



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMACIÓN DE UN CONDENSADO DE
BOSE-EINSTEIN EN DOS DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

RODOLFO MUÑOZ RODRIGUEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ROSARIO PAREDES GUTIÉRREZ

2007



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos de Jurado

1. Datos del alumno

Muñoz
Rodriguez
Rodolfo
5539604634
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Facultad de Ciencias
Física
401004340

2. Datos del tutor

Dra.
Rosario
Paredes
Gutiérrez

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Carlos
Málaga
Iguñiz

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Carlos Ignacio
Mendoza
Ruiz

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Genaro
Toledo
Sánchez

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Karen Patricia
Volke
Sepúlveda

7. Datos del trabajo escrito

Formación de un condensado de Bose-Einstein en dos dimensiones
42 p
2007

Con todo mi afecto a mis padres y hermanos.

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Rosario Paredes Gutiérrez, mi asesora de tesis, de quién aprendí mucho durante mi servicio social en el Instituto de Física y me brindo todo su apoyo y paciencia para concluir este trabajo.

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la UNAM, por que estoy totalmente seguro que haber estudiado ahí fue una de la mejores decisiones que he tomado en toda mi vida.

Agradezco a todos aquellos que fueron mis profesores en la Facultad de Ciencias, porque además de prepararme académicamente, ellos también me enseñaron a tener un panorama mas amplio de la realidad.

Agradezco al Instituto de Física de la UNAM por brindarme un lugar en donde estudiar y trabajar tranquilamente.

Agradezco a Juana Mendieta Aztatzi, mi profesora de Química del bachillerato, porque ella me dio la motivación para estudiar Física.

Agradezco a todos mis amigos por los buenos tiempos que he pasado, paso y pasaré con ellos.

Y por supuesto agradezco a mis padres y hermanos por todo el apoyo y paciencia que me brindaron durante este trabajo. Ellos siempre fueron, son y serán parte de mi motivación para superarme día con día.

Ciudad Universitaria, México D.F. MEXICO. Rodolfo Muñoz Rodriguez
Marzo 26, 2007.

ÍNDICE GENERAL

1.. <i>Introducción</i>	3
1.1. Termodinámica de un gas ideal de Bose en una trampa armónica en 2D	6
1.1.1. Condensación de Bose-Einstein en una trampa armónica	11
2.. <i>Realización Experimental de un Condensado de Bose-Einstein</i>	15
2.1. Enfriamiento por Láser	15
2.2. Trampas Magneto-Ópticas (MOT)	16
2.3. Enfriamiento por Evaporación	18
2.4. Colisiones atómicas a bajas temperaturas	22
3.. <i>Gas de Bose a bajas temperaturas con interacción entre sus partículas</i>	25
3.1. Hamiltoniano Efectivo de un gas de Bose confinado en una trampa armónica en 2D	25
4.. <i>Dinámica de la población de los estados de energía más bajos de un gas de Bose confinado en una trampa armónica en 2D</i>	32
4.1. Resultados y Discusión	32
4.2. Conclusiones	39

Resumen

En este trabajo se estudia la formación dinámica de un gas de Bose ultrafrío confinado en una trampa armónica isotrópica en dos dimensiones. Como primer paso se estudió la Termodinámica de un gas de ideal de Bose confiando en el potencial armónico bidimensional y se revisaron las técnicas experimentales para confinar átomos en trampas magneto-ópticas. Como segundo paso, se usó el formalismo de la segunda cuantización para derivar el Hamiltoniano efectivo del gas de Bose, considerando que se trata de un gas diluido, donde únicamente las interacciones entre pares de partículas son relevantes. Usando el Hamiltoniano efectivo se resolvió numéricamente la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para un vector de estado inicial. Finalmente se estudio la evolución temporal de la población de los tres niveles energía mas bajos de oscilador armónico modificando tanto el vector de estado inicial, el parámetro de interacción entre pares de partículas y el número de partículas que forman el sistema y se determinaron las condiciones para las cuales el sistema llega a un estado de equilibrio.

1. INTRODUCCIÓN

En Junio de 1924 Albert Einstein recibió un carta con un manuscrito de un joven físico hindú llamado Satyendra Nath Bose, quién se le había negado la publicación de su artículo en las publicaciones científicas británicas. En este manuscrito Bose había estudiado la Mecánica Estadística de la Radiación de Cuerpo Negro desde una perspectiva de la Mecánica Cuántica, con lo cual derivó la ley de Planck. Einstein tradujo este manuscrito al Alemán y lo arregló para publicarlo en la revista *Zeitschrift für Physik*[1]. Más tarde Einstein usó el mismo método para examinar la dinámica de un gas de partículas obedeciendo el mismo tipo de reglas que Bose usó para los fotones. Así, como resultado el también derivó la ley de Planck y notó algo muy sobresaliente, cuando el gas que sigue la Estadística de Bose-Einstein se enfría a temperaturas cercanas a 0 K, todas la partículas se aglutinan en un sólo estado, el de menor energía, a esto se le conoce como **Condensación de Bose-Einstein** (BEC por sus siglas en Inglés). El BEC se puede obtener de dos formas diferentes, una de ellas consiste en mantener constante la densidad y disminuir la temperatura, la otra consiste en mantener la temperatura constante y aumentar la densidad. A pesar de que la condensación de Bose-Einstein no requiere de temperaturas cercanas a 0 K, en todos los experimentos se ha optado por seguir este camino, ya que a muy bajas densidades, el sistema se comporta como si se tratase de un gas ideal. Por ejemplo, la condensación de Bose con átomos de Sodio ocurre a una densidad de 10^{11} átomos/ cm^3 y una temperatura cercana a los 50 nK.

La primera evidencia experimental del BEC se tuvo en 1995. Trabajando de manera paralela, los físicos E. Cornell y C. Weiman fueron capaces de generar Condensados de Bose-Einstein a partir de átomos de Rubidio ultrafríos [2] confinados en trampas armónicas. Este BEC está constituido por algunos millones de átomos, los cuales se encuentran en el mismo estado de menor energía, i.e. el estado base, siendo la evidencia experimental una pequeña mancha de algunos milímetros de ancho. Por otro lado, en ese mismo año W. Ketterle también fue capaz de obtener el BEC utilizando átomos de Sodio ultrafríos ($10^{-9}K$)[3] confinados en trampas armónicas. La característica principal que deben tener los átomos usados para formar el BEC es espín entero (bosones). La técnica usada para crear el BEC consta de dos

etapas de enfriamiento. La primera etapa es provista por el enfriamiento por láser; dos de los principales protagonistas del desarrollo de esta técnica fueron D. Wineland y B. Phillips [4][5]. El enfriamiento por láser es una técnica poderosa pero es insuficiente para alcanzar las temperaturas para lograr el BEC. La segunda etapa es el Enfriamiento por Evaporación. Los átomos enfriados por láser son puestos en una trampa magnética [6], la cual provee un aislamiento de los alrededores casi perfecto. A través de la técnica conocida como Evaporación por radio frecuencia (Evaporación rf) [7], los átomos con mayor energía son expulsados de la trampa y los restantes tienen que colisionar entre ellos hasta alcanzar el equilibrio a una temperatura menor. La presencia del BEC fue detectada mediante la información de distribución de velocidades (ver Fig.1.1).

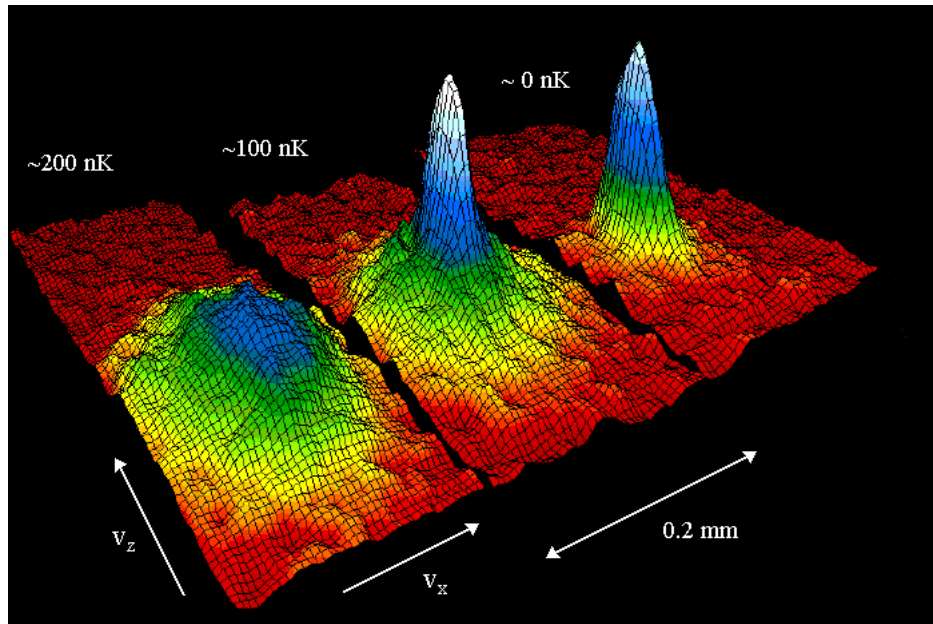


Fig. 1.1: Condensación de Bose-Einstein en átomos de Rubidio. Tres cuadros mostrando la distribución espacial de los átomos después de ser liberados de la Trampa Magneto-Óptica y siguiendo varios ciclos de enfriamiento por evaporación. En el primero, los átomos están justo por arriba de la temperatura necesaria para la condensación. En el cuadro del centro corresponde justo después de la condensación. El tercero corresponde al condensado puro [8].

Los campos magnéticos usados para confinar a los átomos fueron desconectados repentinamente y debido a la energía térmica residual los átomos con mayor energía se alejan del centro de la muestra;

como es de esperarse una mayor cantidad con menor velocidad se acumulan en el centro. Más adelante se explica en forma detallada cómo operan las dos etapas del enfriamiento necesarias para producir el BEC. En cuanto a las trampas que se utilizaron y que se utilizan para confinar a los átomos que se desean enfriar y finalmente crear el BEC, son aquellas que producen potenciales de tipo armónico, ya sea en 2D o 3D. Para crear el BEC, E. Cornell utilizó un dispositivo que rota respecto a una dirección fija y es capaz de generar un campo magnético, el cual puede aproximarse a un potencial armónico en dos dimensiones. Ketterle utilizó un dispositivo que es capaz de producir un potencial armónico en 3D.

El objetivo de este trabajo es describir la evolución temporal de la formación de un Condensado de Bose-Einstein en 2D. En particular nos concentraremos en estudiar cómo alcanza el equilibrio un sistema de bosones con interacción a muy bajas temperaturas. Para ello, consideraremos un gas de bosones con interacciones (sólo entre pares de partículas) a muy baja temperatura, confinado en un potencial armónico isotrópico en dos dimensiones. Esta suposición nos llevará a la condición de que solamente los estados con menor energía pueden estar ocupados. Utilizando el formalismo de la segunda cuantización se deducirá un Hamiltoniano efectivo que describa la dinámica de dicho sistema. Se resolverá numéricamente la ecuación de Schrödinger para este Hamiltoniano y se determinará la dependencia temporal de los números de ocupación correspondientes a los niveles de energía más bajos.

En la sección 1.1 se estudiará la Termodinámica de un gas ideal de Bose (i.e. sin tomar en cuenta interacciones entre partículas) confinado en una trampa armónica en dos dimensiones a través del método estándar de la Mecánica Estadística. Utilizando el método del ensemble Gran Canónico para obtener la función de distribución del gas ideal de Bose. Se obtendrán las cantidades termodinámicas del sistema y finalmente se analizará su comportamiento cerca de la temperatura crítica. En el capítulo 2 se describen las técnicas experimentales para enfriar átomos a temperaturas cercanas a los 0 K, así como las técnicas utilizadas para confinar a los átomos. En este mismo capítulo se describe la dinámica de las colisiones atómicas a bajas energías entre los átomos confinados. En el capítulo 3 se estudia la dinámica del gas de Bose con interacciones entre pares de partículas (gas diluido) en el formalismo de la segunda cuantización para obtener el Hamiltoniano efectivo que describe a dicho sistema. Se resolverá numéricamente la ecuación de Schrödinger para dicho Hamiltoniano a partir de un estado inicial del sistema. Con estos resultados en cuenta, calcularemos la evolución temporal de las poblaciones de partículas en cada uno de los seis estados de menor energía del oscilador armónico isotrópico bidimensional. Finalmente en el capítulo 4 se discuten los resultados y perspectivas de este análisis.

