

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Fondos de inversión para las pensiones:
valuación estocástica, modelación y cobertura de portafolios

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
A C T U A R I O
P R E S E N T A:
FERNANDO ISRAEL GARCÍA MUNGUIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del Jurado	
1. Datos del alumno	García Munguia Fernando Israel 56 97 20 04 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 402111407
2. Datos del tutor	Dr. Padilla Longoria Pablo
3. Datos del sinodal 1	Act. Pérez-Tejada López Fernando Alonso
4. Datos del sinodal 2	Act. Cánovas Theriot Alfonso
5. Datos del sinodal 3	Dr. Bladt Petersen Mogens
6. Datos del sinodal 4	Dra. Meda Guardiola Ana
7. Datos del trabajo escrito	Fondos de inversión para las pensiones: valuación estocástica, modelación y cobertura de portafolios 83 p 2007

A la persona con la que he compartido todos mis triunfos, que siente al unísono mis tristeza y quien por sobre todas las cosas me ha brindado su sincera amistad y compartido su sabiduría. Quiero agradecer a quien olvidó sus sueños y anhelos por hacer realidad los míos y que ni el mas grande de los cansancios la ha detenido...a mi MADRE.

Agradecimientos

- A mis hermanos: *René y Judith*, hermano, eres y serás mi máximo, Judith, te mereces todo mi respeto. *Linda y Jorge*, gracias a ambos por ser desde pequeño uno mas de la familia Mirón Escalante. *Leticia y Ricardo*, hermana, gracias por siempre mostrar el cariño que sientes por mi, Ricardo, gracias por el apoyo en mis diferentes etapas de mi vida. Quiero enfatizar mi agradecimiento a *Adriana* quien ha sido mas que una hermana y que junto con mi madre, ha ayudado a lograr mi sueño. A mis sobrinos: *Nitzia, Edzna y Hugo, Thalia, Jorge Omar, Ricardo, Daniela, René y Dana Paola*. Gracias por el apoyo y cariño incondicional, pero sobre todo, por aguantar mi mal caracter.
- A *Cuauhtémoc Licona Cassani* porque me ha demostrado que es posible alcanzar sueños y seguir ideales, quien a pesar de la distancia, siempre hemos estado juntos a lo largo de 10 años donde mas que un amigo, se ha convertido en mi hermano.
- A *Yesenia Baez Luenga*, por su amistad y porque la admiración que le tengo me motiva a superarme día a día, gracias Yes por compartir conmigo tu vida y tus sueños.
- A *Claudia y Alina*, quienes me ayudaron a retomar la seguridad en mí y me brindaron su tiempo y espacio para estudiar en la etapa mas sombría de mi carrera.
- Agradezco infinitamente al *Dr. Pablo Padilla Longoria* por su tiempo y apoyo, pero sobre todo por confiar en mi proyecto.
- A la *Mtra. Isis Angélica Bautista Serrano* por su apoyo y puntos de vista sobre el proyecto, pero en especial, por brindarme su sincera amistad.

- A mis sinodales: *Act. Alfonso Cánovas Theriot, Act. Fernando Alonso Pérez-Tejada López, Dra. Ana Meda Guardiola y Dr. Mogens Bladt Petersen* por el tiempo dedicado a la revisión del trabajo.
- A *Lic. Jaime Rodríguez, Mat. Martín Rojas y Lic. Angélica Hernández* por las facilidades brindadas para la realización de éste trabajo.
- Quiero hacer un agradecimiento sumamente importante y especial a *Nai*, quien ha sido una mujer ejemplar, y la que le guardo mucho amor y respeto. Quien a pesar de mis cambios de ánimo siempre está ahí, sonriente y tranquila apoyándome.

Índice general

Introducción	ix
1. Pensiones en México	1
1.1. Seguridad social y pensiones	1
1.1.1. Planes de beneficio definido	2
1.1.2. Planes de contribuciones definidas	3
1.2. Principales modelos en México	3
1.2.1. Antecedentes	3
1.2.2. Instituto Mexicano del Seguro Social	4
1.2.3. Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Tra- bajadores del Estado	5
1.3. Modalidades de inversión	6
1.4. Comisiones y Rendimientos de las Afores	9
2. Modelos estocásticos para las finanzas	13
2.1. Teoría de la probabilidad	13
2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	15
2.2.1. Procesos estocásticos	15
2.2.2. Movimiento browniano	18
2.2.3. Proceso de Itô	18
2.2.4. Modelo lognormal	19
2.3. Modelo Ho-Lee	21
2.4. Modelo Vasicek	24
3. Teoría del portafolio	31
3.1. Marco histórico	31
3.2. Portafolio óptimo y rendimientos lognormales	32
3.3. Enfoque media-varianza	34

3.4. Método alternativo	38
3.5. Activo libre de riesgo	41
3.6. Código	42
4. Aplicación	47
4.1. Creación de portafolios	48
4.1.1. Portafolio con 31 emisoras	48
4.1.2. Portafolio 13 emisoras	49
4.2. Valor del portafolio y cobertura	52
4.2.1. Valor del portafolios	54
4.2.2. Opciones Sintéticas	54
4.3. Valor en riesgo	59
4.4. Composición de un portafolio estimado	59
5. Conclusión	63
A. Apéndice	65
A.1. Modelo Binomial	65
A.1.1. Modelo para un periodo	65
A.1.2. Modelo para múltiples periodos	68
Bibliografía	71

Introducción

A pesar de los esfuerzos por incentivar el desarrollo de mercados financieros que brinden una oportunidad para capitalizar fondos de pensiones, estos no han dado los resultados esperados; las empresas administradoras de los fondos de pensión, no cubren las necesidades que la población marginada necesita, motivo por el cual el Estado, en calidad de protector de las garantías que la seguridad social establece, destina grandes flujos de dinero para sostener un sistema debilitado, fracturado y desvalido.

El cambio en el sistema de pensiones mexicano buscó desde un inicio terminar con el déficit presupuestal del gobierno federal, sin embargo, a pesar de casi 10 años de la nueva reforma e implementación de un sistema de capitalización individual, los cambios no se han visto reflejados para el gobierno, y mucho menos, en la economía de los mexicanos.

Hoy en día, el problema se ha ido incrementando, los rendimientos propuestos por las administradoras de los fondos de pensiones no son, ni por mucho, acordes con las necesidades básicas de los futuros pensionados. El gasto por la pensión mínima garantizada que el Estado tiene por ley, la obligación de proporcionar, acarreará grandes problemas financieros al gobierno federal.

El presente trabajo, se enfoca en el ramo de pensiones por cesantía en edad avanzada; tiene como objetivo, demostrar que es posible obtener mayores rendimientos de los fondos de pensiones respecto a los rendimientos ofrecidos por las *Administradoras de Fondos para el Retiro* (Afores).

La introducción del análisis estocástico en las finanzas ha dado la pauta para establecer mecanismos que describen el comportamiento de activos

financieros para cuantificar el riesgo mediante ecuaciones diferenciales y sus soluciones. El uso de métodos numéricos como herramienta de aproximación a dichas soluciones, son una referencia de utilidad para el ámbito financiero. Científicos como *L. Bachelier*, *Norbert Wiener*, *Harry Markowitz*, *Kiyosi Itô* y *Robert C. Merton* por mencionar algunos, han desarrollado y pulido herramientas para el análisis financiero en base a modelos matemáticos. La elaboración del trabajo es una breve recopilación de dichos modelos y su aplicación directa en el sistema de pensiones de México.

En el capítulo 1 se señala a manera de introducción, una síntesis histórica de la seguridad social en México, en particular del sistema de pensiones; se establece el trabajo regulador de la *Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro* (CONSAR), así como las funciones de las AFORES en conjunto con las *Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro* (SIEFORES) en el sistema de pensiones; se revisa la ley del Sistema de Ahorro para el Retiro, los fondos que existen y su tipo de inversión.

En el capítulo 2 se desarrolla la teoría de los procesos estocásticos, en particular, sobre el movimiento Browniano y el lema de Itô para establecer modelos estocásticos de cobertura y selección óptima de activos.

El capítulo 3 es un estudio sobre la teoría del portafolio desarrollada por Harry Markowitz, bajo el enfoque media-varianza con la variante de rendimientos lognormales y reevalúo de portafolios; se establece un método alternativo al de multiplicadores de Lagrange, para establecer el rendimiento de varianza mínima global, a partir del cual, obtenemos los portafolios que conforman la frontera eficiente.

En el capítulo 4, se realiza la aplicación utilizando acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (VMB) y que cumplan con lo señalado en la ley de la CONSAR, un análisis bajo el enfoque del Capital Asset Pricing Model (CAPM), se establecen modelos de cobertura mediante la construcción de opciones sintéticas, su valuación utilizando la fórmula de Black, Sholes y Merton, así como cálculo de valor en riesgo mediante el modelo VaR.

Capítulo 1

Pensiones en México

En este capítulo se presentan dos sistemas de pensiones establecidos en México derivadas de la seguridad social; se mencionan los cambios que han sufrido dichos planes en su normatividad, de acuerdo a las modificaciones en sus respectivas leyes, se presentan algunos cuadros de los rendimientos y comisiones que ofrecen las diversas Afores y por último establecemos los patrones de inversión que las Siefores deben seguir. El contenido del capítulo se basa en líneas generales de [1], [6], [7] y [13]

1.1. Seguridad social y pensiones

La seguridad social es un modelo que se estableció desde finales del siglo XIX y tiene sus orígenes en Alemania (Bismark 1883). La finalidad de la seguridad social es controlar la desigualdad social y permitir el desarrollo de las personas más vulnerables a través de programas de servicios médicos y recursos financieros cubiertos mayoritariamente por el Estado. Para el caso de las pensiones, el objetivo es garantizar un nivel de vida igual o similar al que gozó el trabajador durante su vida laboral.

Desafortunadamente el costo presupuestal que tiene la implementación de dichos sistemas ha mermado las economías de los países que implementan planes de seguridad públicos, lo que ha traído como consecuencia, que se reformen sus leyes o que desaparezcan por completo los planes.

Las pensiones forman parte del conjunto de prestaciones que cubre la se-

guridad social. Para el caso de cesantía en edad avanzada (CEA), los trabajadores obtienen compensaciones periódicas por los años de trabajo realizado, se conforman de manera tripartita (*patrón, empleado y Estado*) y permiten al trabajador obtener un ingreso en la vejez. Para establecer los cálculos referentes a la suma de dinero que el empleado recibirá a la edad de retiro(CEA), existen dos tipos de planes de pensión: planes de beneficio definido y planes de contribución definida.

1.1.1. Planes de beneficio definido

En este esquema, se establece de antemano la cantidad que el trabajador recibirá al término de la vida laboral sin importar los activos que se hayan consolidado a partir de las aportaciones de (*patrón, empleado y Estado*). Para poder establecer el beneficio se requiere de un cálculo actuarial en base a información como: salario, tipo de empleo, antigüedad laboral (tiempo mínimo de cotización), edad de jubilación, esperanza de vida, sexo entre otros.

Los planes de beneficio definido tienden a desarrollar un incremento lento en el valor presente de los beneficios durante los primeros años, y se acelera conforme se acerca la edad de retiro; esta característica se puede traducir en un bajo costo para los trabajadores jóvenes pero elevado para la población laboral más vieja.

El financiamiento en este tipo de planes se basa en un desarrollo actuarial. Los cálculos se deben hacer tomando en cuenta, que el monto de las contribuciones que el patrón, empleado y Estado realizan, debe asegurar que el fondo para la jubilación cumpla con las obligaciones de pagos futuros, es decir, que el valor presente de las contribuciones, sean mayores a sus beneficios.

Cuando la administración de los activos aportados (*reservas*) no están consolidados para continuar con el plan, se dice que es un sistema de reparto ya que, la remuneración del retirado es pagada mediante las aportaciones de los trabajadores en activo.

1.1.2. Planes de contribuciones definidas

Es un plan en cual, se establecen las contribuciones que realizaran *patrón, empleado y Estado*, pero, a diferencia del plan de beneficio definido, la pensión se basa únicamente en la cantidad que exista en la cuenta, por lo que las aportaciones y los rendimientos son la única manera de incrementar la cuantía de la pensión. Los beneficios en este tipo de plan dependen del balance de la cuenta en el momento en el cual se necesite hacer uso de los recursos. A pesar de que los individuos controlan sus aportaciones y pueden escoger el tipo de inversión óptimo, las administradoras tienen un alto grado de responsabilidad sobre el fideicomiso incluyendo la selección de opciones de inversión y proveedores administrativos.

Actualmente en México, las pensiones se manejan bajo este esquema. Por tal motivo, se pretende examinar tanto en este capítulo como en los posteriores, las características de un sistema de capitalización mediante fondos de inversión, diversificación y rendimientos observados. Debemos tener muy claro, que el riesgo en éste plan, recae directamente en el Estado, pues por ley, se asegura una pensión mínima garantizada, por lo que si los rendimientos menos las comisiones no generan ganancias sustanciales, el Estado seguirá destinando muchos flujos de efectivo y el problema no habrá sido resuelto.

1.2. Principales modelos en México

1.2.1. Antecedentes

La seguridad social en México, tuvo sus inicios en 1904 a través de la Ley de Accidentes de Trabajo del Estado de México; posteriormente en 1906 se expide la Ley sobre Accidentes de trabajo del estado de Nuevo León, en la cual, se reconoce que los empleadores deben tener la obligación de atender a sus empleados en caso de enfermedad, accidente o muerte durante el cumplimiento de sus labores. Posteriormente se incorporó a la Constitución de 1917 el artículo 123, el cual estipula que los estados y el Gobierno Federal regulen las relaciones laborales y, que se establezcan cajas de seguro de invalidez, de vida, de cesantía voluntaria del trabajo y de accidentes.

En 1925 se expidió la Ley de Pensiones Civiles y se creó la Dirección

General de Pensiones Civiles de Retiro la cual, comprendía la protección de la salud, préstamos y pensiones por vejez, inhabilitación y muerte. A pesar de la ley promulgada y la dirección creada, el sistema de pensiones mexicano fue incorporando lentamente a los trabajadores. En un principio, los funcionarios y empleados del gobierno federal fueron el único grupo privilegiado por la seguridad social; paulatinamente se fueron incorporando los militares, maestros públicos, ferrocarrileros y trabajadores del sector energético (petroleros y electricistas).

1.2.2. Instituto Mexicano del Seguro Social

En 1943 se expidió la Ley de Seguridad Social y se creó el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS). El IMSS proporcionaba programas en materia de: riesgos del trabajo, salud, invalidez, vejez y muerte, así como cesantía en edad avanzada financiado por aportaciones tripartitas (empleado, empleador y gobierno).

Con la finalidad de extender la seguridad social a grupos vulnerables y desprotegidos, en 1973 se promulgó la Ley del IMSS, la cual estableció la cobertura obligatoria del IMSS para trabajadores independientes, al servicio doméstico y pequeños empresarios.

