



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**BRECHA ÓPTICA DE ELASTÓMEROS  
QUIRALES SOMETIDOS A ESFUERZOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICA**

**P R E S E N T A:**

**TANIA ESPINOSA ORTEGA**

**TUTOR:**

**Dr. JUAN ADRIAN REYES CERVANTES**



**2007**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

1.	Datos del Alumno Espinosa Ortega Tania 55 54 94 64 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 099092032
2.	Datos del Tutor Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes
3.	Datos del sinodal 1 Dr. José Alberto Olivares Lecona
4.	Datos del sinodal 2 Dra. María del Pilar Ortega Bernal
5.	Datos del sinodal 3 Dr. Rosalío Fernando Rodríguez
6.	Datos del sinodal 4 Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz
7.	Datos del trabajo escrito Brecha óptica de elastómeros quirales sometidos a esfuerzos 58p 2007

## AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haber sido durante tantos años, mi casa, mi campo y mi playa; en tus puertas encontré el mejor lugar para conocer y saborear la tierra, desde átomos y jacarandas, hasta frutas tropicales.

A mi tutor y amigo Adrián; gracias por ayudarme en todos los aspectos, no solo eres el mejor maestro, de verdad eres una gran persona.

A mis hermanas, al flaco, a mis amigos, gracias por enriquecer de tantas maneras mi vida; con ustedes siempre hay chispazos de vida.

Finalmente a mis padres que me han dado todo, si hay algo bueno en mí es debido a ustedes.

**“Por mi raza hablará el espíritu”**

# ÍNDICE

	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
	<b>Resumen</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Cristales Líquidos</b>	<b>8</b>
	1.1 Clasificación	8
	1.1.1 Nemáticos	8
	1.1.2 Colestéricos	9
	1.2 Polímeros	11
	1.2.1 Configuración de los polímeros	11
	1.2.2 Forma de los cristales líquidos poliméricos	15
	1.2.3 Deformación de un elastómero quirál	18
	1.2.4 Energía libre de los cristales líquidos elastómeros	19
<b>2</b>	<b>Elastómero quirál sujeto a una deformación axial</b>	<b>21</b>
	2.1 Extensión de un elastómero colestérico	21
<b>3</b>	<b>Propagación de ondas electromagnéticas en medios anisotrópicos</b>	<b>25</b>
	3.1 Ondas electromagnéticas planas	25
	3.2 Polarización lineal y circular	28
	3.3 Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas	30
	3.3.1 Reflexión circular de Bragg	31
<b>4</b>	<b>Propagación de una onda a través de un elastómero colestérico</b>	<b>33</b>
	4.1 Condiciones de frontera	33
	4.2 Formulación de Marcuwitz	37
	4.3 Transformación de Oseen	40
	4.4 Matriz de transmitancia y de dispersión	42
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>46</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>

# Introducción

En la literatura se ha estudiado extensivamente cual es la configuración de un cristal líquido y las propiedades ópticas que lo caracterizan [1],[2], sin embargo debido a la actualidad del tema, poco se ha dicho acerca de las propiedades ópticas que poseen sistemas colestéricos formados por polímeros, los cuales pueden ser concebidas como cristales fotónicos unidimensionales.

Los cristales fotónicos hasta ahora han alcanzado un buen estado de desarrollo y madurez de tal forma que sus propiedades ópticas están bien entendidas con algunas aplicaciones que están en desarrollo y otras que ya se usan comunmente. La mayoría de estas investigaciones se abocan a cristales fotónicos cuyas características están fijas, esto es, una vez fabricados no es posible alterar su respuesta óptica.

Una tendencia reciente, sin embargo, se dedica a estudiar cristales fotónicos activos o sintonizables, lo que significa que por medio de un agente externo es posible modificar las propiedades ópticas del cristal fotónico en forma continua y reversible. Evidentemente, esta cualidad puede conducir a aplicaciones en donde se haga uso de la variación continua de las brechas ópticas, de interruptores, limitadores, polarizadores, etc.

Podemos clasificar a los cristales fotónicos sintonizables de acuerdo a dos amplias categorías. En la primera, la sintonización se logra sin alterar las constantes dieléctricas de los materiales constituyentes. En la segunda categoría, la configuración del cristal fotónico permanece igual, y es alguna propiedad del cristal fotónico la que se ve afectada por el agente externo. De la gran cantidad de publicaciones en artículos internacionales de investigación encontrados en la literatura actualmente es evidente el interés científico y tecnológico en este tema.

La sintonización estructural ha sido propuesta y conseguida aplicando esfuerzos mecánicos a un ópalo polimérico de esferas nanométricas, asimismo aplicando un campo eléctrico a un cristal fotónico en un sustrato piezoeléctrico [3] [4]. Los materiales estructuralmente quirales son materiales inspirados en la forma helicoidal de los cristales líquidos colestéricos que exhiben el fenómeno de la refracción de Bragg circular que da origen a una banda de reflexión parcial para una onda electromagnética cuya helicidad coincide con la de la hélice del material quiral, de tal forma que juega el papel de un polarizador circular.

En este trabajo estamos interesados particularmente en elastómeros colestéricos los cuales se obtienen al enlazar monómeros, que por sí mismos presentan la mesofase colestérica, a cadenas poliméricas flexibles que individualmente forman geles [5]. El material que emerge es conocido como cristal líquido polimérico y puede formar un monodominio macroscópico si durante su solidificación, a partir de su estado fundido, se somete a un campo eléctrico o de esfuerzos que alinea a los monómeros en cierta dirección preferencial. Entre otras propiedades interesantes, los elastómeros colestéricos responden a extensiones de una forma parecida a los cristales líquidos que son sometidos a campos eléctricos. Con este antecedente, estudiamos la banda de reflexión para elastómeros colestéricos sometidos a una deformación y esperamos encontrar una forma de controlar la banda de reflexión, no en función del campo eléctrico como se ha hecho antes [3] [4], sino en función de la expansión del medio, lo cual esperamos que motive el desarrollo de dispositivos óptico-mecánicos.

En el capítulo 1 desarrollamos el tema de cristales líquidos y describimos las propiedades físicas que caracterizan a este estado, en la primera sección estudiamos dos de sus fases, la nemática y la colestérica, esta última se caracteriza porque sus moléculas se orientan en la dirección de un vector director que va girando sobre un eje (el eje de helicidad); en la siguiente sección describimos a grandes rasgos las características de los polímeros y



uniendo éstas nociones básicas introducimos el concepto de cristales líquidos poliméricos.

En la sección 1.2.3, analizamos las propiedades elásticas de los cristales líquidos poliméricos y haciendo uso de una formulación estadística y de la similitud que existe entre las cadenas de polímeros y las caminatas aleatorias, deducimos en la última parte, una expresión para la energía libre que caracteriza al sistema.

En el capítulo 2, estudiamos un cristal líquido polimérico con propiedades quirales el cual sufre una deformación en la dirección paralela al eje de hélicidad. Con ayuda de los conceptos deducidos en la sección 1.2.4, encontramos una aproximación para la energía libre mínima del sistema después de ser sometido a una deformación y con esta información describimos la orientación de las moléculas en el sistema. Esto completa nuestro primer objetivo, ya que al conocer la configuración espacial interna del sistema es posible obtener el tensor dieléctrico y establecer las ecuaciones de Maxwell.

En el capítulo 3, hacemos una revisión de las clases de polarización y los fenómenos que se originan cuando una onda electromagnética pasa de un medio a otro.

En el capítulo 4, presentamos la parte original de este trabajo. Iniciamos el estudio de una onda que incide sobre un elastómero colestérico y determinamos las condiciones de frontera. Con la transformación de Oseen y en la representación de Marcuwitz resolvemos las ecuaciones de Maxwell. La representación de Marcuwitz permite representar las componentes electromagnéticas tangenciales a la hélice del elastómero, en términos de las componentes longitudinales de los mismos y la transformación de Oseen permite cambiar el sistema de referencia a uno que gira con el vector director dentro del elastómero. Con estas herramientas encontramos la matriz de dispersión y los correspondientes coeficientes de transmisión y reflexión.

Finalmente, en el capítulo 5 graficamos las transmitancias y reflectancias circulares, como función de la longitud de onda del campo incidente, el ángulo de incidencia y la

deformación del elastómero. Concluimos en el capítulo 6, discutiendo nuestros resultados y perspectivas.

## Resumen

En este trabajo estudiamos el comportamiento de una onda electromagnética que incide en un sistema formado por un elastómero quiral que ha sufrido una expansión a lo largo del eje de su hélice.

En la primera parte de esta tesis usamos una descripción termodinámica para describir el elastómero y encontramos como se orientan las moléculas en el medio al expandir éste; con esta información describimos el tensor dieeléctrico del elastómero y planteamos las ecuaciones de Maxwell para una onda electromagnética que incide sobre el medio.

En la segunda parte de este trabajo resolvemos las ecuaciones de Maxwell.

Primero, reducimos las ecuaciones de Maxwell a una ecuación diferencial expresada en forma matricial, usando la representación de Marcuwitz, en la cual, las componentes transversales de la onda electromagnética son expresadas en términos de las componentes longitudinales de la misma. Después, para simplificar la ecuación diferencial matricial que describe el sistema, aplicamos la transformación de Oseen sobre los campos electromagnéticos trasladándonos así, a un sistema de referencia que gira paralelamente a las moléculas en el elastómero.

Resolvemos el sistema diferencial por medio de una integración numérica y encontramos una expresión para los coeficientes de transmitancia y reflectancia en términos de los coeficientes de incidencia de la onda electromagnética, es decir, encontramos la matriz de dispersión.

Por último, graficamos los coeficientes de reflexión y transmisión circulares de la onda electromagnética, en términos de la deformación del medio, de la longitud de onda y del ángulo de incidencia de la onda electromagnética.

Encontramos una banda de reflexión que aparece únicamente para ondas electromagnéticas con determinada polarización circular y la relación entre el ancho y el rango de

la banda de reflexión en función del ángulo de incidencia y del tensor de esfuerzos al que está sometido el elastómero.

# 1. CRISTALES LÍQUIDOS

Los cristales líquidos fueron descubiertos en 1888 por el bótico austriaco F. Reinitzer y el cristalógrafo alemán F. Lehmann mientras investigaban ciertos ésteres del colesterol. A grandes rasgos podemos describir los cristales líquidos como una mesofase, un estado intermedio entre el estado sólido y el estado líquido; esta mesofase tiene en común con los sólidos que sus moléculas tienden a orientarse respecto a cierta dirección, lo que se conoce como orden orientacional, sin embargo, las moléculas en los cristales líquidos no se encuentran fijas en una posición (orden posicional), sino que, al igual que en los líquidos, las moléculas tienen cierta libertad para moverse a través del medio.

Es posible generar distintas mesofases entre los estados sólido y líquido modificando parcialmente los dos tipos de orden mencionado, es por ello que los cristales líquidos tienen varias clasificaciones, pero en general, podemos describirlos mediante un modelo continuo, como fluidos compuestos por moléculas rígidas en forma de barra que en promedio, se orientan a lo largo de un eje que puede variar en el espacio [1]; el caso más simple es el de los nemáticos.

## 1.1. Clasificación

### 1.1.1. Nemáticos

En los nemáticos las moléculas en forma de barra se alinean respecto a una dirección preferencial, éstas tienden a permanecer, en promedio, paralelas a un eje en común, llamado eje óptico y representado por el vector director  $\mathbf{n}$  Fig.1.1.

Es posible formar cristales líquidos poliméricos, incorporando unidades rígidas y ani-

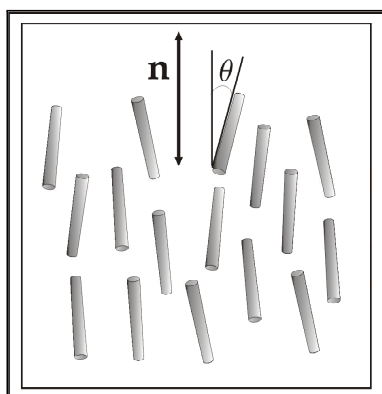


Figure 1.1: Se representa el orden orientacional característico de los nemáticos. Los cilindros representan las moléculas con forma de barra y  $\mathbf{n}$  el vector director.

sotrópicas (barras moleculares como las moléculas monoméricas de los cristales líquidos) a cadenas flexibles de polímeros; el resultado posee un cierto orden nemático pero con otras propiedades. La diferencia fundamental entre los cristales líquidos y los cristales líquidos poliméricos, es que en éstos últimos las moléculas poliméricas se alargan cuando sus barras moleculares se orientan. Por lo tanto cuando un polímero isotrópico se convierte en nemático, el promedio de la forma de las moléculas poliméricas cambia de esféricas a esferoidales debido a la orientación de las moléculas.