1.1. Termodinámica de un gas ideal de Bose en una trampa armónica en 2D

En esta sección derivaremos las propiedades termodinámicas de un gas ideal de Bose confinado en una trampa armónica en dos dimensiones, en particular derivaremos la energía promedio \bar{E} , el número promedio de partículas \bar{N} y su entropía S . Para esto, consideremos un sistema de N bosones de masa m confinados en una trampa armónica en 2D. El Hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_{i=0}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 \right), \quad (1.1)$$

en términos de los operadores de número en la coordenada x se tiene que $\hat{n}_i^x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x$ y en la coordenada y se tiene que $\hat{n}_i^y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$, de donde \hat{a}_x^\dagger , \hat{a}_x , \hat{a}_y^\dagger , \hat{a}_y son los operadores de creación y aniquilación en el eje x y en el y respectivamente. Así se tendrá

$$H = \sum_{i=0}^N \hbar \omega (\hat{n}_i^x + \hat{n}_i^y), \quad (1.2)$$

en donde hemos puesto la energía de punto 0 igual 0. La energía esta dada por $\varepsilon_{ij} = \hbar \omega (i + j)$, con $i, j \in \mathbb{N} \cup 0$; si tomamos en cuenta la energía de punto cero obtendremos

$$\varepsilon_{ij} = \hbar \omega (i + j + 1). \quad (1.3)$$

En este estudio, podemos fijar el número de partículas del sistema, lo cual nos dice que podríamos derivar la propiedades termodinámicas del sistema a través del método del ensemble Canónico, sin embargo por considerar que el sistema esta formado por un gas de bosones, resulta mucho más práctico usar el método del ensemble Gran Canónico; pues el anterior presenta problemas al derivar una de las variables Mecánico-Estadísticas mas importantes que es el número de ocupación promedio \bar{n}_{ij} .

Entonces tomando en cuenta que la energía en el punto 0 es cero, la gran función de partición está dada por

$$Z(\mu, T, \omega) = \sum_{ij} e^{-\beta \hbar \omega (i+j) + \alpha N}, \quad (1.4)$$

o bien

$$Z(\mu, T, \omega) = \prod_{ij} \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_{ij} + \alpha}}, \quad (1.5)$$

de donde $\alpha = \frac{\mu}{kT}$, con μ el potencial químico, k es la constante de Boltzman y T es la temperatura del sistema. El gran potencial esta dado por

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\mu, T, \omega) \quad (1.6)$$

y con esto obtenemos que el gran potencial es

$$\Omega(\mu, T, \omega) = kT \sum_{ij} \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega (i+j) + \alpha} \right). \quad (1.7)$$

Si se considera un sistema de Bosones para el cual N es muy grande y si estamos en un nivel de energía alto, observamos que $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \ll 1$, ya que $\Delta \varepsilon = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i(j-1)}$; o análogamente $\Delta \varepsilon = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{(i-1)j}$. Entonces,

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\hbar \omega}{N \hbar \omega} = \frac{1}{N} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0. \quad (1.8)$$

Ya que, para este mismo sistema su energía va como $\varepsilon_{ij} \sim N \hbar \omega$. Así la condición de la ecuación (1.8) permite definir una densidad de estados $\rho(\varepsilon)$ en el espacio de los estados i, j , y con esto es posible calcular en número de estados $N(L)$ con energía ε_{ij} por unidad de área. Ahora sea $\frac{\varepsilon_{ij}}{\hbar \omega} = i + j = L$, con esto nos damos cuenta que L define una línea recta en el espacio generado por i, j como se muestra en la Fig. 1.1; a partir de este diagrama, el área dentro del triángulo generado por i, j y L nos permitirá calcular $\rho(\varepsilon)$. El área de dicho triángulo es $A = \frac{L^2}{2}$ y la densidad de estados la calculamos como $\rho(L) = \frac{dN}{dL} = \frac{dA}{dL} = L$, pues como se mencionó antes $N(L)$ es el número de estados con energía ε_{ij} , y por otro lado $\rho(L)dL$ es el número de estados para los cuáles L varía entre L y $L + dL$.

En el límite $N \gg 1$ (i.e $N \rightarrow \infty$) podemos reemplazar la suma discreta sobre i, j por una integral sobre la densidad de estados como función de la energía ε

$$\sum_{ij} \rightarrow \int di \int dj \rightarrow \int d\varepsilon \rho(\varepsilon). \quad (1.9)$$

Como $L = i + j$, $\rho(L)dL = LdL$, $\varepsilon = \hbar \omega L$; $L = \frac{\varepsilon}{\hbar \omega}$ de donde $dL = \frac{d\varepsilon}{\hbar \omega}$ por lo tanto

$$\rho(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\hbar \omega} \frac{d\varepsilon}{\hbar \omega} = \frac{\varepsilon}{(\hbar \omega)^2} d\varepsilon. \quad (1.10)$$

Entonces la densidad de estados en el límite continuo se puede calcular como

$$\sum_{ij} \rightarrow \int di \int dj \rightarrow \int \frac{\varepsilon}{(\hbar \omega)^2} d\varepsilon. \quad (1.11)$$

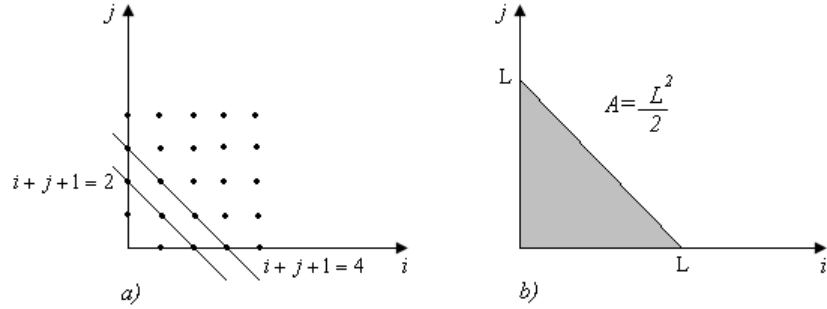


Fig. 1.2: Espacio de la energía para los valores posibles de los números enteros i, j . a) Caso discreto: Aquí los números i, j sólo pueden tomar valores enteros, representados por los puntos en el plano i, j , además podemos ver que el grado de degeneración de un estado con energía ε_{ij} es $n + 1$, de donde $n = i + j$ (definida por una línea $n + 1 = cte$). b) En el caso continuo los valores que pueden tomar los números i, j son todos aquellos dentro del triángulo.

De la ecuación (1.7) tenemos que el gran potencial se puede calcular como

$$\Omega(\mu, T, \omega) = \frac{kT}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar(i+j)+\alpha}\right) \varepsilon d\varepsilon. \quad (1.12)$$

Haciendo un cambio de variable e integrando por partes tenemos que

$$\Omega(\mu, T, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{kT}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon-\alpha} - 1} \beta d\varepsilon. \quad (1.13)$$

Sea $x = \beta\varepsilon \implies dx = \beta d\varepsilon \implies d\varepsilon = \frac{dx}{\beta}$, $\varepsilon^2 = \frac{x^2}{\beta^2}$. Con lo que obtendremos

$$\Omega(\mu, T, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^{x-\alpha} - 1} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^{x-\alpha} - 1} dx. \quad (1.14)$$

Usando la definición de las funciones de Bose [9]

$$g_n(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^{x-\alpha} - 1}, \quad (1.15)$$

y de las propiedades de la función gamma $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(2) = 1$ y $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, así tenemos que

$$\Omega(\mu, T, \omega) = -kT \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 g_3(\alpha). \quad (1.16)$$

Además las funciones de Bose también satisfacen $\frac{dg_n(\alpha)}{d\alpha} = g_{n-1}(\alpha)$. El número promedio de partículas se puede calcular a partir de la expresión

$$\bar{N} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} \Rightarrow \bar{N} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = -\frac{1}{KT} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \quad (1.17)$$

$$\bar{N} = \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 g_2(\alpha). \quad (1.18)$$

Más adelante retomaremos esta última expresión. De la ecuación (1.18) obtenemos

$$\bar{N} = \sum_{ij} \frac{e^{-\beta\varepsilon_{ij}+\alpha}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_{ij}+\alpha}} = \sum_{ij} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{ij}-\alpha} - 1}, \quad (1.19)$$

y como $\bar{N} = \sum_{ij} \bar{n}_{ij}$

$$\Rightarrow \bar{n}_{ij} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{ij}-\alpha} - 1}, \quad (1.20)$$

\bar{n}_{ij} es el número de ocupación promedio de las partículas con energía ε_{ij} . La energía promedio del sistema

es: $\bar{E} = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \bar{n}_{ij}$

$$\Rightarrow \bar{E} = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{ij}-\alpha} - 1}; \quad (1.21)$$

así nuevamente en el continuo se tendrá $\sum_{ij} \rightarrow \int \rho(\varepsilon) d\varepsilon$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon-\alpha} - 1} = \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon-\alpha} - 1}, \quad (1.22)$$

haciendo nuevamente un cambio de variable $x = \beta\varepsilon$ y como $\Gamma(3) = 2$ obtenemos

$$\bar{E} = 2kT \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 g_3(\alpha). \quad (1.23)$$

La entropía es

$$S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T}, \quad (1.24)$$

de la ecuación (1.16) se tiene que

$$\Omega(\mu, T, \omega) = -\frac{k^3 T^3}{(\hbar\omega)^2} g_3(\alpha), \quad (1.25)$$

$$\therefore S = k \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^2 [3g_3(\alpha) - \alpha g_2(\alpha)]. \quad (1.26)$$

y con esto hemos deducido la termodinámica del sistema,

$$\Omega = -kT \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^2 g_3(\alpha), \quad (1.27)$$

$$\bar{N} = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(\alpha), \quad (1.28)$$

$$\bar{E} = 2kT \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^2 g_3(\alpha). \quad (1.29)$$

Debemos hacer notar que la frecuencia de la trampa ω es también una variable termodinámica. Por ejemplo si queremos hacer una expansión o compresión adiabática de la trampa a N cte., podemos ver de las ecuaciones (1.28) y (1.26) que el sistema disminuirá o incrementará su temperatura, además también podemos darnos cuenta de las ecuaciones (1.28) y (1.29) que ω^{-2} debe ser una variable extensiva, ya que \bar{N} y \bar{E} lo son. Por tanto si cambiamos a \bar{N} por $\lambda\bar{N}$ con $\lambda > 0$, para T y μ fija, entonces para que se cumpla que \bar{E} y S sean extensivas y puedan cambiar a $\lambda\bar{E}$ y λS debe ocurrir que $\omega^{-2} \rightarrow \lambda\omega^{-2}$. Por lo tanto ω^{-2} debe ser una variable extensiva, la cual denominaremos como el volumen armónico V [10]

$$V = \frac{1}{(\hbar\omega)^2}. \quad (1.30)$$

La presión la calculamos como

$$P = - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu}, \quad (1.31)$$

la ecuación (1.28) podemos escribirla como

$$\bar{N} = V(kT)^2 g_2(\alpha), \quad (1.32)$$

y el gran potencial lo escribimos como

$$\Omega = -kT (kT)^2 V g_3(\alpha); \quad (1.33)$$

así

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial V} = kT (kT)^2 g_3(\alpha) \quad (1.34)$$

usando la ecuación (1.32) tendremos que

$$P = \frac{\bar{N}kT}{V} \frac{g_3(\alpha)}{g_2(\alpha)}. \quad (1.35)$$

Esta última expresión es la ecuación de estado del sistema.

1.1.1. Condensación de Bose-Einstein en una trampa armónica

En esta sección se discuten las formas en que es posible estudiar el gas de Bose confinado en una trampa armónica en 2D. Primero consideramos que el número de partículas \bar{N} en el sistema es fijo mientras disminuimos la temperatura T . En seguida consideramos el caso para el cual el número de partículas \bar{N} se aumenta y la temperatura T del sistema permanece constante.

Consideremos un gas bosones encerrado en un volumen fijo y en contacto con un baño térmico, entonces cuando el número de estados es menor que el número de partículas ($n_{ij} \gg 1$, límite degenerado) podemos estudiar el gas de Bose para dos casos:

1. Mantengamos el número de partículas \bar{N} constante y disminuyamos la temperatura T .

La ecuación

$$\bar{N} = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(\alpha), \quad (1.36)$$

podemos escribirla como

$$\frac{\bar{N}}{\left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^2} = (kT)^2 g_2(\alpha). \quad (1.37)$$

Si queremos mantener \bar{N} constante mientras disminuimos T , la función $g(\alpha)$ debe crecer, pero $g(a)$ alcanza su valor máximo para $\alpha = 0$ (i.e en $\mu = 0$) como se puede ver en la Fig. 1.3 ; ya que el potencial químico no puede tomar valores positivos.

Esto sucede a una temperatura crítica $T = T_0$ para la cual $g_2(\alpha) = g_2(0)$ y la ecuación (1.37) puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{g_2(0)} \right) \frac{\bar{N}}{\left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^2} = (kT_0)^2. \quad (1.38)$$

Con esto nos damos cuenta que para $T < T_0$, esta última ecuación ya no es de utilidad.