En 1995 debido a la dificultad para hacer frente al déficit financiero que trajo el sistema de reparto y la imposibilidad de seguir manteniendo las reservas actuariales debido principalmente a la transición demográfica, se reformó la ley del IMSS siguiendo el modelo chileno; se elimina el sistema de reparto del seguro de retiro, cesantía en edad avanzada y vejez introduciendo un sistema de capitalización individual.

Según lo establecido en la Ley del IMSS de 1997 se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Cuotas y aportaciones

Para cesantía en edad avanzada y vejez tanto patrones como trabajadores aportan el 3.150 % y 1.125 % sobre el SBC respectivamente. En este caso, la contribución del Estado será igual al 7.143 % del total de las cuotas patronales (.225 % del SBC). El Gobierno Federal complementará con

una aportación mensual (cuota social) equivalente al 5.5 % del salario mínimo general vigente para el Distrito Federal. El valor del importe se actualizará trimestralmente de acuerdo con el índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC).

- Requisitos para otorgar una pensión

La pensión por cesantía en edad avanzada será dada a los trabajadores después de los sesenta años de edad. El trabajador debe tener 1250 semanas cotizadas; en caso de no tener el tiempo establecido, el trabajador podrá retirar en una sola exhibición el saldo de su cuenta individual.

1.2.3. Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado

En 1959 se promulgó la Ley del Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE) delegando el IMSS al ISSSTE la facultad para organizar los programas de los trabajadores de gobierno.

En 1983 se promulgó una nueva ley del ISSSTE en la cual se establece un sueldo regulador para calcular la cuantía de las pensiones; el sueldo se ajusta a partir del promedio del sueldo básico de los tres últimos años de servicio de cada trabajador. Con la nueva ley, el ISSSTE reduce los tiempos y condiciones para otorgar una pensión.

Actualmente el ISSSTE es un organismo descentralizado con patrimonio propio conformado por las aportaciones que los trabajadores hacen quincenalmente tanto al fondo de pensiones (seis por ciento del SBC) como al servicio médico y maternidad (dos por ciento del SBC).

En 1992 se creó el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR), el cual, es un sistema de cuentas individuales con dos subcuentas; las aportaciones (dos por ciento del SBC) las hacen las dependencias o entidades del Estado y se realizan en bancas comerciales.

1.3. Modalidades de inversión

El nuevo modelo de pensiones es controlado por empresas denominadas *Administradoras de Fondos para el Retiro* (Afores) y los rendimientos obtenidos por las aportaciones son invertidos en fondos mediante las *Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro* (SIEFORES).

La CONSAR ha hecho modificaciones para mejorar el funcionamiento del sistema de pensiones en México. Desde su creación, ha funcionado como regulador del sistema para el bienestar de los trabajadores que se han incorporado a partir del 1 de julio de 1997 al nuevo plan de pensiones. La tarea no ha sido fácil, pues la transición del viejo plan instaurado por el IMSS y el ISSSTE al nuevo plan administrado por las AFORES no se ha aceptado y la presión, tanto para el estado como para las diversas administradoras es continua y cada vez mas directa, los problemas que atrae el establecer una pensión mínima garantizada por parte del estado y las cuotas excesivas que cobran las administradoras son un tema difícil de evaluar. Por tal motivo la ley del SAR ha ido evolucionando a lo largo del tiempo a fin de establecer nuevos y mejores parámetros de inversión que permitan obtener mayores rendimientos sin descuidar, por supuesto, el marco de seguridad establecido rigurosamente.

A partir de enero de 2005 entró en funcionamiento un nuevo régimen con nuevas alternativas de inversión, con lo cual se busca un manera viable de obtener mayores rendimientos y diversificar la selección de activos de una cartera. Con esto se pretende que los trabajadores que cuenten con menores ingresos, sean los más beneficiados.

Anteriormente las AFORES establecían un *fondo único* el cual era invertido; hoy en día existen las sociedades de inversión básicas 1 y las sociedades de inversión básicas 2 las cuales tienen las siguientes características:

Sociedades de inversión básicas 1

Los planes de inversión en estas sociedades son diseñados para administrar e invertir las aportaciones de los trabajadores que tienen 56 años o más y aquéllos que decidan establecer sus aportaciones en este fondo, el cual se caracteriza por ser de menor riesgo.

Se puede invertir en valores nacionales, valores internacionales de deuda (máximo 20 % del total del ahorro) y sólo será mediante títulos emitidos por gobiernos y empresas con alta clasificación crediticia.

Sociedades de inversión básicas 2

Los planes de inversión en estas sociedades son diseñados para administrar e invertir las aportaciones de los trabajadores que tengan menos de 56 años de edad y aquellos que decidan establecer sus aportaciones en este fondo.

Se puede invertir en valores nacionales, valores internacionales (máximo 20 % del total del ahorro) tanto de deuda como en notas con capital protegido ligadas a los índices accionarios más importantes del mundo, instrumentos de inversión con capital protegido al vencimiento ligados a índices accionarios (máximo 15 % del total del ahorro).

Según la CONSAR, al invertir en índices accionarios se establece de antemano la diversificación, ya que dichos índices son canastas de acciones y la inversión se realizará mediante notas con capital protegido, es decir, el capital inicial estará protegido a la fecha de vencimiento.

Una aportación interesante que he planteado en el trabajo es establecer una diversificación de portafolio con acciones AAA que optimicen mi frontera eficiente y permita obtener mayores beneficios (*rendimientos*) con el mismo riesgo o aún mejor que utilizando índices.

A continuación se presenta un ejemplo sencillo pero muy ilustrativo sobre capitalización y sobre el problema central de la tesis.

Ejemplo.

La capitalización es el proceso de ir del valor presente (VP), al valor futuro (VF), es decir, es el valor que alcanzará una inversión en alguna fecha futura devengando intereses a una tasa compuesta.

Supongamos que tenemos dinero depositado en nuestra Afore, la cantidad acumulada es de \$1,000 al día de hoy. La cuenta se maneja en un fondo que

Año	Monto inicial	Interés ganado	Monto final
1	\$1,000	\$80	\$1,080
2	\$1,080	\$86	\$1,166
3	\$1,166	\$93	\$1,260
4	\$1,260	\$100	\$1,360
5	\$1,360	\$109	\$1,469
	Interés ganado	\$469	

Cuadro 1.1: **Capitalización**

nos ofrece una tasa de interés del 8 % anual.

Veamos en el cuadro 1.1 el comportamiento de nuestro dinero en el tiempo, para un periodo de 5 años.

Para visualizar la problemática en la que se encuentra el sistema de pensiones mexicano, desarrollemos un ejemplo extremista que sin embargo, no está fuera de proporciones. Tomemos como salario base del cálculo \$ 1,500.00 y nos apegamos a las aportaciones que la Ley del IMSS establece. Las aportaciones totales a la cuenta individual para el caso de cesantía en edad avanzada será de \$1,823.40 anuales. Tomemos hipotéticamente un rendimiento de 5 % real, además, la cuenta individual es de un trabajador de 20 años de edad. Después de 40 años de servicio, sin tomar en cuenta la inflación, aumentos en el salario mínimo ni las reducciones por ejercicio de comisiones, su saldo estimado será de \$208,623.00. Si dividimos el saldo neto entre el número de años que se espera viva, nos da un valor aproximado de \$1337.33 mensuales, lo que implica que el gobierno tendrá que dar una aportación extra de \$162.67 para completar la pensión mínima garantizada.

Como hemos visto, tanto en la tabla como en el ejemplo, el poder adquisitivo para los adultos mayores es mínimo y si le agregamos que los recursos ahorrados no serán cantidades exorbitantes y además se verán reducidas aún más al quitarles el porcentaje que cobran las Afores por comisiones, el problema de las pensiones en México no ha sido ni remotamente resuelto y seguirá representando un déficit para el Estado de no establecerse una reforma que apoye a los mexicanos y no a las empresas transnacionales.

1.4. Comisiones y Rendimientos de las Afores

Afore	Porcentaje Anual Sobre Saldo	Afore	Porcentaje Anual Sobre Saldo
Afirme Bajío	1.51	Ixe	2.40
Inbursa	1.54	Banamex	2.40
Actinver	1.94	Scotia	2.66
Azteca	1.95	Metlife	2.68
Ahorra Ahora	1.96	XXI	2.90
Bancomer	1.98	Profuturo GNP	2.92
Invercap	2.17	ING	2.97
De la Gente	2.18	HSBC	3.06
Coppel	2.21	Santander	3.14
Argos	2.30	Principal	3.48
Banorte Generali	2.36	Promedio	2.41

Supuestos: Tasa de rentabilidad de 5% anual real, saldo inicial de \$23,770, aportación bimestral de \$777.41 y 5 años cumplidos de antigüedad.

Cuadro 1.2: Comisiones afiliados al IMSS

Afore	Sobre saldo ⁽¹⁾ (%)
Actinver ⁽²⁾	1.25
Afirme Bajío ⁽³⁾	0.23
Ahorra Ahora	0.20
Argos ⁽⁴⁾	0.12
Bancomer	1.00
Banorte Generali ⁽⁵⁾	0.30
Coppel	0.30
De la Gente	0.31
Metlife	1.73
Profuturo GNP	1.25
Scotia	0.26

<p>Nota: Sólo se presentan las Afores que prestan este servicio. Las comisiones corresponden a la Siefore donde se invierten las aportaciones de trabajadores independientes.</p>	
<p>(1) Porcentaje anual.</p> <p>(2) Actinver cobra adicionalmente una comisión de 2.00% sobre las aportaciones a la Subcuenta de Largo Plazo, aplicable al retiro de la aportación o traspaso de la cuenta individual a otra Afore, a efecto de aplicar los siguientes descuentos: Si el trabajador retira sus aportaciones o traspasa su cuenta a otra Afore habiendo cumplido un año de inversión en la Siefore, la comisión disminuye a 1%; si el trabajador retira sus aportaciones o traspasa su cuenta a otra Afore habiendo cumplido dos años o más de inversión en la Siefore, no se cobrará esta comisión.</p> <p>(3) La comisión sobre saldo de Afirme Bajío será de 0.22% en 2008, 0.21% en 2009, 0.20% en 2010, 0.19% en 2011 y 0.18% de 2012 en adelante.</p>	<p>(4) La comisión sobre saldo de Argos será de 0.16% en 2008 y se incrementará anualmente 0.02 puntos porcentuales hasta llegar a 0.30% en 2015, nivel en el que se mantendrá hasta 2022; finalmente, será de 0.33% en adelante.</p> <p>(4) Banorte Generali cobra adicionalmente comisiones por depósitos a la subcuenta de ahorro a largo plazo como sigue: 5 UDIS por cada aportación al momento de retiro, si éste ocurre dentro de los primeros 5 años de efectuada la aportación; 2 UDIS por cada aportación al momento de retiro, si éste ocurre entre el 5° y el 10° año de efectuada la aportación; y si al momento del retiro la aportación tenía más de 10 años de haber sido efectuada, no se cobrará esta comisión.</p>

Cuadro 1.3: Comisiones afiliados al ISSSTE y trabajadores independientes

Fondo 1		Fondo 2	
Afore	Nominal	Afore	Nominal
Invercap	10.66	Profuturo GNP	12.85
Metlife	10.39	Invercap	12.37
Ixe	9.66	Santander	11.77
Profuturo GNP	9.49	Banamex	11.44
Santander	9.48	XXI	11.2
Banamex	9.38	Principal	11.13
Principal	9.09	Ixe	11.06
ING	9.07	Metlife	11
Actinver	9.03	HSBC	10.99
Afirme Bajío	9.01	ING	10.98
HSBC	8.91	Afirme Bajío	10.72
XXI	8.90	Actinver	10.25
Inbursa	8.71	Bancomer	10.06
Banorte Generali	8.70	Banorte Generali	9.6
Bancomer	8.68	Azteca	8.97
Azteca	8.5	Inbursa	8.65

Cuadro 1.4: Rendimientos afiliados al IMSS

ISSTE		Trabajadores Independientes	
Afore	Nominal	Afore	Nominal
XXI	10.23	Profuturo GNP	11.02
Metlife	10.13	Metlife	10.13
Actinver	10.01	Actinver	10.01
Principal	9.86	Afirme Bajío	9.42
Afirme Bajío	9.42	Bancomer	8.89
HSBC	9.37	Banorte Generali	8.82
Inbursa	8.93		
Bancomer	8.89		

Cuadro 1.5: Rendimientos afiliados al ISSSTE y trabajadores independientes

Capítulo 2

Modelos estocásticos para las finanzas

Para entender el comportamiento que siguen los precios de activos financieros en el tiempo, lo podemos pensar a través de modelos de tiempo continuo. Mediante el uso de la teoría de la probabilidad y ecuaciones diferenciales estocásticas, se puede llevar a cabo estudios que representen patrones adecuados a la realidad del comportamiento de las acciones.

Debemos tomar en cuenta que si pudiéramos predecir completamente el comportamiento futuro del precio de los activos financieros, nadie podría hacer ganancia alguna y entonces no habría incentivos para negociar activos financieros. La incertidumbre, es el factor mas importante para la teoría financiera y los procesos estocásticos pueden ser usados como una herramienta para describirla. La información fue tomada de: [2], [3], [4], [5], [12].

2.1. Teoría de la probabilidad

Un espacio de probabilidad es un conjunto de eventos que se pueden medir a través de (Ω, F, P) donde Ω es llamado el espacio muestral, el cual se define como el conjunto no vacío de los posibles resultados de un experimento; F es el evento o conjunto medible, es una σ -álgebra subconjunto de Ω que nos asegura poder medir un experimento; P es la medida probabilidad, es una función $P : F \rightarrow [0, 1]$, la cual debe satisfacer para toda $A \in F$ que $P(\Omega) = 1$ y que $0 \leq P(A) \leq 1$. $P(A)$ es la frecuencia con la que se observa A durante

un evento aleatorio.

P es σ -aditiva, es decir, si $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots$ es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Si tomamos el espacio medible (Ω, F) y denotamos como $B(\mathfrak{R})$ a la σ -álgebra mas pequeña que contenga todos los intervalos abiertos de \mathfrak{R} , obtenemos el espacio medible $(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}))$ donde $B(\mathfrak{R})$ representa el conjunto de borel medible (*conjuntos boreleanos*).

Existen espacios de probabilidad filtrados los cuales son denotados como: $(F_t)_{t \geq 0}$, estos espacios no son mas que una familia de σ -álgebra donde $F_s \subseteq F_t \subseteq F$ para $0 \leq s \leq t$.

Una función definida en un espacio muestral, la cual constituye el resultado de un experimento la podemos definir como una variable aleatoria. La función $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ denota una variable aleatoria que transforma los puntos del espacio muestral en números reales y tiene la propiedad que para cualquier conjunto boreleano se cumple que $X^{-1}(B)$ es elemento de F y por lo tanto X es F -medible.

