B}}, \end{tikzcd}$$

donde $\bar{B} := \varinjlim B_i$ y además $\bar{\mu} : A \longrightarrow \bar{B}$ es un monomorfismo por 3.1.14. Veamos que $\bar{\mu}$ es esencial; en efecto, $\bar{u}_i\mu_i = \bar{\mu}$ $\forall i \in I$ y μ_i es esencial. Luego, como $\bar{\mu}$ es un monomorfismo, se tiene que $\bar{u}_i$ es un monomorfismo $\forall i \in I$. Sea $\psi : \cup_{i\in I} B_i \longrightarrow \bar{B}$ la unión de la familia de sub-objetos $\{\bar{u}_i : B_i \longrightarrow \bar{B}\}_{i\in I}$ de $\bar{B}$. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} \cup_{i\in I} B_i \arrow[rr, "\psi"] & & \bar{B} \\ & B_i \arrow[ul, "\psi_i"] \arrow[ur, "\bar{u}_i"'] & \\ & A \arrow[u, "\mu_i"'] \arrow[uul, bend left, "\varphi"] \arrow[uur, bend right, "\bar{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

donde φ es un monomorfismo esencial por 3.2.6. Por 3.1.8, tenemos que ψ es un isomorfismo. Luego, $\bar{\mu}$ es esencial pues φ lo es y $\bar{\mu} = \psi\varphi$.
Por otro lado, el funtor de inmersión $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$ induce por composición punto a punto, el funtor $T \circ - : \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathrm{Mod(R)})$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathrm{Mod(R)})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}_{T(A)} \arrow[r, "T(\mu)=\{T(\mu_i)\}"] \arrow[dr, "\mathbb{I}_{T(\bar{\mu})}"'] & \{T(B_i), T(v_{ij})\} \arrow[d, "T(\bar{u})=\{T(\bar{u}_i)\}"] \\ & \mathbb{I}_{T(\bar{B})} \end{tikzcd}$$

donde $T(\mu_i)$, $T(\bar{u}_i)$ y $T(\bar{\mu})$ son monomorfismos. Sea $L := \varinjlim T(B_i)$ y $\theta = \{\theta_i\} : \{T(B_i), T(v_{ij})\} \longrightarrow \mathbb{I}_L$ el límite directo, luego existen morfismos $\bar{f} : L \longrightarrow M$ y

$\bar{\theta} : L \longrightarrow T(\bar{B})$ en Mod(R), que hacen conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}_M & \{T(B_i), T(v_{ij})\} \arrow[l, "f=\{f_i\}"'] \arrow[r, "T(\bar{u})"] \arrow[d, "\theta"] & \mathbb{I}_{T(\bar{B})} \\
& \mathbb{I}_L \arrow[ul, "\mathbb{I}_{\bar{f}}"] \arrow[ur, "\mathbb{I}_{\bar{\theta}}"'] &
\end{tikzcd}$$

en $\mathrm{Rep}_{\mathrm{Ord(I)}/\sim}(\mathrm{Mod(R)})$. Ahora bien, como Mod$(R)$ es C_3, tenemos que $\bar{\theta} : L \longrightarrow T(\bar{B})$ es la unión de la familia dirigida $\{T(\bar{u}_i) : T(B_i) \longrightarrow T(\bar{B})\}_{i\in I}$ de sub-objetos de $T(\bar{B})$. En particular, $\bar{\theta}$ y θ_i son monomorfismos $\forall i \in I$. Por otro lado, como M es inyectivo, tenemos que existe $f' : T(\bar{B}) \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\bar{\theta}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & T(\bar{B}) \arrow[dl, "f'"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos que $(\bar{B}, \bar{\mu}, f') \in \mathscr{C}$. En efecto, hay que verificar las condiciones (i) y (ii) de la definición de tripleta en $\mathscr{C}$.

(i) $\bar{\mu} : A \longrightarrow \bar{B}$ es esencial: ya fué probado,

(ii) $f'T(\bar{\mu}) = u$, en efecto, tenemos las siguientes igualdades

$$f'T(\bar{\mu}) = f'T(\bar{u}_i)T(\mu_i) = f'\bar{\theta}\theta_i T(\mu_i) = \bar{f}\theta_i T(\mu_i) = f_i T(\mu_i) = u.$$

Veamos ahora que $(B_i, \mu_i, f_i) \leq (\bar{B}, \bar{\mu}, f')$ $\forall i \in I$. En efecto, ya probamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\bar{\mu}"] & \\
B_i \arrow[rr, "\bar{u}_i"'] & & \bar{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta $\forall i \in I$. Falta ver que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(B_i) \arrow[rr, "T(\bar{u}_i)"] \arrow[dr, "f_i"'] & & T(\bar{B}) \arrow[dl, "f'"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

también conmuta $\forall i \in I$; y este es el caso, pues $f'T(\bar{u}_i) = f'\bar{\theta}\theta_i = \bar{f}\theta_i = f_i$. De este forma, hemos probado que $(\mathscr{C}_0, \leq)$ es inductivo (es decir, todo subconjunto linealmente ordenado tiene cota superior). Por lo tanto, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal (Q, w, h) de $\mathscr{C}_0$. Si Q no es inyectivo, entonces, por 3.2.4, existe un monomorfismo esencial propio $g : Q \longrightarrow Q_1$; es decir g no es un isomorfismo. Entonces, por 3.2.7, se tiene que gw es un monomorfismo esencial. Ahora, como T es una inmersión, concluimos que $T(g) : T(Q) \longrightarrow T(Q_1)$ es un monomorfismo. Luego, por la inyectividad de M, existe un morfismo $h_1 : T(Q_1) \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(Q) \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d, "h"'] & T(Q_1) \arrow[dl, "h_1"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

De donde $u = hT(w) = h_1T(g)T(w) = h_1T(gw)$. Por lo tanto (Q_1, gw, h_1) está en $\mathscr{C}$; y además, $(Q, w, h) < (Q_1, gw, h_1)$ pues $h = h_1T(g)$ y g no es un isomorfismo. Pero esto contradice la maximalidad de (Q, w, h); probándose que Q es inyectivo y que $w : A \longrightarrow Q$ es la envolvente inyectiva de A. $\square$

Proposición 3.3.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana completa (resp. cocompleta) con un generador U y suficientes inyectivos. Entonces, $\mathscr{A}$ tiene un cogenerador inyectivo.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ la clase formada eligiendo un representante (α, U) de cada clase de equivalencia de sub-objetos de U. Por 2.15.3, sabemos que $\mathscr{U}$ es un conjunto. Sea $C = \prod_{(\alpha,U)\in\mathscr{U}} Coker(\alpha)$ (resp. $C = \bigoplus_{(\alpha,U)\in\mathscr{U}} Coker(\alpha)$). Por hipótesis, existe un monomorfismo $f : C \longrightarrow Q$ con Q inyectivo. Por el resultado dual de 2.15.9, basta probar que para cada $0 \neq A \in \mathscr{A}$ se tiene que $[A, Q]_{\mathscr{A}} \neq 0$. Dado que U es un generador, existe $0 \neq g : U \longrightarrow A$. Consideremos la factorización $U \xrightarrow{g'} Im(g) \xrightarrow{u} A$ de g a través de su imagen. Dado que g' es un epimorfismo, existe $(\alpha, U) \in \mathscr{U}$ y un isomorfismo $g_\alpha : Coker(\alpha) \longrightarrow Im(g)$. Sea $i_\alpha : Coker(\alpha) \longrightarrow C$ la inclusión en el producto (resp. coproducto). Dado que $g \neq 0$, tenemos que i_α es un monomorfismo no nulo; y por lo tanto $fi_\alpha \neq 0$. Luego, por la inyectividad de Q, existe $w : A \longrightarrow Q$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} Coker(\alpha) \arrow[r, "ug_\alpha"] \arrow[d, "fi_\alpha"'] & A \arrow[dl, "w"] \\ Q. & \end{tikzcd}$$

Esto es, $wug_\alpha = fi_\alpha \neq 0$. Entonces, $0 \neq w \in [A, Q]_{\mathscr{A}}$; probándose que Q es un cogenerador inyectivo. $\square$

Corolario 3.3.6 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría C_3 con un generador, entonces $\mathscr{A}$ tiene un cogenerador inyectivo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de 3.3.4 y 3.3.5. $\square$

Capítulo 4

El teorema de inmersión

4.1. El teorema de inmersión

Vamos a demostrar en esta sección el famoso teorema de P. Freyd que dice: toda categoría abeliana pequeña $\mathscr{A}$, admite una inmersión exacta y covariante en la categoría de grupos abelianos. La prueba se hará estudiando la categoría abeliana pequeña $(\mathscr{A}, Ab)$ de funtores covariantes aditivos de $\mathscr{A}$ en Ab. Los siguientes lemas serán cruciales.

Definición 4.1.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana pequeña. El funtor (contravariante) de representación $H : \mathscr{A} \longrightarrow (\mathscr{A}, Ab)$ se define como sigue:*

(a) Dado un objeto $A \in \mathscr{A}$, $H(A)$ es el funtor aditivo $H^A := [A, -]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$,

(b) dado un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$, $H(\alpha) : H^B \longrightarrow H^A$ es la transformación natural $[\alpha, -]_{\mathscr{A}}$, esto es, $H(\alpha)_C(\beta) = \beta\alpha$ donde $\beta \in [B, C]_{\mathscr{A}}$.

Lema 4.1.2 *El funtor de representación $H : \mathscr{A} \longrightarrow (\mathscr{A}, Ab)$ es contravariante y exacto a derecha, es decir, H manda sucesiones exactas a derecha en sucesiones exactas a izquierda.*

Demostración. Sea $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Veamos que la siguiente sucesión es exacta en $(\mathscr{A}, Ab)$

$$0 \longrightarrow H^{A''} \xrightarrow{H(\beta)} H^A \xrightarrow{H(\alpha)} H^{A'} .$$

Empezaremos probando que $H(\beta)$ es un monomorfismo. Sean $\theta : T \longrightarrow H^{A''}$ y $\psi : T \longrightarrow H^{A''}$ dos transformaciones naturales tales que $H(\beta)\theta = H(\beta)\psi$; esto quiere decir que $H(\beta)_B\theta_B = H(\beta)_B\psi_B$ para toda $B \in \mathscr{A}$ con $H(\beta)_B\theta_B : T(B) \longrightarrow [A, B]_{\mathscr{A}}$. Sea $x \in T(B)$, luego $H(\beta)_B(\theta_B(x)) = H(\beta)_B(\psi_B(x))$, y por lo tanto $\theta_B(x)\beta = \psi_B(x)\beta$. Como β es un epimorfismo, se tiene que $\theta_B(x) =$

$\psi_B(x)$, es decir, $\theta_B = \psi_B$ para toda $B \in \mathscr{A}$. Entonces $\theta = \psi$; y por lo tanto $H(\beta)$ es un monomorfismo.
Ahora demostremos que $H(\beta)$ es el kernel de $H(\alpha)$. Como $\beta\alpha = 0$, entonces $H(\beta\alpha) = H(\alpha)H(\beta) = 0$. Sea $\eta : T \longrightarrow H^A$ tal que $H(\alpha)\eta = 0$. Lo que quiere decir que $H(\alpha)_B\eta_B = 0$ para toda $B \in \mathscr{A}$ con $H(\alpha)_B\eta_B : T(B) \longrightarrow [A', B]_{\mathscr{A}}$. Por lo tanto, para cada $x \in T(B)$ se tiene que $H(\alpha)_B\eta_B(x) = \eta_B(x)\alpha = 0$ con $\eta_B(x) \in [A, B]_{\mathscr{A}}$. Pero como la sucesión $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ es exacta, se puede completar a la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0,$$

donde $u : I \longrightarrow A$ es la imagen de α. Luego, como $\eta_B(x)\alpha = 0$, se tiene que $\eta_B u = 0$. Pero como β es el cokernel de u, entonces existe un único morfismo $\theta_B(x) : A'' \longrightarrow B$ tal que $\eta_B(x) = \theta_B(x)\beta$. Definamos $\varphi : T \longrightarrow H^{A''}$ para cada $B \in \mathscr{A}$ como la función $\varphi_B : T(B) \longrightarrow [A'', B]_{\mathscr{A}}$ que está definida para cada $x \in T(B)$ como $\varphi_B(x) = \theta_B(x)$. Entonces, $H(\beta)\varphi$ es tal que, para cada $B \in \mathscr{A}$, la función $H(\beta)_B\varphi_B : T(B) \longrightarrow [A, B]_{\mathscr{A}}$ está definida para cada $x \in T(B)$ como

$$H(\beta)_B\varphi_B(x) = H(\beta)(\theta_B(x)) = \theta_B(x)\beta = \eta_B(x).$$

Es decir, $H(\beta)\varphi = \eta$ y la φ así construida es única ya que $H(\beta)$ es un monomorfismo; por lo tanto $H(\beta)$ es el kernel de $H(\alpha)$. $\square$

El siguiente resultado es conocido como el "Lema de Yoneda" y tiene muchas aplicaciones importantes.

Lema 4.1.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría cualquiera. Entonces*

(a) para cada funtor covariante $T : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$ y cada objeto $A \in \mathscr{A}$, existe una función biyectiva (llamada isomorfismo de Yoneda)

$$\theta = \theta_{A,T} : [H^A, T] \longrightarrow T(A)$$

cuya inversa es

$$\theta^{-1} = \theta^{-1}_{A,T} : T(A) \longrightarrow [H^A, T],$$

donde $\theta_{A,T}(\alpha) := \alpha_A(1_A)$ y $\theta^{-1}_{A,T}(x)_B(f) = T(f)(x)$ con $f \in [A, B]_{\mathscr{A}}$ y $x \in T(A)$;

(b) para cada transformación natural $\varphi : T \longrightarrow F$ y cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$, el siguiente diagrama en Sets es conmutativo (es decir, θ es natural en cada variable)

$$\begin{tikzcd}
{[H^A, T]} \arrow[r, "{[H(f),T]}"] \arrow[d, "\theta_{A,T}"'] & {[H^B, T]} \arrow[r, "{[H^B,\varphi]}"] \arrow[d, "\theta_{B,T}"] & {[H^B, F]} \arrow[d, "\theta_{B,F}"] \\
T(A) \arrow[r, "T(f)"'] & T(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & F(B),
\end{tikzcd}$$

donde $[H(f), T](\eta) = \eta H(f)$ y $[H^B, \varphi](\xi) = \varphi\xi$;

(c) si $\mathscr{A}$ es aditiva y el funtor covariante $T : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es aditivo, entonces el isomorfismo de Yoneda $\theta = \theta_{A,T} : [H^A, T] \longrightarrow T(A)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración.

(a) Para cada $x \in T(A)$, consideremos la función $\theta'(x) : H^A \longrightarrow T$ definida por la siguiente regla:

$$\theta'(x)_B(f) := T(f)(x) \qquad \forall f \in [A, B]_{\mathscr{A}} \quad \forall B \in \mathscr{A}.$$

Usando que T es un funtor covariante, se obtiene fácilmente que $\theta'(x) : H^A \longrightarrow T$ es una transformación natural. Por lo tanto $\theta' : T(A) \longrightarrow [H^A, T]$ es una función (del conjunto $T(A)$ a la clase $[H^A, T]$ de transformaciones naturales). Veamos que $\theta'\theta : [H^A, T] \longrightarrow [H^A, T]$ es la identidad. En efecto, sean $B \in \mathscr{A}$, $f \in H^A(B) = [A, B]_{\mathscr{A}}$ y $\eta \in [H^A, T]$; luego, de la naturalidad de η, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en *Sets*

$$\begin{tikzcd} {[A,A]_{\mathscr{A}}} \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "H^A(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ {[A,B]_{\mathscr{A}}} \arrow[r, "\eta_B"] & T(B). \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

En particular, $T(f)\eta_A(1_A) = \eta_B H^A(f)(1_A) = \eta_B(f)$. Por otro lado, de la definición de θ', tenemos que

$$(\theta'\theta)(\eta)_B(f) = \theta'(\theta(\eta))_B(f) = T(f)(\theta(\eta)) = T(f)(\eta_A(1_A)).$$

De donde, $(\theta'\theta)(\eta)_B(f) = \eta_B(f)$ $\forall B \in \mathscr{A}$ y $\forall f \in H^A(B)$, probándose que $\theta'\theta$ es la identidad sobre $[H^A, T]$. Veamos ahora, que $\theta\theta' : T(A) \longrightarrow T(A)$ es la identidad. Sea $x \in T(A)$; luego $\theta\theta'(x) = \theta'(x)_A(1_A) = T(1_A)(x) = x$; probándose que $\theta\theta' = 1_{T(A)}$.

(b) Sea $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ y $\varphi : T \longrightarrow F$ una transformación natural (de funtores covariantes). Probemos la siguiente igualdad

$$\theta_{B,T}[H(f), T] = T(f)\theta_{A,T}.$$

En efecto, para $\eta \in [H^A, T]$ tenemos que $(T(f)\theta_{A,T})(\eta) = T(f)(\eta_A(1_A)) = \eta_B(f)$, donde la última igualdad vale por el diagrama (4.1). Por otro lado, $\theta_{B,T}[H(f), T](\eta) = \theta_{B,T}(\eta H(f)) = \eta_B(H(f)_B(1_B)) = \eta_B(1_B f) = \eta_B(f)$, probándose la conmutatividad del primer cuadrado en (b).
Finalmente, probemos que $\varphi_B\theta_{B,T} = \theta_{B,F}[H^B, \varphi]$. Sea $\rho \in [H^B, T]$, luego $\theta_{B,F}[H^B, \varphi](\rho) = \theta_{B,F}(\varphi\rho) = (\varphi\rho)_B(1_B) = \varphi_B(\rho_B(1_B)) = \varphi_B\theta_{B,T}(\rho)$; probándose la conmutatividad del segundo cuadrado en (b).

(c) Es suficiente ver que $\theta = \theta_{A,T} : [H^A, T] \longrightarrow T(A)$ es un morfismo de grupos abelianos cuando $\mathscr{A}$ es aditiva y T aditivo.
Sean $\alpha, \beta \in [H^A, T]$, luego $\theta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)_A(1_A) = \alpha_A(1_A) + \beta_A(1_A) = \theta(\alpha) + \theta(\beta)$.

□

Observación 4.1.4 *En el caso en que $\mathscr{A}$ es pequeña, tenemos que la clase $[\mathscr{A}, Sets]$ de funtores covariantes de $\mathscr{A}$ en Sets, es una categoría (ver 2.11.4); y por lo tanto, el Lema de Yoneda se puede interpretar de la siguiente manera. Consideremos los bifuntores $S, E : \mathscr{A} \times [\mathscr{A}, Sets] \longrightarrow Sets$ definidos en $f : A \longrightarrow B$ y $\varphi : T \longrightarrow F$ como sigue:*

(i) $S(A,T) = [H^A, T]$ *y* $S(f,\varphi) : [H^A, T] \longrightarrow [H^B, F]$, *donde* $S(f,\varphi)(\eta) := \varphi\eta H(f)$ $\forall \eta \in [H^A, T]$;

(ii) $E(A,T) = T(A)$ *y* $E(f,\varphi) : T(A) \longrightarrow F(B)$, *donde* $E(f,\varphi) := F(f)\varphi_A = \varphi_B T(f)$.

Veamos que, el isomorfismo de Yoneda $\theta_{A,T} : [H^A, T] \longrightarrow T(A)$, es en realidad un isomorfismo de bifuntores $\theta : S \longrightarrow E$. En efecto, para probarlo, usaremos la igualdad $T(f)\eta_A(1_A) = \eta_B(f)$ obtenida en (a) en la demostración de 4.1.3. Esto es, dados $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$, $\varphi : T \longrightarrow F$ en $[\mathscr{A}, Sets]$ y $\eta \in [H^A, T]$, veremos que $E(f,\varphi)\theta_{A,T}(\eta) = \theta_{B,F}S(f,\varphi)(\eta)$. Por un lado, tenemos las igualdades

$$E(f,\varphi)\theta_{A,T}(\eta) = E(f,\varphi)(\eta_A(1_A)) = \varphi_B(T(f)(\eta_A(1_A))) = \varphi_B(\eta_B(f));$$

por otro lado, tenemos que

$$\theta_{B,F}S(f,\varphi)(\eta) = \theta_{B,F}(\varphi\eta H(f)) = (\varphi\eta H(f))_B(1_B) = \varphi_B(\eta_B(f)).$$

Esto último, prueba que el siguente diagrama en Sets

$$\begin{tikzcd} {[H^A, T]} \arrow[r, "\theta_{A,T}"] \arrow[d, "S(f,\varphi)"'] & T(A) \arrow[d, "E(f,\varphi)"] \\ {[H^B, F]} \arrow[r, "\theta_{B,F}"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Corolario 4.1.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría cualquiera. Consideremos la función $\beta_{C,A} : [C, A]_{\mathscr{A}} \longrightarrow [H^A, H^C]$, donde $\beta_{C,A}(g) = H(g) := [g, -]_{\mathscr{A}}$. Entonces*

(a) $\beta_{C,A}$ *es natural en las variables C y A,*

(b) $\beta_{C,A}$ *es biyectiva con inversa* $\beta^{-1}_{C,A}(\eta) = \eta_A(1_A)$,

(c) si $\mathscr{A}$ es aditiva entonces $\beta_{C,A}$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Veamos que $\beta_{C,A} = \theta^{-1}_{A,H^C}$. En efecto, sea $g \in [C, A]_{\mathscr{A}}$ y $h \in H^A(B) = [A, B]_{\mathscr{A}}$, entonces tenemos que

$$\theta^{-1}_{A,H^C}(g)_B(h) = H^C(h)(g) = hg = [g, -]_{\mathscr{A}}(h) = \beta_{C,A}(g)(h).$$

Luego, el corolario es consecuencia del Lema de Yoneda. □

Proposición 4.1.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva pequeña y $A \in \mathscr{A}$. Entonces*

(a) H^A es un objeto proyectivo pequeño en $(\mathscr{A}, Ab)$,

(b) el funtor $G := \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A$ es una inmersión de $\mathscr{A}$ en Ab y un generador proyectivo de $(\mathscr{A}, Ab)$.

Demostración.

(a) Primero veamos que H^A es proyectivo en $(\mathscr{A}, Ab)$. Consideremos el siguiente diagrama en $(\mathscr{A}, Ab)$

$$\begin{tikzcd} & H^A \arrow[d, "\theta"] \\ T \arrow[r, "\eta"] & T' \end{tikzcd}$$

con η un epimorfismo, es decir, $\eta_A : T(A) \longrightarrow T'(A)$ es un epimorfismo en Ab para toda $A \in \mathscr{A}$. De 4.1.4, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en Ab

$$\begin{tikzcd} {[H^A, T]} \arrow[r, "\theta_{A,T}"] \arrow[d, "S(1_A,\eta)"'] & T(A) \arrow[d, "E(1_A,\eta)=\eta_A"] \\ {[H^A, T']} \arrow[r, "\theta_{A,T'}"] & T'(A). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $S(1_A, \eta) : [H^A, T] \longrightarrow [H^A, T']$ es un epimorfismo. Pero en este caso $S(1_A, \eta) = [H^A, -] : (\mathscr{A}, Ab) \longrightarrow Ab$ y luego, por obs 2.14.2, se tiene que H^A es un objeto proyectivo. Por otro lado, como el coproducto de proyectivos es proyectivo, entonces $G = \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A$ es proyectivo.
Ahora probemos que H^A es un objeto pequeño. Por 2.16.3, es suficiente ver que $[H^A, -] : (\mathscr{A}, Ab) \longrightarrow Ab$ preserva coproductos. Pero por 4.1.3, tenemos que $[H^A, \bigoplus T_i] = (\bigoplus T_i)(A)$ y por 2.11.8, se tiene que $(\bigoplus T_i)(A) = \bigoplus T_i(A)$. De nuevo por 4.1.3, se tiene que $T_i(A) = [H^A, T_i]$; por lo tanto $\bigoplus T_i(A) = \bigoplus [H^A, T_i]$. Esto es,

$$[H^A, \bigoplus T_i] = \bigoplus [H^A, T_i],$$

y entonces H^A es un objeto pequeño de $(\mathscr{A}, Ab)$.