Los cambios en el promedio de la forma de las moléculas modifican muy poco las propiedades del cristal líquido polimérico. Sin embargo uniendo cadenas de polímeros en una especie de gel, podemos obtener un sólido elástico parecido a una goma; el resultado posee propiedades mecánicas muy interesantes en consecuencia de la disposición de los polímeros para cambiar de forma [5].

### 1.1.2. Colestéricos

Los colestéricos son una forma distorsionada de la fase nemática, localmente son muy parecidos a éstos últimos, tienen el mismo grado de orden posicional, sin embargo son distintos en cuanto a orden orientacional. Los cristales colestéricos presentan estructuras

con simetría helicoidal, el vector director  $\mathbf{n}$  no es constante en el espacio sino que va girando a lo largo de un eje. Por ejemplo, si suponemos que  $\mathbf{z}$  es el eje de rotación, el vector director tendrá la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(qz + \phi) \\ n_y &= \sin(qz + \phi) \\ n_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

el valor de  $\phi$  es una fase que depende de las condiciones de frontera; los cristales líquidos colestéricos tienen una estructura periódica alrededor del eje de rotación, el periodo espacial es igual a:

$$l = \frac{p}{2} = \frac{\pi}{|q|} \tag{1.2}$$

en donde la longitud del periodo es igual a la mitad de  $p$  (el pitch). La razón por la cuál  $l$  es igual a la mitad del pitch es que los estados  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  son indistinguibles ya que el sistema no es ferromagnético y eso implica que las moléculas en el medio no se polarizan, por lo cual en promedio, existe el mismo número de dipolos hacia arriba y hacia abajo.

Los valores típicos de  $l$  oscilan alrededor de los  $3 \times 10^{-7} m$ , lo cual es relevante ya que es del mismo orden de magnitud que las longitudes de onda que están en el visible; el signo de  $q$  distingue entre simetría helicoidal en dirección derecha o izquierda y la magnitud de  $q$  depende directamente de la temperatura [2].

El término  $q$ , que es el periodo espacial, está dado por:

$$q = 2\pi/p. \tag{1.3}$$

Además de los cristales líquidos nemáticos y colestéricos, existen otras fases que de-

penden de la orientación del nemático [1], sin embargo para el sistema que analizamos basta conocer las dos mesofases mencionadas.

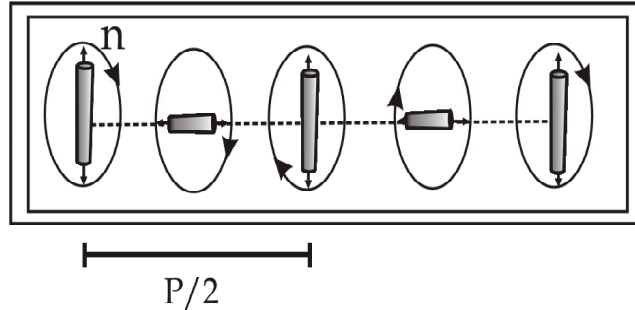


Figure 1.2: Ya que las direcciones  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  son indistinguibles, el periodo espacial es igual a  $P/2$ .

## 1.2. Polímeros

### 1.2.1. Configuración de los polímeros

Un polímero es una cadena muy larga formada por muchas unidades moleculares que se repiten llamadas monómeros. Todas las cadenas de polímeros poseen una longitud característica,  $l$ , en la cual, la cadena se puede doblar, ésta longitud puede contener varios monómeros; cuando el número total de monómeros en la cadena,  $N$ , es mucho mayor que el número de monómeros por longitud  $l$ , podemos afirmar que existen varias configuraciones espaciales posibles para el polímero y es posible usar una distribución gaussiana para describir el sistema. En este trabajo supondremos que éste es el caso.

Una cadena compuesta por  $N$  barras de largo  $a$  unidas libremente como en la Fig.2.3, es estadísticamente equivalente al recorrido de una caminata aleatoria con un paso fijo de longitud  $a$ , ésta longitud es equivalente a la longitud característica mencionada anteriormente. El valor cuadrático medio del vector que une el inicio y el fin de ésta caminata de  $N$  pasos, en cada dirección es [5]:



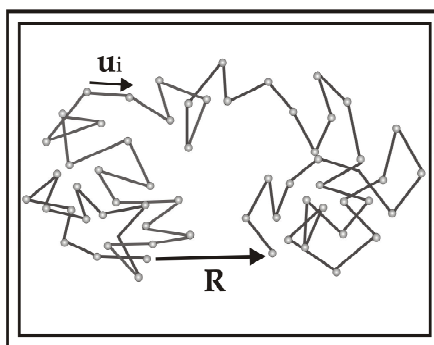


Figure 1.3: Una cadena de polímeros es análoga a una caminata aleatoria.  $\mathbf{R}$  es el vector que une el inicio y fin de la misma.

$$\langle \mathbf{R}_x^2 \rangle = \langle \mathbf{R}_y^2 \rangle = \langle \mathbf{R}_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{R}^2 \rangle = \frac{1}{3} a^2 N \equiv \frac{1}{3} aL, \quad (1.4)$$

donde  $L = Na$  es el largo total de la cadena. En términos de los vectores que unen los monómeros  $\mathbf{u}_i$  de longitud  $a$ , la distancia  $\mathbf{R}$  entre el inicio y el fin de la cadena está dado por la magnitud del vector:  $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{u}_i$ , este vector es sumamente importante ya que da una noción de la configuración espacial de las cadenas de polímeros y a partir de la distribución de las cadenas de polímeros, se puede deducir la energía libre que caracteriza al sistema. Los vectores  $\mathbf{u}_i$  no están correlacionados entre ellos, por lo que  $\langle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij} a^2$ , lo cual es consistente con la ec.(1.4).

Si pensamos en el polímero como un sistema termodinámico en equilibrio que se deforma a volumen constante y que conserva su temperatura, entonces el número total de posibles conformaciones de una cadena dada  $Z_N$  (ó el número de posibles caminatas aleatorias sin restricción en su inicio y fin), debe ser igual a la función de partición de la cadena:  $Z_N = \sum_{config} e^{-H/kT}$ , donde  $H$  es la energía de la configuración,  $k$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura.

Si ahora consideramos una caminata libre donde el comienzo y el fin de la caminata están fijos, esperamos que el número de posibles configuraciones sea menor que el men-

cionado anteriormente; entonces, el número de configuraciones posibles para condiciones de frontera fijas es:

$$Z_N(\mathbf{R}) = p_N(\mathbf{R})Z_N, \quad (1.5)$$

donde  $p_N(\mathbf{R})$  es la probabilidad de tener una configuración que tenga un vector  $\mathbf{R}$  que una el inicio y el fin de la cadena. Ya que  $Z_N$  es la función de partición del sistema, la distribución de probabilidad debe ser gaussiana; de acuerdo a la anterior, la probabilidad ya normalizada está dada por [7]:

$$p_N(\mathbf{R}) = \left( \frac{3}{2\pi R_o^2} \right)^{3/2} e^{-3\mathbf{R}^2/2R_o^2}, \quad (1.6)$$

en donde  $R_o$  es la variancia del sistema y de acuerdo a la ec.(1.4),  $R_o^2 = aL$ .

Como la cadena de polímeros está a temperatura y volumen constante, entonces podemos usar el potencial termodinámico correspondiente para describir el sistema, entonces, la energía libre de Helmholtz que de acuerdo a la física estadística [6] está dado por:

$$F = -k_B T \ln Z_N(\mathbf{R}); \quad (1.7)$$

ahora, si sustituimos las expresiones ec.(1.5) y ec.(1.6) en la ecuación anterior, obtenemos:

$$F(\mathbf{R}) = F_o + k_B T \left( \frac{3\mathbf{R}^2}{2R_o^2} \right) + C, \quad (1.8)$$

donde  $F_o = -k_B T \ln Z_N$  es la energía libre de una cadena de polímeros sin constricciones en su comienzo y final y  $C$  es una constante que surge de la normalización de la probabilidad de distribución  $p_N$ .  $F_o$  y  $C$  son constantes que no dependen de  $\mathbf{R}$ , solo fijan el punto de referencia por lo que son irrelevantes para encontrar el mínimo de la energía libre del

sistema.

La energía libre que hemos obtenido en la ecuación ec.(1.8) es puramente entrópica ya que está en función del número de posibles configuraciones del sistema.

Para obtener la ec.(1.8) supusimos que todas las posibles configuraciones tienen la misma energía interna y no consideramos la energía debida a las fronteras químicas, es decir, la repulsión electromagnética que pueden sufrir las moléculas bajo ciertas configuraciones. Si consideramos la energía interna por moléculas asociada con los procesos químicos,  $U(\mathbf{R})$ , entonces la energía libre del sistema es:

$$F(\mathbf{R}) = U(\mathbf{R}) - TS(\mathbf{R}), \quad (1.9)$$

donde la entropía por molécula está representada por  $S(\mathbf{R})$ . Siendo completamente rigurosos, deberíamos considerar en nuestro modelo el factor  $U(R)$ , sin embargo para elastómeros con bajo peso molecular, la entropía domina la energía libre del sistema, ya que en este caso podemos considerar que la cadena del polímero no se enreda ni interacciona con otras cadenas; entonces  $U(R) = 0$ . Con estas aproximaciones, la entropía correspondiente al sistema queda como:

$$S(R) = -k_B \left( \frac{3R^2}{2R_o^2} \right). \quad (1.10)$$

La energía libre de Helmholtz es entrópica, ya que mide el cambio en el número de posibles configuraciones cuando el inicio y el fin de la cadena varía. Si  $R$  aumenta, entonces se reducen el número de configuraciones posibles; en el caso extremo en que  $R = L$ , es decir, en que la cadena está totalmente estirada, sólo existe una configuración posible.

### 1.2.2. Forma de los cristales líquidos poliméricos

El promedio de la forma de la cadena principal polimérica (que de aquí en adelante llamaremos el esqueleto) es muy importante ya que es éste el que genera la respuesta elástica de equilibrio de la red a la que pertenece. Algunos polímeros ordinarios son esféricos por lo que sólo una dimensión (R Fig.1.3) es suficiente para caracterizarlos. En contraste los polímeros nemáticos, pueden tener diversas formas debido a que el promedio de la forma del esqueleto es distorsionado por la orientación que sufren sus barras moleculares con el vector director  $\mathbf{n}$ , es decir, el orden nemático modifica la forma del esqueleto del polímero. Por lo tanto, los polímeros nemáticos necesitan más de una dirección para describir su forma anisotrópica.

Cuando el orden nemático es alto, la cadena completa es forzada a adquirir la misma dirección que las barras moleculares, las cadenas cortas se desenredan y se comportan como barras orientacionales, sin embargo la entropía puede aumentar en estos casos debido a cambios drásticos en la dirección de la cadena, esto se aprecia en la Fig.1.4.(a). El esqueleto del polímero que contiene las barras orientacionales puede tomar diversas formas aún teniendo el mismo orden orientacional, la siguiente figura ilustra este hecho.

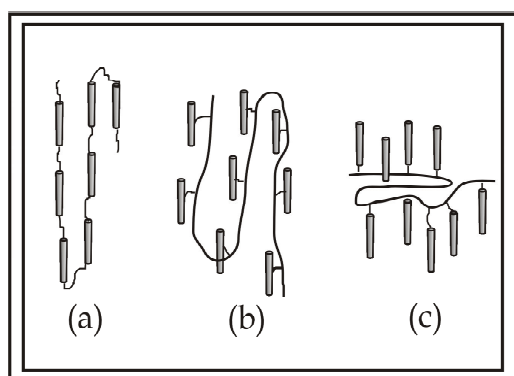


Figure 1.4: Para el mismo grado de orientación del nemático existen diferentes tipos de anisotropía del esqueleto.

Es posible caracterizar la forma de la cadena y su probabilidad de distribución con el valor cuadrático medio  $R$ , de la forma:

$$\langle R_i R_j \rangle = \frac{1}{3} l_{ij} L, \quad (1.11)$$

donde definimos a  $l_{ij}$ , como los pasos efectivos en las distintas direcciones, en analogía con la ecuación ec.(1.4); con la definición anterior podemos construir un tensor,  $\mathbf{l}$ , relacionado con la longitud de los pasos, con componentes  $l_{ij}$ , que posean la información del promedio de la forma del polímero.