2. Mantengamos T constante y aumentemos \bar{N} .

Para esto reescribimos la ecuación (1.36) como

$$\frac{\bar{N}}{\left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^2} \frac{1}{g_2(\alpha)} = (kT)^2. \quad (1.39)$$

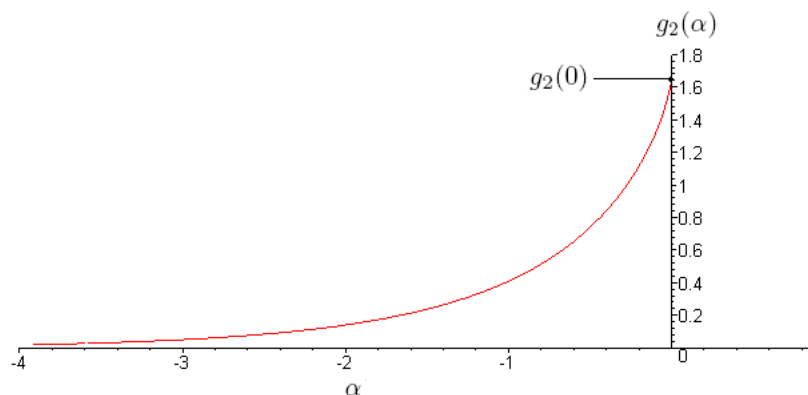


Fig. 1.3: Comportamiento de la función $g_2(\alpha)$, se observa que corta al eje y en $\frac{\pi^2}{6}$ para $\alpha = 0$ y por consiguiente $\mu = 0$, el cual es el valor máximo que puede tener el potencial químico, ya que si se quieren tomar valores de $\mu > 0$ la integral de la ecuación (1.15) diverge.

Si queremos mantener T constante mientras aumentamos \bar{N} , $g_2(\alpha)$ también debe aumentar. Pero recordamos de nuevo que $g_2(\alpha)$ alcanza su valor máximo en $g_2(0)$. Esto sucede a un valor crítico para el número de partículas $\bar{N} = \bar{N}^*$, es decir

$$\bar{N}^* = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(0). \quad (1.40)$$

También nos percatamos que esta ecuación no es válida para valores $\bar{N} > \bar{N}^*$.

Esto representa un problema, ya que no tenemos ningún inconveniente en seguir agregando partículas al sistema hasta superar el valor de \bar{N}^*

Este problema puede ser resuelto si tomamos en cuenta a las partículas que se encuentran en el estado base $\varepsilon = 0$, ya que estas no fueron tomadas en cuenta cuando pasamos del caso discreto al límite continuo en el que la densidad de estados $\rho(\varepsilon) = 0$ para $\varepsilon = 0$. Entonces debemos reescribir el número total de partículas como:

$$\bar{N} = \bar{N}_{\varepsilon=0} + \bar{N}_{\varepsilon>0}, \quad (1.41)$$

o bien

$$\bar{N} = \sum_{\varepsilon_n=0} \bar{n}_{\varepsilon_n} = \bar{n}_{\varepsilon=0} + \sum_{\varepsilon>0} \bar{n}_{\varepsilon}. \quad (1.42)$$

y como

$$\bar{n}_{\varepsilon_n=0} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad \text{y} \quad \sum_{\varepsilon>0} \bar{n}_{\varepsilon>0} = \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 g_2(\alpha), \quad (1.43)$$

entonces

$$\bar{N} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 g_2(\alpha), \quad (1.44)$$

donde $N_{\varepsilon=0}$ es el número de partículas en el estado base y $N_{\varepsilon>0}$ es el número de partículas en los demás estados excitados. Entonces estudiemos la termodinámica del gas de Bose a $T < T_0$ y $\alpha = 0$ ($\mu = 0$).

Para $T < T_0$ la ecuación (1.44) puede reescribirse como

$$\bar{N} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^2 g_2(0), \quad (1.45)$$

por otro lado también tenemos que

$$g_2(0) = \bar{N} \left(\frac{\hbar\omega}{kT_0}\right)^2, \quad (1.46)$$

y si hacemos

$$N_c(T) = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad (1.47)$$

entonces tendremos que

$$\bar{N} = \bar{N}_c(T) + N \left(\frac{T}{T_0}\right)^2; \quad (1.48)$$

así

$$\bar{N}_c(T) = \bar{N} \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] \quad (1.49)$$

o bien

$$\frac{\bar{N}_c(T)}{\bar{N}} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2. \quad (1.50)$$

Esta ecuación nos da la fracción de partículas cuya energía es nula (y por tanto se encuentran en el estado base), y podemos interpretar esto de la siguiente manera: Para $T > T_0$ el estado base se encuentra termodinámicamente vacío desde el punto de vista macroscópico, pero a medida que $T \rightarrow 0$ (y entonces $T < T_0$) el número de partículas en el estado base \bar{N}_c se incrementa hasta llegar a ordenes de \bar{N} para $T = 0$. Ahora por otro lado, en el $\lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{n}_{\varepsilon_n=0} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \approx -\frac{kT}{\mu}$, entonces a medida que $\mu \rightarrow 0$, $\bar{n}_{\varepsilon_n=0}$ se hace comparable con \bar{N} , y a un cierto punto todas las partículas se encuentra en el estado base. Este cambio de fase es la condensación de Bose-Einstein para un gas ideal atrapado en la trampa armónica isotrópica en dos dimensiones.

Finalmente en este estudio de la Termodinámica debemos tomar en cuenta dos aspectos importantes:

- a) *La dimensionalidad.* La condensación de Bose-Einstein no puede ocurrir en 2D para gases homogéneos a temperatura finita porque las fluctuaciones desestabilizan el condensado y porque la función $g_{1/2}(0)$ diverge, lo mismo sucede para un gas ideal de Bose confinado en una trampa armónica en 1D ($g_1(0)$ diverge). En presencia de un potencial armónico en 2D el comportamiento es diferente, pues la ecuación (1.15) converge, y el correspondiente valor de la temperatura crítica está dado por la ecuación (1.38).
- b) *El límite termodinámico.* Para considerar el límite termodinámico en este sistema en 2D, debemos mantener la densidad constante, i.e $\bar{N}/V = \text{cte}$ mientras $\bar{N} \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$, en el caso del gas ideal confinado en una trampa armónica en dos dimensiones, esto se logra a través de $\frac{\bar{N}}{(\hbar\omega)^2} = \bar{N} (\hbar\omega)^2 = \text{cte}$

2. REALIZACIÓN EXPERIMENTAL DE UN CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN

En este capítulo se describen las dos técnicas desarrolladas para el enfriamiento de átomos confinados en potenciales generados por Trampas Magneto-Ópticas. Se explica el funcionamiento de estas últimas y se describen las características de la trampas usadas por E. Cornell y W. Ketterle para conseguir la condensación de Bose-Einstein. Finalmente se concluye el capítulo discutiendo como es la interacción entre partículas a muy bajas temperaturas, en cuyo régimen dicha interacción puede ser aproximada por un potencial de contacto entre pares de partículas.

2.1. *Enfriamiento por Láser*

Como se mencionó anteriormente el enfriamiento por láser es una forma de alcanzar temperaturas muy bajas (μK), así en esta sección se discutirá con detalle dicha técnica la cual emplea una de las propiedades más importantes de la radiación electromagnética, su capacidad para interactuar con la materia.

Clásicamente la temperatura de un gas puede ser calculada indirectamente a través de la expresión $\frac{1}{2}k_B T = \langle E_k \rangle$, de donde $\langle E_k \rangle$ es la energía promedio de la partículas (en este caso átomos) Esta última nos dice que la temperatura del sistema está directamente relacionada con la velocidad de cada una de sus partículas (moléculas o átomos, según sea el caso). Si se disminuye la velocidad de dichas partículas se puede conseguir que el gas se enfríe. Los átomos al ser capaces de absorber y emitir radiación electromagnética tienen la posibilidad de sufrir transiciones de un estado de mayor energía a uno de menor energía de tal forma que al hacer incidir un haz láser sobre los átomos de la muestra, se puede conseguir que estos tengan transiciones de acuerdo a la intensidad de la radiación que se les aplica. Uno de los efectos más utilizados para tener transiciones que permitan al átomo disminuir su cantidad de movimiento (y consecuentemente su energía cinética) es a través del *Corrimiento de frecuencia Doppler*, el cual se lleva a cabo cuando se hace incidir el haz láser sobre los átomos del gas. Desde el sistema de referencia del átomo que tiene velocidad opuesta al haz láser se observa que los fotones del haz poseen frecuencia

mayor comparada con la que se mide desde el sistema de referencia del laboratorio (además recordamos que esta frecuencia depende de la velocidad de átomo), entonces cuando un átomo absorbe un fotón, éste lo emitirá con mayor frecuencia de la que fue absorbido y por conservación de la cantidad de movimiento, será dispersado en dirección opuesta a su dirección inicial y con esto el átomo reducirá considerablemente la magnitud de su cantidad de movimiento. Para emplear el efecto del corrimiento Doppler, se usa una muestra de átomos colocada en una trampa magnética sujeta a radiación láser cercana a la frecuencia de resonancia de los átomos. Cuando esta radiación láser es sintonizada ligeramente por debajo de la resonancia, el enfriamiento por debajo de algunas decenas de K se puede observar [4, 11, 12, 13]. Para conseguir esta sintonización nuevamente se aprovecha el efecto de corrimiento Doppler, ya que aquellos átomos con desplazamiento opuesto a la radiación láser son redirigidos a la frecuencia de resonancia (ver Fig. 2.1) en la cual tienen más posibilidades de absorber fotones y por lo tanto disminuir su cantidad movimiento. Ya que la radiación emitida por los átomos excitados es simétrica, el efecto neto es el enfriamiento de todo el gas.

2.2. Trampas Magneto-Ópticas (MOT)

En esta sección discutimos algunos detalles técnicos que se usan el confinamiento de los átomos a través las llamadas Trampas Magneto-Ópticas, también se describe las diferencias notables entre las trampas magne-tópticas usadas por dos de los principales protagonistas de la creación del BEC.

La trampa usada con mayor frecuencia para atrapar átomos es un híbrido que emplea campos magnéticos y campos ópticos, la llamada Trampa Magneto-Óptica (MOT por sus siglas en inglés), la cual fue utilizada por primera vez en 1987[14]. La operación de la MOT depende de la manipulación de campos magnéticos inhomogéneos y reglas de selección radiativas para explotar tanto el bombeo óptico como la fuerte fuerza radiativa [14][15]. Por otro lado la interacción radiativa ayuda a llenar la trampa con los átomos fríos y permite su fácil manipulación. La MOT no depende del balance preciso de los haces láser propagándose en direcciones contrarias ni del grado de polarización. Los gradientes de campos magnéticos son modestos y pueden ser fácilmente obtenidos con bobinas convencionales. El atrapamiento se logra a través el bombeo óptico de átomos a baja velocidad en un campo magnético inhomogéneo $B = B(z) \equiv Az$.

Otro efecto físico utilizado en la MOT es el efecto Zeeman. Como es sabido, cuando un átomo se encuentra en un campo magnético su espectro de energía se ve alterado (subdivisión en componentes

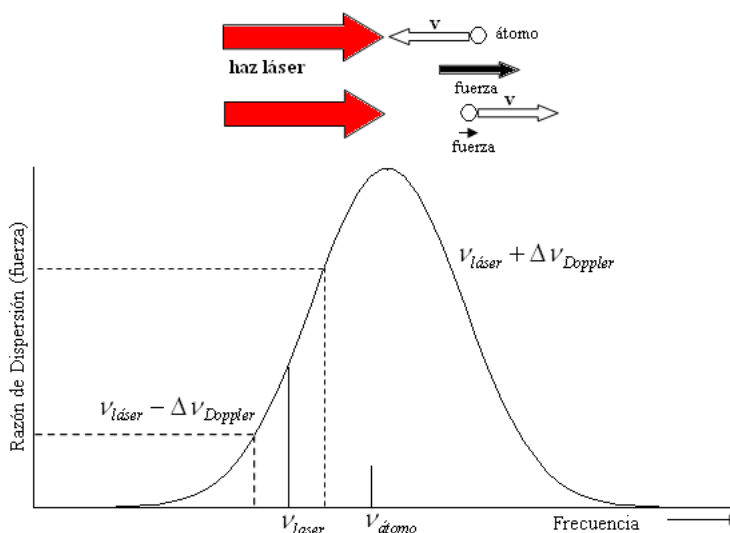


Fig. 2.1: Se muestra esquemáticamente cómo se lleva a cabo el enfriamiento por láser. Este se debe a la interacción del haz láser con los átomos de la muestra usando el desplazamiento Doppler, el cual hace que los átomos disminuyan su velocidad en dirección de la propagación del haz, ya que la frecuencia vista por el átomo desde su sistema de referencia dependerá de su velocidad, entonces entre más grande sea su velocidad mayor será la fuerza que este sienta en la dirección de su desplazamiento provocando disminuya su velocidad y con esto se “enfrie”, i.e $\Delta\nu$ depende de $v \implies F(v)$