(b) Ya que G es proyectivo, para ver que G es generador, es suficiente ver por 2.15.9, que $T \neq 0$ implica $[G, T] \neq 0$. Sea $T \neq 0$, usando 2.6.2, tenemos que $[G, T] = [\bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A, T] = \prod_{A\in\mathscr{A}} [H^A, T]$; y por 4.1.3, se tiene que $\prod_{A\in\mathscr{A}} [H^A, T] = \prod_{A\in\mathscr{A}} T(A)$. Por lo tanto

$$[\bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A, T] = \prod_{A\in\mathscr{A}} T(A);$$

y entonces, como $T(A) \neq 0$ para algún $A \in \mathscr{A}$, se obtiene que

$$[\bigoplus_{A \in \mathscr{A}} H^A, T] \neq 0,$$

probándose que $G = \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A$ es un generador.
Finalmente, veamos que $G : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es una inmersión. Sea $\alpha : B \longrightarrow B'$ un morfismo no cero en $\mathscr{A}$. Entonces, el morfismo $H^B(\alpha) : [B, B] \longrightarrow [B, B']$ es distinto de cero puesto que $H^B(\alpha)(1_A) = \alpha \neq 0$.
Pero $(\bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A)(\alpha) = \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A(\alpha)$, por lo tanto $(\bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A)(\alpha) \neq 0$; y entonces G es fiel. Ahora veamos que G distingue objetos. En efecto, sea $A \neq B$ en $\mathscr{A}$, entonces $[C, A]_{\mathscr{A}} \neq [C, B]_{\mathscr{A}}$ $\forall C \in \mathscr{A}$; y por lo tanto $G(A) = \bigoplus_{C\in\mathscr{A}} H^C(A) \neq \bigoplus_{C\in\mathscr{A}} H^C(B) = G(B)$; probándose que G es una inmersión.

□

Proposición 4.1.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequeña, exacta y aditiva. Si T es un objeto inyectivo en $(\mathscr{A}, Ab)$, entonces T es un funtor que preserva cokerneles.*

Demostración. Sea $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Entonces, por 4.1.2, obtenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow H^{A''} \xrightarrow{H(\beta)} H^A \xrightarrow{H(\alpha)} H^{A'}$$

es exacta en $(\mathscr{A}, Ab)$. Como T es inyectivo, se tiene que la siguiente sucesión

$$[H^{A'}, T] \xrightarrow{[H(\alpha),T]} [H^A, T] \xrightarrow{[H(\beta),T]} [H^{A''}, T] \longrightarrow 0$$

es exacta en Ab. Aplicando 4.1.3 a la sucesión anterior y usando la naturalidad de θ en A, obtenemos que la sucesión

$$T(A') \xrightarrow{T(\alpha)} T(A) \xrightarrow{T(\beta)} T(A'') \longrightarrow 0$$

es exacta en Ab. Es decir, T preserva cokerneles. □

Lema 4.1.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $E \in (\mathscr{A}, Ab)$. Fijemos $A_1 \in \mathscr{A}$ y $x \in E(A_1)$. Entonces, la asignación $F : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$, definida en objetos como $F(A) := \{y \in E(A) \mid \exists \quad \alpha : A_1 \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad E(\alpha)(x) = y\}$; y en morfismos $f : A \longrightarrow B$ como $F(f) := E(f) \mid_{F(A)}: F(A) \longrightarrow F(B)$ es un funtor en $(\mathscr{A}, Ab)$.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Por como está definida F, se tiene que $F(f)(F(A)) \subset F(B)$; y por lo tanto $F(f)$ es un morfismo bien definido en $Sets$. También, se obtiene que F es un funtor de la categoría $\mathscr{A}$ en la categoría $Sets$. Veamos que $F \in (\mathscr{A}, Ab)$. Para ver esto, es suficiente probar

que cada $F(A)$, con $A \in \mathscr{A}$, es un subgrupo de $E(A)$.
Sean y_1, $y_2 \in F(A)$; por lo tanto, existen $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2 : A_1 \longrightarrow A$ tales que $E(\alpha_1)(x) = y_1$ y $E(\alpha_2)(x) = y_2$. Luego $\alpha_1 + \alpha_2 : A_1 \longrightarrow A$ es tal que $E(\alpha_1 + \alpha_2)(x) = y_1 + y_2$, probándose que $y_1 + y_2 \in F(A)$.
Sea $\gamma = -\alpha_1$ el inverso aditivo de α_1 en $[A_1, A]_{\mathscr{A}}$. Por lo tanto $0 = E(0) = E(\alpha_1 + \gamma) = F(\alpha_1 + \gamma) = F(\alpha_1) + F(\gamma)$. Luego $F(\alpha_1)(x) + F(\gamma)(x) = 0$; y entonces $z = F(\gamma)(x) \in F(A)$ es el inverso aditivo de y_1, probándose que $F(A)$ es un subgrupo de $E(A)$. $\square$

Observación 4.1.9 *El funtor F, definido en 4.1.8, es un sub-objeto de E en la categoría $(\mathscr{A}, Ab)$; y será llamado el **subfuntor** de E **generado por x**. En efecto, sea $\eta : F \longrightarrow T$ la transformación tal que para cada $A \in \mathscr{A}$, $\eta_A : F(A) \longrightarrow E(A)$ es la inclusión natural de subgrupo. Esto es, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & E(A) \arrow[d, "E(\alpha)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & E(B) \end{tikzcd}$$

conmuta en Ab para toda $\alpha : A \longrightarrow B$. Luego, $\eta : F \longrightarrow E$ es un monomorfismo en $(\mathscr{A}, Ab)$.

Lema 4.1.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana pequeña y $\psi : M \longrightarrow Q$ una extensión esencial en $(\mathscr{A}, Ab)$. Si M es un monofuntor entonces Q lo es.*

Demostración. Supongamos que Q no es un monofuntor. Entonces, existe un monomorfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ tal que $Q(\alpha)$ no es un monomorfismo en Ab. Por lo tanto, existe $x \in Q(A)$ tal que $x \neq 0$ y $Q(\alpha)(x) = 0$. Sea $\bar{Q}$ el subfuntor de Q generado por x. Como $Q(1_{A'})(x) = x \neq 0$, entonces $\bar{Q}(A') \neq 0$, es decir $\bar{Q} \neq 0$. Sea $\eta : \bar{Q} \longrightarrow Q$ la inclusión natural como subfuntor. Como $\psi : M \longrightarrow Q$ es una extensión esencial, entonces $M \cap \bar{Q} \neq 0$. Luego, existe $B \in \mathscr{A}$ tal que $M(B) \cap \bar{Q}(B) \neq 0$, es decir, existe $\beta : A' \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ tal que $Q(\beta)(x) \neq 0$ y $Q(\beta)(x) \in M(B)$. Consideremos el siguiente diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\bar{\beta}"] \\ B \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & P, \end{tikzcd}$$

donde $\bar{\alpha}$ es un monomorfismo por el dual de 1.8.3. Aplicando Q al diagrama anterior, tenemos que

$$0 = Q(\bar{\beta})Q(\alpha)(x) = Q(\bar{\alpha})Q(\beta)(x) = M(\bar{\alpha})Q(\beta)(x).$$

Lo cual es una contradicción pues $Q(\beta)(x) \neq 0$ y $M(\bar{\alpha})$ es un monomorfismo ya que M es un monofuntor. Por lo tanto Q es un monofuntor. $\square$

Lema 4.1.11 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana pequeña, entonces el funtor aditivo $G = \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es un monofuntor.*

Demostración. Sea $\alpha : B \longrightarrow C$ un monomorfismo en una categoría abeliana pequeña $\mathscr{A}$. Entonces, $H^A(\alpha) : H^A(B) \longrightarrow H^A(C)$ es un monomorfismo en Ab, $\forall A \in \mathscr{A}$. Ahora bien, Ab es una categoría C_3; en particular es C_1, por lo tanto $\bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A(\alpha) : \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A(B) \longrightarrow \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A(C)$ es un monomorfismo en Ab. En otras palabras, $G(\alpha)$ es un monomorfismo; y por lo tanto G es un monofuntor. □

El siguiente resultado, es el conocido "Teorema de inmersión"de P. Freyd.

Teorema 4.1.12 *Toda categoría abeliana pequeña $\mathscr{A}$ admite una inmersión covariante y exacta en la categoría de grupos abelianos Ab.*

Demostración. La categoría $(\mathscr{A}, Ab)$ es una categoría C_3 que tiene, por 4.1.6, como generador a $G = \bigoplus_{A\in\mathscr{A}} H^A$. Por lo tanto, por 3.3.4, $(\mathscr{A}, Ab)$ tiene envolventes inyectivas para cada uno de sus objetos. Sea $\mu : G \longrightarrow Q$ una envolvente inyectiva para G. Como Q es inyectivo se tiene por 4.1.7, que Q preserva cokerneles. Además, por 4.1.11, G es un monofuntor; y entonces, por 4.1.10, concluimos que Q es un monofuntor. Por lo tanto, dado que Q es un monofuntor y preserva cokerneles, entonces Q es un funtor exacto. En vista de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "G(\beta)"'] & Q(B) \arrow[d, "Q(\beta)"] \\ G(B') \arrow[r, "\mu_{B'}"] & Q(B') \end{tikzcd}$$

para toda $\beta : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{A}$; se sigue que, si G preserva objetos no cero entonces Q preserva objetos no cero. Por lo tanto, por 2.8.3, Q es un funtor fiel. Ahora, por 2.10.7, se tiene que existe una equivalencia natural $\psi : Q \longrightarrow T$, tal que $T \in (\mathscr{A}, Ab)$ y es inyectiva en objetos. Además, $T : \mathscr{A} \longrightarrow B$, es un funtor fiel y exacto en vista de la equivalencia natural ψ. Luego, T es la inmersión buscada. □

El siguiente lema será de mucha utilidad, en las aplicaciones que daremos del Teorema de inmersión, en la siguiente sección.

Lema 4.1.13 *Sea $\mathscr{A}_0$ una subcategoría pequeña de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Entonces, existe una subcategoría plena, pequeña y abeliana $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$, que tiene a $\mathscr{A}_0$ como subcategoría.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos inductivamente una subcategoría $\mathscr{A}_n$ de $\mathscr{A}$ como sigue. $\mathscr{A}_0$ es la primera de ellas; y dada $\mathscr{A}_n$, definimos a $\mathscr{A}_{n+1}$ como la subcategoría plena de $\mathscr{A}$ tal que:

(a) $\mathscr{A}_{n+1}$ tiene a todos los objetos de $\mathscr{A}_n$,

(b) para cada morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}_n$, agregamos a $\mathscr{A}_{n+1}$ morfismos $\mu : K \longrightarrow A$ y $p : B \longrightarrow F$ donde μ (resp. p) es un representante del kernel (resp. cokernel) de α en $\mathscr{A}$, y

(c) para todo conjunto finito $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathscr{A}_n$ agregamos en $\mathscr{A}_{n+1}$ un representante de $\prod_{i\in I} A_i$ en $\mathscr{A}$.

Como $\mathscr{A}_0$ es pequeña, se tiene que $\mathscr{A}_n$ es pequeña $\forall n \geq 0$. Por lo tanto, la subcategoría $\mathscr{A}' = \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{A}_n$ de $\mathscr{A}$ es pequeña y plena. Veamos que $\mathscr{A}'$ es una subcategoría abeliana de $\mathscr{A}$.
Sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathscr{A}'$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in \mathscr{A}_n$. Por (b), tenemos que $\mu = Ker(\alpha), p = Coker(\alpha) \in \mathscr{A}_{n+1} \subset \mathscr{A}'$ donde $Ker(\alpha)$ y $Coker(\alpha)$ son el kernel y el cokernel en $\mathscr{A}$ de α, respectivamente. Entonces, $Ker(\alpha)$ es también el kernel de α calculado en $\mathscr{A}'$ (lo mismo pasa con $Coker(\alpha)$). En otras palabras, la subcategoría plena $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ es cerrada por kerneles y cokerneles. Análogamente, de (c), se concluye que $\mathscr{A}'$ es cerrada por productos finitos (y también por coproductos finitos pues $\prod_{i=1}^n A_i = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ por ser $\mathscr{A}$ abeliana).
Veamos que $\mathscr{A}'$ es normal. En efecto, sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un monomorfismo en $\mathscr{A}'$; luego, como $\mathscr{A}'$ es cerrada por kerneles, se tiene que α es un monomorfismo en $\mathscr{A}$. Sea $\beta : B \longrightarrow C$ el cokernel de α en $\mathscr{A}$. Por lo tanto, como $\mathscr{A}'$ es cerrada por cokerneles, tenemos una sucesión en $\mathscr{A}'$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

que es exacta en $\mathscr{A}$. Por ser $\mathscr{A}$ abeliana y $\mathscr{A}'$ cerrada por kerneles, entonces $\alpha = Ker(\beta)$ en $\mathscr{A}'$; probándose que $\mathscr{A}'$ es normal. Análogamente, se prueba que $\mathscr{A}'$ es conormal. Luego, por 1.22.2, obtenemos que $\mathscr{A}'$ es una subcategoría abeliana de $\mathscr{A}$ que contiene a $\mathscr{A}_0$. $\square$

4.2. Consecuencias del teorema de inmersión

Definición 4.2.1 *Diremos que un enunciado acerca de un diagrama, en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, es un* ***enunciado categórico*** *si tal enunciado afirma:*

(a) que ciertas partes del diagrama son conmutativos o no,

(b) que ciertas sucesiones en el diagrama son o no son exactas, y

(c) que ciertas partes del diagrama son o no son límites ó colímites de cierta parte finita de un diagrama.

Metateorema 4.2.2 *Si un teorema es de la forma "p implica q", donde p y q son enunciados categóricos acerca de un diagrama en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ que admite una inmersión exacta en la categoría Ab; y si el teorema puede ser probado en la categoría de grupos abelianos Ab, entonces dicho teorema es cierto en $\mathscr{A}$.*

Demostración. Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ una inmersión exacta, esto es, T es un funtor (covariante) exacto y fiel que distingue objetos en $\mathscr{A}$. Sea $p \Rightarrow q$ un enunciado categórico en $\mathscr{A}$. Entonces, como T es exacto, T preserva sucesiones exactas y diagramas conmutativos; y como T preserva kerneles, entonces por 2.7.9, T preserva límites y colímites de diagramas finitos. Luego $p \Rightarrow T(p)$ es verdadero. Por otro lado, por 2.8.2, T refleja enunciados categorícos. Luego $T(q) \Rightarrow q$ es verdadero. Por lo tanto, si pudieramos demostrar $T(p) \Rightarrow T(q)$ en Ab, tendríamos que el teorema $p \Rightarrow q$ sería verdadero en $\mathscr{A}$.

□

Observación 4.2.3 *Sea U un objeto en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Si U es un generador proyectivo, entonces $H^U : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es una inmersión covariante y exacta (ver 2.14.2 y 2.15.4).*

Definición 4.2.4 *Sea $\mathscr{A}$ una subcategoría de la categoría de grupos abelianos Ab. Un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ es en particular una función la cual a su vez es un tipo de relación especial entre los conjuntos A y B. Denotaremos por $\alpha^{-1} : B \longrightarrow A$ a la relación inversa de α; en este caso, la relación inversa $\alpha^{-1} : B \longrightarrow A$ podría no ser una función (y por lo mismo no necesariamente un morfismo en Ab). Una relación de la forma $\alpha^{-1} : B \longrightarrow A$, con $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathscr{A}$, será llamada **$\mathscr{A}$-antimorfismo**. Dada una relación $\gamma : A \longrightarrow B$, decimos que γ es una **$\mathscr{A}$-relación** si $\gamma = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 \alpha_1$ donde cada α_i, con $1 \leq i \leq n$, es o bien un morfismo en $\mathscr{A}$ o bien un $\mathscr{A}$-antimorfismo. Una $\mathscr{A}$-relación que resulta ser una función será llamada **$\mathscr{A}$-función**. Una **$\mathscr{A}$-relación simple** γ es una $\mathscr{A}$-relación de la forma $\gamma = \alpha\beta^{-1}$ donde α y β son morfismos en $\mathscr{A}$.*

Lema 4.2.5 *Si $\mathscr{A}$ es una subcategoría abeliana de Ab, entonces toda $\mathscr{A}$-relación es una $\mathscr{A}$-relación simple.*

Demostración. Es claro que toda $\mathscr{A}$-relación es composición de $\mathscr{A}$-relaciones simples. Entonces, es suficiente probar que la composición de dos $\mathscr{A}$-relaciones simples es una $\mathscr{A}$-relación simple.
Consideremos la siguiente composición $(\alpha_4\alpha_3^{-1})(\alpha_2\alpha_1^{-1})$ de $\mathscr{A}$-relaciones simples donde $\alpha_4\alpha_3^{-1} : D \longrightarrow B$ y $\alpha_2\alpha_1^{-1} : A \longrightarrow D$. Dicha composición, se puede ver en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A \arrow[dl, "\alpha_2\alpha_1^{-1}"] \\
E \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_4"'] & D \arrow[dl, "\alpha_4\alpha_3^{-1}"] & \\
B. & &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Consideremos el pullback en $\mathscr{A}$, y por lo tanto en Ab, de los morfismos $\alpha_2 : C \longrightarrow D$ y $\alpha_3 : E \longrightarrow D$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_3"'] & C \arrow[d, "\alpha_2"] \\ E \arrow[r, "\alpha_3"'] & D. \end{tikzcd}$$

En la categoría de grupos abelianos, sabemos que $P = \{(x, y) \in C \times E \mid \alpha_2(x) = \alpha_3(y)\}$ y β_2, β_3 son tales que $\beta_2(x, y) = x$ y $\beta_3(x, y) = y$. Veamos que las $\mathscr{A}$-relaciones $\beta_3\beta_2^{-1}$ y $\alpha_3^{-1}\alpha_2$ son iguales.
En efecto, sea $c \in C$ entonces $\beta_3\beta_2^{-1}(c) = \beta_3\big(\{(c, x) \in C \times E \mid \alpha_2(c) = \alpha_3(x)\}\big) = \{x \in E \mid \alpha_2(c) = \alpha_3(x)\}$. Por otra parte $\alpha_3^{-1}\alpha_2(c) = \alpha_3^{-1}(\alpha_2(c)) = \{x \in E \mid \alpha_3(x) = \alpha_2(c)\}$. Por lo tanto $\beta_3\beta_2^{-1} = \alpha_3^{-1}\alpha_2$. Luego $\alpha_4\alpha_3^{-1}\alpha_2\alpha_1^{-1} = \alpha_4(\alpha_3^{-1}\alpha_2)\alpha_1^{-1} = \alpha_4(\beta_3\beta_2^{-1})\alpha_1^{-1} = \alpha_4\beta_3(\alpha_1\beta_2)^{-1}$. Entonces, la $\mathscr{A}$-relación dada por (4.2), es la misma que la siguiente

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_3"'] & C \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[ddll, "\alpha_4\alpha_3^{-1}\alpha_2\alpha_1^{-1}"] \\ E \arrow[d, "\alpha_4"'] & & \\ B. & & \end{tikzcd}$$

Es decir, la composición de dos $\mathscr{A}$-relaciones simples es otra vez una $\mathscr{A}$-relación simple. Por lo tanto, toda $\mathscr{A}$-relación es una $\mathscr{A}$-relación simple.
$\square$

Lema 4.2.6 *Sea $\mathscr{A}$ una subcategoría abeliana de Ab. Entonces, toda $\mathscr{A}$-relación simple, que es una $\mathscr{A}$-función, es un morfismo en $\mathscr{A}$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $Sets$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A \arrow[dl, "\alpha_2\alpha_1^{-1}"] \\ B. & \end{tikzcd}$$

Dado que la relación $\alpha_2\alpha_1^{-1}$ está definida sobre todo A, se tiene que α_1 es un epimorfismo. Sea $\mu : K \longrightarrow C$ el kernel de α_1 en $\mathscr{A}$ y por lo tanto en Ab. Del diagrama conmutativo anterior, tenemos que $\alpha_2\mu = 0$; además, como $Ker(\alpha_1) = \mu$ entonces $Coker(\mu) = \alpha$. Por lo tanto, existe un morfismo $\gamma : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ tal que $\alpha_2 = \gamma\alpha_1$. Veamos que $\alpha_2\alpha_1^{-1} = \gamma$. Sea $a \in A$, como α_1 es un epimorfismo, luego existe un $c \in C$ tal que $\alpha_1(c) = a$. Entonces, tenemos las siguientes igualdades

$$\gamma(a) = \gamma(\alpha_1(c)) = \alpha_2(c) = \alpha_2(\alpha_1^{-1}(a)) = \alpha_2\alpha_1^{-1}(a).$$

Esto es, $\alpha_2\alpha_1^{-1} = \gamma$; y como γ es un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces $\alpha_2\alpha_1^{-1}$ también lo es. $\square$

Definición 4.2.7 *Una construcción por* ***persecución*** *en un diagrama de Ab, es el proceso de definir un morfismo en Ab por composición de morfismos y antimorfismos en dicho diagrama.*

Metateorema 4.2.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana que admite una inmersión exacta en la categoría Ab. Si un teorema es de la forma "p implica q", donde*

(a) p y q son enunciados categóricos acerca de un diagrama en $\mathscr{A}$,

(b) q afirma la existencia de algunos morfismo adicionales entre ciertos objetos en el diagrama y la validez de un enunciado categórico en el diagrama extendido, y

si el teorema puede ser probado en la categoría Ab, por construcción de morfismos a través de persecuciones en el diagrama, entonces el teorema es cierto en $\mathscr{A}$.

Demostración. Sea $T : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ la inmersión exacta de $\mathscr{A}$ en Ab. Entonces, por 4.2.2, 4.2.5 y 4.2.6, es suficiente demostrar la existencia de tal morfismo en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A \\ B. & \end{tikzcd}$$

Supongamos que queremos probar que existe un morfismo $\beta : A \longrightarrow B$ que hace conmutar el diagrama anterior y que satisface un enunciado categórico q. Sea $\mu : K \longrightarrow A$ el kernel de α_1, aplicando T al diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama en Ab

$$\begin{tikzcd} T(K) \arrow[r, "T(\mu)"] & T(C) \arrow[r, "T(\alpha_1)"] \arrow[d, "T(\alpha_2)"'] & T(A) \\ & T(B), & \end{tikzcd}$$

con $T(\mu)$ el kernel de $T(\alpha_1)$ (puesto que T es un funtor exacto). Supongamos que podemos demostrar la existencia de un morfismo $\gamma : T(A) \longrightarrow T(B)$ en Ab que hace conmutar el diagrama anterior y que satisface el enunciado categórico q. Esto, en particular, nos dice que $T(\alpha_1)$ es un epimorfismo y que $T(\alpha_2)T(\mu) = T(\alpha\mu) = 0$ en Ab. Luego, como T es fiel, se tiene que T refleja epimorfismos y morfismos cero. Por lo tanto, α_1 es un epimorfismo y $\alpha_2\mu = 0$ en $\mathscr{A}$. Ahora bien, como $Ker(\alpha_1) = \mu$ y $\mathscr{A}$ es abeliana entonces $Coker(\mu) = \alpha_1$. Luego, existe un único morfismo $\beta : A \longrightarrow B$ tal que $\beta\alpha_1 = \alpha_2$; y aplicando T a la igualdad anterior, tenemos que $T(\beta\alpha_1) = T(\beta)T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$. Por otra parte, ya teníamos que $\gamma T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$; y como $T(\beta)T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$, se tiene que $T(\beta)T(\alpha_1) = \gamma T(\alpha_1)$. Pero $T(\alpha_1)$ es un epimorfismo por lo que $T(\beta) = \gamma$. Ahora bien, como γ satisface el enunciado categórico q y T es fiel, se tiene entonces que β satisface el enunciado categórico q, probándose el metateorema. $\square$

Metateorema 4.2.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si un teorema es de la forma "p implica q", donde*

(a) p y q son enunciados categóricos acerca de un diagrama en $\mathscr{A}$,

(b) q afirma la existencia de algunos morfismos adicionales entre ciertos objetos en el diagrama y la validez de un enunciado categórico en el diagrama extendido, y

si el teorema puede ser probado en la categoría Ab, por construcción de morfismos a través de persecuciones en el diagrama, entonces el teorema es cierto en $\mathscr{A}$.

Demostración. Sea D un diagrama en $\mathscr{A}$, y sea $\mathscr{A}_0$ la subcategoría pequeña y plena generada por los objetos de D. Por 4.1.13, existe una subcategoría abeliana pequeña y plena $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ que contiene a $\mathscr{A}_0$ como subcategoría. Entonces, por 4.1.12, existe una inmersión exacta y contravariante $T : \mathscr{A}' \longrightarrow Ab$. Luego, este metateorema se sigue del metateorema 4.2.8. $\square$

Dos aplicaciones muy importantes de 4.2.9, son el "Lema del 5" y el "Lema de la serpiente".

Proposición 4.2.10 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
A_1' \arrow[r, "u_1'"'] & A_2' \arrow[r, "u_2'"'] & A_3' \arrow[r, "u_3'"'] & A_4' \arrow[r, "u_4'"'] & A_5'.
\end{tikzcd}$$

(a) Si f_2 y f_4 son monomorfismos y f_1 es un epimorfismo, entonces f_3 es un monomorfismo.

(b) Si f_2 y f_4 son epimorfismos y f_5 es un monomorfismo, entonces f_3 es un epimorfismo.