En polímeros uniaxiales,  $\langle R_i R_j \rangle$ , es igual en todas las direcciones en el plano perpendicular a  $\mathbf{n}$ , entonces si  $\mathbf{n}$  se encuentra a lo largo del eje  $\mathbf{z}$ , tenemos que  $R_x = R_y = R_\perp$ , el tensor  $\mathbf{l}$  es en ese caso:

$$\mathbf{l}_o = \begin{pmatrix} l_\perp & 0 & 0 \\ 0 & l_\perp & 0 \\ 0 & 0 & l_\parallel \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

donde  $l_\perp$  y  $l_\parallel$  son los pasos efectivos en la dirección perpendicular y paralela a  $\mathbf{n}$ , respectivamente. Para el caso general, donde  $\mathbf{n}$  no está necesariamente alineado con algún eje de nuestro sistema de referencia, la matrix  $\mathbf{l}$  no es necesariamente diagonal, sino que es uniaxial, con la forma:

$$\mathbf{l}_o = l_\perp \boldsymbol{\delta} + [l_\parallel - l_\perp] \mathbf{nn}. \quad (1.13)$$

En un líquido con barras moleculares dieléctricas o diamagnéticas, la anisotropía de la correspondiente susceptibilidad, es una medida del alineamiento de las barras; en contraste, la anisotropía  $\delta l = l_\parallel - l_\perp$  es una medida de la anisotropía de la forma del esqueleto del polímero al cual están unidos las barras moleculares, por lo cual, aún teniendo el mismo orden orientacional en las barras, es posible tener una anisotropía  $\delta l$  diferente (ver Fig.1.5).

Definimos un radio  $r$ , como la razón entre los pasos efectivos paralelos y perpendicular como:

$$r = \frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}}; \quad (1.14)$$

Usando la ecuación anterior, podemos expresar el tensor  $\mathbf{l}_o$ , ec.(1.13) como:

$$\mathbf{l}_o = l_{\perp}(\boldsymbol{\delta} + [r - 1]\mathbf{nn}) \quad (1.15)$$

y

$$\mathbf{l}_o^{-1} = l_{\perp}(\boldsymbol{\delta} + [\frac{1}{r} - 1]\mathbf{nn}). \quad (1.16)$$

Sí  $r > 1$ , significa que tenemos un esqueleto con forma prolata, alargado en la dirección  $\mathbf{n}$ ; en cambio para  $r < 1$ , tenemos una configuración oblata, alargada en el plano perpendicular a  $\mathbf{n}$ . La siguiente figura ilustra lo anterior, donde la forma prolata es resultado de una configuración como en la Fig.1.4.(a) y la forma oblata es resultado de una configuración como en la Fig.1.4.(c).

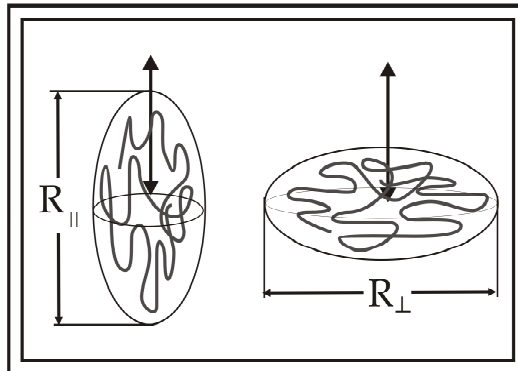


Figure 1.5: El esqueleto determina la forma del polímero, puede ser prolata u oblata respecto al vector director.

Cuando  $\mathbf{R}$  sólo tiene una dimensión ( $R_{\parallel} = R_{\perp}$ ), la simetría de la cadena de polímeros

es esférica, para este caso conocemos la probabilidad de encontrar una configuración con un vector que una el inicio y el fin de la cadena igual a  $\mathbf{R}$ , ec.(1.6). La probabilidad de encontrar cierta configuración para el caso anisotrópico, se obtiene usando la ec.(1.4) de acuerdo a lo cual,  $R_o^2 = l_{ij}L$  y  $\mathbf{R}^2 = R_iR_j$  sustituyendo estas expresiones mas generales en la ec.(1.6), obtenemos la probabilidad para el caso anisotrópico:

$$p(\mathbf{R}) = \left[ \left( \frac{3}{2\pi L} \right)^3 \frac{1}{Det[\mathbf{1}]} \right]^{1/2} e^{\left( \frac{-3}{2L} R_i l_{ij}^{-1} R_j \right)} \quad (1.17)$$

### 1.2.3. Deformación de un elastómero quiral

Consideramos que la cadena de polímeros está fija a un cuerpo, entonces, si tenemos que el vector que conecta el inicio y el fin de la cadena en el cuerpo es  $\mathbf{R}_i$  y aplicamos una deformación  $\boldsymbol{\sigma}$  sobre el cuerpo, el cambio que sufre el vector que une los extremos de la cadena es proporcional a esta deformación, es decir, el vector  $\mathbf{R}$  que conecta la cadena de polímeros después de la deformación es:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}_i. \quad (1.18)$$

El uso de la energía libre del sistema ec.(1.7), requiere que las deformaciones en la goma conserven el volumen, por lo cual, se tiene que cumplir que  $Det(\boldsymbol{\sigma}) = cte$ . En el caso de expansiones o compresiones (sin deformaciones de corte), el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  es diagonal para una goma cuyas caras son perpendiculares a los ejes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ , si además, la longitud de los lados es igual a 1, entonces:

$$Det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} = 1. \quad (1.19)$$

Si el director  $\mathbf{n}$  está a lo largo del eje  $\mathbf{z}$ , podemos renombrar  $\sigma_{zz} = \sigma$  y normalizar el volumen, escogemos:  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ , es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\sigma}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

#### 1.2.4. Energía libre de los cristales líquidos elastómeros

Como vimos anteriormente la energía libre ec.(1.7), está expresada en términos de las posibles configuraciones del sistema que son proporcionales a la probabilidad de encontrar al sistema en esos estados según la ec.(1.17), sustituyendo ésta expresión en la energía libre obtenemos:

$$\begin{aligned} F_S &= -k_B T \ln p(\mathbf{R}) + F_o \\ &= \frac{3k_B T}{2L} \langle R_i l_{ij}^{-1} R_j \rangle + \frac{k_B T}{2} \ln \left( \frac{Det \mathbf{l}}{a^3} \right) + F_o \\ &= \frac{3k_B T}{2L} \langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{R} \rangle + \frac{k_B T}{2} \ln \left( \frac{Det \mathbf{l}}{a^3} \right) + F_o \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde  $a = \frac{3}{2\pi L}$  y  $F_o = -k_B T \ln Z_N$ ; a este resultado se le conoce como la energía libre neoclásica del promedio de una red de cadenas poliméricas ya que es una generalización anisotrópica de la elasticidad clásica de una goma, los términos  $\frac{k_B T}{2} \ln \left( \frac{Det \mathbf{l}}{a^3} \right)$  y  $F_o$  en la ecuación anterior son constantes (por conservación del volumen  $Det \mathbf{l} = cte$ ), por ello el término de mayor trascendencia, en la ec.(1.21), es el de la parte elástica, ya que éste contiene la información de la configuración espacial del sistema antes y después de la deformación, por esta razón nos enfocamos en la parte elástica de la energía y despreciamos los términos constantes.

Ahora, si tenemos que el vector que une el inicio y el fin de una cadena sin deformar es  $\mathbf{R}_o$ , entonces la probabilidad de encontrar una cadena conectada por  $\mathbf{R}_o$  es  $p_o(\mathbf{R}_o)$  que está dada por la ec.(1.17) solo que en términos de  $\mathbf{l}_o$ , que es el tensor que describe la forma del esqueleto del polímero sin deformar. Si aplicamos una deformación  $\boldsymbol{\sigma}_o$  a la goma,



tendremos, de acuerdo a lo que ya dedujimos en la sección 2.2.3, que la relación entre la cadena de polímeros deformada y sin deformar, es  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma}_o \mathbf{R}_o$ , entonces, despreciando los términos constantes y sustituyendo a  $\mathbf{R}$  en términos de  $\mathbf{R}_o$ , en la ec.(1.21), encontramos:

$$F_s = \frac{3k_B T}{2L} \langle \mathbf{R}_o \boldsymbol{\sigma}_o^T \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{R}_o \boldsymbol{\sigma}_o \rangle, \quad (1.22)$$

Para encontrar la densidad de energía libre, tenemos que contar el número de cadenas poliméricas,  $n_s$ , por unidad de volumen, entonces la densidad de energía es:  $F = n_s F_s$ ; usando que  $n_s k_B T = \mu$  y usando la ec.(1.11), expresamos  $\langle \mathbf{R}_o \mathbf{R}_o \rangle = \frac{1}{3} \mathbf{1}_o L$  y sustituimos en la ec.(1.22):

$$F = \frac{1}{2} \mu T r(\mathbf{1}_o \cdot \boldsymbol{\sigma}_o^T \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_o). \quad (1.23)$$

Como podemos observar en la ecuación anterior, la densidad de energía libre no solo depende de la deformación que sufre la goma polimérica y que está contenida en el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , sino que depende también de la forma del esqueleto del polímero contenido en el tensor  $\mathbf{1}$ .

## 2. ELASTÓMERO QUIRAL SUJETO A UNA DEFORMACIÓN AXIAL

### 2.1. Extensión de un elastómero colestérico.

Consideremos una extensión de un elastómero colestérico a lo largo del eje quiral, que en este caso será  $\mathbf{z}$ , tal como se muestra en el siguiente diagrama:

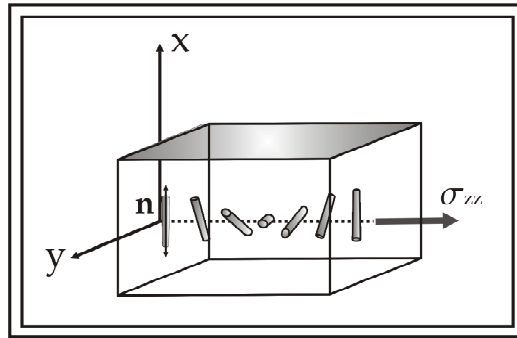


Figure 2.1: Se ilustra la configuración del nemático sin distorsión, la expansión se hará paralelamente al eje  $z$ .

El tensor de deformación, en su forma más simple, puede ser expresado como [5]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\sigma}} & \sigma_{yz} \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde hemos usado que  $\sigma_{zz} = \sigma$ , para conservar el volumen fijo, es necesario que  $Det\boldsymbol{\sigma} = 1$ , lo cual se cumple de acuerdo a nuestra definición ya que  $Det\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sigma = 1$ ; los términos  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ , surgen de la variación del vector director inicial respecto al plano  $\mathbf{xy}$  que se modifica al expandir el elastómero en dirección  $\mathbf{z}$ .

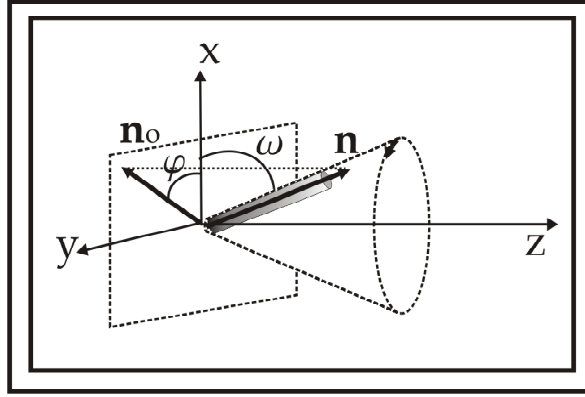


Figure 2.2: Después de la expansión el vector director se inclinará un ángulo  $\omega$ , por lo que las barras orientacionales del elastómero girarán en un cono.

El vector inicial del elastómero sin deformación está dado por:  $\mathbf{n}_o = \{\cos q_o z, \sin q_o z, 0\}$ , después de la deformación, el vector director se inclina un ángulo  $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$ , de tal forma gira sobre la superficie de un cono Fig.2.2; la longitud del periodo también cambia con la deformación, el periodo espacial se convierte en  $q = q_o/\sigma$ , lo cual quiere decir que la longitud del periodo aumenta.

El nuevo vector director queda entonces como  $\mathbf{n} = \{\sin \theta \cos qz, \sin \theta \sin qz, \cos \theta\}$ ; el tensor de longitud de paso inicial sin deformación,  $\mathbf{l}_o$ , está dado de acuerdo a la ec.(1.15) en términos de  $\mathbf{n}_o$  y el tensor inverso es exactamente igual a la ec.(1.16) con los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}_o$  que definimos.