Zeeman) por la presencia de dicho campo. Los átomos confinados en la MOT tiene tres componentes Zeeman, por cada una de estas se tiene una respectiva polarización, excitada por cada una de estas tres polarizaciones cuya frecuencia se sintoniza con el campo como se muestra en la Fig. 2.2 para 1D. Dos haces láser propagándose en direcciones contrarias y de polarización circular opuesta son encendidos abajo del campo cero de resonancia atómica por una diferencia δ . Debido al corrimiento Zeeman, el estado excitado $M_e = +1$ sufre un desplazamiento arriba de $B > 0$, mientras que el estado con $M_e = -1$ sufre un desplazamiento hacia abajo. En la posición z' en la Fig. 2.2 el campo magnético por consiguiente sintoniza la transición $\Delta M = -1$ muy cercana a la resonancia y la transición $\Delta M = +1$ lejos de la resonancia. Si la polarización del haz láser que incide por la derecha se etiqueta como σ^- , mientras que el que incide por la dirección opuesta sea σ^+ , entonces más luz será dispersada del haz σ^- que del haz σ^+ . Así los átomos son conducidos hacia el centro de la trampa donde el campo magnético es 0. Por el otro lado del centro de la trampa, los papeles de los estados $M = \pm 1$ son invertidos y ahora más luz es

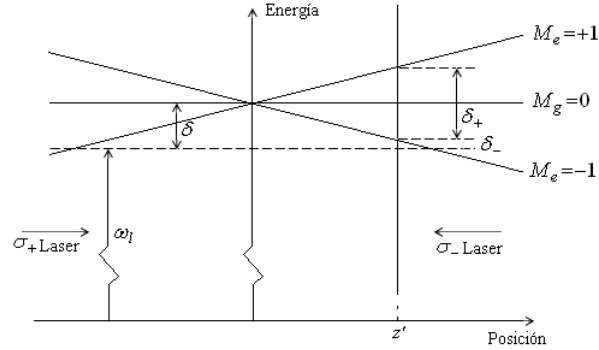


Fig. 2.2: Este diagrama muestra el arreglo de una MOT en 1D. En la figura la línea horizontal entrecortada nos indica la frecuencia que ve un átomo en reposo en el centro de la trampa. Debido a que el efecto Zeeman cambia las frecuencias de transiciones atómicas en la región del campo magnético inhomogéneo, los átomos en $z = z'$ están más cercanos a la frecuencia de resonancia con el haz láser σ^- que con el haz σ^+ , por consiguiente son redirigidos hacia el centro de la trampa

dispersada de la dirección del σ^+ y otra vez los átomos son conducidos hacia el centro de la trampa.

Como la propagación de los dos haces láser es opuesta, esto produce temperaturas subDoppler adicionales en la MOT. Este proceso en una dimensión depende del balance entre el bombeo óptico y la polarización, y en tres dimensiones este balance es perturbado por los haces láser en otras direcciones. En 3D los campos de luz de la MOT originan gradientes de polarización y los corrimientos luminosos que dependen del espaciamiento. Por otro lado, cuando los átomos son bombeados hacia la MOT, aquellos átomos que llevan una velocidad lo suficientemente baja son frenados inmediatamente por el proceso de enfriamiento Doppler; así, como sus frecuencias de oscilación ahora son más bajas, los átomos se condensan en el centro de la trampa a la misma velocidad y aquellos átomos que ingresan con mayor velocidad son detenidos completamente al final de la MOT.

2.3. Enfriamiento por Evaporación

En esta sección se describe la técnica complementaria que se usa para alcanzar la temperatura necesaria para lograr el BEC llamada “Enfriamiento por Evaporación”, pues esta técnica es similar al proceso de enfriamiento en algunos líquidos, los cuales disminuyen su temperatura cuando sus partículas mas

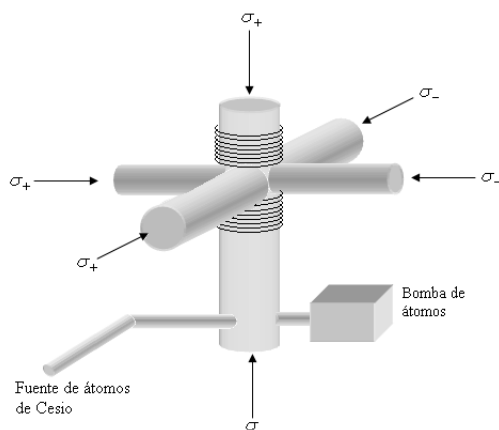


Fig. 2.3: Este diagrama de la MOT en 3D muestra las bobinas y las direcciones de la polarización de los seis haces láser. Los átomos son atrapados desde el fondo donde se bombea el vapor atómico que viene de una fuente conectada a este dispositivo

energéticas en su superficie se separan de esta.

Como complemento para alcanzar temperaturas muy cercanas 0 K , se tiene que usar el Enfriamiento por Evaporación, ya que con el enfriamiento por láser podemos obtener temperaturas de μK con una pequeña pérdida de átomos lo que provoca que la densidad del espacio fase se incremente. A mediados de 1990 se hizo claro que incrementar la densidad del espacio fase por medio del Enfriamiento por láser para átomos alcalinos había alcanzado su límite. Si la densidad de una muestra se hace muy grande, la luz dispersada por un átomo es reabsorbida por otros, causando repulsión entre ellos, una mayor colisión y finalmente el incremento de su energía cinética (y con esto el aumento en su temperatura) y de este modo se tiene algo no deseado; así vemos que el Enfriamiento por Láser no es suficiente. Un camino más prometedor hacia el BEC es el **Enfriamiento por Evaporación**. Este se basa principalmente en remover aquellos átomos de la muestra con energía superior al promedio, seguido por una rethermalización del gas restante por colisiones elásticas (de manera análoga a como se enfría una tasa de té). Veamos ahora una descripción más teórica.

El Enfriamiento por Evaporación trabaja preferentemente removiendo de la trampa a los átomos que tienen energía superior al promedio, como se muestra en la Fig.2.4.

Si los átomos están atrapados, esto puede lograrse disminuyendo la profundidad de la trampa, lo cual permite que los átomos con mayor energía escapen de la trampa; así para mantener el proceso de

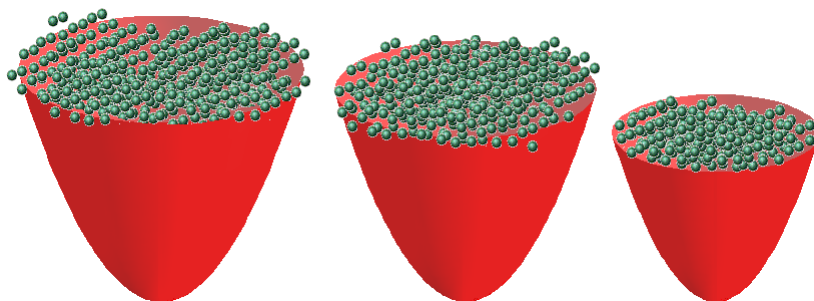


Fig. 2.4: Representación esquemática de átomos confinados en una trampa armónica en 2D y de como se lleva a cabo el *Enfriamiento por Evaporación*. La reducción progresiva del tamaño de las paredes de la trampa permite que las partículas más energéticas escapen de ella, quedando así únicamente aquellas partículas con menor energía cinética y por lo tanto menor temperatura.

enfriamiento, la profundidad de la trampa debe reducirse constantemente, logrando así un constante decremento en la temperatura. Tal proceso se le llama “evaporación forzada”.

La técnica más simple fue desarrollado por Davis *et al.* [16]. En este modelo la profundidad de la trampa se reduce en un sólo paso y el efecto sobre las cantidades termodinámicas del sistema tales como la temperatura, la densidad y el volumen son medidas, este proceso puede repetirse varias veces si quiere seguirse enfriando al sistema, y los cálculos de las variables termodinámicas del sistema únicamente se van agregando a los cálculos sin necesidad de recurrir a cálculos más engorrosos.

A continuación se presentan algunas de las consideraciones que debe seguirse en el proceso de Enfriamiento por Evaporación.

- La distribución de átomos en el espacio fase (posición y momento) dependen sólo de la energía de los átomos y la naturaleza de la trampa.
- El gas está descrito por la estadística clásica y se asume que está lejos del punto de transición del BEC ($\rho \ll 1$).
- La dispersión Mecánico-Cuántica es una onda-s, i.e., la temperatura es suficientemente baja que todas las ondas parciales no contribuyen a la sección transversal, además la sección transversal de la dispersión elástica es independiente de la energía y esta dada por $\sigma = 8\pi a^2$, donde a es la longitud de dispersión. También se asume que la proporción de colisiones elásticas e inelásticas es lo suficientemente grande de tal forma que las colisiones elásticas dominan.

- La evaporación preserva la naturaleza térmica de la distribución, *i.e.*, el proceso de termalización del sistema es mucho más rápido que la razón de enfriamiento.
- Los átomos que escapan de la trampa no colisionan con los átomos que permanecen y tampoco intercambian energía. Esta es la llamada “Evaporación completa”

Las Trampas Magneto-Ópticas utilizadas por E. Cornell y W. Ketterle se basan principalmente en las características mencionadas anteriormente, pero presentan algunas variaciones para hacer más eficiente el confinamiento de los átomos.

La MOT utilizada por E. Cornell[2] posee una característica interesante, el potencial generado por el campo magnético rota alrededor de la trampa a una cierta frecuencia (Potencial que Orbita en el Tiempo, TOP por sus siglas en inglés). Esta trampa tiene ventajas con respecto a otras utilizadas para confinar átomos fríos, por ejemplo la Cilíndrica[18], o la trampa Cuadrupolar[19]. Esta TOP ofrece una alta capacidad de confinamiento atómico, ya que es posible obtener densidades del espacio fase por 3 ordenes de magnitud superiores cualquier otra trampa antes utilizada. Las características que posee esta trampa son las siguientes: La intensidad del campo B_b generado por las bobinas es del orden de $B_b = 10$ G, un gradiente de campo $B'_q = 120\text{G/cm}$, la frecuencia angular ω_b a la que se operan las bobinas es de $\omega_b = 2\pi \times 7.5$ Hz. El potencial como función del tiempo está dado por

$$U(x, y, z, t) = \mu \left| (xB'_q + B_b \cos \omega_b t) \vec{x} + (yB'_q + B_b \sin \omega_b t) \vec{y} - 2zB'_q \vec{z} \right|. \quad (2.1)$$

En coordenadas cilíndricas se tendrá que

$$U_{TOP}(r, z) \simeq -\mu B_b - \frac{\mu B'_q}{4B_b} (r^2 + 8z^2) + \dots \quad (2.2)$$

Sin embargo, este dispositivo tiene un defecto, ya que cuando los átomos están muy cerca de la región donde B_b es 0, estos se pueden escapar de la trampa.

W. Ketterle [3] por su parte, para conseguir el BEC utilizó también una TOP pero con una modificación para evitar la pérdida de átomos, ya que agregó un potencial repulsivo y un haz láser azul (514 nm. y 3.5 W.) el cual también agregaba una fuerza repulsiva cerca de la región de campo magnético 0 con lo cuál prácticamente se “selló” el hoyo (de dimensiones micrométricas) por donde los átomos se escapaban de la trampa (región de la TOP donde al campo magnético es 0). Y con esta modificación de la TOP, Ketterle fue capaz de incrementar la densidad del espacio fase en 3 ordenes de magnitud respecto al experimento realizado por E. Cornell.