Proposición 4.2.11 *Si el siguiente diagrama, en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, es conmutativo y exacto*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C', &
\end{tikzcd}$$

entonces, dicho diagrama, induce la sucesión exacta larga en $\mathscr{A}$

$$Ker(f) \xrightarrow{\bar{u}} Ker(g) \xrightarrow{\bar{v}} Ker(h) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} Coker(f) \xrightarrow{\bar{u'}} Coker(g) \xrightarrow{\bar{v'}} Coker(h).$$

Además si u *es un monomorfismo, entonces* $\bar{u}$ *es un monomorfismo y si* v' *es un epimorfismo, entonces* $\bar{v'}$ *es un epimorfismo.*

Capítulo 5

Elementos de Álgebra Homológica

5.1. La categoría de Complejos

Definición 5.1.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. La familia $X^\bullet := \{X^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, de objetos en $\mathscr{A}$, se le llama también **objeto $\mathscr{A}$-graduado**. El conjunto de **morfismos graduados**, de grado $p \in \mathbb{Z}$, de $X^\bullet$ en $Y^\bullet$ se denota por $Hom^p(X^\bullet, Y^\bullet)$; y un elemento $u : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ de dicho conjunto, es de la forma $u := \{u^i \in [X^i, Y^{i+p}]_{\mathscr{A}}\}_{i\in\mathbb{Z}}$. La composición de morfismos graduados es la función*

$$Hom^p(X^\bullet, Y^\bullet) \times Hom^q(Y^\bullet, Z^\bullet) \longrightarrow Hom^{p+q}(X^\bullet, Z^\bullet)$$

tal que $(u, v) \mapsto vu$, donde $(vu)^i$ es la composición $X^i \xrightarrow{u^i} Y^{i+p} \xrightarrow{v^{i+p}} Z^{i+p+q}$ de morfismos en $\mathscr{A}$. Finalmente, para cada $p \in \mathbb{Z}$, tenemos que la estructura aditiva de $\mathscr{A}$ induce una estructura de grupo abeliano en $Hom^p(X^\bullet, Y^\bullet)$ como sigue: $f \pm g := \{f^i \pm g^i : X^i \longrightarrow Y^{i+p}\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Definición 5.1.2 *Un **complejo** en $\mathscr{A}$ es un par $(X^\bullet, d_{X^\bullet})$, donde $d_{X^\bullet} \in Hom^1(X^\bullet, X^\bullet)$ y $d^2_{X^\bullet} = 0$. El morfismo $d_{X^\bullet}$ se le conoce como el diferencial asociado al objeto $\mathscr{A}$-graduado $X^\bullet$; y por simplicidad, escribiremos frecuentemente $X^\bullet$ en lugar de $(X^\bullet, d_{X^\bullet})$. Usualmente, el complejo $X^\bullet$ se escribe como la siguiente sucesión larga en $\mathscr{A}$*

$$\cdots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}_{X^\bullet}} X^0 \xrightarrow{d^0_{X^\bullet}} X^1 \longrightarrow \cdots$$

en la cual $d^{i+1}_{X^\bullet} d^i_{X^\bullet} = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$.
La categoría de complejos en $\mathscr{A}$ se denota por $Com(\mathscr{A})$. Los objetos de $Com(\mathscr{A})$ son los complejos en $\mathscr{A}$, y un morfismo $u : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ de complejos es un

morfismo 0*-graduado tal que* $d_{Y^\bullet}u = ud_{X^\bullet}$*. Esto es, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "d^n_{X^\bullet}"] \arrow[d, "u^n"'] & X^{n+1} \arrow[d, "u^{n+1}"] \\ Y^n \arrow[r, "d^n_{Y^\bullet}"'] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

es conmutativo en $\mathscr{A}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 5.1.3 *La categoría de complejos* $Com(\mathscr{A})$ *puede ser interpretada en términos de ciertos funtores (covariantes) aditivos. Para ver esto, consideremos el siguiente diagrama* Σ

$$\cdots \longrightarrow i-1 \xrightarrow{m_{i-1}} i \xrightarrow{m_i} i+1 \xrightarrow{m_{i+1}} i+2 \longrightarrow \cdots.$$

Esto es, Σ *tiene como vértices a* $\Sigma_0 := \mathbb{Z}$ *y como flechas a* $\Sigma_1 := \{m_i : i \longrightarrow i+1\}_{i\in\mathbb{Z}}$*. Tomemos la categoría de caminos* $\mathscr{P}\Sigma$ *de* Σ *(ver en 2.1) y extendamos* $\mathscr{P}\Sigma$ *a una categoría aditiva, que denotaremos por* $\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma$*, como sigue:*

(i) $Obj(\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma) := \Sigma_0 \cup \{0^*\}$*, donde* 0^* *es el objeto cero de* $\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma$*,*

(ii) $[i,j]_{\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma}$ *es el grupo abeliano libre generado por* $[i,j]_{\mathscr{P}\Sigma}$*, y*

(iii) la composición de morfismos en $\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma$ *es la extensión bilineal de la composición de morfismos en* $\mathscr{P}\Sigma$*.*

Consideremos el ideal $I := \langle\{m_{i+1}m_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\rangle$ *generado, en* $\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma$*, por el conjunto de caminos* $\{m_{i+1}m_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *de longitud dos. Luego tenemos la categoría cociente* $\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I$ *(ver en sección 1.3, ejemplo 7) que resulta ser aditiva y pequeña; en dicha categoría, la composición de dos flechas consecutivas de* Σ *es cero. Consideremos la categoría* $(\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I, \mathscr{A})$ *de funtores (covariantes) aditivos de* $\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I$ *en* $\mathscr{A}$*. Definamos el funtor*

$$\varphi : (\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I, \mathscr{A}) \longrightarrow Com(\mathscr{A}),$$

tal que: al objeto $F \in (\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I, \mathscr{A})$ *le asociamos el complejo* $(\varphi(F)^\bullet, d_{\varphi(F)^\bullet})$*, donde* $\varphi(F)^i := F(i)$ *y* $d^i_{\varphi(F)^\bullet} := F(m_i)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$*; y al morfismo* $\mu : F \longrightarrow G$ *le asociamos* $\varphi(\mu) : \varphi(F)^\bullet \longrightarrow \varphi(G)^\bullet$*, donde* $\varphi(\mu) := \mu$*. No es díficil probar que el funtor* $\varphi : (\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I, \mathscr{A}) \longrightarrow Com(\mathscr{A})$ *es una equivalencia de categorías; y por lo tanto, podemos identificar a* $Com(\mathscr{A})$ *con* $(\mathbb{Z}\mathscr{P}\Sigma/I, \mathscr{A})$*. Luego, podemos aplicar todo lo hecho en las secciones 2.11 y 2.13, a* $Com(\mathscr{A})$*. En particular,* $Com(\mathscr{A})$ *es abeliana puesto que* $\mathscr{A}$ *lo es.*

5.2. El funtor de cohomología

Para poder definir el funtor de cohomología, necesitamos primero introducir los funtores aditivos llamados: el funtor de **n-cociclos** $Z^n : Com(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ y el de **n-cobordes** $B^n : Com(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$.

Definición 5.2.1 *Dado un objeto $X^\bullet$ en $Com(\mathscr{A})$, se definen:*

(a) $Z^n(X^\bullet) := Ker(d^n_{X^\bullet})$,

(b) $B^n(X^\bullet) := Im(d^{n-1}_{X^\bullet})$,

(c) $Z^n(X^\bullet) \xrightarrow{u^n_{X^\bullet}} X^n := Ker(\, X^n \xrightarrow{d^n_{X^\bullet}} X^{n+1}\,)$,

(d) $X^{n-1} \xrightarrow{\beta^{n-1}_{X^\bullet}} B^n(X^\bullet) \xrightarrow{\alpha^n_{X^\bullet}} X^n$ *la factorización de $d^{n-1}_{X^\bullet}$ a través de su imagen.*

(e) el monomorfismo $\mu^n_{X^\bullet} : B^n(X^\bullet) \longrightarrow Z^n(X^\bullet)$, en $\mathscr{A}$, que hace conmutar al diagrama (aquí estamos usando que $d^2_{X^\bullet} = 0$)

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{X^\bullet}"] \arrow[d, "\beta^{n-1}_{X^\bullet}"'] & X^n \\
B^n(X^\bullet) \arrow[ur, "\alpha^n_{X^\bullet}"] \arrow[r, "\mu^n_{X^\bullet}"'] & Z^n(X^\bullet). \arrow[u, "u^n_{X^\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

Sea $f : L^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ un morfismo en $Com(\mathscr{A})$. Dado que $d^n_{K^\bullet} f^n u^n_{L^\bullet} = f^{n+1} d^n_{L^\bullet} u^n_{L^\bullet} = 0$, existe un único morfismo $Z^n(f) : Z^n(L^\bullet) \longrightarrow Z^n(K^\bullet)$ en $\mathscr{A}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z^n(L^\bullet) \arrow[r, "u^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "Z^n(f)"'] & L^n \arrow[r, "d^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "f^n"] & L^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
Z^n(K^\bullet) \arrow[r, "u^n_{K^\bullet}"'] & K^n \arrow[r, "d^n_{K^\bullet}"'] & K^{n+1}
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

conmuta.

Por otro lado, como $Coker(\, Z^{n-1}(L^\bullet) \xrightarrow{u^{n-1}_{L^\bullet}} L^{n-1}\,) = \, L^{n-1} \xrightarrow{\beta^{n-1}_{L^\bullet}} B^n(L^\bullet)$, existe un único morfismo $B^n(f) : B^n(L^\bullet) \longrightarrow B^n(K^\bullet)$ en $\mathscr{A}$, que hace conmutar al siguiente diagrama exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^{n-1}(L^\bullet) \arrow[r, "u^{n-1}_{L^\bullet}"] \arrow[d, "Z^{n-1}(f)"'] & L^{n-1} \arrow[r, "\beta^{n-1}_{L^\bullet}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & B^n(L^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "B^n(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{n-1}(K^\bullet) \arrow[r, "u^{n-1}_{K^\bullet}"'] & K^{n-1} \arrow[r, "\beta^{n-1}_{K^\bullet}"'] & B^n(K^\bullet) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De los dos diagramas anteriores, obtenemos que las asignaciones

$$Z^n,\, B^n : Com(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$$

son en efecto funtores (covariantes) aditivos. Veamos finalmente, que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd} B^n(L^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "B^n(f)"'] & Z^n(L^\bullet) \arrow[d, "Z^n(f)"] \\ B^n(K^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{K^\bullet}"'] & Z^n(K^\bullet). \end{tikzcd}$$

En efecto, de la igualdad $u^n_{K^\bullet} Z^n(f)\mu^n_{L^\bullet}\beta^{n-1}_{L^\bullet} = u^n_{K^\bullet}\mu^n_{K^\bullet} B^n(f)\beta^{n-1}_{L^\bullet}$ se concluye que $Z^n(f)\mu^n_{L^\bullet} = \mu^n_{K^\bullet} B^n(f)$ pues $u^n_{K^\bullet}$ es un monomorfismo y $\beta^{n-1}_{L^\bullet}$ es un epimorfismo.

Definición 5.2.2 *Dada una categoría abeliana $\mathscr{A}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos el **funtor de cohomología** $H^n : Com(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$, de grado n, como sigue:*

(a) $H^n(X^\bullet) := Z^n(X^\bullet)/B^n(X^\bullet)$ para $X^\bullet \in Com(\mathscr{A})$,

(b) dado $f : L^\bullet \longrightarrow K^\bullet$, en $Com(\mathscr{A})$, se define $H^n(f) : H^n(L^\bullet) \longrightarrow H^n(K^\bullet)$ como el único morfismo en $\mathscr{A}$ que hace conmutar al siguiente diagrama exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B^n(L^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "B^n(f)"'] & Z^n(L^\bullet) \arrow[r, "p^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "Z^n(f)"] & H^n(L^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(f)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B^n(K^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{K^\bullet}"'] & Z^n(K^\bullet) \arrow[r, "p^n_{K^\bullet}"'] & H^n(K^\bullet) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Observación 5.2.3 *El funtor $H^n : Com(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ es aditivo pues B^n y Z^n lo son.*

Definición 5.2.4 *Sean $f, g \in [X^\bullet, Y^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$; decimos que f es **homotópico** a g, en símbolos $f \sim g$, si existe $\theta \in Hom^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $f - g = d_{Y^\bullet}\theta + \theta d_{X^\bullet}$. Esto es, $\theta = \{\theta^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y satisface la igualdad*

$$f^n - g^n = d^{n-1}_{Y^\bullet}\theta^n + \theta^{n+1} d^n_{X^\bullet} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Proposición 5.2.5 *Sean $f, g \in [L^\bullet, K^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$. Si $f \sim g$ entonces $H^n(f) = H^n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Primero notemos que $f - g = \{f^n - g^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos. Como H^n es un funtor aditivo, se tiene que $H^n(f - g) = H^n(f) - H^n(g)$. Luego es suficiente ver que $H^n(f - g) = 0$. De la definición de H^n, se tiene que $H^n(f - g)$ es el único morfismo en $\mathscr{A}$ tal que el siguente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} B^n(L^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "B^n(h)"'] & Z^n(L^\bullet) \arrow[r, "p^n_{L^\bullet}"] \arrow[d, "Z^n(h)"] & Z^n(L^\bullet)/B^n(L^\bullet) \arrow[d, "H^n(h)"] \\ B^n(K^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{K^\bullet}"] & Z^n(K^\bullet) \arrow[r, "p^n_{K^\bullet}"] & Z^n(K^\bullet)/B^n(K^\bullet), \end{tikzcd}$$

donde $h = f-g$. Del diagrama (5.1) tenemos que $u^n_{K^\bullet} Z^n(f-g) = (f^n - g^n)u^n_{L^\bullet}$, pero como $f \sim g$, entonces $f^n - g^n = d^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n + \theta^{n+1} d^n_{L^\bullet}$. Por lo tanto,

$$u^n_{K^\bullet} Z^n(f-g) = (d^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n + \theta^{n+1}d^n_{L^\bullet})u^n_{L^\bullet} = d^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n u^n_{L^\bullet} + \theta^{n+1} d^n_{L^\bullet} u^n_{L^\bullet} = d^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n u^n_{L^\bullet}.$$

Por otro lado, sabemos que $u^n_{K^\bullet}\mu^n_{K^\bullet}\beta^{n-1}_{K^\bullet} = d^{n-1}_{K^\bullet}$. Luego

$$u^n_{K^\bullet} Z^n(f-g) = d^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n u^n_{L^\bullet} = u^n_{K^\bullet}\mu^n_{K^\bullet}\beta^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n u^n_{L^\bullet},$$

y como $u^n_{K^\bullet}$ es un monomorfismo, entonces $Z^n(f-g) = \mu^n_{K^\bullet}\beta^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n u^n_{L^\bullet}$. Por lo tanto, $p^n_{K^\bullet} Z^n(f-g) = p^n_{K^\bullet}\mu^n_{K^\bullet}\beta^{n-1}_{K^\bullet}\theta^n u^n_{L^\bullet} = 0$. De donde, el morfismo $0 : Z^n(L^\bullet)/B^n(L^\bullet) \longrightarrow Z^n(K^\bullet)/B^n(K^\bullet)$ hace conmutar el diagrama anterior, entonces, por la unicidad, se sigue que $H^n(f-g) = 0$. $\square$

5.3. Resoluciones

Sea $X^\bullet \in Com(\mathscr{A})$. Decimos que $X^\bullet$ es **positivo** si $X^n = 0 \ \forall n < 0$; dualmente, $X^\bullet$ es **negativo** si $X^n = 0 \ \forall n > 0$.

Definición 5.3.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y A un objeto de $\mathscr{A}$. Una **resolución a derecha** de A es un par $(K^\bullet, \varepsilon)$, donde*

(a) $K^\bullet$ es un complejo positivo en $\mathscr{A}$, y

(b) $\varepsilon : A \longrightarrow K^0$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, llamado morfismo de aumentación, tal que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d^0_{K^\bullet}} K^1$$

es exacta en $\mathscr{A}$.

*La resolución $(K^\bullet, \varepsilon)$ es **exacta** si $H^n(K^\bullet) = 0 \ \forall n > 0$, y es **inyectiva** si K^n es inyectivo en $\mathscr{A}$ $\forall n \geq 0$.*

Observación 5.3.2 *Si la categoría abeliana $\mathscr{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces todo objeto $A \in \mathscr{A}$ tiene al menos una resolución exacta e inyectiva.*

Lema 5.3.3 *Si en el siguiente diagrama, en una categoría abeliana $\mathscr{A}$,*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "u_1"] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "\varphi"'] & A_3 \\ & Q & \end{tikzcd}$$

la sucesión $A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3$ es exacta, Q es inyectivo y $\varphi u_1 = 0$, entonces existe un morfismo $\psi : A_3 \longrightarrow Q$ tal que $\psi u_2 = \varphi$.

Demostración. Sea $A_i \xrightarrow{f_i} Im(u_i) \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$, con $i = 1, 2$, la factorización de u_i a través de su imagen y $A_2 \xrightarrow{j_2} Coim(u_2) \xrightarrow{g} A_3$ la factorización de u_2 a través de su coimagen. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} Im(u_1) \arrow[r, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "\varphi"'] & Coim(u_2) \arrow[r, "\bar{u}_2"] & Im(u_2) \arrow[r, "\alpha_2"] & A_3 \\ & Q & & & \end{tikzcd}$$

donde $\bar{u}_2$ es un isomorfismo pues $\mathscr{A}$ es abeliana. Ahora bien, como $0 = \varphi u_1 = \varphi\alpha_1 f_1$ y f_1 es un epimorfismo, entonces $0 = \varphi\alpha_1$. Puesto que $Coim(u_2) = Coker(\alpha_1)$ y $0 = \varphi\alpha_1$, existe un único morfismo $\theta : Coim(u_2) \longrightarrow Q$ tal que $\theta j_2 = \varphi$. Dado que $\bar{u}_2$ es un isomorfismo, entonces $\theta\bar{u}_2^{-1} = \psi_1 : Im(u_2) \longrightarrow Q$ es tal que $\psi_1\bar{u}_2 j_2 = \varphi$. Ahora, como Q es inyectivo y α_2 es un monomorfismo, existe $\psi : A_3 \longrightarrow Q$ tal que $\psi\alpha_2 = \psi_1$. Luego, ψ es el morfismo requerido. □

Proposición 5.3.4 *Sean A y B objetos en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, $(K^\bullet, \varepsilon)$ una resolución exacta de A y $(L^\bullet, \eta)$ una resolución inyectiva de B. Si $u : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces existe al menos un morfismo $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ en $Com(\mathscr{A})$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "u"'] & K^0 \arrow[d, "f^0"] \\ B \arrow[r, "\eta"'] & L^0 \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

es conmutativo. Si $g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ es otro morfismo en $Com(\mathscr{A})$ tal que $g^0\varepsilon = \eta u$, entonces f es homotópico a g.

Demostración. Definiremos al morfismo $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ de tal manera que las condiciones pedidas se satisfagan. La existencia de $f^0 : K^0 \longrightarrow L^0$ tal que el diagrama (5.2) es conmutativo, es consecuencia de que L^0 es inyectivo y ε es un monomorfismo. Para definir el morfismo $f^1 : K^1 \longrightarrow L^1$, consideremos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] & K^0 \arrow[r, "d^0_{K^\bullet}"] \arrow[d, "d^0_{L^\bullet} f^0"'] & K^1 \\ & L^1. & \end{tikzcd}$$

Dado que $d^0_{L^\bullet} f^0\varepsilon = d^0_{L^\bullet}\eta u = 0$, L^1 es inyectivo y $A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d^0_{K^\bullet}} K^1$ es exacta, entonces, por 5.3.3, existe $f^1 : K^1 \longrightarrow L^1$ tal que $f^1 d^0_{K^\bullet} = d^0_{L^\bullet} f^0$. Supongamos, por inducción, que ya tenemos construidos los morfismos $f^0, f^1, \ldots, f^{n-1}$

tales que $f^i d_{K^\bullet}^{i-1} = d_{L^\bullet}^{i-1} f^{i-1}$ para $0 \leq i \leq n-1$. En particular $f^{n-1} d_{K^\bullet}^{n-2} = d_{L^\bullet}^{n-2} f^{n-2}$. Por lo tanto, podemos formar el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} K^{n-2} \arrow[r, "d_{K^\bullet}^{n-2}"] & K^{n-1} \arrow[r, "d_{K^\bullet}^{n-1}"] \arrow[d, "d_{L^\bullet}^{n-1} f^{n-1}"'] & K^n \\ & L^n. & \end{tikzcd}$$

Como $d_{L^\bullet}^{n-1} f^{n-1} d_{K^\bullet}^{n-2} = (d_{L^\bullet}^{n-1} d_{L^\bullet}^{n-2}) f^{n-2} = 0$, entonces, por 5.3.3, existe $f^n : K^n \longrightarrow L^n$ tal que $f^n d_{K^\bullet}^{n-1} = d_{L^\bullet}^{n-1} f^{n-1}$. Por lo tanto, por inducción, tenemos probado la existencia de $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ tal que $f^0 \varepsilon = \eta u$.
Sea $g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ otro morfismo de complejos que satisface las mismas condiciones que f. Para mostrar que f es homotópico a g, debemos construir morfismos $\theta^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}$ con $i \geq 1$, tales que

$$f^i - g^i = d_{L^\bullet}^{i-1} \theta^i + \theta^{i+1} d_{K^\bullet}^i.$$

Para definir el morfismo $\theta^1 : K^1 \longrightarrow L^0$, consideremos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] & K^0 \arrow[r, "d_{K^\bullet}^0"] \arrow[d, "f^0 - g^0"'] & K^1 \\ & L^0. & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, $(f^0 - g^0)\varepsilon = f^0 \varepsilon - g^0 \varepsilon = \eta u - \eta u = 0$. Luego, por 5.3.3, existe $\theta^1 : K^1 \longrightarrow L^0$ tal que $f^0 - g^0 = \theta^1 d_{K^\bullet}^0$. Para definir $\theta^2 : K^2 \longrightarrow L^1$, consideremos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} K^0 \arrow[r, "d_{K^\bullet}^0"] & K^1 \arrow[r, "d_{K^\bullet}^1"] \arrow[d, "f^1 - g^1 - d_{L^\bullet}^0 \theta^1"'] & K^2 \\ & L^1 & \end{tikzcd}$$

y notemos que $(f^1 - g^1 - d_{L^\bullet}^0 \theta^1) d_{K^\bullet}^0 = f^1 d_{K^\bullet}^0 - g^1 d_{K^\bullet}^0 - d_{L^\bullet}^0 \theta^1 d_{K^\bullet}^0 = d_{L^\bullet}^0 (f^0 - g^0) - d_{L^\bullet}^0 (f^0 - g^0) = 0$. Entonces, por 5.3.3, existe $\theta^2 : K^2 \longrightarrow L^1$ tal que $f^1 - g^1 = d_{L^\bullet}^0 \theta^1 + \theta^2 d_{K^\bullet}^1$. Supongamos ahora que hemos construido $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$ tales que $f^i - g^i = d_{L^\bullet}^{i-1} \theta^i + \theta^{i+1} d_{K^\bullet}^i$ para $i + 1 \leq n$. En particular, tenemos que $f^{n-1} - g^{n-1} = d_{L^\bullet}^{n-2} \theta^{n-1} + \theta^n d_{K^\bullet}^{n-1}$. Para construir $\theta^{n+1} : K^{n+1} \longrightarrow L^n$, consideremos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} K^{n-1} \arrow[r, "d_{K^\bullet}^{n-1}"] & K^n \arrow[r, "d_{K^\bullet}^n"] \arrow[d, "f^n - g^n - d_{L^\bullet}^{n-1} \theta^n"'] & K^{n+1} \\ & L^n. & \end{tikzcd}$$

De nuevo, tenemos que en el diagrama anterior, se satisfacen las hipótesis de 5.3.3; y por lo tanto, existe $\theta^{n+1} : K^{n+1} \longrightarrow L^n$ tal que $f^n - g^n = d_{L^\bullet}^{n-1} \theta^n + \theta^{n+1} d_{K^\bullet}^n$. Entonces, por inducción, concluimos que $f \sim g$. $\square$

Observación 5.3.5 *El morfismo $f \in [K^\bullet, L^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$, de 5.3.4, que satisface $f^0\varepsilon = \eta u$, se dice que es un* ***levantamiento*** *del morfismo $u : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$. En términos de levantamientos, 5.3.4 dice simplemente que dos levantamientos, de un mismo morfismo en $\mathscr{A}$ son homotópicos.*

Lema 5.3.6 *Si en el siguiente diagrama, dado en una categoría abeliana $\mathscr{A}$,*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & A \arrow[r, "\varphi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
 & P' \arrow[d, "\alpha_1"'] & & P'' \arrow[d, "\alpha_2"] & \\
 & L' \arrow[d] & & L'' \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

las columnas y la fila son exactas y además P' es inyectivo, entonces el diagrama anterior puede ser completado al siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & P \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & L \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con filas y columnas exactas y $P = P' \bigoplus P''$ con inclusiones i', i'' y proyecciones p', p'' canónicas.