La energía libre de Helmholtz del sistema está dada por la ec.(1.23) en términos de  $\mathbf{l}_o$ , ec.(1.15) y  $\mathbf{l}^{-1}$ , ec.(1.16); al desarrollar la energía libre de Helmholtz, encontramos que la podemos expresar como:

$$F = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c \quad (2.2)$$

donde

$$\mathbf{x} = \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1+3r+(r-1)\cos 2\theta-2(r-1)\cos 2qz\sin^2\theta}{2r} & -\frac{(r-1)\sin 2qz\sin^2\theta}{2r} \\ -\frac{(r-1)\sin 2qz\sin^2\theta}{2r} & \frac{1+3r+(r-1)\cos 2\theta+2(r-1)\cos 2qz\sin^2\theta}{4r} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \left\{ -\frac{(r-1)\sigma\cos qz\sin 2\theta}{r}, \frac{(r-1)\sigma\sin qz\sin 2\theta}{r} \right\}$$

y

$$c = \frac{\sigma^3 + r(3 + r + \sigma^3) + (r-1)(r - \sigma^3)\cos 2\theta}{2r\sigma}.$$

La ec.(2.2) representa la energía libre de nuestro sistema; contiene la información de la deformación y la configuración que adquirirá el elastómero de cristal líquido; para encontrar cual es la deformación en el elastómero después de la relajación, es necesario encontrar el mínimo de la energía libre.

Cuando expandemos un elastómero, primero se relajan los esfuerzos, y posteriormente se reorientan las moléculas, por ello el mínimo de la energía libre se obtiene al encontrar primero los valores de  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ , que minimizan la energía y después, análogamente, encontrar el valor óptimo de  $\theta$ .

Para encontrar más facilmente el mínimo de la energía libre respecto a  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ , diagonalizamos la matriz  $\mathbf{A}$  y nos trasladamos al sistema de los ejes principales de la deformación, explotando el hecho, de que el mínimo de la energía libre del sistema, es igual tanto en el sistema de ejes principales (donde identificamos los esfuerzos como:  $\sigma'_{xz}, \sigma'_{yz}$ ) como en cualquier otro sistema; haciendo lo anterior, encontramos que,

$$\frac{2}{\mu}F = \sigma^2 + \frac{1}{\sigma} + \sigma'^2_{yz} - \frac{1}{2r}([r+1+(r-1)\cos 2\theta](\sigma^2 - \frac{r}{\sigma} - \sigma'^2_{xz}) + 2(r-1)\sigma\sigma'_{xz}\sin 2\theta - 2\sigma^2). \quad (2.3)$$

Al deformar el elastómero, el sistema cambia en dos escalas distintas; macroscópicamente el sistema se expande en la dirección  $\mathbf{z}$  y se contrae en las direcciones perpendiculares a la deformación, por otro lado microscópicamente las moléculas se reorientan.

Debido a la diferencia entre las escalas, podemos minimizar la energía libre de forma independiente respecto a los esfuerzos y al ángulo  $\theta$ . Primero consideramos la escala macroscópica y minimizamos la energía libre ec.(2.3) respecto a los esfuerzos considerando que el ángulo  $\theta$ , permanece constante. Encontramos que:

$$\sigma'_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

y

$$\sigma'_{xz} = \sigma \frac{(r-1) \sin 2\theta}{(r+1) + (r-1) \cos 2\theta}, \quad (2.5)$$

sustituyendo estos valores óptimos de los esfuerzos en la densidad de energía libre ec.(2.3), tenemos:

$$F = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{2\sigma^2}{r+1 + (r-1) \cos 2\theta} + \frac{3+r+1 + (r-1) \cos 2\theta}{2\sigma} \right), \quad (2.6)$$

ahora consideramos la escala microscópica y buscamos el valor de  $\theta$  que minimiza la expresión anterior. El vector director  $\mathbf{n}$  se inclinará hacia la dirección  $\mathbf{z}$  en un ángulo  $\omega$  (ver Fig.2.2) después de la deformación, para encontrar el valor de  $\omega$ , minimizamos la energía libre ec.(2.6) respecto a  $\omega$ , encontramos:

$$\begin{aligned} \cos 2\omega &= \frac{r+1 - 2\sigma^{3/2}}{r-1}; \\ \omega(\sigma) &= \arcsin \sqrt{\frac{\sigma^{3/2} - 1}{r-1}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La ecuación anterior nos indica cual será el grado de reorientación del colestérico, la deformación máxima se da cuando el vector director se vuelve totalmente paralelo al eje  $z$ , es decir, cuando  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , cuando esto ocurre, encontramos que  $\sigma = r^{2/3}$ ; cuando no tenemos deformación  $\sigma = 1$  y  $\omega = 0$ .

# 3. PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS ANISOTRÓPICOS

## 3.1. Ondas electromagnéticas planas

La propagación de ondas electromagnéticas, está gobernada por las ecuaciones de Maxwell; uno de los resultados más importantes que se han obtenido al resolver estas ecuaciones, es la existencia de ondas viajeras que transportan energía, la forma en que lo hacen y las características que poseen estas ondas quedan descritas en términos de las propiedades del medio en el que se desplazan. Ya que en esta tesis planteamos el caso en que una onda electromagnética incide sobre un medio dieléctrico, revisaremos primero, las características que poseen las ondas en medios inhomogéneos anisotrópicos y no conductores [9].

Planteamos las ecuaciones de Maxwell para un medio infinito en ausencia de fuentes, tenemos [9]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad (3.4)$$

suponemos una dependencia armónica del tipo  $e^{-i\omega t}$  y consideramos que para un medio anisotrópico  $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$ , donde  $\epsilon$  y  $\boldsymbol{\mu}$  se denominan, respectivamente, tensor dieléctrico y tensor de la permeabilidad magnética del material; para materiales homogéneos la respuesta lineal es isotrópica y los tensores son diagonales con todos sus elementos iguales, por lo que se pueden representar como un escalar; en general pueden ser funciones complejas de  $\omega$  para medios dispersivos; en muchas ocasiones se expresa la permeabilidad magnética como:  $\mu = \mu_r \mu_0$ , donde  $\mu_r$  es la permeabilidad magnética relativa y  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío; para la mayoría de los materiales la permeabilidad magnética  $\mu_r$  es prácticamente uno, en el caso contrario la sustancia se clasifica como paramagnética para  $\mu_r > 1$ , o diamagnética en el caso en que  $\mu_r < 1$ ; en el vacío,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ f/m}$  y  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ h/m}$ .

Tomando la derivada parcial respecto al tiempo en las ec.(3.3) y (3.4) y sustituyendo las ec.(3.1) y (3.2) en la identidad:  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2$ , encontramos que el campo eléctrico y magnético obedecen la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.5)$$

donde:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

es la velocidad de fase de la onda, si la onda viaja en el vacío, entonces  $v = c$ , la velocidad de la luz, definida como:  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ ; la solución más general para la ecuación de onda ec.(3.5), es de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t} + Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t} \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición y  $\mathbf{k}$  es el vector de onda, el módulo de éste se relaciona con la frecuencia angular  $\omega$ , como:  $k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , usando esta definición, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-vt)} + Ae^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+vt)}, \quad (3.7)$$

esta ecuación representa ondas que se desplazan hacia la izquierda y hacia la derecha, si elegimos solo una dirección (onda plana) y convenimos que los campos físicos eléctrico y magnético se obtienen tomando las partes reales de las magnitudes complejas, podemos representar los campos de la onda plana de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}. \quad (3.9)$$

Para que cada componente de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , satisfaga la ecuación de onda, es necesario que se satisfaga:  $k^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \epsilon\mu\omega^2$ , donde  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  y para ser consistentes con nuestras definiciones,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ . Sustituyendo las ec.(3.8) y ec.(3.9) en las ecuaciones de Maxwell ec.(3.1) y ec.(3.2), encontramos las relaciones:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0;$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$$

además, de acuerdo a las ecuaciones ec.(3.3) y ec.(3.4), también se debe satisfacer:



$$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\mathbf{E}, \quad (3.11)$$

lo que indica que el campo magnético, el campo eléctrico y la dirección de propagación  $\mathbf{n}$ , son mutuamente perpendiculares, si  $n$  es real, entonces  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  tienen la misma fase, por lo tanto es útil introducir un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales:  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{n})$  Fig.3.1

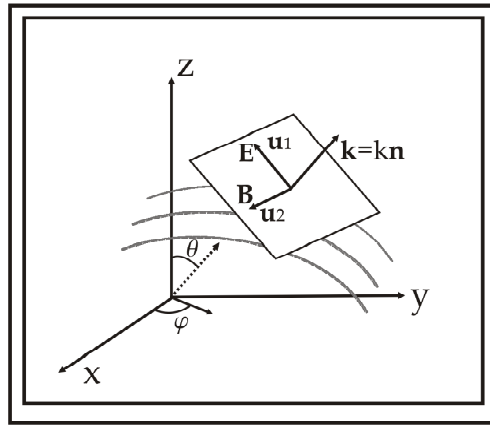


Figure 3.1: Se muestra la base que usamos para representar los campos electromagnéticos.

### 3.2. Polarización lineal y circular

En la sección anterior describimos una onda plana, donde el vector del campo eléctrico siempre está en la dirección  $\mathbf{u}_1$ , en este caso, se dice que la onda está polarizada linealmente con el vector de polarización  $\mathbf{u}_1$ , podríamos tener también una onda plana polarizada en la dirección  $\mathbf{u}_2$ , por lo que podemos describir una onda más general, que se propague en la dirección  $k = k\mathbf{n}$ , como una combinación lineal de ondas planas polarizadas en ambas direcciones, es decir [9]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{u}_1 E_1 + \mathbf{u}_2 E_2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (3.12)$$

las amplitudes  $E_1$  y  $E_2$  son números complejos, con el fin de que exista la posibilidad de una diferencia de fase entre ondas de distinta polarización, el campo magnético se puede obtener de la ecuación ec.(3.11), por lo que ahora solo nos enfocaremos en el campo eléctrico.

En el caso en que  $E_1$  y  $E_2$  son reales, las ondas con distinta polarización están en fase y la ec.(3.12) representa una onda polarizada linealmente donde el vector de polarización forma un ángulo  $\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{E_2}{E_1} \right)$  con  $\mathbf{u}_1$ , y cuyo módulo es  $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ .

Si  $E_1$  y  $E_2$  presentan una diferencia de fase, se dice que la onda esta polarizada elípticamente, el caso más simple es cuando la diferencia de fase es igual a  $90^\circ$ , este caso representa una polarización circular, ya que la onda dada por la ec.(3.12), se convierte en:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_o(\mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{u}_2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}. \quad (3.13)$$

Tomando las partes reales, las componentes en dirección  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son:

$$\begin{aligned} E_1(r, t) &= E_o \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t); \\ E_2(r, t) &= \mp E_o \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \end{aligned}$$

y de las ecuaciones anteriores se deduce que el módulo del vector del campo eléctrico permanece constante e igual a  $E_o$ , además está girando en el plano descrito por los vectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  con una frecuencia  $\omega$ , para el signo positivo en la ec.(3.13), la rotación es en el sentido contrario a las agujas del reloj cuando el observador mira hacia la onda que llega, por ello en óptica a este caso se le conoce como polarización izquierda ó con helicidad positiva, el caso contrario, se conoce como polarización derecha ó con helicidad negativa.

Cualquier estado de polarización se puede describir a través de ondas circularmente polarizadas, para hacerlo introducimos los vectores complejos ortonormales:

$$\mathbf{n}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{u}_2), \quad (3.14)$$

entonces, una representación para una polarización cualquiera en términos del vector  $\mathbf{n}_{\pm}$  es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_L\mathbf{n}_+ + E_R\mathbf{n}_-)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} \quad (3.15)$$

donde  $E_L$  y  $E_R$  son amplitudes complejas. Si  $E_L$  y  $E_R$  tienen distinto módulo pero están en fase, la ecuación anterior representa a una onda polarizada elípticamente con los ejes principales de la elipse en las direcciones de  $\mathbf{n}_+$  y  $\mathbf{n}_-$ , el caso para el campo  $\mathbf{B}$ , se obtiene fácilmente con los resultados anteriores usando la ec.(3.11).

### 3.3. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas

Cuando una onda incide sobre un medio, se origina una onda reflejada y una onda refractada que atraviesa el medio. La reflexión y refracción de la luz en una superficie plana que separa dos medios con propiedades dieléctricas distintas es un fenómeno conocido [9]. Los distintos aspectos de los fenómenos se dividen en dos clases.

(1) Propiedades cinemáticas:

- a) El ángulo de reflexión es igual al de incidencia.
- b) Ley de Snell:  $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n'}{n}$ , donde  $i$  y  $r$  son, respectivamente, los ángulos de incidencia y refracción;  $n'$  y  $n$  son los índices de refracción correspondientes.

(2) Propiedades dinámicas:

a) Intensidades de las radiaciones reflejada y refractada.

b) Cambios de fase y polarización.

Las propiedades cinemáticas son consecuencia inmediata de la naturaleza ondulatoria del fenómeno y del hecho de que hay que satisfacer las condiciones de contorno. Pero no dependen de la naturaleza detallada de las ondas o del tipo de condiciones de contorno. Por otra parte, las propiedades dinámicas dependen por completo de la naturaleza específica de los campos electromagnéticos y de sus condiciones de contorno.