2.4. Colisiones atómicas a bajas temperaturas

En la sección 1.1, se concluyó que la Condensación de Bose-Einstein es posible para un gas ideal de Bose confinado en una trampa armónica en 2D, sin embargo, esto no ocurre para un gas ideal de Bose confinado en una trampa armónica en una dimensión, pues en este caso $n = 1$ y se tiene que la integral de la ecuación (1.15) diverge. La dinámica de un gas en la naturaleza es más complicada que la dinámica de un gas ideal sin interacción, es así el caso del reciente estudio de los gases ultrafríos para los cuales se les considera partículas con masa, carga, espín etc., y debido a esto pueden interactuar entre sí. Una forma aproximada de describir la evolución temporal de un sistema con estas características, consiste en considerar que se trata de un gas diluido, esto quiere decir que sólo son relevantes en la descripción dinámica del sistema las interacciones entre pares de partículas. Para el caso de los gases de Bose sabemos que su espín es entero y por tanto la dinámica a bajas temperaturas es diferente a un gas de Fermi restringido por el Principio de Exclusión de Pauli. Entonces veamos cómo interactúan las partículas del gas de Bose a bajas temperaturas. Así en esta sección estudiamos la dinámica de dos partículas que colisionan puede ser descrita por la dispersión de una por la otra en un potencial $V(\vec{r})$, el cual es esféricamente simétrico en el caso de átomos neutros, entonces $V(\vec{r}) = V(r)$. Con lo cual la ecuación de Schrödinger estacionaria para una partícula con masa reducida $m_r = m/2$, k número de onda y energía $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}$ es

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(r) \right) \psi_k(r) = E_k \psi_k(r), \quad (2.3)$$

cuya solución es una función asintótica, la cual es una superposición entre la onda plana incidente y la onda dispersada

$$\psi_k(r) \sim e^{ikz} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.4)$$

donde $f(k, \theta)$ es la amplitud de dispersión la cual depende únicamente de la energía de las partículas y del ángulo de dispersión θ i.e el ángulo relativo antes y después de la dispersión. La diferencial de la sección transversal σ se puede calcular a partir de la amplitud de dispersión como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta)|^2. \quad (2.5)$$

aquí $d\Omega$ es la diferencial de ángulo solido. Dada la simetría del problema se puede expandir a la función de onda incidente y la función de onda dispersada en ondas parciales a través de los polinomios de Legendre, esto nos lleva a la ecuación de Schrödinger unidimensional para las funciones parciales con un potencial efectivo

$$V_{ef}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_r r^2} + V(r), \quad (2.6)$$

de aquí vemos que aquellas ondas parciales que posean $l = 0$, el potencial V_{ef} se reduce al potencial $V(r)$ interatómico, mientras que para las restantes se agrega un barrera centrífuga. La sección transversal para cada onda parcial será

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2(\delta_l(k)), \quad (2.7)$$

donde δ_l es el cambio de fase, el cual en el límite para $k \rightarrow 0$ es

$$\delta_l(k) \propto k^{2l+1} \text{ mód } \pi. \quad (2.8)$$

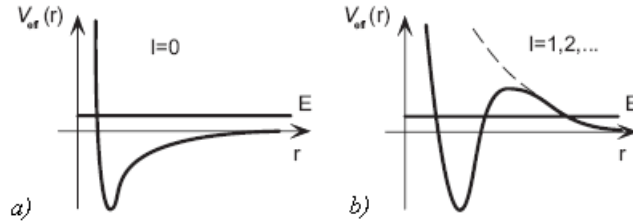


Fig. 2.5: Potencial efectivo para los casos para los cuales $l = 0$ y $l > 0$. a). El potencial efectivo es únicamente el potencial interatómico b). A demás del potencial interatómico las partículas sienten un barrido centrifugal $l(l+1)$ [20].

Así podemos ver que en el límite de bajas energías, la sección transversal para ondas parciales para las cuales $l = 0$ es $\sigma_l(k) \propto k^{4l}$ y a medida que $k \rightarrow 0$, $\sigma_l(k) \rightarrow 0$, con esto concluimos que en el límite de bajas energías sólo las ondas parciales con $l = 0$ contribuyen al valor de la sección transversal, a este régimen se le llama el *límite de la onda-s*, el cual fue mencionado en la sección anterior cuando se explicaba el proceso de enfriamiento por evaporación. Este régimen se caracteriza por poseer un amplitud de dispersión isotrópica. La sección transversal estará dada por

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_{l=0}(k) = 4\pi a^2, \quad (2.9)$$

De donde a es la longitud de dispersión y se define como

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \tan \frac{\delta_0(k)}{k}. \quad (2.10)$$

Este aparente “congelamiento” de las ondas parciales ($l > 0$) a energías suficientemente bajas se puede entender de la siguiente forma: Para aquellas ondas parciales con $l \neq 0$ los átomos que interaccionan entre sí, sienten además del potencial $V(r)$ una barrera centrífuga con una altura proporcional a l [20].

Por otro lado el límite de la onda-s también nos permite reemplazar al potencial $V(r)$ por un potencial efectivo de corto alcance que reproduce de manera correcta la longitud de dispersión el cual esta dado por

$$W(x, x') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(x - x'), \quad (2.11)$$

si $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ podemos escribir esta última expresión como

$$W(x, x') = g\delta(x - x'). \quad (2.12)$$

La cual es válida el límite de bajas energías y en la aproximación de Born[21]. Más adelante la ecuación (2.12) nos será de mucha utilidad cuando deduzcamos el Hamiltoniano efectivo para un gas de Bose con interacciones entre pares a través de un potencial de este tipo.

3. GAS DE BOSE A BAJAS TEMPERATURAS CON INTERACCIÓN ENTRE SUS PARTÍCULAS

En este capítulo deduciremos por medio del formalismo de la segunda cuantización el Hamiltoniano efectivo del gas de Bose con interacciones entre pares de partículas, esto considerando que dicha interacción puede aproximarse a través del potencial de contacto que se obtuvo en la última sección del capítulo anterior. Así el Hamiltoniano derivado es válido en general a muy bajas temperaturas. Es necesario aclarar que en este estudio, la temperatura del sistema no es una variable explícita, pues debido al tamaño del sistema es imposible determinar su temperatura, pero podemos decir que nos encontramos en el régimen de bajas temperaturas, ya que únicamente se consideran los tres niveles de más baja energía de un oscilador armónico en dos dimensiones.

3.1. *Hamiltoniano Efectivo de un gas de Bose confinado en una trampa armónica en 2D*

En esta sección se derivará el Hamiltoniano efectivo de un gas de Bose a muy bajas temperaturas, entonces para describir la dinámica de dicho sistema consideramos que se trata de un gas diluido, es decir sólo tomaremos en cuenta las interacciones entre pares de partículas. Usando el formalismo de la segunda cuantización, el Hamiltoniano que describe un sistema de bosones con interacción entre pares de partículas en dos dimensiones ¹ se llega a

$$\hat{H} = \int dr \hat{\Psi}^\dagger(r) (T(r) + V(r)) \hat{\Psi}(r) + \frac{1}{2} \int dr dr' \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}^\dagger(r') W(r, r') \hat{\Psi}(r') \hat{\Psi}(r), \quad (3.1)$$

de donde r es un vector de posición en dos dimensiones, $T(r)$ es el operador de energía cinética y $V(r)$ es el potencial externo que confina a los átomos, en este caso es el potencial armónico isotrópico en dos

¹ Cabe hacer notar que sólo utilizamos el Hamiltoniano en dos dimensiones, pero en general es válido para n dimensiones como se muestra en [22]

dimensiones dado por

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \quad (3.2)$$

y $W(r, r')$ es el potencial de interacción entre pares de partículas como se indicó en la sección anterior (ver ecuación (2.12)). Los operadores de campo $\hat{\Psi}^\dagger(r)$ y $\hat{\Psi}(r)$ pueden ser escritos en términos de cualquier conjunto completo de estados de una sola partícula como

$$\hat{\Psi}^\dagger(r) = \sum_n \phi_n^*(r) a_n^\dagger \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}(r) = \sum_n \phi_n(r) a_n, \quad (3.3)$$

aquí a_n^\dagger y a_n representan los operadores de creación y aniquilación, los cuales cumplen con las reglas usuales de conmutación para bosones $[a_n, a_l^\dagger] = \delta_{n,l}$, $\phi_n(r)$ es la función de onda de una sola partícula, $\phi_n^*(r)$ es su correspondiente complejo conjugado. En este caso es conveniente usar el conjunto completo de eigenestados del oscilador armónico isotrópico en 2D.

$$\mathfrak{B} = \left\{ |\phi_{n_x n_y}\rangle \mid \phi_{n_x n_y} = A_{n_x n_y} h_{n_x}(x) h_{n_y}(y) e^{-(x^2+y^2)/2}, n_x, n_y \in \mathbb{N} \cup 0 \right\}, \quad (3.4)$$

donde $\beta^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$ y $A_{n_x n_y}$ es una constante de normalización. Es fácil notar que las funciones de onda asociadas a dichos eigenestados son

$$\phi_{n_x n_y}(x, y) = A_{n_x n_y} h_{n_x}(\beta x) h_{n_y}(\beta y) e^{-\beta^2(x^2+y^2)/2}, \quad (3.5)$$

donde $h_{n_x}(\beta x)$ y $h_{n_y}(\beta y)$ son los polinomios de Hermite en la coordenada x y en la coordenada y respectivamente. Cabe mencionar que sólo consideramos a los tres estados de más baja energía $n_x = 0, 1, 2$, $n_y = 0, 1, 2$, ya que supondremos que sólo estos estados pueden estar ocupados (BEC a muy bajas temperaturas).

Haciendo $K = T + V$, sustituyendo la ecuación (3.3) en la ecuación (3.1) y usando el hecho de que

$$\int dr \phi_n^*(r) K \phi_m(r) = \langle \phi_n | K | \phi_m \rangle \quad \text{y} \quad \int dr \phi_n^*(r) \phi_m^*(r') K \phi_k(r) \phi_l(r') = \langle \phi_n \phi_m | K | \phi_k \phi_l \rangle, \quad (3.6)$$

se puede reescribir el Hamiltoniano efectivo en una forma más compacta i.e.,

$$\hat{H} = \sum_{\bar{n}\bar{m}} a_{\bar{n}}^\dagger \langle \phi_{\bar{n}} | K | \phi_{\bar{m}} \rangle a_{\bar{m}} + \frac{1}{2} \sum_{nmkl} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger \langle \phi_{\bar{n}} \phi_{\bar{m}} | W(r, r') | \phi_{\bar{k}} \phi_{\bar{l}} \rangle a_{\bar{l}} a_{\bar{k}}. \quad (3.7)$$

Esta ecuación podemos escribirla como la suma del Hamiltoniano sin interacción \hat{H}_0 y el Hamiltoniano de interacción entre pares de partículas \hat{H}_1

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (3.8)$$

de donde

$$\hat{H}_0 = \sum_{\bar{n}\bar{m}} a_{\bar{n}}^\dagger \langle \phi_{\bar{n}} | K | \phi_{\bar{m}} \rangle a_{\bar{m}} \quad \text{y} \quad \hat{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\bar{n}\bar{m}\bar{k}\bar{l}} \langle \phi_{\bar{n}} \phi_{\bar{m}} | W(r, r') | \phi_{\bar{k}} \phi_{\bar{l}} \rangle a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{l}} a_{\bar{k}}. \quad (3.9)$$

Ahora nos interesa saber cómo es la dinámica de un gas de Bose con tales características, entonces debemos obtener la representación matricial de cada uno de los operadores en la ecuación (3.7) en la base (3.4).

De la siguiente igualdad

$$\langle \phi_n | K | \phi_m \rangle = \langle \phi_{n_x n_y} | K | \phi_{m_x m_y} \rangle, \quad (3.10)$$

y como $|\phi_{n_x n_y}\rangle = |\phi_{n_x}\rangle |\phi_{n_y}\rangle$ y $|\phi_{m_x m_y}\rangle = |\phi_{m_x}\rangle |\phi_{m_y}\rangle$, por definición de producto tensorial, se tiene que $|\phi_{n_x}\rangle \in E_x$ y $|\phi_{n_y}\rangle \in E_y$ de donde E_x y E_y son dos espacios de estados tales que $E_x \cap E_y = \emptyset$. La acción de K sobre un eigenestado

$$K |\phi_{m_x m_y}\rangle = (m_x + m_y + 1) |\phi_{m_x}\rangle |\phi_{m_y}\rangle, \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \langle \phi_{n_x n_y} | K | \phi_{m_x m_y} \rangle = (m_x + m_y + 1) \delta_{n_x n_y} \delta_{m_x m_y}. \quad (3.12)$$

Sea $|\bar{n}\rangle = |\phi_{\bar{n}}\rangle = |\phi_{n_x n_y}\rangle$. Entonces la representación de matricial de H_0 en la base (3.4) esta dada por

$$\hat{H}_0 = \sum_{\bar{n}\bar{m}} a_{\bar{n}}^\dagger \langle \bar{n} | K | \bar{m} \rangle a_{\bar{m}} = \sum_{\bar{n}\bar{m}} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}} (m_x + m_y + 1) \delta_{n_x m_x} \delta_{n_y m_y}, \quad (3.13)$$

para $n = m$

$$\hat{H}_0 = \sum_{\bar{n}} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{n}} (n_x + n_y + 1). \quad (3.14)$$

Para \hat{H}_1 tendremos

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\bar{n}\bar{m}\bar{k}\bar{l}} \langle \bar{n}\bar{m} | W(r, r') | \bar{k}\bar{l} \rangle a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{l}} a_{\bar{k}}, \quad (3.15)$$

de donde

$$\langle \bar{n}\bar{m} | W(r, r') | \bar{k}\bar{l} \rangle = g \underbrace{\int \phi_{n_x}(x) \phi_{m_x}(x) \phi_{k_x}(x) \phi_{l_x}(x)}_{W_{n_x m_x l_x k_x}} \underbrace{\int \phi_{n_y}(y) \phi_{m_y}(y) \phi_{k_y}(y) \phi_{l_y}(y)}_{W_{n_y m_y l_y k_y}}, \quad (3.16)$$

g es la magnitud de la interacción entre pares de partículas. Por lo tanto el Hamiltoniano total del sistema en la base (3.4) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\bar{n}\bar{n}} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{n}} (n_x + n_y + 1) + \frac{1}{2} \sum_{\bar{n}\bar{m}\bar{k}\bar{l}} \langle \bar{n}\bar{m} | W(r, r') | \bar{k}\bar{l} \rangle a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{l}} a_{\bar{k}} \\ \Rightarrow \hat{H} &= \sum_{\bar{n}\bar{m}} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}} (n_x + n_y + 1) + \frac{g}{2} \sum_{\bar{n}\bar{m}\bar{k}\bar{l}} W_{n_x m_x l_x k_x} W_{n_y m_y l_y k_y} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{l}} a_{\bar{k}}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

De nuevo hacemos énfasis que en nuestro análisis del condensado de Bose-Einstein en 2D confinado en una trampa armónica sólo consideraremos los estados de menor energía ya que $\varepsilon_{\bar{n}} = (n_x + n_y + 1)$, $n_x + n_y = \bar{n}$. Así, en un oscilador en dos dimensiones tendremos que para $E = 1$, $E = 2$ y $E = 3$ existen en total 6 posibles estados (ver Fig. 3.1), de los cuales para $E = 2$ se tienen dos estados con la misma energía y para $E = 3$ se tiene tres estados con la misma energía.