Demostración. Sean $P = P' \bigoplus P''$, i', i'' sus inclusiones y p', p'' sus proyecciones canónicas. Como P' es inyectivo, existe $\rho_0 : A \longrightarrow P'$ tal que $\varepsilon' = \rho_0\psi$. Definamos $\varepsilon : A \longrightarrow P$ como $\varepsilon = i'\rho_0 + i''\varepsilon''\varphi$. Veamos que los cuadrados superiores del diagrama de anterior conmutan. En efecto, $\varepsilon\psi = (i'\rho_0 + i''\varepsilon''\varphi)\psi = i'\rho_0\psi = i'\varepsilon'$ y $p''\varepsilon = p''(i'\rho_0 + i''\varepsilon''\varphi) = p''i''\varepsilon''\varphi = 1_{P''}\varepsilon''\varphi = \varepsilon''\varphi$. Veamos ahora que ε es un monomorfismo. Sea $u : X \longrightarrow A$ tal que $\varepsilon u = 0$, entonces $p''\varepsilon u = \varepsilon''\varphi u = 0$; pero como ε'' es un monomorfismo, tenemos que $\varphi u = 0$. Como $\psi = Ker(\varphi)$, existe $u' : X \longrightarrow A'$ tal que $u = \psi u'$. Por lo tanto, tenemos las siguientes igualdades

$$0 = \varepsilon u = \varepsilon\psi u' = (i'\rho_0 + i''\varepsilon''\varphi)\psi u' = i'\rho_0\psi u' = i'\varepsilon' u'.$$

Luego $u' = 0$, ya que $i'\varepsilon'$; es un monomorfismo; y entonces $u = \psi u' = 0$. Por lo tanto, ε es un monomorfismo. Ahora, sea $P \xrightarrow{\alpha_3} L = Coker(A \xrightarrow{\varepsilon} P)$. De esta manera, la existencia de γ_1 y γ_2 tal que el diagrama de arriba es conmutativo, se sigue del dual de 1.18.1. $\square$

Proposición 5.3.7 *(Lema de la Herradura) Sean*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, $(L^\bullet, \varepsilon')$ *una resolución exacta e inyectiva de* A' *y* $(K^\bullet, \varepsilon'')$ *una resolución exacta de* A''. *Entonces, existe una resolución exacta* $(X^\bullet, \varepsilon)$ *de* A *con las siguientes propiedades:*

(a) existen morfismos de complejos $i_{L^\bullet} : L^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ *y* $p_{K^\bullet} : X^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ *tales que, la sucesión de complejos*

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{i_{L^\bullet}} X^\bullet \xrightarrow{p_{K^\bullet}} K^\bullet \longrightarrow 0$$

es exacta en $Com(\mathscr{A})$,

(b) para cada $n \in \mathbb{Z}$, *tenemos que* $X^n = L^n \bigoplus K^n$ *en* $\mathscr{A}$ *y además* $i^n_{L^\bullet} : L^n \longrightarrow X^n$ *y* $p^n_{K^\bullet} : X^n \longrightarrow K^n$ *son, respectivamente, la inclusión y la proyección natural del coproducto* $L^n \bigoplus K^n$, *y*

(c) el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \\ {\scriptstyle\varepsilon'}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon''}\downarrow \\ L^0 & \xrightarrow[i^0_{L^\bullet}]{} & X^0 & \xrightarrow[p^0_{K^\bullet}]{} & K^0 \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Dado un complejo $Z^\bullet$ en $\mathscr{A}$, consideremos la factorización $Z^{n-1} \xrightarrow{\beta^{n-1}_{Z^\bullet}} B^n(Z^\bullet) \xrightarrow{\alpha^n_{Z^\bullet}} Z^n$ de $d^{n-1}_{Z^\bullet}$ a través de su imagen. Ahora bien, como $(L^\bullet, \varepsilon')$ y $(K^\bullet, \varepsilon'')$ son resoluciones exactas, se tiene que $\alpha^n_{L^\bullet} = Ker(d^n_{L^\bullet})$ y

$\alpha^n_{K^\bullet} = Ker(d^n_{K^\bullet})$. Por lo tanto $Z^n(L^\bullet) = B^n(L^\bullet)$ y $Z^n(K^\bullet) = B^n(K^\bullet)$ para $n \geq 1$. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & A \arrow[r, "\varphi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
 & L^0 \arrow[d, "\beta^0_{L^\bullet}"'] & & K^0 \arrow[d, "\beta^0_{K^\bullet}"] & \\
 & Z^1(L^\bullet) \arrow[d] & & Z^1(K^\bullet) \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0. &
\end{tikzcd}$$

Entonces, por 5.3.6, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^0 \arrow[r, "i^0_{L^\bullet}"] \arrow[d, "\beta^0_{L^\bullet}"'] & X^0 \arrow[r, "p^0_{K^\bullet}"] \arrow[d, "\beta^0_{X^\bullet}"'] & K^0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta^0_{K^\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^1(L^\bullet) \arrow[r, "\gamma'_1"] \arrow[d] & Coker(\varepsilon) \arrow[r, "\gamma''_1"] \arrow[d] & Z^1(K^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $X^0 = L^0 \bigoplus K^0$ y $i^0_{L^\bullet}, p^0_{K^\bullet}$ son la inclusión y proyección en el coproducto, respectivamente. Ahora, aplicando 5.3.6 al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z^1(L^\bullet) \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d, "\alpha^1_{L^\bullet}"'] & Coker(\varepsilon) \arrow[r, "\gamma_1''"] & Z^1(K^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1_{K^\bullet}"] & 0 \\
 & L^1 \arrow[d, "\beta^1_{L^\bullet}"'] & & K^1 \arrow[d, "\beta^1_{K^\bullet}"] & \\
 & Z^2(L^\bullet) \arrow[d] & & Z^2(K^\bullet) \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z^1(L^\bullet) \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d, "\alpha^1_{L^\bullet}"'] & Coker(\varepsilon) \arrow[r, "\gamma_1''"] \arrow[d, "\alpha^1_{X^\bullet}"'] & Z^1(K^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1_{K^\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^1 \arrow[r, "i^1_{L^\bullet}"] \arrow[d, "\beta^1_{L^\bullet}"'] & X^1 \arrow[r, "p^1_{K^\bullet}"] \arrow[d, "\beta^1_{X^\bullet}"'] & K^1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta^1_{K^\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^2(L^\bullet) \arrow[r, "\gamma_2'"] \arrow[d] & Coker(\alpha^1_{X^\bullet}) \arrow[r, "\gamma_2''"] \arrow[d] & Z^2(K^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $X^1 = L^1 \bigoplus K^1$ y $i^1_{L^\bullet}, p^1_{K^\bullet}$ son la inclusión y proyección en el coproducto, respectivamente. Entonces, como $d^0_{L^\bullet} = \alpha^1_{L^\bullet}\beta^0_{L^\bullet}$ y $d^0_{K^\bullet} = \alpha^1_{K^\bullet}\beta^0_{K^\bullet}$, definimos $d^0_{X^\bullet} := \alpha^1_{X^\bullet}\beta^0_{X^\bullet}$. Procediendo por inducción, podemos definir $d^n_{X^\bullet} := \alpha^{n+1}_{X^\bullet}\beta^n_{X^\bullet}$ para $n \geq 1$, con $\beta^n_{X^\bullet} = Coker(\alpha^n_{X^\bullet})$ y $\alpha^{n+1}_{X^\bullet} : Coker(\alpha^n_{X^\bullet}) \longrightarrow X^{n+1}$ es el morfismo encontrado utilizando el lema 5.3.6. De esta manera, hemos encontrado una resolución $(X^\bullet, \varepsilon)$ de A con las propiedades deseadas. $\square$

Definición 5.3.8 *Una resolución exacta $(X^\bullet, \varepsilon)$ de A, que satisface (a), (b) y (c) de 5.3.7, se dice que es una* ***resolución normal*** *de A.*

Proposición 5.3.9 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, con filas* *exactas,*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & B \arrow[r, "\bar{\varphi}"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en una categoría abeliana $\mathscr{A}$*. Sean* $(L^\bullet, \varepsilon')$*,* $(X^\bullet, \varepsilon)$ *y* $(K^\bullet, \varepsilon'')$ *resoluciones exactas de* A'*,* A *y* A''*, respectivamente; y* $(M^\bullet, e')$*,* $(Y^\bullet, e)$ *y* $(W^\bullet, e'')$ *resoluciones exactas de* B'*,* B *y* B'' *respectivamente. Supongamos además que se satisface lo siguiente:*

(a) $(X^\bullet, \varepsilon)$ *y* $(Y^\bullet, e)$ *son resoluciones normales,*

(b) $(W^\bullet, e'')$ *es una resolución inyectiva de* B''*,*

(c) existen $f \in [L^\bullet, M^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ *y* $g \in [K^\bullet, W^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ *tales que los siguientes cuadrados en* $\mathscr{A}$ *conmutan*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & L^0 \arrow[d, "f^0"] \\ B' \arrow[r, "e'"'] & M^0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "\varepsilon''"] \arrow[d, "\alpha''"'] & K^0 \arrow[d, "g^0"] \\ B'' \arrow[r, "e''"'] & W^0. \end{tikzcd}$$

Entonces, existe $h \in [X^\bullet, Y^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ *tal que los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & X^0 \arrow[d, "h^0"] \\ B \arrow[r, "e"'] & Y^0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^\bullet \arrow[r, "i_{L^\bullet}"] \arrow[d, "f"'] & X^\bullet \arrow[r, "p_{K^\bullet}"] \arrow[d, "h"'] & K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M^\bullet \arrow[r, "i_{M^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "p_{W^\bullet}"'] & W^\bullet \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver proposición 7.8 de [2]. □

5.4. Funtores derivados

Definición 5.4.1 *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Sabemos que todo objeto* $A \in \mathscr{A}$ *admite al menos una resolución exacta e inyectiva. Por lo tanto, para cada objeto* $A \in \mathscr{A}$*, elegiremos una resolución exacta e inyectiva de* A *que denotaremos por* $(I_A^\bullet, \varepsilon_A)$*. Dado un funtor (covariante) aditivo* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$*, donde* $\mathscr{B}$ *es una categoría abeliana, tenemos que* $F(I_A^\bullet) \in Com(\mathscr{B})$ *es un complejo positivo, que se puede ver como la siguiente sucesión larga en* $\mathscr{B}$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(I_A^0) \xrightarrow{F(d^0_{I_A^\bullet})} F(I_A^1) \xrightarrow{F(d^1_{I_A^\bullet})} F(I_A^2) \longrightarrow \cdots .$$

Definición 5.4.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor covariante aditivo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, el **n-ésimo funtor derivado a derecha** de F, que denotaremos por $R^nF : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, se define como sigue:*

(a) para cada $A \in \mathscr{A}$, $(R^nF)(A) := H^n(F(I_A^\bullet))$ donde $H^n : Com(\mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{B}$ es el n-ésimo funtor de cohomología,

(b) dado $u : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$, por 5.3.4, existe al menos un $f \in [I_A^\bullet, I_B^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "u"'] & I_A^0 \arrow[d, "f^0"] \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & I_B^0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si $g \in [I_A^\bullet, I_B^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ es otro morfismo tal que $g^0\varepsilon_A = \varepsilon_B u$, entonces, por 5.3.4, sabemos que $f \sim g$; de donde, por ser F aditivo, tenemos que $F(f) \sim F(g)$. Por lo tanto, de 5.2.5, concluimos que $H^n(F(f)) = H^n(F(g))$. Luego, definimos $(R^nF)(u) := H^n(F(f))$; y de la discusión anterior, tenemos que $(R^nF)(u)$ está bien definido.

Observación 5.4.3 *La asignación $R^nF : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, construida en 5.4.2, es en efecto un funtor aditivo. Para ver esto, notemos primero que el funtor aditivo $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ induce un funtor aditivo (¡que denotaremos con la misma letra!) $F : Com(\mathscr{A}) \longrightarrow Com(\mathscr{B})$, que se obtiene al aplicar punto a punto el funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ en $Com(\mathscr{A})$. Esto es, $M^\bullet = F(X^\bullet) \in Com(\mathscr{B})$ se define como $M^n := F(X^n)$ y $d_{M^\bullet}^n := F(d_{X^\bullet}^n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, y $F(f) : F(X^\bullet) \longrightarrow F(Y^\bullet)$ como $F(f) := \{F(f^n) : F(X^n) \longrightarrow F(Y^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Sea $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ en $\mathscr{A}$ y $I_A^\bullet \xrightarrow{f} I_B^\bullet \xrightarrow{g} I_C^\bullet$ en $Com(\mathscr{A})$ tales que $f^0\varepsilon_A = \varepsilon_B u$ y $g^0\varepsilon_B = \varepsilon_C v$; luego $gf : I_A^\bullet \longrightarrow I_C^\bullet$ satisface que $g^0f^0\varepsilon_A = \varepsilon_C vu$. Por lo tanto, $(R^nF)(vu) = H^n(F(gf)) = H^n(F(g)F(f)) = H^n(F(g))H^n(F(f)) = (R^nF)(v)(R^nF)(u)$; probándose que R^nF es un funtor.*
Veamos, que R^nF es aditivo. Sean $u_1, u_2 \in [A,B]_{\mathscr{A}}$ y $f, g \in [I_A^\bullet, I_B^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ tales que $f^0\varepsilon_A = \varepsilon_B u_1$, $g^0\varepsilon_A = \varepsilon_B u_2$. Luego $f + g \in [I_A^\bullet, I_B^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$; y además satisface la igualdad $(f^0 + g^0)\varepsilon_A = \varepsilon_B(u_1 + u_2)$. Por lo tanto, $R^nF(u_1 + u_2) = H^n(F(f + g)) = H^n(F(f) + F(g)) = H^n(F(f)) + H^n(F(g)) = (R^nF)(u_1) + (R^nF)(u_2)$.

En lo que sigue, veremos que la construcción del funtor derivado, esencialmente, no depende de la elección de una resolución exacta e inyectiva.
Supongamos que para cada objeto $A \in \mathscr{A}$ hemos escogido otra resolución exacta e inyectiva $(\bar{I}_A^\bullet, \bar{\varepsilon}_A)$. Entonces, tenemos otro funtor derivado $\bar{R}^nF : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 5.4.4 *Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor covariante y aditivo. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$, los funtores derivados derechos R^nF y $\bar{R}^nF$ son naturalmente equivalentes.*

Demostración. Sea $A \in \mathscr{A}$; por 5.3.4, existe $f \in [I_A^\bullet, \bar{I}_A^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ tal que $f^0\varepsilon_A = \bar{\varepsilon}_A 1_A$. Dado que $F(f) : F(I_A^\bullet) \longrightarrow F(\bar{I}_A^\bullet)$ es un morfismo en $Com(\mathscr{B})$, se obtiene un morfismo en $\mathscr{B}$, $\eta_A : (R^nF)(A) \longrightarrow (\bar{R}^nF)(A)$ con $\eta_A := H^n(F(f))$; y por lo discutido en 5.4.2(b), tenemos que η_A está bien definido. Veamos que $\eta : R^nF \longrightarrow \bar{R}^nF$ es una equivalencia natural. Probaremos primero que η_A es invertible. De 5.3.4, tenemos que existe $g \in [\bar{I}_A^\bullet, I_A^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ tal que $g^0\bar{\varepsilon}_A = \varepsilon_A 1_A$. Por lo tanto, $gf \in [I_A^\bullet, I_A^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$ levanta a $1_A : A \longrightarrow A$ y lo mismo hace $1_{I_A^\bullet} \in [I_A^\bullet, I_A^\bullet]_{Com(\mathscr{A})}$. Luego, de 5.3.4, concluimos que $gf \sim 1_{I_A^\bullet}$; análogamente se prueba que $fg \sim 1_{\bar{I}_A^\bullet}$. En particular, aplicando 5.2.5, se tiene que

$$\eta_A H^n(F(g)) = H^n(F(fg)) = H^n(F(1_{\bar{I}_A^\bullet})) = 1_{(\bar{R}^nF)(A)},$$

$$H^n(F(g))\eta_A = H^n(F(gf)) = H^n(F(1_{I_A^\bullet})) = 1_{(R^nF)(A)};$$

probándose que $\eta_A^{-1} = H^n(F(g))$.
Finalmente, checaremos la naturalidad de η_A. Sea $u : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$; luego, de 5.3.4, tenemos morfismos $I_A^\bullet \xrightarrow{f} \bar{I}_A^\bullet \xrightarrow{\bar{h}} \bar{I}_B^\bullet$ y $I_A^\bullet \xrightarrow{h} I_B^\bullet \xrightarrow{\bar{f}} \bar{I}_B^\bullet$ en $Com(\mathscr{A})$, que hacen conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, equal] & I_A^0 \arrow[d, "f^0"] \\
I_A^0 \arrow[d, "h^0"'] & A \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \arrow[r, "\bar{\varepsilon}_A"] \arrow[d, "u"] & \bar{I}_A^0 \arrow[d, "\bar{h}^0"] \\
I_B^0 \arrow[d, "\bar{f}^0"'] & B \arrow[l, "\varepsilon_B"] \arrow[r, "\bar{\varepsilon}_B"'] \arrow[d, equal] & \bar{I}_B^0 \\
\bar{I}_B^0 & B. \arrow[l, "\bar{\varepsilon}_B"] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\bar{f}h \sim \bar{h}f$ y entonces $F(\bar{f})F(h) \sim F(\bar{h})F(f)$ por ser F aditivo.
De donde $H^n(F(\bar{f}))H^n(F(h)) = H^n(F(\bar{h}))H^n(F(f))$, probándose la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(R^nF)A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "(R^nF)(u)"'] & (\bar{R}^nF)A \arrow[d, "(\bar{R}^nF)(u)"] \\
(R^nF)B \arrow[r, "\eta_B"] & (\bar{R}^nF)B.
\end{tikzcd}$$

□

Observación 5.4.5 *(1) Dado que $I_A^\bullet$ es un complejo positivo, tenemos que $(R^nF)(A) = 0$ $\forall n < 0$.*

(2) Si Q es inyectivo en $\mathscr{A}$, entonces $(R^nF)(Q) = 0$ $\forall n \neq 0$ pues

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{1_Q} Q \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución exacta e inyectiva de Q.

Lema 5.4.6 *Si $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor exacto a izquierda, entonces R^0F es isomorfo a F. Si F es exacto, entonces $(R^nF)(A) = 0$ para todo $A \in \mathscr{A}$ y $\forall n \geq 1$.*

Demostración. Sea $(I_A^\bullet, \varepsilon_A)$ una resolución exacta e inyectiva de A. Si F es exacto a izquierda, entonces la sucesión en $\mathscr{B}$

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon_A)} F(I_A^0) \xrightarrow{F(d^0_{I_A^\bullet})} F(I_A^1)$$

es exacta, y así $F(A) \underset{\simeq}{\xrightarrow{F(\varepsilon_A)}} Ker(F(d^0_{I_A^\bullet})) = H^0(F(I_A^\bullet)) = (R^0F)(A)$. Luego, para toda $u : A \longrightarrow B$, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\varepsilon_A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & R^0F(A) \arrow[d, "(R^0F)(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "F(\varepsilon_B)"'] & R^0F(B). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, R^0F es naturalmente equivalente a F. Si además F es exacto, la sucesión

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon_A)} F(I_A^0) \xrightarrow{F(d^0_{I_A^\bullet})} F(I_A^1) \xrightarrow{F(d^1_{I_A^\bullet})} F(I_A^2) \longrightarrow \cdots$$

es exacta; y por lo tanto $(R^nF)(A) = H^n(F(I_A^\bullet)) = 0$ $\forall n \geq 1$. $\square$

5.5. El morfismo de conexión Δ

Teorema 5.5.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y*

$$E : \qquad 0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{f} X^\bullet \xrightarrow{g} K^\bullet \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $Com(\mathscr{A})$. Entonces, existe una familia $\{\Delta_E^i : H^i(K^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(L^\bullet)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de morfismos en $\mathscr{A}$, tal que la sucesión larga

$$(*): \ \cdots \longrightarrow H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\Delta_E^i} H^{i+1}(L^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(f)} H^{i+1}(X^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(g)} H^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\Delta_E^{i+1}} \cdots$$

es exacta en $\mathscr{A}$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & Ker(d^i_{L^\bullet}) \arrow[r, "v^i"] \arrow[d, "u^i_{L^\bullet}"'] & Ker(d^i_{X^\bullet}) \arrow[r, "w^i"] \arrow[d, "u^i_{X^\bullet}"'] & Ker(d^i_{K^\bullet}) \arrow[d, "u^i_{K^\bullet}"] & \\
0 \arrow[r] & L^i \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "d^i_{L^\bullet}"'] & X^i \arrow[r, "g^i"] \arrow[d, "d^i_{X^\bullet}"'] & K^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i_{K^\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^{i+1} \arrow[r, "f^{i+1}"] \arrow[d, "q^i_{L^\bullet}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "g^{i+1}"] \arrow[d, "q^i_{X^\bullet}"'] & K^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "q^i_{K^\bullet}"] & 0 \\
 & Coker(d^i_{L^\bullet}) \arrow[r, "\theta^i"] \arrow[d] & Coker(d^i_{X^\bullet}) \arrow[r, "\psi^i"] \arrow[d] & Coker(d^i_{K^\bullet}) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

donde, para simplificar, hemos puesto $Z^i(f) = v^i$ y $Z^i(g) = w^i$. Entonces, por el Lema de la serpiente, (ver 4.2.11) se tiene que las siguientes sucesiones

$$0 \longrightarrow Ker(d^i_{L^\bullet}) \xrightarrow{v^i} Ker(d^i_{X^\bullet}) \xrightarrow{w^i} Ker(d^i_{K^\bullet})$$

$$Coker(d^i_{L^\bullet}) \xrightarrow{\theta^i} Coker(d^i_{X^\bullet}) \xrightarrow{\psi^i} Coker(d^i_{K^\bullet}) \longrightarrow 0$$

son exactas. Sea $K^{i+1} \xrightarrow{\alpha^{i+1}_{K^\bullet}} B^{i+2}(K^\bullet) \xrightarrow{\beta^{i+2}_{K^\bullet}} K^{i+2}$ la factorización de $d^{i+1}_{K^\bullet}$ a través de su imagen. Como $d^{i+1}_{K^\bullet} d^i_{K^\bullet} = 0$, entonces $\alpha^{i+1}_{K^\bullet} d^i_{K^\bullet} = 0$; pero $q^i_{K^\bullet} : K^{i+1} \longrightarrow Coker(d^i_{K^\bullet})$ es el cokernel de $d^i_{K^\bullet}$.
Por lo tanto, existe $\gamma^i_{K^\bullet} : Coker(d^i_{K^\bullet}) \longrightarrow B^{i+2}(K^\bullet)$ tal que $\alpha^{i+1}_{K^\bullet} = \gamma^i_{K^\bullet} q^i_{K^\bullet}$; además $\gamma^i_{K^\bullet}$ es un epimorfismo puesto que $\alpha^{i+1}_{K^\bullet}$ lo es.
Ahora, sea $\mu^{i+2}_{K^\bullet} : B^{i+2}(K^\bullet) \longrightarrow Z^{i+2}(K^\bullet)$ la inclusión tal que $u^{i+2}_{K^\bullet} \mu^{i+2}_{K^\bullet} = \beta^{i+2}_{K^\bullet}$. Consideremos $\varphi^i_{K^\bullet} = \mu^{i+2}_{K^\bullet} \gamma^i_{K^\bullet} : Coker(d^i_{K^\bullet}) \longrightarrow Z^{i+2}(K^\bullet)$. Luego, como $\mathscr{A}$ es abeliana, $\mu^{i+2}_{K^\bullet}$ es un monomorfismo y $\gamma^i_{K^\bullet}$ es un epimorfismo, se concluye que $\mu^{i+2}_{K^\bullet} : B^{i+2}(K^\bullet) \longrightarrow Z^{i+2}(K^\bullet)$ es la imagen de $\varphi^i_{K^\bullet}$. Análogamente, se costruyen $\varphi^i_{L^\bullet}$ y $\varphi^i_{X^\bullet}$. Veamos que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & Coker(d^i_{L^\bullet}) \arrow[r, "\theta^i"] \arrow[d, "\varphi^i_{L^\bullet}"'] & Coker(d^i_{X^\bullet}) \arrow[r, "\psi^i"] \arrow[d, "\varphi^i_{X^\bullet}"'] & Coker(d^i_{K^\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^i_{K^\bullet}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{i+2}(L^\bullet) \arrow[r, "v^{i+2}"] & Z^{i+2}(X^\bullet) \arrow[r, "w^{i+2}"] & Z^{i+2}(K^\bullet) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto,

$$\begin{aligned} u^{i+2}_{X^\bullet} v^{i+2} \varphi^i_{L^\bullet} q^i_{L^\bullet} &= u^{i+2}_{X^\bullet} v^{i+2} \mu^{i+2}_{L^\bullet} \alpha^{i+1}_{L^\bullet} \\ &= f^{i+2} u^{i+2}_{L^\bullet} \mu^{i+2}_{L^\bullet} \alpha^{i+1}_{L^\bullet} \\ &= f^{i+2} \beta^{i+2}_{L^\bullet} \alpha^{i+1}_{L^\bullet} \\ &= f^{i+2} d^{i+1}_{L^\bullet}; \end{aligned}$$

de manera similar, se demuestra que $u^{i+2}_{X^\bullet} \varphi^i_{X^\bullet} \theta^i q^i_{L^\bullet} = d^{i+1}_{X^\bullet} f^{i+1}$. Pero $d^{i+1}_{X^\bullet} f^{i+1} = f^{i+2} d^{i+1}_{L^\bullet}$; por lo tanto $u^{i+2}_{X^\bullet} v^{i+2} \varphi^i_{L^\bullet} q^i_{L^\bullet} = u^{i+2}_{X^\bullet} \varphi^i_{X^\bullet} \theta^i q^i_{L^\bullet}$. Pero como $u^{i+2}_{X^\bullet}$ es un monomorfismo y $q^i_{L^\bullet}$ es un epimorfismo, tenemos que $v^{i+2}\varphi^i_{L^\bullet} = \varphi^i_{X^\bullet}\theta^i$. Análogamente, se prueba que $w^{i+2}\varphi^i_{X^\bullet} = \varphi^i_{K^\bullet}\psi^i$. Por lo tanto, el diagrama de arriba conmuta.