El agregado de todos los puntos muestrales en los que X toma un valor fijo x_j forma el evento de que $X = x_j$; su probabilidad se denota por $P\{X = x_j\}$. Sea $(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}))$ un espacio medible y para cada conjunto boreleano definimos $P_X(B) = P(X^{-1}B)$ la cual es una medida de probabilidad sobre $B(\mathfrak{R})$ que encierra toda la *información probabilística* de X . Las funciones $f(x_j) = P\{X = x_j\}$ y $P_X(B) = P(X^{-1}B)$ son análogas y se les llama *distribución* de la variable aleatoria X . La *función de distribución* especifica para toda $x \in \mathfrak{R}$ la probabilidad de la variable aleatoria que es menor o igual a X ; se denota como: $F(x) = P(x \leq X)$.

Una función importante en la teoría de la probabilidad es la *esperanza de una función de variable aleatoria* X ; sea g una función real de variable real, $g(X)$ es una función de una variable aleatoria que se define como

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X .

Es preciso establecer una función que se desprende de la anterior. Esta función es de vital interés para las finanzas; se denomina *esperanza condicional*, se establece a partir de la información disponible sobre algún evento, es decir, sea F_t una sub- σ -álgebra; una variable aleatoria $E(X|F_t)$ es llamada la esperanza condicional de X dado F_t integrable y F_t - medible si

$$\int_{F_t} E(X|F_t)dP = \int_{F_t} XdP$$

para cualquier $F_i \in F$.

2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una partícula suspendida en un líquido, que parte de su posición inicial z y a intervalos de tiempo se mueve de manera aleatoria, se establece que sus trayectorias describen un movimiento browniano. Si suponemos que la partícula es un juego bipersonal donde en cada instante de tiempo el individuo i gana una unidad de dinero, después de n ensayos, la posición de la partícula representa el capital del jugador i al n -ésimo ensayo. Al alcanzar la partícula el estado 0 o a (*riqueza de ambos jugadores*) termina el juego. El modelo simple de la caminata al azar no parece tener sentido para la realidad sin embargo tienen una característica sorprendente: los efectos observables dependen solamente de su *esperanza* y *varianza*. Cuando la longitud δ de los pasos individuales es pequeña y los espacios entre un paso y el siguiente son tan pequeños en el tiempo, el cambio resultante parece prácticamente un movimiento continuo; en el límite se conduce a un movimiento browniano.

2.2.1. Procesos estocásticos

Un Proceso Estocástico es un modelo matemático de un fenómeno aleatorio en algún momento después de un periodo de tiempo inicial. Una familia

de variables aleatorias $\{X(t); t \in T\}$ parametrizada por el tiempo $t \in T$ y cuya función es

$$X : [0, \infty) \times \Omega \mapsto \mathfrak{R}$$

son un proceso estocástico si para $t \geq 0$, la función $w \rightarrow X_t(w)$ es una variable aleatoria y para cada $w \in \Omega$ la función $t \rightarrow X_t(w)$ es una trayectoria del Proceso.

El Proceso se dice que es a tiempo discreto si el conjunto de parámetros es de la forma $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ mientras que si $T = (a, b)$ es un intervalo de tiempo, se dice que es un proceso a tiempo continuo.

Un proceso estocástico es medible si, para toda $A \in B(\mathfrak{R}^n)$, el conjunto $\{(t, x); X_t(w) \in A\}$ pertenece al producto de σ -álgebras $B([0, \infty)) \otimes F$ (la mínima σ -álgebra generada por el espacio $B([0, \infty)) \otimes F$); en otras palabras, si el mapeo: $(t, w) \mapsto X_t : ([0, \infty) \otimes \Omega, B([0, \infty) \otimes F))$ es medible.

Esta es una definición sumamente importante pues establece que las trayectorias de un proceso tienen funciones de *borel-medibles* de $t \in [0, \infty)$ lo que permite que los componentes de X tengan *esperanza definida*. Además, si X toma valores en \mathfrak{R} y L es un subintervalo de $[0, \infty)$ tal que $\int_L E|X_t| dt < \infty$ respecto toda medida de probabilidad P , entonces

$$\int_L |X_t| dt < \infty$$

y

$$\int_L EX_t dt = E \int_L X_t dt.$$

Podemos considerar procesos con espacio parametral $[0, T]$ con $T > 0$ fijo, tal que

$$\left(E \int_0^T |X_t|^2 dt \right)^2 < \infty$$

Cuando para cada $t \geq 0$, X_t es una variable aleatoria F_t -medible, un proceso estocástico es adaptado a la filtración $\{F_t\}$. Es decir, si el valor aleatorio al tiempo t puede ser caracterizado por la historia del proceso al tiempo anterior.

Martingala

La idea de *martingala* es una expresión matemática sobre la noción de cambio en un juego favorable; se basa en el llamado juego justo; indica que el valor esperado de la riqueza de un jugador al tiempo t , donde $t > s$, dada la información al tiempo s será igual a la riqueza del jugador al tiempo s . En finanzas y particularmente en las inversiones, es una herramienta utilizada con bastante regularidad. Formalmente, un proceso $\{X_t, F_t; 0 \leq t < \infty\}$ para todo $0 \leq s < t < \infty$ es llamado

1. *martingala* si $E(X_t|F_t) = X_s$
2. *submartingala* si $E(X_t|F_t) \geq X_s$
3. *supermartingala* si $E(X_t|F_t) \leq X_s$

Consideremos que un proceso $\{X_t, F_t; 0 \leq t < \infty\}$ es una una martingala y sea $\phi : \Re \rightarrow \Re$ una función creciente y convexa tal que $E|\phi(X_t)| < \infty$ para toda $t \geq 0$. Entonces $\{\phi(X_t), F_t; 0 < \infty\}$ es una submartingala.

Sea $t \in [0, T]$ y $X_s \in \mathbb{N}$, se define la integral estocástica

$$M_t = \int_0^t X_s dB_s$$

la cual existe si el proceso X_s es una integral cuadrada para cada $t \in [0, T]$; es una martingala con respecto a F_t que cumple

$$P\left[\int_0^T X_s^2 ds < \infty\right] = 1$$

Es decir, la integral cuadrada de X_s existe con probabilidad 1. Si B_s satisface la condición fuerte de la esperanza, o si la integral existe como

$$E \left[\int_0^T X_s^2 ds \right] < \infty$$

y se define que la $E \left[\int_0^T X_s^2 dB_s \right] = 0$. Para establecer la varianza finita de una integral estocástica, se establece la relación

$$E \left[\left(\int_0^T X_s dB_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^T X_s^2 ds \right]$$

2.2.2. Movimiento browniano

Como se mencionó anteriormente, el movimiento browniano se comporta de manera aleatoria y se puede interpretar como un número grande de colisiones con partículas más pequeñas que también están en el líquido. Norbert Wiener en 1923 demostró de manera matemática la existencia de un proceso con las condiciones del movimiento browniano por lo que a dicho movimiento se le conoce también como proceso de Wiener.

El movimiento browniano es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ el cual tiene las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0$ casi seguramente.
2. $B_t - B_s$ se distribuye normal con media 0 y varianza $(t - s)$. Si $s = 0$, tenemos que $B_t - B_0$ tiene distribución $N(0, t)$.
3. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ son independientes para todo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$
4. $t \rightarrow B_t(w), t \geq 0$ es una trayectoria continua para toda $w \in \Omega$

Dado que cada variable aleatoria B_t tiene distribución $N(0, t)$, podemos deducir fácilmente que $E(B_t) = 0$ y $Var(B_t) = E(B_t^2) = t$

2.2.3. Proceso de Itô

Sea una ecuación diferencial estocástica definida para $t \in [0, T]$ y con condición inicial la variable X_0 como sigue

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (2.1)$$

donde B_t es un movimiento browniano, b es el coeficiente de deriva y σ el coeficiente de difusión. Podemos encontrar a partir de dicho proceso, una

fórmula general para encontrar la solución a procesos de Itô.

Sea X_t un proceso de Itô y $f(t, x)$ una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en x , entonces el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ también es un proceso de Itô que satisface

$$dY_t = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2 \quad (2.2)$$

y utilizamos que

$$\begin{aligned} dt * dt &= 0 \\ dt * dB_t &= 0 \\ dB_t * dt &= 0 \\ dB_t * dB_t &= dt \end{aligned}$$

2.2.4. Modelo lognormal

El precio de una acción evoluciona irregularmente, algunas veces se distingue por tendencias ascendentes y descendentes, su valor futuro es incierto y muy difícil de predecir. Aunque podemos encontrar la solución utilizando modelos iterativos, podemos llegar a la misma solución aplicando un modelo continuo. Supongamos que el precio de un activo es descrito por la ecuación estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.3)$$

donde μ y σ son constantes reales.

Si (2.3) no tuviera el término estocástico, una solución a dicha ecuación diferencial sería $S_t = s_0 e^{\mu t}$, lo que implica que s_0 crece continuamente en el tiempo suponiendo que $\mu > 0$. La parte estocástica representa una inversión riesgosa la cual está sujeta a fluctuaciones propias de mercados financieros.

Aplicando la fórmula de Itô al proceso $S_t = f(t, B_t)$ obtenemos

$$dS_t = \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial x^2} dt \quad (2.4)$$

Si comparamos los coeficientes de (2.3) con (2.4), obtenemos

$$\begin{aligned}\mu f(t, s) &= \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial s^2} \\ \sigma f(t, s) &= \frac{\partial f(t, s)}{\partial s}\end{aligned}$$

resolviendo la segunda ecuación, obtenemos que $f(t, s) = \exp[\sigma s + g(t)]$ para alguna función $g(t)$. Ahora sustituimos en la segunda ecuación, observemos que $g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, obteniendo que la solución es $g(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$. Por lo tanto, el precio del activo queda descrito como

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} + \sigma B_t$$

Para calcular $E[S_t]$, sea $Y_t = e^{\sigma B_t}$ un proceso estocástico, entonces por el lema de Itô tenemos

$$dY_t = 0 \cdot dt + \sigma e^{\sigma B_t} dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\sigma B_t} dt$$

entonces

$$Y_t - Y_0 = \sigma \int_0^t e^{\sigma B_s} dB_s + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t Y_s ds$$

sabemos que $E \left[\int_0^T X_s^2 dB_s \right] = 0$ y si tomamos $E[Y_0] = y_0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}E[Y_t] &= y_0 + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t E[Y_s] ds \\ \frac{d}{dt} E[Y_t] &= \frac{1}{2} \sigma^2 E[Y_t] \\ E[Y_t] &= e^{\frac{1}{2} \sigma^2 t}\end{aligned}$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned}E[S_t] &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= S_0 e^{\mu t}\end{aligned}$$

2.3. Modelo Ho-Lee

En 1986 se estableció el primer modelo de no arbitraje creado por T. S. Y. Ho y S. B. Lee; fue presentado en la forma de un árbol binomial de precios de bonos con dos parámetros la desviación estándar de la tasa corta y el precio de mercado de la tasa corta. El límite a tiempo continuo del modelo es

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (2.5)$$

donde

- σ (constante) es la desviación estándar instantánea de la tasa corta
- $\theta(t)$ es una función del tiempo elegida para asegurar que el modelo se aproxime a una estructura límite inicial.

La variable $\theta(t)$ define la dirección promedio a la que r se mueve al tiempo t independientemente del nivel de r . El parámetro de Ho y Lee que concierne al precio de mercado de riesgo prueba que es irrelevante cuando el modelo es usado para el precio de derivados sobre tasas de interés; es decir, los derivados tienen un subyacente a la tasa de interés. Esto es análogo a las preferencias de riesgo existentes, siendo irrelevante en el precio de una opción sobre una acción.

La variable $\theta(t)$ puede ser calculada analíticamente. Esto es

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t \quad (2.6)$$

donde $F_t(0, t)$ es la tasa adelantada instantánea que tiene madurez en $t = T$ vista desde el tiempo inicial $t = 0$ y la cual, es ejercida al tiempo T . $F_t(0, t)$ denota una derivada parcial con respecto a t y donde como una aproximación $\theta(t)$ iguala a $F_t(0, t)$. Esto significa que la dirección promedio de la tasa corta se irá moviendo en el futuro y será igual a la pendiente de la curva instantánea adelantada.

La pendiente de la curva adelantada define la dirección promedio de la tasa corta cuando se mueve en algún tiempo t . Superpuesto en esta pendiente está el resultado aleatorio normalmente distribuido.

En el modelo Ho-Lee, los bonos cupón cero y las opciones europeas sobre bonos cupón cero pueden ser valuados analíticamente. La expresión para el precio de un bono cupón cero al tiempo t en términos de una tasa corta es

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)(T-t)} \quad (2.7)$$

donde

$$\ln A(t, T) = \ln \left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right) - (T - t) \frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T - t)^2$$

En estas ecuaciones, el tiempo $t = 0$ es hoy, t y T son generalmente tiempos futuros con $T \geq t$. La ecuación por lo tanto define el precio de un bono cupón cero a un tiempo futuro t y el precio de un bono hoy. El último puede ser calculado por una estructura límite del tiempo presente.

Sea el periodo δt de la tasa de interés al tiempo t denotada por $R(t)$ o R de (2.7) podemos ver que

$$P(t, T) = A'(t, T)e^{-R(t)(T-t)} \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \ln (A'(t, T)) = & \ln \left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right) - \frac{T - t}{\delta t} \ln \left(\frac{P(0, t + \delta t)}{P(0, t)} \right) \\ & - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T - t) [(T - t) - \delta t] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usualmente se cuentan los precios de los bonos en términos de $R(t)$ antes que de r y entonces la ecuación (2.8) es más útil que la ecuación (2.7). Las ecuaciones (2.8) y (2.9) involucran sólo precios de los bonos al tiempo cero, no derivadas parciales de esos precios. En aplicaciones del modelo no se necesita una curva inicial cero diferenciarle como veremos mas adelante.

El precio al tiempo cero de una opción call que se ejerce al tiempo T sobre un bono cupón cero que se ejerce al tiempo s es

$$LP(0, s)N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_p)$$

Donde L es el monto original de la deuda que representa el bono, sin tomar en cuenta los intereses, k es el precio de ejercicio,

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, t)k} + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_p = \sigma(s - T)\sqrt{T}$$

El precio de una opción call sobre el bono es

$$KP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, s)N(-h)$$

El modelo Ho-Lee es un modelo analíticamente dócil que involucra el no arbitraje. Es fácil de aplicar y proporciona una exacta tendencia de la estructura límite presente en las tasas de interés.