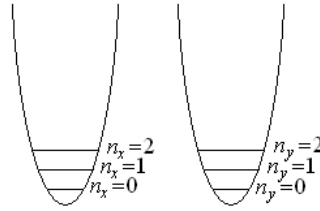


Fig. 3.1: Oscilador armónico en la coordenada x y en la coordenada y . El número total de estados para un oscilador en dos dimensiones es 6, debido a la degeneración ($g_n = n + 1$), el primer estado excitado posee dos estados de igual energía $\{(0, 1), (1, 0)\}$ y el tercer estado posee tres estados de igual energía $\{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

El grado de degeneración para un estado con energía ε_n es $g_n = n + 1$. Y todos los posibles valores de (n_x, n_y) son:

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}.\quad (3.18)$$

Con esto en cuenta entonces hacemos la siguiente asignación para los números de ocupación

Con estas consideraciones reescribimos el Hamiltoniano del sistema como

$$\hat{H} = \sum_{\bar{n}=1}^6 a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{n}} \varepsilon_{\bar{n}} + \frac{1}{2} \sum_{\bar{n}, \bar{m}, \bar{k}, \bar{l}=1}^6 W_{n_x m_x l_x k_x} W_{n_y m_y l_y k_y} a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{l}} a_{\bar{k}}.\quad (3.19)$$

Ahora supongamos que queremos saber de cuantas formas podemos acomodar N partículas en cada uno de los 6 posibles estados. Este problema es equivalente a calcular el número de formas en las que se puede acomodar N objetos en Γ número de cajas. Este cálculo podemos hacerlo a través de la expresión

(n_x, n_y)	Estado	$\phi_{n_x}(x)$	$\phi_{n_y}(y)$
(0, 0)	1	$\phi_0(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta^2 x^2/2}$	$\phi_0(y) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta^2 y^2/2}$
(0, 1)	2	$\phi_0(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta^2 x^2/2}$	$\phi_1(y) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \beta^{3/2} y e^{-\beta^2 y^2/2}$
(1, 0)	3	$\phi_1(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \beta^{3/2} x e^{-\beta^2 x^2/2}$	$\phi_0(y) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta^2 y^2/2}$
(0, 2)	4	$\phi_0(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta^2 x^2/2}$	$\phi_2(y) = \left(\frac{\beta}{4\pi}\right)^{1/4} [2\beta^2 y^2 - 1] e^{-\beta^2 y^2/2}$
(1, 1)	5	$\phi_1(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \beta^{3/2} x e^{-\beta^2 x^2/2}$	$\phi_1(y) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \beta^{3/2} y e^{-\beta^2 y^2/2}$
(2, 0)	6	$\phi_2(x) = \left(\frac{\beta}{4\pi}\right)^{1/4} [2\beta^2 x^2 - 1] e^{-\beta^2 x^2/2}$	$\phi_0(y) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta^2 y^2/2}$

Tab. 3.1: Cada uno de los 6 estados posibles a los cuales se le asigna una etiqueta que nos servirá para referirnos a este estado, en las dos columnas del lado derecho tenemos la función de onda a la cual corresponden tanto en el eje x como en el eje y respectivamente.

$$W = \binom{\Gamma + N - 1}{N} = \frac{(\Gamma + N - 1)!}{(\Gamma - 1)!N!}. \quad (3.20)$$

Con esto obtendremos un conjunto $\{R\}$ de formas posibles. Pero estos a su vez, también son los posibles vectores base en el espacio de Fock [22] (R también será la dimensión de la base), $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$, lo cual significa que hay N_1 partículas en el estado 1, N_2 partículas en el estado 2, etc. Utilizaremos esta base para obtener la dinámica del gas de Bose confinado en la trampa armónica de 2D. Por ejemplo, la base (todos los posibles estados $|N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$) para un sistema compuesto por 2 partículas será

$$\begin{aligned} & \{|0, 0, 0, 0, 0, 2\rangle, |0, 0, 0, 0, 1, 1\rangle, |0, 0, 0, 0, 2, 0\rangle, |0, 0, 0, 1, 0, 1\rangle, |0, 0, 0, 1, 1, 0\rangle, |0, 0, 0, 2, 0, 0\rangle, |0, 0, 1, 0, 0, 1\rangle, \\ & |0, 0, 1, 0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1, 1, 0, 0\rangle, |0, 0, 2, 0, 0, 0\rangle, |0, 1, 0, 0, 0, 1\rangle, |0, 1, 0, 0, 1, 0\rangle, |0, 1, 0, 1, 0, 0\rangle, |0, 1, 1, 0, 0, 0\rangle, \\ & |0, 2, 0, 0, 0, 0\rangle, |1, 0, 0, 0, 0, 1\rangle, |1, 0, 0, 0, 1, 0\rangle, |1, 0, 0, 1, 0, 0\rangle, |1, 0, 1, 0, 0, 0\rangle, |1, 1, 0, 0, 0, 0\rangle, |2, 0, 0, 0, 0, 0\rangle\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Entonces tendremos que la representación de \hat{H} para un sistema de N partículas en la base número de ocupación [22] dada por

$$\{|N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle\} = \{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}, \quad (3.22)$$

se tendrá que

$$\langle v_m | \hat{H} | v_n \rangle = \hat{H}_{mn} = \begin{matrix} & \hat{H} & |v_1\rangle & |v_2\rangle & \cdots & |v_n\rangle \\ \langle v_1| & \left(\begin{array}{cccc} \langle v_1 | \hat{H} | v_1 \rangle & \langle v_1 | \hat{H} | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1 | \hat{H} | v_m \rangle \\ \langle v_2 | \hat{H} | v_1 \rangle & \langle v_2 | \hat{H} | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2 | \hat{H} | v_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m | \hat{H} | v_1 \rangle & \langle v_m | \hat{H} | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_m | \hat{H} | v_n \rangle \end{array} \right) & & \end{matrix} \cdot \quad (3.23)$$

Así para $|v_m\rangle = |N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$, $|v_n\rangle = |N'_1, N'_2, N'_3, N'_4, N'_5, N'_6\rangle$ arbitrarios y $N_1 \dots N_6, N'_1 \dots N'_6$, pueden tomar cualquier valor entre 0 y N pero con la restricción $\sum_{i=1}^6 N_i = N$, de donde N es el número total de partículas que conforman al gas de Bosones

$$\begin{aligned} \hat{H}_{mn} = & \varepsilon_{\bar{n}} \langle N'_1, N'_2, N'_3, N'_4, N'_5, N'_6 | \sum_{\bar{n}=1}^6 a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{n}} | N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle, \\ & + \frac{g}{2} W_{n_x m_x l_x k_x} W_{n_y m_y l_y k_y} \langle N'_1, N'_2, N'_3, N'_4, N'_5, N'_6 | \sum_{\bar{n}, \bar{m}, \bar{k}, \bar{l}=1}^6 a_{\bar{n}}^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{l}} a_{\bar{k}} | N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A partir de esto, nos damos cuenta que \hat{H}_1 (el segundo miembro del lado derecho de la ecuación anterior) no es una matriz diagonal como en el caso de \hat{H}_0 , esto es importante, ya que aquellos elementos H_{mn} fuera de la diagonal harán posible las transiciones que nos llevarán al estado de equilibrio.

Como ya hemos deducido el Hamiltoniano efectivo del sistema, entonces podemos resolver de manera numérica a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el gas de Bose a bajas temperaturas. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (3.25)$$

A través del método de diferencias finitas a segundo orden encontramos que dada una condición inicial (i.e un estado inicial $|\psi(0)\rangle$), la solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para un cierto intervalo de tiempo Δt es

$$|\psi(\Delta t)\rangle = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle \Delta t. \quad (3.26)$$

Entonces la solución a la ecuación de Schrödinger para un tiempo (en unidades arbitrarias) $t + \Delta t$ es

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi(t - \Delta t)\rangle - \frac{2i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle \Delta t. \quad (3.27)$$

Con estos resultados ahora sí podemos estudiar la dinámica del gas de Bose a muy bajas temperaturas. Entonces analizaremos cómo es la evolución temporal de algunos valores esperados, como por ejemplo la población de los estados $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ a partir de un estado inicial.

Definamos los operadores de número para cada uno de estos 6 estados como

$$\hat{N}_i = \frac{1}{N} a_i^\dagger a_i, \quad (3.28)$$

con $i = 1, \dots, 6$ y N es de nueva cuenta el número total de partículas en el sistema y que consideramos constante en el tiempo. El valor esperado de cada uno de estos operadores para una condición inicial $|\psi(0)\rangle = |N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$, $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ arbitrarios y considerando que $|\psi(0)\rangle$ no sea un eigenestado de \hat{H} será

$$\langle \psi(0) | \hat{N}_i | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \frac{1}{N} a_i^\dagger a_i | \psi(0) \rangle, \quad (3.29)$$

en esta base nos damos cuenta que la matriz $(\hat{N}_i)_{nm}$ es diagonal. Así la evolución temporal del valor esperado será

$$\langle \psi(t) | \hat{N}_i | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \frac{1}{N} a_i^\dagger a_i | \psi(t) \rangle. \quad (3.30)$$

Esta ecuación nos permitirá estudiar el gas de Bose con interacciones entre sus partículas y podremos estudiar como varía la poblaciones para cada uno de los seis estados como función de la variable adimensional de tiempo t como se vera en el siguiente capítulo.

4. DINÁMICA DE LA POBLACIÓN DE LOS ESTADOS DE ENERGÍA MÁS BAJOS DE UN GAS DE BOSE CONFINADO EN UNA TRAMPA ARMÓNICA EN 2D

Para finalizar este estudio, en este capítulo se presentan los resultados de nuestro análisis y discusiones, así como las perspectivas a futuro.

Se analizó la evolución temporal de la formación de un Condensado de Bose-Einstein confinado en una trampa armónica en 2D. En particular se estudió cómo alcanza el equilibrio un sistema de bosones con interacción a muy bajas temperaturas confinado en un potencial armónico isotrópico en dos dimensiones. Con esta suposición por lo tanto se tiene la condición de que solamente los estados con menor energía pueden estar ocupados. Se utilizó el método de diferencias finitas a segundo orden descrito en el capítulo 3 para estudiar la dinámica de las poblaciones del estado base y de los siguientes 5 estados excitados de un oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones. Durante el cálculo numérico se aseguró que la normalización del vector de estado tuviera una precisión de al menos 1 parte en 10^4 . Para este análisis se consideraron sistemas formados por 10, 14 y 15 partículas sujetos a diferentes condiciones iniciales y diferente magnitud de interacción entre sus partículas. Los valores considerados de g se eligieron siempre positivos, es decir las partículas tienen interacción efectiva repulsiva.

4.1. Resultados y Discusión

En esta sección se enumeran los casos que se estudiaron para sistemas formados por 10, 14 y 15. Las razones por las cuáles de decidió el número de partículas se detallarán en el transcurso de esta sección.