Ahora bien, como $u^{i+1}_{K^\bullet} : Z^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow K^{i+1}$ es el kernel de $d^{i+1}_{K^\bullet} = \beta^{i+2}_{K^\bullet}\alpha^{i+1}_{K^\bullet}$ y $\beta^{i+2}_{K^\bullet}$ es un monomorfismo, entonces $u^{i+1}_{K^\bullet} : Z^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow K^{i+1}$ es el kernel de $\alpha^{i+1}_{K^\bullet} : K^{i+1} \longrightarrow B^{i+2}(K^\bullet)$. Pero como $\alpha^{i+1}_{K^\bullet} : K^{i+1} \longrightarrow B^{i+2}(K^\bullet)$ es un epimorfismo, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow Z^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{u^{i+1}_{K^\bullet}} K^{i+1} \xrightarrow{\alpha^{i+1}_{K^\bullet}} B^{i+2}(K^\bullet) \longrightarrow 0,$$

es decir, $B^{i+2}(K^\bullet) \simeq K^{i+1}/Z^{i+1}(K^\bullet)$. Luego, 1.18.2, tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$, que es conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & B^{i+1}(K^\bullet) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu^{i+1}_{K^\bullet}"'] & B^{i+1}(K^\bullet) \arrow[d, "\beta^{i+1}_{K^\bullet}"'] & & \\
0 \arrow[r] & Z^{i+1}(K^\bullet) \arrow[r, "u^{i+1}_{K^\bullet}"'] \arrow[d, "\zeta^{i+1}_{K^\bullet}"'] & K^{i+1} \arrow[r, "\alpha^{i+1}_{K^\bullet}"'] \arrow[d, "q^i_{K^\bullet}"'] & B^{i+2}(K^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{i+1}(K^\bullet)/B^{i+1}(K^\bullet) \arrow[r, "s^i_{K^\bullet}"'] & K^{i+1}/B^{i+1}(K^\bullet) \arrow[r, "t^i_{K^\bullet}"'] & B^{i+2}(K^\bullet) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Por lo que $s^i_{K^\bullet}$ es el kernel de $t^i_{K^\bullet}$ y $\alpha^{i+1}_{K^\bullet} = t^i_{K^\bullet} q^i_{K^\bullet}$, pero también $\alpha^{i+1}_{K^\bullet} = \gamma^i_{K^\bullet} q^i_{K^\bullet}$. Por lo tanto $t^i_{K^\bullet} q^i_{K^\bullet} = \gamma^i_{K^\bullet} q^i_{K^\bullet}$ y como $q^i_{K^\bullet}$ es un epimorfismo, entonces $\gamma^i_{K^\bullet} = t^i_{K^\bullet}$. Es decir, $s^i_{K^\bullet}$ es el kernel de $\gamma^i_{K^\bullet}$ y como $\varphi^i_{K^\bullet} = \mu^{i+2}_{K^\bullet}\gamma^i_{K^\bullet}$, con $\mu^{i+2}_{K^\bullet}$ un monomorfismo, entonces $s^i_{K^\bullet} : Z^{i+1}(K^\bullet)/B^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow K^{i+1}/B^{i+1}(K^\bullet)$ es el kernel de $\varphi^i_{K^\bullet}$. Ahora bien, $Coker(\varphi^i_{K^\bullet}) = Coker(\mu^{i+2}_{K^\bullet})$ ya que $\gamma^i_{K^\bullet}$ es un epimorfismo. Por lo tanto, sea $\lambda^{i+2}_{K^\bullet} : Z^{i+2}(K^\bullet) \longrightarrow Z^{i+2}(K^\bullet)/B^{i+2}(K^\bullet)$ el cokernel de $\mu^{i+2}_{K^\bullet}$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & H^{i+1}(L^\bullet) \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d, "s^i_{L^\bullet}"'] & H^{i+1}(X^\bullet) \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "s^i_{X^\bullet}"'] & H^{i+1}(K^\bullet) \arrow[d, "s^i_{K^\bullet}"] & \\
 & Coker(d^i_{L^\bullet}) \arrow[r, "\theta^i"] \arrow[d, "\varphi^i_{L^\bullet}"'] & Coker(d^i_{X^\bullet}) \arrow[r, "\psi^i"] \arrow[d, "\varphi^i_{X^\bullet}"'] & Coker(d^i_{K^\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^i_{K^\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{i+2}(L^\bullet) \arrow[r, "v^{i+2}"] \arrow[d, "\lambda^{i+2}_{L^\bullet}"'] & Z^{i+2}(X^\bullet) \arrow[r, "w^{i+2}"] \arrow[d, "\lambda^{i+2}_{X^\bullet}"'] & Z^{i+2}(K^\bullet) \arrow[d, "\lambda^{i+2}_{K^\bullet}"] & \\
 & H^{i+2}(L^\bullet) \arrow[r, "\Psi_3"] & H^{i+2}(X^\bullet) \arrow[r, "\Psi_4"] & H^{i+2}(K^\bullet). &
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Veamos que $\Psi_1 = H^{i+1}(f)$. En efecto, por los diagramas (5.3), (5.4) y (5.5) tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
s^i_{X^\bullet}\Psi_1\zeta^{i+1}_{L^\bullet} &= \theta^i s^i_{L^\bullet}\zeta^{i+1}_{L^\bullet} \\
&= \theta^i q^i_{L^\bullet} u^{i+1}_{L^\bullet} \\
&= q^i_{X^\bullet} f^{i+1} u^{i+1}_{L^\bullet} \\
&= q^i_{X^\bullet} u^{i+1}_{X^\bullet} v^{i+1} \\
&= s^i_{X^\bullet}\zeta^{i+1}_{X^\bullet} v^{i+1};
\end{aligned}$$

y dado que $s^i_{X^\bullet}$ es un monomorfismo; entonces $\Psi_1\zeta^{i+1}_{L^\bullet} = \zeta^{i+1}_{X^\bullet} v^{i+1} = \zeta^{i+1}_{X^\bullet} Z^{i+1}(f)$. Luego, como $\zeta^{i+1}_{L^\bullet} = p^{i+1}_{L^\bullet}$ y $\zeta^{i+1}_{X^\bullet} = p^{i+1}_{X^\bullet}$, por definición de cohomología, $H^{i+1}(f)$ es el único morfismo tal que

$$H^{i+1}(f)\zeta^{i+1}_{L^\bullet} = \zeta^{i+1}_{X^\bullet} Z^{i+1}(f).$$

Por lo tanto $\Psi_1 = H^{i+1}(f)$. Análogamente, se demuestra que $\Psi_2 = H^{i+1}(g)$, $\Psi_3 = H^{i+2}(f)$ y $\Psi_4 = H^{i+2}(g)$. Entonces, de nuevo por el Lema de la serpiente (ver 4.2.11), tenemos que existe $\Delta^{i+1}_E : H^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow H^{i+2}(L^\bullet)$ tal que la sucesión larga $(*)$ es exacta. $\square$

5.6. Otras propiedades de los funtores derivados

Proposición 5.6.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana, $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo, covariante y exacto a izquierda, y*

$$E: \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Entonces, para cada $i \geq 0$, existe un morfismo $\Delta^i_E : (R^iF)(A'') \longrightarrow (R^{i+1}F)(A')$ en $\mathscr{B}$ tal que *(a) la sucesión larga*

$$0 \longrightarrow (R^0F)(A') \xrightarrow{(R^0F)(\alpha')} (R^0F)(A) \xrightarrow{(R^0F)(\alpha'')} (R^0F)(A'') \xrightarrow{\Delta^0_E} (R^1F)(A') \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow (R^iF)(A') \xrightarrow{(R^iF)(\alpha')} (R^iF)(A) \xrightarrow{(R^iF)(\alpha'')} (R^iF)(A'') \xrightarrow{\Delta^i_E} (R^{i+1}F)(A') \longrightarrow \cdots$$

es exacta en $\mathscr{B}$,

(b) si

$$F: \qquad 0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta''} B'' \longrightarrow 0$$

es otra sucesión exacta en $\mathscr{A}$, y existen morfismos $f' : A' \longrightarrow B'$, $f : A \longrightarrow B$ y $f'' : A'' \longrightarrow B''$ en $\mathscr{A}$ tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\beta''"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces el siguiente diagrama en $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd}
(R^iF)(A'') \arrow[r, "\Delta^i_E"] \arrow[d, "(R^iF)(f'')"'] & (R^{i+1}F)(A') \arrow[d, "(R^{i+1}F)(f')"] \\
(R^iF)(B'') \arrow[r, "\Delta^i_F"] & (R^{i+1}F)(B')
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $i \geq 0$.

Demostración.

(a) Consideremos las resoluciones exactas e inyectivas $(I^\bullet_{A'}, \varepsilon_{A'})$ y $(I^\bullet_{A''}, \varepsilon_{A''})$ de A' y A'' respectivamente. Por el lema de la herradura, existe una resolución exacta de complejos

$$0 \longrightarrow I^\bullet_{A'} \xrightarrow{i} I^\bullet_A \xrightarrow{p} I^\bullet_{A''} \longrightarrow 0,$$

tal que: $(I^\bullet_A, \varepsilon_A)$ es una resolución exacta de A, $I^n_A = I^n_{A'} \bigoplus I^n_{A''}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $i^n : I^n_{A'} \longrightarrow I^n_A$ y $p^n : I^n_A \longrightarrow I^n_{A''}$ son la inclusión y la proyección naturales del coproducto y también levantamientos de α' y α'', respectivamente. Dado que el funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es aditivo, tenemos que preserva coproductos finitos. Por lo tanto, la siguiente sucesión en $Com(\mathscr{B})$

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet_{A'}) \xrightarrow{F(i)} F(I^\bullet_A) \xrightarrow{F(p)} F(I^\bullet_{A''}) \longrightarrow 0$$

es exacta. Aplicando ahora 5.5.1 a la sucesión anterior, obtenemos la sucesión exacta larga de (a).

(b) Ver la proposicion 7.11 de [2]

□

Observación 5.6.2 *Por 5.4.6, sabemos que $R^0F \simeq F$; y por lo tanto, podemos reemplazar, en 5.6.1, a R^0F por F.*

5.7. Funtores cohomológicos

Definición 5.7.1 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas. Un **funtor cohomológico** covariante de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, es una familia $\{T^i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\geq 0}$ de funtores covariantes aditivos tales que, para toda sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$E: \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \longrightarrow 0,$$

existen morfismos $\Delta_E^i : (T^i)(A'') \longrightarrow (T^{i+1})(A')$ con $i \geq 0$; los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(a) la sucesión

$$0 \longrightarrow (T^0)(A') \xrightarrow{(T^0)(\alpha')} (T^0)(A) \xrightarrow{(T^0)(\alpha'')} (T^0)(A'') \xrightarrow{\Delta_E^0} (T^1)(A') \longrightarrow \cdots \tag{5.6}$$
$$\longrightarrow (T^i)(A') \xrightarrow{(T^i)(\alpha')} (T^i)(A) \xrightarrow{(T^i)(\alpha'')} (T^i)(A'') \xrightarrow{\Delta_E^i} (T^{i+1})(A') \longrightarrow \cdots$$

es exacta en $\mathscr{B}$,

(b) si

$$F: \qquad 0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta''} B'' \longrightarrow 0$$

es otra sucesión exacta en $\mathscr{A}$, y existen morfismos $f' : A' \longrightarrow B'$, $f : A \longrightarrow B$ y $f'' : A'' \longrightarrow B''$ tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\beta''"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(T^i)(A'') \arrow[r, "\Delta_E^i"] \arrow[d, "(T^i)(f'')"'] & (T^{i+1})(A') \arrow[d, "(T^{i+1})(f')"] \\
(T^i)(B'') \arrow[r, "\Delta_F^i"] & (T^{i+1})(B')
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

es conmutativo en $\mathscr{B}$ para todo $i \geq 0$.

Notación: al funtor cohomológico $\{T^i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\geq 0}$ lo denotaremos también por $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$.

Definición 5.7.2 *Sean $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ y $\{S^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$ dos funtores cohomológicos covariantes de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$. Un morfismo $\varphi : \{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0} \longrightarrow \{S^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$, entre funtores cohomológicos covariantes, es una familia de transformaciones naturales $\varphi = \{\varphi^i : T^i \longrightarrow S^i\}_{i\geq 0}$ tales que, para toda sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$E: \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \longrightarrow 0,$$

el diagrama en $\mathscr{B}$

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\Delta^i_E} & T^{i+1}(A') \\ {\scriptstyle \varphi^i(A'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{i+1}(A')} \\ S^i(A'') & \xrightarrow{\bar{\Delta}^i_E} & S^{i+1}(A') \end{array}$$

es conmutativo.

Definición 5.7.3 *Un funtor cohomológico covariante $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$, de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, es **universal** si para todo funtor cohomológico covariante $\{S^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$ de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ y para toda transformación natural $\varphi : T^0 \longrightarrow S^0$, existe un único morfismo $\psi = \{\psi^i\}_{i\geq 0} : \{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0} \longrightarrow \{S^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$ de funtores cohomológicos covariantes tal que $\psi^0 = \varphi$.*

Observación 5.7.4 *(1) La definición de funtor cohomológico contravariante es similar a la de funtor cohomológico covariante. Esto es, para toda sucesión exacta E, como en 5.7.1, existen morfismos $\Delta^i_E : T^i(A') \longrightarrow T^{i+1}(A'')$ con $i \geq 0$ tales que la sucesión*

$$0 \longrightarrow (T^0)(A'') \xrightarrow{(T^0)(\alpha'')} (T^0)(A) \xrightarrow{(T^0)(\alpha')} (T^0)(A') \xrightarrow{\Delta^0_E} (T^1)(A'') \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow (T^i)(A'') \xrightarrow{(T^i)(\alpha'')} (T^i)(A) \xrightarrow{(T^i)(\alpha')} (T^i)(A') \xrightarrow{\Delta^i_E} (T^{i+1})(A'') \longrightarrow \cdots$$

es exacta, y una condición de conmutatividad similar a la de 5.7.1(b) se satisface.

*(2) Para la noción de **funtor homológico** covariante, la diferencia consiste en que los morfismos Δ^i_E decrecen en 1, esto es, $\Delta^i_E : T^i(A'') \longrightarrow T^{i-1}(A')$; y la sucesión 5.7.1(a), se reemplaza por la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{B}$*

$$\cdots \longrightarrow T^i(A'') \xrightarrow{\Delta^i_E} (T^{i-1})(A') \xrightarrow{(T^{i-1})(\alpha')} (T^{i-1})(A) \xrightarrow{(T^{i-1})(\alpha'')} (T^{i-1})(A'') \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow T^1(A'') \xrightarrow{\Delta^1_E} (T^0)(A') \xrightarrow{(T^0)(\alpha')} (T^0)(A) \xrightarrow{(T^0)(\alpha'')} (T^0)(A'') \longrightarrow 0.$$

La noción de funtor homológico contravariante es similar.

(3) Si $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es un funtor cohomológico de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, ya sea covariante o contravariante, entonces $T^0 : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor exacto a izquierda.

(4) Si $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es un funtor homológico de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, ya sea covariante o contravariante, entonces $T^0 : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor exacto a derecha.

Ejemplo 5.7.5 *Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría con suficientes inyectivos. Por ejemplo, si $\mathscr{A}$ es de Grothendieck sabemos (ver 5.10.12) que tiene suficientes inyectivos. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo, covariante y exacto a izquierda. Entonces, por 5.6.1, los funtores derivados a derecha de F, $\{R^iF : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\geq 0}$ definen un funtor cohomológico.*
Más aún, como lo afirma la siguiente proposición, definen un funtor cohomológico universal.

Proposición 5.7.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ un funtor cohomológico covariante de $\mathscr{A}$ en una categoría abeliana $\mathscr{B}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es universal,

(b) $T^i(Q) = 0$ $\forall i \geq 1$ y para todo objeto inyectivo Q de $\mathscr{A}$.

Demostración. Ver la proposicion 7.12 de [2]. $\square$

Corolario 5.7.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo, covariante y exacto a izquierda. Entonces, existe un funtor cohomológico covariante universal $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ tal que $T^0 \simeq F$. Además, $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es único salvo isomorfismos de funtores cohomológicos.*

Corolario 5.7.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo, covariante y exacto a derecha. Entonces, existe un funtor homológico covariante universal $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ tal que $T^0 \simeq F$. Además, $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es único salvo isomorfismos de funtores homológicos.*

Corolario 5.7.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo, contravariante y exacto a izquierda. Entonces, existe un funtor cohomológico contravariante universal $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ tal que $T^0 \simeq F$. Además, $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es único salvo isomorfismos de funtores cohomológicos.*

Corolario 5.7.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo, contravariante y exacto a derecha. Entonces, existe un funtor homológico contravariante universal $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ tal que $T^0 \simeq F$. Además, $\{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0}$ es único salvo isomorfismos de funtores homológicos.*

5.8. Otra propiedad de los funtores cohomológicos

La siguiente, es una propiedad muy importante de los funtores cohomológicos, se le conoce como la "propiedad del corrimiento"de los índices y será muy útil en la sección 5.10.

Proposición 5.8.1 *Sea $\{T^i, \Delta_E^i\}_{i\geq 0}$ un funtor cohomológico contravariante de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$. Entonces, para toda sucesión exacta larga en $\mathscr{A}$*

$$S: \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} X_n \xrightarrow{\xi_n} \cdots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\xi_0} A \longrightarrow 0,$$

y para cada $i \geq 0$, existe un morfismo $D_S^i : T^i(B) \longrightarrow T^{i+n+1}(A)$ en $\mathscr{B}$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) si tenemos otra sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$U: \qquad 0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\beta_1} Y_n \xrightarrow{\eta_n} \cdots \longrightarrow Y_0 \xrightarrow{\eta_0} A_1 \longrightarrow 0$$

y morfismos $f : A \longrightarrow A_1$, $g : B \longrightarrow B_1$, $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ con $0 \leq i \leq n$, tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & X_n \arrow[r, "\xi_n"] \arrow[d, "f_n"'] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_n \arrow[r, "\eta_n"] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[r, "\eta_0"] & A_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces el diagrama en $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd}
T^i(B) \arrow[r, "D_S^i"] & T^{i+n+1}(A) \\
T^i(B_1) \arrow[r, "D_U^i"] \arrow[u, "T^i(g)"] & T^{i+n+1}(A_1) \arrow[u, "T^{i+n+1}(f)"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo $\forall i \geq 0$;

(b) si en la sucesión S, los objetos X_i con $0 \leq i \leq n$ son tales que $T^j(X_i) = 0$ $\forall j \geq 1$, entonces los morfismos D_S^i son isomorfismos para toda $i \geq 1$; y además, la sucesión en $\mathscr{B}$

$$T^0(X_n) \xrightarrow{T^0(\beta)} T^0(B) \xrightarrow{D_S^0} T^{n+1}(A) \longrightarrow 0$$

es exacta;

(c) *si $\{R^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$ es otro funtor cohomológico contravariante de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ y $\varphi = \{\varphi^i\}_{i\geq 0} : \{T^i, \Delta^i_E\}_{i\geq 0} \longrightarrow \{R^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$ es un morfismo de funtores cohomológicos contravariantes, entonces el diagrama en $\mathscr{B}$*

$$\begin{tikzcd} T^i(B) \arrow[r, "D^i_S"] \arrow[d, "\varphi^i(B)"'] & T^{i+n+1}(A) \arrow[d, "\varphi^{i+n+1}(A)"] \\ R^i(B) \arrow[r, "\bar{D}^i_S"] & R^{i+n+1}(A) \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall i \geq 0$, donde los morfismos $\bar{D}^i_S$ son los análogos a los morfismos D^i_S para el caso del funtor cohomológico contravariante $\{R^i, \bar{\Delta}^i_E\}_{i\geq 0}$.

Demostración. Ver la proposicion 7.17 de [2] $\square$

5.9. Los funtores Ext^i

Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y A un objeto fijo de $\mathscr{A}$. Consideremos el funtor aditivo $H^A := [A, -]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ el cual es covariante y exacto a izquierda. Entonces, por 5.7.7, existe un único funtor cohomológico $\{T^i, \Delta^i_E\}$ tal que $T^0 \simeq H^A$. De hecho, T^i es el i-ésimo funtor derivado a derecha de H^A, esto es, $T^i = R^i H^A$.

Definición 5.9.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y A un objeto fijo en $\mathscr{A}$. Definimos el funtor covariante y aditivo $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, -) : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ como $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, -) := R^i H^A$.*

Ahora, sea B un objeto fijo de $\mathscr{A}$. Consideremos el funtor aditivo, contravariante y exacto a izquierda $H_B := [-, B]_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$.

Definición 5.9.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos y B un objeto fijo en $\mathscr{A}$. Definimos el funtor contravariante y aditivo $\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(-, B) : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ como $\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(-, B) := R^i H_B$.*

Proposición 5.9.3 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos y proyectivos, entonces $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, B) \simeq \mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(A, B)$ para toda $A, B \in \mathscr{A}$.*

Demostración. Construyamos un funtor contravariante $T^i_B : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ de la siguiente manera. Supongamos que hemos fijado un objeto B en $\mathscr{A}$; luego

1. para cada objeto $C \in \mathscr{A}$, definimos $T^i_B(C) = \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(C, B)$, y
2. para $u : A_1 \longrightarrow A$ en $\mathscr{A}$, definimos un morfismo

$$T^i_B(u) : \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A_1, B)$$

como sigue: sea $(I^\bullet_B, \varepsilon_B)$ una resolución exacta e inyectiva de B, donde

$$I^\bullet_B = (\cdots \longrightarrow I^0_B \xrightarrow{d^0_{I^\bullet_B}} I^1_B \xrightarrow{d^1_{I^\bullet_B}} I^2_B \xrightarrow{d^2_{I^\bullet_B}} \cdots).$$

Luego $H^A(I_B^\bullet)$ y $H^{A_1}(I_B^\bullet)$ son complejos en la categoría Ab. Ahora bien, el siguiente diagrama en Ab

$$\begin{tikzcd} H^A(I_B^n) \arrow[r, "H^A(d^n_{I_B^\bullet})"] \arrow[d, "{[u,I_B^n]_{\mathscr{A}}}"'] & H^A(I_B^{n+1}) \arrow[d, "{[u,I_B^{n+1}]_{\mathscr{A}}}"] \\ H^{A_1}(I_B^n) \arrow[r, "H^{A_1}(d^n_{I_B^\bullet})"'] & H^{A_1}(I_B^{n+1}) \end{tikzcd}$$

conmuta ya que $[-,-]_{\mathscr{A}}$ es un bifuntor. Entonces, tenemos un morfismo de complejos $f : H^A(I_B^\bullet) \longrightarrow H^{A_1}(I_B^\bullet)$ con $f^n = H_{I_B^n}(u)$ para toda $n \geq 0$. Por lo tanto, definimos $T_B^i(u) := H^i(f)$ donde H^i es el i-ésimo funtor de cohomología. De esta manera, hemos definido una sucesión de funtores aditivos y contravariantes $\{T_B^i : \mathscr{A} \longrightarrow Ab\}_{i\geq 0}$. Ahora, sea

$$E: \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Como la resolución $I_B^\bullet$ es inyectiva, entonces la sucesión E induce la siguiente sucesión exacta de complejos en Ab

$$0 \longrightarrow H^{A''}(I_B^\bullet) \longrightarrow H^A(I_B^\bullet) \longrightarrow H^{A'}(I_B^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Luego, por 5.5.1, existen $\bar{\Delta}_E^i : T_B^i(A') \longrightarrow T_B^{i+1}(A'')$ tales que la sucesión larga

$$0 \longrightarrow H_B(A'') \xrightarrow{H_B(\alpha'')} H_B(A) \xrightarrow{H_B(\alpha')} H_B(A') \xrightarrow{\bar{\Delta}_E^0} T_B^1(A'') \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow T_B^i(A'') \xrightarrow{T_B^i(\alpha'')} T_B^i(A) \xrightarrow{T_B^i(\alpha')} T_B^i(A') \xrightarrow{\bar{\Delta}_E^i} T_B^{i+1}(A'') \longrightarrow \cdots$$

es exacta en Ab.