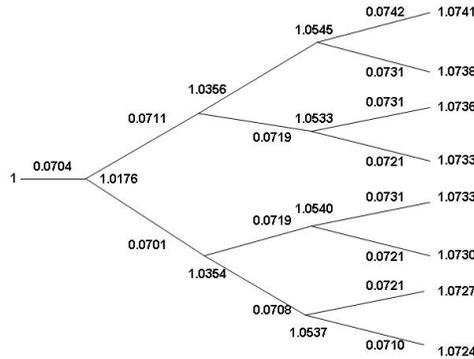


Figura 2.1: Árbol de tasa corta y de mercado de dinero modelo Ho-Lee

Supongamos que tenemos los siguientes $r_0 = 0.0704$, $f_1 = 0.0706$ $f_2 = 0.0719$, $f_3 = 0.0726$ y $\sigma = 0.001$.

Donde r_0 es la tasa corta y las f_j , $j = 1, \dots, 4$ son las tasas adelantadas determinadas a través de una curva de rendimientos (*no necesariamente diferenciarles*) y $dt = .25$.

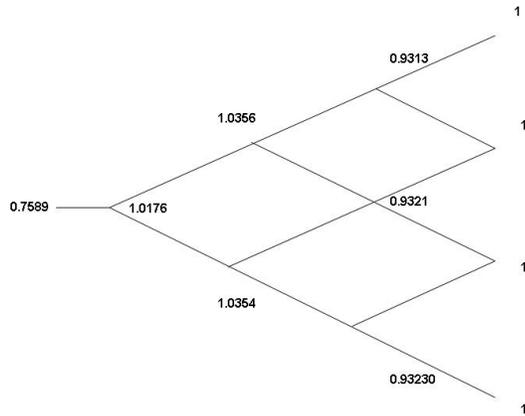


Figura 2.2: Árbol de bono a 4 periodos modelo Ho-Lee

Utilizando el método iterativo de árboles binomiales, podemos obtener el precio de un bono, la tasa corta y el árbol de mercado de dinero como se muestra en las figuras (2.1) y (2.2). Podemos observar que con dichos datos, el precio de un bono que paga una unidad monetaria a la fecha de vencimiento en el periodo 4 es de \$0.7589. Los detalles técnicos pueden ser consultados en [2].

2.4. Modelo Vasicek

En el modelo Vasicek, el proceso neutral de riesgo para r es

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dB \quad (2.10)$$

donde a , b y σ son constantes. Éste modelo incorpora reversión a la media (es decir, la tasa de interés parece retrasarse a un nivel promedio de largo plazo en otro tiempo). El término $a(b - r)$ empuja a r de nuevo a b , es decir, la tasa corta es impulsada a un nivel b a tasa a . La constante a determina la velocidad o tendencia del retorno a b . Sobreponemos sobre éste impulso una distribución normal estocástica con término σdB_t .

Para hacer que el modelo Vasicek tenga un parámetro que represente una dependencia del tiempo, se puede incluir una tendencia $\theta(t)$ al proceso de r y esto permite que la tasa a y el factor de volatilidad σ sean también funciones del tiempo. El modelo queda de la siguiente manera

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b - r)] dt + \sigma(t)dB_t \quad (2.11)$$

Sea $\lambda(t)$, una función de tiempo de la tasa de interés del precio de mercado sobre el intervalo $(0, t)$. Esto significa que el precio f de cualquier reclamo contingente en r debe satisfacer

$$f_t + [\phi(t) - a(t)r] f_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 f_{rr} - rf = 0 \quad (2.12)$$

donde

$$\phi(t) = a(t)b + \theta(t) - \lambda(t)\sigma(t) \quad (2.13)$$

El precio de un bono de descuento que paga una unidad monetaria al tiempo T es la solución a (2.12) que satisface la condición límite $f = 1$ cuando $t = T$. Sea la función

$$f = A(t, T) e^{-B(t, T)r} \quad (2.14)$$

una ecuación que satisface (2.12) y la condición límite cuando

$$A_t - \phi(t)AB + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 AB^2 = 0 \quad (2.15)$$

$$B_t - a(t)B + 1 = 0 \quad (2.16)$$

con $A(T, T) = 1$ y $B(T, T) = 0$

La ecuación (2.14) proporciona el precio de un bono cupón cero con vencimiento en al tiempo $t = T$. Resolviendo (2.15) y (2.16) cuando $a(t)$, $\phi(t)$ $\sigma(t)$ son constantes se sigue de la fórmula del precio de un bono de Vasicek

$$B(t, T) = \left(1 - e^{-a(T-t)/a}\right)$$

$$A(t, T) = \exp \left[\frac{(B(t, T) - T + t) \left(a\phi - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right]$$

La función $\sigma(t)$ puede ser escogida para reflejar las volatilidades presentes y futuras de la tasa corta de interés r .

Veamos como están definidos $A(0, T)$ y $B(0, T)$ tratando de determinar $a(t)$, $\phi(t)$, $A(t, T)$ y $B(t, T)$ en términos de $A(0, T)$, $B(0, T)$ y $\sigma(t)$.

Si definimos las ecuaciones (2.15) y (2.16) respecto a T obtenemos

$$A_{rT} - \phi(t) [A_T B + AB_T] + \frac{1}{2} \sigma(t)^2 [A_T B^2 + 2AB B_T] = 0 \quad (2.17)$$

$$B_{tT} - a(t) B_T = 0 \quad (2.18)$$

Eliminando $a(t)$ de (2.15) y de (2.18) tenemos

$$B_t B_T - B B_{tT} + B_T = 0 \quad (2.19)$$

Eliminando $\phi(t)$ de (2.15) y (2.17) tenemos

$$A B A_{tT} - B A_t A_T - A A_t B_T + \sigma(t)^2 A^2 B^2 \frac{B_T}{2} = 0 \quad (2.20)$$

Las condiciones límite para (2.19) y (2.20) son los valores conocidos de $A(0, T)$, $B(0, T)$ y $A(T, T) = 1$, $B(T, T) = 0$. La soluciones a (2.19) y (2.20) que satisfacen las condiciones límite son:

$$B(t, T) = \frac{B(0, T) - B(0, t)}{\frac{\partial B(0, t)}{\partial t}} \quad (2.21)$$

$$A'(t, T) = A'(0, T) - A'(0, t) - B(t, T) \frac{\partial A'(0, t)}{\partial t} - \left(\frac{1}{2} \left[B(t, T) \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{\frac{\partial B(0, \tau)}{\partial \tau}} \right]^2 d\tau \right)$$

donde $A' = \log [A(t, T)]$. Sustituyendo en (2.14) y (2.15) obtenemos

$$a(t) = - \frac{\frac{\partial^2 B(0, T)}{\partial t^2}}{\frac{\partial B(0, T)}{\partial t}}$$

$$\phi(t) = -a(t) \frac{\partial A'(0, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 A'(0, t)}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau)} \right]^2 d\tau$$

Ahora veamos la valuación de una opción sobre bajo el modelo Vasicek. Sea $P(r, t_1, t_2)$ el precio al tiempo t_1 de un bono cupón cero que vence en t_2 . Entonces el precio queda determinado por:

$$P(r, t_1, t_2) = A(t_1, t_2) e^{B(t_1, t_2)r}$$

Usando el lema de Itô, la volatilidad de $P(r, t_1, t_2)$ es $\sigma(t_1 B(t_1, t_2))$. Puesto que es independiente de r , la distribución del precio de un bono en un tiempo dado, condicionado a su precio en un tiempo anterior es lognormal.

Consideremos una opción europea de compra (*call*) sobre un bono cupón cero con precio de ejercicio X , el bono tiene fecha de vencimiento S ($s \geq T \geq t$). La opción call puede considerarse como una opción para cambiar X unidades de un bono cupón cero que vence al tiempo T por una unidad de un bono cupón cero que vence al tiempo s . Definimos $\alpha_1(\tau)$ y $\alpha_2(\tau)$ como las volatilidades al tiempo τ de los precios de los bonos cupón cero que vencen al tiempo T y s respectivamente, y $\rho(\tau)$ como la correlación instantánea entre dos precios de los bonos. Se sigue entonces que el precio de la opción C está dado por:

$$C = P(r, s, t)N(\xi) - XP(rtT)N(\xi - \sigma_p)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sigma_p} \log \frac{P(r, t, s)}{P(r, t, T)X} + \frac{\sigma_p}{2} \\ \sigma_p^2 &= \int_t^T [\alpha_1(\tau)^2 - 2\rho(\tau)\alpha_2(\tau) + \alpha_2(\tau)^2] d\tau \end{aligned}$$

$N(*)$ es la función de distribución acumulativa. Puesto que usaremos un modelo de un factor $\phi = 1$. Además

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau) &= \sigma(\tau)B(\tau, s) \\ \alpha_2(\tau) &= \sigma(\tau)B(\tau, T) \end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\sigma_p^2 = \int \sigma(\tau)^2 [B(\tau, s) - B(\tau, T)]^2 d\tau$$

La opción sobre el cupón de relación del bono es por lo tanto la suma de n opciones bonos cupón cero con precio de ejercicio de la i -ésima opción existente X_i .

Con los mismos datos que el ejemplo del modelo Ho-Lee y usando el método iterativo de árboles binomiales para el modelo Vasicek, podemos obtener el precio de un bono, la tasa corta y el árbol de mercado de dinero como se muestra en las figuras (2.3) y (2.4). Podemos observar que con dichos datos, el precio de un bono que paga una unidad monetaria a la fecha de vencimiento en el periodo 4 es de \$0.7776. Los detalles técnicos pueden ser consultados en [2].

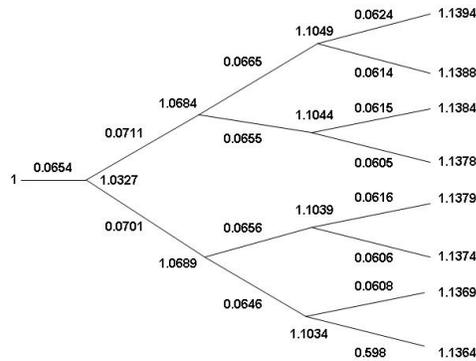


Figura 2.3: Árbol de la tasa corta y mercado de dinero modelo Vasicek

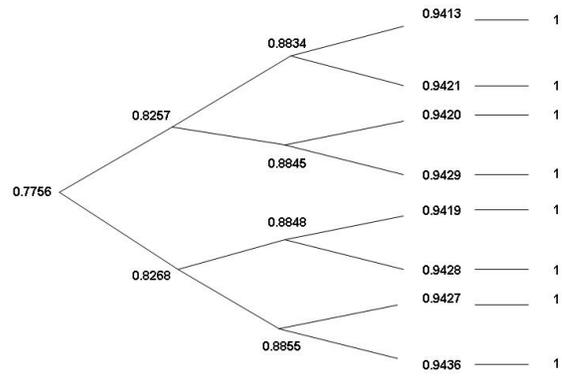


Figura 2.4: Árbol de bono a 4 periodos

Capítulo 3

Teoría del portafolio

En el presente capítulo introduciré de manera breve la teoría del portafolio realizada por Harry Markowitz, herramienta central del trabajo para establecer rendimientos mayores para los fondos de inversión. Implementaré una metodología para encontrar la frontera eficiente y la línea de mercado de dinero (*LMC*). El contenido del capítulo fue tomado de [13], [9], [10] y [11].

3.1. Marco histórico

Así como hoy, desde hace más de 50 años, las finanzas han sido la plataforma económica para abrir nuevos horizontes donde las personas deseadas de obtener ingresos mediante la inversión de sus bienes monetarios, puedan sentir una tranquilidad en las decisiones financieras que tomen; la incertidumbre es un paradigma al cual muchos investigadores han dedicado su trabajo.

El presente trabajo tiene como objetivo explicar, de manera sintetizada la forma en como se calculan los rendimientos promedios de portafolios de inversión y el riesgo implícito en ellos; el artículo se divide en cuatro apartados. En el primero, se comenta la teoría de portafolios de Markowitz y el modelo lognormal como hipótesis de la distribución que siguen los rendimientos en periodos cortos de tiempo; posteriormente se establecen de manera general, el modelo de media-varianza, en el cual, se resuelve el problema de maximización para encontrar el portafolio de varianza mínima; en el tercer apartado, se introduce un método alternativo que permite de forma recurrente obtener los diversos portafolios que componen la frontera eficiente,

así como la construcción de la línea de mercado de capitales para el caso en el que se introduce un activo libre de riesgo. Para finalizar se establecen las conclusiones generales del trabajo.

Como apéndice, se ejemplifica el marco teórico utilizando acciones recientes y la tasa de un activo libre de riesgo (Tasa Cete)

3.2. Portafolio óptimo y rendimientos lognormales

Cuando tenemos un conjunto finito de activos, el gran problema es encontrar un portafolio que combine dichos activos usando un porcentaje fijo que los distribuya dadas las preferencias de los inversionistas.

En la década de 1950, Harry Markowitz desarrolló un enfoque que revolucionó las finanzas con la llamada *teoría moderna de portafolio*. Markowitz establece una selección de inversiones en las que asigna recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles.

El enfoque de Markowitz considera que los rendimientos de los activos se comportan como un proceso estocástico; sin embargo, establece como hipótesis que los rendimientos siguen una distribución normal sobre intervalos de tiempo en el que se hace el análisis; bajo la hipótesis anterior, la eficiencia del portafolio es determinada simplemente de la composición de rendimientos esperados y de la desviación estandar de los rendimientos.

A partir de la teoría hecha por Markowitz, seleccionaremos nuestros activos, haciendo unas modificaciones a las hipótesis como sigue:

- El precio de los activos sigue una distribución lognormal conjunta de caminatas aleatorias.
- Las inversiones se realizan en un periodo de tiempo simple.
- La selección de activos se realiza al inicio del periodo, excepto cuando se hace un reevalúo continuo que conserve la selección de activos constantes durante todo el periodo.

- Nuestra meta es maximizar la utilidad esperada de la riqueza de un inversionista al final del periodo.
- Tenemos una función de utilidad isoelástica de aversión al riesgo.
- La selección de activos es libre. En particular, se permite la venta en corto

Para asegurar que la pérdida máxima será no mayor al 100% de la inversión inicial, como hipótesis central tenemos que los rendimientos son lognormales; bajo dicha suposición, es necesario definir lo siguiente:

Sea s_i una variable aleatoria que sigue un proceso de Itô como se muestra en la ecuación (3.1):

$$\frac{ds_i}{s_i} = \alpha_i dt + \sigma_i dX_i \quad (3.1)$$

donde las dX_i se distribuyen $N[0, dt]$ y $\alpha = \mu + (1/2)\sigma^2$, los logrendimientos de $(s_i(1)/s_i(0))$ se distribuyen $N[\mu, \sigma]$; dado que $s_i(t)$ se distribuye lognormal, tenemos

$$s_i(t) = s_i(0)e^{\mu_i t + \sigma_i X_i}$$

donde las X_i se distribuyen $N[0, t]$

si definimos a $r_1 = e^\alpha - 1$ como la media aritmética de los rendimientos y $r_2 = e^\mu - 1$ como la media geométrica, la siguiente ecuación siguiente:

$$\frac{ds_i}{s_i} = e^{\mu_i dt + \sigma_i dX_i} - 1$$

no es mas que la media de nuestros rendimientos dado que s se comporta una variable aleatoria en el tiempo.