### 3.3.1. Reflexión circular de Bragg

Cuando una onda viaja a través de un medio quiral, como el descrito en la sección 2.1.2, las propiedades ópticas están reguladas por el periodo espacial de la hélice,  $\frac{p}{2}$ , ec.(1.2), debido a ello se presenta el fenómeno de difracción de Bragg [13], en el cual, una onda que incide en el medio, se refleja cuando se cumple:

$$2L \sin \omega = m\lambda, \quad (3.16)$$

donde  $L = \frac{p}{2}$ ,  $\omega$  es el ángulo de incidencia,  $\lambda$  es la longitud de onda en el medio y  $m$  representa números enteros ( $m = 1, 2, \dots$ ); cabe resaltar, que este es un caso especial de la ley de Bragg, ya que en medios quirales se observa que la onda reflejada posee una polarización circular en la misma dirección que la hélice en el medio. Si analizamos la onda incidente en términos de una combinación lineal de polarización izquierda y derecha ec.(3.15), encontramos que solo la componente que tiene la misma helicidad del medio es reflejada, la otra componente es transmitida.

La reflexión circular de Bragg, se da en un rango de las longitudes de onda, lo cual depende directamente de las propiedades dieléctricas del medio. En una versión muy simplificada, podemos pensar el medio quiral como un medio isotrópico, con un índice

de refracción dado; entonces, la longitud de onda para una onda electromagnética que atraviese el medio es aproximadamente:

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{n}, \quad (3.17)$$

donde  $\lambda_o$  es la longitud de onda en el vacío y  $n$  es el índice de refracción que se asigna al medio quiral. El valor del índice de refracción depende del tensor dieléctrico, en este caso consideramos que el medio es uniaxial (a lo largo del eje  $\mathbf{n}$  Fig.2.2), entonces, existen dos constantes dieléctricas que caracterizan el sistema:  $\epsilon_{\parallel}$  y  $\epsilon_{\perp}$ , con estos dos parámetros podemos determinar el valor del índice de refracción, el cual varía desde el índice ordinario, hasta el índice extraordinario, que se definen respectivamente como:

$$n_o = \epsilon_{\perp}^{1/2}, \quad (3.18)$$

$$2n_e = \epsilon_{\parallel}^{1/2}; \quad (3.19)$$

sustituyendo los valores mencionados en la ec.(3.16), encontramos el rango en el que se encuentra la banda de reflexión, es decir, el rango en el que se presenta la reflexión circular de Bragg.

## 4. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA A TRAVÉS DE UN ELASTÓMERO COLESTÉRICO

### 4.1. Condiciones de frontera

En la sección 4.2, analizamos la polarización circular de ondas electromagnéticas, ahora planteamos el caso en que una onda electromagnética circular incide sobre un elastómero de cristal líquido. Supongamos que el elastómero se encuentra en la región entre los planos  $z = 0$  y  $z = L$ ; como ya vimos (sección 3.1) éste medio es quiral; colocamos el eje de la hélice paralelo al eje  $\mathbf{z}$ .

Ya que las moléculas en el elastómero están girando con una periodicidad igual a  $\frac{p}{2} = \frac{\pi}{q}$  (ver sección 2.1.2), las soluciones a las ecuaciones de onda que viajen en este medio deben cumplir con la condición de periodicidad; recurriendo al teorema de Bloch-Floquet [8], se encuentra [2], que para polarización circular derecha e izquierda, respectivamente, las ondas se pueden representar como:

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}^+ e^{iqz}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E}^- e^{-iqz}, \quad (4.2)$$

los subíndices  $L$  y  $R$ , representan la polarización izquierda y derecha, los vectores  $\mathbf{E}^+$  y  $\mathbf{E}^-$ , dependen de las intensidades de la onda y dependiendo de la polarización, están en términos del vector  $\mathbf{n}_{\pm} = \frac{\mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{u}_2}{\sqrt{2}}$  definido en la sección 4.2. Entonces, usando las ecuaciones anteriores y la ec.(3.15), podemos expresar una onda circularmente polarizada

como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (e^{-iqz} E_L \mathbf{n}_+ + e^{iqz} E_R \mathbf{n}_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \quad (4.3)$$

El vector de onda  $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ , está dado, de acuerdo al sistema de referencia Fig.3.1, como:

$$k_1 = k_o \cos \theta_o \cos \varphi, \quad (4.4)$$

$$k_2 = k_o \cos \theta_o \sin \varphi, \quad (4.5)$$

$$k_3 = k_o \sin \theta_o, \quad (4.6)$$

$\theta_o$  es el ángulo de incidencia y  $k_o = \frac{2\pi}{\lambda}$ , con  $\lambda$  la longitud de la onda incidente; en el caso de incidencia normal  $k_1 = k_2 = 0$ .

Si hacemos incidir una onda electromagnética sobre la cara del elastómero que está en  $z = 0$ , se producirá una onda reflejada en la región  $z \leq 0$  y otra transmitida en la región  $z \geq 0$ . Con ayuda de la ec.(4.3) y ec.(3.11) representamos la parte espacial de las ondas electromagnéticas que se producirán en la región  $z \leq 0$ , es decir, las ondas circularmente polarizadas incidente y reflejada:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (e^{-iqz} a_L \mathbf{n}_+ + e^{iqz} a_R \mathbf{n}_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (e^{-iqz} r_L \mathbf{n}_- + e^{iqz} r_R \mathbf{n}_+) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} ((-e^{-iqz} a_L \mathbf{n}_+ + e^{iqz} a_R \mathbf{n}_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (-e^{-iqz} r_L \mathbf{n}_- + e^{iqz} r_R \mathbf{n}_+) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}); \quad (4.8)$$

análogamente en la región  $z \geq L$  se transmitirá una onda con la siguiente forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (e^{-iqz} t_L \mathbf{n}_+ + e^{iqz} t_R \mathbf{n}_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(-e^{-iqz}t_L\mathbf{n}_+ + e^{iqz}t_R\mathbf{n}_-)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.10)$$

los coeficientes  $a$ ,  $r$  y  $t$ , representan, respectivamente, los coeficientes de incidencia, reflexión y transmitancia; los coeficientes de transmisión y reflexión varían en función de las propiedades del medio, los coeficientes de incidencia, se suponen conocidos.

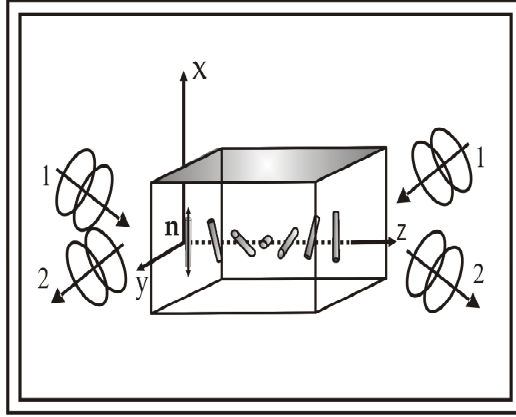


Figure 4.1: Se muestran los dos modos de polarización de las ondas incidentes y salientes en el medio en las regiones  $z < 0$  y  $z > 0$ .

Las ecuaciones de Maxwell garantizan la continuidad de las componentes tangenciales a la superficie del elastómero de los campos eléctrico y magnético, (ya que la densidad de corriente en la superficie del elastómero es cero) aprovechando éste hecho; introducimos el vector  $\Psi$  que contiene las componentes tangenciales y está definido como:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} E_1(\mathbf{r}) \\ E_2(\mathbf{r}) \\ H_1(\mathbf{r}) \\ H_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Usando la ec.(4.11), podemos representar el sistema de ecuaciones: ec.(4.7), ec.(4.9), ec.(4.8) y ec.(4.10), en  $z = 0$  y en  $z = L$ , respectivamente como:

$$\Psi(0) = \mathbf{A}(0_z) \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} a_R \\ a_L \\ r_R \\ r_L \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$



$$\Psi(L) = \mathbf{A}(L_z) \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} t_R \\ t_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

donde:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & i & i & -i \\ i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & -i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & -i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+qz)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-qz)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-qz)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+qz)} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

En el vacio los estados de polarización izquierda o derecha, son degenerados, por lo cual en la matriz  $\mathbf{A}$  se repite dos veces el signo mas y menos para el exponente de la exponencial; cabe notar a incidencia normal, la matriz  $\mathbf{A}$  solo depende de  $z$ .

En el vacio, la matriz de transmitancia (matriz que relaciona los coeficientes de transmitancia con los de incidencia y reflexión) cumple:

$$\Psi(L) = \mathbf{T}_o \cdot \Psi(0), \quad (4.16)$$

donde

$$\mathbf{T}_o = \begin{pmatrix} e^{i(k_3+q)z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(k_3-q)z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(k_3-q)z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(k_3+q)z} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

de tal forma que en el vacio de acuerdo a las ec.(4.12) y ec.(4.13), los coeficientes de transmitancia son igual a los coeficientes de incidencia y los coeficientes de reflectancia son igual a cero, tal como esperaríamos.

## 4.2. Formulación de Marcuwitz

Para entender como se comporta una onda electromagnética dentro de un medio dieléctrico, iniciamos con el planteamiento de las ecuaciones de Maxwell para este sistema.

Como el sistema es un medio dieléctrico, el tensor dieléctrico,  $\epsilon$ , será una matriz determinada por las características propias del medio, en el caso de un sistema uniaxial (como el de los elastómero coléstericos), podemos expresar el tensor dieléctrico como:

$$\epsilon = \epsilon_{\perp} \delta_{ij} + \epsilon_a \mathbf{nn}, \quad (4.18)$$

donde el vector  $\mathbf{n}$ , es el eje uniaxial, nótese que a través de este vector se introduce en las ecuaciones de Maxwell la configuración del sistema. Si el vector uniaxial  $\mathbf{n}$  es perpendicular al eje  $z$ , entonces:  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_z$  y  $\epsilon_a = \epsilon_x - \epsilon_z$ . Si suponemos que nuestro medio tiene una densidad de carga eléctrica igual a cero, entonces, las ecuaciones de Maxwell que describen el sistema en la región  $0 < z < L$  se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu_o \mathbf{H} = 0, \quad (4.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - i\epsilon_o\omega \epsilon \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (4.20)$$

Haciendo un proceso análogo al que hicimos para una onda viajando en un medio no conductor, encontramos que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  que viajan en dirección  $\mathbf{k}$  (ec.(4.4), ec.(4.5) y ec.(4.6)) en un medio cuyas propiedades dieléctricas sólo dependen de la cordenada  $\mathbf{z}$ , se pueden expresar como una onda plana armónica, de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \epsilon(z), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\mathbf{h}(z), \quad (4.22)$$

los vectores  $\boldsymbol{\varepsilon}(z)$  y  $\mathbf{h}(z)$  se expresan como:  $\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$  y  $\mathbf{h}(z) = \{h_1, h_2, h_3\}$ ; para encontrar las componentes  $\varepsilon_i$  y  $h_i$ , vamos a escribir las ecuaciones de Maxwell en la representación de Marcuwitz, en la cual expresando la componente longitudinal del campo eléctrico y magnético ( $\varepsilon_3(z)$  y  $h_3(z)$ ), en términos de las componentes transversales ( $\varepsilon_1(z)$ ,  $\varepsilon_2(z)$  y  $h_1(z)$ ,  $h_2(z)$ ), podemos resolver un problema de tres dimensiones en dos.