Si A es un objeto proyectivo en $\mathscr{A}$, entonces el funtor $H^A : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ es exacto; y por lo tanto, $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B) = 0$ para todo objeto B de $\mathscr{A}$ y $\forall i \geq 1$.
Si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos, T_B^i se anula en todos los objetos proyectivos de $\mathscr{A}$ $\forall i \geq 1$. Por lo tanto, por el resultado dual de 5.7.6, la familia $\{T_B^i, \bar{\Delta}_E^i\}_{i\geq 0}$ es un funtor cohomológico contravariante universal con $T_B^0 \simeq H_B$. Pero $\{R^i H_B, \Delta_E^i\}_{i\geq 0}$ también es un funtor cohomológico contravariante universal con $R^0 H_B \simeq H_B$. Luego, por 5.7.9, tenemos que $R^i H_B \simeq T_B^i$ $\forall i \geq 0$. En particular, $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B) \simeq \mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B)$ para toda $A, B \in \mathscr{A}$ y $\forall i \geq 0$. $\square$

Observación 5.9.4 *(a) Como ejemplo de una categoría abeliana que tiene suficientes inyectivos y proyectivos, tenemos a la categoría* $\mathrm{Mod}(R)$ *de R-módulos a izquierda sobre un anillo R con unidad (ver 3.3.4).*

(b) Si R es un anillo conmutativo con unidad, entonces cada $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B)$ *tiene una estructura natural de R-módulo a izquierda (ver [11] pag.200).*

5.10. La dimensión proyectiva e inyectiva

Definición 5.10.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y A un objeto de $\mathscr{A}$. Una resolución exacta y proyectiva de A es un par $(P^\bullet, \varepsilon)$, donde*

(a) $P^\bullet$ es un complejo negativo en $\mathscr{A}$ (es decir, $P^i = 0\ \forall i > 0$) y P^i es proyectivo en $\mathscr{A}$ $\forall i \leq 0$.

(b) $\varepsilon : P^0 \longrightarrow A$ es un morfismo tal que la sucesión larga en $\mathscr{A}$

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sea $X^\bullet$ un complejo negativo en $\mathscr{A}$, definimos $\ell(X^\bullet)$ la longitud de dicho complejo como sigue.
Si $\forall n \geq 0$, existe $k > n$ tal que $X^{-k} \neq 0$, diremos que $X^\bullet$ tiene longitud infinita, en símbolos $\ell(X^\bullet) = \infty$; en caso contrario, tiene longitud finita y ésta es

$$\ell(X^\bullet) := min\{n \geq 0 \mid X^{-k} = 0 \quad \forall k > n\}.$$

Recordemos (ver 5.3.1) que una resolución exacta e inyectiva de A es un par $(I^\bullet, \delta)$, donde

$(a)^*$ $I^\bullet$ es un complejo positivo en $\mathscr{A}$ (i.e, $I^i = 0\ \forall i < 0$) y I^i es inyectivo en $\mathscr{A}$ $\forall i \geq 0$.

$(b)^*$ $\delta : A \longrightarrow I^0$ es un morfismo tal que la sucesión larga en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} I^0 \xrightarrow{d_{I^\bullet}^0} I^1 \xrightarrow{d_{I^\bullet}^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

Sea $Y^\bullet$ un complejo positivo en $\mathscr{A}$, definimos $\ell(Y^\bullet)$ la longitud del complejo como sigue: si $\forall n \geq 0$, existe $k > n$ con $Y^k \neq 0$, decimos que $\ell(Y^\bullet) = \infty$; en caso contrario se define

$$\ell(Y^\bullet) := min\{n \geq 0 \mid Y^k = 0 \quad \forall k > n\}.$$

Definición 5.10.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y A un objeto de $\mathscr{A}$. La **dimensión proyectiva** de A, $\operatorname{pd} A$, se define como sigue: si no hay resoluciones exactas y proyectivas de A, ponemos $\operatorname{pd} A := \infty$, en caso contrario,*

$$\operatorname{pd} A := min\{\ell(P^\bullet) \mid (P^\bullet, \varepsilon) \quad \text{es una resolución exacta y proyectiva de } A\}.$$

*Análogamente, la **dimensión inyectiva** de A, $\operatorname{id} A$, se define como $\operatorname{id} A = \infty$ si no hay resoluciones exactas e inyectivas de A; en caso contrario ponemos*

$$\operatorname{id} A := min\{\ell(I^\bullet) \mid (I^\bullet, \delta) \quad \text{es una resolución exacta e inyectiva de } A\}.$$

Proposición 5.10.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\operatorname{pd} A \leq n$,

(b) $\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, C) = 0 \ \forall i > n$ *y* $\forall C \in \mathscr{A}$,

(c) $\operatorname{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, C) = 0 \ \forall C \in \mathscr{A}$,

(d) el funtor $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, -) : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ *es exacto a derecha,*

(e) si en la sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$S: \qquad 0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0,$$

los objetos X_k con $k < n$ son proyectivos, entonces X_n también es proyectivo.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Como $\operatorname{pd} A \leq n$, tenemos que existe una resolución exacta y proyectiva de A, $(P^\bullet_A, \varepsilon_A)$, tal que $\ell(P^\bullet_A) \leq n$. Luego, por 5.9.2, tenemos que $\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, C) = H^i(H_C(P^\bullet_A)) = 0$ para $i > n$.
$(b) \Rightarrow (c)$ Es trivial.
$(c) \Rightarrow (d)$ Es consecuencia de 5.7.4 (1) y 5.7.9.
$(d) \Rightarrow (e)$ Si $\gamma : C \longrightarrow C''$ es un morfismo, entonces el diagrama en Ab

$$\begin{tikzcd}
H^{X_{n-1}}(C) \arrow[r] \arrow[d, "H^{X_{n-1}}(\gamma)"'] & H^{X_n}(C) \arrow[r, "D^0_S"] \arrow[d, "H^{X_n}(\gamma)"'] & \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, C) \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"'] & 0 \\
H^{X_{n-1}}(C'') \arrow[r] & H^{X_n}(C'') \arrow[r, "\bar{D}^0_S"'] & \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, C'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde los morfismos verticales son los inducidos por γ (ver 5.8.1). Las filas del diagrama de arriba son exactas por el resultado análogo a 5.8.1(b), para el caso covariante. Supongamos que γ es un epimorfismo, entonces es suficiente demostrar que $H^{X_n}(\gamma)$ es también un epimorfismo. En efecto, $H^{X_{n-1}}(\gamma)$ es un epimorfismo pues X_{n-1} es proyectivo y ζ es un epimorfismo ya que $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, -)$ es un funtor exacto a derecha. Luego, $H^{X_n}(\gamma)$ es un epimorfismo y por lo tanto X_n es proyectivo en $\mathscr{A}$.
$(e) \Rightarrow (a)$. Como $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces existe una sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0$$

tal que X_k es proyectivo con $k < n$. Pero esto implica, por (e), que X_n es proyectivo. Luego $\operatorname{pd} A \leq n$. $\square$

Corolario 5.10.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $A \in \mathscr{A}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es proyectivo,*

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B) = 0\ \forall i > 0$ *y* $\forall B \in \mathscr{A}$*,*

(c) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,B) = 0\ \forall B \in \mathscr{A}$*.*

Demostración. Sale de 5.10.3 pues A es proyectivo si y sólo si $\mathrm{pd}\, A = 0$. □

Dualizando 5.10.3 tenemos la siguiente proposición y su corolario.

Proposición 5.10.5 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{id}\, A \leq n$*,*

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(C,A) = 0\ \forall i > n$ *y* $\forall C \in \mathscr{A}$*,*

(c) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(C,A) = 0\ \forall C \in \mathscr{A}$*,*

(d) *el funtor* $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(-,A) : \mathscr{A} \longrightarrow Ab$ *es exacto a derecha,*

(e) *si en la sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$S: \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha_0} X_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} X_n \longrightarrow 0,$$

los objetos X_k con $k < n$ son inyectivos, entonces X_n también es inyectivo.

Corolario 5.10.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $A \in \mathscr{A}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es inyectivo,*

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(B,A) = 0\ \forall i > 0$ *y* $\forall B \in \mathscr{A}$*,*

(c) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(B,A) = 0\ \forall B \in \mathscr{A}$*.*

Definición 5.10.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. La* ***dimensión proyectiva*** *de $\mathscr{A}$ es $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} := \sup\{\mathrm{pd}\, A \mid A \in \mathscr{A}\}$. Análogamente, la* ***dimensión inyectiva*** *de $\mathscr{A}$ es $\mathrm{id}\,\mathscr{A} := \sup\{\mathrm{id}\, A \mid A \in \mathscr{A}\}$.*

Proposición 5.10.8 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos, entonces $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} = \mathrm{id}\,\mathscr{A}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} = n < \infty$. Luego, $\mathrm{pd}\, A \leq n\ \forall A \in \mathscr{A}$; y entonces, por 5.10.3, concluimos que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A,B) = 0\ \forall A,B \in \mathscr{A}$. Por lo tanto, de 5.10.5, se tiene que $\mathrm{id}\,\mathscr{A} \leq n = \mathrm{pd}\,\mathscr{A}$. Análogamente, usando primero 5.10.5 y luego 5.10.3, se obtiene que $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} \leq \mathrm{id}\,\mathscr{A}$. Por lo tanto $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} = \mathrm{id}\,\mathscr{A}$. Asumamos ahora que $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} = \infty$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathscr{A}$ con $\mathrm{pd}\, A_n > n$. Luego, de 5.10.3, existe $C_n \in \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A_n, C_n) \neq 0$; y aplicando 5.10.5, concluimos que $\mathrm{id}\, C_n > n$. Por lo tanto, $\mathrm{id}\,\mathscr{A} = \infty = \mathrm{pd}\,\mathscr{A}$. □

Observación 5.10.9 *Sea R un anillo con 1 y $\mathrm{Mod}(R)$ la categoría de R-módulos a izquierda. Dado que $\mathrm{Mod}(R)$ es una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos, tenemos que $\mathrm{pd}\,\mathrm{Mod}(R) = \mathrm{id}\,\mathrm{Mod}(R)$; y éste número se conoce como la dimensión global (a izquierda) de R. Esto es, gldim$(R) :=$ $\mathrm{pd}\,\mathrm{Mod}(R)$.*

Corolario 5.10.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{pd}\,\mathscr{A} \leq n$,

(b) $\mathrm{pd}\,A \leq n$ *para todo objeto* A *de* $\mathscr{A}$,

(c) $\mathrm{id}\,A \leq n$ *para todo objeto* A *de* $\mathscr{A}$,

(d) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0\ \forall i > n$ *y* $\forall (X, Y) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$,

(e) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0\ \forall (X, Y) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.

Demostración. Se sigue de 5.10.8, 5.10.5 y 5.10.3 . □

El siguiente lema, apareció por primera vez en el artículo [6] de A. Grothendieck, y es la generalización del "Lema de Baer"para ciertos tipos especiales de categorías abelianas.

Lema 5.10.11 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría C_3 con un generador U. Entonces, $M \in \mathscr{A}$ es inyectivo si y sólo si para todo sub-objeto $u : V \longrightarrow U$ de U y todo morfismo $\eta : V \longrightarrow M$ existe $\bar{\eta} : U \longrightarrow M$ tal que $\bar{\eta}u = \eta$.*

Definición 5.10.12 *Una* ***categoría de Grothendieck*** *es una categoría C_3 con generador. Por 3.3.4, sabemos que una categoría de Grothendieck admite envolventes inyectivas; y por lo tanto, tiene suficientes inyectivos.*

Proposición 5.10.13 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría de Grothendieck con suficientes proyectivos y U un generador de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{id}\,A \leq n$,

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(U/B, A) = 0\ \forall i > n\ \forall u : B \longrightarrow U$ *sub-objeto de* U,

(c) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U/B, A) = 0\ \forall u : B \longrightarrow U$ *sub-objeto de* U.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Se sigue de 5.10.5.
$(b) \Rightarrow (c)$ Es trivial.
$(c) \Rightarrow (a)$ La demostración se hará por inducción sobre n. Sea $n = 0$; luego $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(U/B, A) = 0\ \forall u : B \longrightarrow U$ sub-objeto de U. Veamos que $\mathrm{id}A = 0$, esto es, que A es inyectivo. Para esto, de acuerdo con 5.10.11, es suficiente probar que

$H_A(u) : H_A(U) \longrightarrow H_A(B)$ es un epimorfismo (recordar que $H_A := [-, A]_{\mathscr{A}}$). De la sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$E: \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{u} U \xrightarrow{q} U/B \longrightarrow 0,$$

se obtiene la siguiente sucesión exacta en *Ab* (ver 5.7.4(1), 5.7.9 y 5.9.3)

$$0 \longrightarrow H_A(U/B) \xrightarrow{H_A(q)} H_A(U) \xrightarrow{H_A(u)} H_A(B) \xrightarrow{\Delta_E^0} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(U/B, A).$$

Ahora bien, como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(U/B, A) = 0$, se tiene que $H_A(u)$ es un epimorfismo; probándose que A es inyectivo.
Supongamos ahora que $n \geq 1$ y que el resultado es cierto para $n-1$. Como $\mathscr{A}$ tiene suficientes inyectivos, existe un monomorfismo $\mu : A \longrightarrow Q$ con Q inyectivo en $\mathscr{A}$. En particular, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$F: \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} Q \xrightarrow{\gamma} Q/A \longrightarrow 0.$$

Aplicando 5.7.4(1), 5.7.9 y 5.9.3 a F, y del hecho que Q es inyectivo (ver 5.10.6), se tiene que $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(U/B, Q/A) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathscr{A}}(U/B, A) = 0 \ \forall i > 0$.
Como, por hipótesis, $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U/B, A) = 0$, concluimos que $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(U/B, Q/A) = 0 \ \forall u : B \longrightarrow U$ sub-objeto de U. Entonces, por hipótesis de inducción, se tiene que $\mathrm{id}\, Q/A \leq n-1$. Luego, de la sucesión exacta F, concluimos que $\mathrm{id}\, A \leq \mathrm{id}\, Q/A + 1 \leq n$. $\square$

Corolario 5.10.14 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría de Grothendieck con suficientes proyectivos y U un generador de A. Entonces*

$$\mathrm{pd}\, \mathscr{A} = \sup\{\mathrm{pd}\,(U/B) \mid u : B \longrightarrow U \quad \textit{es un sub-objeto de } U\}.$$

Demostración. Para cada $(M, N) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$, definimos $d(M, N) := \sup\{n \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(M, N) \neq 0\}$. Luego, de 5.10.3 y 5.10.5, concluimos que

$$\mathrm{pd}\, M = \sup_{N \in \mathscr{A}}\{d(M, N)\},$$

$$\mathrm{id}\, N = \sup_{M \in \mathscr{A}}\{d(M, N)\}.$$

Análogamente, de 5.10.13, obtenemos que

$$\mathrm{id}\, N = \sup\{d(U/B, N) \mid u : B \longrightarrow U \quad \text{es un sub-objeto de U}\}.$$

Por lo tanto, aplicando 5.10.8, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{pd}\, \mathscr{A} &= \sup_{N \in \mathscr{A}}\{\mathrm{id}\, N\} \\ &= \sup_{N \in \mathscr{A}}\{\sup_{U/B}\{d(U/B, N)\}\} \\ &= \sup_{U/B}\{\sup_{N \in \mathscr{A}}\{d(U/B, N)\}\} \\ &= \sup_{U/B}\{\mathrm{pd}\,(U/B)\}. \end{aligned}$$

□

Las resoluciones minimales, que introduciremos a continuación, son una herramienta importante que permite calcular, en ejemplos concretos de categorías de Grothendieck, la dimensión inyectiva (ver 5.10.8). En tal situación, basta con saber, la longitud de una resolución minimal.

Definición 5.10.15 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathscr{A}$. Una resolución $(I^\bullet, \delta)$ exacta e inyectiva de A se dice que es minimal, si la sucesión exacta larga en $\mathscr{A}$*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} I^0 \xrightarrow{d^0_{I^\bullet}} I^1 \xrightarrow{d^1_{I^\bullet}} I^2 \longrightarrow \cdots$$

satisface lo siguiente:

(a) $\delta : A \longrightarrow I^0$ es la envolvente inyectiva de A, y

(b) la inclusión canónica $u^i : Im(d^i_{I^\bullet}) \longrightarrow I^{i+1}$ es la envolvente inyectiva de $Im(d^i_{I^\bullet})$ $\forall i \geq 0$.

Lema 5.10.16 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $A \in \mathscr{A}$ y $u : A \longrightarrow I$ una envolvente inyectiva de A. Si $f : I \longrightarrow I$ y $h : A \longrightarrow A$, con h un isomorfismo, son tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "u"'] & I, \end{tikzcd}$$

entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Como h es un isomorfismo y u es un monomorfismo esencial, se tiene que uh es esencial. Luego fu es esencial, con f un monomorfismo (ya que u es esencial). Por lo tanto, de 3.2.7, tenemos que $f : I \longrightarrow I$, con I inyectivo, es un monomorfismo esencial. Entonces, de 3.2.4(a), concluimos que f es un isomorfismo. □

Proposición 5.10.17 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría de Grothendieck. Entonces,*

(a) todo objeto de $\mathscr{A}$ admite al menos una resolución exacta e inyectiva minimal,

(b) sean $(I^\bullet, \delta)$ y $(\bar{I}^\bullet, \bar{\delta})$ resoluciones exactas e inyectivas de $A \in \mathscr{A}$; si $(I^\bullet, \delta)$ es minimal, entonces existe un morfismo de complejos $f : I^\bullet \longrightarrow \bar{I}^\bullet$ tal que $f^0\delta = \bar{\delta}$ Y $f^n : I^n \longrightarrow \bar{I}^n$ es un split-mono $\forall n$,

(c) si $(I^\bullet, \delta)$ y $(\bar{I}^\bullet, \bar{\delta})$ son resoluciones exactas e inyectivas minimales, entonces el morfismo de complejos $f : I^\bullet \longrightarrow \bar{I}^\bullet$ de (b) es un isomorfismo.

Demostración. (a) Sea $A \in \mathscr{A}$; como $\mathscr{A}$ es de Grothendieck, se sabe que $\mathscr{A}$ tiene envolventes inyectivas (ver 3.3.4). Vamos a construir, paso a paso, una resolución exacta e inyectiva minimal $(I^\bullet, \delta)$ de A. Comenzamos tomando a $\delta : A \longrightarrow I^0$ como la envolvente inyectiva de A. El siguiente paso es tomar el cokernel $p^0 : I^0 \longrightarrow Coker(\delta)$ de δ y la envolvente inyectiva $\delta^1 : Coker(\delta) \longrightarrow I^1$ del $Coker(\delta)$; luego se define $d^0_{I^\bullet} : I^0 \longrightarrow I^1$ como $d^0_{I^\bullet} := \delta^1 p^0$. Siguiendo este procedimiento, con $d^0_{I^\bullet}$ en lugar de δ, se va construyendo una resolución exacta e inyectiva minimal de A.
(b) y (c) Usando que I^0 y $\bar{I}^0$ son inyectivos, existen morfismos $f^0 : I^0 \longrightarrow \bar{I}^0$ y $g^0 : \bar{I}^0 \longrightarrow I^0$ tales que $f^0\delta = \bar{\delta}$ y $g^0\bar{\delta} = \delta$, en particular, $g^0 f^0 \delta = \delta$ y $f^0 g^0 \bar{\delta} = \bar{\delta}$. Por lo tanto, del lema anterior, $g^0 f^0$ es un isomorfismo (y luego f^0 es un split-mono); y en el caso en que $(\bar{I}^\bullet, \bar{\delta})$ sea minimal, se tendría que $f^0 g^0$ es también un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y con filas exactas en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r, "p^0"] \arrow[d, "f^0"'] & Im(d^0_{I^\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\bar{\delta}"] \arrow[d, equal] & \bar{I}^0 \arrow[r, "\bar{p}^0"] \arrow[d, "g^0"'] & Im(d^0_{\bar{I}^\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] & I^0 \arrow[r, "p^0"] & Im(d^0_{I^\bullet}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $I^i \xrightarrow{p^i} Im(d^i_{I^\bullet}) \xrightarrow{u^i} I^{i+1}$ es la factorización de $d^i_{I^\bullet} : I^i \longrightarrow I^{i+1}$ a través de su imagen. Por el "Lema del 5" (ver 4.2.10), se tiene que $\bar{g}^0 \bar{f}^0$ es un isomorfismo pues $g^0 f^0$ lo es. Observar que si $(\bar{I}^\bullet, \bar{\delta})$ fuera minimal, análogamente, tendríamos que $\bar{f}^0 \bar{g}^0$ es también un isomorfismo. Dado que I^1 y $\bar{I}^1$ son inyectivos, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y con filas exactas en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im(d^0_{I^\bullet}) \arrow[r, "u^0"] \arrow[d, "\bar{f}^0"'] & I^1 \arrow[r, "p^1"] \arrow[d, "f^1"'] & Im(d^1_{I^\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Im(d^0_{\bar{I}^\bullet}) \arrow[r, "\bar{u}^0"] \arrow[d, "\bar{g}^0"'] & \bar{I}^1 \arrow[r, "\bar{p}^1"] \arrow[d, "g^1"'] & Im(d^1_{\bar{I}^\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Im(d^0_{I^\bullet}) \arrow[r, "u^0"] & I^1 \arrow[r, "p^1"] & Im(d^1_{I^\bullet}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $(I^\bullet, \delta)$ es minimal y $\bar{g}^0 \bar{f}^0$ es un isomorfismo, obtenemos del lema anterior que $g^1 f^1$ es un isomorfismo (y luego f^1 es un split-mono). Análogamente, si $(\bar{I}^\bullet, \bar{\delta})$ fuera minimal tendríamos que $f^1 g^1$ es un isomorfismo. Por otro lado, por el "Lema del 5" y el diagrama anterior, se obtiene que $\bar{g}^1 \bar{f}^1$ es un isomorfismo. Luego, éste procedimiento puede repetirse, obteniendose un morfismo de complejos $f : I^\bullet \longrightarrow \bar{I}^\bullet$ con las propiedades requeridas en (b) y (c). $\square$

Corolario 5.10.18 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría de Grothendieck, $A \in \mathscr{A}$ y $(I^\bullet, \delta)$ una resolución exacta e inyectiva de A. Si $(I^\bullet, \delta)$ es minimal, entonces* $\operatorname{id} A = \ell(I^\bullet)$.

Demostración. Sea $(J^\bullet, \varepsilon)$ una resolución exacta e inyectiva de A.
Por 5.10.17(b), tenemos un morfismo $f : I^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ de complejos tal que $f^n : I^n \longrightarrow J^n$ es un split-mono $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, se tiene que $\ell(I^\bullet) \leq \ell(J^\bullet)$; probándose que $\operatorname{id} A = \ell(I^\bullet)$. $\square$

5.11. Objetos de longitud finita

Definición 5.11.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y M un objeto de $\mathscr{A}$. Decimos que M es **simple** si*

(a) $M \neq 0$,

(b) los únicos sub-objetos de M salvo isomorfismos son 0 y M.

Definición 5.11.2 *Un sub-objeto $u : M' \longrightarrow M$ de M es **maximal** si*

(a) u no es un epimorfismo, y

(b) dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & M \\ M'', \arrow[ur, "u''"'] & \end{tikzcd}$$

si u' y u'' son monomorfismos, entonces uno de los morfismos u', u'' es un epimorfismo.

Lema 5.11.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y M un objeto de $\mathscr{A}$. Si $u : M' \longrightarrow M$ es un sub-objeto maximal de M, entonces M/M' es simple.*

Demostración. Supongamos que M/M' no es simple. Por lo tanto, existe un monomorfismo $i : U \longrightarrow M/M'$ que no es un epimorfismo. Luego, por 1.18.3, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, equal] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "i'"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"'] & M \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "\psi"'] & M/M' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
& & Coker(i') \arrow[r, equal] \arrow[d] & Coker(i) \arrow[d] & \\
& & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

En particular, $u = i'u'$ donde u' no es un epimorfismo pues $U \neq 0$; y además i' no es un epimorfismo pues $Coker(i') = Coker(i) \neq 0$. Contradiciendo la maximalidad de $u : M' \longrightarrow M$. Por lo tanto M/M' es simple. $\square$

El siguiente resultado es un criterio importante para la existencia de objetos simples en categorías abelianas.