Al final del periodo dt , dado que la v.a. dX_i se distribuye normal, el porcentaje de cambio en el valor del activo, ds_i/s_i se distribuye normal con media $\alpha_i dt$ y varianza $\sigma_i^2 dt$.

Sobre el periodo dt , el porcentaje de cambio en el valor de nuestro portafolio \mathcal{P} se distribuye normal con rendimientos esperados $\mu_{\mathcal{P}} dt$ y varianza $\sigma_{\mathcal{P}}^2$

pues está constituido por combinaciones lineales de activos normalmente distribuidos.

Tenemos que hacer uso de una artimaña para hacer que los rendimientos de \mathcal{P} se distribuyen lognormal. Observemos que durante el periodo de tiempo dt , el precio de los activos tienen subidas y bajadas aleatorias, esto implica que no presenta un gran balance.

Supongamos que podemos hacer un rebalance comprando y vendiendo pequeñas cantidades de los componentes de los activos para restaurar su asignación por proporciones específicas de w_i ; si hacemos dicho rebalance, al inicio del siguiente periodo corto dt , nuestro portafolio comenzará con las proporciones originales de los activos.

Haciendo el rebalance de \mathcal{P} al final del periodo dt , el valor del portafolio seguirá una caminata aleatoria lognormal; si hacemos un rebalanceo continuo, en el límite cuando $dt \rightarrow 0$, nuestra combinación lineal de activos seguirán una caminata aleatoria lognormal con rendimientos esperados $\mu_{\mathcal{P}}$ y desviación estándar $\sigma_{\mathcal{P}}$.

Establecer rendimientos lognormales tiene grandes costos computacionales, pues como se mencionó, el reevalúo constante en periodos muy cortos de tiempo implica demasiadas iteraciones y supervisión constante, por lo que en lo que resta del artículo, trabajaremos a partir de el supuesto de rendimientos normales.

3.3. Enfoque media-varianza

Tomando en cuenta que como hipótesis tenemos que las ventas en corto están permitidas; definamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(r_{\mathcal{P}}) &= \tilde{r}_{\mathcal{P}} \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

como la tasa esperada de rendimiento del portafolios donde $E(r_i) = \tilde{r}_i$ es la tasa esperada del rendimiento i y las w_i es el peso que se le dará a cada activo.

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \right) \quad (3.3)$$

como la varianza del rendimiento del portafolios,

$$\text{cov}(r_i, r_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

a la covarianza de los rendimientos, donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación de los rendimientos de los activos i, j .¹

De forma matricial podemos definir la varianza de la siguiente manera:

$$\sigma_{\mathcal{P}}^2 = W' \Sigma W$$

donde Σ representa la matriz de varianzas y covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

También podemos definir a $\tilde{r}_{\mathcal{P}} = W' \tilde{R}_i$ donde W' es la matriz transpuesta del vector de las ponderaciones. \tilde{R}_i es el vector de las tasas esperadas de rendimientos del portafolios.

Dado el enfoque de Markowitz, tenemos que resolver un problema de maximización tomando en cuenta que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ y recordando que se puede realizar la venta en corto, podemos utilizar multiplicadores de Lagrange para resolver nuestro problema.

Como w_i no tiene restricción alguna, existe la posibilidad de que los componentes del portafolios sean pasivos.

El problema es encontrar la combinación de los n activos para obtener el portafolios de varianza mínima global, es decir:

¹Si $\rho_{ij} = 1$, los rendimientos se mueven en el mismo sentido; si $\rho_{ij} = -1$, los rendimientos se mueven en sentidos opuestos; si $\rho_{ij} = 0$ los activos son independientes

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma_{\mathcal{P}}^2 \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{aligned}$$

utilizando multiplicadores de Lagrange obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right) \quad (3.4)$$

derivamos (3.4) respecto a los ponderadores w_i y al multiplicador de Lagrange y obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij} - \lambda = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0$$

para toda $j = 1, 2, \dots, n$; de forma matricial podemos representarlo como:

$$V \cdot W = B \quad (3.6)$$

donde:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}; W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3.6), obtenemos que el vector de ponderaciones que optimizan el portafolio es

$$W = V^{-1} \cdot B \quad (3.7)$$

Encontrando nuestra matriz inversa (V^{-1}), podemos obtener el valor de las ponderaciones y el punto de varianza mínima global.

Ya encontrado el punto de varianza mínima, debemos encontrar ahora una combinación de activos que proporcione varianza mínima para una tasa de rendimiento esperada y que a su vez sea superior al rendimiento del portafolio de varianza mínima global (\tilde{r}_m).

De manera similar al anterior:

$$\begin{aligned} \text{Min} \frac{1}{2} \sigma_p^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{s.a} \quad \bar{r}_p &= \sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \end{aligned}$$

$\bar{r}_p > \tilde{r}_m$ representa una tasa de rendimiento arbitraria. Con multiplicadores de Lagrange obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right) + \gamma \left(\bar{r}_p - \sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i \right) \quad (3.8)$$

derivamos la expresión (3.8) respecto a los ponderadores w_i y a los dos multiplicadores de Lagrange y obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^n w_i \sigma_{i1} - \gamma \tilde{r}_i - \lambda = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{r}_i - \bar{r}_p$$

El sistema es de $n+2$ ecuaciones con $n+2$ incógnitas, de forma matricial lo podemos expresar como:

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} = \mathcal{B} \quad (3.10)$$

donde:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & \tilde{r}_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & \tilde{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & \tilde{r}_n & 1 \\ \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 & \dots & \tilde{r}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathcal{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix}; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{r}_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

encontrando la solución al sistema y los valores de λ y γ , obtenemos las proporciones para invertir los activos y obtener la tasa de rendimiento \bar{r}_p , el cual asegura que tengamos la varianza mínima dentro de todos los portafolios con dicha tasa esperada de rendimientos.

Si el lector está interesado en más detalles sobre el método media-varianza, una buena referencia es [11].

Desafortunadamente, el método es un proceso iterativo demasiado lento aún con la ayuda de Excel de Windows puesto que para cada rendimiento esperado dado, tenemos que resolver un sistema de ecuaciones distinto n veces a fin de encontrar así nuestra frontera eficiente y sus ponderaciones respectivas.

3.4. Método alternativo

En la sección anterior, se presentó de manera breve el modelo para encontrar el portafolio de varianza mínima global, así como el conjunto de portafolios que conformen la frontera eficiente dado un rendimiento esperado fijo, ambos, mediante la implementación de multiplicadores de Lagrange y resolviendo sistemas de ecuaciones.

En esta sección, se presenta de forma breve un modelo alternativo que nos permitirá obtener portafolios fácilmente y con un costo computacional bajo.

Necesitamos obtener los r_i y σ_i de nuestros *logrendimientos*; construir nuestra matriz de varianzas y covarianzas

Para encontrar nuestros logrendimientos, utilizamos la ecuación (3.11):

$$r_i = \log\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right) * 100 \quad (3.11)$$

$$E(r) = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n} \quad (3.12)$$

$$Var(r_a) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - E(r))^2}{n} \quad (3.13)$$

$$Cov(r_a, r_b)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_a - E(r_a)) * (r_b - E(r_b))}{n - 1} \quad (3.14)$$

Construimos nuestra matriz Σ de tal forma que $a_{ii} = Var(r_a)$ y $a_{ij} = Cov(r_a, r_b)$ para toda $i, j = 1, \dots, n$.

Para encontrar las w_i que nos aseguren una la mínima varianza, debemos realizar algunas operaciones. Sea $a_{ij} \in \Sigma$ las entradas de la matriz de varianzas y covarianzas, definimos

$$LR = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$LC = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

$$LRC = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

Debemos tomar en cuenta que $LR = LC'$, sin embargo, para nuestro fin si es relevante pues la multiplicación de matrices es una operación delicada donde los renglones y columnas son factores determinantes para el calculo de multiplicación con matrices.

Necesitamos hacer uso de 4 operaciones esenciales en el cálculo posterior; definimos

$$a = LC' * \mu$$

$$\begin{aligned}
&= LR * \mu \\
b &= \mu' * \Sigma^{-1} * \mu \\
c &= LRC \\
d &= (b * c) - (a^2) \\
E &= \Sigma * \mu \\
F &= \left(\frac{b}{d} * LR \right) - \left(\frac{a}{d} * E \right) \\
G &= \left(\frac{c}{d} * E \right) - \left(\frac{a}{d} * LR \right)
\end{aligned}$$

Con la ayuda de las operaciones anteriores, procederemos a construir nuestro portafolio de varianza mínima como sigue:

$$W = \left(\frac{1}{c} * LR \right) \quad (3.15)$$

$$\mu_{\mathcal{P}} = \frac{a}{c} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

Una vez obtenido el portafolio de varianza mínima procedemos a construir nuestra frontera eficiente mediante la ecuación (3.18):

$$\sigma_{ef} = \left(\frac{c}{d} * \left(\mu_{ef} - \frac{a}{c} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

donde μ_{ef} tomo los valores de distintos rendimientos esperados previamente establecidos. Las ponderaciones que conforman los portafolios de la frontera eficiente se obtienen de la ecuación (3.19).

$$\mathcal{W} = F + (G * \mu_{ef}) \quad (3.19)$$

Con éste sencillo mecanismo, podemos encontrar nuestra frontera eficiente y las ponderaciones que nos permitirán encontrar nuestros diversos portafolios, así como su desviación estandar a partir de un rendimiento esperado dado.

3.5. Activo libre de riesgo

Los inversionistas, dependiendo de su elección al invertir, se pueden clasificar como:

1. Amantes al riesgo. *Invierten en activos riesgosos tomando en cuenta que entre mas riesgo mayor será la ganancia.*
2. Indiferentes al riesgo. *Como su nombre lo dice, son indiferentes al riesgo, por lo que invierten tanto en activos libres de riesgo como en activos riesgosos.*
3. Adversos al riesgo. *Temen estar sumergidos en inversiones demasiado riesgosas, por lo que generalmente utilizan activos libres de riesgo para asegurar un rendimiento.*

En las secciones anteriores, manejamos inversiones riesgosas, las cuales por sus características, son mas comerciales; sin embargo, para el caso de los fondos de inversión para las pensiones, la característica principal es establecer los mayores rendimientos con el menor riesgo posible, por éste motivo, es necesario para el tipo de inversión (inversionistas adversos al riesgo), introducir en los portafolios, activos libres de riesgo.

La verdadera razón por la cual es recomendable incluir activos libres de riesgo es que se utiliza como mecanismo para prestar o pedir prestado efectivo a la tasa libre de riesgo. Al incluir un activo libre de riesgo, obtenemos un enfoque realista, además, introducimos una degeneración matemática que simplifica la forma de la frontera eficiente.

Generalmente, los activos libre de riesgo, son emitidos por los gobiernos federales con el fin de impulsar obras públicas dentro del país con inversión privada; para el caso mexicano, el activo libre de riesgo es el Cete, para el caso de las inversiones, utilizaremos i_{lr} como la tasa Cete a 364 días.

$$i'_{lr} = \frac{\ln(1 + \frac{i_{lr}}{100})}{p} * 100 \quad (3.20)$$

donde (3.20) es la tasa efectiva diaria de nuestro activo.

Una vez que se han obtenido las ponderaciones para los portafolios que conformaran la frontera eficiente, precedemos a encontrar la línea de mercado a partir de la tasa libre de riesgo. La línea de mercado al intersectarse con la frontera eficiente nos permitirá obtener un punto tal que sea nuestro portafolio óptimo de inversión.

Para construir nuestra línea de mercado utilizamos una ecuación conocida como el índice de Sharpe como se muestra en la ecuación (3.21)

$$IS = \frac{\mu_{ef} - \mu_{rf}}{\sigma_{ef}} \quad (3.21)$$

Maximizamos el IS para poder obtener el punto que haga la intersección antes mencionada. Para poder obtener dicha línea, utilizamos la ecuación (3.22).

$$\mu'_{rf} = \mu_{rf} + (max(IS) * \sigma_{rf}) \quad (3.22)$$

donde σ_{rf} incrementa hasta que se encuentra el punto de tangencia. El índice de Sharpe muestra que el incluir un activo libre de riesgo, se permite linealizar el riesgo.

3.6. Código

Debemos tomar en cuenta que el tiempo, puede ser el mejor aliado o el peor enemigo, por tal motivo, a pesar de que Excel de Windows es un herramienta efectiva, el hacer demasiadas operaciones nos puede causar ciertos conflictos a la hora de realizar nuestros cálculos. El siguiente código pretende agilizar y minimizar el costo computacional.

Para utilizar el código, debemos bajarlo de www.scilab.org; es necesario que las acciones sean guardadas en un archivo.sce; dentro del archivo, debemos crear una matriz de las acciones como: $A1[acciones]$; lo ejecutamos con $ctrl+l$ para que se lea dentro de scilab. El siguiente programa debe ser guardado como un archivo.sci y ejecutarlo de igual manera que el archivo de las acciones, seleccionarlo y utilizar la sentencia *Evaluate the selection(ctrl+y)* que se encuentra dentro del comando Execute.