Sustituimos las expresiones ec.(4.21) y ec.(4.22) en la ecuación de Amperé y Faraday ec.(4.20), ec.(4.19), desarrollando la ecuación de Faraday encontramos para la componente  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$k_3\varepsilon_2 - k_2\varepsilon_3 - \mu_o\omega h_1 - i\frac{d\varepsilon_2}{dz} = 0 \quad (4.23)$$

$$ik_3\varepsilon_1 - ik_1\varepsilon_3 + i\mu_o\omega h_2 + \frac{d\varepsilon_1}{dz} = 0 \quad (4.24)$$

$$k_2\varepsilon_1 - k_1\varepsilon_2 - \mu_o\omega h_3 = 0 \quad (4.25)$$

Análogamente desarrollamos la ecuación de Amperé y encontramos para las componentes  $x$   $y$  y  $z$ , respectivamente,:

$$k_3h_2 - k_2h_3 + \epsilon_o\omega(\varepsilon_1\epsilon_{11} + \varepsilon_2\epsilon_{12} + \varepsilon_3\epsilon_{13}) - i\frac{dh_3}{dz} = 0, \quad (4.26)$$

$$ik_3h_1 - ik_1h_3 - i\epsilon_o\omega(\varepsilon_1\epsilon_{21} + \varepsilon_2\epsilon_{22} + \varepsilon_3\epsilon_{23}) + \frac{dh_1}{dz} = 0, \quad (4.27)$$

$$k_2h_1 - k_1h_2 + \epsilon_o\omega(\varepsilon_1\epsilon_{31} + \varepsilon_2\epsilon_{32} + \varepsilon_3\epsilon_{33}) = 0. \quad (4.28)$$

Despejando las componentes  $\varepsilon_3$  y  $h_3$  de las ec.(4.28) y ec.(4.25), respectivamente, encontramos:

$$\varepsilon_3 = \frac{k_1 h_2 - k_2 h_1 - \epsilon_o \omega (\varepsilon_2 \epsilon_{31} + \varepsilon_1 \epsilon_{32})}{\epsilon_o \omega \epsilon_{33}} \quad (4.29)$$

y

$$h_3 = \frac{k_2 \varepsilon_1 - k_1 \varepsilon_2}{\mu_o \omega}, \quad (4.30)$$

donde  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ , con  $\lambda$  la longitud de propagación de la onda incidente y donde  $\epsilon_{ij}$  representa las componentes del tensor dieléctrico ec.(4.18); teniendo las componentes longitudinales de los campos en términos de las componentes transversales, podemos sustituir las ecuaciones ec.(4.29) y ec.(4.30) en la ecuación de Amperé y Faraday para las componentes transversales:  $x$  y  $y$ : ec.(4.23), ec.(4.24), ec.(4.26) y ec.(4.27); encontramos así, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\Psi}{dz} = \mathbf{M} \cdot \Psi, \quad (4.31)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{z}) =$

$$-i \begin{pmatrix} k_z + \frac{k_x \epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} & \frac{k_x \epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} & \frac{k_x k_y}{\epsilon_o \omega \epsilon_{33}} & \mu_o \omega - \frac{k_x^2}{\epsilon_o \omega \epsilon_{33}} \\ \frac{k_y \epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} & k_z + \frac{k_y \epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} & \frac{k_y^2}{\epsilon_o \omega \epsilon_{33}} - \mu_o \omega & -\frac{k_x k_y}{\epsilon_o \omega \epsilon_{33}} \\ -\frac{k_x k_y}{\mu_o \omega} - \epsilon_{21} \epsilon_o \omega + \frac{\epsilon_{23} \epsilon_{31} \epsilon_o \omega}{\epsilon_{33}} & \frac{k_x^2}{\mu_o \omega} - \epsilon_{22} \epsilon_o \omega + \frac{\epsilon_{23} \epsilon_{32} \epsilon_o \omega}{\epsilon_{33}} & i k_z + \frac{k_y \epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} & -\frac{k_x \epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \\ -\frac{k_y^2}{\mu_o \omega} + \epsilon_{11} \epsilon_o \omega - \frac{\epsilon_{13} \epsilon_{31} \epsilon_o \omega}{\epsilon_{33}} & \frac{k_x k_y}{\mu_o \omega} + \epsilon_{12} \epsilon_o \omega - \frac{\epsilon_{13} \epsilon_{32} \epsilon_o \omega}{\epsilon_{33}} & -\frac{k_y \epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} & k_z + \frac{k_x \epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

y

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(z) \\ \varepsilon_2(z) \\ h_1(z) \\ h_2(z) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

el vector  $\Psi(\mathbf{r})$  contiene parte de las componentes transversales de los campos, nótese que éste es idéntico al que definimos en la sección anterior ec.(4.11).

La ec.(4.31) determina las propiedades características de la onda incidente, ya que es un sistema matricial donde la matriz  $\mathbf{M}$  depende de  $z$ , la solución general es simbólicamente:  $\Psi(z) = \Psi(0) \cdot e^{\int_0^z \mathbf{M} dz}$ , por lo cual, una forma de resolver el sistema, sería hacer una integración numérica de la variable  $\mathbf{M}$  y por medio de una serie de potencias obtener la exponencial de la integral. Sin embargo, existe una forma más fácil de resolver este sistema sin necesidad de hacer una integración numérica, para el caso de incidencia normal, para ello se usa la transformación de Oseen.

### 4.3. Transformación de Oseen

La transformación de Oseen [11], consiste en un cambio en el sistema de referencia de uno fijo a uno que gira sobre el eje  $z$ ; el nemático en el elastómero de cristal líquido, está girando alrededor de un cono descrito por la Fig.2.2, con un ángulo  $\varphi = qz$  (sección 2.1.2), por lo tanto, la proyección en el plano  $xy$ , será la de un vector que gira en función de  $\theta$ , con componentes  $v = a\{\cos qz, \sin qz, 0\}$ , donde  $a = \cos \omega$ , tal como vimos en la sección 3.1; por lo tanto, si nos trasladamos a un sistema de referencia que gire paralelamente al nemático el sistema se simplificará considerablemente.

La transformación de Oseen permite al sistema de referencia girar con el nemático al definir un nuevo vector  $\Psi'(z)$  :

$$\Psi'(z) = \mathbf{G} \cdot \Psi(z), \quad (4.34)$$

donde

$$\mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} \cos qz & \sin qz & 0 & 0 \\ -\sin qz & \cos qz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos qz & \sin qz \\ 0 & 0 & -\sin qz & \cos qz \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

la matriz anterior es la que efectúa la rotación al sistema de referencia que gira en el plano perpendicular al eje de la hélice; la matriz anterior tiene como propiedades que es unitaria y por lo tanto cumple:  $\mathbf{G}^{-1}(z) = \mathbf{G}^T(z)$ . La ec.(4.31) en términos del nuevo cambio de sistema ec.(4.34), queda como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\mathbf{G}^{-1} \cdot \Psi') &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \Psi' \\ \mathbf{G}^{-1} \cdot \frac{d\Psi'}{dz} + \Psi' \cdot \frac{d\mathbf{G}^{-1}}{dz} &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \Psi', \end{aligned}$$

multiplicando por  $\mathbf{G}$  la expresión anterior, encontramos:

$$\frac{d\Psi'}{dz} + \mathbf{G} \cdot \Psi' \cdot \frac{d\mathbf{G}^{-1}}{dz} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \Psi', \quad (4.36)$$

la ventaja de la ecuación anterior respecto a la ec.(4.31), es que el producto  $\mathbf{C} = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{G} \cdot \frac{d\mathbf{G}^{-1}}{dz})$  es igual a una matriz constante para incidencia normal ec.(4.42), con lo cual el sistema puede ser resuelto de forma analítica; en general si el ángulo de incidencia es  $\theta$ , tenemos:

$$\frac{d\Psi'}{dz} = \mathbf{C} \cdot \Psi'. \quad (4.37)$$

donde  $\mathbf{C}(z, \lambda, \theta_o)$  es igual a:

$$-i \begin{pmatrix} k \cos qz \delta \epsilon & iq & -\frac{k^2 \sin 2qz}{2\epsilon_o \omega \epsilon_x \epsilon_y} & \mu_o \omega - \frac{k^2 \epsilon d \cos^2 qz}{\epsilon_o \omega \epsilon_x \epsilon_y} \\ -iq - k \delta \epsilon \sin qz & 0 & -\mu_o \omega + \frac{k^2 \epsilon d \sin^2 qz}{\epsilon_o \omega \epsilon_x \epsilon_y} & \frac{k^2 \epsilon d \sin 2qz}{2\epsilon_o \omega \epsilon_x \epsilon_y} \\ \frac{k^2 \sin 2qz}{2\mu_o \omega} & -(\epsilon_o \omega \epsilon_z - \frac{k^2 \cos^2 qz}{\mu_o \omega}) & 0 & iq \\ \epsilon_o \omega \epsilon d - \frac{k^2 \sin^2 qz}{\mu_o \omega} & -\frac{k^2 \sin 2qz}{2\mu_o \omega} & -iq + k \delta \epsilon \sin qz & k \delta \epsilon \cos qz \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Hemos usado las siguientes definiciones (ver ec.(4.18) y ec.(2.7)):

$$k = k_o \sin \theta_o; \quad (4.39)$$

$$\epsilon d(\lambda) = \frac{\epsilon_x \epsilon_z}{\epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_z \sin^2 \theta}; \quad (4.40)$$

y

$$\delta \epsilon(\lambda) = \frac{\epsilon d(\lambda) \sin 2\theta (\epsilon_x - \epsilon_z)}{2\epsilon_x \epsilon_z}. \quad (4.41)$$

Para el caso de incidencia normal, la matriz se vuelve constante respecto a  $z$  y solo depende de la deformación ( $\sigma$ ) que apliquemos sobre la goma, obtenemos entonces:

$$\mathbf{C}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & -i\mu_o\omega \\ -q & 0 & i\mu_o\omega & 0 \\ 0 & i\epsilon_o\epsilon_z\omega & 0 & q \\ -i\epsilon_o\omega\epsilon d(\sigma) & 0 & -q & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

La solución general para la ec.(4.37) es de la forma:

$$\Psi'(z) = \Psi'(0) \cdot e^{\int_0^z \mathbf{C}(z, \theta_o, \sigma) dz},$$

nótamos que al integrar la matriz  $\mathbf{C}(z, \sigma, \theta_o)$  ec.(4.38), de 0 a  $L$ , podemos obtener la matriz de transmitancia de este sistema.

#### 4.4. Matriz de transmitancia y de dispersión

En la sección anterior encontramos, que una onda en un medio dieléctrico uniaxial, se puede describir al usar la representación de Marcuwitz y la transformación de Oseen como:

$$\Psi'(L) = \mathbf{Mt} \cdot \Psi'(0) \quad (4.43)$$

donde la matriz está dada formalmente por  $\mathbf{Mt} = e^{\int_o^L \mathbf{C}(z, \theta_o, \lambda) dz}$  y es posible obtenerla a través de una integración numérica; ahora nos regresamos al sistema de referencia inicial, aplicando la transformada inversa de Oseen, partiendo de la ec.(3.12):

$$\Psi(L) = \mathbf{U} \cdot \Psi(0), \quad (4.44)$$

donde hemos nombrado:  $\mathbf{U} = \mathbf{G}(L)^T \cdot \mathbf{Mt} \cdot \mathbf{G}(0)$ , cabe mencionar que se ha demostrado [3] que la transformación inversa de Oseen deja invariante al sistema para el caso de polarización circular, por lo cual, ya que aquí tratamos ondas polarizadas circularmente, podemos prescindir de dicha transformación inversa.

La ecuación anterior permite relacionar las ondas incidentes y reflejadas, contenidas en el vector  $\Psi(0)$ , (ver sección 5.1), con las ondas transmitidas implícitas en el vector  $\Psi(L)$ .

En términos de los coeficientes de transmitancia, incidencia y reflectancia, ec.(4.12) y ec.(4.13) la ecuación anterior es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} t_R \\ t_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(z) \cdot \begin{pmatrix} a_R \\ a_L \\ r_R \\ r_L \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

donde  $\mathbf{T}$  es igual a:

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{T}_o^{-1} \cdot \mathbf{Q}^\dagger \cdot \mathbf{U}(z) \cdot \mathbf{Q}; \quad (4.46)$$

y usamos las matrices  $\mathbf{T}_o$  ec.(4.17) y  $\mathbf{Q}$  ec.(4.14) que definimos en la sección 5.1; el símbolo  $\dagger$  representa la transpuesta conjugada.

Hemos encontrado la matriz de transmitancia que relaciona los coeficientes de transmitancia con los coeficientes de incidencia y de reflectancia, sin embargo, es posible obtener, resolviendo el sistema dado por la ec.(4.45), los coeficientes de reflectancia en términos de



los de incidencia, con lo cual, podríamos expresar los coeficientes desconocidos en términos de los de incidencia; esto se logra a través de la matriz de dispersión.

La matriz de dispersión se define en términos de la matriz de transmitancia  $\mathbf{T}$  de la siguiente manera [10]:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}_2)^{-1}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \quad (4.47)$$

en donde  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  son matrices mediante las cuales se obtienen las proyecciones de la onda incidente o reflejada, es decir, cumplen (ver ec.(4.15)):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

y

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.49)$$

esta matriz, ec(4.47), permite relacionar las ondas incidentes sobre el medio, con las ondas que salen del medio Fig. 4.1, es decir, la matriz de dispersión, permite establecer la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} 2_R^b \\ 2_L^b \\ 2_R^a \\ 2_L^a \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} 1_R^a \\ 1_L^a \\ 1_R^b \\ 1_L^b \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

donde el número 1 corresponde a las ondas que inciden en el medio, 2 las ondas que salen del medio, el superíndice  $a$ , indica que las ondas se encuentran en la región  $z < 0$ , análogamente, la letra  $b$  corresponde a la región  $z > L$  y por último el subíndice  $R$  y  $L$ , corresponde a la polarización deracha o izquierda, respectivamente. Tenemos entonces,

que  $2_i^b = t_i$ ,  $2_i^a = r_i$  y  $1_i^a = a_i$  donde  $i$  es  $R$  ó  $L$ , en este caso no existen ondas que incidan en la región  $b$ , por lo cual  $1_i^b = 0$ .