Para el análisis correspondiente a $N = 10$ se considerarán los siguientes casos:

1. $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 5, 5, 0, 0\rangle$, $g = 0.4$
2. $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 10\rangle$, $g = 1.1$
1. Como se establece arriba, la condición inicial está dada por el estado $|\psi(0)\rangle = |N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$

de donde $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 5, N_4 = 5, N_5 = 0, N_6 = 0$, es decir de acuerdo con la Tabla 3.1 corresponde a los niveles $(n_x, n_y) = (1, 0), (n_x, n_y) = (0, 2)$, sus correspondientes energías son $E_{10} = 2$ y $E_{02} = 3$ respectivamente. Utilizando las ecuaciones (3.28) y (3.30) se determinará numéricamente la evolución temporal de las poblaciones en cada uno de los estados. Como hemos señalado anteriormente el parámetro usado para la interacción entre pares de partículas es $g = 0.4$. La Fig.4.1

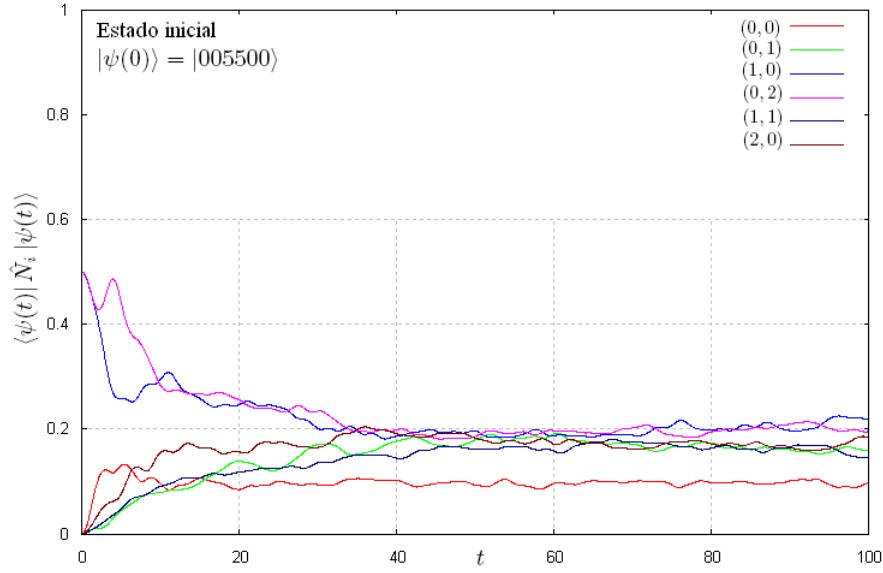


Fig. 4.1: Valor esperado del operador de número N_3 y N_4 como función del tiempo t . La población inicial en los estados 3 y 4 es de 5 partículas, $g = 0.4$ para $N = 10$.

nos muestra la evolución temporal de las poblaciones en los todos lo estados. Los estados 3 y 4 que inicialmente estaban poblados con el 50 % de las partículas del total del sistema; dichas poblaciones se estabilizaron en una población de aproximadamente 20 % del total de partículas del sistema para tiempos mayores que 1) $t = 35$. En el caso de la población del estado base (i.e el estado , crece hasta alcanzar el 10 % de la población total del sistema a partir de $t = 25$, esta se estabiliza y en promedio se mantiene constante ya que las fluctuaciones son muy pequeñas. Por otro lado las poblaciones en los estados 2, 5, 6, crecen tan rápido como las poblaciones en los estados 3 y 4 decrecen en forma análoga, y se estabilizan para tiempos mayores que $t = 40$ ocupando en promedio el 17 % de la población total. Nos podemos dar cuenta que la magnitud de la interacción g es lo suficiente para

que aproximadamente un 10 % de las partículas del sistema pueblen el estado de menor energía. Es importante señalar que este sistema también se estudio para una magnitud de $g = 0$, en este caso se obtuvo el comportamiento semejante al de un gas ideal, ya que sí se comienza con una condición inicial, el valor esperado de los operadores de número para N_3 y N_4 se mantienen constantes para todo t es decir no se tienen fluctuación en el tiempo para cualquiera de los estados. En nuestro análisis del sistema de 10 partículas nos damos cuenta que las poblaciones fluctúan con el tiempo, pero estas son de mucho menor magnitud que en el inicio, ya que el sistema se estabiliza después de cierto tiempo t y por consiguiente ha logrado un rethermalización debido a la interacción entre sus partículas. Este sistema también se estudio para magnitudes de g muy inferiores a 0.4, y para el cual nos dimos cuenta que se necesitaba de un mayor tiempo de estudio si se desea alcanzar el equilibrio. Por otro lado si la magnitud de la interacción era superior a $g = 0.4$ las poblaciones de cada uno de los estados del sistema alcanza más rápidamente el equilibrio ($t \sim 1$) pero las fluctuaciones son considerablemente mayores y no disminuyen para algún tiempo t . Esto nos dice que debido a la magnitud de la interacción y al número de partículas en el sistema, se tienen un mayor número de transiciones de un estado a otro y con lo cual el número de fluctuaciones se mantendrán constantes durante todo el tiempo de estudio.

2. La condición inicial en este caso está dada por el estado $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 10\rangle$ de acuerdo con la Tabla 3.1, corresponde al nivel $(n_x, n_y) = (2, 0)$, su correspondiente energía es $E_{20} = 3$. En el presente análisis el parámetro usado para la interacción entre pares de partículas es de $g = 1.1$.

En la Fig. 4.2 observamos la evolución temporal de la población del estado 6 y se observa cómo decrece muy rápidamente hasta alcanzar el equilibrio una población de aproximadamente el 17 % del total del sistema, en seguida crece y oscila entre el 24 %. Para los estados 1, 2, 3, sus poblaciones se incrementan hasta alcanzar un promedio del 12 % en $t = 6$. Se puede observar que las fluctuaciones en la poblaciones de cada uno de estos estados están alrededor de dicho porcentaje para $t > 6$. Para el estado 4 se tiene fluctuaciones más pronunciadas comparadas con los dos estados de menor energía, y estas se mantienen en un promedio del 16 %. Para los estados 5, 6 las fluctuaciones son semejantes al las fluctuaciones del estado 4, pero estas se mantienen en un promedio de aproximadamente el 24 % de la población total del sistema y las cuales se mantiene hasta finalizar el tiempo de estudio del sistema. Es importantes resaltar como se ve afectada la evolución temporal para cada una de las poblaciones cuando cambiamos la condición inicial y la magnitud de la interacción entre pares

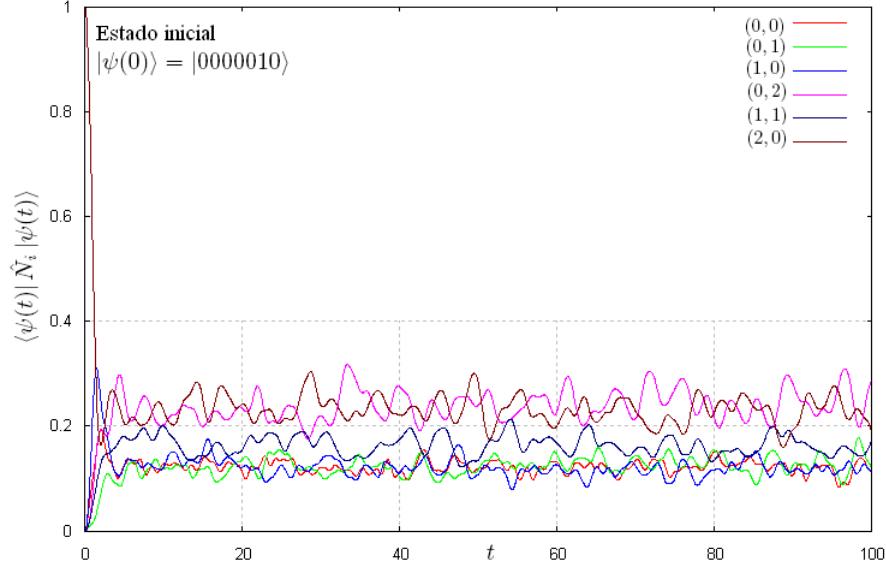


Fig. 4.2: Valor esperado del operador de número N_6 como función del tiempo t . La población inicial en el estado 6 es de 10 partículas, $g = 1.1$ para $N = 10$.

de partículas, ya que se puede observar como el sistema se estabiliza para un tiempo t mucho menor que en el caso anterior, pero podemos notar que un mayor número de transiciones para cada uno de los estados e inclusive el número promedio de partículas en el estado base es 7% superior al caso anterior. Este sistema nos servirá como base para el análisis de sistemas con mayor número de partículas, puesto que los dos estados de menor energía nos muestran un menor número de fluctuaciones y nos da una idea de cómo hacer que un sistema con pocas partículas pueda alcanzar el estado estacionario en poco tiempo.

Para el análisis correspondiente a $N = 14$ se considera el caso para el cual la condición inicial está dada por el estado $|\psi(0)\rangle = |0, 7, 0, 7, 0, 0\rangle$ de acuerdo con la Tabla 3.1 corresponde a los niveles $(n_x, n_y) = (0, 1)$, $(n_x, n_y) = (0, 2)$, sus correspondientes energías son $E_{01} = 2$ y $E_{02} = 3$ respectivamente. Se analizó numéricamente la evolución temporal de las poblaciones en cada uno de los estados. El parámetro usado para la interacción entre pares de partículas es de $g = 0,6$.

En el Fig.4.3, nos podemos dar cuenta que el sistema se estabiliza a partir de $t = 8$, es notable las diferencias en la evolución temporal de las poblaciones para cada uno de los estados con respecto a

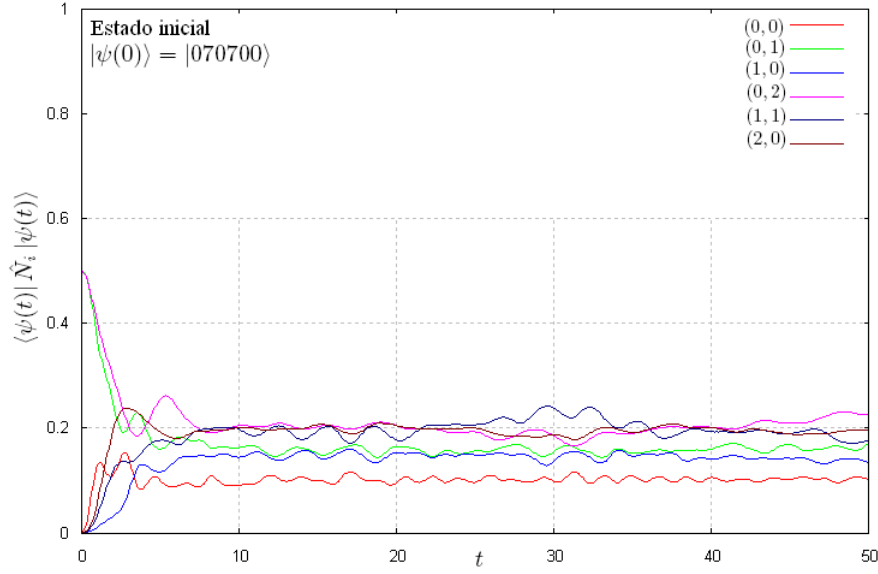


Fig. 4.3: Valor esperado del operador de número N_2 y N_4 como función del tiempo t . La población inicial en los estados 2 y 4 es de 7 partículas, $g=0.6$ para $N=14$.

$N=10$ (caso 1), pues en este caso se reduce considerablemente el tiempo en que el sistema alcanza el equilibrio. La población en el estado base se mantiene en aproximadamente el 10%, para el estado 2 ahora la población se mantiene alrededor del 16%, para el estado 3 se mantiene alrededor del 15%, para los estados 4, 5 y 6 la población se mantiene en el 20%. Este resultado es consecuencia de haber incrementado la magnitud de g y el número de partículas. De igual forma notamos que las transiciones para cada uno de los estados se reduce de manera considerable y estas se hacen casi 0 para un tiempo mayor que $t=8$ donde se ha alcanzado el estado estacionario. Otra forma de alcanzar el equilibrio depende de la condición inicial como se verá para un sistema formado por 15 partículas.