PEÑOLES AMTEL ARA ICA TELECOM GFINBUR WALMEX FEM-
SA GMODELO

```
A1=[ 76.28 16.2 46.96 36.34 23.27 16.2 29.65 96.98 40.14 73.91 16.38 47.75
36.55 23.89 16.38 29.87 99.38 41.33 75.32 16.21 47.6 35.85 24.33 16.21 30.33
98.93 41.1 74.53 16 47 34.45 23.51 16 29.89 96.27 40.04 76.68 16 46.15 33.95
23.93 16 29.75 96.58 39.68]
```

```
function [slm,mlm,IS,sf,muf,PN,wm,sm,mum,T,v,m]=Teoriaport_fgm(A1)
```

```
[n1,n2]=size(A1)
```

$ALR=7.36$ es la tasa media de rendimiento de un activo libre de riesgo, en
nuestro caso es tasa Cete a 90 días

```
dias = 91
```

Se genera los logrendimientos de nuestro portafolio:

```
for j = 1 : n2
    for i = 1 : n1 - 1
        A2(i,j) = (log10(A1(i + 1, j)/A1(i, j))) * 100
    end
end
```

Obtenemos la media y varianza de los logrendimientos de las acciones

```
[m1, m2] = size(A2)
for i = 1 : m2
    m(i) = mean(A2(:, i))
    v(i) = variance(A2(:, i))
end
```

Se genera una matriz de varianzas-covarianzas de $m2 \times m2$ donde $m2$ es el
número de acciones de nuestro portafolio:

```
t = 1
for i = 1 : m2
    h = 1
    for j = 1 : m2
```

```

z = 0
  if i <> j
    for k = 1 : m1
      z = z + ((A2(k, j) - m(j)) * ((A2(k, i) - m(i))))
    end
    x = z/(m1)
    S(h, t) = x
    h = h + 1
  elseif i == j
    for k = 1 : m1
      z = z + ((A2(k, j) - m(j)) * ((A2(k, i) - m(i))))
    end
    x = z/(m1 - 1)
    S(h, t) = x
    h = h + 1
  end
end
t = t + 1
end

```

Se calcula la inversa de nuestra matriz de varianzas-covarianzas

$$T = \text{inv}(S)$$

Coefficientes para obtener los ponderadores para diferentes portafolios eficientes

```

[n1, n1] = size(S)
for i = 1 : n1
  LR(i) = sum(T(i, :))
  LC(i) = sum(T(:, i))
  LRC = sum(T)
end

```

$$\begin{aligned}
 a &= LC' * m \\
 b &= m' * T * m \\
 c &= LRC \\
 d &= (b * c) - (a^2)
 \end{aligned}$$

$$E = T * m$$

```

for i = 1 : n1
    F(i) = ((a/d) * LR(i)) - ((a/d) * E(i))
    G(i) = ((c/d) * E(i)) - ((a/d) * LR(i))
end

```

Portafolio de varianza mínima global:

```

for i = 1 : n1
    wm(i) = (1/c) * LR(i)
end

```

```

mum = a/c
sm = (1/c).^5
plot(sm,mum)

```

```

muf = (mum - 1) : ,1 : (sm + 1,5)
k = length(muf)

```

Frontera eficiente:

```

for i = 1 : k
    sf(i) = (((c/d) * (muf(i) - (a/c))^2) + (1/c)).^5
end

```

Ponderadores w(i) para nuestros portafolios eficientes

```

for i = 1 : n1
    for j = 1 : k
        PN(i,j) = F(i) + (G(i) * muf(j)')
    end
end

```

Construido nuestro portafolio de activos riesgosos, procedemos a construir nuestra Línea de Mercado de Capitales(LMC):

$$ml = \log(1 + (ALR/100))/dias$$

Índice de Sharpe:

```
for i = 1 : k
    IS(i) = (muf(i) - ml)/sf(i)
end
```

Se grafica la frontera eficiente:

```
plot(sf, muf)
```

```
slm = 0 : ,3 : 4,5
j = length(slm)
```

```
for i = 1 : j
    mlm(i) = ml + (max(IS) * slm(i))
end
```

Se grafica la LMC construida a partir del Índice de Sharpe:

```
plot(slm, mlm)
```

Finaliza el programa:

```
endfunction
```

En las secciones anteriores ilustramos la conformación de portafolios para establecer inversiones. A través de un mecanismo fácil y sencillo podemos generar un número infinito de combinaciones que nos permiten obtener portafolios de acuerdo a los tres tipos de inversionistas que uno puede enfrentar, para así, establecer las mejores condiciones a fin de que se obtengan los mejores beneficios y conformidad.

La ayuda del programa propuesto mediante la implementación de un software libre, es de gran utilidad pues el costo computacional se reduce bastante y el tiempo utilizado en la construcción de portafolios es mínimo; con esto, se pretende que el tiempo se utilice mejor en la selección de activos, cobertura de portafolios y análisis del valor en riesgo, el cual es muy solicitado hoy en día.

Capítulo 4

Aplicación

Apegándonos a la normatividad establecida por la CONSAR para la crear portafolios de inversión, diseñaremos algunos portafolios con la finalidad de mostrar rendimientos esperados mayores a los establecidos actualmente por las Afores y Siefores.

Debido a la dificultad para obtener datos de lugares como Invertia o la BMV, los datos fueron obtenidos de la página de yahoo, denominada yahoo finance. Se obtuvieron 504 datos diarios del IPC y 31 emisoras comprendidos del 3 de enero de 2005 al 28 de diciembre de 2006.

Se utilizará el modelo de Capital Asset Pricing Model (CAPM) como medida de exposición al riesgo que presentan las acciones de manera individual. A partir de un análisis de series de tiempo en ITSM, se creará un modelo de cobertura con opciones sintéticas. Por último, se realizará un análisis de riesgo mercado utilizando la metodología VaR. Para cerrar la aplicación, con la finalidad de comparar el portafolios creado con uno empírico, utilizaremos los mismo datos estimados para modelar un portafolios futuro.

Si el lector está interesado en detalles técnicos mas profundos, una buena referencia puede ser el libro de David G. Luenberger [8].

Emisoras	Promedio	σ	Emisoras	Promedio	σ	Emisoras	Promedio	σ
ALFAA	0.077	0.964	FEMSAUBD	0.058	0.775	ICA	0.112	0.943
AMXL	0.060	0.633	GCARSOA1	0.085	0.705	KIMBERA	0.077	0.964
ARA	0.071	0.788	GCC	0.097	0.872	SORIANAB	0.060	0.633
ARCA	0.068	0.940	GEOB	0.086	0.661	TELECOMA1	0.071	0.788
BIMBOA	0.033	0.670	GFINBURO	0.068	0.978	TELMEXL	0.068	0.940
CEMEXCPO	0.055	0.718	GFNORTEO	0.035	0.811	TLEVISACPO	0.033	0.670
CIEB	0.028	0.808	GMEXICOB	0.115	1.001	TVAZTECACPO	0.055	0.718
COMERCIUBC	0.268	3.035	GMODEL OC	0.091	1.041	URBI	0.028	0.808
CONTAL	0.080	1.065	GRUMAB	0.082	0.828	VITROA	0.268	3.035
DESCB	0.209	2.031	HOMEX	0.020	0.823	WALMEXV	0.080	1.065
ELEKTRA	0.034	1.040						

Cuadro 4.1: Emisoras

4.1. Creación de portafolios

Como primer ensayo, se creará un portafolio con 31 emisoras cotizantes en la BMV; posteriormente bajo el modelo CAPM, se analizarán las betas de las acciones, obteniendo así un portafolio mas reducido con el cual seguiremos la aplicación. Para ambos portafolios, se analizarán 252 datos que corresponden a un año de cotización en el mercado de valores.

4.1.1. Portafolio con 31 emisoras

Para la aplicación, las emisoras seleccionadas y sus rendimientos promedio, se muestran en el cuadro (4.1). Los datos fueron tomados del 28 de diciembre de 2005 al 29 de diciembre de 2006.

Utilizando en Scilab 4.1 el código de programación vista en el capítulo anterior, se creó un portafolios con las 31 emisoras; para construir la línea de mercado, se incorpora un activo libre de riesgo (Cete) con una tasa anual de 7.36%. La construcción de la frontera eficiente, permite obtener información de distintos portafolios de inversión acordes a las cualidades de los inver-

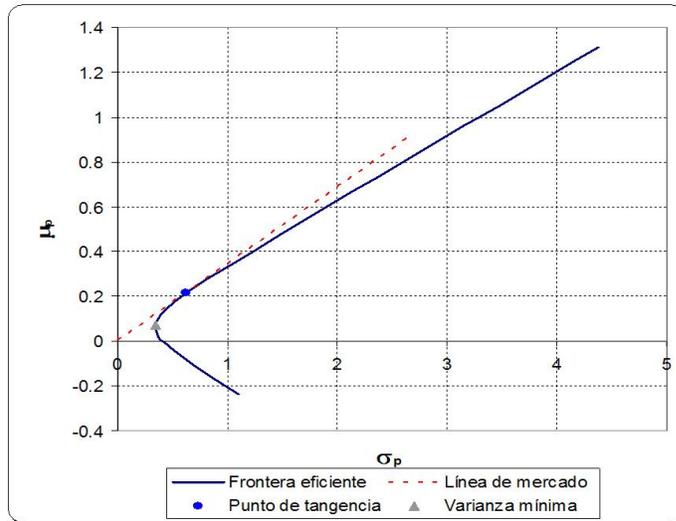


Figura 4.1: Curva de rendimientos 31 emisoras

sionistas. La frontera eficiente y línea de mercado para las 31 emisoras, se muestra en las figura (4.1).

Los ponderadores w_i que se muestra en el cuadro (4.3) indican que, comprando y vendiendo activos en las proporciones indicadas, se obtienen rendimientos diarios esperados de 0.215 % con una volatilidad de 0.628 %. Los datos que conforman la frontera eficiente de los rendimientos es mostrado en el cuadro (4.2). De acuerdo a los ponderadores del cuadro (4.4), el rendimiento diario esperado del portafolio de varianza mínima es de 0.070 % y su volatilidad de 0.782 %.

4.1.2. Portafolio 13 emisoras

Cuando diversificamos un portafolios, implícitamente estamos administrando el riesgo; no obstante, es difícil posicionarse sobre todos los activos que conforman un portafolios numeroso, por tal motivo, se desarrollan herramientas con las cuales podemos seleccionar activos y administrar riesgos.

El CAPM es una herramienta que nos permite especular sobre el riesgo individual de los rendimientos esperados de un activo. Si el portafolio de mercado M es eficiente, la tasa de rendimiento \bar{r}_i del activo i satisface la

FRONTERA EFICIENTE		SHARPE	Línea de Mercado de Valores	
σ_p	μ_p	sr_p	σ_f	μ_f
1.105	-0.236	-0.213	0.000	0.000
0.893	-0.171	-0.192	0.100	0.034
0.690	-0.107	-0.155	0.200	0.069
0.506	-0.043	-0.084	0.300	0.103
0.371	0.022	0.058	0.400	0.137
0.349	0.086	0.247	0.500	0.171
0.455	0.151	0.331	0.600	0.205
0.628	0.215	0.342	0.700	0.240
0.826	0.279	0.338	0.800	0.274
1.036	0.344	0.332	0.900	0.308
1.251	0.408	0.326	1.000	0.342
1.469	0.472	0.321	1.100	0.377
1.690	0.537	0.318	1.200	0.411
1.911	0.601	0.314	1.300	0.445
2.133	0.666	0.312	1.400	0.479
2.356	0.730	0.310	1.500	0.513
2.579	0.794	0.308	1.600	0.548

Cuadro 4.2: Rendimientos 31 emisoras

ω_h	Emisora	ω_h	Emisora	ω_h	Emisora
0.023	ALFAA	0.965	FEMSAUBD	-0.132	ICA
-0.494	AMXL	-0.029	GCARSOA1	1.183	KIMBERA
-0.094	ARA	0.969	GCC	0.043	SORIANAB
1.489	ARCA	0.054	GEOB	-0.693	TELECOMA1
0.241	BIMBOA	0.821	GFINBURO	0.966	TELMEXL
-1.350	CEMEXCPO	-0.332	GFNORTEO	0.568	TLEVISACPO
0.213	CIEB	0.083	GMEXICOB	-0.235	TVAZTECACPO
0.463	COMERCIUBC	0.373	GMODELOC	0.086	URBI
0.695	CONTAL	-0.285	GRUMAB	-0.088	VITROA
0.018	DESCB	0.328	HOMEX	0.129	WALMEXV
0.409	ELEKTRA				

Cuadro 4.3: Ponderadores portafolio propuesto 31 emisoras

0.045	ALFAA	0.132	FEMSAUBD	-0.031	ICA
-0.092	AMXL	-0.019	GCARSOA1	0.209	KIMBERA
-0.051	ARA	0.123	GCC	0.008	SORIANAB
0.196	ARCA	0.012	GEOB	-0.113	TELECOMA1
0.023	BIMBOA	0.136	GFINBURO	0.169	TELMEXL
-0.117	CEMEXCPO	-0.085	GFNORTEO	0.080	TLEVISACPO
0.032	CIEB	0.002	GMEXICOB	-0.002	TVAZTECACPO
0.057	COMERCIUBC	0.047	GMODELOC	0.004	URBI
0.117	CONTAL	0.005	GRUMAB	-0.014	VITROA
0.022	DESCB	0.013	HOMEX	0.005	WALMEXV
0.086	ELEKTRA				

Cuadro 4.4: Ponderadores de varianza mínima 31 emisoras

ecuación

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(r_M - r_f) \quad (4.1)$$

donde $\beta_i = \sigma_{iM}/\sigma_M^2$.

El CAPM cambia el concepto de riesgo de un activo de σ a β cuando medimos activos individuales, sin embargo, medimos el riesgo de un portafolio en términos de σ .

Usando los datos a un año tanto de las 31 emisoras como del IPC; con la ecuación (4.1) procedemos a obtener las β 's de cada emisora y tomando en cuenta que mientras mas cercana sea la β a 1, el activo se moverá directamente proporcional al mercado; presentamos las emisoras que presentan las mejores β 's en el cuadro (4.5); en el cuadro (4.1) podemos observar en las casillas sombreadas sus rendimientos promedio.

Una vez seleccionados los activos, procedemos a construir la frontera eficiente que muestra en la figura (4.2), los valores que conforman dichas fronteras son mostrados en la tabla (4.6).

AMXL	0.5135
ARA	0.4403
BIMBOA	0.5117
CEMEXCPO	0.4886
FEMSAUBD	0.5731
GCARSOA1	0.4214
GEOB	0.7428
GFNORTEO	0.5443
ICA	0.9461
SORIANAB	0.5135
TELECOMA1	0.4403
TLEVISACPO	0.5117
TVAZTECACPO	0.4886

Cuadro 4.5: Emisoras con mejores β 's

De acuerdo a los ponderadores del cuadro (4.4) se predice un rendimiento diario esperado del portafolio de varianza mínima de 0.068 % con una volatilidad de 0.526 %. El portafolio propuesto muestra un rendimiento esperado de 0.180 % y una volatilidad de 0.889 %.

4.2. Valor del portafolio y cobertura

La necesidad de saber el comportamiento de activos, ha llevado a muchos investigadores a desarrollar modelos que sirvan en el complicado trabajo del control de riesgos. Los derivados, son herramientas a las que muchos analistas financieros recurren como medida de control a eventos inesperados. El mercado donde se cotizan estos instrumentos (MEXDER) se ha desarrollado en los últimos años dentro del sistema financiero mexicano.

En ésta sección, se describirá un mecanismo denominado opciones sintética para la cobertura de portafolios, en especial la cobertura del portafolio conformado la sección anterior por 13 emisoras.