Teorema 5.11.4 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con coproductos y una familia de generadores. Supongamos que $\mathscr{A}$ tiene un objeto $R \neq 0$ que es proyectivo y pequeño. Si $u : M' \longrightarrow R$ es un sub-objeto de R tal que u no es un epimorfismo, entonces existe un sub-objeto maximal $v : M'' \longrightarrow R$ de R y un monomorfismo $u' : M' \longrightarrow M''$ tal que $vu' = u$.*

Demostración. Consideremos la siguiente clase de pares de morfismos $\mathscr{C} = \{(u', u'') \mid u' : M' \longrightarrow M'', u'' : M'' \longrightarrow R \quad \text{son monomorfismos tales que} \quad u'' \quad \text{no es un epimorfismo y} \quad u''u' = u\}$. Definimos una relación $\leq$ de pre-orden en $\mathscr{C}$ como sigue: decimos que $(u_1', u_1'') \leq (u_2', u_2'')$ si y sólo si existe $v_1 : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dd, "v_1"] \arrow[dr, "u_1''"] & \\
M' \arrow[ur, "u_1'"] \arrow[dr, "u_2'"'] & & R \\
& M_2. \arrow[ur, "u_2''"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, por 2.15.3, sabemos que $\mathscr{A}$ es localmente pequeña. Luego, la clase $\bar{\mathscr{C}}$ cuyos elementos son las clases de equivalencia de $\mathscr{C}$ es un conjunto. Más aún, el pre-orden $(\mathscr{C}, \leq)$ induce un orden parcial $\leq$ en $\bar{\mathscr{C}}$. Esto es, si $(u_i', u_i'') \in \bar{\mathscr{C}}$

con $i = 1, 2$ tenemos que $(u_1', u_1'') = (u_2', u_2'')$ si y sólo si el morfismo v_1, en el diagrama anterior, es un isomorfismo. Tenemos que $\bar{\mathscr{C}} \neq \emptyset$, pues $(1_{M'}, u) \in \bar{\mathscr{C}}$. Sea $\xi = \{(u_i', u_i'')\}_{i \in I}$ una cadena en $\bar{\mathscr{C}}$. Si $(u_i', u_i'') \leq (u_j', u_j'')$ entonces existe $v_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ que hace conmutar el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dd, "v_{ij}"] \arrow[dr, "u_i''"] & \\ M' \arrow[ur, "u_i'"] \arrow[dr, "u_j'"'] & & R \\ & M_j . \arrow[ur, "u_j''"'] & \end{tikzcd}$$

En particular, $\{u_i'' : M_i \longrightarrow M\}_{i \in I}$ es una familia dirigida de sub-objetos de R, y por 1.19.6, existe la unión $\bar{u} : \cup_{i \in I} M_i \longrightarrow R$ de dicha familia. Por la propiedad de la unión, tenemos que existen $\theta_i : M_i \longrightarrow \cup_{i \in I} M_i$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \cup_{i \in I} M_i \arrow[rr, "\bar{u}"] & & R \\ & M_i . \arrow[ul, "\theta_i"] \arrow[ur, "u_i''"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $i_0 \in I$ fijo, veamos que $(\theta_{i_0} u_{i_0}', \bar{u}) \in \bar{\mathscr{C}}$. Para esto, tenemos que ver que $\bar{u}$ no es un epimorfismo. Supongamos que $\bar{u}$ es un epimorfismo; consideremos las inclusiones y proyecciones en el coproducto $\mu_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, $p_i : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i$, respectivamente. Sea $u'' : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow R$ el morfismo inducido por la familia de morfismos $\{u_i'' : M_i \longrightarrow R\}_{i \in I}$. Luego, por 1.19.6, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & Im(u'') = \cup_{i \in I} M_i \arrow[dr, "\bar{u}"] & \\ \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[ur] \arrow[rr, "u''"] & & R; \end{tikzcd}$$

y como $\bar{u}$ es un epimorfismo, entonces u'' también lo es. Por lo tanto, dado que R es proyectivo obtenemos que existe $\lambda : R \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ tal que $u''\lambda = 1_R$. Usando ahora que R es pequeño, obtenemos de 2.16.2 , que existe un subconjunto $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ de I tal que

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \mu_{j_k} p_{j_k} \lambda.$$

Dado que ξ es una cadena en $(\bar{\mathscr{C}}, \leq)$, podemos suponer que

$$(u_{j_1}', u_{j_1}'') \leq (u_{j_2}', u_{j_2}'') \leq \cdots \leq (u_{j_n}', u_{j_n}'').$$

Luego, usando las igualdades

$$u''_{j_k} v_{j_{k-1} j_k} = u''_{j_{k-1}}, \tag{5.8}$$

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \mu_{j_k} p_{j_k} \lambda, \qquad u''\lambda = 1_R, \tag{5.9}$$

obtenemos que $1_R = \sum_{k=1}^{n} u''\mu_{j_k} p_{j_k}\lambda = \sum_{k=1}^{n} u''_{j_k} p_{j_k}\lambda = u''_{j_n}(\beta\lambda)$ con $\beta : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_{j_n}$; lo cual implica que u''_{j_n} es un epimorfismo, obteniendose una contradicción pues $(u'_{j_n}, u''_{j_n}) \in \bar{\mathscr{C}}$. Por lo tanto $(\theta_{i_0} u'_{i_0}, \bar{u}) \in \bar{\mathscr{C}}$. Veamos ahora que $(u'_i, u''_i) \leq (\theta_{i_0} u'_{i_0}, \bar{u})$ $\forall i \in I$. Para ver esto, es suficiente probar que el siguiente diagrama, donde $(u'_i, u''_i) \leq (u'_j, u''_j)$, conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[d, "\theta_i"] \arrow[dr, "u''_i"] & \\
M' \arrow[ur, "u'_i"] \arrow[dr, "u'_j"'] & \cup_{i\in I} M_i \arrow[r, "\bar{u}"] & R \\
 & M_j . \arrow[u, "\theta_j"'] \arrow[ur, "u''_j"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, $\bar{u}\theta_j u'_j = u''_j u'_j = u = u''_i u'_i = \bar{u}\theta_i u'_i$; y como $\bar{u}$ es un monomorfismo, entonces $\theta_j u'_j = \theta_i u'_i$. Es decir, $\theta_{i_0} u'_{i_0} = \theta_i u_i$ $\forall i \in I$, lo cual prueba que $(\theta_{i_0} u'_{i_0}, \bar{u})$ es cota superior de ξ. Por el lema de Zorn, $\bar{\mathscr{C}}$ tiene un elemento maximal (u', u'') con $u' : M' \longrightarrow M''$, $u'' : M'' \longrightarrow R$ y $u''u' = u$. Veamos que $u'' : M'' \longrightarrow R$ es un sub-objeto maximal de R. Para esto hay que checar (a) y (b) de la definición de sub-objeto maximal.

(a) u'' no es un epimorfismo, puesto que $(u', u'') \in \bar{\mathscr{C}}$.

(b) Sean $u''_1 : M'' \longrightarrow \bar{M}$ y $\widetilde{u} : \bar{M} \longrightarrow R$ monomorfismos tales que $u'' = \widetilde{u} u''_1$. Supongamos que $\widetilde{u}$ y u''_1 no son epimorfismos. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & M'' \arrow[dd, "u''_1"'] \arrow[dr, "u''"] & \\
M' \arrow[ur, "u'"] \arrow[dr, "u''_1 u'"'] & & R \\
 & \bar{M} . \arrow[ur, "\widetilde{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

De donde se sigue que $(u', u'') \leq (u''_1 u', \widetilde{u})$ con $(u''_1 u', \widetilde{u}) \in \mathscr{C}$, puesto que $\widetilde{u}$ no es un epimorfismo y $\widetilde{u} u''_1 u' = u''u' = u$. Además, $(u', u'') \neq (u''_1 u', \widetilde{u})$ ya que u''_1 no es un epimorfismo; contradiciendo que (u', u'') es maximal en $(\bar{\mathscr{C}}, \leq)$. Por lo tanto, u'' es un sub-objeto maximal de R, probándose el teorema. $\square$

Corolario 5.11.5 *En una categoría de Grothendieck, con proyectivos pequeños no triviales (i.e. distintos de cero), existen objetos simples.*

Demostración. Se sigue de 5.11.3 y de 5.11.4. $\square$

Corolario 5.11.6 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y pequeña con $\mathscr{A} \neq 0$. Entonces, la categoría $(\mathscr{A}, Ab)$, de funtores aditivos de $\mathscr{A}$ en Ab, satisface lo siguiente:*

(a) es de Grothendieck, con $G := \bigoplus_{A \in \mathscr{A}} H^A$ un generador proyectivo,

(b) tiene envolventes inyectivas y suficientes proyectivos, y

(c) tiene objetos simples.

Demostración.

(a) Se sigue de 2.13.2 y 2.13.3 que $(\mathscr{A}, Ab)$ es abeliana, además es C_3 ya que Ab lo es. Y por 4.1.6 tenemos que $G = \bigoplus_{A \in \mathscr{A}} H^A$ es un generador proyectivo de $(\mathscr{A}, Ab)$. Por lo tanto $(\mathscr{A}, Ab)$ es de Grothendieck.

(b) Como G es un generador proyectivo, obtenemos de 2.15.6 y 2.15.8, que $(\mathscr{A}, Ab)$ tiene suficientes proyectivos. La existencia de envolventes inyectivas es por 3.3.4.

(c) Para toda $0 \neq A \in \mathscr{A}$, tenemos por 4.1.6, que H^A es un proyectivo pequeño no trivial. Luego (c) se sigue del corolario anterior.

$\square$

Definición 5.11.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples y $M \in \mathscr{A}$. Decimos que M es de* ***longitud finita*** *si existe una filtración finita F de subobjetos $\{\mu_i : M_i \longrightarrow M\}_{i=0}^n$ de M, esto es*

$$F: \qquad (1_M, M) = (\mu_0, M) \geq (\mu_1, M) \geq (\mu_2, M) \geq \cdots \geq (\mu_n, M),$$

tal que: $M_n = 0$ y M_i/M_{i+1} es cero ó simple para $0 \leq i \leq n-1$. Tal filtración F de M será llamada ***serie generalizada de composición****; y a los objetos cociente M_i/M_{i+1},* ***factores de composición*** *de F. Si ningún M_i/M_{i+1} es cero, F será llamada* ***serie de composición*** *de M.*

Definición 5.11.8 *Dada una serie generalizada de composición F de $M \in \mathscr{A}$, definimos*

(a) la multiplicidad $m_S^F(M)$ del simple S en M, con respecto a la filtración F, como el número de factores de composición de F que son isomorfos al simple S,

(b) la longitud $\ell_F(M)$ de M, con respecto a la filtración F, como $\ell_F(M) := \sum m_S^F(M)$, donde la suma es tomada sobre todos los elementos de la clase formada por los objetos simples de $\mathscr{A}$ que no son isomorfos dos a dos.

Definición 5.11.9 *Dada una categoría abeliana $\mathscr{A}$ con objetos simples, denotamos por $f.\ell.(\mathscr{A})$ a la subcategoría plena de $\mathscr{A}$ cuyos objetos son los objetos de $\mathscr{A}$ de longitud finita. Se definen las funciones multiplicidad y longitud:*

$$m_S, \quad \ell : Obj(f.\ell(\mathscr{A})) \longrightarrow \mathbb{N},$$

donde

$$m_S(M) := min\{m_S^F(M) \mid F \text{ es una serie generalizada de composición de } M\},$$

$$\ell(M) := min\{\ell_F(M) \mid F \text{ es una serie generalizada de composición de } M\}.$$

Observación 5.11.10 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Consideremos una filtración finita*

$$F: \qquad (1_B, B) = (\mu_0, B) \geq (\mu_1, B) \geq (\mu_2, B) \geq \cdots \geq (\mu_n, B)$$

de sub-objetos $\{\mu_i : B_i \longrightarrow B\}_{i=0}^n$ de B. Usando 1.12.4, podemos construir filtraciones (asociadas a F) F' y F'' de A y C, respectivamente:

$$F': \qquad (1_A, A) = (u_0, A) \geq (u_1, B) \geq (u_2, B) \geq \cdots \geq (u_n, A), \quad y$$

$$F'': \qquad (1_C, C) = (\bar{u}_0, C) \geq (\bar{u}_1, C) \geq (\bar{u}_2, C) \geq \cdots \geq (\bar{u}_n, C),$$

donde, para cada i, $u_i : f^{-1}(B_i) \longrightarrow A$ es la imagen inversa de $\mu_i : B_i \longrightarrow B$; y $\bar{u}_i : g(B_i) \longrightarrow C$ es la imagen de $g\mu_i : B_i \longrightarrow C$.

Proposición 5.11.11 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Dada la filtración F, de 5.11.10, consideremos las filtraciones F' y F'' de A y C respectivamente, inducidas por F, como en 5.11.10. Si F es una serie generalizada de composición, entonces*

(a) las filtraciones F' y F'' son series generalizadas de composición,

(b) para cada objeto simple $S \in \mathscr{A}$ se tiene que

$$m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(C) = m_S^F(B),$$

(c) $\ell_{F'}(A) + \ell_{F''}(C) = \ell_F(B)$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\mu_i"] \arrow[dr, phantom, "II"] & g(B_i) \arrow[d, "\bar{u}_i"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C,
\end{tikzcd}$$

donde I es un pullback y II es la factorización de $g\mu_i$ a través de su imagen. En particular, f_i es un monomorfismo y g_i es un epimorfismo. Ahora, como f es el kernel de g y I es un pullback, entonces por 1.14.8, f_i es el kernel de $g\mu_i = \bar{u}_i g_i$. Luego, como $\bar{u}_i$ es un monomorfismo, entonces f_i es el kernel de g_i. De esta manera, para cada $i = 0, 1, \ldots n$, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \longrightarrow 0,$$

donde $A_i = f^{-1}(B_i)$ y $C_i = g(B_i)$. Por el Lema del 9 (ver 1.18.1), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\theta'_i"] & B_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "\theta_i"] & C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\theta''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha'_i"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i/A_{i+1} \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d] & B_i/B_{i+1} \arrow[r, "\bar{\eta}_i"] \arrow[d] & C_i/C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

donde $\theta'_i : A_{i+1} \longrightarrow A_i$ y $\theta_i : B_{i+1} \longrightarrow B_i$ son los únicos morfismos en $\mathscr{A}$ tales que $u_{i+1} = u_i\theta'_i$ y $\mu_{i+1} = \mu_i\theta_i$. Ahora bien, $B_i/B_{i+1} = 0$ si y sólo si $A_i/A_{i+1} = 0 = C_i/C_{i+1}$. Por otro lado, si B_i/B_{i+1} es simple entonces η_i es un isomorfismo ó $A_i/A_{i+1} = 0$. Si η_i es un isomorfismo, se tiene que $A_i/A_{i+1} \simeq B_i/B_{i+1}$ y $C_i/C_{i+1} = 0$. Si $A_i/A_{i+1} = 0$ entonces $B_i/B_{i+1} \simeq C_i/C_{i+1}$. Por lo tanto (a) y (b) se siguen de esta discusión. Finalmente, (c) es consecuencia de (b). $\square$

Teorema 5.11.12 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples, B un objeto de longitud finita y F, G dos series generalizadas de composición para B. Entonces, para cada objeto simple S de $\mathscr{A}$, se tiene que $m_S^F(B) = m_S^G(B) = m_S(B)$ y $\ell_F(B) = \ell_G(B) = \ell(B)$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la longitud. Si $\ell(B) \leq 1$, entonces B es simple ó cero; y en este caso, el teorema es trivial. Supongamos que $\ell(B) > 1$ y que el resultado vale para todo $B' \in f.\ell(\mathscr{A})$ tal que $\ell(B') < \ell(B)$. Dado que $\ell(B) > 1$, existe un sub-objeto $u : A \longrightarrow B$ de B con $A \neq 0$ y tal que u no es un isomorfismo. Consideremos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{q} B/A \longrightarrow 0.$$

Veamos que $\ell(A) + \ell(B/A) \leq \ell(B)$. En efecto, sea $\widetilde{F}$ una filtración de B tal que $\ell_{\widetilde{F}}(B) = \ell(B)$. Luego, por 5.11.11, tenemos que $\ell_{\widetilde{F}'}(A) + \ell_{\widetilde{F}''}(B/A) = \ell_{\widetilde{F}}(B)$,

donde $\widetilde{F}'$ y $\widetilde{F}''$ son las filtraciones de A y C inducidas por $\widetilde{F}$. Luego, como $\ell(A) \leq \ell_{\widetilde{F}'}(A)$ y $\ell(B/A) \leq \ell_{\widetilde{F}''}(B/A)$, entonces $\ell(A) + \ell(B/A) \leq \ell(B)$. Ahora bien, como $A \neq 0$ y $B/A \neq 0$, tenemos que $\ell(A) > 0$ y $\ell(B/A) > 0$; por lo tanto, $\ell(A) < \ell(B)$ y $\ell(B/A) < \ell(B)$ pues $\ell(A) + \ell(B/A) \leq \ell(B)$.
Sean F y G dos series generalizadas de composición para B; y F', G' (resp. F'', G'') las filtraciones inducidas en A (resp. B/A). Entonces, por hipótesis de inducción y por 5.11.11(a), tenemos que

$$m_S^{F'}(A) = m_S^{G'}(A),$$

$$m_S^{F''}(B/A) = m_S^{G''}(B/A).$$

Luego, por 5.11.11(b), tenemos las igualdades

$$m_S^F(B) = m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(B/A) = m_S^{G'}(A) + m_S^{G''}(B/A) = m_S^G(B).$$

En particular, $\ell_F(B) = \ell_G(B) = \ell(B)$. □

Corolario 5.11.13 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples.*

(a) Si $F: \quad (1_B, B) = (\mu_0, B) \geq (\mu_1, B) \geq (\mu_2, B) \geq \cdots \geq (\mu_n, B)$ es una serie de composición para $B \in f.\ell.(\mathscr{A})$, entonces $m_S(B) = m_S^F(B)$ y $\ell(B) = \ell_F(B) = n$.

(b) Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$ con $B \in f.\ell.(\mathscr{A})$, entonces $A, C \in f.\ell.(\mathscr{A})$ y además se tienen las igualdades

$$m_S(B) = m_S(A) + m_S(C),$$

$$\ell(B) = \ell(A) + \ell(C).$$

Demostración. (a) Es consecuencia de 5.11.12, pues todos los factores de composición de F son no nulos y por lo tanto simples.
(b) Sea $B \in f.\ell.(\mathscr{A})$ y F una serie generalizada de composición de B. Consideremos las filtraciones F' de A y F'' de C inducidas por F. De 5.11.11, obtenemos que F' y F'' son series generalizadas de composición (¡por lo cual A y C son de longitud finita!); y además, $m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(C) = m_S^F(B)$ y $\ell_{F'}(A) + \ell_{F''}(C) = \ell_F(B)$. Luego, por 5.11.12, obtenemos (b). □

Proposición 5.11.14 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples, $A \in f.\ell.(\mathscr{A})$ y $f : A \longrightarrow A$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es un isomorfismo,

(b) f es un monomorfismo,

(c) f es un epimorfismo.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Es trivial.
$(b) \Rightarrow (c)$ Si f es un monomorfismo, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A \longrightarrow Coker(f) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, de 5.11.13, tenemos que $\ell(A) = \ell(A) + \ell(Coker(f))$. Esto es, $\ell(Coker(f)) = 0$ y entonces $Coker(f) = 0$; probándose que f es un epimorfismo.
$(c) \Rightarrow (a)$ Consideremos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow A \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0.$$

Luego, $\ell(A) = \ell(A) + \ell(Ker(f))$; de donde $\ell(Ker(f)) = 0$ y por lo tanto f es un monomorfismo. Dado que $\mathscr{A}$ es balanceada, tenemos que f es un isomorfismo. □

Definición 5.11.15 *Sea M un objeto en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Decimos que M es* ***noetheriano*** *(resp.* **artiniano***) si para toda cadena ascendente (resp. descendente) de sub-objetos de M*

$$(\mu_1, M) \leq (\mu_2, M) \leq \cdots \leq (\mu_n, M) \leq \ldots$$

$$(resp. \quad (\mu_1, M) \geq (\mu_2, M) \geq \cdots \geq (\mu_n, M) \geq \ldots)$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mu_k, M) \simeq (\mu_0, M)$ $\forall k \geq n_0$.

Proposición 5.11.16 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y*
$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M/K \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Entonces, M es noetheriano (resp. artiniano) si y sólo si M/K y K lo son.*

Demostración. Solo haremos el caso noetheriano, pues el artiniano es análogo.
$\Longrightarrow$) Supongamos que M es noetheriano. Sea

$$(\mu_1, K) \leq (\mu_2, K) \leq \cdots \leq (\mu_n, K) \leq \ldots$$

una cadena ascendente de sub-objetos de K. Luego,

$$(\alpha\mu_1, M) \leq (\alpha\mu_2, M) \leq \cdots \leq (\alpha\mu_n, M) \leq \ldots$$

es una cadena ascente de sub-objetos de M; y como M es noetheriano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\alpha\mu_k, M) \simeq (\alpha\mu_{n_0}, M)$ $\forall k \geq n_0$. Entonces $(\mu_k, K) \simeq (\mu_{n_0}, K)$ $\forall k \geq n_0$. Por lo tanto K es noetheriano.
Ahora sea

$$(p_1, M/K) \leq (p_2, M/K) \leq \cdots \leq (p_n, M/K) \leq \ldots$$

una cadena ascendente de sub-objetos de M/K, con $M_i = Dom(p_i)$ y $v_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ el único morfismo tal que $p_i = p_{i+1}v_i$ para cada i. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} \beta^{-1}(M_i) \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "u_i"'] & M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[r, "\beta"'] & M/K \end{tikzcd}$$

para $i \geq 0$, donde u_i es un monomorfismo puesto p_i lo es. Por lo tanto

$$\beta u_i = p_i \beta_i = p_{i+i} v_i \beta_i;$$

de donde, por la definición de pullback, existe un único morfismo $\theta_i : \beta^{-1}(M_i) \longrightarrow \beta^{-1}(M_{i+1})$ tal que $u_i = u_{i+1}\theta_i$ y $v_i\beta_i = \beta_{i+1}\theta_i$. Es decir, hemos formado la cadena ascendente

$$(u_1, M) \leq (u_2, M) \leq \cdots \leq (u_n, M) \leq \ldots$$

de sub-objetos de M. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que θ_i es un isomorfismo $\forall i \geq n_0$. Ahora bien, como $v_i\beta_i = \beta_{i+1}\theta_i$ y β_i y β_{i+1} son epimorfismos, se concluye que si $i \geq n_0$ entonces v_i es un epimorfismo. Por lo tanto, como v_i también es un monomorfismo, tenemos que v_i es un isomorfismo $\forall i \geq n_0$. Esto es, $(p_i, M/K) \simeq (p_{n_0}, M/K)$ $\forall i \geq n_0$; probándose que M/K es noetheriano.
$\Longleftarrow$) Supongamos que M/K y K son noetherianos. Sea

$$(\mu_1, M) \leq (\mu_2, M) \leq \cdots \leq (\mu_n, M) \leq \ldots$$

una cadena ascendente de sub-objetos de M. Sea $L_i = Dom(\mu_i)$ y $v_i : L_i \longrightarrow L_{i+1}$ el único morfismo tal que $\mu_i = \mu_{i+1}v_i$. Para cada $i \geq 1$, consideremos la unión $\theta_i : L_i \cup K \longrightarrow M$ de los sub-objetos $\mu_i : L_i \longrightarrow M$ y $\alpha : K \longrightarrow M$. Entonces, por la definición de unión (ver en 1.10), existen los morfismos $\eta_i : K \longrightarrow L_i \cup K$ y $s_i : L_i \longrightarrow L_i \cup K$ tales que $\alpha = \theta_i\eta_i$ y $\mu_i = \theta_i s_i$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta_i"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_i \cup K \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & M \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\beta"'] & M/L_i \cup K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_i \cup K/K \arrow[r, "\theta'_i"] \arrow[d] & M/K \arrow[r, "\psi'_i"] \arrow[d] & M/L_i \cup K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd} \tag{5.10}$$

donde los morfismos $\theta'_i : L_i \cup K/K \longrightarrow M/K$ y $\psi'_i : M/K \longrightarrow M/L_i \cup K$, que hacen conmutar el diagrama de arriba, existen por el Lema del 9 (ver 1.18.1). Ahora, puesto que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha"'] & L_{i+1} \cup K \arrow[d, "\theta_{i+1}"] \\ M \arrow[r, "1_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L_i \arrow[r, "s_{i+1}v_i"] \arrow[d, "\mu_{i+1}v_i"'] & L_{i+1} \cup K \arrow[d, "\theta_{i+1}"] \\ M \arrow[r, "1_M"'] & M \end{tikzcd}$$

son conmutativos, entonces por definición de unión, existe un morfismo γ_i : $L_i \cup K \longrightarrow L_{i+1} \cup K$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} L_i \cup K \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, "\theta_i"'] & L_{i+1} \cup K \arrow[d, "\theta_{i+1}"] \\ M \arrow[r, "1_M"'] & M. \end{tikzcd}$$