Para el análisis correspondiente a $N=15$ se considerarán los siguientes casos:

1. $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 15\rangle, g=1.2$
 2. $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 15\rangle, g=1.5$
1. La condición inicial en este caso está dada por el estado $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 15\rangle$ de acuerdo con la Tabla 3.1, corresponde al nivel $(n_x, n_y) = (2, 0)$, su correspondientes energía es $E_{20} = 3$. En el

presente análisis el parámetro usado para la interacción entre pares de partículas es de $g = 1.2$. En el Fig.4.4 podemos ver como la población de los estados 1, 2, 3 y 5 se estabiliza en

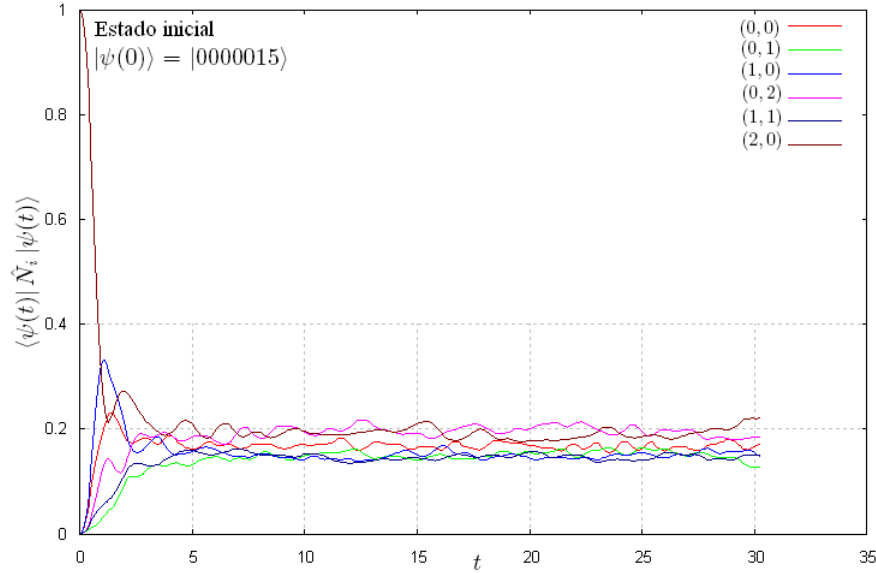


Fig. 4.4: Valor esperado del operador de número N_6 como función del tiempo t . La población inicial en el estado 6 es de 15 partículas, $g = 1.2$ para $N = 15$.

aproximadamente el 16% de la población total de partículas del sistema, para los estados 4 y 6 se estabilizan en aproximadamente el 20% de la total del partículas en el sistema. Podemos observar las diferencias significativas que existen tanto en el tiempo de relajación del sistema como el número de fluctuaciones de los estados respecto al caso de $N = 10$, pues aquí el sistema se equilibra a $t = 7$, y esto no solamente para algunos estados, estos sucede en conjunto. El porcentaje de partículas para los estados 1, 2 y 3 es el mismo que en el caso de $N = 10$, pero podemos ver que el estado N_5 ahora se une a este conjunto al equilibrarse a $t = 7$ al mismo porcentaje del total de partículas del sistema. Es importante mencionar que el sistema únicamente se estudió para un tiempo máximo de $t = 30$ porque vemos que este sistema alcanza el estado estacionario (excepto por pequeñas fluctuaciones de aproximadamente el 2%) y consideramos que así se mantendrá para todo $t > 30$. Con respecto al caso de $N = 14$, vemos que aquí a pesar de que la magnitud de g es mayor, las fluctuaciones son mínimas y esto se debe a que el sistema se estabiliza más rápidamente con un valor de g apropiado

de tal forma que las partículas sufran menos transiciones de un estado a otro y se pueda obtener el estado estacionario.

- La condición inicial en este caso está dada por el estado $|\psi(0)\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 15\rangle$ de acuerdo con la Tabla 3.1, corresponde al nivel $(n_x, n_y) = (2, 0)$, su correspondientes energía es $E_{20} = 3$. En el presente análisis, el parámetro usado para la interacción entre pares de partículas es de $g = 1.5$.

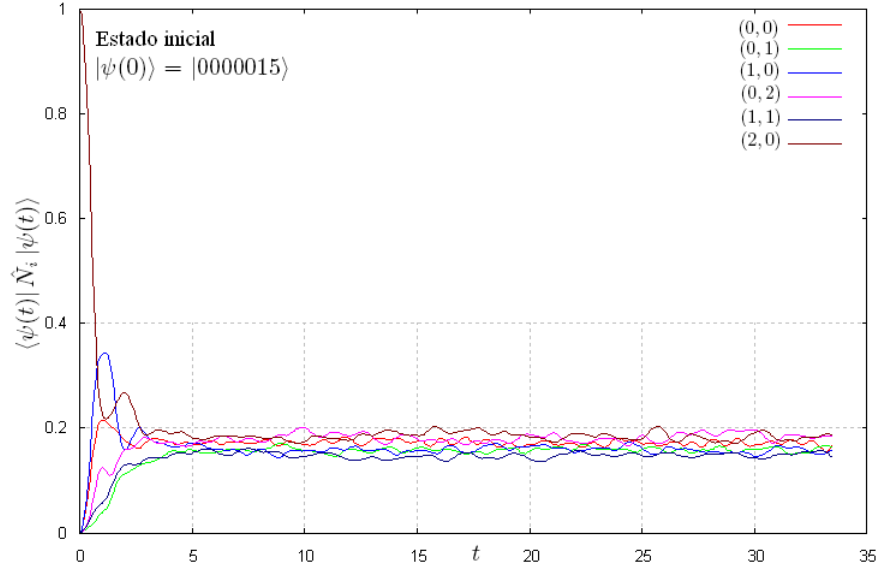


Fig. 4.5: Valor esperado del operador de número N_6 como función del tiempo t . La población inicial en el estado 6 es de 15 partículas, $g = 1.5$ para $N = 15$.

En la Fig.4.4 es fácilmente apreciable que el sistema alcanza el equilibrio para $t < 6$. Nuevamente vemos que a medida que se incrementa la magnitud de g , el tiempo que le toma al sistema alcanzar el equilibrio se reduce. Pero podemos observar algunas diferencias con respecto al caso anterior, pues aquí todos los estados se equilibran con aproximadamente el 17% del total de partículas del sistema. En el caso para $N = 10$ observamos como los estados 1, 2 y 3 se estabilizaban alrededor del 16% y en el caso anterior vimos como el estado 5 se agregó a este conjunto. Aquí podemos observar como cada uno de los estados se estabilizan manera similar pero ahora alrededor del 17% y esto ocurre para el mismo tiempo t . Esto nos brinda una idea de como será el comportamiento para un sistema con un número mayor de partículas y una magnitud de g apropiada para permitir

las transiciones entre los estados antes de alcanzar el equilibrio, de tal forma que estas tiendan a 0 a medida que el sistema evoluciona y se pueda lograr el estado estacionario en el cual todo el sistema haya alcanzado un estado de menor energía.

4.2. Conclusiones

En conclusión en este trabajo se ha estudiado la dinámica de un gas de Bose, confinado en un potencial armónico bidimensional e isotrópico. En primer lugar se estudió la condensación de Bose-Einstein confinado en un potencial armónico bidimensional. A través del método estándar de la Mecánica Estadística derivamos las cantidades termodinámicas, en particular los valores de \bar{N} , \bar{E} y T_c . Enseguida se estudió al sistema considerando que se trataba de un gas diluido, de tal forma que sólo las interacciones entre pares de partículas fueron relevantes para su descripción dinámica; agregamos un potencial de interacción el cual es válido en el límite de bajas energías y en la aproximación de Born. Usando el formalismo de la segunda cuantización deducimos el Hamiltoniano efectivo del sistema. Encontramos que este posee términos diagonales como consecuencia de haber considerado como base a los estados de oscilador armónico, y términos de interacción no diagonales. Utilizando la representación de Fock, este Hamiltoniano se escribió en una base adecuada para resolver numéricamente la ecuación Schrödinger dependiente del tiempo para una condición inicial dada. Esta condición nos permitió en cada caso establecer la población al tiempo $t = 0$. Un vez que se obtuvo la solución a la ecuación de Schrödinger se pudo calcular el promedio temporal de las poblaciones en cada estado, es decir se estudio la evolución temporal del sistema. Todos los casos estudiados se especificaron en la sección anterior.

En cada uno de estos casos estudiados, se observó que el papel de N y la magnitud de la interacción g son muy importantes, ya que ambos determinan la dinámica del sistema. Se excluyeron los resultados para sistemas formados por un número de partículas menor a 10 debido a que la interacción entre partículas no permiten que el número de fluctuaciones durante todo el tiempo de estudio del sistema disminuyan, y esto es lógico pues a menor número de partículas, el número de fluctuaciones aumenta. Es importante señalar que con estos sistemas observamos que a medida que se incrementa la magnitud de la interacción g se obtenía que el sistema se estabilizaba para un tiempo t muy corto después de comenzar la evolución ($t < 1$), además las fluctuaciones sucedían a intervalos de tiempo más cortos. De las gráficas anteriores es posible notar la diferencia en la evolución temporal para las poblaciones de 10, 14 y 15 partículas, pues el tamaño finito del sistema es un obstáculo para que el número de fluctuaciones

se reduzcan y se alcance el estado estacionario. Las condiciones para alcanzar el equilibrio no fueron las mismas para todos los casos, por ejemplo si asignamos un valor de g al sistema partiendo de la condición inicial en la que todas las partículas comienzan en N_6 y se alcanza el equilibrio en cierto t , el valor de g partiendo de un condición inicial en la que las partículas están distribuidas de manera simétrica (para un valor de N par) en algún entre 1 y 6 puede ser menor. Esto se puede explicar ya que para ciertas condiciones iniciales, se debe tener un valor de $\epsilon_n - \epsilon_{n-1} \approx g$ para que sean posibles las transiciones de un estado a otro. Por ejemplo es fácil ver esta condición cuando $g = 0$ donde no hay interacción entre partículas, las poblaciones del estados permanecen en el estado inicial $|\psi(0)\rangle$, en cambio cuando se utiliza un valor muy grande para g la interacción provoca mayor fluctuación en las poblaciones de cada uno de los estados y es posible ver mayor transición entre estados, y por supuesto dichas transiciones son notablemente mayores entre estados con la misma energía (i.e debido a la degeneración). Una pregunta que podría hacerse es ¿Cuál es la temperatura del sistema?, esta pregunta no tendría sentido para el sistema que se esta considerando, ya que al tratar con número muy pequeño de partículas, no es posible definir una temperatura para el sistema, pero podemos concluir que el sistema llega a un estado de menor energía como resultado de las interacciones entre sus partículas, por ejemplo el valor esperado de la energía cuando el número de partículas del sistema es $N = 10$ y las condiciones $|\psi(0)\rangle = |005500\rangle$, $g = 0.4$ es $\langle \psi(t) | E | \psi(t) \rangle = 28.05$, y por supuesto esta crece a medida que se aumenta el número de partículas al sistema.

En este trabajo únicamente se utilizó un sistema de hasta 15 partículas debido a las limitaciones computacionales que actualmente se tienen, ya que a medida que se aumenta el número de partículas, el Hamiltoniano H_{nn} crece en dimensiones de $R \times R$, de donde R es el tamaño de la base en el espacio de Fock, lo cual implica un enorme incremento en el tiempo de cálculo. Sin embargo, se está viendo la posibilidad de aumentar la eficiencia del programa utilizado para calcular la evolución temporal de cada uno de los estados e incluso utilizar equipos de computo con capacidad muy superior a las utilizadas en este estudio y con esto será posible incrementar el número de partículas del sistema. Otra característica importante es que este estudio se puede extender a 3D y un número mayor de estados, así como estudiar la dinámica del gas de Bose en potenciales armónicos anisotrópicos de 2D y 3D.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. N. Bose, *Z. Phys* ,**26** (1924)178 con traducción al Inglés en, *Am. J. of Phys*, **44**(1976) 11.
- [2] M. H. Anderson, J. R. Esher, M. R. Matthews, C. E. Weiman and E.A. Cornell, *Science*,**269** (1995) 198.
- [3] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3969.
- [4] D. J. Wineland, R. L. Drullinger, and F. L. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 1639.
- [5] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould and H. J. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 169.
- [6] A. L. Migdall, J. V. Prodan, W. D. Phillips, T. H. Bergeman, and J. H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1988) 2596.
- [7] N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg, D. Kleppner, T. J. Greytak, H. F. Hess and G. P. Kochanski, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 935.
- [8] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii and Sandro Stringari., *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, *Rev. of Modern Physics.* **71** (1999) 3.
- [9] Pathria, R. K., *Statistical Mechanics*, (Pergamon Press, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1972).
- [10] Victor Romero-Rochín and Vanderlei S. Bagnato, *Br. Jour. of Phys.* **35** (2005) 607.
- [11] D. J. Wineland and W. M. Itano., *Phys. Rev. A* **20** (1978) 1521.
- [12] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1978) 2089.

-
- [13] S. R. Jefferts, D. M. Meekhof, J. Shirley, T. E. Parker, C. Nelson, F. Levi, G. Costanzo, A. DeMarchi, R. Drulliger, L. Holleberg, W. D. Lee and F. L. Walls, The accuracy evaluation of NIST-F1, enviado a Metrologia.
- [14] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 2631.
- [15] H. Metcalf, *J. Opt. Soc. Am. B* **6** (1989) 2206.
- [16] K. B. Davis, M. O. Mewes, and W. Ketterle, *App. Phy. B* **60** (1995) 155.
- [17] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Esher and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3352.
- [18] A. Migdall, J. Prodam, W. Phillips, T. Bergeman, and H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2596.
- [19] T. Bergeman, G. Erez, and H. Metcalf, *Phys. Rev. A* **35** (1987) 1535; C.R. Monroe, E.A. Cornell, C.A. Sackett, C.J. Myatt, and C.E. Weiman, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 414.
- [20] J. Dalibard, Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases, in: M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (Eds.), *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, IOS Press, (1999), 321.
- [21] Landau, L. and Lifshitz, L., *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*, (Pergamon Press, London, 1958).
- [22] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems* (MacGraw-Hill, New York, 1971).