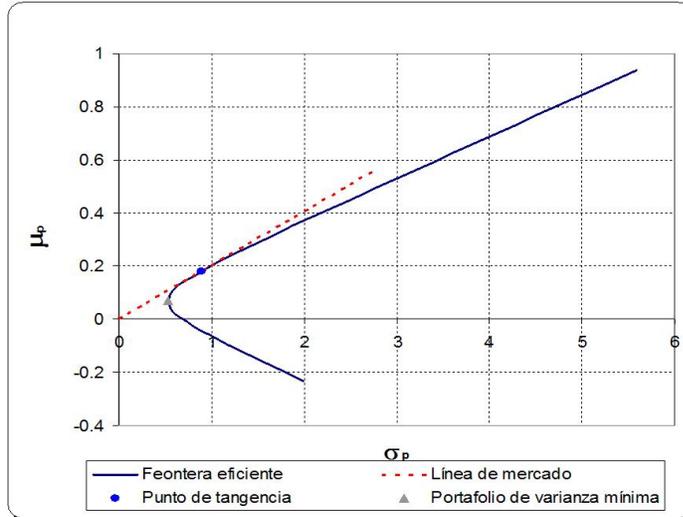


Figura 4.2: Curva de rendimientos 13 emisoras

FRONTERA EFICIENTE		SHARPE	Línea de Mercado de Valores	
σ_p	μ_p	sr_a	σ_f	μ_f
1.995	-0.231	-0.116	0.000	0.000
1.575	-0.163	-0.103	0.100	0.020
1.169	-0.094	-0.081	0.200	0.041
0.801	-0.025	-0.032	0.300	0.061
0.551	0.043	0.078	0.400	0.081
0.595	0.112	0.188	0.500	0.102
0.890	0.180	0.203	0.600	0.122
1.272	0.249	0.196	0.700	0.142
1.682	0.318	0.189	0.800	0.162
2.105	0.386	0.183	0.900	0.183
2.534	0.455	0.180	1.000	0.203
2.966	0.524	0.177	1.100	0.223
3.400	0.592	0.174	1.200	0.243
3.835	0.661	0.172	1.300	0.264
4.272	0.730	0.171	1.400	0.284
4.709	0.798	0.169	1.500	0.304
5.147	0.867	0.168	1.600	0.324

Cuadro 4.6: Rendimientos 13 emisoras

Ponderadores varianza mínima		Ponderadores LM	
ωh	Emisora	ωh	Emisora
-0.171674	AMXL	-1.3815197	AMXL
0.063894	ARA	1.1308384	ARA
0.2332128	BIMBOA	2.1868071	BIMBOA
-0.0134311	CEMEXCPO	-1.0607913	CEMEXCPO
0.2622331	FEMSAUBD	2.8478884	FEMSAUBD
0.0708812	GCARSOA1	0.8096587	GCARSOA1
-0.0294043	GEOB	-0.3726628	GEOB
-0.0051268	GFNORTEO	0.3609983	GFNORTEO
0.0427897	ICA	0.4458304	ICA
0.1850547	SORIANAB	1.6735698	SORIANAB
-0.0182131	TELECOMA1	-0.1639497	TELECOMA1
0.2687808	TLEVISACPO	2.4872778	TLEVISACPO
0.1110032	TVAZTECACPO	0.5351677	TVAZTECACPO

Cuadro 4.7: Ponderadores 13 emisoras

4.2.1. Valor del portafolios

Para poder hacer nuestras estrategias de cobertura, debemos conocer el valor del portafolios, es decir, el activo subyacente. Utilizando la ecuación

$$\pi = \sum_{i=1}^n (w_i * P_i * N_i) \quad (4.2)$$

donde P_i y N_i denotan el precio y la cantidad monetaria destinada del activo i , podremos conocer el valor del portafolios

Con los datos del cuadro (4.8) y la ecuación (4.2) se obtiene que el valor del portafolios es de \$567,925.73. Los valores negativos en las ponderaciones, se deben a que tenemos como hipótesis planteada en el capítulo anterior, que las ventas en corto están permitidas.

4.2.2. Opciones Sintéticas

Hace poco mas de 25 años, en Estados Unidos, se implementó un modelo de cobertura de activos financieros basado en la construcción empírica de opciones de compra o venta. Gracias al trabajo desarrollado por Black-Sholes

Emisora	ω_i	P_i	N_i	π_i
AMXL	-1.381	24.38	1,000	-33,681
ARA	1.130	73.17	300	24,823
BIMBOA	2.187	54.00	1,000	118,088
CEMEXCPO	-1.061	36.61	1,000	-38,836
FEMSAUBD	2.848	125.17	700	249,529
GCARSOA1	0.810	40.00	1,250	40,483
GEOB	-0.373	54.21	1,000	-20,202
GFNORTEO	0.3610	42.25	800	12,202
ICA	0.446	40.75	700	12,717
SORIANAB	1.674	71.04	500	59,445
TELECOMA1	-0.164	39.63	500	-3,249
TLEVISACPO	2.487	58.50	1,000	145,506
TVAZTECACPO	0.535	8.22	250	1,100

Cuadro 4.8: portafolios P_i real

y Merton, se puede obtener el precio teórico de las opciones utilizando la denominada fórmula Black-Sholes como se muestra en la ecuaciones

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (4.3)$$

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (4.4)$$

donde K es el precio de ejercicio con fecha de vencimiento T , S es el precio del derivado. $N(d_1)$ y $N(d_2)$ denotan la distribución de probabilidad estándar de la normal donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

La fórmula para valuar un *call* y un *put* se muestran en las ecuaciones

(4.3) y (4.4) respectivamente.

Para poder plantear nuestra estrategia de cobertura, es necesario conocer el cambio en el precio de un activo. La cantidad **delta** es una herramienta muy útil en el ámbito de los derivados. La delta de una opción call puede ser calculada a partir de la distribución de probabilidad estándar de la normal, es decir, $\Delta_c = N(d_1)$; para el caso de un *put*, es $\Delta_p = N(-d_1)$

En periodos cortos de tiempo, la delta puede ser diferente y el portafolios rebalanceado; no obstante, el valor del portafolios puede ser aproximadamente igual al nuevo valor de la opción. Cuando el día de vencimiento de la opción sintética se aproxime, el portafolios consistirá en su mayoría de acciones si el precio de ejercicio es cercano a K .

Como parte de la aplicación, realizaremos con el programa ITSM 2000 un análisis de series de tiempo para estimar como se moverán las acciones en el mercado, en base a los resultados mostrados en el cuadro (4.9), se establecerán mecanismos de cobertura.

Como estrategia de cobertura, construiremos un *call* y un *put* cuyos precios de ejercicio son \$567,924.73 y \$57,1624.73 respectivamente los cuales vencen en 15 días. Como supuesto, tomaremos dados los valores de la volatilidad ($\sigma = 20\%$) y la tasa de interés ($r = 10\%$). Lo que se pretende es replicar las opciones; para el caso de la opción *call*, se compran acciones y se vende un activo libre de riesgo; para la opción *put* se venden acciones y compra dicho activo libre de riesgo. El desarrollo de ambos portafolios replicantes se muestran en (4.10) y (4.11). El valor del portafolios es dado mediante las observaciones estimadas de las acciones, el valor de las opciones se obtiene utilizando las ecuaciones (4.3) y (4.4).

Dentro de la aplicación planteada, la finalidad de las opciones sintéticas en el manejo de fondos de pensiones, es establecer mecanismos de cobertura y no de arbitraje, motivo por el cual, no se pretende obtener ganancia alguna cuando replicamos nuestro portafolios.

AMXL	ARA	BIMBOA	CEMEXCPO	FEMSAUBD	GCARSOA1	GEOB
24.14	72.57	52.70	36.20	125.32	39.07	54.11
23.87	73.19	52.30	36.49	123.64	38.98	54.56
24.22	72.96	52.50	36.67	124.24	39.52	54.88
24.26	72.29	52.00	37.05	123.60	39.80	54.79
24.35	72.40	52.12	37.27	125.05	39.45	55.39
24.30	71.48	51.61	36.83	124.40	39.66	54.58
24.22	70.09	51.93	36.32	124.40	39.69	53.65
24.43	72.10	53.84	36.34	125.98	39.61	53.60
24.15	71.88	53.76	35.65	126.37	39.40	53.58
24.59	72.46	54.76	35.96	128.14	39.32	54.24
24.96	74.81	55.05	36.78	129.09	39.67	55.07
24.97	74.14	54.94	36.71	127.87	39.66	55.46
24.72	74.07	54.69	36.42	126.83	39.38	55.11
24.29	74.60	54.14	36.64	124.48	38.97	55.50
24.50	74.31	54.13	36.77	124.45	39.56	55.71

GFNORTEO	ICA	SORIANAB	TELECOMA1	TLEVISACPO	TVAZTECACPO
42.18	40.55	72.25	40.51	58.40	8.00
41.76	39.84	72.18	39.92	58.90	7.83
41.35	40.40	70.96	39.30	59.78	7.81
41.78	40.52	71.44	38.08	59.63	7.84
42.03	40.87	72.68	38.78	59.58	7.81
41.77	41.58	72.30	39.09	59.52	7.71
41.82	40.72	71.91	38.12	59.18	7.72
42.41	40.77	71.50	39.04	58.78	8.00
42.11	40.67	71.26	38.76	58.06	8.01
41.75	40.95	71.89	39.10	58.37	7.99
42.08	41.72	72.78	39.26	59.15	8.00
42.22	41.38	72.64	39.43	58.81	8.00
42.35	41.15	73.53	41.19	58.60	8.00
41.96	40.46	73.49	40.65	59.22	7.82
41.46	41.01	72.21	39.95	60.10	7.81

Cuadro 4.9: Precios estimados

	Portafolio	Precio call	Delta	Portafolios replicante	Portafolios de acciones	Portafolio de bono
1	565,613.60	1,925.90	0.3875	1,925.90	219,170.45	-217,244.55
2	562,276.01	914.58	0.2249	914.35	126,478.37	-125,564.01
3	564,844.71	1,643.68	0.3469	1,643.34	195,917.35	-194,274.01
4	562,407.72	944.58	0.2306	944.35	129,665.22	-128,720.88
5	565,701.26	1,960.08	0.3922	1,959.69	221,873.91	-219,914.22
6	563,665.94	1,270.04	0.2879	1,269.75	162,256.52	-160,986.76
7	563,584.26	1,246.69	0.2839	1,246.40	160,028.73	-158,782.33
8	570,028.17	4,173.21	0.6298	4,172.58	358,983.17	-354,810.60
9	569,396.69	3,786.11	0.5961	3,785.51	339,414.20	-335,628.69
10	575,296.25	8,136.36	0.8557	8,135.51	492,307.90	-484,172.39
11	580,300.94	12,720.65	0.9598	12,719.69	556,999.74	-544,280.05
12	576,235.34	8,953.17	0.8831	8,952.28	508,900.03	-499,947.75
13	574,145.70	7,173.71	0.8166	7,172.89	468,850.80	-461,677.90
14	569,419.06	3,799.45	0.5973	3,798.86	340,114.71	-336,315.86
15	570,543.97	4,504.97	0.6565	4,504.31	374,580.43	-370,076.12

Cuadro 4.10: Call replicante

	Portafolio	Precio put	Delta	Portafolios replicante	Portafolios de acciones	Portafolio de bono
1	565,613.60	6,633.84	0.7885	6,633.84	-445,997.21	452,631.04
2	562,276.01	9,463.03	0.8981	9,462.13	-505,004.73	514,466.86
3	564,844.71	7,251.78	0.8184	7,250.96	-462,266.02	469,516.98
4	562,407.72	9,344.95	0.8948	9,344.06	-503,241.28	512,585.34
5	565,701.26	6,564.87	0.7849	6,564.09	-444,042.72	450,606.80
6	563,665.94	8,240.95	0.8588	8,240.10	-484,093.53	492,333.63
7	563,584.26	8,311.21	0.8614	8,310.35	-485,465.54	493,775.89
8	570,028.17	3,605.28	0.5731	3,604.70	-326,667.61	330,272.31
9	569,396.69	3,977.98	0.6073	3,977.38	-345,770.80	349,748.18
10	575,296.25	1,342.33	0.2925	1,342.04	-168,298.48	169,640.51
11	580,300.94	384.84	0.1087	384.73	-63,078.30	63,463.03
12	576,235.34	1,087.99	0.2497	1,087.74	-143,886.44	144,974.18
13	574,145.70	1,711.18	0.3494	1,710.83	-200,577.94	202,288.76
14	569,419.06	3,964.42	0.6061	3,963.81	-345,101.76	349,065.57
15	570,543.97	3,316.98	0.5448	3,316.43	-310,805.18	314,121.61

Cuadro 4.11: Put replicante

4.3. Valor en riesgo

Uno de los problemas mas comunes cuando nos dedicamos a invertir en mercados financieros es el riesgo mercado. El VaR, es un método que mide la exposición al riesgo utilizando técnicas estadísticas con la cual, estima la pérdida máxima esperada que un portafolios puede sufrir en un intervalo de tiempo determinado.

El modelo VaR tiene como supuesto que existen condiciones de normalidad y que la media de los rendimientos es cero, como hemos visto, los activos seleccionados en el portafolios no cumplen con la hipótesis sobre los rendimientos, sin embargo, en la práctica a pesar de que no cumplan dicho supuesto, se realiza dicho análisis. La fórmula para obtener el valor en riesgo se muestra en la ecuación (4.5).

$$VaR = I(\alpha) * S * \sigma_p * \sqrt{t} \quad (4.5)$$

donde:

- $I(\alpha)$ determina el valor nivel de confianza α .
- S es el monto total de la inversión o la exposición total al riesgo.
- $\sigma_p = \sqrt{w^T * \Sigma * w}$.
- horizonte de tiempo en que se desea calcular el VaR.

Con las acciones de nuestro portafolios y dado que $I(\alpha) = 2.33$, $\sigma_p = 0.2769$, $S = \$567,925.73$ y $t = \sqrt{10/252} = 0.1992$, obtenemos que $VaR = \$72,985.53$ es decir, uno de cada diez días de operación del mercado, la pérdida que ocurrirá puede ser mayor a \$72,985.53. Debemos recordar que la metodología propuesta establece condiciones de mercado normales, es decir, no toma en cuenta momentos de crisis o turbulencias.

4.4. Composición de un portafolio estimado

Para finalizar la aplicación, utilizaremos los datos del 18 de enero de 2006 al 29 de diciembre de 2006 y anexaremos los datos correspondientes a los 15 días posteriores. La frontera eficiente y sus valores se muestran en los cuadros

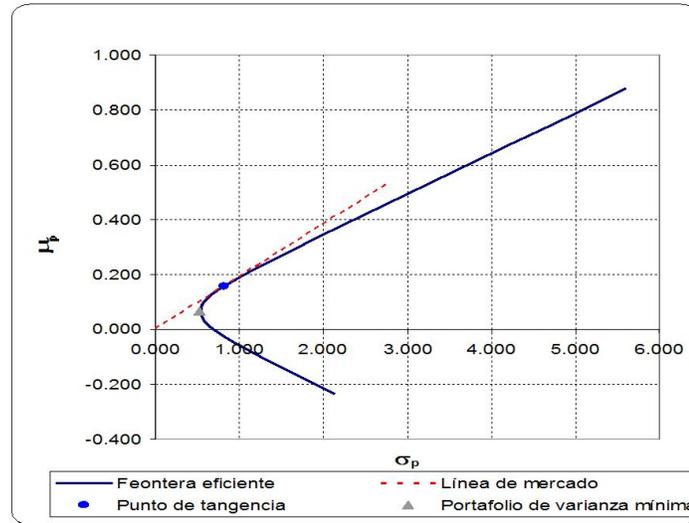


Figura 4.3: Curva de rendimientos portafolios estimados

(4.3) y (4.3).