En términos de la matriz de dispersión el sistema se reduce a la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} t_R \\ t_L \\ r_R \\ r_L \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_R \\ a_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

de acuerdo a lo cual, solo las dos primeras columnas de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$ , ec.(4.47), aportan información relevante ya que:

$$\begin{pmatrix} t_R \\ t_L \\ r_R \\ r_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{RR} & t_{RL} \\ t_{RL} & t_{LL} \\ r_{RR} & r_{RL} \\ r_{RL} & r_{LL} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_R \\ a_L \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

las entradas de la matriz de dispersión,  $t_{ij}$  y  $r_{ij}$  representan los coeficientes de transmisión y reflexión respectivamente, con co-polarización, en el caso en que se repiten los subíndices ( $i = j$ ) y polarización cruzada en el caso en que son distintos ( $i \neq j$ ); las transmitancias y reflectancias para el sistema, son:  $T_{ij} = |t_{ij}|^2$  y  $R_{ij} = |r_{ij}|^2$ .

## 5. RESULTADOS

En este capítulo mostramos las gráficas obtenidas para las transmitancias y reflectancias para co-polarización derecha, izquierda ó polarización híbrida en función de la longitud de onda, del ángulo de incidencia y de la deformación en el medio; los coeficientes mencionados fueron obtenidos a través de las entradas de la matriz de dispersión ec.(4.47).

Dado que la matriz de dispersión está en términos de la matriz  $\mathbf{Mt}$ , ec.(4.43), desarrollamos un programa que integra numéricamente dicha expresión; para ello usamos que:

$$\mathbf{Mt} = e^{\int_0^L \mathbf{C}(z, \theta_o, \lambda) dz} = e^{n \int_0^l \mathbf{C}(z, \theta_o, \lambda) dz} \simeq \left( e^{\sum_{i=0}^l \mathbf{C}(z(i), \theta_o, \lambda) dz} \right)^n,$$

donde  $l = \frac{p}{2}$ , Fig.(1.3), es el periodo espacial en el elastómero y  $n = \frac{L}{l}$  es el número de giros que da el vector director en el elastómero; así, en lugar de integrar numéricamente a lo largo de todo el elastómero, integramos únicamente en un periodo y aproximamos la integral con una suma infinitesimal, por último, multiplicamos el resultado por  $n$  obteniendo así una expresión para  $\mathbf{Mt}$ . Con este resultado y después de las operaciones descritas en la sección anterior, obtuvimos una expresión para la matriz de dispersión como función de la longitud de onda y del ángulo de incidencia de la onda electromagnética en el medio.

Para observar la banda de reflexión en las graficas, tomamos como referencia la reflexión a incidencia normal; basados en las ec.(3.16), ec.(3.18) y ec.(3.19), esperamos encontrar la banda de reflexión entre las longitudes de onda que van de:

$$\lambda_1 = 600.83nm \tag{5.1}$$

hasta

$$\lambda_2 = 537.40nm \quad (5.2)$$

para incidencia normal.

La Fig.5.1 y Fig.5.2 muestran a los coeficientes mencionados en función de la longitud de onda incidente y el ángulo de incidencia para una deformación dada que corresponde, según se muestra, a  $\sigma = 1$  (sin deformación),  $\sigma = \frac{(\sigma_m - 1)}{2}$ , y  $\sigma = \sigma_m$ , donde  $\sigma_m$  representa la máxima deformación. En la Fig.5.3 se grafican los coeficientes como función de la deformación y de la longitud de onda incidente, esta vez a incidencia normal. En todas las graficas mostramos únicamente una polarización cruzada ya que  $R_{RL} = R_{LR}$  y  $T_{RL} = T_{LR}$ . Finalmente en la Fig. 5.4 graficamos una proyección en dos dimensiones de la banda de reflexión y transmisión para polarización izquierda y derecha; las dos figuras superiores de esta grafica son una proyección a incidencia normal, variando la longitud de onda y el esfuerzo al que está sometido el elastómero, en las dos figuras inferiores mostramos una proyección de la banda sin deformar el elastómero, variando la longitud de onda y el ángulo de incidencia.

Observamos en las Fig.5.1 y Fig.5.2, que se presenta la reflexión circular de Bragg; la transmitancia para co-polarización derecha (la cual coincide con la hélicidad del medio), es prácticamente cero, lo cual indica que las ondas con polarización derecha serán reflejadas, es decir, la reflectancia para esta polarización Fig.5.2 es aproximadamente 1.

Para ondas con polarización híbrida también encontramos una pequeña banda de reflexión, sin embargo, la amplitud de esta banda es aproximadamente 0.1, lo cual es una amplitud muy pequeña comparada con la banda de reflexión para onda con polarización derecha.

El rango en el que las ondas se reflejan a incidencia normal se encuentra alrededor de

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , es decir, el rango de la banda se mueve en forma aproximadamente proporcional a  $\sin\omega$  lo cual es consistente con la ley de Bragg y se observa claramente en la Fig.5.4; encontramos también que la banda disminuye su ancho conforme aumenta la deformación en el elastómero, este fenómeno se aprecia perfectamente en la Fig.5.3 , donde se observa una disminución en el ancho de la banda de reflexión hasta que ésta desaparece por completo cuando el elastómero alcanza su máximo valor de deformación.

Una observación importante, es que al aumentar la deformación la banda de reflexión disminuye manteniendo fijo uno de sus extremos ec.(5.2), esto se aprecia claramente en las dos figuras superiores de la Fig. 5.4.

La desaparición de la banda de reflectancia Fig.5.3, cuando el elastómero es deformado a su máximo, se debe a que en este punto, el vector director se coloca completamente horizontal ( $\omega = \frac{\pi}{2}$  Fig.2.2) y en consecuencia el medio se vuelve homogéneo para la onda incidente.

Los parámetros que usamos para hacer los cálculos fueron los siguientes:  $r = 1.5$ ;  $L = 9.5\mu m$ ;  $\frac{p}{2} = 190nm$ ;  $\epsilon_x = 2.5$ ;  $\epsilon_z = 2$ ;  $\mu_r = 1$ .

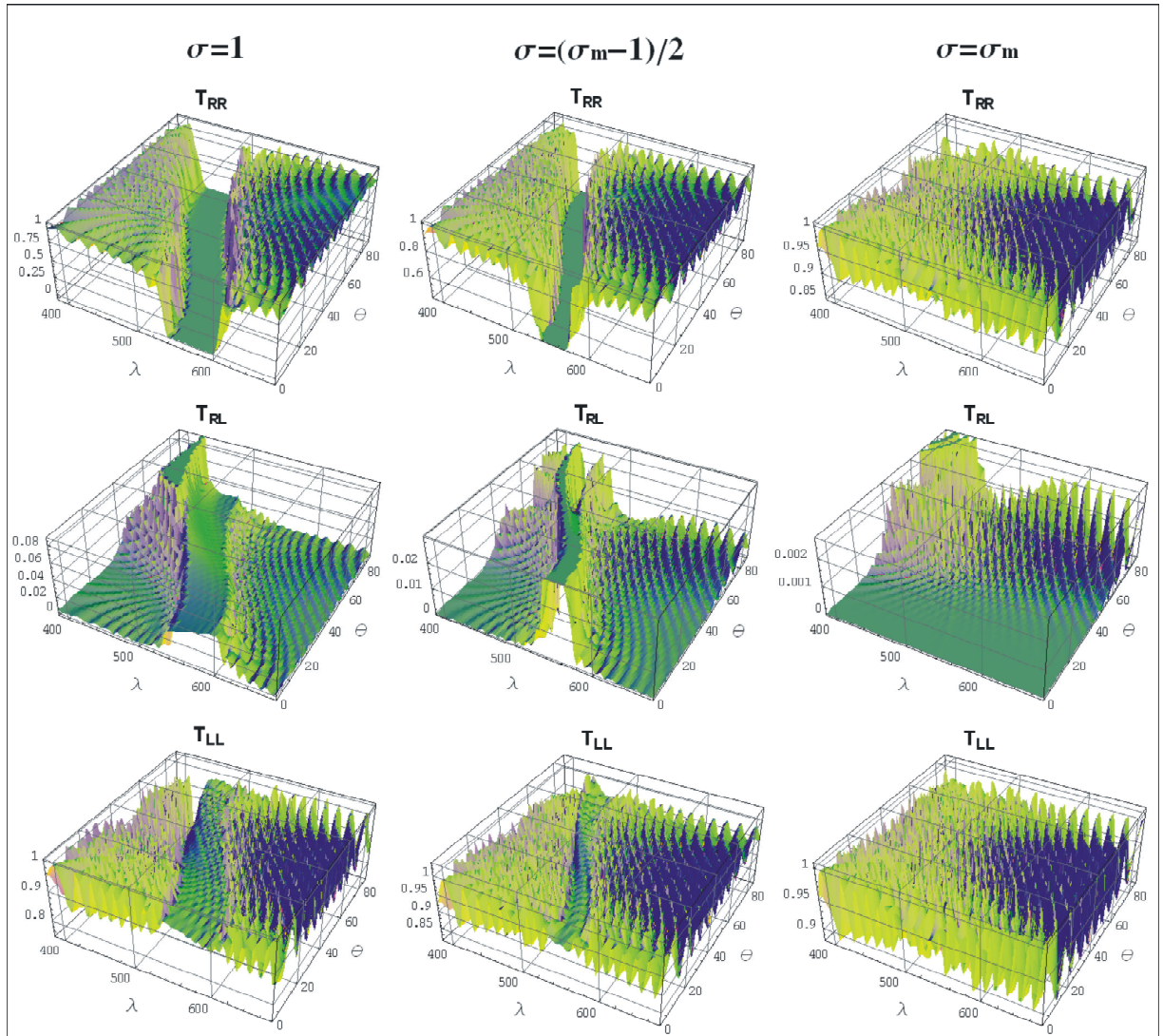


Figure 5.1: Graficamos los coeficientes de transmitancia en función de la longitud de onda (nm) y del ángulo incidente. La deformación a la que se sometió el elastómero en cada caso se muestra al inicio de la columna.

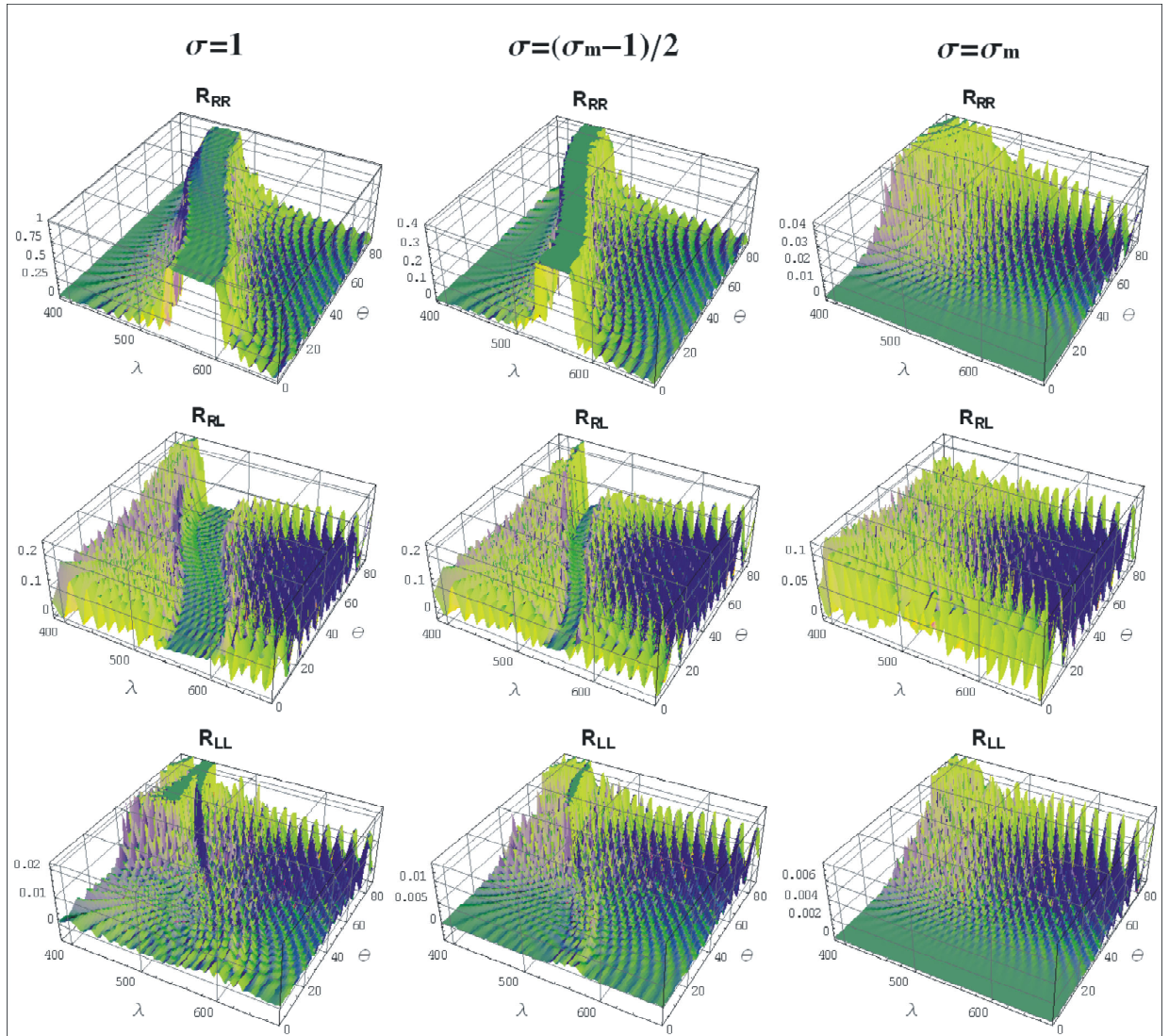


Figure 5.2: Análogamente a la Fig.5.1, graficamos las reflectancias.