Es claro que γ_i es un monomorfismo pues θ_i y θ_{i+1} lo son. Por lo tanto, hemos formado una cadena ascendente

$$(\theta_1, M) \leq (\theta_2, M) \leq \ldots (\theta_n, M) \leq \ldots$$

de sub-objetos de M. Ahora bien, tenemos que $\theta_{i+1}\eta_{i+1} = \alpha = \theta_i\eta_i = \theta_{i+1}\gamma_i\eta_i$; pero como θ_{i+1} es un monomorfismo, entonces $\eta_{i+1} = \gamma_i\eta_i$. Entonces, de nuevo por el Lema del 9 (ver 1.18.1), tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta_i"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{i+1}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_i \cup K \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & L_{i+1} \cup K \arrow[r, "\xi_i"] \arrow[d, "\beta_{i+1}"'] & L_{i+1} \cup K/L_i \cup K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_i \cup K/K \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d] & L_{i+1} \cup K/K \arrow[r, "p_i"] \arrow[d] & L_{i+1} \cup K/L_i \cup K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0. & \end{tikzcd} \tag{5.11}$$

Luego, de (5.10) y (5.11), tenemos que

$$\theta'_{i+1}\delta_i\beta_i = \theta'_{i+1}\beta_{i+1}\gamma_i = \beta\theta_{i+1}\gamma_i = \beta\theta_i = \theta'_i\beta_i.$$

Pero como β_i es un epimorfismo, entonces $\theta'_{i+1}\delta_i = \theta'_i$. Es decir, hemos formado una cadena ascendente

$$(\theta'_1, M/K) \leq (\theta'_2, M/K) \leq \cdots \leq (\theta'_n, M/K) \leq \ldots$$

de sub-objetos de M/K. Como M/K es noetheriano, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(\theta'_k, M/K) \simeq (\theta'_{n_1}, M/K)$ $\forall k \geq n_1$. Es decir, δ_i es un isomorfismo $\forall k \geq n_1$. Por lo tanto, del diagrama anterior, se obtiene que γ_i es un isomorfismo $\forall k \geq n_1$. Es decir, en la cadena

$$(\theta_1, M) \leq (\theta_2, M) \leq \ldots (\theta_n, M) \leq \ldots$$

se tiene que $(\theta_k, M) \simeq (\theta_{n_1}, M)$ $\forall k \geq n_1$. Ahora consideremos, para cada i, la intersección $\varphi_i : L_i \cap K \longrightarrow M$ de $\mu_i : L_i \longrightarrow M$ y $\alpha : K \longrightarrow M$. Luego, de la definición de intersección, existen $q_i : L_i \cap K \longrightarrow L_i$ y $\zeta_i : L_i \cap K \longrightarrow K$ tales que $\varphi_i = \mu_i q_i$ y $\varphi_i = \alpha\zeta_i$. Pero como $\mu_i = \mu_{i+1}v_i$, entonces $\varphi_i = \mu_i q_i = \mu_{i+1}v_i q_i$. Es decir, φ_i se factoriza a través de μ_{i+1} y α. Luego, por definición de la intersección $\varphi_{i+1} : L_{i+1} \cap K \longrightarrow M$, existe un morfismo $\varepsilon_i : L_i \cap K \longrightarrow L_{i+1} \cap K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
L_i \cap K \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & M \\
L_{i+1} \cap K. \arrow[ur, "\varphi_{i+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, como $\varphi_i = \alpha\zeta_i$ y $\varphi_{i+1} = \alpha\zeta_{i+1}$, se tiene que

$$\alpha\zeta_i = \varphi_i = \varphi_{i+1}\varepsilon_i = \alpha\zeta_{i+1}\varepsilon_i.$$

Luego, como α es un monomorfismo, tenemos que $\zeta_i = \zeta_{i+1}\varepsilon_i$. Por lo tanto, tenemos la siguiente cadena ascendente

$$(\zeta_1, K) \leq (\zeta_2, K) \leq \ldots (\zeta_n, K) \leq \ldots$$

de sub-objetos de K. Entonces, como K es noetheriano, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que ε_i es un isomorfismo $\forall k \geq n_2$. Sea $s = max\{n_1, n_2\}$; luego, para $m \geq s$, tenemos que

$$\begin{aligned}
L_m &\simeq L_m \cup (L_m \cap K) \\
&\simeq L_m \cup (L_{m+1} \cap K) \\
&\simeq (L_{m+1} \cap L_m) \cup (L_{m+1} \cap K) \\
&\simeq L_{m+1} \cap (L_m \cup K) \\
&\simeq L_{m+1} \cap (L_{m+1} \cup K) \\
&\simeq L_{m+1}.
\end{aligned}$$

Es decir, v_m es un isomorfismo para todo $m \geq s$. Por lo tanto, $(\mu_k, M) \simeq (\mu_s, M)$ $\forall k \geq s$; probándose que M es noetheriano. $\square$

Lema 5.11.17 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana localmente pequeña y M un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) M es noetheriano (resp. artiniano),

(b) todo conjunto $S \neq \emptyset$ de clases de equivalencia de sub-objetos de M, con el orden parcial $\leq$ inducido por los sub-objetos de M, tiene elementos maximales (resp. minimales).

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea M noetheriano y supongamos que $\emptyset \neq S$ no tiene elementos maximales. Luego, existe $(\mu_0, M) \in S$ que no es maximal; por lo tanto existe $(\mu_1, M) \in S$ tal que $(\mu_0, M) < (\mu_1, M)$. Dado que (μ_1, M) tampoco es maximal, existe $(\mu_2, M) \in S$ tal que $(\mu_1, M) < (\mu_2, M)$. Continuando de esta forma, construimos una cadena infinita

$$(\mu_0, M) < (\mu_1, M) < (\mu_2, M) < \cdots < (\mu_n, M) < \dots$$

tal que $(\mu_i, M) \in S$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y nunca se estabiliza (pues $(\mu_i, M) \not\simeq (\mu_{i+1}, M)$ $\forall i \in \mathbb{N}$), contradiciendo que M es noetheriano.
$(b) \Rightarrow (a)$ Consideremos una cadena ascendente

$$(\mu_1, M) \leq (\mu_2, M) \leq \cdots \leq (\mu_n, M) \leq \dots$$

de sub-objetos de M. Sea $S := \{(\mu_n, M)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y (μ_{n_0}, M) un elemento maximal de S. Luego, dado que $(\mu_{n_0}, M) \leq (\mu_{n_0+i}, M)$ $\forall i > 0$, obtenemos que $(\mu_n, M) \simeq (\mu_{n_0}, M)$ $\forall n \geq n_0$; probándose que M es noetheriano.
$\square$

Lema 5.11.18 *Dada una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y una sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M/M' \longrightarrow 0.$$

Si $\theta : K \longrightarrow M/M'$ es un sub-objeto de M/M', entonces $K \simeq \beta^{-1}(K)/M'$.

Demostración. Por 1.18.3, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & \beta^{-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M/M' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $K \simeq \beta^{-1}(K)/M'$. $\square$

Definición 5.11.19 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{B}$ una subcategoría plena de $\mathscr{A}$. Decimos que $\mathscr{B}$ es cerrada por extensiones, si para toda sucesión exacta* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *en $\mathscr{A}$ con A y C en $\mathscr{B}$ se tiene que $B \in \mathscr{B}$.*

Definición 5.11.20 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Decimos que una subcategoría plena $\mathscr{C}$ de $\mathscr{A}$ es de **Serre** si:*

(a) $0 \in \mathscr{C}$*, donde* 0 *es el objeto cero de* $\mathscr{A}$*, y*

(b) *dada una sucesión exacta* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *en* $\mathscr{A}$*; se tiene que* $A, C \in \mathscr{C}$ *si y sólo si* $B \in \mathscr{C}$*.*

Recordemos que $f.\ell(\mathscr{A})$ denota a la subcategoría plena de $\mathscr{A}$ cuyos objetos son los objetos de $\mathscr{A}$ de longitud finita. Dicha categoría tiene la siguiente caracterización en términos de subcategorías de Serre.

Proposición 5.11.21 *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana localmente pequeña y con objetos simples. Entonces:*

(a) $M \in \mathscr{A}$ *es de longitud finita si y sólo si* M *es artiniano y noetheriano,*

(b) $f.\ell(\mathscr{A})$ *es la subcategoría de Serre mas pequeña de* $\mathscr{A}$ *que contiene a los objetos simples de* $\mathscr{A}$*.*

Demostración.

(a) Sea $M \in \mathscr{A}$. Supongamos que $M \in f.\ell(\mathscr{A})$. Probaremos por inducción, sobre $\ell(M)$, que M es artiniano y noetheriano. En efecto, si $\ell(M) \leq 1$ entonces $M = 0$ ó M es simple y en ambos casos M es trivialmente artiniano y noetheriano.
Supongamos que $\ell(M) > 1$. Luego, tenemos una sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M/S \longrightarrow 0$$

con S simple. Entonces, por 5.11.13(b), obtenemos que

$$\ell(M/S) = \ell(M) - 1.$$

Por hipótesis inductiva, se tiene que M/S es artiniano y noetheriano; de donde, por la sucesión $(*)$ y 5.11.16, concluimos que M es artiniano y noetheriano.
Asumamos ahora que M es artiniano y noetheriano. Por ser M noetheriano, de 5.11.17, tenemos que M tiene un sub-objeto maximal (μ_1, M) de M. Si $\mu_1 = 0$ tenemos una serie generalizada de composición y por lo tanto $M \in f.\ell(\mathscr{A})$. Si $\mu_1 \neq 0$, tenemos por 5.11.16, que $M_1 := Dom(\mu_1)$ es noetheriano y por lo tanto tiene un sub-objeto maximal (μ_2, M) de M_1. Claramente, este procedimiento nos lleva a una cadena infinita

$$(1_M, M) > (\mu_1, M) > (\mu_2, M) > \cdots$$

o bien a una cadena finita

$$(1_M, M) > (\mu_1, M) > \cdots > (\mu_n, M) = 0,$$

en cada una de las cuales los respectivos cocientes son objetos simples. Como M es artiniano, solamente la última opción es posible; por lo tanto $M \in f.\ell(\mathscr{A})$.

(b) Es claro que los objetos simples y el cero de $\mathscr{A}$ tienen longitud finita. Por otro lado, de (a) y 5.11.16, se tiene que $f.\ell(\mathscr{A})$ es una subcategoría de Serre de $\mathscr{A}$. Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría de Serre de $\mathscr{A}$ que contiene a los objetos simples de $\mathscr{A}$. Sea $M \in f.\ell(\mathscr{A})$; probaremos, por inducción en $\ell(M)$, que $M \in \mathscr{C}$.
Si $\ell(M) \leq 1$ entonces $M = 0$ ó M es simple; y por lo tanto $M \in \mathscr{C}$. Supongamos que $\ell(M) > 1$. Luego, por 5.11.13, tenemos una sucesión exacta
$$(**) \qquad 0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M/S \longrightarrow 0$$
tal que S es simple y $\ell(M/S) = \ell(M) - 1$. Dado que $M/S \in \mathscr{C}$ (por inducción) y $S \in \mathscr{C}$ (por ser S simple), se tiene de la sucesión $(**)$ que $M \in \mathscr{C}$.

□

Definición 5.11.22 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y C un objeto de $\mathscr{A}$. Definimos a la categoría $\mathscr{A}/C$ cuyos objetos son los morfismos $f : B \longrightarrow C$ en $\mathscr{A}$; y un morfismo $g : f \longrightarrow f'$ en $\mathscr{A}/C$, con $f : B \longrightarrow C$ y $f' : B' \longrightarrow C$, es un morfismo $g : B \longrightarrow B'$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \\ B' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Decimos que un morfismo $f : B \longrightarrow C$ en $\mathscr{A}$ es ***minimal a derecha*** *si todo morfismo $g : f \longrightarrow f$ en $\mathscr{A}/C$ es un isomorfismo.*

Observación 5.11.23 *$g : f \longrightarrow f'$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}/C$ si y sólo si el morfismo asociado $g : B \longrightarrow B'$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.*

Definición 5.11.24 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Definimos, en los objetos de $\mathscr{A}/C$, la siguiente relación de equivalencia:*

$$f \sim f' \quad \Longleftrightarrow \quad [f, f']_{\mathscr{A}/C} \neq \emptyset \quad y \quad [f', f]_{\mathscr{A}/C} \neq \emptyset.$$

Denotaremos por $[f]$ a la clase de equivalencia de f en $\mathscr{A}/C$.

Proposición 5.11.25 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples y $C \in \mathscr{A}$. Si $[f]$ es una clase de equivalencia en $\mathscr{A}/C$ tal que existe $g : B \longrightarrow C$ con $g \in [f]$ y B de longitud finita, entonces existe $f' : B' \longrightarrow C$ minimal a derecha con $f' \in [f]$ y es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea $g : B \longrightarrow C$, en la clase de equivalencia de f, tal que $\ell(B)$ es el mínimo posible. Sea $h : g \longrightarrow g$ un morfismo en $\mathscr{A}/C$ y $B \xrightarrow{h'} I \xrightarrow{u} B$

la factorización de h a través de su imagen. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h'"'] & C \\ I \arrow[r, "u"'] & B. \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Dado que $h' \in [g, gu]_{\mathscr{A}/C}$ y $u \in [gu, g]_{\mathscr{A}/C}$ se tiene que $g \sim gu$. Si u no es un isomorfismo, entonces $\ell(I) < \ell(B)$ ya que $\ell(B) = \ell(I) + \ell(B/I)$. Luego, el morfismo $gu : I \longrightarrow C$ contradiciría la minimalidad de $g : B \longrightarrow C$. Entonces, u es un isomorfismo; y por lo tanto $h : B \longrightarrow B$ es un epimorfismo. Pero como B es de longitud finita, entonces, por 5.11.14, tenemos que h es un isomorfismo; probándose que $g : B \longrightarrow C$ es minimal a derecha.
Veamos que g es único salvo isomorfismos. En efecto, supongamos que $f' : B' \longrightarrow C$ es otro morfismo minimal a derecha tal que $f' \sim f$. Luego $f' \sim g$; y entonces, existen morfismos $\alpha : g \longrightarrow f'$ y $\beta : f' \longrightarrow g$ en $\mathscr{A}/C$. Utilizando que g y f' son minimales a derecha, se tiene que $\beta\alpha$ y $\alpha\beta$ son isomorfismos en $\mathscr{A}$, probándose que g es isomorfo a f' en $\mathscr{A}/C$.
$\square$

Definición 5.11.26 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples y $f : B \longrightarrow C$ un morfismo en $\mathscr{A}$ con B de longitud finita. Por 5.11.25, sabemos que existe un único (salvo isomorfismos) $f' : B' \longrightarrow C$ en $\mathscr{A}$ minimal a derecha y tal que $f \sim f'$. En tal caso, diremos que f' es la **versión minimal a derecha de** f.*

Teorema 5.11.27 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples, $C \in \mathscr{A}$ y $g : X \longrightarrow C$ un objeto en $\mathscr{A}/C$ con X de longitud finita. Entonces, existe una descomposición $X = X' \bigoplus X''$ tal que $g|_{X'} : X' \longrightarrow C$ es minimal a derecha y $g|_{X''} : X'' \longrightarrow C$ es el morfismo cero. Además, el morfismo $g|_{X'}$ es la versión minimal a derecha de g.*

Demostración. De acuerdo con 5.11.26, sea $f : B \longrightarrow C$ la versión minimal a derecha de g. Por lo tanto, existen $s : B \longrightarrow X$ y $t : X \longrightarrow B$ en $\mathscr{A}$ tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & C \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "f"] & C. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $f = f(ts)$; y entonces, como f es minimal a derecha, se tiene que ts es un isomorfismo. En particular, s es un monomorfismo, t un epimorfismo y existe $\psi : B \longrightarrow B$ tal que $(ts)\psi = 1_B$. Sea $u : K \longrightarrow X$ el kernel de t, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{u} X \xrightarrow{t} B \longrightarrow 0.$$

Luego, como $s\psi : B \longrightarrow X$ es tal que $t(s\psi) = 1_B$, la sucesión anterior se parte. Por lo tanto por 1.21.2, tenemos que $X = K \bigoplus B$. Entonces $g\mid_B := gs = f$ es minimal a derecha y $g\mid_K := gu = ftu = 0$. Además, como $f \sim g$, se tiene que $g\mid_B = f$ es la versión minimal a derecha de g. $\square$

Definición 5.11.28 *Un epimorfismo $f : A \longrightarrow B$, en una categoría $\mathscr{A}$, es* ***esencial*** *si $g : X \longrightarrow A$ es un epimorfismo siempre que $fg : X \longrightarrow B$ sea un epimorfismo.*

Definición 5.11.29 *Sea A un objeto en una categoría $\mathscr{A}$.*
Una ***cubierta proyectiva*** *de A es un epimorfismo esencial $\gamma : P \longrightarrow A$ con P un objeto proyectivo en $\mathscr{A}$.*

Proposición 5.11.30 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, P un objeto proyectivo y $f : P \longrightarrow A$ un epimorfismo. Entonces, f es una cubierta proyectiva de A si y sólo si f es minimal a derecha.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Sea $f : P \longrightarrow A$ una cubierta proyectiva de A y $g : P \longrightarrow P$ un morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ P. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Como f es esencial se tiene que g es un epimorfismo; y por lo tanto, existe $h : P \longrightarrow P$ tal que $gh = 1_P$; en particular, h es un monomorfismo. Luego, tenemos que $fh = (fg)h = f(gh) = f1_P = f$; y como f es esencial, tenemos que h es un epimorfismo; probándose que h es un isomorfismo. Luego, como $gh = 1_P$, entonces g es un isomorfismo. Por lo tanto f es minimal a derecha.
$\Longleftarrow$ Ahora supongamos f es minimal a derecha. Sea $g : X \longrightarrow P$ tal que fg es un epimorfismo. Como P es proyectivo, existe $h : P \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, equal] \\ P \arrow[r, "f"] & A. \end{tikzcd}$$

Luego, como f es minimal a derecha, se tiene que gh es un isomorfismo y por lo tanto g es un epimorfismo. Entonces, f es un epimorfismo esencial, esto es, f es una cubierta proyectiva de A. $\square$

Corolario 5.11.31 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathscr{A}$. Si $f : P \longrightarrow A$, $f' : P' \longrightarrow A$ son cubiertas proyectivas de A y $\varphi : A \longrightarrow A$ es un isomorfismo, entonces existe un isomorfismo $\bar{\varphi} : P \longrightarrow P'$ que hace conmutar al diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ P' \arrow[r, "f'"'] & A. \end{tikzcd}$$

Demostración. Como f y f' son epimorfismos, usando que P y P' son proyectivos, tenemos que existen morfismos $\bar{\varphi} : P \longrightarrow P'$ y $\psi : P' \longrightarrow P$ tales que $f'\bar{\varphi} = \varphi f$ y $f\psi = \varphi^{-1}f'$. Luego, se tiene que $f\psi\bar{\varphi} = f$ y $f'\bar{\varphi}\psi = f'$. Por lo tanto, como f' y f son minimales a derecha por 5.11.30, se tiene que $\psi\bar{\varphi}$ y $\bar{\varphi}\psi$ son isomorfismos; probándose el corolario. $\square$

Observación 5.11.32 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana con objetos simples y suficientes proyectivos de longitud finita, entonces $f.\ell(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$. En efecto, supongamos que $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos de longitud finita. Luego, dado un objeto $A \in \mathscr{A}$, existe un epimorfismo $\beta : P \longrightarrow A$ con P proyectivo de longitud finita. Consideremos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$0 \longrightarrow Ker(\beta) \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0.$$

Como P es de longitud finita entonces, por 5.11.13(b), A es de longitud finita.

Teorema 5.11.33 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con objetos simples. Si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos de longitud finita, entonces todo objeto de $\mathscr{A}$ tiene cubierta proyectiva.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos de longitud finita y sea $A \in \mathscr{A}$. Luego, existe un epimorfismo $f : P \longrightarrow A$ con P proyectivo y de longitud finita. Entonces por 5.11.27, existen P_1 y P_2 en $\mathscr{A}$ tales que $P = P_1 \bigoplus P_2$ con $f\,|_{P_1}$ minimal a derecha y $f\,|_{P_2} = 0$; además, por 2.14.6, P_1 y P_2 son proyectivos. Veamos que $f\,|_{P_1}$ es un epimorfismo. En efecto, sean $u_i : P_i \longrightarrow P$ y $p_i : P \longrightarrow P_i$, con $i = 1, 2$, las inclusiones y proyecciones naturales en el coproducto. Luego $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_P$, de donde se sigue que $fu_1p_1 + fu_2p_2 = f$; y como $fu_2 = 0$, entonces $fu_1p_1 = f$. Por lo tanto, como f es un epimorfismo, tenemos que $f\,|_{P_1} := fu_1$ es un epimorfismo. Luego, por 5.11.30, se concluye que $f\,|_{P_1} : P_1 \longrightarrow A$ es una cubierta proyectiva de A. $\square$

Corolario 5.11.34 *Sea R un anillo con* 1 *y* $\mathrm{mod}(R)$ *la categoría de R-módulos a izquierda finitamente generados. Si R es artiniano a izquierda, entonces todo objeto de* $\mathrm{mod}(R)$ *tiene cubierta proyectiva.*

Demostración. $\mathscr{A} := \mathrm{mod}(R)$ es una categoría abeliana con objetos simples. Por otro lado, como R es artiniano se sabe que tiene que ser noetheriano; y por lo tanto, R es de longitud finita. Esto implica que $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos de longitud finita. Luego, el corolario se sigue de 5.11.33. $\square$

Definición 5.11.35 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathscr{A}$. Una resolución $(P^\bullet, \varepsilon)$ exacta y proyectiva de A se dice que es minimal, si la sucesión exacta larga en $\mathscr{A}$*

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d_{P^\bullet}^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

satisface lo siguiente:

(a) $\varepsilon : P^0 \longrightarrow A$ *es la cubierta proyectiva de A, y*

(b) el epimorfismo canónico $q^{-i-1} : P^{-i-1} \longrightarrow Im(d_{P^\bullet}^{-i-1})$ es la cubierta proyectiva de $Im(d_{P^\bullet}^{-i-1})$ $\forall i \geq 0$.

Usando el corolario 5.11.31, análogamente como se hizo en 5.10.17 y 5.10.18, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 5.11.36 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $(P^\bullet, \varepsilon)$ y $(\bar{P}^\bullet, \bar{\varepsilon})$ resoluciones exactas y proyectivas de $A \in \mathscr{A}$. Si $(P^\bullet, \varepsilon)$ es minimal, entonces*

(a) existe un morfismo de complejos $f : \bar{P}^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ tal que $\varepsilon f^0 = \bar{\varepsilon}$ y $f^{-i} : \bar{P}^{-i} \longrightarrow P^{-i}$ es un split-epi $\forall i \geq 0$,

(b) $\mathrm{pd}A = \ell(P^\bullet)$, *y*

(c) en el caso en que $(\bar{P}^\bullet, \bar{\varepsilon})$ sea también minimal, se tiene que el morfismo de complejos $f : \bar{P}^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ de (a) es un isomorfismo.

Bibliografía

[1] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalo, Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge University Press. 1995

[2] I. Bucur, A. Deleanu, Introduction to the theory of categories and functors. John Wiley, 1968.

[3] S. Eilenberg and S. MacLane, Natural isomorphisms in group theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 28(1942) 537-543.

[4] S. Eilenberg and S. MacLane, General theory of natural equivalences. Trans. Am. Math. Soc. 58(1945) 231-294.

[5] P. Freyd, Abelian Categories. Columbia University, New York, 1962.

[6] A. Grothendiek, Sur quelques points d'Algèbre homologique. Tohôku Math. J.9 (1957).119-221.

[7] P. Hilton. and Stambach U., A Course in Homological Algebra, Graduate Texts in Math,.4, Springer Verlag, Berling-Heidelberg-New York, 1971.

[8] S. Lubkin, Imbedding of Abelian Categories. Trans. Am. Math. Soc. 97(1960) 410-417.

[9] B. Mitchell, Theory of categories. Columbia University, New York, 1964.

[10] B. Mitchell, The full imbedding theorem. American J. of Math. 86 No 3(1964) 619-637.

[11] J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, Inc, Illinois, 1979.

Índice alfabético