De nuevo, de acuerdo a los ponderadores del cuadro (4.13), se predice un rendimiento diario esperado del portafolio de varianza mínima de 0.065 % con una volatilidad de 0.525 %. El portafolio propuesto muestra un rendimiento esperado de 0.157 % y una volatilidad de 0.821 %. EL valor de dicho portafolio, utilizando el precio del último dato observado para cada emisora es \$635,409.67.

El portafolios propuesto, quedará conformado por 35 % invertido en activos riesgosos y 65 % en activos libres de riesgo. La tasa anual de rendimientos para nuestro portafolios es de 45.36 %, si invertimos un peso con el activo libre de riesgo con las proporciones mencionadas, obtenemos una tasa nominal de 25 % suponiendo que la tasa de rendimiento del portafolios es continua.

Para finalizar la aplicación, simularemos el comportamiento de un fondo con los supuestos del cuadro (1.2); utilizaremos la Afore que presenta la comisión mas alta que que se muestra en dicho cuadro y utilizaremos su tasa de rendimiento nominal como se muestra en el cuadro (1.4). Sea

FRONTERA EFICIENTE		SHARPE	Línea de Mercado de Valores	
σ_p	μ_p	sr_p	σ	μ_p
2.129	-0.235	-0.110	0.000	0.000
1.698	-0.169	-0.100	0.100	0.019
1.278	-0.104	-0.082	0.200	0.038
0.888	-0.039	-0.044	0.300	0.058
0.589	0.026	0.045	0.400	0.077
0.555	0.092	0.165	0.500	0.096
0.821	0.157	0.191	0.600	0.115
1.201	0.222	0.185	0.700	0.134
1.617	0.288	0.178	0.800	0.153
2.047	0.353	0.172	0.900	0.172
2.484	0.418	0.168	1.000	0.191
2.924	0.484	0.165	1.100	0.210
3.367	0.549	0.163	1.200	0.230
3.812	0.614	0.161	1.300	0.249
4.257	0.679	0.160	1.400	0.268
4.703	0.745	0.158	1.500	0.287
5.149	0.810	0.157	1.600	0.306

Cuadro 4.12: Rendimientos portafolios estimados

Ponderadores varianza mínima		Ponderadores LM	
ω_h	Emisora	ω_i	Emisora
-0.16102	AMXL	-1.60488	AMXL
0.05651	ARA	1.02597	ARA
0.23252	BIMBOA	2.34237	BIMBOA
-0.00984	CEMEXCPO	-0.96610	CEMEXCPO
0.24656	FEMSAUBD	2.88076	FEMSAUBD
0.07612	GCARSOA1	0.89972	GCARSOA1
-0.03459	GEOB	-0.25086	GEOB
-0.00914	GFNORTEO	0.19967	GFNORTEO
0.04460	ICA	0.44114	ICA
0.19371	SORIANAB	1.98802	SORIANAB
-0.00675	TELECOMA1	0.07107	TELECOMA1
0.28356	TLEVISACPO	3.09347	TLEVISACPO
0.08777	TVAZTECACPO	0.37023	TVAZTECACPO

Cuadro 4.13: Ponderadores portafolios estimados

$$\begin{aligned}
 R &= K_i * (t_R) \\
 C &= K_i * (t_C) \\
 K_f &= (K_i + R) - C
 \end{aligned}$$

donde K_i es el capital inicial, R es rendimiento del periodo, C la comisión cobrada y K'_i el capital del fondo después del balance. Si suponemos que el fondo se capitaliza bimestralmente, el resultado es mostrado en el cuadro (4.14)

	K_i	R	C	K_f	R_r
Afore	\$23,770	\$421.77	\$827.19	\$24,141	\$371.98
Propuesto	\$23,770	\$1,011.33	\$827.19	\$34,731.55	\$961.55
Afore	\$150,000	\$2,661.60	\$5,220.00	\$148,219.01	\$- 1780.98
Propuesto	\$150,000	\$6,382.03	\$5,220.00	\$151,939.44	\$1,939.44

Cuadro 4.14: **Análisis comparativo**

Capítulo 5

Conclusión

La aplicación, cierra el trabajo de manera satisfactoria, teóricamente se obtuvieron rendimientos muy por encima de los establecidos actualmente. La creación de portafolios de inversión pretende establecer diversos panoramas a los inversionistas; para el caso específico de los fondos de pensión, es desarrollar portafolios con rendimientos altos a su vez que su exposición al riesgo sea mínima; en base a esto, se crearon portafolios utilizando como referencia una línea de mercado a partir de la tasa libre de riesgo.

Los portafolios propuestos obtienen rendimientos anuales esperados de alrededor de 54.15 % para el caso del portafolios de 31 emisoras, y de 45.36 % para el portafolios conformado por 13 emisoras (suponiendo que es na tasa continua); la diferencia radica en que el portafolios conformado por las 31 emisoras, recopila mayor información del mercado, sin embargo, es mejor trabajar con menos acciones si tomamos en cuenta que rebalancearemos continuamente los activos. La cobertura del portafolios, se hizo de manera teórica, utilizando opciones sintéticas y suponiendo cierto comportamiento en los activos del portafolios; se rebalancea el portafolio diariamente; se presta o pide prestado efectivo a la tasa libre de riesgo hasta que se llega al horizonte de tiempo pactado. El mecanismo utilizado es un poco el reflejo práctico de lo que se hace cuando incluimos un activo libre de riesgo dentro de los activos que conformarán un portafolios. Al conformar el portafolios estimado, se observa que disminuyen los rendimientos en un 12.74 % y el valor del activo subyacente se incrementó 11.88 %. Una explicación adecuada puede ser el descontrol que sufren las acciones a principio de año, lo cual es considerable si tomamos en cuenta que muchas empresas se reestructuran en dicho perio-

do; sin embargo, con un adecuado manejo del portafolios, los rendimientos promedio pueden seguir siendo aún mayores a los que ofrecen las afores.

Según lo planteado en la CONSAR, los rendimientos y las aportaciones son vitales para el beneficio de los pensionados, no obstante, como se presenta en el cuadro (4.14, si suponemos que el fondo inicia con una cantidad mayor a la que la CONSAR tiene como supuesto, se demuestra que las comisiones son mayores a los rendimientos ofrecidos. La tasa pasa a ser una *tasa de descuento* para el trabajador. Si las Afores invierten un portafolios a la tasa propuesta en éste trabajo y ofrecen los rendimientos que se muestran en el cuadro (1.4), obtienen una ganancia libre de 12.15% por cada peso invertido mas una ganancia extra por manejo de cuenta (*comisiones*) ¿Realmente somos los mexicanos los beneficiados del sistema de capitalización individual?

Con la finalidad de prevenir una futura quiebra en el fisurado sistema de pensiones, es necesario que el Estado a través del Gobierno Federal realice modificaciones sustanciales en dicho sistema. El modelo de capitalización individual no es solvente y difícilmente dará los beneficios esperados. Los activos generados en las cuentas no serán suficientes para establecer los pagos mensuales; los mexicanos terminaremos pagando el déficit causado por la pésima implementación de un modelo mal adaptado y ejecutado.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Modelo Binomial

Para explicar a mayor detalle la manera en la que se pueden establecer los precios de opciones a través de modelos de árboles binomiales, el siguiente apartado tiene como objetivo explicar la estructura y comportamiento de dichos instrumentos mediante la implementación del modelo binomial. Para mayor detalle sobre éste interesante tema, una buena referencia es [8]

A.1.1. Modelo para un periodo

Sea S , el precio inicial de una acción; al final del periodo, el precio puede ser uS con probabilidad p o dS con probabilidad $1 - p$, asumimos que $u > d > 0$. Para cualquier periodo, es posible pedir prestado o prestar a una tasa libre de riesgo r y $R = 1 + r$. Para eliminar oportunidades de arbitraje tenemos que:

$$u > R > d$$

Supongamos que dentro de los activos que tenemos, contamos con una opción *call* cuyo precio de ejercicio es k y su fecha de expiración está pactada al final del periodo. Debemos tomar en cuenta que no hay arbitraje y que tanto el valor del activo libre de riesgo como el de la opción siguen la misma dirección que el valor de la acción. Es decir, si el valor de la acción es ascendente, los dos activos restantes siguen la misma dirección y viceversa.

Una vez conocido el valor de nuestra acción y de nuestro activo libre de riesgo, podemos encontrar el valor de la opción *call*, recordando que podemos establecer el valor del activo libre de riesgo como un derivado de la acción.

A partir de nuestro punto inicial, solamente tenemos dos posibles resultados con lo que podemos construir un modelo correspondiente al resultado de la opción.

Sea:

$$C_u = \max(uS - k, 0) \quad (\text{A.1})$$

$$C_d = \max(ds - k, 0) \quad (\text{A.2})$$

Para duplicar las ecuaciones(A.1) y (A.2), creamos un portafolios Π comprando x unidades monetarias del valor de una acción y b unidades monetarias del valor de un activo libre de riesgo. Al siguiente periodo, el portafolios podrá ser valorado por $ux + RB$ ó $dx + RB$ dependiendo del comportamiento de nuestros activos. Igualamos los resultados con nuestros posibles valores que puede tomar la opción *call*:

$$ux + Rb = C_u$$

$$dx + Rb = C_d$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$x = \frac{C_u - C_d}{u - d}$$

una vez conocido el valor de x podemos encontrar b :

$$\begin{aligned} b &= \frac{C_u - ux}{R} \\ &= \frac{uC_d - dC_u}{R(u - d)} \end{aligned}$$

conocidos los parámetros de x y b , el valor del portafolios está determinado por:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{R(u - d)} \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{R - d}{u - d} C_u + \frac{u - R}{u - d} C_d \right)\end{aligned}$$

Utilizando el principio de no arbitraje, se concluye que el precio de la opción *call* es el mismo que Π , por lo tanto, la ecuación (A.3) establece el precio.

$$C = \frac{1}{R} \left(\frac{R - d}{u - d} C_u + \frac{u - R}{u - d} C_d \right) \quad (\text{A.3})$$

Como el portafolios está compuesto de la acción y el activo libre de riesgo que duplica el resultado de la opción el cual, es con frecuencia referido a un portafolios replicante; con esto, también replicamos la opción.

Para simplificar la ecuación (A.3), definamos

$$q = \frac{R - d}{u - d} \quad (\text{A.4})$$

donde q es llamada probabilidad neutral de riesgo. Con esto, la ecuación queda como

$$C = \frac{1}{R} [qC_u + (1 - q)C_d] \quad (\text{A.5})$$

Este sencillo procedimiento puede ser utilizado para cualquier activo subyacente y, dado que q puede ser calculada teniendo la seguridad de que la fórmula neutral de riesgo está sujeta esencialmente a la misma acción, tenemos que

$$S = \frac{1}{R} (quS + (1 - q)dS) \quad (\text{A.6})$$

Dado que (A.5) se puede encontrar como el valor esperado de la opción dada q tenemos que

$$C(T - 1) = \frac{1}{R} \hat{E}[C(T)]$$

donde $C(T)$ y $C(T - 1)$ son valores de *call* para T y $T - 1$ respectivamente, \hat{E} denota la esperanza respecto a la probabilidad neutral de riesgo q y $1 - q$.

A.1.2. Modelo para múltiples periodos

El modelo para múltiples periodos no es mas que una extensión al modelo de un periodo, con la diferencia que ahora iremos de atrás para adelante. Supongamos que el precio inicial de la acción es S , el cual es modificado por factores u y d que desplazan el precio hacia arriba o abajo respectivamente. Los valores mostrados en la figura(A.1) corresponde a un árbol de una opción *call* con precio de ejercicio k cuya fecha de expiración corresponde al nodo de cada ramificación. El valor de la opción es conocido al final de cada nodo del árbol. en particular

$$\begin{aligned} C_{uu} &= \max(u^2S - k, 0) \\ C_{ud} &= \max(udS - k, 0) \\ C_{dd} &= \max(d^2S - k, 0) \end{aligned}$$

Utilizamos (A.4) como en el caso del modelo para un periodo. Asumimos que no podemos ejercer la opción temprano, podemos encontrar los valores de C_u y C_d como si fuese un periodo simple como en la ecuación (A.5)

$$\begin{aligned} C_u &= \frac{1}{R}[qC_{uu} + (1 - q)C_{ud}] \\ C_d &= \frac{1}{R}[qC_{ud} + (1 - q)C_{dd}] \end{aligned}$$

De manera iterativa, podemos encontrar C aplicando la misma fórmula de descuento libre de riesgo, es decir:

$$C = \frac{1}{R}[qC_u + (1 - q)C_d]$$

Como ejemplo, presentamos el modelo Vasicek utilizando la forma iterativa de árboles binomiales

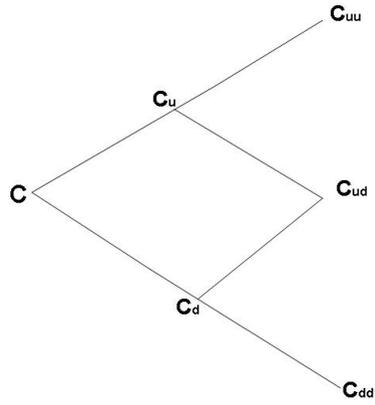


Figura A.1: Opción call de dos periodos

Bibliografía

- [1] Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro. www.consar.gob.mx
- [2] Goodman Victor y Stampfli Joseph. *Matemáticas para las finanzas*. Thomson. 2003.
- [3] Feller William. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Editorial Limusa. Vol. 1. 1983.
- [4] Feller William. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Editorial Limusa. Vol. 2. 1985.
- [5] Hull, John y White, Alan. *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*. Rev. Fin Stud., Vol 3, No.4, 1990.
- [6] Instituto Mexicano del Seguro Social. www.imss.gob.mx
- [7] Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado. www.issste.gob.mx
- [8] Luenberger, David. *Investment Science*. Oxford University Press. 1998.
- [9] John Norstad. *An Introduction to Portafolio Theory*. <http://homepage.mac.com/j.norstad/finance>, abril. 1999.
- [10] John Norstad. *Portafolio Selection: Part1-Unconstrained Portafolios*. <http://homepage.mac.com/j.norstad/finance>, sep. 2002.
- [11] José Lasa, Alcides. *Construcción de una frontera eficiente de activos financieros en México*. <http://www.geocities.com/Athens/Parthenon/4400/invest.htm>

- [12] Kijima, Masaaki. *Stochastic process whit applications to finance*. Chapman & Hall/Crc. 2003
- [13] Zvie Bodie y Robert C. Merton. *Finanzas*. Pearson Educación. México, 2003.