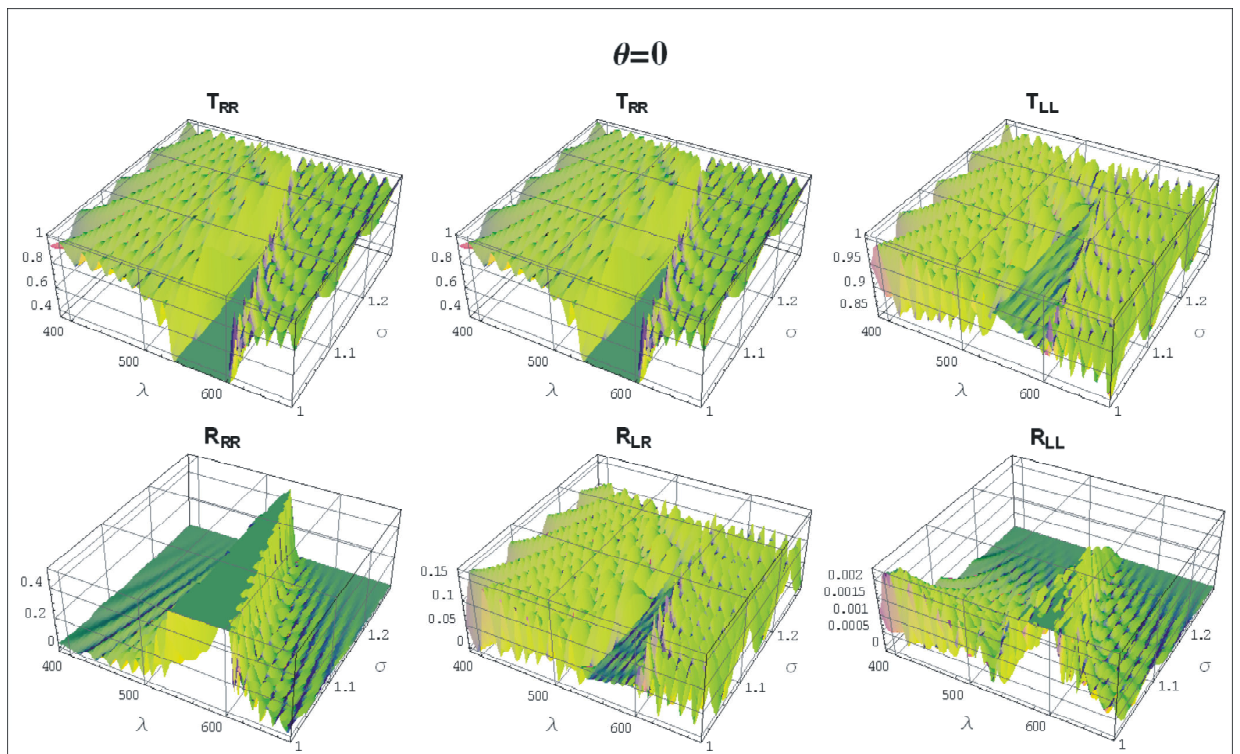


Figure 5.3: Graficamos los coeficientes de transmitancia y reflectancia a incidencia normal, como función de la longitud de onda y de la deformación en el elastómero.



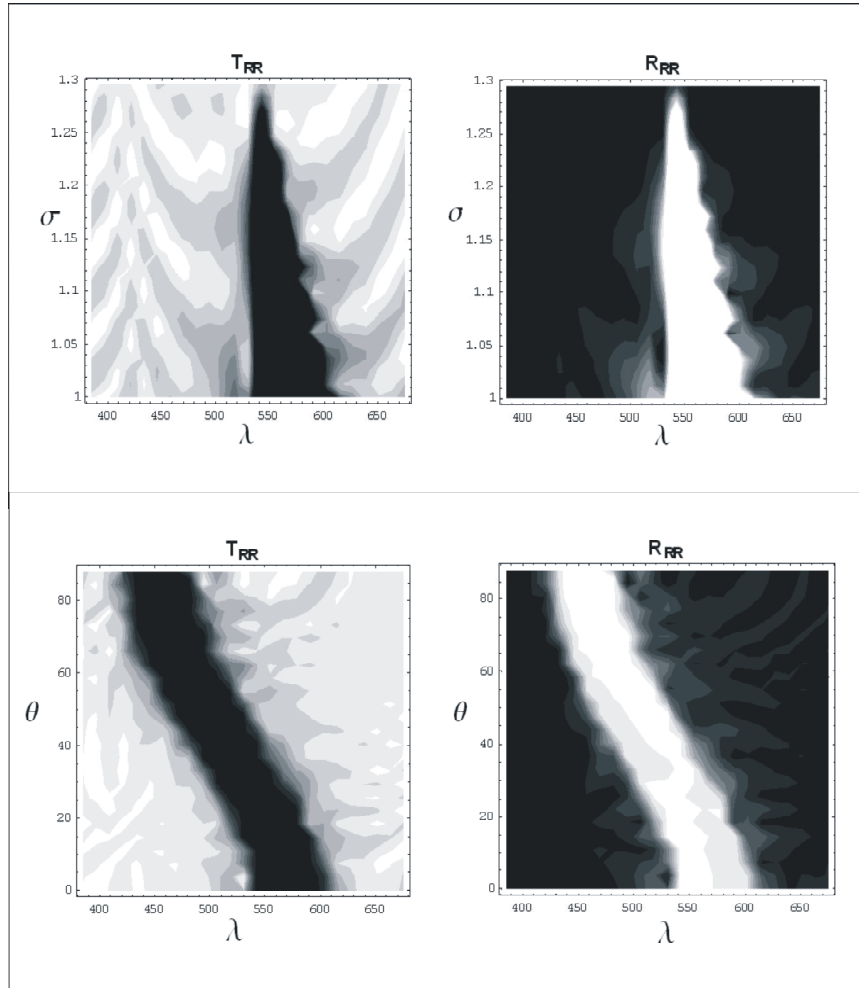


Figure 5.4: Las dos figuras superiores muestran una proyección de la bada de transmisión y reflexión para incidencia normal. En las dos figuras inferiores la proyección corresponde a un sistema que no ha sido deformado.

## 6. CONCLUSIONES

Motivados por la susceptibilidad que tienen los cristales líquidos colestéricos a la acción de campos eléctricos, decidimos estudiar un elastómero quirral sometido a esfuerzos que en contraste con un cristal líquido, constituye un sólido muy deformable [5].

Es ampliamente conocido que los cristales líquidos colestéricos, presentan el fenómeno de difracción circular de Bragg [3][4], la cual consiste en que al hacer incidir una onda electromagnética con la misma helicidad que el medio, la onda es totalmente reflejada, por otro lado, si la onda incidente posee otra helicidad, ésta puede atravesar libremente el medio. Éste fenómeno se produce únicamente para longitudes de onda que se encuentran en cierto intervalo (lo que se conoce como la banda de reflexión).

Hasta ahora, la gran mayoría de las aplicaciones tecnológicas de los cristales líquidos, están basadas en un control de la banda de reflexión a través de campos eléctricos, sin embargo, debido a la similitud entre los cristales líquidos colestéricos y los elastómeros quirales, pensamos que sería posible controlar la banda de reflexión, no con campos eléctricos como se ha hecho antes, sino aplicando un esfuerzo al medio.

El sistema que estudiamos, consistió en un elastómero quirral sometido a una extensión paralela al eje de la hélice sobre el cual hicimos incidir una onda electromagnética plana monocromática.

Primero desarrollamos la energía libre de Helmholtz que caracterizaba al elastómero a temperatura y volumen constante, luego al minimizar la energía libre respecto a los esfuerzos, encontramos cuál era la configuración espacial del vector director en el medio.

Con la información anterior obtuvimos el tensor dieléctrico del elastómero. Después, usamos la representación de Marcuwitz de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes y la transformación de Oseen que permite describir las componentes transversales del campo electromagnético en un sistema de referencia que gira con la hélice, con ello fue posible encontrar, a través de un método numérico, la matriz de dispersión que relaciona los coeficientes de reflexión y transmitancia con los coeficientes de incidencia.

Al graficar las transmitancias y las reflectancias asociadas a las polarizaciones circular derecha e izquierda que inciden y se transmiten o se reflejan, encontramos tal como esperábamos, que es posible controlar la posición y el ancho de la banda de reflexión en función del ángulo de incidencia y de la expansión en el elastómero.

La posición en que se localiza la banda de reflexión, depende del ángulo de incidencia,  $\omega$  y es aproximadamente proporcional a  $\sin\omega$ , entre mayor es  $\omega$  la banda de reflexión se mueve hacia longitudes de onda menores. Por otro lado, el ancho de la banda de reflexión depende de la deformación en el elastómero. Se puede apreciar en la Fig.5.3 que la relación entre el ancho de la banda de reflexión y la extensión en el elastómero es inversamente proporcional.

Por último, podemos decir, que observamos la reflexión circular de Bragg ya que la quiralidad del medio sólo permite pasar ondas con determinada polarización. Ésto indica que es posible seleccionar, la polarización y la frecuencia (ó el color) de las ondas reflejadas y transmitidas a través del medio variando adecuadamente los parámetros mencionados. Mas aún, la banda de reflexión de hecho se cierra para valores de la deformación superiores al valor crítico a partir del cual la configuración en el elastómero no cambia.

El fenómeno descrito anteriormente es muy interesante desde el punto de vista fundamental y por sus aplicaciones tecnológicas; en un futuro, esta característica de los polímeros colestéricos puede motivar la creación de dispositivos ópticos sensibles a defor-

maciones mecánicas.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Chandrasekhar, Liquid Crystals, (Cambridge University Press, Cambridge USA, 1997).
- [2] P.G. de Gennes, J. Prost, The Physics of Liquid Crystals, (Clarendon Press, Oxford, UK, 1993).
- [3] J. Adrian Reyes, Akhlesh Lakhtakia, Electrically Controlled Reflection and Transmission of Obliquely Incident Light by Structurally Chiral Materials, Optics Communications 266 (2006) 565-573.
- [4] J. Adrian Reyes, Akhlesh Lakhtakia, Electrically Controlled Optical Bandgap un a Structurally Chiral Material, Optics Communications 259 (2006) 164-163.
- [5] M. Warner, E. M. Terentjev, Liquid Crystals Elastomers, (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [6] Terrell L. Hill, Statical Mechanics, (Dover Publications 1987).
- [7] Marc Kac, G. E. Uhlenbeck. A. R. Hibbs, Balth, Probability and Related Topics in Physical Sciences, (Lectures in Applied Mathematics, 1976).
- [8] A. Mckelvey, Introduction to Solid State Physics, (Wiley, New York USA, 1986).
- [9] Jackson, Classical Electrodynamics, (John Wiley & Sons, 1999).
- [10] Carlos Gabriel Avendaño, Tesis Doctoral, Fenómenos ópticos no Lineales en Cristales Líquidos Quirales, Doctorado en Ciencias Físicas 2006 Universidad Nacional Autónoma de México.
- [11] C.W. Oseen, Trans. Faraday Soc. 29, 883 (1933).
- [12] F.C. Frank, Discuss. Faraday Soc. 25, 19, (1958).
- [13] Hecht, Optics, (Addison-Wesley, 1989).